Afi Escuela

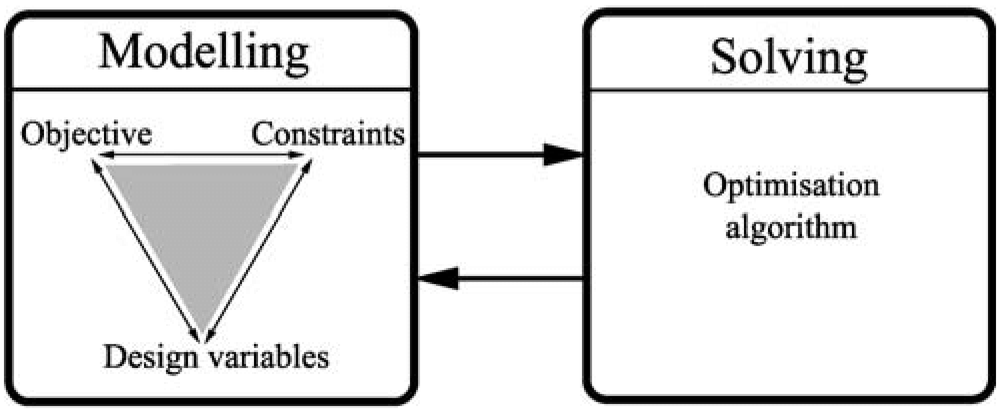
Optimización (MDSBD 2022)

Introducción

Jorge López Lázaro
jorloplaz@gmail.com

Objetivos

- **Modelar** y **aplicar** métodos de optimización para problemas generales
- Conocer los **fundamentos matemáticos y algoritmos básicos** que se utilizan para solucionar problemas de optimización
- Usar **Python** para invocar a esos algoritmos de manera eficiente



Índice

1. ¿Qué es la optimización?
2. Tipos de optimización
   - Lineal (LP)
   - Entera (IP)
   - No lineal (NLP)
3. Aplicaciones y ejemplos

1. ¿Qué es la optimización?

Optimizar

- Optimizar supone:
    - Buscar la mejor opción de entre varias posibles (**variables de decisión**)
    - Donde "mejor" o "peor" se determina con un criterio específico (**función objetivo**)
    - Sujeta a las limitaciones existentes que acotan dichas opciones (**restricciones**)

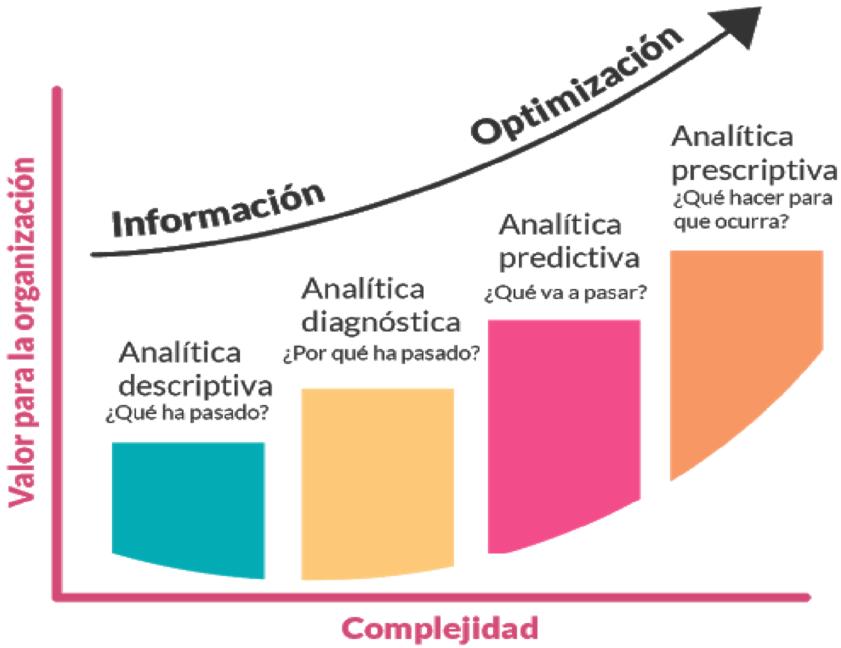
- Para pasar de la realidad al "lenguaje matemático" se recurre a representaciones simplificadas de dicha realidad (**modelos**)

Análisis del problema → Construcción del modelo → Solución numérica → Validación del modelo → Puesta en práctica de la solución

Optimización

- La disciplina encargada de:
  - Formular problemas de decisión de entre muchas opciones posibles (**modelado**)
  - Diseñar algoritmos que resuelvan estos problemas de forma eficiente (**algoritmos**)
  - Validar y aplicar las soluciones encontradas (**validación-aplicación**)

- ¿Por qué estudiarla en Data Analytics? Porque es pilar básico en los problemas de **analítica avanzada**



Problemas de optimización

Debemos tener en cuenta 3 elementos básicos:

1. ¿Qué se entiende por la mejor solución?

   Función objetivo: medida cuantitativa del funcionamiento del sistema que se desea optimizar; beneficios, tiempo, energía, costes...

2. ¿Qué podemos ajustar?

   Variables de decisión: representan las decisiones que pueden afectar el valor de la función objetivo; horario de despegues de las líneas aéreas, cantidad de dinero a invertir, cantidad de dinero ingresado en X tiempo, …

3. ¿Qué condiciones debemos tener en cuenta?

   Restricciones: conjunto de relaciones que las variables están obligadas a cumplir para ser solución del modelo, de forma que algunas decisiones no se permiten: el despegue de un avión está limitado por motivos de seguridad aérea, el riesgo en una operación financiera se debe controlar, una fábrica no puede producir más de X unidades de un producto…

Ciclo de optimización

1. **Identificación del problema**
   – Especificación, datos clave y parámetros fijos
2. **Especificación matemática y formulación**
   – Formulación matemática para resolución (tipo de modelo, dimensiones, …)
3. **Resolución**
   – Selección del método y del algoritmo (o uso de software especializado que decida por nosotros)
4. **Interpretación y análisis de resultados**
   – Comprobación de solución: ¿tiene sentido?, ¿cumple especificación y objetivos?
5. **Verificación, validación y refinamiento**
   – Si el resultado de 4 no es válido, revisar modelo y/o código, refinarlos y volver a probar

Formulación de modelos

1. **Identificar y definir parámetros del modelo**
   - Los parámetros no cambian de valor durante la resolución del modelo (fijos).

2. **Definir las variables de decisión**
   - Definen la solución. Cualquier elemento que pueda cambiar de valor durante la resolución es una variable.

3. **Definir las funciones de las variables en el modelo:** función objetivo y restricciones.
   1. **Función objetivo:** define el valor de las soluciones (lo buenas o malas que son).
   2. **Restricciones:** definen la factibilidad de las soluciones (todas han de cumplirse).

   - Máxima atención **al tipo de variables y tipo de funciones** que se definen, ya que condicionan el **método de resolución.**

2. Tipos de optimización

Clasificación de problemas (I)

- **Naturaleza de los datos**
  - Deterministas
  - Estocásticos
- **Tiempo**
  - Dinámico
  - Estático
- **Linealidad de las variables**
  - Lineales
  - No lineales
- **Continuidad de las variables**
  - Continuos
  - Enteros

Clasificación de problemas (II)

- **Precisión**
  - Heurística
  - Exacta

- **Según si tienen solución o no**
  - Problemas no factibles
  - Problemas factibles
    - Óptimo global (acotados)
    - Sin óptimo global (no acotados)

Clasificación de problemas (II)

- **Programación matemática**
  - **Programación lineal (LP)**
    - Método del símplex
    - Representación gráfica
  - **Programación entera (IP)**
    - Ramificación y acotamiento
    - Planos de corte
    - Ramificación y poda
  - **Programación no lineal (NLP)**
    - Método del descenso por gradiente
    - Método de Newton
    - Método de cuasi-Newton

Software de optimización

Hay diversas bibliotecas de Python que permiten definir y solucionar problemas de optimización. Los que más se usan por ser software libre y que veremos en la parte práctica son:

- PuLP (para LP e IP)
- SciPy Optimization (para NLP)

También existen distintas opciones de software comercial, sujetos a licencia y que permiten resolver problemas más especializados, además de los anteriores:

- Gurobi
- CPLEX

Afi Escuela

3. Aplicaciones y ejemplos

Casos de uso

LP

- ¿Cuál es la producción óptima de un producto para maximizar el beneficio y no sobrepasar la capacidad de producción?
- ¿Cuánto stock debe almacenarse de un producto para minimizar los costes y satisfacer la demanda?
- ¿Desde qué fábricas se debe enviar a qué mercados para esto mismo?

IP

- ¿Qué máquinas tienen que fabricar qué piezas de un producto?
- ¿Qué proyectos se deben realizar para maximizar los beneficios totales de una empresa?

NLP

- Optimización de carteras: determinar la composición de una cartera de inversión para maximizar la rentabilidad, a la vez que se incurre en el menor riesgo posible.

Producción con recursos escasos (I)

Una fábrica de cerveza produce varios tipos de cerveza, con distintas tecnologías de producción, utilizando diferente cantidad de una materia prima básica y requiriendo un número diferente de horas del personal (otros elementos como energía o inmovilizados (local…) no se consideran)
¿Cuántos litros semanales debe producir de cada cerveza para maximizar el beneficio?

Datos semana:

	P.V.P. (€/1000l.)	Mat.prima (€/1000l)	Mano de obra (empl./1000l)
Rubia	300 €	20	5
Negra	500 €	50	4
Disponible		90	14

Producción con recursos escasos (II)

	P.V.P. (€/1000l)	Mat.prima (€/1000l)	Mano de obra (empl./1000l)
Rubia	300 €	20	5
Negra	500 €	50	4
Disponible		90	14

Índices:

i. tipos de cerveza $(1,\ldots,n)$

j. materias primas $(1,\ldots,m)$

Parámetros:

p_i : precio de venta cerveza tipo i (€/1000l)

a_{ji}: cantidad de materia prima j usada en producir cerveza i (€/1000l)

e_i : mano de obra utilizada para producir cerveza i (empleados/1000l)

u_j: límite disponible de materia prima j (€)

v: número de empleados disponibles (empleados)

Producción con recursos escasos (III)

Índices y parámetros:

i. tipos de cerveza

j. materias primas

p_i : precio de venta cerveza tipo i (€/1000l)

a_{ji} : cantidad de materia prima j usada en producir cerveza i (€/1000l)

e_i : mano de obra utilizada para producir cerveza i (empleados/1000l)

u_j : límite disponible de materia prima j (€)

v : número de empleados disponibles (empleados)

Variables

Q_i : cantidad a producir de cerveza tipo i (1000l)

B : beneficio (€)

Modelo

$$\max B$$

$$B = 300Q_1 + 500Q_2 - (20Q_1 + 50Q_2)$$

$$20Q_1 + 50Q_2 \leq 90$$

$$5Q_1 + 4Q_2 \leq 14$$

$$Q_1, Q_2 \geq 0$$

Planificación de producción e inventario (I)

Una empresa desea planear su política de producción/inventario para los meses de agosto, septiembre, octubre y noviembre. La demanda estimada del producto para esos meses es de 500, 600, 800 y 1.000 unidades, respectivamente. La capacidad de producción mensual es de 600 unidades con un coste de 2500 €/unidad. El inventario inicial es de 250 unidades y durante cualquier mes dado se pueden almacenar a lo sumo 400 unidades. Si el coste mensual por unidad por mantener en inventario es de 300 €, minimizar el coste total de producción e inventario.

Se debe satisfacer la demanda y se requiere tener 100 unidades en inventario al final de noviembre.

Planificación de producción e inventario (II)

Índices

i meses

(i=1,…,n)

Parámetros

c : coste de inventario

c': coste de producción

d_i : demanda del mes i

p : producción máxima

i : inventario máximo

i : inventario inicial

i : inventario final

Variables

P_i: producción del mes i

I : inventario al inicio del mes i

Modelo

$$\min \sum_i (cI_i + c'P_i)$$

$$I_{i-1} + P_i - d_i = I_i \quad \forall i$$

$$P_i \leq \bar{p} \quad \forall i$$

$$I_i \leq \bar{\imath} \quad \forall i$$

$$I_1 = i_0 ,\ I_{n+1} = i_f$$

$$I_i ,\ P_i \geq 0 \quad \forall i$$

Distribución de transporte (I)

Una empresa tiene una serie de fábricas de envasado donde produce cajas de un determinado producto y un conjunto de mercados de consumo a los que tiene que llevar las cajas. Cada fábrica tiene una capacidad de producción de cajas y cada mercado demanda un número de cajas. El transporte de cada caja se hace de forma unitaria desde cada fábrica a cada mercado con un coste. ¿Cómo hay que hacer la distribución para minimizar el coste de transporte?

Costes (€/caja)	Madrid	Barcelona	Valencia	Capacidad producción (cajas)
Vigo	60	120	90	350
Algeciras	50	150	110	700
Demanda (cajas)	400	450	150	

Distribución de transporte (II)

Costes (€/caja)	Madrid	Barcelona	Valencia	Capacidad producción (cajas)
Vigo	60	120	90	350
Algeciras	50	150	110	700
Demanda (cajas)	400	450	150	

Índices

i. fábricas (1, …, m)

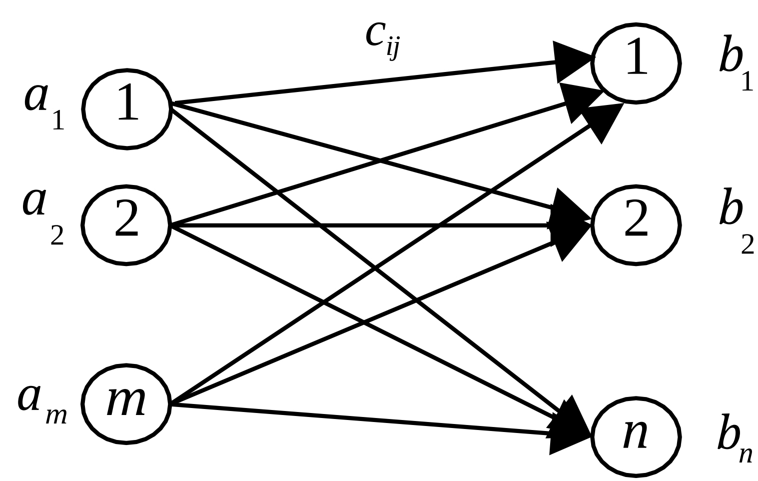
j. mercados (1, …, n)

Parámetros

a_i: capacidad de producción fábrica i (cajas)

b_j: demanda en mercado de consumo j (cajas)

c_{ij}: coste unitario transporte de fábrica i a mercado j (€/caja)



Distribución de transporte (III)

Costes (€/caja)	Madrid	Barcelona	Valencia	Capacidad producción (cajas)
Vigo	60	120	90	350
Algeciras	50	150	110	700
Demanda (cajas)	400	450	150	

Índices

i fábricas, j mercados

Parámetros

a_i: capacidad de producción fábrica i (cajas)

b_j: demanda en mercado de consumo j (cajas)

c_{ij}: coste unitario transporte de fábrica i a mercado j (€/caja)

Variables

Q_{ij}: cantidad a enviar de fábrica i a mercado j (cajas)

Z : coste de transporte (€)

Modelo (se satisface la demanda)

$$\min \quad Z$$

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} Q_{ij}$$

$$\sum_j Q_{ij} \le a_i \quad i = 1, \ldots, m$$

$$\sum_i Q_{ij} = b_j \quad j = 1, \ldots, n$$

$$Q_{ij} \ge 0 \quad \forall i, j$$

Asignación de tareas (I)

Una empresa tiene 8 máquinas y tiene que producir 8 trabajos en ellas, uno en cada máquina. Se tiene el tiempo que cada máquina tardaría en desarrollar cada trabajo. Si desea minimizar el tiempo total de máquinas ¿cómo debería asignar los trabajos?

Índices

i. máquinas $(1,\ldots,m)$

j. trabajos $(1,\ldots,n)$

Parámetros

t_{ij} : tiempo en máquina i para el trabajo j (horas)

t (horas)	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8
M1	5	8	2	10	4	--	7	11
M2	7	11	3	11	5	20	8	12
M3	6	8	3	11	6	18	9	11
M4	8	7	4	9	6	--	6	10
M5	6	7	3	8	5	17	7	12
M6	5	7	3	7	3	15	6	10
M7	7	9	4	10	6	21	9	14
M8	9	12	5	12	7	25	10	15

Asignación de tareas (II)

Índices

i máquinas $(1,\ldots,m)$, j trabajos $(1,\ldots,n)$

Variables

$$X_{ij}:\begin{cases}1 & \text{si máquina } i \text{ realiza trabajo } j\\ 0 & \text{otro caso}\end{cases}$$

S : suma total de tiempos de trabajo

Modelo

$$\min \quad S$$

$$S=\sum_i\sum_j t_{ij}X_{ij}$$

$$\sum_i X_{ij}=1 \quad j=1,\ldots,n$$

$$\sum_j X_{ij}=1 \quad i=1,\ldots,m$$

$$X_{ij}\in\{0,1\} \quad \forall i,j$$

Parámetros

t_{ij} : tiempo en máquina i el trabajo j (horas)

t (horas)	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8
M1	5	8	2	10	4	--	7	11
M2	7	11	3	11	5	20	8	12
M3	6	8	3	11	6	18	9	11
M4	8	7	4	9	6	--	6	10
M5	6	7	3	8	5	17	7	12
M6	5	7	3	7	3	15	6	10
M7	7	9	4	10	6	21	9	14
M8	9	12	5	12	7	25	10	15

Asignación de proyectos (I)

Una empresa tiene que seleccionar los proyectos que va a realizar para obtener el mayor beneficio teniendo en cuenta que los proyectos tiene que financiarlos por adelantado y tiene un presupuesto disponible para ello que no puede superar (2 millones de €)

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9
Beneficio	10	20	15	20	15	20	30	35	15
Coste	20	50	30	60	40	70	90	80	40

Índices

j proyectos

Parámetros

v_j: beneficio del proyecto j

c_j: coste del proyecto j

b : presupuesto

Asignación de proyectos (II)

Una empresa tiene que seleccionar los proyectos que va a realizar para obtener el mayor beneficio teniendo en cuenta que los proyectos tiene que financiarlos por adelantado y tiene un presupuesto disponible para ello que no puede superar (2 millones de €)

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9
Beneficio	10	20	15	20	15	20	30	35	15
Coste	20	50	30	60	40	70	90	80	40

Índices

j proyectos

Parámetros

v_j: beneficio del proyecto j

c_j: coste del proyecto j

b: presupuesto

Variables

$$X_j = \begin{cases} 1 & \text{si se realiza el proyecto } j \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

G: beneficio

Modelo

$$\max \quad G$$

$$G = \sum_j v_j X_j$$

$$\sum_j c_j X_j \leq b$$

$$X_j \in \{0,1\}$$

Optimización de carteras (I)

Seleccionar entre una serie de inversiones de las que se conoce el rendimiento esperado, la volatilidad (varianza del rendimiento) y la covarianza entre los rendimientos, deseando maximizar el rendimiento y minimizar el riesgo (varianza).

Índices

i, j inversiones/acciones

Parámetros

μ_j rendimiento esperado acción j

σ_{jj} varianza del rendimiento acción j

σ_{ij} covarianza del rendimiento acción i y j

l, u cota inferior, superior de la inversión

Optimización de carteras (II)

Seleccionar entre una serie de inversiones de las que se conoce el rendimiento esperado, la volatilidad (varianza del rendimiento) y la covarianza entre los rendimientos, deseando maximizar el rendimiento y minimizar el riesgo (varianza).

Índices

i, j inversiones/acciones

Parámetros

μ_j rendimiento esperado acción j

σ_{jj} varianza del rendimiento acción j

σ_{ij} covarianza del rendimiento acción i y j

l,u cota inferior, superior de la inversión

Variables

X_j : proporción invertida en la acción j

R : rendimiento esperado de la cartera

V : varianza del rendimiento de la cartera

$$\max \quad R = \sum_{j=1}^{n} \mu_j X_j$$

$$\min \quad V = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} X_i X_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} X_j = 1$$

$$0 \le X_j \le 1$$

Afi Escuela