Planificación de Redes y Modelado

Parte 2: "Modelado de Tráfico"

3º Ingeniería de Telecomunicaciones — UPV/EHU

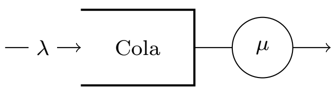
"Under-promise and over-deliver."

Javier de Martín – 2016/17

Variables

λ: Tasa de llegada de usuarios (nº usuarios llegados / tiempo)
$1/\lambda$: Tiempo medio entre llegadas consecutivas
μ: Tasa de servicio
$1/\mu$: Tiempo medio de servicio
C: Capacidad del canal
$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$: Factor de utilización (intensidad de tráfico)
N: Estado del sistema, número de clientes en el sistema

Fundamentos de la Teoría de Colas



Cuando $\lambda \to \mu$ la cola se hace inestable, para que sea **estable**: $\lambda < \mu$.
Si $\rho \to 1$ los tiempos de espera aumentan y la cola se llena rápidamente.
El **estado de la cola** es el número de usuarios/paquetes en la cola incluido el que pueda estar en el servidor.
Un **proceso de Poisson** es un caso particular del proceso de Markov en el cual la probabilidad de ocurrencia de un evento en $t + \Delta t$ es independiente de sucesos anteriores.
En una **distribución de Poisson** la probabilidad de k llegadas es:

$$p(k) = \frac{(\lambda \cdot T)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda T} \quad \rightarrow \quad \sum_{k=0}^{\infty} p(k) = 1$$

La **esperanza** es $E(k) = \lambda \cdot T$ y **varianza** $\sigma^2(k) = \lambda \cdot T$.
Tiempo entre eventos sucesivos, función de densidad de probabilidad:

$$f_\tau(\tau) = \lambda e^{-\lambda \tau} = \frac{\partial F_\tau(x)}{\partial x}$$

Relación de los procesos exponenciales con los poissonianos, probabilidad de una llegada en un intervalo:

$$Pr\{\tau > x\} = p_x(0) = e^{-\lambda x}$$

Función de distribución de probabilidad acumulativa, mide la probabilidad de que τ sea menor o igual a x:

$$F_\tau(x) = 1 - e^{\lambda x}$$

Distribución del tiempo de servicio:

$$f_r(r) = \mu \cdot e^{-\mu r}$$

Propiedad: Suponer m procesos de Poisson independientes de tasas λ_1, λ_2, ..., λ_m que se combinan, el proceso resultante será también de Poisson con una tasa $\lambda = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i$

Notación Kendall

$$\mathrm{A/B/m/K/c/z}$$

- **A**: Distribución del tiempo entre llegadas
- **B**: Distribución del tiempo de servicio
- **m**: Número de servidores en paralelo en el sistema
- **K**: Capacidad de la cola (incluyendo servidores)
- **c**: Tamaño de la fuente
- **z**: Disciplina de la cola

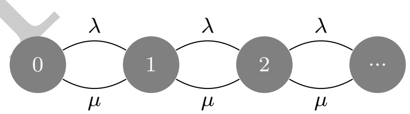
Las distribuciones de llegadas y servicio pueden ser:

- **M**: Exponencial
- E_k: Erlang de k etapas
- H_k: Hiperexponencial de k etapas
- **G**: General
- **D**: Determinística (constante)

Por defecto para colas A/B/N la cola es infinita y la disciplina FIFO.
Cuando el sistema alcanza su estado más estable se supone que la probabilidad de usuarios en el mismo no varía con el tiempo. Con el tiempo los valores de p_n se irán aproximando a los valores más estables.

M/M/1

Las **ecuaciones de balance** permiten calcular la probabilidad de estado p_n. En el diagrama de estados, el # es el número de clientes en el sistema. El factor de utilización es $\rho = \lambda/\mu$.



$$\begin{cases} (n-1) & \rightarrow \text{Ha llegado un usuario} \\ n & \rightarrow \text{No ha llegado ni salido nadie} \\ (n+1) & \rightarrow \text{Ha salido un usuario} \end{cases}$$

$$\lambda \cdot p_n = \mu \cdot p_{n+1} \quad n = 0, 1, 2... \qquad \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$$

$$p_{n+1} = \rho \cdot p_n$$

Es condición necesaria que $\rho < 1$:

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1} = (1-\rho) \qquad p_n = (1-\rho) \cdot \rho^n \qquad \forall \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

Es condición necesaria que $\rho < 1$:

$$p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \qquad p_n = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \cdot \rho^n \qquad \forall \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

La **probabilidad de bloqueo** es $P_N = p_n$.
Tiempo medio por cliente en el sistema:

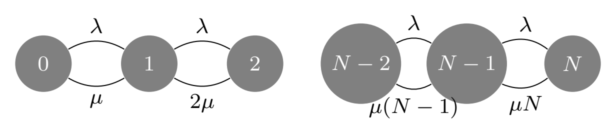
$$\frac{1}{\mu(1-\rho)}$$

Tiempo medio de espera en cola:

$$\frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

Cola M/M/N

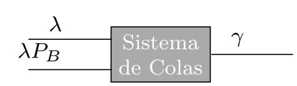
Permite procesamiento en paralelo al tener múltiples servidores, el factor de utilización es $\rho = \lambda/m\mu$.
La tasa media de llegada λ es constante e independiente del estado del sistema ($\lambda_n = \lambda$).



$$p_n = \frac{n+1}{N\rho} \cdot p_{n+1} \qquad n = 0, ..., N-1$$

$$p_{n+1} = \rho \cdot p_n \qquad n \geq N$$

Throughput (γ)



$$\gamma = \lambda \cdot (1 - P_B)$$
$$= \mu \cdot (1 - p_0$$

Para una **cola infinita**:

$$\gamma = \mu \cdot \rho = \lambda$$

Para una **cola finita**:

$$P_B = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \cdot \rho^N = P_N$$

Cola M/M/1/N en función de ρ

Si el sistema está lleno, N, no se permite la entrada a nuevos clientes al sistema. La tasa de llegadas no es constante y varía con el tiempo en función de si el sistema está lleno o no:

$$\lambda_{ef} = \lambda(1 - p_k)$$

$$p_n = \rho^n \cdot p_0$$

Para estos sistemas no existe el estado $k + 1$.

$$p_n = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} \cdot \rho^n$$

Región de congestión

Throughput Normalizado (γ/μ)

Mide la relación entre los usuarios que son atendidos en el sistema por unidad de tiempo y los que potencialmente podrían haber sido atendidos.

$$\frac{\gamma}{\mu} = \frac{1-\rho^N}{1-\rho^{N+1}} \cdot \rho = \frac{Usuariosatendidos/seg}{Usuariospotenciales/seg}$$

Insertar Gráfica

Número medio de usuarios en la cola M/M/1 E(n)

$$E(n) = \frac{\rho}{1-\rho}$$

Tiempo Medio de Estancia en la Cola E(T)

$$E(T) = \frac{E(n)}{\gamma} \qquad \rightarrow \qquad E(T)_{M/M/1} = \frac{1}{(1-\rho)\cdot\mu} = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

Tiempo Medio de Espera en la Cola E(w)

$$E(w) = E(T) - 1/\mu$$

Número medio de usuarios esperando en la cola E(q)

$$E(q) = \gamma \cdot E(w)$$

Colas dependientes del estado: Proceso de nacimiento y muerte

En las **colas dependientes del estado** las tasas de llegada λ y las de servicio μ dependen del estado del sistema. Un **proceso de nacimiento** como un caso de procesos de Markov donde las tasas de llegada son función del estado. Un **proceso de muerte** es otro caso de procesos de Markov donde también las salidas son función del estado de la cola.

[1] Envío bidireccional pero no simultáneo

Ecuaciones de Balance

$$p_n = \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{i=1}^{n} \mu_i} \cdot p_0$$

Fórmulas de Pollaczek Khinchine para distribuciones M/D/1:
Número medio de usuarios E(n):

$$E(n) = \frac{\rho}{1-\rho} \cdot \left(1 - \frac{\rho}{2}\right)$$

Tiempo medio de estancia en la cola E(T):

$$E(T) = \frac{E(n)}{\gamma} = \frac{1}{\mu(1-\rho)} \cdot \left(1 - \frac{\rho}{2}\right)$$

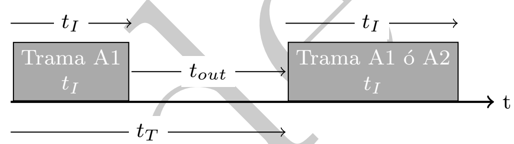
Modelado de Protocolos de N.Enlace

"Su función principal es el control del enlace de datos entre dos nodos adyacentes."

Stop & Wait

Envía cada trama y espera recibir un ACK o NACK:

- Si llega un ACK se libera el buffer que almacenaba el paquete transmitido y se envía otra trama.
- Si llega un NACK o expira el temporizador, se retransmite la trama.



- t_I: Tiempo requerido para transmitir una trama
- t_{out}: Tiempo del temporizador de espera de ACK
  $t_{out} \geq 2 \cdot t_p + t_{proc} + t_s$
  - t_p: Tiempo de retardo de propagación
  - t_{proc}: Tiempo de procesado en recepción
  - t_s: Tiempo de transmisión de respuesta
- t_T: Tiempo mínimo entre tramas de datos sucesivas
  $t_T = t_I + t_{out}$

Apropiado para la transmisión semiduplex [1]. No es apropiado para transmisión duplex si el tiempo de propagación es mucho mayor que el tiempo empleado para transmitir la trama. Debido a retransmisiones provocadas por tramas erróneas:

$$\gamma_{real} < \gamma_{max}$$

Tiempo medio para una transmisión correcta:

$$t_v = \frac{t_T}{1-p}$$

Throughput máximo:

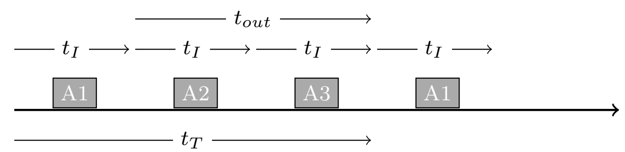
$$TH_{max_{S\&W}} = \lambda_{max_{S\&W}} = \frac{1}{t_v} = \frac{1-p}{t_T} = \frac{1-p}{a \cdot t_I}(paq/seg) \qquad a = \frac{t_T}{t_I} \geq 1$$

Throughput normalizado real ρ:

$$\rho \equiv \lambda \cdot t_I \leq \lambda_{max} \cdot t_I = \frac{1-p}{a} < 1$$

nº	Tiempo	Probabilidad
1	$t_T = t_I + t_{out}$	$1-p$
2	$2 \cdot t_T$	$p(1-p)$
...	...	...
n	$n \cdot t_T$	$p^{n-1}(1-p)$

Go-Back-N



Transmisión con errores

nº	Tiempo	Probabilidad
1	t_I	$1-p$
2	$t_I + t_T$	$p(1-p)$
...	...	...
n	$t_I + (n-1)\cdot t_T$	$p^{n-1}(1-p)$

$$t_v = t_I \frac{1+(a-1)p}{1-p} \qquad a \equiv \frac{t_T}{t_I} = \frac{t_I + t_{out}}{t_I} = 1 + \frac{t_{out}}{t_I}$$

Throughput máximo:

$$\lambda_{max} = \frac{1}{t_v} = \frac{1-p}{t_I \cdot (1+(a-1)p)}$$

Throughput normalizado:

$$\rho = \lambda \cdot t_I \leq \frac{1-p}{1+(a-1)p} < 1$$

$$\lambda_{max_{GBN}} = a \cdot \lambda_{max_{S\&W}}$$

sACK

Protocolo HDLC

Módulo: Número de tramas con diferente numeración que pueden ser enviadas.
Ventana: Número máximo de tramas que pueden estar en circulación sin haber sido confirmadas.
Longitud de tramas: Información (t_I) y de supervisión (t_S):

$$t_I = \frac{l + l'}{C} \qquad t_S = \frac{l'}{C}$$

Retardo de propagación (incluyendo t_{proc}): t_p
Tiempo de confirmación: $t_{ack} = 2 \cdot t_p + t_s$
Temporizador de reenvío: $t_{out} = 2 \cdot t_p + 2 \cdot t_I > t_{ack}$
Cuando ocurre un error se puede recuperar por REJ (primer caso) o TEMPORIZACIÓN (en todos los casos).
Throughput máximo:

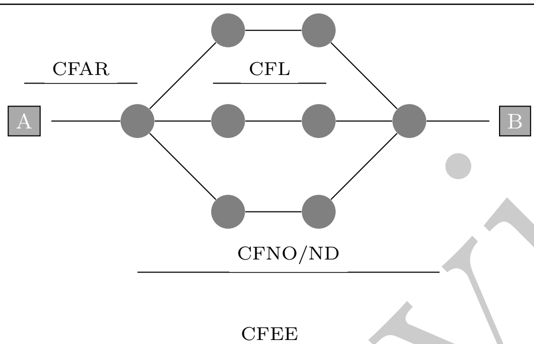
$$\lambda_{max} = \frac{1}{t_v} = \frac{1-p}{t_I(1+(a-1)p)}$$

p: Probabilidad de recibir una trama con error
T_1: Tiempo aleatorio requerido para la primera retransmisión (puede tomar diferentes valores)
T_2: Tiempo medio requerido para retransmisiones posteriores (es siempre igual en cada transmisión)
t_v: Tiempo medio de transmisión virtual de una trama de longitud t_I.
Tiempo medio de transmisión correcta de una trama:

$$t_V = t_I + E[T_1]p + \frac{T_2 p^2}{1-p}$$

TERMINAR

Modelado de N.Red y Control de Flujo



CFL: Control de Flujo Local
CFEE: Control de Flujo Entre Extremos
CFNO/ND: Control de Flujo entre Nodos Origen y Destino

Demostraciones

Esperanza y varianza en eventos Poissonianos

$$
\begin{aligned}
E(k) &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p(k) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{(\lambda \cdot T)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda T} = \\
&= e^{-\lambda T} \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda T \cdot \frac{k \cdot (\lambda \cdot T)^{k-1}}{k \cdot (k-1)!} \right) = e^{-\lambda T} \cdot \lambda \cdot T \cdot e^{\lambda T} = \\
&= \lambda \cdot T
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_k^2 &= E\left[(k - E[k])^2\right] = E[k^2] - E^2[k] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot p(k) - (\lambda \cdot T)^2 = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \cdot \frac{(\lambda \cdot T)^k}{k!} e^{-\lambda T} - \lambda^2 T^2 = \\
&= e^{-\lambda T} \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda T \cdot \frac{k \cdot (\lambda \cdot T)^{k-1}}{k \cdot (k-1)!} \right) - \lambda^2 T^2 = \\
&= \lambda T e^{-\lambda T} \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1+1) \cdot (\lambda \cdot T)^{k-1}}{(k-1)!} \right) - \lambda^2 T^2 = \\
&= \lambda T e^{-\lambda T} \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1) \cdot (\lambda \cdot T)^{k-1}}{(k-1)(k-2)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda T)^{k-1}}{(k-1)!} \right) - \lambda^2 T^2 = \\
&= \lambda T e^{-\lambda T} \cdot \left(\lambda T \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda \cdot T)^{k-2}}{(k-2)!} + e^{\lambda T} \right) - \lambda^2 T^2 = \\
&= \lambda T e^{-\lambda T} (\lambda T e^{\lambda T} + e^{\lambda T}) - \lambda^2 T^2 = \\
&= \lambda \cdot T
\end{aligned}
$$

Demostración de la distribución de Poisson

Stop & Wait Tiempo medio para una transmisión correcta

$$
\begin{aligned}
t_v &= t_T(1-p) + 2t_T(1-p)p + 3t_T(1-p)p^2 + ... = \\
&= t_T(1-p) \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot p^{i-1} = t_T(1-p) \frac{1}{(1-p)^2} = \\
&= \frac{t_T}{1-p}
\end{aligned}
$$

Go Back N Tiempo medio para una transmisión correcta

$$
\begin{aligned}
t_V &= (1-p) \cdot t_I + (1-p) \cdot p(t_T + t_I) + (1-p) \cdot p^2(2t_T + \cdot t_I) + ... = \\
&= (1-p) \cdot t_I + (1-p) t_T \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot p^i + (1-p) \cdot t_I \sum_{i=1}^{\infty} p^i = \\
&= (1-p) \cdot t_I + a \cdot t_I \cdot (1-p) \frac{p}{(1-p)^2} + t_I \cdot (1-p) \cdot \frac{p}{1-p} = \\
&= t_I (1 - p + \frac{ap}{1-p} + p) = t_I \frac{1-p+ap}{1-p} = \\
&= t_I \frac{1+(a-1)p}{1-p}
\end{aligned}
$$