Métodos Numéricos

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Problemas de valor inicial - Métodos multipaso
Problemas de valor en la frontera

Diego Passarella

Universidad Nacional de Quilmes

Métodos Multipaso para PVI

Tal como se mencionó anteriormente, los métodos multipaso (mmp) ofrecen la posibilidad de resolver PVI con un alto orden. Esto métodos se basan en la evaluación de $f(y,x)$ en varios puntos del dominio. La fórmula general del los mmp es:

$$y_{n+1} = \sum_{j=0}^{p} a_j y_{n-j} + h \sum_{j=0}^{p} b_j f_{n-j} + h b_{-1} f_{n+1}, \quad n = p, p+1, \cdots$$

$p+1$ es el nro de pasos.
Se deben dar los p+1 valores iniciales $y_0, y_1, \cdots, y_p$. y_0 es la CI, mientras que $y_1, \cdots, y_p$ se deden obtener por métodos adecuados (por ejemplo RK de orden igual o superior al mmp).

Métodos Multipaso

Algunas fórmulas más comunes de los mmp:

Adams-Bashforth de 3^{er} orden (AB3):

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}\left(23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2}\right)$$

Es un método de tres pasos, de tercer orden y explícito.
Surge de utilizar un P_2 de $f(y,x)$ en los puntos t_{n-2}, t_{n-1}, t_n.

Adams-Moulton de 4^{to} orden (AM4):

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}\left(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}\right)$$

Es un método de tres pasos, de cuarto orden e implícito.
Surge de utilizar un P_3 de $f(y,x)$ en los puntos $t_{n-2}, t_{n-1}, t_n, t_{n+1}$.

Problemas de Valor en la Frontera

Los problemas de valor en la frontera tratan la resolución de EDO's donde la función incógnita varía a lo largo de una dimensión espacial. Generalmente se trata de problemas de segundo orden. El caso particular para 1-D es:

$$\frac{d}{dx}\left(-c\frac{dy}{dx}\right) = f, \qquad x \in [0, L]$$

Las condiciones de contorno (CC) más comunes para este problema son:

$y(0) = y_0, \qquad y(L) = y_L$, (cond. Dirichlet en 0 y L) ó

$y(0) = y_0, \qquad \frac{dy}{dx}|_{x=L} = dy_L$, (cond. Dirichlet en 0 y Newman L)

El problema no posee solución única si se define con dos CC Newman.

PVF - Diferencias Finitas

Recordatorios de derivadas 1^{ra} y 2^{da}:

$$y_i' = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$$

$$y_{i+1}' = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$$

$$y_i'' = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

Notar que la derivada 2^{da} también se puede obtener considerando (por ejemplo), la derivada 1^{ra} progresiva en i e $i-1$ y luego la derivada regresiva de y_n'' en i.

PVF - Diferencias Finitas

En el caso que la función c sea constante, se puede aproximar la derivada segunda por:

$$\frac{d}{dx}\left(-c\frac{dy}{dx}\right)_i \approx -c\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

Si $c = c(y, x)$, es mucho más conveniente la expresión conservativa:

$$\frac{d}{dx}\left(-c\frac{dy}{dx}\right)_i \approx -\frac{c_i y_{i+1} - (c_i + c_{i-1})\, y_i + c_{i-1} y_{i-1}}{h^2}$$

Para $c(y, x)$ conocida, este tipo de esquemas hace que la resolución de un PVF sea equivalente a resolver un SEL

PVF - Diferencias Finitas

Caso y(0) = y_0, y(L) = y_N, f = f(x)

Hay que resolver las $N-1$ incógnitas interiores del dominio

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_{N-2} \\ y_{N-1} \end{pmatrix} = -\frac{h^2}{c} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_{N-2} \\ f_{N-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y_N \end{pmatrix}$$

Ejemplos de PVF

Tracción/compresión de una barra uniaxial:

$$-\frac{d}{dx}\left(-E(x).A(x)\frac{du}{dx}\right) = f$$

donde $u(x)$ es el desplazamiento de cada punto de la barra, E es el módulo de elasticidad, A la sección transversal de la barra y f una fuerza distribuida. Si la masa propia de la barra no es despreciable y su peso actúa en la misma dirección que la tracción, se puede escribir, $f = m.g$.

Las CC pueden ser:

- $u(0) = 0$, $u(L) = uL$ (empotramiento + desplazamiento fijo)
- $u(0) = 0$, $E.A\frac{du}{dx}|_{x=L} = FL$ (empotramiento + fuerza aplicada)

Ejemplos de PVF

Conducción del calor:

$$-\frac{d}{dx}\left(-k(x)\frac{dT}{dx}\right) = Q$$

donde $T(x)$ es la temperatura, k la conductividad del calor y Q una fuente de calor distribuida.
Las CC pueden ser:

- $T(0/L) = T0,$ Temperatura prefijada
- $-k\frac{dT}{dx} = h_{conv}\left(T - T_{ref}\right),$ Flujo de calor convectivo
- $-k\frac{dT}{dx} = 0,$ Aislación térmica

Transmisión del calor

Considerar una pared compuesta por tres capas de espesores y conductividades térmicas correspondientes:
$(e1, e2, e3) = (5, 3{,}5, 2{,}5)$, $(k1, k2, k3) = (50, 30, 70)$.
Si la temperatura en el extremo izquierdo está fija a 100C,
Encontrar:

1. La distribución de temperaturas a lo largo de toda la pared si el extremo derecho está a 35C.
2. Idem a 1) pero extremo derecho cede calor por convección con un coeficiente $h_{conv} = 50$ y la T de referencia es 35C. Comparar y analizar los resultados.