2. Información Cuántica

EJERCICIOS

2.1 Sea $\mathscr{A} = \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ el álgebra $\mathbb{C}^*$ formada por las matrices complejas $n \times n$.

a/ Demostrar que todo estado ω sobre $\mathscr{A}$, es decir, toda aplicación lineal $\omega : \mathscr{A} \to \mathbb{C}$, positiva ($\omega(X) \geq 0$ si $X \geq 0$), y tal que $\omega(\mathbf{1}) = 1$, es de la forma

$$\omega(A) = \mathrm{Tr}\,(\rho_\omega A),$$

donde ρ_ω es un elemento autoadjunto y positivo de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, de traza $\mathrm{Tr}\,\rho_\omega = 1$.

b/ Sean $A, B \in \mathscr{A}$ tales que $0 \leq A \leq B$.

1. Demostrar que si existe A^{-1}, entonces $B^{-1} \leq A^{-1}$.

2. Probar que la desigualdad $A^2 \leq B^2$ no es necesariamente cierta. (Dar un contraejemplo.)

2.2 Sean X, Y, Z tres sistemas cuánticos, de dimensiones hilbertianas 2, 2, y 3, respectivamente. El sistema conjunto XYZ se halla en el estado ρ_{123} dado por

$$\rho_{123} = \frac{1}{36}\begin{pmatrix}
1 & 2 & -2 & 1 & 2 & 1 & 2 & -2 & -2 & 2 & 2 & 1 \\
2 & 4 & -4 & 2 & 4 & 2 & 4 & -4 & -4 & 4 & 4 & 2 \\
-2 & -4 & 4 & -2 & -4 & -2 & -4 & 4 & 4 & -4 & -4 & -2 \\
1 & 2 & -2 & 1 & 2 & 1 & 2 & -2 & -2 & 2 & 2 & 1 \\
2 & 4 & -4 & 2 & 4 & 2 & 4 & -4 & -4 & 4 & 4 & 2 \\
1 & 2 & -2 & 1 & 2 & 1 & 2 & -2 & -2 & 2 & 2 & 1 \\
2 & 4 & -4 & 2 & 4 & 2 & 4 & -4 & -4 & 4 & 4 & 2 \\
-2 & -4 & 4 & -2 & -4 & -2 & -4 & 4 & 4 & -4 & -4 & -2 \\
-2 & -4 & 4 & -2 & -4 & -2 & -4 & 4 & 4 & -4 & -4 & -2 \\
2 & 4 & -4 & 2 & 4 & 2 & 4 & -4 & -4 & 4 & 4 & 2 \\
2 & 4 & -4 & 2 & 4 & 2 & 4 & -4 & -4 & 4 & 4 & 2 \\
1 & 2 & -2 & 1 & 2 & 1 & 2 & -2 & -2 & 2 & 2 & 1
\end{pmatrix}$$

en la base tensorial

$$\{|a_i b_j c_k\rangle, 1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq 2, 1 \leq k \leq 3\},$$

lexicográficamente ordenada

$$|a_1b_1c_1\rangle, |a_1b_1c_2\rangle, |a_1b_2c_1\rangle, |a_1b_2c_2\rangle, |a_2b_1c_1\rangle, \ldots |a_2b_2c_3\rangle,$$

donde $\{|a_i\rangle, 1 \leq i \leq 2\}$, $\{|b_j\rangle, \leq j \leq 2\}$, $\{|c_k\rangle, 1 \leq k \leq 3\}$ son bases ortonormales en los espacios de Hilbert $\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2, \mathbb{C}^3$ de X, Y, Z, respectivamente.

Se piden:

i/ Las entropías (von Neumann) del estado ρ_{123} y de sus estados parciales $\rho_{ij}, \rho_i, i, j = 1,2,3, i < j$. Comprobar si se satisfacen las desigualdades esperadas (por ejemplo, la subaditividad fuerte y la triangularidad). Comentar.

ii/ Las informaciones mutuas y las entropías condicionales de los estados de los dos subsistemas en que puede descomponerse XYZ. Comentar.

iii/ Las informaciones mutuas y las entropías condicionales de los estados de los dos subsistemas en que puede descomponerse XY, XZ, e YZ.

iv/ Las distancias en traza y fidelidad entre los estados y el producto directo de los estados parciales de sus componentes (por ejemplo, entre ρ_{123} y $\rho_{12} \otimes \rho_3$, entre ρ_{12} y $\rho_1 \otimes \rho_2$, etc.) .

v/ Discutir si los estados anteriores ρ_{123}, $\rho_{ij}, i < j$, son entrelazados o no.

vi/ Finalmente, averiguar cuáles de los estados $\rho_i, \rho_{ij}, \rho_{123}$, son puros. ¿Lo sabíamos ya?

2.3 Tenemos una colección de 50 qubits (partículas de espín $\frac{1}{2}$) preparados todos en un mismo estado puro $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$. Sobre 20 de ellos medimos la componente $S_1 := \mathbf{S} \cdot \mathbf{n}_1$ el espín $vecS = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}$ en la dirección $\mathbf{n}_1 := (1,1,0)/\sqrt{2}$, obteniendo $+\frac{1}{2}$ en 15 de los casos, y $-\frac{1}{2}$ en los restantes 5 casos. Sobre 15 de los otros 30, se mide la componente $S_2 := \mathbf{S} \cdot \mathbf{n}_2$ en la dirección $\mathbf{n}_2 := (1,-2,0)/\sqrt{5}$, con el resultado $+\frac{1}{2}$ en 4 casos y $-\frac{1}{2}$ en los otros 11. Finalmente, en los 15 qubits restantes, medimos el observable $A := \mathbf{1} + \sigma_1 - \frac{1}{2}\sigma_2 + \sigma_3$, obteniendo $\frac{5}{2}$ en 7 casos y $-\frac{1}{2}$ en 8 restantes.

1. ¿Cuál es la mejor estimación bayesiana ρ_{B} de ρ?

2. Estimar los valores medios $\langle S_1\rangle$, $\langle S_2\rangle$ y $\langle A\rangle$ a partir de las mediciones anteriores, y suponiendo que estas estimaciones son los valores medios correctos de esos observables en el estado buscado, estimar éste por el principìo de máxima entropía. Sea ρ_{J} tal estimación. Calcular la distancia en traza entre ρ_{B} y ρ_{J} , así como su fidelidad mutua.

2.4 En un sistema cuántico de $N = 7$ niveles se mide el observable A dado por su siguiente representación matricial en una base ortonormal $\{|k\rangle, k = 1,...,7\}$:

$$A = \frac{1}{36}\begin{pmatrix} 222 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 9-43i & 57-22i & -87-15i & 18+11i & -29+77i \\ 0 & 9+43i & -11 & -17+69i & -6-72i & -65+9i & -62-8i \\ 0 & 57+22i & -17-69i & 106 & -5+63i & -56-81i & 25-i \\ 0 & -87+15i & -6+72i & -5-63i & 67 & -27+57i & 8+166i \\ 0 & 18-11i & -65-9i & -56+81i & -27-57i & -8 & -47+13i \\ 0 & -29-77i & -62+8i & 25+i & 8-166i & -47-13i & 45 \end{pmatrix}.$$

En esa medición proyectiva se seleccionan solo los valores de A que son ≤ 0. Suponiendo que el estado del sistema sobre el que se realiza la medida viene dado por el operador densidad

$$\rho = \frac{1}{186}\begin{pmatrix} 26 & -7-9i & -11i & 1-4i & 2-5i & 7-4i & 17-i \\ -7+9i & 36 & 17-i & 10-9i & -10+9i & 6+16i & -7+17i \\ 11i & 17+i & 20 & 3 & -3+6i & 3+8i & -4+17i \\ 1+4i & 10+9i & 3 & 23 & -9-5i & -9+16i & 5+11i \\ 2+5i & -10-9i & -3-6i & -9+5i & 22 & 7-13i & 4i \\ 7+4i & 6-16i & 3-8i & -9-16i & 7+13i & 28 & 7-2i \\ 17+i & -7-17i & -4-17i & 5-11i & -4i & 7+2i & 31 \end{pmatrix},$$

se pide:

1/ La probabilidad p_Δ de que la medida de A sobre ρ arroje valores en el intervalo $\Delta := (-\infty, 0]$.

2/ Si la medición es ideal y selecciona solo la parte $\sigma(A) \cap \Delta$ del espectro $\sigma(A)$ de A, determinar el estado ρ'_Δ en que queda el sistema tras tal medida.

3/ Comparar las entropías $S(\rho), S(\rho'_\Delta), S(\rho')$; con ρ' denotamos el estado tras la medición no selectiva, es decir, aceptando todos los valores posibles de $\sigma(A)$. Comentar el resultado de la comparación.

2.5 Sea un sistema formado por un qubit A (espín $\frac{1}{2}$) y un qutrit B (espín 1). Denotaremos por $\{e_1, e_2\}$ y $\{f_1, f_2, f_3\}$ sendas bases ortonormales en los espacios de Hilbert $\mathscr{H}_{\mathrm{A}}$ y $\mathscr{H}_{\mathrm{B}}$ de los subsistemas

A y B, respectivamente; la base tensorial $\{e_i \otimes f_j, i = 1, 2, j = 1, 2, 3\}$ se supondrá lexicográficamente ordenada.

Sean $\mathbf{S}_A = \frac{1}{2}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ y $\mathbf{S}_B = (S_1, S_2, S_3)$ los operadores de espín de A y B, respectivamente, donde $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ son las matrices de Pauli, y (S_1, S_2, S_3) las matrices de espín 1 en la base estándar, es decir, las que se obtienen con la identificación $|f_1\rangle = |j = 1, m = +1\rangle$, $|f_2\rangle = |j = 1, m = 0\rangle$, $|f_3\rangle = |j = 1, m = -1\rangle$, y el convenio de Condon-Shortley (representación $\mathscr{D}^{(1)}$).

Sean los vectores $\mathbf{n}_A := (1, -2, 2)/3$, $\mathbf{n}_B := (3, 0, 4)/5$, e indiquemos por

$$s_A := \mathbf{S}_A \cdot \mathbf{n}_A, \quad s_B := \mathbf{S}_B \cdot \mathbf{n}_B$$

las proyecciones de los espines de A y B en las direcciones dadas por los vectores $\mathbf{n}_A, \mathbf{n}_B$, respectivamente. Los proyectores espectrales de estos observables s_A y s_B son, como es bien sabido,

$$P(s_A = \pm 1/2) = \tfrac{1}{2}(\mathbf{1}_2 \pm \sigma_3),$$
$$P(s_B = \pm 1) = \tfrac{1}{2}(\pm s_B + s_B s_B), \quad P(s_B = 0) = \mathbf{1}_3 - s_B s_B.$$

Supongamos que inicialmente ($t = 0$) el sistema AB se halla en un estado $\rho_{AB}(0)$ puro, dado por

$$\rho_{AB}(0) := P_A(s_A = -1/2) \otimes P_B(s_B = 0).$$

Dicho estado evoluciona en el tiempo con el Hamiltoniano

$$H := \tfrac{1}{2}(\mathbf{S}_A + \mathbf{S}_B)^2 := \tfrac{1}{2}(\mathbf{S}_A \otimes \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_A \otimes \mathbf{S}_B)^2$$

Cuando ha transcurrido un tiempo τ_0 desde el inicio ($t = 0$), realizamos una medición proyectiva y no selectiva de los observables s_A, s_B, obteniendo los resultados m_A, m_B con probabilidades $p(m_A, m_B)$.

Se pide:

1/ Escribir el estado inicial $\rho_{AB}(0)$, y calcular los estados parciales $\rho_A(0), \rho_B(0)$. Comprobar que las entropías de estos últimos son iguales y comentar por qué.

2/ Calcular, cuando $\tau_0 = \pi$, el estado $\rho_{AB}(\tau_0)$ del sistema, así como el tablero de probabilidades $p(m_A, m_B)$, para m_A, m_B recorriendo los valores $-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ y $-1, 0, 1$, respectivamente.

3/ Hallar el estado $\rho'_{AB}(\tau_0)$ del sistema inmediatamente tras la medición realizada en el instante $\tau_0 = \pi$. Comparar las entropías von Neumann de $\rho_{AB}(\tau_0)$ y $\rho'_{AB}(\tau_0)$, y luego comparar su diferencia con la entropía Shannon de la distribución de probabilidades $\{p(m_A, m_B)\}$ antes obtenida. Comentar el resultado.

4/ Hallar el estado $\rho_A(\tau_0)$ del subsistema A, y escribirlo en forma de Kraus, es decir, como

$$\rho_A(\tau_0) = \sum_j K_j(\tau_0)\rho_A(0)K_j^\dagger(\tau_0).$$

5/ Probar que la evolución del sistema compuesto es cíclica, y calcular su periodo.

2.6 Un sistema bipartito AB se halla en el estado dado por la siguiente matriz 15×15 en una base ortonormal tensorial:

$$\rho_{AB} = \frac{1}{55}\begin{pmatrix}
9 & -6 & 0 & 0 & -6 & 3 & 9 & 3 & 9 & 0 & 3 & -9 & -6 & 0 & -6 \\
-6 & 4 & 0 & 0 & 4 & -2 & -6 & -2 & -6 & 0 & -2 & 6 & 4 & 0 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-6 & 4 & 0 & 0 & 4 & -2 & -6 & -2 & -6 & 0 & -2 & 6 & 4 & 0 & 4 \\
3 & -2 & 0 & 0 & -2 & 1 & 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & -3 & -2 & 0 & -2 \\
9 & -6 & 0 & 0 & -6 & 3 & 9 & 3 & 9 & 0 & 3 & -9 & -6 & 0 & -6 \\
3 & -2 & 0 & 0 & -2 & 1 & 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & -3 & -2 & 0 & -2 \\
9 & -6 & 0 & 0 & -6 & 3 & 9 & 3 & 9 & 0 & 3 & -9 & -6 & 0 & -6 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3 & -2 & 0 & 0 & -2 & 1 & 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & -3 & -2 & 0 & -2 \\
-9 & 6 & 0 & 0 & 6 & -3 & -9 & -3 & -9 & 0 & -3 & 9 & 6 & 0 & 6 \\
-6 & 4 & 0 & 0 & 4 & -2 & -6 & -2 & -6 & 0 & -2 & 6 & 4 & 0 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-6 & 4 & 0 & 0 & 4 & -2 & -6 & -2 & -6 & 0 & -2 & 6 & 4 & 0 & 4
\end{pmatrix}.$$

Se pide:

1/ Probar que ρ_{AB} es puro. Sea ψ_{AB} un vector estado de ρ_{AB}. Calcularlo, salvo fase.

2/ Calcular los estados parciales ρ_A y ρ_B de los subsistemas A y B en ρ_{AB}. A través de los rangos de las matrices ρ_A y ρ_B discutir si ψ_{AB} es factorizable o no, es decir, si presenta, o no, entrelazamiento.

3/ Hallar la descomposición Schmidt de ψ_{AB}.
Consider a quantum system of two qutrits. Let it be in the pure state $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, with

$$|\psi\rangle = (|12\rangle + |21\rangle + |13\rangle + |31\rangle + |23\rangle + |32\rangle)/\sqrt{6},$$

where $\{|ij\rangle := |i\rangle \otimes |j\rangle\}$, with $i = 1,2,3,\ j = 1,2,3$, is an orthonormal basis in $\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3$.
1/ Write the corresponding density matrix.
2/ Is ρ separable?
3/ What is the value of its entanglement?
4/ Write $|\psi\rangle$ in its Schmidt form.