Bootstrap

Contents

1 Introducción

El bootstrap es un método para estimar varianzas de estadísticos e intervalos de confianza utilizando simulaciones.

2 Estimación de la varianza con bootstrap

Sea $\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ una muestra aleatoria simple (luego los datos son independientes y con igual distribución). Y sea $T = f(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ un estadístico, es decir, T es cualquier función de los datos. Para calcular la varianza del estimador, $Var(T)$, el método bootstrap consiste en:

- Paso 1: generar, mediante simulación, una muestra con reemplazamiento a partir de $\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ que llamaremos $\{X_1^*, X_2^*, \cdots, X_n^*\}$.
- Paso 2: Calcular la estimación de T a partir de la muestra bootstrap: $T^* = f(X_1^*, X_2^*, \cdots, X_n^*)$.
- Paso 3: Repetir los pasos 1 y 2 un total de B veces, obteniendo $T_1^*, T_2^*, \ldots, T_B^*$.
- Paso 4: estimar la varianza de T mediante la varianza de $T_1^*, T_2^*, \ldots, T_B^*$.

Por ejemplo, sea el número de viajeros diarios de una determinada línea de autobuses interurbana durante 12 días seleccionados aleatoriamente:

```
# muestra
x = c(47,66,55,53,49,65,48,44,50,61,60,55)
```

Supongamos que el número de viajeros de un día determinado tiene distribución normal: $X_i \sim N(\mu, \sigma)$. El estadístico que vamos a considerar en este ejemplo es la media muestral

$$T = \bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{12}}{12}$$

La varianza de este estadístico tiene solución teórica:

$$Var(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{\sigma^2}{12}$$

Como σ^2 no es conocido esta varianza no se puede calcular. sin embargo, se puede aproximar utilizando el estimador de σ^2, la varianza de la muestra s_x^2:

$$Var(\bar{X}) \approx \frac{s_x^2}{12}$$

```
var(x)/length(x)
```

```
## [1] 4.370581
```

Vamos a obtener otra aproximación a este valor utilizando el método bootstrap:

```
set.seed(123)
B = 1000
medias = rep(0,B)
for (b in 1:B){
  replica = sample(x, replace = T)
  medias[b] = mean(replica)
}
var(medias)
```

```
## [1] 4.196051
```

Otro ejemplo puede ser si consideramos como estadístico la **mediana muestral**. En este caso no hay una fórmula teórica como en el caso de la media muestral. Así que aplicamos diréctamente bootstrap:

```
set.seed(123)
B = 1000
medianas = rep(0,B)
for (b in 1:B){
  replica = sample(x, replace = T)
  medianas[b] = median(replica)
}
var(medianas)
```

```
## [1] 10.22714
```

3 Estimación de intervalos de confianza utilizando bootstrap

Hay varios métodos para calcular el intervalo de confianza de un parámetro θ con bootstrap. Nosotros vamos a utilizar el método de los percentiles:

- Paso 1: generar, mediante simulación, una muestra con reemplazamiento a partir de $\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ que llamaremos $\{X_1^*, X_2^*, \cdots, X_n^*\}$.
- Paso 2: Calcular la estimación de θ a partir de la muestra bootstrap: $\theta^* = T(X_1^*, X_2^*, \cdots, X_n^*)$.
- Paso 3: Repetir los pasos 1 y 2 un total de B veces, obteniendo $\theta_1^*, \theta_2^*, \ldots, \theta_B^*$.
- Paso 4: estimar el intervalo de θ mediante $(\theta_{\alpha/2}^*, \theta_{1-\alpha/2}^*)$.

Supongamos que el número de viajeros de un día determinado tiene distribución normal: $X_i \sim N(\mu, \sigma)$. Vamos a calcular el intervalo de confianza de μ. El intervalo teórico se calcula

$$\bar{x} \pm t_{\alpha/2;n-1} * \sqrt{\frac{s_x^2}{n}}$$

```
alfa = 0.05
n = length(x)
c(mean(x) + qt(alfa/2, n-1)*sqrt(var(x)/length(x)), mean(x) - qt(alfa/2, n-1)*sqrt(var(x)/length(x)) )
```

```
## [1] 49.81530 59.01803
```

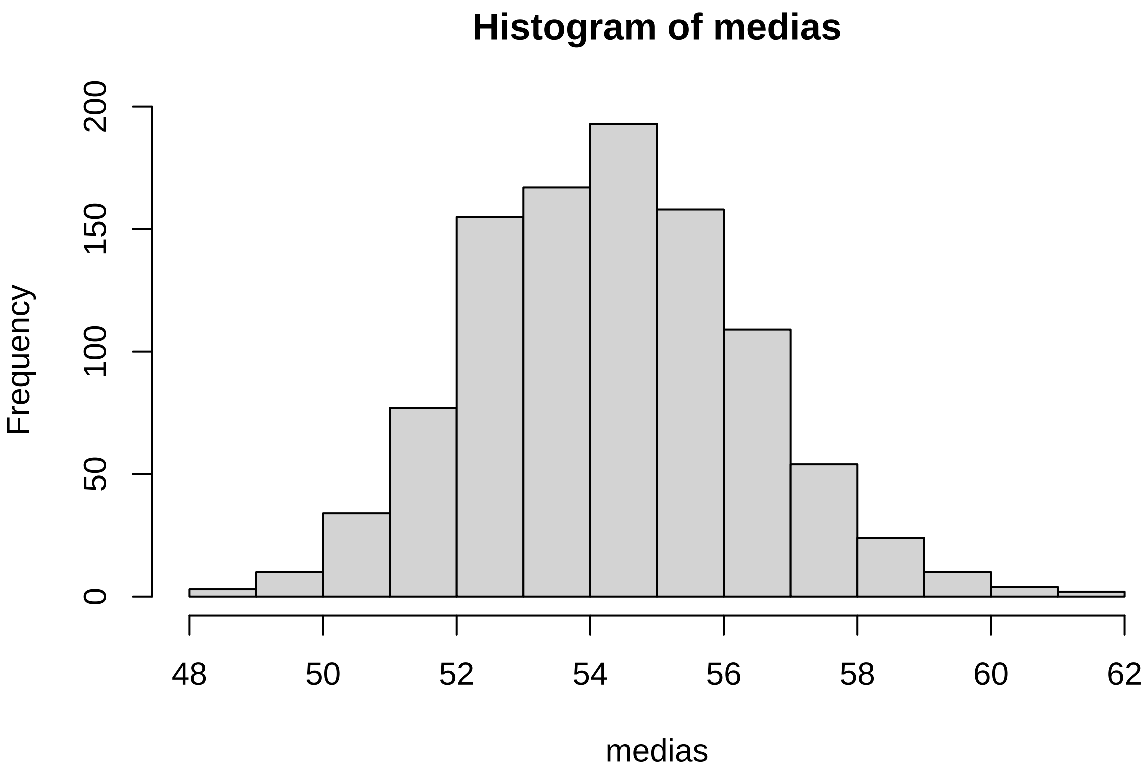
Vamos a calcularlo con bootstrap:

```
set.seed(123)
B = 1000
medias = rep(0,B)
for (b in 1:B){
  replica = sample(x, replace = T)
  medias[b] = mean(replica)
}
quantile(medias, c(alfa/2, 1-alfa/2))
```

```
##     2.5%    97.5%
## 50.58333 58.33333
```

En realidad tenemos la distribución del estimador de la media:

```
hist(medias)
```



También podemos calcular el intervalo de confianza de la mediana:

```
quantile(medianas, c(alfa/2, 1-alfa/2))
```

```
##  2.5% 97.5%
##  48.5  60.5
```

4 Bootstrap en el modelo de regresión

Para el modelo de regresión el método consiste en:

- Paso 1: generar una muestra con reemplazamiento de los pares de datos que llamaremos $\{(y_1^*, x_{11}^*, \ldots, x_{k1}^*), (y_2^*, x_{12}^*, \ldots, x_{k2}^*), \cdots, (y_n^*, x_{1n}^*, \ldots, x_{kn}^*)\}$.
- Paso 2: estimar los parámetros del modelo a partir de la muestra bootstrap $y^* = X^*\hat{\beta}^* + e^*$.

- Paso 3: Repetir los pasos 1 y 2 un total de B veces, obteniendo $\beta_1^*, \beta_2^*, \ldots, \beta_B^*$.
- Paso 4: calcular la varianza de los estimadores o los intervalos de confianza de los parámetros a partir de los valores calculados en el paso 3.

Por ejemplo, vamos a calcular la varianza de los estimadores y los intervalos de confianza para el modelo:

```r
load("datos/kidiq.Rdata")
str(d)
```

```
## 'data.frame':    434 obs. of  5 variables:
##  $ kid_score: int  65 98 85 83 115 98 69 106 102 95 ...
##  $ mom_hs   : Factor w/ 2 levels "no","si": 2 2 2 2 2 1 2 2 2 2 ...
##  $ mom_iq   : num  121.1 89.4 115.4 99.4 92.7 ...
##  $ mom_work : Factor w/ 4 levels "notrabaja","trabaja23",..: 4 4 4 3 4 1 4 3 1 1 ...
##  $ mom_age  : int  27 25 27 25 27 18 20 23 24 19 ...
```

```r
# estimamos los parametros del modelo
m1 = lm(kid_score ~ mom_iq + mom_hs, data = d)
beta_e = coef(m1)
```

```r
# BOOTSTRAP
# muestreamos los datos CON REPOSICION
n = nrow(d)
B = 1000
beta_e_b = matrix(0, nrow = B, ncol = 3)
for (i in 1:B){
  pos = sample(1:n, rep = T)
  db = d[pos,]
  mb = lm(kid_score ~ mom_iq + mom_hs, data = db)
  beta_e_b[i,] = coef(mb)
}
```

- Varianza de los parémetros estimados

```r
# aplicando la teoría
diag(vcov(m1))
```

```
##  (Intercept)       mom_iq     mom_hssi
## 34.518069224  0.003669219  4.892113136
```

```r
# aplicando bootstrap
apply(beta_e_b, 2, var)
```

```
## [1] 34.759586112  0.003631317  5.233934244
```

- intervalos de confianza

```r
# aplicando la teoría
confint(m1)
```

```
##                  2.5 %     97.5 %
## (Intercept) 14.1839148 37.2791615
## mom_iq       0.4448487  0.6829634
## mom_hssi     1.6028370 10.2973969
```

```r
# aplicando bootstrap
t(apply(beta_e_b, 2, quantile, probs = c(0.025,0.975)))
```

```
##            2.5%      97.5%
## [1,] 14.5475369 37.3547246
```

```
## [2,]  0.4372295  0.6697932
## [3,]  2.0461439 10.5594076
```