## Clase 6. Ejercicios.

**Tema II: Límite y continuidad de funciones**

- Límite fundamental algebraico.
- Límites según Cauchy. Criterio de convergencia de Bolzano-Cauchy.

## Ejercicios de la clase:

1. Utilice la definición de límite de una función según Cauchy para probar que:

   a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{1}{2}$

   b) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x^3+4}{2x^3}=\dfrac{5}{2}$

   c) $\lim\limits_{x\to 0^+}-\dfrac{4}{x^5}=-\infty$

   d) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2}{(x-1)^2}=+\infty$

2. Demuestre que:

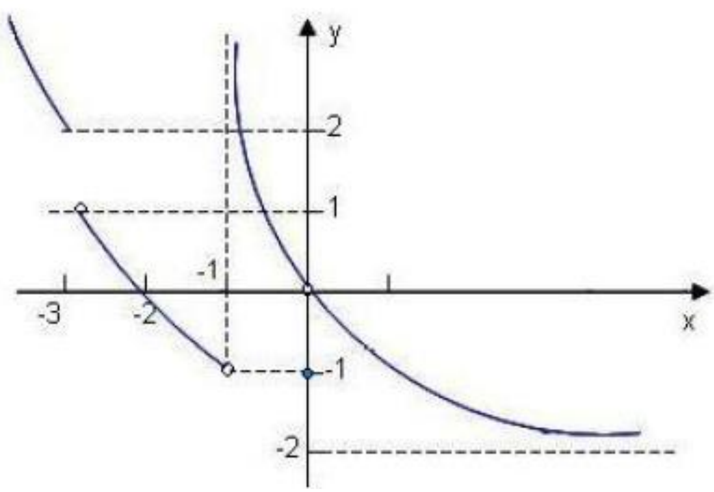
   a) Si $\lim\limits_{x\to a}f(x)>p(<q)$ entonces existe una vecindad de $a$, $V(a)$ tal que para todo $x\in V(a)$, $x\neq a$ se tiene $f(x)>p(<q)$.

   b) Si $f(x)\geq p(\leq q)$ para todo $x\neq a$ de alguna vecindad $V(a)$ y si $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ existe, entonces $\lim\limits_{x\to a}f(x)\geq p(\leq q)$ ($a$ puede ser finito o infinito).

3. Dada la función $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$ pruebe que existe una vecindad $V(2)$ del punto 2, tal que $f(x)>3$ para todo $x\in V(2)$, $x\neq 2$.

4. Dada $f$ tal que:
   $f(0)=5$; $f(-4)=f(-3)=f(3)=0$; $\lim\limits_{x\to -\infty}f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=4$;
   $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-1$; $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to -4^-}f(x)=1$; $\lim\limits_{x\to -4^+}f(x)=+\infty$.
   Haga un esbozo del gráfico de $f$.

5. Dado un esbozo del gráfico de $f$, diga:



$Dom f; Im f; f(-3); f(-2); f(0); \lim\limits_{x\to-\infty} f(x); \lim\limits_{x\to+\infty} f(x); \lim\limits_{x\to-1^-} f(x); \lim\limits_{x\to-1^+} f(x);$
$\lim\limits_{x\to-3^-} f(x); \lim\limits_{x\to-3^+} f(x); \lim\limits_{x\to-3} f(x); \lim\limits_{x\to0^-} f(x); \lim\limits_{x\to0^+} f(x); \lim\limits_{x\to0} f(x).$

6. Sea $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b\right)=\ell; a>0$. Determine $a$ y $b$ de modo que:

$a)$ $\ell=0$. Interprete geométricamente el resultado.

$b)$ $\ell=q\neq0$

$c)$ $\ell=\infty$

**7.** Dada $f(x)=(\cos x)^{ctg^2 x}(1+tg\ x)^{ctg\, x}$

a) Analiza el dominio de definición.

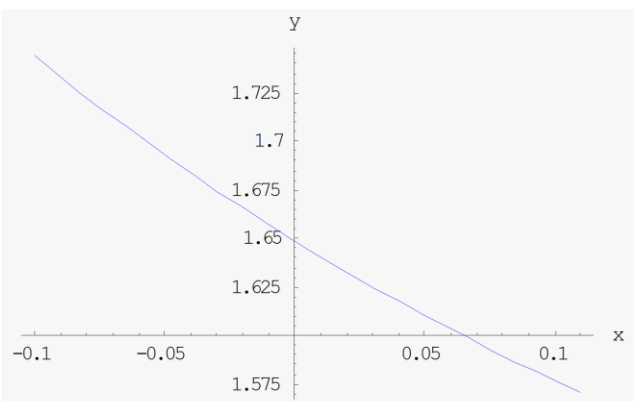
b) Obtenga el grafico de la función ***f***, en una $V^*(0)$.

c) A partir de lo observado en el gráfico, demuestra que:

$$\exists\ \ V^*(0):(\cos x)^{ctg^2 x}(1+tg\ x)^{ctg\, x}<2\quad\forall x\in V^*(0)$$

Sugerencia: Calcula $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{ctg^2 x}(1+\tan x)^{ctg\, x}$

b) Usando ***Mathematica.*** Se obtiene el gráfico de la función




Además con el resultado del límite:

$$\lim_{x\to0}(\cos x)^{ctg^2 x}(1+\tan x)^{ctg\, x}=\sqrt{e}$$

Cuyo valor es: $\sqrt{e}$ = 1.6487212707001282

A partir de lo observado, se puede demostrar lo que se propone en el inciso c).

## Ejercicios para el trabajo independiente:

1. Utilice la definición de límite de una función según Cauchy para probar que:

   a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x+1}{3} = 1$

   b) $\lim\limits_{x \to 3} x^2 = 9$

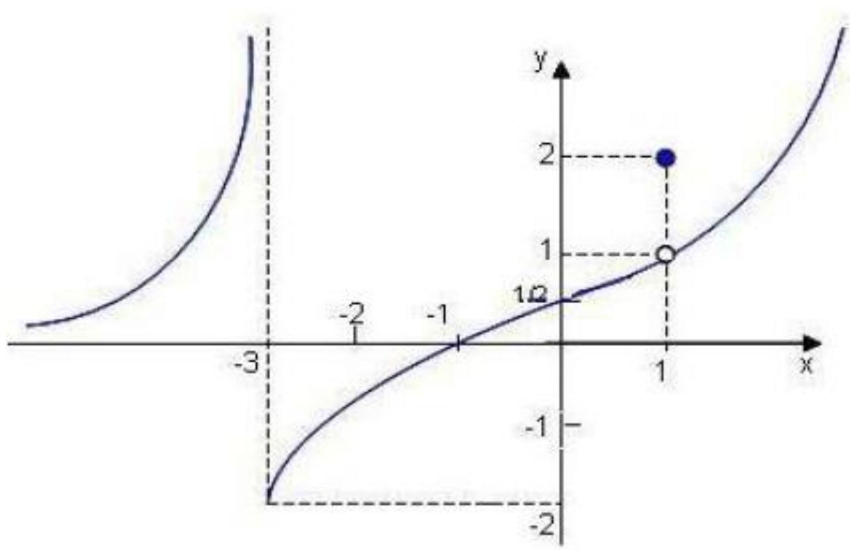
   c) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3+16}{2x^3} = \dfrac{1}{2}$

   d) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x-5}{3x} = \dfrac{1}{3}$

2. Suponga que $f(x) \geq 2$ para $x > 5$ y $f(x) \leq 1$ para $x < 5$. Pruebe que $\lim\limits_{x \to 5} f(x)$ no existe.

3. Dada $f$ tal que:
   $f(0) = -2$; $f(3) = -3$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 4$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$;
   $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = -1$; $\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = -2$; $\lim\limits_{x \to 3+} f(x) = -\infty$.
   Haga un esbozo del gráfico de $f$.

4. Dado un esbozo del gráfico de $f$, diga:




$Dom f$; $Im f$; $f(-3)$; $f(-1)$; $f(0)$; $f(1)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$;
$\lim\limits_{x \to -3^-} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -3^+} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -3} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

## Soluciones:

1.

a. Según la definición de límite de Cauchy, si $\lim_{x\to 0}\frac{x+1}{2}=\frac{1}{2}$, entonces $\forall\varepsilon>0$, $\exists\ \delta(\varepsilon)>0$:

$$|x-0|<\delta \Rightarrow \left|\frac{x+1}{2}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon .$$

Veamos si existe en efecto dicho $\delta$ para cada $\varepsilon$:

$$\left|\frac{x+1}{2}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon ,$$

$$\left|\frac{x}{2}\right|<\varepsilon ,$$

$$|x|<2\varepsilon ,$$

$$|x-0|<2\varepsilon .$$

Por lo tanto, para $\delta=2\varepsilon$ se cumple la definición de límite de Cauchy y queda demostrado que el límite es $\frac{1}{2}$.

b. Cuando $x\to\infty$ la definición de límite de Cauchy se puede adaptar, y en este caso podemos expresar que si $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3+4}{2x^3}=\frac{5}{2}$, entonces $\forall\varepsilon>0$, $\exists\ N(\varepsilon)>0$:

$$|x|>N \Rightarrow \left|\frac{5x^3+4}{2x^3}-\frac{5}{2}\right|<\varepsilon .$$

Veamos si existe dicho $N$ para cada $\varepsilon$:

$$\left|\frac{5x^3+4}{2x^3}-\frac{5}{2}\right|<\varepsilon ,$$

$$\left|\frac{4}{2x^3}\right|<\varepsilon ,$$

$$\left|\frac{1}{x^3}\right|<\frac{\varepsilon}{2} ,$$

$$\left|x^3\right|>\frac{2}{\varepsilon} ,$$

$$|x\ |>\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{3}} .$$

Por lo tanto, para $N=\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{3}}$ se cumple la definición de límite de Cauchy y queda demostrado que el límite es $\frac{5}{2}$.

c. Nuevamente es necesaria una adaptación de la definición de límite estudiada en conferencias. En este caso se puede expresar que si $\lim_{x\to 0^+} -\frac{4}{x^5}=-\infty$, entonces $\forall M>0$, $\exists\ \delta(\varepsilon)>0$:

$$x-0<\delta \Rightarrow -\frac{4}{x^5}<-M .$$

Veamos si existe en efecto dicho $\delta$ para cada $M$:

$$-\frac{4}{x^5}<-M ,$$

$$\frac{4}{M\cdot x^5}>1.$$

Ahora es posible pasar $x^5$ hacia el miembro derecho sin alterar el signo de la inecuación, pues $x$ tiende a $0$ por la derecha y por tanto es una cantidad positiva:

$$\frac{4}{M}>x^5 ,$$

$$\left(\frac{4}{M}\right)^{\frac{1}{5}}>x-0 .$$

Por lo tanto, para $\delta=\left(\frac{4}{M}\right)^{\frac{1}{5}}$ se cumple la definición de límite de Cauchy y queda demostrado que el límite es $-\infty$.

d. Análogamente al inciso anterior, se puede establecer que si $\lim_{x\to 1}\frac{2}{(x-1)^2}=+\infty$, entonces $\forall M>0$, $\exists\ \delta(\varepsilon)>0$:

$$|x-1|<\delta \Rightarrow \frac{2}{(x-1)^2}>M .$$

Encontremos dicho $\delta$ para cada $M$:

$$\frac{2}{(x-1)^2}>M ,$$

$$2>M(x-1)^2 ,$$

$$\frac{2}{M}>(x-1)^2 ,$$

$$\left(\frac{2}{M}\right)^{\frac{1}{2}} > |x-1|.$$

Por lo tanto, para $\delta = \left(\frac{2}{M}\right)^{\frac{1}{2}}$ se cumple la definición de límite de Cauchy y queda demostrado que el límite es $+\infty$.

2.

a. Teniendo en cuenta que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l > p \ \left(< p\right)$, según la definición de límite de Cauchy esto quiere decir que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon) > 0$:

$$|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon; \qquad (x \neq a).$$

En particular esto se debe cumplir para $\varepsilon = |l-p|$, por lo que $\exists \delta(\varepsilon) > 0$:

$$|f(x) - l| < |l-p|.$$

Si $l > p$:

$$|f(x)-l| < l-p,$$
$$|f(x)-l| - l < -p,$$
$$-|f(x)-l| + l > p,$$
$$f(x) > l \Rightarrow f(x) > p, \qquad f(x) < l \Rightarrow \left(f(x)-l\right) + l > p \Rightarrow f(x) > p.$$

Si $l < p$:

$$|f(x)-l| > l-p,$$
$$|f(x)-l| - l > -p,$$
$$-|f(x)-l| + l < p,$$
$$f(x) < l \Rightarrow f(x) < p, \qquad f(x) > l \Rightarrow \left(f(x)-l\right) + l < p \Rightarrow f(x) < p.$$

Por lo tanto para $\delta(|l-p|)$, la vecindad reducida $V_\delta^*(a)$ cumple que $\forall x \in V_\delta^*(a)$:

$$f(x) > p \ \left(< p\right).$$

**Nota:** En el caso que $a$ sea infinito, la demostración no se afecta. Solo debe usarse la notación correspondiente y en lugar de tomar $|x-a| < \delta(\varepsilon)$, se debe emplear $|x| > N(\varepsilon)$.

b. Sea $f(x) \geq p \ \left(\leq p\right)$ para todo $x \neq a$ en una vecindad $V(a)$ y $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$.

Supongamos que $\lim\limits_{x\to a} f(x) < p \ \left(> p\right)$ para demostrar la proposición mediante la reducción al absurdo. Nótese que en el inciso anterior se demostró que:

$$\lim_{x\to a} f(x) < p \Rightarrow \exists V^*(a):\ f(x) < p,\ \forall x \in V^*(a),$$
$$\lim_{x\to a} f(x) > p \Rightarrow \exists V^*(a):\ f(x) > p,\ \forall x \in V^*(a).$$

Por lo tanto se tiene que:

$$f(x) \geq p \ \wedge \ f(x) < p \ (f(x) \leq p \ \wedge \ f(x) > p),$$

lo cual es una contradicción. De esta forma queda demostrada la proposición.

3. Este ejercicio puede resolverse aplicando la propiedad demostrada en el ejercicio anterior. Si tomamos como $p = 3$ y $a = 2$, solo quedaría calcular el límite y comprobar que este sea mayor que $p$:

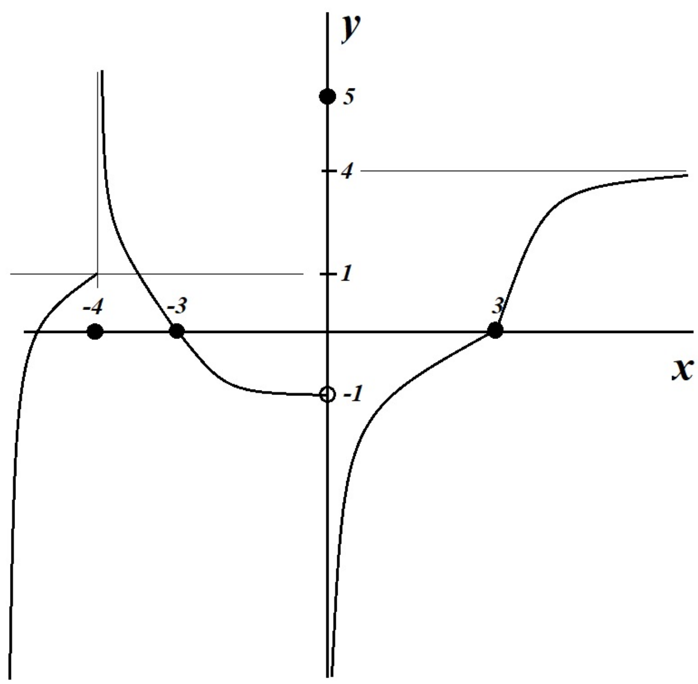
$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2},$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2},$$

$$\lim_{x\to 2} (x+2) = 4.$$

Entonces, como el $\lim_{x\to 2} f(x) > 3$, $\exists V(2)$ tal que $\forall x \in V(2)$, $x \neq 2$ se cumple que $f(x) > 3$.

4.




5. $\mathrm{Dom}_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -1\}$ $\qquad$ $\mathrm{Img}_f = \{y \in \mathbb{R} : y > -2\}$

$f(-3) = 2$ $\qquad$ $f(-2) = 0$ $\qquad$ $f(0) = -1$

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \infty$ $\qquad$ $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -2$ $\qquad$ $\lim_{x\to -1^-} f(x) = -1$

$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \infty$ $\qquad$ $\lim_{x\to -3^-} f(x) = 2$ $\qquad$ $\lim_{x\to -3^+} f(x) = 1$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$ $\qquad$ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ $\qquad$ $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

$\lim_{x\to -3} f(x) = \text{No existe}$

6. Realizando un trabajo algebraico y multiplicando por la conjugada, se obtiene:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b\right),$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-\sqrt{(ax+b)^2}\right),$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+1-(ax+b)^2}{\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{(ax+b)^2}},$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(1-a^2)x^2-(2ab+1)x+(1-b^2)}{\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{(ax+b)^2}}.$$

Como en el numerador se tiene un polinomio de grado $2$ y en el denominador se tiene un radical de un polinomio de igual grado, es natural asumir que la función del numerador "crecerá más rápidamente" en módulo que la del denominador. Para que el límite sea $0$ es necesario reducir el grado de dicho polinomio. Por lo que para $a=1$ se obtiene que:

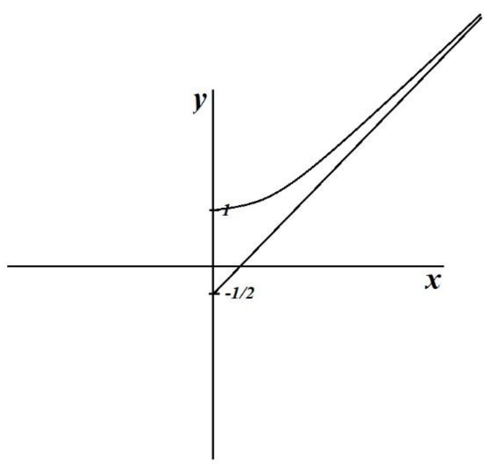
$$\lim_{x\to\infty}\frac{-(2b+1)x+(1-b^2)}{\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{(x+b)^2}}.$$

Dividiendo entre $x$ el numerador y el denominador, y calculando el límite:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-(2b+1)+(1-b^2)/x}{\sqrt{1-1/x+1/x^2}+\sqrt{1+2b/x+b^2/x^2}}=-(2b+1).$$

De este modo, para $(2b+1)=0\Rightarrow b=-\frac{1}{2}$, se tiene que el límite es igual a $0$. Por lo tanto:

a. $l=0\Rightarrow a=1\wedge b=-\frac{1}{2}$,




Gráficamente esto significa que la función lineal $\left(x-\frac{1}{2}\right)$ es la asíntota diagonal de la función $\sqrt{x^2-x+1}$, y por lo tanto se acercan tanto como se quiera en el infinito, sin llegar a cortarse.

b. $l = q \neq 0 \Rightarrow a = 1 \wedge b \neq -\frac{1}{2}$ $(q = -2b-1)$,

c. $l = \infty \Rightarrow a \neq 1$.

Este último inciso se puede deducir al dividir entre $x^2$ la expresión:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(1-a^2)x^2-(2ab+1)x+(1-b^2)}{\sqrt{x^2-x+1}+\sqrt{(ax+b)^2}},$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(1-a^2)-(2ab+1)/x+(1-b^2)/x^2}{\sqrt{1/x^2-1/x^3+1/x^4}+\sqrt{a/x^2+2ab/x^3+b^2/x^4}},$$

nótese que el denominador tiende a $0^+$ cuando $x$ tiende a infinito y que el límite del numerador es $(1-a^2)$, por lo que:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty \ (a<1),$$
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty \ (a>1).$$

7. La función $f(x) = (\cos x)^{ctg^2 x}(1+tg\ x)^{ctg\ x}$ se indefine en los puntos de indefinición de la tangente y de la cotangente, siendo estos de la forma $k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Además, en general la potencia real de un número negativo no siempre está definida, por lo que restringimos el dominio a $\cos x \geq 0$ y $\operatorname{tg} x \geq -1$. La condición $\cos x \geq 0$ restringe el dominio a los cuadrantes I y IV, mientras que la condición $\operatorname{tg} x \geq -1$ se cumple para el cuadrante I y para el intervalo $-\frac{\pi}{4} \leq x \leq 0$ del cuadrante IV. Finalmente el dominio de la función es:

$$\mathrm{Dom}_f = \left\{ x \in \mathbb{R} : 2k\pi - \frac{\pi}{4} \leq x < 2k\pi + \frac{\pi}{2} \right\}$$

Calculando el límite en $0$:

$$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}(1+\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x},$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\dfrac{1^{\operatorname{ctg}^2 x}}{(\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}}}(1+\operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}},$$

$$e \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}},$$

$$e \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\left(1+\left[\dfrac{1}{\cos x}-1\right]\right)^{\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}}},$$

$$e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(1+\left[\frac{1}{\cos x}-1\right]\right)^{\frac{\cos x\cdot\cos x}{(1-\cos x)(1+\cos x)}}},$$

$$e\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(\left(1+\left[\frac{1-\cos x}{\cos x}\right]\right)^{\left[\frac{\cos x}{1-\cos x}\right]}\right)^{\frac{\cos x}{1+\cos x}}},$$

$$e\cdot e^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{e}\ .$$

Aplicando nuevamente la propiedad demostrada en el ejercicio 2. Si tomamos como $p=2$ y $a=0$ . Entonces como el $\lim_{x\to 0} f(x)=\sqrt{e}<2$, $\exists V(0)$ tal que $\forall x\in V(0)$, $x\neq 0$ se cumple que $f(x)<2$ .