RESUMEN CINEMATICA INVERSA

CINEMATICA DE ROBOTS

FRANCISCO JAVIER HERNANDEZ MORALES
MAESTRO: CARLOS ENRIQUE MORAN GARABITO

El objetivo del problema cinemático inverso consiste en encontrar los valores que deben adoptar las coordenadas articulares del robot q = [q1, q2, ..., qn]T para que su extremo se posicione y oriente según una determinada localización espacial(p, [n, o, a]). Así como es posible abordar el problema cinemático directo de una manera sistemática a partir de la utilización de matrices de transformación homogéneas, e independientemente de la configuración del robot, no ocurre lo mismo con el problema cinemático inverso, siendo el procedimiento de obtención de las ecuaciones fuertemente dependiente de la configuración del robot. Se han desarrollado algunos procedimientos genéricos susceptibles de ser programados [GOLDENBERG-85], de modo que un computador pueda, a partir del conocimiento de la cinemática del robot (con sus parámetros de Denavit-Hartenberg, por ejemplo) obtener la n-upla de valores articulares que posicionan y orientan su extremo. El inconveniente de estos procedimientos es que se trata de métodos numéricos iterativos, cuya velocidad de convergencia e incluso su convergencia en sí no está siempre garantizada. A la hora de resolver el problema cinemático inverso es mucho más adecuado encontrar una solución cerrada. Esto es, encontrar una relación matemática explícita de

la forma: $$\begin{gathered} q_k = f_k(x, y, z, \phi, \theta, \psi) \\ k = 1 \ldots n \quad (\mathrm{GDL}) \end{gathered}$$

1. En muchas aplicaciones, el problema cinemático inverso ha de resolverse en tiempo real (por ejemplo, en el seguimiento de una determinada trayectoria). Una solución de tipo iterativo no garantiza tener la solución en el momento adecuado.

2. Al contrario de lo que ocurría en el problema cinemático directo, con cierta frecuencia la solución del problema cinemático inverso no es única; existiendo diferentes n-uplas [q1, ..., qn]T que posicionan y orientan el extremo del robot del mismo modo.

Como alternativa para resolver el mismo problema se puede recurrir a manipular directamente las ecuaciones correspondientes al problema cinemático directo. Es decir, puesto que éste establece

la relación: $$\begin{bmatrix} \mathbf{n} & \mathbf{o} & \mathbf{a} & \mathbf{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{ij} \end{bmatrix}$$

donde los elementos tij son función de las coordenadas articulares [q1, ..., qn]T , es posible pensar que mediante ciertas combinaciones de las 12 ecuaciones planteadas en [4.29] se puedan despejar las n variables articulares qi en función de las componentes de los vectores n, o, a y p. Debe considerarse en este caso que en general las 12 ecuaciones responden a ecuaciones trigonométricas acopladas cuya resolución no es trivial. Para facilitar esta solución se verá que se puede proceder de manera ordenada, despejando sucesivamente los grados de libertad. Por último, si se consideran robots con capacidad de posicionar y orientar su extremo en el espacio, esto es, robots con 6 GDL, el método de desacoplamiento cinemático permite, para determinados tipos de robots, resolver los primeros grados de libertad, dedicados al posicionamiento, de manera independiente a la resolución de los últimos grados de libertad, dedicados a la orientación.

RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA CINEMÁTICO INVERSO POR MÉTODOS GEOMÉTRICOS

Como se ha indicado, este procedimiento es adecuado para robots de pocos grados de libertad o para el caso de que se consideren sólo los primeros grados de libertad, dedicados a posicionar el extremo. Para mostrar el procedimiento a seguir se va a aplicar el método a la resolución del problema cinemático inverso de un robot con 3 GDL de rotación. El valor de q1 se obtiene inmediatamente como:

$$q_1 = arctg\left(\frac{p_y}{p_x}\right)$$

Considerando ahora únicamente los elementos 2 y 3 que están situados en un plano (Figura 4.10), y utilizando el teorema del coseno, se tendrá:

$$\left.\begin{array}{l} r^2 = p_x^2 + p_y^2 \\ r^2 + p_z^2 = l_2^2 + l_3^2 + 2 l_2 l_3 \cos q_3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\cos q_3 = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - l_2^2 - l_3^2}{2 l_2 l_3}$$

Esta expresión permite obtener q3 en función del vector de posición del extremo p. No obstante, y por motivos de ventajas computacionales, es más conveniente utilizar la expresión de la arcotangente en lugar del arcoseno.

Puesto que

$$\operatorname{sen} q_3 = \pm\sqrt{1 - \cos^2 q_3}$$

se tendrá que

$$q_3 = \operatorname{arctg}\left(\frac{\pm\sqrt{1 - \cos^2 q_3}}{\cos q_3}\right)$$

con

$$\cos q_3 = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - l_2^2 - l_3^2}{2 l_2 l_3}$$

Siendo:

$$\beta = arctg\left(\frac{p_z}{r}\right) = arctg\left(\frac{p_z}{\pm\sqrt{p_x^2 + p_y^2}}\right)$$

$$\alpha = arctg\left(\frac{l_3 \operatorname{sen} q_3}{l_2 + l_3 \cos q_3}\right)$$

Luego, finalmente:

$$q_2 = arctg\left(\frac{p_z}{\pm\sqrt{p_x^2 + p_y^2}}\right) - arctg\left(\frac{l_3 \operatorname{sen} q_3}{l_2 + l_3 \cos q_3}\right)$$

De nuevo los dos posibles valores según la elección del signo dan lugar a dos valores diferentes de q2 correspondientes a las configuraciones codo arriba y abajo.

RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA CINEMÁTICO INVERSO A PARTIR DE LA MATRIZ DE TRANSFORMACIÓN HOMOGÉNEA

En principio es posible tratar de obtener el modelo cinemático inverso de un robot a partir del conocimiento de su modelo directo. Es decir, suponiendo conocidas las relaciones que expresan el valor de la posición y orientación del extremo del robot en función de sus coordenadas articulares, obtener por manipulación de aquéllas las relaciones inversas. Se va a aplicar este procedimiento al robot de 3 GDL de configuración esférica (2 giros y un desplazamiento) mostrado en la Figura 4.11. El robot queda siempre contenido en un plano determinado por el ángulo q1. El primer paso a dar para resolver el problema cinemático inverso es obtener la Expresión [4.29] correspondiente a este robot. Es decir, obtener la matriz T que relaciona el sistema de referencia {S0} asociado a la base con el sistema de referencia {S3} asociado a su extremo. La Figura 4.12 representa la asignación de sistemas de referencia según los criterios de DenavitHartenberg, con el robot situado en su posición de partida (q1 = q2= 0), y la Tabla 4.3 muestra los valores de los parámetros

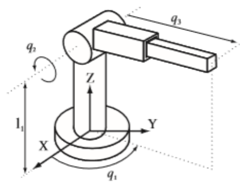

Figura 4.11. Robot polar de 3 GDL.

A partir de éstos es inmediato obtener las matrices **A** y la matriz **T**.

$$
{}^0\mathbf{A}_1=\begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0\\ S_1 & 0 & -C_1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & l_1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\quad
{}^1\mathbf{A}_2=\begin{bmatrix} C_2 & 0 & -S_2 & 0\\ S_2 & 0 & C_2 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\quad
{}^2\mathbf{A}_3=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & q_3\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}
$$

$$
{}^0\mathbf{A}_2=\begin{bmatrix} C_1C_2 & -S_1 & -C_1S_2 & 0\\ S_1C_2 & C_1 & -S_1S_2 & 0\\ S_2 & 0 & C_2 & l_1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\quad
\mathbf{T}={}^0\mathbf{A}_3=\begin{bmatrix} C_1C_2 & -S_1 & -C_1S_2 & -q_3C_1S_2\\ S_1C_2 & C_1 & -S_1S_2 & -q_3S_1S_2\\ S_2 & 0 & C_2 & q_3C_2+l_1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad [4.37]
$$

de Denavit-Hartenberg.

MODELO DIFERENCIAL. MATRIZ JACOBIANA

El modelo diferencial queda concretado en la denominada matriz Jacobiana. En general la matriz Jacobiana de un robot, relaciona el vector de velocidades articulares (q . 1, q . 2, q . n) con otro vector de velocidades expresado en un espacio distinto. Existen diferentes posibilidades a la hora de seleccionar este espacio. Una primera elección es la de considerar la relación con las velocidades de la localización del extremo del robot, siendo ésta la posición y orientación expresada en base a sus coordenadas cartesianas y a sus ángulos de Euler (x . , y . , z . , ϕ . , θ . , ψ .) (otras representaciones de la orientación pueden ser consideradas). Esta relación viene dada por la denominada Jacobiana analítica del manipulador.

JACOBIANA INVERSA

Del mismo modo que se ha obtenido la relación directa, que permite obtener las velocidades del extremo a partir de las velocidades articulares, puede obtenerse la relación inversa que permite calcular las velocidades articulares partiendo de las del extremo. En la obtención de la relación inversa pueden emplearse diferentes procedimientos. En primer lugar, supuesta conocida la relación directa, dada por la matriz Jacobiana [4.63] o [4.64], se puede obtener la relación inversa

$$
\begin{bmatrix}\dot{q}_1\\ \vdots\\ \vdots\\ \vdots\\ \dot{q}_n\end{bmatrix}=\mathbf{J}_a^{-1}\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\\ \dot{\phi}\\ \dot{\theta}\\ \dot{\psi}\end{bmatrix}\ ;\ \begin{bmatrix}\dot{q}_1\\ \vdots\\ \vdots\\ \vdots\\ \dot{q}_n\end{bmatrix}=\mathbf{J}^{-1}\begin{bmatrix}v_x\\ v_y\\ v_z\\ w_x\\ w_y\\ w_z\end{bmatrix}
$$

invirtiendo simbólicamente la matriz

Esta alternativa, de planteamiento sencillo, es en la práctica de difícil realización. Suponiendo que la matriz Jacobiana sea cuadrada, la inversión simbólica de una matriz 6 6, cuyos elementos son funciones trigonométricas, es de gran complejidad, siendo este procedimiento inviable. Como segunda alternativa puede plantearse la evaluación numérica de la matriz Jacobiana para una configuración (qi) concreta del robot, e invirtiendo numéricamente esta matriz encontrar la relación inversa válida para esa configuración. En este caso, hay que considerar, en primer lugar, que el valor numérico de la Jacobiana va cambiando a medida que el robot se mueve y, por tanto, la Jacobiana inversa ha de ser recalculada constantemente. Además, pueden existir n-uplas (q1,..., qn) para las cuales la matriz Jacobiana no sea invertible por ser su determinante, denominado Jacobiano, nulo. Estas configuraciones del robot en las que el Jacobiano se anula se denominan configuraciones singulares y serán tratadas más adelante. Una tercera dificultad que puede surgir con éste y otros procedimientos de cómputo de la matriz Jacobiana inversa, se deriva de la circunstancia de que la matriz Jacobiana no sea cuadrada. Esto ocurre cuando el número de grados de libertad del robot no coincide con la dimensión del espacio de la tarea (normalmente seis). En el caso de que el número de grados de libertad sea inferior, la matriz Jacobiana tendrá más filas

$$\begin{aligned} q_1 &= f_1(x, y, z, \phi, \theta, \psi,) \\ &\vdots \\ q_n &= f_n(x, y, z, \phi, \theta, \psi,) \end{aligned}$$

que columnas.

La matriz jacobiana inversa se obtendrá por diferenciación con respecto del tiempo de ambos

$$\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix} = \mathbf{J}_a^{-1} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

miembros de la igualdad:

con:

$$\mathbf{J}_a^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial \psi} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x} & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial \psi} \end{bmatrix}$$

Como en el caso de la primera alternativa, este método puede ser algebraicamente complicado.