TEORÍA DE GRAFOS

LOS PUENTES DE KÖNIGSBERG

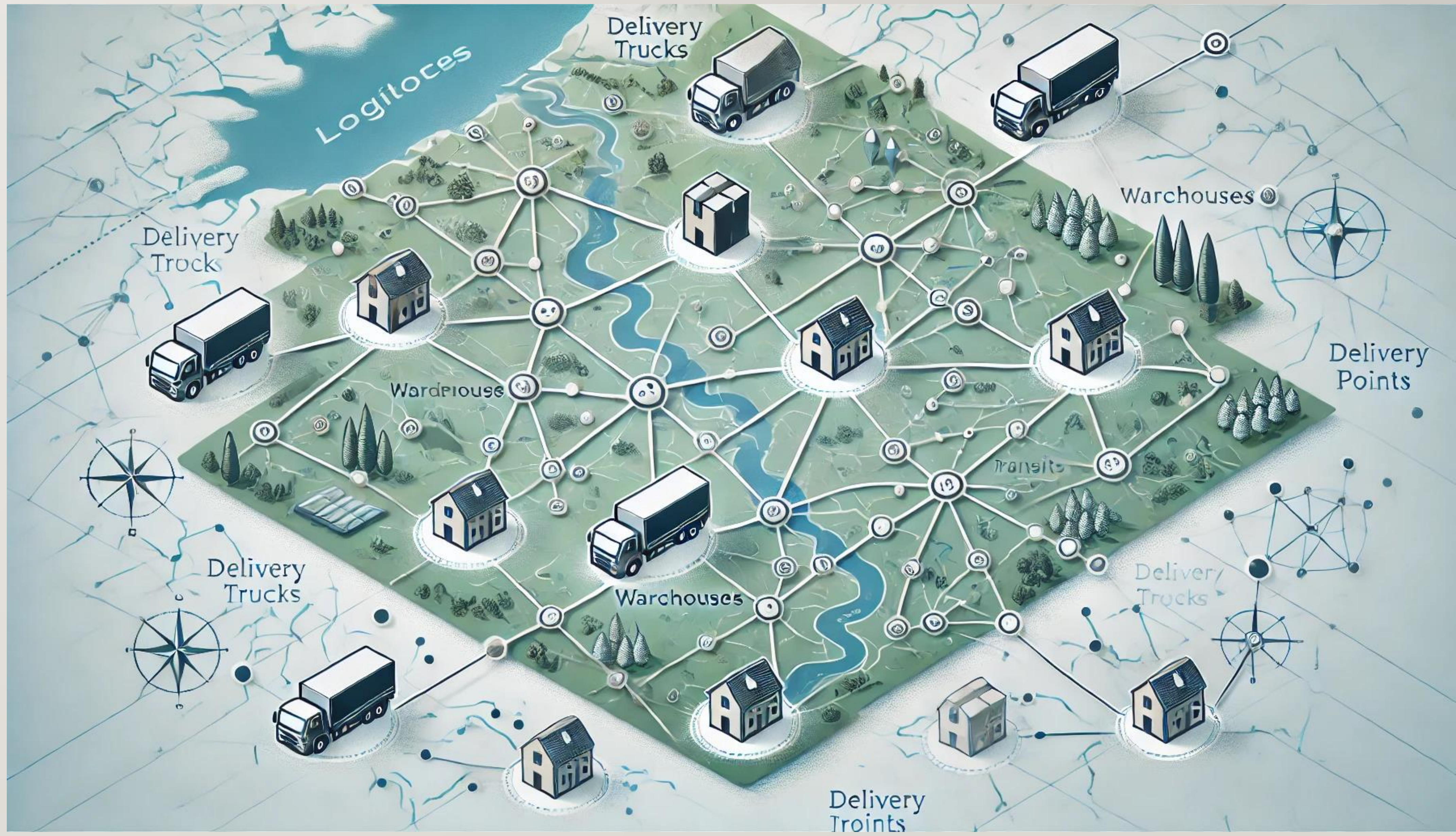
Javier Muñoz, Taller de Gephi (2025)

¿QUÉ ES LA TEORÍA DE GRAFOS?

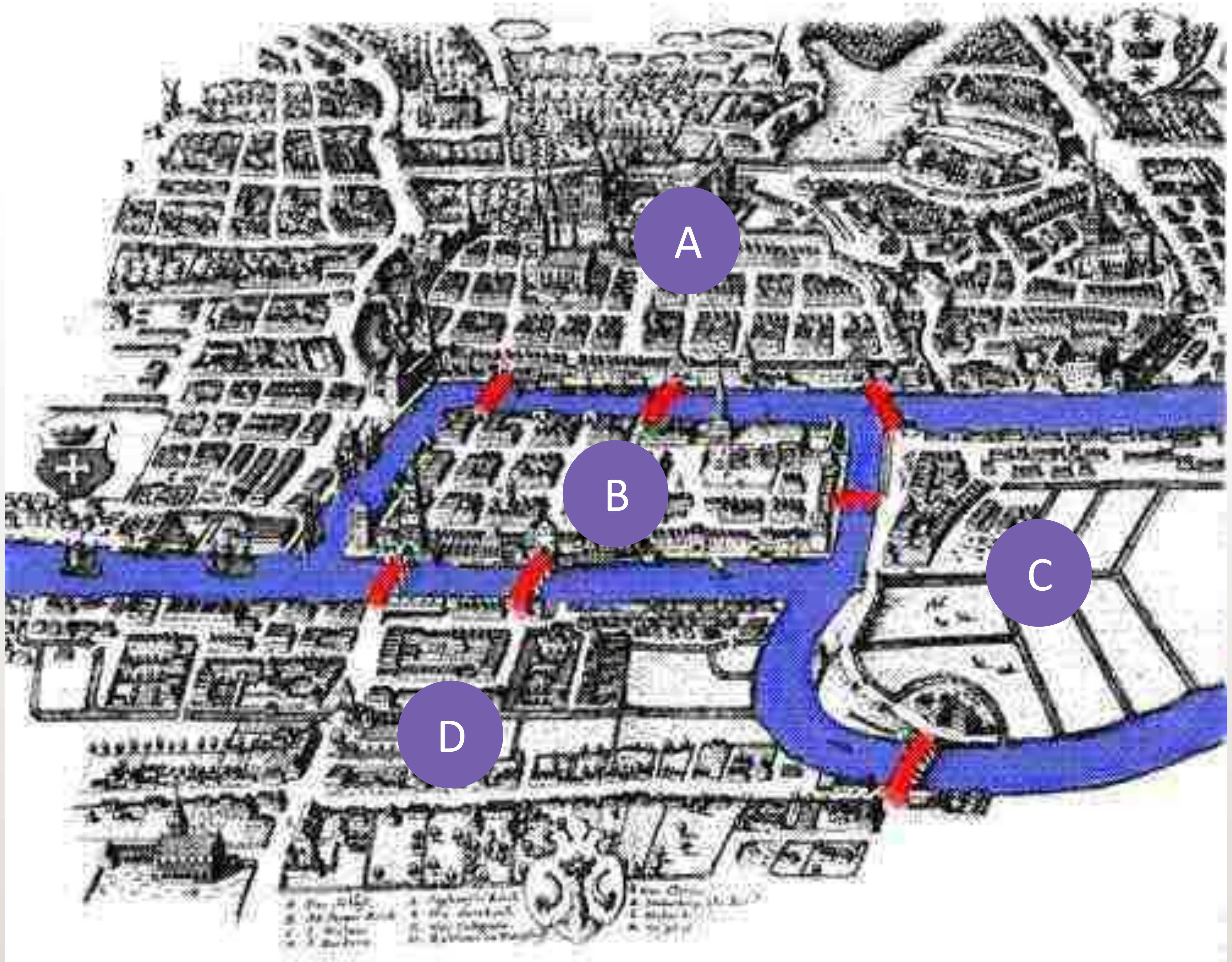
- La teoría de grafos es una rama de las matemáticas que estudia las **relaciones entre objetos** representados como puntos (nodos) y conexiones entre ellos (aristas).
- Tiene aplicaciones en diversos campos, desde la informática hasta la literatura y las ciencias sociales.

ORIGEN

La teoría de grafos nació en 1736 con el matemático **Leonhard Euler**.
Euler resolvió el famoso **Problema de los puentes de Königsberg**, que consistía en encontrar un camino que cruzara todos los puentes de la ciudad una sola vez.
Su solución marcó el inicio de esta disciplina, introduciendo conceptos básicos como el "camino" y el "ciclo".



- Dado el mapa de Königsberg, con el río Pregel dividiendo el plano en cuatro regiones distintas, que están unidas a través de los siete puentes, ¿es posible dar un paseo comenzando desde cualquiera de estas regiones, pasando por todos los puentes, recorriendo solo una vez cada uno, y regresando al mismo punto de partida?



RESOLUCIÓN POR FUERZA BRUTA

- Hay 7 puentes que deben recorrerse en distintas secuencias.
- El número total de secuencias posibles es:
- 7! = 5040
- Desventajas:

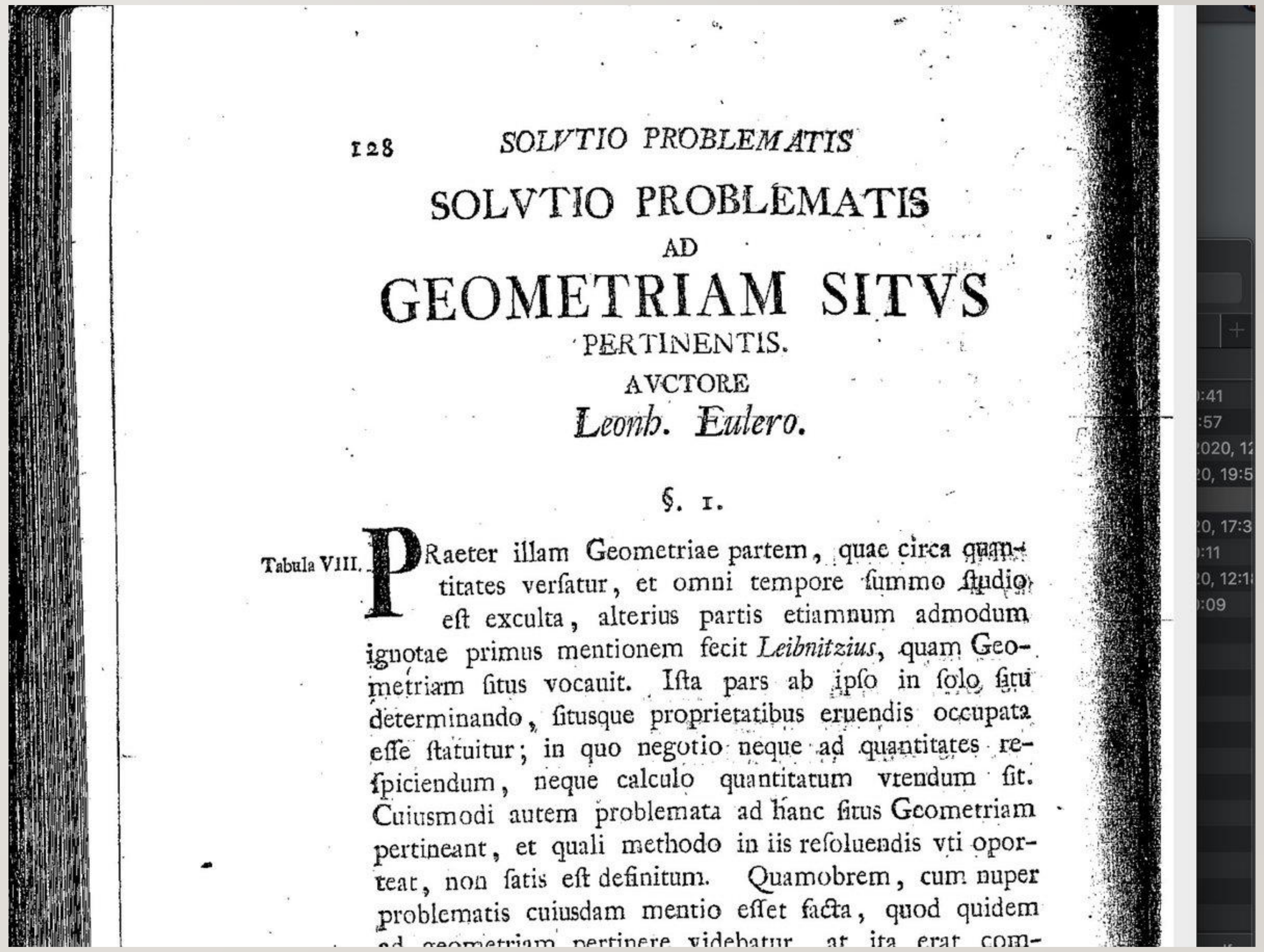
Ineficiencia: Requiere considerable de tiempo.

Falta de elegancia matemática: No proporciona una comprensión profunda de la estructura del problema ni genera una solución generalizable.

Impracticabilidad: Para casos con un número elevado de puentes o regiones, el método se vuelve impracticable debido al crecimiento exponencial de las posibilidades a examinar.

RESOLUCIÓN DE EULER

- Euler, L. (1736). ***Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis.***
- Realiza una abstracción del mapa esquematizando las regiones y las conexiones entre ellas.
- Cada región se convierte en un nodo y cada puente en una arista
- Así, el problema se reduce a decidir si existe o no un camino que comience por uno de los puntos, recorra todas las líneas una sola vez y regrese al mismo punto de partida.



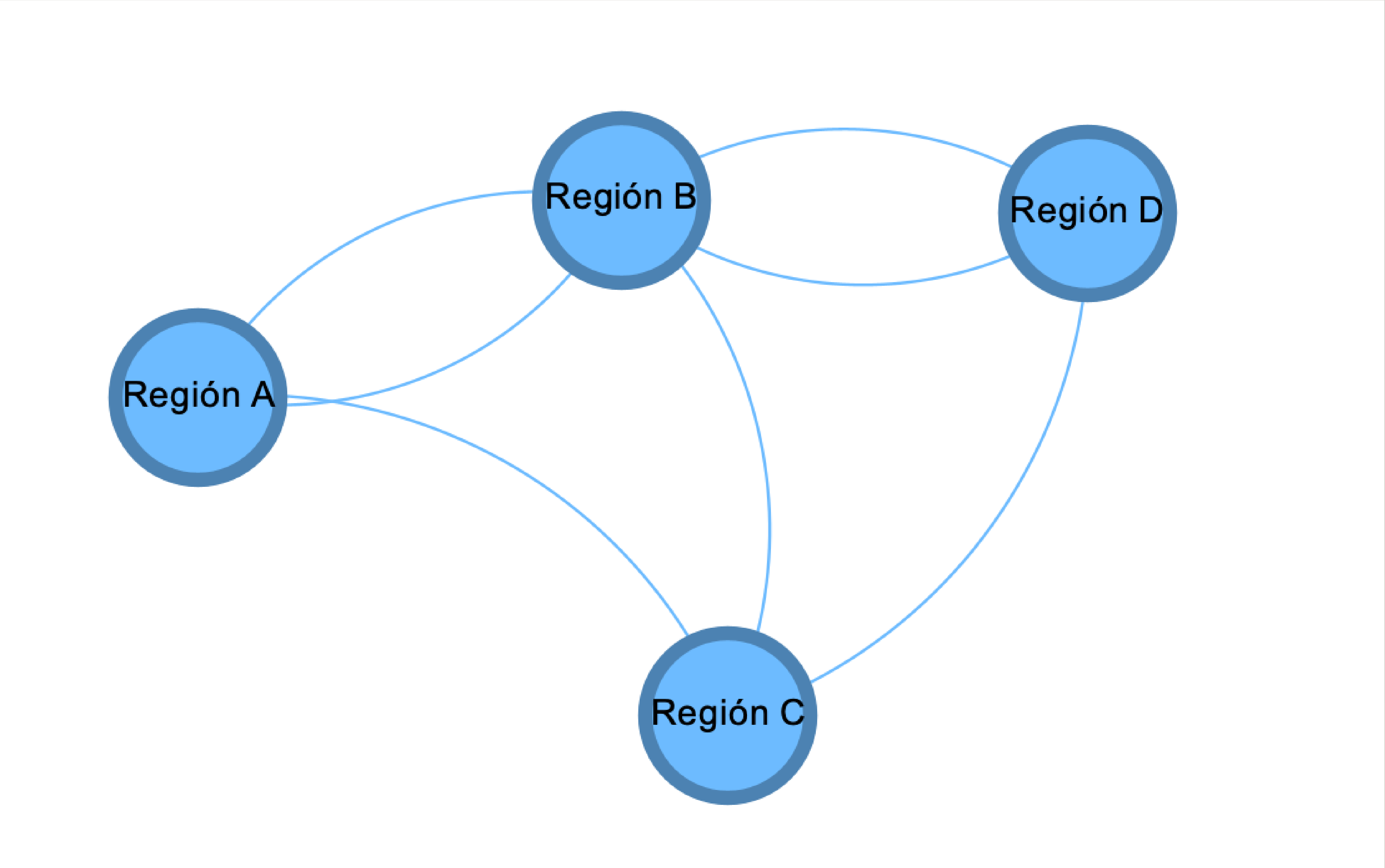
128 SOLVTIO PROBLEMATIS

SOLVTIO PROBLEMATIS
AD
GEOMETRIAM SITVS
PERTINENTIS.
AVCTORE
Leonh. Eulero.

§. 1.

Tabula VIII. PRaeter illam Geometriae partem, quae circa quantitates verſatur, et omni tempore ſummo ſtudio eſt exculta, alterius partis etiamnum admodum ignotae primus mentionem fecit *Leibnitzius*, quam Geometriam ſitus vocauit. Iſta pars ab ipſo in ſolo ſitu determinando, ſitusque proprietatibus eruendis occupata eſſe ſtatuitur; in quo negotio neque ad quantitates reſpiciendum, neque calculo quantitatum vtendum ſit. Cuiusmodi autem problemata ad hanc ſitus Geometriam pertineant, et quali methodo in iis reſoluendis vti oporteat, non ſatis eſt definitum. Quamobrem, cum nuper problematis cuiusdam mentio eſſet facta, quod quidem

- Euler demostró que, para recorrer todos los puentes sin repetir ninguno, los puntos intermedios deben estar conectados a un número par de puentes. Esto se debe a que, si entramos a un punto por un puente, necesitamos salir por otro diferente.
- En un recorrido cerrado (donde el inicio y el final son el mismo punto), todos los puntos deben tener un número par de conexiones.
- Sin embargo, en el caso de los puentes de Königsberg, todos los puntos tienen un número impar de conexiones (tres puntos tienen 3 puentes y uno tiene 5).
- Por eso, es imposible encontrar un recorrido que cruce todos los puentes sin repetir ninguno.



- Esta abstracción del problema realizada por Euler dio lugar a la primera noción de grafo, un tipo de estructura de datos utilizada en matemática discreta y en ciencias de la computación. A los puntos se les llama vértices/nodos y a las líneas aristas.
- https://github.com/javiermunoz-acebes/Gephi-Workshop/blob/main/Set de datos/Königsberg_grafo.gephi
    - Archivo de Nodos: Enlace
    - Archivo de Aristas: Enlace
    - Archivo Gephi: Enlace
- Gephi permite la visualización, exploración y análisis de redes y grafos. Su utilidad para la teoría de grafos radica en varias funciones

[Gephi is the most popular DH tool]

- 1. Visualización de Grafos
  - Permite representar grafos complejos, facilitando la identificación de patrones y comunidades.
  - Usa algoritmos de disposición para distribuir los nodos y aristas de manera clara y legible.
- 2. Análisis Estructural
  - Grados de los nodos: Calcula el número de conexiones para cada nodo, útil para detectar nodos centrales o periféricos.
  - Caminos y distancias: Evalúa métricas como la distancia más corta entre nodos.
  - Centralidad: Calcula medidas como grado, intermediación y cercanía, útiles para estudiar la importancia de los nodos.
  - Componentes conectados: Identifica subconjuntos de nodos conectados, revelando comunidades o regiones aisladas.
- 3. Detección de Comunidades
  - Utiliza algoritmos como modularidad para encontrar agrupaciones naturales dentro del grafo.
  - Ayuda a detectar estructuras internas como grupos o subredes.
- 4. Análisis Temporal y Dinámico
  - Permite trabajar con redes dinámicas que cambian con el tiempo, simulando la evolución de conexiones en el grafo.
- 5. Exportación de Resultados
  - Facilita la exportación de visualizaciones y métricas para informes y presentaciones.
  - Compatible con formatos estándar como CSV y GraphML, lo que permite combinar datos con otros programas.
  - Gephi es un complemento perfecto para representar grafos al ofrecer herramientas prácticas para analizar y visualizar redes, permitiendo explorar conceptos teóricos de una forma interactiva y accesible