

# Modelo de regresión logística con 1 regresor

## Contents

<b>1</b>	<b>Introduccion</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Modelo</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Estimación de los parámetros del modelo: máxima verosimilitud</b>	<b>5</b>
3.1	La función de verosimilitud . . . . .	5
3.2	El máximo de la función de verosimilitud . . . . .	6
3.3	Algoritmo de Newton-Raphson . . . . .	8
3.4	Algoritmo BFGS . . . . .	11
3.5	Estimacion con R . . . . .	12

## 1 Introduccion

El archivo *MichelinNY.csv* contiene linformación de 164 restaurantes franceses incluidos en la guía *Zagat Survey 2006: New York City Restaurants*.

```
d = read.csv("datos/MichelinNY.csv")
str(d)
```

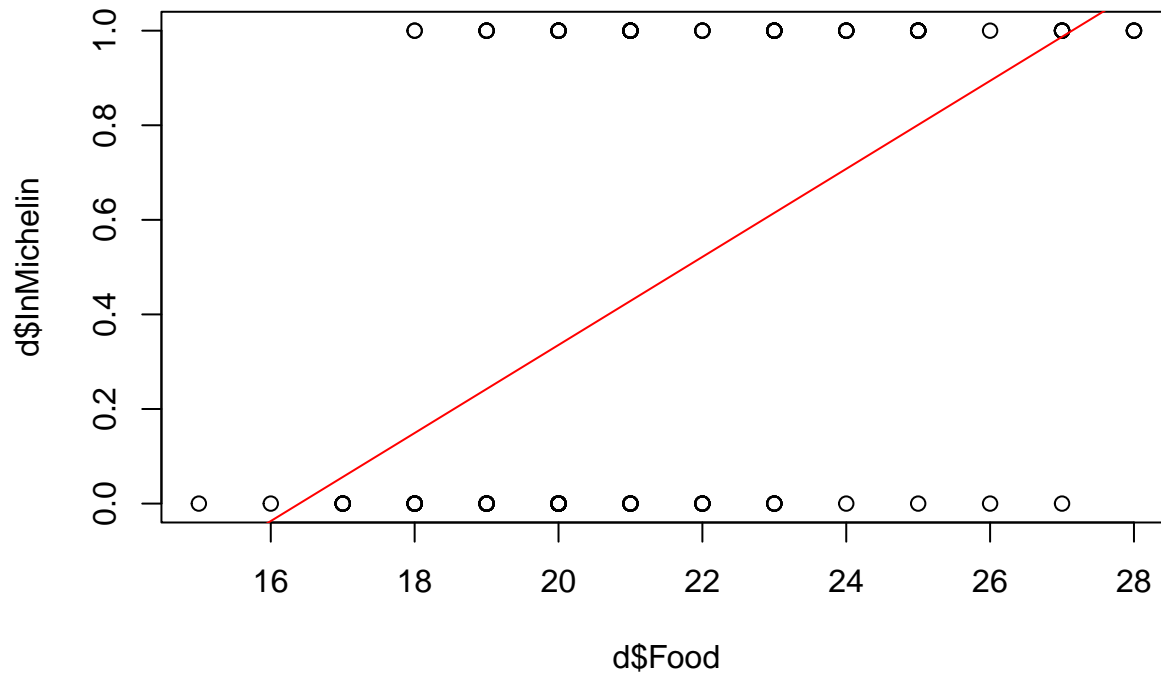
```
## 'data.frame':   164 obs. of  6 variables:
## $ InMichelin    : int  0 0 0 1 0 0 1 1 1 0 ...
## $ Restaurant.Name: chr  "14 Wall Street" "212" "26 Seats" "44" ...
## $ Food          : int  19 17 23 19 23 18 24 23 27 20 ...
## $ Decor         : int  20 17 17 23 12 17 21 22 27 17 ...
## $ Service       : int  19 16 21 16 19 17 22 21 27 19 ...
## $ Price         : int  50 43 35 52 24 36 51 61 179 42 ...
```

- Restaurant.Name: nombre del restaurante.
- Food: puntuación media de la comida otorgada por los clientes (sobre 30).
- Decor: puntuación media de la decoración otorgada por los clientes (sobre 30).
- Service: puntuación media del servicio otorgada por los clientes (sobre 30).
- Price: precio medio de la cena en dólares.
- InMichelin: vale 1 si el restaurante está en la Guía Michel y 0 si no está en dicha guía.

En este caso queremos analizar qué variables influyen en que un restaurante sea incluido en la Guía Michelin. Podríamos pensar en un modelo de regresión lineal:

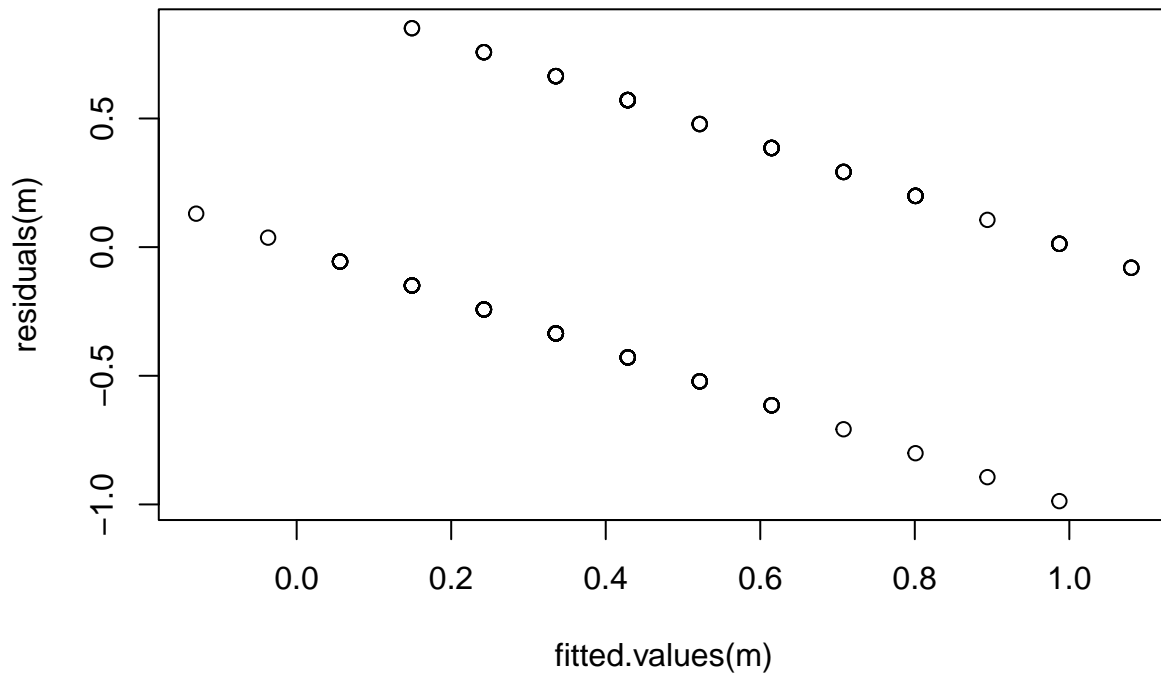
$$\text{InMichelin}_i = \beta_0 + \beta_1 \text{Food}_i + u_i, \quad u_i \sim N(0, \sigma^2)$$

```
m = lm(InMichelin ~ Food, data = d)
plot(d$Food, d$InMichelin)
abline(m, col = "red")
```



Pero este modelo no es válido porque, entre otras razones, los residuos no tienen distribución normal ya que la respuesta es binaria, 0 y 1:

```
plot(fitted.values(m), residuals(m))
```



## 2 Modelo

En este tema se va a utilizar el **modelo de regresión logística** para trabajar con variables respuesta binarias. La idea es seguir utilizando un modelo que relacione la variable respuesta y los regresores:

$$y_i = f(x_i) + u_i$$

Por ejemplo, en regresión lineal se tenía que:

$$f(x_i) = E[y_i] = \beta_0 + \beta_1 x_i$$

ya que  $u_i \sim N(0, \sigma^2)$ .

En el modelo de regresión logística la respuesta es binaria,  $y_i = \{0, 1\}$ . Para conseguir el modelo  $y_i = f(x_i) + u_i$  se trabaja con probabilidades. Se definen las siguientes probabilidades:

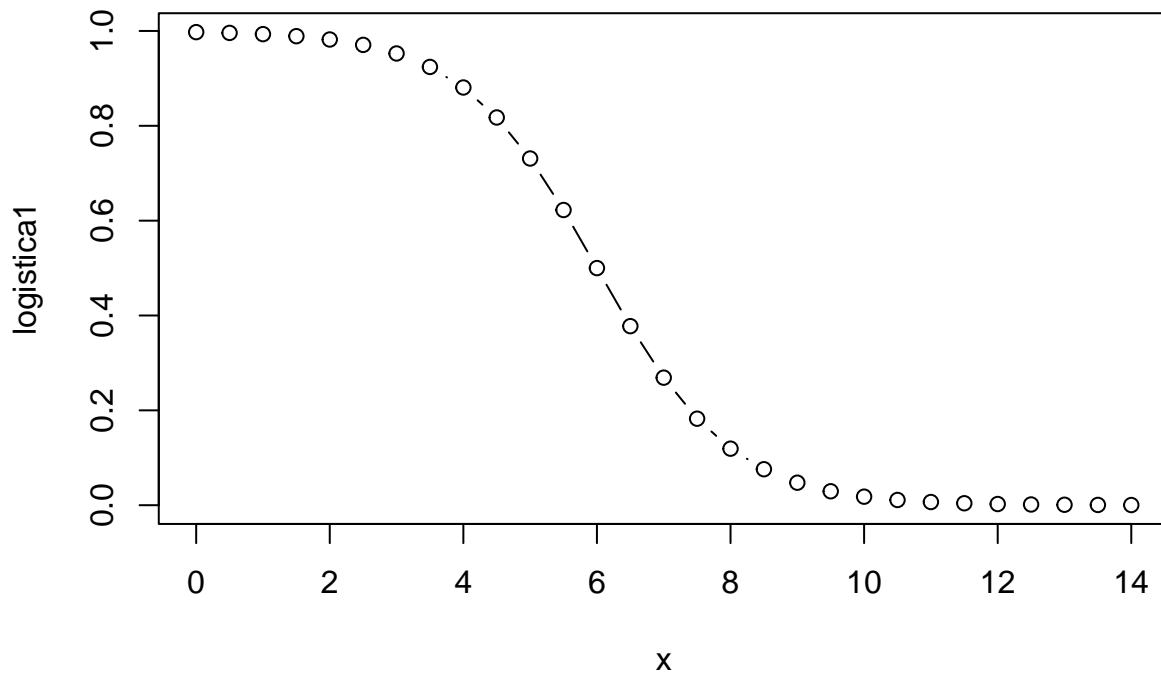
- $P(y_i = 1) = \pi_i$
- $P(y_i = 0) = 1 - \pi_i$ .

donde:

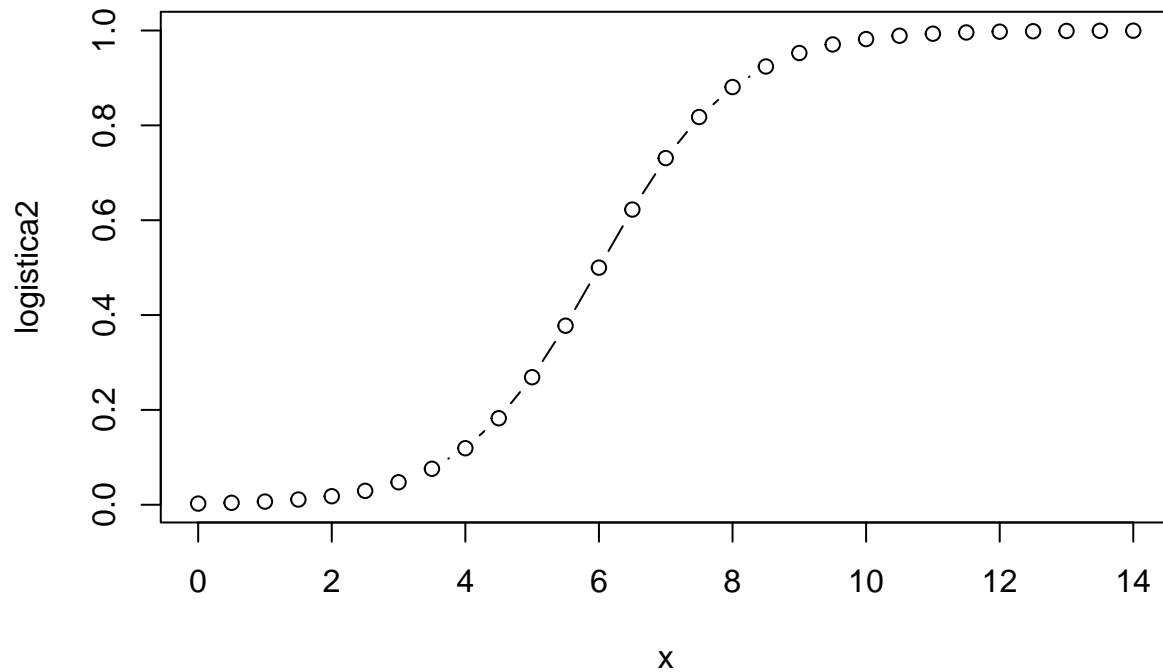
$$\pi_i = \frac{\exp(\beta_0 + \beta_1 x_i)}{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 x_i)}$$

Como  $\pi_i$  es una probabilidad debe tomar valores entre 0 y 1. Existen varias funciones que cumplen esa condición, entre ellas la función anterior, que se conoce como **función logística**. Algunos ejemplos son:

```
# ejemplo de función logística
x = seq(0,14,0.5)
logistica1 = 1/(1+exp(-6 + 1*x))
plot(x,logistica1, type = "b")
```



```
# ejemplo de función logística
logistica2 = 1/(1+exp(6 - 1*x))
plot(x,logistica2, type = "b")
```



La idea era tener un modelo del tipo:

$$y_i = f(x_i) + u_i$$

Si mantenemos que  $E[u_i] = 0$  (aunque ya no se va a cumplir que  $u_i \sim \text{Normal}$ ):

$$E[y_i] = f(x_i)$$

Como  $y_i$  toma valores 1 y 0 con probabilidades  $\pi_i$  y  $1 - \pi_i$  se tiene que:

$$E[y_i] = 1 * \pi_i + 0 * (1 - \pi_i) = \pi_i$$

Es decir, en el modelo de regresión logística:

$$f(x_i) = \frac{\exp(\beta_0 + \beta_1 x_i)}{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 x_i)}$$

Este modelo también se conoce como **modelo logit**. La función logit se define como:

$$\text{logit}(x) = \log\left(\frac{x}{1-x}\right)$$

Por tanto:

$$\text{logit}(\pi_i) = \log\left(\frac{\pi_i}{1-\pi_i}\right) = \beta_0 + \beta_1 x_i$$

### 3 Estimación de los parámetros del modelo: máxima verosimilitud

Para estimar los parámetros del modelo ( $\beta_0$  y  $\beta_1$ ) se utiliza el método de máxima verosimilitud, que consiste en:

- Definir la función logaritmo de la verosimilitud;
- La estimación de los parámetros son aquellos que maximizan la función log-verosimilitud.

#### 3.1 La función de verosimilitud

La función de verosimilitud es la probabilidad de obtener la muestra dada. Para una sola observación:

$$P(Y_i = y_i) = \pi_i^{y_i} (1 - \pi_i)^{1-y_i}, \quad y_i = 0, 1, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Efectivamente

$$P(Y_i = 1) = \pi_i, \quad P(Y_i = 0) = 1 - \pi_i$$

Por tanto, dada la muestra  $\{Y_1 = y_1, Y_2 = y_2, \dots, Y_n = y_n\}$ , la probabilidad de obtener dicha muestra es:

$$P(Y_1 = y_1, Y_2 = y_2, \dots, Y_n = y_n) = \prod_{i=1}^n P(Y_i = y_i) = \prod_{i=1}^n \pi_i^{y_i} (1 - \pi_i)^{1-y_i}$$

Se denomina función de verosimilitud a la probabilidad de obtener la muestra:

$$L(\beta) = \prod_{i=1}^n \pi_i^{y_i} (1 - \pi_i)^{1-y_i}$$

donde  $\beta = [\beta_0 \quad \beta_1]^T$ . Efectivamente, la función de verosimilitud es función de  $\beta$  ya que  $\pi_i$  depende de  $\beta$ .

Se suele trabajar con logaritmos ya que: 1) transforma los productos en sumas y es más fácil trabajar con sumas; 2) el máximo de  $\log L(\beta)$  y de  $L(\beta)$  se alcanzan en el mismo punto ya que el logaritmo es una función monótona creciente (recuerda que el método de máxima verosimilitud consiste en encontrar el máximo de la verosimilitud).

$$\begin{aligned} \log L(\beta) &= \log \prod_{i=1}^n \pi_i^{y_i} (1 - \pi_i)^{1-y_i} = \sum_{i=1}^n (y_i \log(\pi_i) + (1 - y_i) \log(1 - \pi_i)) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( y_i \log \left( \frac{\exp(\beta_0 + \beta_1 x_i)}{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 x_i)} \right) + (1 - y_i) \log \left( 1 - \frac{\exp(\beta_0 + \beta_1 x_i)}{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 x_i)} \right) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( y_i \log \left( \frac{\exp(\beta_0 + \beta_1 x_i)}{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 x_i)} \right) + (1 - y_i) \log \left( \frac{1}{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 x_i)} \right) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n (y_i \log(\exp(\beta_0 + \beta_1 x_i)) - y_i \log(1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 x_i)) - (1 - y_i) \log(1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 x_i))) \\ &= \sum_{i=1}^n (y_i (\beta_0 + \beta_1 x_i) - \log(1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 x_i))) \end{aligned}$$

En R, la función de verosimilitud la podemos calcular así:

```
logit1_logL = function(beta,y,x){
  # beta = [beta0 beta1]
  n = length(y)
  suma = 0
  for (i in 1:n){
    suma = suma + y[i]*(beta[1] + beta[2]*x[i]) -
      log(1 + exp(beta[1] + beta[2]*x[i]))
  }
  return(suma)
}
```

Por ejemplo, para  $\beta_0 = -12$  y  $\beta_1 = 1$ , la función de verosimilitud vale:

```
beta = c(-12,1)
logit1_logL(beta,d$InMichelin,d$Food)
```

```
## [1] -715.1892
```

### 3.2 El máximo de la función de verosimilitud

Tenemos que derivar e igualar a cero:

$$\frac{\partial \log L(\beta)}{\partial \beta_0} = \sum_{i=1}^n \left( y_i - \frac{\exp(\beta_0 + \beta_1 x_i)}{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 x_i)} \right) = \sum_{i=1}^n (y_i - \pi_i)$$

$$\frac{\partial \log L(\beta)}{\partial \beta_1} = \sum_{i=1}^n \left( y_i x_i - \frac{x_i \exp(\beta_0 + \beta_1 x_i)}{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 x_i)} \right) = \sum_{i=1}^n x_i (y_i - \pi_i)$$

En forma matricial tenemos el vector gradiente:

$$\frac{\partial \log L(\beta)}{\partial \beta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \log L(\beta)}{\partial \beta_0} \\ \frac{\partial \log L(\beta)}{\partial \beta_1} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} 1 \\ x_i \end{bmatrix} (y_i - \pi_i) = X^T (y - \pi)$$

donde  $X$  es la matriz de regresores:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \dots & \dots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad \pi = \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \dots \\ \pi_n \end{bmatrix}$$

Verifiquemos la expresión anterior con un ejemplo. Supongamos que tenemos tres datos:  $(y_1, x_1), (y_2, x_2), (y_3, x_3)$ :

$$\frac{\partial \log L(\beta)}{\partial \beta_0} = \sum_{i=1}^n (y_i - \pi_i) = (y_1 - \pi_1) + (y_2 - \pi_2) + (y_3 - \pi_3)$$

$$\frac{\partial \log L(\beta)}{\partial \beta_1} = \sum_{i=1}^n x_i (y_i - \pi_i) = x_1 (y_1 - \pi_1) + x_2 (y_2 - \pi_2) + x_3 (y_3 - \pi_3)$$

En forma matricial:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \quad \pi = \begin{bmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \log L(\beta)}{\partial \beta} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \log L(\beta)}{\partial \beta_0} \\ \frac{\partial \log L(\beta)}{\partial \beta_1} \end{bmatrix} = X^T (y - \pi) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 - \pi_1 \\ y_2 - \pi_2 \\ y_3 - \pi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (y_1 - \pi_1) + (y_2 - \pi_2) + (y_3 - \pi_3) \\ x_1(y_1 - \pi_1) + x_2(y_2 - \pi_2) + x_3(y_3 - \pi_3) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Luego ambas expresiones son equivalentes.

El máximo se haya igualando a cero:

$$\frac{\partial \log L(\beta)}{\partial \beta} = X^T (y - \pi) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sin embargo no es posible despejar  $\beta_0$  y  $\beta_1$  de las ecuaciones anteriores. El máximo de la función log-verosimilitud se tiene que encontrar numéricamente.

En los siguientes apartados también se va a necesitar la matriz de derivadas segundas o matriz hessiana. Su valor es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \log L(\beta)}{\partial \beta_0^2} &= \sum_{i=1}^n \left( -\frac{\exp(w)(1 + \exp(w)) - \exp(w)^2}{(1 + \exp(w))^2} \right) = \sum_{i=1}^n \left( -\frac{\exp(w)}{(1 + \exp(w))} + \frac{\exp(w)^2}{(1 + \exp(w))^2} \right) = -\sum_{i=1}^n \pi_i(1 - \pi_i) \\ \frac{\partial^2 \log L(\beta)}{\partial \beta_0 \partial \beta_1} &= \sum_{i=1}^n \left( -\frac{x_i \exp(w)(1 + \exp(w)) - x_i \exp(w)^2}{(1 + \exp(w))^2} \right) = -\sum_{i=1}^n \pi_i(1 - \pi_i)x_i \\ \frac{\partial^2 \log L(\beta)}{\partial \beta_1^2} &= \sum_{i=1}^n x_i \left( -\frac{x_i \exp(w)(1 + \exp(w)) - x_i \exp(w)^2}{(1 + \exp(w))^2} \right) = -\sum_{i=1}^n \pi_i(1 - \pi_i)x_i^2 \end{aligned}$$

donde se ha utilizado que  $w = \beta_0 + \beta_1 x_i$ . En forma matricial

$$\frac{\partial^2 \log L(\beta)}{\partial \beta \partial \beta^T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \log L(\beta)}{\partial \beta_0^2} & \frac{\partial^2 \log L(\beta)}{\partial \beta_0 \partial \beta_1} \\ \frac{\partial^2 \log L(\beta)}{\partial \beta_0 \partial \beta_1} & \frac{\partial^2 \log L(\beta)}{\partial \beta_1^2} \end{bmatrix} = -\sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} 1 \\ x_i \end{bmatrix} \pi_i(1 - \pi_i) \begin{bmatrix} 1 & x_i \end{bmatrix} = -X^T W X$$

donde  $W$  es una matriz diagonal con

$$W_{ii} = \pi_i(1 - \pi_i)$$

En R:

```
logit1_grad = function(beta,y,x){
  n = length(y)
  X = cbind(rep(1,n),x)
  y = matrix(y, nrow = n, ncol = 1)
  pi = matrix(0, nrow = n, ncol = 1)
```

```

for (i in 1:n){
  pi[i,1] = exp(beta[1] + beta[2]*x[i])/(1 + exp(beta[1] + beta[2]*x[i]))
}
grad = t(X) %*% (y - pi)
return(grad)
}

```

Comprobacion:

```

beta = c(-12,1)
logit1_grad(beta, d$InMichelin, d$Food)

```

```

##           [,1]
##      -89.81236
## x -1791.80199

```

```

logit1_hess = function(beta,x){
  n = length(x)
  X = cbind(rep(1,n),x)
  W = matrix(0, nrow = n, ncol = n)
  for (i in 1:n){
    pi = exp(beta[1] + beta[2]*x[i])/(1 + exp(beta[1] + beta[2]*x[i]))
    W[i,i] = pi*(1-pi)
  }
  hess = -t(X) %*% W %*% X
  return(hess)
}

```

```

beta = c(-12,1)
logit1_hess(beta, d$Food)

```

```

##           x
## -0.1845959 -3.150987
## x -3.1509868 -54.265816

```

```

# fdHess es una función del paquete nlme que
# calcula el gradiente y el hessiano numéricamente
# mediante diferencias finitas
# (se utiliza aquí para comprobar los resultados)
nlme::fdHess(beta,logit1_logL, y = d$InMichelin, x = d$Food)

```

```

## $mean
## [1] -715.1892
##
## $gradient
## [1] -89.81236 -1791.80199
##
## $Hessian
##           [,1]      [,2]
## [1,] -0.1847533 -3.152841
## [2,] -3.1528410 -54.318880

```

### 3.3 Algoritmo de Newton-Raphson

Queremos encontrar el máximo de la función  $f(x)$ . Para ello aproximamos la función en el entorno de un punto dado  $x_1$  por un polinomio de segundo grado (polinomio de Taylor de segundo grado):



$$f(x) = p_2(x) + e(x)$$

donde

$$p_2(x) = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) + \frac{1}{2}f''(x_1)(x - x_1)^2$$

y  $e(x)$  es el error cometido en dicha aproximación. Derivamos para encontrar el máximo del polinomio:

$$\frac{\partial p_2(x)}{\partial x} = f'(x_1) + f''(x_1)(x - x_1) = 0$$

El máximo de  $p_2(x)$  se encuentra en

$$x_2 = x_1 - \frac{f'(x_1)}{f''(x_1)}$$

El máximo de  $f(x)$  estará más próximo a  $x_2$  que a  $x_1$ . Pero podemos mejorar el resultado repitiendo el proceso: se vuelve a aproximar  $f(x)$  por un polinomio de orden 2 en el entorno de  $x_2$  y el nuevo máximo obtenido,  $x_3$ , estará más próximo al máximo de  $f(x)$ :

$$p_2(x) = f(x_2) + f'(x_2)(x - x_2) + \frac{1}{2}f''(x_2)(x - x_2)^2$$

$$\frac{\partial p_2(x)}{\partial x} = f'(x_2) + f''(x_2)(x - x_2) = 0$$

$$x_3 = x_2 - \frac{f'(x_2)}{f''(x_2)}$$

Y así sucesivamente, obteniendo el algoritmo:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f'(x_k)}{f''(x_k)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Se puede demostrar que este algoritmo converge al máximo de  $f(x)$ . Este procedimiento se conoce como el **algoritmo de Newton**.

Si la función es multivariante, el polinomio de Taylor de segundo orden es:

$$p_2(x) = f(x_k) + (x - x_k)^T G_k + \frac{1}{2}(x - x_k)^T H_k (x - x_k)$$

donde  $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$ ,  $x_k = [x_{1,k} \ x_{2,k} \ \dots \ x_{n,k}]^T$ ,  $G_k$  es el vector gradiente de  $f$  calculado en  $x_k$ , y  $H_k$  es la matriz hessiana de  $f$  calculada en  $x_k$ . Por tanto, el algoritmo de Newton en caso de funciones multivariantes es:

$$x_{k+1} = x_k - H_k^{-1} G_k$$

El algoritmo de Newton funciona muy bien en las proximidades del máximo. Sin embargo, lejos del máximo la convergencia es muy lenta y puede incluso que el algoritmo no converja. Es habitual introducir un coeficiente  $\alpha$  en el algoritmo:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha H_k^{-1} G_k$$

El valor de  $\alpha$  se tiene que calcular en cada caso particular, para lo que se utilizan algoritmos de búsqueda lineal. El cálculo de valor óptimo de  $\alpha$  queda fuera del alcance y de los objetivos de la asignatura. Nosotros vamos a utilizar  $\alpha = 0.1$ , que da resultados aceptables para las datos analizados.

Por último, como las variables de la función log-verosimilitud son  $\beta = [\beta_0 \ \beta_1]^T$ , el algoritmo de Newton se escribe en nuestro caso como:

$$\beta_{k+1} = \beta_k - \alpha H_k^{-1} G_k$$

El algoritmo de Newton para la función log-verosimilitud se puede implementar en R de manera sencilla:

```
logit1_Newton = function(beta_i, y, x, max_iter = 100, tol = 10^(-6), alfa = 0.1){

  # punto de partida
  beta = beta_i

  iter = 1
  tol1 = Inf
  while ((iter <= max_iter) & (tol1 > tol)){
    fun = logit1_logL(beta,y,x)
    grad = logit1_grad(beta,y,x)
    hess = logit1_hess(beta,x)
    beta = beta - alfa*solve(hess) %*% grad
    fun1 = logit1_logL(beta,y,x)
    tol1 = abs((fun1-fun)/fun)
    print(paste("Iteracion ",iter," log-verosimilitud ",fun1))
    iter = iter + 1
  }
  return(beta)
}
```

Como punto de partida podemos utilizar por ejemplo la solución de mínimos cuadrados:

```
m = lm(InMichelin ~ Food, data = d)
beta_i = coef(m)
logit1_Newton(beta_i,d$InMichelin,d$Food)
```

```
## [1] "Iteracion 1 log-verosimilitud -107.656015911258"
## [1] "Iteracion 2 log-verosimilitud -104.287355012541"
## [1] "Iteracion 3 log-verosimilitud -101.526363604862"
## [1] "Iteracion 4 log-verosimilitud -99.2463877834868"
## [1] "Iteracion 5 log-verosimilitud -97.3536832363028"
## [1] "Iteracion 6 log-verosimilitud -95.7768175152045"
## [1] "Iteracion 7 log-verosimilitud -94.4600424595339"
## [1] "Iteracion 8 log-verosimilitud -93.3589914316065"
## [1] "Iteracion 9 log-verosimilitud -92.4377929328025"
## [1] "Iteracion 10 log-verosimilitud -91.6670764915551"
## [1] "Iteracion 11 log-verosimilitud -91.0225570593353"
## [1] "Iteracion 12 log-verosimilitud -90.484004083196"
## [1] "Iteracion 13 log-verosimilitud -90.0344722640228"
## [1] "Iteracion 14 log-verosimilitud -89.6597141606584"
## [1] "Iteracion 15 log-verosimilitud -89.3477217968218"
## [1] "Iteracion 16 log-verosimilitud -89.0883617087495"
```

```

## [1] "Iteracion 17 log-verosimilitud -88.8730791459283"
## [1] "Iteracion 18 log-verosimilitud -88.6946546058619"
## [1] "Iteracion 19 log-verosimilitud -88.5470008892312"
## [1] "Iteracion 20 log-verosimilitud -88.4249922453037"
## [1] "Iteracion 21 log-verosimilitud -88.3243194791475"
## [1] "Iteracion 22 log-verosimilitud -88.2413664664321"
## [1] "Iteracion 23 log-verosimilitud -88.1731046049016"
## [1] "Iteracion 24 log-verosimilitud -88.1170024837147"
## [1] "Iteracion 25 log-verosimilitud -88.0709485813594"
## [1] "Iteracion 26 log-verosimilitud -88.0331851835732"
## [1] "Iteracion 27 log-verosimilitud -88.0022519944925"
## [1] "Iteracion 28 log-verosimilitud -87.9769381304365"
## [1] "Iteracion 29 log-verosimilitud -87.9562413582492"
## [1] "Iteracion 30 log-verosimilitud -87.9393335830701"
## [1] "Iteracion 31 log-verosimilitud -87.9255317127127"
## [1] "Iteracion 32 log-verosimilitud -87.9142731329427"
## [1] "Iteracion 33 log-verosimilitud -87.9050951231782"
## [1] "Iteracion 34 log-verosimilitud -87.8976176273983"
## [1] "Iteracion 35 log-verosimilitud -87.8915288715559"
## [1] "Iteracion 36 log-verosimilitud -87.8865733873089"
## [1] "Iteracion 37 log-verosimilitud -87.8825420629438"
## [1] "Iteracion 38 log-verosimilitud -87.8792638965297"
## [1] "Iteracion 39 log-verosimilitud -87.8765991740146"
## [1] "Iteracion 40 log-verosimilitud -87.8744338367144"
## [1] "Iteracion 41 log-verosimilitud -87.8726748389212"
## [1] "Iteracion 42 log-verosimilitud -87.8712463277095"
## [1] "Iteracion 43 log-verosimilitud -87.8700865039272"
## [1] "Iteracion 44 log-verosimilitud -87.869145046376"
## [1] "Iteracion 45 log-verosimilitud -87.8683810007229"
## [1] "Iteracion 46 log-verosimilitud -87.8677610512254"
## [1] "Iteracion 47 log-verosimilitud -87.8672581072929"
## [1] "Iteracion 48 log-verosimilitud -87.866850148599"
## [1] "Iteracion 49 log-verosimilitud -87.8665192822394"
## [1] "Iteracion 50 log-verosimilitud -87.8662509735903"
## [1] "Iteracion 51 log-verosimilitud -87.8660334192954"
## [1] "Iteracion 52 log-verosimilitud -87.8658570364406"
## [1] "Iteracion 53 log-verosimilitud -87.8657140466199"
## [1] "Iteracion 54 log-verosimilitud -87.8655981374381"
## [1] "Iteracion 55 log-verosimilitud -87.8655041871616"
## [1] "Iteracion 56 log-verosimilitud -87.8654280408296"

##          [,1]
## -10.7987693
## x      0.4993289

```

### 3.4 Algoritmo BFGS

El algoritmo de Newton tiene el inconveniente de que necesita calcular la inversa de la matriz hessiana. Esto a veces causa problemas numéricos si la matriz hessiana está mal condicionada. Otra alternativa es utilizar el algoritmo BFGS para maximizar la función log-verosimilitud. Este algoritmo, en lugar de calcular la inversa del hessiano, utiliza una aproximación a esta matriz que es numéricamente más estable. El algoritmo consiste en:

$$x_{k+1} = x_k - \alpha B_k G_k$$

donde  $B_k$  es una aproximación de  $H_k^{-1}$  (ver más sobre esta matriz). Por eso a este algoritmo se le encuadra dentro de los algoritmos cuasi-Newton.

En R, el algoritmo BFGS está implementado en la función `optim()`. La función `optim(f)` siempre minimiza la función  $f$ , pero nosotros queremos calcular el máximo (por eso hablamos de máxima verosimilitud). Para resolver este inconveniente tenemos en cuenta que  $\max(f) = \min(-f)$ . Por tanto, definimos una nueva función de verosimilitud que es la que vamos a minimizar

```
logit1_logL_optim = function(beta,y,x){
  logL = logit1_logL(beta,y,x)
  return(-logL)
}
```

Utilizando el mismo punto de partida que para el algoritmo Newton:

```
mle = optim(par = beta_i, fn = logit1_logL_optim, y = d$InMichelin, x = d$Food, gr = NULL, method = "BFGS")
```

```
## initial value 111.809621
## iter 2 value 106.088875
## iter 3 value 91.894547
## iter 4 value 88.308224
## iter 5 value 87.891152
## iter 6 value 87.865443
## iter 7 value 87.865332
## iter 8 value 87.865217
## iter 9 value 87.865103
## iter 9 value 87.865103
## iter 9 value 87.865103
## final value 87.865103
## converged
```

```
mle$par
```

```
## (Intercept)      Food
## -10.8416672    0.5012424
```

## 3.5 Estimacion con R

### 3.5.1 Con variable respuesta 0-1

```
m2 = glm(InMichelin ~ Food, data = d, family = binomial)
summary(m2)
```

```
##
## Call:
## glm(formula = InMichelin ~ Food, family = binomial, data = d)
##
## Coefficients:
##              Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
## (Intercept) -10.84154    1.86234  -5.821 5.83e-09 ***
## Food         0.50124     0.08767   5.717 1.08e-08 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## (Dispersion parameter for binomial family taken to be 1)
##
##      Null deviance: 225.79  on 163  degrees of freedom
```

```
## Residual deviance: 175.73 on 162 degrees of freedom
## AIC: 179.73
##
## Number of Fisher Scoring iterations: 4
```

Internamente la función `glm()` utiliza el algoritmo de Newton.

### 3.5.2 Con variable respuesta como factor

Pero la manera natural de trabajar con variables cualitativas en R es definir las como factores.

```
d$InMichelin = factor(d$InMichelin, labels = c("No", "Yes"))
str(d)
```

```
## 'data.frame': 164 obs. of 6 variables:
## $ InMichelin : Factor w/ 2 levels "No","Yes": 1 1 1 2 1 1 2 2 2 1 ...
## $ Restaurant.Name: chr "14 Wall Street" "212" "26 Seats" "44" ...
## $ Food : int 19 17 23 19 23 18 24 23 27 20 ...
## $ Decor : int 20 17 17 23 12 17 21 22 27 17 ...
## $ Service : int 19 16 21 16 19 17 22 21 27 19 ...
## $ Price : int 50 43 35 52 24 36 51 61 179 42 ...
```

```
m3 = glm(InMichelin ~ Food, data = d, family = binomial)
summary(m3)
```

```
##
## Call:
## glm(formula = InMichelin ~ Food, family = binomial, data = d)
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
## (Intercept) -10.84154    1.86234  -5.821 5.83e-09 ***
## Food         0.50124     0.08767   5.717 1.08e-08 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## (Dispersion parameter for binomial family taken to be 1)
##
## Null deviance: 225.79 on 163 degrees of freedom
## Residual deviance: 175.73 on 162 degrees of freedom
## AIC: 179.73
##
## Number of Fisher Scoring iterations: 4
```

El modelo que estamos estimando es:

$$P(Y_i = Yes) = \frac{\exp(\beta_0 + \beta_1 x_i)}{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 x_i)}$$

Podemos cambiar el nivel de referencia de la variable respuesta:

```
d$InMichelin = relevel(d$InMichelin, ref = "Yes")
m4 = glm(InMichelin ~ Food, data = d, family = binomial)
summary(m4)
```

```
##
## Call:
```

```
## glm(formula = InMichelin ~ Food, family = binomial, data = d)
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
## (Intercept) 10.84154    1.86234   5.821 5.83e-09 ***
## Food        -0.50124    0.08767  -5.717 1.08e-08 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## (Dispersion parameter for binomial family taken to be 1)
##
##    Null deviance: 225.79  on 163  degrees of freedom
## Residual deviance: 175.73  on 162  degrees of freedom
## AIC: 179.73
##
## Number of Fisher Scoring iterations: 4
```

El modelo que estamos estimando ahora es:

$$P(Y_i = No) = \frac{\exp(\beta_0^* + \beta_1^* x_i)}{1 + \exp(\beta_0^* + \beta_1^* x_i)}$$

De la salida de R hemos visto que en este caso  $\beta_0 = -\beta_0^*$  y  $\beta_1 = -\beta_1^*$ . Veamos que esto siempre es así. Se tiene que

$$P(Y_i = Yes) = 1 - P(Y_i = No)$$

$$\frac{\exp(\beta_0 + \beta_1 x_i)}{1 + \exp(\beta_0 + \beta_1 x_i)} = 1 - \frac{\exp(\beta_0^* + \beta_1^* x_i)}{1 + \exp(\beta_0^* + \beta_1^* x_i)}$$

Operando se tiene que:

$$\exp(\beta_0 + \beta_0^* + (\beta_1 + \beta_1^*) x_i) = 1$$

Por tanto,  $\beta_0 + \beta_0^* = 0$  y  $\beta_1 + \beta_1^* = 0$ .