Método del Trapecio

A. Herrera Poyatos

J. Poyatos Amador

R. Raya Castellano

Motivación

- Ecuaciones diferenciales ordinarias.
- ¿Existe solución y es única?
- Métodos de discretización.
- Método de Euler.

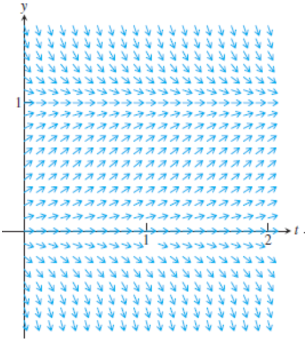


Figura: Representación del campo vectorial asociado a la ecuación logística $y'(t) = cy(t)(1 - y(t))$.

Motivación: Método de Euler

$$\begin{cases} w_0 = y_0 \\ h_i = t_{i+1} - t_i \\ w_{i+1} = w_i + h_i f(t_i, w_i) \end{cases} \tag{1}$$

Método de Euler

- Mejores resultados para puntos equidistantes.
- Es estable, consistente y convergente.
- El error global de aproximación es $O(h)$.
- Puede parecer válido en cualquier aplicación.

Motivación: Ejemplo

Considérese el siguiente problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} y'(t) = -4t^3y^2 \\ y(-10) = 1/10001 \\ t \in [-10, 0] \end{cases}$$

- La solución exacta es $y(t) = \frac{1}{1+t^4}$.
- Queremos calcular la aproximación de y en 0 con $y(0) = 1$.
- Se va a aproximar hasta llegar a los 10000 puntos.

Motivación: Ejemplo

N	h	w_n
100	0.1	0.00390138
1000	0.01	0.03085162
5000	0.002	0.13282140
7500	0.0013	0.18614311
10000	0.001	0.23325153

Tabla: Ejemplo de un mal comportamiento del método de Euler.

Motivación: Ejemplo

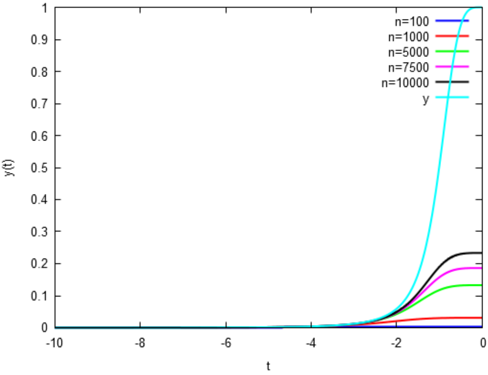


Figura: Aproximaciones obtenidas con diferentes valores de n.

Índice

Definiciones Previas

Definición

Dada una función $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *continua, una un problema de valores iniciales de primer orden consiste en encontrar aquellas funciones* $y : [a, b] \to \mathbb{R}$ *de clase 1 que verifiquen* $G(y) \subset \Omega$, $y'(t) = f(t, y(t))\ \forall t \in [a, b]$ *y la condición inicial* $y(t_0) = y_0$, *donde* $t_0 \in [a, b]$.

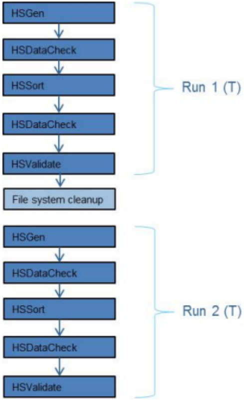
Definición

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *y sea* $f : \Omega \to \mathbb{R}$. *Se dice que* f *es lipschitziana respecto de la segunda variable,* y, *si existe una constante* $L \in \mathbb{R}^+$, *llamada constante de Lipschitz, de forma que* $|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$ *para cualquier par de puntos* $(t, y_1), (t, y_2) \in \Omega$.

Funcionamiento de TPCx-HS

Dos ejecuciones de cinco fases cada una.

- Fase 1: Generación de los datos.
  3-ways replication
- Fase 2: Verificación de la validez de los datos.
- Fase 3: Ordenación de los datos.
  3-ways replication
- Fase 4: Verificación de la validez de los datos.
- Fase 5: Validación de la salida



Rendimiento

Medida del rendimiento.

$$HSph@SF = \frac{SF}{T/3600}$$

Medida del rendimiento-precio.

$$\$/HSph@SF = \frac{P}{HSph@SF}$$

Parámetros:

- SF: factor de escala escogido.
- T: tiempo total de las dos ejecuciones.
- P: costo del sistema bajo estudio.

Introducción al método del trapecio

Proposición

Sea un PVI con $y'(t) = f(t, y(t))$ y $y(t_0) = y_0$. Son equivalentes:

1. *y es una solución del PVI.*
2. $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds \; \forall t \in [a, b]$

Nuestra solución verifica:

$$y(t_1) = y_0 + \int_{t_0}^{t_1} f(s, y(s)) \, ds$$

Introducción al método del trapecio

Idea: Método del trapecio para integración numérica

$$y(t_1) = y_0 + \frac{h}{2}\left[f(t_0, y_0) + f(t_1, y(t_1))\right] - \frac{h^3}{12} y^{3)}(\xi) \qquad (2)$$

Aproximación implicita

$$y(t_1) \approx w_1 = w_0 + \frac{h}{2}\left[f(t_0, w_0) + f(t_1, y(t_1))\right] \qquad (3)$$

¿Cómo cálcular la aproximación?

- **Método del trapecio explícito**
- **Método del trapecio implícito**

Método del trapecio explícito

Idea: Utilizar el método de Euler

$$y(t_{i+1}) \approx w'_{i+1} = w'_i + hf(t_i, w'_i))$$

$$+$$

$$y(t_{i+1}) \approx w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}\left[f(t_i, w_i) + f(t_{i+1}, y(t_{i+1}))\right]$$

Definición (*Método del trapecio explícito*)

$$y(t_{i+1}) \approx w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}\left[f(t_i, w_i) + f(t_i + h, w_i + hf(t_i, w_i))\right] \tag{4}$$

Método del trapecio explícito

Idea: Utilizar el método de Euler

$$y(t_{i+1}) \approx w'_{i+1} = w'_i + hf(t_i, w'_i))$$

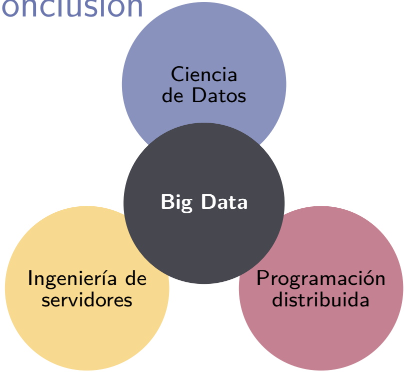
$$+$$

$$y(t_{i+1}) \approx w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}\left[f(t_i, w_i) + f(t_{i+1}, y(t_{i+1}))\right]$$

Definición (*Método del trapecio explícito*)

$$y(t_{i+1}) \approx w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}\left[f(t_i, w_i) + f(t_i + h, w_i + hf(t_i, w_i))\right] \tag{5}$$

Conclusión



- Nuevas tecnologías: Spark, Flink...
- Desarrollo y diseño de algoritmos
- Benchmarks para las nuevas tecnologías

> "Vivimos en la era de la información. El progreso y la innovación no se ve obstaculizado por la capacidad de recopilar datos sino por la capacidad de gestionar, analizar, sintetizar y descubrir el conocimiento subyacente en dichos datos. Este es el reto de las tecnologías de Big Data."
>
> Francisco Herrera Triguero, Prof. Universidad de Granada

Gracias por su atención.

Ilustración de Lola Moral y Sergio García