Universidad de Chile

Departamento de Ciencias de la Computación

Control 1 CC40A

Semestre: Agosto 2009

Solution

Problem 1 (1.5 puntos)
Un alumno está tomando tres cursos, y es muy importante que no repruebe ninguno. Él es muy bueno en programación dinámica, y como tiene sólo cuatro horas para estudiar, quiere optimizar el tiempo a dedicar a cada curso de manera que minimice la probabilidad de reprobarlos todos. La siguiente tabla muestra la probabilidad de reprobar cada curso en función del número de horas que el alumno le dedique a ese tópico.

Horas M(h,c)	`Algoritmos`	`Bases de Datos`	`Ingenería de Software`
0	0.9	0.75	0.8
1	0.7	0.7	0.7
2	0.6	0.67	0.65
3	0.55	0.65	0.62
4	0.5	0.62	0.6

1. Si la probabilidad de reprobar `Algoritmos` es p_1, de reprobar `Bases de Datos` es p_2 y de reprobar `Ingenería de Software` es p_3, ¿cuál es la probabilidad de reprobar todos?

   ————————begin solution————————

   The probability of failing all of them is $p_1 \times p_2 \times p_3$.

   ————————end solution————————

2. Sea $C(c, h)$ la probabilidad de reprobar todos los tópicos en $\{1, \ldots, c\}$ (c tópicos en total) si el estudiante le dedica una combinación óptima de tiempo, usando h horas en total. ¿Cómo se puede escribir $C(c, h)$ recursivamente?

   ————————begin solution————————

   The topic c can be studied for any time t between 0 and h hours. Once decided how much time to study topic c, the optimal way to study the topics $\{1, \ldots, c-1\}$ in the remaining time $h - t$ is define inductively:

   $$C(c, h) = \min_{0 \le t \le h} \{C(c-1, h-t) \times M[t, c]\}$$

   ————————end solution————————

3. Complete los tres espacios vacíos en la tabla siguiente, calculando $C(c, h)$.

   ————————begin solution————————

C(i,j)	0	1	...
`Algoritmos`	.9	.7	...
`Bases de Datos`	$.9 * .75 = .68$	$\min\{.9 \times .7, .7 \times .75\} = \min\{.63, .525\} = .525$	...
`Ingenería de Software`	$.68 * .8 = .54$	$\min\{.68 \times .7, .525 \times .8\} = \min\{.476, .42\} = .42$	...

$C(i,j)$	0	1	2	3	4
`Algoritmos`	0.9	0.7	0.6	0.55	**.5**
`Bases de Datos`	0.68	0.525	0.45	0.41	**.375**
`Ingenería de Software`	0.54	0.42	0.36	0.314	**287**

————————————end solution————————————

4. La tabla siguiente contiene las valores correspondiente a las elecciones para cada aplicación de la recurrencia.
   ¿Cómo se puede utilizar esta información para deducir la distribución de tiempo óptima?
   ¿Cuál es esta distribución?

————————————begin solution————————————

$t(i,j)$	0	1	2	3	4
`Algoritmos`	0	1	2	**3**	4
`Bases de Datos`	0	0	0	**0**	0
`Ingenería de Software`	0	0	0	1	**1**

Based on this table, the optimal distribution of study time involves 3 hours of `Ingenería de Software`, 1 hour of `Algoritmos` and 0 hours of `Bases de Datos`.

The optimal solution is always represented by the cell at the bottom right. The value in this cell indicates how many hours the topic corresponding to this row must be studied, and how many columns left is the next value to consider in the row above, from which one can iterate.

————————————end solution————————————

Problem 2 (1.5 puntos)
La asociación local para la protección de la naturaleza organizó la recolección de 16 muestras de agua de 16 diferentes lagos, uno de los cuales está contaminado. Es posible comprobar en dos semanas, utilizando una incubadora, si un pequeña cantidad de agua está contaminada. Desafortunadamente, la asociación puede utilizar solamente cuatros incubadoras disponibles en la universidad.

Ayude la asociación y explique un procedimiento para analizar las 16 muestras en dos semanas, suponiendo que sólo una muestra contiene la bacteria, y aprovechando el hecho de que una incubadora es capaz de detectar una cantidad muy pequeña de bacterias, como por ejemplo en una mezcla de muestras. Su explicación puede ser muy corta, pero necesita aclarar los siguientes puntos:

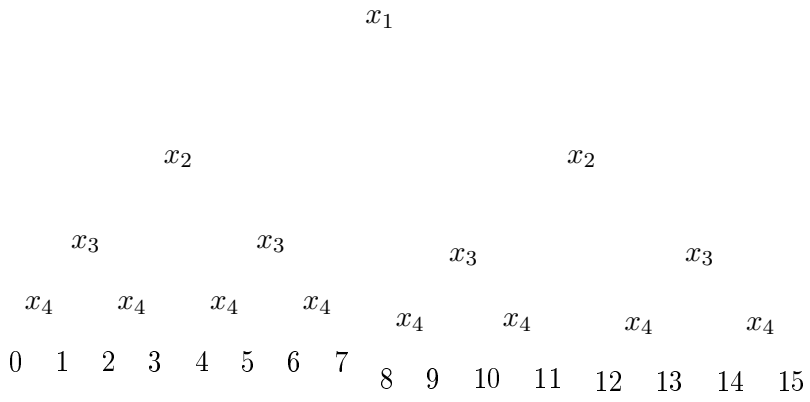
1. qué pruebas son realizadas;
2. cómo analizar los resultados de dichas pruebas;
3. pruebe que el problema puede ser resuelto en dos semanas;
4. ilustre su solución con un diagrama.

——————begin solution——————

The solution is based on putting in the incubator a combination of several samples at once. We give it for general N, just take $N = 16$ for the solution to this particular problem.

1. Prepare some mixes, each containing water from a number of samples as follows: Number the samples from 0 to $N-1$; write these numbers in binary, and look at the bits of the binary encodings from left to right; Potion p contains some water from sample b if and only if the pth bit in the binary encoding for sample b is 1. This set of mixes is the set of tests to be run.
2. Note that with $\lceil \lg N \rceil$ bits, you can encode $2^{\lceil lgN \rceil} \geq N$ different numbers in binary. The number of mixes needed is the number of bits needed, so the number of tests is $n = \lceil \lg N \rceil$.
3. To determine which sample contains the germ from the test results, define $(x_i)_{i \leq n}$ such that $x_i = 1$ if the mix i has a positive test result, and $x_i = 0$ otherwise. The values of $(x_i)_{i \leq n}$ form a number x on n bits, and this number (between 0 and $N-1$) is the number of the contaminated sample.
4. For example, in the case where one sample contains the germ among $N = 16$ samples, the analysis of only $n = 4$ mixes composed as described in the array below permits us to find the sample, as shown in the tree below. Note that the bits are arranged from the heavier 1 to the lighter n (from the left to the right): this is not important as long as the same convention is applied for encoding and decoding.

Mix 1 is a mix of the water samples	8 to 15;
mix 2 is a mix of the water samples	4 to 7 and 12 to 15;
mix 3 is a mix of the water samples	$\{2, 3, 6, 7, 10, 11, 14, 15\}$;
mix 4 is a mix of the water samples	corresponding to odd numbers.

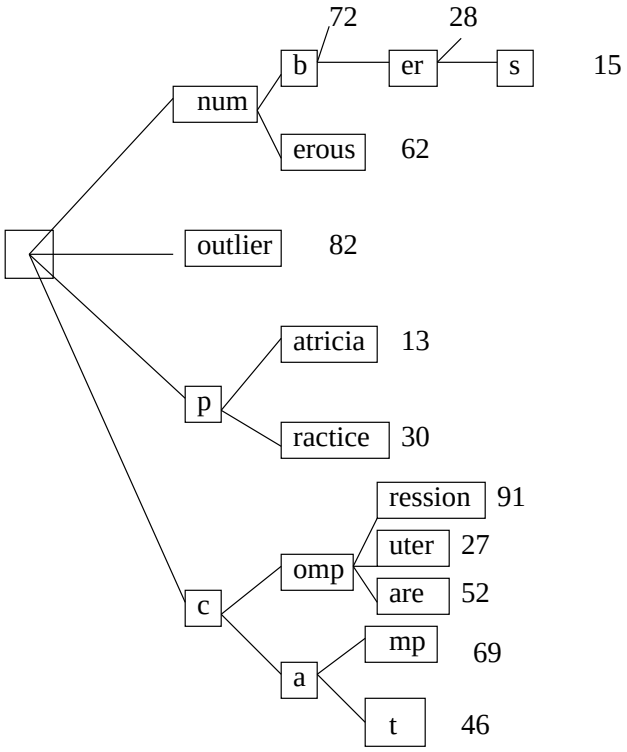


——————————end solution——————————

Problem 3 (1.5 puntos)
El siguiente índice asocia un número a cada cadena de símbolos. Dibuja el árbol de sufijos correspondiente con el cual se puede encontrar el número asociado a una cadena w o a todas las cadenas de prefijo w.

- numbers - 15
- numerous - 62
- camp - 69
- compression - 91
- cat - 46
- practice - 30
- patricia - 13
- computer - 27
- compare - 52
- number - 28
- numb - 72
- outlier - 82

————————begin solution————————



————————end solution————————

Problem 4 (1.5 puntos)

1. Simplifica las siguientes fórmulas: (justifique su respuesta.)

   - $\sum_{i=1}^{n} i$

   ————————begin solution————————

   Suponga que n es par, y $k = n/2$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} i &= \sum_{i=1}^{k} i + \sum_{i=k+1}^{n} i \\ &= \sum_{i=1}^{k} i + \sum_{i=1}^{k} (n - i + 1) \\ &= \sum_{i=1}^{k} (i + n - i + 1) \\ &= k(n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2}\end{aligned}$$

   Suponga que n es impar, y $n = 2k + 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} i &= \sum_{i=1}^{2k} i + 2k + 1 \\ &= \frac{2k(2k+1)}{2} + 2k + 1 \\ &= \frac{(n-1)n}{2} + n \\ &= \frac{(n-1)n + 2n}{2} \\ &= \frac{(n+1)n}{2}\end{aligned}$$

   ————————end solution————————

   - $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i}$

   ————————begin solution————————

   Considera que $\sum_{i=1}^{n} 1/2^i + 1/2^n = 1$. Entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} 1/2^i = 1 - \frac{1}{2^n}$$

   ————————end solution————————

- $\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i}$

————————begin solution————————

Reescriba la suma como un triangulo, donde cada linea es una suma de la forma $\sum_{i=1}^{n} 1/2^i$. Resulta que:

$$\sum_{i=1}^{n} i/2^i \quad = \quad 2 - \frac{1}{2^n}$$

————————end solution————————

2. Da el algoritmo para "Bucket Sort".

————————begin solution————————

```
1. for j=1 to \sigma do C[j] <- 0
2. for i=1 to n do C[A[i]]++
3. P[1] <- 1
4. for j<- 2 to \sigma do
   - P[j] <- P[j-1] + C[j-1]
5. for i<-1 to n
   - B[P[A[i]]++] <- A[i]
```

Este algoritmo es particularamente practica para ordenar llaves associadas con objetos, donde dos llaves pueden ser asociadas con algunas valors distintas. Nota que el ordemaniemto es *stable*.

————————end solution————————

3. Describa la estructura de datos de SkipList, y la complejidad de su operaciones.

————————begin solution————————

- una skip-list de altura h para un dictionario D de n elementos es una familia de lists $S_0, \ldots, S_h$ y un puntero al primero elemento de S_h, tal que
- S_0 contiene D;
- cada S_i contiene un subcunjunto aleatorio de S_{i-1} (en promedio la mitad)
- se puede navegar de la izquierda a la derecha, y de la cima hast abajo.
- se puede ver como n tores de altura aleatorizada, conectadas horizontalemente con punteros de la izquierda a la derecha.
- la informacion del dictionario estan solamente en S_0 (no se duplica)
- Las operaciones "Search", "Insert" y "Delete" estan suportadas en tiempo $O(\lg n)$ en promedio **sobre el aleatorio de la estructura de dato**.

————————end solution————————