Clase 8. Ejercicios.

- Operaciones con funciones continuas y propiedades locales.
- Cálculo de límites.
- Continuidad de la función inversa.
- Funciones trigonométricas inversas.

Ejercicios de la clase:

1. Analice la existencia de los límites siguientes:

$$a)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{3\cos x-\sin x}{\tan 2x+1}\right)^{-\dfrac{1}{x^2}}$$

$$b)\ \lim_{x\to 3^+}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x^2-9}\right)^{-\dfrac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}}$$

$$c)\ \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}}$$

$$d)\ \lim_{x\to +\infty}(\ln x)^{-\dfrac{1}{\ln x}}$$

$$e)\ \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^3-2x+1}{x^3-2x-1}\right)^{\ln(x^3-2x-1)}$$

$$f)\ \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \sin x^{\dfrac{1}{\cos^2 x}}$$

2. Dada la función $g(x)=\left(\dfrac{x^3-5x-15}{x-4}\right)\cos^3 \pi x-\dfrac{3(x+1)^2}{4}$, pruebe que existe un intervalo $[-a,a]$ tal que para todo $x\in[-a,a]$ se cumple:

   a) $g(x)$ es acotada

   b) $g(x)>2$

3. Pruebe que si $f(x)$ es continua en a por la derecha (izquierda) entonces existe $\delta>0$ tal que $f(x)$ está acotada en $[a,a+\delta]$ ($[a-\delta,a]$).

4. Calcule los límites siguientes:

$$a)\ \lim_{x\to 1}\arcsin\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}$$

$$b)\ \lim_{x\to 2}\arctan\frac{x^2-4}{3x^2-6x}$$

5. Sea

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-2016} & x \leq 0 \\ cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) & 0 < x \leq 1 \\ \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}} & x > 1 \end{cases}$$

a) Analiza la continuidad de f en $\mathbb{R}$. Clasifica los puntos de discontinuidades.

b) Demuestra que existe una vecindad de $x = 10$ donde $\frac{2}{3} < f(x) < 1$

6. Sea la función $y = \frac{1}{ln|x-2|}$

a) Halla el dominio de definición de la función.
b) Determina los puntos de discontinuidad y clasifícalos.

7.Determinar el mayor intervalo en el cual la función $f(x) = x + |2-x|$ tiene inversa. Calcula dicha inversa.

Ejercicios para el estudio independiente:

1. Analice la existencia de los límites siguientes:

   $a)$ $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{\tan^2 x}\right)^{\cot^2 x}$

   $b)$ $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x^2+3x+1}{x^2-x+3}\right)^{x}$

   $c)$ $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$

   $d)$ $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$

   $e)$ $\lim\limits_{x\to 0}(\cos\sqrt{x})^{\frac{1}{x}}$

   $f)$ $\lim\limits_{x\to 0+} x^{3x}$

2. Sea $f(x) = -x^2 + 5$. Demuestre que existe una vecindad de 2 tal que $\forall x \in V(2)$, se cumple $f(x) > \frac{9}{10}$.

3. Sea $g(x) = \dfrac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(3+e^{2x})}$. Demuestre que existe una vecindad de 0 tal que $\forall x \in V(0)$, se cumple $g(x) < 1$.

4. a) Pruebe que si $f(x)$ tiene en a una discontinuidad esencial de primera especie entonces f está acotada en una vecindad reducida de a.

   b) Pruebe que si $f(x)$ es continua en a por la derecha (izquierda) y $f(a) \neq 0$ entonces existe $\delta > 0$ tal que $f(x)$ tiene el mismo signo que $f(a)$ en el intervalo $[a, a+\delta]$ ($[a-\delta, a]$).

5.Sean$A, B, C \in R$ y $f: B \to C, g: A \to B$ biyectivas

a) Demuestra que existe $(fog)^{-1}$

b) Halla $(fog)^{-1}$ en términos de $(f)^{-1}(g)^{-1}$

c) Utiliza b) para hallar $H^{-1}(x)$ si $H(x) = arctan(x^3+1)$

Soluciones:

1.

a. La expresión dentro del paréntesis tiene un límite bien definido que puede ser obtenido por simple sustitución, por lo tanto:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{3\cos x - \operatorname{sen} x}{\tan 2x + 1}\right)^{-\frac{1}{x^2}},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{3^{\frac{1}{x^2}}}, \quad \left(\frac{1}{3^{\infty}} \to 0\right),$$

$$= 0.$$

b. El exponente de este límite tiene su límite bien definido:

$$\lim_{x\to 3^+} -\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3},$$

$$\lim_{x\to 3^+} -\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}\cdot\frac{\sqrt{x+6}+3}{\sqrt{x+6}+3},$$

$$\lim_{x\to 3^+} -\frac{x-3}{x-3}\cdot\frac{1}{\sqrt{x+6}+3},$$

$$\lim_{x\to 3^+} -\frac{1}{\sqrt{x+6}+3} = -\frac{1}{6}.$$

Luego es posible resolver el límite realizando un trabajo algebraico:

$$\lim_{x\to 3^+} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x^2-9}\right)^{-\frac{\sqrt{x+6}-3}{x-3}},$$

$$\lim_{x\to 3^+} \left(\frac{x-2}{x^2-9}\right)^{-\frac{1}{6}},$$

$$\lim_{x\to 3^+}\left(\frac{x^2-9}{x-2}\right)^{\frac{1}{6}},$$

$$=0.$$

c. Transformando el límite usando las funciones exponencial y logarítmica:

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}},$$

$$\lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\frac{\ln x}{x}}.$$

Haciendo el cambio de variable $y=-\ln x \Rightarrow \frac{1}{e^y}=x$:

$$\lim_{y\to\infty} \mathrm{e}^{-y\cdot e^y},$$

$$\lim_{y\to\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^{y\cdot e^y}}=0.$$

d. Haciendo el cambio de variable $y=\ln x$, se tiene que:

$$\lim_{x\to+\infty} (\ln x)^{-\frac{1}{\ln x}},$$

$$\lim_{y\to+\infty} (y)^{-\frac{1}{y}},$$

$$\lim_{y\to+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{\ln y}{y}}.$$

El $\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln y}{y}$ es 0, como se vio en clases anteriores, pues la función lineal asintóticamente más rápido que la logarítmica cuando x tiende a infinito. Por lo tanto:

$$\lim_{y\to+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{\ln y}{y}}=1.$$

e. Transformemos la expresión para apoyarnos en el límite fundamental algebraico:

$$\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{x^3-2x+1}{x^3-2x-1}\right)^{\ln\left(x^3-2x-1\right)},$$

$$\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x^3-2x-1}\right)^{\ln\left(x^3-2x-1\right)},$$

$$\lim_{y\to+\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x^3-2x-1}\right)^{\frac{x^3-2x-1}{2}}\right]^{\frac{2\ln\left(x^3-2x-1\right)}{x^3-2x-1}},$$

$$\lim_{y\to+\infty} e^{\frac{2\ln\left(x^3-2x-1\right)}{x^3-2x-1}},$$

Como ya conocemos que el $\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln y}{y}=0$:

$$\lim_{y\to+\infty} e^{\frac{2\ln\left(x^3-2x-1\right)}{x^3-2x-1}} = e^{2\cdot 0} = 1.$$

f. Nuevamente se transforma la expresión para resolver el límite a través del límite fundamental algebraico:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{sen} x\right)^{\frac{1}{\cos^2 x}},$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}\right)^{\frac{1}{\cos^2 x}}},$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\left(\left(1+\dfrac{1-\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x}\right)^{\frac{\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}}\right)^{\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1-\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x}}},$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{e^{\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1-\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x}}},$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{e^{\frac{1}{(1-\operatorname{sen} x)\cdot(1+\operatorname{sen} x)}\cdot\frac{1-\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x}}},$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{e^{\frac{1}{(1+\operatorname{sen} x)}\cdot\frac{1}{\operatorname{sen} x}}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{e}}{e}.$$

2. La función $g(x)=\left(\dfrac{x^3-5x-15}{x-4}\right)\cos^3 \pi x-\dfrac{3\left(x+1\right)^2}{4}$ es continua en todo su dominio de definición, o sea en $\operatorname{Dom}_f=\left\{x\in\mathbb{R} : x\neq 4\right\}$. Por lo tanto, es continua en 0, comprobemos que valor alcanza en ese punto:

$$g(0)=\left(\frac{0^3-5\cdot 0-15}{0-4}\right)\cos^3\left(\pi\cdot 0\right)-\frac{3\left(0+1\right)^2}{4},$$

$$g(0)=\frac{15}{4}-\frac{3}{4}=3.$$

Como la función es continua, podemos afirmar que para cada $\varepsilon>0$, se encuentra un número $\delta(\varepsilon)>0$ tal que:

$$\left|x\right|<\delta \Rightarrow \left|g(x)-3\right|<\varepsilon.$$

Esto significa que para cada ε podemos tomar una vecindad $V_\delta(0)$ donde se cumple que:

$$3-\varepsilon<g(x)<3+\varepsilon.$$

De esta forma queda demostrado que existe una vecindad $V_\delta(0)$ donde la función está acotada, y como dicha vecindad está centrada en 0, entonces contiene a cualquier intervalo $[-a,a]$ donde

$a<\delta$. Además, para $\varepsilon<1 \Rightarrow g(x)>3-\varepsilon>2$, por lo que además hemos encontrado una vecindad que contiene intervalos donde la función está acotada inferiormente por 2.

3. Sea $f(x)$ continua por la derecha en a. Entonces para cada $\varepsilon>0$, se encuentra un número $\delta_1(\varepsilon)>0$ tal que:

$$x-a<\delta_1 \Rightarrow \left| f(x)-f(a) \right| < \varepsilon .$$

Como estamos analizando la continuidad derecha en a, entonces $x \geq a$ y por la expresión anterior deducimos que:

$$a \leq x < a+\delta_1 .$$

Y tomando un $0<\delta_2<\delta_1$, hemos encontrado un intervalo $[a, a+\delta_2]$ donde:

$$f(a)-\varepsilon < f(x) < f(a)+\varepsilon .$$

Queda demostrada la acotación de la función en el caso de la continuidad derecha, y análogamente se demuestra en el caso de la continuidad por la izquierda.

4.
   a. Multiplicando por la conjugada dentro del arcoseno:

$$\lim_{x\to 1} \operatorname{arcsen} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x},$$

$$\lim_{x\to 1} \operatorname{arcsen} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}\cdot\frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}},$$

$$\lim_{x\to 1} \operatorname{arcsen} \frac{1-x}{1-x}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{x}},$$

$$\lim_{x\to 1} \operatorname{arcsen} \frac{1}{1+\sqrt{x}} = \frac{\pi}{6}.$$

   b. Factorizando:

$$\lim_{x\to 2} \arctan \frac{x^2-4}{3x^2-6x},$$

$$\lim_{x\to 2} \arctan \frac{(x-2)(x+2)}{3x(x-2)},$$

$$\lim_{x\to 2} \arctan \frac{x+2}{3x} = \arctan \frac{2}{3}.$$

5. Nótese que la función es continua en cada intervalo de definición, pues cada subfunción está bien definida. Entonces solo queda comprobar la existencia de los límites en los puntos de cambio de intervalo, 0 y 1:

$$\text{Para } x=0: \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x-2016} = -\frac{1}{2016} \neq \frac{\sqrt{2}}{2} = \lim_{x\to 0^+} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right),$$

$$\text{Para } x=1: \quad \lim_{x\to 1^-} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \neq 0 = \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x-1}} .$$

En ambos puntos hay discontinuidades esenciales de salto finito.

Ahora verifiquemos la acotación en torno a $x=10$. En este punto la función es continua y su valor es:

$$f(10)=\frac{\sqrt{10}-1}{\sqrt{10-1}} \approx \frac{2.16}{3}.$$

Nótese que este valor está entre $\frac{2}{3}< f(10)\approx\frac{2.16}{3}<1$. Entonces para cada $\varepsilon>0$, se encuentra un número $\delta(\varepsilon)>0$ tal que:

$$|x-10|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(10)|<\varepsilon.$$

Por lo tanto, existe una vecindad $V_\delta(10)$ donde:

$$f(10)-\varepsilon< f(x)< f(10)+\varepsilon.$$

En particular podemos tomar ε como el mínimo entre $\left(f(10)-\frac{2}{3}\right)$ y $(1-f(10))$ que en este caso será $\left(f(10)-\frac{2}{3}\right)$. Y finalmente encontramos una vecindad $V_\delta(10)$ con $\delta\left(f(10)-\frac{2}{3}\right)$:

$$\frac{2}{3}=f(10)-\left(f(10)-\frac{2}{3}\right)< f(x)< f(10)+\left(f(10)-\frac{2}{3}\right)\approx\frac{2.32}{3}<1.$$

6. La función $y=\frac{1}{ln|x-2|}$ se indefine cuando el denominador es 0 y cuando el argumento del logaritmo es 0. Entonces tenemos que:

$$(x-2)\neq 0\Rightarrow x\neq 2,$$

$$|x-2|\neq 1\Rightarrow x\neq 1\wedge x\neq 3.$$

Por lo tanto, $\mathrm{Dom}_f=\mathbb{R}\setminus\{2,1,3\}$. Esos puntos de indefinición son precisamente donde podríahaber discontinuidades, así que hayamos los límites en dichos puntos:

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{\ln|x-2|}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1+}\frac{1}{\ln|x-2|}=-\infty\wedge\lim_{x\to 1-}\frac{1}{\ln|x-2|}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 3+}\frac{1}{\ln|x-2|}=+\infty\wedge\lim_{x\to 3-}\frac{1}{\ln|x-2|}=-\infty$$

En todos los casos anteriores estamos en presencia de discontinuidades esenciales de segunda especie.

7. La función $f(x)=x+|2-x|$ puede ser representada como:

$$f(x)=\begin{cases}x+(2-x), & x<2\\ x-(2-x), & x\geq 2\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases}2, & x<2\\ 2x-2, & x\geq 2\end{cases}$$

Como la función $f(x)$ es estrictamente continua y creciente en el intervalo $[2,+\infty)$, entonces existe la función inversa $f^{-1}(y)$ definida en $[f(2)=2,+\infty)$ que es estrictamente creciente y continua. Dicha inversa es:

$$f(x)=2f^{-1}(y)-2,$$

$$f^{-1}(y)=\frac{f(x)}{2}+1,$$

$$f^{-1}(y)=\frac{y}{2}+1.$$