Clase 2. Respuestas de los ejercicios. Análisis Matemático

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Pruebe que si $a > 0$ $(a, x \in \mathbb{R})$:

$a)$ $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$

$b)$ $|x| \geq a \iff x \leq \quad a$ ó $x \geq a$

RESPUESTA
a) (1ra Vía Analizando por casos)
Comencemos demostrando la implicación en el sentido (⇒), es decir,
que $a > 0 \ y \ |x| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a$

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x \leq |x|$ por definición de módulo y $|x| \leq a$ por hipótesis
2. Por transitividad , $x \leq a$
3. Como $|x| \leq a$ entonces $-a \leq -|x|$ y $\forall x \in \mathbb{R},\ -|x| \leq x$
4. Por transitividad, $-a \leq x$
5. Finalmente de 2 y 4 , se obtiene que $-a \leq x \leq a$

Demostremos ahora la implicación en el sentido (⇐), es decir,
que $a > 0 \ y \ -a \leq x \leq a \ \Rightarrow \ |x| \leq a$

1. Si $x \geq 0$ entonces $|x| = x$ por definición de módulo y $-a \leq x \leq a$ por hipótesis
2. Por tanto se cumple que $-a \leq |x| \leq a$, de ahí que $|x| \leq a$
3. Si $x < 0$ entonces $|x| = -x$ por definición de módulo y $-a \leq x \leq a$ por hipótesis
4. Multiplicando $-a \leq x \leq a$ por -1 obtenemos $a \geq -x \geq -a$
5. De ahí que $a \geq |x| \geq -a$ y por tanto $|x| \leq a$

■

(**2da Vía)**

TEOREMA 1 $\forall\, a \ \mathcal{E}\ \mathbb{R}$: $|a|^2 = a^2$

Demostración:

(1) ***Por definición de potencia***: $|a|^2 = |a||a|$

(2) $Si\ \ a \geq 0 \rightarrow \ |a|^2 = a.a \ \rightarrow \ |a|^2 = a^2$

(3) $Si\ \ a < 0 \rightarrow |a|^2 = (-a)(-a) \rightarrow |a^2| = a^2$

TEOREMA 2 $\forall\, \boldsymbol{a}\ \mathcal{E}\ \mathbb{R}\text{:}\ \ |\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a}^2}$

Demostración:

$(\mathbf{1})\boldsymbol{Por\ el\ T.}1\ \ :\ |\boldsymbol{a}|^2 = \boldsymbol{a}^2$

$(\mathbf{2})\boldsymbol{Entonces}\text{:}\ \sqrt{|\boldsymbol{a}|^2} = \sqrt{\boldsymbol{a}^2}$

$(\mathbf{3})\ \therefore\ |\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a}^2}$

Utilicemos estos resultados en la solución del ejercicio.
Se quiere demostrar que $a > 0\ y\ |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$.
Como $|x| = \sqrt{x^2}$ y se tiene que $|x| \leq a$, entonces

(1) $\sqrt{x^2} \leq a$
(2) $\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2}\right)^2 \leq a^2$
(3) $\Leftrightarrow x^2 \leq a^2$
(4) $\Leftrightarrow x^2 - a^2 \leq 0$
(5) $\Leftrightarrow (x-a)(x+a) \leq 0$
(6) $\Leftrightarrow x \in [-a, a]$
(7) O sea, $-a \leq x \leq a$

$\blacksquare$

b) (Analizando por casos)
Comencemos demostrando la implicación en el sentido (⇒), es decir, que $a > 0\ y\ |x| \geq a \Rightarrow x \leq -a\ \text{ó}\ x \geq a$

1) Si $x \geq 0\,, |x| = x\ \Rightarrow x \geq a$ por hipótesis.
2) Si $x < 0, |x| = -x$
   Dividamos en dos casos $|x| > a$ y $|x| = a$
   - $|x| > a$
     $\Leftrightarrow -x > a$
     $\Leftrightarrow -(-x) < -a$
     $\Leftrightarrow x < -a$
     $\therefore\ x \leq -a$
   - $|x| = a$
     $\Leftrightarrow x = a\,, a \geq a\ \Rightarrow x \geq a$
     $\Leftrightarrow x = -a, -a \leq -a\ \Rightarrow x \leq -a$

Demostremos ahora la implicación en el sentido (⇐), es decir, que $a > 0\ y\ x \leq -a\ \text{ó}\ x \geq a\ \Rightarrow\ |x| \leq a$

1) Si $x \geq a\ \Rightarrow x \geq 0\ \Rightarrow |x| = x\ y\ |x| \geq a$

2) Si $x \leq -a \Rightarrow x \leq 0 \Rightarrow |x| = -x$
Dividamos en dos casos $x < -a$ y $x = -a$

- $x < -a \Rightarrow -x > a \Rightarrow |x| > a$
  $\therefore |x| \geq a$
- $x = -a \Rightarrow -x = a \Rightarrow |x| = a$
  $\therefore |x| \geq a$

■

2. Demuestre que si $a, b \in \mathbb{R}$:

a) $|ab| = |a||b|$

b) $|a+b| \leq |a| + |b|$

c) $|a-b| \geq ||a| - |b|| \geq |a| - |b|$

RESPUESTA

a)

$|\boldsymbol{ab}| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$

Demostración:

(1) ***Por el T.2*** $: |\boldsymbol{ab}| = \sqrt{(\boldsymbol{ab})^2}$

(2) ***Por propiedad de potencia:*** $|\boldsymbol{ab}| = \sqrt{\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2}$

(3) ***Entonces:*** $|\boldsymbol{ab}| = \sqrt{\boldsymbol{a}^2}\sqrt{\boldsymbol{b}^2} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$ ……………………(T.2)

■

b) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| \leq |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$ ***(Desigualdar Triangular)***

Demostración:

$(1)\ |\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2 = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2 = \boldsymbol{a}^2 + 2\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{b}^2$ …………………………….(T.1)

$(2)\ \leq \boldsymbol{a}^2 + 2|\boldsymbol{a} * \boldsymbol{b}| + \boldsymbol{b}^2$ ………………….($\boldsymbol{ab} \leq |\boldsymbol{ab}|$)

$(3)\ \leq |\boldsymbol{a}|^2 + 2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| + |\boldsymbol{b}|^2$ ………………(T.1 y Ej. 2a)

$(4)\ \leq (|\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|)^2$

(5) ***Como*** $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ ***y*** $(|\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|)$ ***son ambos positivos, entoces:***

$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| \leq |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|$

Recomendación: Estudiar la demostración del Teorema 1.3 pág. 44 LT Análisis Matemático, tomo I , Carlos Sánchez.

c) Teorema 3. $|a-b| = |b-a|$
Demostración

$$|a-b| = \sqrt{(a-b)^2} = \sqrt{(a^2-2ab+b^2)} = \sqrt{(b-a)^2} = |b-a|.$$

Demostremos que $|a-b| \geq \big||a|-|b|\big| \geq |a|-|b|$ usando el teorema anterior.

(1) $|a| = |a-b+b| = |(a-b)+b| \leq |a-b|+|b|$ por desigualdad triangular
(2) Por transitividad, $|a| \leq |a-b|+|b|$
(3) $|a|-|b| \leq |a-b|$
(4) $|b| = |b-a+a| = |(b-a)+a| \leq |b-a|+|a|$ por desigualdad triangular
(5) Por transitividad, $|b| \leq |b-a|+|a|$
(6) $|b|-|a| \leq |b-a|$
(7) $|b|-|a| \leq |a-b|$ por T.3
(8) $|a|-|b| \geq -|a-b|$
(9) De 3 y 8 tenemos $-|a-b| \leq |a|-|b| \leq |a-b|$
(10) $||a|-|b|| \leq |a-b|$ por Ej. 1ª
(11) $\big||a|-|b|\big| \geq |a|-|b|$ por definición de módulo
(12) De 10 y 11 tenemos que $|a-b| \geq \big||a|-|b|\big| \geq |a|-|b|$

■

EJERCICIOS DE LA CLASE

1. Para todo $x \in \mathbb{R}, x > 0$,pruebe que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < x$.

RESPUESTA

$\forall x \in \mathbb{R}, x > 0$ podemos definir $\frac{1}{x} > 0, \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$.

Por la propiedad arquimediana, $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{x} < n$

Despejando $\frac{1}{n} < x$

■

2. Si $x, y \in \mathbb{R}, x < y$, demuestre que existe $z \in \mathbb{R}$ tal que $x < z < y$. ¿Será z único?. Justifique su respuesta.

RESPUESTA

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ podemos definir $z = \frac{x+y}{2} \in \mathbb{R}$

Demostremos que $x < z < y$

- $x < \frac{x+y}{2}$

  (1) $x < y$ por hipótesis
  (2) $x + x < y + x$ por axioma 14
  (3) $2x < x + y$ por conmutatividad de la operación suma
  (4) $x < \frac{x+y}{2}$ por axioma 15

- $\frac{x+y}{2} < y$
  (1) $x < y$ por hipótesis
  (2) $x + y < y + y$ por axioma 14
  (3) $x + y < 2y$ por conmutatividad de la operación suma
  (4) $\frac{x+y}{2} < y$ por axioma 15

Por tanto, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ existe al menos un número $z = \frac{x+y}{2} \in \mathbb{R},$ tal que $x < z < y$.

¿Será z único? No, existen infinitos valores de z que cumplen esa propiedad. Basta con seguir dividiendo el intervalo a la mitad infinitamente.

■

3. Si $x \in \mathbb{R}$, demuestre que existe un entero n único tal que $n \leq x < n + 1$.

RESPUESTA

Sea $x \in \mathbb{R}$ por propiedad arquimediana $\exists n \in \mathbb{N}: n > x$, es decir , existe al menos un número natural n mayor que x.
Definamos $A = \{m \in \mathbb{Z}: m > x\}$ el conjunto de los enteros mayores que x, A está acotado inferiormente por x y por el teorema del supremo, podemos garantizar que existe el ínfimo de A.
Definamos $a + 1 = \operatorname{Inf} A \in \mathbb{Z}$

- Si $a + 1 - x = 1$ (Distancia entre x y $a + 1$ es 1)
  Entonces $\exists a = x : a \leq x \leq a + 1$
- Si $a + 1 - x < 1$ (Distancia entre x y $a + 1$ es menor que 1)
  Entonces $\exists a \in \mathbb{Z} : a \leq x \leq a + 1$
- Si $a + 1 - x > 1$ (Distancia entre x y $a + 1$ es mayor que 1)
  Entonces $a + 1$ no es el ínfimo del conjunto A porque $a \in \mathbb{Z}$ y $a > x$ por tanto a pertenece al conjunto y sería su ínfimo.
  Este caso nos lleva a una contradicción con el planteamiento de $a + 1 = \operatorname{Inf} A \in \mathbb{Z}$
- El caso $a + 1 - x < 0$ no es posible porque $a + 1 > x$

Otra manera de ver es considerar $a = [x]\ parte\ entera\ de\ x$, es decir, mayor entero menor o igual a x.

■

4. Demuestre que el sistema de intervalos cerrados encajados $[0,3;0,4]$, $[0,33;0,34]$, $[0,333;0,334]$, ... tiene como único punto común el número $\frac{1}{3}$.

RESPUESTA

$\frac{1}{3} = 0.33333333$ ... es un número con desarrollo decimal periódico

Construyamos un sistema de intervalos cerrados encajados de la siguiente manera

$I_1 = [a1, b1] = [0.3, 0.4]$

$I_2 = [a2, b2] = [0.33, 0.34]$

$I_3 = [a3, b3] = [0.333, 0.334]$

$I_4 = [a4, b4] = [0.3333, 0.3334]$

....

Por la forma de construcción de los intervalos $\frac{1}{3} \in I_n = [an, bn]$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Demostremos que $\frac{1}{3}$ es el único número que pertenece a todos.

Calculemos las longitudes de los intervalos

$d_1 = b1 - a1 = \frac{1}{10}$

$d_2 = b2 - a2 = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2}$

$d_3 = b3 - a3 = \frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3}$

$d_4 = b4 - a4 = \frac{1}{10000} = \frac{1}{10^4}$

….

$d_n = bn - an = \frac{1}{10^n}$

Demostremos que este sistema de intervalos cerrados encajados es infinitesimal.

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}: \frac{1}{\varepsilon} < N_\varepsilon \Rightarrow \frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon$ Por propiedad arquimediana

$\forall n \geq N_\varepsilon$, $10^n > n$

$\frac{1}{10^n} < \frac{1}{n} < \frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon$

Entonces $\frac{1}{10^n} < \varepsilon, \forall n \geq N_\varepsilon$

Por tanto el sistema de intervalos es infinitesimal.

$\therefore \frac{1}{3}$ es el único punto que pertenece a todos los intervalos.

■

5. Analice la acotación de los siguientes conjuntos de números reales. Halle, en caso de que existan, el supremo y el ínfimo, diciendo en cada caso si son máximos y mínimos:

a) $E = \left\{x \in \mathbb{R};\ x = \frac{(-1)^n}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\}$

b) $E = \left\{x \in \mathbb{R};\ x = \frac{1}{n} + (-1)^n,\ n \in \mathbb{N}\right\}$

c) $E = \{x \in \mathbb{R};\ |1+3x| \leq 1\}$

Determine los puntos de acumulación de los conjuntos

RESPUESTA

a) $E = \left\{-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots\right\}$

- Demostremos que $\max E = \frac{1}{2}$

1. $\frac{1}{2}$ es cota superior de E si $\forall x \in E, x \leq \frac{1}{2}$

   Si n es par $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{2}$

   Si n es impar $-\frac{1}{n} < \frac{1}{2}$

2. $\frac{1}{2}$ es la menor de las cotas superiores

   $\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in E : x_\varepsilon > \frac{1}{2} - \varepsilon$

   $x_\varepsilon = \frac{1}{2} \in E$

   Con estos dos pasos demostramos que $\sup E = \frac{1}{2}$. Veamos que también es máximo de E.

3. $\frac{1}{2} \in E\ si\ n = 2$ por tanto es máximo de E.

- Demostremos que $\min E = -1$

1. -1 es cota inferior de E si $\forall x \in E, x \geq -1$

   Si n es par $\frac{1}{n} > -1$

   Si n es impar $-\frac{1}{n} \geq -1$

2. -1 es la mayor de las cotas inferiores

   $\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in E : x_\varepsilon > -1 + \varepsilon$

   $x_\varepsilon = -1 \in E$

   Con estos dos pasos demostramos que $\inf E = -1$. Veamos que también es mínimo de E.

3. $-1 \in E\ si\ n = 1$ por tanto es mínimo de E.

- $E' = \{0\}$
  Demostremos que 0 es punto de acumulación de E
  0 es punto de acumulación del conjunto $E \Leftrightarrow \forall V(0, \varepsilon), \exists x \in E, x \neq 0: x \in V(0, \varepsilon)$

  Por propiedad arquimediana
  $\forall \varepsilon > 0, \frac{1}{\varepsilon} > 0$, $\exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}: \frac{1}{\varepsilon} < N_\varepsilon \Rightarrow \frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon$
  Si N_ε es par, entonces $\frac{1}{N_\varepsilon} \neq 0, \frac{1}{N_\varepsilon} \in E$
  $\therefore \frac{1}{N_\varepsilon} \in V(0, \varepsilon) \cap E$ y $0 \in E'$
  (E' *es el conjunto de los puntos de acumulación de* E)
  Si N_ε es impar, entonces $N_\varepsilon < N_\varepsilon + 1$ y $N_\varepsilon + 1$ es par
  $\varepsilon > \frac{1}{N_\varepsilon} > \frac{1}{N_\varepsilon+1}$, por tanto $\frac{1}{N_\varepsilon+1} < \varepsilon$ y $\frac{1}{N_\varepsilon+1} \neq 0, \frac{1}{N_\varepsilon+1} \in E$
  $\therefore \frac{1}{N_\varepsilon+1} \in V(0, \varepsilon) \cap E$ y $0 \in E'$

Sería interesante pensar en cómo demostrar que 0 es el único punto de acumulación de este conjunto.
Recomendación: Estudiar el Ejercicio Resuelto 1 pág. 72 LT Análisis Matemático, tomo I , Carlos Sánchez.

■

b) $E = \{0, \frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{4}{5}, \frac{7}{6}, -\frac{6}{7}, \dots .\}$

- Demostremos que $\max E = \frac{3}{2}$

1. $\frac{3}{2}$ es cota superior de E si $\forall x \in E, x \leq \frac{3}{2}$
   Si n es par $\frac{1+n}{n} \leq \frac{3}{2}$
   Si n es impar $\frac{1-n}{n} < \frac{3}{2}$
2. $\frac{3}{2}$ es la menor de las cotas superiores
   $\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in E : x_\varepsilon > \frac{3}{2} - \varepsilon$
   $x_\varepsilon = \frac{3}{2} \in E$
   Con estos dos pasos demostramos que $\sup E = \frac{3}{2}$. Veamos que también es máximo de E.
3. $\frac{3}{2} \in E \; si \; n = 2$ por tanto es máximo de E.

- Demostremos que $\inf E = -1$

1. -1 es cota inferior de E si $\forall x \in E, x \geq -1$

Si n es par $1+\frac{1}{n}>-1$

Si n es impar $-1+\frac{1}{n}>-1$

2. -1 es la mayor de las cotas inferiores

   $\forall\varepsilon>0, \exists x_\varepsilon \in E : x_\varepsilon > -1+\varepsilon$

   Por la propiedad arquimediana $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}: \frac{1}{\varepsilon} < N_\varepsilon \Rightarrow \frac{1}{N_\varepsilon} < \varepsilon$

$$-1+\frac{1}{N_\varepsilon} < -1+\varepsilon$$

   Si N_ε es impar entonces $-1+\frac{1}{N_\varepsilon} \in E$

   Si N_ε es par entonces $N_\varepsilon+1$ es impar, $N_\varepsilon < N_\varepsilon+1$, de ahí que

$$\frac{1}{N_\varepsilon} > \frac{1}{N_\varepsilon+1}$$

$$-1+\frac{1}{N_\varepsilon} > -1+\frac{1}{N_\varepsilon+1}$$

$$-1+\varepsilon > -1+\frac{1}{N_\varepsilon} > -1+\frac{1}{N_\varepsilon+1}$$

   Se tiene que $-1+\frac{1}{N_\varepsilon+1} < -1+\varepsilon$ y $-1+\frac{1}{N_\varepsilon+1} \in E$ porque $N_\varepsilon+1$ es impar.

Con estos dos pasos demostramos que $\inf E = -1$.

3. $-1 \notin E$

   $\nexists \min E$

- $E' = \{-1,1\}$

  Este conjunto solo tiene dos puntos de acumulación.

  Demostración similar a la anterior.

c) $|1+3x| \leq 1$

$\Leftrightarrow\ -1 \leq 1+3x \leq 1$

$\Leftrightarrow -2 \leq 3x \leq 0$

$\Leftrightarrow -\frac{2}{3} \leq x \leq 0$

De ahí que $E = [-\frac{2}{3}, 0]$

- Demostremos que $\max E = 0$

1. 0 es cota superior de E si $\forall x \in E, x \leq 0$, esto se cumple por la propia definición del conjunto.
2. 0 es la menor de las cotas superiores

   $\forall\varepsilon>0, \exists x_\varepsilon \in E : x_\varepsilon > 0-\varepsilon$

$x_\varepsilon = 0 \in E$

Con estos dos pasos demostramos que $\sup E = 0$. Veamos que también es máximo de E.

3. $0 \in E$ por tanto es máximo de E.

- Demostremos que $\min E = -\frac{2}{3}$

1. $-\frac{2}{3}$ es cota inferior de E si $\forall x \in E, x \geq -\frac{2}{3}$, esto se cumple por la propia definición del conjunto.

2. -1 es la mayor de las cotas inferiores

   $\forall \varepsilon > 0, \exists x_\varepsilon \in E : x_\varepsilon > -\frac{2}{3} + \varepsilon$

   $x_\varepsilon = -\frac{2}{3} \in E$

   Con estos dos pasos demostramos que $\inf E = -\frac{2}{3}$. Veamos que también es mínimo de E.

3. $-\frac{2}{3} \in E$ por tanto es mínimo de E.

- $E' = [-\frac{2}{3}, 0]$ Todos los puntos del conjunto son de acumulación.

Demostremos que $\forall x \in E$, x es punto de acumulación de E.

Esto ocurre si y solo si x cumple que $\forall V(x, \varepsilon), \exists x_0 \in E, x_0 \neq x : x_0 \in V(x, \varepsilon)$

$$V(x, \varepsilon) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$$

Como entre dos números reales hay infinitos números reales (Véase ej. 2), puede comprobarse que $\exists x_0 \in E, x_0 \neq x : x_0 \in V(x, \varepsilon)$.

Siguiendo la idea de resolución del ej 2, trabajen en formalizar esta demostración.

6. Construya un conjunto que posea exactamente tres puntos de acumulación.

RESPUESTA

$E = \left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{1 + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{2 + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$

$E' = \{0,1,2\}$ El conjunto de los puntos de acumulación contiene solo 3 elementos.

¿Por qué contiene solo estos 3 elementos? El ejercicio 7 los puede ayudar a formular la respuesta a esa pregunta.

■

7. Demuestre que si x es punto de acumulación de $A \cup B$, entonces x es punto de acumulación de A o de B.

(Demostrando por reducción al absurdo)
Partimos del absurdo... si $x_0 \in (A \cup B)'$ entonces $x_0 \notin A'$ y $x_0 \notin B'$.

Si $x_0 \in (A \cup B)' \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists x \in (A \cup B), x \neq x_0 : x \in V^*(x_0, \varepsilon)$, o lo que es lo mismo,
$x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$
Como $x_0 \notin A'$ y $x_0 \notin B'$. Entonces
$\exists\ \varepsilon_1 : \forall x \in A : x = x_0$ ó $x \notin V^*(x_0, \varepsilon_1)$, es decir, $x < x_0 - \varepsilon_1$ ó $x > x_0 + \varepsilon_1$
$\exists\ \varepsilon_2 : \forall x \in B : x = x_0$ ó $x \notin V^*(x_0, \varepsilon_2)$, es decir, $x < x_0 - \varepsilon_2$ ó $x > x_0 + \varepsilon_2$

Tomando $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ se cumple
$\exists\ \varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2) : \forall x \in (A \cup B) : x = x_0$ ó $x \notin V^*(x_0, \varepsilon)$, es decir, $x < x_0 - \varepsilon$ ó $x > x_0 + \varepsilon$
Entonces $x_0 \notin (A \cup B)'$, lo que sería una contradicción con la hipótesis del absurdo.
Y, por tanto, $x_0 \in A'$ ó $x_0 \in B'$

■

Recomendación: Estudiar el ejercicio resuelto 3 pág. 73 LT Análisis Matemático, tomo I , Carlos Sánchez.

8. Se dice que un conjunto $E \subset \mathbb{R}$ es **cerrado** si todos los puntos de acumulación de E pertenecen a E y que es **abierto** si su complementario en $\mathbb{R}$ es cerrado. Diga si los conjuntos siguientes son cerrados, abiertos o ninguna de las dos cosas:

(i) $[a, b]$
(ii) (a, b)
(iii) $[a, b)$
(iv) $\mathbb{Z}$
(v) $\mathbb{Q}$
(vi) $\mathbb{R}$
(vii) $\{x \in \mathbb{R};\ x = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\}$
(viii) $\{x \in \mathbb{R};\ x = (-1)^n + (-1)^m,\ n, m \in \mathbb{N}\}$
(ix) $\mathbb{N}$
(x) ϕ

RESPUESTA

i) Cerrado , $E' = [a, b]$, $E' \subseteq E$
No abierto, $E^c = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$, $Fr\ E^c = \{a, b\}$, $Fr\ E^c \not\subset E^c$, E^c no es cerrado.

ii) No cerrado , $E' = [a,b]$, $E' \not\subset E$

Abierto, $E^c = (-\infty, a] \cup [b, +\infty)$, $(E^c)' = (-\infty, a] \cup [b, +\infty)$, $(E^c)' \subseteq E^c$, E^c es cerrado.

iii) No cerrado, $E' = [a,b]$, $E' \not\subset E$

No abierto, $E^c = (-\infty, a) \cup [b, +\infty)$, $(E^c)' = (-\infty, a] \cup [b, +\infty)$, $(E^c)' \not\subset E^c$, E^c no es cerrado.

iv) Cerrado, $Fr\, \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}' = \emptyset$. Todos sus puntos son aislados.

No abierto, $\mathbb{Z}^0 = \emptyset$, $\mathbb{Z}^0 \neq \mathbb{Z}$

v) No cerrado, $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}' \not\subset \mathbb{Q}$ Recomendación: Estudiar el ejercicio resuelto 2 pág. 73 LT Análisis Matemático, tomo I , Carlos Sánchez.

No abierto, $\mathbb{Q}^c = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} = \mathbb{I}$, $\mathbb{I}' = \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}^c$ no cerrado

vi) Cerrado, $\mathbb{R}' = \mathbb{R}$

Abierto, $\mathbb{R}^c = \emptyset$, $\emptyset$ cerrado porque no tiene puntos de acumulación

vii) No cerrado, $E' = \{0\}$, $E' \not\subset E$

No abierto, $E^c = \mathbb{R} \backslash E$, $(E^c)' = \mathbb{R}$, $(E^c)' \not\subset E^c$, E^c no es cerrado.

viii) $E = \{-2,0,2\}$

Cerrado , $Fr\, E = E$, $E' = \emptyset$, todos sus puntos son aislados.

No abierto, $E^0 = \emptyset$

ix) Cerrado, $Fr\, \mathbb{N} = \mathbb{N}$, $\mathbb{N}' = \emptyset$. Todos sus puntos son aislados.

No abierto, $\mathbb{N}^0 = \emptyset$, $\mathbb{N}^0 \neq \mathbb{N}$

x) Cerrado , $\emptyset' = \emptyset$

Abierto , $\emptyset^c = \mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ es cerrado