# Modelo con un regresor

#### Contents

L	Introducción	1
2	Ecuación del modelo	2
3	Notación matricial del modelo	3
1	Estimación del modelo usando mínimos cuadrados	4
5	Datos, modelo y residuos	4
3	Aplicacion a los datos del ejemplo	5
7	Bondad del modelo ajustado	6
1	Introducción	
Va	amos a leer el archivo de datos kidiq.csv:	

```
d = read.csv("datos/kidiq.csv")
```

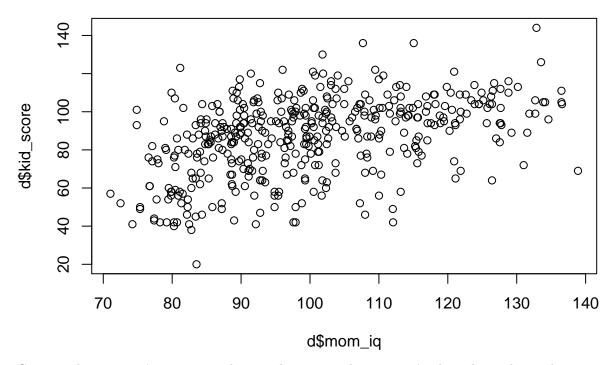
```
'data.frame':
                434 obs. of 5 variables:
 $ kid_score: int 65 98 85 83 115 98 69 106 102 95 ...
$ mom hs
           : int 1 1 1 1 1 0 1 1 1 1 ...
 $ mom iq
           : num 121.1 89.4 115.4 99.4 92.7 ...
 $ mom work : int  4 4 4 3 4 1 4 3 1 1 ...
 $ mom_age : int 27 25 27 25 27 18 20 23 24 19 ...
```

donde se recogen datos de las siguientes variables:

- kid\_score : puntuacion de un test cognitivo en niños de 3-4 años
- mom hs:
  - mom\_hs = 1 : las madres han terminado secundaria (high school)
  - mom hs = 0: las madres no terminaron secundaria
- mom\_iq : puntuación de la madre en otro test cognitivo
- mom\_work:
  - mom work = 1 : la madre no trabajó en los primeros tres años del niño
  - mom work = 2 : la madre trabajó en el segundo o tercer año
  - mom\_work = 3 : la madre trabajó a tiempo parcial el primer año
  - mom\_work = 4 : la madre trabajó a tiempo completo el primer año
- mom\_age : edad de la madre

Estamos interesados en estudiar si la puntuación obtenida por los niños (variable kid\_score) está relacionada con la puntuación obtenida por las madres (mom\_iq). Primero dibujamos el gráfico de dispersión:

```
plot(d$mom_iq, d$kid_score)
```



Como se observa, en términos generales cuando mayor es la puntuación obtenida por las madres mayor es la puntuación de los niños.

### 2 Ecuación del modelo

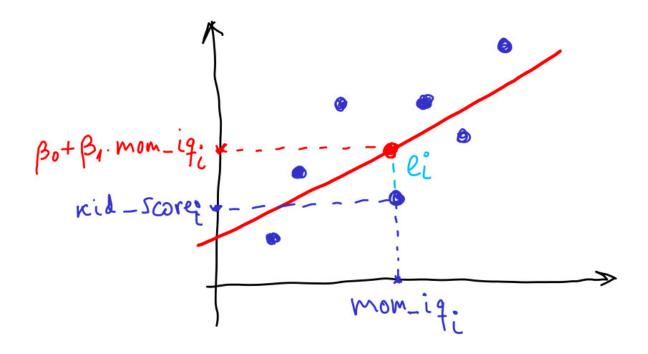
El modelo más sencillo que relaciona ambas variables es el modelo lineal:

$$kid\_score_i = \beta_0 + \beta_1 mom\_iq_i, i = 1, 2, \cdots, n$$

Es la ecuación de una recta. Sin embargo, es imposible calcular una recta que pase por todos los puntos del gráfico. Otra posibilidad es utilizar el modelo:

$$kid\_score_i = \beta_0 + \beta_1 mom\_iq_i + e_i, i = 1, 2, \dots, n$$

es decir, se incluye el término  $e_i$  que modele la diferencia entre el valor observado en  $kid\_score_i$  y el valor que toma la recta en ese punto  $(b_0 + b_1 mom\_iq_i)$ .



Estos términos se denominan **residuos**, y se definen como:

$$e_i = kid \ score_i - (\beta_0 + \beta_1 mom \ iq_i), \ i = 1, 2, \cdots, n$$

### 3 Notación matricial del modelo

El modelo anterior se denomina **modelo de regresión lineal con un regresor**. De forma genérica se puede escribir así:

$$kid\_score_i = \beta_0 + \beta_1 mom\_iq_i + e_i, i = 1, 2, \cdots, n$$

Si escribimos la ecuación para todos los datos disponibles:

$$i = 1 \Rightarrow kid\_score_1 = \beta_0 + \beta_1 mom\_iq_1 + e_1$$

$$i = 2 \Rightarrow kid\_score_2 = \beta_0 + \beta_1 mom\_iq_2 + e_2$$

. . .

$$i = n \Rightarrow kid\_score_n = \beta_0 + \beta_1 mom\_iq_n + e_n$$

Agrupando:

$$\begin{bmatrix} kid\_score_1 \\ kid\_score_2 \\ \vdots \\ kid\_score_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & mom\_iq_1 \\ 1 & mom\_iq_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & mom\_iq_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

Finalmente, en notación matricial:

$$y = X\beta + e$$

donde  $\beta$  es el vector de parámetros:

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix}$$

#### 4 Estimación del modelo usando mínimos cuadrados

El modelo propuesto depende de dos parámetros,  $\beta_0$  y  $\beta_1$ , que son desconocidos. Existen diferentes métodos para calcular dichos parámetros, entre ellos, el método de mínimos cuadrados. Este método consiste en calcular el valor del vector  $\beta$  que minimiza la suma de los residuos al cuadrado (RSS, residuals sum of squares):

$$RSS = \sum e_i^2 = e^T e = (y - X\beta)^T (y - X\beta) = RSS(\beta)$$

Desarrollando el producto:

$$RSS(\beta) = y^T y - y^T X \beta - \beta^T X^T y + \beta^T X^T X \beta$$

Para calcular el mínimo se deriva respecto a  $\beta$  y se iguala a cero (ver Apendice)

$$\frac{dRSS(\beta)}{d\beta} = -X^T y - X^T y + (X^T X + X^T X)\beta = 0$$

$$\beta = (X^T X)^{-1} X^T y$$

## 5 Datos, modelo y residuos

Los datos disponibles son

$$\{kid\ score_i,\ mom\ iq_i\},\ i=1,\cdots,n$$

Esos datos los modelamos utilizando la ecuación:

$$kid\_score_i = \beta_0 + \beta_1 mom\_iq_i + e_i, i = 1, 2, \dots, n$$

Es decir, para una madre dada  $mom\_iq_i$ , dividimos la puntuación de su hijo  $kid\_score_i$  en dos partes: la parte que corresponde a la recta  $b_0 + b_1 mom\_iq_i$  y los residuos  $e_i$ . La parte correspondiente a la recta se puede representar matricialmente como:

$$\hat{y} = X\beta$$

donde  $\hat{y} = [\hat{y}_1 \ \hat{y}_2 \ \cdots \ \hat{y}_n]^T$ . Por tanto los residuos se pueden calcular como

$$e_i = y_i - \hat{y}_i, \ i = 1, 2, \dots, n$$

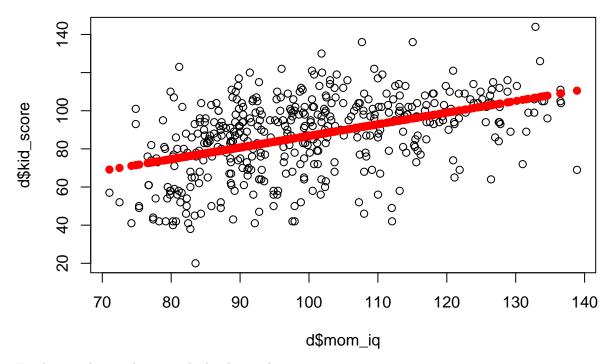
o en forma matricial

$$e = y - \hat{y}$$

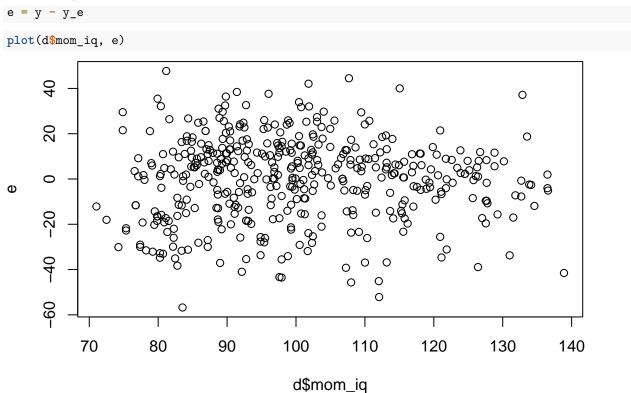
### 6 Aplicacion a los datos del ejemplo

• Matrices del modelo

```
y = matrix(d$kid_score, ncol = 1)
head(y)
##
        [,1]
## [1,]
          65
## [2,]
          98
## [3,]
          85
## [4,]
          83
## [5,]
         115
## [6,]
n = nrow(d)
X = cbind(rep(1,n), d$mom_iq)
head(X)
##
        [,1]
                   [,2]
## [1,]
           1 121.11753
## [2,]
           1 89.36188
## [3,]
           1 115.44316
## [4,]
           1 99.44964
## [5,]
           1 92.74571
           1 107.90184
## [6,]
  • Estimacion
Xt_X = t(X) %%X
Xt_y = t(X) \% 
( beta = solve(Xt_X) %*% Xt_y )
##
               [,1]
## [1,] 25.7997778
## [2,] 0.6099746
  • valores de la recta
y_e = X %*% beta
Estos valores se pueden representar
plot(d$mom_iq, d$kid_score)
points(d$mom_iq, y_e, col = "red", pch = 19)
```



Finalmente, los residuos se calculan haciendo



## 7 Bondad del modelo ajustado

Es conveniente medir como de bueno es el ajuste del modelo. Una posibilidad es usar la suma de los residuos al cuadrado o RSS:

$$(RSS = sum(e^2))$$

#### ## [1] 144137.3

Pero esta variable depende de las unidades de x e y. Por tanto es difícil saber si un RSS alto indica que el modelo es bueno o malo. Lo ideal es utilizar variables adimensionales. La manera mas usual es utilizar el coeficiente de determinación o  $\mathbb{R}^2$ :

$$R^2 = 1 - \frac{RSS}{TSS}$$

donde TSS es la suma total de cuadrados

$$TSS = \sum (y_i - \bar{y})^2$$

 $(TSS = sum((y-mean(y))^2))$ 

## [1] 180386.2

(R2 = 1 - RSS/TSS)

## [1] 0.2009512

El coeficiente  $\mathbb{R}^2$  toma valores entre cero y uno.

La suma total de cuadrados de y está relacionado con su varianza, ya que

$$s_y^2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n-1} \Rightarrow TSS = (n-1)s_y^2$$

(n-1)\*var(y)

## Г.1

## [1,] 180386.2