
Análisis de Fourier

José Antonio Vallejo

FACULTAD DE CIENCIAS
UASLP

Prefacio

Estas notas tienen su origen en un curso propedéutico de la Maestría en Ciencias Aplicadas de la Facultad de Ciencias de la UASLP, impartido en el año 2009. Los alumnos del curso eran un grupo mixto de ingenieros físicos, electrónicos y matemáticos y la intención del mismo fue introducirlos en las herramientas básicas del análisis de Fourier centrándose en las aplicaciones a la teoría de la señal y las ecuaciones en derivadas parciales, pero tratando de que el rigor fuera aceptable para los estudiantes de matemáticas.

Naturalmente, conseguir este tipo de objetivos es francamente difícil, cuando no imposible. Las notas han sido reelaboradas desde entonces, tratando de que sirvieran como una introducción elemental al tema para estudiantes de ciencias en general. Tienen una estructura flexible en el sentido de que sólo incluyen las demostraciones de aquéllos resultados más fáciles o que están al alcance del nivel de matemáticas de, digamos, un físico. Sin embargo, se puede realizar un curso estándar de análisis aplicado con base en ellas si se añade el material necesario para probar los resultados de las secciones dedicadas a convergencia de la serie de Fourier, justificación del método de separación de variables y existencia de transformadas. En último término, se pretende que las notas puedan utilizarse en el correspondiente curso de análisis de Fourier de la nueva titulación de Matemáticas Aplicadas. Otro aspecto a resaltar es el hecho de que los estudiantes del propedéutico no tenían ningún conocimiento previo sobre series, por lo que se incluyó una sección introductoria a este tópico. Sin embargo, en el caso de los estudiantes de la nueva titulación es de esperar que esta introducción sea superflua y pueda sustituirse por otros temas más avanzados.

Se incluyen numerosos ejercicios que ilustran los temas tratados, todos con su correspondiente respuesta con el fin de que el material pueda ser utilizado como referencia para estudio personal y el alumno compruebe si ha asimilado correctamente los contenidos.

Índice

1. Introducción: funciones periódicas	1
2. Series numéricas	2
2.1. Sucesiones	2
2.2. Límite de una sucesión	3
2.3. Series. Convergencia	4
2.4. Series de términos positivos	6
2.5. Series alternadas	8
3. Desarrollo en serie trigonométrica	9
3.1. Coeficientes de Fourier	9
3.2. Cambio de periodo	11
4. Desarrollos en serie de senos y en serie de cosenos	13
4.1. Funciones pares e impares	13
4.2. Desarrollos en serie de funciones pares e impares	14
4.3. La descomposición par + impar	15
4.4. Desarrollos en un intervalo	17
5. Convergencia de la serie de Fourier	18
5.1. Convergencia puntual	19
5.2. Fenómeno de Gibbs	20
5.3. Aproximación en media cuadrática	21
5.4. Desigualdad de Bessel e Igualdad de Parseval	23
6. Series de Fourier complejas	23
7. Espectro de una función	26
8. Aplicación a las ecuaciones en derivadas parciales	27
8.1. La ecuación del calor	27
8.2. La ecuación de ondas	30
8.3. La ecuación de Laplace	32
9. De la serie de Fourier a la transformación de Fourier	35
10. La Transformación de Fourier	36
11. Propiedades de la transformación de Fourier	39
11.1. Propiedades básicas	39
11.2. Transformada de funciones reales	42
11.3. Transformadas seno y coseno	44
11.4. Identidad de Parseval	45
12. El producto de convolución	45

13.Funciones generalizadas	48
13.1. La función δ de Dirac	48
13.2. Transformación de funciones periódicas	49
13.3. Transformada de un tren de deltas	50
13.4. Transformada de la función de Heaviside $u(t)$	51
14.Las cuatro transformadas de Fourier	52
15.La transformada discreta de Fourier	53
16.Ejercicios	54
16.1. Sucesiones y series	54
16.2. Soluciones	56
16.3. Series de Fourier	57
16.4. Soluciones	59
16.5. Aplicación a las EDP	61
16.6. Soluciones	61
16.7. Transformada de Fourier	62
16.8. Soluciones	65

1. Introducción: funciones periódicas

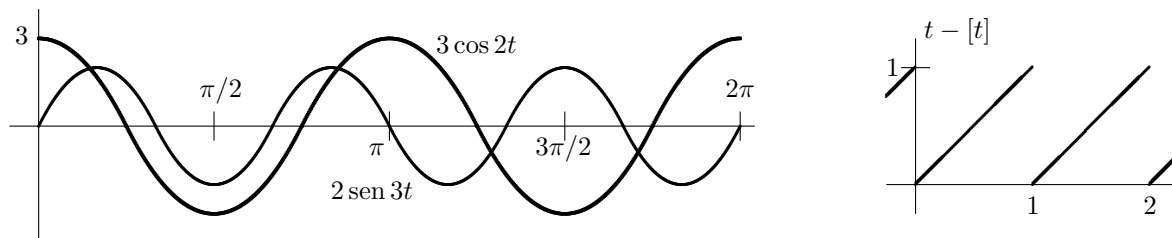
Definición 1 Una función f definida en \mathbb{R} es **periódica** con **periodo** T si se verifica $f(t + T) = f(t)$ cualquiera que sea $t \in \mathbb{R}$.

Si f es periódica con periodo T , también lo es con periodos $2T$, $3T$ y en general nT cualquiera que sea el entero n . Al menor de todos los periodos (positivos) se le denomina *periodo fundamental*, pero es habitual referirse a él simplemente como el periodo de la función. Una función periódica con periodo fundamental T queda definida por sus valores en cualquier intervalo de longitud T , y también se denomina periodo a tal intervalo.

Ejemplo 1.1. Las siguientes funciones son periódicas con el periodo fundamental indicado:

$$\begin{array}{lll} (A) & \text{sen } t, & T = 2\pi \\ (B) & 3 \cos 2t, & T = \pi \\ (C) & 2 \text{sen } 3t, & T = 2\pi/3 \\ (D) & \cos \pi t, & T = 2 \\ (E) & \text{tg } t, & T = \pi \\ (F) & t - [t], & T = 1 \end{array}$$

En la última, $[t]$ es la parte entera de t , es decir el mayor entero menor o igual que t . Por ejemplo, $[\pi] = 3$ y $\pi - [\pi] = 0,141592\dots$. Como $[t + 1] = [t] + 1$, se tiene $(t + 1) - [t + 1] = t - [t]$ y la función $f(t) = t - [t]$ es periódica con periodo 1.



Funciones periódicas

La suma de funciones periódicas con el mismo periodo también es una función periódica con ese periodo, pues

$$(f + g)(t + T) = f(t + T) + g(t + T) = f(t) + g(t) = (f + g)(t).$$

La suma de funciones periódicas con distinto periodo no es necesariamente una función periódica. Sólo lo es cuando el cociente entre los periodos es un número racional. Así, $\text{sen } 3t + \cos(t/2)$ es una función periódica (con periodo fundamental 4π), mientras que $\text{sen } t + \cos \pi t$ no es una función periódica.

Particularicemos para el caso $T = 2\pi$. Como las funciones $\cos t$, y $\text{sen } t$, tienen periodo (fundamental) 2π , las funciones $\cos nt$, y $\text{sen } nt$, tienen periodo fundamental $2\pi/n$ y entonces también tienen periodo 2π , cualquiera que sea el entero n . Por lo tanto, el conjunto de funciones $\{\cos nt, \text{sen } nt : n \in \mathbb{N}\}$ está compuesto de funciones periódicas con periodo 2π . Añadiendo la función constante $f(t) \equiv 1$, que admite cualquier periodo, obtenemos un conjunto básico de funciones periódicas con periodo 2π . Podemos crear otras sumando varias de ellas o, con mayor generalidad, formando combinaciones lineales:

$$\frac{a_0}{2} \cdot 1 + \sum_{n=1}^N a_n \cos nt + \sum_{n=1}^N b_n \text{sen } nt$$

con coeficientes arbitrarios (la justificación de designar por $a_0/2$ al primer coeficiente se verá posteriormente).

Se obtiene así un conjunto considerable de funciones, pero no es posible obtener *cualquier* función periódica con periodo 2π . Baste observar que, al tratarse de combinaciones lineales de funciones continuas, sólo podemos obtener de esa forma funciones continuas. Sin embargo, no estamos lejos de la afirmación fundamental de Fourier que, formulada de manera todavía imprecisa, fue: “*Sí es posible cuando $N \rightarrow \infty$* ”. Es decir, “cualquier” función periódica de periodo 2π admite un *desarrollo en serie* de la forma

$$f(t) \simeq \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt) \quad (1)$$

con coeficientes a_n, b_n adecuados.

Nos ocuparemos de ello en la sección 3 y siguientes, tras revisar previamente los conceptos de convergencia de sucesiones y de suma de series numéricas.

2. Series numéricas

2.1. Sucesiones

Una **sucesión** real es un conjunto infinito de números reales ordenados secuencialmente:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$$

Ejemplos de sucesiones son

- (A) 1, -7, 11, 4, -2, $\sqrt{3}$, $4/5, \dots$
- (B) 1, -4, 9, -16, 25, $\dots, (-1)^{n-1}n^2, \dots$
- (C) 1, $1/2$, $1/3$, $1/4$, $1/5, \dots, 1/n, \dots$
- (D) 3, 1, 3, 14, 3, 141, 3, 1415, 3, 14159, 3, 141592, \dots
- (E) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, \dots

Para la sucesión (A) no parece haber ninguna regla fija que permita generar los términos de la sucesión. En cambio, la sucesión (B) está formada por los cuadrados de los números naturales, alternando signos positivo y negativo, lo que se puede expresar escribiendo que el término que ocupa el lugar n -ésimo, es $a_n = (-1)^{n-1}n^2$. Este término se denomina *término general*, y a partir de su expresión es posible obtener cualquier término de la sucesión dándole a n el correspondiente valor. Así el término séptimo sería $a_7 = (-1)^{6}7^2 = 49$. Análogamente, para la sucesión (C) el término general es $a_n = 1/n$. También parece haber una regla fija para ir obteniendo los términos de la sucesión (D): el término n -ésimo sería el redondeo por defecto de π con n cifras decimales, aunque tampoco podemos asegurarlo a partir de los términos dados. De ser así, como supondremos, el término general puede expresarse en la forma $a_n = [10^n \pi] / 10^n$. Finalmente la última sucesión puede ser la sucesión de números primos, una sucesión que está perfectamente definida, pero para la que no existe expresión alguna que permita expresar el término general a_n .

Las *notaciones* más usuales son $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ (para indicar que es el conjunto de términos a_n que se obtienen cuando n recorre sucesivamente los números naturales), la expresión más abreviada $\{a_n\}$, o incluso simplemente a_n . Por ejemplo, la sucesión (C) puede designarse de cualquiera de las formas $\{a_n = 1/n, n \in \mathbb{N}\}$, $\{a_n = 1/n\}$, $\{1/n\}$, y $a_n = 1/n$.

A veces la forma de generar una sucesión se expresa más cómodamente mediante una *relación de recurrencia* que permite calcular cada término a partir de los anteriores. Por ejemplo, la conocida *sucesión de Fibonacci* se genera a partir de $a_1 = 1$ y $a_2 = 1$ mediante la relación de recurrencia $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, con lo que se obtiene la sucesión

$$(F) \quad 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots$$

Podemos ver una *progresión aritmética* como una sucesión definida por la relación de recurrencia $a_n = a_{n-1} + r$, y una *progresión geométrica* como una sucesión definida por la relación de recurrencia $a_n = r a_{n-1}$. En ambos casos basta fijar el primer término, a_1 , y la razón de la progresión, r , para concretar toda la sucesión.

Diremos que una sucesión es *monótona creciente* cuando $a_n \geq a_{n-1}$ y que es *monótona decreciente* cuando $a_n \leq a_{n-1}$, (aunque los adjetivos monótona no decreciente y monótona no creciente, respectivamente, hubieran sido semánticamente más precisos). Las sucesiones (D), (E) y (F) son monótonas crecientes, mientras que la sucesión (C) es monótona decreciente.

Una sucesión está *acotada* cuando existen dos constantes, llamadas *cotas*, N, M tales que $N \leq a_n \leq M$, o equivalentemente, cuando existe una cota K tal que $|a_n| \leq K$. Cuando se verifica una de las desigualdades se dice que la sucesión está *acotada superiormente* ($a_n \leq M$) o *inferiormente* ($N \leq a_n$). De las sucesiones anteriores, las sucesiones (E) y (F) están acotadas inferiormente (por ejemplo por la cota $N = 0$), las sucesiones (C) y (D) están acotadas superior e inferiormente, o simplemente están acotadas, y la sucesión (B) no está acotada ni superior ni inferiormente.

2.2. Límite de una sucesión

Los términos de la sucesión (C) van siendo cada vez más pequeños, mientras que los de la sucesión (D) se van acercando cada vez más a π . De las otras sucesiones no podemos decir algo análogo. Recogemos esta propiedad con la siguiente definición.

Definición 2 Una sucesión $\{a_n\}$ es **convergente** hacia el **límite** a si para cualquier número positivo ϵ , existe un número entero N tal que se verifica $|a_n - a| < \epsilon$ siempre que $n > N$. También diremos que a_n tiende hacia a cuando $n \rightarrow \infty$, y lo expresaremos escribiendo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \quad \text{o bien} \quad a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a. \quad (2)$$

Así, las sucesiones (C) y (D) son convergentes; la primera tiene límite $a = 0$, mientras que la segunda tiene límite $a = \pi$. Como verificación, para la sucesión $a_n = 1/n$, si $\epsilon = 0,01$, basta tomar $N = 100$ (o cualquier otro número mayor), para que cuando $n > N$ se verifique $|a_n - a| = 1/n - 0 = 1/n < \epsilon = 0,01$. Y esto ocurre cualquier que sea ϵ . Si tomamos otro valor, como por ejemplo $\epsilon = 0,0002$, bastará tomar $N = 5000$ para que se siga cumpliendo que $|a_n - a| < \epsilon$ para $n > N$. Análogamente, para la sucesión (D) se tiene $|a_n - \pi| < 10^{-n}$, por lo que cuando $\epsilon = 0,01$ se puede tomar $N = 1$, mientras que cuando $\epsilon = 0,0002$ basta tomar $N = 3$. Las sucesiones (B), (E) y (F) no son convergentes.

Toda sucesión convergente está acotada, y por lo tanto una sucesión que no esté acotada no puede ser convergente. Es el caso de las sucesiones (B), (E) y (F) que no son convergentes, aunque para las dos últimas, como sus términos crecen indefinidamente al crecer n , se dice que tienen límite ∞ .

Para las sucesiones obtenidas como suma, diferencia, producto o cociente de sucesiones convergentes se demuestra fácilmente que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \quad \implies \quad \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b, & \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = ab \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b, & \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n / b_n) = a/b, \end{cases}$$

para el cociente suponiendo que $b_n, b \neq 0$.

El resultado que permite asegurar la convergencia de sucesiones y que más utilizaremos es el siguiente.

Teorema 1 Toda sucesión creciente y acotada superiormente es convergente:

$$a_n \geq a_{n-1}, \quad a_n \leq M \quad \implies \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \leq M$$

Análogamente, toda sucesión decreciente y acotada inferiormente es convergente.

Es el caso de las dos sucesiones convergentes anteriores: la sucesión (D) es creciente y acotada superiormente y la sucesión (C) es decreciente y acotada inferiormente. Otro ejemplo interesante es el siguiente.

Ejemplo 2.1. Se demuestra que la sucesión

$$2, \quad \left(\frac{3}{2}\right)^2, \quad \left(\frac{4}{3}\right)^3, \quad \left(\frac{5}{4}\right)^4, \dots, \left(\frac{n+1}{n}\right)^n, \dots$$

es creciente. Además está acotada superiormente, pues

$$\begin{aligned} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \binom{n}{3} \frac{1}{n^3} + \binom{n}{4} \frac{1}{n^4} + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \frac{n-1}{n} + \frac{1}{3!} \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} + \frac{1}{4!} \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{n^3} + \dots \\ &< 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots = e \end{aligned}$$

por lo que ha de ser convergente. De hecho su límite es precisamente el número e :

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots = 2,7182818284\dots \quad (3)$$

2.3. Series. Convergencia

La noción de serie aparece al intentar realizar sumas infinitas. Por ejemplo, podemos intentar sumar todos los términos de la progresión geométrica infinita con primer término $a_1 = 1/2$ y razón $r = 1/2$:

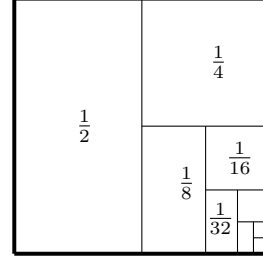
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

Al sumar los N primeros términos, utilizando la fórmula de la suma de los términos de una progresión geométrica,

$$S_N = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_N = \frac{a_N r - a_1}{r - 1}$$

se obtiene

$$\begin{aligned} S_N &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^N} \\ &= \frac{(\frac{1}{2})^{N+1} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - 1} = 1 - (\frac{1}{2})^N \end{aligned}$$



de donde se puede intuir, eventualmente con la interpretación gráfica de la figura, que la suma de los infinitos términos de la progresión debería ser 1, pues ese es el límite de las sumas $\{S_N\}$ cuando $N \rightarrow \infty$. En general se tiene

Definición 3 A partir de una sucesión $\{a_n\}$ se define una **serie** como la suma infinita

$$\sum_{n \geq 1} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \quad (4)$$

Considerando a continuación la sucesión de **sumas parciales**

$$S_N = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_N = \sum_{n=1}^N a_n, \quad (5)$$

cuando esta sucesión es convergente, se asocia a la serie su límite como **suma** de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N \quad (6)$$

Se dice entonces que la serie $\sum_{n \geq 1} a_n$ es **convergente** con suma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, mientras que cuando la sucesión de sumas parciales no converge se dice que la serie es **divergente**.

Se puede decir ahora que la serie $\sum_{n \geq 1} 1/2^n$ es convergente con suma $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n = 1$. Con mayor generalidad, se tiene

Ejemplo 2.2. La serie geométrica, $\sum_{n \geq 1} ar^n$, es convergente cuando $|r| < 1$, pues a partir de

$$S_N = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{N-1} = \frac{ar^{N-1}r - a}{r - 1} = \frac{a}{1 - r} + \frac{a}{r - 1}r^N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{a}{1 - r}$$

se obtiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1 - r} \quad (|r| < 1) \quad (7)$$

Sin embargo, cuando $|r| \geq 1$ la serie geométrica es divergente. Por ejemplo, las series $\sum_{n \geq 1} 3^n$ y $\sum_{n \geq 1} (-2)^n$ son divergentes y no se les puede asociar ninguna suma.

Ejemplo 2.3. La serie

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$$

es convergente con suma 1, pues a partir de $1/n(n+1) = 1/n - 1/(n+1)$ se obtiene

$$S_N = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right) = 1 - \frac{1}{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1.$$

Además de determinar la suma de series convergentes tiene interés dilucidar si una determinada serie es convergente o divergente. Se habla entonces de decidir el *carácter* de la serie. Una primera condición necesaria para que una serie pueda ser convergente se obtiene del siguiente resultado.

Teorema 2 Si la serie $\sum_{n \geq 1} a_n$ es convergente, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

En efecto, si $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$,

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = S_{n-1} + a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S = S + \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \implies \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Este resultado es más útil en negativo: si no existe $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, o existe pero es $\neq 0$, la sucesión no puede ser convergente:

Criterio 1 Se tiene que:

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \implies \sum_{n \geq 1} a_n \text{ es divergente}$

Ejemplo 2.4. Las series

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots + (-1)^n + \cdots$$

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \cdots + \frac{n}{n+1} + \cdots$$

son divergentes. Para la primera $S_N = -1$ cuando N es impar, mientras que $S_N = 0$ cuando N es par, por lo que no puede ser convergente. Esto también puede deducirse de que es una serie geométrica con razón $r = -1$, o como consecuencia del criterio anterior, pues la sucesión $(-1)^n$ no tiene límite. Lo mismo ocurre con la segunda, pues $\lim_{n \rightarrow \infty} n/n+1 = 1 \neq 0$.

Nótese que el criterio no permite concluir nada cuando se verifica $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. En ese caso la serie puede ser convergente, como la serie geométrica con razón r cuando $|r| < 1$, pero también puede ser divergente, como la serie *armónica*

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots \quad (8)$$

según veremos a continuación.

En los apartados siguientes veremos algunos criterios adicionales que permiten decidir el carácter de series, primero para series de términos positivos y después para series de términos cualesquiera, en particular para las llamadas series alternadas. Posteriormente, en la sección 5, se obtendrán las sumas de algunas series a partir de los resultados de convergencia de las series de Fourier.

2.4. Series de términos positivos

Diferentes criterios ayudan a decidir el carácter de series de términos positivos, $a_n \geq 0$. Veremos cuatro de los más utilizados. Los dos primeros son criterios de comparación, por lo que su utilización requiere disponer de otra serie cuyo carácter sea conocido. El tercero solventa este inconveniente. Finalmente, el criterio integral es muy útil cuando los anteriores no permiten decidir el carácter de una serie. Nótese previamente que, como la sucesión de sumas parciales de una serie de términos positivos es creciente, si está acotada superiormente ha de ser convergente, de acuerdo con el teorema 1.

Criterio 2 (1er criterio de comparación) Sean $\sum_{n \geq 1} a_n$ y $\sum_{n \geq 1} b_n$ dos series de términos positivos tales que para todo n (o para todo n suficientemente grande)

$$\boxed{0 \leq a_n \leq b_n} \quad (9)$$

Entonces

$$\boxed{\sum_{n \geq 1} b_n \text{ es convergente} \implies \sum_{n \geq 1} a_n \text{ es convergente}} \quad (9)$$

$$\boxed{\sum_{n \geq 1} a_n \text{ es divergente} \implies \sum_{n \geq 1} b_n \text{ es divergente}} \quad (9)$$

El resultado es consecuencia de que para las sumas parciales se tiene $0 \leq \sum_{n=1}^N a_n \leq \sum_{n=1}^N b_n$. Nótese que el criterio no afirma nada cuando la serie $\sum_{n \geq 1} a_n$ es convergente ni cuando la serie $\sum_{n \geq 1} b_n$ es divergente.

Ejemplo 2.5. Veamos que la serie armónica $\sum_{n \geq 1} 1/n$ es divergente. Las dos series

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} b_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16} + \cdots \\ \sum_{n \geq 1} a_n &= 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}} + \underbrace{\frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16}} + \cdots \end{aligned}$$

donde $a_n = 1/2^k$ cuando $2^{k-1} < n \leq 2^k$, verifican la condición del criterio: $0 \leq a_n = 1/2^k \leq 1/n \leq b_n$. Agrupando como se indica los términos iguales de la última serie, cuya suma siempre es $1/2$, se obtiene para las sumas parciales

$$\sum_{n=1}^{N=2^k} a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} = 1 + k \frac{1}{2} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$$

Por lo tanto la serie $\sum_{n \geq 1} a_n$ es divergente, y entonces la serie $\sum_{n \geq 1} b_n = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ también es divergente.

Criterio 3 (2º criterio de comparación) Sean $\sum_{n \geq 1} a_n$, $\sum_{n \geq 1} b_n$ dos series de términos positivos: $a_n \geq 0$, $b_n > 0$.

Si

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = K, \quad 0 < K < \infty} \quad (10)$$

Entonces ambas series tienen el mismo carácter.

En otras palabras, cuando $0 < K < \infty$, si una serie es convergente la otra también lo es, y cuando una serie es divergente la otra también. Nótese que el criterio no permite ninguna conclusión cuando no existe el límite de a_n/b_n o cuando éste vale 0 o ∞ .

Ejemplo 2.6. La serie

$$\sum_{n \geq 1} a_n = \sum_{n \geq 1} \frac{n}{4n^2 + 5}$$

es divergente, pues comparando con la serie armónica $\sum_{n \geq 1} b_n = \sum_{n \geq 1} 1/n$ se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{4n^2 + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4 + \frac{5}{n^2}} = \frac{1}{4}.$$

Criterio 4 (del cociente) Sea $\sum_{n \geq 1} a_n$ una serie de términos estrictamente positivos $a_n > 0$. Si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = r \begin{cases} < 1 & \Rightarrow \text{la serie es convergente} \\ > 1 & \Rightarrow \text{la serie es divergente} \end{cases} \quad (11)$$

De nuevo, no se puede afirmar nada cuando el límite no existe o cuando $r = 1$. Omitimos la demostración, que se basa en que para n grande la sucesión a_n se comporta aproximadamente como una progresión geométrica de razón r y la serie geométrica sólo es convergente cuando $r < 1$.

Ejemplo 2.7. La serie $\sum_{n \geq 1} a_n = \sum_{n \geq 1} n!/n^n$ es convergente, pues

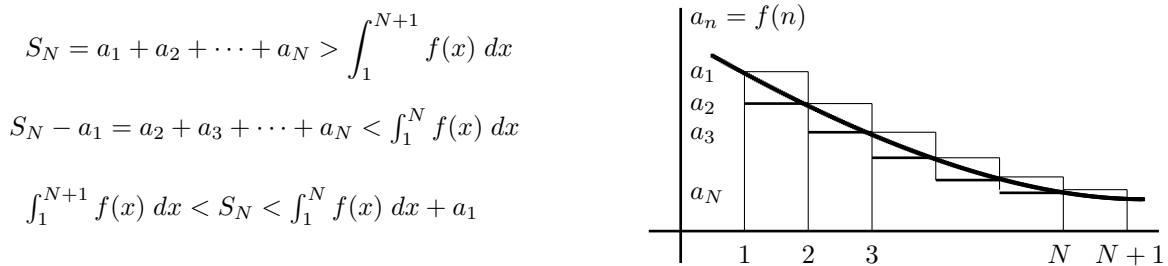
$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{n!}{n^n} : \frac{(n-1)!}{(n-1)^{n-1}} = \frac{n(n-1)^{n-1}}{n^n} = \frac{1}{\frac{n^{n-1}}{(n-1)^{n-1}}} = \frac{1}{(1 + \frac{1}{n-1})^{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e} < 1$$

Por último, veamos el criterio integral:

Criterio 5 (de la integral) Sea $\sum_{n \geq 1} a_n$ una serie de términos positivos y decreciente para la que $a_n = f(n)$ puede obtenerse a partir de una función f continua, decreciente y positiva, definida para $1 \leq x < \infty$. Entonces

$$\exists \int_1^\infty f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_1^N f(x) dx \iff \sum_{n \geq 1} f(n) \text{ converge} \quad (12)$$

El criterio se basa en que las sumas parciales de la serie permiten aproximar superior e inferiormente el valor de la integral como se ilustra en la figura



Por ello, si existe la integral impropia $\int_1^\infty f(x) dx$, la serie es convergente y viceversa.

Ejemplo 2.8. Se denominan p -series a las series

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

donde $p > 0$ es un parámetro. Por ejemplo, para $p = 3$ y para $p = 1/2$ se trata de las series

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3} = 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64} + \frac{1}{125} + \dots \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \dots$$

Para $p \neq 1$ utilizando el criterio integral con $f(x) = 1/x^p$ se obtiene

$$\int_1^N \frac{1}{x^p} dx = \frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_1^N = \frac{N^{1-p} - 1}{1-p} \quad N \rightarrow \infty \quad \begin{cases} 1/(p-1) & \text{si } p > 1 \\ \infty & \text{si } p < 1 \end{cases}$$

por lo que las p -series son convergentes cuando $p > 1$ y divergentes cuando $p < 1$. Para $p = 1$ se trata de la serie armónica, cuya divergencia ya hemos visto, aunque también se puede obtener con este criterio:

$$\int_1^N \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^N = \ln N \quad N \rightarrow \infty \quad \infty$$

Las p -series son muy útiles como sucesiones de referencia al usar los criterios de comparación.

2.5. Series alternadas

Estudiaremos ahora series cualesquiera, es decir, series cuyos términos a_n pueden ser positivos o negativos.

Dada una serie de términos positivos y negativos, podemos considerar la serie de términos en valor absoluto, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, cuyo carácter se puede estudiar mediante los criterios del apartado anterior. Cuando esta serie converge se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es *absolutamente convergente*. Se demuestra que *toda serie absolutamente convergente es convergente*:

$$\sum_{n \geq 1} |a_n| \text{ converge} \implies \sum_{n \geq 1} a_n \text{ converge} \quad (13)$$

Naturalmente, puede ocurrir que la serie $\sum_{n \geq 1} a_n$ sea convergente sin que lo sea la serie $\sum_{n \geq 1} |a_n|$, y se dice entonces que la serie $\sum_{n \geq 1} a_n$ es *condicionalmente convergente* (debido a que su suma se puede modificar alterando el orden de sumación de los términos, lo que nunca puede ocurrir con las series absolutamente convergentes).

Entre estas series las más interesantes son aquellas en las que los términos van siendo alternativamente positivos y negativos, denominadas *series alternadas*. Pueden caracterizarse por satisfacer $a_{n-1} a_n < 0$, y es habitual expresar su término general en la forma $a_n = (-1)^n \alpha_n$, o bien $a_n = (-1)^{n-1} \alpha_n$, donde $\alpha_n = |a_n| > 0$. Por ejemplo la serie

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \frac{5}{6} - \frac{6}{7} + \dots$$

es una serie alternada. Para ellas es válido el siguiente resultado.

Criterio 6 (de Leibniz) Una serie alternada $\sum_{n \geq 1} a_n = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \alpha_n$ que satisface

- i) la sucesión de términos en valor absoluto es decreciente: $\alpha_n \leq \alpha_{n-1}$,
- ii) el término general tiende hacia 0: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$,

es convergente.

Demostración: Supongamos que $a_1 = \alpha_1 > 0$ (el razonamiento es análogo si $a_1 < 0$). Como la sucesión α_n es decreciente, las diferencias $\alpha_n - \alpha_{n+1}$ son siempre positivas. Agrupando las sumas parciales pares, S_{2m} , e impares, S_{2m+1} , en la forma

$$S_{2m} = (\alpha_1 - \alpha_2) + (\alpha_3 - \alpha_4) + \dots + (\alpha_{2m-1} - \alpha_{2m})$$

$$S_{2m+1} = \alpha_1 - (\alpha_2 - \alpha_3) - (\alpha_4 - \alpha_5) - \cdots - (\alpha_{2m} - \alpha_{2m+1})$$

se observa que la sucesión de sumas parciales pares es creciente, mientras que la de sumas parciales impares es decreciente. Además, $S_{2m} > 0$, $S_{2m+1} < a_1$ y $S_{2m+1} - S_{2m} = a_{2m+1} > 0$, por lo que

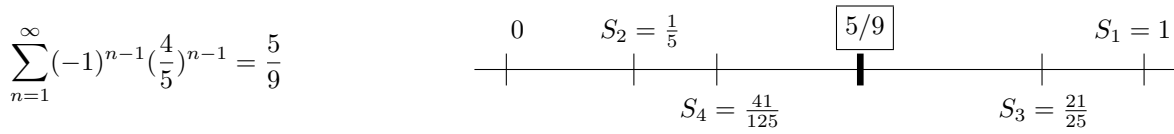
$$0 < S_{2m} < S_{2m+1} < a_1$$

y por el teorema 1 ambas sucesiones convergen. Además, como $\lim_{n \rightarrow \infty} |S_n - S_{n-1}| = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$, las dos han de tener el mismo límite, es decir, la sucesión S_n ha de ser convergente. \square

Ejemplo 2.9. En la figura se ilustra la demostración anterior con el comportamiento de las sumas parciales de la serie alternada

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} = 1 - \frac{4}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{4}{5}\right)^3 + \cdots = \frac{1}{1 + \frac{4}{5}} = \frac{5}{9}$$

que cumple las dos condiciones del criterio de Leibnitz, por lo que es convergente. Su suma se ha obtenido teniendo en cuenta que es una serie geométrica de razón $r = -4/5$.



Ejemplo 2.10. La serie alternada

$$\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

cumple ambas condiciones del criterio de Leibnitz, por lo que es convergente.

En este caso la serie de términos en valor absoluto es la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ que es divergente, por lo que se trata de una serie condicionalmente convergente.

3. Desarrollo en serie trigonométrica

De acuerdo con lo indicado en la sección 1, el desarrollo en **serie trigonométrica de Fourier** de una función f periódica, con periodo $T = 2\pi$, está dado por

$$f(t) \simeq \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \quad (1)$$

en donde se utiliza el símbolo \simeq para indicar que f “tiene la representación” dada por la serie trigonométrica. De momento puede verse como una igualdad; hasta qué punto efectivamente lo es se precisará en la sección 5.

3.1. Coeficientes de Fourier

Obviamente, los coeficientes a_n y b_n del desarrollo (1) deben depender de la función f . Concretamente se tiene:

Teorema 3 *Los coeficientes de Fourier de la función f en el desarrollo en serie trigonométrica (1) están dados por*

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt; \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt, \quad n \geq 1.$$

Demostración. Nótese en primer lugar que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \, dt = \frac{1}{n} \sin nt \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \, dt = \frac{1}{n} (-\cos nt) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

y a partir de aquí

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \sin mt \, dt &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(m-n)t + \sin(m+n)t) \, dt = 0; & \forall n, m \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \cos mt \, dt &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(m-n)t + \cos(m+n)t) \, dt = 0; & \forall n \neq m \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \sin mt \, dt &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(m-n)t - \cos(m+n)t) \, dt = 0; & \forall n \neq m \end{aligned}$$

mientras que para $n = m$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mt \, dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2mt) \, dt = \pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mt \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos^2 mt) \, dt = \pi.$$

Utilizando estas expresiones es fácil obtener ahora las fórmulas de los coeficientes de Fourier. Integrando ambos miembros del desarrollo en serie de Fourier (1) y admitiendo que se puede intercambiar el orden de integración con el sumatorio se obtiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} \, dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \, dt + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nt \, dt \right) = \frac{a_0}{2} 2\pi = a_0 \pi$$

de donde se obtiene el valor de a_0 . Multiplicando ahora (1) por $\cos mt$ e integrando se obtiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos mt \, dt = a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos mt \cos mt \, dt = a_m \pi$$

pues en el sumatorio únicamente el término obtenido para $n = m$ es $\neq 0$. Análogamente, multiplicando (1) por $\sin mt$ e integrando se obtiene

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin mt \, dt = b_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin mt \sin mt \, dt = b_m \pi \quad \square$$

La designación $a_0/2$ para el término constante de la serie de Fourier permite agrupar las expresiones de a_0 y a_n y expresar las fórmulas de los coeficientes de Fourier en la forma

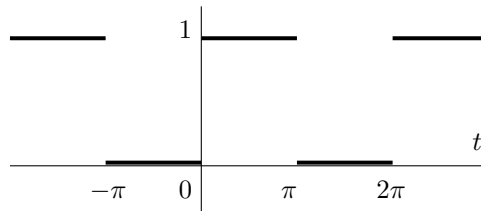
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt, \quad n \geq 0 \quad (14)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt, \quad n \geq 1 \quad (15)$$

aunque en las aplicaciones la expresión obtenida para a_n no suele ser válida para $n = 0$, y entonces el coeficiente a_0 debe calcularse aparte. El intervalo de integración ha de ser un periodo y es habitual elegir el intervalo $(-\pi, \pi)$, pero puede ser cualquier otro como por ejemplo $(0, 2\pi)$ o $(-\pi/2, 3\pi/2)$. Obsérvese además que $a_0/2$ es el *valor medio* de la función f en cada período.

Ejemplo 3.1. Para la función

$$f(t) = \begin{cases} 0 & -\pi < t \leq 0 \\ 1 & 0 < t \leq \pi \end{cases}$$



extendida periódicamente con periodo 2π , se tiene

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 0 \, dt + \int_0^{\pi} \cos nt \, dt \right) \stackrel{(n \neq 0)}{=} \frac{1}{\pi} \frac{\sin nt}{n} \Big|_0^{\pi} = 0$$

Como el cálculo no es válido para $n = 0$, el coeficiente a_0 se ha de calcular aparte:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \, dt = \frac{1}{\pi} \pi = 1.$$

Para los coeficientes b_n se tiene

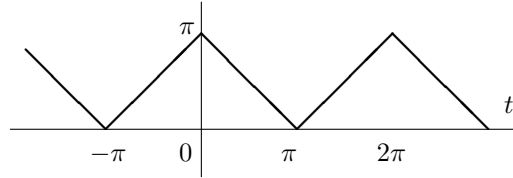
$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nt \, dt \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{-\cos nt}{n} \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{n\pi} [-(-1)^n + 1] = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ 2/n\pi & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \end{aligned}$$

En el sumatorio del desarrollo en serie de Fourier se recorren todos los números naturales impares cuando, al hacer $n = 2k - 1$, k recorre los naturales, por lo que se obtiene

$$f(t) \simeq \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin(2k-1)t.$$

Ejemplo 3.2. Para la función

$$f(t) = \pi - |t| = \begin{cases} \pi + t & -\pi < t \leq 0 \\ \pi - t & 0 < t \leq \pi \end{cases}$$



extendida periódicamente con periodo 2π , se tiene

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 (\pi + t) \, dt + \int_0^{\pi} (\pi - t) \, dt \right) = \frac{1}{\pi} \left(\left(\pi t + \frac{t^2}{2} \right) \Big|_{-\pi}^0 + \left(\pi t - \frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^{\pi} \right) = \pi$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 (\pi + t) \cos nt \, dt + \int_0^{\pi} (\pi - t) \cos nt \, dt \right) \\ &= \frac{2}{\pi n^2} [1 - (-1)^n] = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es par} \\ 4/\pi n^2 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \end{aligned}$$

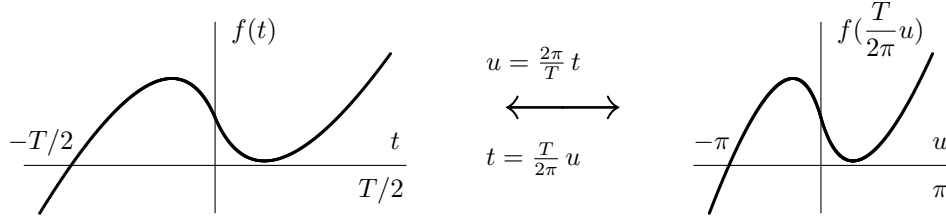
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt = \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 (\pi + t) \sin nt \, dt + \int_0^{\pi} (\pi - t) \sin nt \, dt \right) = 0.$$

Como en el ejemplo anterior, haciendo en el sumatorio $n = 2k - 1$, donde k recorre los naturales, se obtiene el desarrollo

$$f(t) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(2k-1)t.$$

3.2. Cambio de periodo

Sea f es una función periódica de periodo T : $f(t+T) = f(t)$ para todo t . Como se ilustra en la figura, mediante el cambio de escala $t = \frac{T}{2\pi}u$ se obtiene una función $g(u) = f(\frac{T}{2\pi}u)$ periódica de periodo 2π .



En efecto,

$$g(u + 2\pi) = f\left(\frac{T}{2\pi}(u + 2\pi)\right) = f(t + T) = f(t) = f\left(\frac{T}{2\pi}u\right) = g(u).$$

Por ello, de acuerdo con (1), la función tendrá un desarrollo en serie de Fourier

$$f\left(\frac{T}{2\pi}u\right) \simeq \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nu + b_n \operatorname{sen} nu)$$

Deshaciendo el cambio, se obtiene el desarrollo en **serie trigonométrica de Fourier** de una función periódica con periodo T :

$$f(t) \simeq \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n \frac{2\pi}{T} t + b_n \operatorname{sen} n \frac{2\pi}{T} t) \quad (16)$$

donde los **coeficientes de Fourier** de la función f se calculan ahora mediante las fórmulas

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n \frac{2\pi}{T} t dt, \quad n \geq 0 \quad (17)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \operatorname{sen} n \frac{2\pi}{T} t dt, \quad n \geq 1 \quad (18)$$

las cuales, como era de esperar, se reducen a las anteriores, (14) y (15), cuando $T = 2\pi$. Y como en ese caso, lo esencial del intervalo de integración es que coincida con un periodo.

Ejemplo 3.3. Para la función $f(t) = t$ en el intervalo $(-2, 2)$ y extendida periódicamente con periodo 4, los coeficientes de Fourier son

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 t dt = 0, \quad a_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 t \cos n \frac{\pi}{2} t dt = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 t \operatorname{sen} n \frac{\pi}{2} t dt = \frac{1}{2} \left[t \frac{2}{n\pi} (-\cos n \frac{\pi}{2} t) \Big|_{-2}^2 + \frac{2}{n\pi} \int_{-2}^2 \cos n \frac{\pi}{2} t dt \right] = \frac{4}{n\pi} (-1)^{n-1},$$

con lo que se obtiene el desarrollo en serie de Fourier

$$f(t) \simeq \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \operatorname{sen} n \frac{\pi}{2} t.$$

Ejemplo 3.4. La función del ejemplo 1.1, $f(t) = t - [t]$, es periódica con periodo $T = 1$, y considerando el intervalo $(0, 1)$ en el cual $f(t) = t$ se obtiene

$$a_0 = \frac{2}{1} \int_0^1 t dt = 1, \quad a_n = \frac{2}{1} \int_0^1 t \cos n 2\pi t dt = 0, \quad b_n = \frac{2}{1} \int_0^1 t \operatorname{sen} n 2\pi t dt = \frac{-1}{n\pi}$$

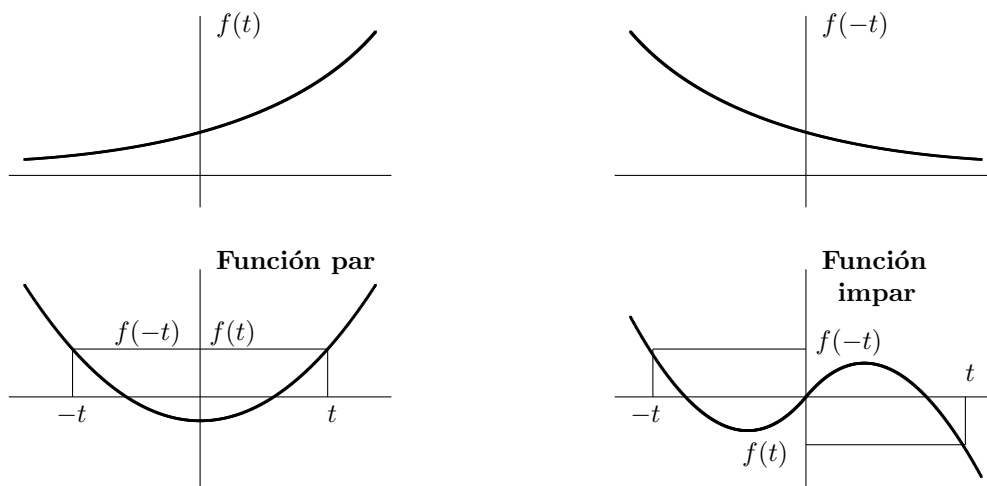
$$f(t) \simeq \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} 2\pi n t.$$

4. Desarrollos en serie de senos y en serie de cosenos

Los desarrollos en serie de Fourier de una función pueden simplificarse notablemente cuando ésta tiene alguna simetría. En esta sección estudiamos el caso de las funciones pares e impares.

4.1. Funciones pares e impares

Definición 4 Una función f definida en un intervalo simétrico respecto del origen $(-a, a)$ es **par** cuando $f(-t) = f(t)$ para cualquier t , mientras que es **impar** cuando $f(-t) = -f(t)$ para todo t .



Por ejemplo, $f(t) = t^2$ y $f(t) = \cos t$ son funciones pares, mientras que $f(t) = t^3$ y $f(t) = \sin t$ son impares. La gráfica de una función par es simétrica respecto del eje de ordenadas, mientras que la de una función impar lo es respecto del origen.

Nótese que con las anteriores definiciones **no** se está haciendo una clasificación par/impar de funciones: una función puede no ser ni par ni impar, como por ejemplo $f(t) = e^t$ o $f(t) = 1 + t$, y de hecho esta es la situación más frecuente, pues para que una función f pueda ser par o impar se ha de verificar previamente que $|f(t)| = |f(-t)|$ para cada t .

Como el carácter par/impar de una función depende de que $f(t)$ y $f(-t)$ tengan igual o distinto signo, es natural que el *producto de funciones* siga la misma regla que el producto de signos, y así se tiene:

$$\text{par} \times \text{par} = \text{par}, \quad \text{par} \times \text{impar} = \text{impar}, \quad \text{impar} \times \text{impar} = \text{par}.$$

Ejemplo 4.1. $f(t) = t \cos t$ es impar, pues t es impar y $\cos t$ es par, mientras que $g(t) = t^3 \sin t$ es par, pues t^3 y $\sin t$ son ambas impares. Naturalmente también se puede comprobar directamente:

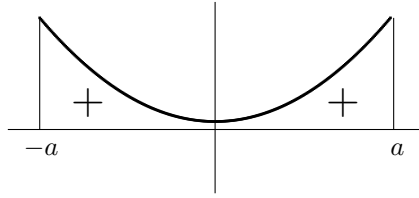
$$f(-t) = -t \cos(-t) = -t(\cos t) = -t \cos t = -f(t) \quad \implies \quad f \text{ es impar};$$

$$g(-t) = (-t)^3 \sin(-t) = -t^3(-\sin t) = t^3 \sin t = g(t) \quad \implies \quad g \text{ es par}.$$

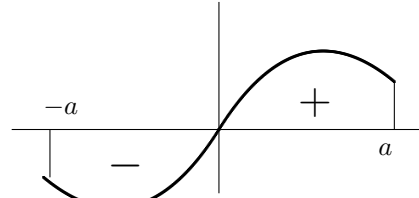
La propiedad que más utilizaremos del posible carácter par/impar de una función se refiere al valor de su integral definida en intervalos simétricos respecto del origen. Concretamente se tiene:

$$f_p \text{ par} \implies \int_{-a}^a f_p(t) dt = 2 \int_0^a f_p(t) dt \quad f_i \text{ impar} \implies \int_{-a}^a f_i(t) dt = 0 \quad (19)$$

lo cual se comprueba inmediatamente a partir de la descomposición $\int_{-a}^a = \int_{-a}^0 + \int_0^a$ y verificando que $\int_{-a}^0 = \pm \int_0^a$ según que f sea par o impar. Gráficamente este resultado es evidente utilizando la interpretación de la integral definida como “área bajo la curva”:



Función par



Función impar

4.2. Desarrollos en serie de funciones pares e impares

La consecuencia fundamental de la propiedad anterior para los desarrollos en serie de Fourier es que el desarrollo de una función par se reduce a los términos en coseno, mientras que el de una función impar se reduce a los términos en seno:

Teorema 4 Sea f una función periódica con periodo T . Si $f = f_p$ es par su desarrollo en serie de Fourier tiene la forma

$$\boxed{f_p(t) \simeq \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n \frac{2\pi}{T} t} \quad a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f_p(t) \cos n \frac{2\pi}{T} t dt, \quad n \geq 0, \quad (20)$$

mientras que si $f = f_i$ es impar su desarrollo en serie de Fourier tiene la forma

$$\boxed{f_i(t) \simeq \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n \frac{2\pi}{T} t} \quad b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f_i(t) \sin n \frac{2\pi}{T} t dt, \quad n \geq 1. \quad (21)$$

Demostración: Cuando f_p es par, el producto $f_p(t) \sin n \frac{2\pi}{T} t$ es una función impar, mientras que el producto $f_p(t) \cos n \frac{2\pi}{T} t$ es una función par, por lo que utilizando (19) se obtiene

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_p(t) \sin n \frac{2\pi}{T} t dt = 0,$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_p(t) \cos n \frac{2\pi}{T} t dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f_p(t) \cos n \frac{2\pi}{T} t dt.$$

Y análogamente cuando f_i es impar, a partir de que el producto $f_i(t) \sin n \frac{2\pi}{T} t$ es una función par, mientras que el producto $f_i(t) \cos n \frac{2\pi}{T} t$ es una función impar. \square

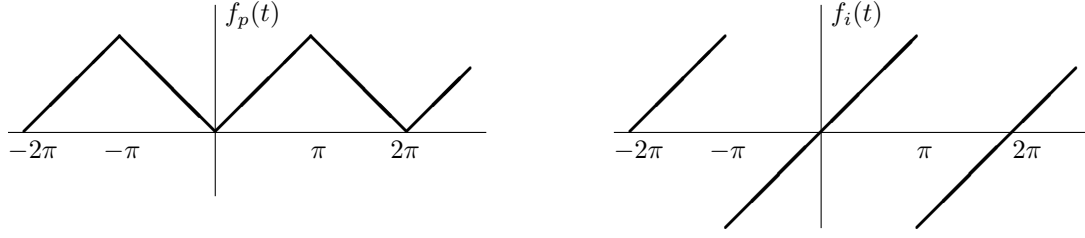
Ejemplo 4.2. La función $f_p(t) = |t|$ en $(-\pi, \pi]$, prolongada con periodo 2π , es par y a partir de

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t dt = \frac{2}{\pi} \frac{\pi^2}{2} = \pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos nt dt = \frac{2}{\pi} \frac{1}{n^2} ((-1)^n - 1) = \begin{cases} -\frac{4}{\pi n^2} & \text{si } n \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

se obtiene el desarrollo en serie de Fourier

$$f_p(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos (2k-1)t$$



Ejemplo 4.3. La función $f_i(t) = t$ en $(-\pi, \pi]$, prolongada con periodo 2π , es impar y a partir de

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi t \sin nt \, dt = 2 \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

se obtiene el desarrollo en serie de Fourier

$$f_i(t) \simeq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nt$$

4.3. La descomposición par + impar

Como se ha dicho anteriormente, una función f no tiene por que ser par o impar. Sin embargo, *cualquier función f puede descomponerse como suma de una función par y otra impar*. En efecto, la función $f_p(t) = (f(t) + f(-t))/2$ es par, pues

$$f_p(-t) = \frac{f(-t) + f(t)}{2} = f_p(t),$$

mientras que la función $f_i(t) = (f(t) - f(-t))/2$ es impar, pues

$$f_i(-t) = \frac{f(-t) - f(t)}{2} = -\frac{f(t) - f(-t)}{2} = -f_i(t).$$

Además, la descomposición

$$\boxed{f(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2} + \frac{f(t) - f(-t)}{2} = f_p(t) + f_i(t)} \quad (22)$$

es la única descomposición posible de f como suma de una función par y una función impar.

Por otra parte, si f era una función periódica con periodo T , también serán periódicas f_p y f_i , por lo que escribiendo el desarrollo en serie de Fourier de f en la forma

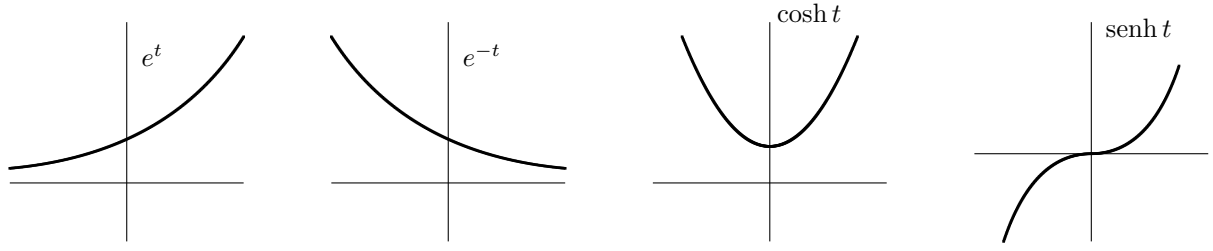
$$f(t) \simeq \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n \frac{2\pi}{T} t \right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n \frac{2\pi}{T} t$$

y teniendo en cuenta los desarrollos de funciones pares (20) e impares (21), podemos identificar el primer sumando del segundo miembro como el desarrollo de la parte par de f y el segundo sumando con el de su parte impar :

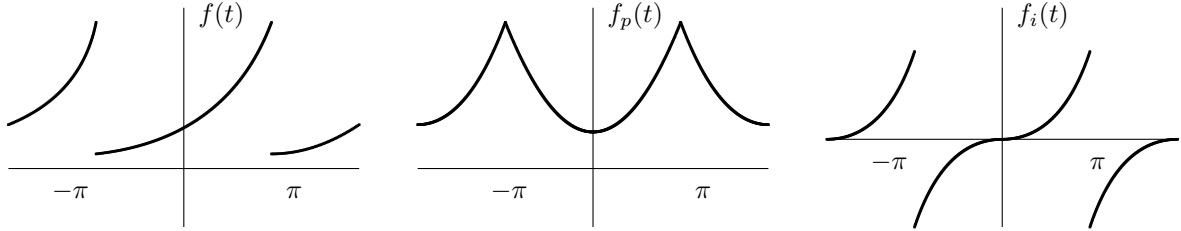
$$\boxed{f_p(t) \simeq \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n \frac{2\pi}{T} t} \quad \boxed{f_i(t) \simeq \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n \frac{2\pi}{T} t}$$

Ejemplo 4.4. Como ilustra la figura, la función e^t tiene la descomposición como suma de una función par y de una función impar

$$e^t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} + \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \cosh t + \sinh t$$



La función definida como la prologación periódica con periodo 2π de $f(t) = e^t$ en $(-\pi, \pi]$ y sus partes par e impar se representan en la figura.



Para el desarrollo en serie de Fourier de f se tiene:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^t dt = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi}; \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^t \cos nt dt = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} \frac{(-1)^n}{1+n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^t \sin nt dt = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} \frac{(-1)^{n-1}n}{1+n^2}$$

$$f(t) \simeq \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} \cos nt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}n}{1+n^2} \sin nt \right)$$

de donde se deducen inmediatamente los desarrollos de las partes par e impar de f :

$$f_p(t) \simeq \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} \cos nt \right) = \frac{\sinh \pi}{\pi} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} \cos nt \right)$$

$$f_i(t) \simeq \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}n}{1+n^2} \sin nt = \frac{2 \sinh \pi}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}n}{1+n^2} \sin nt.$$

Ejemplo 4.5. Sea f la función definida en $(-\pi, \pi)$ por

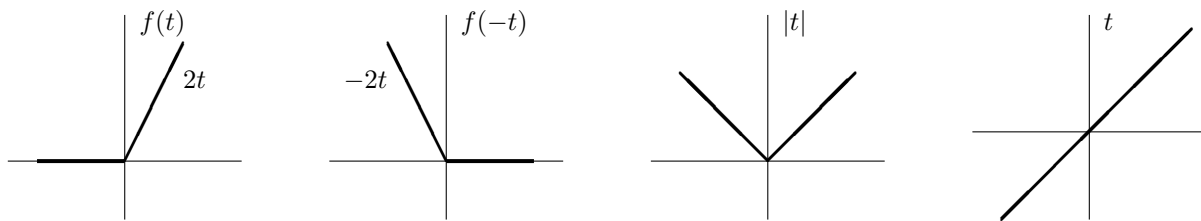
$$f(t) = \begin{cases} 0 & -\pi < t \leq 0 \\ 2t & 0 < t < \pi \end{cases}$$

Como se ilustra en la figura, f tiene la descomposición $f(t) = |t| + t$, pues

$$f(-t) = \begin{cases} 0 & -\pi < -t \leq 0 \\ 2(-t) & 0 < -t < \pi \end{cases} = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < \pi \\ -2t & -\pi < t < 0 \end{cases} = \begin{cases} -2t & -\pi < t < 0 \\ 0 & 0 \leq t < \pi \end{cases}$$

$$\frac{f(t) + f(-t)}{2} = \begin{cases} (0 + (-2t))/2 & -\pi < t \leq 0 \\ (2t + 0)/2 & 0 < t < \pi \end{cases} = \begin{cases} -t & -\pi < t \leq 0 \\ t & 0 < t < \pi \end{cases} = |t|$$

$$\frac{f(t) - f(-t)}{2} = \begin{cases} (0 - (-2t))/2 & -\pi < t \leq 0 \\ (2t - 0)/2 & 0 < t < \pi \end{cases} = \begin{cases} t & -\pi < t \leq 0 \\ t & 0 < t < \pi \end{cases} = t$$



Para su prolongación periódica con periodo 2π ,

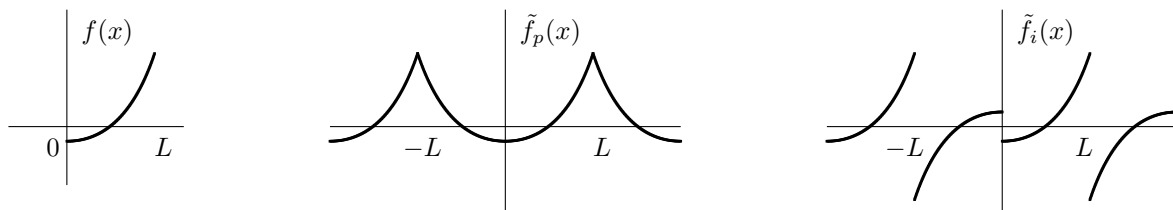
$$f(t) = \begin{cases} 0 & -\pi < t \leq 0 \\ 2t & 0 < t \leq \pi \end{cases} \quad f(t + 2\pi) = f(t),$$

a partir de los desarrollos en serie de cosenos de su parte par y en serie de senos de su parte impar obtenidos en los ejemplos 4.2 y 4.3, se obtiene el desarrollo

$$f(t) \simeq \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(2k-1)t + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nt.$$

4.4. Desarrollos en un intervalo

Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo $(0, L)$. Es posible obtener desarrollos en serie de cosenos y en serie de senos de f , válidos en ese intervalo, construyendo funciones periódicas \tilde{f}_p par y \tilde{f}_i impar, respectivamente, que coincidan con f en ese intervalo, como se ilustra en la figura.



En el primer caso, se empieza *prolongando de forma par* la función f al intervalo $(-L, L)$, y luego se prolonga la función \tilde{f}_p así obtenida a todo \mathbb{R} con periodo $2L$:

$$\tilde{f}_p(x) = \begin{cases} f(x) & 0 < x < L \\ f(-x) & -L < x < 0 \end{cases} \quad \tilde{f}_p(x + 2L) = \tilde{f}_p(x) \quad (23)$$

De acuerdo con (20) para $T = 2L$, se tendrá para cualquier $x \in \mathbb{R}$,

$$\tilde{f}_p(x) \simeq \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n \frac{\pi}{L} x; \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L \tilde{f}_p(x) \cos n \frac{\pi}{L} x dx, \quad n \geq 0,$$

y en particular para $0 < x < L$, teniendo en cuenta que en ese intervalo $\tilde{f}_p(x) = f(x)$,

$$f(x) \simeq \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n \frac{\pi}{L} x; \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos n \frac{\pi}{L} x dx, \quad n \geq 0. \quad (24)$$

Análogamente, para obtener un desarrollo en serie de senos se empieza *prolongando de forma impar* la función f al intervalo $(-L, L)$, y luego se prolonga esta función \tilde{f}_i a todo \mathbb{R} con periodo $2L$.

$$\tilde{f}_i(x) = \begin{cases} f(x) & 0 < x < L \\ -f(-x) & -L < x < 0 \end{cases} \quad \tilde{f}_i(x + 2L) = \tilde{f}_i(x) \quad (25)$$

Ahora se tendrá, de acuerdo con (21) para $T = 2L$ y restringiéndose al intervalo $(0, L)$,

$$f(x) \simeq \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} n \frac{\pi}{L} x; \quad b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} n \frac{\pi}{L} x \, dx, \quad n \geq 1. \quad (26)$$

Ejemplo 4.6. Desarrollar en serie de cosenos y en serie de senos en el intervalo $(0, 3)$ la función $f(x) = x^2$.

El desarrollo en serie de cosenos es el desarrollo en serie de Fourier de la prolongación par de la función f : $\tilde{f}_p(x) = x^2$ en el intervalo $(-3, 3)$ y prolongada periódicamente con periodo $T = 6$. Se tiene $f(x) \simeq a_0/2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n \frac{\pi}{3} x$, con

$$a_0 = \frac{2}{6} \int_{-3}^3 x^2 \, dx = \frac{2}{3} \int_0^3 x^2 \, dx = 6, \quad a_n = \frac{2}{3} \int_0^3 x^2 \cos n \frac{\pi}{3} x \, dx = \frac{36}{n^2 \pi^2} (-1)^n,$$

y por lo tanto en $(0, 3)$,

$$x^2 \simeq 3 + \frac{36}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos n \frac{\pi}{3} x.$$

Análogamente, el desarrollo en serie de senos es el desarrollo en serie de Fourier de la prolongación impar de la función f : $\tilde{f}_i(x) = x^2$ en $(0, 3)$, $\tilde{f}_i(x) = -x^2$ en $(-3, 0)$, y prolongada periódicamente con periodo $T = 6$.

Se tiene ahora $f(x) \simeq \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} n \frac{\pi}{3} x$, con

$$b_n = \frac{2}{3} \int_0^3 x^2 \operatorname{sen} n \frac{\pi}{3} x \, dx = \frac{18}{n\pi} (-1)^{n-1} - \frac{36}{n^3 \pi^3} [1 - (-1)^n]$$

y por lo tanto en $(0, 3)$

$$x^2 \simeq 18 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n\pi} (-1)^{n-1} - \frac{2}{n^3 \pi^3} [1 - (-1)^n] \right) \operatorname{sen} n \frac{\pi}{3} x.$$

5. Convergencia de la serie de Fourier

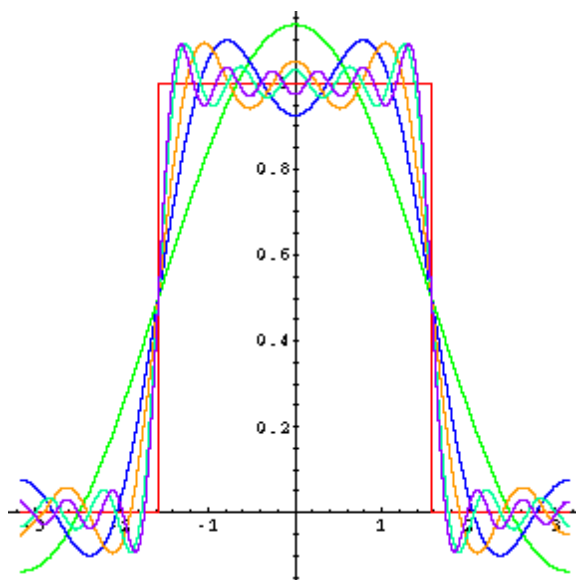
Hasta ahora se ha desarrollado una función en serie utilizando el símbolo \simeq para expresar la posible igualdad entre la función y su desarrollo en serie de Fourier. Concretamente, para una función periódica con periodo 2π se ha escrito

$$f(t) \simeq \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt). \quad (1)$$

¿Por qué? Para responder a esta pregunta es necesario observar previamente que el segundo miembro representa la suma de la serie $a_0/2 + \sum_{n \geq 1} (a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt)$, es decir, el límite cuando $N \rightarrow \infty$ de la sucesión de *sumas parciales*

$$S_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt) \quad (27)$$

que puede coincidir o no con $f(t)$. Obviamente esperamos que haya coincidencia, al menos bajo ciertas hipótesis adicionales sobre la función f . Pero además es preciso decidir antes el sentido de la aproximación de la función f mediante la serie de funciones S_N , lo que hacemos en los siguientes apartados. La figura muestra el comportamiento típico de sucesivas sumas parciales para un pulso cuadrado.



Gráficas de sumas parciales

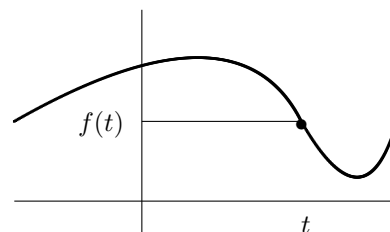
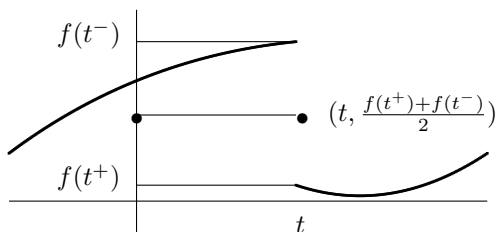
5.1. Convergencia puntual

Por una parte podemos estudiar el comportamiento para cada t fijo de la serie trigonométrica. Al fijar el punto t se obtiene una serie numérica, por lo que podemos utilizar los resultados de la sección 2. En este caso se habla de **convergencia puntual** y se tiene el siguiente resultado cuya demostración omitimos.

Teorema 5 (de Dirichlet) *Si en cada periodo la función f es continua a trozos y tiene un número finito de extremos (máximos o mínimos), su serie de Fourier converge en cada punto t a la semisuma de los límites laterales de f en ese punto:*

$$S_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2} \quad (28)$$

En particular, la serie de Fourier de f converge a $f(t)$ en cada punto t en el que f es continua.



De ahí el uso del símbolo \simeq entre $f(t)$ y su desarrollo en serie de Fourier. Podremos sustituirlo por $=$ cuando f satisfaga las condiciones de Dirichlet y además sea continua. Así, mientras que en el ejemplo 4.2 se podía escribir que la función $f(t) = |t|$, extendida periódicamente con periodo 2π , coincidía con su desarrollo en serie de Fourier, en el ejemplo 4.3 se ha mantenido el símbolo \simeq para indicar que la extensión con periodo 2π de la función $f(t) = t$ en $(-\pi, \pi]$ no coincide con su serie de Fourier en los puntos $t = (2k-1)\pi$, en los que la serie toma el valor $(f(\pi^+) + f(\pi^-))/2 = (-\pi + \pi)/2 = 0$.

El teorema anterior es además muy útil para calcular la suma de diferentes series numéricas, como se ilustra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 5.1. A partir del desarrollo en serie de Fourier obtenido en el ejemplo 4.2 para la función $f(t) = |t|$ en $(-\pi, \pi]$,

$$|t| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(2k-1)t$$

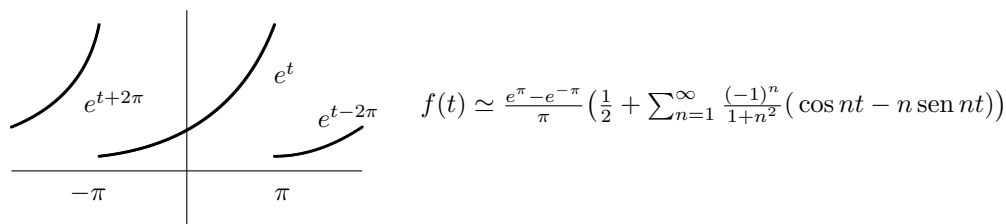
se obtiene para $t = 0$, teniendo en cuenta que $\cos 0 = 1$,

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$$

y por lo tanto

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} \cdots = \frac{\pi^2}{8}.$$

Ejemplo 5.2. A partir del desarrollo en serie de Fourier obtenido en el ejemplo 4.4 para la función $f(t) = e^t$ en $(-\pi, \pi]$, extendida periódicamente con periodo 2π



se obtiene en el punto $t = 0$, teniendo en cuenta que $\cos 0 = 1$ y $\sin 0 = 0$,

$$e^0 = 1 = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} \right) \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} = \frac{\pi}{e^\pi - e^{-\pi}} - \frac{1}{2}$$

y en el punto de discontinuidad $t = \pi$, con $\cos n\pi = (-1)^n$ y $\sin n\pi = 0$,

$$\frac{e^{-\pi} + e^\pi}{2} = \frac{e^\pi - e^{-\pi}}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} \right) \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{e^\pi + e^{-\pi}}{e^\pi - e^{-\pi}} \right) - \frac{1}{2}.$$

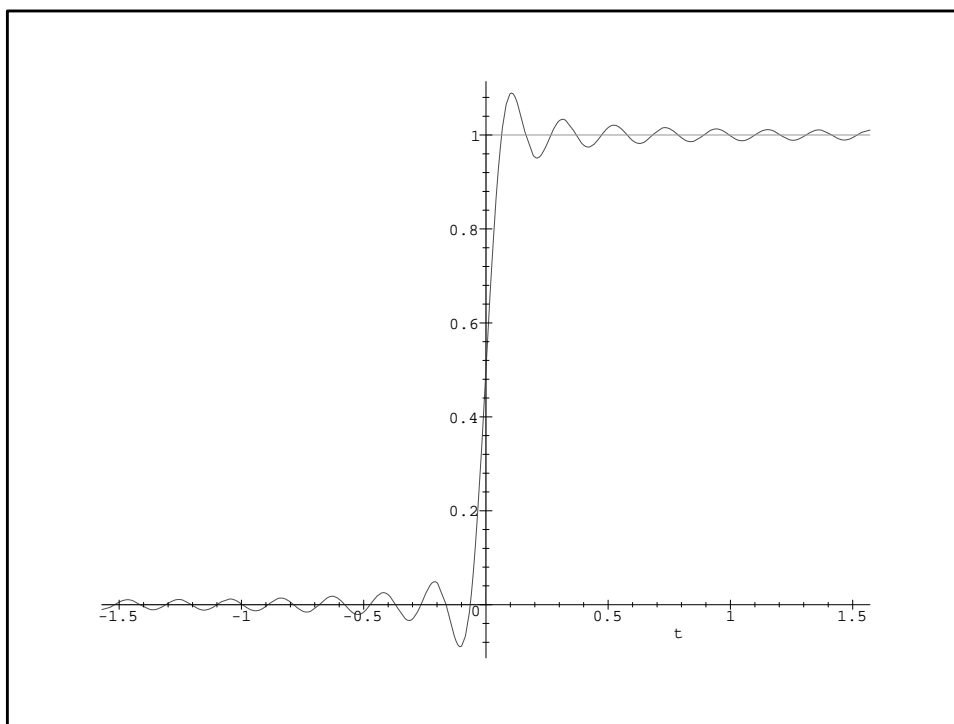
Para tener una idea de la aproximación global de $f(t)$ mediante $S_N(t)$ se deben considerar otros tipos de convergencia. En el apartado siguiente se comentan las dificultades existentes para tener convergencia uniforme y a continuación, en el apartado 5.3, se presenta la aproximación global más interesante: la convergencia en media cuadrática.

5.2. Fenómeno de Gibbs

Una primera posibilidad de aproximación global de $f(t)$ es estudiar si $\max |S_N(t) - f(t)| \rightarrow 0$ cuando $N \rightarrow \infty$, que es la **convergencia uniforme** de S_N a f . Se puede demostrar que hay convergencia uniforme cuando f es continua y f' es continua a trozos. Sin embargo, para funciones discontinuas resultados teóricos aseguran que no puede haber convergencia uniforme. El llamado *fenómeno de Gibbs* ilustra esta situación: como se muestra en la figura, cerca de puntos de discontinuidad t de una función f las sumas parciales de la serie de Fourier S_N desbordan los valores $f(t^+)$ y $f(t^-)$ en aproximadamente un 9% del salto de la función en ese punto, $|f(t^+) - f(t^-)|$. En la figura se ha tomado como función f la función escalón

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \geq 0 \\ 0 & \text{if } x < 0 \end{cases}.$$

Esto no puede evitarse aumentando el número N de términos sumados; lo único que se consigue así es desplazar los puntos concretos en los que ocurren estos excesos, pero no reducirlos. Esta circunstancia ha de ser tenida en cuenta en el diseño de circuitos sometidos a excitaciones discontinuas, pues deben poder soportar los citados excesos del 9%.



Fenómeno de Gibbs: Gráficas de $f(t)$ y $S_{35}(t)$ cerca de $t = 0$.

5.3. Aproximación en media cuadrática

La alternativa de aproximación global más importante es la convergencia **en media cuadrática**, en la que se estudia el comportamiento cuando $N \rightarrow \infty$ del **error cuadrático (total)** EC o, equivalentemente, del **error cuadrático medio** ECM :

$$EC = \int_{-\pi}^{\pi} (S_N(t) - f(t))^2 dt \quad ECM = \frac{1}{2\pi} EC = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (S_N(t) - f(t))^2 dt \quad (29)$$

Ambas expresiones proporcionan medidas del error cometido en un periodo al aproximar la función f mediante una suma parcial S_N de la serie de Fourier. Ello tiene sentido para las (clases de) funciones f de *cuadrado integrable en $(-\pi, \pi)$* (en el sentido de Lebesgue), lo que en numerosas aplicaciones equivale a decir señales f de *energía finita*, y que son aquellas para las que $\int_{-\pi}^{\pi} (f(t))^2 dt < \infty$. Y las dos tienen la interpretación física de medir la energía de la diferencia entre la función y su aproximación mediante la suma parcial de la serie, es decir, la energía (o energía media) del error cometido en la aproximación.

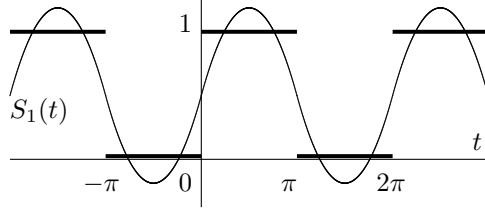
Destaquemos en primer lugar una propiedad fundamental de la serie de Fourier: es la que proporciona la **mejor aproximación en media cuadrática**, es decir, la que minimiza el error cuadrático. Más concretamente, se demuestra que la mejor aproximación en media cuadrática de una función f mediante una combinación lineal

como $T_N = c_0/2 + \sum_{n=1}^N (c_n \cos nt + d_n \sin nt)$ se obtiene con los coeficientes de Fourier: $c_0 = a_0$, $c_n = a_n$ y $d_n = b_n$; es decir, cuando $T_N = S_N$. El siguiente ejemplo ilustra esta propiedad.

Ejemplo 5.3. La mejor aproximación en media cuadrática de la función

$$f(t) = \begin{cases} 0 & -\pi < t \leq 0 \\ 1 & 0 < t \leq \pi \end{cases}$$

$$f(t + 2\pi) = f(t)$$



mediante una combinación lineal $T_1(t) = x + y \cos t + z \sin t$ se consigue para los valores de x, y, z que minimizan el error cuadrático,

$$F(x, y, z) = \int_{-\pi}^{\pi} (x + y \cos t + z \sin t - f(t))^2 dt.$$

Para ello se ha de verificar

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \int_{-\pi}^{\pi} 2(x + y \cos t + z \sin t - f(t)) dt = 0 \quad \implies \quad x 2\pi - \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \int_{-\pi}^{\pi} 2(x + y \cos t + z \sin t - f(t)) \cos t dt = 0 \quad \implies \quad y \pi - \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos t dt = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \int_{-\pi}^{\pi} 2(x + y \cos t + z \sin t - f(t)) \sin t dt = 0 \quad \implies \quad z \pi - \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin t dt = 0$$

es decir

$$x = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} dt = \frac{1}{2}, \quad y = a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos t dt = 0, \quad z = b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin t dt = \frac{2}{\pi}.$$

Se obtiene así que el valor óptimo de $T_1(t)$ es $\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin t = S_1(t)$, y entonces el error cuadrático vale

$$EC = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin t - f(t) \right)^2 dt = \int_{-\pi}^0 \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin t \right)^2 dt + \int_0^{\pi} \left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin t \right)^2 dt = \frac{\pi^2 - 8}{2\pi}$$

mientras que en cualquier otro caso

$$F(x, y, z) \geq F\left(\frac{a_0}{2}, a_1, b_1\right) = F\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{2}{\pi}\right) = \frac{\pi^2 - 8}{2\pi}.$$

Concluimos este apartado con el resultado fundamental para series de Fourier, cuya demostración omitimos:

Definición 5 Se dice que una sucesión de funciones f_n **converge en media cuadrática a f** cuando

$$EC = \int_{-\pi}^{\pi} (f_n(t) - f(t))^2 dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (30)$$

Teorema 6 Si f es una función de cuadrado integrable, su serie de Fourier converge en media cuadrática a f :

$$\boxed{\int_{-\pi}^{\pi} (S_N(t) - f(t))^2 dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nt + b_n \sin nt) - f(t) \right)^2 dt \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0} \quad (31)$$

5.4. Desigualdad de Bessel e Igualdad de Parseval

A partir de que el error cuadrático es siempre ≥ 0 se obtiene (tras cálculos que se omiten)

$$EC = \int_{-\pi}^{\pi} (S_N(t) - f(t))^2 dt = \int_{-\pi}^{\pi} (f(t))^2 dt - \pi \left(\frac{a_0^2}{2}\right) - \pi \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \geq 0$$

de donde se deduce la **desigualdad de Bessel**:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t))^2 dt. \quad (32)$$

Por lo tanto, la sucesión de sumas parciales de la serie $a_0^2/2 + \sum (a_n^2 + b_n^2)$ está acotada superiormente. Y como es creciente, ha de ser convergente. Una primera consecuencia de esta convergencia es que $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 + b_n^2) = 0$, lo que a su vez significa que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$. Es decir, los coeficientes de Fourier tienden a 0 cuando $n \rightarrow \infty$. Además, a partir de que $EC \rightarrow 0$ cuando $N \rightarrow \infty$, se obtiene para la suma de la serie

$$\boxed{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t))^2 dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)} \quad (33)$$

Esta relación se denomina **igualdad de Parseval**, y para el caso de una función periódica con periodo T tiene la forma

$$\boxed{\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (f(t))^2 dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)} \quad (34)$$

En muchas aplicaciones el primer miembro tiene la interpretación de la *energía* o la *potencia* de la función f , y la igualdad de Parseval expresa que esa energía también puede ser calculada a partir de las componentes sinusoidales de la función. La igualdad es además muy útil para calcular la suma de diferentes series numéricas.

Ejemplo 5.4. Para la función $f(t) = t$ en $(-\pi, \pi]$ y prolongada con periodo 2π , se había obtenido el desarrollo en serie de Fourier

$$f(t) \simeq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nt$$

por lo que la igualdad de Parseval lleva a

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{2}{3} \pi^2 = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ejemplo 5.5. Para la función $f(t) = |t|$ en $(-\pi, \pi]$ y prolongada con periodo 2π , se había obtenido el desarrollo en serie de Fourier

$$f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos(2k-1)t$$

por lo que la igualdad de Parseval lleva a

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{2}{3} \pi^2 = \frac{\pi^2}{2} + \frac{16}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

6. Series de Fourier complejas

En el desarrollo en serie de Fourier en $(-\pi, \pi)$

$$f(t) \simeq \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \quad (1)$$

podemos expresar las funciones $\cos nt$ y $\sin nt$ en términos de las funciones complejas e^{jnt} y e^{-jnt} mediante la fórmula de Euler:

$$\left. \begin{aligned} e^{jnt} &= \cos nt + j \sin nt \\ e^{-jnt} &= \cos nt - j \sin nt \end{aligned} \right\} \iff \left\{ \begin{aligned} \cos nt &= \frac{1}{2}(e^{jnt} + e^{-jnt}) \\ \sin nt &= \frac{1}{2j}(e^{jnt} - e^{-jnt}) \end{aligned} \right. \quad (35)$$

lo que llevado a (1) proporciona

$$\begin{aligned} f(t) &\simeq \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{e^{jnt} + e^{-jnt}}{2} + b_n \frac{e^{jnt} - e^{-jnt}}{2j} \right) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2j} \right) e^{jnt} + \left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2j} \right) e^{-jnt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jkt}. \end{aligned} \quad (36)$$

Nótese que en el último sumatorio k varía desde $-\infty$ a ∞ . Para $k = n > 0$

$$c_k = \frac{a_k}{2} + \frac{b_k}{2j} = \frac{1}{2}(a_k - jb_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos kt - j \sin kt) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-jkt} dt$$

Esta expresión para los **coeficientes de Fourier** c_k puede incluir el caso $k = 0$,

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt,$$

y también es válida cuando $k = -n < 0$. En efecto, el coeficiente de e^{-jnt} es

$$\begin{aligned} c_k = c_{-n} &= \frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2j} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos nt + j \sin nt) dt \\ &\stackrel{(n=-k)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos kt - j \sin kt) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-jkt} dt. \end{aligned}$$

Se ha obtenido así el desarrollo en **serie compleja de Fourier**:

$$\boxed{f(t) \simeq \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jkt}} \quad \boxed{c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-jkt} dt, \quad -\infty < k < \infty} \quad (37)$$

También es posible obtener la expresión para los coeficientes directamente, como se hizo con los coeficientes de la serie trigonométrica. Basta para ello observar que

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{jmt} e^{-jkt} dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(m-k)t} dt = \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m-k)t + j \sin(m-k)t] dt = \begin{cases} 0 & m \neq k \\ 2\pi & m = k \end{cases}$$

por lo que multiplicando el desarrollo (37) por e^{-jkt} e integrando se obtiene

$$f(t) \simeq \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{jmt} \implies \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-jkt} dt = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \int_{-\pi}^{\pi} e^{jmt} e^{-jkt} dt = c_k$$

pues la única integral no nula en el sumatorio corresponde a $m = k$ y vale 2π .

Obsérvese que, inversamente, es posible obtener el desarrollo en serie trigonométrica a partir del desarrollo en serie compleja mediante la fórmula de Euler:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jkt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k (\cos kt + j \sin kt) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left((c_k + c_{-k}) \cos kt + j(c_k - c_{-k}) \sin kt \right)$$

Así las fórmulas (35) permiten pasar de un desarrollo a otro. Como $c_n = (a_n - jb_n)/2$ y $c_{-n} = (a_n + jb_n)/2$, se tiene $c_{-n} = \overline{c_n}$. Además, el posible carácter par/impar de la función f se traduce ahora en

$$\boxed{f \text{ par} \implies c_k \text{ es real,}} \quad \boxed{f \text{ impar} \implies c_k \text{ es imaginario puro.}} \quad (38)$$

Como en el caso del desarrollo en serie trigonométrica, cuando la función f tiene periodo T , un cambio de escala con factor $2\pi/T$ permite obtener el desarrollo

$$\boxed{f(t) \simeq \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk \frac{2\pi}{T} t}} \quad \boxed{c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jk \frac{2\pi}{T} t} dt, \quad -\infty < k < \infty} \quad (39)$$

Finalmente, la *igualdad de Parseval* para la serie compleja de Fourier es

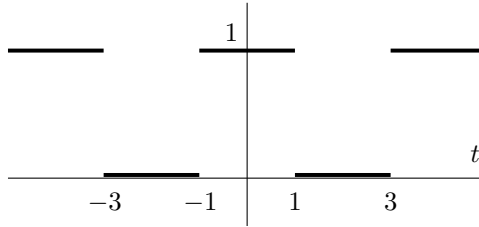
$$\boxed{\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} (f(t))^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2} \quad (40)$$

donde $|c_k|$ designa el módulo del número complejo c_k .

Ejemplo 6.1. Para la función periódica con periodo 4

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq |t| \leq 1 \\ 0 & 1 < |t| \leq 2 \end{cases}$$

$$f(t+4) = f(t)$$



se tiene

$$c_k = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 f(t) e^{-jk \frac{\pi}{2} t} dt = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 e^{-jk \frac{\pi}{2} t} dt \stackrel{(k \neq 0)}{=} \frac{1}{-2jk\pi} e^{-jk \frac{\pi}{2} t} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{k\pi} \sin k \frac{\pi}{2}$$

y como cuando $k = 2m$ es par, $\sin k \frac{\pi}{2} = \sin m\pi = 0$, mientras que cuando $k = 2m - 1$ es impar, $\sin k \frac{\pi}{2} = \sin(2m - 1) \frac{\pi}{2} = (-1)^{m-1}$, resulta

$$c_{2m} = 0; \quad c_{2m-1} = \frac{1}{(2m-1)\pi} (-1)^{m-1}.$$

El cálculo anterior no es válido para $k = 0$, por lo que falta calcular el coeficiente c_0 :

$$c_0 = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 f(t) dt = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 dt = \frac{1}{2}.$$

Así el desarrollo en serie compleja de Fourier de f es

$$f(t) \simeq \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2m-1} (-1)^{m-1} e^{j(2m-1) \frac{\pi}{2} t}.$$

En este caso la identidad de Parseval proporciona

$$\frac{1}{4} \int_{-1}^1 dt = \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} = \frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2}$$

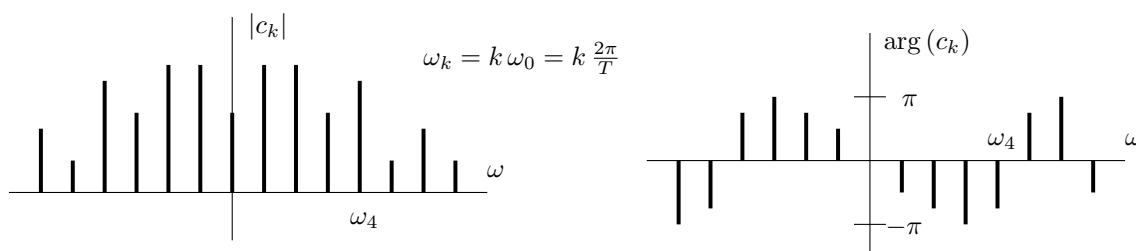
de donde se obtiene (como en el ejemplo 5.1)

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}.$$

7. Espectro de una función

Mediante el desarrollo en serie de Fourier (16) o (39) de una función periódica de periodo T , se obtiene una descomposición de la función como suma de funciones sinusoidales o de exponenciales complejas de diferentes frecuencias. Todas las frecuencias (en radianes) $\omega_k = k \frac{2\pi}{T}$ son múltiplos enteros de la *frecuencia fundamental* $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ y se denominan *armónicos*. También podemos decir que al desarrollar en serie de Fourier se *analiza* la función para determinar las componentes, a_k y b_k o bien c_k , de cada una de estas frecuencias, mientras que al sumar la serie de Fourier se *sintetiza* la función a partir de sus armónicos. El conjunto de todos estos valores (frecuencias y coeficientes) forman el *espectro* de la función f .

Para “visualizar” el espectro, en el caso de la serie de Fourier compleja (39), podemos representar por separado los módulos o *amplitudes* $|c_k|$ y los argumentos o *fases* $\arg(c_k)$ para las diferentes frecuencias ω_k , como se hace en la figura. Se obtienen así (las gráficas de) los llamados *espectro de amplitud* y *espectro de fase*.



Espectro de amplitud y espectro de fase

Nótese que como (para una función f real, como se ha supuesto hasta ahora)

$$c_{-k} = \overline{c_k} \quad \implies \quad |c_{-k}| = |c_k|, \quad \arg(c_{-k}) = -\arg(c_k)$$

las gráficas tienen las simetrías indicadas: par para el espectro de amplitud e impar para el de fase.

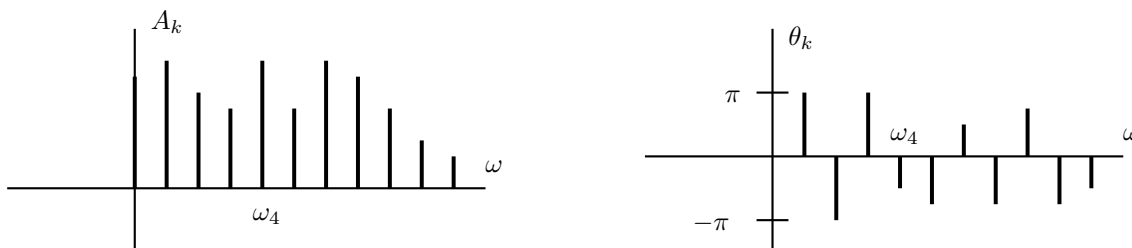
A partir de la serie de Fourier trigonométrica es usual convertir cada sumando $a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t$ a la forma *módulo-fase* $A_k \cos(\omega_k t + \theta_k)$, pues con

$$a_k = A_k \cos \theta_k, \quad b_k = -A_k \sin \theta_k; \quad A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \operatorname{tg} \theta_k = -\frac{b_k}{a_k};$$

se obtiene

$$\begin{aligned} A_k \cos(\omega_k t + \theta_k) &= A_k (\cos \omega_k t \cos \theta_k - \sin \omega_k t \sin \theta_k) \\ &= a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t. \end{aligned}$$

Al representar los valores de A_k y θ_k para $k \geq 0$ se obtiene el llamado *espectro unilateral*.



Espectro unilateral

8. Aplicación a las ecuaciones en derivadas parciales

En esta sección veremos cómo se pueden aplicar las técnicas del análisis de Fourier para obtener soluciones a las ecuaciones en derivadas parciales lineales homogéneas más comunes en Física Matemática:

$$\begin{aligned}\kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial u}{\partial t} & (\text{ecuación del calor}) \\ a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} & (\text{ecuación de ondas}) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0 & (\text{ecuación de Laplace}).\end{aligned}$$

La llamada técnica de separación de variables nos permitirá calcular una clase muy general de soluciones a estas ecuaciones; son soluciones que se expresan mediante una serie de Fourier. Al igual que ocurre con las ecuaciones diferenciales ordinarias, para seleccionar una solución concreta deberemos especificar unas condiciones adicionales. Estas condiciones (si se interpreta la variable t como el tiempo) pueden ser de dos tipos: *condiciones iniciales*, tales como $u(x, 0) = f(x)$, o *condiciones de frontera*, como por ejemplo $u(\pi, t) = g(t)$. Estas condiciones juegan un papel decisivo pues, como comprobaremos, los coeficientes de Fourier de la solución estarán determinados precisamente por los coeficientes de Fourier de las funciones (como $f(x)$) que determinan las condiciones de contorno.

8.1. La ecuación del calor

Supongamos que queremos resolver la ecuación del flujo de calor en una barra finita, localizada en sus extremos $x = 0$, $x = L$. Si la conductividad térmica del material de la barra es $\kappa > 0$, la ecuación a resolver para la temperatura $u(x, t)$ es

$$\kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad x \in]0, L[, t \in]0, +\infty[. \quad (41)$$

Supondremos que los extremos de la barra se mantienen a una temperatura constante e igual a cero en todo instante, esto es,

$$u(0, t) = 0 = u(L, t), \quad \forall t \in]0, +\infty[. \quad (42)$$

Finalmente, supondremos que la distribución inicial de temperaturas a lo largo de la barra viene dada por una función integrable $f(x)$:

$$u(x, 0) = f(x), \quad \forall x \in]0, L[. \quad (43)$$

La técnica de separación de variables consiste en buscar soluciones particulares a (41) en la forma “separada”

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (44)$$

Para determinar *una* solución concreta de esta forma, en realidad no necesitaremos todos los datos del problema, nos bastará con los (41) y (42); es decir, la técnica de separación de variables nos dice cómo hallar una solución al problema

$$\begin{cases} \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, & x \in]0, L[, t \in]0, +\infty[\\ u(0, t) = 0 = u(L, t), & \forall t \in]0, +\infty[. \end{cases}$$

Para ello, observemos que de (41) y (44) se tiene

$$\kappa X''(x)T(t) = X(x)T'(t)$$

y de (42) y (44):

$$X(0) = 0 = X(L).$$

Buscamos soluciones en $]0, L[\times]0, +\infty[$ distintas de la trivial $u(x, t) = 0$, de modo que podemos suponer $X(x)T(t) \neq 0$, $\forall (x, t) \in]0, L[\times]0, +\infty[$. Así, las funciones buscadas satisfacen

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{\kappa T(t)}.$$

Como el miembro izquierdo depende exclusivamente de x y el derecho de t , debe existir una constante $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = c = \frac{T'(t)}{\kappa T(t)}. \quad (45)$$

Analicemos por separado los posibles valores de c .

(a) $c < 0$

Podemos poner entonces $c = -\lambda^2$ con $\lambda > 0$ (por comodidad). De (45) es

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \\ T'(t) + \kappa \lambda^2 T(t) = 0. \end{cases}$$

La primera es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden, homogénea, con coeficientes constantes. Su polinomio característico es $r^2 + \lambda^2 = 0$ con raíces $r = \pm \lambda i$ (imaginarias puras), luego su solución general viene dada por

$$X(x) = c_1 \cos(\lambda x) + c_2 \sin(\lambda x)$$

siendo c_1, c_2 constantes reales arbitrarias.

La segunda es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden que se resuelve de manera inmediata separando variables

$$T(t) = c_3 e^{-\kappa \lambda^2 t}. \quad (46)$$

Así, tenemos de momento que

$$X(x)T(t) = (c_1 \cos(\lambda x) + c_2 \sin(\lambda x)) c_3 e^{-\kappa \lambda^2 t}.$$

Para determinar las constantes c_1, c_2, c_3 utilizamos las condiciones de frontera; de $u(L, t) = 0$ (que, como sabemos, implica $X(L) = 0$) se deduce

$$c_2 \sin(\lambda L) = 0$$

de donde o bien $c_2 = 0$, que conduce a $X(x) = 0$ y por tanto no es aceptable, o bien $\sin(\lambda L) = 0$, lo cual implica $\lambda L = n\pi$ con $n \in \mathbb{N}$ (pues $\lambda, L > 0$). Así, llegamos a que la constante $\lambda > 0$ no puede tomar cualquier valor, sino que debe ser

$$\lambda = \frac{n\pi}{L}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

En definitiva, hemos llegado a soluciones (una para cada $n \in \mathbb{N}$) de la forma

$$X(x)T(t) = c_2 c_3 \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \kappa t}$$

o bien, llamando $A_n = c_2 c_3 \in \mathbb{R}$, a soluciones $u_n(x, t)$ como

$$u_n(x, t) = X(x)T(t) = A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \kappa t}.$$

(b) $c > 0$

Ponemos, de nuevo por comodidad, $c = \lambda^2$ con $\lambda > 0$. En este caso, un análisis semejante nos lleva a las ecuaciones

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda^2 X(x) = 0 \\ T'(t) - \kappa \lambda^2 T(t) = 0. \end{cases}$$

Esta vez las raíces del polinomio característico de la primera ecuación son reales, $r = \pm \lambda$, luego la solución general es combinación de exponenciales:

$$X(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x}.$$

La solución de la segunda ecuación también es exponencial, pero esta vez con exponente positivo:

$$T(t) = c_3 e^{\kappa \lambda^2 t}.$$

Al imponer ahora las condiciones iniciales resulta: de $X(0) = 0$

$$c_1 + c_2 = 0,$$

luego $X(x) = c_1 (e^{\lambda x} - e^{-\lambda x})$, y de $X(L) = 0$:

$$c_1 (e^{\lambda L} - e^{-\lambda L}) = 0.$$

Aquí de nuevo hay dos posibilidades: $c_1 = 0$ conduce a $X(x) = 0$, que no es aceptable (buscamos soluciones no triviales), y $e^{\lambda L} - e^{-\lambda L} = 0$ nos lleva a $\lambda L = -\lambda L$ por ser la exponencial inyectiva. Tendríamos entonces $2\lambda L = 0$, que no puede darse pues $\lambda, L > 0$.

Por tanto, en el caso $c > 0$ no existen soluciones no triviales de la forma $u(x, t) = X(x)T(t)$.

(c) $c = 0$

En este caso se tendrían las ecuaciones

$$\begin{cases} X''(x) = 0 \\ T'(t) = 0, \end{cases}$$

con soluciones triviales

$$\begin{cases} X(x) = c_1 x + c_2 \\ T(t) = c_3. \end{cases}$$

Al imponer la condición inicial $X(0) = 0$ resulta $c_2 = 0$ y $X(x) = c_1 x$. De $X(L) = 0$ es $c_1 L = 0$ y como $L > 0$, debe ser $c_1 = 0$, lo que nos lleva a la solución trivial $X(x) = 0$ que no es aceptable.

Así, en este caso tampoco existen soluciones no triviales de la forma $u(x, t) = X(x)T(t)$.

Llegados a este punto, es donde intervienen de manera crucial la linealidad de la ecuación del calor y el hecho de que las condiciones de frontera son homogéneas (es decir, los segundos miembros de $u(0, t) = 0$, $u(L, t) = 0$ son cero). Gracias a estas dos propiedades, la superposición arbitraria de las soluciones¹ $u_n(x, t)$ (una para cada valor de $n \in \mathbb{N}$) obtenidas en (a), es también solución, es decir, podemos considerar una solución del tipo

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \kappa t}. \quad (47)$$

Observación 1 *Insistimos en el punto de que para escribir una solución de esta forma, hemos necesitado que las condiciones de frontera sean homogéneas. Si fuese $u(0, t) = 1$, por ejemplo, y $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ dos soluciones con esa condición, sería $(u_1 + u_2)(0, t) = 1 + 1 \neq 1$ y la superposición de soluciones ya no sería solución con la misma condición de frontera. Ésta es, de hecho, una limitación importante del método de separación de variables aunque, en algunos casos, se puede superar.*

En la solución (47) lo único que falta por determinar es el valor de los coeficientes A_n . Aquí es donde entra en acción el análisis de Fourier y la condición representada por la función $f(x) = u(x, 0)$.

Imponiendo esta condición inicial, resulta

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x),$$

que es el desarrollo de Fourier en senos de f en el intervalo $]0, L[$ (véase la ecuación (26)). Por la unicidad de los coeficientes de la serie de Fourier en senos, es

$$A_n = b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \quad n \in \mathbb{N}.$$

Con esto, la solución queda completamente determinada en función de los datos del problema:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \right) e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \kappa t}. \quad (48)$$

¹Este hecho no es evidente en absoluto. En su momento (a mediados del S. XVII), su enunciado provocó una agria disputa entre Euler, D'Alembert y Daniel Bernoulli. Precisamente, la importancia de los métodos del Análisis de Fourier radica en que permiten justificar rigurosamente este tipo de construcciones.

8.2. La ecuación de ondas

Consideremos una cuerda elástica de un material homogéneo, de masa despreciable, flexible y que está sujeta por sus extremos en $x = 0$ y $x = L$. Si se tensa la cuerda pulsándola y se la deja vibrar, en el supuesto de que esas vibraciones sean de pequeña amplitud la ecuación que describe el movimiento de la cuerda es

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (x, t) \in]0, L[\times]0, +\infty[, \quad (49)$$

donde $a > 0$ es una constante, $u(x, t)$ es la posición del punto x sobre la cuerda en reposo en el instante $t > 0$ y se tienen las condiciones obvias de frontera

$$u(0, t) = 0 = u(L, t),$$

junto con dos condiciones iniciales: la configuración de la cuerda en el instante $t = 0$

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in]0, L[,$$

y la velocidad inicial con que se pulsa la cuerda

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \quad x \in]0, L[.$$

Supondremos que las funciones $f(x)$, $g(x)$ son integrables.

Observación 2 *Fijémonos en que hemos introducido una condición inicial más que en el caso de la ecuación del calor. En el transcurso del análisis de la ecuación de ondas, se verá por qué es necesario hacerlo. Esto tiene que ver con la necesidad de que el problema esté **bien planteado**. Sin entrar en detalles, podemos dar la siguiente regla general: para que un problema de EDP esté bien planteado, se requieren tantas condiciones como derivadas aparecen en la EDP. En la ecuación de ondas (49) hay cuatro derivadas, luego se necesitan cuatro condiciones (que pueden ser iniciales, de frontera o mixtas, pero cuatro).*

La técnica de separación de variables se aplica también a este problema (obsérvese que las condiciones de frontera son homogéneas). Buscando soluciones no triviales del problema

$$\begin{cases} a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, & x \in]0, L[, t \in]0, +\infty[\\ u(0, t) = 0 = u(L, t), & \forall t \in]0, +\infty[. \end{cases} \quad (50)$$

en la forma separada

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

llegamos a

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{a^2 T(t)}.$$

Al igual que en el caso de la ecuación del calor, debe existir una constante $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = c = \frac{T'(t)}{a^2 T(t)}.$$

Nuevamente, existen tres posibilidades: $c > 0$, $c = 0$, $c < 0$. Como se hizo en el apartado anterior (exactamente con los mismos cálculos) se descartan las dos opciones $c \geq 0$. De hecho, lo único que cambia respecto al análisis realizado con la ecuación del calor es el que aparece una ecuación de segundo orden para $T(t)$ (en lugar de una de primer orden) cuando $c = -\lambda^2 < 0$:

$$T''(t) + a^2 \lambda^2 T(t) = 0.$$

El polinomio característico de esta ecuación es $r^2 + a^2 \lambda^2 = 0$, con raíces complejas puras $r = \pm a \lambda i$, de modo que la solución general es ahora

$$T(t) = c_3 \cos(a \lambda t) + c_4 \sin(a \lambda t)$$

en lugar de la (46) que aparecía en la ecuación del calor.

Por el contrario, el análisis para determinar $X(x)$ es idéntico al realizado en la ecuación del calor, por lo que se tiene una solución para cada $n \in \mathbb{N}$ junto con la restricción $\lambda = n\pi/L$:

$$X(x) = c_2 \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

De esta forma, una solución a (50) puede escribirse, para cada $n \in \mathbb{N}$, en la forma

$$u_n(x, t) = X(x)T(t) = c_2 \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \left(c_3 \cos\left(\frac{na\pi}{L}t\right) + c_4 \sin\left(\frac{na\pi}{L}t\right)\right),$$

o bien, llamando $A_n = c_2 c_3$, $B_n = c_2 c_4$:

$$u_n(x, t) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \left(A_n \cos\left(\frac{na\pi}{L}t\right) + B_n \sin\left(\frac{na\pi}{L}t\right)\right).$$

Como antes, al ser la ecuación lineal y las condiciones de frontera homogéneas, se puede dar una solución como superposición de todas las soluciones $u_n(x, t)$ anteriores:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \left(A_n \cos\left(\frac{na\pi}{L}t\right) + B_n \sin\left(\frac{na\pi}{L}t\right)\right). \quad (51)$$

Lo único que falta por determinar en esta solución son los coeficientes A_n, B_n . Observemos que para calcularlos necesitamos (como ya habíamos anunciado en la observación 2) dos condiciones adicionales. Impongamos, para determinar los coeficientes A_n , la condición inicial $u(x, 0) = f(x)$. Resulta:

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) A_n = f(x).$$

Como ya sabemos, esto es el desarrollo en serie de Fourier de senos de la función $f(x)$ en el intervalo $]0, L[$. Por la unicidad de este desarrollo:

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx.$$

La condición inicial adicional $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)$ nos servirá para calcular los coeficientes B_n . **Es un ejercicio de cálculo probar que la serie (51) converge uniformemente**, luego podemos derivarla término a término, obteniendo

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \left(-A_n \frac{na\pi}{L} \sin\left(\frac{na\pi}{L}t\right) + B_n \frac{na\pi}{L} \cos\left(\frac{na\pi}{L}t\right)\right)$$

de donde

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) B_n \frac{na\pi}{L} = g(x).$$

De nuevo, esto es la expresión del desarrollo en serie de Fourier de senos de $g(x)$ en el intervalo $]0, L[$. Por unicidad:

$$B_n \frac{na\pi}{L} = b_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx,$$

luego

$$B_n = \frac{2}{na\pi} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx.$$

De esta forma, la solución al problema de la cuerda vibrante queda completamente determinada en función de los datos del problema:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \left(A_n \cos\left(\frac{na\pi}{L}t\right) + B_n \sin\left(\frac{na\pi}{L}t\right)\right), \quad (52)$$

con

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \quad (53)$$

y

$$B_n = \frac{2}{na\pi} \int_0^L g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx. \quad (54)$$

8.3. La ecuación de Laplace

En su versión bidimensional, la ecuación de Laplace es la ecuación para la función incógnita $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Aparece en la descripción de los llamados **procesos estacionarios** en Física, que son aquellos que no dependen del tiempo (de ahí su nombre): transcurren de la misma forma en cualquier instante de su duración. Por ejemplo, cuando se alcanza el estado estacionario en una placa caliente que no tiene fuentes o sumideros de calor, la distribución de temperaturas u se caracteriza porque no depende del tiempo y verifica la ecuación del calor con $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, esto es, $\Delta u = 0$, que es la ecuación de Laplace.

Dado que la ecuación de Laplace describe procesos que transcurren independientemente del tiempo, no tiene sentido plantear condiciones iniciales. En este caso, cobran especial importancia las condiciones de frontera. Por simplicidad, consideraremos aquí la ecuación de Laplace en un rectángulo $(x, y) \in [0, a] \times [0, b]$. Para tratar con la ecuación en el caso de otras geometrías (por ejemplo, en un disco) es conveniente usar otro tipo de técnicas. Planteamos entonces el problema de encontrar las soluciones $u(x, t)$ a

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (x, y) \in]0, a[\times]0, b[\quad (55)$$

sujetas a las condiciones de frontera (cuatro, según la regla dada en la observación 2)

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = f(x), \quad x \in]0, a[\quad (56)$$

y

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0 = \frac{\partial u}{\partial x}(a, y), \quad y \in]0, b[. \quad (57)$$

A este tipo de problema, se le puede aplicar la técnica de separación de variables. En principio, como ya se ha visto en los apartados anteriores, sólo necesitamos las condiciones de frontera homogéneas, así que restringiremos nuestra atención al problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & (x, y) \in]0, a[\times]0, b[\\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0 = \frac{\partial u}{\partial x}(a, y), & y \in]0, b[\\ u(x, 0) = 0, & x \in]0, a[. \end{cases} \quad (58)$$

Aplicando separación de variables, buscaremos soluciones del tipo $X(x)Y(y)$, lo que nos lleva a la ecuación

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

que se satisface si existe una constante $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = c = -\frac{Y''(y)}{Y(y)}.$$

Como ya es habitual, estudiamos los tres tipos posibles de valores para c .

(a) $c < 0$, $c = -\lambda^2$, con $\lambda > 0$.

Como ya sabemos de apartados anteriores, en este caso se obtiene

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$$

con soluciones

$$X(x) = c_1 \cos(\lambda x) + c_2 \sin(\lambda x).$$

Para $Y(y)$ resulta la ecuación

$$Y''(y) - \lambda^2 Y(y) = 0,$$

cuyo polinomio característico tiene las raíces reales $r = \pm\lambda$, de modo que

$$Y(y) = c_3 e^{\lambda y} + c_4 e^{-\lambda y}. \quad (59)$$

Ahora, imponemos las condiciones frontera. La $\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0$ implica $X'(0) = 0 = c_2$, luego nos quedará

$$X(x) = c_1 \cos(\lambda x).$$

La condición $\frac{\partial u}{\partial x}(a, y) = 0$ implica entonces $X'(x) = 0$, o sea:

$$-\lambda c_1 \sin(\lambda a) = 0.$$

Como $\lambda > 0$ esto nos lleva a $c_1 \sin(\lambda a) = 0$, que da dos posibilidades: $c_1 = 0$, que conduce a la solución trivial $X(x) = 0$ y no es aceptable, y $\sin(\lambda a) = 0$. De esta última, se tiene

$$\lambda = \frac{n\pi}{a}, \quad n \in \mathbb{N},$$

y la solución, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$X(x) = c_1 \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right).$$

Para determinar $Y(y)$ contamos con la condición $u(x, 0) = 0$, que se traduce en $Y(0) = 0$, o sea (sustituyendo (59)):

$$c_3 + c_4 = 0.$$

De aquí:

$$Y(y) = c_3 \left(e^{\frac{n\pi}{a}y} - e^{-\frac{n\pi}{a}y} \right) = 2c_3 \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Las soluciones separadas $X(x)Y(y)$ resultan ser en este caso de la forma (una para cada $n \in \mathbb{N}$)

$$u_n(x, y) = X(x)Y(y) = 2c_1 c_3 \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right)$$

o bien, llamando $A_n = 2c_1 c_3$:

$$u_n(x, y) = A_n \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right).$$

(b) $c = 0$

En este caso, las ecuaciones para $X(x)$, $Y(y)$ son triviales

$$X''(x) = 0 = Y''(y),$$

con soluciones

$$X(x) = c_1 x + c_2, \quad Y(y) = c_3 x + c_4.$$

La aplicación de las condiciones de frontera en este caso da lo siguiente. De $\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0$ es $X'(0) = c_1 = 0$, luego $X(x) = c_2$. De $\frac{\partial u}{\partial x}(a, y) = 0$ no resulta nada nuevo, pues $\frac{\partial X}{\partial x}$ es idénticamente nula.

Sin embargo, en este caso la condición adicional $u(x, 0) = 0$, a diferencia de lo que ocurría en el caso de la ecuación del calor y de ondas, no implica $Y(y) = 0$, sino sólo $Y(0) = 0$, que ahora equivale a $c_4 = 0$, de manera que una posibilidad es

$$Y(y) = c_3 y.$$

Por tanto, en el caso $c = 0$ aparece una nueva solución:

$$u(x, y) = X(x)Y(y) = c_2 c_3 y.$$

Por conveniencia, llamemos $A_0 = c_2 c_3$; nos queda así la solución

$$u(x, y) = A_0 y.$$

(c) $c > 0$, $c = -\lambda^2$ con $\lambda > 0$.

En este caso resulta:

$$\begin{cases} X''(x) - \lambda^2 X(x) = 0 \\ Y''(y) + \lambda^2 Y(y) = 0 \end{cases}$$

con soluciones

$$\begin{cases} X(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x} \\ Y(y) = c_3 \cos(\lambda y) + c_4 \sin(\lambda y). \end{cases}$$

Al imponer $\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0$ ó, equivalentemente, $X'(0) = 0$, resulta $\lambda(c_1 - c_2) = 0$ y como $\lambda > 0$, necesariamente $c_1 = c_2$. Así, $X(x) = c_1 (e^{\lambda x} + e^{-\lambda x})$. Ahora, de $\frac{\partial u}{\partial x}(a, y) = 0$ es $X'(a) = 0$, que se traduce en que $c_1 \lambda (e^{\lambda a} - e^{-\lambda a}) = 0$. La posibilidad $c_1 = 0$ nos lleva a la solución trivial $X(x) = 0$, por lo que la descartamos. Como $\lambda > 0$, nos queda $e^{\lambda a} = e^{-\lambda a}$, que por layectividad de la exponencial equivale a $\lambda a = -\lambda a$, o bien $2\lambda a = 0$. Esto implica un absurdo, pues $\lambda, a > 0$. Por tanto, en este caso no existen soluciones separadas de la forma $X(x)Y(y)$.

Como en los casos de la ecuación del calor y la de ondas, la linealidad de la ecuación y el hecho de que las condiciones de frontera sean homogéneas, nos dice que podemos sumar todas las soluciones que hemos obtenido para obtener la solución

$$u(x, y) = A_0 y + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{a}y\right). \quad (60)$$

Lo único que falta por determinar son los coeficientes A_0, A_n . Para esto, recurrimos a la condición $u(x, b) = f(x)$. Imponiéndola,

$$u(x, b) = A_0 b + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{a}b\right) = f(x).$$

Pero esto es muy parecido a la serie de Fourier en cosenos de $f(x)$ en $]0, a]$ (ecuación (24)). De hecho, por unicidad:

$$\frac{1}{a} \int_0^a f(x) dx = \frac{a_0}{2} = A_0 b$$

y

$$\frac{2}{a} \int_0^a f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx = a_n = A_n \sinh\left(\frac{n\pi}{a}b\right), \quad n \in \mathbb{N},$$

de donde

$$\begin{cases} A_0 = \frac{1}{ab} \int_0^a f(x) dx \\ A_n = \frac{2}{a \sinh\left(\frac{n\pi}{a}b\right)} \int_0^a f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) dx, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (61)$$

Por tanto, la solución a la ecuación de Laplace en un rectángulo queda completamente determinada en función de los datos del problema.

9. De la serie de Fourier a la transformación de Fourier

En numerosas aplicaciones intervienen funciones que, sin ser periódicas, no están exentas de “componentes periódicos”. Por ejemplo, el consumo de energía durante un largo periodo de tiempo no será una función periódica, pero contiene oscilaciones con periodo de un día (mayor consumo durante el día que durante la noche), con periodo una semana (mayor consumo en días laborables que durante el fin de semana) y también anuales (en general mayor consumo en invierno que en verano). Además aparecerán alteraciones debidas a diferentes circunstancias de carácter aleatorio o impredecible. La transformación de Fourier es una herramienta fundamental para analizar este tipo de datos y extraer información periódica oculta en ellos.

Comenzamos viendo que la transformación de Fourier puede obtenerse como caso límite de la serie (compleja) de Fourier para funciones periódicas cuando el periodo $T \rightarrow \infty$. El tratamiento del tema será muy formal, es decir sin entrar en cuestiones teóricas que quedan fuera del alcance de estas notas.

Sea f una función no periódica definida para $t \in \mathbb{R}$. Podemos aproximarla mediante una función periódica \tilde{f} , con periodo T , que coincide con ella para $-T/2 < t < T/2$:

$$\tilde{f}(t) = f(t), \quad -T/2 < t < T/2, \quad \tilde{f}(t+T) = \tilde{f}(t).$$

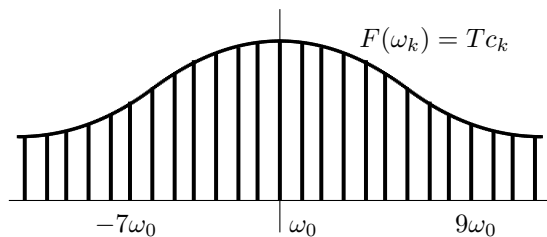
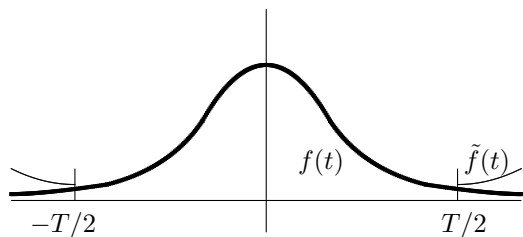
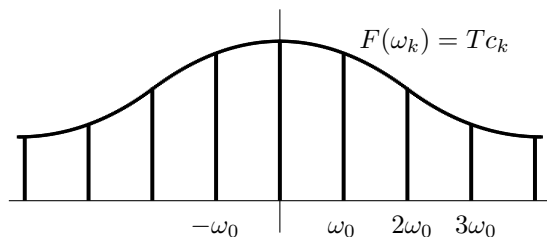
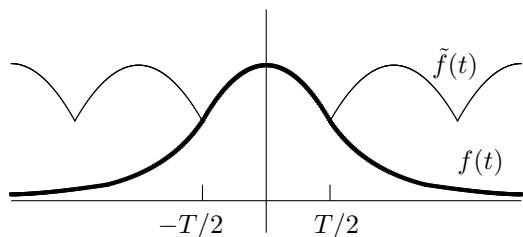
Para ésta se tendrá un desarrollo en serie (compleja) de Fourier

$$\tilde{f}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}, \quad c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{f}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt,$$

donde $\omega_0 = 2\pi/T$. Introduciendo una función $F(\omega)$ que para los valores discretos $\omega_k = k\omega_0$ vale $F(\omega_k) = F(k\omega_0) = Tc_k$, podemos reescribir estas ecuaciones en la forma

$$F(\omega_k) = Tc_k = \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{f}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt,$$

$$\tilde{f}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{F(k\omega_0)}{T} e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \frac{2\pi}{T} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0.$$



La figura ilustra esta aproximación para el caso de una función f par. Las líneas del espectro de la función $\tilde{f}(t)$ están separadas la cantidad $\omega_0 = 2\pi/T$, por lo que se van juntando al crecer T . Al multiplicar por T los valores del espectro, c_k , se obtienen los valores de $F(\omega)$ evaluada en puntos $\omega_k = k\omega_0$, que se van aproximando al crecer T .

Ahora para $T \rightarrow \infty$, admitiendo que entonces $\tilde{f}(t) \rightarrow f(t)$, se obtiene

$$F(\omega_k) = \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{f}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad \longrightarrow \quad F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt,$$

$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(k\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \Delta\omega \quad \longrightarrow \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega,$$

pues la serie puede interpretarse como una suma de Riemann de la última integral al evaluar la función $F(\omega) e^{j\omega t}$ de la variable continua ω en los puntos $\omega_k = k\omega_0$, los cuales están espaciados la cantidad $\Delta\omega = \omega_{k+1} - \omega_k = \omega_0 = 2\pi/T$ que tiende a 0 cuando $T \rightarrow \infty$. Se llega así a la transformación de Fourier que definimos en la sección siguiente.

Observemos que, puesto que $F(\omega)$ es en general una función compleja, no perdemos nada aceptando la posibilidad de que $f(t)$ también lo sea. Con ello se gana en simetría al considerar que tanto f como F son funciones complejas de variable real.

10. La Transformación de Fourier

Sea f una función compleja de variable real, más precisamente, una función definida para $t \in \mathbb{R}$ con valores $f(t) \in \mathbb{C}$. De acuerdo con la aproximación de la sección anterior, se define su **transformada de Fourier** como la función compleja de la variable real ω

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \mathcal{F}\{f(t)\} \quad (62)$$

y a partir de $F(\omega)$ se recupera $f(t)$ mediante la fórmula de **inversión** de la transformación:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} \quad (63)$$

Nótese la similitud entre las dos fórmulas: sólo se diferencian en el signo de ωt en la exponencial del integrando y en la presencia del factor $1/2\pi$ en la fórmula de inversión. Ello se traducirá en que cada propiedad de la transformación tendrá una análoga invirtiendo los papeles del “tiempo” y la “frecuencia”.

Dependiendo del contexto, utilizaremos alguna de las notaciones

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}, \quad f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\}, \quad f(t) \leftrightarrow F(\omega),$$

diciendo que $F(\omega)$ es la *transformada de Fourier* de $f(t)$, que $f(t)$ es la *transformada inversa* o *antitransformada* de $F(\omega)$, o que $f(t)$ y $F(\omega)$ son un par “función - transformada”, respectivamente.

Entre las notaciones alternativas empleadas en la literatura y en diferentes aplicaciones, la más frecuente es

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt = \mathcal{F}\{x(t)\}, \quad x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df = \mathcal{F}^{-1}\{X(f)\}.$$

obtenida a partir de (62) y (63) al hacer $\omega = 2\pi f$, siendo f la frecuencia. Aquí no la utilizaremos.

Hay varios marcos teóricos en los que se puede demostrar rigurosamente que la transformación de Fourier está bien definida y que la fórmula de inversión es válida. El más interesante para las aplicaciones (por su interpretación en términos de energía) es el de las (clases de) funciones de cuadrado integrable (en el sentido de Lebesgue):

$$L^2(\mathbb{R}) = \{f \mid \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty\}.$$

De momento supondremos que estamos en esta situación, es decir, $f(t)$ (y entonces también $F(\omega)$) son funciones de cuadrado integrable. En la sección 13 extenderemos este marco para incluir otras funciones usuales.

Ejemplo 10.1. Consideremos el *impulso rectangular* representado en la figura

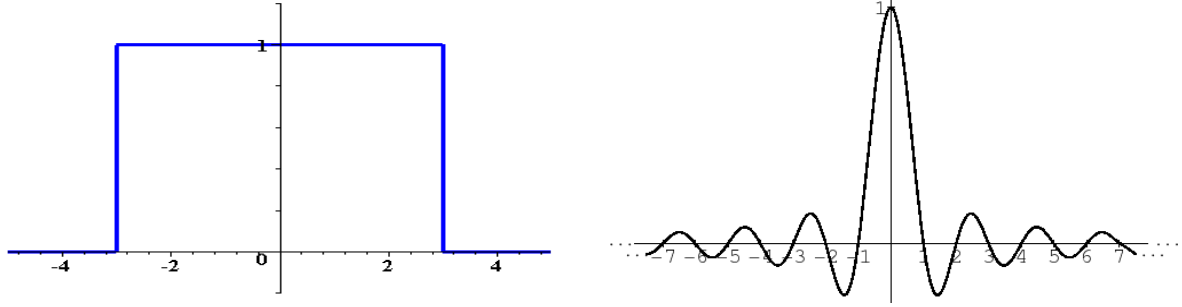
$$p_a(t) = \begin{cases} 1 & |t| < a \\ 0 & |t| > a \end{cases}$$

Su transformada de Fourier es

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_a(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-a}^a e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{-j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-a}^a = \frac{1}{-j\omega} (e^{-j\omega a} - e^{j\omega a}) = \frac{2}{\omega} \sin \omega a.$$

Introduciendo la función $\text{sinc}(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$, el resultado se puede expresar en la forma

$$p_a(t) \longleftrightarrow \frac{2}{\omega} \sin \omega a = 2a \text{sinc}\left(\frac{\omega a}{\pi}\right) \quad (64)$$

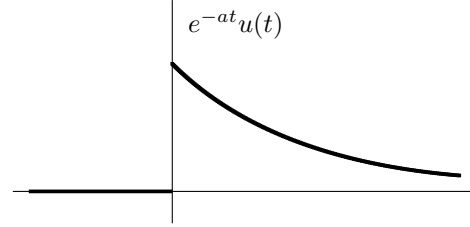


Impulso rectangular y su transformada

Observe que la transformada es una función real, con una discontinuidad evitable en $\omega = 0$ y que se anula cuando $\omega a = k\pi, k = \pm 1, \pm 2, \dots$. La figura muestra el impulso rectangular y su transformada para $a = 5$.

Ejemplo 10.2. Sea ahora la función

$$f(t) = e^{-at}u(t) = \begin{cases} e^{-at} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (a > 0)$$



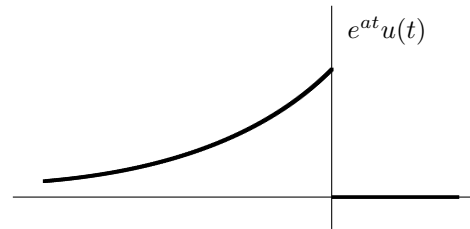
Su transformada de Fourier es

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt = \frac{-1}{a+j\omega} e^{-(a+j\omega)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a+j\omega}$$

pues para $a > 0$ se tiene $|e^{-(a+j\omega)t}| = |e^{-at} e^{-j\omega t}| = e^{-at} \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$.

Ejemplo 10.3. Análogamente, para la función

$$f(t) = e^{at}u(-t) = \begin{cases} 0 & t > 0 \\ e^{at} & t < 0 \end{cases} \quad (a > 0)$$



la transformada de Fourier es

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{(a-j\omega)t} dt = \frac{1}{a-j\omega} e^{(a-j\omega)t} \Big|_{-\infty}^0 = \frac{1}{a-j\omega}$$

Ejemplo 10.4. Consideremos una función gaussiana $f(t) = be^{-at^2}$. Calculemos su transformada de Fourier,

aplicando directamente la definición y completando cuadrados:

$$\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} b e^{-at^2} e^{-j\omega t} dt \\
&= b \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(at^2 + j\omega t)} dt \\
&= b \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(at^2 + j\omega t)} e^{-\frac{\omega^2}{4a}} e^{\frac{\omega^2}{4a}} dt \\
&= b \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(at^2 + j\omega t - \frac{\omega^2}{4a})} e^{-\frac{\omega^2}{4a}} dt \\
&= b \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\sqrt{a}t + \frac{j\omega}{2\sqrt{a}}\right)^2} e^{-\frac{\omega^2}{4a}} dt
\end{aligned}$$

Ahora, hacemos el cambio de variable lineal $\sqrt{a}t + \frac{j\omega}{2\sqrt{a}} = y$:

$$\begin{aligned}
F(\omega) &= b e^{-\frac{\omega^2}{4a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} \frac{dy}{\sqrt{a}} \\
&= \frac{b}{\sqrt{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy \\
&= b \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}.
\end{aligned}$$

En definitiva: **la transformada de una gaussiana es otra gaussiana**. Si

$$f(t) = b e^{-at^2}, \quad (65)$$

entonces

$$F(\omega) = b \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}. \quad (66)$$

Esta curiosa propiedad permite calcular fácilmente las antitransformadas de gaussianas. Por ejemplo, ¿Cuál es la antitransformada de $F(\omega) = e^{-kc\omega^2}$ ($k, c \in \mathbb{R}$)?. En primer lugar, debe ser

$$b \sqrt{\frac{\pi}{a}} = 1,$$

de donde b quedará determinado una vez que conozcamos a :

$$b = \sqrt{\frac{a}{\pi}}.$$

Para calcular a , usamos que debe ser $kc = 1/4a$, luego

$$a = \frac{1}{4kc}.$$

Con todo esto, resulta que si

$$F(\omega) = e^{-kc\omega^2} \quad (67)$$

entonces

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \frac{1}{\sqrt{4\pi kc}} e^{-\frac{t^2}{4kc}}. \quad (68)$$

11. Propiedades de la transformación de Fourier

11.1. Propiedades básicas

El siguiente cuadro contiene las principales propiedades de la transformación de Fourier.

Cuadro 1: Propiedades de las transformadas de Fourier

Propiedad	$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$	$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega$
Linealidad	$af(t) + bg(t)$	$aF(\omega) + bG(\omega)$
Derivación en tiempo	$f^{(n)}(t)$	$(j\omega)^n F(\omega)$
Derivación en frecuencia	$(-jt)^n f(t)$	$\frac{d^n}{d\omega^n} F(\omega)$
Traslación en tiempo	$f(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0} F(\omega)$
Traslación en frecuencia	$f(t) e^{j\omega_0 t}$	$F(\omega - \omega_0)$
Modulación	$f(t) \cos \omega_0 t$	$\frac{1}{2} (F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0))$
Cambio de escala	$f(at)$	$\frac{1}{ a } F\left(\frac{\omega}{a}\right)$
Simetría	$f(-t)$	$F(-\omega)$
Conjugación	$\overline{f(t)}$	$\overline{F(-\omega)}$
Dualidad	$F(t)$	$2\pi f(-\omega)$

La demostración de todas ellas es elemental, por lo que sólo demostraremos sólo algunas.

- Derivación en tiempo: A partir de la fórmula de inversión,

$$f'(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \frac{d}{dt} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) j\omega e^{j\omega t} d\omega = \mathcal{F}^{-1}\{j\omega F(\omega)\}.$$

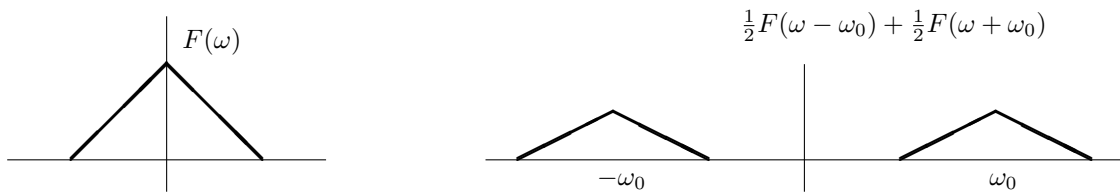
- Traslación en frecuencia: A partir de la definición de $\mathcal{F}\{f(t)\}$,

$$\mathcal{F}\{f(t)e^{j\omega_0 t}\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt = F(\omega - \omega_0).$$

- Modulación: A partir de la propiedad de traslación en frecuencia,

$$\mathcal{F}\{f(t) \cos \omega_0 t\} = \frac{1}{2} (\mathcal{F}\{f(t)e^{j\omega_0 t}\} + \mathcal{F}\{f(t)e^{-j\omega_0 t}\}) = \frac{1}{2} (F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)).$$

La figura ilustra esta propiedad.

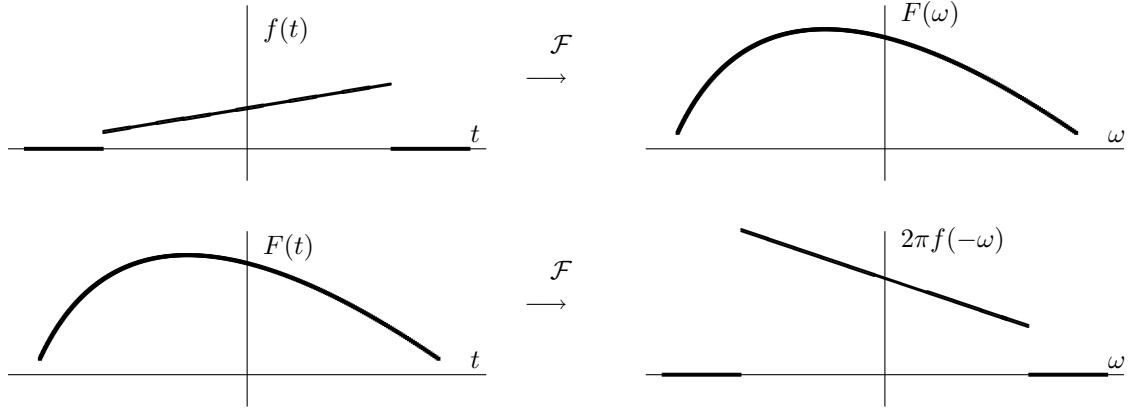


- Dualidad:

$$\mathcal{F}\{F(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-j\omega t} dt = 2\pi \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{jt(-\omega)} dt \right) = 2\pi f(-\omega).$$

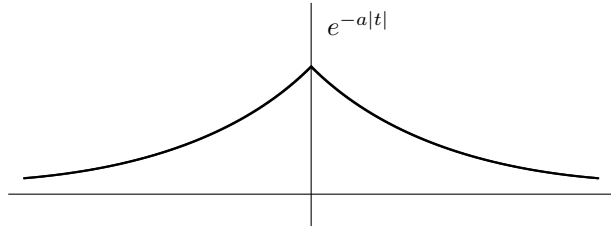
habiendo usado la fórmula de inversión (63) con los papeles de t y ω intercambiados.

Nótese que la propiedad de dualidad también es consecuencia de la similitud entre las fórmulas de transformación e inversión. La figura ilustra esta propiedad.



Ejemplo 11.1. Para la función

$$f(t) = e^{-a|t|} = \begin{cases} e^{-at} & t > 0 \\ e^{at} & t < 0 \end{cases} \quad (a > 0)$$



que puede verse como la suma $e^{-a|t|} = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)$ de las funciones de los ejemplos 9.2 y 9.3, se obtiene por la propiedad de linealidad:

$$\mathcal{F}\{e^{-a|t|}\} = \mathcal{F}\{e^{-at}u(t)\} + \mathcal{F}\{e^{at}u(-t)\} = \frac{1}{a + j\omega} + \frac{1}{a - j\omega} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

Obsérvese además que $\mathcal{F}\{e^{at}u(-t)\}$ puede deducirse de $\mathcal{F}\{e^{-at}u(t)\}$ mediante la propiedad $f(-t) \longleftrightarrow F(-\omega)$.

Ejemplo 11.2. Consideremos el impulso rectangular

$$f(t) = p_2(t-3) = \begin{cases} 0 & t < 1 \\ 1 & 1 < t < 5 \\ 0 & t > 5 \end{cases}$$



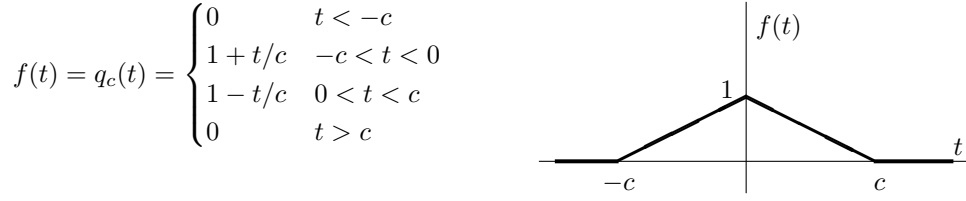
Utilizando la propiedad de traslación a partir de $p_2(t) \longleftrightarrow \frac{2}{\omega} \sin 2\omega$ se obtiene

$$\mathcal{F}\{p_2(t-3)\} = e^{-j3\omega} \mathcal{F}\{p_2(t)\} = e^{-j3\omega} \frac{2}{\omega} \sin 2\omega = \frac{1}{j\omega} e^{-j3\omega} (e^{j2\omega} - e^{-j2\omega}) = \frac{1}{j\omega} (e^{-j\omega} - e^{-j5\omega}).$$

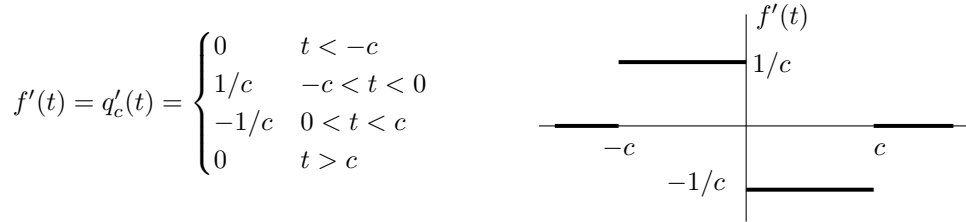
y también

$$\mathcal{F}\{p_2(t+2)\} = e^{j2\omega} \mathcal{F}\{p_2(t)\} = e^{j2\omega} \frac{2}{\omega} \sin 2\omega.$$

Ejemplo 11.3. Consideremos el *impulso triangular*



se puede calcular su transformada directamente, pero también se puede obtener utilizando las tres primeras propiedades. Empezamos derivando la función para obtener



que podemos reconocer como

$$f'(t) = \frac{1}{c} p_{c/2}(t + c/2) - \frac{1}{c} p_{c/2}(t - c/2).$$

Por la propiedad de derivación $\mathcal{F}\{f'(t)\} = j\omega F(\omega)$, y utilizando las propiedades de linealidad y traslación para transformar el segundo miembro se obtiene:

$$\begin{aligned} j\omega F(\omega) &= \mathcal{F}\left\{\frac{1}{c} p_{c/2}(t + \frac{c}{2}) - \frac{1}{c} p_{c/2}(t - \frac{c}{2})\right\} = \frac{1}{c} \mathcal{F}\{p_{c/2}(t + \frac{c}{2})\} - \frac{1}{c} \mathcal{F}\{p_{c/2}(t - \frac{c}{2})\} \\ &= \frac{1}{c} e^{j\omega c/2} \frac{2}{\omega} \sin \frac{\omega c}{2} - \frac{1}{c} e^{-j\omega c/2} \frac{2}{\omega} \sin \frac{\omega c}{2} = \frac{4j}{\omega c} \sin^2 \left(\frac{\omega c}{2} \right), \end{aligned}$$

y por lo tanto

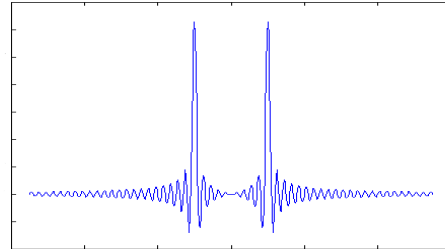
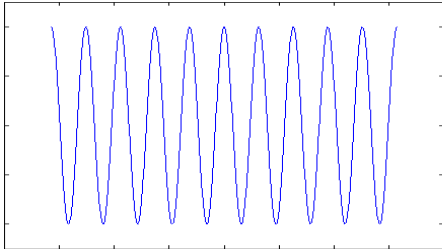
$$F(\omega) = \mathcal{F}\{q_c(t)\} = \frac{4}{\omega^2 c} \sin^2 \left(\frac{\omega c}{2} \right) = c \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{\omega c}{2\pi} \right). \quad (69)$$

Ejemplo 11.4. Consideremos la función

$$f(t) = p_2(t) \cos 3\pi t = \begin{cases} \cos 3\pi t & |t| < 2 \\ 0 & |t| > 2 \end{cases}$$

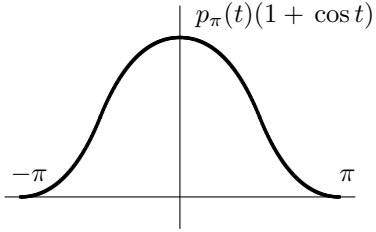
Como $p_2(t) \leftrightarrow \frac{2}{\omega} \sin 2\omega$, por la propiedad de modulación se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{p_2(t) \cos 3\pi t\} &= \frac{1}{\omega - 3\pi} \sin 2(\omega - 3\pi) + \frac{1}{\omega + 3\pi} \sin 2(\omega + 3\pi) \\ &= \left(\frac{1}{\omega - 3\pi} + \frac{1}{\omega + 3\pi} \right) \sin 2\omega = \frac{2\omega}{\omega^2 - 9\pi^2} \sin 2\omega. \end{aligned}$$



La función $p_2(t) \cos 3\pi t$ y su transformada

Ejemplo 11.5. Consideremos la función

$$f(t) = p_\pi(t)(1 + \cos t) = \begin{cases} 1 + \cos t & |t| < \pi \\ 0 & |t| > \pi \end{cases}$$


Por la propiedad de linealidad,

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \mathcal{F}\{p_\pi(t)(1 + \cos t)\} = \mathcal{F}\{p_\pi(t)\} + \mathcal{F}\{p_\pi(t) \cos t\}.$$

Ya conocemos

$$\mathcal{F}\{p_\pi(t)\} = \frac{2}{\omega} \operatorname{sen} \omega \pi$$

y para el otro sumando, por la propiedad de modulación,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{p_\pi(t) \cos t\} &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\omega - 1} \operatorname{sen}(\omega - 1)\pi + \frac{2}{\omega + 1} \operatorname{sen}(\omega + 1)\pi \right) \\ &= - \left(\frac{1}{\omega - 1} + \frac{1}{\omega + 1} \right) \operatorname{sen} \omega \pi = \frac{-2\omega}{\omega^2 - 1} \operatorname{sen} \omega \pi \end{aligned}$$

pues $\operatorname{sen}(\omega \pm 1)\pi = -\operatorname{sen} \omega \pi$. Por lo tanto,

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{p_\pi(t)(1 + \cos t)\} = \left(\frac{2}{\omega} - \frac{2\omega}{\omega^2 - 1} \right) \operatorname{sen} \omega \pi = \frac{2}{\omega(1 - \omega^2)} \operatorname{sen} \omega \pi = \frac{2\pi}{(1 - \omega^2)} \operatorname{sinc} \omega.$$

Ejemplo 11.6. Para determinar la transformada de Fourier de la función $f(t) = \frac{1}{t} \operatorname{sen} t$ recurrimos a la propiedad de dualidad:

$$p_1(t) \longleftrightarrow \frac{2}{\omega} \operatorname{sen} \omega \implies \frac{2}{t} \operatorname{sen} t \longleftrightarrow 2\pi p_1(-\omega) = 2\pi p_1(\omega)$$

pues p_a es una función par. Así

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{t} \operatorname{sen} t\right\} = \pi p_1(\omega)$$

11.2. Transformada de funciones reales

Hasta ahora f era una función compleja con transformada de Fourier también compleja que podemos escribir en la forma:

$$F(\omega) = R(\omega) + jI(\omega) \quad (70)$$

siendo $R(\omega)$ la parte real de $F(\omega)$ e $I(\omega)$ su parte imaginaria. En el caso particular e importante de que f sea una función *real*, es decir que $f(t)$ sea real para todo t , utilizando la propiedad de conjugación se obtiene

$$\begin{aligned} f(t) \text{ real} &\Leftrightarrow f(t) = \overline{f(t)} \Leftrightarrow F(\omega) = \overline{F(-\omega)} \\ &\Leftrightarrow R(\omega) + jI(\omega) = R(-\omega) - jI(-\omega) \Leftrightarrow \begin{cases} R(\omega) = R(-\omega) \\ I(\omega) = -I(-\omega) \end{cases} \end{aligned}$$

Con otras palabras,

*Cuando f es una función **real**, la parte real de su transformada de Fourier es una función **par**, mientras que la parte imaginaria es una función **impar**.*

Compruébese que así ocurre en todos los ejemplos anteriores, pues siempre se trataba de funciones reales. Así, en el ejemplo 10.2 se obtenía (para $a > 0$) el par

$$f(t) = e^{-at}u(t) \longleftrightarrow F(\omega) = \frac{1}{j\omega + a} = \frac{a}{\omega^2 + a^2} - j\frac{\omega}{\omega^2 + a^2}$$

por lo que

$$R(\omega) = \frac{a}{\omega^2 + a^2} \quad I(\omega) = -\frac{\omega}{\omega^2 + a^2}$$

Consideremos ahora los casos en que, además de ser real, f es una función par o impar. Cuando f es par

$$f(t) = \text{par} \quad \Leftrightarrow \quad f(t) = f(-t) \quad \Leftrightarrow \quad F(\omega) = F(-\omega) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} R(\omega) = R(-\omega) \\ I(\omega) = I(-\omega) \end{cases}$$

pero si f es real, se ha de tener además $I(\omega) = -I(-\omega)$, es decir, $I(\omega)$ ha de ser a la vez una función par e impar. Esto sólo es posible si $I(\omega) = 0$, y entonces $F(\omega) = R(\omega)$:

*Cuando f es una función **real y par** su transformada de Fourier es una función **real y par** y recíprocamente.*

Análogamente, cuando f es impar,

$$f(t) = \text{impar} \quad \Leftrightarrow \quad f(t) = -f(-t) \quad \Leftrightarrow \quad F(\omega) = -F(-\omega) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} R(\omega) = -R(-\omega) \\ I(\omega) = -I(-\omega) \end{cases}$$

y si f es real, se ha de tener además $R(\omega) = R(-\omega)$. Ahora ha de ser $R(\omega) = 0$ y $F(\omega) = jI(\omega)$:

*Cuando f es una función **real e impar** su transformada de Fourier es una función **imaginaria pura e impar** y recíprocamente.*

Como ya habíamos visto en la sección 4.3, cualquier función tiene una única descomposición como suma de una función par y otra impar. De acuerdo con lo anterior la parte par ha de tener una transformada real (y par), mientras que la parte impar ha de tener una transformada imaginaria pura (e impar), por lo que se tiene

$$\begin{aligned} f(t) &= f_p(t) + f_i(t) \\ \mathcal{F} \downarrow \quad \quad \mathcal{F} \downarrow \quad \quad \mathcal{F} \downarrow & \\ F(\omega) &= R(\omega) + jI(\omega) \end{aligned} \tag{71}$$

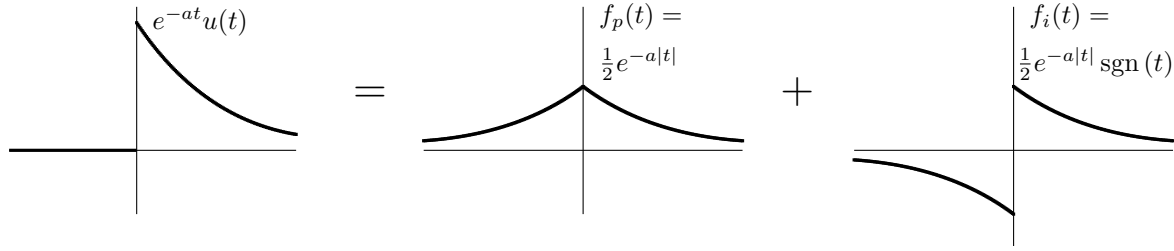
es decir, la parte real de $F(\omega)$ es la transformada de la parte par de f y la parte imaginaria de $F(\omega)$ multiplicada por j es la transformada de la parte impar de f .

Ejemplo 11.7. La función $f(t) = e^{-at}u(t)$, $a > 0$, tiene transformada de Fourier

$$F(\omega) = \frac{1}{a + j\omega} = \frac{a}{\omega^2 + a^2} + j\frac{-\omega}{\omega^2 + a^2}$$

En cuanto a su descomposición par + impar $f(t) = f_p(t) + f_i(t)$, se tiene

$$\begin{aligned} f_p(t) &= \frac{e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)}{2} = \frac{1}{2} \begin{cases} e^{-at} & t > 0 \\ e^{at} & t < 0 \end{cases} = \frac{1}{2}e^{-a|t|} \\ f_i(t) &= \frac{e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t)}{2} = \frac{1}{2} \begin{cases} e^{-at} & t > 0 \\ -e^{at} & t < 0 \end{cases} = \frac{1}{2}e^{-a|t|} \operatorname{sgn}(t) \end{aligned}$$



como se ilustra en la figura, siendo sgn la llamada *función signo*:

$$\text{sgn}(t) = u(t) - u(-t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases} \quad (72)$$

De acuerdo con (71), para las partes par e impar de f se tiene

$$f_p(t) = \frac{1}{2}e^{-a|t|} \longleftrightarrow \frac{a}{\omega^2 + a^2} \quad (73)$$

$$f_i(t) = \frac{1}{2}e^{-a|t|} \text{sgn}(t) \longleftrightarrow j \frac{-\omega}{\omega^2 + a^2} \quad (74)$$

11.3. Transformadas seno y coseno

La descomposición $f(t) = f_p(t) + f_i(t)$ y el comportamiento de las funciones pares e impares al integrar en intervalos simétricos respecto del origen permiten expresar la transformada de Fourier en la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} (f_p(t) + f_i(t))e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (f_p(t) + f_i(t))(\cos \omega t - j \sin \omega t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_p(t) \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{\infty} f_i(t) \sin \omega t dt \\ &= 2 \int_0^{\infty} f_p(t) \cos \omega t dt - j 2 \int_0^{\infty} f_i(t) \sin \omega t dt \end{aligned} \quad (75)$$

pues $\int_{-\infty}^{\infty} f_p(t) \sin \omega t dt = 0$ y $\int_{-\infty}^{\infty} f_i(t) \cos \omega t dt = 0$, al ser los integrandos funciones impares. Ello lleva a definir las *transformadas coseno y seno* de una función real f mediante

$$\boxed{\mathcal{F}_c\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) \cos \omega t dt} \quad \boxed{\mathcal{F}_s\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt} \quad (76)$$

respectivamente, lo que permite calcular la transformada de Fourier de una función real realizando integrales reales. En efecto, el cálculo (75) permite afirmar que

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = 2\mathcal{F}_c\{f_p(t)\} - j2\mathcal{F}_s\{f_i(t)\} \quad (77)$$

y en particular, cuando f es par o impar

$$\boxed{f \text{ par} \iff \mathcal{F}\{f(t)\} = 2\mathcal{F}_c\{f(t)\}} \quad (78)$$

$$\boxed{f \text{ impar} \iff \mathcal{F}\{f(t)\} = -j2\mathcal{F}_s\{f(t)\}} \quad (79)$$

Ejemplo 11.8. Para la función par $f(t) = e^{-a|t|}$ se tiene:

$$\mathcal{F}_c\{e^{-a|t|}\} = \int_0^\infty e^{-at} \cos \omega t dt = \frac{a}{\omega^2 + a^2} \quad \mathcal{F}\{e^{-a|t|}\} = 2\mathcal{F}_c\{e^{-a|t|}\} = \frac{2a}{\omega^2 + a^2}$$

mientras que para la función impar $f(t) = e^{-a|t|} \operatorname{sgn}(t)$ se tiene:

$$\mathcal{F}_s\{e^{-a|t|} \operatorname{sgn}(t)\} = \int_0^\infty e^{-at} \operatorname{sen} \omega t dt = \frac{\omega}{\omega^2 + a^2}$$

$$\mathcal{F}\{e^{-a|t|} \operatorname{sgn}(t)\} = -2j\mathcal{F}_s\{e^{-a|t|}\} = -\frac{2j\omega}{\omega^2 + a^2}$$

11.4. Identidad de Parseval

Como en el caso de la serie de Fourier, también ahora existe una relación directa entre la “energía” de $f(t)$ y la de su transformada $F(\omega)$, que se conoce como *relación, identidad o teorema de Parseval*:

$$\boxed{\int_{-\infty}^\infty |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty |F(\omega)|^2 d\omega} \quad (80)$$

Su justificación se puede hacer como en la sección 9: a partir de la identidad de Parseval para la serie de Fourier de $\tilde{f}(t)$ (la función periódica con periodo T que coincide con $f(t)$ para $-T/2 < t < T/2$) se obtiene

$$\int_{-T/2}^{T/2} |\tilde{f}(t)|^2 dt = T \sum_{-\infty}^\infty |c_k|^2 = T \sum_{-\infty}^\infty \frac{|F(\omega_k)|^2}{T^2} = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^\infty |F(\omega_k)|^2 \frac{2\pi}{T} = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^\infty |F(\omega_k)|^2 \Delta\omega$$

que para $T \rightarrow \infty$ da lugar a (80).

Ejemplo 11.9. Comprobemos la relación para el par $e^{-at} u(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega + a}$, $a > 0$. Se tiene

$$2\pi \int_{-\infty}^\infty |e^{-at} u(t)|^2 dt = 2\pi \int_0^\infty e^{-2at} dt = 2\pi \frac{1}{-2a} e^{-2at} \Big|_0^\infty = \frac{\pi}{a}$$

$$\int_{-\infty}^\infty \left| \frac{1}{j\omega + a} \right|^2 d\omega = \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\omega^2 + a^2} d\omega = \frac{1}{a} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\omega}{a} \Big|_{-\infty}^\infty = \frac{1}{a} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{-\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{a}$$

Ejemplo 11.10. Calcular $\int_0^\infty \frac{1}{x^2} \operatorname{sen}^2 x dx$.

La identidad de Parseval para el par $p_1(t) \leftrightarrow \frac{2}{\omega} \operatorname{sen} \omega$ proporciona

$$\int_{-\infty}^\infty |p_1(t)|^2 dt = \int_{-1}^1 dt = 2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \left| \frac{2}{\omega} \operatorname{sen} \omega \right|^2 d\omega = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\omega^2} \operatorname{sen}^2 \omega d\omega$$

por lo que $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\omega^2} \operatorname{sen}^2 \omega d\omega = \pi$, y al ser $\frac{1}{x^2} \operatorname{sen}^2 x$ una función par se obtiene

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^2} \operatorname{sen}^2 x dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2} \operatorname{sen}^2 x dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\omega^2} \operatorname{sen}^2 \omega d\omega = \frac{\pi}{2}$$

12. El producto de convolución

Introducimos ahora una operación entre funciones, cuya importancia estriba en su comportamiento respecto a la transformación de Fourier, como ilustra el teorema que sigue.

Definición 6 Se define el **producto de convolución** de dos funciones f y g como la función

$$(f * g)(t) = f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(t-s) ds \quad (81)$$

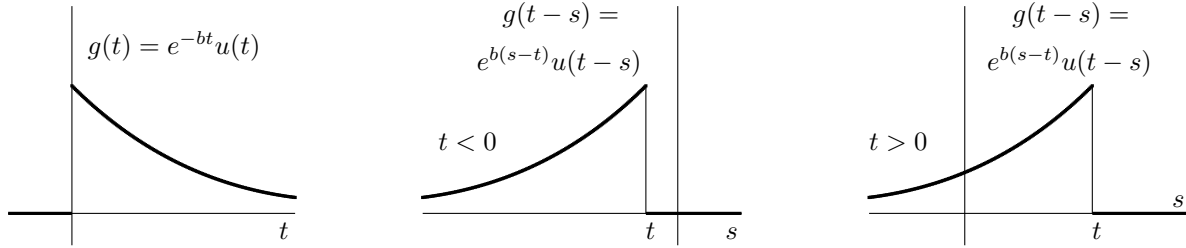
Ejemplo 12.1. Para calcular el producto de convolución de las funciones

$$f(t) = e^{-at}u(t) = \begin{cases} e^{-at} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad g(t) = e^{-bt}u(t) = \begin{cases} e^{-bt} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad a, b > 0$$

hay que observar primero que, mientras que no existe ninguna dificultad para obtener la función $f(s)$, para la función $g(t-s)$ (como función de la variable s para diferentes valores del parámetro t) se tiene

$$g(t-s) = e^{-b(t-s)}u(t-s) = \begin{cases} e^{b(s-t)} & s < t \\ 0 & s > t \end{cases}$$

como ilustra la figura.



Así, $(f * g)(t) = 0$ para $t < 0$, pues cualquiera que sea s o bien $f(s) = 0$ o bien $g(t-s) = 0$. Y cuando $t > 0$ el producto $f(s)g(t-s)$ sólo es $\neq 0$ para $0 < s < t$, por lo que se tiene

$$\begin{aligned} (f * g)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(t-s) ds = \int_0^t e^{-as}e^{b(s-t)} ds \\ &= e^{-bt} \int_0^t e^{-as}e^{bs} ds = e^{-bt} \left. \frac{e^{(b-a)s}}{b-a} \right|_0^t = \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b-a} \end{aligned}$$

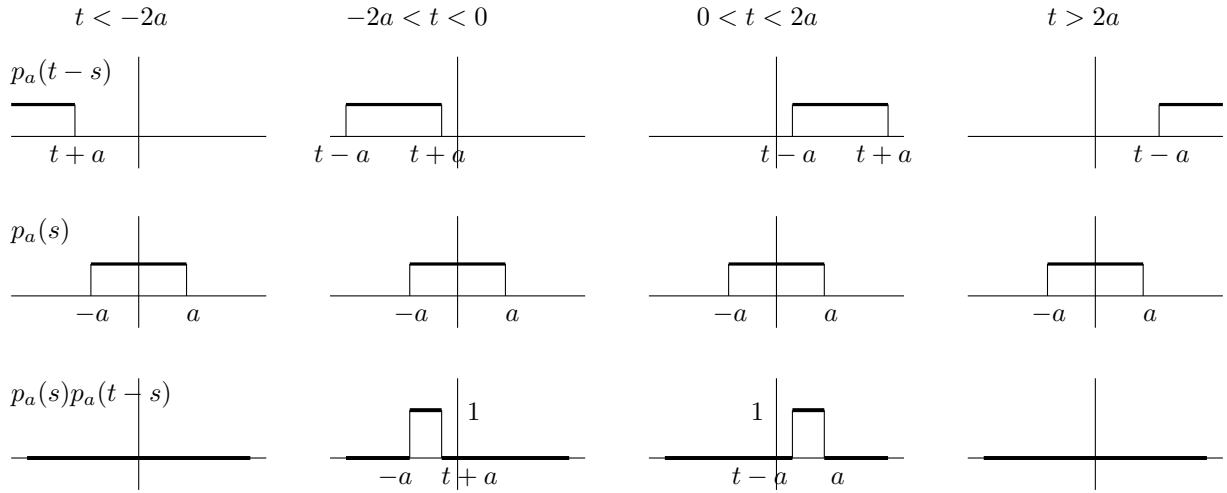
si $a \neq b$. Por lo tanto

$$(f * g)(t) = \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b-a} u(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt}) & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Ejercicio. Comprobar que para $a = b$ se obtiene $(f * g)(t) = te^{-at}u(t)$.

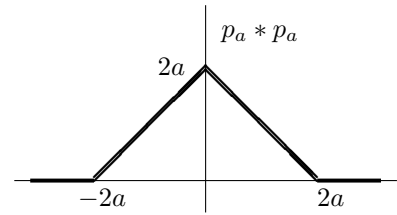
Como el producto de convolución es una integral en la variable s que se debe calcular para todos los valores de $t \in \mathbb{R}$, en muchas aplicaciones se puede realizar gráficamente. Para ello se interpreta que a medida que t recorre la recta real, $-\infty < t < \infty$, en sentido positivo la gráfica de la función $g(t-s)$ va avanzando y para cada posición concreta (que corresponde a cada valor concreto de t) se calcula la integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(s)g(t-s) ds$. Se puede interpretar así lo realizado en el ejemplo anterior cuando se obtenía primero el producto para $t < 0$ y posteriormente para $t > 0$. Este procedimiento, denominado *convolución gráfica*, es especialmente cómodo cuando alguna de las funciones sólo toma valores constantes, con lo que el cálculo de integrales se reduce a un cómputo de áreas sencillas, como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 12.2. Para calcular $(p_a * p_a)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p_a(s)p_a(t-s) ds$ hay que considerar esencialmente las cuatro situaciones de la figura según los diferentes valores de t .



Evaluando las áreas bajo esta última función se obtiene

$$(p_a * p_a)(t) = \begin{cases} 0 & t < -2a \\ t + 2a & -2a < t < 0 \\ 2a - t & 0 < t < 2a \\ 0 & t > 2a \end{cases} = 2aq_{2a}(t)$$



El siguiente resultado justifica la introducción del producto de convolución en el contexto de la transformación de Fourier.

Teorema 7 (de convolución). Si $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ y $g(t) \leftrightarrow G(\omega)$, se tiene

$$\text{Convolución en tiempo:} \quad \boxed{f(t) * g(t) \longleftrightarrow F(\omega)G(\omega)} \quad (82)$$

$$\text{Convolución en frecuencia:} \quad \boxed{f(t)g(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}F(\omega) * G(\omega)} \quad (83)$$

Ejemplo 12.3. Con el teorema de convolución el resultado del ejemplo anterior es elemental:

$$\mathcal{F}\{p_a(t) * p_a(t)\} = \mathcal{F}\{p_a(t)\}\mathcal{F}\{p_a(t)\} = \left(\frac{2}{\omega} \sin \omega a\right)^2 = \frac{4}{\omega^2} \sin^2 \omega a = \mathcal{F}\{2aq_{2a}(t)\}.$$

Ejemplo 12.4. Comprobemos que para $g(t) = e^{-at}u(t)$ se tiene $(g * g)(t) = te^{-at}u(t)$. En efecto, ambas funciones tienen la misma transformada de Fourier:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{(g * g)(t)\} &= \mathcal{F}\{g(t)\}\mathcal{F}\{g(t)\} = \frac{1}{j\omega + a} \frac{1}{j\omega + a} = \frac{1}{(j\omega + a)^2} \\ \mathcal{F}\{te^{-at}u(t)\} &= j\mathcal{F}\{-jte^{-at}u(t)\} = j\frac{d}{d\omega}\mathcal{F}\{e^{-at}u(t)\} = j\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{j\omega + a}\right) = \frac{1}{(j\omega + a)^2} \end{aligned}$$

Entre las *propiedades del producto de convolución* destacan:

- (i) $f * g = g * f$
- (ii) $f * (g + h) = f * g + f * h$
- (iii) $f * (g * h) = (f * g) * h$

para cuya demostración basta comprobar que la transformada de Fourier de ambos miembros de cada propiedad coinciden, lo que es inmediato utilizando el teorema de convolución. Por ejemplo, para la primera se tiene $\mathcal{F}\{f * g\} = F(\omega)G(\omega) = G(\omega)F(\omega) = \mathcal{F}\{g * f\}$.

13. Funciones generalizadas

13.1. La función δ de Dirac

Ya es conocida la función generalizada δ que aparece, por ejemplo, al calcular derivadas de funciones con discontinuidades de salto. Así, $\frac{d}{dt}u(t) = \delta(t)$. Se definía mediante

$$\int_{\alpha}^{\beta} \delta(t - t_0) g(t) dt = \begin{cases} g(t_0) & t_0 \in (\alpha, \beta) \\ 0 & t_0 \notin [\alpha, \beta] \end{cases}$$

para cualquier función $g(t)$ continua en t_0 . Esto basta para poder obtener su transformada de Fourier:

$$\mathcal{F}\{\delta(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \delta(t - t_0) dt = e^{-j\omega t_0}, \quad (84)$$

y en particular, para $t_0 = 0$,

$$\boxed{\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1} \quad (85)$$

Inversamente, la propiedad de traslación en tiempo permite recuperar la transformada de $\delta(t - t_0)$ a partir de la de $\delta(t)$:

$$\mathcal{F}\{\delta(t - t_0)\} = e^{-j\omega t_0} \mathcal{F}\{\delta(t)\} = e^{-j\omega t_0} \quad (84)$$

Las siguientes *propiedades de la función δ* se comprueban fácilmente a partir de su definición o mediante la transformación de Fourier:

- (i) $\delta(t) = \delta(-t)$
- (ii) $f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0)\delta(t - t_0)$
- (iii) $f(t) * \delta(t) = f(t)$
- (iv) $f(t) * \delta(t - t_0) = f(t - t_0)$

Comprobamos únicamente la segunda y la cuarta, de la que la tercera es el caso particular $t_0 = 0$. Para la segunda, si f y g son continuas en el punto $t_0 \in (\alpha, \beta)$

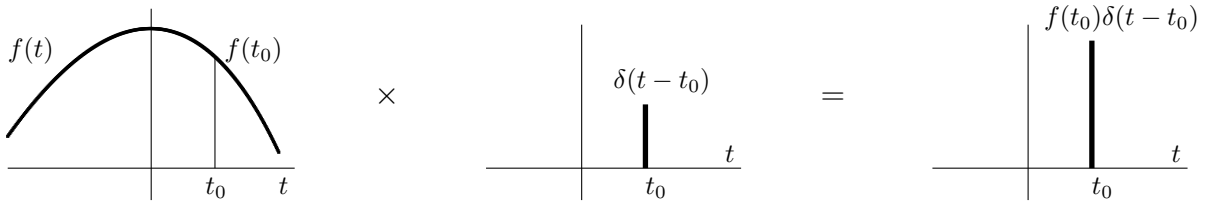
$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\delta(t - t_0)g(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \delta(t - t_0)(f(t)g(t)) dt = f(t_0)g(t_0),$$

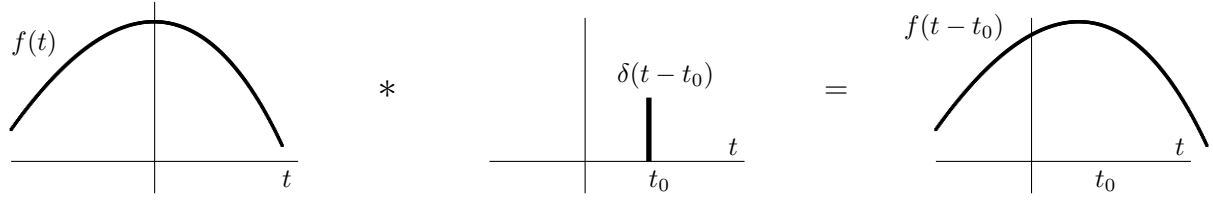
$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t_0)\delta(t - t_0)g(t) dt = f(t_0) \int_{\alpha}^{\beta} \delta(t - t_0)g(t) dt = f(t_0)g(t_0),$$

y en ambos casos la integral se anula si $t_0 \notin [\alpha, \beta]$, por lo que $f(t)\delta(t - t_0) = f(t_0)\delta(t - t_0)$. Para la cuarta basta con transformar los dos miembros de la igualdad utilizando el teorema de convolución para obtener

$$\mathcal{F}\{f(t) * \delta(t - t_0)\} = \mathcal{F}\{f(t)\}\mathcal{F}\{\delta(t - t_0)\} = F(\omega)e^{-j\omega t_0} = \mathcal{F}\{f(t - t_0)\}.$$

Conviene distinguir bien estas dos propiedades: en la propiedad (ii) se efectúa el producto usual entre una función f y la función $\delta(t - t_0)$, resultando esta misma $\delta(t - t_0)$ multiplicada por el valor $f(t_0)$ de la función f en el punto $t = t_0$, mientras que en la propiedad (iv) se realiza el producto de convolución de las mismas funciones, resultando la función f trasladada la cantidad t_0 . La figura ilustra esta situación.





Ejemplo 13.1. Para comprobar que

$$\frac{d}{dt}(e^{-at}u(t)) = -ae^{-at}u(t) + \delta(t),$$

podemos hacer el cálculo

$$\frac{d}{dt}(e^{-at}u(t)) = \left(\frac{d}{dt}e^{-at}\right)u(t) + e^{-at}\frac{d}{dt}u(t) = -ae^{-at}u(t) + e^{-at}\delta(t) = -ae^{-at}u(t) + \delta(t),$$

habiendo utilizado la propiedad (ii): $e^{-at}\delta(t) = e^0\delta(t) = \delta(t)$. Alternativamente, también podemos comprobar que los dos miembros tienen la misma transformada de Fourier:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d}{dt}(e^{-at}u(t))\right\} = j\omega \frac{1}{j\omega + a} \quad \mathcal{F}\{-ae^{-at}u(t) + \delta(t)\} = -a \frac{1}{j\omega + a} + 1 = \frac{j\omega}{j\omega + a}$$

Ejemplo 13.2. Por la propiedad (iv), $p_2(t) * \delta(t - 3) = p_2(t - 3)$. Utilizando el teorema de convolución, su transformada es

$$\mathcal{F}\{p_2(t - 3)\} = \mathcal{F}\{p_2(t) * \delta(t - 3)\} = \frac{2}{\omega} \sin \omega t e^{-j3\omega} = \frac{1}{j\omega} (e^{-j\omega} - e^{-j5\omega})$$

como se había obtenido en el ejemplo 11.2 utilizando entonces la propiedad de traslación.

13.2. Transformación de funciones periódicas

La extensión de la transformación de Fourier a funciones generalizadas lleva a su vez a extenderla a funciones que no son de cuadrado integrable, en particular a funciones periódicas, con lo que en cierto sentido recuperamos la serie de Fourier en el contexto de la transformación de Fourier para funciones generalizadas.

Empezando por la función $f(t) \equiv 1$, no es posible calcular su transformada mediante la definición:

$$1 \longleftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt$$

pues no existe esa integral (impropia). Sin embargo, utilizando la propiedad de dualidad a partir del par $\delta(t) \leftrightarrow 1$, se obtiene

$$1 \longleftrightarrow 2\pi\delta(-\omega) = 2\pi\delta(\omega). \quad (86)$$

La transformada de $e^{j\omega_0 t}$ se puede obtener ahora utilizando la propiedad de traslación en frecuencia:

$$e^{j\omega_0 t} \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0). \quad (87)$$

Y a partir de ésta se deducen las transformadas de $\cos \omega_0 t$ y $\sin \omega_0 t$ por linealidad:

$$\cos \omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2} \longleftrightarrow \pi(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)) \quad (88)$$

$$\sin \omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} \longleftrightarrow j\pi(\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)). \quad (89)$$

Ejercicio. Comprobar la transformada de $f(t) = \cos \omega_0 t$ a partir de la propiedad de modulación.

En el contexto de funciones generalizadas, la transformada de Fourier de una función periódica con periodo T y desarrollo en serie de Fourier

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

sería

$$F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \mathcal{F}\{e^{jk\omega_0 t}\} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(\omega - k\omega_0).$$

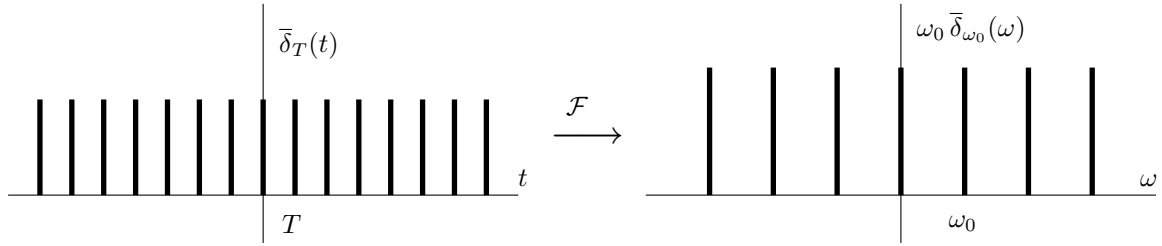
Se recupera así el desarrollo en serie de Fourier dentro del marco (generalizado) de la transformación de Fourier.

13.3. Transformada de un tren de deltas

Se denomina *tren de deltas* a la función generalizada

$$\bar{\delta}_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \quad (90)$$

consistente en una suma infinita de deltas equiespaciadas la cantidad T , como se ilustra en la figura.



Su transformada de Fourier no se puede obtener sumando las transformadas de cada $\delta(t - kT)$, pero si se puede justificar considerando el tren de deltas $\bar{\delta}_T(t)$ como una función periódica de periodo T . Entonces, con $\omega_0 = 2\pi/T$, su desarrollo en serie de Fourier será

$$\bar{\delta}_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 k t} \quad (91)$$

pues, utilizando la definición (84) de la función $\delta(t - t_0)$ para $t_0 = 0$, se obtiene

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} e^{-jk\omega_0 0} = \frac{1}{T}.$$

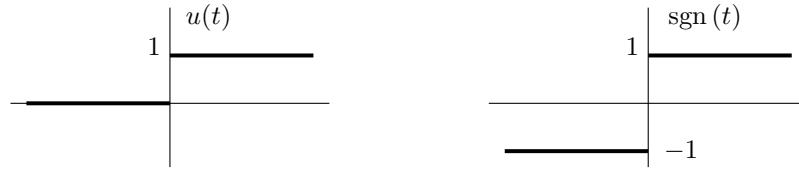
Basta ahora transformar cada término $e^{jk\omega_0 t}$ del sumatorio (91), utilizando para ello (87), para obtener

$$\mathcal{F}\{\bar{\delta}_T(t)\} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega - k\omega_0) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0) = \omega_0 \bar{\delta}_{\omega_0}(\omega). \quad (92)$$

La figura también ilustra este resultado, que se enuncia diciendo que *la transformada de un tren de deltas es otro tren de deltas*.

13.4. Transformada de la función de Heaviside $u(t)$

Consideremos ahora la función $u(t)$ representada en la figura. Su transformada de Fourier tampoco se puede calcular directamente, pues no existe la integral $\int_0^\infty e^{-j\omega t} dt$.



Para obtenerla, utilizaremos que $u(t) = \frac{1}{2}(1 + \text{sgn}(t))$, obteniendo primero la transformada de la función signo, representada en la figura y que había sido introducida en el ejemplo 11.7. A partir de $e^{-a|t|} \text{sgn}(t) \rightarrow \text{sgn}(t)$ cuando $a \rightarrow 0$, se obtiene, de acuerdo con el ejemplo 11.7,

$$\mathcal{F}\{\text{sgn}(t)\} = \lim_{a \rightarrow 0} \mathcal{F}\{e^{-a|t|} \text{sgn}(t)\} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{-2j\omega}{\omega^2 + a^2} = \frac{2}{j\omega}$$

y entonces

$$u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2}(2\pi\delta(\omega) + \frac{2}{j\omega}) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \quad (93)$$

A partir de ésta se deduce ahora, mediante la propiedad de traslación en tiempo

$$u(t - t_0) \longleftrightarrow e^{-j\omega t_0}(\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}e^{-j\omega t_0} \quad (94)$$

habiendo utilizado además la propiedad (ii) de la función δ : $e^{-j\omega t_0}\delta(\omega) = e^0\delta(\omega) = \delta(\omega)$.

Ejemplo 13.3. Comprobemos la transformada de $p_a(t)$ a partir de $p_a(t) = u(t + a) - u(t - a)$.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{p_a(t)\} &= \mathcal{F}\{u(t + a) - u(t - a)\} \\ &= (\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}e^{j\omega a}) - (\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}e^{-j\omega a}) \\ &= \frac{1}{j\omega}(e^{j\omega a} - e^{-j\omega a}) = \frac{2}{\omega} \text{sen } \omega a. \end{aligned}$$

Ejemplo 13.4. Para comprobar que $\frac{d}{dt}u(t - t_0) = \delta(t - t_0)$ basta ver que las transformadas de ambos miembros coinciden. En efecto,

$$\mathcal{F}\{\frac{d}{dt}u(t - t_0)\} = j\omega\mathcal{F}\{u(t - t_0)\} = j\omega(\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}e^{-j\omega t_0}) = e^{-j\omega t_0} = \mathcal{F}\{\delta(t - t_0)\}$$

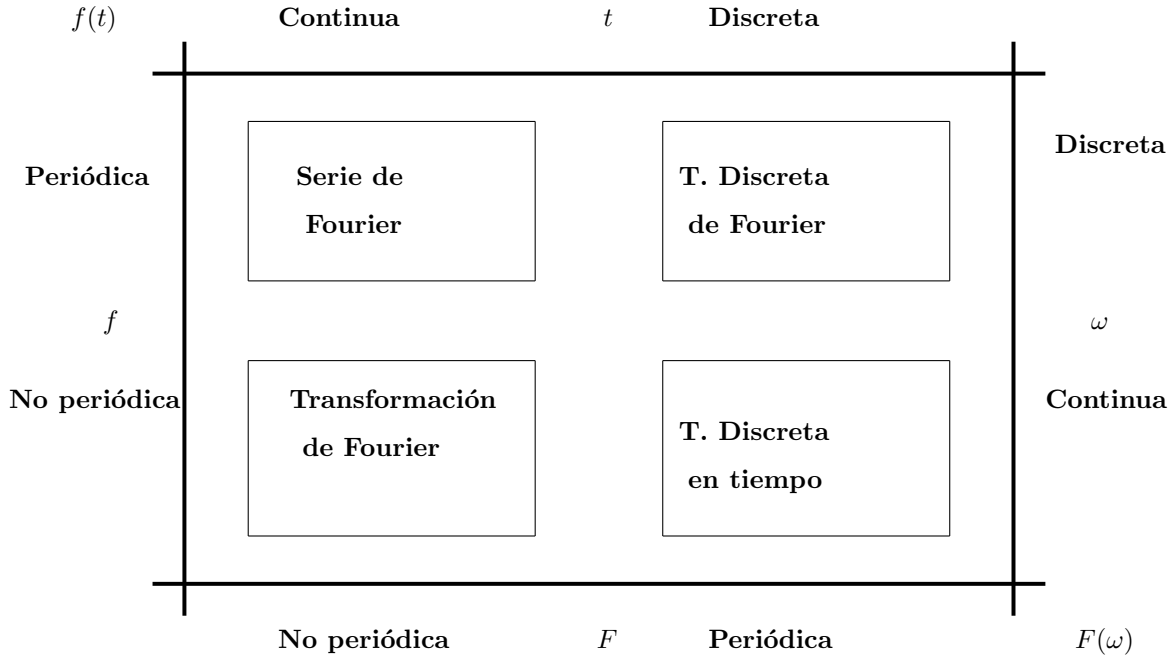
habiendo utilizado de nuevo la propiedad (ii) de la función δ : $j\omega\delta(\omega) = 0$.

El siguiente cuadro resume las transformadas de funciones generalizadas

$\delta(t)$	\longleftrightarrow	1	$u(t)$	\longleftrightarrow	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
$\delta(t - t_0)$	\longleftrightarrow	$e^{-j\omega t_0}$	$u(t - t_0)$	\longleftrightarrow	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}e^{-j\omega t_0}$
1	\longleftrightarrow	$2\pi\delta(\omega)$	$\cos \omega_0 t$	\longleftrightarrow	$\pi(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))$
$e^{j\omega_0 t}$	\longleftrightarrow	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$	$\text{sen } \omega_0 t$	\longleftrightarrow	$j\pi(\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0))$
$\bar{\delta}_T(t)$	\longleftrightarrow	$\omega_0 \bar{\delta}_{\omega_0}(\omega)$			

14. Las cuatro transformadas de Fourier

El diagrama adjunto sitúa las cuatro transformaciones de Fourier, según que las funciones f y F sean periódicas o no, y según que las variables t y ω sean continuas o discretas. Por que la variable sea continua se entiende que pueda tomar cualquier valor real, mientras que por que sea discreta se entiende que sólo pueda tomar valores que son múltiplos enteros de cierta cantidad. Así, para la serie de Fourier de una función periódica con periodo T , la variable $t \in \mathbb{R}$ era continua, mientras que ω era una variable discreta que sólo podía tomar los valores $\omega = \omega_k = k\omega_0 = k2\pi/T$, para $k \in \mathbb{Z}$.



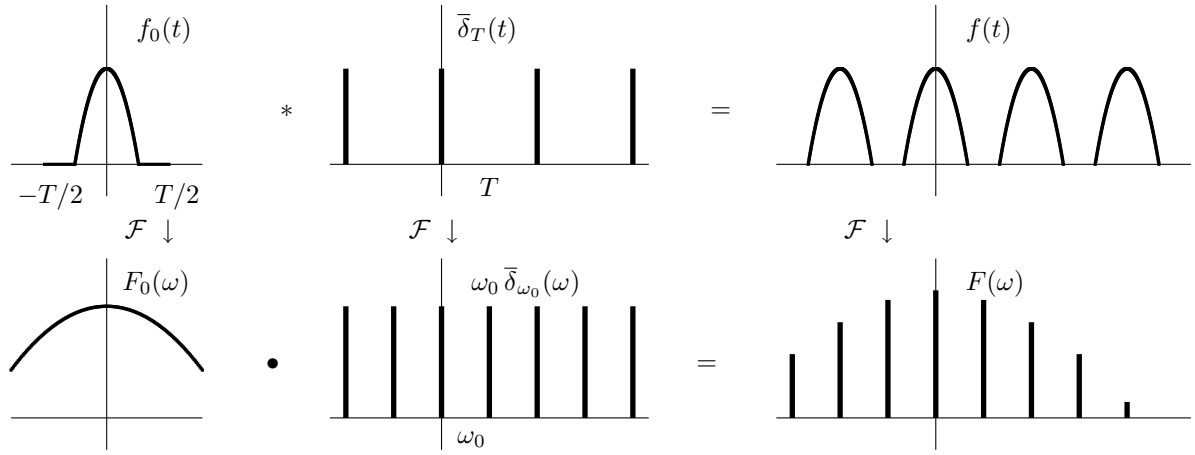
Es importante observar la coincidencia que se establece entre las dos posibilidades de t y de F , por una parte, y las de ω y f , por otra. Así, cuando la variable t es continua la función transformada F es no periódica, mientras que cuando t es discreta la función F es periódica. Y análogamente, cuando la variable ω es continua la función f es no periódica, y cuando ω es discreta f es periódica.

Ya hemos visto el desarrollo en serie de Fourier y acabamos de estudiar la transformación de Fourier en la que ambas funciones f y F eran no periódicas de variable continua. Pese a su importancia en las aplicaciones, no presentamos la *Transformada Discreta en el Tiempo* (o Transformada de Fourier de Señales Discretas) porque, desde un punto de vista matemático, es idéntica a la serie de Fourier intercambiando los papeles del “tiempo” y la “frecuencia”. Queda la última transformada, la transformada discreta de Fourier, que analizaremos brevemente en la siguiente sección.

Citemos además que, formalmente, es posible considerar unas transformaciones como caso límite de otras, traspasando así las barreras entre variable discreta y continua o entre función periódica y no periódica, como se ha hecho con la serie y la transformación de Fourier en la sección 9. Y que también es posible incluir todas las transformaciones en el marco funcional generalizado de la transformación de Fourier. Sin detallar el procedimiento, indiquemos que en este último caso se utiliza el resultado de la transformada de un tren de deltas (92), junto con el teorema de convolución y las propiedades (ii) y (iv) de la función δ para obtener el desarrollo en

serie de Fourier de una función periódica $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_0(t - kT)$ en la forma (ilustrada en la figura):

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_0(t - kT) = f_0(t) * \bar{\delta}_T(t) \longleftrightarrow F_0(\omega) \omega_0 \bar{\delta}_{\omega_0}(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \omega_0 F_0(k\omega_0) \delta(\omega - k\omega_0) = F(\omega)$$



Análogamente, la transformación discreta en tiempo de una función de variable discreta $f_k = f(kT)$ se expresa, en el contexto generalizado de la transformación de Fourier, como

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \delta(t - kT) = f(t) \bar{\delta}_T(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} \omega_0 F(\omega) * \bar{\delta}_{\omega_0}(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(\omega - \omega_0).$$

15. La transformada discreta de Fourier

Aunque la descripción precisa de muchos fenómenos se deba hacer con variables continuas, la necesidad de computar sus valores numéricamente obliga a trabajar con un número finito de datos y ello lleva a utilizar variables discretas. Aparece así la *Transformada Discreta de Fourier*, o simplemente *DFT*. Quizás la forma más sencilla de presentarla sea como una transformación de los valores de una secuencia o función de variable discreta, $\{f_n : n \in \mathbb{Z}\}$ periódica con periodo N , en los de otra secuencia, $\{F_k : k \in \mathbb{Z}\}$ con el mismo periodo N . Como consecuencia de la periodicidad, basta dar a n y k únicamente N valores consecutivos, por ejemplo entre 0 y $N - 1$, por lo que la conversión se puede realizar mediante las fórmulas

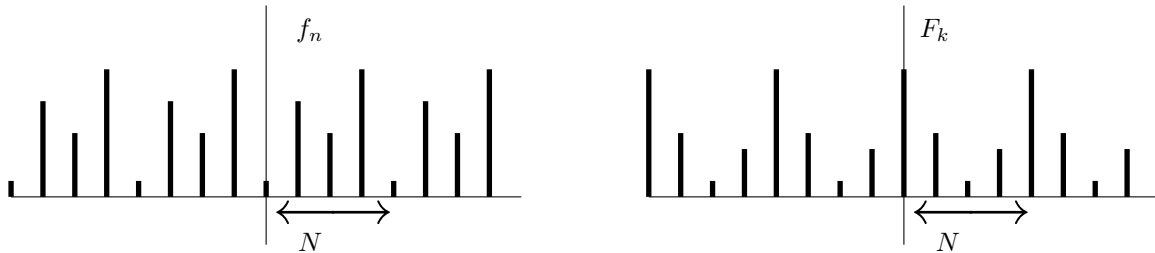
$$F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-j2\pi nk/N} \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (95)$$

$$f_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{j2\pi nk/N} \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (96)$$

En las aplicaciones el factor $1/N$ puede aparecer en una u otra de las dos fórmulas. Por otra parte, es habitual designar la raíz (compleja) N -sima de la unidad, $e^{j2\pi/N}$, por w_N y escribir entonces las fórmulas (95) y (96) en la forma

$$F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n w_N^{-nk} \quad f_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k w_N^{nk} \quad \begin{matrix} k = 0, 1, \dots, N-1 \\ n = 0, 1, \dots, N-1 \end{matrix}$$

La figura ilustra esta transformación para funciones con periodo $N = 4$.



Limitándonos a la secuencia de los N valores de un periodo, podemos expresar la transformación lineal (95) que permite pasar de los $\{f_n : n = 0, 1, \dots, N-1\}$ a los $\{F_k : k = 0, 1, \dots, N-1\}$ mediante una matriz cuadrada $N \times N$ con coeficientes $A_{kn} = e^{-j2\pi nk/N}$. Naturalmente, la transformación inversa (96) se realiza mediante la matriz inversa que tiene coeficientes $(A^{-1})_{nk} = \frac{1}{N} e^{j2\pi nk/N}$:

$$\begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ \dots \\ F_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{-j2\pi/N} & e^{-j4\pi/N} & \dots & e^{-j2\pi(N-1)/N} \\ 1 & e^{-j4\pi/N} & e^{-j8\pi/N} & \dots & e^{-j4\pi(N-1)/N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & e^{-j2\pi(N-1)/N} & e^{-j4\pi(N-1)/N} & \dots & e^{-j2\pi(N-1)(N-1)/N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_{N-1} \end{pmatrix} \quad (97)$$

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_{N-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{j2\pi/N} & e^{j4\pi/N} & \dots & e^{j2\pi(N-1)/N} \\ 1 & e^{j4\pi/N} & e^{j8\pi/N} & \dots & e^{j4\pi(N-1)/N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & e^{j2\pi(N-1)/N} & e^{j4\pi(N-1)/N} & \dots & e^{j2\pi(N-1)(N-1)/N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ \dots \\ F_{N-1} \end{pmatrix} \quad (98)$$

Ejemplo 15.1. Para $N = 4$, $w_4 = e^{j2\pi/4} = e^{j\pi/2} = j$ por lo que estas matrices son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{pmatrix}$$

y un par función-transformada está formado por las secuencias

$$\{1, 2, -1, 3\} \longleftrightarrow \{5, 2+j, -5, 2-j\}.$$

Ejercicio Comprobar que A^{-1} es la matriz inversa de A y que el par anterior es efectivamente un par función-transformada.

El uso masivo de la DFT en numerosas aplicaciones se debe, en buena parte, al desarrollo de los algoritmos conocidos como *Transformada rápida de Fourier*, ó FFT. Mientras que el cálculo de la DFT realizando el producto de matrices (97) o (98) requiere N^2 multiplicaciones (complejas), los algoritmos de la FFT (para $N = 2^n$) reducen la complejidad del cálculo a aproximadamente $\frac{1}{2}N \log_2 N$ multiplicaciones. Por ejemplo para $N = 2^{10} = 1024$ esto significa una reducción de 10^6 a $0,5 \cdot 10^4$ aproximadamente, es decir un cálculo 200 veces menor.

16. Ejercicios

16.1. Sucesiones y series

1. Calcular el límite de las sucesiones siguientes:

a)

$$\lim_n \frac{\sin n}{n}$$

b)

$$\lim_n \sqrt{n^2 + 3n + 2} - n$$

c)

$$\lim_n \left(\frac{n+a}{n-1} \right)^n$$

2. Estudiar si las sucesiones siguientes son crecientes o decrecientes (o ninguna de las dos):

- a) $a_n = \frac{1}{n!}$
 b) $b_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$
 c) Calcular $\lim_n b_n$

3. ¿Es cierto que $\lim x_n y_n = 0$ implica $\lim x_n = 0$ ó $\lim y_n = 0$? ¿Y el recíproco?

4. Calcular la suma de la serie

$$\sum_{n \geq 1} \frac{5}{3^n}$$

5. Estudiar el carácter de las siguientes series:

a)

$$\sum_{n \geq 1} (\ln n)^2$$

b)

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n^2 + 2n - 1}{n^5}$$

c)

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2\sqrt{n} - 1}$$

d)

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n}{n^2 + 1}$$

e)

$$\sum_{n \geq 1} \frac{n!}{n^n}$$

6. Estudiar, según los valores del parámetro $a > 0$, el carácter de las siguientes series:

a)

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(2a + 1)^n}{2^n n^2}$$

b)

$$\sum_{n \geq 1} \frac{a^n}{\sqrt{n}}$$

7. Determinar la convergencia de las siguientes series:

a)

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n!}$$

b)

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1} n}{2n - 1}$$

c)

$$\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\ln n}$$

8. Determinar si la convergencia de las siguientes series es absoluta o condicional:

a)

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}(n+2)}{n^2(n+1)}$$

b)

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\cos n\pi}{n+1}$$

9. Un caracol sube por una pared de 1.01 metros de altura. El primer día avanza 1m, pero durante la noche resbala $\frac{1}{3}$ m; al día siguiente avanza, ya más cansado, $\frac{1}{9}$ m, pero durante la noche resbala $\frac{1}{27}$ m y así sucesivamente. ¿Llegará el caracol a lo alto de la pared?.
10. Un alpinista quiere escalar una montaña de 1000m de altura. El primer día sube 100m y se detiene a esta altura para dormir. Pero la montaña es mágica y mientras el alpinista duerme, la montaña crece de manera uniforme hasta alcanzar una altura de 2000m, así que el alpinista se encuentra al despertar a una altura de 200m. Al día siguiente sube 100m más y, mientras duerme, de nuevo la montaña crece, hasta una altura de 3000m, y así sucesivamente. ¿Llegará el alpinista a la cima?.

16.2. Soluciones

1. a) 0
b) $3/2$
c) e^{a+1}
2. a) Monótona decreciente
b) Monótona creciente
c) $\lim b_n = 2$
3. No. Tampoco.
4. $5/2$
5. a) Divergente
b) Convergente
c) Divergente
d) Divergente
e) Convergente
6. a) Convergente para $0 < a \leq \frac{1}{2}$
b) Convergente para $0 < a < 1$
7. a) Absolutamente convergente
b) Divergente
c) Condicionalmente convergente
8. a) Absolutamente convergente
b) Condicionalmente convergente
9. No
10. Sí

16.3. Series de Fourier

1. Dibujar las gráficas de las funciones siguientes y calcular las series de Fourier correspondientes:

a)

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 < t < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq t < 1 \end{cases}$$

b)

$$f(t) = |t|, \quad t \in (-1, 1)$$

c)

$$f(t) = t, \quad t \in (-\pi, \pi)$$

d)

$$f(t) = t^2, \quad t \in [-\pi, \pi]$$

2. Calcular el desarrollo de Fourier de $f(t) = e^t$ en $(-\pi, \pi)$ y utilizar el resultado para calcular

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 + 1}$$

3. Determinar un polinomio de tercer grado definido en $(-\pi, \pi)$ sabiendo que admite el siguiente desarrollo en serie de Fourier:

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \sin nt}{n^3}$$

4. Desarrollar en serie de Fourier

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon} & \text{si } |t| < \epsilon \\ 0 & \text{si } \epsilon < |t| < \pi \end{cases}$$

y estudiar el comportamiento de la serie cuando $\epsilon \rightarrow 0$.

5. Desarrollar en serie de Fourier las funciones siguientes:

a)

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{si } 0 \leq t \leq \pi \\ 0 & \text{si } -\pi \leq t < 0 \end{cases}$$

(onda semirectificada)

b)

$$f(t) = |\sin t|$$

(onda rectificadora)

c)

$$f(t) = \sin t,$$

en serie de cosenos en el intervalo $[0, \pi]$.

6. Demostrar que

$$t \cos t = -\frac{1}{2} \sin t + 2 \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n n \sin nt}{n^2 - 1}, \quad -\pi < t < \pi$$

7. Una función $f(t)$ definida sobre \mathbb{R} se dice que es *antiperiódica* si $f(t+T) = -f(t) \quad \forall t$. Probar:

a) Una función antiperiódica es periódica de período $2T$.

b) La serie de Fourier asociada es de la forma:

$$\sum_{r \geq 1} \left\{ a_{2r-1} \cos \frac{(2r-1)\pi t}{T} + b_{2r-1} \sin \frac{(2r-1)\pi t}{T} \right\}$$

c) Hallar la serie de Fourier de la función

$$\begin{cases} f(t) = t & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ f(t+1) = -f(t) \end{cases}$$

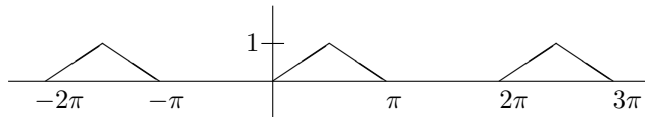
8. a) Probar que si una función $f(t)$, definida sobre $(-\pi, \pi)$, verifica

$$\begin{cases} f(t) = f(\pi - t) & \text{si } t > 0 \\ f(t) = f(-\pi - t) & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

entonces su desarrollo en serie de Fourier es de la forma

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k \geq 1} a_{2k} \cos 2kt + \sum_{k \geq 1} b_{2k-1} \sin(2k-1)t$$

b) Aplicar (a) para calcular la serie de Fourier trigonométrica de la onda periódica dada por la figura:



9. Utilizando el resultado del problema 1 (b), demostrar que

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

10. Desarrollar en serie de senos y en serie de cosenos la función siguiente:

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 < t < 1 \\ 2-t & \text{si } 1 < t < 2 \end{cases}$$

11. Sea $f(t) = 1+t$ para $0 \leq t \leq 1$. Desarrollar $f(t)$ en serie de senos y en serie de cosenos en el intervalo $(0, 1)$. Representar gráficamente la suma en cada caso.

12. Hallar unos números reales c_1, c_2, c_3 tales que

$$\int_{-\pi}^{\pi} [t - (c_1 \sin t + c_2 \sin 2t + c_3 \sin 3t)]^2 dt$$

sea mínimo. Calcular el error cuadrático cometido en la aproximación de t por $c_1 \sin t + c_2 \sin 2t + c_3 \sin 3t$, donde c_1, c_2, c_3 son los calculados anteriormente.

13. Determinar el polinomio trigonométrico de primer orden $p(t) = a + b \cos t + c \sin t$ que mejor aproxima la función $f(t) = e^t$ en media cuadrática, sobre el intervalo $(-\pi, \pi)$.

14. Utilizando la identidad de Parseval, probar las siguientes igualdades:

$$a) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad (\text{Tomar la función } f(t) = t)$$

$$b) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \quad (\text{Tomar la función } f(t) = t^2)$$

15. Desarrollar en serie compleja de Fourier:

a)

$$f(t) = \sin t \quad -\infty < t < \infty$$

b)

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| \leq \pi/2 \\ 0 & \text{si } \pi/2 < |t| < \pi \end{cases}$$

16. Demostrar que el desarrollo de la función $f(t) = \cos \lambda t$ ($\lambda \notin \mathbb{Z}$), para $t \in [-\pi, \pi]$ en serie exponencial compleja viene dado por

$$\frac{\sin \lambda \pi}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k \frac{\lambda}{\lambda^2 - k^2} e^{jkt}$$

Deducir que

$$\pi \cot \lambda \pi = \frac{1}{\lambda} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2\lambda}{\lambda^2 - k^2}$$

17. a) Hallar el desarrollo en serie de Fourier compleja de la función $f(t) = e^t$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

b) Expresar la serie anterior en forma trigonométrica.

c) Establecer la convergencia de la serie

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2 + 1}$$

y calcular su suma.

d) Dibujar el espectro de amplitud de la función del apartado (a) para las frecuencias $0, \pm\omega_0, \pm2\omega_0, \pm3\omega_0$.
 $(\frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi} \simeq 85)$

16.4. Soluciones

1. a) $\frac{4}{\pi} \sum_{n \geq 0} \frac{\sin(2n+1)\pi t}{2n+1}$
- b) $\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n \geq 1} \frac{\cos(2n-1)\pi t}{(2n-1)^2}$
- c) $-2 \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} \sin nt$
- d) $\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{\cos nt}{n^2}$

$$2. \frac{\sinh \pi}{\pi} \left(1 + 2 \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k}{1 + k^2} (\cos kt - k \sin kt) \right)$$

$$3. P(t) = \frac{1}{12} t^3 - \frac{\pi^2}{12} t$$

$$4. \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\epsilon}{n\epsilon} \cos nt \right).$$

Cuando ϵ tiende a cero se obtiene:

$$\frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos nt \right)$$

5. a) $\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \cos t - \frac{2}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{\cos 2nt}{4n^2 - 1}$

b) $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{\cos 2nt}{4n^2 - 1}$

c) Al tomar la extensión periódica par obtenemos la misma función que en el apartado anterior; por tanto, el desarrollo en cosenos es el que hemos obtenido en el apartado (b).

6.

7. c) $\frac{2}{\pi} \sum_{r \geq 1} \frac{-2 \cos(2r-1)\pi t}{(2r-1)^2 \pi} + \frac{\sin(2r-1)\pi t}{2r-1}$

8. b) $\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2} \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^k - 1}{k^2} \cos 2kt + \frac{4(-1)^{k+1}}{(2k-1)^2} \sin(2k-1)t$

9.

10. Desarrollo en cosenos: $\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n \geq 1} \frac{\cos(2n-1)\pi t}{(2n-1)^2}$

Desarrollo en senos: $\frac{8}{\pi^2} \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^2} \sin \frac{(2k-1)\pi t}{2}$

11. Desarrollo en cosenos: $\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{n \geq 1} \frac{\cos(2n-1)\pi t}{(2n-1)^2}$

Desarrollo en senos: $\frac{2}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{[1 + 2(-1)^{n+1}]}{n} \sin \pi n t$

12.

$$c_1 = 2, c_2 = -1, c_3 = \frac{2}{3}$$

El error es igual a $\frac{2\pi^3}{3} - \frac{49\pi}{9}$

13. $a = \frac{2 \sinh \pi}{\pi}, \quad b = \frac{-\sinh \pi}{\pi}, \quad c = \frac{\sinh \pi}{\pi}$

14.

15. a) $-\frac{j}{2} e^{jt} + \frac{j}{2} e^{-jt}$

b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n-1} e^{j(2n-1)t}$

16.

17. a) $\frac{e^{2\pi} - 1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1+jn}{n^2+1} e^{jnt}$

b) $(e^{2\pi} - 1) \left(\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1} (\cos nt - n \sin nt) \right)$

c) $\frac{\pi}{2} \frac{e^{2\pi} + 1}{e^{2\pi} - 1} - \frac{1}{2}$

16.5. Aplicación a las EDP

1. Resolver el problema del flujo de calor en una barra de longitud L , cuyos extremos se mantienen a temperatura constante e igual a 0, para las siguientes distribuciones iniciales de temperatura:

a)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

b)

$$f(x) = 3 \sin x - 5 \sin(2x) + 2 \sin(3x)$$

2. Resolver el problema de las vibraciones de una cuerda elástica de longitud en reposo π , sujeta por sus extremos, para las siguientes configuraciones y velocidades iniciales:

a)

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \text{si } \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}, \quad g(x) = 0$$

b)

$$f(x) = g(x) = x(\pi - x)$$

3. Resolver la ecuación de Laplace en el rectángulo $]0, \pi[\times]0, \pi[$ para las siguientes funciones $u(x, \pi) = f(x)$, $x \in]0, \pi[$:

a)

$$f(x) = 1$$

b)

$$f(x) = x$$

c)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

d)

$$f(x) = x^2$$

16.6. Soluciones

1. a)

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \left(1 - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right) \sin(nx) e^{-\kappa n^2 t}$$

b)

$$u(x, t) = 2e^{-\kappa t} \sin x - 5e^{-4\kappa t} \sin(2x) + 2e^{-9\kappa t} \sin(3x)$$

2. a)

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cos(nat) \sin(nx)$$

b)

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^3\pi} (1 - (-1)^n) \left(\cos(nat) + \frac{1}{an} \sin(nat) \right) \sin(nx)$$

3. a)

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi}$$

b)

$$u(x, y) = \frac{y}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2 \pi \sinh(n\pi)} \cos(nx) \sinh(ny)$$

c)

$$u(x, y) = \frac{y}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\pi \sinh(n\pi)} \cos(nx) \sinh(ny)$$

d)

$$u(x, y) = \frac{\pi y}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2 \sinh(n\pi)} \cos(nx) \sinh(ny)$$

16.7. Transformada de Fourier

1. Calcular la transformada de Fourier de las funciones siguientes:

a)

$$f(t) = e^{-|t|}$$

b)

$$f(t) = \begin{cases} je^{jat} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \quad (a \in \mathbb{C}, \operatorname{Im}(a) > 0)$$

2. Calcular la antitransformada de Fourier de la función $F(\omega)$ (hacerlo directamente y también utilizando $F(\omega) = p_{2\pi}(\omega)e^{j\omega}$).

$$F(\omega) = \begin{cases} e^{j\omega} & \text{si } |\omega| \leq 2\pi \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

3. Sabiendo que $\frac{1}{a^2 + t^2} \leftrightarrow -\frac{\pi}{a} e^{a|\omega|}$, $\operatorname{Re}\{a\} < 0$, calcular la antitransformada de la función $2e^{-|\omega|} + 3e^{-2|\omega|}$.

4. Sabiendo que $\frac{t}{(a^2 + t^2)^2} \leftrightarrow \frac{j\omega\pi}{2a} e^{a|\omega|}$, $\operatorname{Re}\{a\} < 0$, calcular la antitransformada de la función $\frac{\omega}{(1 + \omega^2)^2}$.

5. Probar que si $f(t)$ es solución de la ecuación diferencial $x''(t) - t^2 x(t) = \lambda x(t)$, entonces su transformada de Fourier $F(\omega)$ también es solución.

6. Calcular la transformada de Fourier de $f(t) = e^{a|t|}$, $\operatorname{Re}\{a\} < 0$.

Deducir

a) la antitransformada de Fourier de $e^{a|\omega|}$, $\operatorname{Re}\{a\} < 0$,

b) la transformada de Fourier de $\frac{1}{a^2 + t^2}$, $\operatorname{Re}\{a\} < 0$,

c) la transformada de Fourier de $\frac{t}{(a^2 + t^2)^2}$, $\operatorname{Re}\{a\} < 0$,

d) la antitransformada de Fourier de $\frac{\omega}{(a^2 + \omega^2)^2}$, $\operatorname{Re}\{a\} < 0$.

7. Sea $f(t) = t$ si $0 < t < 1$ y $f(t) = 0$ en otro caso.

a) Calcular la transformada de Fourier $F(\omega)$ (directamente o aplicando propiedades).

b) Sea $q_1(t)$ la función triangular: $q_1(t) = t + 1$ si $-1 < t < 0$, $q_1(t) = 1 - t$ si $0 < t < 1$ y $q_1(t) = 0$ en otro caso. Utilizando que $q_1(t) = f(t + 1) + f(1 - t)$ deducir su transformada de Fourier $Q_1(\omega)$.

c) Dar una función tal que su transformada de Fourier sea $j\omega Q_1(\omega)$.

8. Calcular el valor de la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin bt \cos tx}{t} dt.$$

Indicación: utilizar la transformada de Fourier del impulso rectangular $p_b(t)$.

Deducir

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} = \frac{\pi}{2}.$$

9. Probar:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 at}{t^2} dt = a\pi$$

Indicación: aplicar la fórmula de Parseval al impulso rectangular $p_a(t)$.

10. Calcular la transformada de Fourier de la función:

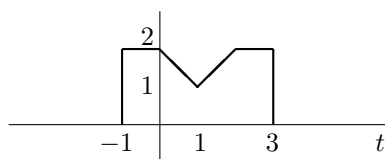
$$f(t) = \begin{cases} 1 - t^2 & \text{si } |t| < 1 \\ 0 & \text{si } |t| > 1 \end{cases}$$

Aplicar el resultado anterior al cálculo de la integral siguiente:

$$\int_0^{+\infty} \left[\frac{x \cos x - \sin x}{x^3} \right] \cos \frac{x}{2} dx.$$

11. Sea $f(t)$ una función que vale 0 fuera del intervalo $[a, b]$ y $g(t)$ una función que vale 0 fuera del intervalo $[c, d]$. Hallar los valores e, f tales que $(f * g)(t)$ vale 0 fuera del intervalo $[e, f]$. (Deducirlos mediante la convolución gráfica.)

12. Sea $F(\omega)$ la transformada de Fourier de la señal $f(t)$ de la figura.



Resolver los siguientes apartados **sin calcular** $F(\omega)$.

- a) Calcular el argumento de $F(\omega)$.

- b) Calcular $F(0)$.

- c) Calcular $\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) d\omega$.

- d) Calcular $\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \frac{2 \sin \omega}{\omega} e^{j2\omega} d\omega$.

- e) Calcular $\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$.

- f) Dibujar la gráfica de la transformada inversa de la parte real de $F(\omega)$.

13. Sea $f(t) = e^{-t}$ si $0 \leq t \leq 1$ y $f(t) = 0$ en otro caso.

- a) Calcular la transformada de Fourier de $f(t)$.

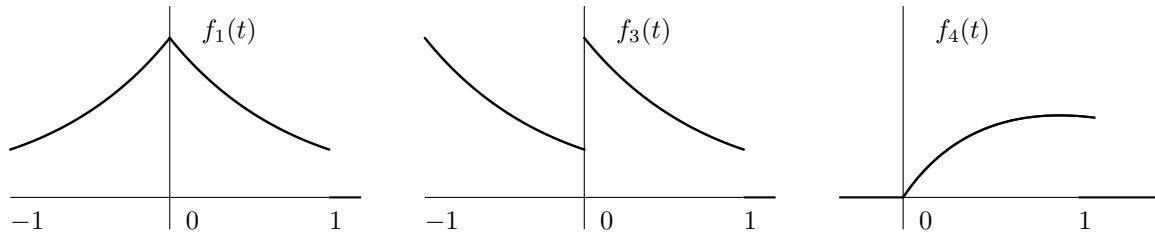
Resolver los apartados siguientes mediante la aplicación de las propiedades de la transformada de Fourier. (notación: $f_i(t) \leftrightarrow F_i(\omega)$)

- b) Calcular $F_1(\omega)$.

- c) Sea $F_2(\omega) = e^{-\omega} p_{1/2}(\omega - \frac{1}{2}) + e^{\omega} p_{1/2}(\omega + \frac{1}{2})$. Calcular $f_2(t)$.

- d) Calcular $F_3(\omega)$.

- e) Calcular $F_4(\omega)$.



donde $f_1(t) = \begin{cases} e^t & \text{si } -1 \leq t \leq 0 \\ e^{-t} & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$ $f_3(t) = \begin{cases} e^{-t+1} & \text{si } -1 \leq t \leq 0 \\ e^{-t} & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$
 $f_4(t) = te^{-t}$ si $0 \leq t \leq 1$ y $f_i(t) = 0$ en otro caso.

14. Sea $F(\omega) = R(\omega) + jI(\omega)$ la transformada de Fourier de $f(t)$.

- a) Relacionar la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) d\omega$ con $f(0)$.
b) Relacionar la integral $\int_{-\infty}^{+\infty} \omega F(\omega) d\omega$ con $f'(0)$.
c) Razonar, para cada señal de la figura, cuáles de las propiedades siguientes se cumplen:
1) $R(\omega) = 0$ 2) $I(\omega) = 0$
3) Existe algún $\alpha \in R$ tal que $e^{j\alpha\omega} F(\omega)$ es real.
4) $\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) d\omega = 0$ 5) $\int_{-\infty}^{+\infty} \omega F(\omega) d\omega = 0$

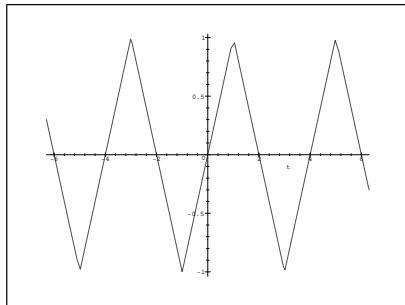


Figura 1

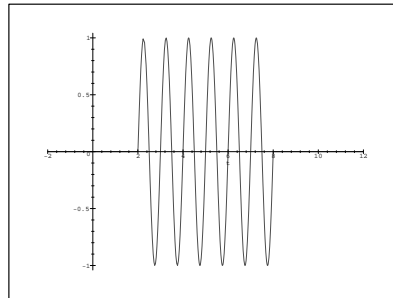


Figura 2

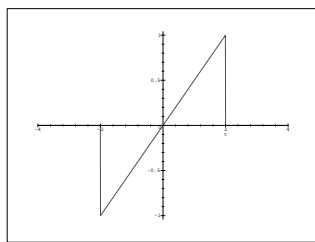


Figura 3

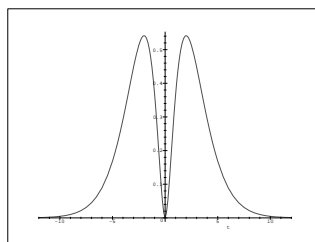


Figura 4: $x(t) = t^2 e^{-|t|}$

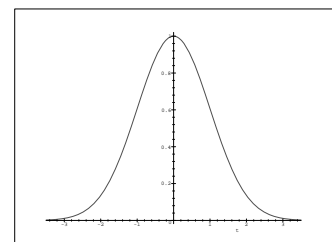


Figura 5: $x(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$

15. Calcular la transformada de Fourier de

$$f(t) = \cos \frac{7t}{2} \cos \frac{3t}{2}$$

16. Representar gráficamente:

- a) La función $f(t) = 2p_{1/2}(t - 1/2) + p_1(t - 2)$.

- b) $f(t) * (\delta(t) + \delta(t - 3))$.
 c) $p_1(t) * f(t)$ (utilizar la convolución gráfica)

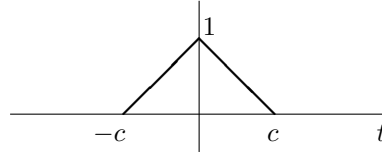
17. Hallar la antitransformada de Fourier de la función escalón unidad $U(\omega)$.

18. Calcular la transformada de Fourier de $u(t) \cos \omega_0 t$:

- a) por la propiedad de modulación,
 b) utilizando el teorema de convolución en frecuencia.

19. Sea $q_c(t)$ la función de la figura.

Sean $f(t) = q_c(t + a) + q_c(t - a)$,
 $g(t) = k(\delta(t + a) + \delta(t - a))$, $a > c > 0$.



- a) Representar gráficamente $f(t)$, $g(t)$, $f(t) * \delta(t - a)$.
 b) Calcular y representar gráficamente $f(t) * g(t)$.
 c) Sabiendo que

$$\frac{c}{2\pi} \text{sinc}^2\left(\frac{ct}{2\pi}\right) \leftrightarrow q_c(\omega),$$

calcular la transformada de Fourier de $f(t) * g(t)$.

16.8. Soluciones

1. (a) $F(\omega) = \frac{2}{\omega^2 + 1}$ (b) $F(\omega) = \frac{1}{\omega - a}$
 2. $f(t) = \frac{\sin 2\pi(1+t)}{\pi(1+t)}$
 3. $f(t) = \frac{2}{\pi(1+t^2)} + \frac{6}{\pi(4+t^2)}$
 4. $f(t) = \frac{jt}{4} e^{-|t|}$
 5.
 6. $\frac{-2a}{a^2 + \omega^2}$
 (a) $\frac{-a}{\pi(a^2 + t^2)}$ (b) $-\frac{\pi}{a} e^{a|\omega|}$ (c) $\frac{j\omega\pi}{2a} e^{a|\omega|}$ (d) $-\frac{jt}{4a} e^{a|t|}$
 7. a) $\frac{e^{-j\omega} - 1}{\omega^2} - \frac{e^{-j\omega}}{j\omega}$
 b) $\frac{2 - e^{j\omega} - e^{-j\omega}}{\omega^2}$
 c) $p_{1/2}(t + 1/2) - p_{1/2}(t - 1/2)$

8.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin bt \cos tx}{t} dt = \pi p_b(x).$$

9.

10. $F(\omega) = 2F_c(\omega) = \frac{4}{\omega^3} [\sin \omega - \omega \cos \omega]$

$$\int_0^{+\infty} \left[\frac{x \cos x - \sin x}{x^3} \right] \cos \frac{x}{2} dx = -\frac{3\pi}{16}$$

11. $e = a + c, f = b + d.$

12. a) $-\omega$ o $\pi - \omega$ b) 7 c) 4π d) 7π e) $\frac{76\pi}{3}$

13. a) $\frac{1 - e^{-(1+j\omega)}}{1 + j\omega}$

b) $\frac{1 - e^{-(1+j\omega)}}{1 + j\omega} + \frac{1 - e^{-(1-j\omega)}}{1 - j\omega}$

También: $2 \operatorname{Re} \left(\frac{1 - e^{-(1+j\omega)}}{1 + j\omega} \right) = \frac{2(1 + e^{-1}(\omega \sin \omega - \cos \omega))}{1 + \omega^2}$

c) $\frac{1}{2\pi} \left(\frac{1 - e^{-(1+jt)}}{1 + jt} + \frac{1 - e^{-(1-jt)}}{1 - jt} \right) = \frac{(1 + e^{-1}(t \sin t - \cos t))}{\pi(1 + t^2)}$

d) $(1 + e^{j\omega}) \frac{1 - e^{-(1+j\omega)}}{1 + j\omega}$

e) $j \frac{(1 + j\omega)je^{-(1+j\omega)} - j(1 - e^{-(1+j\omega)})}{(1 + j\omega)^2}$

14. a) $2\pi f(0)$ b) $-2\pi j f'(0)$

Fig. Propiedades que verifica

	1	1), 3), 4)
	2	4), 5)
c)	3	1), 4)
	4	2), 3), 4), 5)
	5	2), 3), 5)

15. A partir de $f(t) = \frac{1}{2}(\cos 5t + \cos 2t)$ se tiene

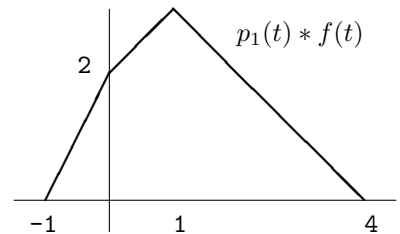
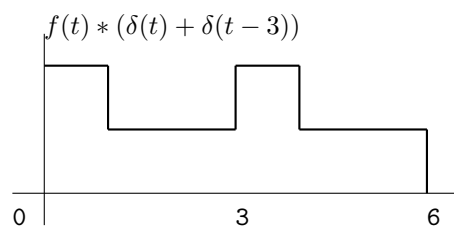
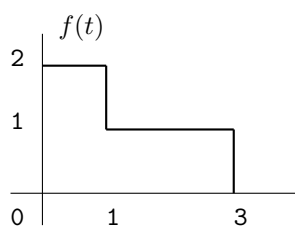
$$F(\omega) = \frac{\pi}{2}(\delta(\omega + 5) + \delta(\omega + 2) + \delta(\omega - 2) + \delta(\omega - 5)).$$

También, utilizando la propiedad de modulación dos veces

$$1 \longrightarrow 2\pi\delta(\omega) \implies \cos \frac{7t}{2} \longrightarrow \pi[\delta(\omega + \frac{7}{2}) + \delta(\omega - \frac{7}{2})]$$

$$\implies \cos \frac{7t}{2} \cos \frac{3t}{2} \longrightarrow \frac{\pi}{2}[\delta(\omega + 5) + \delta(\omega + 2) + \delta(\omega - 2) + \delta(\omega - 5)]$$

16. (a), (b) y (c)



17. $f(t) = \frac{\delta(t)}{2} + \frac{j}{2\pi t}$

$$18. \frac{\pi}{2}(\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)) + \frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$19. \text{ b) } f(t) * g(t) = k(q_c(t + 2a) + 2q_c(t) + q_c(t - 2a))$$

$$\text{ c) } f(t) * g(t) \leftrightarrow k \left(c \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{c\omega}{2\pi} \right) (e^{-2aj\omega} + 2 + e^{2aj\omega}) \right) = 4kc \operatorname{sinc}^2 \left(\frac{c\omega}{2\pi} \right) \cos^2 a\omega$$