Método del Trapecio

A. Herrera Poyatos
J. Poyatos Amador
R. Raya Castellano

Resolución numérica de PVI

Definición

Dada una función $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *continua, una un problema de valores iniciales de primer orden consiste en encontrar aquellas funciones* $y : [a, b] \to \mathbb{R}$ *de clase 1 que verifiquen* $G(y) \subset \Omega$*,* $y'(t) = f(t, y(t))\ \forall t \in [a, b]$ *y la condición inicial* $y(t_0) = y_0$*, donde* $t_0 \in [a, b]$*.*

Resolución numérica de PVI

Definición

Considérese un problema de valores iniciales y supongamos que la función f *está definida en* $[a, b] \times \mathbb{R}$. *Un método de discretización para resolverlo el PVI es un método numérico que trata de obtener valores aproximados* y_n *de la solución de* $y(t)$ *en los distintos nodos* t_n *con* $n = 0, 1, ..., N$ *obtenidos mediante la partición del intervalo* $[a, b]$.

Resolución numérica de PVI

- Ecuaciones diferenciales ordinarias.
- ¿Existe solución y es única?
- Métodos de discretización.
- Método de Euler.

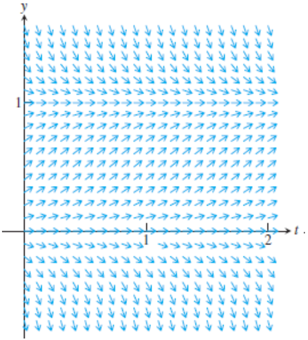


Figura: Representación del campo vectorial asociado a la ecuación logística $y'(t) = cy(t)(1 - y(t))$.

Motivación: Método de Euler

$$\begin{cases} w_0 = y_0 \\ h_i = t_{i+1} - t_i \\ w_{i+1} = w_i + h_i f(t_i, w_i) \end{cases} \tag{1}$$

Método de Euler

- Mejores resultados para puntos equidistantes.
- Es estable, consistente y convergente.
- El error global de aproximación es $O(h)$.
- Puede parecer válido en cualquier aplicación.

Motivación: Ejemplo

Considérese el siguiente problema de valores iniciales:

$$\begin{cases} y'(t) = -4t^3y^2 \\ y(-10) = 1/10001 \\ t \in [-10, 0] \end{cases}$$

- La solución exacta es $y(t) = \frac{1}{1+t^4}$.
- Queremos calcular la aproximación de y en 0 con $y(0) = 1$.
- Se va a aproximar hasta llegar a los 10000 puntos.

Motivación: Ejemplo

N	h	w_n
100	0.1	0.00390138
1000	0.01	0.03085162
5000	0.002	0.13282140
7500	0.0013	0.18614311
10000	0.001	0.23325153

Tabla: Ejemplo de un mal comportamiento del método de Euler.

Motivación: Ejemplo

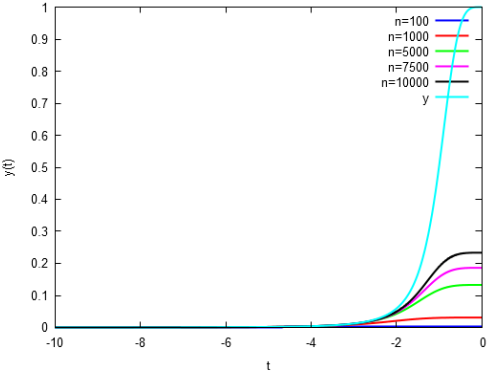


Figura: Aproximaciones obtenidas con diferentes valores de n.

Índice

Lipschitz

Definición

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *y sea* $f : \Omega \to \mathbb{R}$*. Se dice que* f *es lipschitziana respecto de la segunda variable,* y*, si existe una constante* $L \in \mathbb{R}^+$*, llamada constante de Lipschitz, de forma que* $|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$ *para cualquier par de puntos* $(t, y_1), (t, y_2) \in \Omega$*.*

Existencia y unicidad

Teorema

(Existencia y unicidad de soluciones) Sea $f : [a, b] \times I \to \mathbb{R}$*, donde* I *es un intervalo de* $\mathbb{R}$*, y sea* $y_0 \in I$*. Entonces:*

1. *Si* $I = [\alpha, \beta]$ *y* f *es lipschitziana respecto de la segunda variable en* $[a, b] \times [\alpha, \beta]$*, entonces existe* $c \in [a, b]$ *tal que el problema de valores iniciales:*

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(a) = y_0 \\ t \in [a, c] \end{cases}$$

   tiene exactamente una solución.

2. *Si* $I =]-\infty, \infty[$ *y* f *es lipschitziana respecto de la segunda variable en* $[a, b] \times]-\infty, \infty[$*, entonces existe exactamente una solución en* $[a, b]$

Teorema

Sean dos soluciones $y(t), z(t)$ *de la ecuación diferencial* $y'(t) = f(t, y(t))$ *para las condiciones iniciales* $y(a)$ *y* $z(a)$ *respectivamente. Supóngase que* f *es lipschitziana respecto de la segunda variable. Entonces* $|y(t) - z(t)| \leq e^{L(t-a)}|y(a) - z(a)|$ *donde* L *es la constante de Lipschitz de* f.

Errores locales y globales

Definición

Sean w_i los valores estimados en los puntos t_i por cierto método de discretización. Sea también z_i el valor de la solución exacta en t_i para el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_{i-1}) = w_{i-1} \\ t \in [t_{i-1}, t_i] \end{cases} \tag{2}$$

Se definen los siguientes errores:

- *Error global de truncatura o error acumulado en el nodo i-ésimo:* $g_i = |y_i - w_i|$
- *Error local de truncatura o error en un paso:* $e_i = |z_i - w_i|$

Errores locales y globales

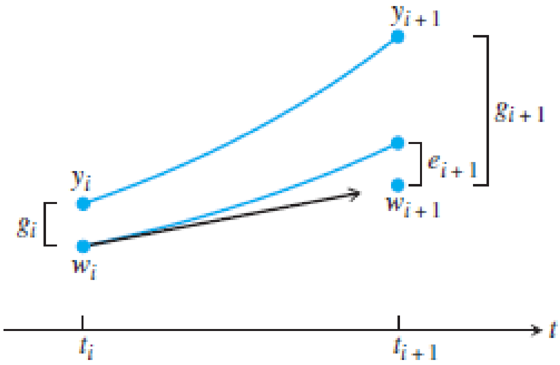


Figura: Representación gráfica de los errores locales y globales.

Errores locales y globales

Teorema

Supóngase que la función f *es lipschitziana en la segunda variable con constante de Lipschitz* L*. Además, supóngase que existen* $C \geq 0$ *y* $k \in \mathbb{N}$ *tales que los errores locales verifican* $e_i \leq Ch^{k+1}$ *para todo* $i = 0 \ldots n$*. Entonces, se verifica la siguiente desigualdad para los errores globales*

$$g_i \leq \frac{Ch^k}{L}(e^{L(t_i - a)} - 1) \tag{3}$$

Método de discretización

Definición

Considérese un método de discretización para problemas de valores iniciales. Entonces:

1. *El método es localmente de orden k si existe una constante $C \geq 0$ tal que $e_i \leq Ch^k$ para todo $i = 0 \ldots n$.*
2. *El método es de orden k si existe una constante $C \geq 0$ tal que $g_i \leq Ch^k$ para todo $i = 0 \ldots n$.*

Teorema

Supóngase que $f : [a, b] \times [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ es derivable y lipschitziana en la segunda variable. Entonces, el método de Euler es localmente de orden 2. Consecuentemente, el método de Euler es de orden 1.

Método de discretización

Definición

Un método de discretización se dice convergente si para cualquier problema de valores iniciales tal que la función f *es lipschitziana respecto de la segunda variable se tiene que* $\lim_{n\to+\infty} y_n = y(b)$.

Método de discretización

Definición

Un método de discretización se dice estable si para cualquier PVI verificando que f es lipschitziana respecto de la segunda variable y para cualquier perturbación de este PVI existen constantes positivas h_0 y K tales que la diferencia entre las aproximaciones obtenidas para ambos PVI están acotadas por $K|y_0 - y_0'|$ para todo $h \in [0, h_0]$. Esto es, si w_i son las aproximaciones obtenidas para el problema sin perturbar y w_i' son las aproximaciones obtenidas para el problema perturbado, utilizando en ambos casos el mismo $h < h_0$, entonces $|w_i - w_i'| \leq K|y_0 - y_0'|$ para todo i.

Estabilidad y convergencia

Teorema

Si un método de un paso anterior verifica que ϕ es continua en cada una de sus variables y, además, es lipschitziana respecto de la segunda variable en el correspondiente dominio para $h \in [0, h_0]$, entonces:

1. *el método es estable.*
2. *el método es convergente o, equivalentemente,* $\phi(b, y, 0) = f(b, y)$.

Introducción al método del trapecio

Proposición

Sea un PVI con $y'(t) = f(t, y(t))$ y $y(t_0) = y_0$. Son equivalentes:

1. *y es una solución del PVI.*
2. $y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s)))ds \ \forall t \in [a, b]$

Nuestra solución verifica:

$$y(t_1) = y_0 + \int_{t_0}^{t_1} f(s, y(s)))\ ds$$

Introducción al método del trapecio

Idea: Método del trapecio para integración numérica

$$y(t_1) = y_0 + \frac{h}{2}\left[f(t_0, y_0) + f(t_1, y(t_1))\right] - \frac{h^3}{12} y^{3)}(\xi) \tag{4}$$

Aproximación implicita

$$y(t_1) \approx w_1 = w_0 + \frac{h}{2}\left[f(t_0, w_0) + f(t_1, y(t_1))\right] \tag{5}$$

¿Cómo cálcular la aproximación?

- **Método del trapecio explícito**
- **Método del trapecio implícito**

Método del trapecio explícito

Idea: Utilizar el método de Euler

$$y(t_{i+1}) \approx w'_{i+1} = w'_i + hf(t_i, w'_i))$$

$$+$$

$$y(t_{i+1}) \approx w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}\left[f(t_i, w_i) + f(t_{i+1}, y(t_{i+1}))\right]$$

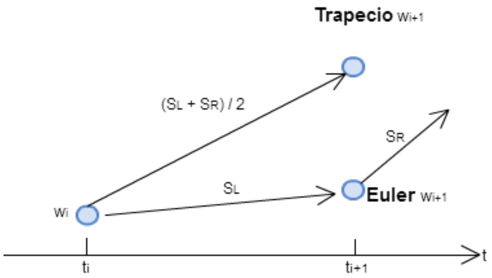
Definición (*Método del trapecio explícito*)

$$y(t_{i+1}) \approx w_{i+1} = w_i + \frac{h}{2}\left[f(t_i, w_i) + f(t_i + h, w_i + hf(t_i, w_i))\right] \tag{6}$$

Comparación con el método de Euler

$$\text{Denotamos} \begin{cases} S_L = hf(t_i, w_i) \\ S_R = hf(t_{i+1}, w_i + S_L) \end{cases}$$

- **Método de euler:** $w'_{i+1} = w_i + S_L$
- **Método del trapecio explícito:** $w_{i+1} = w_i + \frac{S_L+S_R}{2}$



Error local y global

Teorema

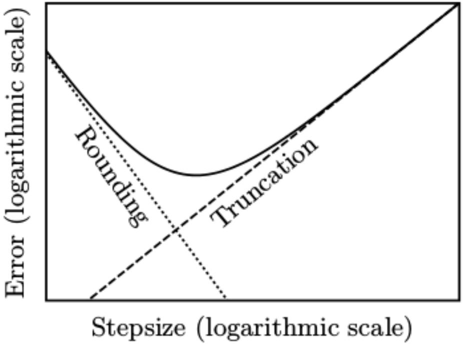
El método del trapecio es localmente de orden tres.
En consecuencia, el método del trapecio es de orden dos.

Demostración.
Se basa en el teorema de Taylor. □

Corolario

El método del trapecio explícito es convergente.

Error de redondeo



Estabilidad y convergencia

Función de incremento:
$\phi(t,y,h) = \frac{1}{2}f(t,y) + \frac{1}{2}f(t+h, y+hf(t,y))$

Proposición

Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ es lipschitziana respecto de la segunda variable, entonces ϕ es lipschitziana respecto de la segunda variable en $\Omega \times [0, h_0]$ para cualquier h_0.

Corolario

El método del trapecio explícito es estable y consistente.

Demostración.
Teorema de consistencia, convergencia y estabilidad. $\square$

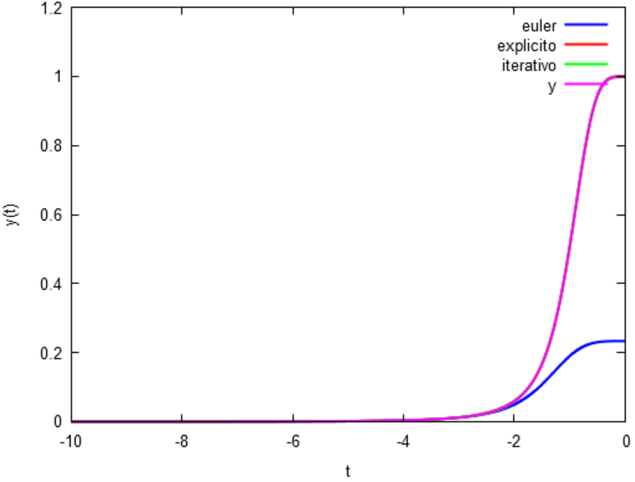
Ejemplo 1

Considérese el ejemplo de problema de valores iniciales dado en la motivación.

$$\begin{cases} y'(t) = -4t^3y^2 \\ y(-10) = 1/10001 \\ t \in [-10, 0] \end{cases}$$

cuando se resuelve mediante el método de Euler y con el método del Trapecio Explícito e Iterativo, con paso 10^{-3}. se obtienen la siguiente gráfica. El método del Trapecio Iterativo usa una tolerancia de 10^{-4}.

Ejemplo 1



Ejemplo 2

Considérese el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y'(t) = -1 + \frac{y}{t} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

calcular el valor de $y(2)$ para $h = 0{,}25$ y $h = 0{,}1$.

Ejemplo 2

j	t_{j-1}	y_{j-1}	t_j	y_j
1	1.00	0.000000	1.25	-0.275000
2	1.05	-0.275000	1.50	-0.600833
3	1.10	-0.600833	1.75	-0.968829
4	1.15	-0.968829	2.00	-1.372859

Tabla: Trapecio con $h = 0{,}25$

Ejemplo 2

j	t_{j-1}	y_{j-1}	t_j	y_j
1	0.00	0.000000	0.10	-0.104545
2	0.10	-0.104545	0.20	-0.218216
3	0.20	-0.218216	0.20	-0.340247
4	0.30	-0.340247	0.40	-0.469991
5	0.40	-0.469991	0.50	-0.606896
6	0.50	-0.606896	0.60	-0.750480
7	0.60	-0.750480	0.70	-0.900326
8	0.70	-0.900326	0.80	-1.056065
9	0.80	-1.056065	0.90	-1.217366
10	0.90	-1.217366	1.00	-1.383938

Tabla: Trapecio con $h = 0{,}1$

Ejemplo 2

- Como $y(2) = -1{,}386294$, los errores relativos son $9{,}6910^{-3}$ para el caso $h = 0{,}25$ y $1{,}7010^{-3}$ para el caso $h = 0{,}10$.
- Dado que el método del trapecio es de orden 2 el error relativo es $O(h^2)$ y por tanto el cociente de los errores debería ser $\frac{C(0{,}25)^2}{C(0{,}10)^2} = 6{,}25$ mientras que el valor real es 5.7.
- La razón de esta diferencia es que el orden es $O(h^2)$ asintóticamente, esto es, cuando $h \to 0$ y los valores de considerados para h no son suficientemente pequeños.

Ejercicio 1

Considérese el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y'(t) = y - t^2 \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

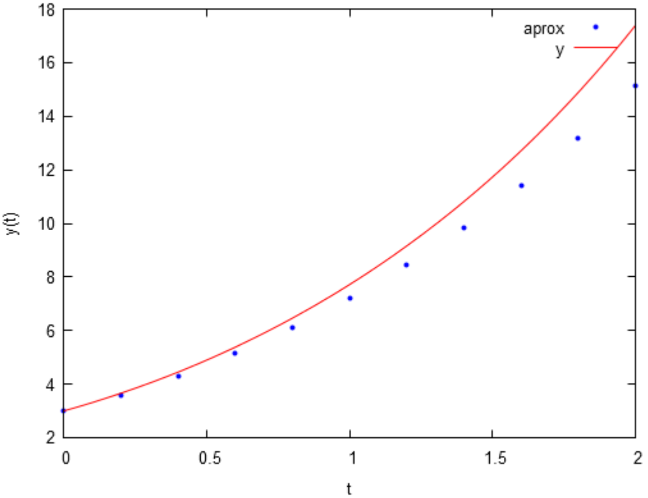
calcular una aproximación a la solución del problema de valores iniciales mediante el método de Euler y el método del Trapecio Explícito e Iterativo.

Ejercicio 1

j	t_j	y_j
0	0.0	3
1	0.2	3.6
2	0.4	4.312
3	0.6	5.1424
4	0.8	6.09888
5	1.0	7.190656
6	1.2	8.428787
7	1.4	9.826544
8	1.6	11.399853
9	1.8	13.167824
10	2.0	15.153389

Tabla: Euler con $h = 0{,}2$

Ejercicio 1



Ejercicio 1

j	t_j	y_j *Explicito*	y_j *Implicito*	y_j *Euler*
0	0.0	3	3	3
1	0.2	3.656	3.66216	3.6
2	0.4	4.3952	4.453683	4.312
3	0.6	5.361014	5.385540	5.1424
4	0.8	6.433237	6.471135	6.09888
5	1.0	7.671749	7.726853	7.190656
6	1.2	9.095534	9.172720	8.428787
7	1.4	10.727752	10.833211	9.826544
8	1.6	12.596657	12.738239	11.399853
9	1.8	14.736722	14.924363	13.167824
10	2.0	17.190000	17.436269	15.153389

Tabla: Tabla comparativa con $h = 0{,}2$

Ejercicio 1

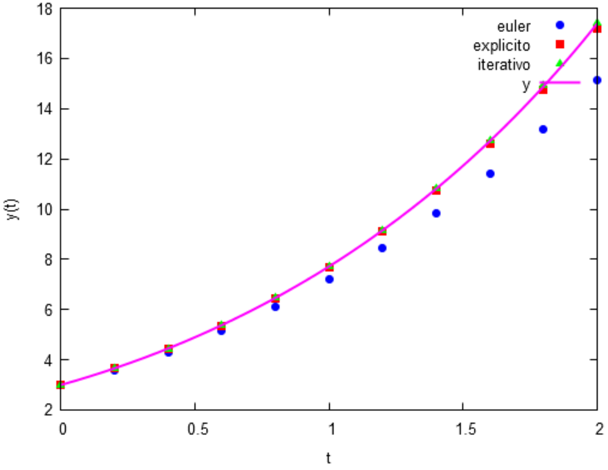


Figura: Aproximación a la solución con los métodos.

Ejercicio 2

Dada la ecuación $y' = t + y^2$ con $y(1) = 1$ aproximar mediante el método del trapecio: a) y(1,2) con 2 pasos (h=0,1) y b) y(1,2) con 4 pasos (h=0,05). Si el error global es de la forma Ch^2, estimar el valor de C a partir de los resultados anteriores. Determinar h para que el error sea del orden de 10^{-4}.

Ejercicio 2

j	t_{j-1}	y_{j-1}	t_j	y_j
1	1.00	2.000000	1.10	2.617500
2	1.10	2.617500	1.20	3.657368

Tabla: Trapecio con $h = 0{,}1$

Ejercicio 2

j	t_{j-1}	y_{j-1}	t_j	y_j
1	1.00	2.000000	1.05	2.277813
2	1.05	2.277813	1.10	2.628941
3	1.10	2.628941	1.15	3.087423
4	1.15	3.087423	1.20	3.712364

Tabla: Trapecio con $h = 0{,}05$

Ejercicio 2

- $y(1{,}2) - 3{,}657368 = C(0{,}1)^2$.
- $y(1{,}2) - 3{,}712364 = C(0{,}05)^2$.
- Restando obtenemos que $C = 7{,}33$.
- Para que sea de orden 10^{-4}, el error debe ser $h = 3{,}7\ 10^{-3}$

Ejercicio 3

El movimiento de caída de un cuerpo de masa m en un medio que opone una resistencia proporcional al cuadrado de la velocidad está gobernado por la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g - \frac{K}{m}(\frac{ds}{dt})^2 \tag{7}$$

siendo $g = 10\frac{m}{s^2}$ y $K\frac{kg}{s}$ una constante de proporcionalidad cuyo valor depende del problema concreto. Si el cuerpo se abandona sin velocidad inicial y las condiciones iniciales son

$$s(0) = s'(0) = 0 \tag{8}$$

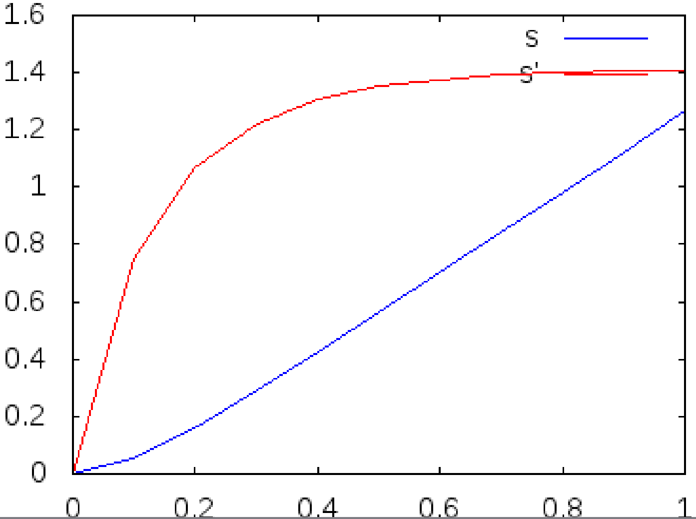
Calcular una tabla de valores de las funciones $s(t)$ y $s'(t)$ para dibujar sus gráficas en el intervalo $[0, 1]$. Tomar $\frac{K}{m} = 5$.

Ejercicio 3

j	t_{j-1}	(u_{j-1}, v_{j-1})	t_j	(u_j, v_j)
1	0.00	0.000000,0.000000	0.10	0.050000,0.750000
2	0.10	0.050000,0.750000	0.20	0.160938,1.070068
3	0.20	0.160938,1.070068	0.20	0.289318,1.223146
4	0.30	0.289318,1.223146	0.40	0.424231,1.305143
5	0.40	0.424231,1.305143	0.50	0.562160,1.351168
6	0.50	0.562160,1.351168	0.60	0.701635,1.377549
7	0.60	0.701635,1.377549	0.70	0.841949,1.392822
8	0.70	0.841949,1.392822	0.80	0.982733,1.401712
9	0.80	0.982733,1.401712	0.90	1.123784,1.406900
10	0.90	1.123784,1.406900	1.00	1.264990,1.409933

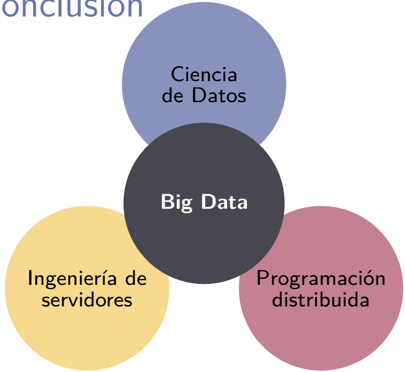
Tabla: Trapecio para sistemas con $h = 0{,}1$

Ejercicio 3



Ejercicio 4

Conclusión



- Nuevas tecnologías: Spark, Flink...
- Desarrollo y diseño de algoritmos
- Benchmarks para las nuevas tecnologías

> "Vivimos en la era de la información. El progreso y la innovación no se ve obstaculizado por la capacidad de recopilar datos sino por la capacidad de gestionar, analizar, sintetizar y descubrir el conocimiento subyacente en dichos datos. Este es el reto de las tecnologías de Big Data."
>
> Francisco Herrera Triguero, Prof. Universidad de Granada

Gracias por su atención.

Ilustración de Lola Moral y Sergio García