Métodos Numéricos

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Problemas de valor en la frontera evolutivos
Problemas parabólicos e hiperbólicos

Diego Passarella

Universidad Nacional de Quilmes

PVF Evolutivo

Se plantea estudiar la evolución de un problema de valor en la frontera. En este caso la función incógnita pasa a depender de por lo menos dos variables $y = y(x, t)$ (posición y tiempo). Si se consideran las tres coordenadas espaciales (x,y,z), la función incógnita va de $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$.

Un PVF evolutivo plantea la necesidad de resolver una ecuación en derivadas parciales (EDP's), lo cual es un problema bastante más complejo que los problemas vistos hasta ahora.

EDP Parabólica

Un caso típico de EDP parabólica es la ecuación del calor (1D).

$$\rho Cp\frac{\partial T}{\partial t} - k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = f, \quad a \leq x \leq b, \quad t \leq t_F$$

$T(x,0) = T_0(x) \quad$ (CI)
$T(a,t) = T_a(t),\ T(b,t) = T_b(t), \quad$ (CC)

También se puede definir el problema a través de dos CC tipo Newman, por ejemplo:

$-k\frac{\partial T}{\partial x} = h(T(a,t) - T_{ref}), \quad$ (flujo de calor)
$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad$ (aislación térmica)

Este tipo de ecuación también sirve para representar problemas de difusión de especies (entre otros problemas).

Discretización del dominio

Discretización del espacio en $N_x + 1$ puntos:

$$h_x = \frac{b-a}{N_x+1} \qquad \Rightarrow \qquad x_i = a + i.h_x \qquad i = 0, 1, \cdots, N_x$$

Discretización del tiempo en N_t momentos:

$$h_t = \frac{t_F}{N_t+1} \qquad \Rightarrow \qquad t_j = j.h_t \qquad j = 0, 1, \cdots, N_t$$

La solución discreta va a depender de dos índices: $T(x_i, t_j) = T_i^j$

A partir de este tipo de discretización se pueden plantear varios esquemas de resolución.

Progresivo en tiempo - Centrado en espacio (FTCS)

$$\frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{h_t} - \alpha \frac{\left(T_{i-1}^j - 2T_i^j + T_{i+1}^j\right)}{h_x^2} = f_i^j$$

$\alpha = k/(\rho.Cp)$.
Las CI y CC's nos dan todos los valores de T_i^0, T_0^j y de $T_{N_x}^j$.

En el caso de tener CC del tipo flujo, se deben utilizar esquemas de mismo orden de error al aplicar las CC.

Este es un esquema explícito condicionalmente estable. El límite de estabilidad del esquema está dado por:

$$h_t < \frac{h_x^2}{2\alpha}$$

Regresivo en tiempo - Centrado en espacio (BTCS)

$$\frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{h_t} - \alpha \frac{\left(T_{i-1}^{j+1} - 2T_i^{j+1} + T_{i+1}^{j+1}\right)}{h_x^2} = f_i^{j+1}$$

Este es un esquema implícito incondicionalmente estable.

Para resolverlo es necesario plantear un sistema de ecuaciones lineales. Recordar orden de error de las CC para matener el orden del esquema.

θ-método

$$\frac{T_i^{j+1} - T_i^j}{h_t} - \frac{\alpha}{h_x^2}\left[\theta\left(T_{i-1}^j - 2T_i^j + T_{i+1}^j\right) + (1-\theta)\left(T_{i-1}^{j+1} - 2T_i^{j+1} + T_{i+1}^{j+1}\right)\right] = \left(\theta f_i^j + (1-\theta)\, f_i^{j+1}\right)$$

$0 \leq \theta \leq 1$

El esquema es condicionalmente estable para $1/2 < \theta \leq 1$ e inconcionalmente estable para $0 \leq \theta \leq 1/2$.

Para $\theta = 1/2$, el método el llamado *Crank-Nicolson*.

Centrado - Centrado (CTCS)

Se basa en utilizar una aproximación centrada de la derivada temporal. Es un método multipaso, dado que involucra a t^{j-1}, t^j, t^{j+1}.

$$\frac{T_i^{j+1} - T_i^{j-1}}{h_t} - \alpha \frac{\left(T_{i-1}^j - 2T_i^j + T_{i+1}^j\right)}{h_x^2} = f_i^j$$

Para "arrancar" con este esquema también es necesario conocer a la solución en t^1. Su obtención debe realizarse por un método de un paso que posea mismo orden de error que el método CTCS.

Órdenes de error

El error cometido por los esquemas anteriores dependerá de la discretización espacial y temporal.

Los esquemas FTCS, BTCS y θ-método ($\theta \neq 1/2$) poseen orden de error $h_t + h_x^2$.

Los esquemas Crank-Nicolson y CTCS poseen orden de error $h_t^2 + h_x^2$.

Se debe mantener el mismo orden de error en la aplicación de las CC tipo flujo para no penalizar el método.

Ecuación de ondas

La ecuación de ondas es un típico problema de EDP de carácter hiperbólico.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f, \qquad c > 0$$

Con las siguientes CI's y CC's:

$$y(x,0) = y_0(x),\ \frac{\partial y}{\partial x}_0 = g(x) \quad \text{(CI)}$$
$$y(a,t) = y_a(t),\ T(b,t) = T_b(t), \quad \text{ó condiciones de flujo (CC)}$$

Este problema se puede resolver por un esquema centrado - centrado de derivadas 2das. La solución en t^1 se obtiene al utilizar la condición inicial extra necesaria para definir al problema de forma unívoca.

Difusión del calor

Considere una barra 1D de Al de 3 m de largo, con el siguiente perfil de temperatura inicial:

$$T(x,0) = \begin{cases} 200 & x < 1 \text{ y } x > 2 \\ 500 & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Resuelva el problema evolutivo para CC constantes e iguales a 200C y para CC de flujo.

$\alpha_{Al} \approx 10^{-4}$