Final de Álgebra (27) Diciembre de 2013 Tema 4

| Apellido: | Nombre: | DNI: |
|---|---|---|

| Bien | Mal | N/C | NOTA |
|---|---|---|---|
| | | | |

Duración: 2:30 hs.

INSCRIPTO EN:

| Sede: | Cuatr.: | Año: |
|---|---|---|
| Días: | Horario: | Aula: |

Para aprobar el examen es necesario tener, por lo menos, 8 respuestas correctas y **más** respuestas correctas que incorrectas. En cada ejercicio hay una **única** respuesta correcta.

**1.-** Sea $\Pi$ el plano que tiene normal $(1,2,-2)$ y pasa por punto $(1,3,1)$. El conjunto de todos los $a \in \mathbb{R}$ para los cuales el punto $P = (3,3,a)$ satisface $d(P,\Pi) = 2$, es

☐ $\{-1\}$ ☐ $\{-1;5\}$ ☐ $\{5\}$ ☐ $\{0\}$

**2.-** Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & k & 0 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}$. El conjunto de todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ para los cuales el sistema $A\mathbf{x} = 3\mathbf{x}$ tiene solución no trivial es

☐ $\{3;4\}$ ☐ $\{0;-2\}$ ☐ $\{0;2\}$ ☐ $\{2;3\}$

**3.-** El conjunto de todos los vectores $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ tales que $\mathbf{v} \times (1,0,2) = (2,0,1)$ es

☐ un plano ☐ un punto ☐ vacío ☐ una recta

**4.-** Si $a$ y $b$ son números reales y el conjunto $\{(-1,b,-1);(-1,b+2a,2a-1);(0,b,-1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ entonces

☐ $a \neq 0$ y $b = -1$ ☐ $a \neq 0$ y $b \neq -1$ ☐ $a = 0$ y $b = -1$ ☐ $a \neq 0$ y $b \in \mathbb{R}$

**5.-** Si $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ es tal que $\det(B) = 5$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, entonces $\det(-2AB^{-2})$ es

☐ $\frac{18}{25}$ ☐ $1800$ ☐ $450$ ☐ $\frac{72}{25}$

**6.-** Sean $\Pi_1 : x - y + z = 4$ y $\Pi_2 : 2x - z = 1$. Si $L$ es una recta paralela a $\Pi_1$ y a $\Pi_2$, entonces un vector director de $L$ es

☐ $(1,-3,1)$ ☐ $(2,6,4)$ ☐ $(1,2,1)$ ☐ $(0,1,2)$

**7.-** Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & a & b \\ -1 & 1 & c & d \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -7 \\ 1 & -1 & -c & -d \\ 1 & -1 & a & b \end{pmatrix}$ entonces $\det(B)$ es igual a

☐ $2\det(A)$ ☐ $-\det(A)$ ☐ $\det(A)$ ☐ $-2\det(A)$

**8.-** Si $\mathbb{S} = \langle(1,0,1,-1);(2,1,-1,1);(4,1,1,-1)\rangle$ y $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}^4$ es un subespacio de dimensión 2 y tal que $\mathbb{S} \cap \mathbb{T} = \langle(3,1,0,0)\rangle$, entonces $\dim(\mathbb{S} + \mathbb{T})$ es igual a

☐ 2 ☐ 4 ☐ 1 ☐ 3

**9.-** Sean $B = \{(1,1,1);(1,1,0);(1,0,0)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ cuyas coordenadas en la base $B$ son $(2,3,1)$. Si $\mathbb{S} = \langle \mathbf{v} \rangle$ entonces $\mathbb{S}^\perp$ es igual a

☐ $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 6x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0\}$ ☐ $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0\}$

☐ $\langle(2,3,1)\rangle$ ☐ $\langle(6,5,2)\rangle$

**10.-** Si $\mathbf{v}$ es solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y $\mathbf{w}$ de $A\mathbf{x} = 3\mathbf{b}$, $\mathbf{b} \neq 0$, entonces una solución de $A\mathbf{x} = 2\mathbf{b}$ es

☐ $\mathbf{w} - \mathbf{v}$ ☐ $2\mathbf{w} - \mathbf{v}$ ☐ $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ ☐ $\mathbf{v} - \mathbf{w}$

Continúa ...

**11.-** La multiplicidad de $i$ como raíz de $P(x) = (x^4 - 1)(x - i)^3(3ix + 3)$ es igual a

☐ 4 ☐ 6 ☐ 5 ☐ 3

**12.-** Si $z = -\pi i$, entonces el módulo y el argumento de $z$ son

☐ $|z| = \pi$ y $\arg(z) = \dfrac{3\pi}{2}$ ☐ $|z| = -\pi$ y $\arg(z) = \dfrac{\pi}{2}$

☐ $|z| = 1$ y $\arg(z) = \pi$ ☐ $|z| = -1$ y $\arg(z) = \pi$

**13.-** Sean $\mathbb{V}$ un espacio vectorial de dimensión 5 y $f\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ una transformación lineal. Si existen $\mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ linealmente independientes tal que $\{\mathbf{v}; \mathbf{w}\} \subset \operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Nu}(f)$, entonces la $\dim(\operatorname{Nu}(f) + \operatorname{Im}(f))$ es

☐ igual a 4 ☐ menor o igual que 3 ☐ mayor o igual que 4 ☐ igual a 5

**14.-** Si $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ es la transformación lineal dada por $M(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ entonces la $\dim(\operatorname{Nu}(f \circ f))$ es igual a

☐ 4 ☐ 3 ☐ 2 ☐ 1

**15.-** La cantidad de soluciones de la ecuación $z^4 = \bar{z}^2$ que satisfacen $\operatorname{Im}(z) \neq 0$ es igual a

☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 6

**16.-** Si $M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ con $B = \{(0,1,0); (0,0,1); (1,0,0)\}$, entonces $f(1,-1,2)$ es igual a

☐ $(-7,2,6)$ ☐ $(-1,-3,1)$ ☐ $(2,6,-7)$ ☐ $(-3,1,-1)$

**17.-** Si $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es un proyector tal que $\operatorname{Im}(f) = \langle (1,1,1); (1,1,0) \rangle$ y $\operatorname{Nu}(f) = (\operatorname{Im}(f))^\perp$, entonces $f(3,3,4)$ es igual a

☐ $(3,3,3)$ ☐ $(3,3,0)$ ☐ $(0,0,0)$ ☐ $(3,3,4)$

**18.-** Si $B = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$ y $B' = \{\mathbf{w}_1; \mathbf{w}_2; \mathbf{w}_3\}$ son bases de $\mathbb{R}^3$ y $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es el isomorfismo dado por $M_{BB'}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, entonces $f^{-1}(6\mathbf{w}_1 + 2\mathbf{w}_2 + 2\mathbf{w}_3)$ es igual a

☐ $(1,1,1)$ ☐ $2\mathbf{v}_1 + 4\mathbf{v}_2 + 4\mathbf{v}_3$ ☐ $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$ ☐ $-2\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + 4\mathbf{v}_3$

**19.-** Sea $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$. El conjunto de todos los autovalores de $A$ es

☐ $\{-3,0,3\}$ ☐ $\{-1,0,3\}$ ☐ $\{-1,3\}$ ☐ $\{-2,0,3\}$

**20.-** Sean $B = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que $f(\mathbf{v}_1) = k\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, $f(\mathbf{v}_2) = 2\mathbf{v}_2$ y $f(\mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_2 + 3\mathbf{v}_3$. Entonces $f$ es diagonalizable para

☐ $k \neq 2$ ☐ ningún valor de $k \in \mathbb{R}$

☐ todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ ☐ $k \neq 0$

Firma: ..............................................................

① Los puntos de la forma $P=(3,3,a)$ con $a\in\mathbb{R}$ forman una recta. Los $P\in\mathbb{R}^3$ que satisfacen $d(P,\pi)=2$ forman 2 planos. La intersección entre una recta y la unión de dos planos puede ser la recta entera, 2 puntos o ninguno. Entonces la rta. es $\{-1,5\}$.

② $Ax=3x \iff (A-3Id).x=0$.
el sist tiene sol no trivial $\iff$ $\det(A-3Id)=0$. (ya que es homogeneo)
con $k=0$ : la $3^{\underline{a}}$ col. tiene todos ceros $\Rightarrow \det=0$.

$$\det(A-3Id) \underset{\substack{\downarrow \\ C_3}}{=} k.\det\begin{pmatrix}1&2\\-1&k\end{pmatrix} = k.(k+2) \Rightarrow \text{la otra raiz es } -2.$$

sol: $\{0,-2\}$

③ $v\times w=u \Rightarrow v\perp u$ y $w\perp u$.
$(1\ 0\ 2)$ y $(2\ 0\ 1)$ no son ortog. $\Rightarrow$ Rta: vacío.

④ el conj es li $\iff \det\begin{pmatrix}-1&-1&0\\b&b+2a&b\\-1&2a-1&-1\end{pmatrix}\neq 0$.

$$\det\begin{pmatrix}-1&-1&0\\b&b+2a&b\\-1&2a-1&-1\end{pmatrix} \underset{\substack{\downarrow \\ C_1-C_3\to C_1 \\ C_2-C_3\to C_1}}{=} \det\begin{pmatrix}-1&-1&0\\0&2a&b\\0&2a&-1\end{pmatrix} \underset{F_3-F_2\to F_3}{=} \det\begin{pmatrix}-1&-1&0\\0&2a&b\\0&0&-1-b\end{pmatrix} =$$

$$= -1.\,.2a(-1-b) = 2a(1+b)\neq 0 \iff a\neq 0 \text{ y } b\neq -1$$

⑤ $$\det A = \det\begin{pmatrix}1&0&-2\\3&1&-1\\0&2&1\end{pmatrix} \underset{\substack{\downarrow \\ F_2-3F_1\to F_2}}{=} \det\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&5\\0&2&1\end{pmatrix} \underset{\substack{\downarrow \\ C_1}}{=} 1.\det\begin{pmatrix}1&5\\2&1\end{pmatrix} = -9$$

$$\det(-2A.B^{-2}) = (-2)^3.\det(A).(\det B)^{-2} = -8.(-9).\left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{72}{25}$$

⑥ $\mathbb{L} \parallel \Pi_1 \Rightarrow v_{\mathbb{L}} \perp N_{\Pi_1}$

$\mathbb{L} \parallel \Pi_2 \Rightarrow v_{\mathbb{L}} \perp N_{\Pi_2}$ $\Big\}$ $\cancel{v_{\mathbb{L}} \parallel N_{\Pi_1} \times N_{\Pi_2}}$

$N_{\Pi_3}$ hay que probar cual de los vectores solución es ortog a ambos:

$$\begin{cases} (2,6,4)\cdot(1\ -1\ 1) = 0 \\ (2\ 6\ 4)\cdot(2\ 0\ -1) = 0 \end{cases} \qquad \text{Sol}: (2,6,4)$$

⑦

$$\det A \underset{F_2 - 2F_1 \to F_2}{=} \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -7 \\ 1 & -1 & a & b \\ -1 & 1 & c & d \end{pmatrix} \underset{F_3 \leftrightarrow F_4}{=} -\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & +1 & -3 & -7 \\ -1 & 1 & c & d \\ 1 & -1 & a & b \end{pmatrix} =$$

$$\underset{-1 \cdot F_3 \to F_3}{=} (-1)\cdot\left(-\det\left(B\right)\right) = \det B \Rightarrow \det(B) = \det(A).$$

⑧ $\dim S+T = \underset{\substack{\parallel \\ 2}}{\dim S} + \underset{\substack{\parallel \\ 2}}{\dim T} - \underset{\substack{\parallel \\ 1}}{\dim S \cap T} = 3$

⑨ $(v)_B = (2\ 3\ 1) \Rightarrow v = (6,5,1) \Rightarrow S = \langle (6,5,1) \rangle$

$\Rightarrow S^{\perp} = \{ x \in \mathbb{R}^3 / 6x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \}$

⑩ multiplico cada RTA por A y veo cuanto da:

$A\cdot(w-v) = A\cdot w - Av = 3b - b = 2b$ listo, $w-v$ sol.

⑪ $P(x) = (x^4-1)(x-i)^3(3ix+3)$

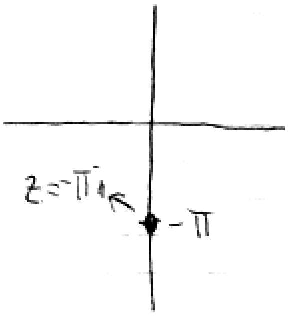
en $(x-i)^3$, $i$ es raiz triple

en $(3ix+3)$ $i$ es raiz simple

en $x^4-1$: $i^4-1=0$ la derivada es $4x^3$, $4i^3 \neq 0 \Rightarrow i$ es simple

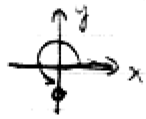
$\Rightarrow$ triple + simple + simple = multiplicidad 5.

(12)




$$|z| = |-\pi i| = |-\pi| \cdot |i| = \pi \cdot 1 = \pi$$

$$\arg z = \underbrace{\arg(-\pi)}_{\in \mathbb{R}_{<0}} + \arg(i) = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$




(13) $\langle v, w\rangle \subset \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Nu} f \Rightarrow \dim \operatorname{Im} f \cap \operatorname{Nu} f \geq 2.$

$$\dim(\operatorname{Nu} f + \operatorname{Im} f) = \underbrace{\dim(\operatorname{Nu} f) + \dim(\operatorname{Im} f)}_{\dim(\operatorname{Dom} f) = 5} - \underbrace{\dim(\operatorname{Nu} f \cap \operatorname{Im} f)}_{\geq 2}$$

$\leq 3$

(14) $$M(f\circ f) = M(f)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Nu f: $$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2+F_1\to F_2 \\ F_3+F_1\to F_3 \\ F_4-F_1\to F_4}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ \cancel{3} & \cancel{0} & \cancel{3} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ $\operatorname{rg} M(f\circ f) = 2 \Rightarrow \dim \operatorname{Nu} f\circ f = 2.$

(15) $z^4 = \bar{z}^2$ supongo $z \neq 0$ ($\operatorname{Im} z = 0$)

$\bar{z} = \frac{|z|^2}{z} \Rightarrow z^4 = \frac{|z|^2}{z} \Rightarrow z^5 = |z|^2$ (1)

aplico módulo:

$|z^5| = \left||z|^2\right| \Rightarrow |z|^5 = |z|^2 \overset{z\neq 0}{\Rightarrow} |z|^3 = 1 \overset{|z|\in\mathbb{R}}{\Rightarrow} \boxed{|z| = 1}$

aplico argumento: $\arg(z^5) = \arg(|z|^2) + 2k\pi$

$|z|^2 > 0 \Rightarrow \quad 5 \arg z = 0 + 2k\pi$

$\arg z = \frac{2}{5} k\pi$

$\arg z \in [0, 2\pi) \Leftrightarrow 0 \leq \frac{2}{5} k\pi < 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq k < 5$

$k=0$: $\arg z = 0 \Rightarrow \operatorname{Im} z = 0$ no sirve

$k = 1,2,3,4$ $\arg z \neq 0, \pi \Rightarrow \operatorname{Im} z \neq 0. \Rightarrow$ ~~5~~ 4 soluciones

(16) $(1,-1,2)_B = (-1,2,1)$

$$\left(f(1-12)\right)_B = M_B(f) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ +2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow f(+1,-1,2) = -3 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3 - 1 \cdot e_1 = (-1,-3,1)$

(17) $\operatorname{Nu} f = \{ x \in \mathbb{R}^3 / \ x_1 + x_2 + x_3 = 0 = x_1 + x_2 \} \overset{\text{triángulo}}{=} \{ x \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 = x_3 = 0 \}$

$= \langle (1,-1,0) \rangle$

Prop: si $v \in \operatorname{Im} f \Rightarrow f(v) = v$

$(3,3,4)$ = algo de $\operatorname{Im} f$ + algo $\operatorname{Nu} f$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2 - F_1 \to F_1]{F_1 - F_3 \to F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & \cancel{3}\ -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 - F_2 \to F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

$\operatorname{Im} f$ $\quad \operatorname{Nu} f$

$\alpha_1 = 4 \quad \alpha_3 = 0 \quad \alpha_2 = -1$

$(3,3,4) = \underbrace{4(111) - (110)}_{\in \operatorname{Im} f} \cancel{+ 0.(1-10)} \in \operatorname{Im} f \Rightarrow f(334) = (334)$

(18) $$\left(f(2v_1 + 4v_2 + 4v_3)\right)_{B'} = M_{BB'}(f) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} \Rightarrow f(2v_1 + 4v_2 + 4v_3) \neq 6w_1 + 2w_2 + 2w_3$$

$$\left(f(v_1 + v_2 + v_3)\right)_{B'} = M_{BB'}(f) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow f(v_1 + v_2 + v_3) = 6w_1 + 2w_2 + 2w_3$$

Rta: $v_1 + v_2 + v_3$.

(19) 0, 3 son aval (están en todas las opciones)

chequeo si $-3, -1$ y $-2$ lo son:

$\det(A-(-3)Id) = \det(A+3Id) = \det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 6 \cdot \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \neq$

$\det(A-(-1)Id) = \det\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$

$\det(A-(-2)Id) = \det\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \underset{F_1 = F_3}{=} 0$ Rta: $\{-2, 0, 3\}$

(20) $M_B(f) = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$P(\lambda) = \det(M_B(f) - \lambda I) = (k-\lambda).(2-\lambda).(3-\lambda)$

si $k \neq 2$ y $k \neq 3$: diagonalizable

~~$\Rightarrow$ puede ser $k \neq 2$ ó $\forall k \in \mathbb{R}$ (mirando las opciones)~~

si descarto las opciones: ningún valor de $k$, $k \neq 0$ y resta ver si en 2 ó 3 es diagonalizable. Para ambas opciones restantes en $k=3$ es diag. Chequeo $k=2$:

$\left(M_B(f) - 2I \,\middle|\, \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right) \to \left(\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \,\middle|\, \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right)$ $\dim S_2 = 1$

multip de 2 como raíz de $P = 2$

$\Rightarrow$ no es diag en $k=2$

$\Rightarrow$ sol: $k \neq -2$. (por descarte)