# Método del Trapecio


A. Herrera Poyatos

J. Poyatos Amador

R. Raya Castellano

# Motivación: Un nuevo método.

## Motivación

- Ecuaciones diferenciales ordinarias.
- ¿Existe solución y es única?
- Métodos de discretización.
- Método de Euler.

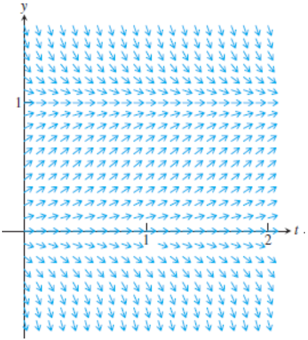



Figura: Representación del campo vectorial asociado a la ecuación logística $y'(t) = cy(t)(1 - y(t))$.

# Motivación: Método de Euler

$$\begin{cases} w_0 = y_0 \\ h_i = t_{i+1} - t_i \\ w_{i+1} = w_i + h_i f(t_i, w_i) \end{cases} \tag{1}$$

**Método de Euler**

- Mejores resultados para puntos equidistantes.
- Es estable, consistente y convergente.
- El error global de aproximación es $O(h)$.
- Puede parecer válido en cualquier aplicación.

# Motivación: Ejemplo

Considérese el siguiente problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} y'(t) = -4t^3y^2 \\ y(-10) = 1/10001 \\ t \in [-10, 0] \end{cases}$$

- La solución exacta es $y(t) = \frac{1}{1+t^4}$.
- Queremos calcular la aproximación de y en 0 con $y(0) = 1$.
- Se va a aproximar hasta llegar a los 10000 puntos.

# Motivación: Ejemplo

| $N$ | $h$ | $w_n$ |
|---|---|---|
| 100 | 0.1 | 0.00390138 |
| 1000 | 0.01 | 0.03085162 |
| 5000 | 0.002 | 0.13282140 |
| 7500 | 0.0013 | 0.18614311 |
| 10000 | 0.001 | 0.23325153 |

Tabla: Ejemplo de un mal comportamiento del método de Euler.

# Motivación: Ejemplo

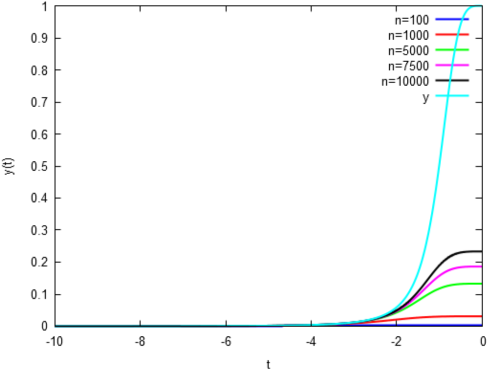



Figura: Aproximaciones obtenidas con diferentes valores de $n$.

# Índice

# ¿Qué es TPCx-HS?

**Transaction Processing Performance Council Express Hadoop System**

**Benchmarking Hadoop**

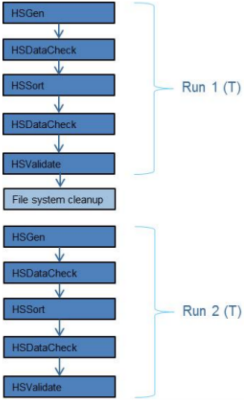
## Carga de trabajo de TPCx-HS

- HSGen: generación de datos con un factor de escala.
- HSDataCheck: comprobación de los datos.
- HSSort: Implementación en Hadoop de TeraSort.
- HSValidate: comprobación de la salida.

# Funcionamiento de TPCx-HS

**Dos ejecuciones de cinco fases cada una.**

- Fase 1: Generación de los datos.
  3-ways replication
- Fase 2: Verificación de la validez de los datos.
- Fase 3: Ordenación de los datos.
  3-ways replication
- Fase 4: Verificación de la validez de los datos.
- Fase 5: Validación de la salida



# Rendimiento

## Medida del rendimiento.

$$HSph@SF = \frac{SF}{T/3600}$$

## Medida del rendimiento-precio.

$$\$/HSph@SF = \frac{P}{HSph@SF}$$

**Parámetros:**

- SF: factor de escala escogido.
- T: tiempo total de las dos ejecuciones.
- P: costo del sistema bajo estudio.

# Introducción al método del trapecio

## Proposición

*Sea un PVI con $y'(t) = f(t, y(t))$ y $y(t_0) = y_0$. Son equivalentes:*

1. *$y$ es una solución del PVI.*
2. $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s)))ds \; \forall t \in [a, b]$

Nuestra solución verifica:

$$y(t_1) = y_0 + \int_{t_0}^{t_1} f(s, y(s)))\ ds$$

# Introducción al método del trapecio

**Idea: Método del trapecio para integración numérica**

$$y(t_1) = y_0 + \frac{h}{2}\left[f(t_0, y_0) + f(t_1, y(t_1))\right] - \frac{h^3}{12} y^{3)}(\xi) \qquad (2)$$

**Aproximación implicita**

$$y(t_1) \approx w_1 = w_0 + \frac{h}{2}\left[f(t_0, w_0) + f(t_1, y(t_1))\right] \qquad (3)$$

**¿Cómo cálcular la aproximación?**

- **Método del trapecio explícito**
- **Método del trapecio implícito**

# Método del trapecio explícito

**Idea: Utilizar el método de Euler**

$$y(t_{i+1}) \approx w'_{i+1} = w'_i + hf(t_i, w'_i))$$

$$+$$

$$y(t_{i+1}) \approx w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}\left[f(t_i, w_i) + f(t_{i+1}, y(t_{i+1}))\right]$$

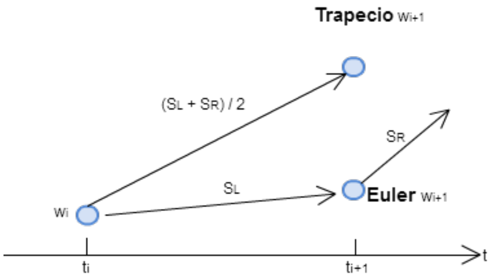
## Definición (*Método del trapecio explícito*)

$$y(t_{i+1}) \approx w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}\left[f(t_i, w_i) + f(t_i + h, w_i + hf(t_i, w_i))\right] \tag{4}$$

# Comparación con el método de Euler

$$\text{Denotamos} \begin{cases} S_L = hf(t_i, w_i) \\ S_R = hf(t_{i+1}, w_i + S_L) \end{cases}$$

- **Método de euler:** $w'_{i+1} = w_i + S_L$
- **Método del trapecio explícito:** $w_{i+1} = w_i + \frac{S_L + S_R}{2}$



# Error local y global

**Teorema**

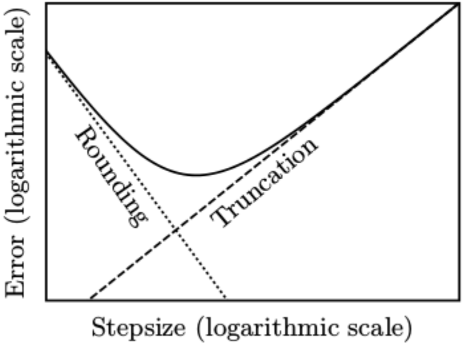
*El método del trapecio es localmente de orden tres.*
*En consecuencia, el método del trapecio es de orden dos.*

Demostración.
Se basa en el teorema de Taylor. □

**Corolario**

*El método del trapecio explícito es convergente.*

# Error de redondeo



# Estabilidad y convergencia

**Función de incremento:**
$\phi(t, y, h) = \frac{1}{2} f(t, y) + \frac{1}{2} f(t + h, y + hf(t, y))$

## Proposición

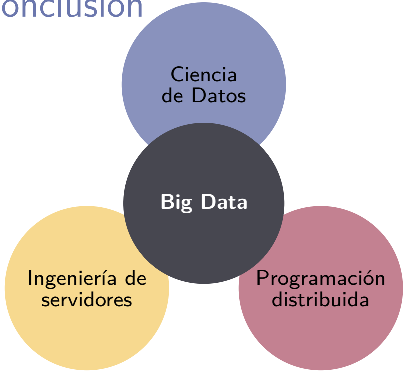
*Si* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *es lipschitziana respecto de la segunda variable, entonces* $\phi$ *es lipschitziana respecto de la segunda variable en* $\Omega \times [0, h_0]$ *para cualquier* $h_0$.

## Corolario

*El método del trapecio explícito es estable y consistente.*

Demostración.
Teorema de consistencia, convergencia y estabilidad. $\square$

# Conclusión





- Nuevas tecnologías: Spark, Flink...
- Desarrollo y diseño de algoritmos
- Benchmarks para las nuevas tecnologías

> "Vivimos en la era de la información. El progreso y la innovación no se ve obstaculizado por la capacidad de recopilar datos sino por la capacidad de gestionar, analizar, sintetizar y descubrir el conocimiento subyacente en dichos datos. Este es el reto de las tecnologías de Big Data."
>
> Francisco Herrera Triguero, Prof. Universidad de Granada

Gracias por su atención.

Ilustración de Lola Moral y Sergio García