

Métodos Numéricos

Autovalores y Autovectores

Diego Passarella

Universidad Nacional de Quilmes

1^{er} Cuatrimestre de 2016

Definición de Autovalores y Autovectores

Dada una matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ el problema de autovalores y autovectores consiste en encontrar los escalares λ (reales o complejos) y los correspondientes vectores \vec{v} que cumplen:

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

donde los escalares λ son los autovalores de A y los vectores \vec{v} son los autovectores asociados a cada λ .

Vale aclarar que si bien los λ están unívocamente definidos, no es lo mismo para los \vec{v} , dado que cualquier $\tilde{\vec{v}} = \alpha\vec{v}$ (siendo α un escalar distinto de cero) es también un autovector de A .

Polinomio Característico

La obtención de los n λ 's puede plantearse a partir de considerar el sistema:

$$(A - \lambda \mathbb{I}) \vec{v} = \vec{0}$$

Dado que $\vec{v} \neq \vec{0}$ por ser autovector de A , resulta que el determinante del sistema debe ser cero para el λ correcto, dando lugar al *polinomio característico* de A

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{I}) = 0$$

Por lo tanto el problema de autovalores es equivalente a encontrar los n ceros del polinomio $p_A(\lambda)$ de orden n (método no práctico).

Algunas propiedades

A posee n autovalores (reales o complejos) no necesariamente distintos.

Si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $p_A(\lambda)$ poseerá coeficientes reales, por lo que aquellos λ complejos ocurrirán en pares conjugados.

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es diagonalizable si existe una matriz no singular $U \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tal que:

$$U^{-1}AU = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$$

siendo las columnas de U los autovectores de A , los cuales forman una base en \mathbb{C}^n .

Resolución Teórica

La obtención de autovalores no suele realizarse a través de la determinación de ceros de $p_A(\lambda)$ (excepto cuando $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$) dado que es muy costosa la obtención de $p_A(\lambda)$ y se producen muchos errores de redondeo al evaluar un polinomio de alto orden.

Otro método para obtener un autovalor es, si se conoce el \vec{v} asociado, utilizar el *cociente de Rayleigh*

$$\lambda = \frac{\vec{v}^* A \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}$$

siendo \vec{v}^* el transpuesto conjugado de \vec{v} .

En general no se conocen los autovalores de antemano, por lo que la utilización de este cociente es acotada.

Repaso de bases en $\mathbb{C}^{n \times n}$

Una base en $\mathbb{C}^{n \times n}$ es un conjunto de n -vectores de \mathbb{C}^n linealmente independientes. Cualquier vector de \mathbb{C}^n puede representarse como una combinación lineal de vectores de la base. En particular, para un vector \vec{y} cualquiera, se tiene:

$$\vec{y} = c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 + c_3 \vec{v}_3 + \cdots + c_n \vec{v}_n$$

En este caso se ha elegido como base a los autovectores de A , aunque cualquier conjunto de vectores L.I. es igualmente válido.

Métodos de Resolución

Hay dos grandes clases de métodos para resolver el problema de autovalores y autovectores:

- **Métodos que determinan un autovalor de A .**
 - Método de la potencia.
 - Método de la potencia inversa.
 - Método de la potencia desplazada.
- Métodos que determinan todos los autovalores de A .
 - Factorización QR.

Método de la Potencia Iterada

Es un método iterativo para encontrar el autovalor con mayor módulo y su correspondiente autovector.

Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ con autovalores que cumplen

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots |\lambda_n|$$

El método se basa en generar la sucesión $\{\vec{y}^{(k)}\}$ tal que tienda al autovector (\vec{v}_1) asociado al autovalor de mayor módulo (λ_1) .

Método de la Potencia Iterada

El método se basa en estos tres elementos:

$$\vec{x}^{(k)} = A\vec{y}^{(k-1)}; \quad \vec{y}^{(k)} = \frac{\vec{x}^{(k)}}{\|\vec{x}^{(k)}\|}; \quad \lambda^{(k)} = \vec{y}^{(k)t} A \vec{y}^{(k)}$$

Se puede ver que $\{\vec{y}^{(k)}\} \rightarrow \vec{v}_1$ cuando $k \rightarrow \infty$. En particular, el k -ésimo vector de la sucesión va a ser:

$$\vec{y}^{(k)} = \frac{1}{\beta(k)} A^k \vec{y}^{(0)}$$

con $\beta(k) = \prod_{s=1}^k \|\vec{x}^{(s)}\|$. La presencia de la potencia de A es la que le da el nombre al método.

Método de la Potencia Iterada

Si $\vec{y}^{(0)}$ es un vector inicial cualquiera de \mathbb{C}^n , se puede expresar como:

$$\vec{y}^{(0)} = c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 + c_3 \vec{v}_3 + \cdots + c_n \vec{v}_n$$

Por lo que el k -ésimo término de la sucesión se puede escribir como:

$$\vec{y}^{(k)} = \frac{1}{\beta(k)} \cdot \left(c_1 \lambda_1^k \vec{v}_1 + c_2 \lambda_2^k \vec{v}_2 + c_3 \lambda_3^k \vec{v}_3 + \cdots + c_n \lambda_n^k \vec{v}_n \right)$$

...

Método de la Potencia Iterada

... o equivalentemente:

$$\vec{y}^{(k)} = \frac{\lambda_1^k}{\beta(k)} \cdot \left[c_1 \vec{v}_1 + c_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k \vec{v}_2 + c_3 \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1} \right)^k \vec{v}_3 + \cdots + c_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k \vec{v}_n \right]$$

Dado que $|\lambda_1|$ es mayor a todos los otros autovalores, los términos $(\lambda_i/\lambda_1)^k \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$. De esta forma, $\vec{y}^{(k)} \rightarrow \vec{v}_1$ con c_1 una constante multiplicativa de ajuste.

En cada iteración se aproxima el valor de λ_1 usando el *cociente de Rayleigh*.

Criterio de Parada:

$$|\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}| < \varepsilon |\lambda^{(k)}|$$

Convergencia

- El método converge si A posee un autovalor con módulo mayor a todos los otros. Si esto no ocurre, la convergencia no está garantizada.
- El método converge más rápido cuanto mayor sea la diferencia entre $|\lambda_1|$ y $|\lambda_2|$
- Para una A genérica no se puede garantizar que $|\lambda_1| > |\lambda_2|$, por lo tanto, la convergencia del método.

Algoritmo

- ① Definir \vec{x} , $k = 0$, ε
- ② Calcular
 - $\vec{y} = \vec{x} / \|\vec{x}\|$
 - $\vec{x} = A\vec{y}$
 - $\lambda = \vec{y}^t \cdot \vec{x}$
 - $err = \varepsilon|\lambda| + 1$ (para que tome la primera iteración)
- ③ Mientras ($err > \varepsilon|\lambda|$) & ($|\lambda| > 0$) & ($k \leq Nmax$)
 - $\vec{y} = \vec{x} / \|\vec{x}\|$
 - $\vec{x} = A\vec{y}$
 - $\lambda_{new} = \vec{y}^t \cdot \vec{x}$
 - $err = |\lambda_{new} - \lambda|$
 - $\lambda = \lambda_{new}$
 - $k = k + 1$

Ejemplo

Encontrar el autovalor de mayor módulo para la matriz.

$$\begin{pmatrix} \alpha & 2 & 3 & 13 \\ 5 & 11 & 10 & 8 \\ 9 & 7 & 6 & 12 \\ 4 & 14 & 15 & 1 \end{pmatrix}$$

con $\alpha = 30$ y -30 .

¿Qué ocurre? ¿Por qué?

Método de la Potencia Inversa

Sirve para calcular el autovalor de menor módulo (λ_n).

Se basa en que los autovalores de A^{-1} son:

$(1/\lambda_n, \dots, 1/\lambda_3, 1/\lambda_2, 1/\lambda_1)$.

El método es idéntico al anterior, solamente que se trabaja con A^{-1}

$$\vec{x}^{(k)} = A^{-1} \vec{y}^{(k-1)}$$

Obviamente no se trabaja con la inversa, si no que en cada iteración se resuelve el sistema:

$$A \vec{x}^{(k)} = \vec{y}^{(k-1)}$$

¿Qué factorización conviene hacer?

Método de la Potencia Desplazada

Sirve para encontrar el autovalor más cercano a un número μ dado. Se plantea como resolver el método de la potencia inversa, pero de la matriz:

$$A - \mu \mathbb{I}$$

Cuyos autovalores cumplirán:

$$\frac{1}{|\lambda_r - \mu|} > \frac{1}{|\lambda_i - \mu|}, \quad \forall i = 1, 2, 3, \dots, r-1, r+1, \dots, n$$

siendo λ_r el autovalor más cercano a μ .

Ubicación de los autovalores en \mathbb{C}

Para aplicar el método de la potencia desplazada es necesario conocer aproximadamente la ubicación de los autovalores en el plano complejo.

Los *círculos de Gershgorin* asociados a la i -ésima fila y columna de A , son respectivamente:

$$C_i^{(f)} = \left\{ z \in \mathbb{C} / |z - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| \right\}$$

$$C_i^{(c)} = \left\{ z \in \mathbb{C} / |z - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ji}| \right\}$$

Éstos círculos pueden utilizarse para estimar la ubicación de los autovalores de una matriz.

Ubicación de los autovalores en \mathbb{C}

Proposición sobre los círculos de Gershgorin:

Todos los autovalores de $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ se encuentran en la intersección de las dos regiones correspondientes a la unión de las regiones dadas por la unión de los círculos columna y la unión de los círculos fila.

Si hay m círculos desconectados de los restantes $n - m$, en esa región, habrá exactamente m autovalores.

- Programar los métodos planteados y resolver el ejercicio presentado durante la clase.
- Buscar información sobre el algortimo de “*page rank*” de Google
- Buscar y entender el procedimiento básico de la factorización QR