

# Modelo con k regresores

## Contents

|          |  |          |
|----------|--|----------|
| <b>1</b> | <b>Modelo y su estimación</b>                                      | <b>1</b> |
| <b>2</b> | <b>Residuos</b>  | <b>2</b> |
| 2.1      | Matriz H . . . . .   | 2        |
| 2.2      | Ortogonalidad de residuos y regresores . . . . .                   | 3        |
| <b>3</b> | <b>El modelo en diferencias a la media</b>                         | <b>3</b> |
| 3.1      | Modelo . . . . .   | 3        |
| 3.2      | Estimación del modelo utilizando matrices de covarianzas . . . . . | 4        |
| 3.3      | Aplicación a los datos . . . . .                                   | 4        |
| <b>4</b> | <b>Ejercicios propuestos</b>                                       | <b>5</b> |

## 1 Modelo y su estimación

Supongamos que se tiene el siguiente modelo de regresión lineal:

$$y_i = b_0 + b_1x_{1i} + b_2x_{2i} + \cdots + b_kx_{ki} + e_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

- El término  $y_i$  se conoce como *variable respuesta*, y las  $x$  se conocen como *regresores*.
- El término  $e_i$  representa el error del modelo.

La ecuación del modelo se puede escribir en notación matricial:

$$i = 1 \Rightarrow y_1 = b_0 + b_1x_{11} + b_2x_{21} + \cdots + b_kx_{k1} + e_1$$

$$i = 2 \Rightarrow y_2 = b_0 + b_1x_{12} + b_2x_{22} + \cdots + b_kx_{k2} + e_2$$

...

$$i = n \Rightarrow y_n = b_0 + b_1x_{1n} + b_2x_{2n} + \cdots + b_kx_{kn} + e_n$$

Agrupando:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \dots & x_{k1} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & \dots & x_{k2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{1n} & x_{2n} & \dots & x_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \dots \\ e_n \end{bmatrix}$$

Finalmente:

$$y = XB + e$$

Esta ecuación es válida para cualquier número de regresores y cualquier número de observaciones.

En este caso, el vector de parámetros estimados es:

$$B = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_k \end{bmatrix}$$

Los residuos, igual que en los apartados precedentes se calculan

$$e = y - \hat{y} = y - XB$$

La suma de residuos al cuadrado será:

$$RSS(B) = \sum e_i^2 = e^T e = y^T y - y^T XB - B^T X^T y + B^T X^T XB$$

El método de mínimos cuadrados consiste en minimizar dicha suma, con lo que se obtiene:

$$B = (X^T X)^{-1} X^T y$$

Todo lo presentado en los apartados precedentes es aplicable en este caso también.

## 2 Residuos

La ecuación del modelo se puede expresar como

$$y = XB + e = \hat{y} + e$$

Es decir, los datos  $y$  se descomponen en parte perteneciente a la recta ( $\hat{y} = XB$ ) y parte no perteneciente a la recta o residuos ( $e$ ). Ambas se pueden calcular ahora ya que se conoce  $B$ .

### 2.1 Matriz H

Se define la matriz  $H$  como:

$$\hat{y} = XB = X(X^T X)^{-1} X^T y = Hy$$

La matriz  $H = X(X^T X)^{-1} X^T$  se denomina en inglés *hat matrix*. Es sencillo comprobar que la matriz  $H$  es simétrica ( $H^T = H$ ) e idempotente ( $H \cdot H = H$ ).

Los residuos se pueden expresar en función de dicha matriz como:

$$e = y - \hat{y} = (I - H)y$$

Se suele utilizar para derivar resultados teóricos. Por ejemplo, utilizando esta matriz se puede demostrar que  $\sum e_i^2 = y^T y - B^T (X^T y)$ .

## 2.2 Ortogonalidad de residuos y regresores

Otra propiedad importante de los residuos es que  $X^T e = 0$ . Efectivamente, sustituyendo el valor de  $B$  en la ecuación del modelo

$$y = XB + e = X(X^T X)^{-1} X^T y + e$$

Multiplicando por la izquierda por  $X^T$  se obtiene

$$X^T y = (X^T X)(X^T X)^{-1} X^T y + X^T e \Rightarrow X^T y = X^T y + X^T e \Rightarrow X^T e = 0$$

Si escribimos dicha propiedad en función de las componentes de las matrices:

$$X^T e = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{k1} \\ 1 & x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{k2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{kn} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \dots \\ e_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Este producto equivale a las siguientes ecuaciones:

$$\sum e_i = 0, \sum x_{1i} e_i = 0, \sum x_{2i} e_i = 0, \dots, \sum x_{ki} e_i = 0$$

La primera ecuación indica que los residuos siempre suman cero. Las siguientes ecuaciones indican que el vector residuos es ortogonal a las columnas de la matriz  $X$  (consideradas estas columnas como vectores). Por tanto es ortogonal al espacio vectorial generado por dichos vectores.

## 3 El modelo en diferencias a la media

### 3.1 Modelo

Dada la ecuación del modelo

$$y_i = b_0 + b_1 x_{1i} + b_2 x_{2i} + \cdots + b_k x_{ki} + e_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Si sumamos en ambos miembros desde 1 hasta  $n$

$$\sum y_i = \sum b_0 + b_1 \sum x_{1i} + b_2 \sum x_{2i} + \cdots + b_k \sum x_{ki} + \sum e_i$$

Teniendo en cuenta que los residuos suman cero

$$\sum y_i = nb_0 + b_1 \sum x_{1i} + b_2 \sum x_{2i} + \cdots + b_k \sum x_{ki}$$

Y dividiendo entre  $n$

$$\bar{y} = b_0 + b_1 \bar{x}_1 + b_2 \bar{x}_2 + \cdots + b_k \bar{x}_k$$

Si a la ecuación del modelo le restamos esta última ecuación se obtiene:

$$y_i - \bar{y} = b_1(x_{1i} - \bar{x}_1) + b_2(x_{2i} - \bar{x}_2) + \cdots + b_k(x_{ki} - \bar{x}_k) + e_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Estas  $n$  ecuaciones se pueden expresar en forma matricial de la misma forma que hicimos antes, obteniendo:

$$\begin{bmatrix} y_1 - \bar{y} \\ y_2 - \bar{y} \\ \dots \\ y_n - \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} - \bar{x}_1 & x_{21} - \bar{x}_2 & \dots & x_{k1} - \bar{x}_k \\ x_{12} - \bar{x}_1 & x_{22} - \bar{x}_2 & \dots & x_{k2} - \bar{x}_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{1n} - \bar{x}_1 & x_{2n} - \bar{x}_2 & \dots & x_{kn} - \bar{x}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \dots \\ e_n \end{bmatrix}$$

Que en este caso se expresa como

$$\tilde{y} = \tilde{X}\tilde{B} + e$$

donde  $\tilde{B}$  es el vector de coeficientes del modelo excepto  $b_0$ .

### 3.2 Estimación del modelo utilizando matrices de covarianzas

Se puede demostrar que  $\tilde{X}^T e = 0$ , por lo que

$$\tilde{X}^T \tilde{y} = \tilde{X}^T \tilde{X} \tilde{B} + \tilde{X}^T e \Rightarrow S_{Xy} = S_{XX} B^*$$

$$\tilde{B} = S_{XX}^{-1} S_{Xy}$$

donde  $S_{Xy}$  es la matriz de covarianzas de  $X$  e  $y$ , y  $S_{XX}$  es la matriz de covarianzas de  $X$ :

$$S_{Xy} = \frac{1}{n-1} \tilde{X}^T \tilde{y} = \begin{bmatrix} S_{1y} \\ S_{2y} \\ \dots \\ S_{ky} \end{bmatrix}$$

$$S_{XX} = \frac{1}{n-1} \tilde{X}^T \tilde{X} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{21} & \dots & S_{k1} \\ S_{12} & S_{22} & \dots & S_{k2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{1k} & S_{2k} & \dots & S_{kk} \end{bmatrix}$$

donde  $S_{ij}$  representa la covarianza entre  $x_i$  e  $x_j$ , y  $S_{iy}$  representa la covarianza entre  $x_i$  e  $y$ .

Las ecuaciones derivadas en este apartado constituyen una alternativa para la estimación de los coeficientes del modelo de regresión lineal.

A modo de resumen:

- Las matrices  $X$  e  $y$  son matrices de **datos**. Con ellas se pueden estimar los parámetros del modelo haciendo  $B = (X^T X)^{-1} X^T y$ .
- Las matrices  $S_{Xy}$  y  $S_{XX}$  son matrices de **covarianzas**. Con ellas se pueden estimar los parámetros del modelo haciendo  $\tilde{B} = S_{XX}^{-1} S_{Xy}$ .

### 3.3 Aplicación a los datos

Para comprobar su funcionamiento, vamos a aplicarlo al caso de dos regresores:

```
d = read.csv("datos/kidiq.csv")
```

```
y = matrix(d$kid_score, ncol = 1)
Xa = cbind(d$mom_iq, d$mom_age) # sin columna de unos!!!!
```

```
(Sxy = cov(Xa,y))
```

```
##           [,1]  
## [1,] 137.244279  
## [2,]   5.071923
```

```
(Sxx = cov(Xa))
```

```
##           [,1]      [,2]  
## [1,] 225.00000 3.711610  
## [2,]   3.71161 7.295777
```

```
(B_a = solve(Sxx) %*% Sxy)
```

```
##           [,1]  
## [1,] 0.6035720  
## [2,] 0.3881286
```

Falta calcular  $b_0$ . Utilizamos la fórmula

$$b_0 = \bar{y} - (b_1\bar{x}_1 + b_2\bar{x}_2 + \cdots + b_k\bar{x}_k)$$

```
( beta0_e = mean(d$kid_score) - colMeans(Xa) %*% B_a )
```

```
##           [,1]  
## [1,] 17.59625
```

## 4 Ejercicios propuestos

1. Demostrar que la matriz  $H$  es simétrica e idempotente.
2. Utilizando la matriz  $H$  demostrar que  $\sum e_i^2 = y^T y - B^T (X^T y)$ .
3. Demostrar que  $\tilde{X}^T e = 0$ .
4. Demostrar que  $\sum e_i^2 = (n-1)s_y^2 - (n-1)\tilde{B}^T S_{Xy}$ .