

Series Exponencial de Fourier

- La función elemental más simple que se repite a sí misma durante la diferenciación es la forma exponencial compleja:
$$e^{j(\sigma+j\omega)t} = e^{\pm\sigma t}$$

σ y ω son parámetros independientes de t
- Nos interesan señales de energía finita, y σ puede causar problemas de convergencia por lo que conviene hacer $\sigma=0$
- $e^{\pm j\omega_0 t}$ puede existir para todo valor de tiempo.
- ω es la tasa de cambio de fase o frecuencia del exponencial complejo. $\omega=2\pi f$

Series Exponencial de Fourier

- El conjunto de funciones exponenciales:
$$\phi_n(t) = e^{(jn\omega_0)t}; \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$$
 forma un conjunto ortogonal en el intervalo (t_1, t_2) si $\omega_0 = 2\pi/(t_2 - t_1)$
- Se puede expresar $f(t)$ en términos de un conjunto de exponenciales complejos:
$$f(t) = \sum_{n=-N}^N F_n e^{jn\omega_0 t}; \quad t_1 < t < t_2$$

F_n son coeficientes a determinar

Series Exponencial de Fourier

- El conjunto está completo si la energía del error entre $f(t)$ y su aproximación tiende a cero conforme n tiende a infinito
- **Serie Exponencial de Fourier:**
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}; \quad t_1 < t < t_2$$
- Cálculo de coeficientes

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

Ejercicio

- Escriba la representación en Serie de Fourier exponencial compleja en el intervalo $(-4, 4)$ para la función:

$$f(t) = \begin{cases} 1 & -2 < t < 2 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Serie Trigonométrica de Fourier

- Objetivo: Representar una $f(t)$ de valor real utilizando un conjunto de funciones ortogonales de valor real

Serie trigonométrica de Fourier

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 t)$$

Serie Trigonométrica de Fourier

- Evaluación de coeficientes:

$$a_n = \frac{\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt}{\int_{-T/2}^{T/2} \cos^2(n\omega_0 t) dt} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

$$b_n = \frac{\int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt}{\int_{-T/2}^{T/2} \sin^2(n\omega_0 t) dt} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

$$\frac{1}{2}a_0 = \frac{\int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt}{\int_{-T/2}^{T/2} dt} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$$

Serie Trigonométrica de Fourier

- La serie trigonométrica de Fourier se representa en forma compacta como:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n)$$

Donde

$$C_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\phi_n = \tan^{-1}(-b_n/a_n)$$

Relación entre forma exponencial compleja y forma trigonométrica

$$C_n = 2 |F_n| = 2 \sqrt{F_n F_n^*}$$

$$\phi_n = \tan^{-1}(\text{Im}\{F_n\}/\text{Re}\{F_n\})$$

$$C_0 = F_0$$

Extensión por periodicidad

- Fuera del intervalo (t_1, t_2) , $f(t)$ y su serie de Fourier correspondiente no son necesariamente iguales.
- Podemos extender esta representación a señales periódicas, las cuales tienen la forma:

$f(t+T)=f(t)$ para todo t
 $f(t)$ tiene energía finita en el intervalo
- Tasa promedio de energía, o potencia media, es constante

Extensión por periodicidad

- Todo el análisis realizado para series de Fourier es válido si:
 - Se considera el periodo T de $f(t)$ como el intervalo para encontrar los coeficientes
 - Se divide por T cualquier cálculo que implique energía para obtener un tasa promedio de energía o potencia.

Convergencia de la Serie de Fourier

- Si una función $f(t)$ cumple con las llamadas "Condiciones de Dirichlet" en el intervalo $[0, T]$, entonces se puede escribir una representación en Series de Fourier que converja en $f(t)$ en todos los puntos de continuidad.

Condiciones de Dirichlet

- La función $f(t)$ tiene sólo un número finito de máximos y mínimos en el intervalo T .
- La función $f(t)$ tiene sólo un número finito de discontinuidades, es decir, es "continua por tramos" en el intervalo T .
- La función $f(t)$ satisface la desigualdad:

$$\int_0^T |f(t)| dt < \infty$$

Análisis de Simetría

■ Nos permite

- Determinar que términos están ausentes de la serie de Fourier
 - Simplificar las expresiones de los términos restantes
- Propiedades de funciones Pares e Impares
- Función par: $f(t)=f(-t)$ para todo t . Es simétrica con respecto al eje vertical
 - Función impar: $f(t)=-f(-t)$ para todo t . Es simétrica respecto al origen

Propiedades de funciones pares e impares

- Suma de 2 funciones pares es una función par
- Suma de 2 funciones impares es una función impar
- Producto de 2 funciones pares es una función par
- Producto de 2 funciones impares es una función par
- Producto de una función ímpar y una par es una función ímpar
- La derivada de una función par es una función ímpar
- La derivada de una función ímpar es una función par

Coeficientes de la serie de Fourier de funciones pares

■ Serie trigonométrica

$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

$$b_n = 0$$

■ Serie exponencial

$$F_n = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

- La expansión en serie de Fourier de $f(t)$ periódica par con periodo T , consiste en sólo términos de cosenos

Coeficientes de la serie de Fourier de funciones impares

■ Serie trigonométrica

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

■ Serie exponencial

$$F_n = \frac{-j2}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

- La expansión en serie de Fourier de $f(t)$ periódica impar con periodo T , consiste en sólo términos de senos

Simetría

- Toda función puede descomponerse en una componente par $f_e(t)$ y en una componente impar $f_o(t)$ de la forma:

$$f(t) = f_e(t) + f_o(t)$$

$$f_e(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2}$$

$$f_o(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2}$$

- Se puede deducir que la componente real de los coeficientes se debe a la componente par de la función y el componente imaginario se debe a la componente impar de la función

Ejercicios

- Una función periódica $f(t)$ con $T=2\pi$ está definida dentro del intervalo $[0, 2\pi]$ por:

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t \leq (1/2)\pi \\ (1/2)\pi & (1/2)\pi \leq t \leq \pi \\ \pi - (1/2)t & \pi \leq t \leq 2\pi \end{cases}$$

- Obtener la expansión en series de Fourier de $f(t)$ periódica con $T=2\pi$, definida por:

$$f(t) = t \quad (0 < t < 2\pi); f(t) = f(t + 2\pi)$$

Propiedades de la Serie Continua de Fourier (1)

■ Linealidad

- Si $x(t)$ y $y(t)$ son periódicas con periodo T y:

$$x(t) \leftrightarrow A_k$$

$$y(t) \leftrightarrow B_k$$

- Entonces

$$z(t) = a x(t) + b y(t) \leftrightarrow C_k = a A_k + b B_k$$

- Donde C_k son los coeficientes de la serie de Fourier de la combinación lineal de $x(t)$ y $y(t)$

Propiedades de la Serie Continua de Fourier (2)

■ Desplazamiento en el tiempo

- El periodo T se conserva y los coeficientes se expresan como:

$$\begin{aligned} x(t) &\leftrightarrow A_k \\ y(t) = x(t - t_0) &\leftrightarrow e^{-jn\omega_0 t_0} A_k \end{aligned}$$

■ Consecuencia

- Las magnitudes de los coeficientes de Fourier no se alteran

Propiedades de la Serie Continua de Fourier (3)

■ Inversión en el tiempo

- El periodo T se conserva y los coeficientes se expresan como:

$$x(t) \leftrightarrow A_k$$
$$y(t) = x(-t) \leftrightarrow A_{-k}$$

■ Consecuencia

- Si $x(t) = x(-t)$ (función par), entonces los coeficientes de la serie también son par: $A_{-k} = A_k$
- Si $x(t) = -x(-t)$ (función impar), entonces los coeficientes de la serie también son impar: $A_{-k} = -A_k$

Propiedades de la Serie Continua de Fourier (4)

■ Escalamiento de tiempo

- La ampliación o contracción del eje temporal se realiza multiplicando la variable t por una constante α :

$$f(\alpha t) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{j\omega_0 n (\alpha t)} = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{j(\alpha \omega_0) n t}$$

■ Consecuencia

- El escalamiento en tiempo de una función no altera los coeficientes C_n , pero si la serie de Fourier puesto que ésta tiene una nueva frecuencia fundamental $\alpha \omega_0$

Propiedades de la Serie Continua de Fourier (5)

■ Multiplicación

- Si $x(t)$ y $y(t)$ son periódicas con periodo T y:

$$x(t) \leftrightarrow A_n$$
$$y(t) \leftrightarrow B_n$$

■ Entonces

$$x(t)y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n B_{k-n} \right) e^{j\omega_0 kt}$$

$C_k \rightarrow \text{coeficientes de } x(t)y(t)$

Propiedades de la Serie Continua de Fourier (6)

■ Conjugación y simetría conjugada

- Si $f(t)$ es una función compleja:

$$f^*(t) = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \right)^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n^* e^{-jn\omega_0 t} = \sum_{-n=-\infty}^{\infty} F_n^* e^{jn\omega_0 t}$$

$$f^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_{-n}^* e^{jn\omega_0 t}$$

- Es decir, $f^*(t)$ tiene como coeficientes a F_{-n}^*
- Para funciones reales, $f'(t) = f^*(t)$, y por tanto $F_n = F_{-n}^*$

Teorema de Parseval para señales de potencia

- El teorema de Parseval para señales periódicas establece que:

$$P = \underbrace{\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt}_{\text{contenido de potencia}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2$$

- Utilizando la expansión trigonométrica de la serie de Fourier:

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{4} a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

Derivación de la Serie de Fourier

- Si $f(t)$ es continua, periódica, satisface las condiciones de Dirichlet y si la derivada de $f'(t)$ es continua por tramos y diferenciable, entonces la serie de Fourier se puede diferenciar término por término para obtener:

$$f'(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (jn\omega_0 F_n) e^{jn\omega_0 t}$$

o

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n\omega_0 (-a_n \sin(n\omega_0 t) + b_n \cos(n\omega_0 t))$$

Integración de la Serie de Fourier

- Si $f(t)$ es periódica y satisface las condiciones de Dirichlet, entonces se puede integrar término por término para obtener:

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{F_n}{jn\omega_0} \right) e^{jn\omega_0 t_2} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{F_n}{jn\omega_0} \right) e^{jn\omega_0 t_1}$$

ó

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) dt = a_0(t_2 - t_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\omega_0} [-b_n (\cos(n\omega_0 t_2) - \cos(n\omega_0 t_1)) + a_n (\sin(n\omega_0 t_2) - \sin(n\omega_0 t_1))]$$

Funciones Singulares

- Función impulso

$\delta(t)$ o Delta Dirac se define como:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases}$$

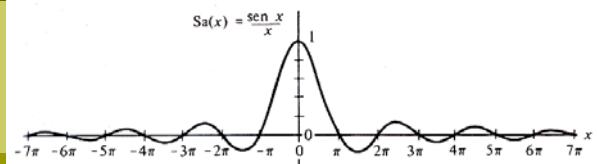
tal que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t) dt = 1, \quad \varepsilon > 0$$

Espectros de Frecuencia Compleja

- Espectro de Amplitud de la función periódica $f(t)$:
 - Es la gráfica de magnitud de los coeficientes complejos F_n versus la frecuencia angular ω
- Espectro de fase de $f(t)$:
 - Es la gráfica de fase ϕ_n de F_n versus ω
- Los espectros de amplitud y fase no son continuos, sino que aparece la variable discreta $n\omega_0$. Por esta razón se les denomina Espectros de frecuencia discreta o Espectros de línea
- F_n vrs $n\omega_0$ especifica la función periódica $f(t)$ en el dominio de la frecuencia

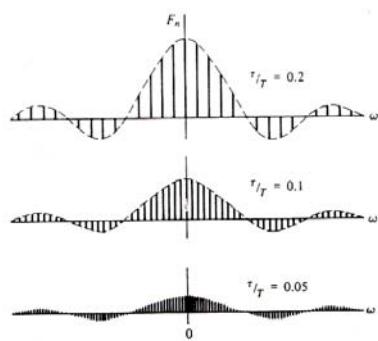
Función Sa(x)



Ejemplo: Espectro de Fourier de una función cuadrada periódica

$$F_n = \frac{Ad}{T} \text{Sa}\left(\frac{n\pi d}{T}\right)$$

$$F_0 = \frac{Ad}{T}$$

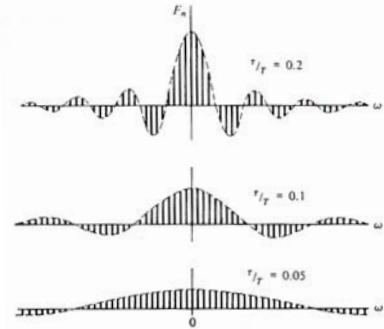


Espectro de amplitud para varios valores de d/T , considerando d fija

Ejemplo: Espectro de Fourier de una función cuadrada periódica

$$F_n = \frac{Ad}{T} \text{Sa}\left(\frac{n\pi d}{T}\right)$$

$$F_0 = \frac{Ad}{T}$$



Espectro de amplitud para varios valores de d/T , considerando T fija