

Contrastes de hipótesis

Contents

1 Contrastes para las β_i usando la distribución <i>t-student</i>	1
1.1 Teoría	1
1.2 Ejemplo	2
2 Relación entre intervalos de confianza y contrastes	3
3 Contraste para σ^2	4
4 Contraste de regresión múltiple	5
4.1 La distribución <i>F</i>	5
4.2 Descomposición de la suma de cuadrados	5
4.3 Expresiones alternativas para la suma de cuadrados	6
4.4 Contraste	7
4.5 Ejemplo	7
5 Contraste para un grupo de coeficientes	8
5.1 Ejemplo: contraste para un regresor	9
5.2 Ejemplo: el contraste de regresión múltiple	9
5.3 Ejemplo: contraste sobre una pareja de regresores	10
5.4 Ejemplo: contraste de igualdad de regresores	10

1 Contrastes para las β_i usando la distribución *t-student*

1.1 Teoría

Se quiere resolver los contrastes:

$$H_0 : \beta_i = 0 \quad H_1 : \beta_i \neq 0$$

para el modelo $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \cdots + \beta_k x_{ki} + u_i$.

El procedimiento se puede resumir en:

1. Se parte de un estadístico con distribución conocida. En este caso se sabe que

$$\frac{\hat{\beta}_i - \beta_i}{se(\hat{\beta}_i)} \sim t_{n-k-1}$$

2. Se admite que H_0 es cierta y se obtiene la distribución del estadístico bajo este supuesto. En este caso, se supone que $\beta_i = 0$, por lo que

$$\frac{\hat{\beta}_i}{se(\hat{\beta}_i)} \sim t_{n-k-1}$$

2. Se comprueba si los datos disponibles (la muestra) son un valor probable para la distribución obtenida o no. En caso de que los datos sean poco probables si se admite la hipótesis de partida, entonces se rechaza ésta. Es decir, se calcula

$$t_0 = \frac{\hat{\beta}_i}{se(\hat{\beta}_i)}$$

que según la hipótesis de partida debería ser un valor muy probable para una distribución t_{n-k-1} . Sea $t_{n-k-1;\alpha/2}$ el valor de una t-student con $(n-k-1)$ grados de libertad tal que

$$P(t_{n-k-1} \geq t_{n-k-1;\alpha/2}) = \alpha/2$$

- si $|t_0| \geq t_{n-k-1;\alpha/2}$: se rechaza H_0
- si $|t_0| \leq t_{n-k-1;\alpha/2}$: no se rechaza H_0

Se define el *pvalor* como:

$$pvalor = 2P(t_{n-k-1} \geq |t_0|)$$

Por tanto

- si $pvalor \leq \alpha$: se rechaza H_0
- si $pvalor \geq \alpha$: no se rechaza H_0

1.2 Ejemplo

Veamos por ejemplo el modelo $kid_score \sim mom_hs + mom_iq + mom_age$:

```
load("datos/kidiq.Rdata")
str(d)

## 'data.frame':    434 obs. of  5 variables:
##   $ kid_score: int  65 98 85 83 115 98 69 106 102 95 ...
##   $ mom_hs    : Factor w/ 2 levels "no","si": 2 2 2 2 2 1 2 2 2 2 ...
##   $ mom_iq    : num  121.1 89.4 115.4 99.4 92.7 ...
##   $ mom_work  : Factor w/ 4 levels "notrabaja","trabaja23",...: 4 4 4 3 4 1 4 3 1 1 ...
##   $ mom_age   : int  27 25 27 25 27 18 20 23 24 19 ...
m1 = lm(kid_score ~ . - mom_work, data = d)
summary(m1)

##
## Call:
## lm(formula = kid_score ~ . - mom_work, data = d)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max 
## -53.289 -12.421    2.399   11.223   50.169 
## 
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
## (Intercept) 20.98466   9.13013   2.298   0.0220 *  
## mom_hssi    5.64715   2.25766   2.501   0.0127 *  
## mom_iq      0.56254   0.06065   9.276   <2e-16 *** 
## mom_age     0.22475   0.33075   0.680   0.4972    
## ---
```

```

## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 18.15 on 430 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.215, Adjusted R-squared:  0.2095
## F-statistic: 39.25 on 3 and 430 DF,  p-value: < 2.2e-16

```

Veamos de donde salen los valores de la tabla anterior:

- Estimate:

```
(beta_e = coefficients(m1))
```

```

## (Intercept)    mom_hssi      mom_iq      mom_age
## 20.9846620   5.6471512   0.5625443   0.2247505

```

- Std. Error:

```
(beta_se = sqrt(diag(vcov(m1))))
```

```

## (Intercept)    mom_hssi      mom_iq      mom_age
## 9.13012544  2.25765592  0.06064506  0.33074520

```

- t value:

```
(t_value = beta_e/beta_se)
```

```

## (Intercept)    mom_hssi      mom_iq      mom_age
## 2.2983980   2.5013339   9.2760110   0.6795276

```

- Pr($|t|$) (es decir, p-valores):

```

n = nrow(d)
k = 3
(pvalores = 2*pt(abs(t_value), df = n - k -1, lower.tail = F))

```

```

## (Intercept)    mom_hssi      mom_iq      mom_age
## 2.201813e-02 1.274346e-02 8.650677e-19 4.971693e-01

```

- Si juntamos todo en una tabla:

```
data.frame(beta_e, beta_se, t_value, pvalores)
```

```

##           beta_e     beta_se     t_value     pvalores
## (Intercept) 20.9846620 9.13012544 2.2983980 2.201813e-02
## mom_hssi     5.6471512 2.25765592 2.5013339 1.274346e-02
## mom_iq       0.5625443 0.06064506 9.2760110 8.650677e-19
## mom_age      0.2247505 0.33074520 0.6795276 4.971693e-01

```

2 Relación entre intervalos de confianza y contrastes

Sean los contrastes bilaterales:

$$H_0 : \beta_i = 0 \quad H_1 : \beta_i \neq 0$$

Y los intervalos de confianza de los mismos parámetros:

$$\beta_i \in (a_i, b_i)$$

Existe una relación entre ambos:

- Si $0 \in (a_i, b_i) \Rightarrow$ no se rechaza H_0 .
- Si $0 \notin (a_i, b_i) \Rightarrow$ se rechaza H_0 .

En el caso del ejemplo, si miramos pvalores e intervalos:

```
confint(m1)
```

```
##              2.5 %      97.5 %
## (Intercept) 3.0394352 38.9298887
## mom_hssi    1.2097371 10.0845653
## mom_iq      0.4433466  0.6817419
## mom_age     -0.4253280  0.8748289

summary(m1)

##
## Call:
## lm(formula = kid_score ~ . - mom_work, data = d)
##
## Residuals:
##   Min     1Q Median     3Q    Max
## -53.289 -12.421   2.399  11.223  50.169
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) 20.98466   9.13013   2.298   0.0220 *
## mom_hssi    5.64715   2.25766   2.501   0.0127 *
## mom_iq      0.56254   0.06065   9.276 <2e-16 ***
## mom_age     0.22475   0.33075   0.680   0.4972
##
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 18.15 on 430 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.215, Adjusted R-squared:  0.2095
## F-statistic: 39.25 on 3 and 430 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

3 Contraste para σ^2

El contraste es:

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \quad H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

El estadístico del contraste que se va a utilizar es:

$$\frac{(n - k - 1)\hat{s}_R^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-k-1}^2$$

Por tanto, si la hipótesis nula es cierta,

$$\chi_0^2 = \frac{(n - k - 1)\hat{s}_R^2}{\sigma_0^2} \sim \chi_{n-k-1}^2$$

Como ejemplo, se quiere contrastar

$$H_0 : \sigma^2 = 20^2 \quad H_1 : \sigma^2 \neq 20^2$$

```
(chisq_0 = sum(resid(m1)^2)/20^2)

## [1] 354.0126

# límites del contraste bilateral
c(qchisq(0.05/2,df = n-k-1), qchisq(1-0.05/2,df = n-k-1))

## [1] 374.4397 489.3477
```

Por tanto se rechaza la hipótesis nula. El mismo resultado se obtiene mirando el intervalo de confianza.

4 Contraste de regresión múltiple

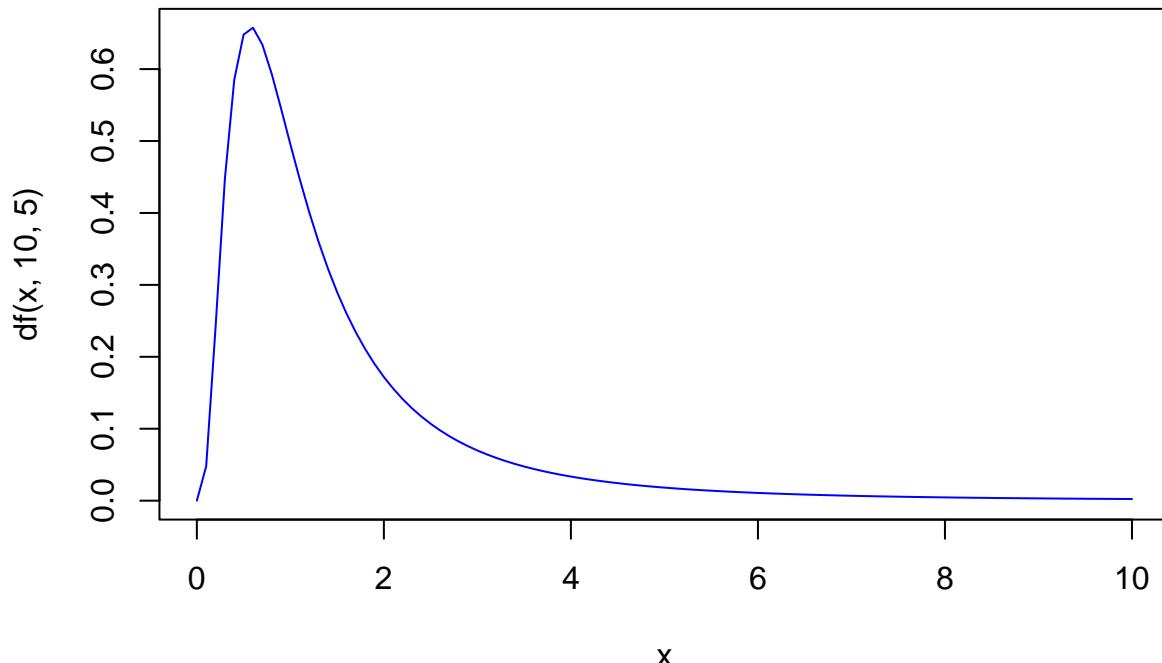
4.1 La distribución F

Sean una χ_m^2 y una χ_n^2 , ambas independientes. La distribución F se define como

$$\frac{\chi_m^2/m}{\chi_n^2/n} \sim F_{m,n}$$

La distribución F es similar a la χ^2 :

```
curve(df(x,10,5), from = 0, to = 10, col = "blue")
```



4.2 Descomposición de la suma de cuadrados

Sea el modelo

$$y_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{1i} + \cdots + \hat{\beta}_k x_{ki} + e_i = \hat{y}_i + e_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Restando la media $\bar{y} = \sum y_i/n$:

$$y_i - \bar{y} = \hat{y}_i - \bar{y} + e_i$$

Elevando al cuadrado y sumando se tiene:

$$\sum(y_i - \bar{y})^2 = \sum(\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \sum e_i^2$$

ya que $\sum(\hat{y}_i - \bar{y})e_i = 0$. Se denominan:

- Suma de cuadrados total:

$$SCT = \sum(y_i - \bar{y})^2$$

- Suma de cuadrados del modelo:

$$SCM = \sum(\hat{y}_i - \bar{y})^2$$

- Suma de cuadrados de los residuos:

$$SCR = \sum e_i^2$$

Por tanto, se cumple que

$$SCT = SCM + SCR$$

4.3 Expresiones alternativas para la suma de cuadrados

- Suma de cuadrados total:

$$SCT = (n - 1)\hat{s}_y^2$$

ya que la varianza $\hat{s}_y^2 = \frac{1}{n-1} \sum(y_i - \bar{y})^2$.

- Suma de cuadrados estimados por el modelo:

$$SCM = (n - 1)\hat{\beta}_a^T S_{xx} \hat{\beta}_a = (n - 1)\hat{\beta}_a^T S_{xy}$$

Para probar esa relación se tiene que:

$$\hat{y}_i - \bar{y} = \hat{\beta}_1(x_{1i} - \bar{x}_1) + \cdots + \hat{\beta}_k(x_{ki} - \bar{x}_k)$$

Por tanto:

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_1 - \bar{y} \\ \hat{y}_2 - \bar{y} \\ \vdots \\ \hat{y}_n - \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} - \bar{x}_1 & x_{21} - \bar{x}_2 & \cdots & x_{k1} - \bar{x}_k \\ x_{12} - \bar{x}_1 & x_{22} - \bar{x}_2 & \cdots & x_{k2} - \bar{x}_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} - \bar{x}_1 & x_{2n} - \bar{x}_2 & \cdots & x_{kn} - \bar{x}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\beta}_k \end{bmatrix}$$

Es decir

$$\hat{y} - \bar{y} = X_a \hat{\beta}_a$$

$$SCM = \sum(\hat{y}_i - \bar{y})^2 = (\hat{y} - \bar{y})^T (\hat{y} - \bar{y}) = \hat{\beta}_a^T X_a^T X_a \hat{\beta}_a$$

$$= (n - 1)\hat{\beta}_a^T S_{xx} \hat{\beta}_a = (n - 1)\hat{\beta}_a^T S_{xx} S_{xx}^{-1} S_{xy} = (n - 1)\hat{\beta}_a^T S_{xy}$$

- Suma de cuadrados de los residuos:

$$SCR = (n - k - 1)\hat{s}_R^2$$

ya que la varianza resiudal es $\hat{s}_R^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-k-1}$.

4.4 Contraste

Este contraste establece, de manera conjunta, si alguno de los regresores influye en la respuesta. Es decir, en el modelo $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \dots + \beta_k x_{ki} + u_i$ se contrasta si

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0 \quad H_1 : \text{Algún } \beta_i \neq 0$$

Para resolver este contraste, se puede demostrar que:

- Si $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0 \Rightarrow SCM/\sigma^2 \sim \chi_k^2$
- $SCR/\sigma^2 \sim \chi_{n-k-1}^2$
- SCM y SCR son independientes.

Por lo tanto es razonable utilizar el estadístico:

$$\frac{\frac{SCM/\sigma^2}{k}}{\frac{SCR/\sigma^2}{n-k-1}} \sim F_{k,n-k-1} \Rightarrow F_0 = \frac{SCM/k}{SCR/(n-k-1)} \sim F_{k,n-k-1}$$

Si $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0$, $SCM \approx 0$ y el estadístico debería tomar valores pequeños; cuando algún β_i sea distinto de cero, el estadístico irá tomando cada vez valores más altos. Por tanto se rechazará la hipótesis nula para valores grandes del estadístico:

- si $F_0 > F_\alpha$: se rechaza H_0
- si $F_0 \leq F_\alpha$: no se rechaza H_0

4.5 Ejemplo

Queremos contrastar si $\beta_{mom_age} = \beta_{mom_hs} = \beta_{mom_iq} = 0$ en el modelo $kid_score \sim mom_hs + mom_iq + mom_age$, es decir, si estos regresores influyen en la puntuación obtenida en el test.

```
(SCT = sum((d$kid_score - mean(d$kid_score))^2) )
## [1] 180386.2
(SCR = sum(resid(m1)^2))
## [1] 141605
(SCM = SCT - SCR)
## [1] 38781.13
(F_0 = SCM/k/(SCR/(n-k-1)))
## [1] 39.25446
(F_alfa = qf(0.05, df1 = k, df2 = n-5-1))
## [1] 0.1171935
```

```

# pvalor
1 - pf(F_0, k, n-k-1)

## [1] 0
• En R:
summary(m1)

##
## Call:
## lm(formula = kid_score ~ . - mom_work, data = d)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max
## -53.289 -12.421    2.399   11.223   50.169
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) 20.98466   9.13013   2.298   0.0220 *
## mom_hssi     5.64715   2.25766   2.501   0.0127 *
## mom_iq       0.56254   0.06065   9.276  <2e-16 ***
## mom_age      0.22475   0.33075   0.680   0.4972
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 18.15 on 430 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.215, Adjusted R-squared:  0.2095
## F-statistic: 39.25 on 3 and 430 DF,  p-value: < 2.2e-16

```

Luego se rechaza la hipótesis nula, y al menos uno de los regresores influye en *kid_score*.

5 Contraste para un grupo de coeficientes

Consideremos el modelo de regresión con k regresores:

$$y = X\beta + u, \dim(\beta) = k \times 1$$

Y consideremos otro modelo de regresión en el que se utilizan m de los k regresores ($m < k$):

$$y = X'\beta' + u', \dim(\beta') = m \times 1$$

Sea $SCR(k)$ la suma de cuadrados residual del primer modelo, y $SCR(m)$ la suma de cuadrados residual del segundo modelo. Se puede demostrar que:

$$F_0 = \frac{(SCR(m) - SCR(k))/(k - m)}{SCR(k)/(n - k - 1)} \sim F_{k-m, n-k-1}$$

Con este estadístico podemos resolver el contraste

$$H_0 : \text{Los modelos son iguales} \quad H_1 : \text{Los modelos NO son iguales}$$

Si H_0 es cierta el estadístico debería tomar valores pequeños, es decir, la suma de cuadrados residual es parecida en ambos modelos, por lo se considera que los modelos son equivalentes. Por tanto, se rechazará la hipótesis nula para valores grandes del estadístico:

- si $F_0 > F_\alpha$: se rechaza H_0
- si $F_0 \leq F_\alpha$: no se rechaza H_0

5.1 Ejemplo: contraste para un regresor

Vamos a analizar si el regresor mom_age puede eliminarse de la lista. El contraste que resolvemos es $H_0 : \beta_{mom_age} = 0$ en el modelo $kid_score \sim mom_hs + mom_iq + mom_age$. Para ello lo comparamos con el modelo $kid_score \sim mom_hs + mom_iq$. Si los modelos son equivalentes quiere decir que $\beta_{mom_age} = 0$:

```
m2 = lm(kid_score ~ mom_hs + mom_iq, data = d)
(SCR2 = sum(resid(m2)^2))
```

```
## [1] 141757.1
m = 2
(F_0 = ((SCR2 - SCR)/(k-m))/(SCR/(n-k-1)))

## [1] 0.4617577
# F_alfa
qf(0.95, k-m, n-k-1)

## [1] 3.863175
# pvalor
1-pf(F_0, k-m, n-k-1)

## [1] 0.4971693
```

Luego no se puede rechazar la hipótesis nula (los modelos son iguales), luego el regresor mom_age se puede eliminar del modelo. Se obtiene el mismo resultado que con el contraste de la t-student.

- Con R:

```
anova(m2, m1)

## Analysis of Variance Table
##
## Model 1: kid_score ~ mom_hs + mom_iq
## Model 2: kid_score ~ (mom_hs + mom_iq + mom_work + mom_age) - mom_work
##   Res.Df   RSS Df Sum of Sq    F Pr(>F)
## 1     431 141757
## 2     430 141605  1    152.06 0.4618 0.4972
```

5.2 Ejemplo: el contraste de regresión múltiple

El contraste de regresión múltiple ($H_0 : \beta_{mom_hs} = \beta_{mom_iq} = \beta_{mom_age} = 0$) también se puede resolver utilizando este estadístico. Los dos modelos a comparar son: $kid_score \sim 1 + mom_hs + mom_iq + mom_age$ y $kid_score \sim 1$. El 1 hace referencia al β_0 , y se estima por defecto si no se indica explicitamente:

```
m3 = lm(kid_score ~ 1, d)
```

Por tanto

```
anova(m3, m1)

## Analysis of Variance Table
```

```

## 
## Model 1: kid_score ~ 1
## Model 2: kid_score ~ (mom_hs + mom_iq + mom_work + mom_age) - mom_work
##   Res.Df   RSS Df Sum of Sq    F    Pr(>F)
## 1     433 180386
## 2     430 141605  3      38781 39.255 < 2.2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

```

5.3 Ejemplo: contraste sobre una pareja de regresores

El contraste que resolvemos es $H_0 : \beta_{mom_iq} = \beta_{mom_age} = 0$ en el modelo $kid_score \sim mom_hs + mom_iq + mom_age$. Para ello lo comparamos con el modelo:

```

m4 = lm(kid_score ~ mom_hs, data = d)
(SCR4 = sum(resid(m4)^2))

## [1] 170261.2
m = 1
(F_0 = ((SCR4 - SCR)/(k-m))/(SCR/(n-k-1)))

## [1] 43.50887
# F_alfa
qf(0.05, k-m, n-k-1)

## [1] 0.05129941
# pvalor
1-pf(F_0, k-m, n-k-1)

## [1] 0

```

Luego se rechaza la hipótesis nula.

- Con R:

```

anova(m4, m1)

## Analysis of Variance Table
##
## Model 1: kid_score ~ mom_hs
## Model 2: kid_score ~ (mom_hs + mom_iq + mom_work + mom_age) - mom_work
##   Res.Df   RSS Df Sum of Sq    F    Pr(>F)
## 1     432 170261
## 2     430 141605  2      28656 43.509 < 2.2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

```

5.4 Ejemplo: contraste de igualdad de regresores

El contraste que resolvemos es $H_0 : \beta_{mom_iq} = \beta_{mom_age}$ en el modelo $kid_score \sim mom_hs + mom_iq + mom_age$. Hacemos la comparación con el modelo:

```

m5 = lm(kid_score ~ mom_hs + I(mom_iq + mom_age), data = d)
(SCR5 = sum(resid(m5)^2))

## [1] 141933.5

```

```
m = 2
(F_0 = ((SCR5 - SCR)/(k-m))/(SCR/(n-k-1)))
```

```
## [1] 0.9974542
```

```
# pvalor
```

```
1-pf(F_0, k-m, n-k-1)
```

```
## [1] 0.318489
```

OJO, el modelo m5 es:

$$kid_score_i = \beta_0 + \beta_1 mom_hs_i + \beta_2 mom_iq_i + \beta_3 mom_age_i + u_i$$

- En R:

```
anova(m5,m1)
```

```
## Analysis of Variance Table
##
## Model 1: kid_score ~ mom_hs + I(mom_iq + mom_age)
## Model 2: kid_score ~ (mom_hs + mom_iq + mom_work + mom_age) - mom_work
##   Res.Df   RSS Df Sum of Sq    F Pr(>F)
## 1     431 141934
## 2     430 141605  1     328.48 0.9975 0.3185
```

Como vemos no se puede rechazar la hipótesis nula *Los modelos son iguales*, luego no se puede rechazar $H_0 : \beta_{mom_iq} = \beta_{mom_age}$.

Por último vamos a resolver este contraste con la t-student. El modelo m1 es

$$kid_score = \beta_0 + \beta_1 mom_hs_i + \beta_2 mom_iq_i + \beta_3 mom_age_i + u$$

La hipótesis nula del contraste es: $H_0 : \beta_2 = \beta_3$. Para encontrar el estadístico del contraste tenemos que:

$$\hat{\beta}_2 \sim N(\beta_2, \sigma^2 Q_{2,2}), \quad \hat{\beta}_3 \sim N(\beta_3, \sigma^2 Q_{3,3})$$

Por tanto:

$$\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3 \sim N(\beta_2 - \beta_3, \sigma^2 (Q_{2,2} + Q_{3,3} - 2Q_{2,3}))$$

Es decir:

$$\frac{(\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3) - (\beta_2 - \beta_3)}{\sqrt{\sigma^2 (Q_{2,2} + Q_{3,3} - 2Q_{2,3})}} \sim N(0, 1)$$

Reemplazando σ^2 por \hat{s}_R^2 se tiene:

$$\frac{(\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3) - (\beta_2 - \beta_3)}{\sqrt{\hat{s}_R^2 (Q_{2,2} + Q_{3,3} - 2Q_{2,3})}} \sim t_{n-k-1}$$

Finalmente el estadístico del contraste cuando H_0 es cierta es:

$$t_0 = \frac{\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3}{\sqrt{\hat{s}_R^2(Q_{2,2} + Q_{3,3} - 2Q_{2,3})}} \sim t_{n-k-1}$$

```

beta_var = vcov(m1)
(t0 = (coef(m1)[3] - coef(m1)[4])/sqrt(beta_var[3,3] + beta_var[4,4] - 2*beta_var[3,4]))

##    mom_iq
## 0.9987263
# pvalue
2*pt(abs(t0), n - k - 1, lower.tail = F)

##    mom_iq
## 0.318489

```