Método del Trapecio

A. Herrera Poyatos
J. Poyatos Amador
R. Raya Castellano

Resolución numérica de PVI

Definición

Dada una función $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *continua, un problema de valores iniciales de primer orden consiste en encontrar aquellas funciones* $y : [a, b] \to \mathbb{R}$ *de clase 1 que verifiquen* $G(y) \subset \Omega$, $y'(t) = f(t, y(t))\ \forall t \in [a, b]$ *y la condición inicial* $y(t_0) = y_0$, *donde* $t_0 \in [a, b]$.

Resolución numérica de PVI

Definición

Considérese un problema de valores iniciales y supongamos que la función f está definida en $[a, b] \times \mathbb{R}$. Un método de discretización para resolverlo el PVI es un método numérico que trata de obtener valores aproximados y_n de la solución de $y(t)$ en los distintos nodos t_n con $n = 0, 1, ..., N$ obtenidos mediante la partición del intervalo $[a, b]$.

Resolución numérica de PVI

- Ecuaciones diferenciales ordinarias.
- ¿Existe solución y es única?
- Métodos de discretización.
- Método de Euler.

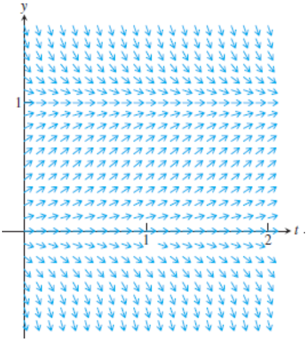


Figura: Representación del campo vectorial asociado a la ecuación logística $y'(t) = cy(t)(1 - y(t))$.

Motivación: Método de Euler

$$\begin{cases} w_0 = y_0 \\ h_i = t_{i+1} - t_i \\ w_{i+1} = w_i + h_i f(t_i, w_i) \end{cases} \tag{1}$$

Método de Euler

- Mejores resultados para puntos equidistantes.
- Es estable, consistente y convergente.
- El error global de aproximación es $O(h)$.
- Puede parecer válido en cualquier aplicación.

Motivación: Ejemplo

Considérese el siguiente problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} y'(t) = -4t^3y^2 \\ y(-10) = 1/10001 \\ t \in [-10, 0] \end{cases}$$

- La solución exacta es $y(t) = \frac{1}{1+t^4}$.
- Queremos calcular la aproximación de y en 0 con $y(0) = 1$.
- Se va a aproximar hasta llegar a los 10000 puntos.

Motivación: Ejemplo

N	h	w_n
100	0.1	0.00390138
1000	0.01	0.03085162
5000	0.002	0.13282140
7500	0.0013	0.18614311
10000	0.001	0.23325153

Tabla: Ejemplo de un mal comportamiento del método de Euler.

Motivación: Ejemplo

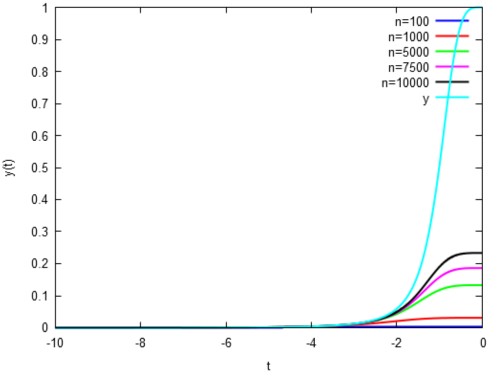


Figura: Aproximaciones obtenidas con diferentes valores de n.

Índice

Lipschitz

Definición

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *y sea* $f : \Omega \to \mathbb{R}$*. Se dice que* f *es lipschitziana respecto de la segunda variable,* y*, si existe una constante* $L \in \mathbb{R}^+$*, llamada constante de Lipschitz, de forma que* $|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$ *para cualquier par de puntos* $(t, y_1), (t, y_2) \in \Omega$*.*

Existencia y unicidad

Teorema

(Existencia y unicidad de soluciones) Sea $f : [a,b] \times I \to \mathbb{R}$*, donde* I *es un intervalo de* $\mathbb{R}$*, y sea* $y_0 \in I$*. Entonces:*

1. *Si* $I = [\alpha, \beta]$ *y* f *es lipschitziana respecto de la segunda variable en* $[a,b] \times [\alpha, \beta]$*, entonces existe* $c \in [a,b]$ *tal que el problema de valores iniciales:*
$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(a) = y_0 \\ t \in [a, c] \end{cases}$$
tiene exactamente una solución.
2. *Si* $I =]-\infty, \infty[$ *y* f *es lipschitziana respecto de la segunda variable en* $[a,b] \times]-\infty, \infty[$*, entonces existe exactamente una solución en* $[a,b]$

Teorema

Sean dos soluciones $y(t), z(t)$ *de la ecuación diferencial* $y'(t) = f(t, y(t))$ *para las condiciones iniciales* $y(a)$ *y* $z(a)$ *respectivamente. Supóngase que* f *es lipschitziana respecto de la segunda variable. Entonces* $|y(t) - z(t)| \leq e^{L(t-a)}|y(a) - z(a)|$ *donde* L *es la constante de Lipschitz de* f*.*

Errores locales y globales

Definición

Sean w_i los valores estimados en los puntos t_i por cierto método de discretización. Sea también z_i el valor de la solución exacta en t_i para el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_{i-1}) = w_{i-1} \\ t \in [t_{i-1}, t_i] \end{cases} \tag{2}$$

Se definen los siguientes errores:

- *Error global de truncatura o error acumulado en el nodo i-ésimo:* $g_i = |y_i - w_i|$
- *Error local de truncatura o error en un paso:* $e_i = |z_i - w_i|$

Errores locales y globales

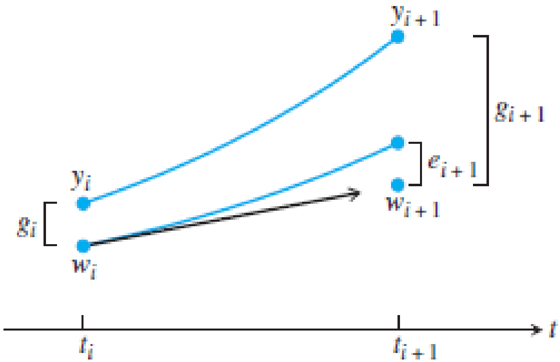


Figura: Representación gráfica de los errores locales y globales.

Errores locales y globales

Teorema

Supóngase que la función f es lipschitziana en la segunda variable con constante de Lipschitz L. Además, supóngase que existen $C \geq 0$ y $k \in \mathbb{N}$ tales que los errores locales verifican $e_i \leq Ch^{k+1}$ para todo $i = 0 \ldots n$. Entonces, se verifica la siguiente desigualdad para los errores globales

$$g_i \leq \frac{Ch^k}{L}(e^{L(t_i - a)} - 1) \tag{3}$$

Método de discretización

Definición

Considérese un método de discretización para problemas de valores iniciales. Entonces:

1. *El método es localmente de orden k si existe una constante $C \geq 0$ tal que $e_i \leq Ch^k$ para todo $i = 0 \dots n$ cuando h tiende a 0.*
2. *El método es de orden k si existe una constante $C \geq 0$ tal que $g_i \leq Ch^k$ para todo $i = 0 \dots n$ cuando h tiende a 0.*

Teorema

Supóngase que $f : [a, b] \times [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ es derivable y lipschitziana en la segunda variable. Entonces, el método de Euler es localmente de orden 2. Consecuentemente, el método de Euler es de orden 1.

Convergencia y consistencia

Métodos de un paso: $y_{i+1} = y_i + h\phi(t_i, y_i, h)$ donde ϕ es una función de t, y y h que, además, está definida en función de f.

Definición

Un método de un paso se dice convergente respecto a la ecuación diferencial que aproxima (con función f lipschitziana con respecto a la segunda variable) si:

$$\lim_{n \to +\infty} \max_{i=0\ldots n} g_i = 0$$

Definición

Un método de un paso se dice consistente con respecto a la ecuación diferencial que aproxima (con función f lipschitziana con respecto a la segunda variable) si:

$$\lim_{n \to +\infty} \max_{i=0\ldots n} e_i = 0$$

Esto es, los errores locales convergen uniformemente a 0 cuando $n \to +\infty$.

Estabilidad

Definición

Un método de discretización se dice estable si para cualquier PVI verificando que f es lipschitziana respecto de la segunda variable y para cualquier perturbación de este PVI existen constantes positivas h_0 y K tales que la diferencia entre las aproximaciones obtenidas para ambos PVI están acotadas por $K|y_0 - y_0'|$ para todo $h \in [0, h_0]$. Esto es, si w_i son las aproximaciones obtenidas para el problema sin perturbar y w_i' son las aproximaciones obtenidas para el problema perturbado, utilizando en ambos casos el mismo $h < h_0$, entonces $|w_i - w_i'| \leq K|y_0 - y_0'|$ para todo i.

Estabilidad, convergencia y consistencia

Teorema

Si un método de un paso anterior verifica que ϕ es continua en cada una de sus variables y, además, es lipschitziana respecto de la segunda variable en el correspondiente dominio para $h \in [0, h_0]$, entonces:

1. *el método es estable.*
2. *el método es convergente o, equivalentemente,* $\phi(b, y, 0) = f(b, y)$.

Introducción al método del trapecio

Proposición

Sea un PVI con $y'(t) = f(t, y(t))$ y $y(t_0) = y_0$. Son equivalentes:

1. *y es una solución del PVI.*
2. $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s)))ds \ \forall t \in [a, b]$

Nuestra solución verifica:

$$y(t_1) = y_0 + \int_{t_0}^{t_1} f(s, y(s)))\ ds$$

Introducción al método del trapecio

Idea: Método del trapecio para integración numérica

$$y(t_1) = y_0 + \frac{h}{2}\left[f(t_0, y_0) + f(t_1, y(t_1))\right] - \frac{h^3}{12} y^{3)}(\xi) \qquad (4)$$

Aproximación implicita

$$y(t_1) \approx w_1 = w_0 + \frac{h}{2}\left[f(t_0, w_0) + f(t_1, y(t_1))\right] \qquad (5)$$

¿Cómo cálcular la aproximación?

- **Método del trapecio explícito**
- **Método del trapecio implícito**

Método del trapecio explícito

Idea: Utilizar el método de Euler

$$y(t_{i+1}) \approx w'_{i+1} = w'_i + hf(t_i, w'_i))$$

$$+$$

$$y(t_{i+1}) \approx w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}\left[f(t_i, w_i) + f(t_{i+1}, y(t_{i+1}))\right]$$

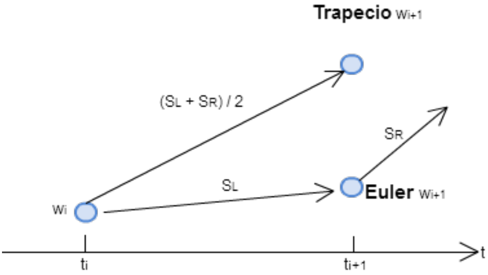
Definición (*Método del trapecio explícito*)

$$y(t_{i+1}) \approx w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}\left[f(t_i, w_i) + f(t_i + h, w_i + hf(t_i, w_i))\right] \tag{6}$$

Comparación con el método de Euler

$$\text{Denotamos} \begin{cases} S_L = hf(t_i, w_i) \\ S_R = hf(t_{i+1}, w_i + S_L) \end{cases}$$

- **Método de euler:** $w'_{i+1} = w_i + S_L$
- **Método del trapecio explícito:** $w_{i+1} = w_i + \frac{S_L + S_R}{2}$



Error local y global

Teorema

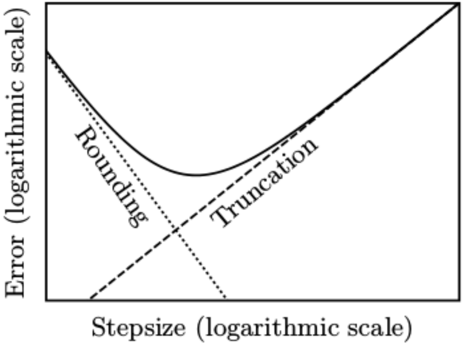
El método del trapecio es localmente de orden tres.
En consecuencia, el método del trapecio es de orden dos.

Demostración.
Se basa en el teorema de Taylor. □

Corolario

El método del trapecio explícito es convergente.

Error de redondeo



Estabilidad y convergencia

Función de incremento:
$\phi(t, y, h) = \frac{1}{2} f(t, y) + \frac{1}{2} f(t + h, y + hf(t, y))$

Proposición

Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es lipschitziana respecto de la segunda variable, entonces ϕ es lipschitziana respecto de la segunda variable en $\Omega \times [0, h_0]$ para cualquier h_0.

Corolario

El método del trapecio explícito es estable y consistente.

Demostración.
Teorema de consistencia, convergencia y estabilidad. $\square$

Método del trapecio implícito: Ecuación implícita

Recordatorio

$$y(t_i) = y_{i-1} + \frac{h}{2}\left[f(t_{i-1}, y_{i-1}) + f(t_i, y(t_i))\right] - \frac{h^3}{12} y^{3)}(\xi)$$

Ignoramos el último sumando:

Partiendo del valor exacto:

$$w_i = y_{i-1} + \frac{h}{2}\left[f(t_{i-1}, y_{i-1}) + f(t_i, w_i)\right] \tag{7}$$

Partiendo de una aproximación:

$$w_i = w_{i-1} + \frac{h}{2}\left[f(t_{i-1}, w_{i-1}) + f(t_i, w_i)\right] \tag{8}$$

Idea: Resolver la ecuación implícita

Ecuación implícita

$$w_i = w_{i-1} + \frac{h}{2}\left[f(t_{i-1}, w_{i-1}) + f(t_i, w_i)\right]$$

Definimos $g_i(w) = w_{i-1} + \frac{h}{2}\left[f(t_{i-1}, w_{i-1}) + f(t_i, w)\right]$.

Observación

w_i es solución de la ecuación implícita $\iff g_i(w_i) = w_i$.

Cálculo de un punto fijo mediante métodos numéricos.

Error local y global

Proposición

$$\begin{cases} g_i(w_i) = w_i \\ f \text{ es lipschitziana en la segunda variable } (L \text{ constante de Lipschitz}) \\ h \in [0, h_0] \text{ con } h_0 L < 2 \end{cases}$$

Entonces el error local cometido es $O(h^3)$.

Demostración.
Utilizar $z(t_i) = w_{i-1} + \frac{h}{2}\left[f(t_{i-1}, w_{i-1}) + f(t_i, z(t_i))\right] - \frac{h^3}{12} z^{3)}(\xi)$. $\square$

Corolario

El método del trapecio implícito es localmente de orden 3. Por tanto, es de orden 2.

Resolución de la ecuación implícita

- **Método de Newton.**
  - Se necesita la derivada de g_i.
  - Convergencia local.
  - Orden de convergencia cuadrático.
- **Método de iteración funcional asociado a** g_i.

Definición (*Método del trapecio iterativo*)

Se toma una aproximación inicial $w_i^{(0)}$.

$$w_i^{(j+1)} = g_i(w_i^{(j)}) = w_{i-1} + \frac{h}{2}\left[f(t_{i-1}, w_{i-1}) + f(t_i, w_i^{(j)})\right] \tag{9}$$

Convergencia del método de iteración funcional

Supóngase que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es lipschitziana respecto de la segunda variable con constante de Lipschitz L.

Observación

g_i es lispchitziana con constante $L' = \frac{Lh}{2}$.

Proposición

Si $I =]-\infty, +\infty[$ y $\frac{Lh}{2} < 1$, entonces existe w_i tal que $\{w_i^{(j)}\}$ converge a w_i para cualquier aproximación inicial.

Proposición

Sea $r > 0$. Si $[w_i^{(0)} - r, w_i^{(0)} + r] \subset I$, $\frac{Lh}{2} < 1$ y $\left| w_i^{(1)} - w_i^{(0)} \right| < (1 - \frac{Lh}{2})r$, entonces $\{w_i^{(j)}\}$ está bien definida y es convergente.

Error de aproximación del método de iteración funcional

- Necesitamos que sea como mucho $O(h^3)$.
- Algunos autores recomiendan $O(h^4)$.

En caso de convergencia:

$$\left|w_i - w_i^{(j)}\right| \leq \left(\frac{hL}{2}\right)^j \left|w_i - w_i^{(0)}\right|$$

Podemos calcular el número de iteraciones necesarias.

- $w_i^{(0)}$ se calcula habitualmente mediante el método de Euler.
- En tal caso, $w_i^{(1)}$ es el método del trapecio explícito.
- Métodos predictor - corrector.

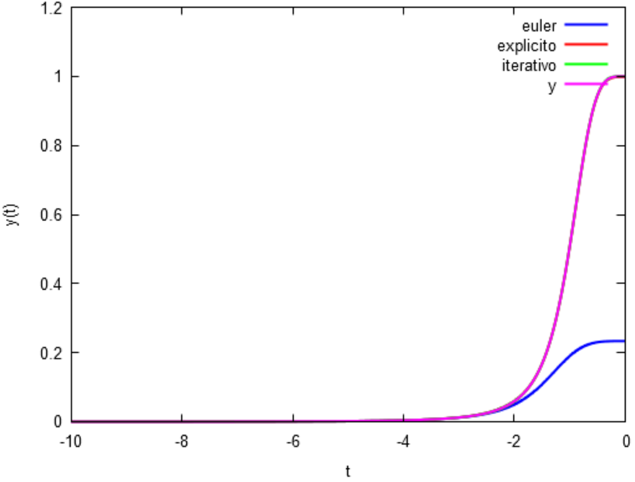
Ejemplo 1

Considérese el ejemplo de problema de valores iniciales dado en la motivación.

$$\begin{cases} y'(t) = -4t^3y^2 \\ y(-10) = 1/10001 \\ t \in [-10, 0] \end{cases}$$

cuando se resuelve mediante el método de Euler y con el método del Trapecio Explícito e Iterativo, con paso 10^{-3}. se obtienen la siguiente gráfica. El método del Trapecio Iterativo usa una tolerancia de 10^{-4}.

Ejemplo 1



Ejemplo 2

Considérese el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y'(t) = -1 + \frac{y}{t} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

calcular el valor de $y(2)$ para $h = 0{,}25$ y $h = 0{,}1$.

Ejemplo 2

j	t_{j-1}	y_{j-1}	t_j	y_j
1	1.00	0.000000	1.25	-0.275000
2	1.05	-0.275000	1.50	-0.600833
3	1.10	-0.600833	1.75	-0.968829
4	1.15	-0.968829	2.00	-1.372859

Tabla: Trapecio con $h = 0{,}25$

Ejemplo 2

j	t_{j-1}	y_{j-1}	t_j	y_j
1	0.00	0.000000	0.10	-0.104545
2	0.10	-0.104545	0.20	-0.218216
3	0.20	-0.218216	0.20	-0.340247
4	0.30	-0.340247	0.40	-0.469991
5	0.40	-0.469991	0.50	-0.606896
6	0.50	-0.606896	0.60	-0.750480
7	0.60	-0.750480	0.70	-0.900326
8	0.70	-0.900326	0.80	-1.056065
9	0.80	-1.056065	0.90	-1.217366
10	0.90	-1.217366	1.00	-1.383938

Tabla: Trapecio con $h = 0{,}1$

Ejemplo 2

- Como $y(2) = -1{,}386294$, los errores relativos son $9{,}6910^{-3}$ para el caso $h = 0{,}25$ y $1{,}7010^{-3}$ para el caso $h = 0{,}10$.
- Dado que el método del trapecio es de orden 2 el error relativo es $O(h^2)$ y por tanto el cociente de los errores debería ser $\frac{C(0{,}25)^2}{C(0{,}10)^2} = 6{,}25$ mientras que el valor real es 5.7.
- La razón de esta diferencia es que el orden es $O(h^2)$ asintóticamente, esto es, cuando $h \to 0$ y los valores de considerados para h no son suficientemente pequeños.

Ejercicio 1

Considérese el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y'(t) = y - t^2 \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

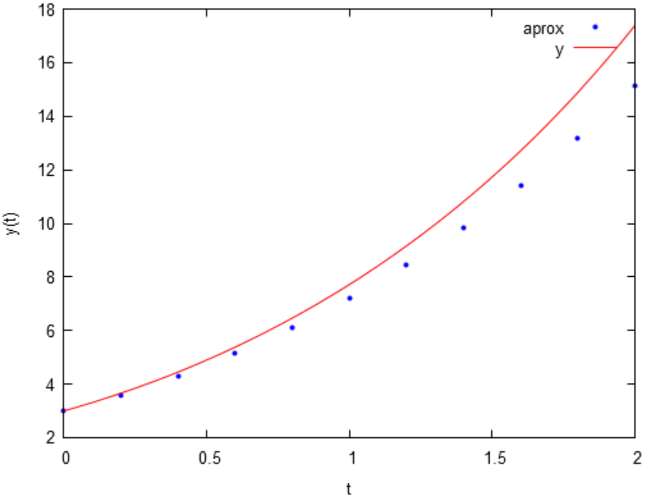
calcular una aproximación a la solución del problema de valores iniciales mediante el método de Euler y el método del Trapecio Explícito e Iterativo.

Ejercicio 1

j	t_j	y_j
0	0.0	3
1	0.2	3.6
2	0.4	4.312
3	0.6	5.1424
4	0.8	6.09888
5	1.0	7.190656
6	1.2	8.428787
7	1.4	9.826544
8	1.6	11.399853
9	1.8	13.167824
10	2.0	15.153389

Tabla: Euler con $h = 0{,}2$

Ejercicio 1



Ejercicio 1

j	t_j	y_j *Explicito*	y_j *Implicito*	y_j *Euler*
0	0.0	3	3	3
1	0.2	3.656	3.66216	3.6
2	0.4	4.3952	4.453683	4.312
3	0.6	5.361014	5.385540	5.1424
4	0.8	6.433237	6.471135	6.09888
5	1.0	7.671749	7.726853	7.190656
6	1.2	9.095534	9.172720	8.428787
7	1.4	10.727752	10.833211	9.826544
8	1.6	12.596657	12.738239	11.399853
9	1.8	14.736722	14.924363	13.167824
10	2.0	17.190000	17.436269	15.153389

Tabla: Tabla comparativa con $h = 0{,}2$

Ejercicio 1

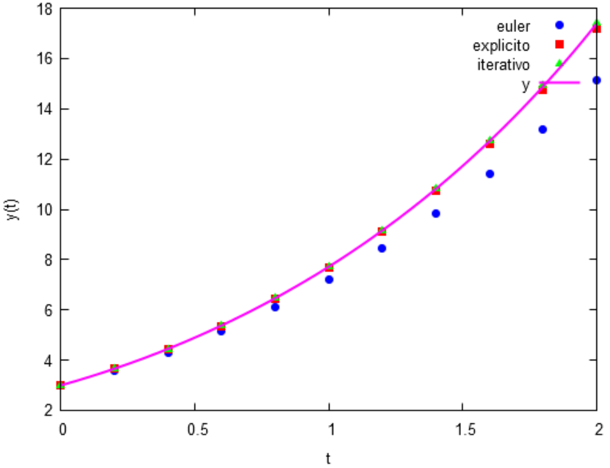


Figura: Aproximación a la solución con los métodos.

Ejercicio 2

Dada la ecuación $y' = t + y^2$ con $y(1) = 1$ aproximar mediante el método del trapecio: a) y(1,2) con 2 pasos (h=0,1) y b) y(1,2) con 4 pasos (h=0,05). Si el error global es de la forma Ch^2, estimar el valor de C a partir de los resultados anteriores. Determinar h para que el error sea del orden de 10^{-4}.

Ejercicio 2

j	t_{j-1}	y_{j-1}	t_j	y_j
1	1.00	2.000000	1.10	2.617500
2	1.10	2.617500	1.20	3.657368

Tabla: Trapecio con $h = 0{,}1$

Ejercicio 2

j	t_{j-1}	y_{j-1}	t_j	y_j
1	1.00	2.000000	1.05	2.277813
2	1.05	2.277813	1.10	2.628941
3	1.10	2.628941	1.15	3.087423
4	1.15	3.087423	1.20	3.712364

Tabla: Trapecio con $h = 0{,}05$

Ejercicio 2

- $y(1{,}2) - 3{,}657368 = C(0{,}1)^2$.
- $y(1{,}2) - 3{,}712364 = C(0{,}05)^2$.
- Restando obtenemos que $C = 7{,}33$.
- Para que sea de orden 10^{-4}, el error debe ser $h = 3{,}7\ 10^{-3}$

Ejercicio 3

El movimiento de caída de un cuerpo de masa m en un medio que opone una resistencia proporcional al cuadrado de la velocidad está gobernado por la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g - \frac{K}{m}(\frac{ds}{dt})^2 \tag{10}$$

siendo $g = 10\frac{m}{s^2}$ y $K\frac{kg}{s}$ una constante de proporcionalidad cuyo valor depende del problema concreto. Si el cuerpo se abandona sin velocidad inicial y las condiciones iniciales son

$$s(0) = s'(0) = 0 \tag{11}$$

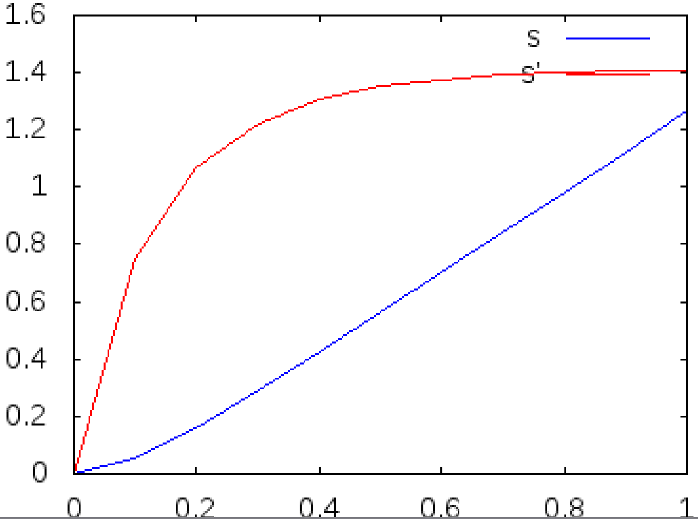
Calcular una tabla de valores de las funciones $s(t)$ y $s'(t)$ para dibujar sus gráficas en el intervalo $[0, 1]$. Tomar $\frac{K}{m} = 5$.

Ejercicio 3

j	t_{j-1}	(u_{j-1}, v_{j-1})	t_j	(u_j, v_j)
1	0.00	0.000000,0.000000	0.10	0.050000,0.750000
2	0.10	0.050000,0.750000	0.20	0.160938,1.070068
3	0.20	0.160938,1.070068	0.20	0.289318,1.223146
4	0.30	0.289318,1.223146	0.40	0.424231,1.305143
5	0.40	0.424231,1.305143	0.50	0.562160,1.351168
6	0.50	0.562160,1.351168	0.60	0.701635,1.377549
7	0.60	0.701635,1.377549	0.70	0.841949,1.392822
8	0.70	0.841949,1.392822	0.80	0.982733,1.401712
9	0.80	0.982733,1.401712	0.90	1.123784,1.406900
10	0.90	1.123784,1.406900	1.00	1.264990,1.409933

Tabla: Trapecio para sistemas con $h = 0{,}1$

Ejercicio 3



Ejercicio 4: Algoritmo de Kahan para errores de redondeo

Algoritmo 1 Algoritmo de Kahan

```
function SUMA-COMPENSADA(vector-entrada)
    suma=0.0
    c=0.0
    for i=1 to longitud(vector-entrada) do
        (1) y = vector-entrada[i]-c
        (2) t = suma + y
        (3) c = (t - suma) - y
        (4) suma = t
    end for
     return suma
end function
```

Ejercicio 4: Algoritmo de Kahan para errores de redondeo

Ejercicio

Supóngase que se utiliza aritmética decimal de seis dígitos, la suma actual es 10000.0 y los siguientes dos valores son 2.14159 y 2.71828. Comapre la suma usual con el algoritmo de Kahan.

Método usual

- Primera suma con redondeo: 10003.1
- Segunda suma con redondeo: 10005.8

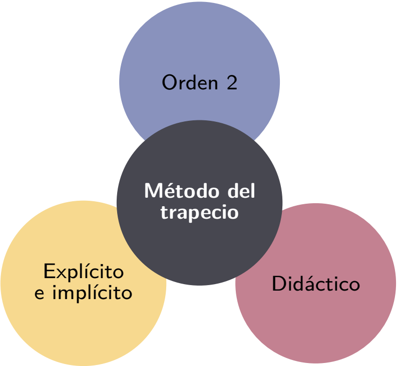
Método de Kahan

- Primera suma
  c = 0.0
  y = 3.14159
  t = 10000.0 + 3.14159 = 10003.14159 = 10003.1
  c = (10003.1 - 10000.0) - 3.14159 = -.0415900
  suma = 10003.1

- Segunda suma
  y = 2.71828 - -.0.415900 = 2.75987
  t = 10003.1 + 2.75987 = 10005.85987 = 10005.9
  c = (10005.9 - 10003.1) - 2.75987 = .040130
  suma = 10005.9

Conclusión

Ventajas



Desventaja: existen métodos de mayor orden.

Gracias por su atención.

Ilustración de Lola Moral y Sergio García