Tarea Extraclase de Analisis Matematico II

Tema: Demostracion del teorema de condicion necesaria y suficiente de integrabilidad de Riemann

Javier Arias Sotolongo C112
Bryan Alejandro Mora Cespedes C112

Demostración del teorema de integrabilidad de Riemann

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Queremos demostrar que f es integrable en el sentido de Riemann si y solo si:

- f es acotada.
- El conjunto de discontinuidades de f, denotado D, tiene medida nula.

Condición necesaria: Si f es integrable, entonces cumple las condiciones

Supongamos que f es integrable en el sentido de Riemann. Esto significa que:

$$\forall \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \text{ tal que, para toda partición } P \text{ con } \|P\| < \delta :$$

$$|\sigma(f, P, \xi_i) - I| < \epsilon,$$

donde $\sigma(f, P, \xi_i)$ es una suma de Riemann asociada a la partición P, y $\|P\|$ denota la norma de la partición (el tamaño máximo de sus subintervalos).

- Como las sumas superior $S(f, P)$ e inferior $s(f, P)$ convergen al mismo valor I al refinar la partición ($\|P\| \to 0$), la diferencia:

  $$S(f, P) - s(f, P),$$

  puede hacerse arbitrariamente pequeña.
- Esto implica que las discontinuidades de f no tienen impacto significativo en las sumas. Por lo tanto, el conjunto D de discontinuidades debe tener medida cero.
- Además, si f no fuera acotada, las sumas superior e inferior serían infinitas, lo que contradice la definición de integrabilidad. Por lo tanto, f debe ser acotada.

Condición suficiente: Si f cumple las condiciones, entonces es integrable

Ahora, supongamos que f es acotada y que el conjunto de discontinuidades D tiene medida nula. Entonces:

- Dividimos el intervalo $[a, b]$ en una partición $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ con norma $\|P\|$.
- En cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, definimos las cotas inferior y superior de f:

  $$m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}, \quad M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

- Como D tiene medida cero, podemos refinar la partición de manera que las discontinuidades estén en subintervalos cada vez más pequeños. Esto hace que:
$$M_i - m_i \text{ sea arbitrariamente pequeño.}$$
- Por lo tanto, la diferencia entre las sumas superior e inferior satisface:
$$S(f, P) - s(f, P) < \epsilon,$$
para una partición suficientemente fina, demostrando que f es integrable.

Conclusión

Hemos demostrado que f es integrable si y solo si f es acotada y el conjunto de discontinuidades D tiene medida nula.