

Métodos Numéricos

Autovalores y Autovectores

Diego Passarella

Universidad Nacional de Quilmes

Defición de Autovalores y Autovectores

Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ el problema de autovalores y autovectores consiste en encontrar los escalares λ y los correspondientes vectores v que cumplen:

$$Av = \lambda v$$

donde los escalares λ son los autovalores de A y los vectores v son los autovectores asociados a cada λ .

Vale aclarar que si bien los λ están unívocamente definidos, no es lo mismo para los v , dado que cualquier $\tilde{v} = \alpha v$ (siendo α un escalar distinto de cero) es también un autovector de A .

Polinomio Característico

La obtención de los n λ 's puede plantearse a partir de considerar el sistema:

$$(A - \lambda \mathbb{I}) v = 0$$

Dado que $v \neq 0$ por ser autovector de A , resulta que el determinante del sistema debe ser cero para el λ correcto, dando lugar al *polinomio característico* de A

$$P_n(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{I}) = 0$$

Por lo tanto el problema de autovalores se reduce a encontrar los n ceros del polinomio $P_n(\lambda)$.

Resolución Teórica

La obtención de autovalores no suele realizarse a través de la determinación de ceros de $P_n(\lambda)$ (excepto cuando $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$) dado que es muy costosa la obtención de $P_n(\lambda)$ y se producen muchos errores de redondeo al evaluar un polinomio de alto orden.

Otro método para obtener un autovalor es, si se conoce el v asociado, utilizar el *cociente de Rayleigh*

$$\lambda = \frac{v^* A v}{||v||^2}$$

siendo v^* el transpuesto conjugado de v .

En general no se conocen los autovalores de antemano, por lo que la utilización de este cociente es acotada.

Repaso de bases en $\mathbb{R}^{n \times n}$

Una base de $\mathbb{R}^{n \times n}$ es un conjunto de n -vectores de \mathbb{R}^n linealmente independientes. Cualquier vector de \mathbb{R}^n puede representarse como una combinación lineal de vectores de la base. En particular, para un vector y cualquiera, se tiene:

$$y = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + \cdots + c_n v_n$$

En este caso se ha elegido como base a los autovectores de A , aunque cualquier conjunto de vectores L.I. es igualmente válido.

Aplicaciones

La determinación de autovalores y autovectores es relevante para la resolución de los siguientes problemas:

- Cálculo de frecuencias y modos propios de propagación de ondas acústicas o electromagnéticas a partir de la discretización de las EDP que describen el problema.
- Análisis lineal de estabilidad de sistemas.
- Cálculo de polos y ceros de funciones de transferencia de sistemas lineales.
- Google (*Page-Rank*).

Métodos de Resolución

Hay dos grandes clases de métodos para resolver el problema de autovalores y autovectores:

- **Métodos que determinan un autovalor de A .**
- Métodos que determinan todos los autovalores de A .

Método de la Potencia Iterada

Es un método iterativo para encontrar el autovalor con mayor módulo y su correspondiente autovector.

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con autovalores que cumplen

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots |\lambda_n|$$

El método se basa en generar la sucesión $\{y^{(k)}\}$ tal que tienda al autovector (v_1) asociado al autovalor de mayor módulo (λ_1).

Método de la Potencia Iterada

El método se basa en estos tres elementos:

$$x^{(k)} = Ay^{(k-1)}; \quad y^{(k)} = \frac{x^{(k)}}{\|x^{(k)}\|}; \quad \lambda^{(k)} = y^{(k)t} Ay^{(k)}$$

Se puede ver que $\{y^{(k)}\} \rightarrow v_1$ cuando $k \rightarrow \infty$. En particular, el k -ésimo vector de la sucesión va a ser:

$$y^{(k)} = \frac{1}{\beta(k)} A^k y^{(0)}$$

con $\beta(k) = \prod_{s=1}^k \|x^{(s)}\|$. La presencia de la potencia de A es la que le da el nombre al método.

Método de la Potencia Iterada

Si $y^{(0)}$ es un vector inicial cualquiera de \mathbb{R}^n , se puede expresar como:

$$y^{(0)} = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + \cdots + c_n v_n$$

Por lo que el k -ésimo término de la sucesión se puede escribir como:

$$y^{(k)} = \frac{1}{\beta(k)} \cdot \left(c_1 \lambda_1^k v_1 + c_2 \lambda_2^k v_2 + c_3 \lambda_3^k v_3 + \cdots + c_n \lambda_n^k v_n \right)$$

...

Método de la Potencia Iterada

... o equivalentemente:

$$y^{(k)} = \frac{\lambda_1^k}{\beta(k)} \cdot \left[c_1 v_1 + c_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k v_2 + c_3 \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1} \right)^k v_3 + \cdots + c_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k v_n \right]$$

Dado que $|\lambda_1|$ es mayor a todos los otros autovalores, los términos $(\lambda_i/\lambda_1)^k \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$. De esta forma, $y^{(k)} \rightarrow v_1$ con c_1 una constante multiplicativa de ajuste.

En cada iteración se aproxima el valor de λ_1 usando el *cociente de Rayleigh*.

Criterio de Parada:

$$|\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}| < \varepsilon |\lambda^{(k)}|$$

Convergencia

- El método converge si A posee un autovalor con módulo mayor a todos los otros. Si esto no ocurre, la convergencia no está garantizada.
- El método converge más rápido cuanto mayor sea la diferencia entre $|\lambda_1|$ y $|\lambda_2|$
- Para una A genérica no se puede garantizar que $|\lambda_1| \neq |\lambda_2|$, por lo tanto, la convergencia del método.

Algoritmo

① Generar x , $k = 0$

② Calcular

$$y = x / \|x\|$$

$$x = A \cdot y$$

$$\lambda = y^t \cdot x$$

$$err = Tol \cdot |\lambda| + 1 \text{ (para que tome la primera iteración)}$$

③ Mientras $(err > Tol \cdot |\lambda|) \ \& \ (|\lambda| > 0) \ \& \ (k \leq Nmax)$

$$y = x / \|x\|$$

$$x = A \cdot y$$

$$\lambda_{new} = y^t \cdot x$$

$$err = |\lambda_{new} - \lambda|$$

$$\lambda = \lambda_{new}$$

$$k = k + 1$$

Ejemplo

Encontrar el autovalor de mayor módulo para la matriz.

$$\begin{pmatrix} \alpha & 2 & 3 & 13 \\ 5 & 11 & 10 & 8 \\ 9 & 7 & 6 & 12 \\ 4 & 14 & 15 & 1 \end{pmatrix}$$

con $\alpha = 30$ y -30 .

¿Qué ocurre? ¿Por qué?

Método de la Potencia Inversa

Sirve para calcular el autovalor de menor módulo (λ_n).

Se basa en que los autovalores de A^{-1} son:

$(1/\lambda_n, \dots, 1/\lambda_3, 1/\lambda_2, 1/\lambda_1)$.

El método es idéntico al anterior, solamente que se trabaja con A^{-1}

$$x^{(k)} = A^{-1}y^{(k-1)}$$

Obviamente no se trabaja con la inversa, si no que en cada iteración se resuelve el sistema:

$$Ax^{(k)} = y^{(k-1)}$$

¿Qué factorización conviene hacer?

Método de la Potencia Desplazada

Sirve para encontrar el autovalor más cercano a un número μ dado. Se plantea como resolver el método de la potencia inversa, pero de la matriz:

$$A - \mu \mathbb{I}$$

Cuyos autovalores cumplirán:

$$\frac{1}{|\lambda_r - \mu|} > \frac{1}{|\lambda_i - \mu|}, \quad \forall i = 1, 2, 3, \dots, r-1, r+1, \dots, n$$

siendo λ_r el autovalor más cercano a μ .

Teorema del Círculo de Gerschgorin

Nos da una acotación en el plano complejo de la localización de los autovalores de la matriz A .

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y R_i el círculo en el plano complejo con centro en $a_{i,i}$ y de radio $\sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{i,j}|$.

$$R_i = \left\{ z \in \mathbb{C} / |z - a_{i,i}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{i,j}| \right\}$$

Todos los autovalores de A están contenidos en $R \cup_{i=1}^n R_i$.