

# Método theta

Se propone resolver la siguiente ecuación diferencial con el método theta:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 r(t)}{\partial t^2} &= -\frac{r(t)}{|r(t)|^3} \\ r(t=0) &= (1, 0) \\ \frac{\partial r(t=0)}{\partial t} &= (0, 1)\end{aligned}\quad (1)$$

Que representa el movimiento circular de una partícula en el plano. Se puede expresar el método theta como:

$$y_{i+1} = y_i + (1 - \theta).h.f(r(t_i)) + \theta.h.f(r(t_{i+1})) \quad (2)$$

Donde  $\theta$  es un parámetro que va entre 0 y 1 y  $h$  es el paso elegido. Se puede notar que si  $\theta$  toma el valor 0, éste método coincide con el método explícito de Euler, si  $\theta=1$  coincide con el método implícito de Euler y si  $\theta=0.5$  no es más que el método de Crank-Nicolson. El método seleccionado sirve para resolver sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, por lo tanto es necesario realizar un cambio de variables al sistema (1):

$$\begin{aligned}x(t) &= r(t) \\ v(t) &= \frac{\partial r(t)}{\partial t}\end{aligned}\quad (3)$$

Aplicando el cambio de variables presentado en (3) se llega al siguiente sistema de ecuaciones de primer orden:

$$\begin{cases} v'(t) = -\frac{x(t)}{|x(t)|^3} \\ x'(t) = v(t) \\ x(t=0) = (1, 0) \\ v(t=0) = (0, 1) \end{cases} \quad (4)$$

Utilizando (2) podemos llegar a una expresión del método, que si bien es útil, realizando unas operaciones sobre ella se puede llegar a una expresión aún mejor:

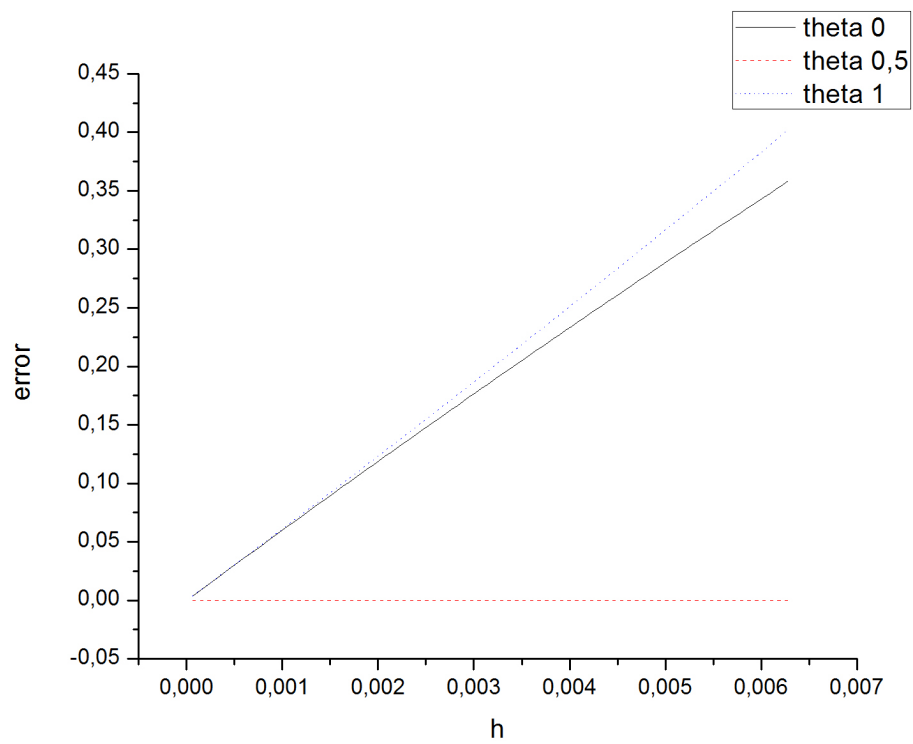
$$\begin{aligned}v_{i+1} &= v_i + (1 - \theta).h.\frac{-x_i}{|x_i|^3} + \theta.h.\frac{-x_{i+1}}{|x_{i+1}|^3} \\ x_{i+1} &= x_i + (1 - \theta).h.v_i + \theta.h.v_{i+1} \\ x_{i+1} &= \frac{v_i.h + h.x_i.\left(1 - \frac{(1-\theta)\theta.h^2}{|x_i|^3}\right)}{1 + \frac{(\theta.h)^2}{|x_{i+1}|^3}}\end{aligned}\quad (5)$$

La ecuación presentada en (5) es conveniente ya que cuando  $\theta \neq 0$  es necesario realizar un método iterativo, y éste se puede realizar sobre (5).

## Análisis del error

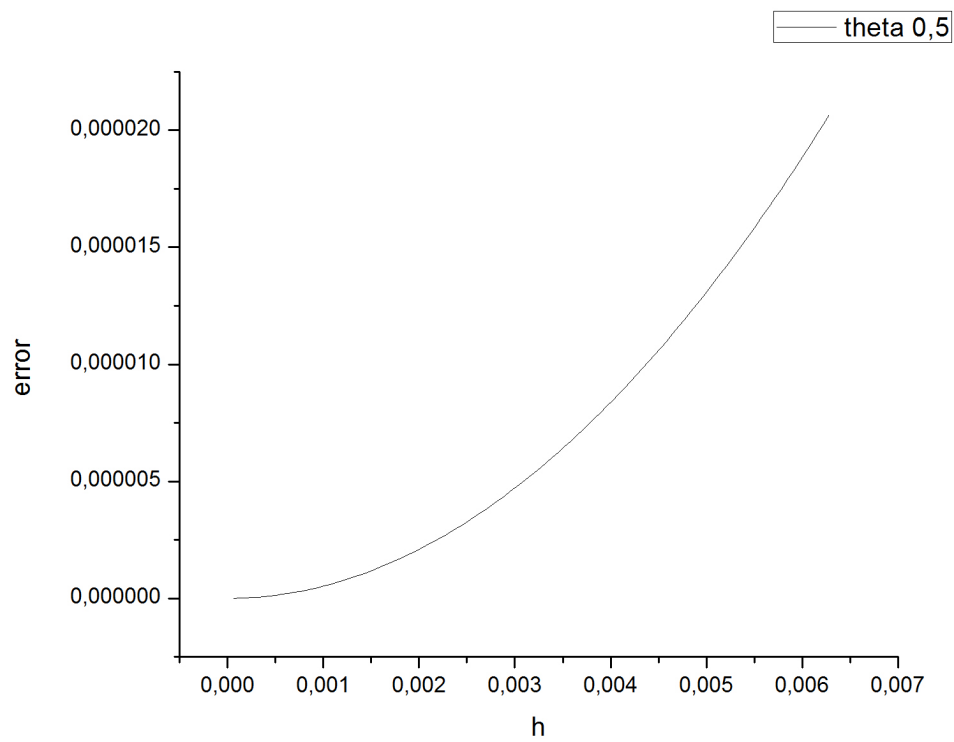
Para el análisis del error se propone encontrar la solución al problema (1) a partir del método  $\theta$  con  $\theta=0,0.5$  y 1; es decir Euler explícito, Euler implícito y Crank-Nicolson para distintos pasos 'h'. y compararlo con la posición real en ese punto. Esto último es sencillo, ya que al tratarse de un movimiento circular en el plano podemos ver que al cabo de un periodo completo la posición está dada por  $(\cos[T], \sin[T])$ .

Se analizaron estos 3 métodos y se obtuvieron los siguientes resultados:



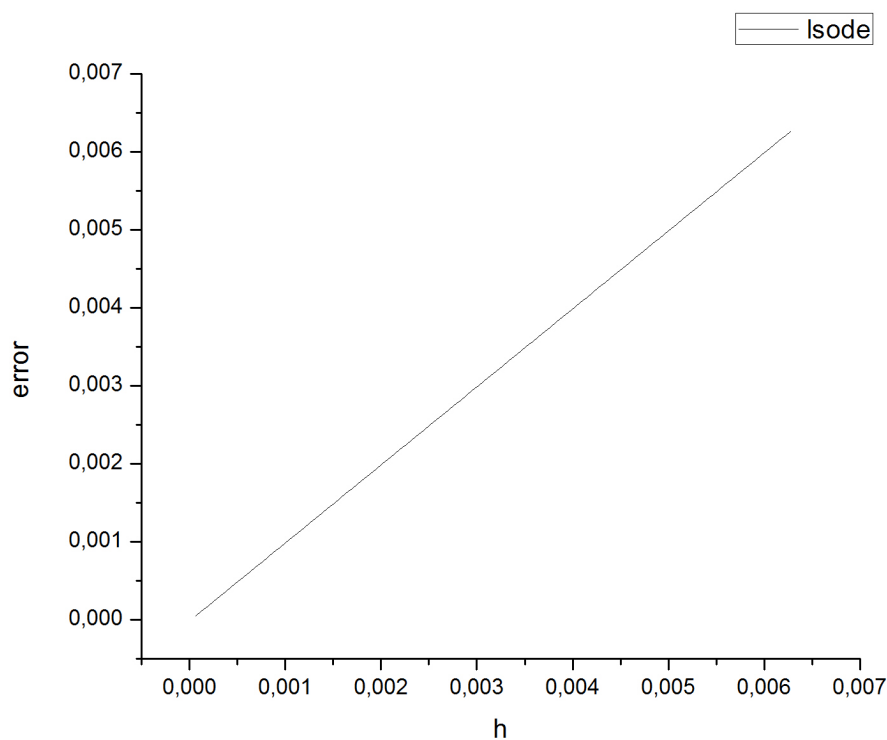
**Figura 1:** error en función del paso  $h$  para distintos valores de  $\theta$ .

No puede apreciarse en éste gráfico la forma cuadrática del método con  $\theta=0.5$ . Para ello se presenta el siguiente gráfico:



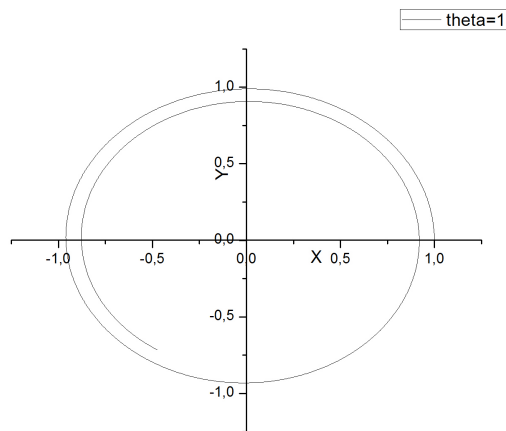
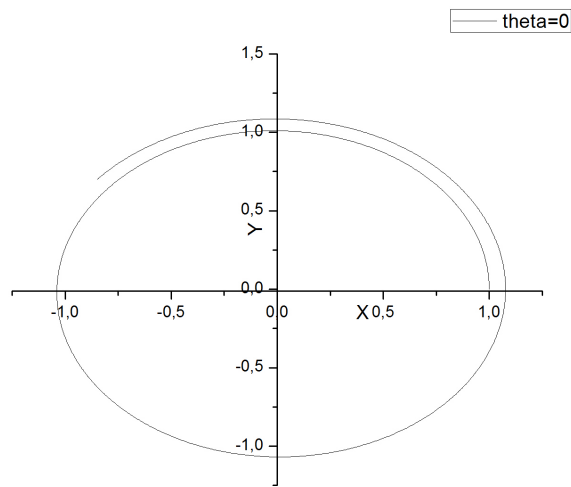
**Figura 2:** error en función del paso  $h$  para  $\theta=0.5$ .

Luego se propuso ver el error que presenta la función de octave LSODE y comparar los tiempos de resolución con el método  $\theta$ :

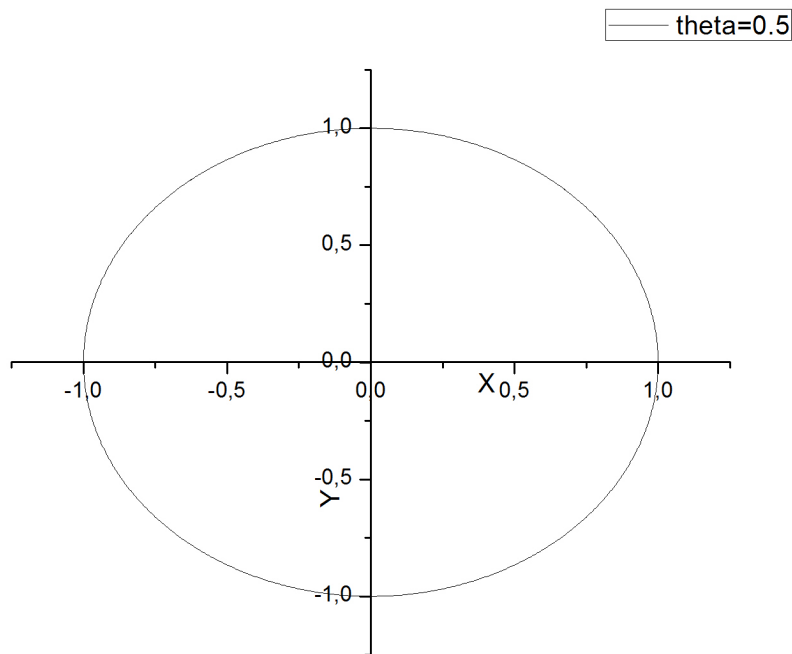


**Figura 3:** error en función del paso  $h$  para el método Lsode.

En los siguientes gráficos se puede apreciar hacia adónde se dirigen los errores en el método  $\theta$  para distintos valores de  $\theta$ , para ello se utilizaron pasos grandes con el fin de poder apreciar el error con mayor facilidad:



**Figura 4:** Posición hallada para el método  $\theta$ . Con  $\theta=0$  (izquierda) se puede apreciar como la posición se aleja del círculo hacia afuera. Con  $\theta=1$  (derecha) se puede apreciar como la solución hallada para la posición se aleja de la solución real hacia adentro del círculo.



**Figura 5:** método  $\theta$  con  $\theta=0.5$  puede verse que en este caso el error es demasiado chico y no puede apreciarse hacia donde se aleja el método de la solución real.

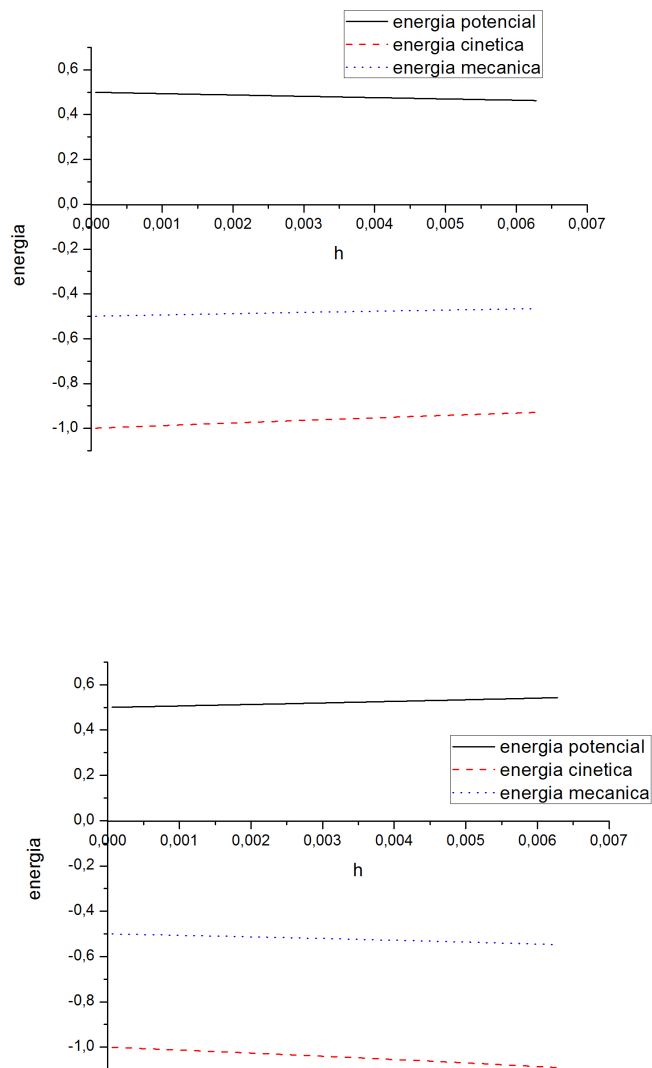
Por último, se realizó un análisis sobre la ‘energía’ de la partícula cuyo movimiento está representado por la ecuación (1). Para ello se consideró la energía cinética, potencial y mecánica total; calculadas de la siguiente manera:

$$E_c = \frac{1}{2} |v|^2$$

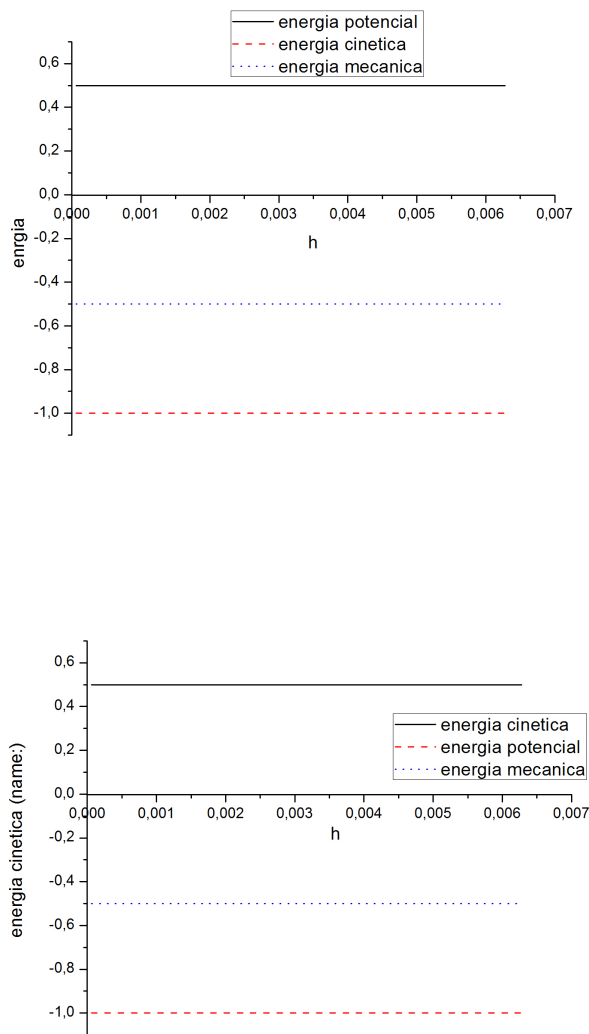
$$E_p = \frac{-1}{|x|}$$

$$E_m = E_c + E_p$$

Y se obtuvieron los siguientes resultados:



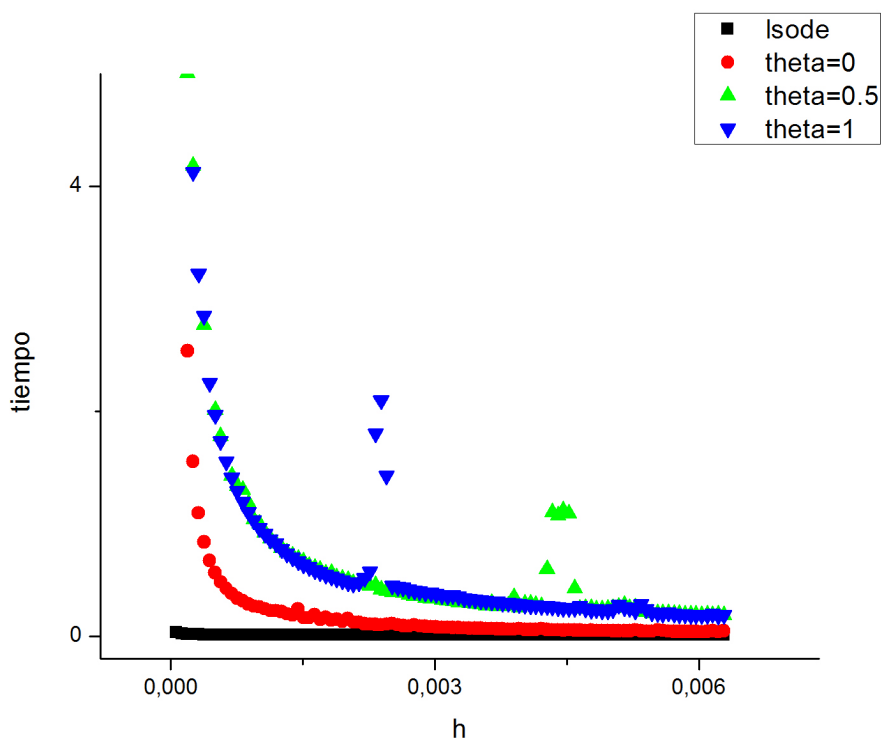
**Figura 6:** Energías en función del paso  $h$  para  $\theta=0$  (izquierda) y  $\theta=1$  (derecha). Con  $\theta=0$  se puede ver que la energía total (se acerca más a 0). Con  $\theta=1$  se puede observar un decremento de la energía total.



**Figura 7:** energías en función del paso  $h$  para el método  $\theta$  con  $\theta=0.5$  (izquierda) y utilizando la función de octave Isode (derecha) puede verse que la energía total tiende a conservarse, esto está relacionado con la efectividad de ambos métodos para calcular la posición con mejor exactitud que los anteriores.

Por último se midieron los tiempos que tardan estos métodos en calcular las sucesivas posiciones en un periodo entero para distintos tamaños de  $h$  y se llegó a lo siguiente:





**Figura 8:** tiempos en función del paso  $h$  para los distintos métodos  $\theta=0$  (●),  $\theta=0.5$  (▲),  $\theta=1$  (▼) y **lsode** (■).

puede verse en la **Figura 8** que el método theta con  $\theta=1$  y con  $\theta=0.5$  tienen tiempos parecidos de resolución, esto se debe a que ambos deben realizar iteraciones sobre la posición para llegar a la correcta. También puede apreciarse que para  $\theta=0$  el método es mucho más rápido. Por último se muestra la eficacia del método utilizado por la función **lsode** que presenta mejores resultados y en menor tiempo que los 3 métodos. Los resultados más parecidos a los del **lsode** son los obtenidos para la posición a partir del método  $\theta$  con  $\theta=0.5$ .