

## Métodos Numéricos - 2013

### Práctica N° 1

#### Raíces de Ecuaciones

1. Considere las siguientes funciones:

- $\varphi_1(x) = 2x - 1$ .
- $\varphi_2(x) = x^2 - 2x + 2$ .
- $\varphi_3(x) = x^2 - 3x + 3$ .

- a) Verifique que 1 es punto fijo de todas ellas. ¿Cuál elegiría para obtener el punto fijo 1 utilizando el proceso iterativo:  $x^{k+1} = \varphi(x^k)$ ?
- b) Con esa elección, escriba los primeros elementos de la secuencia generada con  $x_0 = 1.2$ .

2. La fórmula  $x_{n+1} = 2x_n - Ax_n^2$  es propuesta para determinar el inverso de un número  $A$ :  $1/A$ .

- a) Muestre que, si la fórmula converge, converge a  $\frac{1}{A}$ .
- b) Determine los límites de la semilla inicial  $x_0$  para obtener la convergencia. Verifique sus conclusiones cuando  $A = 9$  y  $x_0 = 0.1$ ,  $x_0 = 1.0$ .
- c) ¿Cuál es la tasa de convergencia del método?

3. Se desea calcular la raíz que tiene la función  $e^x - 4x$  en el intervalo  $[0, 1]$ , utilizando el método de aproximaciones sucesivas y el método de Newton.

- a) Obtenga una expresión que garantice la convergencia del método de aproximaciones sucesivas, partiendo de cualquier punto en  $[0, 1]$ . Obtenga una aproximación aplicando 5 pasos, a partir de  $x_0 = 0$ .
- b) Obtenga otra aproximación, aplicando 5 pasos de Newton-Raphson, partiendo de la misma semilla.
- c) Estime en cada caso el error de la aproximación.

4. Se desea calcular la raíz cúbica de un número  $a$  entre 1 y 8, con 15 cifras decimales significativas, utilizando únicamente operaciones elementales (+, -, \*, /).

- a) Se propone hallar un cero de la función  $f(x) = x^3 - a$ , mediante el método de bisección. ¿Cuántas iteraciones se necesitarán para llegar a la precisión requerida?
- b) Si se utiliza el método de Newton para hallar un cero de la misma función  $f(x) = x^3 - a$ , ¿con cuántas iteraciones se puede garantizar la precisión requerida?
- c) Muestre que también se puede resolver el problema hallando un punto fijo de la función:  $g(x) = x - \frac{2}{15}(x^3 - a)$ , y que el método de aproximaciones sucesivas converge en el intervalo de interés. ¿Cuántas iteraciones se necesitarán en este caso para garantizar la precisión requerida?

5. Se considera aplicar el método de Newton a  $F(x) = 0$  cuando sólo puede obtenerse ésta de manera aproximada:  $F(x) + e(x)$  donde  $|e(x)| < E$ . Luego se aproxima  $F'(x)$  por la diferencia  $(F(x+h) - F(x))/h$ .

a) Estime el orden del error en  $F'$  como función de  $h$  y  $E$ .

b) Resuelva con el método considerado en este problema  $F(x) = 2.0 - \tan(\exp(x/10)) = 0$  utilizando  $h = 10^{-2}, 10^{-4}, 10^{-6}, 10^{-8}, 10^{-10}$ .

6. Se ha obtenido el siguiente método iterativo para aproximar sucesivamente la solución de una ecuación:

$$x^{(k+1)} = f(x^{(k)}), \quad f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 6$$

a) Halle todas las soluciones (Hint: una de ellas es  $x = 1$ ).

b) Analice el orden de convergencia en cada una de ellas.

7. Aplique dos iteraciones del método de Newton para calcular la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4 &= 0 \\ xy - 1 &= 0 \end{cases}$$

con condición inicial  $(0, 2)$ . Verifique el error relativo obtenido.

**Métodos Numéricos - 2013**  
Práctica N° 2

**Matrices-Operaciones-Normas**

1. Sea  $B \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  a la que se le aplican las siguientes operaciones:

- i* Duplicar la columna 1.
  - ii* Dividir por 2 la fila 3.
  - iii* Sumar la fila 3 a la fila 1.
  - iv* Intercambiar las columnas 1 y 4.
  - v* Restar la fila 2 a todas las demás.
  - vi* Reemplazar la columna 4 con la 3.
  - vii* Borrar la columna 1 (quedando una matriz de  $4 \times 3$ ).
- a)* Escribir el resultado como producto de 8 matrices.
- b)* Escribir el resultado nuevamente como un producto  $(ABC)$  de 3 matrices.

2. Probar que si  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ , entonces:  $(\mathbf{x}\mathbf{y}^T)^k = (\mathbf{x}^T\mathbf{y})^{k-1}\mathbf{x}\mathbf{y}^T$ .

3. Probar que si  $A = [\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2\ldots\mathbf{a}_n] \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $B = [\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2\ldots\mathbf{b}_n] \in \mathbb{R}^{p \times n}$ , son las particiones en columnas de las matrices  $A$  y  $B$ , entonces:

$$AB^T = \sum_{i=1}^n a_i b_i^T$$

4. Sea  $S = \{\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\ldots\mathbf{q}_n\}$  un conjunto ortonormal, i.e. los  $\mathbf{q}_i$  son ortogonales entre sí y además  $\mathbf{q}_i^T\mathbf{q}_i = 1$ . Mostrar que la matriz  $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$  cuyas filas (columnas) son los vectores  $\mathbf{q}_i$  cumple:  $Q^T = Q^{-1}$ . Interpretar el producto por una matriz de este tipo (llamada ortogonal) como una operación de cambio de base.

5. Sea  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$  y  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $\Phi(x) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T A \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{b}$ . Probar que:

$$\nabla \Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(A^T + A)\mathbf{x} - \mathbf{b}$$

6. Muestre que si  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  tiene rango  $p$ , entonces existen  $X \in \mathbb{R}^{m \times p}$  e  $Y \in \mathbb{R}^{n \times p}$  tales que  $A = XY^T$ , con  $\text{rango}(X) = \text{rango}(Y) = p$ .

7. Sea  $\|\cdot\|$  una norma vectorial en  $\mathbb{R}^m$  y sea  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Muestre que si el rango de  $A$  es  $n$ , entonces  $\|\mathbf{x}\|_A = \|A\mathbf{x}\|$  es una norma vectorial en  $\mathbb{R}^n$ .

8. Sean  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ , definimos  $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  como  $\psi(\alpha) = \|\mathbf{x} - \alpha\mathbf{y}\|_2$ . Muestre que  $\psi$  tiene un mínimo en  $\alpha = \frac{\mathbf{x}^T\mathbf{y}}{\mathbf{y}^T\mathbf{y}}$ .

9. Verificar que las normas  $p$  (con  $p = 1, 2, \infty$ ) son efectivamente normas vectoriales.

10. Mostrar las equivalencias entre las normas  $p$  (con  $p = 1, 2, \infty$ ). *Ayuda:* Dibuje en  $\mathbb{R}^2$  las “bolas unitarias” (i.e.:  $\{x\} : \|x\| \leq 1$ ) de cada norma.

## Métodos Numéricos - 2013

### Práctica N° 3

#### Sistemas lineales de ecuaciones

1. Probar que si  $L$  es triangular inferior unitaria (i.e.:  $l_{ii} = 1 \forall i, l_{ij} = 0 \forall j > i$ ), entonces  $L^{-1}$  también lo es.
2. Probar que el producto de dos matrices triangulares inferiores unitarias también lo es.
3. Escriba un algoritmo para obtener la factorización “UL” mediante eliminación de los elementos supra-diagonales de la matriz.
4. Muestre que si  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  entonces la norma-2 subordinada cumple:  $\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$ . En particular si  $A$  es simétrica es  $\|A\|_2 = \rho(A)$ .

*Ayuda:* Note que  $A^T A$  es hermítica y por tanto existen  $n$  autovectores independiente que la diagonalizan.

5. Sea  $x$  la solución de  $Ax = b$ ,  $\hat{x}$  una aproximación de  $x$  y  $r = b - A\hat{x}$  el residuo. Muestre que el error  $e = x - \hat{x}$  cumple:

$$\frac{\|r\|}{\|A\|} \leq \|e\| \leq \|A^{-1}\| \|r\|$$

Suponga consistencia entre las normas vectoriales y matriciales.

6. Muestre que el método de Jacobi para resolver  $Ax = b$  se puede escribir como:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + Hr^{(k)}$$

con  $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$ . Idem para el método de Gauss-Seidel.

7. Pruebe que el método de Jacobi converge para sistemas de  $2 \times 2$  simétricos y definidos positivos.
8. Considere la matriz:  $A = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ -\rho & 1 \end{bmatrix}$ . ¿Bajo qué condiciones converge el método de Jacobi?. ¿Y el método de Gauss-Seidel?
9. Plantear el algoritmo de Gradientes Conjugados preconditionado:  $E^{-1}AE^{-T}E^T x = E^{-1}b$ . Muestre que es posible implementarlo sin recurrir explícitamente a la matriz  $E$ , sólo es necesario resolver sistemas del tipo  $Cx = b$ , con  $C = EE^T$ . Analice el costo computacional (memoria requerida y número de operaciones necesarias por paso temporal) para matrices con estructura de banda. Idem para matrices ralas con  $\nu$  no-ceros por fila. (Suponga que la matriz de preconditionamiento tiene la misma estructura que la matriz del sistema original)

## Métodos Numéricos - 2013

### Práctica N° 4

#### Laboratorio

#### Sistemas de ecuaciones lineales

1. Programar en OCTAVE el método de descomposición  $LU$  para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Luego, agregar pivoteo parcial (recuerde que para aplicar el método a la resolución de un sistema  $Ax = b$ , es necesario registrar las permutaciones hechas sobre las filas de la matriz y aplicarlas al vector  $b$ ). Medir el tiempo de cálculo para diferentes tamaños de la matriz  $A$  para mostrar que el método es de orden  $N^3$ . Utilizar matrices random. Se sugiere generar soluciones random y calcular el vector segundo miembro resultante para poder calcular también el error de la solución obtenida.
2. Se pretende resolver el sistema lineal  $Ax = b$ , donde  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz tridiagonal (que típicamente aparece en la discretización de problemas de difusión) y  $b \in \mathbb{R}^n$  es un vector segundo miembro (que podría pensarse como un término fuente en dicho problema de difusión).

La matriz  $A$  tiene la siguiente pinta para  $n = 5$  por ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Dicha matriz puede ser almacenada de dos formas:

- Como una matriz “llena”, donde se guardan todos los elementos de la matriz.
- Como una matriz “rala”, donde se guardan solo los elementos no nulos y cierta información sobre la posición de dichos elementos no nulos.

Con las siguientes instrucciones se puede generar la matriz  $A$  en ambos formatos

- `S1 = sparse([1:n], [1:n], 2*ones(1,n), n, n, 0)`
- `S2 = sparse([1:n-1], [2:n], -1*ones(1,n-1), n, n, 0)`
- `S3 = sparse([2:n], [1:n-1], -1*ones(1,n-1), n, n, 0)`
- `A = full(S1 + S2 + S3) # Si se quiere la matriz en formato LLENO`
- `A = S1 + S2 + S3 # Si se quiere la matriz en formato RALO`
- `b = ones(1,n)/(n + 1)**2 # Para generar el vector segundo miembro`

Programar el método de gradientes conjugados y evaluar el tiempo de cálculo para diferentes tamaños de la matriz del sistema (por ejemplo hasta  $n = 5000$ ). Además compare el tiempo de cálculo cuando se emplea el formato ralo o el formato lleno de almacenamiento. (No se preocupe por el hecho de que la matriz es rala pues OCTAVE “sabe” como operar con dichas matrices)

3. Programar el método de gradientes conjugados con escaleo diagonal (esto es utilizar la matriz original y el preconditionador, no la matriz modificada). Comparar el número de condición  $K$  de la matriz  $A$  del sistema original y de la matriz  $\tilde{A} = E^{-1}AE^{-T}$  del sistema preconditionado y el número de iteraciones necesario para la convergencia en cada caso. Use una matriz que sea simétrica, definida positiva y con autovalores entre 1 y  $10^5$  equiespaciados (en escala logarítmica), construida usando las siguientes líneas de OCTAVE

- `rand("seed", 1.0)`
- `v = 5/(n-1) * (0:n-1)`
- `D = (10 .** v)`
- `A = eye(n) + 0.01*rand(n,n) ←  $A = \mathbb{I} +$  pequeña perturbación.`
- `[Q R] = qr(A) ← Descomposicion  $QR$  ( $Q$  unitaria,  $R$  triangular)`
- `A = Q'*diag(D)*Q`

Para medir el tiempo de cálculo agregue las siguientes lineas a su programa

- `t1 = time(); #Justo antes de empezar a resolver`
- `t2 = time() - t1 #Justo despues de resolver`

## Métodos Numéricos - 2013

### Práctica N° 5

#### Mínimos cuadrados, interpolación e integración numérica

1. Usando el MMC, encuentre todas las mejores aproximaciones desde:

a)  $P_2$  y  $P_3$  de  $(-1,0)$   $(-1,1)$   $(0,1)$   $(1,2)$  y  $(1,3)$ .

b)  $P_1$  y  $P_2$  para  $(1,2)$   $(2,1)$  y  $(3,3)$ .

2. Encontrar las mejores aproximaciones por MMC desde  $\text{span}(1, e^x)$ , desde  $P_2$  y desde  $P_3$

x	1	2	1	3	1	2	3	2	3
y	0	2	2	2	1	1	0	0	1

3. Considere el conjunto de datos  $\{(x_i, y_i)_{i=1, \dots, n}\}$ .

a) Demostrar empleando ecuaciones normales que los coeficientes  $a$  y  $b$  de la recta  $y = a + bx$  que mejor los aproxima en el sentido de cuadrados mínimos quedan definidos según:

$$a = \frac{\sum x_i \sum y_i x_i - \sum y_i \sum x_i^2}{(\sum x_i)^2 - n \sum x_i^2} \quad b = \frac{\sum x_i \sum y_i - n \sum x_i y_i}{(\sum x_i)^2 - n \sum x_i^2}$$

b) Debido a que el MMC minimiza los errores que se cometen al evaluar la ordenada de un conjunto de puntos no es lo mismo ajustar linealmente  $y = f(x)$  que  $x = f(y)$ . Para el caso  $\sum x_i = \sum y_i = 0$ . Hallar condiciones necesarias para que ambos ajustes resulten en la misma curva. Verifique que la condición hallada se satisface automáticamente para el caso en que la recta *interpola* a los puntos.

4. Dados los puntos:  $(-1, 2)$ ,  $(-1/3, 0)$ ,  $(1/3, 0)$  y  $(1, 2)$  encuentre:

a) La mejor aproximación en norma  $L_2$   $\left( \|f(x)\|_{L_2} = \sqrt{\int_{-1}^1 f^2(x) dx} \right)$  entre los polinomios de grado menor o igual a 2 para la función lineal por trozos que los une.

b) La aproximación por cuadrados mínimos del mismo conjunto de puntos, usando un polinomio de grado menor o igual a 2.

5. Dados los siguientes valores

x	0	1	2	3	4	5
F(x)	-4	-2	2	14	40	86

a) Obtenga el polinomio de interpolación en la base natural  $1, x, x^2$ , etc.

b) Obtenga los polinomios de interpolación de Lagrange.

6. Sea  $\tilde{p} \in P_2$  el polinomio que interpola la función seno en los extremos y en el centro del intervalo  $[0, \frac{\pi}{6}]$ . Estimar el máximo error. Haga lo mismo para  $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$

7. Calcular  $J_1 = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}} \sin^2(x) dx$  y  $J_2 = \int_{-1}^1 |x - \frac{1}{2}| (x - \frac{1}{2}) dx$

- a) usando la regla de Simpson con 3,5,7 y 9 nodos.
- b) usando Gauss-Legendre con 2,3,4 y 5 nodos.

Compare la cantidad de cálculos y la convergencia en cada caso.

8. Calcular las siguientes integrales definidas utilizando los métodos de Newton-Cotes (de tipo cerrado) y Gauss-Legendre. Comparar la cantidad de cálculos y la velocidad de convergencia.

a)  $\int_0^1 10^x dx = \frac{10^x}{\ln 10} \Big|_0^1 = \frac{9}{\ln 10} \simeq 3.90865034.$

b)  $\int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx = 4 \arctan(x) \Big|_0^1 = \pi.$

c)  $\int_1^{10} \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^{10} = \ln 10 \simeq 2.30258509.$

9. Los polinomios de Laguerre satisfacen  $\langle L_i, L_j \rangle = \int_0^\infty L_i(x) L_j(x) e^{-x} dx = \delta_{ij}$  y pueden obtenerse mediante  $L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n)$ . Por otro lado, es fácil probar (integrando por partes) que  $\int_0^\infty e^{-x} x^n dx = n!$ , si  $n \in \mathbb{N} \cup 0$ .

- a) Usando esta información, encontrar la fórmula de cuadratura Gauss-Laguerre de dos puntos (es decir, hallar explícitamente  $\{x_i, \omega_i\}$  de la aproximación  $\int_0^\infty e^{-x} f(x) dx \approx \sum_{k=1}^N \omega_k f(x_k)$ , para  $N = 2$ ).
- b) Usar la fórmula obtenida para aproximar  $\int_0^\infty e^{-x} x^n dx$ , con  $n = 3$  y  $n = 4$ . Comparar con la solución exacta en cada caso e interpretar los resultados.

10. Se desea realizar una aproximación de la integral de una función  $f$  en el intervalo  $[-h, h]$  utilizando los siguientes valores que se suponen conocidos:  $f(h)$ ,  $f(-h)$ ,  $f'(h)$ ,  $f'(-h)$ .

- a) Halle los coeficientes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  que maximizan el orden de la siguiente aproximación:

$$\int_{-h}^h f(x) dx = a f(h) + b f(-h) + c f'(h) + d f'(-h)$$

Concluya además que el método es exacto para polinomios de 3° orden o menor.

- b) Resolver la siguiente integral utilizando la aproximación anterior y calcular el error relativo. Utilizar los valores de  $f$  y  $f'$  en 3 nodos (es decir usar dos intervalos, con  $h = 0.1$ )

$$\int_0^{0.4} e^{-x^2} dx \simeq 0.37965$$



## Métodos Numéricos - 2013

### Práctica N° 6

#### Métodos de integración para Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

1. Se tiene la ecuación diferencial:  $y' = t + y$ , con condición inicial  $y(0) = 1$ , cuya solución exacta es:  $y = 2e^t - t - 1$ . Se pide encontrar la solución aproximada en  $t = 0.1$  utilizando *un paso* de los siguientes métodos:

- a) Euler.
- b) Serie de Taylor, orden 2.
- c) RK-2.
- d) RK-4.
- e) Extrapolación de Richardson del método de Euler (minimizando las evaluaciones de  $y'$ ).
- f) Método predictor-corrector explícito de segundo orden:  
 $y^* = y^n + h/2 f(t^n, y^n), y^{n+1} = y^n + h f(t^n + h/2, y^*)$

Por último, ordene los métodos para este problema según el error relativo y el costo computacional (número de operaciones).

2. Calcular el error local de discretización de la siguiente fórmula para integrar una ecuación diferencial ordinaria a valores iniciales: ( $y' = f(t, y)$ ,  $y(0) = y_0$ ,  $0 < t < t_f$ )

$$y_{i+1} = \frac{4}{3}y_i - \frac{1}{3}y_{i-1} + \frac{2}{3}hf(t_{i+1}, y_{i+1})$$

¿De qué orden es el método?

3. Obtenga las fórmulas de Adams-Moulton y de Adams-Bashforth de tercer orden. Calcule en cada caso el error de truncamiento. Discuta ventajas y desventajas relativas.
4. Dado el problema diferencial de segundo orden:  $\epsilon y'' + y' = 0$ ,  $0 < y < 1$ , con condiciones de contorno:  $y(0) = 0$ ,  $y(1) = 1$ , se desea resolverlo como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden a valores iniciales (método del tiro).

- a) Plantee el problema de valores iniciales (PVI) a resolver y describa la metodología que utilizaría para encontrar la solución del problema de valores de contorno.
- b) Se quiere utilizar el método  $\theta$  para resolver el PVI:  
 $y_{n+1} = y_n + h[(1 - \theta)f(y_n, t_n) + \theta f(y_{n+1}, t_{n+1})]$   
¿cuál es el error local de truncamiento del método?
- c) Calcule el paso de tiempo límite que garantice la estabilidad del método *aplicado a este sistema de ecuaciones en particular*, para  $\theta = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}$  y  $1$ .

5. Considere el siguiente algoritmo para resolver la ecuación diferencial ordinaria  $y' = f(y, t)$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}h(f(y_n, t_n) + f(y_{n+1}, t_{n+1})) + \frac{1}{12}h^2(f'(y_n, t_n) - f'(y_{n+1}, t_{n+1}))$$

- a) Encuentre el primer término del error de truncamiento.
- b) Demuestre que el método es incondicionalmente estable.

Nota:  $f' = \frac{\partial f}{\partial y}y' + \frac{\partial f}{\partial t}$

6. Para la siguiente versión del método Runge-Kutta de segundo orden (RK-2):

$$\begin{aligned}y_{n+1} &= y_n + 1/2(k_1 + k_2), \\k_1 &= hf(y_n, t_n), \\k_2 &= hf(y_n + k_1, t_n + h),\end{aligned}$$

responda a los siguientes puntos considerando la ecuación modelo  $y' = \lambda y$ .

- a) Demuestre que el método es una aproximación de segundo orden global.
- b) Demuestre que el método es inestable para el caso  $\lambda$  imaginario puro.
- c) Calcule el paso de tiempo máximo que puede utilizarse para asegurar estabilidad en el caso  $\lambda$  real negativo.
- d) Suponga que quiere resolver un PVI dado por la ecuación:  $y'' + w^2 y = 0$  con  $w \in \mathbb{R}$ . ¿Usaría RK-2 para resolver este problema?. Explique el porqué de su respuesta y en caso negativo mencione algún método alternativo.

## Métodos Numéricos - 2013

### Práctica N° 7

#### Laboratorio

#### Métodos de integración para Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

1. Considere la siguiente ecuación diferencial de segundo orden que gobierna el movimiento de una partícula de masa unitaria confinada al plano.

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} &= -\frac{\vec{r}(t)}{|\vec{r}(t)|^3} \\ \vec{r}(t=0) &= (1, 0) \\ \frac{d\vec{r}(t=0)}{dt} &= (0, 1)\end{aligned}$$

Nótese que la solución exacta de esta ecuación corresponde a trayectorias circulares de radio unitario y período  $T = 2\pi$ .

Programar su resolución numérica en Octave utilizando:

- a) El método  $\theta$ . Grafique el error al cabo de un período en función del paso de tiempo y verifique si se obtiene el orden esperado para cada valor de  $\theta$ :  $\theta = 0$  (Euler explícito),  $\theta = 0.5$  (Crank-Nicholson) y  $\theta = 1$  (Euler implícito).
- b) La rutina “lsode” de Octave, usando el método de integración de Adams y valores default para las tolerancias. Verifique el error al cabo de una órbita y compare el costo con los métodos programados arriba.

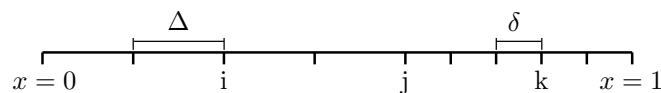
Qué sucede en cada caso con la energía total?

## Métodos Numéricos - 2013

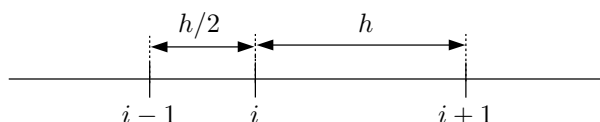
### Práctica N° 8

#### Problemas de Valores de Contorno

1. Encuentre la aproximación de mejor orden posible para la derivada tercera de una función  $U$ , considerando conocidos los valores de ésta en cinco puntos equiespaciados.
2. Usando desarrollo en serie de Taylor hallar una aproximación para la derivada primera de una función en un punto  $x_i$  usando los valores de la misma en los puntos  $(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$ , separados entre sí una distancia  $h$ . Encuentre el término dominante del error. Usando la expresión hallada, calcular  $f'(0.5)$ , con  $h = 0.1$  y  $f(x) = x^2 - e^x$ . Comparar con el valor exacto.
3. Dado el problema de valores de contorno:  $\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{du}{dx} = f(x)$ ,  $x \in [0, 1]$ ,  $u(0) = 0, u(1) = 0$ , donde  $f$  es una función continua en todo el dominio, se desea hallar una solución aproximada por el método de diferencias finitas, que aproxime a orden  $\Delta^2$  a la solución exacta del PVC, considerando la discretización mostrada en la figura.



- a) Encontrar una aproximación de orden  $\Delta^2$  de  $\frac{du}{dx}$  en el nodo  $j$ , con 3 puntos consecutivos.
  - b) Demostrar que, en el nodo  $j$ , sólo es posible encontrar una aproximación de  $\frac{d^2u}{dx^2}$  a orden  $\Delta^2$  con tres puntos consecutivos, si y sólo si  $\delta = \Delta$ .
  - c) Encontrar un esquema en diferencias que aproxime a orden  $\Delta^2$  el PVC en los nodos  $i, j, k$ .
4. Se desea resolver la ecuación:  $\varepsilon u'' + (1 - \varepsilon)u' + u = 0$  con  $0 \leq x \leq 1$  con las condiciones  $u(0) = 0$  y  $u(1) = 1$  (la solución exacta es:  $u(x) = \frac{e^{-x} - e^{-x/\varepsilon}}{e^{-1} - e^{-1/\varepsilon}}$ ). Se propone aproximar la ecuación por diferencias finitas, utilizando una malla con *espaciado variable* para modelar correctamente la capa límite de la izquierda.
    - a) Plantee una aproximación por diferencias finitas de orden  $h^2$  para la derivada primera.
    - b) Plantee una aproximación por diferencias finitas de 3 puntos para la derivada segunda. ¿De qué orden es?
    - c) ¿Cuánta memoria será necesaria para almacenar la matriz del sistema lineal resultante, si se utilizan 100000 puntos y variables de punto flotante de doble precisión (8 Bytes)?
  5. Se desea resolver la ecuación  $\epsilon f'' + f' = 1$  con  $x$  entre  $[0, 1]$  y  $f(0) = 1, f(1) = 0$ ; en una grilla de  $N$  puntos, en la cual la distancia entre los puntos se va duplicando progresivamente, como se muestra en la figura.
    - a) Hallar una expresión que aproxime lo mejor posible la ecuación en el nodo  $i$ , utilizando sólo los puntos  $i - 1, i, i + 1$ . Calcular el término de truncamiento. ¿De qué orden es la aproximación?
    - b) Indicar qué estructura tiene la matriz del sistema de ecuaciones resultante (cantidad y disposición de elementos no nulos).
    - c) Suponga que se desea resolver el sistema de ecuaciones usando un método directo sin pivoteo en una grilla de  $2N$  puntos. ¿En qué factor se incrementaría el número de operaciones de punto flotante con respecto a las necesarias para resolver el sistema original?



## Métodos Numéricos - 2013

### Práctica N° 9

#### Laboratorio

#### Ecuaciones en Derivadas Parciales

1. El estado estacionario de la distribución de temperatura en una placa rectangular satisface la ecuación de Laplace:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 & \text{en } \Omega = [0, 2] \times [0, 1], \\ T(0, y) = 0 \\ T(2, y) = y \\ \frac{\partial T}{\partial y}(x, 0) = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial y}(x, 1) = 0 \end{cases}$$

La solución exacta obtenida por el método de separación de variables es:

$$T(x, y) = \frac{x}{4} - 4 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{(n\pi)^2 \sinh(2n\pi)} \sinh(n\pi x) \cos(n\pi y)$$

Nota: en octave limite el  $\infty$  a 100.

- a) Discretice el dominio en  $N_x + 1$  y  $N_y + 1$ , donde  $x_i = 2i/(N_x + 1)$  y  $y_j = j/(N_y + 1)$ . En cada nodo de coordenadas  $(x_i, y_j)$  con  $i = 1, \dots, N_x$  y  $j = 1, \dots, N_y$  discretice la ecuación diferencial utilizando diferencias centradas de segundo orden. Para los bordes horizontales utilice por ejemplo con  $j = 1$ :  $\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}_{i,1} = (\frac{\partial T}{\partial y}_{i,2} - \frac{\partial T}{\partial y}_{i,0})/(2\Delta_y) = (T_{i,3} - T_{i,1})/(4\Delta_y^2)$ . Explícite entonces el sistema  $A\vec{T} = \vec{b}$  que le permite encontrar el vector solución  $T_{ij}$  ( $\vec{T}$ ). Ordene los elementos de manera de reducir el ancho de banda de la matriz  $A$ .
- b) Resuelva el problema anterior utilizando el método de Gauss-Seidel (G-S). Explore diferentes maneras de evaluar si su solución numérica está cerca del estado estacionario, o convergida, en función de la iteración de G-S ( $n$ ) evaluando lo siguiente: a) Considere que el método está convergido si  $\|\vec{T}^n - \vec{T}^{n-1}\|_{\infty} < tol$ . b) Considere que el método está convergido si  $\|\vec{r}^n\|_{\infty} < tol$  (donde  $\vec{r}^n$  es el residuo al terminar la iteración  $n$ -ésima de G-S). En ambos casos comience con una semilla igual a cero en todo el dominio y tome  $(N_x, N_y) = (19, 9), (39, 19), (59, 29)$ . Evalúe la convergencia de cada método comparando  $\|\vec{T}^n - \vec{T}_{exacto}\|_{\infty}$ . Explique diferencias, si las hay, y que método le parece mejor. Nota:  $\vec{T}_{exacto}$  es la fórmula exacta evaluada en los nodos de la discretización.
- c) Resuelva ahora utilizando el comando de octave para sistemas lineales y utilizando matrices ralas. Obtenga el máximo  $\Delta_x = \Delta_y$  para que  $\|\vec{T} - \vec{T}_{exacto}\|_{\infty} < 10^{-6}$ .