

Clustering

Daniel Vélez Serrano Febrero 2022

Índice

- 1. Introducción al análisis cluster
- 2. Metodología
- 3. Tratamiento de variables
- 4. Selección de la métrica de desemejanza
- 5. Selección del tipo de algoritmo
- 6. Validación de resultados
- 7. Caso de uso: Segmentación de Estados en función de su nivel de criminalidad
- 8. Práctica: Segmentación bancaria



Introducción al análisis cluster



Introducción

- El análisis cluster se engloba dentro de la modelización no supervisada siendo su objetivo el de agrupar elementos en bloques homogéneos en función de las similitudes entre ellos respecto de una relación de variables input (al ser no supervisado, no existe una variable target). Siendo G el nº de grupos y p el nº de variables, se trata de conseguir:
 - o Que los elementos de un mismo grupo sean lo más parecido posible: maximizar la homogeneidad intragrupo (o minimizar la varianza dentro de cada grupo).

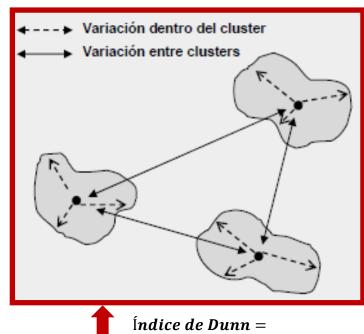
$$WSS = Within\ Cluster\ Sum\ Of\ Square =$$

$$\sum_{i=1}^{n_g} \sum_{j=1}^{p} (x_{ij} - \bar{x}_j)^2$$

Que los elementos de dos grupos distintos sean lo más diferente posible: maximizar heterogeneidad intergrupo la maximizar la varianza entre los grupos).

Intercluster dissimilarity (distance) =

$$\sum_{g=1}^{G} \sum_{j=1}^{p} (\overline{x_{gj}} - \overline{x_j})^2$$





distancia entre centroides (p. e) WSS



Introducción

- o El primer paso es determinar el conjunto de elementos sobre el que se quiere obtener una relación de grupos.
- En el ámbito "marketiniano" es habitual querer realizar una segmentación de la cartera para aportar conocimiento sobre la tipología de clientes que hay en la compañía. Dentro de este contexto, más allá del análisis descriptivo multivariante, una segmentación puede perseguir otros objetivos:
 - Articular una acción comercial diferente a cada grupo de clientes.- interesa que éstos tengan un tamaño suficiente que justifique la inversión que supone realizarla.
 - Analizar transiciones entre grupos.- en aquellos casos en los que a éstos es posible asociar un valor representativo de la rentabilidad o el beneficio que supone para la compañía. Para hacer este análisis es necesario garantizar que los segmentos son estables y existen en dos momentos temporales distintos. Por ello se realizan segmentaciones con diferentes muestras en diferentes instantes.
 - **Identificar patrones fraudulentos.-** suelen ser grupos de tamaño reducido que reflejan patrones de comportamiento atípico. De hecho el análisis cluster es un **método de detección de outliers multivariante.**



Introducción

- e En función del objetivo marcado se deben **determinar las variables de análisis,** es decir, aquéllas respecto a las cuales se realizará la segmentación.
- Para una misma población de análisis pueden existir juegos diferentes de variables.

Por ejemplo:

Segmentación 1: Perfil bancario

Cuenta a la vista

Depósitos

Fondos de inversión

Acciones/valores

Planes de pensiones

Préstamos hipotecarios

Préstamos personales

Líneas de crédito

Tarjetas de crédito

Tarjetas de débito

Recibos domiciliados

Domiciliación de nómina, pensión, desempleo

Segmentación 2: Perfil humano

Necesidades básicas: alimentación, transporte, etc.

Hijos: material escolar, colegio, etc.

Coche: garaje, taller, parking, etc.

Tecnología: móvil, ordenador, etc.

Ocio: espectáculos, restaurantes, apuestas, etc.

Moda y complementos: tiendas de ropa

Viajes: pago de viajes, compras en el extranjero, etc.

Salud y cuidado personal: gimnasio, sociedades médicas,

etc.

Altruista: cruz roja, ONGs, etc.

 Su definición en ocasiones no es inmediata, pudiendo ser necesario disponer de un conocimiento especializado del negocio.



2 Metodología



Metodología

Tratamiento de variables

Seleccionar la métrica de desemejanza a utilizar

Elegir el tipo de algoritmo de clasificación y segmentar

Validación de resultados

Imputación de missings.- para que puedan calcularse las distancias (o aplicacr una métrica que los tenga en cuenta).

Estandarización.- para que en el cálculo de distancias no tengan más peso aquellas variables con mayor dispersión.

Tratamiento de outliers.- pues suelen distorsionar los resultados.

Eliminación de redundancias.- para que no pesen más unas variables que otras.

Lo habitual es utilizar métricas euclídeas pero **depende** también del **tipo de variables** que se tenga (continuas, ordinales, binarias).

Elegir el algoritmo de segmentación y aplicarlo teniendo en cuenta la medida de semejanza seleccionada.

Asignar un nombre a cada cluster en función del valor medio que toman las variables de análisis en dicho grupo, es decir, en función del perfil del centroide. Hay que valorar si el volumen del grupo es suficiente para extraer un resultado concluyente o aplicable.



3 Tratamiento de variables



Tratamiento de variables: missings

- Si para un registro todas las observaciones tienen valores missing, dicho registro es eliminado. En el caso de que existan valores missings pero no para todas las variables se plantean diversas soluciones:
- Omitir dichas observaciones.- el riesgo que acarrea esta posibilidad es el de eliminar demasiados registros y terminar trabajando con muy pocos datos o datos sesgados.
- Asociarles un valor (imputación de missings).-
 - Con un valor fijo (media para variables intervalo, moda para variables de clase, etc.)
 - De acuerdo a la **distribución** de la propia variable.
 - Realizando una **predicción** en función de los otros inputs.
 - Generando una categoría missing con un valor específico.
- o También se puede calcular la distancia entre las observaciones pero únicamente respecto de las variables informadas. En dicho caso, la métrica utilizada es corregida teniendo en cuenta el número de variables que tienen observaciones missings.

$$\sqrt{\frac{n}{m}\sum_{i=1}^{n}(x_i-s_i)^2}$$

- n = número de variables; m = número de variables con valores no *missings*.
- x_i = valor de la i-esima variable para una observación.
- s_i = valor de la i-esima variable para un centroide.



Tratamiento de variables: estandarizar

- El análisis cluster es muy sensible a las unidades de medida seleccionadas.
- Las variables que tienen un mayor rango de variación tienden a tener más importancia a la hora de conformar los clusters. Por ello se recomienda estandarizar todas las variables.
 - **Ejemplo:** Hacer una segmentación en función de la (renta,edad).



Tiene una renta de 20.000€ anuales y 75 años

Tiene una renta de 22.000€ anuales y 25 años

 Al aplicar la fórmula, los valores que marcan la distancia/proximidad entre los dos individuos son los asociados a la variable renta, cuando la distancia real entre ellos parece venir marcada por la edad.

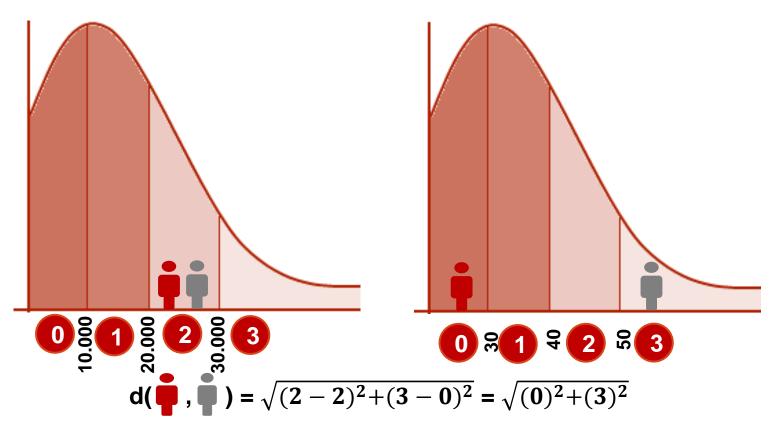
d(,) =
$$\sqrt{(20.000 - 22.000)^2 + (75 - 25)^2}$$
 = $\sqrt{(2.000)^2 + (50)^2}$

- El método habitual de estandarizar consiste en restar la media y dividir por la desviación típica.
- Otros métodos posibles son dividir por el rango (máximo mínimo) o discretizar las variables.



Tratamiento de variables: estandarizar

 Otra posibilidad consiste en discretizar el valor de las mismas a partir de los percentiles de su distribución (encoding tipo rank). Este método evita la necesidad de realizar un tratamiento posterior de outliers.



El **inconveniente** que posee este método de estandarización son los **valores frontera**: dos individuos muy próximos que pertenecen a categorías diferentes.



Tratamiento de variables: estandarizar

 En cuanto a las variables discretas se refiere, en primer lugar es necesario hacerlas cuantitativas. La manera de recodificarlas difiere en función de que sean ordinales o nominales. Los métodos que tradicionalmente se utilizan son la codificación rango para variables ordinales y la codificación GLM para nominales.



- Se pueden plantear codificaciones alternativas en las que el 0 es sustituido por -1:
 - Si la estandarización de las variables continuas se hace en rango (se mueven entre 0 y 1), codificar las categóricas en 0's y 1's da demasiado peso a cada categoría: la diferencia entre dos categorías es la misma que la diferencia entre el mayor y menor valor de las continuas.
 - Si la estandarización de las variables continuas se hace en media/varianza, se moverán entre -3 y 3, pero con alta probabilidad entre -1 y 1, lo que se alinea con los valores de las discretas.



Tratamiento de variables: outliers

- Los outliers pueden dar lugar a clusters aislados que no tengan un sentido de negocio propio.
- Para amortiguar el efecto de los mismos, una posibilidad es aplicar alguna transformación a las variables, como por ejemplo el logaritmo.
- Por otra parte, es cierto que prescindir de la información que incorporan los outliers puede hacer perder información valiosa (por ejemplo en modelos de identificación de fraude).
- El análisis de outliers debe realizarse una vez estandarizados los datos ya que al realizar la estandarización, los valores extremos pueden perder influencia.
- La fase siguiente consiste en establecer el tipo de algoritmo de clustering a utilizar. Existen métodos que son más o menos sensibles a la presencia de outliers por lo que, dependiendo del que se seleccione, el tratamiento previo de éstos tendrá mayor o menor importancia.



Tratamiento de variables: redundancias

- On la idea de que todas las dimensiones de análisis tengan el mismo peso interesa eliminar posibles redundancias. La eliminación de redundancias se puede hacer:
 - De manera artesanal.- mirando correlaciones entre variables (coeficiente de Pearson para continuas, correlaciones tipo rango (coeficientes de Spearman/Kendall) para ordinales). Inconveniente: procedimiento inviable si el número de variables es muy alto.
 - Mediante un análisis de componentes principales.- seleccionando un número de variables (incorreladas/ortogonales) que concentren un porcentaje de variabilidad suficientemente alto. El inconveniente de esta técnica es la pérdida de interpretabilidad.
 - Haciendo previamente un cluster de variables.- se puede hacer:
 - Por negocio.- grupos de variables relacionadas con una misma dimensión de negocio (sociodemográfica, ahorro/deuda en banca, siniestralidad en seguros, etc.).
 - Analíticamente.- mediante un clustering de variables.
 - De cada grupo de variables se selecciona un representante:
 - Por negocio.- una variable concreta, un valor medio ponderado por negocio, etc.
 - Analíticamente.- una media (ponderada o no), o una componente principal.
 Las componentes principales de los diferentes grupos son oblicuas (no
 ortogonales entre sí).





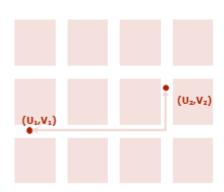
- Independientemente del método es preciso establecer cómo se medirá la distancia entre los elementos. El concepto de semejanza es un concepto muy interiorizado en nuestro pensamiento pero complicado de cuantificar. «¿Qué es más similar a un pato: un pingüino o una perdiz?». Depende de la métrica seleccionada:
 - Si pensamos en la capacidad de volar asociaremos al pato con la perdiz
 - Si en la capacidad de nadar, asociaremos al pato con el pingüino.
- o Algunas de las **métricas que habitualmente se utilizan** son:

Euclidea



$$d(u, v) = \sqrt{(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2}$$

Manhatann (Taxi)



$$d(u, v) = |u_1 - u_2| + |v_1 - v_2|$$

- Existen otras métricas basadas en criterios estadísticos:
 - La distancia de Mahalanobis (1936).- se recomienda utilizar esta métrica cuando existe correlación entre los datos dado que en su definición implica a la matriz de varianzas covarianzas, la cual permite tener en cuenta la relación entre ellos.

Su definición se basa en dos consideraciones:

- Es necesario eliminar la dependencia de las unidades de medida dado que si no, unas variables pueden tener más peso que otras.- esto llevaría a dividir por la desviación típica

$$d(u,v) = \sqrt{(\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{v_1})^2 + (\overrightarrow{u_2} - \overrightarrow{v_2})^2} \Rightarrow d(u,v) = \sqrt{(\frac{\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{v_1}}{\sigma_1})^2 + (\frac{\overrightarrow{u_2} - \overrightarrow{v_2}}{\sigma_2})^2}$$

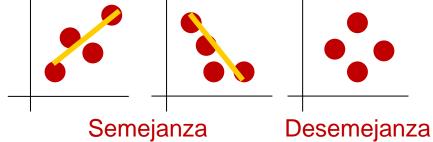
- Si las variables U y V no son independientes, es necesario incorporar el valor de σ_{12} en el cálculo. Para ello, en lugar de usar $\Sigma = \begin{pmatrix} {\sigma_1}^2 & 0 \\ 0 & {\sigma_2}^2 \end{pmatrix}$, se debe emplear $\Sigma = \begin{pmatrix} {\sigma_1}^2 & {\sigma_{12}} \\ {\sigma_{12}} & {\sigma_2}^2 \end{pmatrix}$.

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sqrt{(\vec{u} - \vec{v}) \sum_{i=1}^{n-1} (\vec{u} - \vec{v})^{i}}$$



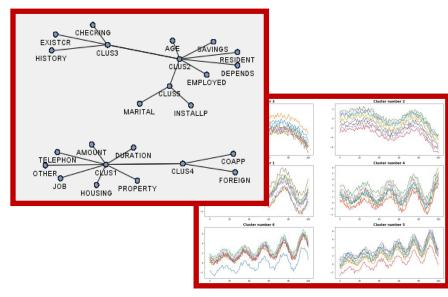
- Existen otras métricas basadas en criterios estadísticos:
 - Correlación.- cuando se hace un clustering de variables (en lugar de elementos), una manera habitual de medir distancia entre ellas es a través de correlaciones.

$$d(u, v) = \frac{\sum (u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})}{\sqrt{\sum (u_i - \bar{u})^2 \sum (v_i - v)^2}}$$



Este tipo de distancia puede ser útil:

- Para agrupar variables parecidas y seleccionar un representante de cada grupo con vistas a **eliminar** redundancias entre variables.
- En el contexto de *clustering* de series temporales.





- Existen también métricas especialmente orientadas a realizar segmentaciones con variables binarias:
- Índice de Rassel-Rao: $d(O_i, O_j) = 1 \frac{n_{IJ}}{n}$ Emparejamiento simple: $d(O_i, O_j) = 1 \frac{n_{IJ} + n_{ij}}{n}$
- Coeficiente o índice de Jaccard: $d(O_i, O_j) = 1 \frac{n_{IJ}}{n_{II} + n_{Ii} + n_{II}}$

siendo:

 n_{ij} : número de variables para las que en O_i y O_i hay 1's a la vez (1,1).

 n_{ii} : número de variables para las que en O_i y O_i hay 0's a la vez (0,0).

 n_{ij} : número de variables para las que en O_i y O_i hay (1,0).

 $n_{i,j}$: número de variables para las que en O_i y O_i hay (0,1).

N: número variables = $n_{IJ} + n_{ij} + n_{lj} + n_{lj}$

5 | Selección del tipo de algoritmo



Algoritmos de clasificación

Existen diferentes tipos de algoritmos. Algunos de los más conocidos son:

Tipo de Algoritmo	Nombre
PARTICIONAL basados en procesos iterativos que buscan una agrupación óptima (normalmente local) respecto de una función objetivo	K-MEANS
	PAM (K-MEDIODS)
	CLARA
	CLARANS
JERÁRQUICO basados en la construcción de una jerarquía entre los grupos	AGLOMERATIVOS
	DIVISIVOS
	LIDDECAN
BASADO EN DENSIDAD basados en la ubicación espacial y en la distancia a un número de vecinos especificado	HDBSCAN
	DBSCAN
	GMM



5.1 Métodos particionales



Métodos particionales

- Los procedimientos partiocionales surgen como alternativa a los jerárquicos por los problemas computaciones que éstos presentan.
- Asignan los elementos a clusters una vez que el número de éstos a considerar ha sido especificado. Así, la solución de k clusters no es solo una combinación de 2 grupos que parte de una solución de k+1 clusters sino que se basa en la búsqueda de la mejor solución (la óptima) de k clusters.
- Generalmente proporciona mínimos locales (no globales) respecto a SCDG:

$$W(K) = \sum_{g=1}^{G} W_g = \sum_{g=1}^{G} \sum_{i=1}^{n_g} \sum_{j=1}^{p} (x_{ijg} - \overline{x_{jg}})^2$$

- Esta cantidad es la suma de cuadrados dentro de los grupos (SCDG) y mide la distancia de las observaciones de cada grupo a su centroide: punto respecto al cual la suma de las distancias de todas las observaciones se minimiza.
- Los algoritmos responden a la siguiente estructura:
 - Parten de **k centroides iniciales**.
 - Calculan la distancia de los n individuos a los k centroides y realizan la **asignación individuo-cluster** (al más próximo): nueva partición y nuevo SCDG.
 - Establece un **criterio de convergencia** repitiendo el paso anterior hasta que se alcance.
- Su complejidad es O(n*p*k*i) donde n es el nº de observaciones, p el nº de variables, k el nº de grupos e i el nº de iteraciones necesarias.



Métodos particionales: Método de Forgy

La técnica más conocida de cluster de optimización es el algoritmo de las kmedias que presenta muchas variantes:

Método de Forgy (1965).

- 1. Tomar k centroides de partida (existen diferentes métodos).
- Colocar cada individuo en el cluster con la semilla más próxima. Las semillas permanecen fijas para cada ciclo completo (un ciclo consiste en recorrer todo el conjunto de datos).
- 3. Calcular los nuevos centroides (medias de los datos).
- 4. Alternar los pasos 2 y 3 hasta que se alcance un número máximo de iteraciones o el cambio en la función objetivo sea menor que un a establecido de antemano. Empíricamente se ha probado que nº ciclos suele ser menor que 10.

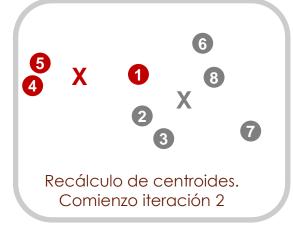


Métodos particionales: Método de Forgy



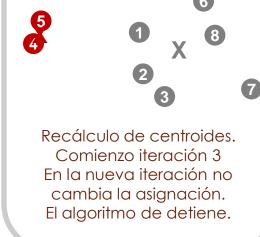








El algoritmo es sensible a la elección de los centroides de partida.





Métodos particionales: Método de Forgy



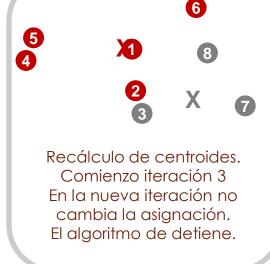








El algoritmo es sensible a la elección de los centroides de partida.





Métodos particionales: Método de MacQueen

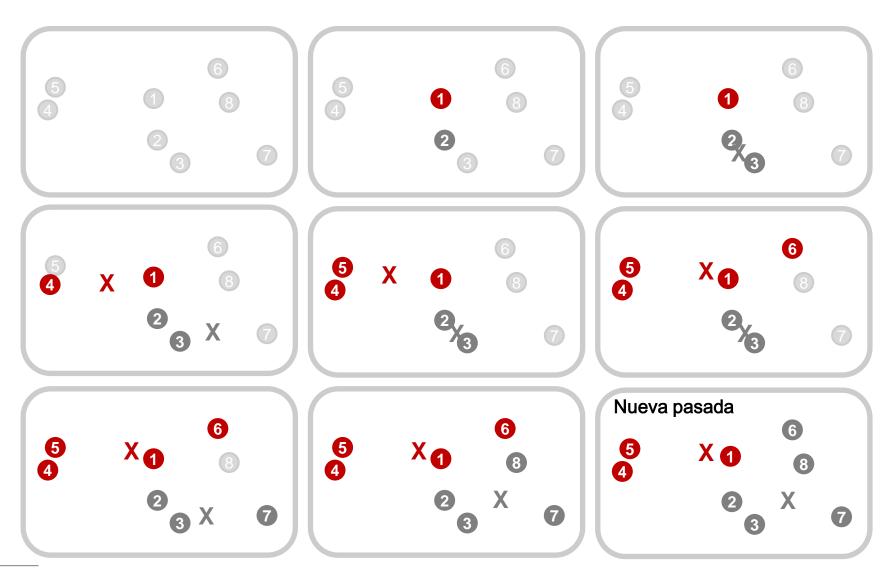
La técnica más conocida de cluster de optimización es el algoritmo de las kmedias que presenta muchas variantes:

Método de MacQueen (1965).

- 1. Tomar k centroides de partida por alguno de los criterios anteriores (en su algoritmo original, MacQueen proponía tomar los k primeros).
- 2. Asignar cada uno de los n k elementos restantes al centroide más próximo. Tras cada asignación (no tras cada ciclo) recalcular el centroide del cluster obtenido.
- 3. Tomar los centroides de los *clusters* existentes y hacer una nueva pasada sobre los datos asignándolos al centroide más cercano.
- 4. El algoritmo original de MacQueen solo hace una iteración pero se puede iterar los pasos 2 y 3 hasta conseguir convergencia.



Métodos particionales: Método de MacQueen





Métodos particionales: Método de MacQueen

- Algunas otros métodos particionales son:
 - PAM (Partitioning Around Mediods).- En este caso los centroides son observaciones del dataset (no las medias de cada cluster). El objetivo es encontrar observaciones representativas del conjunto de datos con la menor disimilaridad posible con las demás observaciones del propio cluster.

 Se trata de un algoritmo más robusto que el K-MEANS pero de mayor coste computacional. Su complejidad es O(k*(n-k)2).

CLARA (*Clustering Large Applications*).- Es una versión más eficiente computacionalmente del PAM. En cada iteración se seleccionan grupos aleatorios de tamaño 40+2*k y sobre cada uno de ellos aplica el PAM. **Su complejidad es O(k*(40+k)2+k*(n-k)).**

CLARANS (Clustering Large Applications Based on Randomized Search).- Es una versión que aumenta su complejidad respecto a K-MEANS y CLARA, pero funciona bien para bases de datos de grandes dimensiones. **Su complejidad es O(k*n2)**.



Algoritmo fuzzy k-means (c-means)

- Sea uno u otro el algoritmo utilizado, como resultado del mismo los elementos quedan asignados a un grupo.
- o El algoritmo K-MEANS asigna cada observación a un grupo, pero en función de la distancia del elemento al centroide de dicho grupo se puede considerar que pertenece más o menos a él.
- o En terminología difusa, la inversa de la distancia del elementos al centroide del grupo define el **grado de pertenencia** de dicho elemento a dicho grupo.
- o Dichos valores pueden ser normalizados para que sumen 1 y definir algo parecido a la probabilidad de que el elemento pertenezca a cada grupo.
- En este contexto, surge el algoritmo FUZZY K-MEANS como una variante del algoritmo K-MEANS enfocada bajo la óptica difusa.
- En este caso, la función objetivo a minimizar es la suma de cuadrados intragrupal ponderando la distancia al centroide de cada cluster por su grado de pertenencia al mismo:

$$W(K) = \sum_{g=1}^{G} W_g = \sum_{g=1}^{G} \sum_{i=1}^{n_g} \sum_{j=1}^{p} (\mu_g(x_{ijg}))^m (x_{ijg} - \overline{x_{jg}})^2 \quad con \quad \sum_{g=1}^{G} \mu_g(x_{ijg}) = 1 \ \forall x_{ijg}$$



Métodos particionales: Método de Bezdek

Método de Bezdek (1981).

- 1. Tomar c centroides de partida por alguno de los criterios anteriores.
- 2. Calcular la matriz de distancias a los centroides: $d_{ji} = ||x_j v_i||^2$ y la matriz de pertenencias a ellos: $\mu_{ji} = \frac{1}{\sum_{l=1}^{c} \left(\frac{\left|\left|x_j v_l\right|\right|^2}{\left|\left|x_i v_l\right|\right|^2}\right)^{\frac{1}{m-1}}}$

La función objetivo en la iteración t es: $J^{(t)} = \sum_{i=1}^{c} \sum_{j=1}^{n} \mu_{ji}^{m} d_{ji}$

3. Clasificar cada elemento en el clúster cuyo grado de pertenencia sea mayor y recalcular los

centroides:
$$v_i = \frac{\sum_{j=1}^n (\mu_i(x_j))^m x_j}{\sum_{j=1}^n (\mu_i(x_j))^m}$$
 $1 \le i \le c$

4. Alternar los pasos 2 y 3 hasta que se alcance un número máximo de iteraciones o el cambio en

la función objetivo sea menor que un a establecido de antemano ($|J(t)-J(t-1)| < \alpha$).



Algoritmo fuzzy k-means (c-means)

- o El parámetro de fuzzyficación toma valores en el intervalo (1,∞), y permite al usuario elegir cómo de "soft" quiere que sea la clasificación. Cuanto más próximo a 1, más "hard" es la clasificación que se realiza:
- Este parámetro juega un papel muy importante en el algoritmo, condicionando el cálculo de los centroides y de los grados de pertenencia y, en consecuencia, la solución final:
 - En el **caso extremo (m=1)** tendríamos la función objetivo que plantea minimizar el **k**-**means**.
 - En la mayoría de las aplicaciones su valor suele ser 2.
 - Cuando **m es demasiado grande**, los grados de pertenencia μ_i convergen a 1/c $\forall x \in X$, lo que vendría a significar que todos los elementos pertenecen con igual probabilidad a todos los clusters (**máxima confusión entre clusters**).
- o El algoritmo fuzzy k-means suele proporcionar mejores resultados en aquellos casos en los que hay outliers o mucho ruido. En dichos casos los clusters tienden a solaparse (overlapping clusters) y no puede decidirse fácilmente si un objeto pertenece a uno u otro cluster.



5.2 Métodos jerárquicos



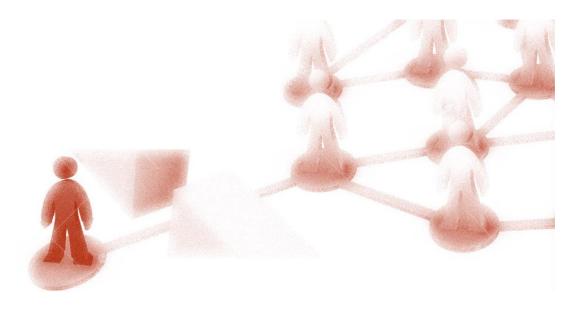
Métodos jerárquicos

- Los métodos jerárquicos parten de una matriz de distancias entre los elementos y construyen una jerarquía. Los resultados obtenidos en cada iteración quedan encajados en los resultados de la iteración siguiente generando una estructura de árbol (dendrograma) en el que es posible rastrear el proceso de agrupación o desagrupación desde su origen.
- Existen dos tipos:
 - **Métodos de aglomeración o agregativos.-** parten de tantos clusters como elementos y, en cada iteración, realizan una agrupación (de dos elementos, de un elemento con un grupo o de dos grupos). Son los más habituales.
 - **Métodos de división o disgregativos.-** parten del conjunto formado por todos los elementos y, en cada iteración, realizan una separación dando lugar a clusters más pequeños.
- Tener visibilidad de un resultado con 1,2,...,n clusters beneficia la toma de una decisión en cuanto al número de clusters a considerar.
- Una consecuencia negativa es el alto coste computacional en el que incurren.



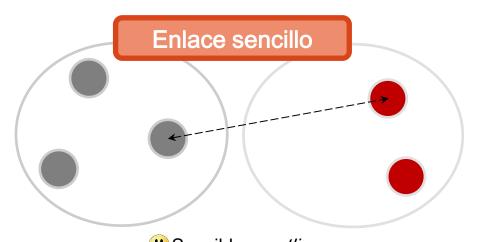
Métodos jerárquicos

- La matriz de distancias de partida informa sobre el grado de proximidad entre los elementos de partida pero conforme se van configurando los grupos, es preciso definir la distancia de un elemento a un grupo o la de dos grupos entre sí.
- En los métodos particionales, la distancia de un elemento a un grupo es la distancia del elemento al punto medio del grupo (distancia centroide). En los jerárquicos, además de ésta hay que definir la distancia entre grupos.





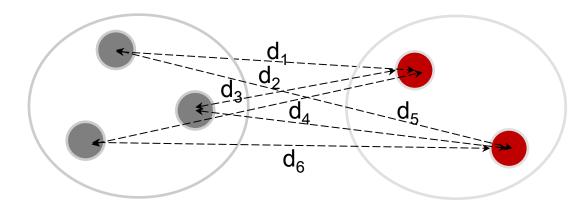
Métodos jerárquicos



Sensible a *outliers*Tiende a generar *cluster*s elongados (encadenados)



Sensible a *outliers*Permite construir esferas de radio mínimo



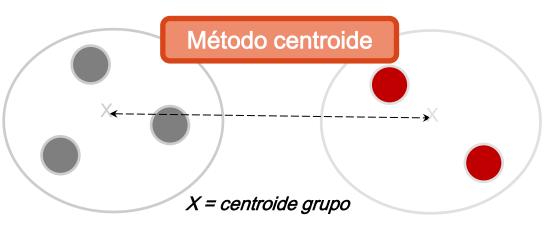
Enlace promedio

$$d(A,B) = \frac{d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5 + d_6}{6}$$

Constant Robustez a *outliers*

Eficiente computacionalmente

Métodos jerárquicos. Enlaces habituales



X = centroide grupo

Robustez a *outliers*Eficiente computacionalmente

Método WARD

Agrupa buscando el mínimo incremento de varianza.

$$W(G) = \sum_{g=1}^{G} W_g = \sum_{g=1}^{G} \sum_{i=1}^{n_g} \sum_{j=1}^{p} (x_{ijg} - \overline{x_{jg}})^2$$

Sensible a outliers

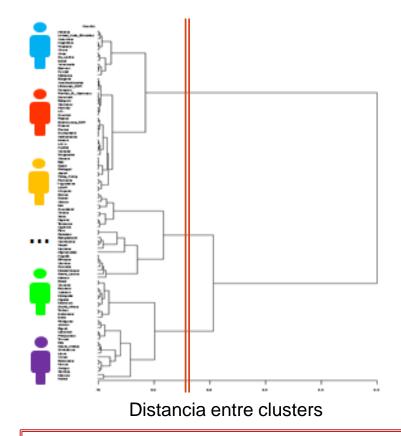
Poco eficiente computacionalmente

Kaiper y Fisher probaron que este método era capaz de acercarse más a la clasificación óptima que otros métodos



Métodos jerárquicos

- El dendrograma es un grafo conexo sin ciclos con un punto llamado raíz y tantos puntos extremos como elementos que equidistan de la raíz.
- Permite la representación gráfica del proceso de agrupamiento en forma de árbol, quedando las observaciones en uno de los ejes y algún tipo de métrica (R-square, varianza intragrupo, etc.) en otro.
- Al realizar un corte perpendicular al eje en el que se mide la métrica es posible conocer el valor de la misma para cierto nivel de agrupación, lo que proporciona una herramienta de ayuda para decidir el número de clusters a considerar.
- La decisión se basa en que el valor de la métrica no varíe sensiblemente al aumentar en una unidad el nº de clusters.



Ajustando 3 clusters (número de cortes), se puede conocer el valor de la métrica.

Una distancia grande es orientativa de ganancia y por tanto, del número de clusters a considerar.



Enlace sencillo

O ₁	O ₂	O ₃	O ₄	O ₅	
_	1	3	5	2	O ₁
		3	3	4	O ₂
			6	7	O ₃
				9	O ₄
					O ₅

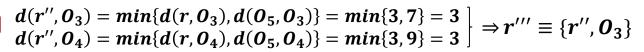
$$\Rightarrow r \equiv \{ \boldsymbol{O}_1, \boldsymbol{O}_2 \}$$

$$d(r, O_3) = min\{d(O_1, O_3), d(O_2, O_3)\} = min\{3, 3\} = 3$$

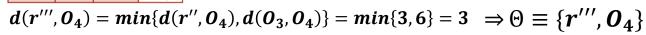
$$d(r, O_4) = min\{d(O_1, O_4), d(O_2, O_4)\} = min\{5, 3\} = 3$$

$$d(r, O_3) = min\{d(O_1, O_5), d(O_2, O_5)\} = min\{2, 4\} = 2$$

r	O ₃	O ₄	Ωs	
	3	3	2	r
		6	7	O ₃
			9	O ₄
				O ₅

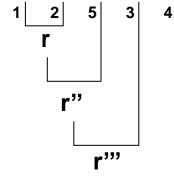


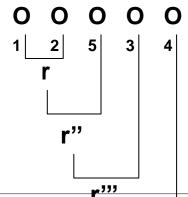
r"	Ω ₂	O ₄	
	3	3	r"
		6	O ₃
			O ₄



r'''	O.	
	3	r'''
		O ₄



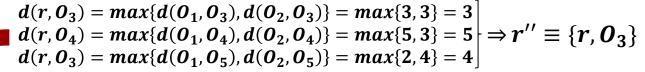




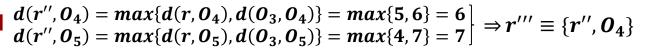
Enlace diámetro

O ₁	Ω ₂	O ₃	O ₄	O ₅	
	1	3	5	2	01
		3	3	4	O ₂
			6	7	O ₃
				9	O ₄
					O ₅

$$\Rightarrow r \equiv \{ \boldsymbol{0}_1, \boldsymbol{0}_2 \}$$



r	Ω_3	O_4	O ₅	
	3	5	4	r
		6	7	O ₃
			9	O ₄
				O ₅



r"	Ω	O ₅	
	6	7	r"
		9	O ₄
			O ₅

$$d(r''', \mathbf{0}_5) = max\{d(r'', \mathbf{0}_5), d(\mathbf{0}_4, \mathbf{0}_5)\} = max\{7, 9\} = 9 \implies \Theta \equiv \{r''', \mathbf{0}_5\}$$

r'''	Ω4	
	3	r'''
		O ₄

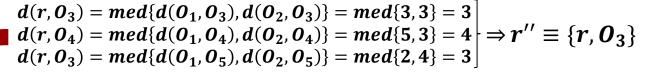
_ r		3	•	J
0	0	0	0	0
1	2 r r	3	4	5
O 1	O 2 r r '		O 4	O 5
	_	r"	,	
0	0	0	0	0
1	2 r r	3	4	5



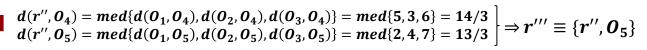
<u>Enlace promedio</u>

O ₁	O ₂	O ₃	O ₄	O ₅	
	1	3	5	2	O ₁
		3	3	4	O ₂
			6	7	O ₃
				9	O ₄
					O ₅

$$\Rightarrow r \equiv \{ {m O}_1, {m O}_2 \}$$



r	O ₃	O ₄	O ₅	
	3	4	3	r
		6	7	O ₃
			9	O ₄
				O ₅



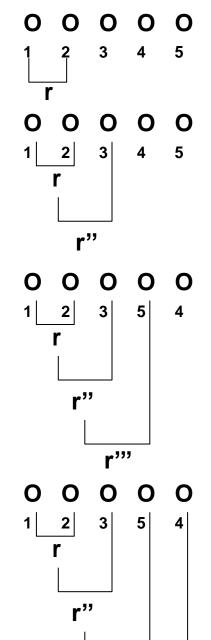
r"	O ₄	C	
	14/3	13/3	r"
		ת	O ₄
			O ₅

$$d(r''', O_4) = \frac{d(O_1, O_4) + d(O_2, O_4) + d(O_1, O_4) + d(O_5, O_4)}{4} = \frac{5 + 3 + 6 + 9}{4} = \frac{23}{4}$$

Daniel Vélez Serrano 2022

r'''	0.	
	23/4	r'''
		O ₄

$$\Rightarrow \Theta \equiv \{r^{\prime\prime\prime}, O_4\}$$



r""

 Θ

Algunas métricas para decidir k

- Algunas métricas habituales para decidir el número de clusters son:
 - Utilizar un gráfico de codo/rodilla (elbow / knee method) evalúa la varianza intracluster W(k) como una función del número k de clusters. Se busca un codo en el gráfico, dando a entender que, la consideración de un cluster adicional no mejora mucho la segmentación. Sin embargo, en ocasiones se trata de un criterio subjetivo.
 - En esta línea, $H(K) = (n K 1)[\frac{W(K)}{W(K+1)} 1]$. permite evaluar cómo se reduce W al pasar de k a k+1 grupos (el numerador es positivo). Se compara la disminución de variabilidad al aumentar un grupo. Es un estadístico F parcial para contrastar si tiene valor hacer K+1 clusters. **Regla empírica** (Hartigan, 1975): hacer K+1 grupos si esta cantidad es mayor que 10.
 - El método de **Calinski y Harabasz**_{B(K)/(K-1)}, consiste en elegir el número de clusters que maximiza $CH(K) = \frac{\sqrt{(K-1)}}{W(K)/(n-K)}$ (como el estadístico F de un ANOVA).
 - $KL(K) = \left| \frac{DIFF(K)}{DIFF(K+1)} \right|$, $DIFF(K) = (K-1)^{2/p}W(K-1) K^{2/p}W(K)$ (Krzanowski y Lai, 1985).- consiste en elegir el número de clusters que maximiza esta cantidad.

W(K) = varianza intra-cluster (SCDG), B(K) = varianza inter-cluster, $p = n^0$ variables, $n = n^0$ datos



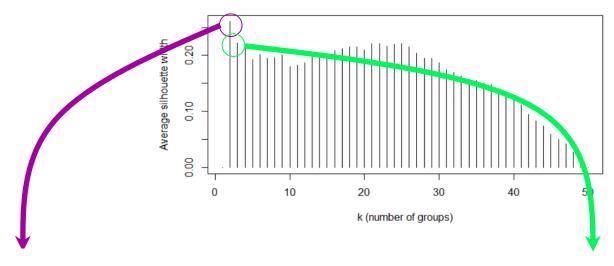
Algunas métricas para decidir k

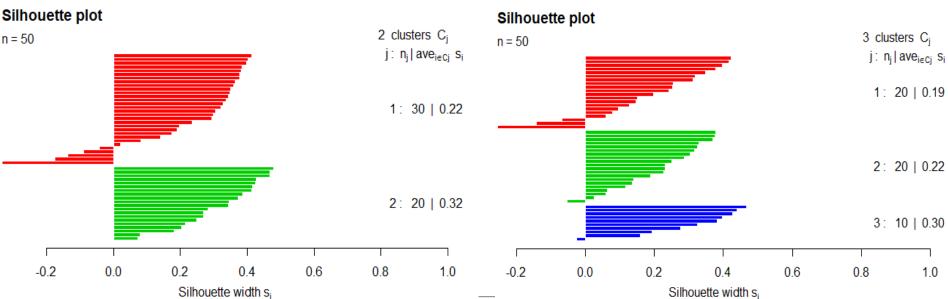
- El coeficiente de silueta (Silhouette) o puntuación de silueta es otra métrica utilizada para evaluar la bondad del agrupamiento, determinando lo bien que está clasificada cada observación dentro de su cluster.
- Dada una observación "i", se define $s(i) = \frac{b(i) a(i)}{\max\{a(i),b(i)\}}$ siendo:
 - a(i) = disimilaridad media entre iy todos los puntos de cluster al que pertenece.
 - d(i, C) = la disimilaridad de "i" a todas las observaciones de C
 - $b(i) = \min_{C} d(i, C)$ disimilaridad media ente "i" y el cluster más cercano al que no pertenece Si "i" es la única observación de su cluster, s(i) = 0.
- o s(i) varía entre -1 y 1: $\begin{cases} & \text{Valor pr\'oximo a 1: Obs. "i" bien clusterizada} \\ & \text{Valor pr\'oximo a 0: Obs. "i" entre dos clusters} \\ & \text{Valor pr\'oximo a -1: Obs. "i" probablemente mal clasfiicada.} \end{cases}$
- En cada cluster, se promedian los s(i) de las observaciones que lo componen y además se calcula un valor promedio asociado a la segmentación de forma que:
 - Valor 1: Los clusters están bien separados entre sí y se distinguen claramente.
 - 0: Los clusters son indiferentes, e.d, la distancia entre ellos no es significativa.
 - -1: Los clusters están asignados de forma incorrecta.



Algunas métricas para decidir k

Silhouette-optimal number of clusters





Average silhouette width: 0.22

Data Science y Big Data

Average silhouette width: 0.26

An Escuela

Daniel Vélez Serrano 2022

Métodos bietápicos: Jerárquico + Particional

- Los algoritmos de clustering bietápicos tratan de solucionar el problema que supone establecer de antemano el número de clusters a generar.
- La estructura a la que responden dichos algoritmos son:
 - Aplicar un algoritmo tipo k-medias con un número de clusters suficientemente alto.
 - Calculas los centroides de los grupos obtenidos y considerar un nuevo problema de clasificación en el que los elementos a agrupar son dichos centroides.
 - La manejabilidad computacional del nuevo problema mediante un algoritmo jerárquico permiten utilizar una técnica de este tipo que ayuda a decidir el número K de clusters a considerar (mediante el criterio CCC por ejemplo).
 - Aplicar el algoritmo k-means sobre el conjunto de datos original solicitando K clusters. Como punto de partida se pueden utiliza los K centroides obtenidos con el algoritmo jerárquico.



5.3 Métodos basados en densidades



- La técnica más conocida de cluster basadas en densidad es el algoritmo DBSCAN (Density-Based Spatial Clustering of Applications with Noise), debido a Martin Ester, Hans-Peter Kregel, Jörg Sander and Xiaowei Xu (1996)
- El algoritmo DBSCAN depende de dos parámetros:
 - ε.- radio que determina el tamaño de un vecindario.
 - min_points.- nº mínimo de puntos en el radio para conformar un cluster. **Nota:** Se tiene en cuenta el propio punto al contabilizar dicho valor.
- La idea que subyace bajo el algoritmo es la siguiente:
 - Para cada punto, construir un vecindario de radio ε y definir dicho punto como CORE POINT si en dicho vecindario hay al menos min_points puntos.
 - 2. Encontrar las "componentes conexas (conectadas)" de los **CORE POINTS** (CORE POINTS CONECTADOS). Dichas componentes constituirán los clusters.
 - 3. Tomar cada NON-CORE POINT y medir la distancia al cluster más cercano:
 - Si es menor que ε, asignarlo a dicho cluster, pasando a denominarse **BORDER_POINT.**
 - Si no, considerarlo como un NOISE POINT.



ALGORITMO DBSCAN

- 1. Elegir aleatoriamente un punto que no haya sido examinado y construir un vecindario de radio ϵ .
- 2. Si no forma parte de ningún cluster:
 - Si en el vecindario construido **hay al menos min_points puntos**, el punto pasa a ser denominado **CORE POINT** y se forma un cluster con ellos.
 - Si en el vecindario construido **no hay al menos min_points puntos**, el punto pasa a ser denominado **OUTLIER o NOISE** (**punto ruidoso**).

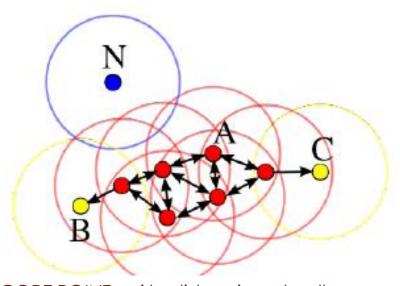
Volver a 1.

3. Si dicho punto forma parte ya de un cluster generado anteriormente, pasará a calificarse de BORDER POINT si en su vecindario no hay al menos min_points puntos. Volver a 1.



Ejemplo con min_samples = 4.

- Todos los puntos rojos contienen al menos 3 puntos en el radio establecido, formando un cluster.
- Los puntos B y C son alcanzables (*) a través de ellos y por ello, aún cuando no tienen al menos min_points puntos en un radio suyo, forman parte de dicho cluster.
- El punto N es un nodo ruidoso porque no es alcanzable desde ningún punto.



- \circ Un punto q es **directamente alcanzable** desde un CORE POINT p si la distancia ente ellos es menor que ε.
- En general, un punto q es **alcanzable** desde un CORE POINT p, si existe entre ellos un camino $p = p_1 = p_2 = ... = p_n = q$ donde $p_i + 1$ es directamente alcanzable desde p. Esto implica que, salvo q (que puede ser un BORDER POINT), todos los puntos del camino son CORE POINTS.
- Todos los puntos no alcanzables desde otro punto son NOISE POINTS.



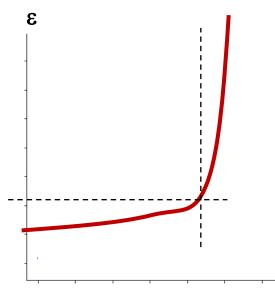
- Es preciso determinar el valor de los parámetros ε y min_points.
- O Valores altos de ε hará que muchos datos estén en un mismo cluster, por lo que en general, **lo ideal es tomar valores pequeños para dicho parámetro**, teniendo en cuenta que valores demasiado bajos generará demasiados puntos ruidosos (no clusterizados).
- Respecto al parámetro min_points, su valor debe ser al menos 3:
 - No tiene sentido que valga 1 (tantos clusters como puntos).
 - También se puede demostrar que si *min_points* es menor o igual que 2, el resultado obtenido es el mismo que el que se obtendría con un cluster jerárquico con enlace sencillo.
 - En general, si se trata de un dataset grande o que tenga muchos valores duplicados o que tenga datos "ruidosos", interesa tomar un valor grande para él.
 - OPTICS (Partitioning Around Mediods).- Es una generalización de DBSCAN en la que el parámetro min_points es reemplazado por un valor que representa el mínimo tamaño que puede tener un cluster.



- Un método popular para determinar dichos valores son:
- Selecionar diferentes tamaños de vecindades (min_points) y buscar para cada uno de ellos el mejor valor de ε. Para determinar los valores, proceder así:
 - Para cada punto (x), calcular la distancia media a los vecinos de su vecindad (de tamaño min_points): distancia k-NN (distancia min_points-NN).
 - Ordenar dichos puntos (x) de menor a mayor valor calculado (de menor a mayor valor de la distancia media) y representar dichos puntos en el eje X frente a sus correspondientes distancias medias en el eje Y.
 - Buscar en cada gráfico el punto de máxima curvatura (elbow/knee): determina el punto de corte a partir del cual la distancia k-NN se comienza a aumentar rápidamente.

La idea detrás de esta heurística es que los puntos ubicados dentro de los clústeres tendrán una pequeña distancia k-vecino porque están cerca de otros puntos en el mismo clúster, mientras que los puntos de ruido están más aislados con una distancia kNN muy grande.

Para un valor fijo de min_points



Puntos ordenador por distancia mínima a los puntos de su vecindad

- Comparar una métrica (WSS, etc.) sobre los pares (min_points, ε*) y decidir el mejor par.
- Otro método consiste en calcular directamente dichas métricas sobre una rejilla de valores respecto de dichos pares y seleccionar el mejor par.

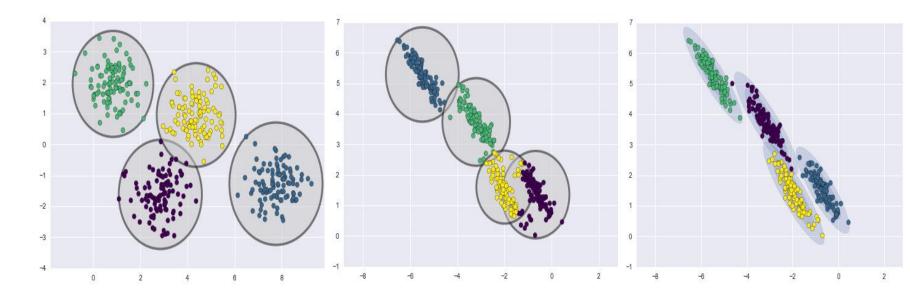


- Aunque algunos autores recomiendan tomar k ≥ p+1 donde p es el número de variables (en particular k=2*p), la experiencia de muestra que un valor de k entre 3 y 5 suele funcionar bien.
- El principal inconveniente del método es que si existen grandes diferencias de densidades en el dataset, la elección de los parámetros puede no ser adecuada.
- Sin embargo, el método presente muchas ventajas como son por ejemplo:
 - No precisa de la determinación previa de un número de clusters.
 - No tiene una complejidad alta. Es del orden O(n*log(n)).
 - Es robusto a outliers.
 - Aún cuando el orden en el que los datos son procesados puede influir en el resultado final (no es un método completamente determinístico), los resultados no suelen ser muy diferentes.

HDBSCAN (Hierarchical Density-Based Spatial Clustering of Applications with Noise).- es una versión jerárquica de DBSCAN en la que no existe la noción de puntos fronterizos, tratando éstos como NOISE POINT, lo que genera una solución completamente determinística.



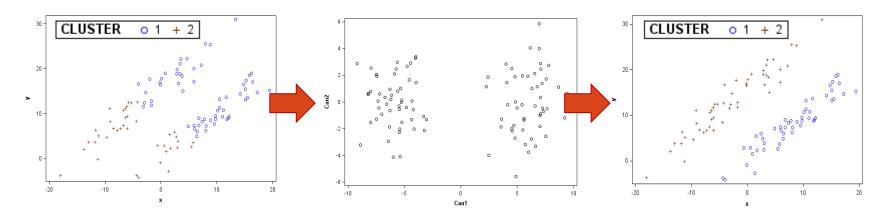
- En el método visto, los radios construidos alrededor de cada punto son circulares, tendiendo a la generación de clusters esféricos, lo cual puede funcionar bien cuando los datos tienes estructura circular.
- Sin embargo, puedes presentarse problemas cuando por ejemplo tenemos clusters elongados. Este mismo problema lo presenta el propio K-MEANS.



 En dichos casos, se aconseja realizar transformaciones que permite hacerlos más esféricos.



 Se puede combinar un análisis de componentes principales y uno de correlación canónica para proyectar los puntos en un nuevo espacio respecto al cual sí presentan dicho patrón).



- El inconveniente es que, mientras que en dos/tres dimensiones se puede intuir visualmente si las observaciones presentan comportamientos elongados o esféricos, cuando el número de dimensiones se dispara, esta intuición no suele tenerse.
- En este contexto, surge el Modelo de Mixturas Gaussianas (GMM) que, aunque a veces es catalogado como un método de clustering, realmente es un método de estimación de densidades, que tiene en cuenta la estructura de varianzas – covarianzas de los datos (K-MEANS ni siquiera tiene en cuenta la varianza). Es dicha matriz la que determina la forma de la distribución de los puntos.



- o La idea consiste en encontrar la combinación de gaussianas que maximiza la probabilidad de que una relación de puntos "i" esté representada por dichas gaussianas: $\pi_{k,i} = p(x_i \in N(\mu_k, \sigma_k))$ k=1,2,...,K
- Dado un punto xi y una distribución gaussiana N(μ,σ), se puede calcular cómo de verosímil es observar dicho punto si procede de dicha distribución. No es más que el valor de la densidad:



$$L(\mu,\sigma|x_i) = f_{(\mu,\sigma)}(x_i|\mu,\sigma) = f_{(\mu,\sigma)}(x_i) = p(x_i|x_i \in N(\mu_k,\sigma_k))$$

 Si en lugar de una, tuviéramos k gaussianas, se podría calcular igualmente dicha verosimilitud como la suma de las probabilidades asociadas a cada una de las gaussianas:

$$L((\vec{\mu}, \vec{\sigma}) | x_i) = f_{(\mu, \sigma)}(x_i) = \sum_{k=1}^K p(x_i \in N(\mu_k, \sigma_k)) * p(x_i | x_i \in N(\mu_k, \sigma_k))$$

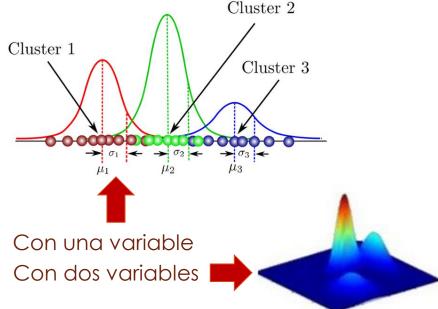
o El resultado es **extendible a un conjunto** $X=(x_1,x_2,...,x_n)$ asumiendo **que la verosimlitud de observar cada uno de ellos es independiente de las otras y multiplicando dichas verosimlitudes: n K**

$$L(\vec{\phi}, \vec{\sigma}_{k})|X) = \sum_{i=1}^{K} p(x_{i} \in N(\mu_{k}, \sigma_{k})) * p(x_{i}|x_{i} \in N(\mu_{k}, \sigma_{k})) = \sum_{i=1}^{K} \pi_{k,i} p(x_{i}|(\vec{\mu}_{k}, \Sigma_{K}))$$
Data Science y Big Data $i=1$ $k=1$

o En este problema, las medias $\vec{\mu}$, las varianzas $\vec{\sigma}$ y los pesos $\vec{\pi}$ (con $\sum_{k=1}^K \pi_k = 1$) a asociar a cada gaussiana son los parámetros a **estimar para tratar de hallar**:

$$\max_{\vec{\mu}, \vec{\sigma}, \vec{\pi}} L((\vec{\mu}, \vec{\sigma})|X)$$

- Para ello, se aplica un algoritmo de Maximización de Esperanza (EM) que básicamente consiste en:
 - Inicializar k distribuciones gaussianas.
 - Calcular la probabilidad de pertenencia de cada punto a cada una de las distribuciones $p(x_i \in N(\mu_k, \sigma_k))$.
 - Recalcular los parámetros de las distribuciones $N(\mu_k, \sigma_k)$ basándose en dichas probabilidades.
 - Repetir el proceso hasta que se maximice $L((\vec{\mu}, \vec{\sigma})|X)$.



o A diferencia del K-MEANS que es un método de clasificación haku en el que cada punto va asociado a un único cluster, una de las ventajas del método GMM es que devuelve de manera directa la probabilidad de que un punto pertenezca a cada uno de los clusters, algo que de alguna manera se perseguía con el FUZZY K-MEANS (algoritmo de clasificación SOFT).



Tipos de algoritmos. Ventajas y desventajas. Útil

Model	Pros	Cons	Use Cases	
K means	Quickest centroid based algorithm	Suffers when there is noise in the data		
	Very lucid and can scale up for large amount of data sets	Outliers can never be identified	Even cluster size, flat geometry,	
	Reduces intra-cluster variance measure	Even though it reduces intra-cluster variance, it faces local minimum problem	not too many clusters and	
		Not ideal for data sets of non-convex shapes	general-purpose	
8		Complicated to predict best K value		
Agglomerative :	Embedded flexibility regarding level of granularity using dedrogram	Computationaly expensive	Possibly connectivity	
	Can handle of any forms of similarity or distance Can't handle outliers		constraints, nor Euclidean	
		Ward's algorithm usually generates equal size clusters	distances and many clusters	
DBSCAN	Resistant to outliers	Highly sensitive to the two parameters- Eps and Min points		
	Can handle clusters of different shapes and sizes	DBSCAN cannot cluster data sets well with large variances in densities	Uneven cluster sizes and non-	
	Not required to specify the number of clusters		flat geometry	
GMM	Robust to outlers		Good for density estimation and flat geometry	
	Provides the BIC score for selecting paramteres	The algorithm is highly complex and can be slow		
	Converges fast given good initialisation			

Tipos de algoritmos. Ventajas y desventajas. Útil

Los algoritmos vistos quedan enmarcados dentro de una clasificación + amplia:

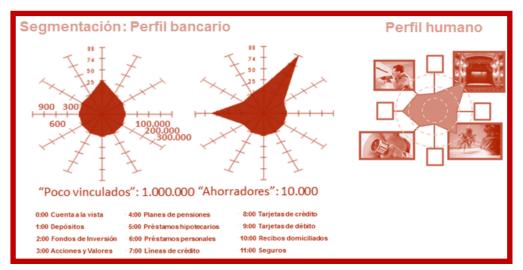
Name	Algorithm	Key –idea	Type of Data	Advantages	Disadvantages
Partitional	K-means	Mean Centroid	numerical	-Simple -Most popular	-Sensitive to outliers -Centroids not meaningful in most problems
	PAM	Mediod -centriod		robust to outliers	Cluster should be pre -determined
	CLARA CLARANS	Mediod -centriod		Applicable for large data set Handles outliers effectively	Sensitive to outliers High cost
Density Based	DBSCAN	Fixed sixe	numerical	-Resistant to noise -Can handle clusters of various shapes and sizes.	-Cannot handle varying densities
	OPTICS			-Good for data set with large amount of noise -Faster in computation	-Needs large no.of parameters
	DENCLUE	Variable size		-Solid mathematical foundation	- Needs large no.of parameters
	RDBC			-More effective in discovering varied shape clusters -Handles noise effectively	-Cost Varying
Hierarchical agglomerative	CURE	Partition samples	Numerical	-Robust to outliers -Appropriate for handling large dataset	Ignores information about inter-connectivity of objects
	BIRCH	multidimemsional	Numerical	-suitable for large databases -scales linearly	-Handles only numeric data -sensitive to data records
	ROCK	Notion of links	categorical	-Robust -Appropriate for large dataset	space complexity depends on initialization of local heaps
	S-link	Closest pair of points	-	it does not need to specify no.of clusters	-Termination condition needs to be satisfied. -Sensitive to outliers
	Ave-link	Centriod of clusters	-	It considers all members in cluster rather than single point	It produces clusters with same variance.
	Com-link	Farthest pair of points	-	Not strongly affected by outliers	It has problem with convex shape clusters.
Grid	STING	N6.16:-1:1-	Numerical	-Allows parallelization and multiresolution	-Does not define appropriate level of granularity
	WaveCluster Multiple grids		Numerical	- High-quality clusters - Successful outlier handling	-Cost Varying.
	CLIQUE	Density based grids		-Dimensionality reduction - Scalability -Insensitive to noise	-Prone to high dimensional clusters

Validación de resultados



Validación de resultados

- La validación de resultados pasa por comprobar que:
- Al representar los centroides de los clusters se reconozcan grupos claramente diferentes y que tengan sentido: que permita asignarles un nombre (bautizar).



- El **número de grupos y el volumen de éstos sea razonable** (por ejemplo, si en función de ellos se tiene intención de articular acciones comerciales).
- No se echa en falta ningún grupo esperable antes de realizar el análisis.



Caso de uso l Segmentación de Estados en función de su nivel de criminalidad



Caso de uso. Segmentación de estados en función de su nivel de criminalidad

- El archivo crime.csv contiene datos de criminalidad por 10.000 habitantes en cada uno de los estados de EEUU de acuerdo a los siguientes criterios:
 - Asesinatos (variable MURDER)
 - Violaciones (variable RAPE)
 - Robos (variable ROBBERY)
 - Asaltos (variable ASSAULT)
 - Agresiones (variable BURGLARY)
 - Hurtos (variable LARCENY)
 - Robos de coches (variable AUTO_THEFT)
- Se plantea realizar una segmentación en función de dichas variables:
 - Estandarizar los datos.
 - Eliminar posibles outliers aplicando la transformación logarítmica.
 - Aplicar los diferentes métodos de segmentación vistos.



Práctica Segmentación bancaria



Práctica: Segmentación bancaria

 Una entidad bancaria está interesada en conocer el perfil de los clientes de su cartera respecto a la tenencia y saldo de sus productos de activo y pasivo:

PRODUCTOS DE AHORRO

- Cuenta a la vista (checkingAccount).- saldo medio en el último año.
- Depósitos (deposit).- saldo medio en el último año
- Acciones (shareOfStock).- saldo medio en el último año
- Planes de pensiones (pensionPlan).- saldo medio en el último año

PRODUCTOS DE ACTIVO

- Hipotecas (mortgage).- saldo deudor medio en el último año
- Préstamos personales (loan).- saldo deudor medio en el último año
- Tarjetas (cards).- importe medio gastado con tarjetas de crédito en el último año
- Seguros (insurance).- número de seguros contratados (muy vinculado a la tenencia de hipoteca)

VINCULACIÓN

- Recibos domiciliados (billPayment).- nº medio de recibos domiciliados en el último año
- Domiciliación nómina (salary).- indicador de tenencia de domiciliación de nómina

Entregar un .HTML / .PDF en el que se presente:

- o El procesamiento de datos previos para lleva a cabo un análisis de segmentación.
- o Los pasos llevados acabo para realizar un ajuste bietápico, presentado las decisiones tomadas para determinar el número de clusters establecido.
 - Una descripción de los grupos obtenidos.



La información está contenida en la tabla segmentacionBanca.csv.



danielvelezserrano@gmail.com