Planificación de Redes y Modelado

Parte 2: "Modelado de Tráfico"

3º Ingeniería de Telecomunicaciones — UPV/EHU

"*Under-promise and over-deliver.*"

Javier de Martín – 2016/17

Fundamentos de la Teoría de Colas

Modelo simple de una cola

- Tasa de llegada de usuarios (λ)
- Tasa de servicio a usuarios (μ)
- C: Capacidad del canal
- $1/\mu$: Tiempo medio de una llamada
- $l = 1/\mu'$: Longitud media de un paquete

Tasa de servicio:

$$\mu = \frac{C}{1/\mu'} = \mu' \cdot C$$

Estado de la cola

Cuando $\lambda \to \mu$ la cola se hace inestable, para que sea **estable**: $\lambda < \mu$.
Utilización (o intensidad de tráfico):

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

Si $\rho \to 1$ los tiempos de espera aumentan y la cola se llena rápidamente.
El **estado de la cola** es el número de usuarios/paquetes en la cola incluido el que pueda estar en el servidor.

Procesos de Poisson

Un proceso de Poisson es un caso particular del proceso de Markov en el cual la probabilidad de ocurrencia de un evento en $t + \Delta t$ es independiente de sucesos anteriores.
En una **distribución de Poisson** la probabilidad de k llegadas es:

$$p(k) = \frac{(\lambda \cdot T)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda T} \quad \rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} p(k) = 1$$

La **esperanza** es $E(k) = \lambda \cdot T$ y **varianza** $\sigma^2(k) = \lambda \cdot T$.

Tiempo entre eventos sucesivos

Función de densidad de probabilidad:

$$f_\tau(\tau) = \lambda e^{-\lambda\tau} = \frac{\partial F_\tau(x)}{\partial x}$$

Relación de los procesos exponenciales con los poissonianos

Probabilidad de una llegada en un intervalo:

$$Pr\{\tau > x\} = p_x(0) = e^{\lambda x}$$

Función de distribución de probabilidad acumulativa:

$$F_\tau(x) = 1 - e^{\lambda x}$$

Distribución del tiempo de servicio

Propiedad: Suponer m procesos de Poisson independientes de tasas λ_1, λ_2, ..., λ_m que se combinan, el proceso resultante será también de Poisson con una tasa $\lambda = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i$

Notación Kendall

A/B/m/K/c/z

- **A**: Distribución del tiempo entre llegadas
- **B**: Distribución del tiempo de servicio
- **m**: Número de servidores en paralelo en el sistema
- **K**: Capacidad de la cola (incluyendo servidores)
- **c**: Tamaño de la fuente
- **z**: Disciplina de la cola

Las distribuciones de llegadas y servicio pueden ser:

- **M**: Exponencial
- E_k: Erlang de k etapas
- H_k: Hiperexponencial de k etapas
- **G**: General
- **D**: Determinística (constante)

Por defecto para colas A/B/N la cola es infinita y la disciplina FIFO.

Parámetros medidos en las colas

Cuando el sistema alcanza su estado más estable se supone que la probabilidad de usuarios en el mismo no varía con el tiempo. Con el tiempo los valores de p_n se irán aproximando a los valores más estables.

Ecuaciones de Balance en M/M/1

Es condición necesaria que $\rho < 1$:

$$p_0 = (1-\rho) \qquad p_n = (1-\rho)\cdot\rho^n \qquad \forall\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

Ecuaciones de Balance en M/M/1/N

Es condición necesaria que $\rho < 1$:

$$p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \qquad p_n = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}\cdot\rho^n \qquad \forall\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

La **probabilidad de bloqueo** es $P_N = p_n$.

Throughput (γ)

$$\gamma = \lambda\cdot(1-P_B)$$
$$= \mu\cdot(1-p_0$$

Para una **cola infinita**:

$$\gamma = \mu\cdot\rho = \lambda$$

Para una **cola finita**:

$$P_B = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}\cdot\rho^N = P_N$$

Cola M/M/1/N en función de ρ

$$p_n = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}\cdot\rho^n$$

Región de congestión

Throughput Normalizado (γ/μ)

Mide la relación entre los usuarios que son atendidos en el sistema por unidad de tiempo y los que potencialmente podrían haber sido atendidos.

$$\frac{\gamma}{\mu} = \frac{1-\rho^N}{1-\rho^{N+1}}\cdot\rho = \frac{Usuariosatendidos/seg}{Usuariospotenciales/seg}$$

Insertar Gráfica

Número medio de usuarios en la cola M/M/1 E(n)

$$E(n) = \frac{\rho}{1-\rho}$$

Tiempo Medio de Estancia en la Cola E(T)

$$E(T) = \frac{E(n)}{\gamma} \qquad \rightarrow \qquad E(T)_{M/M/1} = \frac{1}{(1-\rho)\cdot\mu} = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

Tiempo Medio de Espera en la Cola E(w)

$$E(w) = E(T) - 1/\mu$$

Número medio de usuarios esperando en la cola E(q)

$$E(q) = \gamma\cdot E(w)$$

Colas dependientes del estado: Proceso de nacimiento y muerte

En las **colas dependientes del estado** las tasas de llegada λ y las de servicio μ dependen del estado del sistema. Un **proceso de nacimiento** como un caso de procesos de Markov donde las tasas de llegada son función del estado. Un **proceso de muerte** es otro caso de procesos de Markov donde también las salidas son función del estado de la cola.

Ecuaciones de Balance

$$p_n = \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{i=1}^{n} \mu_i} \cdot p_0$$

Fórmulas de Pollaczek Khinchine

Número medio de usuarios E(n):

$$E(n) = \frac{\rho}{1-\rho} \cdot \left(1 - \frac{\rho}{2}(1 - \mu^2\sigma^2\right)$$

Tiempo medio de estancia en la cola E(T):

$$E(T) = \frac{E(n)}{\gamma} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} \cdot \left(1 - \frac{\rho}{2}(1 - \mu^2\sigma^2\right)$$