Clase 7. Ejercicios.

- Continuidad de una función en un punto y en un intervalo.
- Continuidad lateral. Clasificación de los puntos de discontinuidad.
- Continuidad de las funciones elementales

Ejercicios de la clase:

1. Analice la continuidad y la continuidad lateral de las funciones siguientes en los puntos indicados:

   a) $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$, en x=0.

   b) $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x > 1 \\ \frac{1}{x} & 0 < x \leq 1 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$, en $x = 0$ y en $x = 1$.

   c) $f(x) = [x]$ en los enteros.

   d) $f(x) = x - [x]$ en los enteros.

2. Determine los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones y clasifíquelos:

   a) $f(x) = \arctan \frac{2}{x}$

   b) $f(x) = (e^x - 1) \sin \frac{1}{x}$

   c) $f(x) = \frac{2}{1+2^{\frac{1}{x}}}$

   d) $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{|x|}$

3. ¿Qué valores deberán tomar los parámetros A y B que aparecen en las siguientes funciones, para que las mismas sean continuas en todo $\mathbb{R}$?

   a) $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x+1}, & x > -1 \\ A, & x = -1 \\ e^{-\frac{1}{(x+1)^2}}, & x < -1 \end{cases}$

   b) $g(x) = \begin{cases} -2\sin x, & x \leq -\frac{\pi}{2} \\ A\sin x + B, & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x, & x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

4. ¿Será necesariamente discontinua en el punto $x = a$ la suma de dos funciones $f(x) + g(x)$ si:

   a) $f(x)$ es continua y $g(x)$ es discontinua en $x = a$?

   b) ambas funciones son discontinuas en $x = a$?

5. Dé un ejemplo de una función discontinua en todos los puntos de $\mathbb{R}$ y cuyo cuadrado sea una función continua.

6. Dada la función:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{tax\ x}{e^x-1}, -2\leq x<0, x\neq -\pi/2 \\ \dfrac{1-cox\ x}{\arctan\left(\dfrac{x^2}{2}\right)}, 0<x\leq \pi \\ \dfrac{\pi+x}{\pi^2-x^2}, \pi<x\leq 5 \end{cases}$$

a) Analiza la continuidad de f en $[-2,5]$.

b) Realiza un esbozo aproximado del gráfico de $f(x)$

c) Analiza si f está acotada en el intervalo $[-1,1]$.

7. Dadas la función:

$$f(x)=\begin{cases} x^2+3 & x\leq 0 \\ |x-a| & x\in(0,3) \\ \frac{x^3-3x}{x+b} & x\geq 3 \end{cases}$$

Determina el valor de a para que f sea continua en $\mathbb{R}$

Respuestas

Ejercicio 1

P nº9 Análisis Matemático

(1)

1. Analice la continuidad y la continuidad lateral de las sgtes funciones en los ptos indicados.

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ en $x=0$

Tenemos que $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$ luego $\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Luego $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$ y $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$ por tanto tenemos límites laterales diferentes y por consiguiente la función es discontinua con discontinuidad esencial de primera especie o salto finito.

b) $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{si } x>1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } 0<x\leq 1 \\ 0 & \text{si } x\leq 0 \end{cases}$ en $x=0$ y en $x=$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0$ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

Portanto la función es discontinua con discontinuidad esencial especie. en $x=0$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x} = 1 = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 2x-1 = 1$

Luego la función es continua en $x=1$

c) $f(x) = [x]$ en los enteros

De clases anteriores tenemos que:

$\lim_{x\to k_0^+} [x] = k_0$ ∧ $\lim_{x\to k_0^-} [x] = k_0 - 1$ luego tiene límites laterales diferentes y portanto tenemos discontinuidad esencial de 1ra especie

$k_0 \in \mathbb{Z}$

d) $f(x) = x - [x]$ en los enteros.

$\lim_{x\to k_0^+} x - [x] = k_0 - \lim_{x\to k_0^+} [x] = k_0 - k_0 = 0$

$\lim_{x\to k_0^-} x - [x] = k_0 - (k_0 - 1) = 1$

Como $1 \neq 0$ tenemos discontinuidad esencial de 1ra especie.

Ejercicio 2

2. Determine los ptos de discontinuidad de las sgtes funciones y clasifíquelos:

a) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{2}{x}$

Teorema de continuidad de funciones compuestas

Sea $y=f(x)$ continua en el pto "a" y $z=g(y)$ continua en el punto $b=f(a)$ entonces la función compuesta $g \circ f$ es continua en el pto "a", es decir.

$$\lim_{x \to a} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \to a} f(x)\right) = g(f(a))$$

Siguiendo esta idea tenemos que $h(x) = \operatorname{arctg} x$ es una función continua en $\mathbb{R}$, además de ser una función elemental.

La función $k(x) = \frac{2}{x}$ es discontinua solo en $x=0$ por tanto

$f(x) = h(k(x))$ es discontinua solo en $x=0$.

continuación

2

Analicemos los límites laterales de $f(x)$ en $x=0$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} h(k(x)) = h\left(\lim_{x\to 0^+} k(x)\right) = h\left(\lim_{x\to 0^+} \frac{2}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2}{x} = +\infty \quad y \quad \lim_{x\to +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} h(k(x))$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{2}{x} = -\infty \quad y \quad \lim_{x\to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$$

por tanto los límites laterales son diferentes y sería una discontinuidad esencial de primera especie.

2.b) $f(x) = (e^x - 1)\sin\frac{1}{x}$

En este caso tenemos producto de funciones continuas en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ lo cual es una función continua en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Analizando la composición de funciones presente, tenemos que el único pto de discontinuidad es $x=0$.

Analicemos el comportamiento del límite alrededor de $x=0$

$$\lim_{x\to 0} (e^x - 1)\sin 1/x = \lim_{x\to 0} x \sin 1/x$$

aquí tenemos el producto de una función acotada por una infinitesimal por tanto es infinitesimal.

Por tanto $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ y como la función no está definida en $x=0$ tenemos discontinuidad evitable

2c) $f(x) = \dfrac{2}{1+2^{1/x}}$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{2}{1+2^{1/x}} = 0$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{2}{1+2^{1/x}} = 2$

$\lim\limits_{x \to 0^+} 2^{1/x} = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to 0^-} 2^{1/x} = 0$

2d) $f(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{|x|}$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{|x|} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{|x|} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{-x} = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{2}{x} = -\infty$

Luego tenemos una discontinuidad esencial de 2da especie en $x=0$ por
$f(x)$ es continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ejercicio 3

3. ¿Qué valores deberán tomar los parámetros A y B que aparecen en las sgtes funciones, para que las mismas sean continuas en todo $\mathbb{R}$?

a) $$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x+1} & x > -1 \\ A & x = -1 \\ e^{-\frac{1}{(x+1)^2}} & x < -1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \sqrt[3]{x+1} = 0$$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} e^{-\frac{1}{(x+1)^2}} = 0$$

Luego tenemos que los límites laterales son iguales y por tanto $A=0$

3 B

3b) $g(x) = \begin{cases} -2\sin x & x \leq -\pi/2 \\ A\sin x + B & -\pi/2 < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x & x \geq \pi/2 \end{cases}$ (3)

En $x_0 = -\pi/2$ $\quad f(-\pi/2) = -2\sin(-\pi/2) = 2$

$\lim\limits_{x \to -\pi/2} f(x) = \lim\limits_{x \to -\pi/2} -2\sin x = 2$ $\quad$ (I) $-A+B=2$

$\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} A\sin x + B = -A+B$

En $x_0 = \frac{\pi}{2}$

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \cos x = 0$ $\quad$ (II) $A+B=0 \Rightarrow A=-B$

Sustituyendo en I tenemos

$-(-B)+B=2 \Rightarrow 2B=2 \Rightarrow B=1$

Sustituyendo $B=1$ en II tenemos

$A=-1$

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} A\sin x + B = A+B$

$\boxed{\begin{matrix} A=-1 \\ B=1 \end{matrix}}$

Ejercicio 4

4. ¿Será necesariamente discontinua en el pto $x=a$ la suma de dos funciones $f(x)+g(x)$ si?

a) $f(x)$ es continua y $g(x)$ es discontinua en $x=a$?

Demostrémoslo usando reducción al absurdo.

Supongamos que $f(x)+g(x)$ es una función continua y $h(x)=f(x)+g(x)$.

Luego como $h(x)$ es continua y $f(x)$ es continua entonces $h(x)-f(x)$ es una función continua por propiedades de las funciones continuas.

Como $h(x)-f(x)=g(x)$ entonces $g(x)$ es continua lo cual es una contradicción y por tanto lo supuesto es falso. y por tanto $f(x)+g(x)$ es divergente.

4.b) ¿ambas funciones son discontinuas en $x=a$?

Tomamos la función $f(x) = \text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x>0 \\ -1 & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$

y la función $g(x) = -\text{sign}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x>0 \\ 1 & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$ ambas son

discontinuas con discontinuidad esencial de 1ra especie en $x=0$.

Pero $h(x)=f(x)+g(x)=0$ la cual es la función constante nula la cua[l] es continua $\forall x\in\mathbb{R}$. por tanto de la suma de dos funciones discont[inuas] en $x=a$ no necesariamente la suma debe ser discontinua.

5. Dé un ejemplo de una función discontinua en todos los ptos de $\mathbb{R}$. y cuyo cuadrado sea una función continua.

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x\in\mathbb{Q} \\ -x & \text{si } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}=\mathbb{I} \end{cases}$$

Luego $[f(x)]^2 = x^2$ la cual es una función polinómica y por tanto es continua en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 6

6) Dada la función

5

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\tan x}{e^x - 1}, & -2 \le x < 0, \; x \neq -\dfrac{\pi}{2} \\[2ex] \dfrac{1-\cos x}{\arctan\left(\frac{x^2}{2}\right)}, & 0 < x \le \pi \\[2ex] \dfrac{\pi + x}{\pi^2 - x^2} & \pi < x \le 5 \end{cases}$$

a) Analiza la continuidad de f en $[-2, 5]$

• En $x = -\frac{\pi}{2}$

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \frac{\tan x}{e^x - 1} = +\infty \qquad \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^-} f(x) = -\infty$$ por tanto tenemos

$x_0 = -\frac{\pi}{2}$ es pto de discontinuidad inevitable de salto infinito

• En $x = 0$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\tan x}{e^x - 1} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1 - \cos x}{\arctan\left(\frac{x^2}{2}\right)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2/2}{x^2/2} = 1$$

$f(x)$ no está definida en $x_0 = 0$ por lo que tenemos una discontinuidad evitable

En $x=\pi$

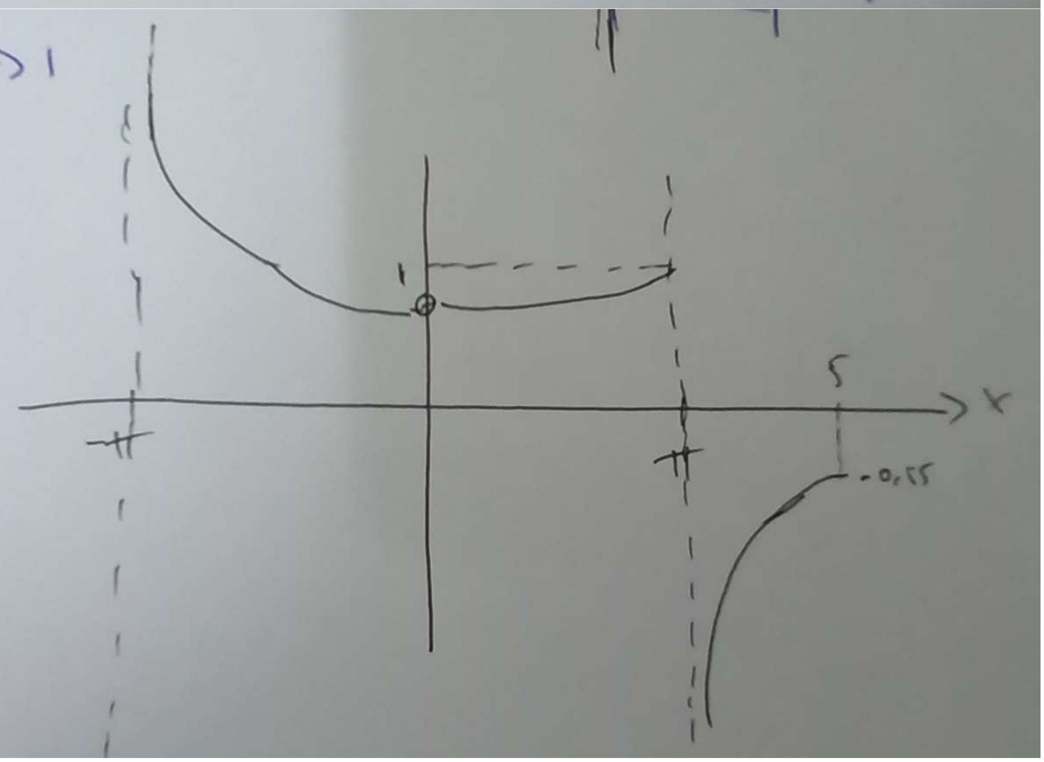
$$\lim_{x\to\pi^+} f(x)=\lim_{x\to\pi^+}\frac{\pi+x}{\pi^2-x^2}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{1}{\pi-x}=-\infty$$

$$\lim_{x\to\pi^-} f(x)=\lim_{x\to\pi}\frac{1-\cos x}{\arctan\left(\frac{x^2}{2}\right)}=1.4589$$

$x=\pi$ Discontinuidad inevitable de salto infinito

$f(x)\xrightarrow[x\to 0]{} 1$

6B)



c) Analiza si f está acotada en el intervalo $[-1,1]$

$f(x)$ presenta discontinuidades de salto infinito en $x_0=\pi$ y $x_1=-\pi$

con discontinuidad evitable en $x=0$

Definimos $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Luego en $[-1,1]$ $g(x)$ es una función continua y su imagen será un conjunto acotado

Ejercicio 7

7. Dadas las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} x^2+3 & x \leq 0 \\ |x-a| & x \in (0,3) \\ \dfrac{x^3-3x}{x+3} & x \geq 3 \end{cases}$$

Determine el valor de a para que f sea continua en $\mathbb{R}$.

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 3$ $\quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = |a|$ $\quad$ Por tanto $|a| = 3$

$\lim_{x\to 3^-} f(x) = |3-a|$ $\quad \lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} \dfrac{x(x^2-3)}{x+3} = \lim_{x\to 3^+} x(x-3) = 0$

Por tanto $|3-a| = 0 \Rightarrow a=3$