

Métodos Numéricos II (2015-2016)
DOBLE GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA

Método de Euler

M^a del Mar Alguacil Camarero
Melani Álvarez Santos
Montserrat Rodríguez Zamorano

11 de mayo de 2016

Índice

1. Introducción a los métodos numéricos	1
2. Descripción general de un problema de valores iniciales	1
3. Existencia y unicidad de solución	2
3.0.1. Ejemplo 1:	4
3.0.2. Ejemplo 2:	5
4. Método de Euler	6
4.1. Descripción e interpretación geométrica	6
4.1.1. Ejemplo 1	8
4.1.2. Ejemplo 2	12
4.2. Estudio del error y análisis de la convergencia del método	12
4.2.1. Estudio del error	12
4.2.2. Análisis de la convergencia	15
4.3. Descripción de las ventajas y desventajas del método	16
4.3.1. Ventajas	16
4.3.2. Desventajas	16
5. Ejercicios teórico-prácticos	16
5.0.3. Ejercicio 1	16
5.0.4. Ejercicio 2	17
5.1. Ejercicio 3:	18
5.2. Ejercicio 4:	18
6. Programación y ejercicios numéricos	19
7. Aplicación de la red neuronal de Legendre para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias	20
7.1. Ideas principales	20
7.1.1. Aprendizaje de la red neuronal	21
7.1.2. Algoritmo propuesto para la resolución de ecuaciones diferenciales .	21
7.2. Ejemplo	21

1. Introducción a los métodos numéricos

Con la expansión del uso de los ordenadores es imprescindible en cualquier disciplina en la que estén presentes las matemáticas la consideración del cálculo numérico. En muchos problemas del mundo físico, económico, etc. los modelos que explican estos fenómenos toman la forma de ecuaciones diferenciales. Pero en una gran cantidad de ocasiones la ecuación diferencial no se puede resolver de manera directa por lo que desde hace tiempo se han desarrollado teorías relativas a la resolución de ecuaciones por medio de métodos numéricos. Por tanto, la finalidad de los métodos numéricos es conocer de forma aproximada el valor de una solución de una ecuación diferencial dada.

Como acabamos de decir, los métodos numéricos proporcionan soluciones aproximadas de ecuaciones diferenciales. Es importante indicar que si se dan ciertas condiciones obtendremos una mejor aproximación. Estas condiciones están relacionadas con lo que llamamos convergencia del método. Es conveniente aclarar que antes hemos de asegurar que la ecuación diferencial tiene una única solución única.

Por la manera de ser contruidos salvo en casos excepcionales los métodos no dan la solución exacta. Salvando estos casos excepcionales, los métodos numéricos acarrean errores. Ya desde el inicio si estábamos modelizando algún fenómeno habremos cometido errores en las medidas, cometeremos más por la precisión de la máquina con la que estemos efectuando los cálculos y además, el propio del método. Por esta razón, es muy importante conocer si el método que se estudia es estable, es decir, saber si cambios pequeños en el enunciado del problema producen cambios igualmente pequeños en la solución. Si no se da esta condición, no podremos estar seguros de que nuestro método sea óptimo.

El objetivo de este trabajo es el de estudiar uno de los métodos numéricos más elementales para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias: el **método de Euler**. Aunque no se suele utilizar en la práctica, por su sencillez y buenos resultados es de los primeros en estudiarse en la resolución numérica de ecuaciones diferenciales.

2. Descripción general de un problema de valores iniciales

Una ecuación diferencial ordinaria es cualquier ecuación en que intervienen,

- una variable independiente, $t \in I \subset \mathbb{R}$, donde I es un intervalo abierto,
- una variable dependiente, $y = y(t) \in \mathbb{R}$,
- derivadas hasta un cierto orden respecto de la variable.

Escribiremos la ecuación ordinaria en la forma

$$f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0, \quad \forall t \in I \quad (2.1)$$

Definición 2.1. Se llama **orden de la ecuación** al mayor orden de derivación que aparece en la ecuación (2.1).

A continuación definimos el concepto de solución y de problema de valores iniciales.

Definición 2.2. Una **solución** de la ecuación (2.1) es una función $y(t)$ que cumple:

- $y(t)$ está definida en un intervalo abierto $I \subset \mathbb{R}$,
- $y(t) \in C^n(I)$
- Se verifica que

$$f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0, \quad \forall t \in I$$

Definición 2.3. Un **problema de valores iniciales** para una ecuación diferencial ordinaria dada en (2.1) de orden n consiste en determinar las soluciones de la ecuación que en el punto $t_0 \in I$ verifican

$$y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_0^1, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}. \quad (2.2)$$

A las condiciones dadas en (2.2) se les llama **condiciones iniciales**.

Se trata, pues, de resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)) = 0, & \forall t \in I \\ y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_0^1, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases} \quad (2.3)$$

Definición 2.4. Un p.v.i. está bien planteado, en el sentido de Hadamard, si:

1. existe solución,
2. es única, y
3. depende continuamente de los datos del problema.

A partir de ahora vamos a considerar solo problemas de valores iniciales de primer orden donde la ecuación esté dada en forma explícita, es decir, del tipo[1]:

$$\begin{cases} y' = f(t, y(t)), & \forall t \in I \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

3. Existencia y unicidad de solución

Previamente mostraremos el lema de Gronwald para poder demostrar el teorema de Picard de existencia y unicidad local.

Lema 3.1. Sea $\phi(t)$ una función continua no negativa tal que satisface

$$\phi(t) \leq N + M|t - t_0| + L \int_{t_0}^t \phi(x) dx \quad (3.1)$$

con $N, M \geq 0, L > 0$. Entonces

$$\phi(t) \leq Ne^{L(t-t_0)} + \frac{M}{L}(e^{L(t-t_0)} - 1) \quad (3.2)$$

Demostración: Sea $t > t_0$. Poniendo $\psi(t) = \int_{t_0}^t \phi(x)dx$, la desigualdad (3.1) se escribe

$$\psi'(t) - L\psi(t) \leq N + M(t - t_0).$$

Multiplicando por $e^{-L(t-t_0)}$ resulta

$$(\psi'(t) - L\psi(t))e^{-L(t-t_0)} = \frac{d}{dx}(\psi(t))e^{-L(t-t_0)} \leq (N + M(t - t_0))e^{-L(t-t_0)}$$

y si integramos entre t_0 y t , al ser $\psi(t_0) = 0$, se obtiene

$$\begin{aligned} \psi(t)e^{-L(t-t_0)} &\leq \frac{N}{L}(1 - e^{-L(t-t_0)}) + \frac{M}{L}(t - t_0)e^{-L(t-t_0)} - \frac{M}{L^2}(e^{-L(t-t_0)} - 1) \Leftrightarrow \\ \psi(t) &= \int_{t_0}^t \phi(x)dx \leq \frac{N}{L}(e^{-L(t-t_0)} - 1) + \frac{M}{L}(t - t_0) - \frac{M}{L^2}(e^{-L(t-t_0)} - 1) \end{aligned}$$

de modo que, sustituyendo en la desigualdad (3.1), se llega a la desigualdad (3.2). ■

El siguiente teorema garantiza la existencia y unicidad de la solución de un problema de valores iniciales.

Teorema 3.2. *Considérese el problema de valores iniciales*

$$\begin{cases} y' = f(t, y(t)), & \forall t \in I \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (3.3)$$

y sea el rectángulo $D = [t_0 - a, t_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] \subset \mathbb{R}^2$ (con $a, b > 0$). Si se verifican las siguientes dos condiciones:

1. $f(t, y)$ es una función continua en D .
2. $f(t, y)$ es una función lipschitziana en D , es decir, que para todo par de puntos $(t, y_1), (t, y_2) \in D$, existe una constante $L > 0$ tal que

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|,$$

entonces existe una única solución del problema (3.3), $y(t)$, definida en un cierto intervalo $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ (con $0 < \delta \leq a$).

Demostración: En primer lugar, obsérvese que, en virtud de la primera condición, $f(t, y)$ está acotada en D (por ser D compacto), luego $\exists M > 0$ tal que $|f(t, y)| \leq M$.

Teniendo esto en cuenta, la demostración (cuyos detalles se omiten) sigue los siguientes pasos:

1. El problema de valor inicial (3.3) puede formularse en forma de *ecuación integral*

$$y(x) = y_0 + \int_{t_0}^t f(x, y(x))dx. \quad (3.4)$$

ya que, integrando desde t_0 a t la ecuación del problema (3.3) escrita en la forma $\frac{dy}{dt} = f(t, y(t))$, se obtiene

$$y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^t f(x, y(x)) dx. \quad (3.5)$$

y como $y(t_0) = y_0$, de aquí se llega a la ecuación (3.5). Recíprocamente, derivando la ecuación integral se obtiene $y' = f(t, y(t))$ y, por otra parte, dicha ecuación, para $t = t_0$, cumple que $y(t_0) = y_0$.

2. Se define la sucesión funcional $\{y_n(t)\}$ ($n \in \{0\} \cup N$) como

$$\begin{aligned} y_0(t) &= y_0 \\ y_1(t) &= y_0 + \int_{t_0}^t f(x, y_0(x)) dx \\ &\vdots \\ y_2(t) &= y_0 + \int_{t_0}^x f(x, y_0(x)) dx \end{aligned}$$

cuyos elementos se denominan *iterantes de Picard*. Se demuestra que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(t) = y(t)$, y que la función límite está definida en el intervalo $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, siendo δ el menor de los números $a, b/M$.

3. Se prueba que $y(t)$ es solución de la ecuación (3.5).
4. Se prueba que esa es la única solución del problema ya que, si $z(t)$ fuera otra solución, llamando $\phi(t) = y(t) - z(t)$, se tendría

$$\begin{cases} \phi(t) &= |y(t) - z(t)| = \left| \int_{t_0}^t (f(x, y(x)) - f(x, z(x))) dx \right| \\ &\leq L \int_{t_0}^t |y(x) - z(x)| dx = L \int_{t_0}^t \phi(x) dx. \end{cases} \quad (3.6)$$

Aplicando el lema anterior con $N, M = 0$, de la desigualdad (3.6) se obtendría que $\phi(t) = 0$.

■ [2]

3.0.1. Ejemplo 1:

Consideremos el problema de valores iniciales

$$y' = 2y, y(0) = 1.$$

Por supuesto que este problema se podría resolver fácilmente por el método de ecuaciones lineales de primer orden, o por separación de variables. Nuestro objetivo aquí consiste en mostrar cómo funciona el método de Picard.

Primero observemos que el problema de valores iniciales planteado es equivalente a la ecuación integral

$$y(x) = 1 + \int_0^x 2y(t) dy$$

Encontramos que

$$y_{j+1}(x) = 1 + \int_0^x 2y_j(t)dt$$

Si empleamos $y_0 \equiv 1$, entonces tenemos que

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x 2dt = 1 + 2x$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x 2(1 + 2t)dt = 1 + 2x + 2x^2$$

$$y_3(x) = 1 + \int_0^x 2(1 + 2t + 2t^2)dt = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4x^3}{3}$$

En general, hallamos que

$$y_j(x) = 1 + 2x + 2x^2 + \frac{4x^3}{3} + \dots + \frac{(2x)^j}{j!} = \sum_{l=0}^j \frac{(2x)^l}{l!}$$

Resulta evidente que éstas son las sumas parciales del desarrollo en serie de potencias de $y = e^{2x}$. Concluimos que la solución a nuestro problema de valores iniciales es $y = e^{2x}$.

3.0.2. Ejemplo 2:

Apliquemos el método de Picard para resolver el problema de valores iniciales

$$y' = 2x - y, y(0) = 1.$$

La ecuación integral equivalente es

$$y(x) = 1 + \int_0^x [2t - y(t)]dt$$

Tenemos entonces que

$$y_{j+1}(x) = 1 + \int_0^x [2t - y_j(t)]dt$$

Tomando $y_0(x) \equiv 1$, vemos que

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x (2t - 1)dt = 1 + x^2 - x$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x (2t - [1 + t^2 - t])dt = 1 + \frac{3x^2}{2} - x - \frac{x^3}{3},$$

$$y_3(x) = 1 + \int_0^x (2t - [1 + \frac{3t^2}{2} - t - \frac{t^3}{3}])dt = 1 + \frac{3x^2}{2} - x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{43},$$

$$y_4(x) = 1 + \int_0^x (2t - [1 + \frac{3t^2}{2} - t - \frac{t^3}{2} + \frac{t^4}{43}])dt = 1 + \frac{3x^2}{2} - x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{42} - \frac{x^5}{543}$$

En general, hallamos que

$$\begin{aligned}
 y_j(x) &= 1 - x + \frac{3x^2}{2!} - \frac{3x^3}{3!} + \frac{3x^4}{4!} - \dots + (-1)^j \frac{3x^j}{j!} + (-1)^{j+1} \frac{2x^{j+1}}{(j+1)!} \\
 &= [2x - 2] + 3 \left[\sum_{l=0}^j (-1)^l \frac{x^l}{l!} \right] + (-1)^{j+1} \frac{2x^{j+1}}{(j+1)!} \\
 &= [2x - 2] + 3 \left[\sum_{l=0}^j \frac{(-x)^l}{l!} \right] + (-1)^{j+1} \frac{2x^{j+1}}{(j+1)!}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, vemos que las iteraciones $y_j(x)$ convergen a la solución $y(x) = [2x - 2] + 3e^{-x}$ para el problema de valores iniciales.

4. Método de Euler

El **método de Euler** tiene por objetivo obtener una aproximación del problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} y' = f(t, y) & t \in (a, b) \\ y(a) = y_0 \end{cases} \quad (4.1)$$

Suponemos que es un problema bien planteado, y que por tanto tiene una única solución que queremos aproximar. El objetivo es obtener una sucesión de valores $\{y_0, y_1, y_2, \dots, y_n\}$ que aproximen a los valores reales $\{y(t_0), y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_n)\}$ de la solución $y(t)$ evaluada en los puntos $\{a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b\}$.

Las aproximaciones y_1, y_2, \dots las vamos a calcular mediante un proceso iterativo. La pregunta que nos hacemos es: asumiendo que hemos encontrado los valores y_1, y_2, \dots, y_n , ¿cómo podemos encontrar el valor y_{n+1} ? Así es como funciona el método el Euler.

4.1. Descripción e interpretación geométrica

Para analizar este método, se pueden utilizar dos puntos de vista distintos:

- Punto de vista geométrico, utilizando la idea de recta tangente.
- Utilizando el desarrollo de Taylor. Este método además permite analizar el error cometido.

El método de Euler tiene una sencilla interpretación geométrica: la idea es aproximar la curva solución $y(t)$ de la ecuación diferencial por una **poligonal** que se construye de la siguiente forma:

Partimos de $(t_0, y(t_0))$. Si $y'(t_0) = f(t_0, y(t_0))$, esto quiere decir que $y'(t_0)$ es la pendiente de la recta tangente a la curva solución en el punto $(t_0, y(t_0))$. Con esta idea en mente construimos la recta tangente en dicho punto ésta tiene por ecuación:

$$y - y_0 = f(t_0, y_0)(t - t_0).$$

Si t_1 está muy próximo a t_0 entonces el valor de la recta tangente en t_1 y el de la curva solución en dicho punto serán muy parecidos. Por tanto calculamos y_1 que es el valor de la recta tangente en el punto t_1 :

$$y_1 = y_0 + f(t_0, y_0)(t_1 - t_0).$$

Tomamos y_1 como el segundo valor de la sucesión que buscamos. Este valor es una aproximación de $y(t_1)$. De esta forma hemos construido el segmento, T_1 que une los puntos $(t_0, y(t_0))$ y $(t_1, y(t_1))$. Ahora repetimos el mismo proceso descrito anteriormente tomando como punto de partida (t_1, y_1) . Obtenemos el punto (t_2, y_2) y así sucesivamente.

Habremos obtenido una sucesión de segmentos, T_i , $i = 1, \dots, n$ que forman una **poligonal** que representa la aproximación de la solución $y(t)$ del p.v.i. . Intuitivamente parece que cuanto más próximos estén entre sí los puntos t_0, t_1, t_2, \dots mejor aproximación tendremos. Para ello, haremos un estudio en la Sección 4.2 del error que se comete al tomar y_n en lugar de $y(t_n)$. (Ver [3])

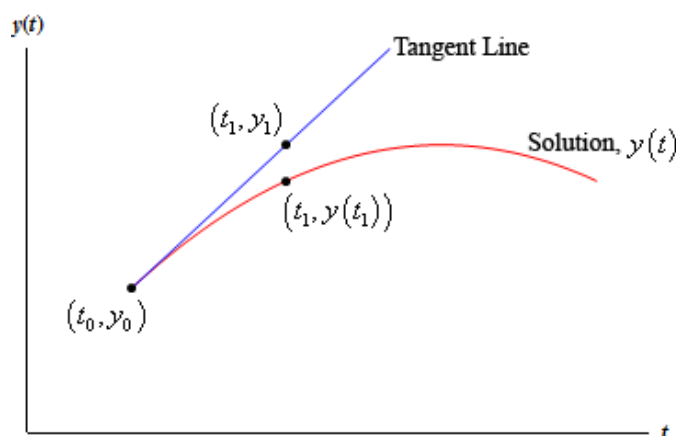


Figura 4.1: Interpretación geométrica del método de Euler [?]

Abordamos el método utilizando esta vez un punto de vista analítico. Se quiere obtener una aproximación del problema de valores iniciales (4.1) que escribimos de nuevo:

$$\begin{cases} y' = f(t, y) & t \in (a, b) \\ y(a) = y_0. \end{cases}$$

Es importante tener en cuenta que este método no genera una aproximación continua a la solución, sino aproximaciones en varios valores en el intervalo $[a, b]$. Estos valores recibirán el nombre de **nodos**. Una vez obtenida la aproximación en los nodos, la solución aproximada en otros puntos del intervalo se podrá obtener por interpolación.

Por simplicidad, consideraremos que los puntos de red tienen una distribución uniforme en el intervalo, esto es, están equiespaciados.

$$t_i = a + ih, \quad \text{para cada } i = 0, 1, 2, \dots, n$$

donde la distancia $h = (b - a)/n$ recibe el nombre de **tamaño de paso** o **longitud de paso**.

Utilizamos el polinomio de Taylor de primer orden para la función solución del p.v.i. $y(t)$.

$$y(t) = y(t_i) + (t - t_i)y'(t_i) + \frac{(t - t_i)^2}{2}y''(\xi)$$

donde $\xi \in (a, b)$ y $\frac{(t - t_i)^2}{2}y''(\xi)$ es el término de error. Como t_{i+1} está “cerca” de t_i podemos evaluar la expresión anterior en t_{i+1} :

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + (t_{i+1} - t_i)y'(t_i) + \frac{(t_{i+1} - t_i)^2}{2}y''(\xi_i)$$

para algún número ξ_i en (t_i, t_{i+1}) . Como se ha supuesto que los nodos están equiespaciados con paso h :

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hy'(t_i) + \frac{h^2}{2}y''(\xi_i)$$

y por ser $y(t)$ la solución del p.v.i, satisface 4.1, con lo que sustituyendo el valor de $y'(t_i)$

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hf(t_i, y(t_i)) + \frac{h^2}{2}y''(\xi_i).$$

Si prescindimos del término $\frac{h^2}{2}y''(\xi_i)$ que en principio no será nulo:

$$y(t_{i+1}) \approx y(t_i) + hf(t_i, y(t_i))$$

siendo el $\frac{h^2}{2}y''(\xi_i)$ el error cometido. Hemos construido de nuevo el método de Euler para obtener la aproximación $y_i \approx y(t_i)$. Por supuesto esto lo podemos hacer para cada $i = 1, 2, \dots, n$

$$\begin{cases} y_i = y_0 \\ y_{i+1} = y_i + hf(t_i, w_i) \text{ para cada } i = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases} \quad (4.2)$$

A ésta última ecuación se le llama **ecuación en diferencias** asociada al método de Euler. [3] [4]

Observación: Si $\frac{h^2}{2}y''(t) = 0$ no generamos error. Es decir si la solución es una recta no hay error y el método es exacto. Esto tiene sentido por la propia construcción del método.

4.1.1. Ejemplo 1

Comenzamos con un ejemplo sencillo, utilizando la interpretación geométrica del método. Consideremos el problema de valores iniciales

$$\frac{dy}{dt} = y, \quad y(0) = 1 \quad (4.3)$$

La solución de este problema, dadas estas condiciones iniciales, es $y(x) = e^x$. Se trata de una ecuación en variables separadas, que puede resolverse de manera exacta. No obstante, se utilizará el método de Euler para aproximar dicha solución y observar su convergencia.

Para facilitar los cálculos, se construye una tabla con columnas, que se irá rellenando conforme se avance en la construcción de la solución aproximada:

variable independiente t	variable dependiente y	$\frac{dy}{dt}$
...

Comenzamos con la condición inicial: sabemos que la solución del problema (4.3) pasa por el punto, $(0, 1)$. Lo anotamos en nuestra tabla. Por otra parte, sabemos que la derivada de cualquier punto que pertenezca a la solución será igual al valor de la variable dependiente. En este punto, nuestra tabla tendrá el siguiente aspecto:

t	y	$\frac{dy}{dt} = y$
0	1	1

La pendiente en ese punto es $\frac{dy}{dt} = 1$, y muy probablemente irá variando, pero suponemos esa pendiente fija hasta el siguiente punto. Para comprender el funcionamiento del método supondremos $h = 1$, aunque con un tamaño de paso tan grande no se pueden esperar aproximaciones demasiado buenas, como se podrá ver en la gráfica 4.2. Reduciremos el tamaño de paso posteriormente para buscar una mejor aproximación.

Tomamos ahora $x = 1$ y calculemos el valor de y . Como se ha supuesto que la pendiente hasta este punto es fija e igual a 1, usando la ecuación de la recta tangente, y será igual a 2, y entonces la pendiente de la recta tangente en ese punto será igual a 2.

Repitiendo este proceso algunas veces más obtenemos la siguiente tabla:

t	y	$\frac{dy}{dt}$
0	1	1
1	2	2
2	4	4
3	8	8
...

Una vez se ha mostrado como funciona el método, buscamos obtener una aproximación mejor de la solución. Tomamos ahora $h = 0,333$ y calculemos el valor de y_1 . Como se ha supuesto que la pendiente hasta este punto es fija e igual a 1, usando la ecuación de la recta tangente, y será igual a 1,333, y entonces la pendiente de la recta tangente en ese punto será igual a 1.3333.

Obtenemos la siguiente tabla:

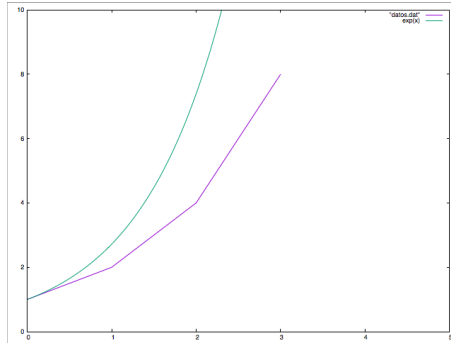


Figura 4.2: Aproximación obtenida utilizando las tangentes en cada punto

t	y	$\frac{dy}{dt}$
0	1	1
0.3333	1.3333	1.3333
0.6667	1.7778	1.7778
1.0000	2.3704	2.3704

En $t = 1$, hemos obtenido un valor de 2.3704 que es una aproximación de e puesto que recordemos que la solución exacta era $y(t) = e^t$.

Tomamos ahora $h = 0,2$ y veamos si mejoramos la aproximación:

t	y	$\frac{dy}{dt}$
0	1	1
0.2000	1.2000	1.2000
0.4000	1.4400	1.4400
0.6000	1.7280	1.7280
0.8000	2.0736	2.0736
1.0000	2.4883	2.4883

Igual que antes $t = 1$, hemos obtenido un valor de 2.4883 que es una aproximación mejor que la anterior.

Por último si tomamos $h = 0,1$

t	y	$\frac{dy}{dt}$
0	1	1
0.1000	1.1000	1.1000
0.2000	1.2100	1.2100
0.3000	1.3310	1.3310
0.4000	1.4641	1.4641
0.5000	1.6105	1.6105
0.6000	1.7716	1.7716
0.7000	1.9487	1.9487
0.8000	2.1436	2.1436
0.9000	2.3579	2.3579
1.0000	2.5937	2.5937

Observamos que la aproximación de e es ahora de 2.5937.

A continuación mostramos las figuras de con la solución exacta y la aproximada de los tres últimos casos así como una comparativa entre ellas.

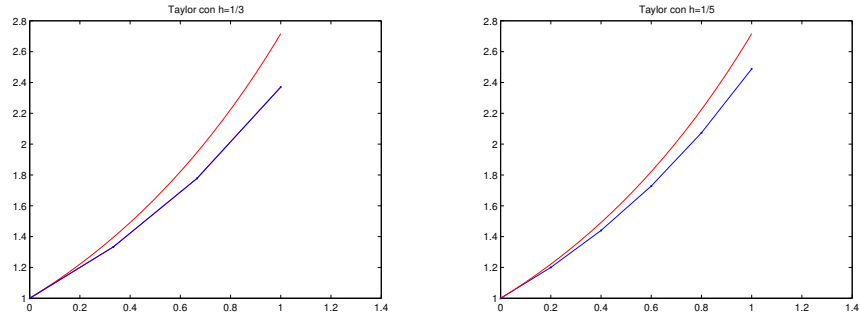


Figura 4.3: Método de Taylor para resolver $y' = y, y(0) = 1$, con $h = \frac{1}{3}$ y $h = \frac{1}{5}$

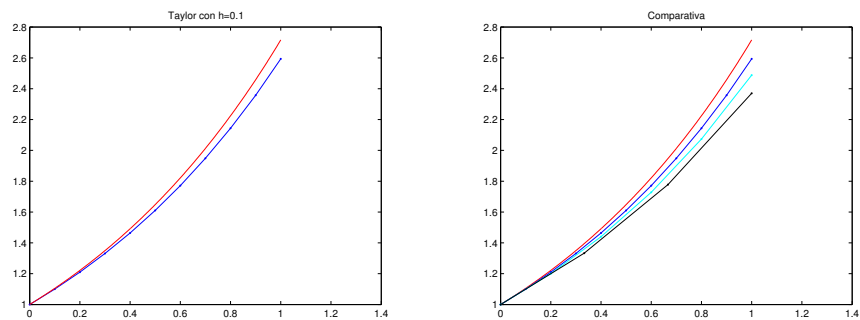


Figura 4.4: Método de Taylor para resolver $y' = y, y(0) = 1$, con $h = \frac{1}{10}$ y comparativa entre las tres aproximaciones

4.1.2. Ejemplo 2

Utilizamos el método de Euler para aproximar la solución del problema de valores iniciales

$$\frac{dy}{dt} = t^2 + y^2, \quad y(0) = 1$$

en el intervalo $[0,1]$.

Esta vez utilizamos directamente la fórmula iterativa que se obtuvo a partir del desarrollo de Taylor de primer orden, que recordamos, era la siguiente:

$$\begin{cases} y_i = y_0 \\ y_{i+1} = y_i + hf(t_i, w_i) \end{cases} \text{ para cada } i = 0, 1, \dots, n-1 \quad (4.4)$$

En este caso $f(t, y) = t^2 + y^2$, de tal forma que

$$y_{n+1} = y_n + h(t_n^2 + y_n^2)$$

Esta vez tomamos directamente un tamaño de peso más pequeño. Con $h = 0,1$ se obtiene

$$y_1 = 1 + (0,1)[(0)^2 + (1)^2] = 1,1$$

$$y_2 = 1,1 + (0,1)[(0,1)^2 + (1,1)^2] = 1,222$$

$$y_3 = 1,222 + (0,1)[(0,2)^2 + (1,222)^2] = 1,3753284$$

y así en adelante. Obtenemos los siguientes valores hasta calcular los 10 primeros valores:

$$y_4 = 1,573481220784656$$

$$y_5 = 1,837065536000854$$

$$y_6 = 2,199546514357064$$

$$y_7 = 2,719347001239095$$

$$y_8 = 3,507831812553902$$

$$y_9 = 4,802320215070421$$

$$y_{10} = 7,189548159877822$$

4.2. Estudio del error y análisis de la convergencia del método

4.2.1. Estudio del error

Los métodos numéricos sólo proporcionan resultados aproximados. Por tanto, debemos tener en cuenta la inexactitud que se puede producir debido a los **errores de redondeo**, que son consecuencia del hecho de que cualquier calculadora u ordenador puede representar cifras con un número finito de dígitos, y a los **errores del algoritmo empleado**, que son los que estudiaremos en esta sección.

En la sucesión de valores y_1, y_2, \dots generados al emplear el método de Euler, normalmente el valor de y_n no concuerda con la solución real en t_n , es decir, con $y(t_n)$, porque el algoritmo sólo da una aproximación de línea recta a la solución. A este error se le llama **error de truncamiento local, error de fórmula o error de discretización**. Y al *error de discretización local en el n -ésimo paso* se define como $y(t_n) - y_n$ donde $y(t_n)$ es el valor exacto en t_n de la solución de la ecuación diferencial e y_n es la aproximación de Euler. De hecho, podemos utilizar la fórmula de Taylor para obtener una aproximación de este error

$$y(t_n) = y(t_{n-1} + h) = y(t_{n-1}) + hy'(t_{n-1}) + \frac{h^2}{2}y''(\xi_{n-1})$$

para algun $\xi \in (t_{n-1}, t_{n-1} + h)$.

Y, por lo antes visto,

$$y_n = y_{n-1} + hf(t_{n-1}, y_{n-1}).$$

Suponiendo que el valor aproximado anterior es exacto, es decir, $y_{n-1} = y(t_{n-1})$, podemos concluir que

$$y(t_n) - y_n = \frac{h^2}{2}y''(\xi_{n-1}).$$

Y si $|y''(t)|$ está acotada en $[t_0, t_n]$, es decir, $y''(t) \leq M$ entonces

$$|y(t_n) - y_n| \leq \frac{Mh^2}{2}, \quad \forall [t_0, t_n]. \quad (4.5)$$

También debemos tener en cuenta el **error total de discretización o error de truncamiento global**, es decir, el total de errores de todas las etapas del proceso de aproximación ya que el análisis anterior se supone que y_n fue exacto en el cálculo y_{n-1} pero no lo es ya que contiene errores de truncamiento local de los pasos anteriores. Por tanto,

$$y(t_n) - y_n = (y(t_{n-1}) - y_{n-1}) + h[f(t_{n-1}, y(t_{n-1})) - f(t_{n-1}, y_{n-1})] + h\tau_{n-1} \quad (4.6)$$

con $\tau_{n-1} = \frac{h}{2}y''(\xi_{n-1})$.

Luego, si $|y''(t)| \leq M \forall t \in [t_0, t_n]$,

$$|\tau_{n-1}| \leq \frac{Mh}{2}. \quad (4.7)$$

Antes de mostrar una posible acotación enunciamos un lema que se empleará en el estudio del error introducido al usar una fórmula o algoritmo para aproximar los valores de la solución.

Lema 4.1. Si s y t son números reales positivos, $\{a_i\}_{i=0}^k$ es una sucesión que satisface $a_0 \geq -t/s$, y

$$a_{i+1} \leq (1 + s)a_i + t, \text{ para cada } i = 0, 1, 2, \dots, k, \quad (4.8)$$

entonces

$$a_{i+1} \leq e^{(i+1)s} \left(a_0 + \frac{t}{s} \right) - \frac{t}{s}$$

Seguidamente estudiaremos una cota del error producido en el método de Euler.

Teorema 4.2. *Supongamos que f es continua y que satisface la condición de Lipschitz con la constante L en $D = \{(t, y) | a \leq t \leq b, -\infty < y < \infty\}$ y que existe una constante M tal que $|y''(t)| \leq M$, para todo $t \in [a, b]$.*

Denotemos con $y(t)$ la solución única del problema de valores iniciales

$$y' = f(t, y), \quad a \leq t \leq b, \quad y(a) = \alpha$$

y sean y_0, y_1, \dots, y_n las aproximaciones generadas con el método de Euler para algún entero positivo n . Entonces para cada $i = 0, 1, 2, \dots, n$,

$$|y(t_i) - y_i| \leq \frac{hM}{2L} [e^{L(t_i-a)} - 1] \quad (4.9)$$

Demostración: Cuando $i = 0$, dicha desigualdad se cumple ya que $y(x_0) = y_0 = \alpha$.

Sabemos que, para cada $i=1, \dots, n$

$$y(t_i) = y(t_{i-1}) + hf(t_{i-1}, y(t_{i-1})) + \frac{h^2}{2}y''(\xi_{i-1})$$

e

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i).$$

En consecuencia, tenemos

$$y(t_i) - y_i = y(t_{i-1}) - y_{i-1} + h[f(t_{i-1}, y(t_{i-1})) - f(t_{i-1}, y_{i-1})] + \frac{h^2}{2}y''(\xi_{i-1})$$

y

$$|y(t_i) - y_i| \leq |y(t_{i-1}) - y_{i-1}| + h|f(t_i, y(t_{i-1})) - f(t_{i-1}, y_{i-1})| + \frac{h^2}{2}y''(\xi_{i-1}).$$

Puesto que f satisface la condición de Lipschitz e $|y''(t)| \leq M$, tenemos

$$|y(t_i) - y_i| \leq (1 + hL)|y(t_{i-1}) - y_{i-1}| + \frac{h^2M}{2}.$$

Aplicamos el lema anterior para $a_j = |y(t_{i+1}) - y_{i+1}|$ para cada $j = 0, 1, \dots, n$, $s = hL$ y $t = \frac{h^2M}{2}$, obteniendo

$$|y(t_i) - y_i| \leq e^{ihL}(|y(t_0) - y_0| + \frac{h^2M}{2hL}) - \frac{h^2M}{2hL} \quad (4.10)$$

Debido a que $|y(t_0) - y_0| = 0$ e $ih = t_i - t_0 = t_i - a$, tenemos

$$|y(t_i) - y_i| \leq \frac{hM}{2L}(e^{(t_i-a)L} - 1),$$

para cada $i = 1, \dots, n$

■

Según las cotas obtenidas en los errores de truncamiento, cuando el tamaño de paso h disminuye, deberá haber mayor exactitud en las aproximaciones. Pero esto no es cierto ya que no se ha tenido en cuenta el efecto que el error de redondeo ejerce sobre la elección del tamaño de paso. Conforme decrece h , se requieren más cálculos y se puede predecir un mayor error de redondeo. [4, 5]

4.2.2. Análisis de la convergencia

En este apartado, nos centraremos en la convergencia del algoritmo de Euler, pero antes definiremos la convergencia de un método.

Un método que resuelve el problema de valores iniciales se dice **convergente** si la solución numérica y_n satisface

$$\max_{0 \leq t_n \leq T} |y(t_n) - y_n| \rightarrow 0 \quad (4.11)$$

cuando $h \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) y $y_0 \rightarrow y(t_0)$. Tiene orden de precisión p si

$$\max_{0 \leq t_n \leq T} |y(t_n) - y_n| = O(h^p) + O(|y(t_0) - y_0|) \quad (4.12)$$

cuando $h \rightarrow 0$ y $y_0 \rightarrow y(t_0)$.

Comprobaremos, para el método de Euler, que a medida que el tamaño de paso disminuye y la precisión de los valores de partida aumenta, la solución numérica se aproxima a la solución exacta en todo el intervalo $[0, T]$.

Para la demostración del método de Euler probaremos la consistencia y la estabilidad para concluir que es convergente.

Teorema 4.3. *El método de Euler converge para cualquier PVI donde f satisface la condición de Lipschitz y la solución y es C^2 .*

Demostración Por (4.10), probado en la demostración del error de truncamiento global, tenemos que:

$$\begin{aligned} |y(t_i) - y_i| &\leq e^{ihL} |y(t_0) - y_0| + \frac{e^{ihL} - 1}{hL} \frac{h^2 M}{2} = e^{ihL} |y(t_0) - y_0| + \frac{e^{ihL} - 1}{L} \tau_{i-1} \leq \\ &\leq^{TL} |y(t_0) - y_0| + \frac{e^{TL} - 1}{L} \max_{1 \leq i \leq n} |\tau_{i-1}| \end{aligned}$$

para $0 \leq t_i = ih + 0 \leq T$, con τ_i el residuo y asumiendo que y es C^2 e $|y''| \leq M$. Esto muestra la *estabilidad*, es decir, errores en la solución numérica están acotadas independientemente del tamaño de paso.

Por (4.7), τ_i satisface

$$|\tau_i| \leq \frac{hM}{2}$$

Esta condición se denomina *consistencia* (Control del residuo).

La consistencia da una cota local y la estabilidad nos permite concluir la *convergencia*:

$$|y(t_n) - y_n| \leq e^{LT} |y(t_0) - y_0| + \frac{e^{TL} - 1}{L} \frac{hM}{2}$$

■ [6]

4.3. Descripción de las ventajas y desventajas del método

Las ventajas e inconvenientes de utilizar éste método frente a otros métodos de resolución numérica se desprenden de la información recogida hasta el momento.

4.3.1. Ventajas

- En muy simple, por lo que tiene un gran interés desde el punto de vista didáctico.
- Es convergente.
- Su estudio cuidadoso nos lleva a profundizar en el manejo de métodos exactos, porque muchos de los más recientes no son más que extensiones o refinamientos del método de Euler.

4.3.2. Desventajas

- Con un tamaño de paso demasiado grande las aproximaciones inherentes al método de Euler pueden no ser suficientemente exactas, mientras que si h es demasiado pequeño, entonces los errores de redondeo pueden acumularse a un grado inaceptable, o el programa puede requerir mucho tiempo para ejecutarse.
- El procedimiento no siempre es estable. Si se intenta aproximar una solución en un intervalo donde ésta no existe o donde no es única, no se puede predecir el camino que seguirán las aproximaciones.
- Tiene errores grandes, sobre todo cuando la pendiente instantánea, es decir, la función $f(t,y)$ cambia dentro de t .
- Aunque el método converge, lo hace muy lentamente.

5. Ejercicios teórico-prácticos

5.0.3. Ejercicio 1

Considere que una pelota de beisbol se deja caer desde un helicóptero. Su velocidad $v(t)$ después de t segundos satisface el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = 32 - 0,16v, v(0).$$

Utilice el método de Euler con $h = 1$ para seguir la trayectoria de la velocidad en aumento de la bola en intervalos de 1 segundo para los primeros 10 segundos de caída. [7]

Solución: Con $t_0 = 0$, $v_0 = 0$, $F(t,v) = 32 - 0,16v$ y $h = 1$, la fórmula iterativa llega a lo siguientes valores aproximados

$$v_1 = v_0 + h[32 - 0,16v_0] = (0) + (1)[32 - 0,16(0)] = 32,$$

$$v_2 = v_1 + h[32 - 0,16v_1] = (32) + (1)[32 - 0,16(32)] = 58,88,$$

$$\begin{aligned}
v_3 &= v_2 + h[32 - 0,16v_2] = (58,88) + (1)[32 - 0,16(58,88)] \approx 81,46, \\
v_4 &= v_3 + h[32 - 0,16v_3] = (81,46) + (1)[32 - 0,16(81,46)] \approx 100,43, \\
v_5 &= v_4 + h[32 - 0,16v_4] = (100,43) + (1)[32 - 0,16(100,43)] \approx 116,36.
\end{aligned}$$

5.0.4. Ejercicio 2

Aplicar el método de Euler para aproximar la solución del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = t + \frac{1}{5}y, y(0) = -3$$

(a) primero con tamaño de paso $h = 1$ en el intervalo $[0, 5]$.

(b) después con tamaño de paso $h = 0,2$ en el intervalo $[0, 1]$. [7]

Solución: (a) Con $t_0 = 0, y_0 = -3, f(t, y) = t + \frac{1}{5}yh = 1$, la fórmula iterativa nos lleva a los siguientes valores aproximados

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + h[t_0 + \frac{1}{5}y_0] = (-3) + (1)[0 + \frac{1}{5}(-3)] = -3,6, \\
y_2 &= y_1 + h[t_1 + \frac{1}{5}y_1] = (-3,6) + (1)[1 + \frac{1}{5}(-3,6)] = -3,32, \\
y_3 &= y_2 + h[t_2 + \frac{1}{5}y_2] = (-3,32) + (1)[2 + \frac{1}{5}(-3,32)] = -1,984, \\
y_4 &= y_3 + h[t_3 + \frac{1}{5}y_3] = (-1,984) + (1)[3 + \frac{1}{5}(-1,984)] = 0,6192, \\
y_5 &= y_4 + h[t_4 + \frac{1}{5}y_4] = (0,6192) + (1)[4 + \frac{1}{5}(0,6192)] \approx 4,7430
\end{aligned}$$

en los puntos $t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = 3, t_4 = 4, t_5 = 5$. Nótese cómo los resultados de cada cálculo se alimentan del siguiente. (b) Iniciando nuevamente con $t_0 = 0, y_0 = -3, f(t, y) = t + \frac{1}{5}y$ y $h = 0,2$, se obtienen los valores aproximados

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + h[t_0 + \frac{1}{5}y_0] = (-3) + (0,2)[0 + \frac{1}{5}(-3)] = -3,6, \\
y_2 &= y_1 + h[t_1 + \frac{1}{5}y_1] = (-3,12) + (0,2)[0,2 + \frac{1}{5}(-3,12)] \approx -3,205, \\
y_3 &= y_2 + h[t_2 + \frac{1}{5}y_2] = (-3,205) + (0,2)[0,4 + \frac{1}{5}(-3,205)] \approx -3,253, \\
y_4 &= y_3 + h[t_3 + \frac{1}{5}y_3] = (-3,353) + (0,2)[0,6 + \frac{1}{5}(-3,253)] \approx -3,263, \\
y_5 &= y_4 + h[t_4 + \frac{1}{5}y_4] = (-3,263) + (0,2)[0,8 + \frac{1}{5}(-3,263)] \approx -3,234
\end{aligned}$$

en los puntos $t_1 = 0,2, t_2 = 0,4, t_3 = 0,6, t_4 = 0,8$ y $t_5 = 1$.

5.1. Ejercicio 3:

El método de Euler para $w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}(f(t_i, w_i) + f(t_{i+1}, w_i + hf(t_i, w_i)))$ es estable y convergente.

Solución: $\phi(t, w, h) = \frac{1}{2}f(t, w) + \frac{1}{2}f(t, w + hf(t, w))$. Supongamos que $f(t, w)$ satisface la condición de Lipschitz en $(t, w)|a \leq t \leq b, -\infty < w < +\infty$ con L como constante de Lipschitz.

Demostramos que $\phi(t, w, h)$ satisface las condiciones de Lipschitz en w .

$$\begin{aligned} |\phi(t, w_1, h) - \phi(t, w_2, h)| &= \frac{1}{2}|f(t, w_1) + f(t, w_1 + hf(t, w_1)) - f(t, w_2) - f(t, w_2 + hf(t, w_2))| = \\ &= \frac{1}{2}|f(t, w_1) - f(t, w_2) + f(t, w_1 + hf(t, w_1)) - f(t, w_2 + hf(t, w_2))| \\ &\leq \frac{1}{2}|f(t, w_1) - f(t, w_2)| + \frac{1}{2}|f(t, w_1 + hf(t, w_1)) - f(t, w_2 + hf(t, w_2))| \\ &\leq \frac{1}{2}L|w_1 - w_2| + \frac{1}{2}L|w_1 + hf(t, w_1) - (w_2 + hf(t, w_2))| \leq L|w_1 - w_2| + \frac{1}{2}Lh|f(t, w_1) - f(t, w_2)| \\ &\leq |w_1 - w_2| + \frac{1}{2}hL^2|w_1 - w_2| = |w_1 - w_2|(L + \frac{1}{2}hL^2) \end{aligned}$$

Por tanto, $\phi(t, w, h)$ satisface la condición de Lipschitz en w con constante $(L + \frac{1}{2}hL^2)$ en $\{(t, w)|a \leq t \leq b, y - \infty < w < +\infty, y h < h_0\}$.

También, si $f(t, w)$ es continua en $\{(t, w)|a \leq t \leq b, y - \infty < w < +\infty\}$, entonces $\phi(t, w, h)$ es continua en $\{(t, w, h)|a \leq t \leq b, -\infty < w < +\infty, y h < h_0\}$. La modificación del método de Euler es estable.

Además,

$$\phi(t, w, 0) = \frac{1}{2}f(t, w) + \frac{1}{2}f(t, w + 0f(t, w)) = f(t, w).$$

Tenemos pues, que el método es convergente.

5.2. Ejercicio 4:

Aproximar la solución en $x = 1$ por el método de Euler con tamaños de paso de 0,25 de $y' = x^2 + y^2, y(0) = 1$.

$$x = 0, y_0 = 1$$

$$x = 0,25, y_1 = 1,25$$

$$x = 0,5, y_2 = 1,65625$$

$$x = 0,75, y_3 = 2,40454102$$

$$x = 1, y_4 = 3,99062039$$

Si se estudia con detenimiento se observa que $y' = x^2 + y^2, y(0) = 1$ no se puede resolver por métodos elementales y tiene una solución no acotada en un valor próximo a $x = 0,97$, si se utiliza la desigualdad entre $0 < x < 1, y^2 < x^2 + y^2 < 1 + y^2$. Esto indica el tipo de precauciones que se deben tomar al utilizar los métodos numéricos y la importancia ya indicada de los teoremas de existencia y unicidad de las soluciones, así como de la dependencia continua de los datos.

6. Programación y ejercicios numéricos

Escribimos una función denominada `MetodoEuler`, a la que se le pasará como parámetros:

- la función $f(t, y)$,
- la condición inicial $y(t_0) = y_0$,
- el número de puntos N
- los extremos del intervalo $[a, b]$

Una vez dados estos datos, la distancia entre los nodos está fijada:

$$h = \frac{b-a}{N}$$

Esta función nos devolverá la aproximación a la solución.

```
MetodoEuler(a,b,N,y0,f):=block(  
  define(f(t,y), f),  
  h:(b-a)/N,  
  t:a,  
  w:y0,  
  for i:1 thru N do(  
    w:w+h*f(t,w), /*calcule wi*/  
    t:a+ i*h /*calcule ti*/  
  ),  
  print(w)  
)$
```

Se escribe también una función `MetodoEulerH` en la que en lugar de fijar el número de puntos, se pasa como parámetro la longitud de paso h .

```
MetodoEulerH(a,b,h,y0,f):=block(  
  define(f(t,y), f),  
  N:(b-a)/h,  
  aproximaciones: makelist(0,N+1),  
  aproximaciones[1]:y0,  
  t:a,  
  w:y0,  
  print("t y con h=", h),  
  for i:1 thru N do(  
    w:w+h*f(t,w), /*calcule wi+1*/  
    t:a+i*h, /*calcule ti+1*/  
    aproximaciones[i+1]:w,  
    print(t, " | ", float(w))  
  ),  
  return(aproximaciones)  
)$
```

Los ejercicios prácticos correspondientes donde se utilizan estas funciones se encuentran en el archivo `euler.wxm`.

7. Aplicación de la red neuronal de Legendre para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias

En esta sección se expone el artículo *Application of Legendre Neural Network for solving ordinary differential equations* [8] disponible online a partir de Febrero de 2016.

En el documento se desarrolla un nuevo método de resolución de problemas de valores iniciales y de contorno. Desde hace unos años, se trabaja la resolución numérica de ecuaciones diferenciales haciendo uso de métodos como las redes neuronales artificiales (ANN, Artificial Neural Networks). Las ventajas que proporcionan el uso de ANN son, entre otras:

- A diferencia de los métodos de discretización, entre los que se encuentra el método de Euler, las soluciones que aproximan son continuas.
- Otros métodos numéricos son iterativos, por lo que hay que fijar el tamaño de paso antes de empezar a hacer los cálculos. Si más adelante quiere obtenerse la solución aproximada en otro punto, entonces hay que iniciar los cálculos desde el principio. Los métodos que utilizan ANN permiten obtener la aproximación numérica en cualquier punto del dominio.

7.1. Ideas principales

La estructura de la red neuronal de Legendre (ver figura 7.1) consiste en un único nodo de entrada, un nodo de salida, y la sustitución de la capa oculta por un espacio n-dimensional que utiliza los polinomios de Legendre. La entrada será un vector $x = (x_1, x_2, \dots, x_h)$, de

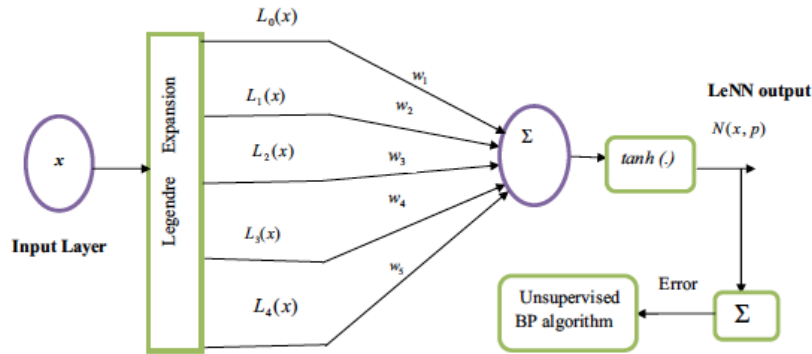


Figura 7.1: Estructura de la red neuronal de Legendre con cinco polinomios

dimensión h .

7.1.1. Aprendizaje de la red neuronal

El algoritmo del gradiente descendente se utiliza para el aprendizaje y para actualizar los pesos en cada iteración

$$w_j^{k+1} = w_j^k + \Delta w_j^k = w_j^k + \left(-\eta \frac{\partial E(x, p)}{\partial w_j^k} \right)$$

donde η es un parámetro entre 0 y 1, k es el número de iteración y $E(x, p)$ es el error.

7.1.2. Algoritmo propuesto para la resolución de ecuaciones diferenciales

Sea $y_t(x, p)$ la solución aproximada con pesos p que satisface la condición inicial o de contorno y puede escribirse como la suma de dos términos:

$$y_t(x, p) = A(x) + F(x, N(x, p))$$

donde $A(x)$ es una solución particular, y $N(x, p)$ es el resultado de usar la red neuronal con entrada x y parámetros p .

En el algoritmo propuesto, se tomará $N(x, p) = \tanh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}$ y $z = \sum_{j=1}^m w_j L_{j-1}$, donde $j = 1, 2, \dots, m$, w_i son los pesos y $L_{j-1}(x)$ son los polinomios de Legendre.

En el artículo se estudian además el error y algunos casos particulares, que no se exponen aquí ya que tiene un desarrollo más complejo.

7.2. Ejemplo

Se incluye uno de los ejemplos que aparecen en el artículo con el objetivo de mostrar la potencia y funcionamiento de este método. Se considera el problema de valores iniciales:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} + 4(2e^y + e^{\frac{y}{2}}) = 0$$

con condiciones iniciales $y(0) = 0, y'(0) = 0$. La solución exacta a esta ecuación es

$$y(x) = -2\ln(1 + x^2)$$

Usando el procedimiento anterior, se halla la solución aproximada

$$y_t(x, p) = x^2 N(x, p)$$

Se toman 10 puntos equidistantes en el intervalo $[0, 1]$ y se consideran los cinco primeros polinomios de Legendre. La solución exacta a este problema de valores iniciales se compara con la solución aproximada hallada mediante LeNN y perceptrón multicapa (MLP, Multi Layer Perceptron) en las figuras 7.2 y 7.3.

En conclusión, como se puede apreciar a la vista de los resultados, el método propuesto es fiable y muy potente. Además, aunque no aparezca en los resultados expuestos en este resumen, el tiempo consumido por la CPU en la computación de este método es mucho menor en comparación con el uso de MLP, lo que supone otra gran ventaja.

Input data	Analytical [48]	LeNN	MLP
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.1000	-0.0199	-0.0195	-0.0191
0.2000	-0.0784	-0.0785	-0.0778
0.3000	-0.1724	-0.1725	-0.1782
0.4000	-0.2968	-0.2965	-0.3000
0.5000	-0.4463	-0.4468	-0.4421
0.6000	-0.6150	-0.6135	-0.6145
0.7000	-0.7976	-0.7975	-0.7990
0.8000	-0.9894	-0.9896	-0.9905
0.9000	-1.1867	-1.1869	-1.1839
1.0000	-1.3863	-1.3861	-1.3857

Figura 7.2: Comparación de resultados

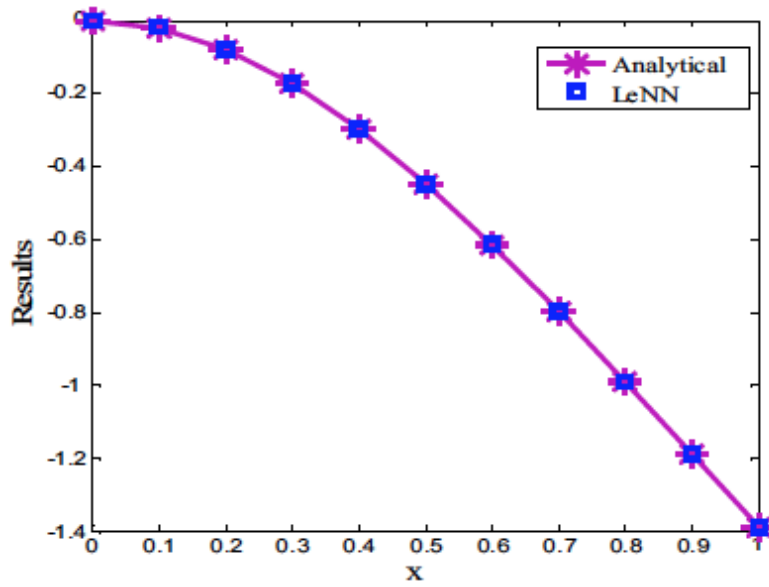


Figura 7.3: Gráfica de comparación de resultados

Referencias

- [1] APUNTES DE LA ASIGNATURA: ECUACIONES DIFERENCIALES I.
- [2] <http://www-ma4.upc.edu/~nrr/docs/edteor.pdf>
- [3] M. Gasca González CÁLCULO NUMÉRICO I. UNED, 1991.
- [4] R. L. Burden, J. D. Faires ANÁLISIS NUMÉRICO. Thomson, 2002.
- [5] Dennis G. Zill ECUACIONES DIFERENCIALES CON APLICACIONES DE MODELADO
- [6] <https://math.berkeley.edu/~strain/128b.S15/ivp.pdf>
- [7] C. Edwards, D. Penney ECUACIONES DIFERENCIALES Y PROBLEMAS CON VALORES EN LA FRONTERA. CÓMPUTO Y MODELADO. Ed. Pearson, 2009.
- [8] Susmita Mall, S. Chakraverty: APPLICATION OF LEGENDRE NEURAL NETWORK FOR SOLVING ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS. Applied Soft Computing, (2016), pp. 347–356.