

# Índice General

Introducción a la lógica matemática	ix
<b>1 Lógica de primer orden</b>	<b>1</b>
<b>Capítulo I: Lenguajes y modelos</b>	<b>3</b>
1.1 Estructuras . . . . .	4
1.2 Lenguajes formales y modelos . . . . .	7
1.3 Expresiones, términos y fórmulas . . . . .	15
1.4 Variables libres y ligadas . . . . .	24
1.5 Sustitución . . . . .	27
1.6 Fórmulas verdaderas y falsas . . . . .	35
1.7 Consideraciones finales . . . . .	37
<b>Capítulo II: El cálculo deductivo</b>	<b>39</b>
2.1 Reglas de inferencia semánticas . . . . .	39
2.2 Sistemas deductivos formales . . . . .	45
2.3 Reglas derivadas de inferencia . . . . .	57
2.4 Algunos teoremas lógicos . . . . .	69
2.5 Consideraciones finales . . . . .	74
<b>Capítulo III: Teorías axiomáticas</b>	<b>75</b>
3.1 Consistencia y completitud . . . . .	75
3.2 La teoría básica de conjuntos . . . . .	80
3.3 La teoría de Zermelo . . . . .	97
3.4 Interpretaciones de teorías . . . . .	101
3.5 Descriptores . . . . .	107
<b>Capítulo IV: La completitud semántica</b>	<b>113</b>
4.1 Conjuntos maximalmente consistentes . . . . .	114
4.2 La prueba del teorema de completitud . . . . .	119
4.3 Consecuencias del teorema de completitud . . . . .	125
4.4 Consideraciones finales . . . . .	135

<b>2</b>	<b>Teorías aritméticas</b>	<b>139</b>
<b>Capítulo V:</b>	<b>La aritmética de Peano</b>	<b>141</b>
5.1	La aritmética de Robinson . . . . .	141
5.2	La aritmética con inducción abierta . . . . .	149
5.3	La jerarquía de Kleene . . . . .	152
5.4	Relaciones y funciones aritméticas . . . . .	159
5.5	Conjuntos en $\text{I}\Sigma_1$ . . . . .	163
<b>Capítulo VI:</b>	<b>La teoría de Kripke-Platek</b>	<b>177</b>
6.1	La jerarquía de Lévy . . . . .	177
6.2	La teoría KP . . . . .	180
6.3	KP como teoría aritmética . . . . .	182
6.4	Conceptos conjuntistas básicos . . . . .	192
6.5	Recolección, especificación y reemplazo . . . . .	194
6.6	Conjuntos finitos, cardinales . . . . .	197
6.7	Sucesiones . . . . .	203
6.8	Sumas finitas . . . . .	207
6.9	$\text{I}\Sigma_1$ como teoría de conjuntos . . . . .	210
6.10	La formalización de la aritmética . . . . .	214
<b>Capítulo VII:</b>	<b>La teoría de la recursión</b>	<b>225</b>
7.1	Funciones y relaciones recursivas . . . . .	225
7.2	Caracterización aritmética . . . . .	231
7.3	Funciones recursivas parciales . . . . .	238
7.4	Máquinas de Turing . . . . .	240
7.5	La tesis de Church-Turing . . . . .	245
7.6	Codificación de las funciones recursivas . . . . .	253
7.7	Relaciones diofánticas . . . . .	259
<b>Capítulo VIII:</b>	<b>La formalización de la lógica</b>	<b>277</b>
8.1	Lenguajes y teorías formales . . . . .	278
8.2	Relación con las teorías metamatemáticas . . . . .	293
8.3	La $\Sigma_1$ -completitud de $\mathcal{Q}$ . . . . .	301
8.4	Satisfacción de fórmulas de $\mathcal{L}_a$ . . . . .	309
<b>Capítulo IX:</b>	<b>Incompletitud</b>	<b>323</b>
9.1	El primer teorema de incompletitud . . . . .	323
9.2	El teorema de Tarski . . . . .	330
9.3	El segundo teorema de incompletitud . . . . .	333
9.4	Incompletitud y aritmética no estándar . . . . .	338
9.5	Modelos no estándar . . . . .	342

### 3 Teorías de conjuntos 353

#### Capítulo X: Clases y conjuntos 355

10.1 La aritmética de segundo orden . . . . .	356
10.2 La equivalencia entre $AP_2$ y $Z_{\text{num}}$ . . . . .	372
10.3 La teoría de conjuntos $ZF^*$ . . . . .	382
10.4 Las teorías de conjuntos $NBG^*$ y $MK^*$ . . . . .	386

#### Capítulo XI: Los axiomas restantes de la teoría de conjuntos 401

11.1 El axioma de infinitud . . . . .	401
11.2 El axioma de partes . . . . .	413
11.3 El axioma de regularidad I . . . . .	416
11.4 Relaciones bien fundadas . . . . .	423
11.5 El axioma de regularidad II . . . . .	431
11.6 El axioma de elección . . . . .	433

#### Capítulo XII: Las teorías de conjuntos ZFC y NBG 441

12.1 Relación con KP . . . . .	443
12.2 La formalización de la lógica en ZF y KP . . . . .	451
12.3 Consistencia e independencia del axioma de regularidad . . . . .	466
12.4 Teorías de conjuntos con átomos . . . . .	474
12.5 El teorema de reflexión . . . . .	479
12.6 Consideraciones finales . . . . .	482

#### Apéndice A: El cálculo secuencial de Gentzen 485

A.1 Conceptos y resultados básicos . . . . .	486
A.2 Consistencia y completitud . . . . .	498
A.3 La aritmética de Peano . . . . .	505
A.4 Eliminación de cortes . . . . .	507
A.5 La formalización del cálculo secuencial . . . . .	520
A.6 La reflexividad de AP . . . . .	526
A.7 Funciones demostrablemente recursivas . . . . .	530

#### Apéndice B: Conceptos elementales de la teoría de conjuntos 539

B.1 Definiciones básicas . . . . .	539
B.2 Otros conceptos conjuntistas . . . . .	545
B.3 La jerarquía de Lévy . . . . .	546

#### Bibliografía 549

#### Índice de Materias 551