Métodos Numéricos

Resolución de Ecuaciones No Lineales

Diego Passarella

Universidad Nacional de Quilmes

Definiciones

Sea $f(x) \subset C(a,b)$. Se dice que $\alpha \in (a,b)$ es una raíz (o cero) de $f(x) \Leftrightarrow f(\alpha) = 0$.

Una vez que se localizan los intervalos donde hay por lo menos una raíz, se utilizan métodos iterativos consistentes para generar una sucesión que converja a α. $\{x_k\}_{k\to\infty} \to \alpha \Rightarrow f(x_k) \to 0$.

Si $f(x)$ es suficientemente derivable en α, se dice que α es una raíz de multiplicidad m (m ≥ 1, entero) si

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = \cdots = f^{(m-1)}(\alpha) = 0 \quad \text{y} \quad f^{(m)}(\alpha) \neq 0$$

Raíces - Separación

Si α es raíz de $f(x)$, se dice separada en (a, b) si α es la única raíz en (a, b).

La separación de raíces de una ecuación es muy importante para identificar los intervalos donde buscar. La separación debe realizarse antes de comenzar la búsqueda de la raíz.

Para localizar los intervalos donde hay raíces separadas se pueden utilizar métodos gráficos o teoremas del cálculo infinitesimal.

Separación de Raíces - Métodos Analíticos

Teorema de Bolzano:

$f(x) \subset C[a, b]$ / $f(a)f(b) < 0 \Rightarrow \exists$ al menos un $\alpha \in (a, b)/f(\alpha) = 0$.

1. $f(x)$ posee al menos una raíz en (a, b).
2. Si f es estríctamente monótona en $[a, b] \Rightarrow f(x)$ tiene una única raíz en (a, b).

Teorema de Rolle:

$f(x) \subset C^1[a, b]$ / $f(a)f(b) < 0 \Rightarrow$:

1. Si $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists\, \alpha \in (a, b)/f'(\alpha) = 0$.
2. Si $f'(x) \neq 0 \quad \forall \quad x \in (a, b) \Rightarrow f$ es estríctamente monótona en (a, b).

Separación de Raíces - Métodos Analíticos

Otros conceptos importantes son:

1. Entre dos raíces consecutivas de $f'(x)$, existe a lo sumo una raíz de $f(x)$.
2. Si $f(x)$ es suficientemente derivable, el número de ceros de $f(x)$ en (a, b):
    - impar, si $f(a)f(b) < 0$.
    - par ó cero, si $f(a)f(b) > 0$.

Orden de Convergencia

Sea $\{x_k\}_{k\to\infty} \to \alpha$. Se dice que $\{x_k\}_{k\to\infty}$ converge a α con orden p si:

$$lim_{k\to\infty}\frac{|x_k - \alpha|}{|x_{k-1} - \alpha|^p} = \lambda \neq 0$$

Siendo λ la constante asintótica del error.

Método de Bisección

Idea: Generar una sucesión de intervalos $[a_k, b_k]$, cada uno de longitud la mitad del anterior y con la condición de que cada intervalo contenga a α. Este algoritmo siempre converge

Algoritmo:

$k = 1$

Proponer $[a, b]$ tal que $f(a)f(b) < 0$

Iterar mientras $(|a - b| > \varepsilon)$ & $(k \leq Nmax)$

$x = (a + b)/2$

Si $f(a)f(x) < 0$

$b = x$

Si no,

$a = x$

$k = k + 1$

Convergencia

El error absoluto en la $k-$ésima iteración es:

$$e_k = |x_k - \alpha| \leq \frac{1}{2}|b_k - a_k| = \frac{1}{2^k}|b_0 - a_0|$$

Si se pide $|x - \alpha| < \varepsilon$ como criterio de terminación del algoritmo, vemos que el número mínimo de iteraciones para alcanzarlo dependerá del tamaño inicial del intervalo de búsqueda.

$$e_k \leq \frac{1}{2^k}|b_0 - a_0| < \varepsilon$$

$$2^k > \frac{|b_0 - a_0|}{\varepsilon} \quad \rightarrow \quad k > \frac{\log(|b_0 - a_0|) - \log(\varepsilon)}{\log(2)}$$

Método de la Secante

Consta en aproximar a α por medio de la raíz correspodiente a la recta que une los puntos $(a, f(a))$ con $(b, f(b))$.

Algoritmo:

$k = 1$

Proponer $[a, b] = [x_0, x_1]$ tal que $f(a)f(b) < 0$

Iterar mientras $(|x_k - x_{k-1}| > \varepsilon)$ & $(k \leq Nmax)$

$$x_{k+1} = \frac{x_{k-1}f(x_k) - x_k f(x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

$k = k + 1$

Método de Newton-Raphson

Utiliza el desarrollo de Taylor de primer orden en $f(x_{k+1})$ para buscar la raíz.

$$f(x_{k+1}) = f(x_k) + (x_{k+1} - x_k)f'(x_k)$$

Si se busca que x_{k+1} sea cero, se tiene:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Método de Newton-Raphson

- Este algoritmo, junto con el de la secante, dependiendo de $f(x)$, x_0 y $[a, b]$ puede llegar a no converger.
- Pueden utilizarse unas primeras iteraciones del método de bisección para acotar el intervalo de búsqueda y luego terminar la búsqueda con el método de Newton-Raphson.
- Posee orden 2 de convergencia, pero es más costoso computacionalmente dado que es necesario conocer $f'(x)$.
- Si α no es una raíz simple, el algoritmo puede llegar a explotar.
- Si la evaluación de $f'(x_k)$ es muy costosa, puede actualizarse solamente cada $p-$pasos (o ninguno, versión simplificada).

Convergencia

Usando el desarrollo de Taylor alrededor del $k-$ésimo iterante y la definición de error absoluto se puede demostrar que si $f'(\alpha) \neq 0$ (α es raíz simple) el método de Newton-Raphson converge con orden 2 a la solución y tiene por constante asintótica de error a:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_{k+1}-\alpha}{(x_k-\alpha)^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{e_{k+1}}{e_k^2} = \frac{f''(\xi_k)}{2f'(x_k)} \neq 0$$

Si α es una raíz con multiplicidad m, el método recupera el orden 2 de convergencia al considerarse:

$$x_{k+1} = x_k - m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Convergencia Absoluta

La convergencia del método de Newton-Raphson se puede garantizar de forma absoluta si se cumple:

Sea $f(x) \subset C^2[a, b]/$:

1. $f(a)f(b) < 0$
2. $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in [a, b]$
3. $f''(x) \leq 0$ ó $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$

Bajo estos supuestos, la convergencia del método se garantiza para todo x_0 que pertenezca a $[a, b]$

Iteración de Fijo Punto

Un punto fijo de la función $g(x) \in C[a,b] \to \mathbb{R}$ es el número α para el cual se cumple que:

$$g(\alpha) = \alpha$$

Si este número existe, se puede obtener por medio de la sucesión:

$$x_{k+1} = g(x_k), \qquad k \geq 0$$

Para la resolución de ecuaciones no lineales, este método se puede utilizar al reescribir $f(x)$ como una función con un punto fijo:

$$f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow g(\alpha) = \alpha$$

Siendo $g(x)$ la función de iteración del método.

Iteración de Fijo Punto

La definición de $g(x)$ no es única. Dependiendo de la elección de $g(x)$ el método puede llegar a no converger.

Convergencia:

Si la función de iteración $g(x)$ cumple las siguientes propiedades:

1. $g(x) \in [a, b] \quad \forall \quad x \in [a, b]$
2. $g(x) \subset C^1[a, b]$
3. $\exists K < 1 \quad / \quad |g'(x)| \leq K \quad \forall \quad x \in [a, b]$

Entonces $g(x)$ poseerá un único punto fijo α en $[a, b]$, al cual convergerá sin importar la elección del valor x_0 en $[a, b]$.

Convergencia

Si se cumplen todos los supuestos anteriores para $g(x)$, ocurre que:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_{k+1}-\alpha}{x_k-\alpha} = g'(\alpha)$$

Si además $g(x) \in C^2[a,b]$ con $g'(\alpha)=0$ y $g''(\alpha) \neq 0$, el método converge como:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{x_{k+1}-\alpha}{(x_k-\alpha)^2} = \frac{g''(\alpha)}{2}$$