Métodos Numéricos

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Problemas de valor inicial - Métodos de alto orden

Diego Passarella

Universidad Nacional de Quilmes

2^{do} Cuatrimestre de 2014

Motivación

Los métodos de Euler progresivo o regresivo, si bien son muy simples de aplicar, al utilizarlos se comete un error proporcional a h.

Estos métodos son llamados *métodos de un paso* porque involucran la evaluación de $y(x)$ en dos pasos sucesivos $[x_i, x_{i+1}]$.

Para obtener una mayor exactitud en la resolución de PVI, se pueden utilizar *métodos de alto orden* ó *métodos multipaso*.

Forma General de un método Runge-Kutta

La familia de métodos Runge-Kutta son métodos de un paso, pero que evaluan varias veces a la función $f(y, x)$ a lo largo del intervalo $[x_i, x_{i+1}]$.

La forma general de un método de la familia Runge-Kutta se escribe como:

$$y_{i+1} = y_i + h \sum_{r=1}^{s} b_r K_r \,, \qquad i \geq 0$$

siendo s la cantidad de etapas del método y,

$$K_r = f\left(y_i + h \sum_{q=1}^{s} a_{rq} K_q, x_i + c_r h \right) \,, \qquad r = 1, 2, \cdots, s$$

Forma General de un método Runge-Kutta

Los métodos Runge-Kutta quedan definidos a través de los vectores **c**, **b** y la matriz **A**, los cuales se presentan en la tabla de *Butcher*.

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \end{array}$$

Los métodos de Euler progresivo, regresivo y θ-método también pueden ser expresados a través de este tipo de tablas.

En los métodos explícitos, los valores a_{rq} con $q \geq r$ son cero.

Familias del Método Runge-Kutta

Euler Progresivo (RK1)

$$y_{i+1} = y_i + h\, f(y_i, x_i)$$

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$b_1 = 1,\ a_{11} = 0,\ c_1 = 0 \Rightarrow K_1 = f(y_i, x_i)$

$$y_{i+1} = y_i + h\, b_1\, K_1 = y_i + h\, f(y_i, x_i)$$

Familias del Método Runge-Kutta

Euler Regresivo

$$y_{i+1} = y_i + h\, f(y_{i+1}, x_{i+1})$$

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$b_1 = 1,\ a_{11} = 1,\ c_1 = 1 \Rightarrow K_1 = f(y_{i+1}, x_{i+1})$

$$y_{i+1} = y_i + h\, b_1\, K_1 = y_i + h\, f(y_{i+1}, x_{i+1})$$

Familias del Método Runge-Kutta

θ-método

$$y_{i+1} = y_i + h\left(\theta f(y_i, x_i) + (1-\theta) f(y_{i+1}, x_{i+1})\right)$$

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & \theta & 1-\theta \\ \hline & \theta & 1-\theta \end{array}$$

$K_1 = f(y_i, x_i),$
$K_2 = f(y_i + h(a_{21}K_1 + a_{22}K_2, x_i + h) = f(y_{i+1}, x_{i+1})$

Métodos de Euler Mejorado y Euler Modificado

Sea el método de Runge-Kutta definido por la siguiente tabla de Butcher:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 \\ \hline & 1-\frac{1}{2\alpha} & \frac{1}{2\alpha} \end{array}$$

$\forall\, \alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$
$K_1 = f(y_i, x_i)$
$K_2 = f(y_i + h\,\alpha\, K_1, x_i + \alpha\, h) \;\Rightarrow$

$$y_{i+1} = y_i + h\left[\left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right)K_1 + \frac{1}{2\alpha}K_2\right]$$

Métodos de Euler Mejorado y Euler Modificado

Este es un método con error propocional a $h^2 \forall\, \alpha \neq 0$.

- Si $\alpha = 1/2 \rightarrow$ Método de Euler modificado (ó punto medio)

$$y_{i+1} = y_i + h\, f\left(y_i + \frac{1}{2} h\, f(y_i, x_i), x_i + \frac{h}{2}\right)$$

- Si $\alpha = 1 \rightarrow$ Método de Euler mejorado (ó RK2)

$$y_{i+1} = y_i + h\left[\frac{1}{2} f(y_i, x_i) + \frac{1}{2} f(y_i + h\, f(y_i, x_i), x_i + h)\right]$$

Métodos de Euler Mejorado y Euler Modificado

El método RK2 también es un método *predictor-corrector*, donde ser realiza una primera etapa de predicción de y_{i+1} (y^*_{r+1} por medio de un RK1) y luego se utiliza este valor en una segunda etapa de de corrección (en este caso un θ-método con $\theta = 1/2$).

Ventaja: Método explícito que mantiene el mismo orden de convergencia del paso corrector.

Método RK3

Tabla de Butcher de este método con error propocional a h^3:

$$
\begin{array}{c|ccc}
0 & 0 & 0 & 0 \\
1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\
1 & -1 & 2 & 0 \\
\hline
 & 1/6 & 2/3 & 1/6
\end{array}
$$

$K_1 = f(y_i, x_i)$
$K_2 = f\left(y_i + \frac{h}{2}K_1, x_i + \frac{h}{2}\right)$
$K_3 = f\left(y_i + h\left(-K_1 + 2K_2\right), x_{i+1}\right)$
Que resulta:

$$y_{i+1} = y_i + h\left(1/6K_1 + 2/3K_2 + 1/6K_3\right)$$

Método RK4

Un método muy popular es el Runge-Kutta. Posee error propocional a h^4:

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{array}$$

$K_1 = f(y_i, x_i)$
$K_2 = f\left(y_i + \frac{h}{2}K_1, x_i + \frac{h}{2}\right)$
$K_3 = f\left(y_i + \frac{h}{2}K_2, x_i + \frac{h}{2}\right)$
$K_4 = f\left(y_i + h\,K_3, x_{i+1}\right)$
Que resulta:

$$y_{i+1} = y_i + h\left(1/6K_1 + 1/3K_2 + 1/3K_3 + 1/6K_4\right)$$

Ejercicios

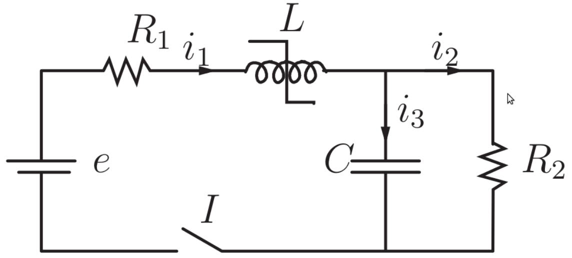
Biorreactor:

Resolver el problema del biorreactor utilizando los métodos de alto orden aquí vistos.

Ejercicios

Transitorio RLC:

Obtener la caída de potencial en el capacitor C.



<u>Hipótesis:</u> $L(i_1) = L$ (cte.), $R_1 = R_2 = R$
<u>Datos:</u> $L = 0{,}1$ H, $C = 10^{-3}$ F, $R = 10\Omega$, $e = 5$ V

Ejercicios

Transitorio RLC:

De considerar la primera ley de Kirchhoff en el nodo que está entre L, R_2 y C, y junto con la segunda ley de Kirchhoff se llega al siguiente PVI de 2do orden:

$$LC\frac{d^2v}{dt^2} + \left(CR_1 + \frac{L}{R_2}\right)\frac{dv}{dt} + \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)v = e$$

$$v(0) = 0$$

$$\frac{dv}{dt}|_{t=0} = 0$$

Este problema conviene resolverlo realizando una reducción de orden como la vista en la clase anterior.