



# *Métodos Numéricos II*

## *Ecuaciones diferenciales ordinarias*

*Método del trapecio*

### **Resumen**

En este texto puedes incluir un resumen del documento. Este informa al lector sobre el contenido del texto, indicando el objetivo del mismo y qué se puede aprender de él.

**Andrés Herrera Poyatos**  
**Javier Poyatos Amador**  
**Rodrigo Raya Castellano**  
Universidad de Granada

## Índice

<b>1. Motivación: ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden</b>	<b>2</b>
<b>2. Definiciones y resultados previos.</b>	<b>3</b>
<b>3. Descripción del método del trapecio</b>	<b>6</b>
3.1. Método del trapecio explícito . . . . .	7
3.2. Método del trapecio iterativo . . . . .	8
<b>4. Estudio del error</b>	<b>8</b>
4.1. Método del trapecio explícito . . . . .	8
4.2. Método del trapecio iterativo . . . . .	8
<b>5. Convergencia y Estabilidad</b>	<b>9</b>
<b>6. Conclusión</b>	<b>9</b>

## 1. Motivación: ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

**Definición 1.1.** Dada una función  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  continua, un problema de valores iniciales de primer orden consiste en encontrar aquellas funciones  $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  de clase 1 que verifiquen  $G(y) \subset \Omega$ ,  $y'(t) = f(t, y(t)) \forall t \in [a, b]$  y la condición inicial  $y(a) = y_0$ .

De forma simplificada, un problema de valores iniciales se representa de la siguiente forma:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(a) = y_0 \\ t \in [a, b] \end{cases}$$

Resolver de forma exacta un problema de valores iniciales es muy difícil. Existen ecuaciones diferenciales como  $y'(t)^2 + y(t)^2 + 1 = 0$  de las cuales no se conoce una solución exacta. Sin embargo, sí se conocen múltiples resultados que permiten asegurar la existencia y unicidad de soluciones de la ecuación diferencial.

Uno de los objetivos de la teoría del Análisis Numérico en el campo de las ecuaciones diferenciales ordinarias es resolver de forma aproximada problemas de valores iniciales una vez se conoce la existencia y unicidad de soluciones. Para ello, una técnica habitual son los métodos de discretización **Desarrollar qué es un método de discretización** se toman  $n + 1$  puntos  $t_0, t_1, \dots, t_n \in [a, b]$  con  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  y se intenta aproximar la imagen de la solución del problema de valores iniciales en estos puntos. Es habitual denotar a las aproximaciones obtenidas  $w_i$  y al error de aproximación cometido  $e_i = y(t_i) - w_i$ .

La primera idea intuitiva para resolver este problema consiste en interpretar la primera ecuación como un campo vectorial aprovechando la definición de derivada como aproximación lineal de la función en un punto. Esto es,  $f$  le asigna a cada punto la dirección en la que varía cualquier solución del problema que pase por ese punto.

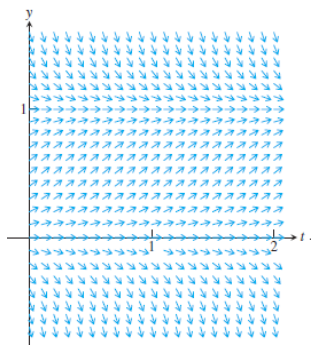


Figura 1: Representación del campo vectorial asociado a la ecuación logística  $y'(t) = cy(t)(1 - y(t))$ .

Si conocemos la imagen de la solución  $y$  en un punto  $t_{i-1}$ , entonces sabemos que en ese punto la función variará en la dirección dada por el campo vectorial comentado previamente. Nótese que esta es la dirección de la recta tangente a  $y$  en  $t_{i-1}$ . Podemos utilizar la imagen de esta recta tangente en  $t_{i+1}$  para aproximar  $y(t_{i+1})$ . Repitiendo el proceso para aproximar  $y(t_{i+2})$  a partir de  $w_{i+1}$ , se obtiene el método de Euler cuya expresión resumida es la siguiente:

$$\begin{cases} w_0 = y_0 \\ h_i = t_{i+1} - t_i \\ w_{i+1} = w_i + h_i f(t_i, w_i) \end{cases}$$

Los mejores resultados se obtienen mediante el uso de puntos equidistantes, esto es,  $h = \frac{b-a}{n}$  y  $t_i = a + ih \ \forall i = 0 \dots n$ . En el resto del texto se trabajará siempre con puntos equidistantes. El estudio del método de Euler concluye que el error de aproximación local es:

$$|y(t_n) - y_n| \leq \frac{Mh^2}{2}, \quad \forall [t_0, t_n]. \quad (1)$$

En cambio, el error global del método de Euler es:

$$|\tau_{n-1}| \leq \frac{Mh}{2}. \quad (2)$$

A priori, puede parecer que el método de Euler es válido en cualquier aplicación simplemente reduciendo el valor de  $h$ , esto es, aproximando un mayor número de puntos. Sin embargo, a continuación estudiaremos un ejemplo para el cual el método de Euler requiere una excesiva cantidad de puntos para obtener un error de aproximación aceptable.

### EJEMPLO DEL MÉTODO DE EULER

El objetivo de este trabajo es desarrollar un método de discretización para aproximar soluciones de problemas de valores iniciales que tenga un mayor orden de precisión que el método de Euler. Previamente, necesitamos conocer algunos resultados básicos sobre la existencia, unicidad y condicionamiento de las soluciones.

## 2. Definiciones y resultados previos.

**Teorema 2.1.** Sea  $f : [a, b] \times [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $y_0 \in (\alpha, \beta)$ . Entonces:

1. Si  $f$  es Lipschitz en  $[a, b] \times [\alpha, \beta]$ , entonces existe  $c \in [a, b]$  tal que el problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(a) = y_0 \\ t \in [a, c] \end{cases}$$

tiene exactamente una solución.

2. Si  $f$  es Lipschitz en  $[a, b] \times ]-\infty, \infty[$ , entonces existe exactamente una solución en  $[a, b]$

**Teorema 2.2.** (Condicionamiento) Sean dos soluciones  $y(t), z(t)$  de los problemas de valores iniciales con ecuación  $y'(t) = f(t, y(t))$  y condiciones iniciales  $y(a)$  y  $z(a)$ , respectivamente. Supongamos que  $f$  es de Lipschitz en  $[a, b] \times [\alpha, \beta]$ . Entonces  $|y(t) - z(t)| \leq e^{L(t-a)}|y(a) - z(a)|$  donde  $L$  es la constante de Lipschitz de  $f$ .

**Teorema 2.3.** Supongamos que  $f$  es continua y que satisface la condición de Lipschitz con la constante  $L$  en  $D = \{(t, y) | a \leq t \leq b, -\infty < y < \infty\}$  y que existe una constante  $M$  tal que  $|y''(t)| \leq M$ , para todo  $t \in [a, b]$ .

Denotemos con  $y(t)$  la solución única del problema de valores iniciales

$$y' = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha$$

y sean  $y_0, y_1, \dots, y_n$  las aproximaciones generadas con el método de Euler para algún entero positivo  $n$ . Entonces para cada  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ,

$$|y(t_i) - y_i| \leq \frac{hM}{2L} [e^{L(t_i-a)} - 1] \quad (3)$$

*Demostración.* Cuando  $i = 0$ , dicha desigualdad se cumple ya que  $y(x_0) = y_0 = \alpha$ .

Sabemos que, para cada  $i=1, \dots, n$

$$y(t_i) = y(t_{i-1}) + hf(t_{i-1}, y(t_{i-1})) + \frac{h^2}{2} y''(\xi_{i-1})$$

e

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i).$$

En consecuencia, tenemos

$$y(t_i) - y_i = y(t_{i-1}) - y_{i-1} + h[f(t_{i-1}, y(t_{i-1})) - f(t_{i-1}, y_{i-1})] + \frac{h^2}{2} y''(\xi_{i-1})$$

y

$$|y(t_i) - y_i| \leq |y(t_{i-1}) - y_{i-1}| + h|f(t_i, y(t_{i-1})) - f(t_{i-1}, y_{i-1})| + \frac{h^2}{2} y''(\xi_{i-1}).$$

Puesto que  $f$  satisface la condición de Lipschitz e  $|y''(t)| \leq M$ , tenemos

$$|y(t_i) - y_i| \leq (1 + hL)|y(t_{i-1}) - y_{i-1}| + \frac{h^2 M}{2}.$$

Aplicamos el lema anterior para  $a_j = |y(t_{i+1}) - y_{i+1}|$  para cada  $j = 0, 1, \dots, n$ ,  $s = hL$  y  $t = \frac{h^2 M}{2}$ , obteniendo

$$|y(t_i) - y_i| \leq e^{ihL}(|y(t_0) - y_0| + \frac{h^2 M}{2hL}) - \frac{h^2 M}{2hL} \quad (4)$$

Debido a que  $|y(t_0) - y_0| = 0$  e  $ih = t_i - t_0 = t_i - a$ , tenemos

$$|y(t_i) - y_i| \leq \frac{hM}{2L} (e^{(t_i-a)L} - 1),$$

para cada  $i = 1, \dots, n$  □

Para la demostración del método de Euler probaremos la consistencia y la estabilidad para concluir que es convergente.

**Teorema 2.4.** *El método de Euler converge para cualquier PVI donde  $f$  satisface la condición de Lipschitz y la solución  $y$  es  $C^2$ .*

*Demostración.* Por (4), probado en la demostración del error de truncamiento global, tenemos que:

$$|y(t_i) - y_i| \leq e^{ihL}|y(t_0) - y_0| + \frac{e^{ihL} - 1}{hL} \frac{h^2 M}{2} = e^{ihL}|y(t_0) - y_0| + \frac{e^{ihL} - 1}{L} \tau_{i-1} \leq$$

$$\leq^{TL} |y(t_0) - y_0| + \frac{e^{TL} - 1}{L} \max_{1 \leq i \leq n} |\tau_{i-1}|$$

para  $0 \leq t_i = ih + 0 \leq T$ , con  $\tau_i$  el residuo y asumiendo que  $y$  es  $C^2$  e  $|y''| \leq M$ . Esto muestra la *estabilidad*, es decir, errores en la solución numérica están acotadas independientemente del tamaño de paso.

Por (2),  $\tau_i$  satisface

$$|\tau_i| \leq \frac{hM}{2}$$

Esta condición se denomina *consistencia* (Control del residuo).

La consistencia da una cota local y la estabilidad nos permite concluir la *convergencia*:

$$|y(t_n) - y_n| \leq e^{LT} |y(t_0) - y_0| + \frac{e^{TL} - 1}{L} \frac{hM}{2}$$

□

Necesitamos también medir de algún modo cómo de bueno es el procedimiento utilizado para aproximar la solución del problema para ello se introduce la siguiente:

**Definición 2.1.** Sean  $w_i$  los valores estimados en los puntos  $t_i$  por cierto método de aproximación de las soluciones del problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(a) = y_a \\ t \in [a, b] \end{cases}$$

e  $y_i$  los valores exactos de la solución en los puntos  $t_i$ . Sea también  $z(t_i)$  el valor de la solución exacta al problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_i) = w_i \\ t \in [t_i, t_{i+1}] \end{cases}$$

Definimos:

- Error global de truncatura o error acumulado en el nodo  $i$ -ésimo:  $g_i = |w_i - y_i|$
- Error local de truncatura o error en un paso:  $e_{i+1} = |w_i - z(t_{i+1})|$

El error global cometido en cualquier paso puede verse entonces como la suma del error local y el error global acumulado o amplificado. Para el método de Euler los errores global y local pueden visualizarse fácilmente:

La relación entre errores locales y errores globales viene dada por el siguiente teorema:

**Teorema 2.5.** Si  $f$  es Lipschitz con constante  $L$ ,  $y_i$  son los valores de la solución a un problema de valores iniciales en puntos  $t_i$  en  $[a, b]$  y son aproximados por valores  $w_i$  mediante cierto método de aproximación con errores locales  $e_i \leq ch^{k+1}$  entonces  $g_i \leq \frac{ch^k}{L} (e^{L(t_i-a)} - 1)$  (1).

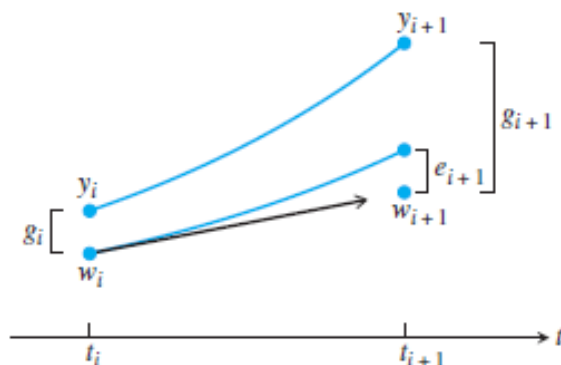


Figura 2: Error local y global cometido por el método de Euler

$t$	$y$	$\frac{dy}{dt} = y$	algo	algo2

Tabla 1: Ejemplo práctico del método de Euleeeeer???

**Definición 2.2.** Si un método verifica (1) cuando  $h \rightarrow 0$  entonces se dice que tiene orden  $k$ .

Veamos ya por qué se requieren métodos más precisos para conseguir una precisión razonable mediante una cantidad razonable de cálculos.

EJEMPLO 2.1: Considérese el siguiente problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y'(t) = -4t^3 y^2 \\ y(-10) = 1/10001 \\ t \in [-10, 0] \end{cases}$$

La solución exacta de este problema es  $y(t) = \frac{1}{1+t^4}$ . Sin embargo, la Tabla 1 muestra los resultados de aproximación obtenidos por el método de Euler en  $y(0)$  para distintos valores de  $h$ . Se observa que la aproximación obtenida deja mucho que desear a pesar de haber llegado a utilizar hasta un millón de puntos.

### 3. Descripción del método del trapecio

El método del trapecio se basa en la siguiente proposición:

**Proposición 3.1.** *Considérese el problema de valores iniciales dado por la ecuación diferencial  $y'(t) = f(t, y(t))$  sobre  $[a, b]$  y la condición  $y(t_0) = y_0$ . Entonces, son equivalentes:*

1.  *$y$  es una solución del problema de valores iniciales.*

2.  $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds \quad \forall t \in [a, b]$

*Demostración.* Es consecuencia directa del Teorema Fundamental del Cálculo.  $\square$

Utilizando la Proposición 3.1, si un PVI con condición inicial  $t_0 = a$ ,  $y(t_0) = y_0$  tiene solución única, entonces esta es la única solución de la siguiente ecuación

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) \, ds \quad (5)$$

En este contexto se pueden aplicar los métodos de integración numérica para aproximar la integral que aparece en la segunda igualdad. Para ello supóngase que  $f$  es diferenciable. En tal caso una obvia inducción concluye que  $y$  es de clase infinito. Por tanto, se puede utilizar la fórmula del trapecio para integración numérica, obteniendo la siguiente igualdad

$$y(t_1) = y_0 + \frac{h}{2} [f(t_0, y_0) + f(t_1, y(t_1))] - \frac{h^3}{12} y^{(3)}(\xi) \quad (6)$$

donde  $\xi \in [t_0, t_1]$ . Ignorando el último sumando se obtiene la aproximación dada en (7), que tiene error  $-\frac{h^3}{12} y^{(3)}(\xi)$ .

$$y(t_1) \approx w_1 = w_0 + \frac{h}{2} [f(t_0, w_0) + f(t_1, y(t_1))] \quad (7)$$

El problema reside en que para aproximar el valor de  $y$  en  $t_1$  se debe conocer previamente dicho valor. En este contexto se plantean dos soluciones diferentes obteniendo dos métodos, denominados método del trapecio explícito e iterativo respectivamente. En el resto del texto se desarrollan sendos métodos, proporcionando el error teórico cometido y resultados de convergencia y estabilidad.

### 3.1. Método del trapecio explícito

Recuérdese en este punto el método de Euler para ecuaciones diferenciales ordinarias que se comentó en la Sección 1. Denotemos  $w'_i$  a las aproximaciones obtenidas por este método. El valor de la solución en cada punto se aproxima a partir del anterior mediante la siguiente expresión:

$$y(t_{k+1}) \approx w'_{i+1} = w'_i + hf(t_i, w'_i)$$

Se comentó previamente que el problema de la aproximación (7) reside en que el valor a aproximar aparece en el segundo miembro de la expresión. Para solventar este hecho se puede utilizar la aproximación dada por el método de Euler en su lugar. De esta forma se obtiene la siguiente aproximación:

$$y(t_{k+1}) \approx w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2} [f(t_i, w_i) + f(t_i + h, w_i + hf(t_i, w_i))] \quad (8)$$

Sean  $S_L = hf(t_i, w_i)$  y  $S_R = hf(t_{i+1}, w'_{i+1})$ . El método de Euler obtiene  $(t_{i+1}, w'_{i+1})$  sumándole  $S_L$  a  $(t_i, w_i)$ . Por su parte, el método del trapecio explícito obtiene  $(t_{i+1}, w_{i+1})$  como  $(t_i, w_i)$  más la media de  $S_L$  y  $S_R$ . La Figura 3 muestra este hecho de forma visual.



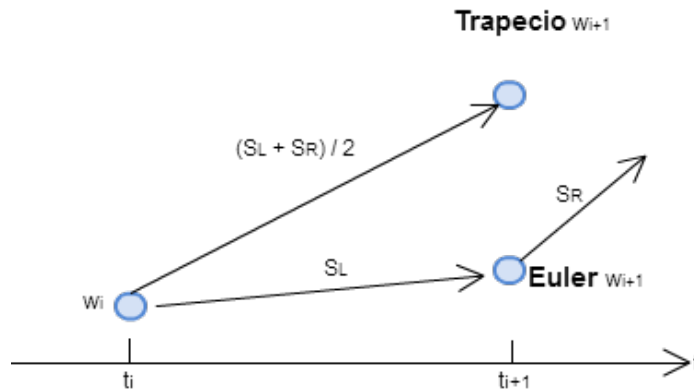


Figura 3: Esquema visual del método del trapecio explícito. **¡Pasar a Español!**

### 3.2. Método del trapecio iterativo

Supóngase que se han calculado los primeros  $i$  valores de  $y$  y se ha obtenido una aproximación inicial para cada  $t_i$ . Esta aproximación se denota  $w_i^{(0)}$ . Si la aproximación es buena, la expresión (7) sugiere evaluar el miembro de la derecha con  $w_i^{(0)}$  en lugar de  $y_i$  para obtener una nueva aproximación. De esta forma se define

$$w_i^{(j+1)} = y_{i-1} + \frac{h}{2} \left[ f(t_{i-1}, y_{i-1}) + f(t_i, w_i^{(j)}) \right] \quad (9)$$

La primera pregunta que surge es si la sucesión  $\{w_i^{(j)}\}$  converge. Este hecho se estudia en la Sección 4.2, donde se probará la convergencia bajo determinadas condiciones. En tal caso, se toma  $w_i = \lim w_i^{(j)}$  como aproximación de  $y_i$ . Se probará que el error cometido utilizando esta aproximación es  $O(h^3)$ .

La segunda cuestión a tratar es cómo aplicar el método para obtener la imagen de más de un punto. La idea es simple, utilizar la aproximación  $w_{i-1}$  como  $y_{i-1}$  en la expresión (9). De esta forma se obtiene el siguiente método

$$w_i^{(j+1)} = w_{i-1} + \frac{h}{2} \left[ f(t_{i-1}, y_{i-1}) + f(t_i, w_i^{(j)}) \right] \quad (10)$$

En tal caso se está cometiendo un nuevo error de aproximación.

## 4. Estudio del error

### 4.1. Método del trapecio explícito

### 4.2. Método del trapecio iterativo

El resultado del estudio de esta cuestión viene dado en la siguiente proposición.

**Proposición 4.1.** Si la función  $f$  es Lipschitziana en la segunda variable con constante de Lipschitz  $L$  y se verifica  $\frac{hL}{2} < 1$ , entonces la sucesión  $\{w_i^{(j)}\}$  converge cuando  $j \rightarrow +\infty$ . Denotando  $w_i = \lim w_i^{(j)}$ , se tiene además  $|y_i - w_i| = O(h^3)$ .

*Demostración.* La prueba se centra en comprobar que  $\{w_i^{(j)}\}$  es una sucesión de Cauchy. En primer lugar, se estudia  $\{w_i^{(j+1)} - w_i^{(j)}\}$ . Utilizando la condición de Lipschitz

$$\left|w_i^{(j+1)} - w_i^{(j)}\right| \leq \frac{h}{2} \left|f(t_i, w_i^{(j)}) - f(t_i, w_i^{(j-1)})\right| \leq \frac{hL}{2} \left|w_i^{(j)} - w_i^{(j-1)}\right| \leq \dots \leq \left(\frac{hL}{2}\right)^j \left|w_i^{(1)} - w_i^{(0)}\right|$$

Posteriormente se utiliza la desigualdad obtenida para conseguir acotar  $\left|w_i^{(j+q)} - w_i^{(j)}\right|$ .

$$\left|w_i^{(j+q)} - w_i^{(j)}\right| \leq \sum_{k=j}^{j+q} \left|w_i^{(k)} - w_i^{(k-1)}\right| \leq \sum_{k=j}^{j+q} \left(\frac{hL}{2}\right)^{k-1} \left|w_i^{(1)} - w_i^{(0)}\right| = \left|w_i^{(1)} - w_i^{(0)}\right| \sum_{k=j}^{j+q} \left(\frac{hL}{2}\right)^{k-1}$$

Como  $\frac{hL}{2} < 1$ , se tiene que la serie  $\sum_{j \geq 0} \left(\frac{hL}{2}\right)^j$  converge. Por consiguiente, es de Cauchy. Aplicando este hecho en la expresión previa se obtiene que  $\{w_i^{(j)}\}$  es una sucesión de Cauchy.

Nótese que tomando límites en (9) se obtiene la siguiente igualdad

$$w_i = y_{i-1} + \frac{h}{2} [f(t_{i-1}, y_{i-1}) + f(t_i, w_i)] \quad (11)$$

Por último, se estudia  $|y_i - w_i|$ . Restando las expresiones (6) y (11) se obtiene

$$\begin{aligned} |y_i - w_i| &= \left| \frac{h}{2} [f(t_i, y_i) - f(t_i, w_i)] - \frac{h^3}{12} y^{(3)}(\xi) \right| \leq \frac{h}{2} |f(t_i, y_i) - f(t_i, w_i)| + \frac{h^3}{12} |y^{(3)}(\xi)| \leq \\ &\quad \frac{hL}{2} |y_i - w_i| + \frac{h^3}{12} |y^{(3)}(\xi)| \end{aligned}$$

Por tanto, agrupando los  $|y_i - w_i|$  se tiene la siguiente desigualdad

$$|y_i - w_i| \leq \frac{2}{2 - hL} \frac{h^3}{12} |y^{(3)}(\xi)| = O(h^3)$$

□

## 5. Convergencia y Estabilidad

## 6. Conclusión