

# Tema 7

## Series de Fourier

Nuestro principal objetivo es introducir las series de Fourier. Éstas surgieron históricamente al resolver por el método de separación de variables un problema de contorno de ecuaciones en derivadas parciales.

Cuando estas fórmulas fueron propuestas por Daniel Bernouilli en 1.753, muchos matemáticos pensaron que era imposible expresar una función  $f(x)$  cualquiera como suma de senos y cosenos. Fue un ingeniero, Joseph Fourier, el que se encargó de recopilar datos para convencer al mundo científico de tal posibilidad.

### 7.1 Series de Fourier

#### Definición 7.1 (Serie de Fourier)

*Se llama serie de Fourier de una función  $f(x)$  en el intervalo  $[-\pi, \pi]$  a:*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) \quad (*)$$

*A los coeficientes  $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_n$  se les llama **coeficientes de Fourier** de  $f(x)$  en  $[-\pi, \pi]$ .*

Debido a que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \neq 0 & \text{si } n = m \end{cases} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx = 0 \quad \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \, dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq m \\ \neq 0 & \text{si } n = m \end{cases} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \, dx = 0$$

e integrando término a término en la igualdad (\*) obtenemos:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x \, dx = a_n \pi \Rightarrow \boxed{a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = \frac{a_0}{2} 2\pi \Rightarrow \boxed{a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \, dx = b_n \pi \Rightarrow \boxed{b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx}$$

Las anteriores propiedades de las funciones  $\sin nx, \cos mx$  se pueden resumir en que el sistema

$$\{1, \sin x, \sin 2x, \dots, \cos x, \cos 2x, \dots\}$$

es un **sistema ortogonal** de funciones respecto del producto escalar

$(f(x), g(x)) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) \, dx$  y la serie de Fourier no es mas que la expresión de un vector  $f(x)$  como combinación lineal de los vectores de la anterior base ortogonal.

**Definición 7.2** Se llama **serie de Fourier** de una función  $f(x)$  en el intervalo  $[-L, L]$  a:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi}{L}x + b_n \sin \frac{n\pi}{L}x \right)$$

$$\text{donde} \quad a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \, dx \quad a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L}x \, dx$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L}x \, dx$$

Este hecho se basa en que el sistema de vectores

$$\left\{ 1, \sin \frac{\pi x}{L}, \sin \frac{2\pi x}{L}, \dots, \cos \frac{\pi x}{L}, \cos \frac{2\pi x}{L}, \dots \right\}$$

es un sistema ortogonal de funciones respecto del producto escalar

$$(f(x), g(x)) = \int_{-L}^L f(x)g(x) \, dx$$

Análogamente se puede definir la serie de Fourier de una función  $f(x)$  definida en un intervalo  $[a, b]$  haciendo una traslación del punto medio  $\frac{a+b}{2}$  al origen.

$$\text{Tomando } L = b - \frac{a+b}{2} = \frac{b-a}{2} \quad -L = a - \frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2}$$

**Definición 7.3** Se llama **serie de Fourier** de una función  $f(x)$  en el intervalo  $[a, b]$  a

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi}{b-a} x + b_n \sin \frac{n\pi}{b-a} x \right)$$

$$\text{donde} \quad a_0 = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) dx \quad a_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos \frac{2n\pi}{b-a} x dx$$

$$b_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sin \frac{2n\pi}{b-a} x dx$$

Las series anteriores también se podrían haber escrito de la forma:

$$f(x) \sim C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t - \theta_n)$$

$$\text{donde} \quad C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \cos \theta_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$$

$$\sin \theta_n = \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \quad \theta_n = \arctang \frac{b_n}{a_n}$$

siendo  $\omega_0 = 1, \frac{\pi}{L}, \frac{2\pi}{b-a}$  según hayamos utilizado una de las tres fórmulas anteriores.

La componente sinusoidal de frecuencia  $\omega_n = n\omega_0$  se denomina la *enésima armónica* de la función periódica. La primera armónica se conoce comunmente con el nombre de *fundamental* porque tiene el mismo periodo que la función y  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$  se conoce con el nombre de *frecuencia angular fundamental*. Los coeficientes  $C_n$  y los ángulos  $\theta_n$  se conocen como *amplitudes armónicas y ángulos de fase*, respectivamente. En Música, a la primera armónica, segunda armónica, etc. se le suele llamar *fundamental, primer tono, segundo tono, etc.*

Quedan muchas cuestiones por resolver:

- ¿Qué debe cumplir  $f(x)$  para que su serie de Fourier converja?
- Si converge, ¿lo hace a  $f(x)$ ?
- ¿Es posible integrar término a término?. ¿Y derivar?

Estas preguntas las responderemos con los siguientes teoremas.

### 7.1.1 Convergencia de las series de Fourier

#### Teorema 7.1 (Teorema de convergencia puntual para series de Fourier)

Si  $f(x)$  y  $f'(x)$  son continuas a trozos en  $[-L, L]$ , entonces  $\forall x \in (-L, L)$  se verifica:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \right) = \frac{1}{2} [f(x^+) + f(x^-)]$$

Para  $x = \pm L$  la serie de Fourier converge a  $\frac{1}{2} [f(-L^+) + f(L^-)]$ .

#### Teorema 7.2 (Teorema de convergencia uniforme de series de Fourier)

Sea  $f(x)$  una función continua en  $(-\infty, \infty)$  y con periodo  $2L$ . Si  $f'(x)$  es continua a trozos en  $[-L, L]$ , entonces la serie de Fourier de  $f(x)$  converge uniformemente a  $f(x)$  en  $[-L, L]$  y por consiguiente en cualquier intervalo.

### 7.1.2 Diferenciación de series de Fourier

**Teorema 7.3** Sea  $f(x)$  una función continua en  $(-\infty, \infty)$  y con periodo  $2L$ . Sean  $f'(x)$ ,  $f''(x)$  continuas por segmentos en  $[-L, L]$ . Entonces la serie de Fourier de  $f'(x)$  se puede obtener de la serie de Fourier de  $f(x)$  mediante diferenciación término a término. En particular, si

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \right)$$

entonces

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{L} \left( -a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x + b_n \cos \frac{n\pi}{L} x \right)$$

### 7.1.3 Integración de series de Fourier

**Teorema 7.4** Sea  $f(x)$  continua a trozos en  $[-L, L]$  con serie de Fourier

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} x \right)$$

entonces  $\forall x \in [-L, L]$  se verifica:

$$\int_{-L}^x f(t) dt = \int_{-L}^x \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-L}^x \left( a_n \cos \frac{n\pi}{L} t + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{L} t \right) dt$$

## 7.2 Fórmula de Parseval

Los tres resultados teóricos más importantes para el manejo de las series de Fourier son: el *teorema de convergencia*, el *teorema de unicidad*, según el cual todo desarrollo en serie trigonométrica, de una función, es su desarrollo de Fourier, y la *fórmula de Parseval*.

### Teorema 7.5 (Fórmula de Parseval)

Sea  $f$  una función continua a trozos en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ . Sean  $a_0$ ,  $a_n$  y  $b_n$  los coeficientes del desarrollo de Fourier de  $f$ . Entonces se verifica:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 dx = \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

**Demostración** Aunque esta fórmula es válida para todas las funciones continuas a trozos, nos limitaremos, por comodidad, a probarla en el caso en que la serie de Fourier converge uniformemente a  $f$  en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ .

$$\text{Partiendo de la relación: } f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad -\pi < x < \pi$$

uniformemente. Multiplicando por  $f(x)$  se obtiene:

$$[f(x)]^2 = \frac{a_0}{2} f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n f(x) \cos nx + b_n f(x) \sin nx) \quad -\pi < x < \pi$$

uniformemente. Por tanto, al integrar término a término, se obtiene:

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 dx = \frac{1}{2} a_0^2 \pi + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 \pi + b_n^2 \pi)$$

de donde, dividiendo por  $\pi$ , obtenemos el resultado deseado.

## 7.3 Funciones pares e impares

### Definición 7.4 (Función par, función impar)

Decimos que una función  $f(x)$  es par si  $f(-x) = f(x)$ .

Decimos que una función  $f(x)$  es impar si  $f(-x) = -f(x)$ .

## Propiedades

- El producto de dos funciones pares es par.
- El producto de dos funciones impares es par.
- El producto de una función par por una impar es impar.
- Si  $f(x)$  es par  $\Rightarrow \int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$
- Si  $f(x)$  es impar  $\Rightarrow \int_{-a}^a f(x) dx = 0$

## Desarrollo en serie de Fourier de una función par

Sea  $f(x)$  una función par. Vamos a calcularle su serie de Fourier en el intervalo  $[-L, L]$ .

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx = [\text{por ser } f \text{ par}] = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) dx$$

$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx$  por ser  $f(x)$  y  $\cos x$  funciones pares con lo que su producto es también una función par.

$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx = 0$  por ser el producto de una función par ( $f(x)$ ) por una impar ( $\sin x$ ) una función impar.

Luego

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{L} x$$

Es decir, la serie de Fourier de una función par en el intervalo  $[-L, L]$  es una serie en la que sólo aparecen cosenos.

## Desarrollo en serie de Fourier de una función impar

Haciendo cálculos análogos se obtiene  $a_0 = a_n = 0$

Es decir, la serie de Fourier de una función impar en el intervalo  $[-L, L]$  es una serie en la que sólo aparecen senos.

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi}{L} x$$

## 7.4 Desarrollos para funciones definidas en medio intervalo

Supongamos que tenemos una función definida en el intervalo  $[0, L]$ . Para hallar su desarrollo en serie de Fourier podemos optar por definirla en el intervalo  $[-L, 0]$  de las siguientes tres formas y obtener distintos desarrollos de Fourier.

### Caso I

Extendemos  $f(x)$  al intervalo  $[-L, 0]$  de forma que obtenga una función par.

Obtenemos así un desarrollo en serie de cosenos.

### Caso II

Extendemos  $f(x)$  al intervalo  $[-L, 0]$  de forma que obtenga una función impar.

Obtenemos así un desarrollo en serie de senos.

### Caso III

Extendemos  $f(x)$  al intervalo  $[-L, 0]$  de forma que obtenga una función periódica de periodo  $L$ .

Obtenemos así un desarrollo en serie de cosenos y senos.

## 7.5 Forma compleja de la Serie de Fourier

En muchas aplicaciones de las series de Fourier, es conveniente expresar estas series en términos de los exponenciales complejos  $e^{\pm jn\omega_0 t}$ .

Si se considera la serie de Fourier de una función periódica  $f(t)$ , como

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

donde  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ .

Sabemos que :

$$\cos n\omega_0 t = \frac{1}{2} (e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t})$$

$$\operatorname{sen} n\omega_0 t = \frac{1}{2j} (e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t})$$

Sustituyendo estas expresiones en la anterior de la serie de Fourier:

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \frac{1}{2} (e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}) - b_n \frac{j}{2} (e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}) \right]$$

Como  $\frac{1}{j} = -j$ , podemos expresar  $f(t)$  como

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{2} (a_n - jb_n) e^{jn\omega_0 t} + \frac{1}{2} (a_n + jb_n) e^{-jn\omega_0 t} \right]$$

LLamando  $c_0 = \frac{1}{2}a_0$ ,  $c_n = \frac{1}{2} (a_n - jb_n)$ ,  $c_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + jb_n)$ , entonces:

$$\begin{aligned} f(t) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{jn\omega_0 t} + c_{-n} e^{-jn\omega_0 t}) = \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n e^{-jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \end{aligned}$$

Esta última ecuación se denomina **serie compleja de Fourier** de  $f(t)$ .

Los coeficientes de Fourier se pueden evaluar fácilmente en términos de  $a_n$  y  $b_n$ , los cuales ya los conocemos:

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$$

$$c_n = \frac{1}{2} (a_n - jb_n) = [\text{desarrollando}] = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2} (a_n + jb_n) = [\text{desarrollando}] = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{jn\omega_0 t} dt$$

$$\text{donde } |c_n| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$



**Definición 7.5 (Producto escalar en  $\mathbb{C}$ )**

Dadas dos funciones complejas  $f(t)$  y  $g(t)$  definimos su producto escalar complejo en el intervalo  $[a, b]$  como

$$(f(t), g(t)) = f(t) \cdot g(t) = \int_a^b f(t)g^*(t) dt$$

donde  $g^*(t)$  representa el conjugado complejo de  $g(t)$ .

**Definición 7.6 ( Sistema ortogonal en  $\mathbb{C}$ )**

un conjunto de funciones complejas  $\{f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)\}$  se dicen que es un sistema ortogonal en el intervalo  $[a, b]$  si

$$\int_a^b f_m(t)f_k^*(t) dt = \begin{cases} 0 & \text{para } k \neq m \\ r_k & \text{para } k = m \end{cases}$$

**Proposición 7.1** El conjunto de funciones complejas de la serie de Fourier  $\{e^{jn\omega_0 t}\}$ ,  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , forman un sistema de funciones ortogonales.

**Definición 7.7 (Espectros de frecuencia compleja)**

La gráfica de la magnitud de los coeficientes complejos  $c_n$  de la serie de Fourier  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$  frente a (versus) la frecuencia  $\omega$  (frecuencia angular) se denomina **espectro de amplitud** de la función periódica  $f(t)$ .

La gráfica del ángulo de fase  $\varphi_n$  de  $c_n = |c_n|e^{-j\varphi_n}$  frente a  $\omega$  se denomina **espectro de fase** de  $f(t)$ .

Como el índice  $n$  toma solamente valores enteros, los espectros de amplitud y fase no son curvas continuas sino que aparecen en la variable discreta  $n\omega_0$ ; por consiguiente, se les denomina **espectros de frecuencia discreta** o **espectros de líneas**.

La representación de los coeficientes complejos  $c_n$  frente a la variable discreta  $n\omega_0$ , especifica la función periódica  $f(t)$  en el dominio de la frecuencia, así como  $f(t)$  versus  $t$  especifica la función en el dominio del tiempo.

**Proposición 7.2** El desplazamiento en el tiempo de una función periódica no tiene efecto sobre el espectro de amplitud, pero modifica el espectro de fase en una cantidad de  $-n\omega_0\tau$  radianes para la componente de frecuencia  $n\omega_0$  si el desplazamiento en el tiempo es  $\tau$ .

## 7.6 Filtrado de series de Fourier

Supongamos que deseamos obtener la tensión (o corriente) de salida de un sistema lineal y sabemos que la entrada es una señal periódica no lineal. Utilizando la serie de Fourier para descomponer la señal de entrada, en sus componentes senoidales, podemos hacer pasar separadamente cada componente a través del sistema. (Se pueden usar métodos conocidos para operar con entradas senoidales: fasores, impedancias, etc.). Por superposición, sabemos que la señal de salida total es la suma de todas las salidas de las componentes senoidales.

Esta onda de salida total es la **salida estacionaria** debida a la señal de entrada no senoidal. Es la **respuesta particular** del sistema a la señal de entrada no senoidal. Es decir, esta entrada ha estado excitando al sistema durante el tiempo suficiente para que haya desaparecido cualquier *respuesta transitoria* (respuesta natural debida a las condiciones iniciales que pudieran haber estado presentes al principio de haber aplicado la señal de entrada).

Un filtro pasa-bajos ideal (no realizable) tiene una función de transferencia  $H(j\omega)$  de las siguientes características:

$$\underline{|H(j\omega)|} = 0 \quad |H(j\omega)| = \begin{cases} 1 & -\omega_c < \omega < +\omega_c \\ 0 & \text{otros valores} \end{cases}$$

Esto significa que si una señal periódica no senoidal se aplica al filtro, la salida estará formada por aquellas componentes senoidales de Fourier aplicadas a la entrada cuya frecuencia angular sea inferior a  $\omega_c$ .

Para que una onda periódica de forma arbitraria pase sin distorsión a través de un sistema lineal, llamada **transmisión sin distorsión** (por ejemplo, un amplificador de alta fidelidad), cualquier desplazamiento de fase introducido por el sistema debe ser proporcional al número del armónico (a la frecuencia). Es decir, resulta necesario que el ángulo de la función de transferencia del sistema  $\angle H(j\omega)$ , sea una función lineal de la frecuencia.

## 7.7 Series finitas de Fourier

Supongamos que, dada una función periódica, intentamos obtener una serie aproximada utilizando sólo un número finito  $n$  de términos armónicos. Designemos esta aprox-

imación de  $n$  términos por  $f_n(t)$ :

$$f_n(t) = \sum_{k=-n}^n \alpha_k e^{jk\omega_0 t} \quad (7.1)$$

donde el valor numérico  $\alpha_k$  tiene que ser calculado. Si para evaluar los términos de la ecuación (7.1), tomamos *específicamente*

$$\alpha_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

podemos llamar a nuestra aproximación **serie de Fourier truncada**.

En cualquier instante de tiempo, la diferencia entre una aproximación  $f_n(t)$  y la onda real  $f(t)$  es el **error**  $e_n(t)$

$$e_n(t) = f(t) - f_n(t)$$

Este error puede ser positivo o negativo. Para dar una medida de mayor calidad en la aproximación vamos a elegir el **error cuadrático medio**, definido por

$$\overline{e_n^2(t)} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} e_n^2(t) dt$$

Desarrollando

$$\overline{e_n^2(t)} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} [f(t) - f_n(t)]^2 dt = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \left[ f(t) - \sum_{k=-n}^n \alpha_k e^{jk\omega_0 t} \right]^2 dt$$

Buscamos el conjunto de coeficientes  $\alpha_k$  que minimizan este error cuadrático medio.

Para ello, se debe verificar  $\frac{\partial \overline{e_n^2(t)}}{\partial \alpha_k} = 0 \quad \forall k$

Consideremos el coeficiente  $m$ -ésimo:

$$\frac{\partial \overline{e_n^2(t)}}{\partial \alpha_m} = \frac{\partial}{\partial \alpha_m} \left\{ \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \left[ f(t) - \sum_{k=-n}^n \alpha_k e^{jk\omega_0 t} \right]^2 dt \right\} = 0$$

Es decir

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} 2 \left[ f(t) - \sum_{k=-n}^n \alpha_k e^{jk\omega_0 t} \right] [-e^{jm\omega_0 t}] dt = 0$$

o

$$-\frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{jm\omega_0 t} dt + \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \sum_{k=-n}^n \alpha_k e^{j(k+m)\omega_0 t} dt = 0 \quad (7.2)$$

La integral del segundo término es suma de integrales particulares. Teniendo en cuenta la propiedad de ortogonalidad, todas son nulas excepto en la que  $k = -m$ .

Para  $k = -m$  la ecuación (7.2) se puede expresar como

$$-\int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{jm\omega_0 t} dt + \int_{t_0}^{t_0+T} \alpha_{-m} dt = -\int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{jm\omega_0 t} dt + \alpha_{-m}(t_0 + T - t_0) = 0$$

de donde

$$\alpha_{-m} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{jm\omega_0 t} dt$$

o

$$\alpha_k = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

que es la definición de los coeficientes de Fourier.

En consecuencia, los coeficientes de Fourier minimizan el error cuadrático medio entre la función real  $f(t)$  y cualquier serie armónica aproximada de **longitud finita**.

Evidentemente, cuantos más armónicos tomemos en la serie, mayor será la aproximación y, en consecuencia, menor será el error cuadrático medio. Sin embargo, aún utilizando un número infinito de términos, si la función tiene alguna **discontinuidad** (por ejemplo la función de onda cuadrada), nunca podremos lograr una réplica perfecta de la original  $f(t)$ . Cualquier discontinuidad producirá un transitorio que sobrepasa la onda por la parte superior e inferior de cada discontinuidad. Cada uno de estos transitorios tiene una elongación máxima de aproximadamente el 9% de la altura de la respectiva discontinuidad. Este efecto, observado por J. W. Gibbs, se llama **efecto Gibbs**.

Además, cualquier aproximación de términos finitos de Fourier corta a cada discontinuidad por su valor medio (mitad entre el valor superior e inferior).