Inferencia en el modelo de regresión lineal: intervalos de confianza

Contents

1 Introduccion

Un intervalo de confianza para un parámetro es **un rango de valores posibles para dicho parámetro**.

2 Intervalo de confianza para las β_i

2.1 Con matrices de datos

Hemos visto que

$$\hat{\beta} \to N(\beta, \sigma^2 Q)$$

donde $Q = (X^T X)^{-1}$. Esto implica que:

$$\hat{\beta}_i \to N(\beta_i, \sigma^2 Q_{i+1,i+1}), \quad i = 0, 1, 2, \dots, k$$

donde $Q_{i,i}$ es el elemento *(i,i)* de la matriz Q. Aplicando las propiedades de la distribución normal

$$\frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{\sqrt{\sigma^2 Q_{i+1,i+1}}} \to N(0,1), \quad i = 0, 1, 2, \cdots, k.$$

Por tanto:

$$\frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{se(\hat{\beta}_i)} \to t_{n-k-1}, \quad i = 0, 1, 2, \cdots, k.$$

donde

$$se(\hat{\beta}_i) = \sqrt{\hat{s}_R^2 Q_{i+1,i+1}}, \quad i = 0, 1, 2, \cdots, k.$$

Para deducir la expresión anterior se ha tenido en cuenta que

$$\frac{N(0,1)}{\sqrt{\frac{\chi^2_n}{n}}} \rightarrow t_n$$

Por tanto, el intervalo de confianza $100(1-\alpha)\%$ se obtiene como

$$\hat{\beta}_i \pm t_{n-k-1;\alpha/2} se(\hat{\beta}_i), \quad i = 0, 1, 2, \cdots, k.$$

2.2 Con matrices de covarianzas

Tenemos que

$$\hat{\beta}^* \rightarrow N(\beta^*, \sigma^2 \tilde{Q})$$

donde

$$\tilde{Q} = \frac{1}{n-1}(\tilde{X}^T \tilde{X})^{-1}$$

Esto implica que:

$$\hat{\beta}_i \rightarrow N(\beta_i, \sigma^2 \tilde{Q}_{i,i}), \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

donde $\tilde{Q}_{i,j}$ es el elemento *(i,j)* de la matriz $\tilde{Q}$. Por tanto, siguiendo el razonamiento del apartado anterior:

$$se(\hat{\beta}_i) = \sqrt{\hat{s}^2_R \hat{Q}_{i,i}}, \quad i = 1, 2, \cdots, k$$

Para $\hat{\beta}_0$ tenemos que

$$\hat{\beta}_0 \sim N\left(\beta_0, \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}\bar{x}^T S^{-1}_{XX} \bar{x}\right)\right)$$

Por tanto

$$se(\hat{\beta}_0) = \sqrt{\hat{s}^2_R \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}\bar{x}^T S^{-1}_{XX} \bar{x}\right)}$$

Finalmente, el intervalo de confianza $100(1-\alpha)\%$ se obtiene como

$$\hat{\beta}_i \pm t_{n-k-1;\alpha/2} se(\hat{\beta}_i), \quad i = 0, 1, 2, \cdots, k.$$

3 Intervalo de confianza para σ^2

Partimos de la distribución en el muestreo:

$$\frac{(n-k-1)\hat{s}^2_R}{\sigma^2} \rightarrow \chi^2_{n-k-1}$$

Despejando:

$$\frac{(n-k-1)\hat{s}_R^2}{\chi^2_{n-k-1;\alpha/2}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(n-k-1)\hat{s}_R^2}{\chi^2_{n-k-1;1-\alpha/2}}$$

4 Ejemplo

Vamos a calcular de manera detallada los intervalos de confianza para el modelo $kid\_score \sim mom\_iq + mom\_hs$:

```
d = read.csv("datos/kidiq.csv")
#d$mom_hs = factor(d$mom_hs, labels = c("no", "si"))
```

```
m = lm(kid_score ~ mom_iq + mom_hs, data = d)
```

Los parámetros estimados son:

```
coef(m)
```

```
## (Intercept)      mom_iq      mom_hs
##   25.731538    0.563906    5.950117
```

```
# varianza residual
n = nrow(d)
k = 2 # numero de regresores
(sR2 = sum(resid(m)^2)/(n-k-1))
```

```
## [1] 328.9028
```

Vamos a calcular la varianza de los parámetros estimados, es decir $var(\hat{\beta}_i) = \hat{s}_R^2 Q_{i+1,i+1}$:

```
X = cbind(rep(1,n), d$mom_iq, d$mom_hs)
# Q = inv(t(X)*X)
(Q = solve(crossprod(X))) # crossprod es otra manera de calcular t(X) %*% X
```

```
##                [,1]          [,2]          [,3]
## [1,]  0.1049491626 -1.025110e-03 -0.0001705848
## [2,] -0.0010251098  1.115594e-05 -0.0001151616
## [3,] -0.0001705848 -1.151616e-04  0.0148740410
```

Por tanto, la matriz de varianzas de los estimadores será

```
(beta_var = sR2 * Q)
```

```
##              [,1]         [,2]        [,3]
## [1,] 34.51806922 -0.337161456 -0.05610582
## [2,] -0.33716146  0.003669219 -0.03787697
## [3,] -0.05610582 -0.037876974  4.89211314
```

Y el standard error de los estimadores, $se(\hat{\beta}_i)$:

```
(beta_se = sqrt(diag(beta_var)))
```

```
## [1] 5.87520802 0.06057408 2.21181218
```

Vamos a calcular ahora el standard error de los estimadores con la matriz de varianzas de los regresores:

```
Xa = cbind(d$mom_iq, d$mom_hs)
(Qa = 1/(n-1)*solve(var(Xa)))
```

```
##                [,1]          [,2]
## [1,]  1.115594e-05 -0.0001151616
```

```
## [2,] -1.151616e-04  0.0148740410
```

El standard error de los estimadores $\hat{\beta}_1$ y $\hat{\beta}_2$ son:

```
sqrt(diag(Qa)*sR2)
```

```
## [1] 0.06057408 2.21181218
```

Para $\hat{\beta}_0$:

```
( xmed = matrix(colMeans(Xa), ncol = 1) )
```

```
##              [,1]
## [1,] 100.0000000
## [2,]   0.7857143
```

```
sqrt( sR2*(1/n + 1/(n-1)*t(xmed) %*% solve(var(Xa)) %*% xmed ) )
```

```
##          [,1]
## [1,] 5.875208
```

Por último, R dispone de una función para calcular la matriz de varianzas de los parámetros estimados, es decir $var(\hat{\beta}) = Q_{ii}\hat{s}_R^2$, mediante:

```
vcov(m)
```

```
##             (Intercept)       mom_iq      mom_hs
## (Intercept) 34.51806922 -0.337161456 -0.05610582
## mom_iq      -0.33716146  0.003669219 -0.03787697
## mom_hs      -0.05610582 -0.037876974  4.89211314
```

Por tanto, el standard error de los estimadores será

```
sqrt(diag(vcov(m)))
```

```
## (Intercept)      mom_iq      mom_hs
##  5.87520802  0.06057408  2.21181218
```

Como vemos, los tres métodos dan el mismo resultado.

El valor de la t con n-k-1 = 431 grados de libertad es

```
(t1 = qt(1-0.05/2, df = n-k-1))
```

```
## [1] 1.965483
```

El límite inferior (LI) y el límite superior de los intervalos será:

```
(LI = coef(m) - qt(1-0.05/2, df = n-k-1)*beta_se)
```

```
## (Intercept)      mom_iq      mom_hs
##  14.1839148   0.4448487   1.6028370
```

```
(LS = coef(m) + qt(1-0.05/2, df = n-k-1)*beta_se)
```

```
## (Intercept)      mom_iq      mom_hs
##  37.2791615   0.6829634  10.2973969
```

Si lo juntamos todo en una tabla

```
data.frame(estimacion = coef(m), se = beta_se, LI, LS)
```

```
##             estimacion         se         LI         LS
## (Intercept)  25.731538 5.87520802 14.1839148 37.2791615
## mom_iq        0.563906 0.06057408  0.4448487  0.6829634
```

```
## mom_hs        5.950117 2.21181218  1.6028370 10.2973969
```

Directamente, mediante la función *confint()* de R se pueden obtener dichos valores:

```r
confint(m)
```

```
##                  2.5 %     97.5 %
## (Intercept) 14.1839148 37.2791615
## mom_iq       0.4448487  0.6829634
## mom_hs       1.6028370 10.2973969
```

Si queremos otro nivel de confianza, por ejemplo, 90%:

```r
confint(m, level = 0.90)
```

```
##                    5 %       95 %
## (Intercept) 16.0468646 35.4162117
## mom_iq       0.4640559  0.6637562
## mom_hs       2.3041730  9.5960608
```

- En el caso de la varianza del modelo. Su estimador es:

```r
sR2
```

```
## [1] 328.9028
```

Y su intervalo de confianza:

```r
c((n-k-1)*sR2/qchisq(1-0.05/2, df = n-k-1), (n-k-1)*sR2/qchisq(0.05/2, df = n-k-1))
```

```
## [1] 289.0557 377.6434
```