# Campos Electromagnéticos

2º Curso de Ingeniería de Telecomunicaciones — UPV/EHU

*"Under-promise and over-deliver."*

**Javier de Martín Gil – 2015/16**

## Introducción y Ondas Planas

**Longitud de onda** en un medio:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{c}{f \cdot n} = \frac{c}{f \cdot \sqrt{\mu_{r_x} \epsilon_{r_x}}}$$

**Impedancia intrínseca** de un medio:

$$Z_x = \sqrt{\frac{\mu_x}{\epsilon_x}} = \sqrt{\frac{\mu_{r_x} \cdot \mu_0}{\epsilon_{r_x} \cdot \epsilon_0}}$$

Una onda plana tiene la siguiente expresión:

$$\vec{E}(x,y,z) = \vec{E_0} e^{-j\beta \hat{u}}$$

Se cumple la **condición de perpendicularidad** entre el campo magnético y la dirección de propagación: $\vec{E_0} \cdot \beta \hat{u} = 0$
**Polarización** de ondas planas:

- **Lineal**: $\mathbb{R}[E_0] \parallel \mathbb{I}[E_0]$
- **Circular**: $\mathbb{R}[E_0] \perp \mathbb{I}[E_0]$ y $|\mathbb{R}[E_0]| = |\mathbb{I}[E_0]|$
- **Elíptica**: En el resto de los casos

El **sentido de giro** para polarización elíptica o circular:

$$\vec{u} \cdot (\mathbb{R}[E_0] \times \mathbb{I}[E_0]) = \begin{cases} > 0 \text{ Negativa/Anti-horario/Levógiro} \\ < 0 \text{ Positiva/Horario/Dextrógiro} \end{cases}$$

## Incidencia Normal

### Incidencia Normal en dos medios

$$E_1^+ + E_1^- = E_2^+$$

**Coeficiente de reflexión** ($\rho$):

$$\rho = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1}$$

**Coeficiente de transmisión** ($\tau = 1 + \rho$):

$$\tau = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}$$

**Porcentaje de potencia reflejada**:

$$P_{\%} = |\rho|^2 \cdot 100\,\%$$

**Potencia**:

$$P = \frac{|\vec{E_0}|^2}{2\eta}$$

Se puede establecer una relación entre la potencia transmitida y la recibida:

$$\frac{P_t}{P_r} = e^{-2\alpha z}$$

**Pérdidas** de un medio: $tan(\delta) = x$. La **atenuación** de un medio con pérdidas es:

$$\alpha = \beta \frac{\tan(\delta)}{2}$$

Una onda que incide en una discontinuidad se descompone en tres:

- **Onda Incidente**:
  $\vec{E_i} = E_1^+ e^{-j\beta_1 z}$ $\quad \vec{H_i} = \frac{H_1^+}{\sqrt{\mu_1/\epsilon_1}} e^{-j\beta_1 z}$
- **Onda Reflejada**:
  $\vec{E_r} = E_1^- e^{+j\beta_1 z}$ $\quad \vec{H_r} = \frac{H_1^+}{\sqrt{\mu_1/\epsilon_1}} e^{+j\beta_1 z}$
- **Onda Transmitida**:
  $\vec{E_t} = E_2^+ e^{-j\beta_1 z}$ $\quad \vec{H_t} = \frac{H_2^+}{\sqrt{\mu_2/\epsilon_2}} e^{-j\beta_1 z}$

**Coeficiente de onda estacionaria (*COE*)**: Relaciona la cantidad de energía emitida por el emisor y la cantidad de energía reflejada de vuelta.

$$s = \frac{1 + |\rho|}{1 - |\rho|}$$

### Incidencia normal en tres medios

$$\rho_{23} = \frac{Z_{23} - \eta_2}{Z_{23} + \eta_2} = \frac{\eta_3 - \eta_2}{\eta_3 + \eta_2} \quad \rho_{12} = \frac{Z_{12} - \eta_1}{Z_{12} - \eta_1}$$

$$Z_{12} = \eta_2 \frac{Z_{23} \cdot cos(\beta_2 d_2) + \eta_2 \cdot jsin(\beta_2 d_2)}{\eta_2 \cdot cos(\beta_2 d_2) + Z_{23} \cdot jsin(\beta_2 d_2)} \qquad Z_{23} = \eta_3$$

### Supresión de reflexiones en el primer medio

($A$ y $B$ son los medios de las caras externas y $X$ el medio intermedio)

$$\beta_x = \beta_0 \cdot n_x$$

**Ventana Dieléctrica**

$$sin(\beta_x D_x) = 0 \quad \begin{cases} \eta_b = \eta_a \\ D_x = n\frac{\lambda_x}{2} \quad n = 1, 2, ... \end{cases}$$

**Transformador de Lambda Cuartos**

$$cos(\beta_x D_x) = 0 \quad \begin{cases} \eta_x = \sqrt{\eta_a \eta_b} \\ D_x = (2n-1)\frac{\lambda_x}{4} \quad n = 1, 2, ... \end{cases}$$

### Incidencia Normal en Medios con N Discontinuidades

Comenzar los cálculos desde el último medio, de atrás hacia delante, como en el caso de 3 medios.

## Incidencia Oblicua

- $\theta_i$ es el ángulo de incidencia, $\theta_r$ es el ángulo de reflexión y $\theta_t$ es el ángulo de transmisión/refracción.
- Plano de incidencia es el plano que contiene el vector normal a la superficie ($z$) y $\hat{n}_e$, $\hat{n}_i$ y $\hat{n}_t$.

Todas las ondas que se propaguen en un mismo medio tienen la misma velocidad de fase ($v_f$).
**Leyes de Snell**:

1. **Ley de la Reflexión**: Las ondas incidente y reflejada están en el mismo medio ($v_{f_1} = v_{f_2}$): $\theta_r = \theta_i$
2. **Ley de la Refracción**: Las ondas incidente y transmitida están en medios distintos ($v_{f_1} \neq v_{f_2}$)

$$sin(\theta_t) = \frac{v_{f_1}}{v_{f_2}} \cdot sin(\theta_i) \qquad n_2 sin(\theta_t) = n_1 sin(\theta_i)$$

El **índice de refracción** ($n_x$) compara la velocidad de fase de una *OEM* propagándose en un medio determinado con la velocidad de fase $c$ que tendría en el vacío:

$$n_x = \frac{c}{v_f} = \sqrt{\mu_{rx} \epsilon_{rx}}$$

Dependiendo del valor del índice de refracción del medio hay que distinguir dos casos:

$$n_x < n_{x+1} \rightarrow \theta_t < \theta_i \qquad n_x > n_{x+1} \rightarrow \theta_t > \theta_i$$

A medida que aumenta el ángulo de incidencia $\theta_i$ aumenta aún más el ángulo de transmisión $\theta_t$. El límite es $\theta_t = 90^o$, es el **ángulo crítico** ($\theta_c$). Por encima del ángulo crítico no existe onda transmitida, la onda incidente se refleja totalmente produciendo el fenómeno de **reflexión total**.

$$\theta_c = \arcsin\left(\frac{n_{x+1}}{n_x}\right)$$

### Descomposición del Campo Eléctrico Incidente en el Plano de Incidencia

La fórmula general para escribir una onda es:

$$\vec{E_x} = \vec{E}_{xo} \cdot e^{-j\beta \hat{u}}$$

Para determinar las amplitudes de las ondas reflejada y transmitida, es conveniente descomponer la onda incidente respecto al plano de incidencia.

$$\vec{E_i} = \vec{E_{i_\perp}} + \vec{E_{i_\parallel}}$$

### Polarización Paralela

Para un ángulo de incidencia determinado, ángulo de polarización $\theta_p = arctan(n_2/n_1)$, $\rho_\parallel = 0$, no se refleja.

$$E_{0_{r_\parallel}} = \rho_\parallel \cdot E_{0_{i_\parallel}} \qquad E_{0_{t_\perp}} = \tau_\parallel \cdot E_{0_{i_\perp}}$$

**Coeficiente de reflexión**:

$$\rho_{\parallel} = \frac{\eta_2 cos\theta_t - \eta_1 cos\theta_i}{\eta_2 cos\theta_t + \eta_1 cos\theta_i} = \frac{E_{0_{r_\parallel}}\Big|_{tang}}{E_{0_{i_\parallel}}\Big|_{tang}}$$

**Coeficiente de transmisión**:

$$\tau_{\parallel} = \frac{2\eta_2 cos\theta_t}{\eta_2 cos\theta_t + \eta_1 cos\theta_i} = \frac{E_{0_{t_\parallel}}\Big|_{tang}}{E_{0_{i_\parallel}}\Big|_{tang}}$$

### Polarización Perpendicular

Una onda con polarización perpendicular **siempre se reflejará** ($\rho_\perp \neq 0$) independientemente del ángulo de incidencia.

$$E_{0_{r_\perp}} = \rho_\perp \cdot E_{0_{i_\perp}} \qquad E_{0_{t_\perp}} = \tau_\perp \cdot E_{0_{i_\perp}}$$

**Coeficiente de reflexión**:

$$\rho_{\perp} = \frac{\eta_2 sec\theta_t - \eta_1 sec\theta_i}{\eta_2 sec\theta_t + \eta_1 sec\theta_i} = \frac{E_{0_{r_\perp}}\Big|_{tang}}{E_{0_{i_\perp}}\Big|_{tang}}$$

**Coeficiente de transmisión**:

$$\tau_{\parallel} = \frac{2\eta_2 sec\theta_t}{\eta_2 sec\theta_t + \eta_1 sec\theta_i} = \frac{E_{0_{t_\perp}}\Big|_{tang}}{E_{0_{i_\perp}}\Big|_{tang}}$$

La **dirección del campo magnético**, para ambos casos de polarización, se puede conseguir:

$$\vec{H} = \frac{\hat{n} \wedge \vec{E_0}}{\eta}$$

Observaciones sobre los coeficientes de reflexión en las polarizaciones perpendicular y paralela.

- $|\rho_\perp| > |\rho_\parallel|$
- $\rho_\perp \neq \rho_\parallel$
- Si la **incidencia es oblicua no se mantiene la polarización**.

## Guías de Onda

Se establecen las siguientes condiciones de contorno: $E_y(x=0) = E_y(x=a) = 0$.

$$\vec{\beta} = \beta_x \hat{x} + \beta_y \hat{y} + \beta_z \hat{z}\ , \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

- **Velocidad de fase**: es la tasa a la cual la fase de la misma se propaga en el espacio.
$$v_f = \frac{L_z}{\lambda} c = \frac{\beta}{\beta_z} c = \frac{\omega}{\beta_z} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}\sqrt{1-(\frac{\omega_c}{\omega})^2}} > c$$
- **Velocidad de grupo**: velocidad a con la que las variaciones en la forma de la amplitud de la onda se propagan en el espacio.
$$v_g = v_{prop} = \frac{\partial \omega}{\partial \beta_z} = \frac{\beta_z}{\beta} c = \frac{\omega}{\beta_z} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}\sqrt{1-\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2} < c$$

La **ecuación de onda** es:

$$E(x,y,z) = E_0 \cdot \overbrace{cos(\omega t - \beta_z z)}^{\text{Onda viajera}} \underbrace{sin(\beta_x x)}_{\text{Onda estacionaria}}$$

$$\omega^2 = (\beta_x^2 + \beta_z^2)c^2$$

**Relación de dispersión**, relaciona la longitud de onda o el número de onda con su frecuencia:

$$\omega = c\sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \beta_z^2}$$

$$-\gamma_c^2 \triangleq \omega^2 \mu\epsilon + \gamma^2 = \omega_c^2 \mu = \frac{\omega_c^2}{c}$$

**Atenuación**:

$$\alpha(dB) = \frac{2\pi}{c}\sqrt{f_{dominante}^2 - f_t^2}$$

$$\alpha(Np/m) = \frac{\alpha(dB/m)}{20 \cdot log_{10}(e)}$$

**Longitud de Onda de la Guía de Ondas**:

$$\lambda_g = \frac{v_{fase}}{f} = \frac{\lambda}{\sqrt{1-(\frac{\omega_c}{\omega})^2}}$$

### Modos de Propagación

- **Modo Transversal Electro-Magnético** ($E_z = H_z = 0$): No existe ninguna componente del campo eléctrico en la dirección de propagación.
- **Modo Transversal Magnético** ($H_z = 0$): No existe ninguna componente del campo magnético en la dirección de propagación.
- **Modo Transversal Eléctrico** ($E_z = 0$): No existe ninguna componente del campo eléctrico en la dirección de propagación.

**Frecuencia de corte** de un modo $mn$ de propagación:

$$f_{c_{mn}} = \frac{c}{2\pi\sqrt{\epsilon_r}}\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

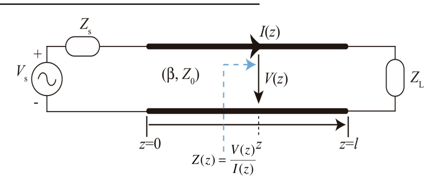
El **ancho de banda** de una guía de ondas es la diferencia entre el modo fundamental y el primer modo superior.

El **desfase de la onda** al atravesar la guía se puede expresar como: $\phi = L \cdot \beta$

**Retardo de propagación** que sufre la onda al atravesar la guía: $\gamma = \frac{L}{v_g}(segundos)$

El **modo dominante** de una guía de ondas es aquel con la frecuencia más baja.

## Líneas de Transmisión




**Coeficiente de reflexión** en la carga ($z$):

$$\rho = \frac{V_0^- \cdot e^{+j\beta z}}{V_0^+ \cdot e^{-j\beta z}} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

**Coeficiente de reflexión** en una posición arbitraria:

$$\rho(l) = \rho_L \cdot e^{-2\gamma l}$$

**Impedancia**:

$$Z(0) = Z_0 \frac{Z(l)cos(\beta l) + jZ(0)sin(\beta l)}{Z(0)cos(\beta l) + jZ(l)sin(\beta l)}$$

**Impedancia de entrada** en $Z(z)$:

$$Z(z) = \frac{V(z)}{I(z)} = Z_0 \frac{1+\rho(z)}{1-\rho(z)}$$

$$\rho(z) = \rho(0)e^{2j\beta z} \quad \rho(l) = \rho_l \frac{Z_l - Z_0}{Z_l + Z_0}$$

**Coeficiente de Onda Estacionaria**:

$$s = \frac{|V_{max}|}{|V_{min}|} = \frac{1+|\rho|}{1-|\rho|}$$

**Tensión en un punto de la guía**:

$$V(z) = V_0^+ e^{-j\beta z} + V_0^- e^{j\beta z}$$

**Corriente en un punto de la guía**:

$$I(z) = \frac{V_0^+}{Z_0} e^{-j\beta z} + \frac{V_0^-}{Z_0} e^{j\beta z}$$

### Transformación de Impedancias

- **Cortocircuito**: $Z_L = 0$, $\rho_L = -1$
- **Circuito Abierto**: $Z_L \to \infty$, $\rho_L = +1$
- **Línea de Transmisión y Carga Adaptadas**: $Z_L = Z_0$, $\rho_L = 0$
- **Línea de Transmisión y Fuente Adaptadas**: $Z(0) = Z_S$

**Coeficiente de Onda Estacionaria (*COE*)**:

$$s = \frac{V_{max}}{V_{min}} = \frac{1+|\rho(z)|}{1-|\rho(z)|}$$

Valor de tensión de la onda incidente/reflejada:

$$V_0^{\pm} = \frac{1}{2}(V_0 \pm I_0 Z_0)$$

**Distancia al primer mínimo** ($Z_{min}$): $\phi - 2\beta Z_{min} = -\pi$

**Distancia al primer máximo** ($Z_{max}$): $\phi - 2\beta Z_{max} = 0$

**Potencia en la carga**:

$$P_L = \frac{1}{2}\left|\frac{V_S}{Z_S + Z(0)}\right|^2 \mathbb{R}(Z_L)$$

**Módulo de tensión total** dentro de la línea de transmisión:

$$|V(z')| = |V_L^+|\sqrt{1 + |\rho_L|^2 + 2|\rho|cos(\theta_L - 2\beta z')}$$