

Bondad del ajuste en el modelo de regresión lineal

Contents

1	Coefficiente de determinacion R^2	1
2	Coefficiente de determinacion ajustado R_a^2	2
3	Ejemplo	3

Estamos interesados en evaluar como de bueno es el modelo que se ha estimado. La calidad del modelo se puede calcular utilizando diferentes métricas:

1 Coeficiente de determinacion R^2

Dado unos datos $(x_{1i}, \dots, x_{ki}, y_i)$, $i = 1, \dots, n$, se estima el modelo de regresión lineal

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \dots + \beta_k x_{ki} + u_i$$

obteniendo

$$y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{1i} + \dots + \hat{\beta}_k x_{ki} + e_i$$

Es usual definir

$$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{1i} + \dots + \hat{\beta}_k x_{ki}$$

por lo que

$$y_i = \hat{y}_i + e_i$$

Ya hemos visto que a partir de esta expresión se obtiene:

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \sum_{i=1}^n e_i^2$$

$$SST = SSM + SSR$$

donde:

- SST: suma de cuadrados total
- SSM: suma de cuadrados correspondientes al modelo.
- SSR: suma de cuadrados correspondientes a los residuos.

Es decir, dividimos la suma de cuadrados total entre modelo y residuos. Por tanto es lógico definir un coeficiente dividiendo SSM entre SST , es decir, calcular el porcentaje de la suma de cuadrados que corresponde al modelo. Dicho coeficiente se llama **coeficiente de determinación**:

$$R^2 = \frac{SSM}{SST} = 1 - \frac{SSE}{SST}$$

Este coeficiente toma valores entre 0 y 1:

- Si el modelo es bueno, la suma de cuadrados del modelo será grande, $R^2 \approx 1$.
- Si el modelo es malo, la suma de cuadrados del modelo será pequeña, $R^2 \approx 0$.

2 Coeficiente de determinación ajustado R_a^2

El coeficiente de determinación se ha definido como

$$R^2 = 1 - \frac{SSE}{SST} = 1 - \frac{(n-k-1)\hat{s}_R^2}{(n-1)\hat{s}_y^2}$$

Imaginemos que $\beta_k = 0$, es decir, que el regresor x_k no aporta información al modelo. Entonces podríamos estimar el modelo:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \cdots + \beta_{k-1} x_{(k-1)i} + u_i$$

con R_1^2 . En principio se debería cumplir que $R^2 = R_1^2$. Sin embargo,

$$(n - (k-1) - 1) > (n - k - 1)$$

$$(n - k)\hat{s}_R^2 > (n - k - 1)\hat{s}_R^2$$

$$\frac{(n - k)\hat{s}_R^2}{(n - 1)\hat{s}_y^2} > \frac{(n - k - 1)\hat{s}_R^2}{(n - 1)\hat{s}_y^2}$$

$$-\frac{(n - k)\hat{s}_R^2}{(n - 1)\hat{s}_y^2} < -\frac{(n - k - 1)\hat{s}_R^2}{(n - 1)\hat{s}_y^2}$$

$$1 - \frac{(n - k)\hat{s}_R^2}{(n - 1)\hat{s}_y^2} < 1 - \frac{(n - k - 1)\hat{s}_R^2}{(n - 1)\hat{s}_y^2}$$

$$R_1^2 < R^2$$

Por tanto, el coeficiente de determinación disminuye al aumentar el número de regresores k , aunque esos regresores no aporten información al modelo. Por este motivo se define el coeficiente de determinación ajustado:

$$R_a^2 = 1 - \frac{\hat{s}_R^2}{\hat{s}_y^2} = 1 - \frac{(n - k - 1)SSM}{(n - 1)SST}$$

Cuando comparamos modelos con diferente número de regresores es preferible utilizar R_a^2 .

3 Ejemplo

```
d = read.csv("datos/kidiq.csv")
d$mom_hs = factor(d$mom_hs, labels = c("no", "si"))
d$mom_work = factor(d$mom_work, labels = c("notrabaja", "trabaja23", "trabaja1_parcial", "trabaja1_completo"))

m1 = lm(kid_score ~ mom_iq + mom_age + mom_hs + mom_work, data = d)
summary(m1)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = kid_score ~ mom_iq + mom_age + mom_hs + mom_work,
##     data = d)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -54.414 -12.095   2.015  11.653  49.100
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)    20.27273     9.39320   2.158  0.0315 *
## mom_iq          0.55288     0.06138   9.008 <2e-16 ***
## mom_age         0.21629     0.33351   0.649  0.5170
## mom_hssi        5.43466     2.32518   2.337  0.0199 *
## mom_worktrabaja23  2.98266     2.81289   1.060  0.2896
## mom_worktrabaja1_parcial  5.48824     3.25239   1.687  0.0922 .
## mom_worktrabaja1_completo  1.41929     2.51621   0.564  0.5730
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 18.14 on 427 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.2213, Adjusted R-squared:  0.2103
## F-statistic: 20.22 on 6 and 427 DF, p-value: < 2.2e-16

m2 = lm(kid_score ~ mom_iq + mom_age + mom_hs, data = d)
summary(m2)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = kid_score ~ mom_iq + mom_age + mom_hs, data = d)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -53.289 -12.421   2.399  11.223  50.169
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  20.98466     9.13013   2.298  0.0220 *
## mom_iq        0.56254     0.06065   9.276 <2e-16 ***
## mom_age       0.22475     0.33075   0.680  0.4972
## mom_hssi      5.64715     2.25766   2.501  0.0127 *
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 18.15 on 430 degrees of freedom
```

```
## Multiple R-squared:  0.215,  Adjusted R-squared:  0.2095  
## F-statistic: 39.25 on 3 and 430 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Se tiene que $R_{a1}^2 = 0.2103$, $R_{a2}^2 = 0.2095$. Por tanto el primer modelo es preferible al segundo.