Métodos Numéricos Parcial 2

Sollender,Jazmin
FaMAF-UNC

Mercado Alcoba,Javier
FaMAF-UNC

June 8, 2023

1 Introducción

A partir de datos experimentales medidos de la caida de una gota, buscamos describir el movimiento de la misma usando y combinando varios metodos numericos que se describen en la secciones posteriores

2 Parte II: Descripción del movimiento de la gota de agua usando tecnicas de graficacion y metodos numericos

2.1 2A Descripcion de los datos del archivo 'datos.dat'

Usando GnuPlot graficamos los datos del archivo 'datos.dat'

En el grafico 1 vemos la posicion de la gotita de agua respecto al tiempo, iniciando en el momento en que fue soltada.

Inicialmente podemos ver que respecto del tiempo el comportamiento es cuadrático y luego comienza a desplazarse respecto del tiempo de forma lineal (la trayectoria de la gota es una recta vertical, siguiendo la dirección que une el punto del que parte con el centro de la Tierra, hacia donde apunta la velocidad). Esto nos indica que la gotita fue desacelerándose. Esto se debe a que, junto con la fuerza de atracción gravitatoria que actúa sobre la gota, también actúa la resistencia del aire, medio por el cual ésta se desplaza. Ésta es una fuerza no conservativa, por lo cual, mientras "más actúa, más afecta". Actúa en contra de la otra fuerza y mientras más avanza el tiempo, más contrarresta el efecto de la gravedad.

En nuestro caso, esto se refleja en la desaceleración que sufre la gotita.

2.2 Calcular la velocidad utilizando diferentes metodos de derivacion numerica

Sabemos que una derivada indica cómo varía una función. La velocidad es la variación de la posición respecto del tiempo. Es por ello que utilizamos derivación para encontrar la velocidad. Al solamente tener datos aislados y no una expresión analítica, es necesario utilizar métodos de derivación numérica para calcular la velocidad punto a punto utilizando los datos de posición vs tiempo que tenemos.

Las velocidades (punto a punto) obtenidas utilizando los métodos solicitados pueden verse en la tercer columna del archivo 'salida.dat' arrojan la sgte tabla, Ver Tabla 1:

y se comportan de la siguiente manera graficamente ver figura 2:

2.3 2C

Los métodos utilizados fueron, como se pedía en la consigna, el método de dos puntos para los puntos extremos, el método de tres puntos centrado para el segundo y anteúltimo, y el método de cinco puntos para todos los puntos centrales.

El programa inicialmente abre el archivo 'datos.dat', lee la cantidad de datos que se proporcionan allí y luego los escribe en dos vectores (t y z, que serían el tiempo y la posición respecto del tiempo) de dimensión igual al número de datos que contamos inicialmente (cantidad de filas del archivo .dat). A través de un do, a esos vectores se los damos de comer a las subrutinas correspondientes a cada

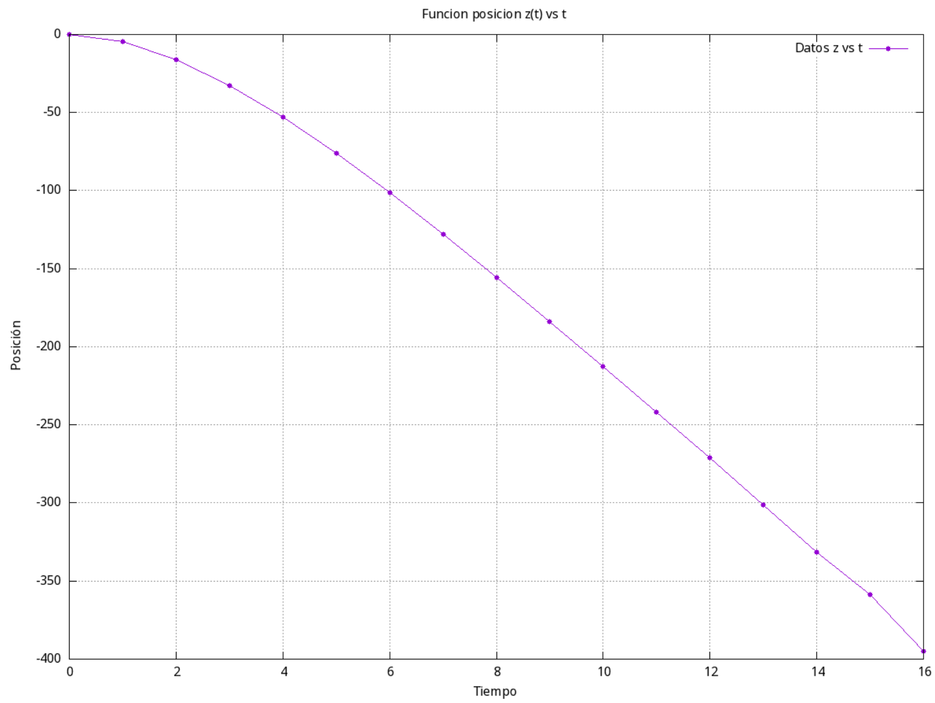

Figure 1: Posicion de la gota vs el tiempo

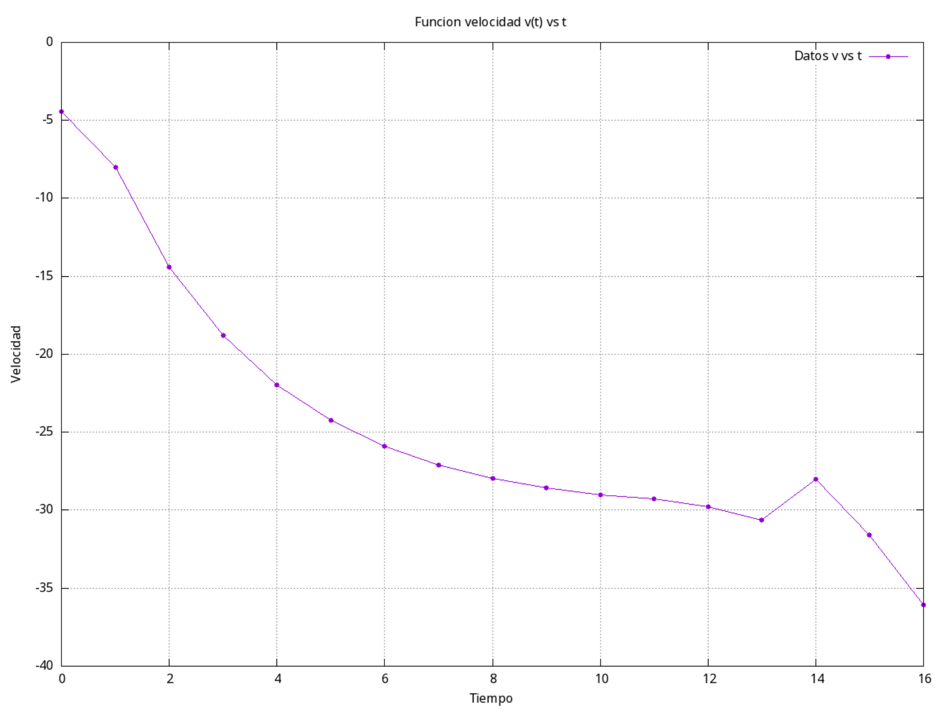

Figure 2: Velocidad de la gota vs el tiempo

Table 1: Tabla de datos salida.dat

$t(i)$	$z(i)$	$v(i)$
0.0000000000000000	0.0000000000000000	-4.4119999999999999
1.0000000000000000	-4.4119999999999999	-7.9855000000000000
2.0000000000000000	-15.971000000000000	-14.424166666666665
3.0000000000000000	-32.689999999999998	-18.784666666666666
4.0000000000000000	-53.134000000000000	-21.954499999999999
5.0000000000000000	-76.299999999999997	-24.240000000000002
6.0000000000000000	-101.39700000000001	-25.883583333333338
7.0000000000000000	-127.91400000000000	-27.079916666666666
8.0000000000000000	-155.44300000000001	-27.938750000000006
9.0000000000000000	-183.70900000000000	-28.549166666666650
10.000000000000000	-212.49199999999999	-29.036166666666666
11.000000000000000	-241.71600000000001	-29.252500000000012
12.000000000000000	-271.06500000000000	-29.771666666666640
13.000000000000000	-301.26299999999998	-30.610583333333327
14.000000000000000	-331.60800000000000	-28.000000000000021
15.000000000000000	-358.73300000000000	-31.608499999999992
16.000000000000000	-394.82499999999999	-36.091999999999985

método (a cada método lo aplicamos a los puntos que corresponde con condiciones en una función if). A estos puntos obtenidos los metemos en el vector v (velocidad respecto del tiempo) de la misma forma que hicimos antes.

Después se guarda todo eso en el archivo 'salida.dat' (las columnas t, z, v respectivamente) Ver Tabla 1., el cual usamos para hacer el gráfico con Gnuplot.

2.4 2D

Con Gnuplot y utilizando el mismo archivo (salida.dat) graficamos la columna 3 (velocidad respecto de t) vs la columna 2 (posición respecto de t) Ver Figura 3.

2.5 2E

Se nos dio la siguiente función analítica:

$$z(t) = -g \cdot \alpha \cdot t + g \cdot \alpha^2 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\alpha}})$$

Donde

$$\alpha = m/c, \text{con } m \text{ la masa de la gotita.}$$

Necesitamos encontrar a g y α(y tambien c) tales que esta función nos sirva para describir la posición de nuestra gotita respecto del tiempo, o sea, utilizando los datos que tenemos, ajustar la función. Así que con Gnuplot y su función fit, dándole de comer los datos y la función $z(t)$, obtenemos los valores de g y α que queríamos. Éstos se imprimen por pantalla en la terminal y son los siguientes:

$$g = 9.67978,$$
$$\alpha = 3.14392.$$

2.6 2F

En este gráfico (hecho con Gnuplot) Ver Figura 4 podemos ver en línea a la función analítica $z_{\text{ajust}}(t)$ (ajustada) y en puntos, los datos $z(t_i)$ del archivo 'datos.dat'.

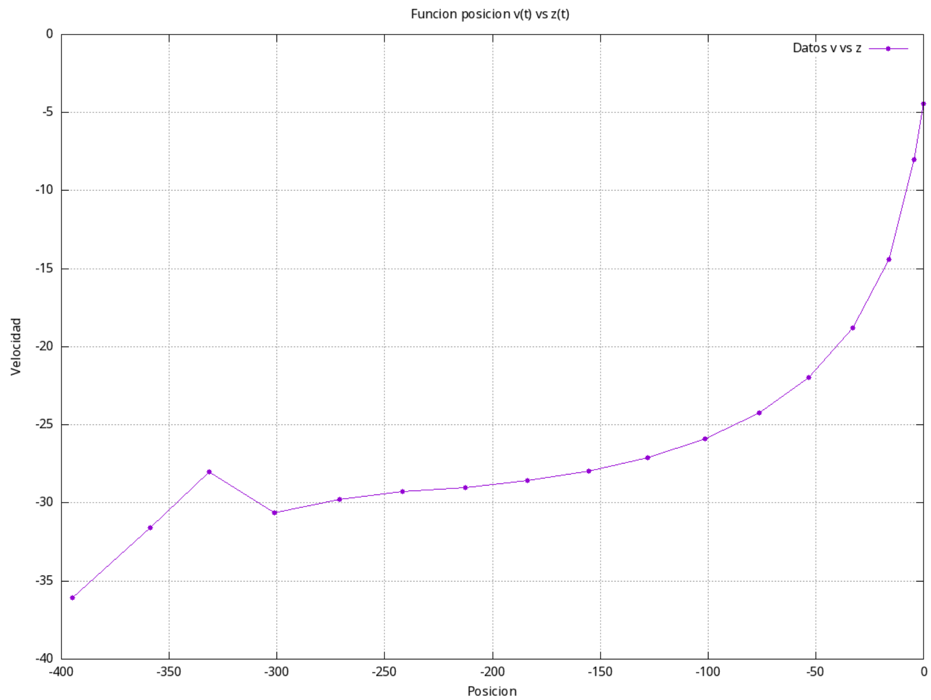

Figure 3: Velocidad de la gota vs la posicion

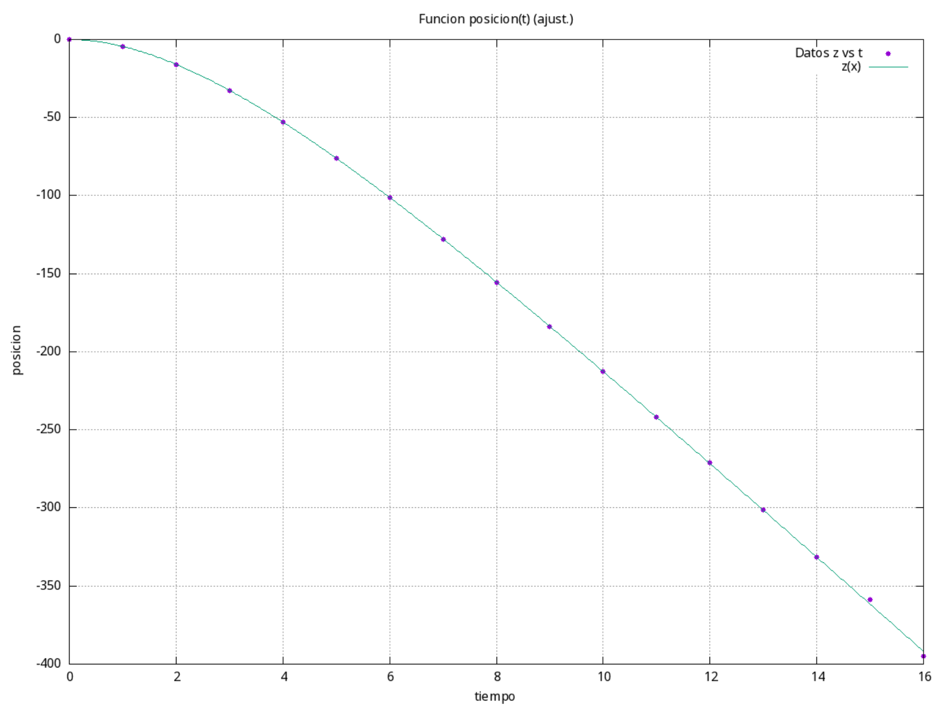

Figure 4: Grafico de la funcion posicion ajustada vs Puntos medidos

2.7 2G

2G. Queremos ahora calcular el trabajo. Para ello es necesario calcular la siguiente integral:

$$W = \int_{ti}^{tf} F \cdot v \, dt$$

Vamos a necesitar hacer varias cuentas antes, todas ellas analíticas y "a mano":

A la función $z_{\text{ajust}}(t)$ la derivamos para obtener una expresión analítica de la velocidad de la gotita. Ésta es:

$$v_{\text{ajust}}(t) = g \cdot \alpha \cdot (1 - e^{-t/\alpha}),$$

con g y alfa como antes.

Utilizando esta expresión, podemos calcular la expresión para la función de la fuerza (F), la cual depende de $v(t)$. Obtenemos:

$$F = m \cdot g \cdot e^{-t/\alpha},$$

Ahora multiplicamos a F con $v(t)$ y obtenemos:

$$F \cdot v(t) = -m \cdot g \cdot (\alpha^2) \cdot (e^{-2t/\alpha} - e^{-t/\alpha}).$$

Todas estas expresiones nos fueron dadas de forma vectorial, pero al ser paralelos y al realizar el producto interno (F,v), nos quedamos nomás con los módulos y al estar en sentido opuesto el angulo es pi rad por lo que el producto interno va con un signo negativo

Ésta última es la expresión que tenemos que integrar entre los tiempos inicial ($t = 0$) y final ($t = 16$). Para ello llamamos en el programa principal a una subrutina que calcula integrales a partir del método de Simpson. Esta subrutina come los valores del intervalo (o sea t inicial y final), la cantidad de subdivisiones que queremos que tenga el intervalo (la consigna nos pedía 100), y la función a integrar (Fv). Por supuesto, nos derive el valor de la intregral de la función en el intervalo establecido.

2.8 2H

Ahora calculamos al trabajo en función de la posición de la gota. En este caso no contamos con la expresión analítica de la fuerza resultante F, pues esta depende de $v(z)$. Lo que sí tenemos, y utilizamos, son los datos de la posición vs la velocidad.

A partir del método del trapecio para puntos no equiespaciados podremos calcular la integral de la función F. El resultado obtenido se imprime por pantalla.

2.9 2I

En este punto se nos pidió verificar los valores obtenidos de trabajo en los incisos previos mediante el uso de la energía mecánica del sistema, en particular de la energía cinética del mismo y más específicamente su variación, ya que

$$W = \Delta K$$

Sabemos que K_{inicial} es igual a cero, puesto que suponemos que la gota parte de un estado de reposo. Al K_{final} lo calculamos a partir del valor del último dato, obtenido a partir de la derivación numérica del inciso 2B.:

$$v_{\text{final}} = -36,09199.$$

Utilizando la expresión que aprendimos en Física General I,

$$K = \frac{1}{2} m (v(t))^2$$

con m=0,001, obtenemos que la energía cinética final es aproximadamente:

$$K_{\text{final}} = 0.64158335999999938.$$

Se obtuvieron los siguientes resultados:

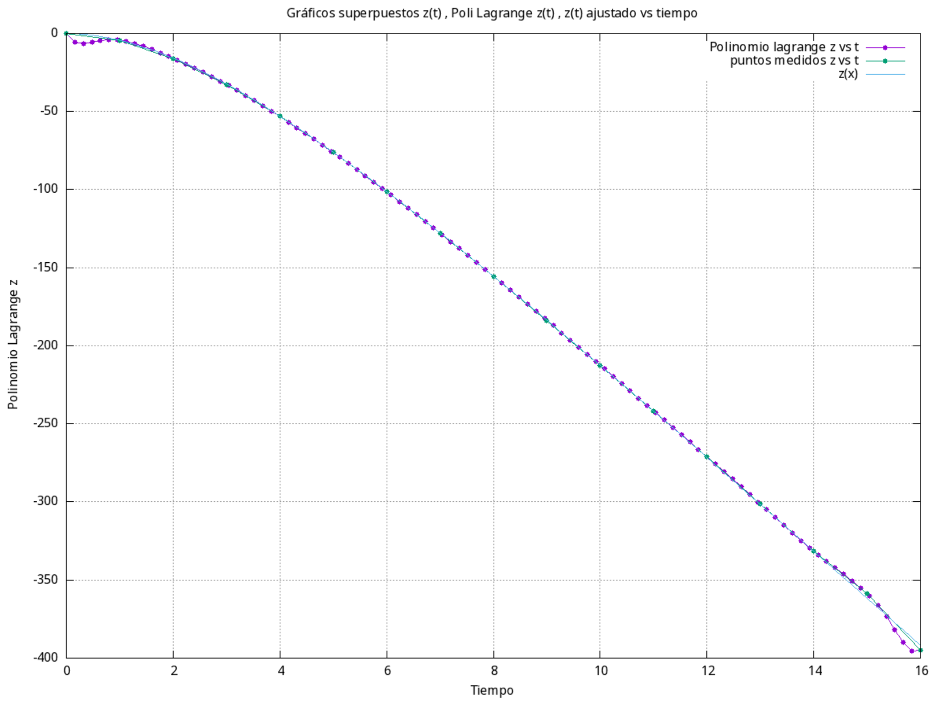

Figure 5: Graficos Superpuestos

- El trabajo calculado con el método de Simpson es $W = 0.45737668759393380$.
- El trabajo calculado con el método del trapecio es $W(z) = 0.43414718975978556$.
- El trabajo calculado con consideraciones energéticas es $W = 0.64158335999999938$.

Al comparar los resultados, podemos observar que el trabajo calculado mediante el método de Simpson es muy similar al obtenido a través del metodo del Trapecio y no esta muy lejos del calculado usando consideraciones energéticas. Aunque no son exactamente iguales debido a los errores inherentes al uso de métodos numéricos, su cercanía sugiere una buena aproximación.

2.10 2J

Por último, llamamos a la subrutina del método del polinomio interpolante de Lagrange, le damos de comer los datos del archivo datos.dat y obtenemos luego de dividir el intervalo de tiempo en 100 partes, el siguiente polinomio : Ver Figura 5