Métodos Numéricos

Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales
Métodos Iterativos

Diego Passarella

Universidad Nacional de Quilmes

Repaso - Métodos Iterativos:

Para sistemas grandes y ralos (muchos ceros en la matriz A). Se genera una sucesión que aproxima a la solución por medio de la repetición de operaciones "matriz x vector" en cada iteración. Se llega a una aproximación de la solución con una dada tolerancia en una cantidad *a priori* desconocida de pasos.

Sucesión: $\left\{\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \cdots, \mathbf{x}^{(k-1)}, \mathbf{x}^{(k)}\right\}$. Si la sucesión aproxima a la solución exacta $\mathbf{x}$ cuando:

$$\left\{\mathbf{x}^{(k)}\right\}_{k\to\infty} = \mathbf{x}$$

Tolerancia: Se pueden utilizar varias definiciones de error, por ejemplo:

$$||\mathbf{x} - \mathbf{x}^{(k)}||_{.} \leq \varepsilon$$

Recordar las distintas definiciones de normas $||\cdot||$.

Criterios de Parada

¿Cuándo finalizar el proceso iterativo?

Error Absoluto:

$$||\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}||_{.} < \varepsilon$$

Error Relativo:

$$||\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}||_{.} < \varepsilon||\mathbf{x}^{(k)}||_{.}$$

Residuo:

$$||\mathbf{r}^{(k)}||_{.} < \varepsilon||\mathbf{b}||_{.}$$

con $\mathbf{r}^{(k)} = A\mathbf{x} - \mathbf{b}$

$^{(k)} = k$-ésima iteración del método.

Descomposición de la matriz A

Idea: Reescribir el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ de la forma $\mathbf{x} = G\mathbf{x} + \mathbf{c}$.

Si se descompone a A de la forma $A = M - N$, donde M es una matriz fácilmente inversible (diagonal o triangular), se llega a:

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$[M - N]\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$M\mathbf{x} = N\mathbf{x} + \mathbf{b}$

$\mathbf{x} = M^{-1}N\mathbf{x} + M^{-1}\mathbf{b}$ se genera un punto fijo con,

$G = M^{-1}N, \quad \mathbf{c} = M^{-1}\mathbf{b}$

Sucesión: $\left\{\mathbf{x}^{(k)}\right\} = M^{-1}N\mathbf{x}^{(k-1)} + M^{-1}\mathbf{b}$

Formulación Eficiente

Si $A = M - N \Rightarrow N = M - A$, por lo que se tiene:

$$\mathbf{x}^{(k)} = M^{-1}\left[M - A\right]\mathbf{x}^{(k-1)} + M^{-1}\mathbf{b}$$

$$\mathbf{x}^{(k)} = \left[I - M^{-1}A\right]\mathbf{x}^{(k-1)} + M^{-1}\mathbf{b}$$

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)} - M^{-1}A\mathbf{x}^{(k-1)} + M^{-1}\mathbf{b}$$

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)} - M^{-1}\left[A\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{b}\right]$$

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)} + M^{-1}\left[\mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k-1)}\right]$$

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)} + M^{-1}\mathbf{r}^{(k-1)}$$

con $\mathbf{r} := \mathbf{b} - A\mathbf{x}$

Resolución de la Formulación Eficiente

Generar $\mathbf{x}^{(0)}$ como aproximación inicial

$k = 1$

Mientras $k \leq N_{max}$

Calcular $\mathbf{r}^{(k-1)} := \mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k-1)}$

Si $||\mathbf{r}^{(k-1)}||_{.} < \varepsilon||\mathbf{b}||_{.}$, hacer:

$\mathbf{x}^{(k-1)}$ es la solución

$k = N_{max} + 1$

Si no, hacer:

$M\mathbf{z} = \mathbf{r}^{(k-1)}$

$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{z}$

$k = k + 1$

Si $k > N_{max}$

"No se llegó a una solución satisfactoria"

Descomposición de Jacobi

Se basa en la descomposición: $A = D - L - U$

Por lo que su matriz de iteración y el vector del método son $(\mathbf{x} = G\mathbf{x} + \mathbf{c})$:

$$G = D^{-1}(L + U), \qquad \mathbf{c} = D^{-1}\mathbf{b}$$

Forma vectorial:

$$\mathbf{x}^{(k)} = D^{-1}(L + U)\,\mathbf{x}^{(k-1)} + D^{-1}\mathbf{b}$$

Descomposición de Jacobi

Formulación eficiente:

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)} + D^{-1}\mathbf{r}^{(k-1)}$$

Formulación en componentes:

$$x_i^{(k)} = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} x_j^{(k-1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} x_j^{(k-1)} \right) / a_{i,i}$$

Las incógnitas de la primera sumatoria ya se conocen si se resuelve de $i = 1, \cdots, n$. Se pueden incluir en la formulación para obtener x_i.

Obligatoriamente se tiene que cumplir que $a_{i,i} \neq 0$

Descomposición de Gauss-Seidel

Se basa en la misma descomposición de Jacobi pero utilizando las componentes de la k-ésima iteración al multiplicar por la matriz L

Forma vectorial:

$$D\mathbf{x}^{(k)} = L\mathbf{x}^{(k)} + U\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{b}$$

Matriz de iteración y vector del método:

$$\mathbf{x}^{(k)} = (D - L)^{-1} U\mathbf{x}^{(k-1)} + (D - L)^{-1} \mathbf{b}$$

Forma eficiente:

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)} + (D - L)^{-1} \mathbf{r}^{(k-1)}$$

Descomposición de Gauss-Seidel

Forma vectorial:

$$D\mathbf{x}^{(k)} = L\mathbf{x}^{(k)} + U\mathbf{x}^{(k-1)} + \mathbf{b}$$

Método de Gauss-Seidel en componentes:

$$x_i^{(k)} = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} x_j^{(k-1)} \right) / a_{i,i}$$

Los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel pueden optimizarse si las matrices a resolver poseen una forma conocida (tridiagonales, n-diagonales, por bandas).

Resumen de Métodos

Descomposición común a todos los métodos $A = D - L - U$. Cada uno elige distintas matrices M y N

Jacobi:

$$M = D, \quad N = L + U \quad \Rightarrow \quad G = D^{-1}(L + U), \quad \mathbf{c} = D^{-1}\mathbf{b}$$

Gauss-Seidel:

$$M = D - L, \quad N = U \quad \Rightarrow \quad G = (D - L)^{-1} U, \quad \mathbf{c} = (D - L)^{-1} \mathbf{b}$$

Relajación:

$$M = (1/\omega)D - L, \quad N = \frac{1-\omega}{\omega} D + U \quad \Rightarrow$$

Método de Relajación

La matriz de iteración del método se puede escribir como:

$$G = (D - \omega L)^{-1} \left[(1 - \omega) D + \omega U\right]$$

y el vector **c** como:

$$\omega (D - \omega L)^{-1} \mathbf{b}$$

por lo que su formulación eficiente queda:

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k-1)} + \omega (D - \omega L)^{-1} \mathbf{r}^{(k-1)}$$

Observar que para $\omega = 1$, el método de relajación es el método de Gauss-Seidel.

Convergencia

Un método iterativo lineal es convergente, si y solo si, el radio espectral de la matriz de iteración es menor que uno

$$\rho(G) < 1, \qquad \rho(G) := \max_i (|\lambda_i|)$$

Algunas consideraciones:

- Si A es estrictamente diagonal dominante, los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel son convergentes.
- Si A es simétrica, definida positiva y tridiagonal, los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel son convergentes.
- El método de relajación solo puede converger para $\omega \in (0, 2)$
- Si A es simétrica y definida positiva, el método de relajación es convergente para cualquier $\omega \in (0, 2)$