

# Comprobación de las hipótesis del modelo: diagnosis

## Contents

<b>1</b>	<b>Hipótesis del modelo y residuos</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Análisis gráfico de los residuos</b>	<b>2</b>
2.1	Residuos frente a valores predichos . . . . .	2
2.2	Gráfico Cuantil-Cuantil . . . . .	4
2.3	Gráfico de residuos estandarizados vs valores predichos. . . . .	6
2.4	En R . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Datos atípicos</b>	<b>8</b>

## 1 Hipótesis del modelo y residuos

Recordamos el modelo:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \cdots + \beta_k x_{ki} + u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Además se considera que  $u_i \sim N(0, \sigma^2)$ . Esta hipótesis implica:

- Normalidad
- Esperanza igual a cero:  $E[u_i] = 0$ .
- Varianza constante: todos los  $u_i$  tienen la misma varianza.
- Independencia:  $Cov[u_i, u_j] = 0 \quad \forall i, j, \quad i \neq j$

La variable aleatoria  $u_i$  no se observa, por lo que se trabaja con los residuos:

$$e_i = y_i - (\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{1i} + \hat{\beta}_2 x_{2i} + \cdots + \hat{\beta}_k x_{ki}) = y_i - \hat{y}_i$$

En forma vectorial:

$$e = y - \hat{y} = (I - H)y$$

ya que  $\hat{y} = X\hat{\beta} = X(X^T X)^{-1} X^T y = Hy$ , donde  $H = X(X^T X)^{-1} X^T$ . Sustituyendo el valor de  $y$ :

$$e = (I - H)(X\beta + U) = (I - H)U$$

ya que  $HX = X$ . Por tanto, los errores del modelo y los residuos no son intercambiables, sino que los residuos son una combinación lineal de los errores.

Debido a que  $U \sim N(0, \sigma^2 I)$ , los residuos tienen distribución  $e \sim N(0, \sigma^2(I - H))$  puesto que

$$E[e] = 0$$

$$Var(e) = \sigma^2(I - H)$$

ya que la matriz  $H$  es simétrica ( $H = H^T$ ) e idempotente ( $H \cdot H = H$ ). La varianza de cada residuo viene dada por:

$$Var(e_i) = \sigma^2(1 - h_{ii}), \quad i = 1, \dots, n$$

donde  $h_{ii}$  es el elemento de la diagonal de  $H$ . A partir de estos valores se definen los *residuos estandarizados*:

$$r_i = \frac{e_i}{\hat{s}_R \sqrt{1 - h_{ii}}}$$

que tienen varianza aproximadamente uno ya que la varianza residual es un estimador centrado de la varianza del modelo.

Los residuos estandarizados se utilizan para comprobar las hipótesis del modelo.

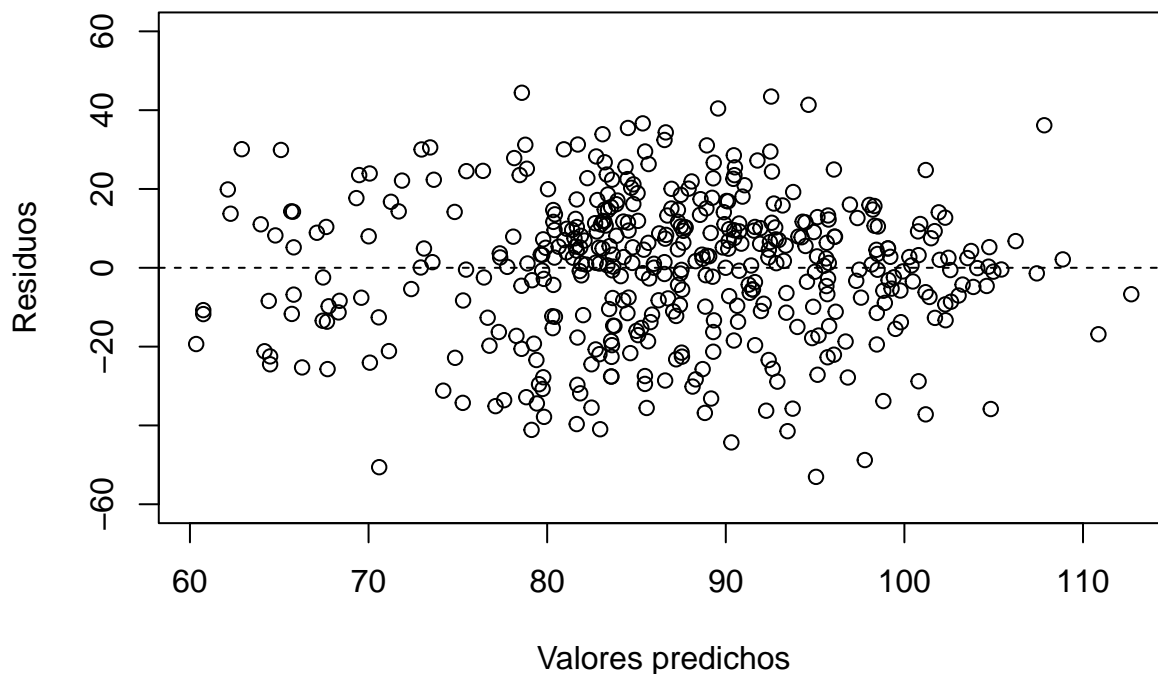
## 2 Análisis gráfico de los residuos

En general se prefiere analizar los residuos de manera gráfica en lugar de un análisis más cuantitativo.

### 2.1 Residuos frente a valores predichos

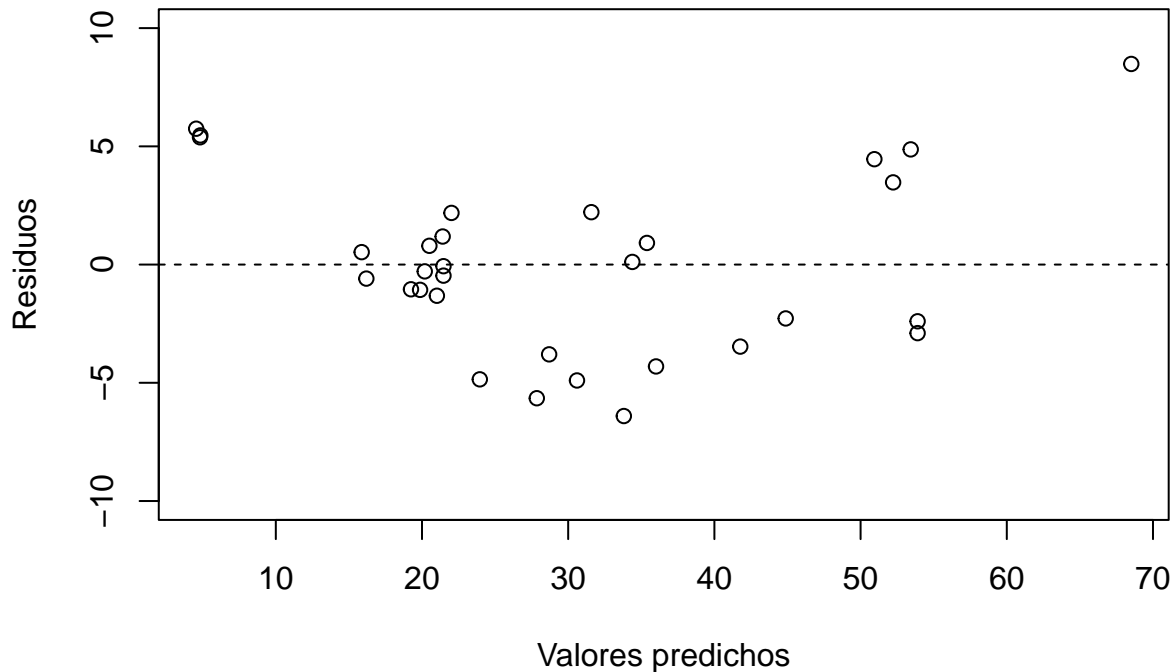
La herramienta más usada es el gráfico de residuos frente a valores predichos

```
d = read.csv("datos/kidiq.csv")
d$mom_hs = factor(d$mom_hs, labels = c("no", "yes"))
d$mom_work = factor(d$mom_work)
m = lm(kid_score ~ mom_iq * mom_hs + mom_age + mom_work, data = d)
#
plot(fitted(m), residuals(m), xlab = "Valores predichos", ylab = "Residuos", ylim = c(-60, 60))
abline(h=0, lty = 2)
```



- Esperanza cero: los residuos se deben distribuir homogéneamente a un lado y otro del eje X.
- Varianza constante (también conocido como homocedasticidad): la varianza de los residuos es constante, la anchura de los residuos es constante.
- Cuando hay heterocedasticidad la dispersión de los residuos suele aumentar con el valor de  $\hat{y}_i$ .
- Por ejemplo, sean los datos:

```
d2 = read.table("datos/cerezos.txt", header = T)
m2 = lm(volumen ~ diametro + altura, data = d2)
plot(fitted(m2), residuals(m2), xlab = "Valores predichos", ylab = "Residuos", ylim = c(-10,10))
abline(h=0, lty = 2)
```

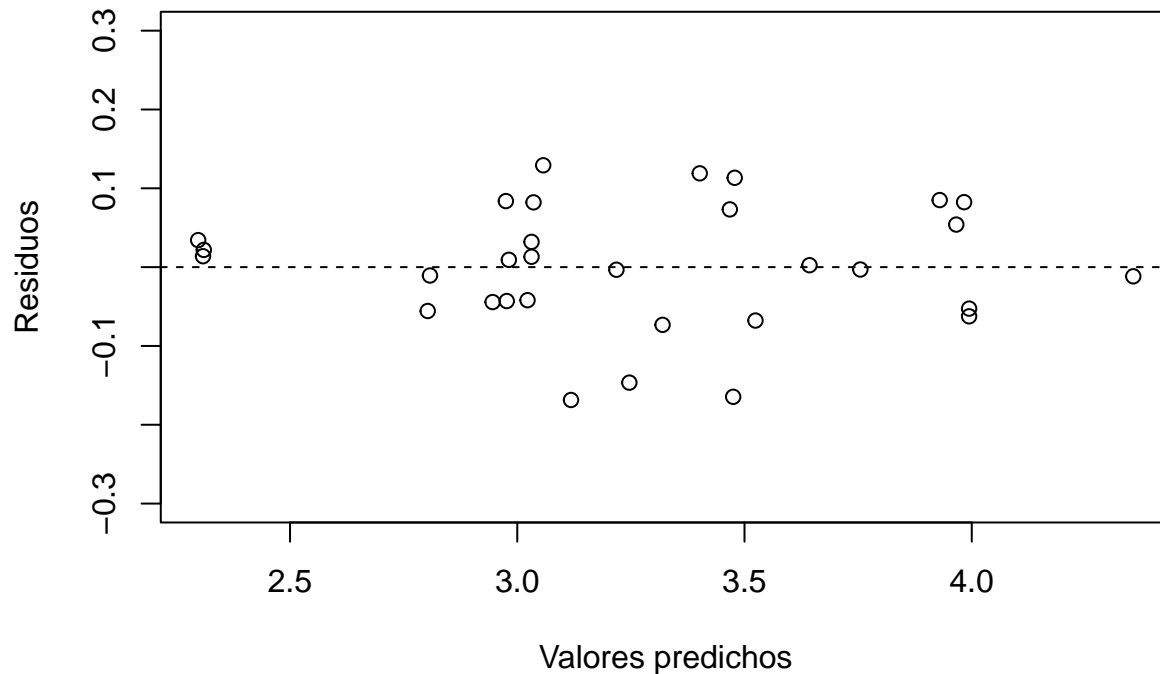


En este caso, no se cumple homocedasticidad ni esperanza cero. Esto último indica que el modelo lineal no es el adecuado.

- Los problemas de falta de linealidad se pueden corregir con transformaciones.
- Los problemas de varianza no constante se pueden corregir también con transformaciones.
- Las transformaciones puede ser de una variable, de varias variables o de todas las variables simultáneamente.
- Las transformaciones más usuales son:  $\sqrt{x}$ ,  $\log$ ,  $x^2$ ,  $1/x$
- También se puede utilizar mínimos cuadrados generalizados para corregir los problemas de varianza.

En este caso, utilizamos transformaciones de todas las variables:

```
m2a = lm(log(volumen) ~ log(diametro) + log(altura), data = d2)
plot(fitted(m2a), residuals(m2a), xlab = "Valores predichos", ylab = "Residuos", ylim = c(-0.3,0.3))
abline(h=0, lty = 2)
```



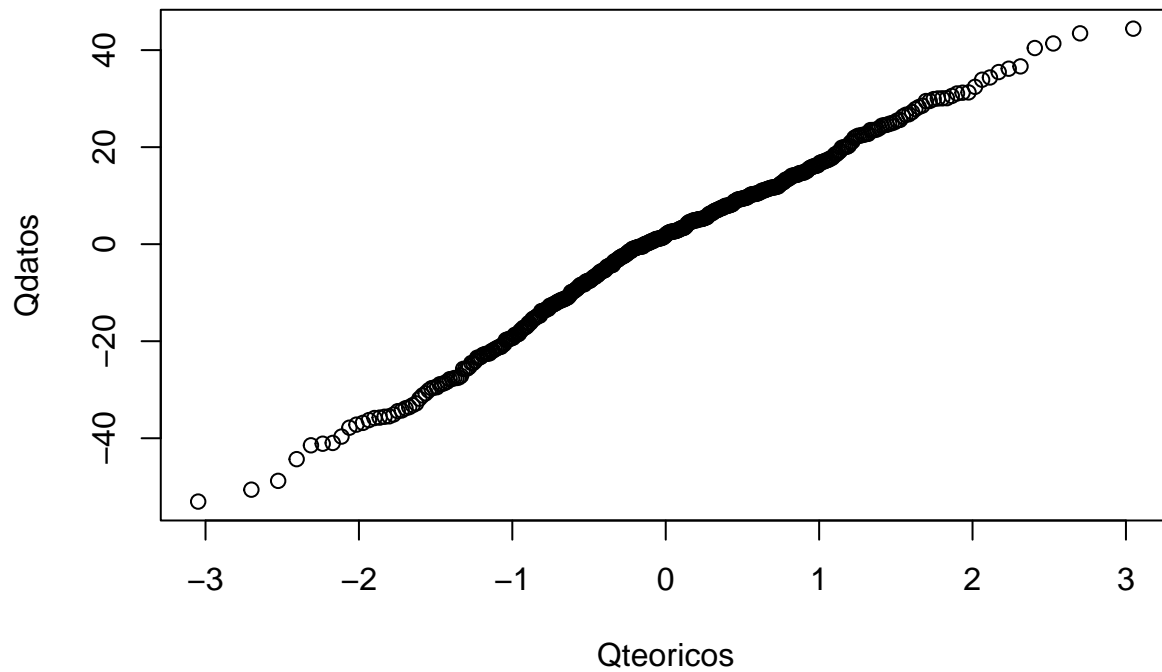
## 2.2 Gráfico Cuantil-Cuantil

Se utiliza para verificar la hipótesis de normalidad. En este gráfico se comparan los  $n$  datos ordenados de menor a mayor con  $n$  datos ordenados que provienen de la distribución  $N(0,1)$ . Para obtener estos datos teóricos se consideran los cuantiles de la  $N(0,1)$ , es decir, los puntos tales  $x_i$  que a  $P(X \leq x_i) = (i - 0.5)/n$ , donde  $n$  es el número de datos,  $i = 1, 2, \dots, n$ . De esta manera obtenemos valores teóricos distribuidos uniformemente en el rango de la variable  $N(0,1)$ . En realidad dichos valores  $x_i$  son cuantiles de la  $N(0,1)$ .

```
Qdatos = sort(residuals(m))
#
n = length(residuals(m))
i = 1:n
q = (i-0.5)/n
Qteoricos = qnorm(q)
```

- Se representa  $Q_{teoricos}$  vs  $Q_{datos}$ .

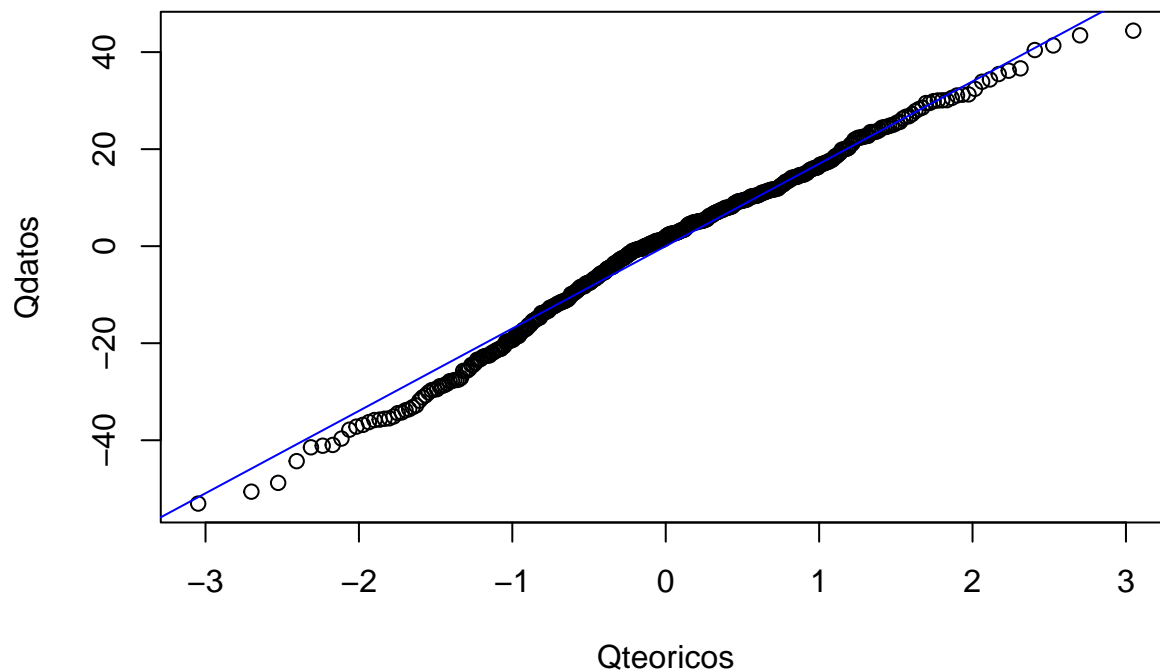
```
plot(Qteoricos, Qdatos)
```



- Según la ayuda de R, `qqline()` pasa por el primer y tercer cuartil.

```
plot(Qteóricos,Qdatos)
```

```
# qqline
x1 <- qnorm(0.25)
x2 <- qnorm(0.75)
y1 <- quantile(residuals(m), 0.25)
y2 <- quantile(residuals(m), 0.75)
# mas general
b = (y2-y1)/(x2-x1) # pendiente
a = y1 - b*x1 # y1 = a + b*x1
abline(a,b, col = "blue", lwd = 1) # y = a + b*x
```



Para comprobar la normalidad también se puede utilizar un test de bondad de ajuste. Uno de los más utilizados es el test de normalidad de Shapiro:

- H0: los residuos tienen distribución normal
- H1: los residuos NO tienen distribución normal

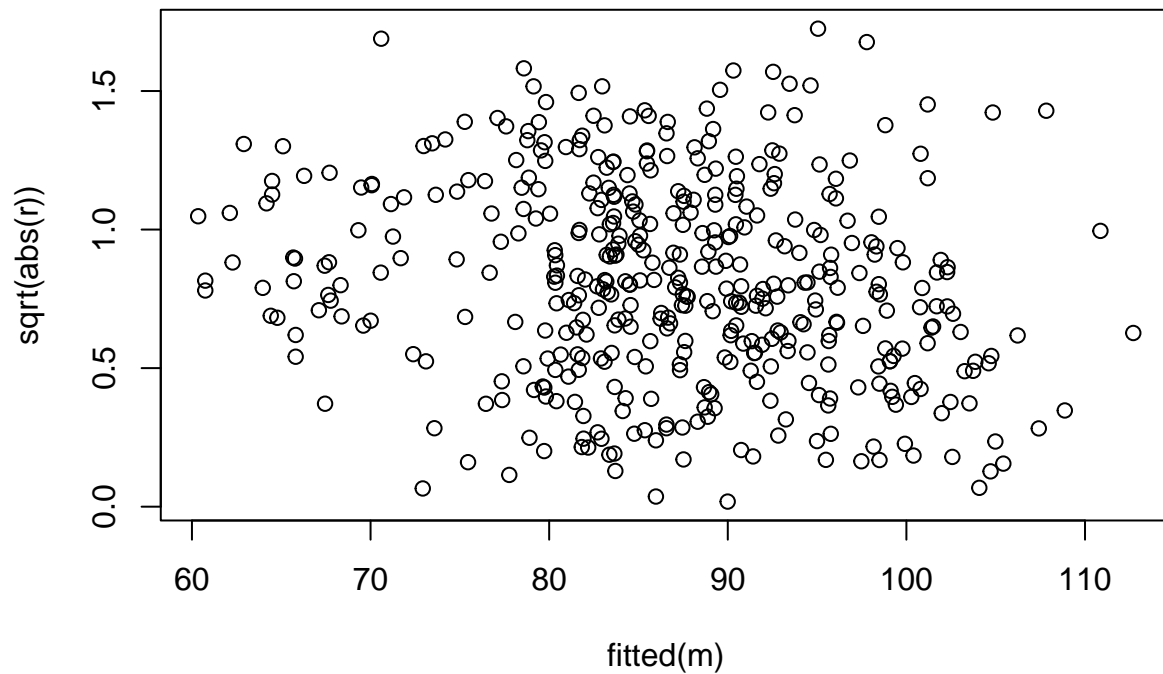
```
shapiro.test(resid(m))
```

```
##
##  Shapiro-Wilk normality test
##
## data:  resid(m)
## W = 0.98949, p-value = 0.003345
```

### 2.3 Gráfico de residuos estandarizados vs valores predichos.

Se utiliza para comprobar la homocedasticidad:

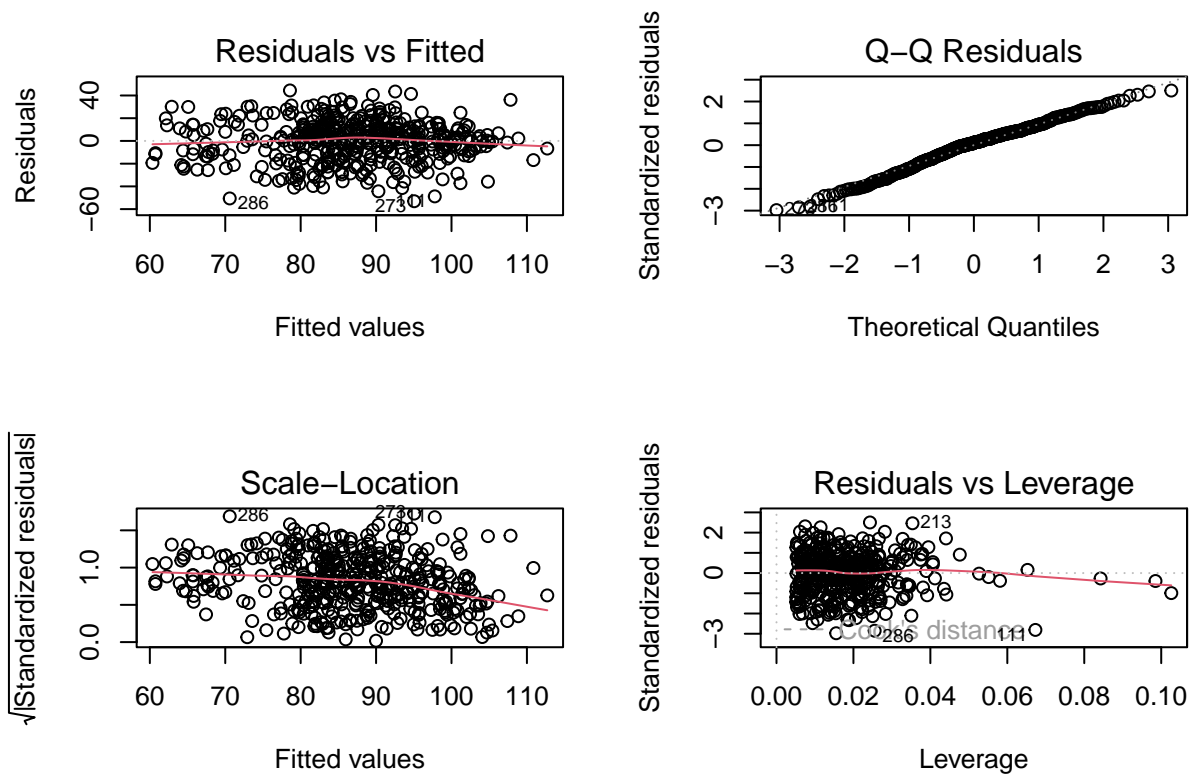
```
sR = sqrt(sum(resid(m)^2)/m$df.residual)
X = model.matrix(m)
H = X %>% solve(t(X) %>% X) %>% t(X)
h = diag(H)
r = resid(m)/(sR*sqrt(1-h))
plot(fitted(m), sqrt(abs(r)))
```



## 2.4 En R

Los gráficos anteriores se pueden obtener directamente en R:

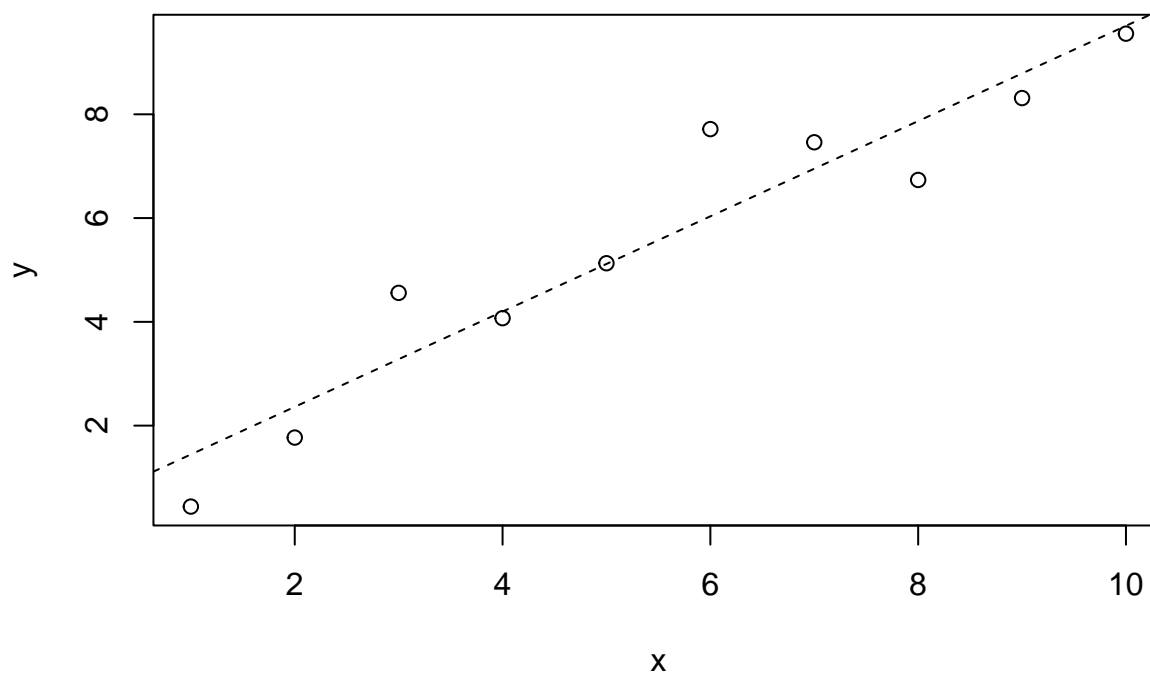
```
par(mfrow=c(2,2))
plot(m)
```



### 3 Datos atípicos

Para trabajar este apartado vamos a utilizar datos simulados:

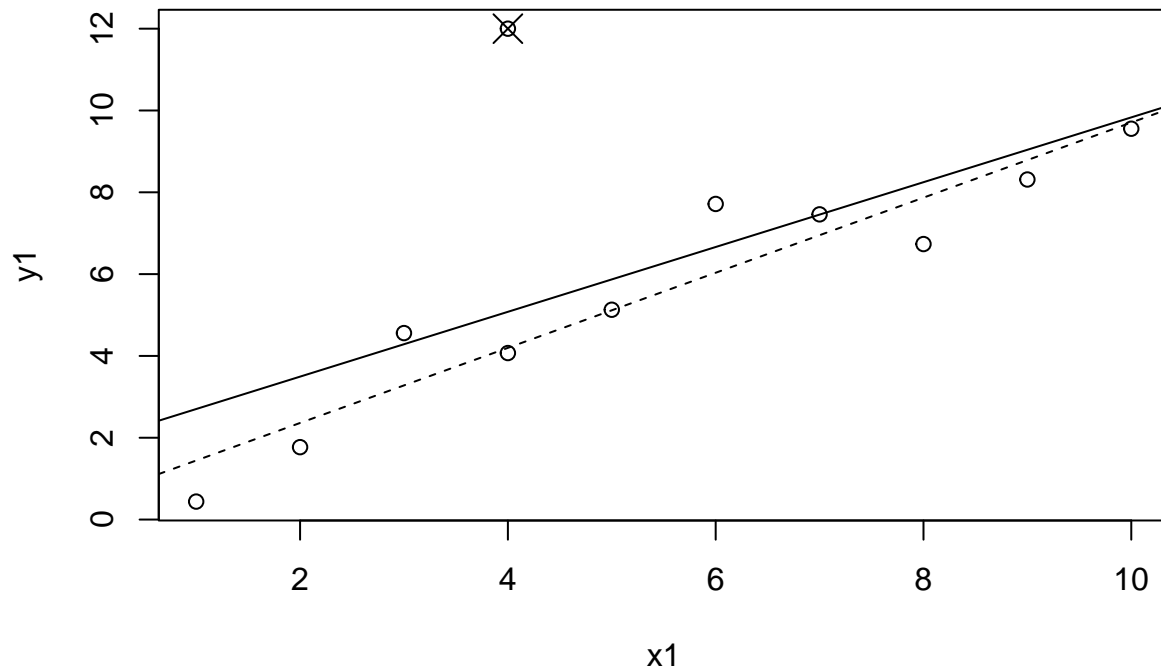
```
set.seed(123)
x = 1:10
y = x + rnorm(10)
msim = lm(y ~ x)
plot(x,y)
abline(msim, lty = 2)
```



Un atípico es aquel dato que tiene una Y diferente con respecto a resto de los datos.

```
x1 = c(x,4)
y1 = c(y,12)
msim1 = lm(y1 ~ x1)
plot(x1,y1)
abline(msim, lty = 2)
abline(msim1)
points(4, 12, pch = 4, cex = 2)
```

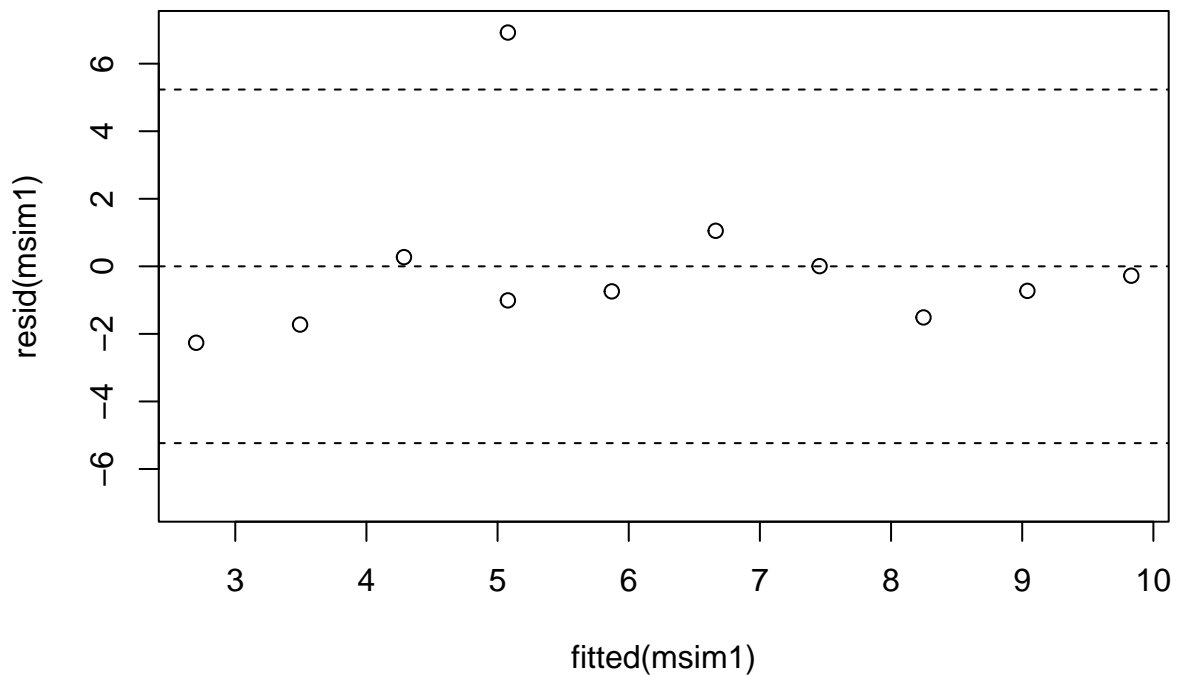




Como se observa, los datos atípicos pueden modificar la estimación de los parámetros del modelo. Podemos considerar que el residuo es atípico si

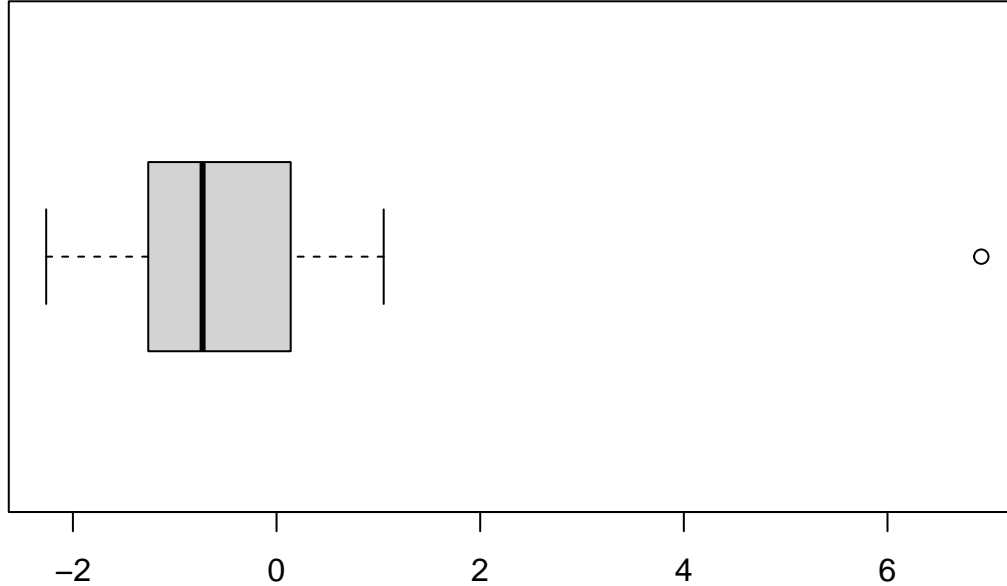
- está fuera de las bandas  $\pm 2\hat{s}_R^2$ , ya que en una normal estaría el 95% de los datos.

```
plot(fitted(msim1), resid(msim1), ylim = c(-7,7))
sR = sqrt( sum(resid(msim1)^2)/(length(x1)-2) )
abline(h = 0, lty = 2)
abline(h = 2*sR, lty = 2)
abline(h = -2*sR, lty = 2)
```



- También se puede utilizar el criterio del gráfico boxplot:

```
boxplot(resid(msim1), horizontal = T)
```



Los atípicos pueden deberse a errores en la toma de los datos. En este caso se pueden eliminar del análisis. Pero otras veces no se corresponden con un error, por lo que si no estamos seguros de que es un error, no se aconseja eliminar los atípicos:

*La NASA lanzó el satélite Nimbus 7 para registrar datos atmosféricos. Tiempo después, el British Antarctic Survey observó un descenso importante del ozono atmosférico en la Antártida que no se había detectado en los datos recogidos por dicho satélite. La causa fue que el sistema de recogida de datos no guardaba los datos que eran demasiado bajos ya que los consideraba errores. Esto motivó que la detección del agujero en la capa de ozono se retrasara varios años.*