Clase 5. Ejercicios.

Tema II: Límite y continuidad de funciones

- Límite de funciones (por sucesiones). Propiedades.
- Límites laterales y al infinito. Asíntotas.

Ejercicios de la clase:

1. Calcule los límites siguientes utilizando las propiedades aritméticas o cambio de variable según sea necesario:

   a) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{4t^2+3t+2}{t^2+2t-b}$

   b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4}$

   c) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}$

   d) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$

   e) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}$

   f) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$ Lo dejamos para más adelante

2. Demuestre que no existen los siguientes límites:

   a) $\lim\limits_{x\to 0} 2^{\frac{1}{x}}$

   b) $\lim\limits_{x\to 0} \cos\dfrac{\pi}{x}$

   c) $\lim\limits_{x\to \infty} \sin x$

3. Analice la existencia de los límites laterales de las funciones siguientes en los puntos indicados:

   a) $f(x) = [x]$ (parte entera de x) en los enteros.

   b) $f(x) = \begin{cases} \left(\frac{2+5x}{2+4x}\right)^{\frac{1}{x}} & x>0 \\ (1+2x)^{\frac{3x+1}{4x}} & x<0 \end{cases}$, en $x=0$.

4. Calcule los límites en el infinito siguientes:

   a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x+5}{2x+3}$ 2

   b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}$ 1

   c) $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ 1/2

   d) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x^2}{3x^2-4}\right)^{x^2}$ e^(4/3)

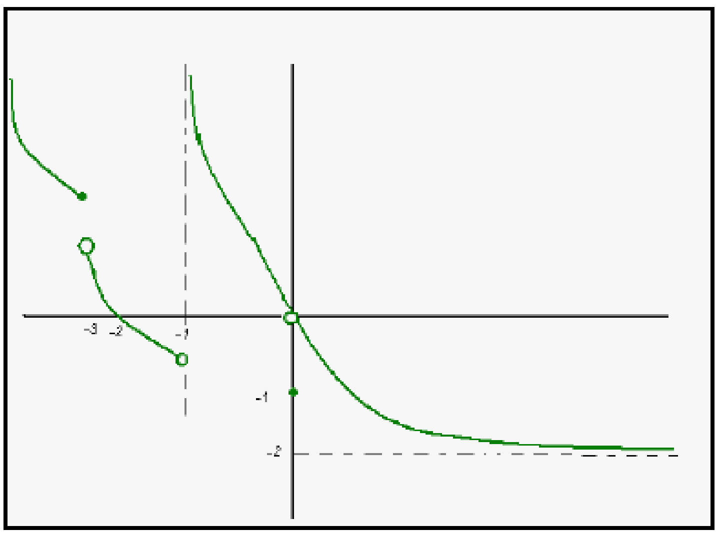
   e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x}$ Lo dejamos para más adelante

5. Analice la existencia de la asíntotas a las curvas siguientes:

   a) $y = \frac{5x}{x-3}$

   b) $y = \sqrt{x^2+1}+2x$ No tiene

6. Dado el gráfico aproximado de la función $f(x)$, determina:



a) $Dom(f)$, $\operatorname{Im}(f)$:

b) Ceros de f

c) Valor de $f(-3)$, $f(-2)$, $f(0)$:

d) Intervalos de monotonía.

e) Diga si f esta acotada inferiormente y/o superiormente. Diga si esta acotada.

f) Determina a partir del gráfico:

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -3^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$,
$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

7. Dada la función f tal que:

$$f(2) = f(-2) = f(-3) = 0, \quad f(0) = 2$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3, \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -2, \lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = 0, \lim_{x \to -3^+} f(x) = +\infty$$

Haga un esbozo aproximado del gráfico de f.

Ejercicios para el trabajo independiente:

1. Calcule los límites siguientes:

$a)$ $\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$

$b)$ $\displaystyle \lim_{x \to a} \frac{x^4 - a^4}{x^2 - a^2}$

$c)$ $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$

$d)$ $\displaystyle \lim_{x \to 4} \frac{x - 4}{x^2 - x - 12}$

$e)$ $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3 - 5x + 1}{x^3 - 4x} \right)^{x^2}$

$f)$ $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{2^x - 3^{2+x} + 4}{5^x + 2^x - 1}$

$g)$ $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1} \right)^{\frac{1-x^3}{1+x^2}}$

$h)$ $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x - 2}{x + 5} \right)^{\frac{2x^3}{x^2 - 5}}$

$i)$ $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^3 + 3x^2}{x^2 + 1} - x \right)^{\frac{1-x^2}{2+x}}$

2. Demuestre que las siguientes funciones no tienen límite en los puntos indicados:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 3 \\ 2x+1 & x > 3 \end{cases}$, en $x = 3$

b) $g(x) = \begin{cases} sg(x^2-4) + \frac{x^3-8}{x^2-4} & x > 2 \\ (x-1)^{\frac{2}{x-2}} & x < 2 \end{cases}$, en $x = 2$

3. a) Si no existen los límites $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ ¿pueden existir $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$ ó $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$?

b) Si existen los límites $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$ ¿debe existir $\lim\limits_{x\to a} g(x)$?

c) Si existe el límite $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y no existe el límite $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ ¿puede existir $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$?

d) Si existen los límites $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)$ ¿de ello se obtiene que existe $\lim\limits_{x\to a} g(x)$?

Del Libro de Ejercicios Capítulo 2:

Urrutia I. Libro de Ejercicios. Capítulo 2.

Ejercicios 1, 2, 4, 6 y 7 páginas 15 a la 18.

Respuestas:

1.

a) $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{4t^2+3t+2}{t^3+2t-b} = \boxed{-\dfrac{2}{b}} \quad \boxed{b \neq 0}$

b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x+3)\cancel{(x-2)}}{(x+2)\cancel{(x-2)}} = \boxed{\dfrac{5}{4}}$

$\frac{0}{0}$

c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{\cancel{x-2}} = \boxed{12}$

d)

$$\lim_{x\to 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49} = \lim_{x\to 7} \frac{(2-\sqrt{x-3})(2+\sqrt{x-3})}{(x+7)(x-7)(2+\sqrt{x-3})}$$

$$= \lim_{x\to 7} \frac{4-(x-3)}{(x+7)(x-7)(2+\sqrt{x-3})} = \frac{-\cancel{(x-7)}}{(x+7)\cancel{(x-7)}\,(2+\sqrt{x-3})}$$

$$\frac{14 \cdot 4}{56}$$

$$= \boxed{-\frac{1}{56}}$$

e)

$$\lim_{x\to -1} \frac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[5]{x}} = \lim_{y\to -1} \frac{1+y^5}{1+y^3}$$

$$y=\sqrt[15]{x} \xrightarrow[x\to -1]{} -1 \qquad = \lim_{y\to -1} \frac{\cancel{(1+y)}(1-y+y^2)}{\cancel{(1+y)}(1-y+y^2-y^3+y^4)}$$

$$y^{15} = x$$

$$y^5 = x^{1/3} \qquad = 3/5$$

$$y^3 = x^{1/5}$$

2.

a) $\lim_{x\to 0} 2^{\frac{1}{x}}$ no ∃

$$\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} \infty \Rightarrow 2^{\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$$

$$\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0^-]{} -\infty \Rightarrow 2^{\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to 0^-]{} 0$$

2 b) $\lim_{x \to 0} \cos \frac{\pi}{x}$

Tomando $x_n = \frac{1}{2n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ $\quad \cos \frac{\pi}{x_n} = \cos \frac{\pi}{\frac{1}{2n}} = \cos 2n\pi \longrightarrow 1$

$y_n = \frac{1}{(2n+1)} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$ $\quad \cos \frac{\pi}{y_n} = \cos \frac{\pi}{\frac{1}{2n+1}} = \cos (2n+1)\pi \longrightarrow -1$

2 c) $\lim_{x \to \infty} \operatorname{sen} x$

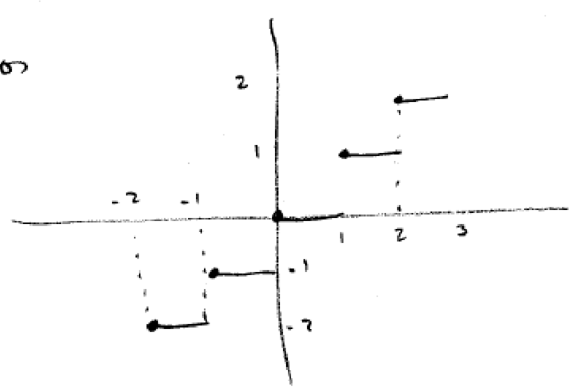
Tomando

$x_n = 2n\pi \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$ $\quad \operatorname{sen} x_n = \operatorname{sen} 2n\pi \longrightarrow 0$

$y_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$ $\quad \operatorname{sen} y_n = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) \longrightarrow 1$

3.

(a) $f(x) = [x]$ en los enteros



$\lim_{x \to x_0^+} [x] = x_0$

$x_0 \in K$

$\lim_{x \to x_0^-} [x] = x_0 - 1$

$x_0 \in K$

$\Rightarrow \nexists \lim_{x \to x_0} [x]$

$x_0 \in K$

b) $f(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{2+5x}{2+4x}\right)^{\frac{1}{x}} & x>0 \\ (1+2x)^{\frac{3x+1}{4x}} & x<0 \end{cases}$ en $x_0 = 0$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (1+2x)^{\frac{3x+1}{4x}} = \lim_{x\to 0^-} \left[\left((1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right)^{\frac{2\cancel{x}\cdot(3x+1)}{2\cancel{4x}}}\right] = e^{1/2}$$

$$1^{\infty}$$

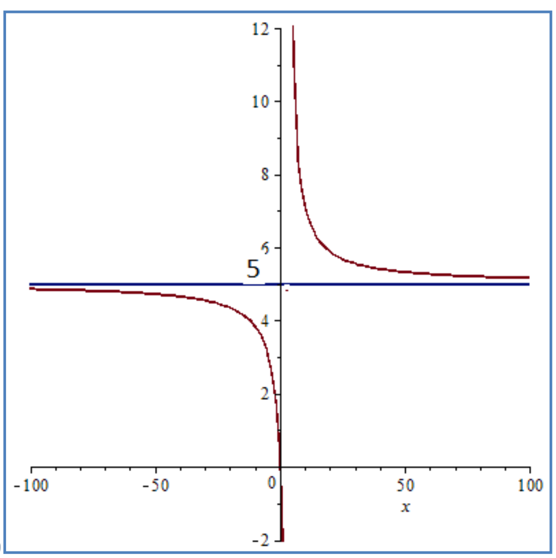
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{2+5x}{2+4x}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{2+4x+x}{2+4x}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \left[\left(1+\frac{x}{4x+2}\right)^{\frac{4x+2}{x}\cdot\frac{1}{4x+2}}\right] = e^{1/2}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) = e^{1/2}}$$

5.

a)



> $\lim_{x \to \infty} \frac{5x}{x-3}$ 5

> $\lim_{x \to -\infty} \frac{5x}{x-3}$ 5

b) No tiene.

6.- Dom f $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Im f $y > -2$

Ceros $x_0 = -2$

$f(-3) = 2$

$f(-2) = 0$

$f(0) = -1$

Monótona decreciente en su dominio

Acotada inferiormente por -2
No acotada superiormente
} No acotada

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$ $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$ $\Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = 0$

$\lim_{x \to -3^-} f(x) = 2$ $\lim_{x \to -3^+} f(x) = 1$ $\Rightarrow \lim_{x \to -3} f(x)$ no existe

$\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\frac{1}{2}$ $\lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -2$ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$