Derivada de una función escalar respecto de un vector

Contents

Sea x un vector de n variables $x = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^T \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, y sea la función real de las n variables $y(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}$. Es decir:

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \longrightarrow y \in \mathbb{R}$$

Se define la siguiente derivada:

$$\frac{dy}{dx} = \begin{bmatrix} \frac{dy}{dx_1} \\ \frac{dy}{dx_2} \\ \cdots \\ \frac{dy}{dx_n} \end{bmatrix} \tag{1}$$

Se pueden demostrar las siguientes propiedades:

$$\frac{d(a^T x)}{dx} = \frac{d(x^T a)}{dx} = a \tag{2}$$

$$\frac{d(x^T A x)}{dx} = (A + A^T)x \tag{3}$$

donde $a \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ es un vector de números reales y $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es una matriz de números reales.

Se va a demostrar brevemente la primera igualdad:

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} \Rightarrow y = a^T x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n$$

$$\frac{dy}{dx} = \begin{bmatrix} \frac{dy}{dx_1} \\ \frac{dy}{dx_2} \\ \cdots \\ \frac{dy}{dx_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix} = a$$

La demostración del resto de igualdades es similar.