Propiedades de las variables aleatorias normales

Contents

1 Una variable aleatoria normal

Sea $X \sim N(\mu, \sigma)$ y $a, b \in \mathbb{R}$. Se cumple que:

$$Y = aX + b \Rightarrow Y \sim N(a\mu + b, a\sigma)$$

En esta propiedad hay tres resultados importantes:

- Si X es normal entonces Y es normal;
- $E[aX + b] = aE[X] + b$;
- $Var[aX + b] = a^2 Var[X]$

2 Dos variables aleatorias normales

Sean $X \sim N(\mu_x, \sigma_x)$, $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y)$ y $a, b, c \in \mathbb{R}$. Se cumple que:

$$Y = aX + bY + c \Rightarrow Y \sim N(a\mu_x + b\mu_y + c, \sqrt{a^2\sigma_x^2 + b^2\sigma_y^2})$$

3 Transformación de n variables aleatorias

Sean n variables aleatorias normales X_i con $E[X_i] = \mu_i$ y $Cov[X_i, X_j] = \sigma_{ij}^2$. Se definen los siguientes vectores y matrices:

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdots \\ X_n \end{bmatrix}, \quad E[X] = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \cdots \\ \mu_n \end{bmatrix}, \quad Var[X] = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{12}^2 & \cdots & \sigma_{1n}^2 \\ \sigma_{21}^2 & \sigma_{22}^2 & \cdots & \sigma_{2n}^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{n1}^2 & \sigma_{n2}^2 & \cdots & \sigma_{nn}^2 \end{bmatrix}$$

Sean m variables aleatorias Y_i definidas de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \cdots \\ Y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdots \\ X_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix} \Rightarrow Y = AX + b$$

Entonces se cumple que:

- las m variables aleatorias Y_i tienen distribución normal;
- $E[Y] = AE[X] + b$;
- $Var[Y] = AVar[X]A^T$.