Afi Escuela

Optimización (MDSBD 2022)

Optimización Lineal (LP)

Jorge López Lázaro
jorloplaz@gmail.com

Índice

1. Introducción

Introducción (I)

El objetivo de un **modelo matemático** es reproducir la realidad de la forma más fiel posible, con el fin de entender cómo se comporta y poder obtener respuestas a determinadas acciones.

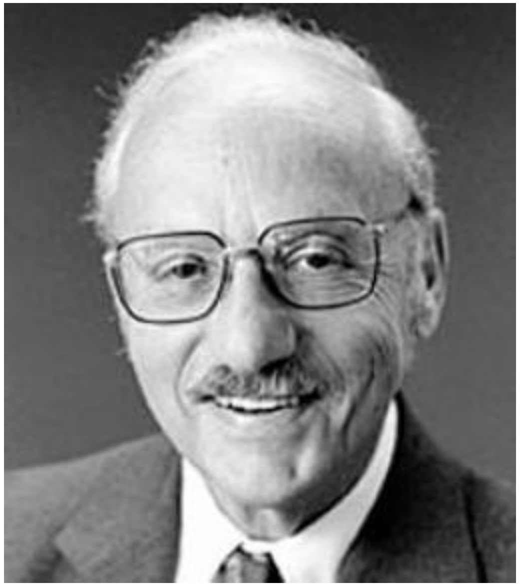
La **programación lineal** es un tipo de modelo matemático que se desarrolló a partir de la Segunda Guerra Mundial para resolver cierto tipo de problemas de asignación de recursos entre distintas actividades.

Por ejemplo, el **problema de la dieta** fue uno de los primeros problemas de programación lineal, motivado por el deseo del ejército americano de asegurar unos requerimientos nutricionales al menor coste (con 9 restricciones y 77 variables).

Trabajaron 9 personas durante 15 días aproximadamente para completar los cálculos que se necesitaban para solucionar el problema.

Introducción (II)

La programación lineal fue formulada por George B. Dantzig alrededor de 1947, cuando trabajaba como consejero matemático para la Fuerza Aérea de Estados Unidos en el desarrollo de un sistema automático de planificación temporal de despliegue, entrenamiento y abastecimiento logístico.



Esta técnica tomó relevancia con la introducción del **método del símplex** y el desarrollo de los ordenadores modernos.

La primera implementación computacional del símplex se completó en 1952. Se resolvió un problema de programación lineal (LP) con 48 restricciones y 71 variables en 18 horas.

Actualmente, se pueden resolver problemas de LP con millones de variables y restricciones en pocas horas e incluso minutos.

Introducción (III)

La **programación lineal** estudia la *optimización (minimización o maximización) de una función lineal que satisface un conjunto de restricciones lineales de igualdad y/o desigualdad*.

$$\begin{cases} max f(x_1,\dots,x_n) \\ g_1(x_1,\dots,x_n) \leq 0 \\ \vdots \\ g_m(x_1,\dots,x_n) \leq 0 \\ x_1,\dots,x_n \geq 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \begin{cases} min f(x_1,\dots,x_n) \\ g_1(x_1,\dots,x_n) \geq 0 \\ \vdots \\ g_m(x_1,\dots,x_n) \geq 0 \\ x_1,\dots,x_n \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1)\ \nabla f(x_0) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x_0) \\ 2)\ \lambda_i g_i(x_0) = 0 \quad \forall i \\ 3)\ \lambda_i \geq 0 \quad \forall i \\ 4)\ x_0 \in D \qquad \text{siendo D el dominio del problema} \end{cases}$$

2. Formulación general y estándar

Formulación general (I)

$$
\begin{aligned}
\min_{y_1,\ldots,y_n} / \max \quad & z = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} A_{ij} y_j = b_i, \quad i = 1, \ldots, m_e \\
& \sum_{j=1}^{n} A_{ij} y_j \geq b_i, \quad i = 1, \ldots, m_g \\
& \sum_{j=1}^{n} A_{ij} y_j \leq b_i, \quad i = 1, \ldots, m_l \\
& y_i \in \mathbb{R},
\end{aligned}
$$

where $m = m_e + m_g + m_l$ is the total number of constraints, and c_j, A_{ij} and b_j, $\forall i = 1, \ldots, m, \forall j = 1, \ldots, n$, are problem parameters.

Formulación general (II)

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij} y_j > b_i, \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} A_{ij} y_j \geq b_i + \epsilon$$

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij} y_j < b_i, \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} A_{ij} y_j \leq b_i - \epsilon,$$

where ϵ is an small enough positive constant.

Formulación estándar

a) Todas las restricciones son igualdades
b) Todas las variables son no-negativas
c) Las limitaciones (lado derecho de la restricción) son positivas

$$\begin{aligned} \min_{x_1,\ldots,x_n} \quad & z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1,\ldots,m \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1,\ldots,n. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \min_{x} \quad & z = c^\top x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ y $b \geq 0$.

Al vector x que cumpla todas las restricciones del problema se le denomina **solución factible/posible**

El conjunto de todas las soluciones factibles se llama **región factible**

Paso a formulación estándar

- $$\max_{y_1,\dots,y_n} \quad \sum_{j=1}^{n} c_j y_j \Rightarrow \min_{y_1,\dots,y_n} \quad \sum_{j=1}^{n} -c_j y_j$$

- $$\sum_{i=1}^{n} A_{ij} y_j \leq b_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} A_{ij} y_j + z_i = b_i$$

  donde $z_i \geq 0$ es una **variable de holgura**

- $$\sum_{i=1}^{n} A_{ij} y_j \geq b_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} A_{ij} y_j - z_i = b_i$$

  donde $z_i \geq 0$ es una **variable de excedente**

- Si la variable y_j no tiene restricción de signo, se puede reemplazar por $y_j = u_j - v_j$ donde $u_j, v_j \geq 0$ son dos **variables auxiliares**

Formulación en PuLP

Veamos cómo resolver el problema de la dieta con PuLP

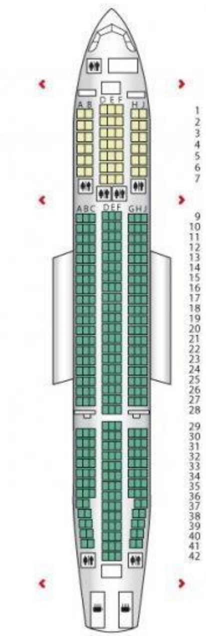
Ejecutar en Google Colab el notebook adjunto

python + colab

3. Ejemplos

Gestión de ingresos de aerolíneas (I)

Airbus a320



150 pasajeros

Diferentes tipos de pasajeros:

- Personas que valoran flexibilidad (pagan altos precios)
- Personas que buscan buenas ofertas (tarifas de descuento)

¿Cómo podemos asignar los asientos para maximizar los ingresos?

	Regular Fare	Discount Fare
Price [euros]	400	150
Forecasted demand	75	125
Seats	x_1	x_2

Gestión de ingresos de aerolíneas (II)

$$\max_{x_1, x_2} \quad 400x_1 + 150x_2$$

$$\text{s.t.}$$

$$x_1 + x_2 \leq 150$$

$$x_1 \leq 75$$

$$x_2 \leq 125$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

Solución (**ejercicio Python**):

$x_1 = 75$

$x_2 = 75$

$OF = 41250$ euros

Google Adwords (I)

El 97% de los ingresos de Google provienen de anuncios de internet → Google Adwords (https://www.google.es/adwords/).

- Los anunciantes realizan ofertas para diferentes consultas en una subasta. Además, ellos especifican el presupuesto total que tienen.

- Basado en estas ofertas y en un "*quality score*", Google decide el precio por click (PPC) para cada anuncio y consulta. Los anunciantes pagarán ese precio cada vez que un usuario haga click en su anuncio.

- Además, Google predice la proporción de clicks (Click-Through Rate, CTR) que es equivalente a la probabilidad de que un usuario aleatorio haga click en un anuncio. Por tanto, la cantidad estimada que un anunciante paga por usuario es: PPC*CTR, que son los ingresos para Google.

- Google también calcula el número de veces que se hace una consulta en un día concreto.

Google Adwords (II)

Problema: considerando que varios anunciantes quieren poner sus anuncios para consultas específicas, ¿cuántas veces se debe poner cada anuncio para cada consulta, para maximizar los ingresos totales?

Ingreso medio por usuario (€):

Anunciante	Query 1: "Mejor coche 2017"	Query 2: "Mejor coche calidad-precio"	Query 3: "Mejor coche familiar"
Company A	1	0.75	5
Company B	0.5	0.5	2
Company C	0.5	3	1

Anunciante	Presupuesto (€)
Company A	200
Company B	150
Company C	180

Consulta	# requests estimadas
Q1	150
Q2	90
Q3	80

Google Adwords (III)

$$\max_{x} \quad x_{A1} + 0.75x_{A2} + 5x_{A3} + 0.5x_{B1} + 0.5x_{B2} + 2x_{B3} + 0.5x_{C1} + 3x_{C2} + x_{C3}$$

s.t.

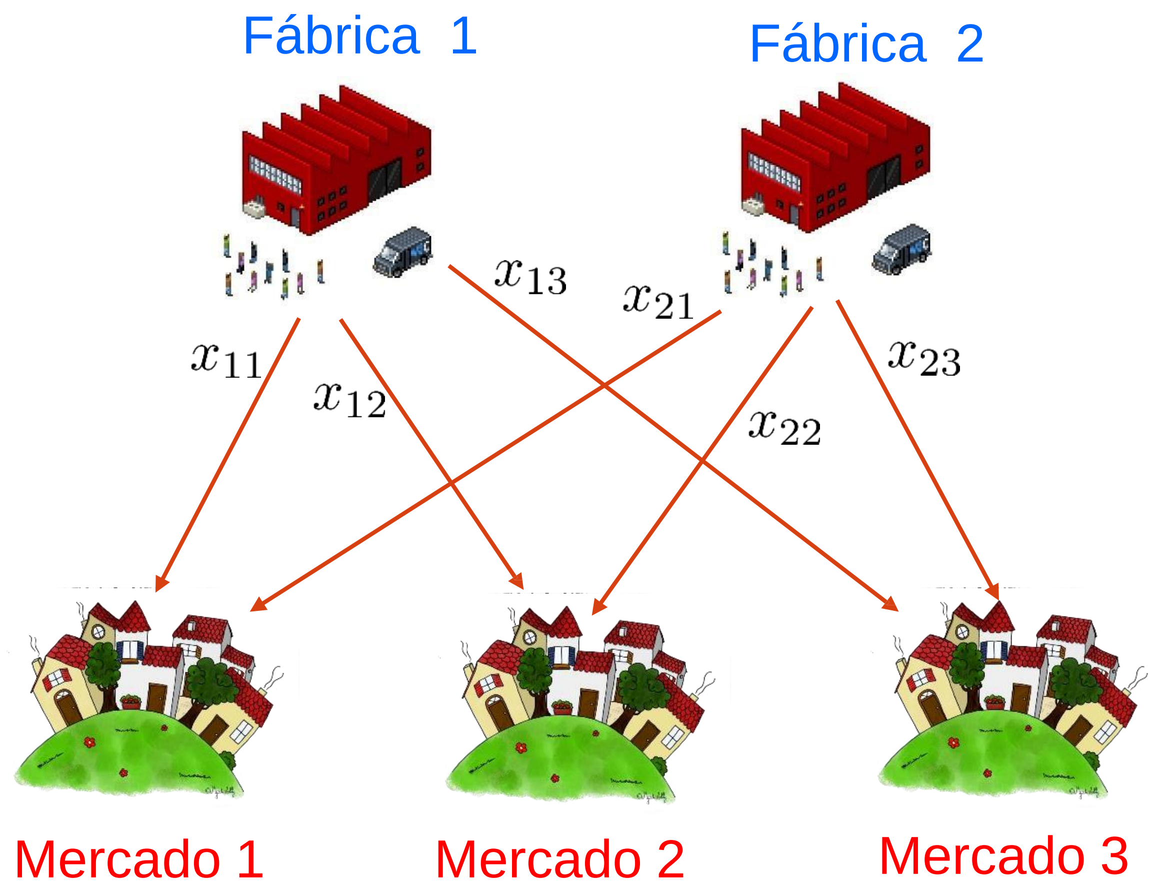
$$x_{A1} + 0.75x_{A2} + 5x_{A3} \leq 200$$
$$0.5x_{B1} + 0.5x_{B2} + 2x_{B3} \leq 150$$
$$0.5x_{C1} + 3x_{C2} + x_{C3} \leq 180$$
$$x_{A1} + x_{B1} + x_{C1} \leq 150$$
$$x_{A2} + x_{B2} + x_{C2} \leq 90$$
$$x_{A3} + x_{B3} + x_{C3} \leq 80$$
$$x_{A1}, x_{A2}, x_{A3}, x_{B1}, x_{B2}, x_{B3}, x_{C1}, x_{C2}, x_{C3} \geq 0$$

Solución (**ejercicio Python**):

$$x_{A1} = 0$$
$$x_{A2} = 0$$
$$x_{A3} = 40$$
$$x_{B1} = 150$$
$$x_{B2} = 30$$
$$x_{B3} = 30$$
$$x_{C2} = 60$$

OF = 530 €

Problema del transporte (I)



Distance	M1	M2	M3	*offer*
F1	2.5	1.7	1.8	350
F2	2.5	1.8	1.4	600
demand	325	300	275	

Costes de transporte por unidad:
90 €/100km

¿Cuál es el recorrido óptimo de transporte entre fábricas y mercados?

Minimizar el total de costes de transporte

Problema del transporte (II)

- Variables de decisión: tamaño del envío de cada fábrica a cada mercado

$$x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{23}$$

- Función objetivo: **minimizar** el total de costes por transporte

$$90 \times 2.5 \times \; x_{11} + 90 \times 1.7 \times \; x_{12} + \cdots + 90 \times 1.4 \times \; x_{23}$$

Problema del transporte (III)

- Restricciones: La demanda con la que se debe satisfacer a cada mercado

$$x_{11} + x_{21} \geq 325$$
$$x_{12} + x_{22} \geq 300$$
$$x_{13} + x_{23} \geq 275$$

- Restricciones: capacidad máxima de producción de cada fábrica

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 350$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 600$$

- Restricciones: límites "técnicos". No negatividad

$$x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{23} \geq 0$$

Problema del transporte (IV)

$$\min_{x_{ij}} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}$$

s.t.:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \geq b_j \quad \forall j$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq a_i \quad \forall i$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \forall ij$$

$$\min_{x_{11},x_{12},\dots,x_{23}} \quad 90 \times 2.5 \times \; x_{11} + 90 \times 1.7 \times \; x_{12} + \cdots + 90 \times 1.4 \times \; x_{23}$$

s.t.

$$x_{11} + x_{21} \geq 325$$

$$x_{12} + x_{22} \geq 300$$

$$x_{13} + x_{23} \geq 275$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 350$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 600$$

$$x_{11}, x_{12}, \dots, x_{23} \quad \geq 0$$

Problema del transporte (V)

$$\min_{x_{11},x_{12},\ldots,x_{23}} \quad 90\times 2.5\times\ x_{11}+90\times 1.7\times\ x_{12}+\cdots+90\times 1.4\times\ x_{23}$$

$$\text{s.t.}$$

$$\begin{aligned}
x_{11}+x_{21}-z_1 &= 325\\
x_{12}+x_{22}-z_2 &= 300\\
x_{13}+x_{23}-z_3 &= 275\\
x_{11}+x_{12}+x_{13}+z_4 &= 350\\
x_{21}+x_{22}+x_{23}+z_5 &= 600\\
x_{11},x_{12},\ldots,x_{23},z_1,\ldots,z_5 \quad &\geq 0
\end{aligned}$$

Problema del transporte (VI)

$$\min_{x} \quad z = c^{\top} x$$
$$\text{s.t.} \quad Ax = b$$
$$x \geq 0$$

donde $x \in \mathbb{R}^{11}$, $c \in \mathbb{R}^{11}$, $A \in \mathbb{R}^{5\times 11}$, y $b \in \mathbb{R}^{5}$.

$$x = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{21} & x_{22} & x_{23} & z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 \end{pmatrix}^T$$

$$c = 90 \times \begin{pmatrix} 2.5 & 1.7 & 1.8 & 2.5 & 1.8 & 1.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$$

$$b = \begin{pmatrix} 325 & 300 & 275 & 350 & 600 \end{pmatrix}^T$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Problema del transporte (VII)

Solución:

quantity	M1	M2	M3
F1	$x_{11} = 50$	$x_{12} = 300$	$x_{13} = 0$
F2	$x_{21} = 275$	$x_{22} = 0$	$x_{23} = 275$

Coste total = 153675 euros

Asignación de recursos (I)

Una fábrica de cerveza produce varios tipos de cerveza, con distintas tecnologías de producción, utilizando diferente cantidad de una materia prima básica y requiriendo un número diferente de horas del personal (otros elementos como energía o inmovilizados (local…) no se consideran)
¿Cuántos litros semanales debe producir de cada cerveza para maximizar el beneficio?

Datos semana:

	P.V.P. (€/1000l.)	Mat.prima (€/1000l)	Mano de obra (empl./1000l)
Rubia	300 €	20	5
Negra	500 €	50	4
Disponible		90	14

Asignación de recursos (II)

Índices y parámetros:

i. tipos de cerveza

j. materias primas

p_i : precio de venta cerveza tipo i (€/1000l)

a_{ji} : cantidad de materia prima j usada en producir cerveza i (€/1000l)

e_i : mano de obra utilizada para producir cerveza i (empleados/1000l)

u_j : límite disponible de materia prima j (€)

v : número de empleados disponibles (empleados)

Variables

Q_i : cantidad a producir de cerveza tipo i (1000l)

B : beneficio (€)

Modelo

$$\max B$$

$$B = 300Q_1 + 500Q_2 - \left(20Q_1 + 50Q_2\right)$$

$$20Q_1 + 50Q_2 \leq 90$$

$$5Q_1 + 4Q_2 \leq 14$$

$$Q_i \geq 0$$

Asignación de recursos (III)

Modelo

$$\max \quad B = 300Q_1 + 500Q_2 - \left(20Q_1 + 50Q_2\right)$$

$$20Q_1 + 50Q_2 \leq 90$$

$$5Q_1 + 4Q_2 \leq 14$$

$$Q_i \geq 0$$

$$\max \quad B = 280Q_1 + 450Q_2$$

$$20Q_1 + 50Q_2 \leq 90$$

$$5Q_1 + 4Q_2 \leq 14$$

$$Q_i \geq 0$$

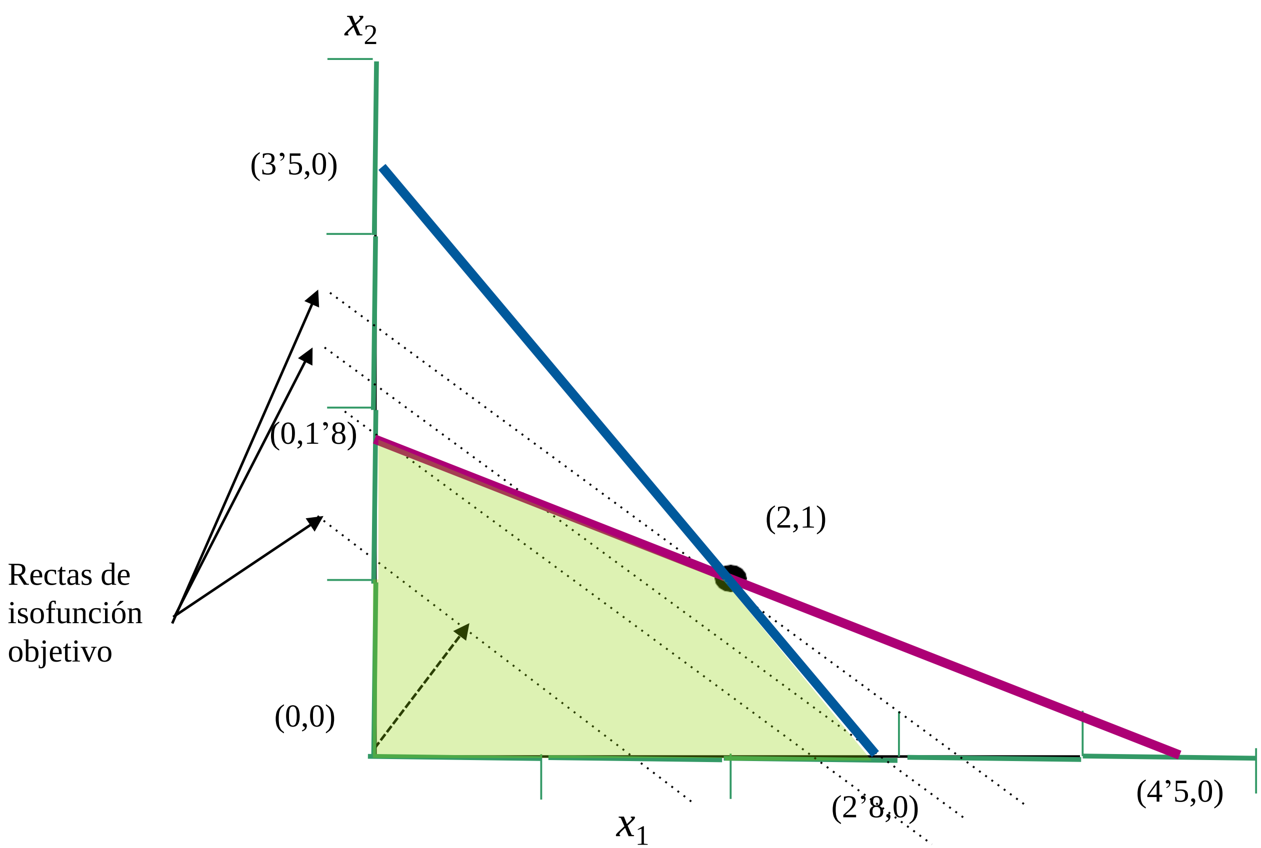
Forma estándar

Variables de holgura

$$\max B = -\min\,(-B) = -\min \quad -280Q_1 - 450Q_2$$

$$\text{s.a} \quad \begin{aligned} 20Q_1 + 50Q_2 + S_1 \quad &= 90 \\ 5Q_1 + 4Q_2 \quad + S_2 &= 14 \\ Q_1, Q_2 \geq 0 & \end{aligned}$$

Asignación de recursos (IV)



4. Soluciones de problemas lineales

Terminología

- **Espacio de soluciones/región factible:** aquella región donde los valores de las variables satisfacen todas las restricciones. Es una región convexa.
- **Punto extremo o vértice:** punto de intersección de un conjunto de restricciones (o lo que es lo mismo, la intersección de *n* hiperplanos).
- **Solución básica:** solución (cumple las restricciones) que tiene al menos $n - m$ variables igual a cero, donde *n* es el número de variables y *m* el número de restricciones.
- **Solución básica factible:** solución básica con todas las variables mayores o iguales a cero. Los vértices del espacio de soluciones son soluciones básicas factibles.
- **Solución óptima:** aquel punto del espacio de soluciones donde la función objetivo tenga valor óptimo (máximo / mínimo).

Teorema fundamental de LP

Si un problema LP tiene región factible no vacía acotada, entonces, si existe el óptimo (máximo o mínimo) de la función objetivo, se encuentra en un punto extremo (vértice) de la región factible.

Si una función alcanza el valor óptimo en dos vértices consecutivos de la región factible, entonces alcanza también dicho valor óptimo en todos los puntos del segmento que determinan ambos vértices.

Por lo tanto, **de existir soluciones al menos una de ellas estará siempre en un vértice.**

Para calcular una solución óptima de un LP, basta con **evaluar la función objetivo en todos los vértices de la región factible y quedarnos con el que nos da el valor óptimo.**

Esto es la base del **algoritmo/método del símplex**.

Soluciones y variables básicas (I)

- **Punto extremo o vértice**: punto de intersección de un conjunto de restricciones (o lo que es lo mismo, la intersección de *n* hiperplanos).

- **Solución básica**: es la solución de un sistema de ecuaciones *m*n* donde *n-m* variables se hacen cero. **m variables básicas** y **n-m variables no básicas**.

Dicho de otra forma:

Un vector x es una solución básica si $Ax = b$ y las columnas de A que están asociadas a elementos no nulos de x son linealmente independientes. Estas columnas son la "**base**", que la denotamos como la matriz *B*. El resto de columnas la llamamos matriz *N*.

$$A = (B\ N),$$

donde $\det(B) \neq 0$

Soluciones y variables básicas (II)

Las variables básicas son las asociadas a la base, x_B , y las variables no básicas el resto, $x_N = 0$.

$$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}.$$

Si, además, $x_B \geq 0$, x se llama **solución básica factible.** Si x es una solución básica factible, entonces $Ax = b$ es equivalente a $Bx_B = b$, es decir, x_B viene totalmente determinada por *B* y *b*.

El número de soluciones básicas factibles es finito y como máximo vale $\binom{n}{m}$.

Esto da lugar a una 1ª idea, válida para problemas sencillos (**método gráfico**):

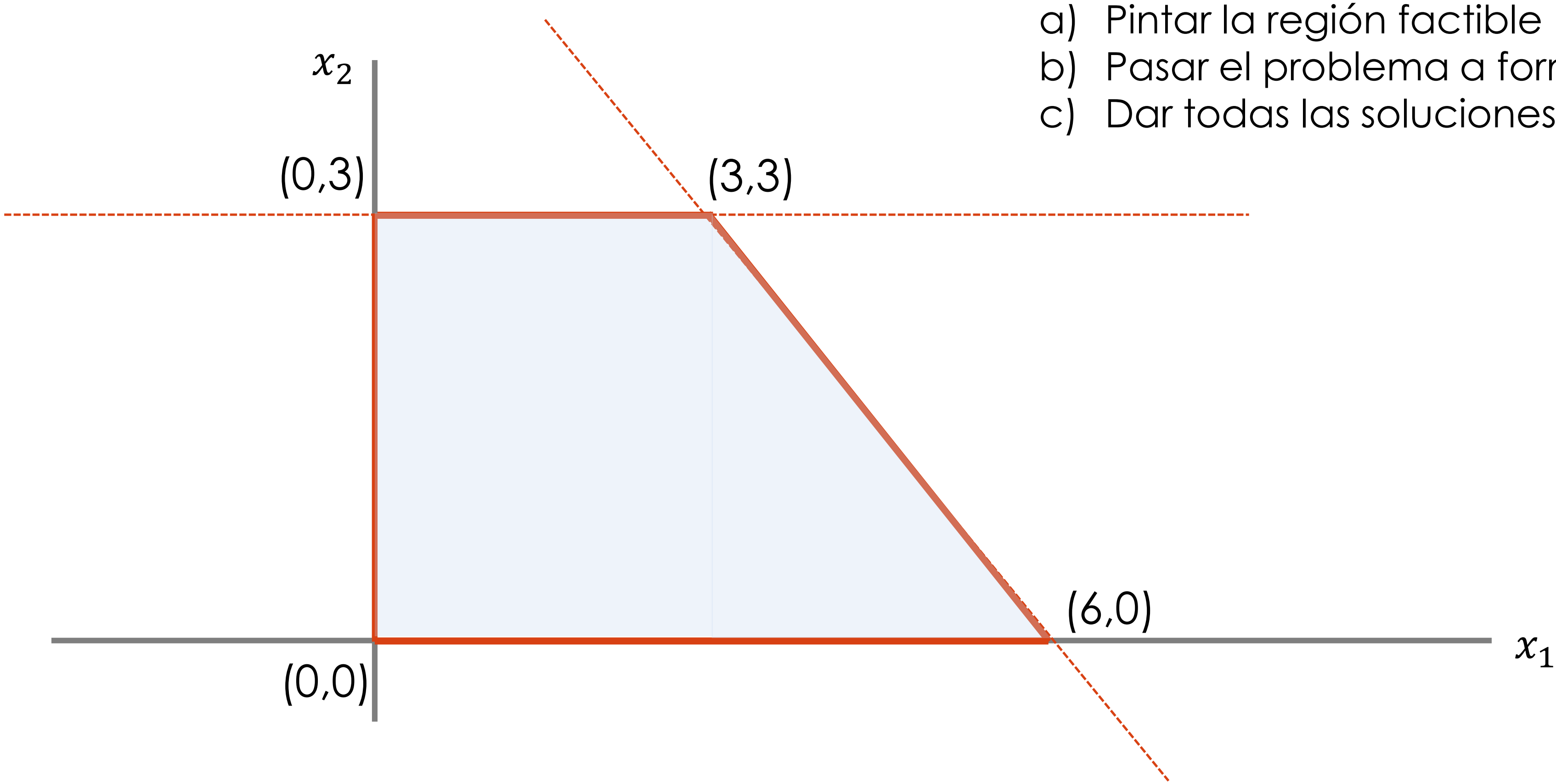
1. Delimitar la región factible
2. Enumerar sus vértices
3. Calcular la función objetivo en ellos y quedarse con el mejor

Afi Escuela

Ejemplo gráfico (I)

$$\begin{aligned} &Min\ c_1x_1 + c_2x_2 \\ &s.t.\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ &x_2 \leq 3 \\ &x_i \geq 0 \end{aligned}$$

a) Pintar la región factible
b) Pasar el problema a forma estándar
c) Dar todas las soluciones básicas



Ejemplo gráfico (II)

$$
\begin{aligned}
&Min\ c_1x_1 + c_2x_2\\
&s.t.\, x_1 + x_2 \leq 6\\
&x_2 \leq 3\\
&x_i \geq 0
\end{aligned}
$$

a) Pintar la región factible
b) Pasar el problema a forma estándar
c) Dar todas las soluciones básicas

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&Min\ c_1x_1 + c_2x_2\\
&s.t.\, x_1 + x_2 + x_3 = 6\\
&x_2 + x_4 = 3\\
&x_i \geq 0
\end{aligned}}
$$

$$
A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}
$$

Posibles bases:

$$\{a_1, a_2\}; \{a_1, a_4\}; \{a_2, a_3\}; \{a_2, a_4\}; \{a_3, a_4\}$$

Ejemplo gráfico (III)

$$\begin{aligned} &Min\ c_1x_1 + c_2x_2 \\ &s.t.\ x_1 + x_2 \leq 6 \\ &x_2 \leq 3 \\ &x_i \geq 0 \end{aligned}$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad b = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

a) Pintar la región factible
b) Pasar el problema a forma estándar
c) Dar todas las soluciones básicas

Las soluciones básicas son de la forma $X = (X_B, 0)$, donde $X_B = B^{-1}b$ y B son las columnas de A que forman la base.

1 $\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}\}$ $B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$X_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = (3,3)^t$$

$$B_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X^1 = (3,3,0,0) \text{ solución básica}}$$

2 $\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_4}\}$ $B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$X_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = (6,3)^t$$

$$B_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X^2 = (6,0,0,3) \text{ solución básica}}$$

Ejemplo gráfico (IV)

$$\begin{aligned} Min\ c_1x_1 + c_2x_2 \\ s.t.\, x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_2 \leq 3 \\ x_i \geq 0 \end{aligned}$$

3 $\{\boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_3}\}$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_3^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X_{B_3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = (3{,}3)^{\mathrm{t}}$$

$X^3 = (0{,}3{,}3{,}0)$ solución básica

4 $\{\boldsymbol{a_2}, \boldsymbol{a_4}\}$

$$B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_4^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X_{B_4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = (6, -3)^{\mathrm{t}}$$

$X^4 = (0{,}6{,}0, -3)$ solución básica

5 $\{\boldsymbol{a_3}, \boldsymbol{a_4}\}$

$$B_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_5^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X_{B_5} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = (6{,}3)^{\mathrm{t}}$$

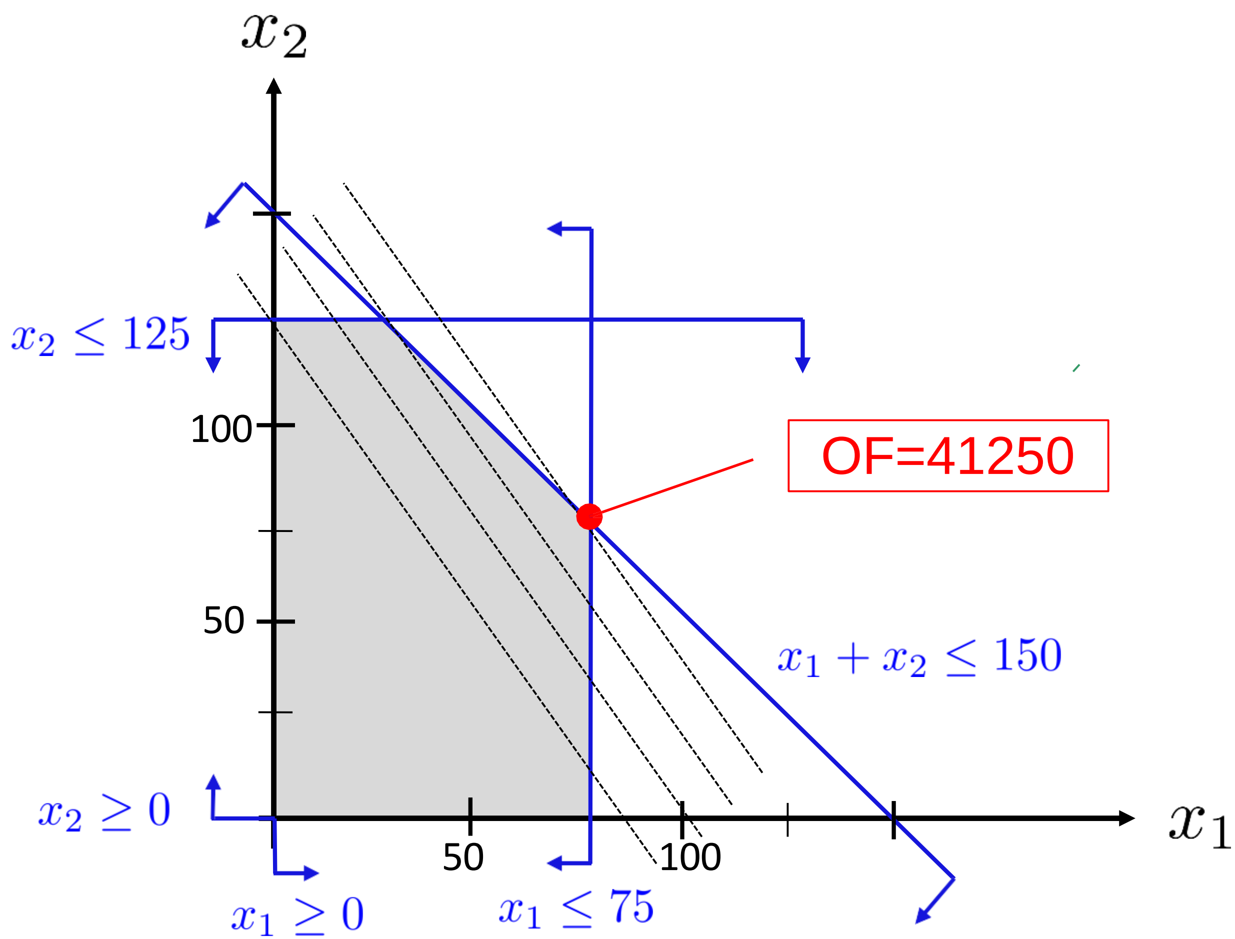
$X^5 = (0{,}0{,}6{,}3)$ solución básica

Ejemplo de aerolínea (I)

$$\max_{x_1, x_2} \quad 400x_1 + 150x_2$$

s.t.

$$x_1 + x_2 \leq 150$$
$$x_1 \leq 75$$
$$x_2 \leq 125$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$



Ejemplo de aerolínea (II)

$$\min_{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5} \quad -400x_1 - 150x_2$$

$$\text{s.t.}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 150$$

$$x_1 + x_4 = 75$$

$$x_2 + x_5 = 125$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{pmatrix}^T$$

$$c = \begin{pmatrix} -400 & -150 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^T$$

$$b = \begin{pmatrix} 150 & 75 & 125 \end{pmatrix}^T$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = (B \quad N),\ x = (x_B \quad x_N)^T,$$

$$x_N = 0,\ Bx_B = b \rightarrow \boxed{x_B = B^{-1}b}$$

Ejemplo de aerolínea (III)

(S1)
$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 150 \\ 75 \\ 125 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75 \\ 125 \\ \boxed{-50} \end{pmatrix} \rightarrow OF = * \\ x_4 = 0,\ x_5 = 0 \end{cases}$$

(S2)
$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 150 \\ 75 \\ 125 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ 125 \\ 50 \end{pmatrix} \rightarrow OF = -28750 \\ x_3 = 0,\ x_5 = 0 \end{cases}$$

(S3)
$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 150 \\ 75 \\ 125 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75 \\ 75 \\ 50 \end{pmatrix} \rightarrow OF = -41250 \\ x_3 = 0,\ x_4 = 0 \end{cases}$$

(S4)
$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 0} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 150 \\ 75 \\ 125 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \end{pmatrix} \rightarrow OF = * \\ x_2 = 0,\ x_5 = 0 \end{cases}$$

Ejemplo de aerolínea (IV)

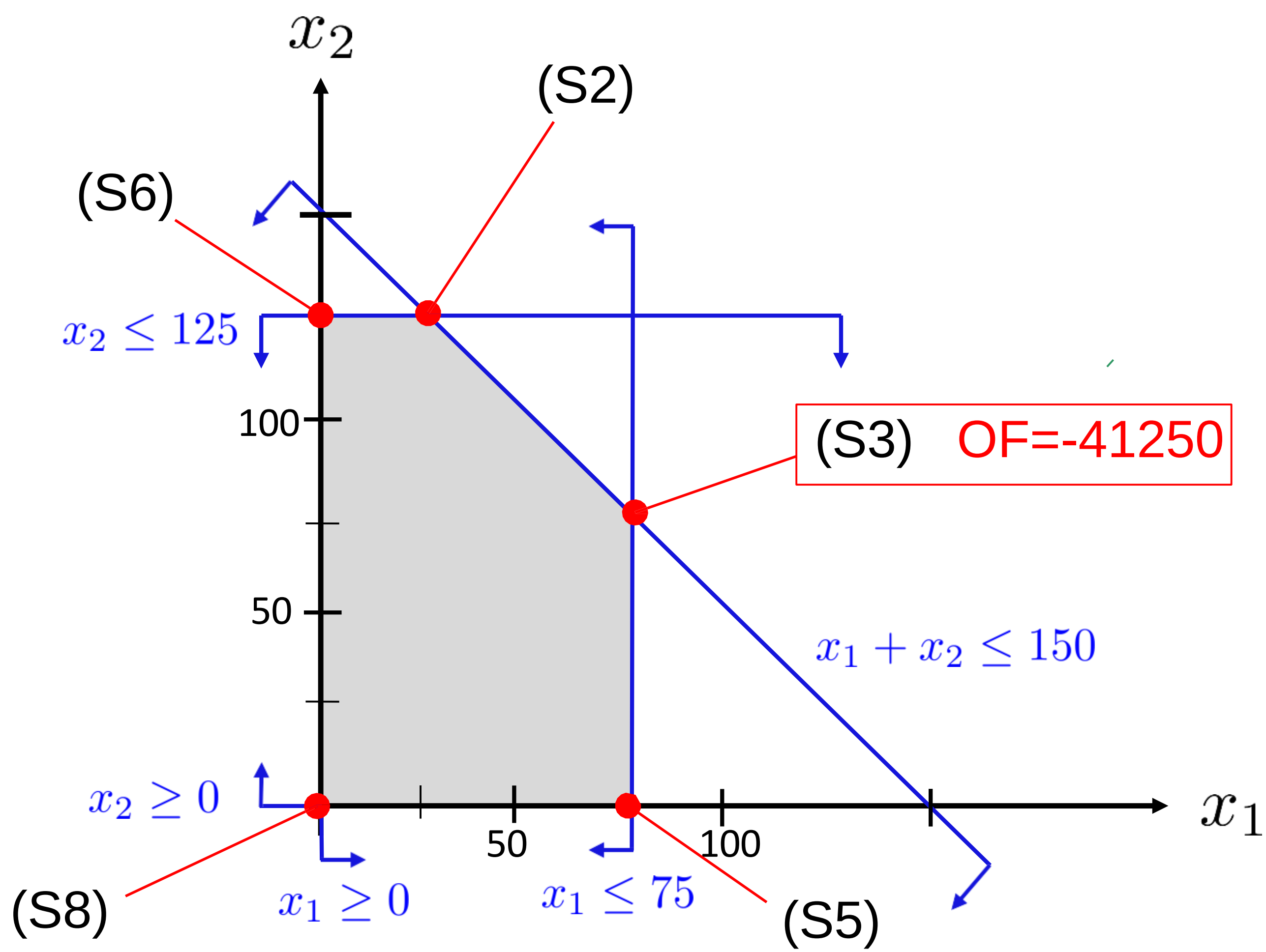
(S5) $$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 150 \\ 75 \\ 125 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75 \\ 75 \\ 125 \end{pmatrix} \rightarrow OF = -30000 \\ x_2 = 0,\, x_4 = 0 \end{array} \right.$$

(S6) $$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 150 \\ 75 \\ 125 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 125 \\ 25 \\ 75 \end{pmatrix} \rightarrow OF = -18750 \\ x_1 = 0,\, x_5 = 0 \end{array} \right.$$

(S7) $$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 0} \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 150 \\ 75 \\ 125 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \end{pmatrix} \rightarrow OF = * \\ x_1 = 0,\, x_4 = 0 \end{array} \right.$$

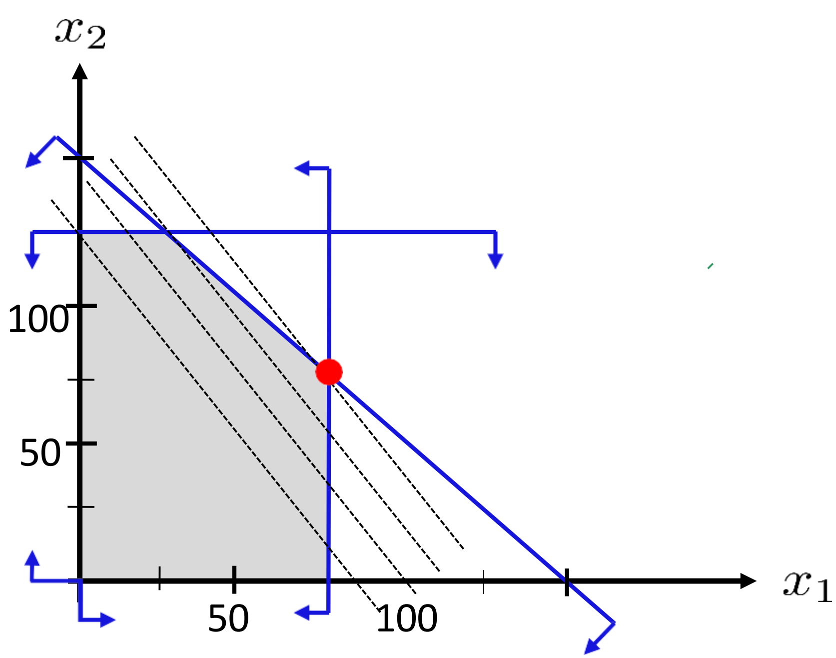
(S8) $$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 150 \\ 75 \\ 125 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 75 \\ 125 \end{pmatrix} \rightarrow OF = 0 \\ x_1 = 0,\, x_2 = 0 \end{array} \right.$$

Ejemplo de aerolínea (V)

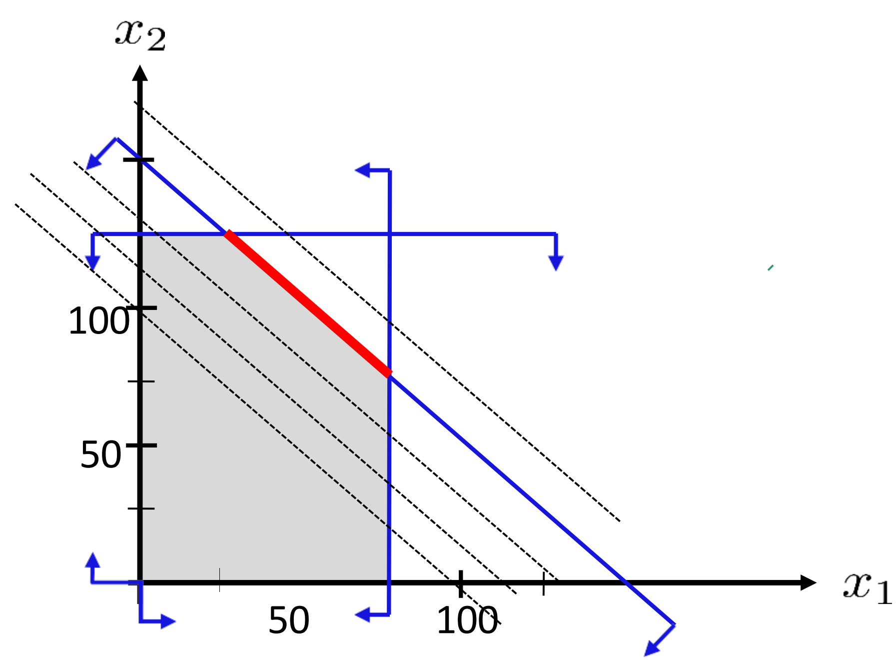


Tipos de soluciones (I)

Solución óptima única (vértice)

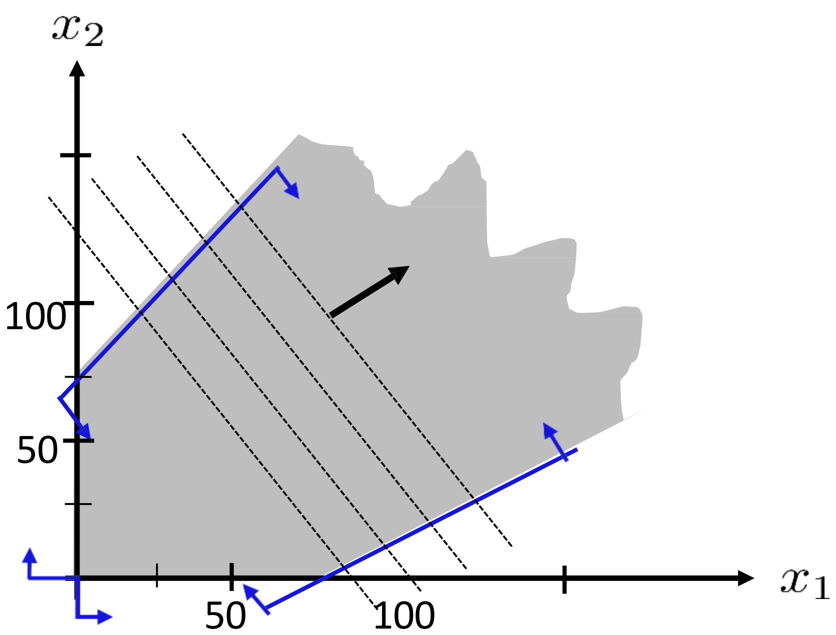


Infinitas soluciones (eje)

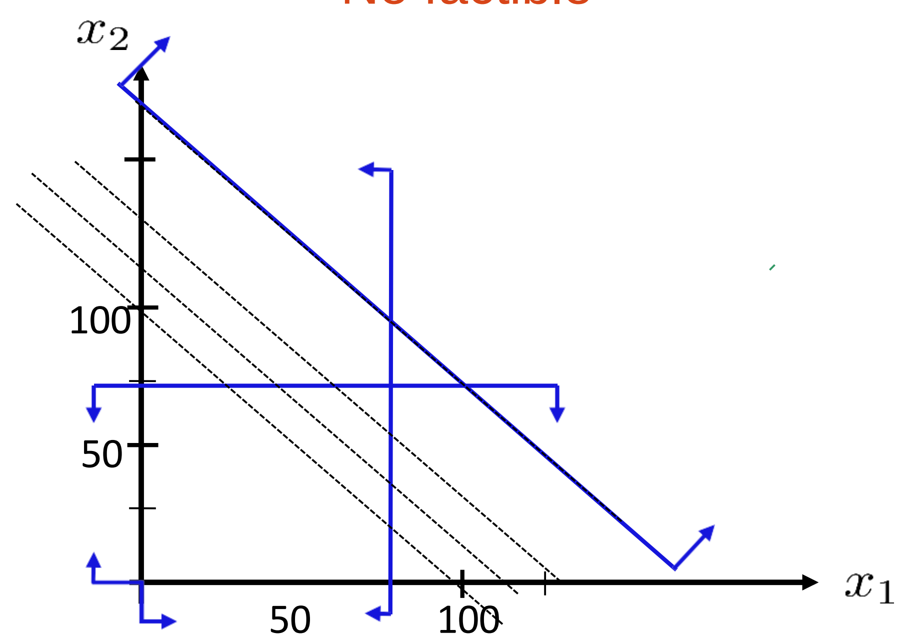


Tipos de soluciones (II)

Solución no acotada



No factible



5. Método del símplex

Idea básica

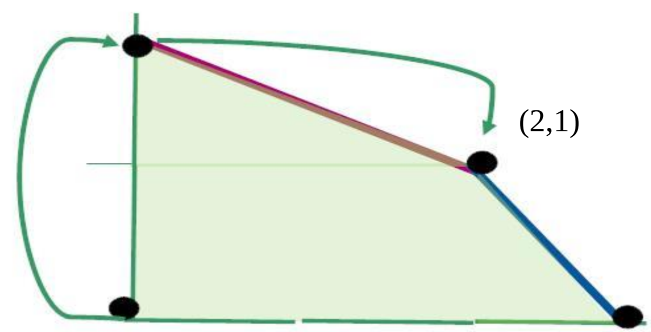
El problema con el método gráfico es que precisa enumerar/representar todos los vértices, y para problemas medianamente grandes hay demasiados.

Para ello, Dantzig creó el **método del símplex** en 1947, basado en la idea de pasar automáticamente de vértice a vértice adyacente, garantizando además que se pasa a un vértice que mejora al anterior (y si hay varios posibles, el que mejore más). Si en un determinado momento no se puede mejorar, es que ya estamos en el óptimo.

Requisito: el problema debe formularse en forma estándar.

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

donde asumimos que $m < n$.



Definiciones

- **Solución básica factible no degenerada**: es una S.B.F. que verifica $x_B > 0$.
- **Solución básica factible degenerada**: S.B.F. es degenerada si x_B tiene alguna componente nula.

Teorema 1. Mejora de una S.B.F. no degenerada

Sea x_0 una solución básica factible no degenerada con valor de la función objetivo z_0. Si existe $j \in \{1,2,..,n\}$ tal que $z_j - c_j > 0$, entonces se puede construir un subconjunto de la región factible tal que la función objetivo en cualquier punto de ese subconjunto es menor que z_0.

Teorema 2. Condición de optimalidad

Sea x_0 una solución factible básica no degenerada. Si $z_j - c_j \leq 0, \forall j = 1,2,\ldots,n$ entonces x_0 es solución óptima.

Algoritmo (I)

1. **Inicialización**

   S.B.F. inicial con base *B*:

$$x_B = \hat{b} = B^{-1}\, b \geq 0, \qquad z = c_B^T B^{-1} b = c_B^T x_B$$

2. **Prueba de optimalidad**

   Costes reducidos:
$$\widehat{\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{N}}^{\boldsymbol{T}}} = \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{B}}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{N} \;-\; \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{N}}^{\boldsymbol{T}} \;= \boldsymbol{z}_{\boldsymbol{N}} \;- \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{N}}^{\boldsymbol{T}}.$$

   Si $\hat{c}_N^T \leq\; 0$, **óptima, parar.**

   Si no, **criterio entrada:** seleccionar variable entrante x_t con $z_t \;-\; c_t = c_B B^{-1} a_t \;-\; c_t >\; 0$ (el mayor).

Algoritmo (II)

3. Iteración

Criterio salida: vector variable entrante $y_t = B^{-1} a_t$

Seleccionar variable básica saliente x_t siendo $\frac{\hat{\boldsymbol{b}}_s}{y_{st}} = \min_{1 \leq i \leq m} \{ \frac{\widehat{\boldsymbol{b}_i}}{y_{it}} : \mathrm{y_{it}} > 0 \}$
Si $y_{it} \leq 0 \; \forall i \Rightarrow$ problema no acotado.

4. Cambio de base

Actualizar B^{-1} y vector variables básicas, volver al paso 2.

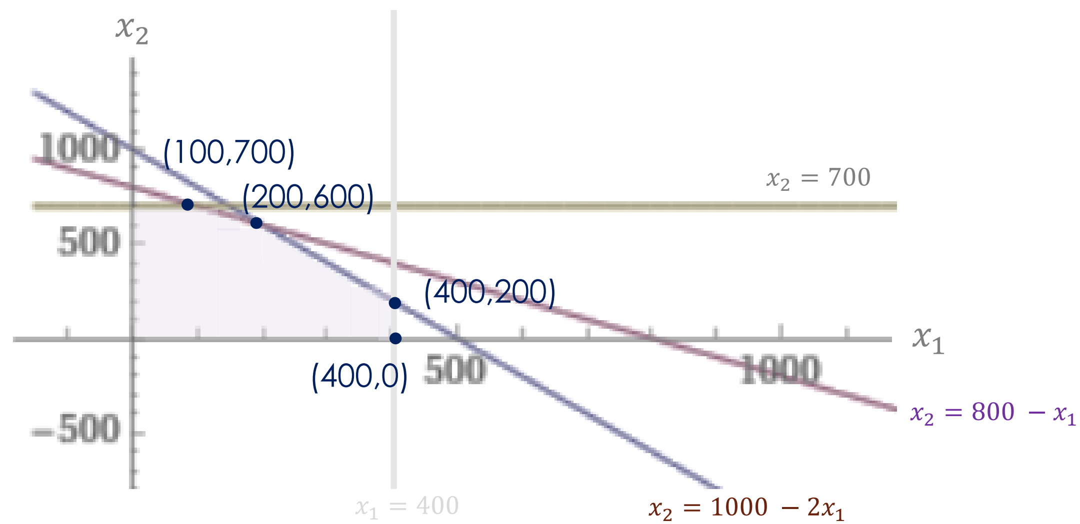
En cada iteración, nos movemos al vértice adyacente. Hacer esto corresponde a cambiar la base B por otra $\hat{B}$. Ambas bases difieren en un único vector de modo que las operaciones del cambio de base son relativamente sencillas.

Ejemplo: problema de cinturones (I)

Una empresa fabrica dos tipos de cinturones A,B. El beneficio neto por unidad es de 2 para A y de 1,5 para B. El tiempo para fabricar un cinturón A es doble que para un cinturón B y si todos fuesen de tipo B podría fabricar 1000 diarios. El cuero es suficiente para 800 cinturones diarios de tipo A o B. Se dispone de 400 hebillas de tipo A y 700 de tipo B. **¿Cuántos cinturones y de qué tipo tendremos que fabricar diariamente para que el beneficio sea máximo?**

$$x_1: n^{\underline{o}}\ de\ cinturones\ de\ tipo\ A\ que\ tienen\ que\ fabricar\ diariamente$$
$$x_2: n^{\underline{o}}\ de\ cinturones\ de\ tipo\ B\ que\ tienen\ que\ fabricar\ diariamente$$

$$\begin{aligned} & max\ 2x_1 + 1.5\,x_2 \\ & s.t.\ x_1 + x_2 \le 800 \\ & 2x_1 + x_2 \le 1000 \\ & x_1 \le 400 \\ & x_2 \le 700 \\ & x_i \ge 0 \end{aligned}$$



Ejemplo: problema de cinturones (II)

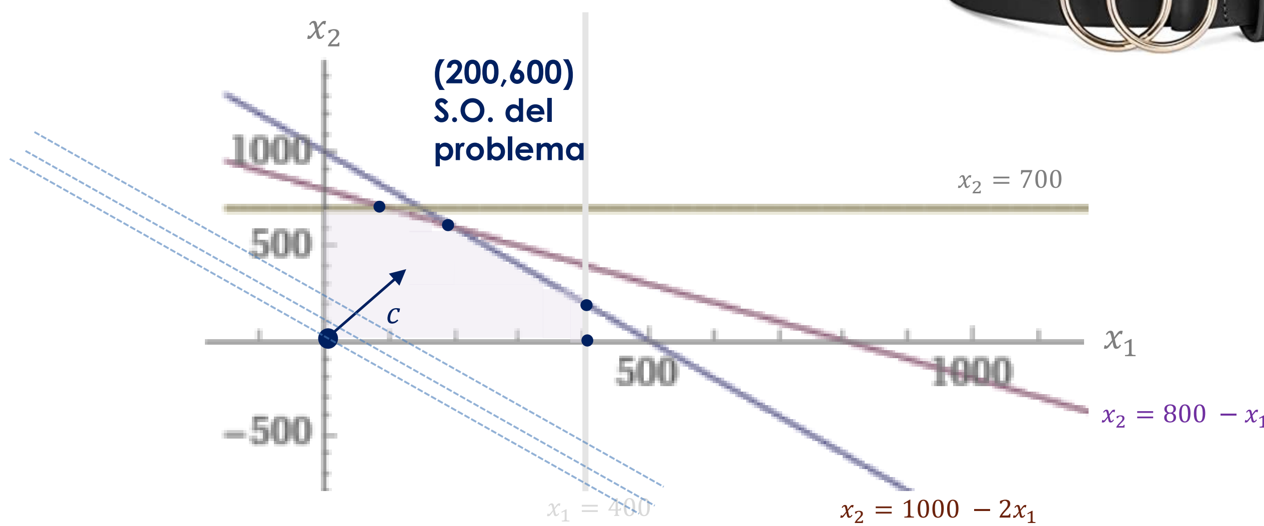
$Haz\ de\ rectas$: $2x_1 + 1.5\, x_2 = K, K \in \mathbb{R}$

$Pintamos$ $2x_1 + 1.5\, x_2$ =0 y después trazamos paralelas.

Dirección de máx. crecimiento; vector gradiente:

$c = (2, 1.5)$

El vector gradiente coincide con vector de costes.



Ejemplo: problema de cinturones (III)

$$\begin{aligned} &max\ 2x_1 + 1{,}5\ x_2 \\ &s.t.\ x_1 + x_2 \leq 800 \\ &x_1 \leq 400 \\ &x_2 \leq 700 \\ &2x_1 + x_2 \leq 1000 \\ &x_i \geq 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &min\ -2x_1 - 1{,}5\ x_2 \\ &s.t.\ x_1 + x_2 + x_3 = 800 \\ &x_1 + x_4 = 400 \\ &x_2 + x_5 = 700 \\ &2x_1 + x_2 + x_6 = 1000 \\ &x_i \geq 0 \end{aligned}$$

Empezamos en una S.B.F. (0,0) y nos vamos a un vértice adyacente mejor que el que tenemos: (400, 0) ó (0, 700), ambos son mejores. No ocurre, en general, que el camino más corto sea con el que más mejora.

El simplex no sabe, a priori, cuál es el camino más corto.

Ejemplo: problema de cinturones (IV)

$$\begin{aligned} &min\ -2x_1 - 1{,}5\,x_2 \\ &s.t.\, x_1 + x_2 + x_3 = 800 \\ &x_1 + x_4 = 400 \\ &x_2 + x_5 = 700 \\ &2x_1 + x_2 + x_6 = 1000 \\ &x_i \geq 0 \end{aligned}$$

Columna pivote: coeficiente de f.o. de menor valor

Costos de los vectores de la base		**-2**	**-1,5**	**0**	**0**	**0**	**0**
0	800	1	1	1	0	0	0
0	400	1	0	0	1	0	0
0	700	0	1	0	0	1	0
0	1000	2	1	0	0	0	1
Valor f.o.: 0							

Ejemplo: problema de cinturones (V)

$$\min\ -2x_1 - 1{,}5\,x_2$$
$$s.t.\ x_1 + x_2 + x_3 = 800$$
$$x_1 + x_4 = 400$$
$$x_2 + x_5 = 700$$
$$2x_1 + x_2 + x_6 = 1000$$
$$x_i \geq 0$$

Columna pivote: coeficiente de f.o. de menor valor

Costos de los vectores de la base		-2	-1,5	0	0	0	0
0	800	1	1	1	0	0	0
0	400	1	0	0	1	0	0
0	700	0	1	0	0	1	0
0	1000	2	1	0	0	0	1
Valor f.o.: 0							

Min
800/1
400/1
700/0
1000/2

Ejemplo: problema de cinturones (VI)

$\{a_3, a_4, a_5, a_6\}$ S.L.I.

(0,0,800,400,700,1000) S.B.F.

$$\min\ -2x_1 - 1{,}5\,x_2$$
$$s.t.\ x_1 + x_2 + x_3 = 800$$
$$x_1 + x_4 = 400$$
$$x_2 + x_5 = 700$$
$$2x_1 + x_2 + x_6 = 1000$$
$$x_i \geq 0$$

Costos de los vectores de la base		**-2**	**-1,5**	**0**	**0**	**0**	**0**
0	800	1	1	1	0	0	0
0	400	pivotar 1	0	0	1	0	0
0	700	0	1	0	0	1	0
0	1000	2	1	0	0	0	1
Valor f.o.: 0		2	1,5	0	0	0	0

← Costos indirectos

Ejemplo: problema de cinturones (VII)

$\{a_3, a_4, a_5, a_6\}$ S.L.I.

(0,0,800,400,700,1000) S.B.F.

$$\begin{aligned} &min\ -2x_1 - 1{,}5\,x_2 \\ &s.t.\ x_1 + x_2 + x_3 = 800 \\ &x_1 + x_4 = 400 \\ &x_2 + x_5 = 700 \\ &2x_1 + x_2 + x_6 = 1000 \\ &x_i \geq 0 \end{aligned}$$

	-2	**-1,5**	**0**	**0**	**0**	**0**
800	1	1	1	0	0	0
400	1	0	0	1	0	0
700	0	1	0	0	1	0
1000	2	1	0	0	0	1
0	2	1,5	0	0	0	0

La fila del elemento pivote se divide entre él, en la siguiente tabla:

400	1	0	0	1	0	0

Fila entrante

Resto de filas: fila vieja – coef. Pivote * fila entrante

Ejemplo: problema de cinturones (VIII)

$\{a_3, a_1, a_5, a_6\}$ S.L.I.

(400,0,400,0,700,200) S.B.F.

$$\begin{aligned} &min\ -2x_1 - 1{,}5\,x_2 \\ &s.t.\, x_1 + x_2 + x_3 = 800 \\ &x_1 + x_4 = 400 \\ &x_2 + x_5 = 700 \\ &2x_1 + x_2 + x_6 = 1000 \\ &x_i \geq 0 \end{aligned}$$

	-2	**-1,5**	**0**	**0**	**0**	**0**
800	1	1	1	0	0	0
400	1	0	0	1	0	0
700	0	1	0	0	1	0
1000	2	1	0	0	0	1
0	2	1,5	0	0	0	0

La fila del elemento pivote se divide entre él, en la siguiente tabla:

400	0	1	1	-1	0	0
400	1	0	0	1	0	0
700	0	1	0	0	1	0
200	0	1	0	-2	0	1
-800	0	1,5	0	-2	0	0

Fila entrante

Ejemplo: problema de cinturones (IX)

$\{a_3, a_1, a_5, a_2\}$ S.L.I.

(400,200,200,0,500,0) S.B.F.

$$\begin{aligned} min\ & -2x_1 - 1{,}5\,x_2 \\ s.t.\ & x_1 + x_2 + x_3 = 800 \\ & x_1 + x_4 = 400 \\ & x_2 + x_5 = 700 \\ & 2x_1 + x_2 + x_6 = 1000 \\ & x_i \geq 0 \end{aligned}$$

400	0	1	1	-1	0	0
400	1	0	0	1	0	0
700	0	1	0	0	1	0
200	0	1	0	-2	0	1
-800	0	1,5	0	-2	0	0

200	0	0	1	1	0	-1
400	1	0	0	1	0	0
500	0	0	0	2	1	-1
200	0	1	0	-2	0	1
-1.100	0	0	0	1	0	-1,5

Ejemplo: problema de cinturones (X)

$\{a_4, a_1, a_5, a_2\}$ S.L.I.

(200,600, 0,200,100,0) S.B.F.

$$\begin{aligned} &min\ -2x_1 - 1{,}5\,x_2 \\ &s.t.\, x_1 + x_2 + x_3 = 800 \\ &x_1 + x_4 = 400 \\ &x_2 + x_5 = 700 \\ &2x_1 + x_2 + x_6 = 1000 \\ &x_i \geq 0 \end{aligned}$$

200	0	0	1	1	0	-1
400	1	0	0	1	0	0
500	0	0	0	2	1	-1
200	0	1	0	-2	0	1
-1.100	0	0	0	1	0	-1,5

200	0	0	1	1	0	-1
200	1	0	-1	0	0	1
100	0	0	-2	0	1	1
600	0	1	-2	0	0	3
-1.300	0	0	-1	0	0	-0,5

Ejemplo: problema de cinturones (XI)

$\{a_4, a_1, a_5, a_2\}$ S.L.I.

(200,600, 0,200,100,0) S.B.F.

$$
\begin{aligned}
&\min\ -2x_1 - 1{,}5\, x_2 \\
&s.t.\ x_1 + x_2 + x_3 = 800 \\
&x_1 + x_4 = 400 \\
&x_2 + x_5 = 700 \\
&2x_1 + x_2 + x_6 = 1000 \\
&x_i \geq 0
\end{aligned}
$$

200	0	0	1	1	0	-1
200	1	0	-1	0	0	1
100	0	0	-2	0	1	1
600	0	1	-2	0	0	3
-1.300	0	0	-1	0	0	-0,5

No hay costos indirectos positivos, no podemos mejorar la solución.

$\{a_4, a_1, a_5, a_2\}$ base. La solución posible básica es:

$$X = (200{,}600{,}0{,}200{,}100{,}0) \Rightarrow \boldsymbol{(200, 600)\ es\ solución\ óptima}$$

Ejercicio: golosinas

Una compañía fabrica tres tipos de golosinas A, B y C. Cada golosina está hecha a base de azúcar y chocolate. En la siguiente tabla se exponen las composiciones, por unidad, de cada tipo de golosina y el beneficio, por unidad. La compañía dispone de 50 onzas de azúcar y 100 onzas de chocolate. **¿Qué cantidad de cada tipo de golosina debe fabricar la compañía para maximizar el beneficio total?**

Tipo de golosina	Cantidad de azúcar	Cantidad de chocolate	Beneficio por unidad
A	1	2	3
B	1	3	7
C	1	1	5

1. Formular problema
2. Resolverlo con PuLP
3. Pasar a forma estándar y resolverlo a mano con el símplex

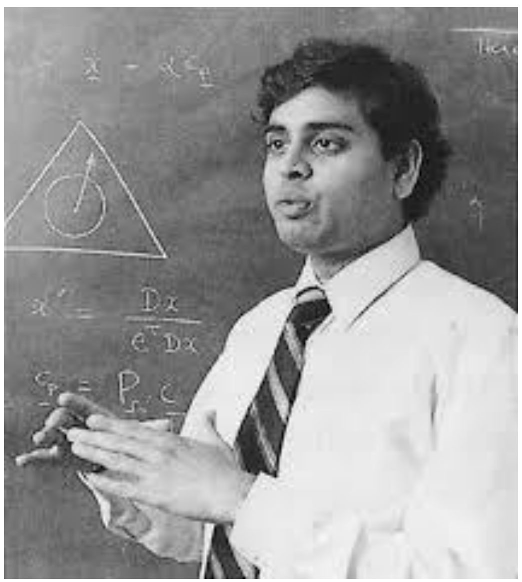
6. Método del punto interior

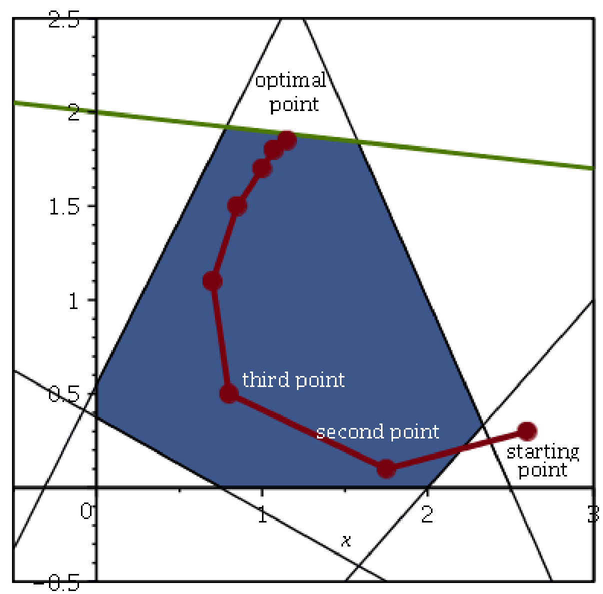
Idea básica

Introducido por Narendra Karmarkar, en 1984, para resolver problemas de programación lineal.

Los métodos de punto interior son algoritmos **iterativos** que basan su estrategia en la **búsqueda del óptimo** a través de caminos (curvas generadas por una sucesión de puntos) que recorren la **zona interior de la región factible.**

El objetivo es **moverse en una dirección que mejore** la función **objetivo.**





Algoritmo

Paso 1. Escoger un punto de prueba inicial x^0 en la región factible para el algoritmo iterativo.

Paso 2. Realizar una transformación lineal de la región factible para que el punto de prueba actual x^k esté alejado de la frontera.

Paso 3. Escoger una dirección para moverse desde el punto de prueba actual hacia otro punto de prueba dentro de la región factible que mejore el valor de la función objetivo Z.

Paso 4. Si cumple cierta condición de parada, el algoritmo se detiene, de lo contrario vuelve al paso 2.

El algoritmo básico consiste en, comenzando por x^0, generar una secuencia de puntos x^k que nos lleven hasta el punto óptimo x^* del problema.

Iremos pasando de un punto a otro hasta que se verifique alguna condición que nos indique que el punto actual x^k es solución de nuestro problema.

Ejemplo de inicialización

$$
\begin{array}{ll}
\min & -3x_1 - 2x_2 \\
\text{sujeto a} & \\
& \begin{array}{rrcl} 4x_1 & -2x_2 & \leq & 5 \\ 3x_1 & +4x_2 & \geq & 1 \\ x_1 & +\ x_2 & \leq & 2 \end{array} \\
& x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0
\end{array}
\Longrightarrow
\begin{array}{ll}
\min & -3x_1 - 2x_2 \\
\text{sujeto a} & \\
& \begin{array}{rrrrrcl} 4x_1 & -2x_2 & +x_3 & & & = & 5 \\ 3x_1 & +4x_2 & & -x_4 & & = & 1 \\ x_1 & +\ x_2 & & & +x_5 & = & 2 \end{array} \\
& x_i \geq 0 \text{ para toda } i = 1, \ldots, 5
\end{array}
$$

El punto $x^0 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 4, \frac{5}{2}, 1)$ es interior (todas las componentes son mayores que 0) y factible (satisface las restricciones del problema).

Cada nuevo punto se obtendrá del anterior siguiendo el siguiente procedimiento iterativo:

$$x^{k+1} = x^k + \alpha^k \Lambda x^k, \qquad \alpha^k \geq 0$$

Λx^k representa nuestra dirección de movimiento, y α^k, longitud de paso, nos indica cuánto nos alejamos de x^k a lo largo de la dirección calculada.

1) ¿Cómo obtener la dirección de movimiento?
2) ¿Cómo calcular la longitud de paso?

Dirección de movimiento (I)

Para ser una buena dirección de movimiento debe cumplir:

- Debe preservar la factibilidad del nuevo punto (dirección factible).
- Debe mejorar el valor de la función objetivo (mejorar significa disminuir en este caso, puesto que el problema es de minimización).

Es decir, el nuevo punto debe garantizar $Ax^{k+1} = b$ y mejorar la función objetivo.
Sabemos que:

$$Ax^k = b \text{, por ser factible}$$

y

$$x^{k+1} = x^k + \alpha^k \Lambda x^k \text{, por ser factible.}$$

Por tanto, la condición de factibilidad se reduce a:

$$b = Ax^{k+1} = A\left(x^k + \alpha^k \Lambda x^k\right) = Ax^k + \alpha^k A \Lambda x^k = b + \alpha^k A \Lambda x^k$$

$$\boxed{\Rightarrow \boldsymbol{A \Lambda x^k = 0}}$$

Dirección de movimiento (II)

$$\boxed{\boldsymbol{A\Lambda x^k = 0}}$$

Eso lo cumple la proyección ortogonal sobre el espacio nulo de A (demostración):

$$\boldsymbol{P = I_n - A^T\left(AA^T\right)^{-1}A}$$

Además, la dirección debe mejorar el valor de la función objetivo, es decir,

$$c^T x^{k+1} \leq c^T x^k$$

Como $\alpha^k > 0$, podemos escribir la condición anterior como:

$$c^T x^{k+1} = c^T\left(x^k + \alpha^k \Lambda x^k\right) = c^T x^k + \alpha^k c^T \Lambda x^k \leq c^T x^k$$

Por tanto,

$$\boxed{\boldsymbol{c^T \Lambda x^k \leq 0}}$$

Esta condición se denomina condición de descenso.

Otros detalles

Cálculo de la longitud de paso

$$\alpha = \rho \cdot \overline{\alpha} = \rho \cdot \min \left\{ -\frac{x_i^k}{\Delta x_i} \text{ para toda } i \text{ tal que } \Delta x_i \leq 0 \right\} \qquad \rho \in [0.95, 0.9995].$$

Detección del óptimo

Uno de los criterios que suele usarse es parar cuando la mejora relativa en la función objetivo sea pequeña.

$$\frac{|c^T x^k - c^T x^{k+1}|}{1 + |c^T x^k|} \leq \varepsilon.$$

Solvers y referencias

Hay muchos *solvers* de LP disponibles para usar con Python, la mayoría de ellos usan el método del Simplex. Entre ellos:

- GLPK
- LPSOLVE
- CLP
- Gurobi (licencia académica gratuita)
- CPLEX (licencia académica gratuita)

Todos ellos pueden ser invocados por PuLP (en el que por defecto viene preinstalado CLP).

Como referencias bibliográficas útiles:

- H. Guerrero Salas: Programación Lineal Aplicada
- D. Bertsimas: Introduction to Linear Optimization

Afi Escuela