

# Estimación del modelo con la función lm()

## Contents

<b>1</b>	<b>La función <i>lm()</i></b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Regresión lineal sin ordenada en el origen</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Formulas y expresiones en la función lm()</b>	<b>4</b>
3.1	Ejemplo . . . . .	5

## 1 La función *lm()*

Para estimar modelos lineales en R se utiliza la función *lm()*, de *linear models*:

```
d = read.csv("datos/kidiq.csv")  
  
m = lm(kid_score ~ mom_iq + mom_age, data = d)
```

El resultado del análisis se ha guardado en la variable *m*:

- Matriz *X*:

```
X = model.matrix(m)  
head(X)  
  
## (Intercept) mom_iq mom_age  
## 1 121.11753 27  
## 2 89.36188 25  
## 3 115.44316 27  
## 4 99.44964 25  
## 5 92.74571 27  
## 6 107.90184 18
```

- Parámetros estimados  $\hat{\beta}$ :

```
coefficients(m)  
  
## (Intercept) mom_iq mom_age  
## 17.5962491 0.6035720 0.3881286
```

- Valores estimados por el modelo  $\hat{y}$ :

```
y_e = fitted(m)  
head(y_e)  
  
## 1 2 3 4 5 6  
## 101.17887 81.23579 97.75398 87.32448 84.05443 89.70909
```

- Residuos  $e_i$

```
e = residuals(m)  
head(e)  
  
## 1 2 3 4 5 6  
## -1.17887 1.23579 0.75398 -0.32448 -0.05443 -0.70909
```

```
##          1          2          3          4          5          6
## -36.17887  16.76421 -12.75398 -4.32448  30.94557  8.29091
```

- SRC

```
deviance(m)
```

```
## [1] 143665.4
```

Los valores anteriores también se pueden obtener con el símbolo \$:

```
m$coef
```

```
## (Intercept)      mom_iq      mom_age
## 17.5962491    0.6035720   0.3881286
```

También se puede utilizar la función *summary()*, que además de los valores anteriores proporciona otros muchos que se irán viendo en los temas siguientes:

```
summary(m)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = kid_score ~ mom_iq + mom_age, data = d)
##
## Residuals:
##     Min      1Q  Median      3Q     Max
## -56.941 -12.493   2.257  11.614  46.711
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) 17.59625   9.08397   1.937   0.0534 .
## mom_iq      0.60357   0.05874  10.275 <2e-16 ***
## mom_age     0.38813   0.32620   1.190   0.2348
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 18.26 on 431 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.2036, Adjusted R-squared:  0.1999
## F-statistic: 55.08 on 2 and 431 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

El resultado de *summary* también se puede guardar en una variable para tener, por ejemplo, el R2:

```
m_summ = summary(m)
m_summ$r.squared
```

```
## [1] 0.2035673
```

## 2 Regresión lineal sin ordenada en el origen

El modelo que queremos estimar es

$$y_i = \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_3 x_{3i} + u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1)$$

es decir, tenemos que  $\beta_0 = 0$ . En forma matricial tendríamos  $y = X\beta + e$ , donde:

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{1n} & x_{2n} & x_{3n} \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \quad (2)$$

En R:

```
y = matrix(d$kid_score, ncol = 1)
X = cbind(d$mom_iq, d$mom_age)

Xt_X = t(X) %*% X
Xt_y = t(X) %*% y
(beta = solve(Xt_X) %*% Xt_y)
```

```
## [1,] 0.6686188
## [2,] 0.8677182
```

Con la función *lm()*, este modelo se estima añadiendo un cero en la declaración de los regresores:

```
m = lm(kid_score ~ 0 + mom_iq + mom_age, data = d)
summary(m)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = kid_score ~ 0 + mom_iq + mom_age, data = d)
##
## Residuals:
##      Min      1Q Median      3Q      Max
## -55.809 -12.076   2.487  12.310  47.515
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## mom_iq     0.66862   0.04835 13.829 < 2e-16 ***
## mom_age    0.86772   0.21307  4.073 5.53e-05 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 18.32 on 432 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.958, Adjusted R-squared:  0.9578
## F-statistic: 4926 on 2 and 432 DF, p-value: < 2.2e-16
```

Otra manera de indicarlo es:

```
m = lm(kid_score ~ -1 + mom_iq + mom_age, data = d)
summary(m)
```

```
##
## Call:
## lm(formula = kid_score ~ -1 + mom_iq + mom_age, data = d)
##
## Residuals:
##      Min      1Q Median      3Q      Max
## -55.809 -12.076   2.487  12.310  47.515
##
## Coefficients:
```

```

##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## mom_iq     0.66862   0.04835 13.829 < 2e-16 ***
## mom_age    0.86772   0.21307  4.073 5.53e-05 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 18.32 on 432 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.958, Adjusted R-squared:  0.9578
## F-statistic: 4926 on 2 and 432 DF, p-value: < 2.2e-16

```

Es curioso el hecho de que  $R^2$  ha aumentado y alcanza un valor cercano a uno. Esto es debido a que en este tipo de modelos la fórmula que emplea R para calcular  $R^2$  es:

$$R_0^2 = 1 - \frac{\sum(y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum y_i^2} \quad (3)$$

en lugar de

$$R^2 = 1 - \frac{\sum(y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum(y_i - \bar{y})^2} \quad (4)$$

Podemos calcular esos dos valores *a mano* para comprobarlo:

```

1 - sum(m$resid^2)/sum(d$kid_score^2)

## [1] 0.9579958

1 - sum(m$resid^2)/sum((d$kid_score - mean(d$kid_score))^2)

## [1] 0.1966337

```

Por tanto, el modelo sin ordenada en el origen tiene menor  $R^2$ .

### 3 Formulas y expresiones en la función lm()

Modelo *lineal* hace referencia a que la ecuación del modelo es una función lineal de los parámetros  $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ . Modelos en apariencia complicados pueden ser considerados como un modelo lineal. Por ejemplo:

- polinomios:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + u \Rightarrow y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u \quad (5)$$

- modelos con funciones en los regresores

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 \log x + u \Rightarrow y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u \quad (6)$$

- modelos con interacción:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_1 x_2 + u \quad (7)$$

- este modelo no es lineal

$$y = \beta_0 + \beta_1 x^{\beta_2} + u \quad (8)$$

En este apartado se va a estudiar como introducir estas regresiones lineales en R. Por ejemplo, queremos realizar la siguiente regresión:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1(x_{1i} + x_{2i}) + u_i \quad (9)$$

En R se expresa mediante el operador  $I()$ :

```
y ~ I(x1 + x2)
```

ya que la expresión:

```
y ~ x1 + x2
```

corresponde al modelo:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + u_i \quad (10)$$

Otro ejemplo es el modelo:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{1i}^2 + u_i \quad (11)$$

En R este modelo se expresa utilizando:

```
y ~ x1 + I(x2^2)
```

ya que la expresión

```
y ~ x1 + x2^2
```

significa interacción y no el cuadrado del regresor.

Es frecuente incluir funciones matemáticas en el modelo de regresión. Por ejemplo:

$$\log(y_i) = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 e^{x_{2i}} + u_i \quad (12)$$

En R, este modelo se indica:

```
log(y) ~ x1 + exp(x2)
```

### 3.1 Ejemplo

```
m = lm(kid_score ~ mom_iq + I(mom_iq^2), data = d)
summary(m)

##
## Call:
## lm(formula = kid_score ~ mom_iq + I(mom_iq^2), data = d)
##
## Residuals:
##      Min       1Q   Median       3Q      Max 
## -54.824 -11.640    2.883   11.372   50.813 
##
## Coefficients:
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
## (Intercept) -99.033675  37.301385 -2.655 0.008226 ** 
## mom_iq        3.076800   0.730291   4.213 3.07e-05 *** 
## I(mom_iq^2)  -0.011917   0.003517  -3.389 0.000767 *** 
## ---
```

```

## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
##
## Residual standard error: 18.05 on 431 degrees of freedom
## Multiple R-squared:  0.2217, Adjusted R-squared:  0.2181
## F-statistic: 61.38 on 2 and 431 DF,  p-value: < 2.2e-16

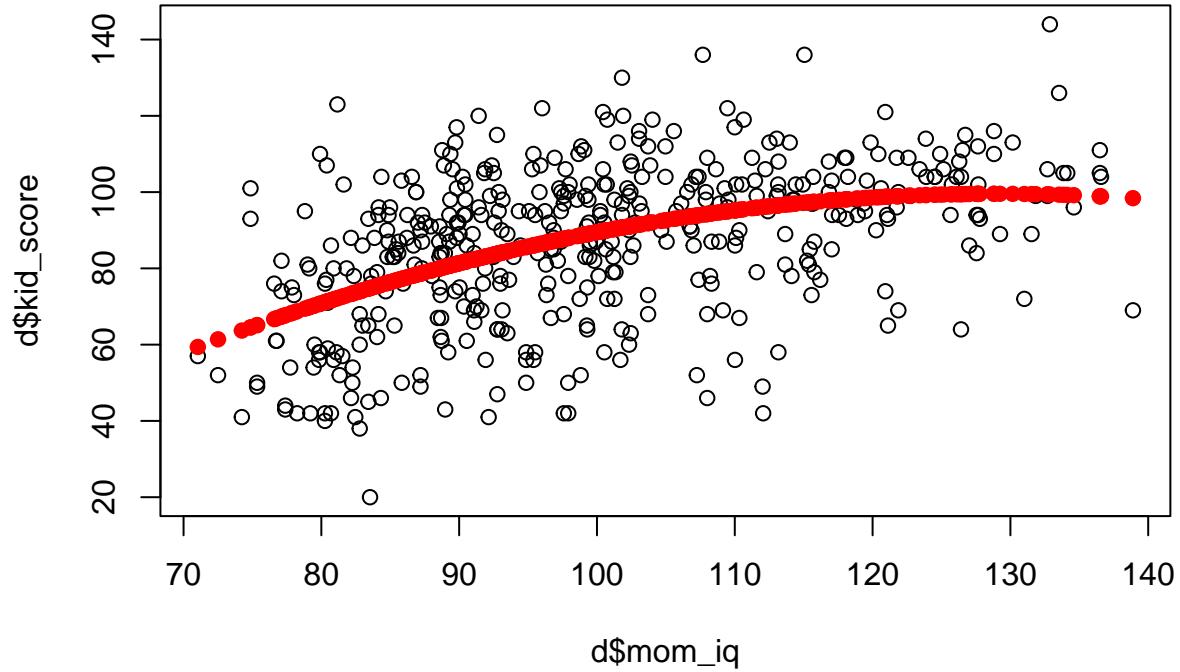
```

Podemos representar el modelo estimado haciendo

```

plot(d$mom_iq, d$kid_score)
points(d$mom_iq, fitted.values(m), col = "red", pch = 19)

```



Es conveniente recordar que a pesar de que hay un término cuadrático se trata de un modelo lineal ya que el modelo que se estima es en realidad

$$kid\_score_i = \beta_0 + \beta_1 mom\_iq_i + \beta_2 z_i + u_i \quad (13)$$

donde  $z_i = mom\_iq_i^2$ .