Clase Practica 8 Soluciones

1- a-) Por la definicion de Cauchy se cumple que $\lim_{x\to 0} \frac{x+1}{2} = \frac{1}{2}$ si y solo si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $|x-0| < \delta$ se obtiene $|\frac{x+1}{2} - \frac{1}{2}| < \varepsilon$.

$|\frac{x+1}{2} - \frac{1}{2}| < \varepsilon = |\frac{x}{2}| < \varepsilon$

De donde obtenemos $|x| < 2\varepsilon$

Entonces si decimos que $\delta = 2\varepsilon$ por $|x-0| < \delta$ se tiene que $|\frac{x+1}{2} - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2} \cdot \delta = \frac{1}{2} < 2\varepsilon = \varepsilon$

b-) Segun Cauchy se cumple que $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+4}{2x^3} = \frac{5}{2}$ si y solo si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $|x| > \delta$.

$|\frac{5x^3+4}{2x^3} - \frac{5}{2}| < \varepsilon = |\frac{4}{2x^3}| < \varepsilon = |\frac{2x^3}{4}| < \varepsilon \Leftrightarrow |\frac{1}{x^3}| < \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{\varepsilon} < |x^3| \Leftrightarrow |x| > \sqrt[3]{\frac{2}{\varepsilon}} = \delta$

Entonces tenemos que $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \sqrt[3]{\frac{2}{\varepsilon}} > 0$ tal que $|x| > \sqrt[3]{\frac{2}{\varepsilon}} = \delta \Rightarrow |\frac{5x^3+4}{2x^3} - \frac{5}{2}| < \varepsilon = |\frac{4}{2x^3}| < \varepsilon$

c-) Segun la definicion de Cauchy se cumple que $\lim_{x\to 0^+} -\frac{4}{x^5} = -\infty$ si y solo si $\forall M > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$tal que: $x - 0 < \delta \Rightarrow -\frac{4}{x^5} < -M$.

$-\frac{4}{x^5} < -M = \frac{4}{M} > x^5 = x < \sqrt[5]{\frac{4}{M}}$

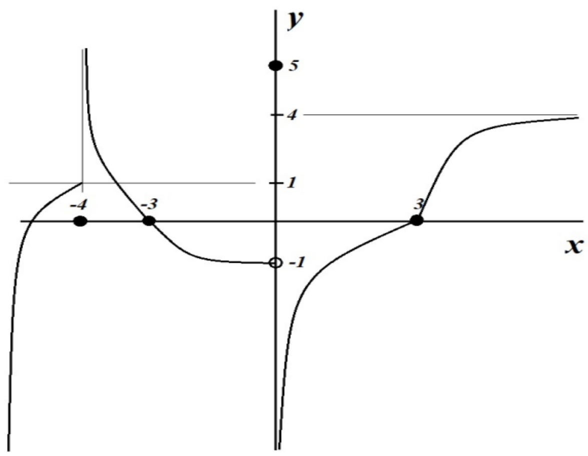
Entonces $x - 0 < \sqrt[5]{\frac{4}{M}}$por lo que para $\delta = \sqrt[5]{\frac{4}{M}}$queda demostrado.

d-) Segun la definicion de Cauchy se cumple $\lim_{x\to 1} \frac{2}{(x-1)^2} = +\infty$ si y solo si $\forall M > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $|x-1| < \delta \Rightarrow \frac{2}{(x-1)^2} > M$.

$\frac{2}{(x-1)^2} > M = \frac{2}{M} > (x-1)^2 = |x-1| < \sqrt{\frac{2}{M}}$

Entonces para $\delta = \sqrt{\frac{2}{M}}$ se cumple.

2-



3- Domf $\{x \in f : x \neq -1\}$ Imf $\{y \in f : y > -2\}$

$f(0) = -1$ $f(-3) = 2$ $f(-2) = 0$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -2$

$\lim_{x\to-1^-} f(x) = -1$ $\lim_{x\to-1^+} f(x) = \infty$

$\lim_{x\to-3^-} f(x) = 2$ $\lim_{x\to-3^+} f(x) = 1$ $\lim_{x\to-3} f(x) =$ no existe

$\lim_{x\to0^-} f(x) = 0$ $\lim_{x\to0^+} f(x) = 0$ $\lim_{x\to0} f(x) = 0$

4- $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2 - x + 1} - ax - b)$

Lo primero que hacemos es multiplicar por la conjugada para eliminar las raices en nuestro numerador.

$(\sqrt{x^2 - x + 1} - (ax + b)) \cdot \frac{(\sqrt{x^2-x+1}+(ax+b))}{(\sqrt{x^2-x+1}+(ax+b)} = \frac{(x^2-x+1)-(ax+b)^2)}{(\sqrt{x^2-x+1}+(ax+b)}$

A continuacion realizamos un trabajo algebraico para obtener

$\frac{(x^2-x+1)-a^2x^2-2abx-b^2}{(\sqrt{x^2-x+1}+(ax+b)} = \frac{(1-a^2)x^2-(2ab+1)x+(1-b^2)}{(\sqrt{x^2-x+1}+(ax+b)}$

Ahora tenemos un polinomio de grado 2 en el numerador y un radical de polinomio de grado 2 en el denominador. Por tanto debemos suponer que el numerador va a crecer mas rapido que el denominar y por tanto tender a infinito por lo cual necesitamos eliminar el grado 2. Si decimos que a = 1 obtendriamos un polinomio de grado 1.

$\frac{-(2b+1)x+(1-b^2)}{\sqrt{x^2-x+1}+(x+b)}$

Ahora extraemos un falso factor comun de tal forma que nos quede:

$\frac{x(-(2b+1)+\frac{(1-b^2)}{x})}{\sqrt{x^2(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}+x(1+\frac{b}{x})}$

De la raiz extraemos x^2 como x de tal forma que nos quede.

$\frac{x(-(2b+1)+\frac{(1-b^2)}{x})}{x\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x(1+\frac{b}{x})}$

Ahora simplificamos la x del numerador con las del denominador:

$\frac{-(2b+1)+\frac{(1-b^2}{x})}{\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1+\frac{b}{x}}$

Ahora toda fraccion donde en el numerador tenga un numero y el denominar algo que tienda a infinito se hace 0.

$\frac{-(2b+1)}{\sqrt{1}+1} = \frac{-(2b+1)}{2}$

Ahora para que el limite sea 0 tenemos que $-2b-1=0 \quad -2b=1 \quad b=-\frac{1}{2}$

Entonces para $a=1 \quad b=-\frac{1}{2}$ el limite es 0, para $a=1 \quad b\neq-\frac{1}{2}$ el limite es un q $\neq 0$ y para a $\neq 1$ el limite es ∞.

Ejercicios para el trabajo independiente

1- a-) Segun cauchy $\lim_{x\to 1}\frac{2x+1}{3}=1$ se cumple $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$ tal que a partir de $|x-1|<\delta$ se obtiene $|\frac{2x+1}{3}-1|<\varepsilon$

$|\frac{2x+1}{3}-1|<\varepsilon = |\frac{2x-2}{3}|<\varepsilon = |2x-2|<3\varepsilon = |x-1|<\frac{3\varepsilon}{2}$

Por pata para $\delta=\frac{3\varepsilon}{2}$ se cumple.

b-) Segun cauchy $\lim_{x\to 3}x^2=9$ se cumple $\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$ tal que a partir de $|x-3|<\delta$ se obtiene $|x^2-9|<\varepsilon$

$|x^2-9|<\varepsilon = -\varepsilon<x^2-9<\varepsilon = 9-\varepsilon<x^2<\varepsilon+9 = \sqrt{9-\varepsilon}<x<\sqrt{\varepsilon+9} = \sqrt{9-\varepsilon}-3<x-3<\sqrt{\varepsilon+9}-3 = |x-3|<\sqrt{\varepsilon+9}-3$

Entonces para $\delta=\sqrt{\varepsilon+9}-3$ se cumple.

c-) Segun Cauchy se cumple que $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+16}{2x^3} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ tal que $|x| > \delta$

$|\frac{x^3+16}{2x^3} - \frac{1}{2}| < \varepsilon = |\frac{16}{2x^3}| < \varepsilon = |\frac{8}{x^3}| < \varepsilon = |\frac{x^3}{8}| < \varepsilon \Leftrightarrow |\frac{1}{x^3}| < \frac{\varepsilon}{8} \Rightarrow |x^3| > \frac{8}{\varepsilon} = |x| > \sqrt[3]{\frac{8}{\varepsilon}} = \delta$

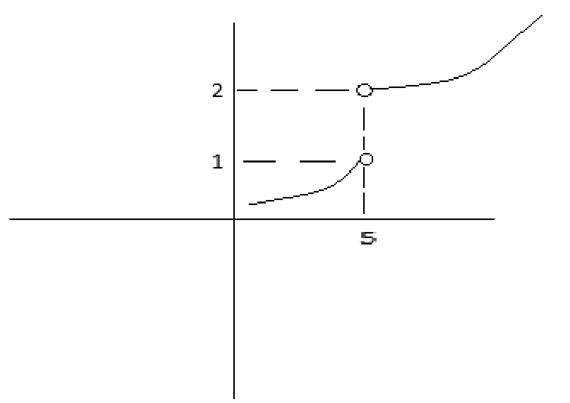
Por tanto para $\delta = \sqrt[3]{\frac{8}{\varepsilon}}$ se cumple.

d-)Segun Cauchy se cumple que $\lim_{x\to-\infty} \frac{x-5}{3x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists k$ tal que $|x| > k$

$|\frac{x-5}{3x} - \frac{1}{3}| < \varepsilon = |\frac{-5}{3x}| < \varepsilon = |\frac{3x}{-5}| < \varepsilon \Leftrightarrow |\frac{1}{x}| < \frac{5\varepsilon}{3} \Rightarrow |x| > \frac{3}{5\varepsilon} = \delta$

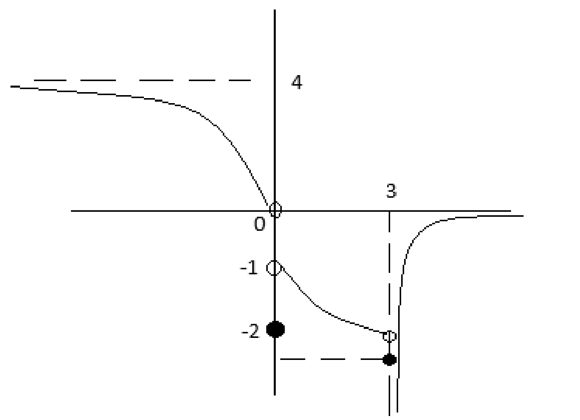
Por tanto para $k = \frac{3}{5\varepsilon}$ se cumple.

2-)



Al graficar nos damos cuentas que el limite cuando x tiende a 5 por la derecha es distinto a cuando tiene por la izquierda y por tanto no existe el limite de f cuando x tiende a 5.

3-)



3- Domf $x \in f$ Imf $\{y \in f : y > -2\}$

$f(0) = \frac{1}{2}$ $f(-3) = 2$ $f(-1) = 0$ $f(1) = 2$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -2$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty$ $\lim_{x\to0} f(x) = 0$

$\lim_{x\to-3^-} f(x) = \infty$ $\lim_{x\to-3^+} f(x) = -2$ $\lim_{x\to-3} f(x) =$ no existe

$\lim_{x\to-1^-} f(x) = 1$ $\lim_{x\to-1^+} f(x) = 1$ $\lim_{x\to-1} f(x) = 1$