Clase 4. Respuestas de los ejercicios. Análisis Matemático

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Demuestre que es convergente la sucesión cuyo término general es:

$$x_n = \frac{1}{3+1} + \frac{1}{3^2+2} + \ldots + \frac{1}{3^n+n}$$

RESPUESTA

$x_n = \frac{1}{3+1}, \frac{1}{3^2+2} + ... + \frac{1}{3^n+n}$

$\frac{1}{3+1} + \frac{1}{3^2+2} + ... + \frac{1}{3^n+n} < \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{3^n} < \frac{1}{2}$

$Sn = \frac{\frac{1}{3}(1-(\frac{1}{3})^n)}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3^n}) < \frac{1}{2}$

pq $0 < \frac{1}{3^n} < 1$

$\{x_n\}$ es acotada superiormente

$x_{n+1} = \frac{1}{3+1} + \frac{1}{3^2+2} + ... + \frac{1}{3^n+n} + \frac{1}{3^{n+1}+n+1}$

$x_n \leq x^{n+1}$

$0 \leq x_{n+1} - x_n$

$0 \leq \frac{1}{3^{n+1}+n+1}$ Como $3^{n+1} + n + 1 > 0$

$\therefore x_n$ monótona creciente

Como $\{x_n\}$ es creciente y acotada superiormente entonces es convergente y

$$\lim x_n = \sup x_n$$

2. Dada la sucesión recurrente siguiente:

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{2} \\ x_2 &= \sqrt{2+\sqrt{2}} = \sqrt{2+x_1} \\ \ldots \\ x_n &= \sqrt{2+x_{n-1}}. \end{aligned}$$

a) Demuestre que $\{x_n\}$ es convergente.

b) Halle su límite.

c) Halle, si existen, $\sup\{x_n\}$, $\inf\{x_n\}$, $\max\{x_n\}$, $\min\{x_n\}$.

RESPUESTA

a) Es convergente si es acotada superiormente y es monótona creciente.
Es monótona creciente si $x_n > x_{n-1}$. Tenemos que

$$x_1 = \sqrt{2} \quad \text{y} \quad x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$$
$$\Rightarrow x_1 > x_2$$

Supongamos que se cumple para el caso k:

$$x_k > x_{k-1} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2+x_{k-1}} > \sqrt{2+x_{k-2}}$$

Demostremos que se cumple para el caso $k+1$:

$$x_{k+1} > x_k \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2+x_k} > \sqrt{2+x_{k-1}}$$

Como $x_k > x_{k-1}$ entonces:

$$2+x_k > 2+x_{k-1} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2+x_k} > \sqrt{2+x_{k-1}}$$

Luego, queda demostrado por inducción completa que $\{x_n\}$ es monótona creciente.
Procedamos a demostrar que se encuentra acotada superiormente:

$$x_1 = \sqrt{2} < 2$$

Supongamos que se cumple para k, esto es, $x_k < 2$. Demostremos, entonces, que se cumple para $k+1$:

$$x_k < 2 \quad \Rightarrow \quad x_k + 2 < 4 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x_k+2} < \sqrt{4} \quad \Rightarrow \quad x_{k+1} < 2$$

Luego, queda probado que $\{x_n\}$ es acotada superiormente, por inducción completa.$\blacksquare$

b) Se cumple que

$$\lim x_n^2 = \lim(\sqrt{x_{n-1}+2})^2 = \lim(x_{n-1}+2) = \lim x_{n-1} + 2$$

Como sabemos que $\{x_n\}$ es convergente, entonces $\exists l \in \mathbb{R} : x_n \to l$, luego

$$\lim x_n^2 = \lim x_{n-1} + 2$$

$$l^2 = l + 2 \quad \Rightarrow \quad l^2 - l - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (l-2)(l+1) = 0$$

lo cual ocurre si y solo si $l = 2 \vee l = -1$. Como $\forall n, x_n \geq 0$, se cumple que $l \geq 0$, luego $l = 2$.

c) Como $\{x_n\}$ es creciente y $x_1 = \sqrt{2}$ entonces $\forall n, x_n \geq \sqrt{2}$, por tanto $\inf\{x_n\} = \min\{x_n\} = \sqrt{2}$.
Se cumple también que $\sup\{x_n\} = 2$, pero, como nunca lo alcanza, $\nexists \max\{x_n\}$.

3. Dada la sucesión con término general: $x_n = \frac{5^n}{(n+5)!}$

a) Demuestre que $\{x_n\}$ es convergente.

b) Halle su límite.

c) Halle, si existen, $\inf\{x_n\}$, $\sup\{x_n\}$, $\min\{x_n\}$, $\max\{x_n\}$.

RESPUESTA

a) Demostremos que $\{x_n\}$ es decreciente:

$$x_n < x_{n-1} \iff \frac{5^n}{(n+5)!} < \frac{5^{n-1}}{(n+4)!} \iff \frac{5\cdot 5^{n-1}}{(n+5)(n+4)!}\cdot\frac{(n+4)!}{5^{n-1}} < 1$$

$$\iff \frac{5}{n+5} < 1 \iff 5 < n+5$$

Como sabemos que $n > 0$ la sucesión en cuestión es decreciente.
Sabemos que $5^n > 0$ y que $(n+5)! > 0$, luego $x_n > 0$.
Dado que es decreciente y acotada inferiormente, la $\{x_n\}$ converge.■

b) Supongamos que $\lim x_n = 0$

$$\frac{5^n}{(n+5)!} \to 0 \iff \frac{5^n}{(n+4)!}\cdot\frac{1}{n+5} \to 0$$

donde $\frac{5^n}{(n+4)!}$ es acotada. Probemos que $\frac{1}{n+5}$ es infinitesimal.

$$\frac{1}{n+5} < \epsilon \iff \frac{1}{\epsilon} < n+5 \iff \frac{1}{\epsilon} - 5 < n$$

Luego

$$\forall\epsilon > 0\ \exists N_\epsilon \in \mathbb{N},\ \ N_\epsilon = [\frac{1}{\epsilon} - 5]:\quad \frac{1}{n+5} = \left|\frac{1}{n+5}\right| < \epsilon \quad \forall n > N_\epsilon$$

Entonces $\frac{5^n}{(n+4)!}\cdot\frac{1}{n+5} \to 0$ (infinitesimal por acotada). ■

c) $\inf\{x_n\} = 0$
$\nexists \min\{x_n\}$
$\sup\{x_n\} = \max\{x_n\} = \frac{5}{6!}$

4. Dadas la sucesiones siguientes, halle dos subsucesiones de cada una, convergentes a diferentes límites. En cada caso determine si los límites de dichas subsucesiones son puntos de acumulación del conjunto de términos de la sucesión original.

   a) $0, 1, -1, 0, 1, -1, 0, 1, -1, \ldots$

   b) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \frac{15}{16}, \ldots$

RESPUESTA

a)

$$\{x_n\} = \{0, 1, -1, 0, 1, -1, 0, 1, -1, \cdots\}$$

$$\{x_{3n}\} = \{-1, -1, \cdots\} \quad \Rightarrow \quad \lim x_{3m} = -1$$

$$\{x_{3n+1}\} = \{0, 0, \cdots\} \quad \Rightarrow \quad \lim x_{3m+1} = 0$$

x_0 es punto de acumulación de la sucesión si lo es del conjunto de sus términos. Luego, en $A = \{-1, 0, 1\}$, si x_0 es punto de acumulación, se cumple que

$$\forall \epsilon > 0 : V^*(x_0, \epsilon) \cap A \neq 0 \quad \text{ó} \quad \exists p \in A, p \neq x_0 : p \in V(x_0, \epsilon)|$$

Tomando $x_0 = -1$, sea d_0 la mínima distancia entre x_0 y cualquier otro punto de A, y $\epsilon = \frac{d_0}{2}$, o sea $\frac{1}{2}$. Entonces no existe ningún otro punto de A que pertenezca a $V^*(x_0, \epsilon)$, luego x_0 no es punto de acumulación. Análogamente ocurre con 0.

b) $\{x_n\} = \begin{cases} \frac{1}{2^{\left(\frac{n+1}{2}\right)}} & , \ n = 2k - 1 \\ 1 - \frac{1}{2^{\left(\frac{n}{2}\right)}}, & n = 2k \end{cases}$

$$\{x_{2k-1}\} = \left\{\frac{1}{2^{\left(\frac{n+1}{2}\right)}}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right\}$$

$$\{x_{2k}\} = \left\{1 - \frac{1}{2^{\left(\frac{n}{2}\right)}}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \ldots\right\}$$

$$\lim x_{2k-1} = 0 \text{ y } \lim x_{2k} = 1$$

0 y 1 son puntos de acumulación del conjunto de términos de la sucesión original.
(Esta demostración queda como estudio individual)

5. Demuestre que si $\{x_n\}$ es infinitamente grande, cualquier subsucesión de ella es infinitamente grande.

RESPUESTA

Como $\{x_n\}$ es infinitamente grande, entonces se cumple que

$$\forall \epsilon > 0 \ \ \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} : |x_n| > \epsilon, \forall n \geq N_\epsilon$$

Como cualquier subsucesión $\{x_{k_n}\}$ cumple que $k_n \geq n$, se cumple que $k_n \geq N_\epsilon$ y como $\{x_{k_n}\} \subset \{x_n\}$,

$$\text{entonces } \forall \epsilon > 0 \ \ \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} : |x_{k_n}| > \epsilon, \forall k_n \geq N_\epsilon$$

luego $\{x_{k_n}\}$ es infinitamente grande. ■

6. Calcule los límites siguientes:

a) $\lim \left(\frac{5n^3+4}{5n^3+3}\right)^{5n^3+3}$

b) $\lim \left(\frac{9n^2+4}{9n^2+3}\right)^{3n^2+1}$

c) $\lim \left(\frac{4^n+5}{4^n+4}\right)^{2^{2n-3}+5}$

RESPUESTA

a) $$\lim \left(\frac{5n^3+4}{5n^3+3}\right)^{5n^3+3} = \lim \left(1+\frac{5n^3+4}{5n^3+3}-1\right)^{5n^3+3} = \lim \left(1+\frac{1}{5n^3+3}\right)^{5n^3+3} = e$$

b) $$\lim \left(\frac{9n^2+4}{9n^2+3}\right)^{3n^2+1} = \lim \left(1+\frac{9n^2+4}{9n^2+3}-1\right)^{3n^2+1} = \lim \left(1+\frac{1}{9n^2+3}\right)^{3n^2+1}$$
$$= \lim \left(\left(1+\frac{1}{9n^2+3}\right)^{9n^2+3}\right)^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{1}{3}}$$

c) $$\lim \left(\frac{4^n+5}{4^n+4}\right)^{2^{2n-3}+5} = \lim \left(1+\frac{4^n+5}{4^n+4}-1\right)^{2^{2n-3}+5} = \lim \left(1+\frac{1}{4^n+4}\right)^{2^{2n-3}+5} = \lim \left(1+\frac{1}{4^n+4}\right)^{\frac{4^n}{8}+5}$$
$$= \lim \left(1+\frac{1}{4^n+4}\right)^{\frac{1}{8}(4^n+4)+\frac{9}{2}} = \lim \left[\left(\left(1+\frac{1}{4^n+4}\right)^{4^n+4}\right)^{\frac{1}{8}} \cdot \left(1+\frac{1}{4^n+4}\right)^{\frac{9}{2}}\right] = e^{\frac{1}{8}}$$

7. Diga si las sucesiones siguientes satisfacen o no la condición de Bolzano-Cauchy:

a) $\left\{(-1)^n \frac{n^2}{n^2-1}\right\}$

b) $\left\{\frac{n^3-2\sqrt{n}}{2n^3+3n+1}\right\}$

RESPUESTA

a) $$\left\{(-1)^n \cdot \frac{n^2}{n^2-1}\right\}$$

$$x_{2n-1} = -\frac{n^2}{n^2-1} \to -1$$

$$x_{2n} = \frac{n^2}{n^2-1} \to 1$$

Como tiene dos subsucesiones con límites distintos, no es convergente, no cumple Bolzano-Cauchy.

b) $$\left\{\frac{n^3-2\sqrt{n}}{2n^3+3n+1}\right\}$$

$$\frac{n^3-2\sqrt{n}}{2n^3+3n+1} \to \frac{1}{2}$$

Como existe el límite, es convergente, cumple Bolzano-Cauchy.