Universidad de Costa Rica
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
ANÁLISIS NÚMERICO
MA-0501

MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS Y APLICACIÓN PARA VALORACIÓN DE OPCIONES EUROPEAS.

Henri Gerard Gabert Hidalgo - B93096
Javier Antonio Hernández Navarro - C13674
Juan Pablo Morgan Sandí - C15319

II - 2024

Resumen

Este trabajo aplica el método de diferencias finitas para la valoración de opciones europeas mediante la ecuación diferencial de Black-Scholes-Merton en un contexto de valoración libre de riesgo. El enfoque incluye tanto el método explícito como el implícito, priorizando este último por su estabilidad numérica. Se desarrolla una implementación en Matlab para resolver sistemas de ecuaciones tridiagonales, evitando la inversión de matrices para mayor precisión y eficiencia computacional. Los resultados muestran un error numérico insignificante bajo condiciones ideales, validando el método para contextos financieros complejos. Además, se discuten las relaciones entre el precio del activo subyacente y el valor de las opciones tipo call y put, junto con las diferencias en costo computacional entre los métodos numéricos empleados.
Palabras Clave: Ecuaciones diferenciales, Opciones financieras, Diferencias finitas, Valoración libre de riesgo, Matlab

Índice

1. Introducción

En el ámbito de las finanzas cuantitativas, la valoración de opciones financieras representa un área clave que combina modelos matemáticos avanzados con herramientas numéricas para optimizar la toma de decisiones estratégicas en los mercados. Las opciones, como instrumentos derivados, permiten a los inversores gestionar riesgos, proteger sus carteras o especular sobre el comportamiento futuro de los activos subyacentes. Su valoración precisa es esencial, ya que determina su precio justo en el mercado, lo que a su vez influye en decisiones de compra, venta y estrategias de cobertura.

Uno de los pilares en la valoración de opciones europeas es la ecuación diferencial de Black-Scholes-Merton, un modelo que proporciona soluciones analíticas bajo supuestos ideales como volatilidad constante, mercados eficientes y ausencia de arbitraje. Sin embargo, en la práctica, muchas de estas condiciones se relajan para considerar escenarios más complejos. Es en este contexto donde los métodos numéricos, como el de diferencias finitas, adquieren relevancia, al ofrecer herramientas flexibles para abordar ecuaciones diferenciales parciales que carecen de soluciones exactas en configuraciones realistas.

El método de diferencias finitas se fundamenta en la discretización del dominio continuo en mallas compuestas por intervalos temporales y espaciales, permitiendo aproximar soluciones mediante cálculos iterativos. En este trabajo, se emplean y analizan las dos principales variantes del método: explícita e implícita. El método explícito se caracteriza por su simplicidad en la implementación, ya que calcula los valores futuros directamente a partir de los valores actuales, siendo adecuado para problemas que no requieren alta precisión en condiciones de estabilidad. Por otro lado, el método implícito, aunque más complejo y computacionalmente exigente, es robusto y garantiza estabilidad numérica incluso para pasos temporales más grandes, lo que lo convierte en una opción preferible en aplicaciones críticas.

Ambas aproximaciones se desarrollan en detalle, explorando sus diferencias operativas, ventajas y limitaciones. El análisis incluye su implementación práctica en Matlab para la valoración de opciones europeas, abordando aspectos técnicos como la solución de sistemas tridiagonales y la aplicación de condiciones de frontera. Este enfoque no solo permite evaluar la precisión y estabilidad de los métodos, sino que también ofrece una perspectiva comparativa que resalta su utilidad en contextos financieros reales.

Este trabajo pretende aportar una visión integral sobre la aplicabilidad de los métodos de diferencias finitas en la valoración de derivados financieros, ofreciendo una base metodológica para investigaciones futuras que busquen extender estos métodos a escenarios más complejos, como opciones con características especiales o volatilidad estocástica.

2. Desarrollo

2.1. Opciones

Las opciones financieras son derivados financieros que como Hull (2022) dice estos pueden ser tratados tanto en bolsas financieras como en el mercado .ºver the counter .ªdemás estos a diferencia de los contratos forward y futuros no obligan al comprador a ejecutarlo, otra diferencia es que las opciones acarrean consigo el pago de una prima de parte de los compradores del contrato para con los vendedores, mientras que los forward y futuros no tienen un costo de adquisición, para ninguna de sus partes.

Existen 2 tipos de opciones financieras las opciones de compra (call) y las de venta (put), las primeras son contratos en que el comprador adquiere el derecho de comprar una cantidad pactada de un activo subyacente a un precio fijado y en una fecha o fechas fijadas en el contrato, por el lado, las opciones put, son un contrato en que el comprador adquiere el derecho a vender una cantidad de activo también en un precio fijado y en una o varias fechas pactadas en el contrato, importante recalcar que es el derecho y no la obligación, mientras tanto el vendedor de estos contratos si posee la obligación de compra en caso de haber vendido una opción put o la venta en caso de vender una call, dentro de estos derivados financieros existen muchos tipos según como se calcula el precio de ejercicio, el como se determina la fecha de ejercicio y demás características que lo conforman.

Este trabajo se centrarán en las opciones europeas, las cuales tienen un valor (P para put, C para call y V para generalizar ambas),pueden ser ejercidas unicamente en el momento del vencimiento de la opción (T) a un precio de ejercicio (K) y lleva intrínseco el valor de un activo (S).

La valoración de la opción depende del precios de activo y el tiempo por lo que V = V(S,t)

2.2. Black-Sholes

En los inicios de la década de 1970, Fischer Black y Myron Scholes realizaron un importante aporte al derivar una ecuación que representa el comportamiento del precio de cualquier instrumento derivado dependiente de una acción que no pague dividendos y utilizaron esta ecuación para obtener el valor de diferentes opciones europeas de put y call sobre acciones.

Entonces para definir la ecuación diferencial de Black-Sholes, y asumiendo una valoración libre de riesgo, según Hull (2022), primero tomamos un portafolio que está compuesto por:

- -1: derivado
- $+\frac{\partial f}{\partial S}$: acciones

El titular de esta cartera es corto un derivado y largo una cantidad $\frac{\partial f}{\partial S}$ de acciones. Definimos Π como el valor de la cartera:

$$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S} S \tag{1}$$

El cambio $\Delta\Pi$ en el valor de la cartera en el intervalo de tiempo Δt viene dado por:

$$\Delta\Pi = -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial S} \Delta S \tag{2}$$

Sustituyendo obtenemos:

$$\Delta\Pi = \left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t \tag{3}$$

Dado que esta ecuación no involucra Δz, la cartera debe ser sin riesgo durante el intervalo de tiempo Δt. Las suposiciones listadas en la sección precedente implican que la cartera debe instantáneamente ganar la misma tasa de retorno que otros activos libres de riesgo a corto plazo. Si ganara más que este retorno, los arbitrajistas podrían obtener una ganancia sin riesgo al pedir prestado dinero para comprar la cartera; si ganara menos, podrían obtener una ganancia sin riesgo vendiendo en corto la cartera y comprando activos libres de riesgo. Se sigue que:

$$\Delta\Pi = r \Pi \Delta t \tag{4}$$

donde r es la tasa de interés libre de riesgo. Sustituyendo las ecuaciones (3) y (5) en la ecuación (6), obtenemos:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \right) \Delta t = r \left(f - \frac{\partial f}{\partial S} S \right) \Delta t \tag{5}$$

de modo que

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rs \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf \tag{6}$$

Es la ecuación diferencial de Black-Scholes-Merton.

2.2.1. Mundo Libre de Riesgo

En esta investigación, se valorará en un mundo libre de riesgo, el cual es una de las propiedades clave de la ecuación diferencial de Black-Scholes y está referida a que la ecuación no incluye ninguna variable que tenga relación con la actitud al riesgo de los inversores. Sin lugar a dudas la valoración neutral al riesgo es la herramienta más importante para el análisis de instrumentos derivados. Las variables que aparecen en dicha ecuación son el precio actual de la acción, el tiempo, la volatilidad del precio de la acción y la tasa de interés libre de riesgo, todos independientes del nivel de aversión al riesgo, lo que permite utilizar el simple supuesto de que todos los inversores son neutrales al riesgo.

2.3. Diferencias finitas

El término ”diferencias finitas” según Luis Lara Romero (2019) se refiere a un método numérico utilizado para aproximar soluciones de ecuaciones diferenciales, en dominios finitos y discretizando las variables continuas, en nuestro caso tiempo y precios de las acciones asociadas a las opciones, en intervalos finitos, dando como resultado una malla de puntos que al resolver el sistema de ecuaciones resultante, obtenemos los valores que aproximan a la solución.

Según Luis Lara Romero (2019) el primer paso es definir el dominio y su discretización en un número variable de puntos por lo que se puede seguir un proceso semejante al presentado en Otero, Andalaft, y Vásquez (2008) dividiendo el intervalo de tiempo que representa nuestro dominio en intervalos iguales, supongamos dominio del tiempo $[0, T]$ es decir que el $\Delta t = T/N$ siendo N la cantidad de intervalos de tiempo que se obtendrán y $N + 1$ la cantidad de columnas que va a tener la malla, repetimos el proceso con los precios obteniendo $\Delta S = S_{max}/M$ siendo $M + 1$ la cantidad de filas que va a poseer la malla, por lo que obtendríamos un total de $N + 1 \times M + 1$ de nodos o puntos en la malla y utilizando la notación de Otero y cols. (2008) llamaremos $f_{i,j}$ para representar el valor de la opción en el tiempo i y el precio del activo de j.

Existen varios metodologías para obtener estas soluciones mediante diferencias finitas, según Jiménez Terradillos y cols. (2013) utilizando el método explicito, implícito y el de Crank-Nicolson, sin embargo este trabajo se va a centrar en el explicito e implícito y se llevará acabo una aplicación financiera con los mismos.

2.3.1. Método de Diferencias Finitas Explícito

El **método explícito** es un enfoque en el que el valor de la solución en el tiempo $i+1$ se calcula directamente en función de los valores en el tiempo i. Es decir, la solución en el siguiente paso temporal se obtiene de manera explícita a partir de los valores actuales.

En este contexto y al igual que Gutiérrez (s.f.) podemos definir los puntos del dominio [a,b] como $(x_n)_n = a + n\Delta t, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots, N$. De esta forma, la función $f(x)$ se aproxima mediante la secuencia discreta $(f_n)_n = f(x_n)$, y su derivada se puede aproximar utilizando diferencias finitas:

- **Diferencia hacia atrás**:

$$\frac{df}{dt}(x_0 = x_i) \approx \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta t}, \quad i = 1, 2, \ldots, N.$$

- **Diferencia central**:

$$\frac{df}{dS}(x_0 = x_i) \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta S}, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1.$$

- **Segunda derivada**:

$$\frac{d^2 f}{dS^2}(x_0 = x_i) \approx \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{\Delta S^2}, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1.$$

Este esquema se denomina **explícito** porque el valor de $V(t_i, S_j)$ en el siguiente instante de tiempo $i+1$ depende únicamente de los valores conocidos en el tiempo i. Al sustituir estas aproximaciones en la ecuación diferencial correspondiente, en este caso la Black-Sholes y reacomodando obtenemos:

$$f_{i+1,j-1}\left[\frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t - \frac{1}{2} r j \Delta t\right] + f_{i+1,j}\left[1 - \sigma^2 j^2 \Delta t - r\Delta t\right] + f_{i+1,j+1}\left[\frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t + \frac{1}{2} r j \Delta t\right] = f_{i,j}.$$

Por lo que se comienza el cálculo desde las condiciones de frontera, iterando a lo largo de los puntos espaciales y temporales hasta determinar el valor actual de la opción.

2.3.2. Método de Diferencias Finitas Implícito

En el **método implícito**, el valor de la solución en el siguiente paso de tiempo $i+1$ se calcula utilizando los valores en $i+1$ mismos. Esto significa que la ecuación se resuelve de manera implícita, ya que involucra la solución desconocida en el próximo paso temporal.

Se emplea la misma fórmula centrada y de segundo orden para aproximar derivadas, pero además como lo hace Gutiérrez (s.f.) se introduce la diferencia hacia adelante, de la forma:

- **Diferencia hacia adelante**:

$$\frac{df}{dt}(x_0 = x_i) \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta t}, \quad i = 0, 1, \ldots, N-1.$$

En este método, el valor de la opción en el siguiente paso de tiempo, $V(t_{i+1}, S_j)$, aparece en el lado derecho de la ecuación. Esto implica que es necesario resolver un sistema de ecuaciones algebraicas para determinar los valores de la solución.

El sistema resultante se puede definir de la siguiente forma, a partir de la ecuación diferencial y las condiciones iniciales:

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & \\ & a_j & b_j & c_j & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{M-2} & b_{M-2} & c_{M-2} \\ & & & & a_{M-1} & b_{M-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{i,1} \\ V_{i,2} \\ V_{i,j} \\ \vdots \\ V_{i,M-2} \\ V_{i,M-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{i+1,1} \\ V_{i+1,1} \\ V_{i+1,j} \\ \vdots \\ V_{i+1,M-2} \\ V_{i+1,M-1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_1 V_{i,0} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c_{M-1} V_{i,M} \end{bmatrix}.$$

Obteniendo un sistema de $M - 1$ ecuaciones y misma cantidad de variables. La primera matriz en el sistema es constante con valores a_n ,b_n y c_n que definiremos más adelante, mientras que el vector a su lado posee los valores de la opción para todos los posibles precios del activo subyacente en el momento t_i, el primer vector después del igual representa los valores correspondientes al siguiente periodo de tiempo, t_{i+1} y el último vector introduce los efectos de las condiciones de frontera.

2.4. Aplicación con opciones europeas

Para realizar la aplicación se utilizó el método implícito para resolver la ecuación diferencial de Black-Sholes, esto con el fin de valorar el precio de la opción de tipo call europea, al igual que Heras (2014) teniendo conocido el valor de la opción en el tiempo t_{j+1}, para calcular el precio en el tiempo t_j es preciso resolver un sistema de ecuaciones. Los datos utilizados corresponde a los siguientes:

Precio de ejercicio	13,5
Tipo de interes libre de riesgo	1,35 %
Fecha de vencimiento	1,5 años
Volatilidad	25 %
Subdivisiones precio	100
Subdivisiónes tiempo	100

Cuadro 1: Valores de la opción tipo call europea

El primer paso a seguir el acotar el problema y fijar un dominio, por lo que para el tiempo no había ningún problema en suponer que se encontraría entre 0 momento de la adquisición del contrato y $T = 1{,}5$ momento de vencimiento pues, después del vencimiento el valor sería 0 constante, por otro lado para las condiciones del precio del subyacente se tomó de Heras (2014) pues según esta fuente se suele utilizar tres o cuatro veces el valor del de ejercicio K, por lo que tomamos 4 veces de valor del mismo, obteniendo un dominio de $[0; 1{,}5] \times [0, 54]$.

Además de decidir el dominio del problema, se debe definir lo que ocurre en las fronteras por lo que basándonos en Heras (2014) tenemos las siguientes condiciones:

- $V(t, 0) = 0, \quad \forall t \in [0, T]$
- $V(t, S_\infty) = S_\infty - Kexp(-r(T-t)), \quad \forall t \in [0, t]$
- $V_{N+1,i} = V(T, S_i) = max(S_i - K, 0).$

Gráficamente se pueden visualizar estas condiciones de la siguiente forma:

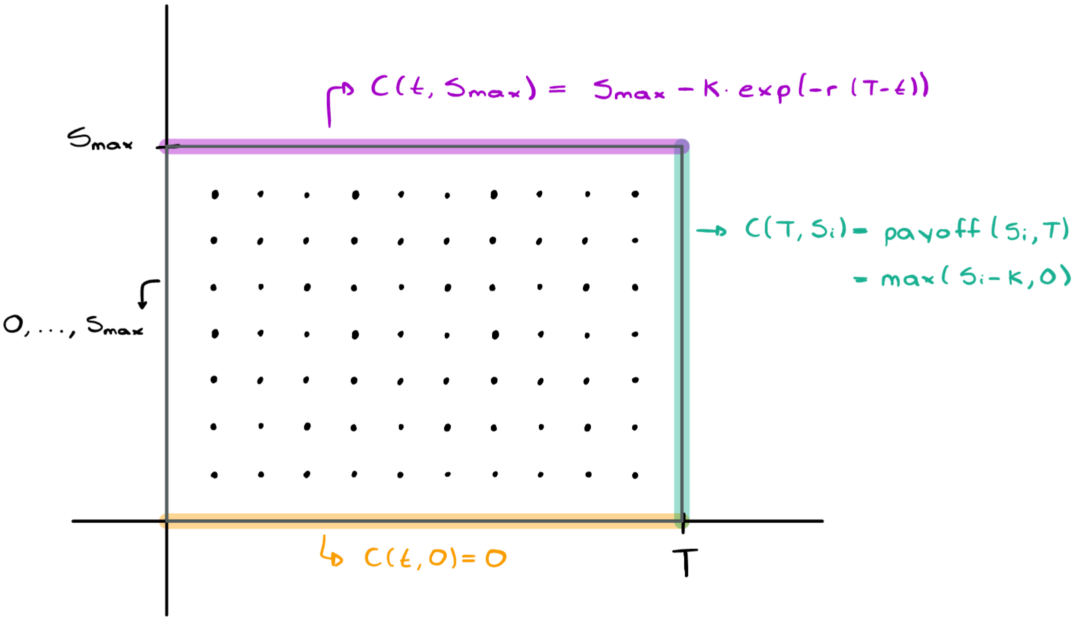

Figura 1: Dominio utilizado

Y como resultado, la malla de puntos corresponde a la siguiente:

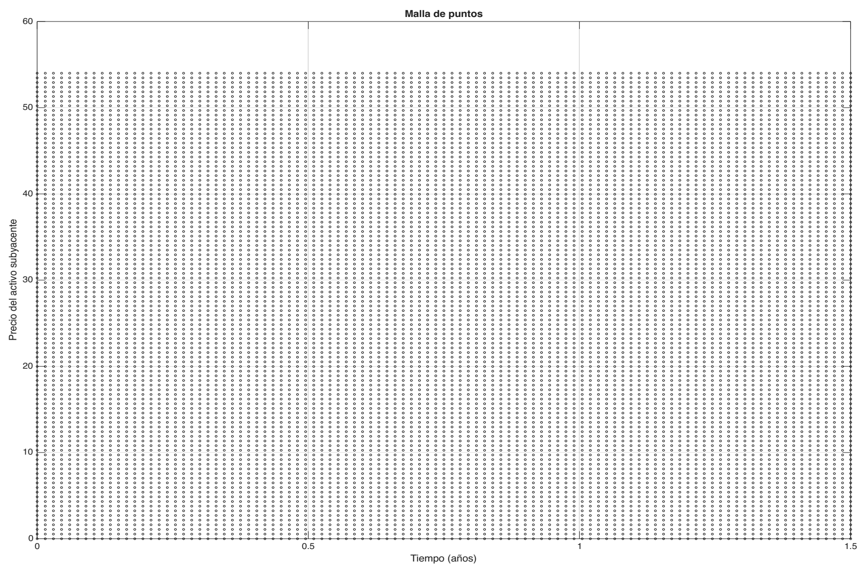

Figura 2: Malla de puntos

Ahora bien, dado que ya se tienen las condiciones del dominio definidas, para cada punto interior de la malla (i, j) utilizando la ecuación de Black-Sholes presentada anteriormente:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rs\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf$$

Se pueden aproximar los valores de: $\partial f/\partial S$, $\partial f/\partial t$, $\partial^2 f/\partial S^2$ utilizando diferencias finitas, junto con las derivadas aproximadas mencionadas anteriormente y sustituyendo obtenemos:

$$\frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta t} + rj\Delta S \frac{f_{i,j+1} - f_{i,j-1}}{2\Delta S} + \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta S^2 \frac{f_{i,j+1} + f_{i,j-1} - 2f_{i,j}}{\Delta S^2} = rf_{i,j}$$

para $j = 1, 2, \ldots, M-1$ e $i = 0, 1, \ldots, N-1$.

Al reordenar los términos, obtenemos:

$$a_j f_{i,j-1} + b_j f_{i,j} + c_j f_{i,j+1} = f_{i+1,j}$$

donde

$$\begin{aligned} a_j &= \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t - \frac{1}{2} rj\Delta t, \\ b_j &= 1 + \sigma^2 j^2 \Delta t + r\Delta t, \\ c_j &= \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t + \frac{1}{2} rj\Delta t. \end{aligned}$$

Cómo lo menciona Jiménez Terradillos y cols. (2013) sustituyendo a_j, b_j y c_j en la matriz tri-diagonal mencionada anteriormente y tomando los vectores requeridos, se podría invertir la matriz M_{im} y se podría resolver $V_{n+1} = M_{im}^{-1}(U_n + B_{n+1})$, sin embargo este tipo de procedimiento puede causar inexactitudes ya que calcular numéricamente la inversa de una matriz tiende a tener problemas y más si estas son mal condicionadas, por lo que el enfoque recomendado es resolver el sistema de ecuaciones utilizando métodos de descomposición de matrices por ejemplo LU u otras formas en que se eviten el cálculo explícito de la inversa.

Al resolver las ecuaciones resultantes de la multiplicación de la matriz y de los vectores mencionados, obtenemos la aproximación del resultado, que al graficarlo se obtiene:

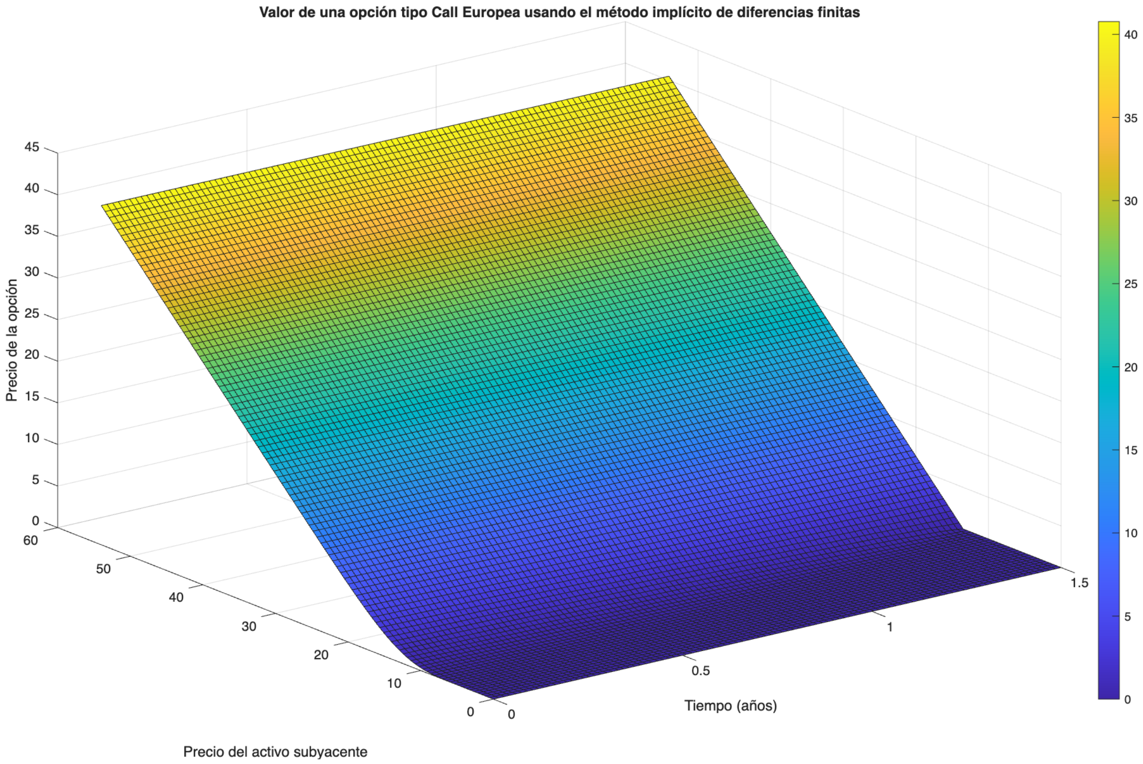

Figura 3: Resolución utilizando el método implícito de diferencias finitas

De una manera similar, se siguió el procedimiento descrito por Jiménez Terradillos y cols. (2013) para resolver dicho problema utilizando el método explicito y finalmente se compararon los resultados con la solución exacta a dicha ecuación. En el siguiente gráfico se puede visualizar la comparación entre las diferentes metodologías utilizadas:

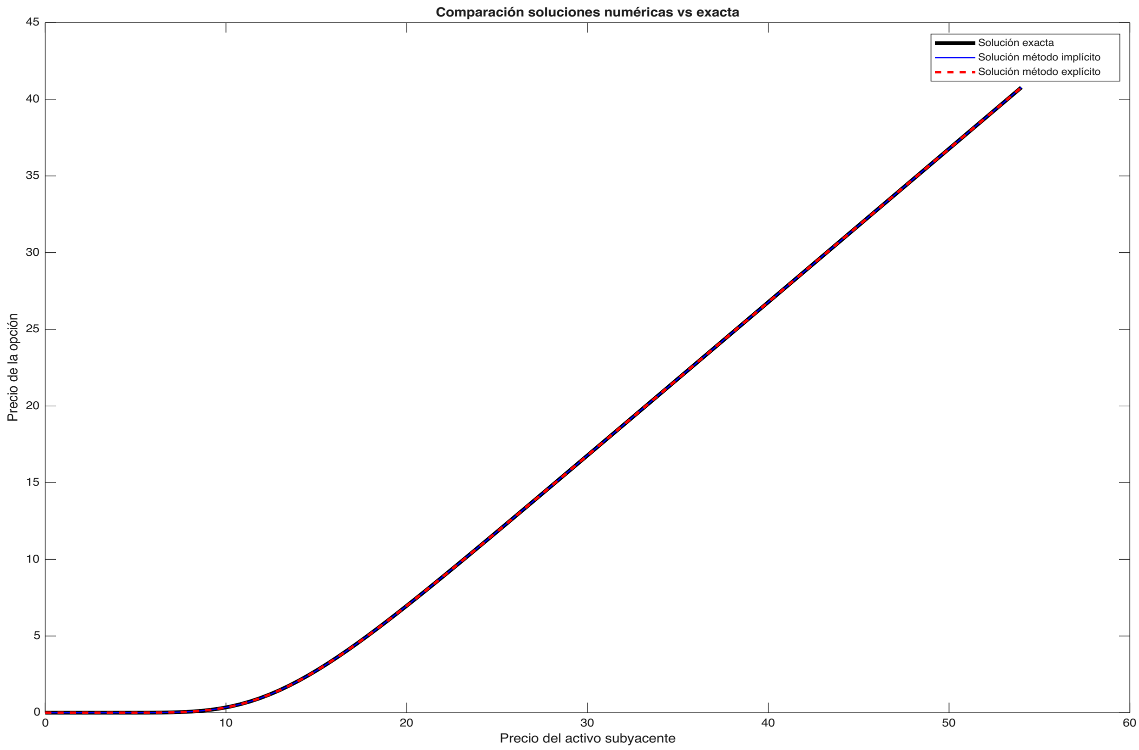

Figura 4: Comparación solución exacta vs numéricas.

Y para finalizar, en el siguiente gráfico podemos observar el error que se obtuvo en dichas aproximaciones según el método utilizado:

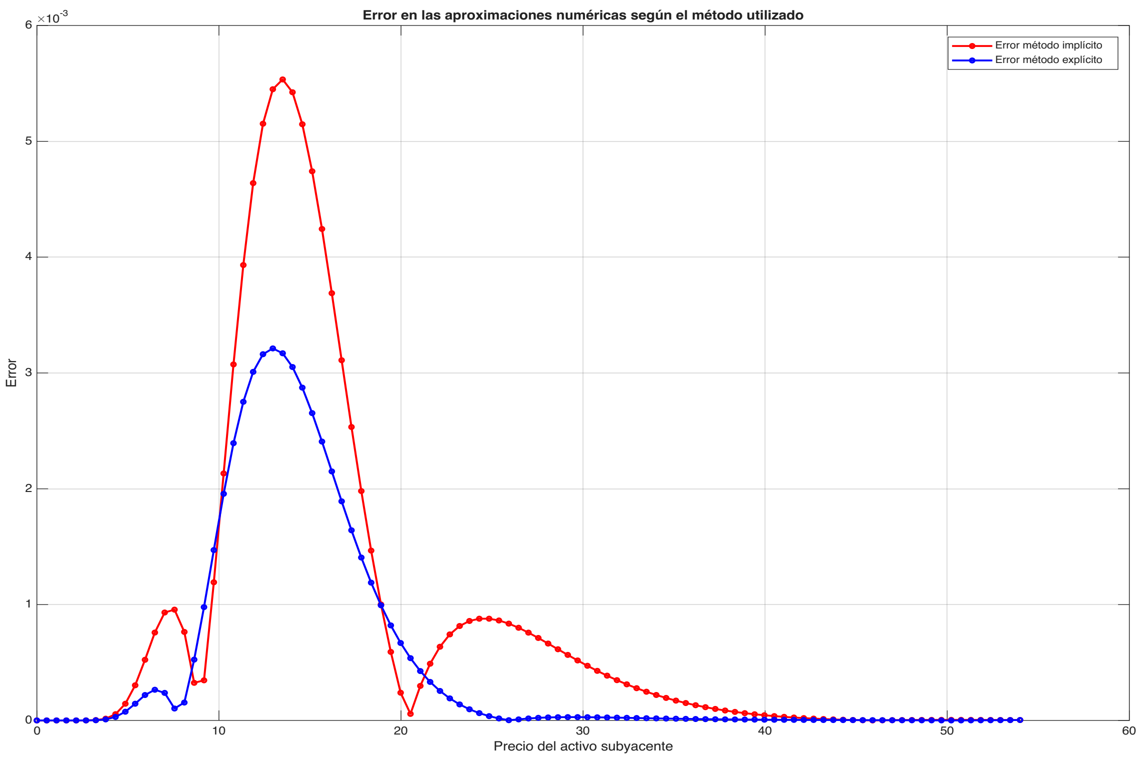

Figura 5: Error en las aproximaciones.

3. Conclusiones

El método de diferencias finitas implementado en Matlab demostró ser altamente preciso al compararlo con la solución analítica de Black-Scholes bajo condiciones ideales, es decir, con volatilidad y tipo de interés constantes. El error numérico obtenido fue insignificante, lo que valida la eficacia del modelo para su uso en la valoración de opciones financieras, incluso en contextos donde no se dispone de soluciones exactas.

Además, en el caso de la opción tipo call sobre las acciones, se observa una relación positiva entre el precio del activo subyacente y el de la opción. Esto significa que a medida que aumenta el precio del activo, el valor de la opción también incrementa, dado que representa un derecho de compra que se vuelve más atractivo. Por otro lado, en la opción tipo put sobre las acciones, se percibe una relación inversa: el valor de la opción aumenta cuando el precio del activo disminuye, lo que refleja su utilidad como instrumento para beneficiarse de la depreciación de un activo.

Por otra parte, a nivel computacional, se aprecia una diferencia significativa en el costo asociado a los métodos de diferencias finitas explícito e implícito, lo cual se explica por la forma en que ambos operan. El método explícito, más sencillo en su implementación, calcula las soluciones punto a punto en la malla, avanzando secuencialmente en el tiempo y utilizando únicamente valores previamente calculados. En contraste, el método implícito, aunque más robusto y adecuado para evitar inestabilidades numéricas, resuelve simultáneamente un sistema de ecuaciones para todos los puntos de la malla en cada paso temporal. Esta característica incrementa la complejidad computacional, dado que requiere técnicas de álgebra lineal para manejar sistemas tridiagonales o matrices densas, aunque se recomienda utilizar cualquier método que no requiera la inversión.

4. Referencias

Gutiérrez, E. S. (s.f.). *Valoración de opciones por el método de diferencias finitas.* Descargado de https://diposit.ub.edu/dspace/bitstream/2445/215135/1/TFM-CAF-S%c3%a1nchez%2bVives-Roch_2024.pdf (Trabajo final del master)

Heras, M. B. (2014). *Valoración de opciones. modelo europeo. aproximación numérica* [Trabajo de Grado]. Descargado de https://gredos.usal.es/bitstream/handle/10366/135299/TG_BernardoHeras_Valoracion.pdf?sequence=1&isAllowed=y (consultada 3/12/2024)

Hull, J. C. (2022). *Options, futures, and other derivatives* (11th ed.). Hoboken, NJ: Pearson Education.

Jiménez Terradillos, V., y cols. (2013). *Métodos numéricos para la valoración de opciones* [Trabajo de Grado]. Descargado de https://uvadoc.uva.es/bitstream/handle/10324/3515/TFG-G269.pdf?sequence=1 (consultada 3/12/2024, Repositorio Valladolid)

Luis Lara Romero, J. C. V., Zenner Chávez Aliaga. (2019). *El mÉtodo de diferencias finitas*. UNIVERSIDAD PRIVADA ANTENOR ORREGO.

Otero, S., Andalaft, A., y Vásquez, E. (2008). El método de diferencias finitas en evaluación de opciones reales. *Ingeniare. Revista chilena de ingeniería*, *16*(1), 232–243. Descargado de https://www.scielo.cl/pdf/ingeniare/v16n1/ART13.pdf