Clase 3. Respuestas de los ejercicios. Análisis Matemático

EJERCICIOS RESUELTOS

1. En cada uno de los siguientes casos diga si se trata de una sucesión infinitamente grande, infinitesimal, acotada o no acotada:

   a) $\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right\}$

   b) $\left\{\frac{1}{n^p}\right\}, \quad p>0$

   c) $\{(-1)^n(2n+1)\}$

   d) $x_n = \begin{cases} n, & n \leq 100 \\ \frac{10}{n}, & n > 100 \end{cases}$

   e) $x_n = \begin{cases} k, & n = 2^k \\ 0, & n \neq 2^k \end{cases}$

RESPUESTA

a) $\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \ldots\right\}$

x_n es infinitesimal $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists Ne \in \mathbb{N} : \forall n \geq Ne \Rightarrow |x_n| < \varepsilon$

$$\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

Por propiedad arquimediana $\forall \varepsilon > 0, \exists Ne \in \mathbb{N} : \frac{1}{\varepsilon} < Ne \Rightarrow \frac{1}{Ne} < \varepsilon$

como $n \geq Ne \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{Ne} < \varepsilon$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$\{x_n\}$ es acotada porque toda sucesión infinitesimal es acotada.

b) $\left\{\frac{1}{n^p}\right\}$ $p>0$

El producto de un número finito de sucesiones infinitesimales es infinitesimal

$\left\{\frac{1}{n^p}\right\} = \left\{\frac{1}{n}\right\} * \left\{\frac{1}{n}\right\} * \ldots * \left\{\frac{1}{n}\right\}$ (p veces)

Como $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ es infinitesimal $\Rightarrow \left\{\frac{1}{n^p}\right\}$ infinitesimal

$\{\frac{1}{n^p}\}$ es acotada porque toda sucesión infinitesimal es acotada.

c) $\{(-1)^n(2n+1)\} = \{-3,5,-7,9,-11,13,...\}$

x_n es infinitamente grande $\iff \forall\varepsilon > 0, \exists Ne \in \mathbb{N} : \forall n \geq Ne \Rightarrow |x_n| > \varepsilon$

$$|(-1)^n(2n+1)| > \varepsilon$$

$$2n+1 > \varepsilon$$

Por propiedad arquimediana: $\forall \frac{\varepsilon-1}{2}, \exists Ne \in \mathbb{N} : \frac{\varepsilon-1}{2} < Ne$

$$\varepsilon - 1 < 2Ne$$

$$\varepsilon < 2Ne + 1$$

Si $n \geq Ne$ $2n+1 \geq 2Ne+1 > \varepsilon \Rightarrow 2n+1 > \varepsilon$

d) $\{\frac{10}{n}\}$ infinitesimal porque $\{10\} * \{\frac{1}{n}\}$ es acotada * infinitesimal

$\Rightarrow \varepsilon > 0, \exists Ne \in \mathbb{N} : \forall n \geq Ne \Rightarrow |\frac{10}{n}| < \varepsilon$

Entonces x_n es infinitesimal porque

: $\forall\varepsilon > 0, \exists Ne_2 = 100 + Ne : \forall n \geq Ne_2 \Rightarrow |x_n| < \varepsilon \Rightarrow |\frac{10}{n}| < \varepsilon$

e) $\{x_n\} = \{0,1,0,2,0,0,0,3,0,0,0,0, \dots\}$

- Demostremos que $\{x_n\}$ no es acotada superiormente

$\{x_n\}$ no acotada superiormente $\Leftrightarrow \forall A > 0, \exists n \in \mathbb{N} : x_n > A$

Por propiedad arquimediana $\forall A > 0, \exists K \in \mathbb{N}: K > A$

$$2^K > K > A$$

Si tomamos como $n = 2^K$, entonces $\forall A > 0, \exists n \in \mathbb{N}, n = 2^K : x_n = K > A$

- Demostremos que $\{x_n\}$ no es infinitamente grande

Por la propiedad arquimediana $\forall A > 0, \exists K_1 \in \mathbb{N}: K_1 > A$

Si K_1 es una ponencia de 2, tomemos $n = K_1 + 1$, si no tomemos $n = k_1$

Entonces $\forall A > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}: x_n = 0 < A$

De ahí que $\{x_n\}$ no es infinitamente grande

2. Investigue la acotación de las sucesiones siguientes. Halle, si existen, $\inf x_n, \sup x_n, \max x_n, \min x_n$:

a) $\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right\}$

b) $x_n = \begin{cases} (-1)^n + \frac{1}{2n}, & n \quad \text{impar} \\ (-1)^n n^2, & n \quad \text{par} \end{cases}$

RESPUESTA

a) $\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right\} = \left\{1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{16}, \frac{1}{25}, -\frac{1}{36}, \dots\right\}$

$\sup \{x_n\} = \max \{x_n\} = 1$

i) 1 es cota superior de $\{x_n\} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, x_n \leq 1$

Si n es par $x_n = -\frac{1}{n^2} < 0 < 1$

Si n es impar $x_n = \frac{1}{n^2} \leq 1$

$n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}$

$n^2 \geq 1^2$

$\frac{1}{n^2} \leq 1$

ii) $\sup \{x_n\} = 1 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in \{x_n\}: x_\varepsilon > 1 - \varepsilon$

$x_\varepsilon = 1 \in \{x_n\}$

iii) $\max \{x_n\} = 1$ porque $1 \in \{x_n\}$ si $n = 1$

$\inf \{x_n\} = \min \{x_n\} = -\frac{1}{4}$

i) $-\frac{1}{4}$ es cota inferior de $\{x_n\} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, x_n \geq -\frac{1}{4}$

Si n es par $x_n = -\frac{1}{n^2} \geq -\frac{1}{4}$

$n \geq 2, \forall n \in \mathbb{N}, n\ par$

$n^2 \geq 4$

$-n^2 \leq -4$

$-\frac{1}{n^2} \geq -\frac{1}{4}$

Si n es impar $x_n = \frac{1}{n^2} > 0 > -\frac{1}{4}$

ii) $\inf \{x_n\} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in \{x_n\}: x_\varepsilon < -\frac{1}{4} + \varepsilon$

$x_\varepsilon = -\frac{1}{4} \in \{x_n\}$

iii) $\min \{x_n\} = -\frac{1}{4}$ porque $-\frac{1}{4} \in \{x_n\}$ si $n = 2$

b)

- $\{x_n\}$ no está acotada superiormente

$\forall A > 0, \exists n \in \mathbb{N}: x_n > A$

Por propiedad arquimediana $\forall A > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}: n_1 > A$

Si n_1 par $\Rightarrow n^* = n_1$

Si n_1 impar $\Rightarrow n^* = n_1 + 1$

$n^* > A\ y\ n^*$es par $\Rightarrow x_n = (n^*)^2 > n^* > A$

(Queda pendiente demostrar que $n^2 > n, \forall n \in \mathbb{N}$)

$\therefore \forall A > 0, \exists n^* \in \mathbb{N}$ par : $x_n = (n^*)^2 > A$

- $\{x_n\}$ está acotada inferiormente

$\inf \{x_n\} = -1$

i) -1 es cota inferior de $\{x_n\} \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, x_n \geq -1$

Si n es par $x_n = n^2 > 0 > -1$

Si n es impar $x_n = -1 + \frac{1}{2n} > -1$ porque $\frac{1}{2n} > 0$

ii) $\inf \{x_n\} = -1 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in \{x_n\}: x_\varepsilon < -1 + \varepsilon$

Propiedad arquimediana $\forall \frac{1}{2\varepsilon} > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}: \frac{1}{2\varepsilon} < N_\varepsilon$

$\frac{1}{2N_\varepsilon} < \varepsilon$

$\frac{1}{2N_\varepsilon} - 1 < \varepsilon - 1$

Si N_ε impar entonces $\frac{1}{2N_\varepsilon} - 1 \in \{x_n\}$

Si N_ε par $N_\varepsilon^* = N_\varepsilon + 1$ impar $\frac{1}{2N_\varepsilon^*} - 1 \in \{x_n\}$

$\frac{1}{2N_\varepsilon^*} - 1 < \frac{1}{2N_\varepsilon} - 1 < -1 + \varepsilon$

iii) $\nexists \min \{x_n\}$ porque $-1 \notin \{x_n\}$

3. Demuestre que las siguientes sucesiones son acotadas superiormente:

a) $x_n = \frac{1}{3+1} + \frac{1}{3^2+2} + \ldots + \frac{1}{3^n+n}$

b) $x_1 = \sqrt{2}$

$x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} = \sqrt{2+x_1}$

$\ldots$

$$x_n = \sqrt{\underbrace{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}_{n \text{ veces}}} = \sqrt{2+x_{n-1}}.$$

RESPUESTA

a) $x_n = \frac{1}{3+1}, \frac{1}{3^2+2} + \ldots. + \frac{1}{3^n+n}$

$$\frac{1}{3+1} + \frac{1}{3^2+2} + \ldots. + \frac{1}{3^n+n} < \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^n} < \frac{1}{2}$$

$$Sn = \frac{\frac{1}{3}(1-(\frac{1}{3})^n)}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3^n}) < \frac{1}{2}$$

pq $0 < \frac{1}{3^n} < 1$

$\{x_n\}$ es acotada superiormente

b) Demostremos por inducción que $\{x_n\}$ está acotada superiormente.

$x_n < 2 \,, \forall n \in \mathbb{N}$

Caso base $x_1 = \sqrt{2} < 2$
Hipótesis $x_k < 2$
Tesis $x_{k+1} < 2$
Partiendo de la hipótesis

$$x_k < 2 \Leftrightarrow x_k + 2 < 2 + 2 \Leftrightarrow \sqrt{x_k + 2} < \sqrt{4} \Leftrightarrow \sqrt{x_k + 2} < 2 \Leftrightarrow x_{k+1} < 2$$

4. Investigue la monotonía de las sucesiones siguientes:

a) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$

b) $\left\{\frac{n^2}{1+n^2}\right\}$

c) $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{8}, \frac{4}{16}, \ldots$

d) $\left\{\frac{n^n}{n!}\right\}$

e) Inciso a, ejercicio anterior

f) Inciso b, ejercicio anterior

RESPUESTA

a) Creciente

$$x_n \leq x_{n+1}$$

$$\frac{n}{n+1} \leq \frac{n+1}{n+2}$$

$$n(n+2) \leq (n+1)^2$$

$$n^2 + 2n \leq n^2 + 2n + 1$$

b) Creciente

$\frac{n^2}{1+n^2} \leq \frac{(n+1)^2}{1+(n+1^2)}$

$n^2(1+(n+1)^2) \leq (n+1)^2(1+n^2)$

$n^2 + n^2(n+1)^2 \leq (n+1)^2 + n(n+1)^2$

$n^2 \leq n^2 + 2n + 1$

c) Decreciente

$\frac{n}{2^n} \geq \frac{n+1}{2^{n+1}}$

$2n \geq n+1$

$2n - n \geq 1$

$n \geq 1$

d) Creciente

$x_{n \leq x_{n+1}}$

$\frac{n^n}{n!} \leq \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$

$n^n \leq (n+1)^n$

$n^n \leq (n+1)^n$

$\frac{n}{n+1}^n \leq 1$

$\frac{n}{n+1}^n \leq 1^n$

$\frac{n}{n+1} \leq 1$

$n \leq n+1$

$0 < 1$

e) $x_n = \frac{1}{3+1} + \frac{1}{3^2+2} + ... + \frac{1}{3^n+n}$

$x_{n+1} = \frac{1}{3+1} + \frac{1}{3^2+2} + ... + \frac{1}{3^n+n} + \frac{1}{3^{n+1}+n+1}$

$x_n \leq x^{n+1}$

$0 \leq x_{n+1} - x_n$

$0 \leq \frac{1}{3^{n+1}+n+1}$ Como $3^{n+1} + n + 1 > 0$

$\therefore x_n$ monótona creciente

f) $x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}} > x_1 = \sqrt{2}$

Supongamos que $x_k > x_{k-1}$

Demostremos que $x_{k+1} > x_k$

$x_k > x_{k-1}$

$x_k + 2 > x_{k-1} + 2$

$\sqrt{x_k+2} > \sqrt{x_{k-1}+2}$

$x_{k+1} > x_k$

$\therefore x_n$ monótona creciente

5. Demuestre que si $\lim a_n = l$, entonces $\lim |a_n| = |l|$. Demuestre con un ejemplo que el recíproco es falso .

RESPUESTA

$\lim a_n = l \quad \Leftrightarrow \quad \{a_n - l\}$ es infinitesimal $\quad \Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0, \exists\, N_e \in \mathbb{N} : n \geq N_e \Rightarrow |a_n - l| < \epsilon$

$|a_n - l| \geq \Big||a_n| - |l|\Big|$ (demostrado CP# 1)

$\Rightarrow \Big||a_n| - |l|\Big| \leq |a_n - l| < \epsilon$

$\Rightarrow \Big||a_n| - |l|\Big| < \epsilon$

$\Rightarrow \{|a_n| - |l|\}$ es infinitesimal porque $\forall \epsilon > 0, \exists N_e \in \mathbb{N} : n \geq N_e \Rightarrow \Big||a_n| - |l|\Big| < \epsilon$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = |l|$

Ra-/ $\{a_n\} = \{(-1)^n\}$ diverge
$\{|a_n|\} = \{1\}$ converge

6. Demuestre, usando la definición, que las sucesiones siguientes convergen a los valores indicados en cada caso:

$a)\ x_n = \frac{6n-2}{8n+1}, \quad l = \frac{3}{4}$

$b)\ x_n = \frac{n^2+2n-2}{3n^2+n-1}, \quad l = \frac{1}{3}$

RESPUESTA

a) $\lim \frac{(6n-2)}{8n+1} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}: \forall n \geq N_\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{6n-2}{8n+1} - \frac{3}{4}\right| < \varepsilon$

$\left|\frac{6n-2}{8n+1} - \frac{3}{4}\right| = \left|\frac{24n-8-24n-3}{4(8n+1)}\right| = \left|\frac{-11}{4(8n+1)}\right| = \frac{11}{4(8n+1)} < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \frac{11}{4\varepsilon} < (8n+1) \Leftrightarrow \frac{11}{4\varepsilon} - 1 < 8n \Leftrightarrow \frac{11-4\varepsilon}{32\varepsilon} < n$

Sea $N_\varepsilon = \left[\frac{11-4\varepsilon}{32\varepsilon}\right] + 1 > \frac{11-4\varepsilon}{32\varepsilon}$

$\Rightarrow: \forall n \geq N_\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{6n-2}{8n+1} - \frac{3}{4}\right| < \varepsilon$

b) $\lim \frac{n^2+2n-2}{3n^2+n-1} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}: \forall n \geq N_\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{n^2+2n-2}{3n^2+n-1} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon$

$\left|\frac{n^2+2n-2}{3n^2+n-1} - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{3n^2+6n-6-3n^2-n+1}{3(3n^2+n-1)}\right| = \left|\frac{5n-5}{3(3n^2+n-1)}\right| = \frac{5}{3}\left|\frac{n-1}{(3n^2+n-1)}\right|$

$$\frac{5}{3}\left|\frac{n-1}{(3n^2+n-1)}\right| \leq \frac{5}{3}\frac{(n-1)}{3n^2} \leq \frac{5}{3}\frac{n}{3n^2} = \frac{5}{9n} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{5}{9\varepsilon} < n$$

$$N_\varepsilon = \left[\frac{5}{9\varepsilon}\right] + 1 > \frac{5}{9\varepsilon}$$
$$\Rightarrow: \forall n \geq N_\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{n^2+2n-2}{3n^2+n-1} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon$$

Estudio Independiente: ¿Cómo demostrar que $\frac{5}{3}\left|\frac{n-1}{(3n^2+n-1)}\right| \leq \frac{5}{3}\frac{n}{3n^2}$?

c)

7. Calcule los límites siguientes:

1. $\lim \frac{3n^2+1}{5n^2+1}$
2. $\lim \frac{1000n^3+3n^2}{0{,}001n^4-100n^3+1}$
3. $\lim \left(\frac{n^2}{n+1} - \frac{n^2+1}{n}\right)$
4. $\lim \frac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}$
5. $\lim \left(\sqrt{2n^2+n} - \sqrt{2n^2+5}\right)$
6. $\lim \frac{n^3-5}{2n^4+n-3}\cos n$
7. $\lim \frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^3+n}+n}$
8. $\lim \frac{4^n+n^2 2^n-1}{n^4 4^n+n^2}$
9. $\lim \frac{1+2+\ldots+n}{n^2}$
10. $\lim \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)$

RESPUESTA

1. $\lim \frac{3n^2+1}{5n^2+1}$

$$\Rightarrow \lim \frac{n^2(3+\frac{1}{n^2})}{n^2(5+\frac{1}{n^2})} = \frac{3}{5}$$

2. $\lim \frac{1000n^3+3n^2}{0{,}001n^4-100n^3+1}$

$$\Rightarrow \lim \frac{n^3(1000+\frac{3}{n})}{n^4(0{,}001-\frac{100}{n}+\frac{1}{n^4})} = 0$$

3. $\lim(\frac{n^2}{n+1} - \frac{n^2+1}{n})$

$$\Rightarrow \lim \frac{n^3-(n+1)(n^2*1)}{n(n+1)}$$

$$\Rightarrow \lim \frac{-n^2-n-1}{n^2+n}$$

$$\Rightarrow \lim \frac{n^2(-1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2})}{n^2(1+\frac{1}{n})} = -1$$

4. $\lim \frac{3^n+(-2)^n}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}$

$$\Rightarrow \lim \frac{3^n+(-2)^n}{3^n3+(-2)^{n+1}}$$

$$\Rightarrow \lim \frac{3^n(1+\frac{(-2)^n}{3^n})}{3^n(3+\frac{(-2)^n}{3^n}+\frac{1}{3^n})} = \frac{1}{3}$$

5. $\lim(\sqrt{2n^2+n}-\sqrt{2n^2+5})$

$\Rightarrow \lim(\sqrt{2n^2+n}-\sqrt{2n^2+5} * \frac{\sqrt{2n^2+n}+\sqrt{2n^2+5}}{\sqrt{2n^2+n}+\sqrt{2n^2+5}})$

$\Rightarrow \lim \frac{2n^2+n-2n^2-5}{\sqrt{2n^2+n}+\sqrt{2n^2+5}}$

$\Rightarrow \lim \frac{n-5}{\sqrt{2n^2+n}+\sqrt{2n^2+5}}$

$\Rightarrow \lim \frac{n-5}{\sqrt{n^2(2+\frac{1}{n})}+\sqrt{n^2(2+\frac{5}{n^2})}}$

$\Rightarrow \lim \frac{n-5}{n\sqrt{2+\frac{1}{n}}+n\sqrt{2+\frac{5}{n^2}}}$

$\Rightarrow \lim \frac{n(1-\frac{5}{n})}{n(\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\sqrt{2+\frac{5}{n^2}})} = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

6. $\lim \frac{n^3-5}{2n^4+n-3}\cos n$

$\Rightarrow \lim \frac{n^3(1+\frac{5}{n^3})}{n^4(2+\frac{1}{n^3}-\frac{3}{n^4})}\cos n = 0$

7. $\lim \frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^3+n}+n}$

$$\Rightarrow \lim \frac{\sqrt{n^2(1+\frac{1}{n^2})}+\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^3(1+\frac{1}{n^2})}+n}$$

$$\Rightarrow \lim \frac{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+n^{\frac{1}{2}}}{n\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}+n}$$

$$\Rightarrow \lim \frac{n(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+n^{\frac{-1}{2}})}{n(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1)}$$

$$\Rightarrow \lim \frac{n(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\frac{1}{\sqrt{n}})}{n(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1)} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}$$

8. $\lim \frac{4^n+n^2 2^n-1}{n^4 4^n+n^2}$

$$\Rightarrow \lim \frac{n^4 4^n(\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^2 2^n}-\frac{1}{n^4 4^n})}{n^4 4^n(1+\frac{1}{n^2 4^n})} = 0$$

9. $\lim \frac{1+2+3+...+n}{n^2}$

$$\Rightarrow \lim \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}$$

$$\Rightarrow \lim \frac{n(n+1)}{2n^2}$$

$$\Rightarrow \lim \frac{n^2(1+\frac{1}{n^2})}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

10. $\lim(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^n})$

$$\Rightarrow \lim(\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$