Métodos Numéricos

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Problemas de valor inicial - Métodos de alto orden

Diego Passarella

Universidad Nacional de Quilmes

Motivación

Los métodos de Euler progresivo o regresivo, si bien son muy simples de aplicar, poseen un bajo orden de convergencia. Estos métodos son llamados *métodos de un paso* porque involucran la evaluación de $y(x)$ en dos pasos sucesivos $[x_n, x_{n+1}]$. Ambos métodos son de orden 1 de convergencia $(O(h))$, tal como se vió anteriormente.

Para obtener una mayor exactitud en la resolución de PVI, se pueden utilizar *métodos de alto orden* ó *métodos multipaso*.

Forma General de un método Runge-Kutta

La familia de métodos Runge-Kutta son métodos de un paso, pero que evaluan varias veces a la función $f(y_i, x_i)$ a lo largo del intervalo $[x_n, x_{n+1}]$.

La forma general de un método de la familia Runge-Kutta se escribe como:

$$y_{n+1} = y_n + h\sum_{i=1}^{s} b_i K_i \,, \qquad n \geq 0$$

siendo s la cantidad de etapas del método y,

$$K_i = f\left(y_n + h\sum_{j=1}^{s} a_{i,j}K_j, x_n + c_i h\right) \,, \qquad i = 1, 2, \cdots, s$$

Forma General de un método Runge-Kutta

Los métodos Runge-Kutta quedan definidos a través de los vectores **c**, **b** y la matriz **A**, los cuales se presentan en la tabla de *Butcher*.

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \end{array}$$

Los métodos de Euler progresivo, regresivo y θ-método también pueden ser expresados a través de este tipo de tablas.

En los métodos explícitos, los valores $a_{i,j}$ con $j \geq i$ son cero.

Familias del Método Runge-Kutta

Euler Progresivo (RK1)

$$y_{n+1} = y_n + h.f(y_n, x_n)$$

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$b_1 = 1,\ a_{1,1} = 0,\ c_1 = 0 \Rightarrow K_1 = f(y_n, x_n)$

$$y_{n+1} = y_n + h.b_1.K_1 = y_n + h.f(y_n, x_n)$$

Familias del Método Runge-Kutta

Euler Regresivo

$$y_{n+1} = y_n + h.f(y_{n+1}, x_{n+1})$$

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$b_1 = 1,\ a_{1,1} = 1,\ c_1 = 1 \Rightarrow K_1 = f(y_{n+1}, x_{n+1})$

$$y_{n+1} = y_n + h.b_1.K_1 = y_n + h.f(y_{n+1}, x_{n+1})$$

Familias del Método Runge-Kutta

θ-método

$$y_{n+1} = y_n + h.\left(\theta f(y_n, x_n) + (1-\theta) f(y_{n+1}, x_{n+1})\right)$$

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & \theta & 1-\theta \\ \hline & \theta & 1-\theta \end{array}$$

$K_1 = f(y_{n+1}, x_{n+1})$,
$K_2 = f(y_n + h.(a_{2,1}K_1 + a_{2,2}K_2, x_n + h) = f(y_{n+1}, x_{n+1})$

Métodos de Euler Mejorado y Euler Modificado

Sea el método de Runge-Kutta definido por la siguiente tabla de Butcher:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 \\ \hline & 1-\frac{1}{2\alpha} & \frac{1}{2\alpha} \end{array}$$

$\forall\, \alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$
$K_1 = f(y_{n+1}, x_{n+1})$
$K_2 = f(y_n + h.\alpha.K_1, x_n + \alpha.h) \Rightarrow$

$$y_{n+1} = y_n + h.\left[\left(1 - \frac{1}{2\alpha}\right)K_1 + \frac{1}{2\alpha}K_2\right]$$

Métodos de Euler Mejorado y Euler Modificado

Este es un método de orden 2 $\forall\, \alpha \neq 0$.

- Si $\alpha = 1/2 \rightarrow$ Método de Euler modificado (ó punto medio)

$$y_{n+1} = y_n + h.f\left(y_n + \frac{1}{2}h.f(y_n, x_n), x_n + \frac{h}{2}\right)$$

- Si $\alpha = 1 \rightarrow$ Método de Euler mejorado (ó RK2)

$$y_{n+1} = y_n + h\left[\frac{1}{2}f(y_n, x_n) + \frac{1}{2}f(y_n + h.f(y_n, x_n), x_n + h)\right]$$

El método RK2 también es un método *predictor-corrector*, donde ser realiza una primera etapa de predicción de y_{n+1} (y^*_{n+1} por medio de un RK1) y luego se utiliza este valor en una segunda etapa de de corrección (en este caso un θ-método con $\theta = 1/2$). Ventaja: Método explícito que mantiene el mismo orden de convergencia del paso corrector.

Método RK3

Tabla de Butcher de este método de 3er orden:

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ \hline & 1/6 & 2/3 & 1/6 \end{array}$$

$K_1 = f(y_n, x_n)$
$K_2 = f\left(y_n + \frac{h}{2}K_1, x_n + \frac{h}{2}\right)$
$K_3 = f\left(y_n + h.(-K_1 + 2K_2), x_{n+1}\right)$
Que resulta:

$$y_{n+1} = y_n + h\left(1/6K_1 + 2/3K_2 + 1/6K_3\right)$$

Método RK4

Un método muy popular es el Runge-Kutta de 4to orden:

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & 1/6 & 1/3 & 1/3 & 1/6 \end{array}$$

$K_1 = f(y_n, x_n)$
$K_2 = f\left(y_n + \frac{h}{2}K_1, x_n + \frac{h}{2}\right)$
$K_3 = f\left(y_n + \frac{h}{2}K_2, x_n + \frac{h}{2}\right)$
$K_4 = f\left(y_n + h.K_3, x_{n+1}\right)$
Que resulta:

$$y_{n+1} = y_n + h\left(1/6K_1 + 1/3K_2 + 1/3K_3 + 1/6K_4\right)$$

Ejercicios

Biorreactor:

Resolver el problema del biorreactor utilizando los métodos de alto orden aquí vistos.

Transitorio RLC: