Representaciones, grupos de Lie y partículas elementales

Javier Prieto Prieto

Universidad Autónoma de Madrid

2 de julio de 2019

Índice

Índice

Formalismo lagrangiano

Habitualmente, dado un lagrangiano

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\colon F &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\phi, D\phi) &\longmapsto T(D\phi) - V(\phi) \end{aligned}$$

la dinámica del sistema se obtiene mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (D\phi)}$$

que equivalen a minimizar la acción

$$S = \int_M \mathcal{L} d\omega$$

Nuestro objetivo hoy es inferir aspectos cualitativos de la dinámica atendiendo solamente a los grupos bajo cuya acción el lagrangiano permanece invariante.

Motivación y definiciones

Definición 1.1

Sean G un grupo, V un espacio vectorial sobre un cuerpo K y $GL(V)$ el conjunto de aplicaciones K-lineales invertibles de V en V. Decimos que $\pi \colon G \longrightarrow GL(V)$ es una representación de G sobre V si π es un homomorfismo de grupos, donde la operación de grupo en $GL(V)$ viene dada por la composición; y que la dimensión de π es igual a $\dim_K V$.

Diremos que una representación es **real** cuando $K = \mathbb{R}$ y **compleja** cuando $K = \mathbb{C}$. Durante el resto de esta sección, G denotará siempre un grupo, π y ρ denotarán representaciones y V denotará un espacio vectorial.

Motivación y definiciones

Definición 1.2

Dos representaciones $\pi \colon G \longrightarrow GL(V)$ *y* $\pi \colon G \longrightarrow GL(V)$ *son equivalentes si existe un isomorfismo* ϕ *tal que* $\pi(g) = \phi^{-1}\rho(g)\phi$ *para todo* $g \in G$*.*

Definición 1.3

Dadas $\pi_1 \colon G \longrightarrow GL(V_1)$ *y* $\pi_2 \colon G \longrightarrow GL(V_2)$ *representaciones definimos su suma directa como*

$$(\pi_1 \oplus \pi_2)(g)((v_1, v_2)) = (\pi_1(g)(v_1), \pi_2(g)(v_2))$$

y su producto tensorial como

$$(\pi_1 \otimes \pi_2)(g)(v_1 \otimes v_2) = \pi_1(g)(v_1) \otimes \pi_2(g)(v_2),$$

para todos $v_1 \in V_1$*,* $v_2 \in V_2$ *y* $g \in G$*.*

Motivación y definiciones

Definición 1.4

Una **representación** *se dice* **unitaria** *si deja invariante el producto escalar en* V.

Teorema 1.1

Toda representación compleja de un grupo finito es suma directa de representaciones irreducibles.

Definición 1.5

Un **subespacio** $W \subseteq V$ *se dice* **invariante** *bajo la acción de* π *si* $\pi(g)(v) \in W$ *para todo* $v \in W$ *y* $g \in G$.

Definición 1.6

Una **representación** *se dice* **irreducible** *si sus únicos subespacios invariantes son el trivial y el total.*

Resultados elementales

Teorema 1.2 (Truco unitario de Weyl)

Toda representación de un grupo finito es equivalente a una representación unitaria.

Teorema 1.3 (Lema de Schur)

Sean π *y* ρ *representaciones complejas e irreducibles tales que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi(g)"'] & W \arrow[d, "\rho(g)"] \\ V \arrow[r, "\phi"] & W \end{tikzcd}$$

conmuta. Entonces, si $\dim V \neq \dim W$ *se tiene* $\phi = 0$*; y si* $\dim V = \dim W$ *se tiene* $\phi = \lambda \mathbf{1}$ *para algún* $\lambda \in \mathbb{C}$.

Carácter de una representación

Definición 1.7

Se denomina **carácter** *de una representación* π *a la aplicación*

$$\begin{aligned} \chi_\pi \colon G &\longrightarrow \mathbb{C} \\ g &\longmapsto \operatorname{Tr} \pi(g) \end{aligned}$$

Lema 1.1

Dadas π *y* ρ *representaciones finitas de un grupo finito, se tiene*

$$\chi_{\pi \oplus \rho} = \chi_\pi + \chi_\rho$$
$$\chi_{\pi \otimes \rho} = \chi_\pi \chi_\rho$$

Dado un grupo finito G, los caracteres son elementos del espacio vectorial $\{f \colon G \longrightarrow \mathbb{C}\}$. Además, por la propiedad cíclica de la traza, son constantes en cada clase de conjugación de G.

Relaciones de ortogonalidad

Este espacio se puede dotar del producto escalar

$$\langle f, h\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f^*(g)h(g),$$

lo que permite enunciar el siguiente

Teorema 1.4

Sean $\pi^{(\alpha)}$ y $\pi^{(\beta)}$ representaciones irreducibles de un grupo finito G. Entonces, en cualquier base, los elementos de sus matrices satisfacen

$$\langle {\pi^{(\alpha)}}^i{}_j, {\pi^{(\beta)}}^k{}_l\rangle = \frac{|G|}{\dim \pi^{(\alpha)}}\delta^\alpha_\beta \delta^i_l \delta^k_j$$

con $\delta^\alpha_\beta = 1$ si y solo si $\pi^{(\alpha)} \cong \pi^{(\beta)}$ y cero en otro caso.

La representación regular

Definición 1.8

Dado un grupo finito G, la representación regular de G es la que surge de identificar cada elemento $g \in G$ con un vector de una base cualquiera de $L^2(G) \cong \mathbb{C}^{|G|}$, digamos e_g, y dejar actuar G sobre sí mismo por la izquierda, es decir

$$\begin{aligned} \lambda\colon G &\longrightarrow GL(\mathbb{C}^{|G|}) \\ g &\longmapsto \lambda(g) \end{aligned}$$

con $\lambda(g)(e_h) = e_{gh}$.

La representación regular

Teorema 1.5

La representación regular se descompone como

$$\lambda \cong \bigoplus_{\pi \in \hat{G}} \underbrace{\pi \oplus \cdots \oplus \pi}_{d_\pi}$$

donde $\hat{G}$ es el conjunto de todas las representaciones irreducibles de G y d_π es la dimensión de π. Además, se tiene que

$$\sum_{\pi \in \hat{G}} d_\pi^2 = |G|.$$

Ejemplo: Sistema clásico

El lagrangiano para tres masas y muelles idénticos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\colon \mathrm{T}\,\mathbb{R}^6 &\longrightarrow \mathbb{R}\\ (\mathbf{r},\dot{\mathbf{r}}) &\longmapsto \frac{1}{2}\sum_{ij} m_i \dot{r}_{ij}^{\,2} - \mathbf{r}^\intercal K \mathbf{r}\end{aligned}$$

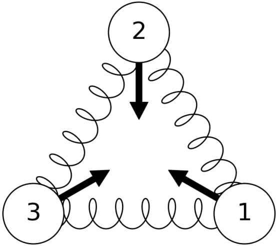
es invariante bajo

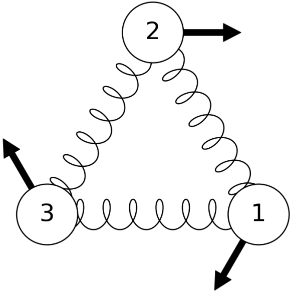
$$\begin{aligned}D\colon S_3 &\longrightarrow GL(\mathbb{R}^3\otimes\mathbb{R}^2)\\ \sigma &\longmapsto (\pi_3\otimes D_3)(\sigma).\end{aligned}$$

con π_3 permutando el primer índice y D_3 actuando como el grupo dihédrico del triángulo.

Modos normales

La tabla de caracteres nos dice que D es la representación regular y al diagonalizarla se pueden obtener los modos normales.





Índice

Definiciones

Definición 2.1

Un grupo de Lie G es un grupo que además es una variedad diferenciable de dimensión finita equipada con una estructura diferencial tal que la inversión $g \longmapsto g^{-1}$ y la operación del grupo $(g,h) \longmapsto gh$ son funciones regulares.

Definición 2.2

Un álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es un espacio vectorial real o complejo equipado con una forma bilineal $[,]: \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ antisimétrica que satisface la identidad de Jacobi

$$[x,[y,z]] + [z,[x,y]] + [y,[z,x]] = 0 \quad \forall x,y,z \in \mathfrak{g}.$$

Los elementos de una base cualquiera $\mathcal{B} = \{e_i\}_{i=1}^{\dim \mathfrak{g}}$ de $\mathfrak{g}$ se denominan generadores y las coordenadas de sus corchetes $[e_i, e_j] = \sum_k f_{ij}^k e_k$ se denominan constantes de estructura.

Definición 2.3

Dado un grupo de Lie de matrices $N \times N$ *con coeficientes en un cuerpo* K*,* $G \in GL_N(K)$*, definimos su álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *como el espacio tangente en la identidad,* $T_{\mathbf{1}}G$*, equipado con el corchete definido por el conmutador* $[X, Y] = XY - YX$*.*

Definición 2.4

Dados un grupo de Lie G *y su álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$*, la aplicación exponencial se define como*

$$\begin{aligned} \exp\colon \mathfrak{g} &\longrightarrow G \\ X &\longmapsto \gamma(1) \end{aligned}$$

donde $\gamma\colon \mathbb{R} \longrightarrow G$ *es la única curva tal que* $\gamma(0) = \mathbf{1}$*,* $\gamma'(0) = X$ *y* $\gamma(t)\gamma(s) = \gamma(s+t)\,\forall s, t \in \mathbb{R}$*. En particular, si* G *es un grupo de matrices, se cumple que*

$$\exp(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{X^k}{k!}.$$

Grupos de Lie clásicos y sus álgebras

Nombre	Subgrupo de	Definición	Lectura
$O(N)$	$GL_N(\mathbb{R})$	$M^{-1} = M^\intercal$	Ortogonal
$SO(N)$	$GL_N(\mathbb{R})$	$M^{-1} = -M^\intercal$, $\det M = 1$	Especial ortogonal
$U(N)$	$GL_N(\mathbb{C})$	$M^{-1} = M^\dagger$	Unitario
$SU(N)$	$GL_N(\mathbb{C})$	$M^{-1} = M^\dagger$, $\det M = 1$	Especial unitario

Cuadro: Grupos de Lie clásicos

Nombre	Subgrupo de	Definición	Dimensión
$\mathfrak{o}(N)$	$\mathcal{M}_{N\times N}(\mathbb{R})$	$M^\intercal = -M$	$N(N-1)/2$
$\mathfrak{so}(N)$	$\mathcal{M}_{N\times N}(\mathbb{R})$	$M^\intercal = -M$, $\operatorname{Tr} M = 0$	$N(N-1)/2$
$\mathfrak{u}(N)$	$\mathcal{M}_{N\times N}(\mathbb{C})$	$M^\dagger = -M$	N^2
$\mathfrak{su}(N)$	$\mathcal{M}_{N\times N}(\mathbb{C})$	$M^\dagger = -M$, $\operatorname{Tr} M = 0$	$N^2 - 1$

Cuadro: Álgebras de Lie clásicas

Definición 2.5

Si G es un grupo de Lie de matrices y $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie, llamamos representación adjunta de G a la aplicación

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}\colon G &\longrightarrow GL(\mathfrak{g}) \\ g &\longmapsto \mathrm{Ad}_g \end{aligned}$$

que actúa por conjugación, enviando cada $X \in \mathfrak{g}$ a $\mathrm{Ad}_g(X) = gXg^{-1}$.

La aplicación tangente de Ad en la identidad se denota ad y satisface $ad_X(Y) = [X, Y]$, por lo que es un homomorfismo (preserva el corchete) entre las álgebras de Lie $\mathfrak{g}$ y $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$.

Representaciones de grupos de Lie compactos

Vamos a caracterizar las representaciones irreducibles de un grupo de Lie compacto G. Sea $T \subseteq G$ el subgrupo abeliano maximal[1] y sea $\mathfrak{t}$ su álgebra de Lie. Se tiene que, para cualquier representación unitaria[2] π de G, la imagen de su restricción $\pi|_T$ son matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} \chi_1(g) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \chi_2(g) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \chi_d(g) \end{pmatrix},$$

con $\chi_k(g) \in U(1)$, módulo conjugación. Por tanto, $\pi|_T$ es suma directa de irreducibles de dimensión 1 y Im T es isomorfo a un toro, por lo que T recibe el nombre de *toro maximal*.

[1] Único módulo conjugación.

[2] Si G es compacto, dada cualquier representación podemos generalizar el truco unitario de Weyl empleando la medida de Haar y encontrar una representación unitaria equivalente.

Ahora observamos que el diagrama

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "\chi"] & U(1) \\ \mathfrak{t} \arrow[u, "\exp"] \arrow[r, "d\chi"] & \mathfrak{u}(1) \arrow[u, "\exp"'] \end{tikzcd}$$

conmuta, luego cada representación irreducible de T está determinada por una aplicación lineal $\ell\colon \mathfrak{t} \longrightarrow \mathfrak{u}(1) \cong \mathbb{R}$. Además, sabemos que si

$$X \in \ker(\exp) = \{H \in \mathfrak{t}\colon \exp(2\pi i H) = \mathbf{1}\} \subset \mathfrak{t}$$

debe ocurrir $\ell(X) \in 2\pi i\,\mathbb{Z}$, porque se debe tener $\chi(\mathbf{1}) = 1$. Esto significa que el núcleo de la exponencial forma un retículo $L \subset \mathfrak{t}$ y que las ℓ son su retículo dual $L^* \subset \mathfrak{t}^*$.

Cada ℓ recibe el nombre de *peso analíticamente entero*. Si todas las representaciones finitas de T son reducibles[3], basta dar la multiplicidad de cada peso para caracterizarla unívocamente. Por otro lado, al diagonalizar $\pi|_T$ se induce una descomposición del espacio vectorial sobre el que actúa como suma directa de los subespacios asociados a cada peso

$$V_\ell = \{v \in V : d\pi(H)v = \ell(H)v, \forall H \in \mathfrak{t}\},$$

es decir, $V = \bigoplus_{\ell \in L^*} V_\ell$. Se puede demostrar[4] que para extender $\pi|_T$ de nuevo a todo G de forma que π sea irreducible podemos tomar un peso y actuar con los operadores "escalera"

$$\begin{aligned} d\pi(H)d\pi(Z_\alpha)v &= d\pi(Z_\alpha)d\pi(H)v + d\pi([H, Z_\alpha])v \\ &= \ell(H)d\pi(Z_\alpha)v + d\pi(\mathrm{ad}_H(Z_\alpha)v \\ &= (\ell(H) + \alpha(H))d\pi(Z_\alpha)v \end{aligned}$$

[3] Algo que ocurre cuando $\mathfrak{t}$ es semisimple.

[4] Teorema del peso más alto

Ejemplo: $SU(2)$

En el álgebra $\mathfrak{su}(2)$ se suelen tomar como generadores

$$i\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad i\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad i\sigma_z = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}.$$

La subálgebra de Cartan está generada por $i\sigma_z$ y es isomorfa a $\mathbb{R}$ como espacio vectorial. El retículo de pesos es $L^* \cong i\,\mathbb{Z}$ y la representación adjunta de $i\sigma_z$ es

$$\mathrm{ad}_{i\sigma_z} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

por lo que las raíces son $\alpha_\pm = \pm 2$. Si una representación irreducible π tiene como peso más alto n, entonces, aplicando Z_- se tiene

$$V_n \xrightarrow[Z_-]{} V_{n-2} \xrightarrow[Z_-]{} \dots \xrightarrow[Z_-]{} V_{-n+2} \xrightarrow[Z_-]{} V_{-n} \xrightarrow[Z_-]{} \{0\},$$

por lo que π contiene todos los pesos $\{n, n-2, \dots, -n+2, -n\}$

Índice

Electrodinámica cuántica

Partimos del lagrangiano

$$\mathcal{L}_{free} = \imath\overline{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - m\overline{\Psi}\Psi,$$

con

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}\,\mathbf{1}_4\,, \tag{1}$$

las matrices γ y Ψ un espinor[5]. Vemos que $\mathcal{L}$ no cambia al hacer $\Psi \mapsto e^{i\theta}\Psi$ con θ constante. Sin embargo, al "promover" θ a una función que cambia con el punto, aparece un término extra en la derivada que estropea la invarianza.

[5] Sección de un fibrado que transforma bajo la representación $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$ del grupo de Poincaré.

La derivada covariante

La solución es definir una derivada covariante como $D_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu$ donde A_μ es el generador del álgebra de Lie $\mathfrak{u}(1)$. Así pues

$$\begin{aligned}
\left(\partial_\mu - \imath q A'_\mu\right)\left(e^{\imath\theta}\Psi\right) &= e^{\imath\theta}\left(\partial_\mu - \imath q A_\mu\right)\Psi \\
e^{\imath\theta}\left(\partial_\mu - \imath q A'_\mu + \partial_\mu\theta\right)\Psi &= e^{\imath\theta}\left(\partial_\mu - \imath q A_\mu\right)\Psi \\
A'_\mu &= A_\mu + q^{-1}\partial_\mu\theta
\end{aligned}$$

El modelo estándar

En el modelo estándar de la física de partículas, cada partícula elemental está asociada a una representación irreducible del grupo $\mathrm{Poincaré} \times \mathrm{Gauge}$, donde

- $\mathrm{Poincaré}$ es el grupo (afín) de isometrías del espacio de Minkowski.
- Gauge es el grupo $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$, que da cuenta de las simetrías "internas".
- Falta incluir el Higgs para dar masa a las partículas.