Carlos Ivorra Castillo

ESQUEMAS

Hubo un tiempo en el que todas las partes de la materia estaban dispersas, cuando el álgebra, la geometría y la aritmética, o bien vivían separadas, o mantenían relaciones frías, reducidas a llamadas ocasionales de una a otra; pero eso se está acabando; las tres se están acercando y aparecen constantemente conectadas e íntimamente relacionadas por miles de fuertes lazos, y podemos esperar con confianza en que llegará un tiempo en el que no formarán sino un solo cuerpo con una sola alma.

J.J. Sylvester

Índice General

Introducción

Si S es una superficie de Riemann compacta y conexa de género $g \geq 1$, el teorema de Abel-Jacobi afirma que su grupo de clases de grado 0, $\mathrm{Pic}^0(S)$, es isomorfo a un toro complejo J de dimensión g, que es un grupo de Lie compacto y conexo, al que se le llama *variedad jacobiana*[1] de S. Más aún, J es una variedad algebraica, en el sentido de que es conformemente equivalente a una variedad algebraica proyectiva, es decir, a un subconjunto de un espacio proyectivo $\mathrm{P}^n(\mathbb{C})$ definido por un sistema de ecuaciones polinómicas homogéneas. (Esto no lo cumplen todos los toros complejos, pero sí los que pueden obtenerse como variedad jacobiana de una superficie de Riemann.)

En 1940, André Weil anunció que tenía una demostración de la hipótesis de Riemann para curvas algebraicas definidas sobre cuerpos finitos,[2] bajo el supuesto de que el teorema de Abel-Jacobi fuera generalizable a curvas algebraicas proyectivas regulares definidas sobre un cuerpo arbitrario. (Observemos que una superficie de Riemann es lo mismo[3] que una curva proyectiva regular sobre $\mathbb{C}$.)

No vamos a dar aquí un enunciado preciso de la generalización necesaria, pero en esencia consiste asociar a cada curva proyectiva regular C/k una variedad proyectiva regular J_C (su variedad jacobiana), definida también sobre k, que sea una *variedad abeliana,* es decir, que tenga una estructura de grupo abeliano definida mediante aplicaciones regulares $+ : J_C \times J_C \longrightarrow J_C$ y $- : J_C \longrightarrow J_C$, y de modo que, con esta estructura de grupo, sea isomorfa al grupo $\mathrm{Pic}^0(C)$.

Esta generalización del teorema de Abel-Jacobi no es trivial en absoluto, pero hay que tener en cuenta que Weil se encontraba entonces en una prisión militar a causa de *"un différend avec les autorités françaises au sujet de mes obligations militaires"*. Según él mismo explicó: *"En d'autres circonstances, une publication m'aurait paru bien prématurée. Mais, en avril 1940, pouvait-on se croire assuré du lendemain?"*

El caso era que Weil "casi" sabía como construir la variedad jacobiana de una curva, y el "casi" lo concretó en la década siguiente: en 1944 terminó sus *Foundations of Algebraic Geometry* (publicadas en 1946), en las que introdujo

[1]Cf. mi libro de *Geometría algebraica,* definiciones 1.76 y 10.8, teoremas 1.77, 10.9 y 10.19.
[2]Cf. mi libro de *Curvas elípticas,* Apéndice A.
[3]Cf. mi libro de *Geometría Algebraica,* comentarios tras el teorema 6.29.

un concepto abstracto de variedad algebraica, respecto al cual las variedades proyectivas y cuasiproyectivas son como las subvariedades diferenciales de $\mathbb{R}^n$ a las variedades diferenciales abstractas; mientras que en 1948 completó sus libros *"Sur les Courbes algébriques et les Varietés qui s'en déduisent"* y *"Varietés Abeliennes et Courbes Algébriques",* en los que construyó las variedades jacobianas como variedades abstractas, no necesariamente proyectivas, y demostró la hipótesis de Riemann de acuerdo con su idea original.[4]

Las variedades jacobianas construidas por Weil son variedades abelianas abstractas, es decir, variedades (abstractas) dotadas de una estructura de grupo definida mediante homomorfismos entre variedades (el análogo algebraico a un grupo de Lie) y que además son *completas,* que es el análogo abstracto a la compacidad en el caso de variedades complejas. Sin embargo, Weil no pudo demostrar que las variedades jacobianas pudieran sumergirse en un espacio proyectivo. (Mientras toda variedad diferencial (real) abstracta es difeomorfa a una subvariedad de $\mathbb{R}^n$, para un n suficientemente grande, no es cierto que toda variedad algebraica abstracta pueda sumergirse en un espacio proyectivo. Ni siquiera es cierto para variedades completas.)

En 1953, Barsoti y Matsusaka demostraron independientemente que toda variedad abeliana es proyectiva, y Weil encontró otra demostración en 1957.

Mientras tanto, Oskar Zariski estaba obteniendo profundos resultados en geometría algebraica mediante técnicas completamente distintas a las de Weil: las técnicas del álgebra conmutativa. Planeaba escribir sus propios fundamentos de la geometría algebraica, pero sólo llegó a publicar dos volúmenes de Álgebra conmutativa en colaboración con P. Samuel (1958 y 1960). Ello se debió a que fue Alexander Grothendieck quien encontró la forma más adecuada de conectar la geometría algebraica con el álgebra conmutativa, a través de la teoría de *esquemas.* Entre 1960 y 1967 fue publicando, en colaboración con J. Dieudonné, sus *Éléments de Géométrie Algébrique,* que en un principio debía constar de trece partes, aunque al final sólo se publicaron cuatro (en ocho entregas) y hay un borrador de la quinta.

Se produjo así una situación muy desagradable: ahora existían dos fundamentaciones distintas de la geometría algebraica: la de Weil y la de Grothendieck, que constituían dos lenguajes distintos, por no decir incompatibles entre sí, en el sentido de que traducir, no ya una prueba, sino simplemente un enunciado, de uno al otro no era trivial en absoluto. En sí mismos, ambos son dos obras monumentales del pensamiento humano, pero, comparativamente, la teoría de Grothendieck es muy superior a la de Weil, puesto que permite reducir fácilmente muchos problemas geométricos a meros problemas de álgebra conmutativa, que puede entender y abordar un algebrista aunque no esté familiarizado con la geometría. La teoría de Weil, en cambio, resulta esotérica para cualquiera que no esté muy familiarizado con ella, y requiere sus propios métodos, de modo que no es fácil aprovechar con ella las posibilidades del álgebra conmutativa.

[4]Posteriormente, Stepanov, Schmidt y Bombieri encontraron una demostración más elemental en la que no intervienen las variedades jacobianas, que es en esencia la demostración que aparece en mi libro de *Curvas elípticas.*

Lo desagradable es que una generación de matemáticos se había estudiado los fundamentos de Weil, y ahora se encontraba con que para trabajar desde el punto de vista de Grothendieck había que empezar de cero, y muchos nunca llegaron a hacerlo. Ya nadie usa el lenguaje de Weil, y algunos textos valiosos de geometría algebraica (entre ellos los del propio Weil, pero muchos más, como los de S. Lang o A. Néron) son prácticamente ilegibles, salvo que un lector se arme de la paciencia necesaria para digerir primero los libros originales de Weil, y sabiendo que luego tendrá serios problemas para expresar lo que aprenda en términos modernos.

En este libro exponemos lo fundamental de la teoría de esquemas de Grothendieck. No vamos a construir las variedades jacobianas, pues para ello necesitaríamos entrar a fondo en la teoría de variedades abelianas, lo que daría pie a otro libro, pero sí veremos la prueba de Weil de que toda variedad abeliana es proyectiva (adaptada al lenguaje de los esquemas, naturalmente). Además de su valor histórico como motivación de la geometría algebraica abstracta, la demostración tiene el interés de que en ella intervienen casi todos los resultados que presentamos, que no son pocos.

Una buena parte de estos resultados son versiones abstractas de los resultados que en mi libro de *Geometría algebraica* aparecen enunciados y demostrados en términos clásicos. Tal y como ya hemos mencionado, una de las ventajas de la teoría de esquemas es que permite aplicar a la geometría algebraica las técnicas del álgebra conmutativa, y también facilita la aplicación del álgebra homológica. La mayor parte de requisitos en ambas ramas los he presentado separadamente en mi *Álgebra homológica y álgebra conmutativa,* de modo que los números entre corchetes, como [3.2], son referencias a este libro.

Para terminar, quiero agradecer al profesor Qing Liu la correspondencia que amablemente ha mantenido conmigo y que me ha sido de ayuda inestimable a la hora de asimilar algunos aspectos de esta teoría. Todas sus observaciones, indicaciones y comentarios han sido valiosísimos para mí. Su libro [6] es, sin duda, la mejor opción para todo aquel que desee profundizar más en la teoría de esquemas y sus aplicaciones a la geometría aritmética.

Capítulo I

La geometría clásica

Antes de presentar la teoría de esquemas, conviene revisar —aunque sea brevemente— los conceptos de la geometría algebraica clásica que constituyen el punto de partida de la teoría moderna. La geometría algebraica surge a partir del problema de estudiar los sistemas de ecuaciones polinómicas, lo que conduce al concepto de conjunto algebraico afín.[1] Los conjuntos algebraicos afines son suficientes para estudiar problemas locales en geometría algebraica, pero para las cuestiones globales hemos de tener en consideración los puntos infinitos que aparecen cuando consideramos dichos conjuntos dentro del espacio proyectivo (de modo que, por ejemplo, una parábola tiene un punto infinito y una hipérbola tiene dos). Esto nos lleva al concepto de conjunto algebraico proyectivo, que estudiaremos aquí. A su vez, para unificar el estudio de los conjuntos algebraicos afines y proyectivos conviene introducir la noción de conjunto algebraico cuasiproyectivo.

1.1 Conjuntos proyectivos

En lo sucesivo K será un cuerpo algebraicamente cerrado y k un subcuerpo arbitrario. Representaremos por $\mathrm{P}^n = \mathrm{P}^n(K)$ el espacio proyectivo n-dimensional. Fijado un sistema de referencia, sus puntos vienen determinados por coordenadas homogéneas, esto es, clases de equivalencia en $A^{n+1} \setminus \{0\}$ de modo que dos vectores de coordenadas se corresponden con el mismo punto si y sólo si se diferencian en un factor constante no nulo. Un cambio de sistema de referencia transforma linealmente las coordenadas homogéneas de los puntos. Podemos considerar $\mathrm{P}^n(k) \subset \mathrm{P}^n(K)$. Todo sistema de referencia proyectivo de $\mathrm{P}^n(k)$ lo es también de $\mathrm{P}^n(K)$ y, respecto a tal sistema, los puntos de $\mathrm{P}^n(k)$ son los que admiten un vector de coordenadas homogéneas en $A^{n+1}(k)$. Consideraremos únicamente sistemas de referencia en $\mathrm{P}^n(k)$.

Sea $P \in \mathrm{P}^n$ y $F \in k[X_0, \ldots, X_n]$. Fijado un sistema de referencia, diremos que P es un cero de F (y lo representaremos por $F(P) = 0$) si F se anula en

[1] Los resultados básicos sobre la geometría afín se encuentran en la sección [3.2].

todos los vectores de coordenadas homogéneas de P. Si $F = F_0 + \cdots + F_d$ es la descomposición de F en polinomios homogéneos, esto equivale a que cada F_i se anule en P. En efecto, fijado un vector de coordenadas homogéneas X, tenemos que

$$0 = F(\lambda X) = F_0(X) + \lambda F_1(X) + \cdots + \lambda^d F_d(X)$$

para todo $\lambda \in K$. El miembro derecho es un polinomio en λ con infinitas raíces, luego sus coeficientes son todos nulos.

Si S es un conjunto de polinomios homogéneos, representaremos por

$$V(S) = \{P \in \mathrm{P}^n \mid F(P) = 0\}.$$

Un conjunto $C \subset \mathrm{P}^n$ es un *conjunto algebraico proyectivo* si es de la forma $C = V(S)$ para cierto conjunto $S \subset K[X_0, \ldots, X_n]$ de polinomios homogéneos. Si $S \subset k[X_0, \ldots, X_n]$ diremos que C *está definido sobre* k y lo representaremos por C/k. El carácter algebraico de un conjunto no depende del sistema de referencia.

Si C/k es un conjunto algebraico proyectivo no vacío de P^n, llamaremos

$$I(C) = \{F \in k[X_0, \ldots, X_n] \mid F(P) = 0 \text{ para todo } P \in C\}.$$

Pronto veremos que conviene definir $I(\varnothing) = (X_0, \ldots, X_n)$. Claramente $I(C)$ es un ideal radical. Más aún, es un ideal homogéneo, el en sentido siguiente:

Definición 1.1 Un ideal I de un anillo graduado A es *homogéneo* si está generado por elementos homogéneos.

Teniendo en cuenta que un polinomio se anula en un punto si y sólo si se anulan sus componentes homogéneas, tenemos que si C/k es un conjunto algebraico, entonces el ideal $I(C)$ está generado por los polinomios homogéneos que contiene.

Teorema 1.2 *Sea A un anillo graduado e I un ideal de A. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

a) I es homogéneo.

b) I contiene las componentes homogéneas de sus elementos.

c) A/I es un anillo graduado con la graduación $(A/I)_k = (A_k + I)/I$.

Demostración: a) $\Rightarrow$ b) Sea S un generador de I formado por elementos homogéneos. Si $a \in I$, entonces $a = \sum\limits_i c_i s_i$, con $s_i \in S$, $c_i \in A$. Si descomponemos cada c_i en componentes homogéneas tenemos una expresión de a como suma de elementos homogéneos todos ellos múltiplos de los s_i, luego todos ellos están en I. Al agruparlos según su grado obtenemos la descomposición de a en componentes homogéneas.

b) $\Rightarrow$ a) Claramente I está generado por los elementos homogéneos que contiene.

b) $\Rightarrow$ c) Es claro que $A/I = \sum\limits_k (A/I)_k$. Basta probar que la suma es directa, pues obviamente el grado de un producto de elementos homogéneos es la suma de sus grados.

Tomamos una suma $\sum\limits_{k=0}^{n} \bar{a}_k = 0$, con $\bar{a}_k \in (A/I)_k$ y hemos de probar que cada sumando es nulo. En principio $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k \in I$, luego por b) cada $a_k \in I$, luego $\bar{a}_k = 0$.

c) $\Rightarrow$ b) Si $a = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \in I$, con $a_k \in A_k$, entonces la clase de a en A/I es nula, luego cada componente homogénea $a_k + I$ ha de ser nula, luego cada $a_k \in I$. ■

Ahora vamos a demostrar la versión proyectiva del teorema de los ceros de Hilbert, que nos da la relación exacta entre los conjuntos algebraicos proyectivos y los ideales homogéneos. Lo obtendremos a partir del resultado análogo de la geometría afín a través del concepto de cono:

Definición 1.3 El *cono afín* de un conjunto algebraico proyectivo C/k en P^n es el conjunto $\tilde{C} \subset A^{n+1}$ de todas las coordenadas homogéneas de los puntos de C más el punto 0.

Es inmediato que si S es un conjunto de polinomios homogéneos tal que $C = V(S)$ como conjunto proyectivo, entonces $\tilde{C} = V(S)$ como conjunto afín. Para evitar confusiones, en el razonamiento siguiente escribiremos V_a y V_p para referirnos a los conjuntos de ceros de un conjunto de polinomios en A^{n+1} y en P^n respectivamente. Aunque en este caso no hay ambigüedad, distinguiremos también entre V_a y V_p.

Es claro que si $C \neq \varnothing$, entonces $I_p(C) = I_a(\tilde{C})$, y si I es un ideal homogéneo de $k[X_0, \ldots, X_n]$ tal que $V_p(I) \neq \varnothing$, entonces $\widetilde{V_p(I)} = V_a(I)$. Así pues, si $V_p(I) \neq \varnothing$, tenemos que

$$I_p(V_p(I)) = I_a(\widetilde{V_p(I)}) = I_a(V_a(I)) = \operatorname{rad} I.$$

De aquí que si $C = V_p(I)$ es un conjunto algebraico no vacío, entonces

$$V_p(I_p(C)) = V_p(I_p(V_p(I))) = V_p(\operatorname{rad} I) = V_p(I) = C.$$

Respecto al conjunto vacío, la situación es la siguiente: Si $V_p(I) = \varnothing$ es porque $V_a(I) \subset \{0\}$, lo que a su vez equivale a que

$$(X_0, \ldots, X_n) = I_a(\{0\}) \subset I_a(V_a(I)) = \operatorname{rad} I.$$

Ahora es inmediato el teorema siguiente:

Teorema 1.4 (Teorema de los ceros de Hilbert) *Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado y k un subcuerpo de K. La correspondencia $C \mapsto I(C)$ es una biyección entre el conjunto de todos los conjuntos algebraicos proyectivos C/k y el conjunto de todos los ideales homogéneos radicales $I \subset (X_0, \ldots, X_n)$ de $k[X_0, \ldots, X_n]$. Su inversa es la aplicación $I \mapsto V(I)$. Para todo ideal homogéneo $I \neq k[X_0, \ldots, X_n]$ se cumple que $I(V(I)) = \operatorname{Rad} I$.*

Si C/k es un conjunto algebraico proyectivo, fijado un sistema de referencia en P^n podemos definir el álgebra $A_k[C] = k[X_0, \ldots, X_n]/I(C)$, que es una k-álgebra graduada noetheriana y reducida. Ahora bien, a diferencia de lo que sucede en el caso afín, no podemos interpretar sus elementos como funciones sobre C. Pese a ello, para cada subconjunto algebraico $D \subset C$ podemos definir

$$I_C(D) = \{f \in A_k[C] \mid f(P) = 0\},$$

entendiendo que si $f = [F]$, entonces $f(P) = 0$ significa que $F(P) = 0$, lo cual tiene sentido y no depende del representante de la clase. Es inmediato que $I_C(D) = I(D)/I(C)$, lo que nos da una biyección entre los subconjuntos algebraicos de C y los ideales radicales homogéneos de $A_k[C]$ distintos de $A_k[C]$. La correspondencia inversa es la que asigna a cada ideal $I \subset A_k[C]$ el conjunto algebraico

$$V_C(I) = \{P \in C \mid f(P) = 0 \text{ para todo } f \in I\}.$$

Como en el caso afín, es inmediato que la intersección arbitraria y la unión finita de conjuntos algebraicos proyectivos es también un conjunto proyectivo. Esto nos permite definir la *topología de Zariski* en P^n (relativa a k) como la topología que tiene por cerrados a los subconjuntos algebraicos de P^n definidos sobre k. La topología de Zariski en un conjunto algebraico proyectivo definido sobre k será la restricción de la topología de Zariski de P^n. El hecho de que los anillos $A_k[C]$ sean noetherianos implica que los conjuntos algebraicos proyectivos son espacios topológicos noetherianos. En particular admiten una descomposición única en unión finita de componentes irreducibles.

Llamaremos *variedades proyectivas* a los conjuntos algebraicos proyectivos irreducibles.

Como en el caso afín, se prueba que un conjunto algebraico proyectivo C es primo si y sólo si el ideal $I(C)$ es primo. Sólo es necesaria la siguiente observación adicional:

Teorema 1.5 *En un anillo graduado A, un ideal homogéneo I es primo si y sólo si cuando $ab \in I$ con a y b homogéneos, entonces $a \in I$ o $b \in I$.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $a \notin I$ y $b \notin I$. Sea a_m la componente homogénea de menor grado de a que no está en I y sea b_n la componente homogénea de menor grado de b que no está en I. Entonces

$$(ab)_{mn} = \sum_{u+v=m+n} a_u b_v \in I.$$

Por la elección de m y n, todos los sumandos tienen un factor en I salvo $a_m b_n$, luego $a_m b_n \in I$, en contradicción con la hipótesis. ■

Ejemplo Consideremos el conjunto

$$C = \{(s^3, s^2t, st^2, t^3) \in \mathrm{P}^3 \mid (s,t) \in \mathrm{P}^1\}.$$

Observemos que $C = V(F_1, F_2, F_3)$, donde

$$F_1 = X_1^2 - X_0X_2, \quad F_2 = X_2^2 - X_1X_3, \quad F_3 = X_0X_3 - X_1X_2.$$

Una inclusión es obvia. Si un punto $P = (a, b, c, d)$ cumple las ecuaciones

$$b^2 - ac = 0, \quad c^2 - bd = 0, \quad ad - bc = 0,$$

distinguimos dos casos: o bien $a = 0$, en cuyo caso $b = c = 0$, con lo que, ciertamente, $P = (0, 0, 0, 1) \in C$; o bien $a \neq 0$, en cuyo caso podemos suponer que $a = 1$. Tomamos $s = 1$, $t = b$, con lo que

$$a = s^3, \quad b = s^2t, \quad c = b^2 = st^2, \quad d = bc = b^3 = t^3.$$

En definitiva, $P \in C$. Llamemos $I = (F_1, F_2, F_3)$. Vamos a probar que I es primo, con lo que C es una variedad proyectiva, y además $I(C) = I(V(I)) = I$. Llamemos $B = k[X_0, X_1, X_2, X_3]/I$. Hemos de probar que B es un dominio íntegro. Observemos que $B = k[x_0, x_1, x_2, x_3]$, y los generadores cumplen las relaciones

$$x_1^2 = x_0x_2, \quad x_2^2 = x_1x_3, \quad x_1x_2 = x_0x_3.$$

Definimos un homomorfismo $k[X_0, X_1, X_2, X_3] \longrightarrow k[S, T]$ mediante

$$X_0 \mapsto S^3, \quad X_1 \mapsto S^2T, \quad X_2 \mapsto ST^2, \quad X_3 \mapsto T^3.$$

Es claro que I está contenido en el núcleo de este homomorfismo, luego tenemos un homomorfismo $B \longrightarrow k[S, T]$. Su imagen está contenida en el subanillo $S_3 \subset k[S, T]$ formado por los polinomios de grado múltiplo de 3. Basta probar que $B \longrightarrow S_3$ es un isomorfismo, y para ello definiremos su inverso.

Observemos que S_3 es un k-espacio vectorial que tiene por base a los monomios (con coeficiente 1) de grado múltiplo de 3. Cada uno de estos monomios se expresa de forma única como

$$S^{3u}T^{3v}, \quad S^{3u}T^{3v}(ST^2), \quad S^{3u}T^{3v}(S^2T),$$

para ciertos u, $v \geq 0$. Podemos definir una aplicación lineal $S_3 \longrightarrow B$ mediante

$$S^{3u}T^{3v} \mapsto x_0^u x_3^v, \quad S^{3u}T^{3v}(ST^2) \mapsto x_0^u x_3^v x_1, \quad S^{3u}T^{3v}(S^2T) \mapsto x_0^u x_3^v x_2.$$

Una comprobación sencilla muestra que esta aplicación es, de hecho, un homomorfismo de anillos. Es evidente que los dos homomorfismos que hemos definido son mutuamente inversos. ■

1.2 El espectro homogéneo

Vamos a introducir el análogo proyectivo del espectro de un anillo. Primeramente probaremos algunos resultados generales sobre ideales primos en anillos graduados. El teorema siguiente es una consecuencia inmediata de 1.5:

Teorema 1.6 *Sea A un anillo graduado, $\mathfrak{P}$ un ideal primo y $\mathfrak{P}^*$ el ideal generado por los elementos homogéneos contenidos en $\mathfrak{P}$. Entonces $\mathfrak{P}^*$ es también un ideal primo.*

De aquí se sigue a su vez:

Teorema 1.7 *Si I es un ideal homogéneo de un anillo graduado, entonces los divisores primos minimales de I son homogéneos.*

Demostración: Si $\mathfrak{P}$ es un divisor primo minimal de I, el ideal $\mathfrak{P}^*$ construido en el teorema anterior cumple que $I \subset \mathfrak{P}^* \subset \mathfrak{P}$, luego ha de ser $\mathfrak{P}^* = \mathfrak{P}$. ■

La intersección de ideales homogéneos es trivialmente homogénea, y el radical de un anillo es la intersección de sus divisores primos minimales, luego:

Teorema 1.8 *Si I es un ideal homogéneo de un anillo graduado A, entonces* $\operatorname{rad} I$ *es la intersección de todos los ideales primos homogéneos que contienen a I, luego también homogéneo. En particular* $\operatorname{rad} 0$ *es homogéneo y A_{red} es un anillo graduado.*

Observemos que si A es un anillo graduado, entonces $A_+ = \bigoplus\limits_{k>0} A_k$ es un ideal homogéneo de A. En el caso de un anillo de polinomios $A = k[X_0, \ldots, X_n]$ tenemos que $A_+ = (X_0, \ldots, X_n)$ y es fácil ver que todo ideal homogéneo está contenido en A_+, pero esto ya no es cierto si k no es un cuerpo.

Definición 1.9 Si A es un anillo graduado, definimos el *espectro homogéneo* de A como el conjunto $\operatorname{Proy} A$ de todos los ideales primos homogéneos $\mathfrak{P}$ de A tales que $A_+ \not\subset \mathfrak{P}$. A tales ideales los llamaremos *ideales relevantes* de A. Puesto que $\operatorname{Proy} A \subset \operatorname{Esp} A$, consideraremos a $\operatorname{Proy} A$ como espacio topológico con la topología inducida desde $\operatorname{Esp} A$.

Si $A = A_k[C]$, para un conjunto algebraico proyectivo C/k, los primos relevantes de A se corresponden biunívocamente con las subvariedades proyectivas de C.

En general, tenemos que los cerrados de $\operatorname{Proy} A$ son los conjuntos de la forma

$$V(I) = \{\mathfrak{P} \in \operatorname{Proy} A \mid I \subset \mathfrak{P}\},$$

donde I es un ideal de A que podemos tomar homogéneo, ya que si sustituimos I por el ideal generado por los componentes homogéneas de los elementos de I el conjunto $V(I)$ no varía. También podemos suponer que I es radical, pues

$V(I) = V(\operatorname{rad} I)$. Por otra parte, podemos tomar únicamente ideales $I \subset A_+$, ya que $V(I) = V(I \cap A_+)$. Esto se debe a que si $\mathfrak{P} \in V(I \cap A_+)$ entonces $IA_+ \subset I \cap A_+ \subset \mathfrak{P}$ y, como $A_+ \not\subset \mathfrak{P}$, ha de ser $I \subset \mathfrak{P}$, luego $\mathfrak{P} \in V(I)$.

Lo que no podemos hacer es suponer al mismo tiempo que I es radical y que $I \subset A_+$. Esto es posible, por ejemplo, si A es reducido, pues entonces A_+ es un ideal radical.

Es fácil ver que si I, J son ideales homogéneos de A, entonces $V(I) \subset V(J)$ si y sólo si $J \cap A_+ \subset \operatorname{rad} I$.

En particular, $V(I) = \varnothing$ si y sólo si $V(I) \subset V(A_+)$, si y sólo si $A_+ \subset \operatorname{rad} I$.

Observamos por último que una base de $\operatorname{Proy} A$ la forman los abiertos principales

$$D(f) = \{\mathfrak{P} \in \operatorname{Proy} A \mid f \notin \mathfrak{P}\}, \qquad f \in A,$$

pues son la restricción a $\operatorname{Proy} A$ de una base de $\operatorname{Esp} A$. Seguimos teniendo una base si tomamos únicamente elementos f homogéneos, pues $D(f)$ es la unión de los abiertos definidos por las componentes homogéneas de f.

1.3 Propiedades de los conjuntos proyectivos

Ya hemos visto cómo los conos afines permiten traspasar propiedades de los conjuntos algebraicos afines a propiedades similares en los conjuntos algebraicos proyectivos. Otra forma de conectarlos es a través de la noción de clausura proyectiva de un conjunto algebraico afín.

Podemos identificar cada punto $(x_1, \ldots, x_n) \in A^n$ con el punto de P^n con coordenadas homogéneas $(1, x_1, \ldots, x_n)$. De este modo, A^n se identifica con el abierto $D(X_0)$, es decir, el complementario del hiperplano $H = V(X_0)$, al que llamaremos *hiperplano del infinito.* Esta inmersión depende del sistema de referencia. Eligiéndolo adecuadamente, cualquier hiperplano puede convertirse en el hiperplano del infinito.

La topología de Zariski (relativa a k) de A^n es la restricción de la topología de Zariski de P^n. Para demostrarlo conviene introducir algunos conceptos sobre polinomios: Si $F(X_0, \ldots, X_n) \in k[X_0, \ldots, X_n]$ es homogéneo, definimos su *deshomogeneización* $F_*(X_1, \ldots, X_n) = F(1, X_1, \ldots, X_n)$, mientras que si $F(X_1, \ldots, X_n) \in k[X_1, \ldots, X_n]$, definimos su *homogeneización* como

$$F^*(X_0, \ldots, X_n) = X_0^{\operatorname{grad} F} F(X_1/X_0, \ldots, X_n/X_0) \in k[X_0, \ldots, X_n].$$

Es fácil ver entonces que si C/k es un subconjunto algebraico de P^n, entonces $C \cap A^n = V(S)$, donde $S = \{F_* \mid F \in I(C)\}$, luego la interesección es un conjunto algebraico afín definido sobre k. Recíprocamente, si C/k es un subconjunto algebraico de A^n, consideramos el conjunto $\overline{C} = V(S)$, donde $S = \{F^* \mid F \in I(C)\}$. Obviamente es un conjunto algebraico proyectivo (definido sobre k) y $C = \overline{C} \cap A^n$.

Con esto hemos probado que los cerrados de A^n son las intersecciones con A^n de los cerrados de P^n, luego en efecto, la topología de Zariski de A^n es la topología relativa.

Observemos que el conjunto $\overline{C}$ construido en el argumento precedente es la clausura de C en P^n. En efecto, si $C \subset D \subset \mathrm{P}^n$ y D es cerrado en P^n, tomemos $F \in I(D)$. Entonces $F_* \in I(C)$, luego $(F_*)^* \in I(\overline{C})$. Ahora bien, es fácil ver que $F = X_0^r(F_*)^*$, para cierto $r \geq 0$. Así pues, $F \in I(\overline{C})$. Esto prueba que $I(D) \subset I(\overline{C})$, luego $\overline{C} \subset D$.

A la clausura en P^n de un conjunto algebraico afín la llamaremos su *clausura proyectiva.*

El teorema siguiente recoge los resultados fundamentales que relacionan los conjuntos algebraicos afines y proyectivos:

Teorema 1.10 *La aplicación $C \mapsto \overline{C}$ que a cada conjunto algebraico afín C/k de A^n le asigna su clausura proyectiva es una biyección entre los conjuntos algebraicos afines de A^n y los conjuntos algebraicos proyectivos de P^n que no tienen ninguna componente irreducible contenida en el hiperplano del infinito. Además C es irreducible si y sólo si lo es $\overline{C}$ y si $C = V_1 \cup \cdots \cup V_r$ es la descomposición de C en componentes irreducibles, la descomposición de $\overline{C}$ es $\overline{C} = \overline{V}_1 \cup \cdots \cup \overline{V}_r$.*

Demostración: El hecho de que C es irreducible si y sólo si lo es $\overline{C}$ es un hecho general sobre espacios topológicos. La última afirmación del teorema es entonces inmediata, salvo que hemos de probar que ninguna $\overline{V}_i$ está contenida en la unión de las restantes. De todos modos, está claro que $\overline{C}$ no tiene componentes irreducibles contenidas en el hiperplano del infinito.

Observemos ahora que si V es un conjunto algebraico proyectivo irreducible no contenido en el hiperplano del infinito, es decir, tal que $V_* = V \cap A^n \neq \varnothing$, entonces V_* es un abierto no vacío de V, luego es denso, luego $\overline{V_*} = V$. De aquí se sigue que todo conjunto algebraico proyectivo C sin componentes irreducibles contenidas en el hiperplano del infinito es la clausura de un conjunto algebraico afín, concretamente de $C \cap A^n$. Así mismo es claro que si C es un conjunto algebraico afín se cumple que $\overline{C} \cap A^n = C$. Con esto ya es evidente la parte que faltaba de la última afirmación. ■

De aquí deducimos el resultado básico sobre dimensiones:

Teorema 1.11 *Si C/k es un conjunto algebraico afín y $\overline{C}$ es su clausura proyectiva, entonces* $\dim C = \dim \overline{C}$.

Demostración: Basta probar el teorema para un conjunto algebraico afín irreducible no vacío V de dimensión d. Aplicando [3.74] a $k[X_1, \ldots, X_n]$ concluimos que existe una cadena de variedades

$$\varnothing \subsetneq V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq \cdots \subsetneq V_n = A^n$$

tal que $V = V_d$. Tomando clausuras obtenemos una cadena similar en P^n, y tomando ideales obtenemos una cadena de ideales primos

$$0 = \mathfrak{P}_n \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{P}_0 \subsetneq (X_0, \ldots, X_n)$$

tal que $\mathfrak{P}_d = I(\overline{V})$. Tenemos una cadena de ideales primos en $k[X_0, \ldots, X_n]$ de longitud $n+1$. Como ésta es precisamente la dimensión del anillo de polinomios concluimos que es maximal, luego la cadena de variedades

$$\overline{V}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \overline{V}_d$$

es maximal y la dimensión de $\overline{V}$ es precisamente d. ■

Ahora es fácil traducir a conjuntos algebraicos proyectivos propiedades conocidas para conjuntos algebraicos afines. Empezamos con un resultado técnico:

Teorema 1.12 *Toda cadena estrictamente creciente de variedades no vacías en P^n está contenida en una cadena maximal, cuya longitud es necesariamente n.*

Demostración: Podemos tomar un hiperplano del infinito que pase por un punto no contenido en la primera de las variedades. Así, al cortar con A^n obtenemos una cadena de variedades afines no vacías de la misma longitud. Por el teorema [3.74] podemos completarla hasta una cadena de longitud n y tomando clausuras obtenemos una cadena de variedades proyectivas de longitud n que extiende a la cadena dada. Tomando ideales obtenemos una cadena de ideales primos en $k[X_0, \ldots, X_n]$ que puede completarse con $(X_0, \ldots, X_n)$ y entonces tiene longitud $n+1$. Como ésta es la dimensión del anillo de polinomios, concluimos que es maximal. ■

Teorema 1.13 *Sea C/k un conjunto algebraico proyectivo en P^n. Entonces:*

a) $\dim C \leq n$ *y* $\dim C = n$ *si y sólo si* $C = \mathrm{P}^n$.

b) Si $\tilde{C} \subset A^{n+1}$ es el cono afín de C, entonces $\dim \tilde{C} = \dim C + 1$. *Además* $\dim C = \dim A_k[C] - 1$.

c) $\dim C$ *no depende de k.*

d) Si todas las componentes irreducibles de C tienen la misma dimensión y $V \neq \varnothing$ es una subvariedad de C, entonces

$$\dim C = \dim V + \operatorname{codim}_C V.$$

e) $\dim C = 0$ *si y sólo si C es finito.*

f) C es una hipersuperficie (es decir, está definido por un único polinomio) si y sólo si todas sus componentes irreducibles tienen codimensión 1 *en* P^n.

Demostración: a) es consecuencia inmediata del teorema anterior.

b) Observemos en primer lugar que si C es irreducible entonces $\tilde{C}$ también lo es, pues $I(\tilde{C}) = I(C)$. De aquí se sigue fácilmente que las componentes irreducibles de $\tilde{C}$ son los conos de las componentes irreducibles de C y basta probar la propiedad en el caso en qu C es irreducible de dimensión d. Consideremos una cadena de subvariedades

$$\varnothing \neq V_0 \subsetneq \cdots \subsetneq V_d = C.$$

Por el teorema anterior podemos completarla hasta una cadena maximal

$$\varnothing \neq V_0 \subsetneq \cdots \subsetneq V_n = \mathrm{P}^n .$$

De aquí obtenemos una cadena de ideales primos

$$0 = I(V_n) \subsetneq \cdots \subsetneq I(V_0) \subsetneq (X_0, \ldots, X_n).$$

Como la dimensión de $k[X_0, \ldots, X_n]$ es $n + 1$, esta cadena es maximal. De aquí se sigue que la cadena

$$\{0\} \subsetneq \tilde{V}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \tilde{V}_d = \tilde{C}$$

es maximal, luego $\dim \tilde{C} = d + 1$, por el teorema [3.74] aplicado a $k[\tilde{C}]$.

La segunda parte de b) es inmediata, pues por definición $A_k[C] = k[\tilde{C}]$.

c) Es consecuencia de b) y del resultado análogo para variedades afines.

d) Es consecuencia del teorema anterior.

e) Si $\dim C = 0$, consideramos los espacios afines que resultan de tomar como hiperplano del infinito cada uno de los hiperplanos $X_i = 0$. Concluimos que C tiene un número finito de puntos en cada uno de ellos y, como entre todos cubren P^n, resulta que C es finito.

Para probar el recíproco basta ver que los puntos tienen dimensión 0, y para ello basta tomar un hiperplano del infinito que no contenga al punto.

f) Supongamos que las componentes irreducibles de C tienen codimensión 1 en P^n. Si una de ellas está contenida en el hiperplano del infinito entonces es el hiperplano del infinito (por ejemplo por d). Por la propiedad análoga para conjuntos algebraicos afines tenemos que $C_* = C \cap A^n = V(F)$, para cierto $F \in k[X_1, \ldots, X_n]$. Claramente $\overline{C_*} = V(F^*)$. Ahora bien, si el hiperplano del infinito H no es una componente irreducible de C, tenemos que $C = \overline{C_*} = V(F^*)$, y en caso contrario $C = V(F^*) \cup H = V(X_{n+1}F^*)$.

Si C es una hipersuperficie, entonces $C = V(F)$, para cierto polinomio (homogéneo) que podemos tomar sin factores primos múltiples (los factores primos de un polinomio homogéneo son homogéneos, porque el producto de polinomios no homogéneos no es homogéneo). Entonces (F) es un ideal radical, por lo que $I(C) = (F)$. El teorema [3.81] nos da que los divisores primos minimales de (F) tienen altura 1. Dichos divisores son homogéneos, y son los ideales de las componentes irreducibles de C, luego todas tienen codimensión 1. ■

Para terminar generalizamos los teoremas [5.3] y [5.4]:

Teorema 1.14 *Sea V/k una variedad proyectiva y $f_1, \ldots, f_m \in A_k[V]$ elementos homogéneos. Entonces cada componente irreducible W de $V_V(f_1, \ldots, f_m)$ cumple que* $\dim W \geq \dim V - m$.

Demostración: Sea $\tilde{V} \subset A^n$ el cono de V. Hemos visto que es irreducible y es claro que el cono de $V_V(f_1, \ldots, f_m)$ es $V_{\tilde{V}}(f_1, \ldots f_m) \subset \tilde{V}$. Además el cono de cada componente irreducible W de $V_V(f_1, \ldots, f_m)$ es una componente irreducible de $V_{\tilde{V}}(f_1, \ldots, f_m)$. Este cono es no vacío, porque contiene el punto $(0, \ldots, 0)$. Así pues, podemos aplicarle [5.3], lo que nos da que

$$\dim W = \dim \tilde{W} - 1 \geq \dim \tilde{V} - 2 = \dim V - 1.$$

■

El mismo argumento prueba la versión proyectiva de [5.4]:

Teorema 1.15 *Sean V/k y W/k dos variedades proyectivas en P^n. Entonces cada componente irreducible Z de $V \cap W$ verifica que*

$$\dim Z \geq \dim V + \dim W - n.$$

1.4 Conjuntos cuasiproyectivos

El concepto de conjunto algebraico cuasiproyectivo engloba tanto a los conjuntos algebraicos afines como a los proyectivos. La definición es sencilla:

Definición 1.16 Un *conjunto algebraico cuasiproyectivo* (definido sobre k) es un abierto en un conjunto algebraico proyectivo (definido sobre k).

Si C/k es un conjunto algebraico cuasiproyectivo, entonces es un abierto en su clausura proyectiva $\overline{C}$. En efecto: en principio existe un conjunto proyectivo D/k tal que C es abierto en D, pero entonces $C \subset \overline{C} \subset D$ y el hecho de que C sea abierto en D implica que también lo es en $\overline{C}$.

Es evidente que C es un espacio topológico noetheriano, pues una cadena decreciente de cerrados en C puede representarse como la intersección con C de una cadena decreciente de cerrados en $\overline{C}$, luego la cadena se ha de estabilizar. Por consiguiente C es unión de un número finito de componentes irreducibles.

Si C_0 es una componente irreducible de C, entonces $C_0 = \overline{C}_0 \cap C$, pues $\overline{C}_0$ es irreducible y $\overline{C}_0 \cap C$ es un abierto no vacío, luego también es irreducible, luego es un subconjunto irreducible de C que contiene a C_0, luego es C_0. Esto prueba que las componentes irreducibles de los conjuntos algebraicos cuasiproyectivos son también conjuntos algebraicos cuasiproyectivos.

Si C es un conjunto algebraico cuasiproyectivo y es abierto en un conjunto algebraico proyectivo D, entonces cada componente irreducible C_0 de C está contenida en una componente irreducible D_0 de D. Más aún, $D_0 \cap C$ es un abierto no vacío en D_0, luego es denso, luego es irreducible, luego $C_0 = D_0 \cap C$, luego $\overline{C}_0 = D_0$. Concluimos que $\overline{C}$ es una unión de componentes irreducibles de D.

Es obvio que todo conjunto algebraico afín es un conjunto algebraico cuasiproyectivo. Los subconjuntos algebraicos proyectivos de P^n son los subconjuntos algebraicos cuasiproyectivos cerrados en P^n. Todo abierto y todo cerrado en un conjunto algebraico cuasiproyectivo es también un conjunto algebraico cuasiproyectivo.

Vamos a definir ahora la k-álgebra de las funciones regulares en un conjunto algebraico cuasiproyectivo. En primer lugar, si C/k es un conjunto algebraico proyectivo y $f \in A_k[C]$ es un elemento homogéneo, podemos definir el *abierto principal*

$$D(f) = \{P \in C \mid f(P) \neq 0\}.$$

Observemos que $f(P)$ no está definido, pero la condición $f(P) \neq 0$ sí lo está (entendida como $F(P) \neq 0$, donde $f = [F]$). Ciertamente, $D(f) = C \setminus V_C(f)$ es un abierto, y es claro que los abiertos principales forman una base de la topología de Zariski de C.

Definición 1.17 Sea C/k un conjunto algebraico proyectivo y $U \subset C$ un abierto no vacío. Diremos que una función $r : U \longrightarrow K$ es *regular* en un punto $x \in U$ si existen f, $g \in A_k[C]$ homogéneos del mismo grado tales que $x \in D(g) \subset U$ y para todo $y \in D(g)$ se cumple que $r(y) = f(y)/g(y)$. Diremos que la función r es *regular* en U si lo es en todos los puntos de U.

Observemos que $f(y)$ y $g(y)$ no están definidos, pero el cociente sí lo está. Como en el caso afín, la regularidad en un punto x es una propiedad local, es decir, que si r es regular en x y $x \in U' \subset U$, entonces $r|_{U'}$ también es regular en x.

Representaremos por $k[U]$ al conjunto de todas las funciones regulares en U. Es inmediato comprobar que tiene estructura de k-álgebra con la suma y el producto definidos puntualmente. Convenimos en que $k[\varnothing] = 0$.

Consideremos un conjunto algebraico afín C y su clausura proyectiva $\overline{C}$. Entonces C es abierto en $\overline{C}$ y todo abierto U en C es también un abierto en $\overline{C}$. Ahora tenemos dos definiciones de $k[U]$, una considerando a U como abierto en C y otra considerándolo como abierto en $\overline{C}$. Vamos a ver que son equivalentes:

Si $r \in k[U]$ en el sentido afín, para todo $P \in U$ existen funciones f, $g \in k[C]$ tales que $D(g) \subset U$ y $r|_{D(g)} = f/g$. Si $f = [F]$ y $g = [G]$, consideramos los polinomios F^* y G^* y, si es necesario, multiplicamos uno de ellos por una potencia de X_{n+1} para que tengan el mismo grado. Entonces $f^* = [X_{n+1}F^*]$ y $g^* = [X_{n+1}G^*]$ son elementos homogéneos del mismo grado en $A_k[\overline{C}]$ tales que $D(g) = D(g^*)$ y $r|_{D(g^*)} = f^*/g^*$, luego $f \in k[U]$ en el sentido proyectivo. Igualmente se prueba la inclusión opuesta, deshomogeneizando en lugar de homogeneizando. ■

Consideremos ahora un conjunto algebraico cuasiproyectivo U/k. Existe un conjunto algebraico proyectivo C/k tal que U es abierto en C. Tenemos definida la k-álgebra $k[U]$ respecto de C, pero vamos a probar que en realidad no depende de C, con lo que podemos hablar de la k-álgebra de funciones regulares de un conjunto algebraico cuasiproyectivo dado.

Basta observar que $U \subset \overline{U} \subset C$ y que la restricción define un epimorfismo natural de anillos graduados $A_k[C] \longrightarrow A_k[\overline{U}]$ dado por $[F] \mapsto [F]$. Es inmediato entonces que una función $r : U \longrightarrow K$ es regular en U respecto de C si y sólo si lo es respecto de $\overline{U}$.

Introducimos ahora las aplicaciones que conectan adecuadamente dos conjuntos algebraicos cuasiproyectivos:

Definición 1.18 Una aplicación $\phi : C \longrightarrow D$ entre dos conjuntos algebraicos cuasiproyectivos definidos sobre k es *regular* (definida sobre k) si es continua y para todo abierto U de D y toda función $\alpha \in k[U]$, se cumple que $\overline{\phi}_U(\alpha) = \phi \circ \alpha \in k[\phi^{-1}[U]]$. La aplicación ϕ es un *isomorfismo* (sobre k) si es biyectiva y tanto ϕ como ϕ^{-1} son regulares (sobre k).

Es fácil ver que la composición de aplicaciones regulares es regular, así como que la regularidad es una propiedad local, es decir, una aplicación es regular si y sólo si lo es su restricción a un entorno abierto de cada punto. Las aplicaciones regulares entre conjuntos algebraicos afines tienen una caracterización muy simple:

Definición 1.19 Sean $C \subset A^m$ y $D \subset A^n$ dos conjuntos algebraicos afines definidos sobre k. Una aplicación $\phi : C \longrightarrow D$ es *polinómica* (definida sobre k) si existen polinomios $F_1, \ldots, F_n \in k[X_1, \ldots, X_m]$ tales que para todo $P \in C$ se cumple que $\phi(P) = (F_1(P), \ldots, F_n(P))$.

Vamos a probar que las aplicaciones regulares entre conjuntos algebraicos afines son precisamente las aplicaciones polinómicas. Primeramente demostramos una implicación:

Teorema 1.20 *Toda aplicación polinómica entre conjuntos algebraicos afines es regular.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\phi : C \longrightarrow D$ según la definición de aplicación polinómica. Si A/k es un subconjunto algebraico de D, entonces $P \in \phi^{-1}[A]$ si y sólo si $\phi(P) \in A$, si y sólo si $F(\phi(P)) = 0$, para todo $F \in I(A)$. Las funciones $\phi \circ F$ son polinomios, y A es el conjunto de ceros de todos ellos. Por lo tanto A es algebraico. Esto prueba la continuidad de ϕ.

Consideremos ahora un abierto U en D tal que $\phi[C] \cap U \neq \varnothing$ y $\alpha \in k[U]$. Hemos de probar que $\phi \circ \alpha \in k[\phi^{-1}[U]]$. Para ello tomamos un punto $P \in \phi^{-1}[U]$

y hemos de probar que $\phi \circ \alpha$ es regular en P. Tenemos que $\phi(P) \in U$, luego existen f, $g \in k[D]$ tales que $D(g) \subset U$ y $\alpha|_{D(g)} = f/g$.

Si $f = [F]$ y $g = [G]$, al componer F y G con los polinomios F_i obtenemos polinomios F' y G' que determinan funciones $f' = [F']$, $g' = [G']$ en $k[C]$ con la propiedad de que $f' = \phi \circ f$, $g' = \phi \circ g$. Además $\phi^{-1}[U] \subset D(g')$. Claramente, $(\phi \circ \alpha)|_{D(g')} = f'/g'$, lo que prueba la regularidad de $\phi \circ \alpha$ en P. ■

Recordemos ahora que si C es un conjunto algebraico afín, entonces los subconjuntos algebraicos afines irreducibles de C se corresponden biunívocamente con los ideales primos de $k[C]$ a través de las correspondencias $V \mapsto I_C(V)$, $\mathfrak{P} \mapsto V_C(\mathfrak{P})$. (Esto no es necesariamente cierto si C no es afín).

A su vez, esto implica que si $\phi : C \longrightarrow D$ es una aplicación regular entre dos conjuntos algebraicos afines definidos sobre k, el homomorfismo de k-álgebras $\bar{\phi} : k[D] \longrightarrow k[C]$ dado por $\bar{\phi}(f) = \phi \circ f$ determina completamente a ϕ. En efecto, para cada punto $P \in C$ es claro que $\bar{\phi}^{-1}[I_C(P)] = I_D(\phi(P))$, luego

$$\phi(P) = V_D(I_D(\phi(P))) = V_D(\bar{\phi}^{-1}[I_C(P)]),$$

y el miembro derecho depende únicamente de $\bar{\phi}$.

Teorema 1.21 *Si C/k y D/k son conjuntos algebraicos afines, la correspondencia $\phi \mapsto \overline{\phi}$ biyecta las aplicaciones regulares de C en D con los homomorfismos de k-álgebras de $k[D]$ en $k[C]$.*

Demostración: Acabamos de probar que la correspondencia es inyectiva. Consideremos ahora un homomorfismo de k-álgebras $\alpha : k[D] \longrightarrow k[C]$ y sea $\alpha(x_i) = [F_i]$. Los polinomios F_i determinan una función polinómica $\phi : A^m \longrightarrow A^n$, así como el homomorfismo $\phi^* : k[X_1, \ldots, X_n] \longrightarrow k[X_1, \ldots, X_m]$ definido mediante $G \mapsto G(F_1, \ldots, F_n)$.

Se cumple que $\phi^*[I(D)] \subset I(C)$, pues si $G \in I(D)$, entonces la clase de $\phi^*(G)$ módulo $I(C)$ es

$$G([F_1], \ldots, [F_n]) = G(\alpha(x_1), \ldots, \alpha(x_n)) = \alpha([G]) = \alpha(0) = 0.$$

Por lo tanto $\phi[C] \subset D$, pues si $P \in C$ y $G \in I(D)$, entonces $G(\phi(P)) = \phi^*(G)(P) = 0$, luego $\phi(P) \in V(I(D)) = D$. Así pues, ϕ se restringe a una función polinómica de C en D, y $\overline{\phi}(x_i) = \phi \circ x_i = [F_i] = \alpha(x_i)$, luego $\overline{\phi} = \alpha$. ■

Observemos que en la prueba del teorema anterior la aplicación regular que construimos es de hecho polinómica. Como consecuencia obtenemos lo que habíamos anunciado:

Teorema 1.22 *Las aplicaciones regulares entre conjuntos algebraicos afines son las aplicaciones polinómicas.*

Demostración: Dada cualquier aplicación regular ϕ, existe una aplicación polinómica ψ tal que $\overline{\phi} = \overline{\psi}$, luego $\phi = \psi$. ■

Otra consecuencia de 1.21 es que $\overline{\phi}$ es un isomorfismo si y sólo si lo es ϕ. (Si $\overline{\phi}$ es un isomorfismo, su inverso es de la forma $\overline{\psi}$, de modo que $\overline{\phi \circ \psi} = 1$, luego $\phi \circ \psi = 1$, e igualmente $\psi \circ \phi = 1$, luego ϕ es un isomorfismo.)

El teorema siguiente contiene una de las ideas que conducen a la definición de esquema:

Teorema 1.23 *Si C/k es un conjunto algebraico afín y $\alpha \in k[C]$, el abierto principal $D(\alpha)$ es isomorfo a un conjunto algebraico afín.*

DEMOSTRACIÓN: Pongamos que $C \subset A^n$ $\alpha = [F]$. Podemos suponer que $\alpha \neq 0$. Según el teorema [3.85] sabemos que $k[D(\alpha)] = k[C]_\alpha$.

Sea $I' \subset k[X_1, \ldots, X_{n+1}]$ el ideal generado por $I(C)$ y por el polinomio $X_{n+1}F - 1$. Sea $C' = V(I') \subset A^{n+1}$. La proyección $A^{n+1} \longrightarrow A^n$ en las n primeras componentes se restringe a una aplicación regular $\phi : C' \longrightarrow D(\alpha)$. Esta aplicación es biyectiva pues, si $P \in D(\alpha)$, su única antiimagen se obtiene completando sus coordenadas con $1/F(P)$. Falta probar que ϕ^{-1} es regular. Consideramos $C' \subset \mathrm{P}^{n+1}$. Entonces, según acabamos de observar,

$$\begin{aligned} \phi^{-1}(a_1, \ldots, a_n) &= (1, a_1, \ldots, a_n, F^{-1}(a_1, \ldots, a_n)) \\ &= (F(a_1, \ldots, a_n), a_1 F(a_1, \ldots, a_n), \ldots, a_n F(a_1, \ldots, a_n), 1). \end{aligned}$$

Ahora consideramos a C' contenido en el espacio afín dado por $X_{n+1} \neq 0$, con lo que la expresión para ϕ^{-1} es

$$\phi^{-1}(a_1, \ldots, a_n) = (F(a_1, \ldots, a_n), a_1 F(a_1, \ldots, a_n), \ldots, a_n F(a_1, \ldots, a_n)),$$

luego ϕ^{-1} es polinómica y, por consiguiente, regular. ■

Definición 1.24 En lo sucesivo diremos que C/k es un *conjunto algebraico afín* (definido sobre k) si es un conjunto algebraico cuasiproyectivo isomorfo (sobre k) a un conjunto algebraico afín en sentido estricto.

Así, si $C \subset A^n$, para especificar que C es un conjunto algebraico afín en el sentido anterior a esta definición, tendremos que especificar que C es cerrado en A^n. En estos términos, hemos probado que los abiertos principales de los conjuntos algebraicos afines son también conjuntos algebraicos afines.

De aquí se sigue que todo conjunto algebraico cuasiproyectivo tiene una base formada por conjuntos algebraicos afines.

En efecto, dado un conjunto C/k y $P \in U \subset C$, donde U es abierto, tenemos que C es abierto en $\overline{C}$, luego U también lo es. Fijamos un hiperplano del infinito que no contenga a P, con lo que $P \in U \cap A^n \subset \overline{C} \cap A^n$ y este último conjunto es un conjunto algebraico afín (cerrado). Podemos tomar $f \in k[\overline{C} \cap A^n]$ tal que $P \in D(f) \subset U \cap A^n$, y por el teorema anterior $D(f)$ es un conjunto algebraico afín, y es abierto en $\overline{C} \cap A^n$, luego en $U \cap A^n$, luego en U, luego en C. ■

Observemos ahora que si C/k es un conjunto algebraico afín y $\phi : C \longrightarrow C'$ es un isomorfismo en un conjunto algebraico afín $C' \subset A^n$ (cerrado), entonces tiene un inverso $\psi : C' \longrightarrow C$. Es claro entonces que $\bar{\phi} : k[C'] \longrightarrow k[C]$ es un isomorfismo, pues su inverso es $\bar{\psi}$.

Las correspondencias $V \mapsto I_{C'}(V)$ y $\mathfrak{P} \mapsto V_{C'}(\mathfrak{P})$ biyectan los subconjuntos algebraicos (o, equivalentemente, los cerrados) irredudibles de C' con los ideales primos de $k[C']$, y usando ϕ y $\bar{\phi}$ es fácil ver que lo mismo es válido para C.

Igualmente se comprueba que el teorema 1.21 es válido para conjuntos algebraicos afines no necesariamente cerrados. En particular, dos conjuntos algebraicos afines C/k y D/k son isomorfos si y sólo si $k[C] \cong k[D]$ (como k-álgebras).

Así pues, el álgebra $k[C]$ contiene toda la información "intrínseca" de la geometría de C, es decir, la información sobre las propiedades de C que se conservan por isomorfismo, que no dependen de cómo está C sumergido en el espacio afín. Sin embargo, esto no es cierto para conjuntos cuasiproyectivos arbitrarios. Por ejemplo, veremos más adelante que $k[\mathrm{P}^n] \cong k$, con lo que, en particular $k[\mathrm{P}^n] \cong k[\mathrm{P}^m]$ para cualesquiera m y n, mientras que ambos conjuntos sólo son isomorfos cuando $m = n$. En este caso, la información sobre C que contiene $k[C]$ es casi nula.

Vamos a ver, en cambio, que la geometría intrínseca de un conjunto algebraico cuasiproyectivo está contenida en la estructura de espacio anillado que le confiere el teorema siguiente, que extiende a [3.86] y contiene otra de las ideas básicas en las que se basa el concepto de esquema:

Teorema 1.25 *Todo conjunto algebraico cuasiproyectivo C/k es un espacio anillado local definido sobre k con la topología de Zariski y el haz que a cada abierto $U \subset C$ le asigna la k-álgebra $\mathcal{O}_C(U) = k[U]$, y en el que las restricciones son las restricciones usuales de aplicaciones.*

DEMOSTRACIÓN: Todo es obvio salvo a lo sumo que los anillos $\mathcal{O}_{C,P}$ son locales. Ahora bien, si $P \in C$, el ideal maximal de $\mathcal{O}_{C,P}$ es el ideal

$$\mathfrak{m}_P = \{f \in \mathcal{O}_{C,P} \mid f(P) = 0\}.$$

(Recordemos que un elemento $f \in \mathcal{O}_{C,P}$ es una clase de equivalencia de funciones regulares definidas en respectivos entornos de P y de modo que dos cualesquiera de ellas coinciden en un entorno de P, luego, aunque puedan diferir en otros puntos, el valor $f(P)$ es el mismo en todos los elementos de la clase.)

Es evidente que se trata de un ideal, pues, de hecho, es el núcleo del epimorfismo $\mathcal{O}_{C,P} \longrightarrow K$ dado por $f \mapsto f(P)$. Esto prueba que es maximal. Vamos a probar que si $f \in \mathcal{O}_{C,P} \setminus \mathfrak{m}_P$ entonces f es una unidad de $\mathcal{O}_{C,P}$, lo que implica claramente que $\mathfrak{m}_P$ es el único ideal maximal.

En efecto, si $\overline{C}$ es la clausura de C en P^n, un representante de f es una función definida como un cociente u/v, donde u, $v \in A_k[\overline{C}]$ tienen el mismo grado y $P \in D(v)$. Como $f(P) \neq 0$, tenemos también que $P \in D(u)$, luego v/u define una función en $D(u)$ que a su vez define un $g \in \mathcal{O}_{C,P}$ que cumple $fg = 1$.

■

Ahora observamos que si $\phi : C \longrightarrow D$ es una aplicación regular definida sobre k entre dos conjuntos algebraicos cuasiproyectivos, la aplicación

$\bar{\phi}_U : k[U] \longrightarrow k[\phi^{-1}[U]]$ es un homomorfismo de anillos compatible con las restricciones, por lo que el par $(\phi, \bar{\phi})$ define un homomorfismo de espacios anillados definido sobre k. Más aún, se trata de un homomorfismo de espacios anillados locales, pues claramente, para cada punto $P \in U$, la función $\bar{\phi}_U$ transforma funciones que se anulan en $\phi(P)$ en funciones que se anulan en P. Esto implica que el homomorfismo $\bar{\phi}_P : \mathcal{O}_{D,\phi(P)} \longrightarrow \mathcal{O}_{C,P}$ inducido por $\bar{\phi}$ cumple que $\bar{\phi}_P[\mathfrak{m}_{\phi(P)}] \subset \mathfrak{m}_P$, que es lo que exige la definición [1.13].

Recíprocamente, vamos a probar que si $(\phi, \phi^\#) : C \longrightarrow D$ es un homomorfismo de espacios anillados locales definidos sobre k, entonces $\phi : C \longrightarrow D$ es una aplicación regular y $\phi^\# = \bar{\phi}$.

En efecto, por definición ϕ es una aplicación continua. Fijemos $P \in C$ y veamos que ϕ es regular en un entorno de P. Sea V un entorno afín de $\phi(P)$ y sea U un entorno afín de P tal que $U \subset \phi^{-1}[V]$. Tenemos un homomorfismo de k-álgebras $\psi : k[V] \longrightarrow k[U]$ dado por $\psi(f) = \phi^\#_V(f)|_U$.

En virtud del teorema 1.21 (que, como ya hemos comentado, es válido para conjuntos algebraicos afines no necesariamente cerrados) existe una aplicación regular $\alpha : U \longrightarrow V$ tal que $\overline{\alpha} = \psi$. Veamos que $\alpha = \phi|_U$.

Tomemos $Q \in U$. Claramente $\overline{\alpha}^{-1}[I_U(Q)] = I_V(\alpha(Q))$, luego $f \in I_V(\alpha(Q))$ si y sólo si $\overline{\alpha}(f) \in I_U(Q)$, si y sólo si $\psi(f)(Q) = \phi^\#_V(f)(Q) = 0$, si y sólo si $\phi_Q(f_{\phi(Q)}) \in \mathfrak{m}_Q$, si y sólo si $f_{\phi(Q)} \in \phi_Q^{-1}[\mathfrak{m}_Q] = \mathfrak{m}_{\phi(Q)}$, si y sólo si $f(\phi(Q)) = 0$, si y sólo si $f \in I_V(\phi(Q))$. Así pues, $I_V(\alpha(Q)) = I_V(\phi(Q))$ y, al ser V un conjunto algebraico afín, $\alpha(Q) = \phi(Q)$.

Con esto tenemos que ϕ es regular. Más aún, la igualdad $\overline{\alpha} = \psi$ se traduce ahora en que para todo $f \in k[V]$ se cumple $(\phi|_U \circ f) = \phi^\#_V(f)|_U$, pero, fijado V, podemos tomar como U cualquier abierto afín en $\phi^{-1}[V]$, luego $\phi^\#_V(f) = \phi|_{\phi^{-1}[V]} \circ f = \bar{\phi}_V(f)$.

El teorema siguiente resume lo que hemos obtenido:

Teorema 1.26 *Si C/k y D/k son dos conjuntos algebraicos cuasiproyectivos, las aplicaciones regulares $\phi : C \longrightarrow D$ definidas sobre k se corresponden biunívocamente con los homomorfismos $\phi : C \longrightarrow D$ entre espacios anillados locales definidos sobre k.*

En particular, dos conjuntos algebraicos cuasiproyectivos son isomorfos como tales si y sólo si lo son como espacios anillados locales definidos sobre k.

Terminamos el capítulo con un ejemplo sobre homomorfismos entre conjuntos proyectivos:

Ejemplo Consideremos de nuevo la variedad $C = V(F_1, F_2, F_3) \subset \mathrm{P}^3$, donde

$$F_1 = X_1^2 - X_0X_2, \quad F_2 = X_2^2 - X_1X_3, \quad F_3 = X_0X_3 - X_1X_2.$$

Sea $f : \mathrm{P}^1 \longrightarrow C$ dada por $f(s,t) = (s^3, s^2t, st^2, t^3)$. Si tomamos como punto infinito en P^1 a $V(s)$ y como hiperplano infinito en P^3 a $V(X_0)$, entonces

f se restringe a $f_0 : A^1 \longrightarrow C \cap A^3$ dada por $f(t) = (t, t^2, t^3)$, que es polinómica, luego regular. Así, f es regular en el abierto principal $D(S)$ e, igualmente, en $D(T)$. Concluimos que es regular en todo P^1.

Veamos ahora que f es un isomorfismo. Definimos $g_0 : C \cap D(X_0) \longrightarrow \mathrm{P}^1$ mediante $g_0(x_0, x_1, x_2, x_3) = (x_0, x_1)$. Considerando $D(X_0) = A^3$, tenemos que g_0 es la restricción de la proyección $A^3 \longrightarrow A^1$, luego es regular. Igualmente definimos $g_3 : C \cap D(X_3) \longrightarrow \mathrm{P}^1$ mediante $g_3(x_0, x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3)$, que también es regular, y observamos que ambas coinciden en $C \cap D(X_1) \cap D(X_3)$, pues

$$\begin{aligned}(x_0, x_1) &= (x_0x_1, x_1^2) = (x_0x_1, x_0x_2) = (x_1, x_2)\\ &= (x_1x_3, x_2x_3) = (x_2^2, x_2x_3) = (x_2, x_3).\end{aligned}$$

Por consiguiente, g_0 y g_3 definen una aplicación regular $g : C \longrightarrow \mathrm{P}^1$. Es fácil ver que es la inversa de f.

En particular C tiene dimensión 1, es decir, es una curva proyectiva.

Tenemos expresado a C como intersección de tres superficies $V(F_i)$. Cabe preguntarse si no es posible expresarlo como intersección de tan sólo dos hipersuperficies. Desde luego, esto no puede hacerse eliminando sin más una de las tres. Por ejemplo, es fácil ver que si eliminamos F_3 obtenemos

$$V(F_1, F_2) = C \cup V(X_1, X_2),$$

y si eliminamos F_1 o F_2 sucede algo similar. Vamos a ver que, de todos modos, sí que es posible expresar C como intersección de dos hipersuperficies. Partimos de la relación siguiente:

$$X_3F_1 + X_1F_2 + X_2F_3 = 0.$$

Vamos a trabajar en $B = k[X_0, X_1, X_2, X_3]/(F_1)$. Es fácil ver que

$$B = k[x_0, x_2, x_3] \oplus k[x_0, x_2, x_3]x_1, \qquad x_1^2 = x_0x_2.$$

Elevando al cuadrado la ecuación $x_2f_3 = -x_1f_2$ obtenemos que

$$x_2^2f_3^2 = x_1^2f_2^2 = x_0x_2f_2^2.$$

Es fácil ver que B es un dominio íntegro y $x_2 \neq 0$, luego $x_2f_3^2 = x_0f_2^2$. Usando la factorización única de $k[x_0, x_2, x_3]$ es fácil ver que se ha de cumplir que $f_3^2 = x_0p$, $f_2^2 = x_2p$, para un cierto $p \in B$. Alternativamente, podemos calcular p explícitamente, que resulta ser la clase del polinomio

$$P = X_0^2X_3 + X_1^3 - 2X_0X_1X_2.$$

Así tenemos que $X_0P \in I(C)$, luego $P \in I(C)$. Además $f_2^2, f_3^2 \in (P, F_1)$, luego $\operatorname{rad}(P, F_1) = I(C)$. Por consiguiente, $C = V(F_1, P)$. ■

Capítulo II

Esquemas

Vamos a introducir ahora la noción de esquema, que nos permitirá dar una definición intrínseca de conjunto algebraico, es decir, una definición que no requiera considerar a los conjuntos algebraicos como subconjuntos de un espacio afín o proyectivo.

2.1 Espectros afines y proyectivos

Si $C \subset A^n$ es un conjunto algebraico afín (cerrado) y $X = \operatorname{Esp} k[C]$, los cerrados de C se corresponden biunívocamente con los de X a través de la correspondencia $V_C(I) \leftrightarrow V_X(I)$, donde I recorre los ideales radicales de $k[C]$. Tomando complementarios, tenemos una correspondencia entre los abiertos de ambos espacios. Observemos que para cada $f \in k[C]$, el abierto principal $D(f) \subset C$ se corresponde, a través de esta correspondencia, con el abierto principal $D(f) \subset X$, y recordemos que estos abiertos constituyen sendas bases de estos espacios.

Por otra parte, en C tenemos definida una estructura de espacio anillado local, luego podemos transportar esta estructura a X y considerarlo también como un espacio anillado local. Específicamente, si U es un abierto en X y U' es el abierto correspondiente en C, definimos $\mathcal{F}_X(U) = k[U']$.

Ahora vamos a probar que todos los abiertos $\mathcal{F}_X(U)$ están completamente determinados por $k[C]$. Más en general, si A es un anillo arbitrario, vamos a definir una estructura de espacio anillado en $\operatorname{Esp} A$ de forma que, en el caso en que $A = k[C]$, dicha estructura resultará ser precisamente la que acabamos de definir.

Notemos que tenemos dos evidencias parciales de que es posible hacer esto: por una parte, si $U = D(f)$ es un abierto principal de X, el teorema [3.85] nos dice que $\mathcal{F}_X(U) = k[D(f)] \cong k[C]_f$; por otra parte, si $\mathfrak{p} \in X$, el teorema [3.87] implica que $\mathcal{F}_{X,\mathfrak{p}} \cong k[C]_{\mathfrak{p}}$. A esto hay que añadir el siguiente resultado elemental sobre haces, que nos muestra que un haz está determinado por su restricción a una base:

Teorema 2.1 *Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ dos haces sobre un espacio topológico X y sea $\mathcal{B}$ una base de X. Sea $\{f_U\}_{U\in\mathcal{B}}$ una familia de homomorfismos $f_U : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$ tales que si $U \subset V$ son abiertos básicos entonces $f_V \circ \rho_U^V = \rho_U^V \circ f_U$. Entonces existe un único homomorfismo de haces $f : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ tal que para todo $U \in \mathcal{B}$ el homomorfismo f_U es el dado.*

Demostración: Para cada abierto U de X expresamos U como unión de abiertos básicos U_i. Dado $g \in \mathcal{F}(U)$, los elementos $f_{U_i}(g|_{U_i}) \in \mathcal{G}(U_i)$ son consistentes entre sí, luego determinan un único $f_U(g) \in \mathcal{G}(U)$. Es fácil ver que f_U es un homomorfismo que coincide con el dado si U es un abierto básico. El resto del teorema no ofrece dificultad. ■

Consideramos ahora un anillo arbitrario, y el primer paso es demostrar un resultado de cuasicompacidad que generaliza parcialmente al teorema [3.83], puesto que no exige que el anillo sea noetheriano:

Teorema 2.2 *Si A es un anillo, entonces los abiertos principales de* $\operatorname{Esp} A$ *son cuasicompactos.*

Demostración: Para cada $f \in A$, el teorema [3.39] nos da que la inclusión $i : A \longrightarrow A_f$ induce un homeomorfismo $\bar{\imath} : \operatorname{Esp} A_f \longrightarrow D(f)$, luego basta probar que los espectros son cuasicompactos. Así pues, vamos a ver que todo cubrimiento abierto de $\operatorname{Esp} A$ admite un subcubrimiento finito. No perdemos generalidad si lo tomamos formado por abiertos principales $\{D(g_i)\}_{i\in I}$. Tenemos que

$$V((g_i \mid i \in I)) = \bigcap_{i\in I} D(g_i) = \varnothing,$$

luego $(g_i \mid i \in I) = A$. Podemos expresar 1 como combinación lineal de un número finito de generadores $g_{i_1}, \ldots, g_{i_n}$, con lo que $A = (g_{i_1}, \ldots, g_{i_n})$ y

$$\operatorname{Esp} A = D(g_{i_1}) \cup \cdots \cup D(g_{i_n}).$$

■

Seguidamente definimos la estructura de espacio anillado de $\operatorname{Esp} A$:

Definición 2.3 Si A es un anillo y $X = \operatorname{Esp} A$, definimos como sigue un haz $\mathcal{O}_X$ sobre X: Para cada abierto $U \subset X$, definimos $\mathcal{O}_X(U)$ como el conjunto de todas las funciones $f : U \longrightarrow \bigoplus_{\mathfrak{p}\in U} A_{\mathfrak{p}}$ tales que $f(\mathfrak{p}) \in A_{\mathfrak{p}}$ para todo $\mathfrak{p} \in U$ y que cumplan además la propiedad siguiente:

Para cada $\mathfrak{p} \in U$ existe un entorno abierto $\mathfrak{p} \in V \subset U$ y elementos $a, b \in A$ tales que para cada $\mathfrak{q} \in V$ se cumple que $b \notin \mathfrak{q}$ y $f(\mathfrak{q}) = a/b \in A_{\mathfrak{q}}$.

Es inmediato que podemos definir puntualmente la suma y el producto de dos funciones de $\mathcal{O}_X(U)$ y el resultado está también en $\mathcal{O}_X(U)$. De este modo $\mathcal{O}_X(U)$ resulta ser un anillo (conmutativo y unitario). Si $U \subset V \subset X$, la restricción usual satisface todas las propiedades de la definición de haz. El teorema siguiente implica, en particular, que $\operatorname{Esp} A$ se convierte en un espacio anillado local con el haz que acabamos de definir.

Teorema 2.4 *Si A es un anillo, $X = \operatorname{Esp} A$ y $\mathcal{O}_X$ es el haz que acabamos de definir, entonces para cada $\mathfrak{p} \in X$ se cumple que $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} \cong A_\mathfrak{p}$ y, para cada $f \in A$, se cumple que $\mathcal{O}_X(D(f)) \cong A_f$.*

Demostración: Definimos $\phi : \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} \longrightarrow A_\mathfrak{p}$ mediante $\phi([(U, f)]) = f(\mathfrak{p})$. Claramente es un homomorfismo. Todo elemento de $A_\mathfrak{p}$ es de la forma a/b, con a, $b \in A$, $b \notin \mathfrak{p}$, y entonces podemos definir $U = D(b)$ y $f \in \mathcal{O}_X(U)$ dada por $f(\mathfrak{q}) = a/b$. Claramente entonces $\phi([U, f]) = a/b$. Esto prueba que ϕ es suprayectiva.

Si dos elementos de $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}$ tienen la misma imagen, podemos tomar representantes (U, f) y (U, g) de modo que $f = a/b$, $g = u/v$ en U. Estamos suponiendo que $a/b = u/v$ en $A_\mathfrak{p}$, luego existe un $r \in A \setminus \mathfrak{p}$ tal que $r(av - bu) = 0$. Esto hace que f y g coincidan en $U \cap D(r)$, luego $[(U, f)] = [(U, g)]$. Esto prueba que ϕ es inyectiva.

Definimos ahora $\psi : A_f \longrightarrow \mathcal{O}_X(D(f))$ mediante $\psi(a/f^n) = a/f^n$, es decir, $\psi(a/f^n)$ es la aplicación que a cada $\mathfrak{q} \in D(f)$ le asigna $a/f^n \in A_\mathfrak{q}$. Claramente ψ es un homomorfismo de anillos.

Si $\psi(a/f^n) = \psi(b/f^m)$, para todo $\mathfrak{p} \in D(f)$ tenemos que $a/f^n = b/f^m$ en $A_\mathfrak{p}$, luego existe un $r \in A \setminus \mathfrak{p}$ tal que $r(af^m - bf^n) = 0$. Sea $\mathfrak{a}$ el anulador de $af^m - bf^n$. Tenemos que $r \in \mathfrak{a}$ pero $r \notin \mathfrak{p}$, luego $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}$. Así pues, concluimos que $V(\mathfrak{a}) \cap D(f) = \varnothing$. Esto significa que $f \in \operatorname{rad} \mathfrak{a}$, luego existe un natural s tal que $f^s \in \mathfrak{a}$. Por consiguiente $f^s(af^m - bf^n) = 0$, lo que significa que $a/f^n = b/f^m$ en A_f. Esto prueba que ψ es inyectiva.

Tomemos ahora $s \in \mathcal{O}_X(D(f))$. Por definición de $\mathcal{O}_X$ podemos cubrir $D(f)$ con abiertos V_i tales que en V_i se cumple $s = a_i/b_i$, donde $b_i \notin \mathfrak{p}$ para cada $\mathfrak{p} \in V_i$. En otras palabras, $V_i \subset D(b_i)$.

No perdemos generalidad si suponemos que $V_i = D(c_i)$ para ciertos $c_i \in A$. La inclusión $D(c_i) \subset D(b_i)$ equivale a $V(b_i) \subset V(c_i)$, y de aquí resulta que $\operatorname{rad}(c_i) \subset \operatorname{rad}(b_i)$. En particular $c_i^n \in (b_i)$ para cierto n (que depende de i). Tenemos que $c_i^n = ub_i$, luego $a_i/b_i = (ua_i)/c_i^n$. Podemos cambiar c_i por c_i^n, pues $D(c_i) = D(c_i^n)$. Entonces tenemos que $D(f)$ está cubierto por abiertos $D(c_i)$ en los que $s = a_i/c_i$.

Por el teorema 2.2 podemos tomar un número finito de abiertos, de modo que

$$D(f) \subset D(c_1) \cup \cdots \cup D(c_r).$$

Observemos ahora que en el conjunto $D(c_i) \cap D(c_j) = D(c_ic_j)$ tenemos dos elementos de $A_{c_ic_j}$, a saber, a_i/c_i y a_j/c_j, que representan el mismo elemento $s \in \mathcal{O}_X(D(c_ic_j))$. Por la inyectividad de ψ aplicada a este abierto, se cumple que $a_i/c_i = a_j/c_j$ en $A_{c_ic_j}$. Así pues, existe un natural n tal que

$$(c_ic_j)^n(a_ic_j - a_jc_i) = 0.$$

Como tenemos un número finito de índices, podemos tomar un mismo n que sirva para todos. Equivalentemente,

$$c_j^{n+1}(c_i^na_i) - c_i^{n+1}(c_j^na_j) = 0.$$

Ahora podemos cambiar c_i por c_i^{n+1} y a_i por $c_i^n a_i$, con lo que tenemos igualmente que $s = a_i/c_i$ en $D(c_i)$ pero ahora la identidad anterior se reduce a $c_j a_i = c_i a_j$.

El hecho de que los abiertos $D(c_i)$ cubren $D(f)$ implica que

$$\mathrm{rad}\,(f) \subset \mathrm{rad}\,(c_1, \ldots, c_r),$$

luego existe un natural $n \geq 1$ tal que $f^n = \sum_i u_i c_i$. Tomemos $a = \sum_i u_i a_i$. Así

$$c_j a = \sum_i u_i c_j a_i = \sum_i u_i c_i a_j = f^n a_j.$$

Esto significa que $s = a_j/c_j = a/f^n$ en cada $D(c_j)$, luego en todo $D(f)$. Por consiguiente $s = \psi(a/f^n)$. ■

En lo sucesivo consideraremos siempre los espectros de los anillos como espacios anillados locales con la estructura que acabamos de construir. El teorema anterior caracteriza los espacios anillados $\mathrm{Esp}\,A$ si añadimos las observaciones siguientes:

- Si $D(f) \subset D(g)$, entonces $\mathrm{rad}\,(f) \subset \mathrm{rad}\,(g)$ y $f^n = ag$, con $n \geq 0$ y $a \in A$. Si $\bar{f}$ es la imagen de f en A_g, entonces existe un isomorfismo natural $A_f \cong (A_g)_{\bar{f}}$ y la restricción $\mathcal{O}_X(D(g)) \longrightarrow \mathcal{O}_X(D(f))$ se corresponde con el homomorfismo natural $A_g \longrightarrow (A_g)_{\bar{f}} \cong A_f$.

- Si $\mathfrak{p} \in D(f)$, el homomorfismo natural $\mathcal{O}_X(D(f)) \longrightarrow \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}$ se corresponde con el homomorfismo natural $A_f \longrightarrow A_{\mathfrak{p}}$.

En el caso en que $A = k[C]$ para cierto conjunto algebraico afín C/k, se cumple, tal y como pretendíamos, que el haz $\mathcal{O}_X$ coincide con el haz $\mathcal{F}_X$ definido al principio de la sección. En efecto, ya hemos visto que

$$\mathcal{F}_X(D(f)) \cong k[D(f)] \cong A_f \cong \mathcal{O}_X(D(f))$$

o, en otras palabras, que $\mathcal{F}_X(U) \cong \mathcal{O}_X(U)$ para todo abierto principal $U = D(f)$. Más aún, las observaciones posteriores a 2.4 muestran que los isomorfismos son consistentes con las restricciones en el sentido que requiere el teorema 2.1. Por consiguiente, pueden unirse en un isomorfismo $\mathcal{F}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X$.

En el capítulo anterior hemos visto que la geometría interna de un conjunto algebraico cuasiproyectivo C/k está contenida en su estructura de espacio anillado, pero que en el caso de un esquema afín la k-álgebra $k[C]$ es suficiente. Ahora podemos comprender mejor la situación: si C es afín, entonces $k[C]$ determina la estructura de espacio anillado de $\mathrm{Esp}\,k[C]$, la cual determina a su vez la estructura de espacio anillado de C.

Vamos a considerar ahora el caso de los conjuntos algebraicos proyectivos.

Definición 2.5 Sea A un anillo graduado y $X = \mathrm{Proy}\,A$ su espectro homogéneo. Para cada $\mathfrak{p} \in \mathrm{Proy}\,A$, llamamos $S_{(\mathfrak{p})}$ al conjunto de los elementos homogéneos de A que no están en $\mathfrak{p}$, que claramente es multiplicativo. Así mismo, $A_{(\mathfrak{p})}$ será el subanillo de $S_{(\mathfrak{p})}^{-1}A$ formado por las fracciones cuyo numerador es homogéneo del mismo grado que el denominador.

Si $f \in A$ es homogéneo de grado no nulo, llamaremos $A_{(f)}$ al subanillo de A_f formado por las fracciones cuyo numerador es homogéneo del mismo grado que el denominador.

Definimos como sigue un haz $\mathcal{O}_X$ sobre el espectro homogéneo X:

Para cada abierto $U \subset X$, definimos $\mathcal{O}_X(U)$ como el conjunto de todas las funciones $f : U \longrightarrow \bigoplus\limits_{\mathfrak{p}\in U} A_{(\mathfrak{p})}$ tales que para todo $\mathfrak{p} \in U$ se cumple que $f(\mathfrak{p}) \in A_{(\mathfrak{p})}$ y que además cumplen la propiedad siguiente:

Para cada $\mathfrak{p} \in U$ existe un entorno abierto $\mathfrak{p} \in V \subset U$ y elementos $a, b \in A$ homogéneos del mismo grado tales que para cada $\mathfrak{q} \in V$ se cumple que $b \notin \mathfrak{q}$ y $f(\mathfrak{q}) = a/b \in A_{(\mathfrak{q})}$.

Como restricciones consideramos las restricciones usuales entre aplicaciones. Es inmediato que $\mathcal{O}_X$ es un prehaz en X y se comprueba sin dificultad que, de hecho, es un haz.

El teorema siguiente implica que $\operatorname{Proy} A$ es un espacio anillado local con esta estructura.

Teorema 2.6 *Sea A un anillo graduado y sea $X = \operatorname{Proy} A$. Entonces:*

a) Para cada $\mathfrak{p} \in X$, se cumple que $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} \cong A_{(\mathfrak{p})}$.

b) Si $f \in A$ es homogéneo de grado no nulo, entonces tenemos un isomorfismo de espacios anillados $D(f) \cong \operatorname{Esp} A_{(f)}$.

Demostración: La prueba del apartado a) es idéntica a la del apartado correspondiente del teorema 2.4. Observemos que los anillos $A_{(\mathfrak{p})}$ son locales, luego a) implica que $\operatorname{Proy} A$ es un espacio anillado local.

Para cada ideal homogéneo $\mathfrak{a}$ de A definimos $\phi(\mathfrak{a}) = (\mathfrak{a}A_f) \cap A_{(f)}$. En particular, si $\mathfrak{p} \in D(f)$, tenemos que $\mathfrak{p}A_f$ es un ideal primo en A_f (por [3.39]), luego $\phi(\mathfrak{p}) \in \operatorname{Esp} A_{(f)}$. En particular tenemos que ϕ se restringe a una aplicación $\phi : D(f) \longrightarrow \operatorname{Esp} A_{(f)}$. Veamos que es biyectiva.

Si $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q} \in D(f)$ cumplen que $\phi(\mathfrak{p}) = \phi(\mathfrak{q})$, entonces $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$, pues si $g \in \mathfrak{p}$ es homogéneo de grado d y f tiene grado e, tenemos que $g^e/f^d \in \phi(\mathfrak{p}) = \phi(\mathfrak{q})$, luego $g \in \mathfrak{q}A_f$. Esto implica que $\mathfrak{p}A_f \subset \mathfrak{q}A_f$ e igualmente se prueba la inclusión opuesta. Tenemos, pues, que $\mathfrak{p}A_f = \mathfrak{q}A_f$ y el teorema [3.39] implica que $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$.

La suprayectividad la probaremos más en general: partimos de un ideal radical $\mathfrak{b}$ de $A_{(f)}$ y vamos a encontrar un ideal radical homogéneo $\mathfrak{a}$ en A tal que $\phi(\mathfrak{a}) = \mathfrak{b}$.

Concretamente, definimos $\mathfrak{a}$ como el radical del ideal generado por los numeradores de los elementos de $\mathfrak{b}$. Dichos numeradores son homogéneos, luego $\mathfrak{a}$ es un ideal homogéneo por el teorema 1.8.

Veamos que un elemento $a \in A$ homogéneo de grado d cumple $a \in \mathfrak{a}$ si y sólo si $a^e/f^d \in \mathfrak{b}$, donde e es el grado de f.

Una implicación es obvia. Si $a \in \mathfrak{a}$, entonces existe un $n \geq 0$ tal que

$$a^{ne} = a_1 m_1 + \cdots + a_r m_r,$$

donde los $a_i \in A$ y los m_i son numeradores de elementos de $\mathfrak{b}$. En particular son homogéneos, y podemos suponer que todos los sumandos son homogéneos de grado nde. Concluimos entonces que $a^{ne}/f^{nd} \in \mathfrak{b}$ y, como $\mathfrak{b}$ es radical, también $a^e/f^d \in \mathfrak{b}$.

Observemos que si $\mathfrak{b}$ es un ideal primo entonces $f \notin \mathfrak{a}$, y es fácil ver que $\mathfrak{a}$ también es un ideal primo, luego $\mathfrak{a} \in D(f)$. Volviendo al caso general, veamos que $\phi(\mathfrak{a}) = \mathfrak{b}$.

Si $a/f^d \in \mathfrak{b}$, entonces $a \in \mathfrak{a}$, luego $a/f^d \in (\mathfrak{a}A_f) \cap A_{(f)} = \phi(\mathfrak{a})$. Recíprocamente, si $a/f^d \in (\mathfrak{a}A_f) \cap A_{(f)}$, entonces $f^r a \in \mathfrak{a}$, luego $f^{re}a^e/f^{re+de} \in \mathfrak{b}$, luego $a^e/f^{de} \in \mathfrak{b}$, luego $a/f^d \in \mathfrak{b}$.

Observemos ahora que si $\mathfrak{a}$ es un ideal homogéneo de A y $\mathfrak{p} \in \operatorname{Proy} A$, se cumple $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ si y sólo si $\phi(\mathfrak{a}) \subset \phi(\mathfrak{p})$. Una implicación es obvia. Si $\phi(\mathfrak{a}) \subset \phi(\mathfrak{p})$ y $a \in \mathfrak{a}$ es homogéneo de grado d, entonces $a^e/f^d \in \phi(\mathfrak{p})$, luego $a \in \mathfrak{p}$.

Esto implica que ϕ es un homeomorfismo, pues una base de $\operatorname{Proy} A$ la forman los conjuntos $V(\mathfrak{a})$, donde $\mathfrak{a}$ es un ideal radical homogéneo de A y una base de $\operatorname{Esp} A_{(f)}$ la forman los conjuntos $V(\phi(\mathfrak{a}))$.

Observemos ahora que si $\mathfrak{p} \in D(f)$, entonces $A_{(\mathfrak{p})} \cong (A_{(f)})_{\phi(\mathfrak{p})}$. El isomorfismo se calcula como sigue: a cada $a/b \in A_{(\mathfrak{p})}$, donde numerador y denominador son homogéneos de grado d, le asignamos el elemento

$$\frac{ab^{e-1}/f^d}{b^e/f^d} \in (A_{(f)})_{\phi(\mathfrak{p})}.$$

Tenemos así un isomorfismo cuyo inverso viene dado por

$$\frac{a/f^r}{b/f^s} \mapsto \frac{af^s}{bf^r}. \tag{2.1}$$

Llamemos $Y = \operatorname{Esp} A_{(f)}$. Si $U \subset Y$ es un abierto, por definición, los elementos de $\mathcal{O}_Y(U)$ y los de $\mathcal{O}_X(\phi^{-1}[U])$ son, respectivamente, funciones

$$U \longrightarrow \bigoplus_{\mathfrak{p} \in U} (A_{(f)})_{\mathfrak{p}} = \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \phi^{-1}[U]} (A_{(f)})_{\phi(\mathfrak{p})} \quad \text{y} \quad \phi^{-1}[U] \longrightarrow \bigoplus_{\mathfrak{p} \in \phi^{-1}[U]} A_{(\mathfrak{p})}.$$

Los isomorfismos entre los sumandos directos permiten definir de forma natural isomorfismos $\mathcal{O}_Y(U) \cong \mathcal{O}_X(\phi^{-1}[U])$ (notemos que un elemento de $\mathcal{O}_Y(U)$

es localmente como el miembro izquierdo de (2.1), luego su imagen es localmente como el miembro derecho, y está, efectivamente, en $\mathcal{O}_X(\phi^{-1}[U])$). Es inmediato que estos isomorfismos conmutan con las restricciones, por lo que determinan un isomorfismo de espacios anillados locales. ■

La estructura de espacio anillado local que hemos acabamos de definir sobre los espectros homogéneos guarda la misma relación con los conjuntos algebraicos proyectivos que la que hemos observado en el caso afín para los espectros usuales:

Si C/k es un conjunto algebraico proyectivo y $X = \operatorname{Proy} A_k[C]$, tenemos, como en el caso afín, que los abiertos de C se corresponden biunívocamente con los abiertos de X, luego podemos definir un haz $\mathcal{F}_X$ en X mediante $\mathcal{F}_X(U) = k[U']$, donde U' es el abierto de C asociado a U (con las restricciones usuales).

Observemos que si $f = x_0$, podemos tomar $A^n = V(f)$ y $C_* = C \cap A^n$, y es fácil ver que $A_k[C]_{(f)} \cong k[C_*]$. (El isomorfismo es $[F]/x_0^r \mapsto [F_*]$.)

El teorema anterior prueba entonces que, para cada abierto U contenido en $C \cap A^n$ se cumple que $\mathcal{O}_X(U) \cong k[U]$. Si hacemos que $f = x_i$ para todo i, obtenemos lo mismo para todos los abiertos contenidos en algún abierto $V(x_i)$, y tales abiertos son una base de C. Además, si un abierto está contenido en dos conjuntos $V(x_i)$, los isomorfismos correspondientes son el mismo. Obviamente entonces, los isomorfismos son consistentes con las restricciones, por lo que el teorema 2.1 nos da un isomorfismo $(X, \mathcal{O}_X) \cong (X, \mathcal{F}_X)$.

En definitiva, los anillos de $\operatorname{Proy} A_k[C]$ son los anillos $k[U]$, sólo que no están asociados a los abiertos U de C, sino a los abiertos correspondientes en $\operatorname{Proy} A_k[C]$. ■

2.2 Esquemas

Enseguida daremos la definición general de esquema, pero primero conviene considerar un caso particular:

Definición 2.7 Un *esquema afín* es un espacio anillado (local) isomorfo a un espacio $\operatorname{Esp} A$, para cierto anillo A.

Notemos que si $X \cong \operatorname{Esp} A$ es un esquema afín, el anillo A está determinado salvo isomorfismo, pues $A \cong \mathcal{O}_X(X)$.

Los esquemas afines son la versión abstracta de los conjuntos algebraicos afines y, como en la geometría algebraica clásica, las cuestiones locales relativas a esquemas arbitrarios podrán reducirse al estudio de esquemas afines. El teorema siguiente es una versión abstracta del teorema 1.23:

Teorema 2.8 *Si* $\operatorname{Esp} A$ *es un esquema afín y* $f \in A$, *entonces el espacio anillado* $D(f)$ *es isomorfo a* $\operatorname{Esp} A_f$, *por lo que es también un esquema afín.*

Demostración: Llamemos $X = \operatorname{Esp} A$ e $Y = \operatorname{Esp} A_f$. El teorema [3.39] nos da que la inclusión $i : A \longrightarrow A_f$ induce un homeomorfismo $\bar{\imath} : Y \longrightarrow D(f)$. Hemos de probar que el haz $\bar{\imath}_*(\mathcal{O}_Y)$ es isomorfo a $\mathcal{O}_X|_{D(f)}$. Para ello tomamos en primer lugar un abierto $U = D(g) \subset D(f)$, con $g \in A$. Esto significa que $\operatorname{rad}(g) \subset \operatorname{rad}(f)$, luego $g^n = af$ para cierto $n \geq 0$, $a \in A$. Llamemos $\bar{g}$ a la imagen de g en A_f. Entonces

$$\mathcal{O}_X|_{D(f)}(D(g)) = \mathcal{O}_X(D(g)) \cong A_g \cong (A_f)_{\bar{g}} \cong \mathcal{O}_Y(D(\bar{g})) = \bar{\imath}_*(\mathcal{O}_Y)(D(g)).$$

Una comprobación rutinaria muestra que estos isomorfismos conmutan con las restricciones (entre abiertos principales). El teorema 2.1 nos da entonces un isomorfismo entre los haces $\bar{\imath}_*(\mathcal{O}_Y)$ y $\mathcal{O}_X|_{D(f)}$ ■

Definición 2.9 Un *esquema* es un espacio anillado (local) X en el que todo punto tiene un entorno abierto que, como espacio anillado, es un esquema afín. Los abiertos de X que son esquemas afines los llamaremos *abiertos afines* de X. Un *homomorfismo de esquemas* es un homomorfismo de espacios anillados locales.

Obviamente, todo esquema afín es un esquema. Por el teorema anterior, si X es un esquema todo punto de X tiene entornos afines arbitrariamente pequeños o, equivalentemente, X tiene una base formada por abiertos afines. Esta última observación implica que todo abierto en un esquema es de nuevo un esquema.

El teorema 2.6 implica que si A es un anillo graduado entonces $\operatorname{Proy} A$ es un esquema.

Ejemplo Si C/k es un conjunto algebraico cuasiproyectivo y $\overline{C}$ es su clausura proyectiva, podemos formar el esquema $\operatorname{Proy} A_k[\overline{C}]$, cuyos abiertos se corresponden biunívocamente con los abiertos de $\overline{C}$. Uno de estos abiertos es precisamente el conjunto C, y el abierto correspondiente en $\operatorname{Proy} A_k[\overline{C}]$ es un esquema E_C cuyos abiertos se corresponden biunívocamente con los abiertos de C, de tal modo que si $U \subset C$ se corresponde con $U' \subset E_C$, entonces $E_C(U') \cong k[U]$, y las restricciones entre anillos de E_C se corresponden a través de estos isomorfismos con las restricciones usuales entre los anillos de funciones regulares.

Observemos que si C/k es un conjunto algebraico afín tenemos otra forma de asociarle un esquema, a saber, $\operatorname{Esp} k[C]$, que cumple la misma relación con los anillos de funciones regulares de C, pero, precisamente por ello, se cumple que $\operatorname{Esp} k[C] \cong E_C$. ■

Ahora vamos a generalizar a esquemas afines el teorema 1.21.

Si $\phi : A \longrightarrow B$ es un homomorfismo de anillos, y llamamos $Y = \operatorname{Esp} A$, $X = \operatorname{Esp} B$, tenemos definida una aplicación continua $\bar{\phi} : X \longrightarrow Y$ dada por $\bar{\phi}(\mathfrak{p}) = \phi^{-1}[\mathfrak{p}]$. Vamos a definir $\phi^{\#}$ de modo que $(\bar{\phi}, \phi^{\#})$ sea un homomorfismo de esquemas.

Para cada $f \in A$, tenemos que $\bar{\phi}^{-1}[D(f)] = D(\phi(f))$. Por otra parte, $\mathcal{O}_Y(D(f)) \cong A_f$ y $\mathcal{O}_X(D(\phi(f))) \cong A_{\phi(f)}$, luego podemos definir un homomorfismo $\phi^{\#}_{D(f)} : \mathcal{O}_X(D(f)) \longrightarrow \mathcal{O}_Y(D(\phi(f)))$ mediante $u/v \mapsto \phi(u)/\phi(v)$ de forma natural, y es fácil ver que estos homomorfismos conmutan con las restricciones, con lo que el teorema 2.1 nos da un homomorfismo $\phi^{\#}$. Observemos que $\phi^{\#}_Y = \phi$.

Sea ahora un homomorfismo arbitrario $f = (f_0, f^{\#}) : X \longrightarrow Y$ y veamos que está inducido por $\phi = f^{\#}_Y$. Para cada $\mathfrak{q} \in X$, sea $\mathfrak{p} = f_0(\mathfrak{q})$, de modo que tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\phi} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_{\mathfrak{p}} & \xrightarrow[f^{\#}_{\mathfrak{q}}]{} & B_{\mathfrak{q}} \end{array}$$

Esto implica que $\phi[A \setminus \mathfrak{p}] \subset B \setminus \mathfrak{q}$, pues cada $u \in A \setminus \mathfrak{p}$ es una unidad en $A_{\mathfrak{p}}$, luego $\phi(u)$ es una unidad en $B_{\mathfrak{q}}$, luego $u \in B \setminus \mathfrak{q}$. Así pues, $\phi^{-1}[\mathfrak{q}] \subset \mathfrak{p}$. Por otra parte tenemos que $(f^{\#}_{\mathfrak{q}})^{-1}[\mathfrak{q}B_{\mathfrak{q}}] = \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$. Por lo tanto, si $u \in \mathfrak{p}$ se cumple que $\phi(u) \in \mathfrak{q}B_{\mathfrak{q}} \cap B = \mathfrak{q}$. En definitiva, $f_0(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p} = \phi^{-1}[\mathfrak{q}] = \bar{\phi}(\mathfrak{q})$, es decir, $f_0 = \bar{\phi}$.

El diagrama anterior conmuta también con $\phi^{\#}_{\mathfrak{q}}$ en lugar de $f^{\#}_{\mathfrak{q}}$, luego ha de ser $\phi^{\#}_{\mathfrak{q}} = f^{\#}_{\mathfrak{q}}$. Así, si U es cualquier abierto de Y y $u \in \mathcal{O}_Y(U)$, tenemos que, para todo $\mathfrak{q} \in \bar{\phi}^{-1}[U]$,

$$\phi^{\#}_U(u)_{\mathfrak{q}} = \phi^{\#}_{\mathfrak{q}}(u_{\bar{\phi}(\mathfrak{q})}) = f^{\#}_{\mathfrak{q}}(u_{f(\mathfrak{q})}) = f^{\#}_U(u)_{\mathfrak{q}}.$$

Esto implica que $\phi^{\#}_U(u) = f^{\#}_U(u)$, luego $\phi^{\#}_U = f^{\#}_U$. En definitiva, hemos probado el teorema siguiente:

Teorema 2.10 *Si X e Y son dos esquemas afines, existe una biyección entre los homomorfismos de anillos $\phi : \mathcal{O}_Y(Y) \longrightarrow \mathcal{O}_X(X)$ y los homomorfismos de esquemas $(\bar{\phi}, \phi^{\#}) : X \longrightarrow Y$, de modo que $\phi^{\#}_Y = \phi$.*

En realidad, la aplicación $f \mapsto f^{\#}_Y$ está definida aunque los esquemas no sean afines, pero no tiene por qué ser biyectiva. Vamos a probar que sigue siéndolo si sólo exigimos que el esquema Y sea afín.

Teorema 2.11 *Sea X un esquema arbitrario e Y un esquema afín. La aplicación*

$$\operatorname{Hom}(X, Y) \longrightarrow \operatorname{Hom}(\mathcal{O}_Y(Y), \mathcal{O}_X(X))$$

que a cada homomorfismo de esquemas f le asigna el homomorfismo de anillos $f^{\#}_Y$ es biyectiva.

DEMOSTRACIÓN: Cubramos X con una familia de abiertos afines U_i y consideremos el diagrama siguiente:

$$\begin{CD}
\operatorname{Hom}(X,Y) @>{\rho}>> \operatorname{Hom}(\mathcal{O}_Y(Y),\mathcal{O}_X(X))\\
@V{\alpha}VV @VV{\beta}V\\
\prod\limits_i \operatorname{Hom}(U_i,Y) @>>{\gamma}> \prod\limits_i \operatorname{Hom}(\mathcal{O}_Y(Y),\mathcal{O}_X(U_i))
\end{CD}$$

Aquí α restringe cada homomorfismo a cada U_i, mientras que β compone cada homomorfismo con las restricciones a los U_i. A su vez, γ está compuesta por las biyecciones dadas por el teorema anterior, luego es también una biyección. El diagrama es conmutativo por la definición de restricción: si $f \in \operatorname{Hom}(X,Y)$,

$$(f|_{U_i})^\#_Y = i^\#(f^\#_Y) = f^\#_Y \circ \rho^X_{U_i}.$$

Es fácil ver que un homomorfismo $X \longrightarrow Y$ está completamente determinado por sus restricciones a los abiertos U_i, luego α es inyectiva y ρ también. Tomemos ahora $\phi \in \operatorname{Hom}(\mathcal{O}_Y(Y),\mathcal{O}_X(X))$. Los homomorfimos $\phi \circ \rho^X_{U_i}$ se corresponden con homomorfismos $f_i \in \operatorname{Hom}(U_i,Y)$. Se cumple que $f_i|_{U_i\cap U_j} = f_j|_{U_i\cap U_j}$, pues si $V \subset U_i \cap U_j$ es un abierto afín, entonces

$$(f_i|_V)^\#_V = (f_i)^\#_Y \circ \rho^{U_i}_V = \phi \circ \rho^X_{U_i} \circ \rho^{U_i}_V = \phi \circ \rho^X_V,$$

e igualmente con j, luego $(f_i|_V)^\#_V = (f_j|_V)^\#_V$. Así, pues $f_i|_V$ y $f_j|_V$ se corresponden con el mismo homomorfismo de anillos, luego $f_i|_V = f_j|_V$. Esto implica la igualdad de las restricciones a $U_i \cap U_j$. No es difícil ver entonces que existe un único homomorfimo $f \in \operatorname{Hom}(X,Y)$ tal que $f|_{U_i} = f_i$. Entonces $\rho(f) \circ \rho^X_{U_i} = (f|_{U_i})^\#_Y = \phi \circ \rho^X_{U_i}$ para todo i, luego $\rho(f) = \phi$. ■

Si C/k y D/k son conjuntos algebraicos afines, el teorema 2.10 afirma que los homomorfismos de esquemas $\operatorname{Esp} k[C] \longrightarrow \operatorname{Esp} k[D]$ se corresponden biunívocamente con los homomorfismos de anillos $k[D] \longrightarrow k[C]$, mientras que el teorema 1.21 afirma que las aplicaciones regulares de C en D (definidas sobre k) se corresponden con los homomorfismos de k-álgebras $k[D] \longrightarrow k[C]$. Ahora veremos cómo incorporar este matiz al caso general:

Definición 2.12 Sea S un esquema. Un *esquema definido sobre* S es un par ordenado (X,π) formado por un esquema X y un homomorfismo de esquemas $\pi : X \longrightarrow S$. Se dice que π es el *homomorfismo estructural* de X y que S es su *esquema base.* Usaremos la notación X/S para referirnos a un esquema definido sobre S. Si A es un anillo y $S = \operatorname{Esp} A$, diremos simplemente que X está definido sobre A. Si X e Y son esquemas definidos sobre S, diremos que un homomorfismo $f : X \longrightarrow Y$ *está definido sobre* S si conmuta con los homomorfismos estructurales.

De este modo, la noción de esquema sobre un esquema S generaliza a la de esquema sobre un anillo A, y ésta última tiene una interpretación muy simple que vamos a ver a continuación:

Observemos en primer lugar que si B es un anillo, fijar una estructura de B-álgebra en un anillo A (o sea, una estructura de B-módulo compatible con la estructura de anillo de A) es equivalente a fijar un homomorfismo de anillos $i : B \longrightarrow A$.

Si X es un esquema, cada homomorfismo de anillos $i : B \longrightarrow \mathcal{O}_X(X)$ determina, al componerlo con las restricciones, homomorfismos $i : B \longrightarrow \mathcal{O}_X(U)$ para todos los abiertos U de X, es decir, determina estructuras de B-álgebra en todos los anillos $\mathcal{O}_X(U)$, respecto a las cuales las restricciones son homomorfismos de B-álgebras. En definitiva, un homomorfismo de anillos $i : B \longrightarrow \mathcal{O}_X(X)$ convierte al haz de X en un haz de B-álgebras.

Teniendo en cuenta que $\mathcal{O}(\operatorname{Esp} B) \cong B$, el teorema anterior implica que una estructura de esquema sobre B en un esquema X está completamente determinada por un homomorfismo $i : B \longrightarrow \mathcal{O}_X(X)$, luego concluimos que un esquema sobre B es simplemente un esquema cuyo haz asociado es, de hecho, un haz de B-álgebras. Los homomorfismos de esquemas sobre B son simplemente los homomorfismos de esquemas cuyos homomorfismos asociados son homomorfismos de B-álgebras. En tal caso, los anillos de gérmenes $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}$ son también B-álgebras, al igual que los homomorfismos naturales $\mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}$.

En particular, todo esquema tiene una única estructura de $\mathbb{Z}$-esquema, pues todo anillo tiene una única estructura de $\mathbb{Z}$-álgebra y todos los homomorfismos de anillos son homomorfismos de $\mathbb{Z}$-álgebras. Esto significa que todo teorema válido para esquemas sobre un esquema dado S son válidos para esquemas arbitrarios tomando $S = \operatorname{Esp} \mathbb{Z}$.

Observemos también que si X es un esquema sobre S y U es un abierto en X, entonces U adquiere estructura de esquema sobre S sin más que componer la inclusión $U \longrightarrow X$ con el homomorfismo estructural $X \longrightarrow S$. Trivialmente, entonces, la inclusión $U \longrightarrow X$ se convierte en un homomorfismo definido sobre S. En el caso en que X es un esquema sobre un anillo B, entonces los anillos los abiertos de U tienen la misma estructura de B-álgebra vistos como anillos de U que como anillos de X.

Si A es un álgebra sobre un anillo B, el teorema 2.10 nos da una estructura de esquema sobre B en $X = \operatorname{Esp} A$. El isomorfismo $\mathcal{O}_X(X) \cong A$ es un isomorfismo de B-álgebras, y de aquí se sigue fácilmente que todos los isomorfismos descritos en el teorema 2.4 son homomorfismos de B-álgebras cuando consideramos en los anillos $A_\mathfrak{p}$ y A_f como B-álgebras de forma natural.

Similarmente, si A es un anillo graduado y $B = A_0$, la construcción de $\operatorname{Proy} A$ muestra que todos sus anillos tienen una estructura natural de B-álgebra, de modo que se trata también de un esquema sobre B. Si $f \in A$ es homogéneo, entonces $A_{(f)}$ es también una B-álgebra y el isomorfismo $D(f) \cong \operatorname{Esp} A_{(f)}$ está definido sobre B.

Ejemplo Si C/k es un conjunto algebraico afín, la estructura de k-álgebra de $k[C]$ induce una estructura de esquema definido sobre k en $X = \operatorname{Esp} k[C]$, respecto a la cual los isomorfismos entre los anillos de X y los anillos de funciones regulares sobre abiertos de C son isomorfismos de k-álgebras. Lo mismo sucede si C/k es un conjunto algebraico proyectivo y $X = \operatorname{Proy} A_k[C]$ y, más en general, si C/k es un conjunto algebraico cuasiproyectivo y X es su esquema asociado.

Si C/k y D/k son dos conjuntos algebraicos cuasiproyectivos y E_C, E_D son sus esquemas asociados, hemos visto que las aplicaciones regulares $\phi : C \longrightarrow D$ se corresponden biunívocamente con los k-homomorfismos $\phi : C \longrightarrow D$ como espacios anillados locales, y es inmediato que éstos se corresponden biunívocamente con los homomorfismos de esquemas $\phi : E_C \longrightarrow E_D$ definidos sobre k. ■

Ahora nos encontramos con una generalización de los conceptos de espacio afín y proyectivo:

Definición 2.13 Si B es un anillo, llamaremos *espacio afín* n-dimensional sobre B al esquema $A^n_B = \operatorname{Esp}(B[X_1,\ldots,X_n])$, mientras que el *espacio proyectivo* n-dimensional sobre B será el esquema $\mathrm{P}^n_B = \operatorname{Proy}(B[X_0,\ldots,X_n])$. Claramente ambos tienen una estructura natural de esquema definido sobre B.

De este modo, si k es un cuerpo, A^n_k y P^n_k son los esquemas asociados a los conjuntos algebraicos $A^n(k)$ y $\mathrm{P}^n(k)$.

Terminamos la sección con un resultado que necesitaremos más adelante. Se trata de una generalización de lo que en los esquemas afines son los abiertos principales.

Definición 2.14 Sea X un esquema y $f \in \mathcal{O}_X(X)$. Definimos

$$X_f = \{P \in X \mid f_P \in \mathcal{O}^*_{X,P} = \mathcal{O}_{X,P} \setminus \mathfrak{m}_P\}.$$

Por ejemplo, si $X = \operatorname{Esp} A$ y $f \in A$, entonces $\mathfrak{p} \in X_f$ si y sólo si f es una unidad de $A_\mathfrak{p}$, si y sólo si $\mathfrak{p} \in D(f)$, luego $X_f = D(f)$.

Un *buen cubrimiento afín* de un esquema X es un cubrimiento finito de X formado por abiertos afines de modo que la intersección de dos cualesquiera de ellos sea a su vez unión de un número finito de abierfos afines.

Obviamente, todo esquema afín tiene un buen cubrimiento afín (tomando como único abierto todo el espacio). Más adelante definiremos los esquemas noetherianos y veremos que todos ellos admiten un buen cubrimiento afín.

Teorema 2.15 *Si X es un esquema y $f \in \mathcal{O}_X(X)$, entonces X_f es abierto en X y, si X admite un buen cubrimiento afín, la restricción $\mathcal{O}_X(X) \longrightarrow \mathcal{O}_X(X_f)$ induce un isomorfismo $\mathcal{O}_X(X)_f \cong \mathcal{O}_X(X_f)$.*

Demostración: Si $P \in X_f$ entonces existe un abierto U en X (que podemos tomar contenido en el dominio de f) y un $g \in \mathcal{O}_X(U)$, de modo que $P \in U$ y $f_P g_P = 1$. Tomando U suficientemente pequeño esto se traduce en que $f|_U g = 1$. De aquí podemos concluir que $U \subset X_f$, luego X_f es abierto.

Más aún, hemos encontrado pares (U, g) con la propiedad de que $g \in \mathcal{O}_X(U)$ y $f|_U g = 1$ y de modo que los abiertos U cubren X_f. Si (U', g') es otro par y

$V = U \cap U'$, tenemos que $f|_V g|_V = 1 = f|_V g'|_V$. Como son unidades, podemos simplificar y concluir que $g|_V = g'|_V$. Esto implica que podemos formar un $g \in \mathcal{O}_X(X_f)$ tal que $f|_{X_f} g = 1$. Así pues, $f|_{X_f}$ es una unidad de $\mathcal{O}_X(X_f)$, por lo que la restricción induce un homomorfismo $\mathcal{O}_X(X)_f \longrightarrow \mathcal{O}_X(X_f)$.

Más en general, para cada abierto U de X, la restricción induce homomorfismos $\mathcal{O}_X(U)_f \longrightarrow \mathcal{O}_X(U \cap X_f)$. Aquí hemos de observar que $\mathcal{O}_X(U)_f = \mathcal{O}_X(U)_{f|_U}$. En el miembro izquierdo consideramos a $\mathcal{O}_X(U)$ como $\mathcal{O}_X(X)$-módulo y en el derecho como anillo.

Si U es un abierto afín, entonces $U \cap X_f = D(f|_U)$, luego el teorema 2.4 nos da que el homomorfismo $\mathcal{O}_X(U)_f \longrightarrow \mathcal{O}_X(U \cap X_f)$ es de hecho un isomorfismo.

Consideremos ahora un buen cubrimiento afín $\{U_i\}$ de X. Entonces X_f es la unión de los abiertos $V_i = U_i \cap X_f$. Podemos formar una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(X) \longrightarrow \bigoplus_i \mathcal{O}_X(U_i) \longrightarrow \bigoplus_{i,j} \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)$$

donde el primer homomorfismo viene dado por $s \mapsto (s|_{U_i})_i$ mientras que el segundo es el dado por $(s_i)_i \mapsto (s_i|_{U_i \cap U_j} - s_j|_{U_i \cap U_j})_{i,j}$. Entonces también es exacta la sucesión de localizaciones respecto de f, con lo que tenemos el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_X(X)_f \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & \bigoplus_i \mathcal{O}_X(U_i)_f \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_{i,j} \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)_f \arrow[d, "\beta"] \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_X(X_f) \arrow[r] & \bigoplus_i \mathcal{O}_X(V_i) \arrow[r] & \bigoplus_{i,j} \mathcal{O}_X(V_i \cap V_j)
\end{tikzcd}$$

La fila inferior es la sucesión análoga a la de X pero para el esquema X_f. La flecha vertical central es un isomorfismo porque los abiertos U_i son afines. Del diagrama se sigue que α es inyectiva. Ahora observamos que lo único que hemos usado para demostrarlo es que X es un esquema dotado de un cubrimiento finito de abiertos afines, luego el resultado es válido también para cada espacio $\mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)$, luego también β es inyectiva. El diagrama anterior implica entonces que α es biyectiva. ■

2.3 Subesquemas abiertos y cerrados

Ya hemos observado que todo abierto U en un esquema X tiene una estructura natural de esquema (y se dice entonces que U es un *subesquema abierto* de X. Un poco más en general podemos definir la noción de inmersión abierta de un esquema en otro, o incluso de un espacio anillado en otro:

Definición 2.16 Un homomorfismo de espacios anillados $f : X \longrightarrow Y$ es una *inmersión abierta* si f_0 es un homeomorfismo entre X y un abierto de Y y para todo $P \in X$ la aplicación $f_P^\# : \mathcal{O}_{Y,f(P)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,P}$ es un isomorfismo.

Es obvio que la composición de inmersiones abiertas es una inmersión abierta, así como que si U es un abierto en un espacio anillado X, entonces la inclusión $i : U \longrightarrow X$ [1.14] es una inmersión abierta.

En las condiciones de la definición precedente, si $U = f_0[X]$, podemos definir $f' : X \longrightarrow U$, de modo que $f'_0 = f_0$ y $f'^{\#}$ es $f^{\#}$ actuando únicamente sobre los abiertos de U. Es inmediato comprobar que f' es un homomorfismo de espacios anillados y, como las aplicaciones f'_P son también isomorfismos, concluimos que f' es un isomorfismo. Además $f' \circ i = f$.

En resumen: una inmersión abierta $f : X \longrightarrow Y$ entre espacios anillados (resp. entre esquemas) es lo mismo que un isomorfismo de X en un abierto (resp. en un subesquema abierto) de Y.

La situación con los cerrados no es tan simple. Empezamos recordando la noción de inmersión cerrada entre espacios anillados, que ya habíamos introducido en [B.1]:

Definición 2.17 Un homomorfismo de espacios anillados $f : X \longrightarrow Y$ es una *inmersión cerrada* si f_0 es un homeomorfismo entre X y un cerrado de Y y para todo $P \in X$ la aplicación $f^{\#}_P : \mathcal{O}_{Y,f(P)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,P}$ es un epimorfismo.

Quizá en este punto no quede claro por qué es razonable exigir la condición de suprayectividad a las inmersiones cerradas, pero veremos que, con esta definición, la relación entre subconjuntos cerrados de un conjunto algebraico afín C/k y los ideales radicales de $k[C]$ se generaliza razonablemente a esquemas arbitrarios.

Ejemplo Si X es un conjunto algebraico cuasiproyectivo y C es un cerrado en X, entonces la inclusión $i : C \longrightarrow X$ es una inmersión cerrada. Observemos que $i^{\#}_P$ tranforma el ideal de los gérmenes de funciones regulares en X que se anulan en P en el ideal de los gérmenes de funciones en C que cumplen lo mismo, luego ciertamente i es un homomorfismo de espacios anillados locales. La suprayectividad de los homomorfismos entre los anillos locales equivale a que toda función regular en un entorno de un punto $P \in C$ se extiende a una función regular en un entorno de P en X (y ello se debe a su vez a que, si $C \subset X \subset \mathrm{P}^n$, cada función regular en un entorno de P en C está definida por un cociente de polinomios homogéneos del mismo grado con $n + 1$ variables cuyo denominador no se anula en P, los cuales definen una extensión de la función a un entorno de P en X). ■

Si en un conjunto algebraico afín los subconjuntos cerrados están determinados por ideales, en un conjunto algebraico cuasiproyectivo y, más en general, en un espacio anillado arbitrario, las inmersiones cerradas están determinadas por haces de ideales. Concretamente, si X es un espacio anillado, un *haz de ideales* $\mathcal{I}$ de $\mathcal{O}_X$ es un subhaz de $\mathcal{O}_X$ tal que, para cada abierto $U \subset X$, se cumple que $\mathcal{I}(U)$ es un ideal de $\mathcal{O}_X(U)$. En estas condiciones, llamemos

$$V(\mathcal{I}) = \{x \in X \mid \mathcal{I}_x \neq \mathcal{O}_{X,x}\}.$$

Se trata de un cerrado en X, pues si $x \in X \setminus V(\mathcal{I})$, entonces existe un elemento $[(U,f)] \in \mathcal{I}_x$ (con $f \in \mathcal{I}(U)$) que, visto como elemento de $\mathcal{O}_{X,x}$ es $[(U,f)] = 1$. Esto significa que existe un abierto $x \in V \subset U$ de modo que $f|_V = 1$. Entonces $V \subset X \setminus V(\mathcal{I})$.

Sea $i : V(\mathcal{I}) \longrightarrow X$ la inclusión. El espacio $V(\mathcal{I})$ se convierte en un espacio anillado local con el haz $i^{-1}[\mathcal{O}_X/\mathcal{I}]$, pues si $x \in V(\mathcal{I})$, tenemos que

$$i^{-1}[\mathcal{O}_X/\mathcal{I}]_x \cong (\mathcal{O}_X/\mathcal{I})_x \cong \mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{I}_x,$$

que es ciertamente un anillo local. Observemos que

$$i_*(i^{-1}[\mathcal{O}_X/\mathcal{I}]) \cong \mathcal{O}_X/\mathcal{I}.$$

En efecto, si U es abierto en X, tenemos homomorfismos naturales

$$\begin{aligned}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I})(U) \longrightarrow (i^{-1}[\mathcal{O}_X/\mathcal{I}])^-(U \cap V(\mathcal{I})) &\longrightarrow i^{-1}[\mathcal{O}_X/\mathcal{I}](U \cap V(\mathcal{I})) \\ &= i_*[i^{-1}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I})](U).\end{aligned}$$

Estos homomorfismos conmutan con las restricciones y determinan, por consiguiente, un homomorfismo de haces $\phi : \mathcal{O}_X/\mathcal{I} \longrightarrow i_*(i^{-1}[\mathcal{O}_X/\mathcal{I}])$. Si $x \in V(\mathcal{I})$ entonces

$$(\mathcal{O}_X/\mathcal{I})_x \cong i^{-1}[\mathcal{O}_X/\mathcal{I}]^-_x \cong i^{-1}[\mathcal{O}_X/\mathcal{I}]_x \cong i_*(i^{-1}[\mathcal{O}_X/\mathcal{I}])_x.$$

El último isomorfismo se debe a que i es una inmersión, y la composición de los tres isomorfismos no es más que ϕ_x. Por otra parte, si $x \in X \setminus V(\mathcal{I})$, tenemos que $(\mathcal{O}_X/\mathcal{I})_x = 0$, y también $i_*(i^{-1}[\mathcal{O}_X/\mathcal{I}])_x = 0$. Por consiguiente, todos los homomorfismos f_x son isomorfismos, lo que prueba que ϕ es un isomorfismo de haces.

Componiendo ϕ con el epimorfismo canónico $\mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X/\mathcal{I}$ obtenemos un homomorfismo de haces $i^\# : \mathcal{O}_X \longrightarrow i_*(i^{-1}[\mathcal{O}_X/\mathcal{I}])$ tal que para cada $x \in V(\mathcal{I})$, el homomorfismo $i^\#_x : \mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow i_*(i^{-1}[\mathcal{O}_X/\mathcal{I}])_x \cong \mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{I}_x$ se corresponde con la proyección canónica en el cociente. Eel isomorfismo es ϕ_x^{-1} compuesto con el isomorfismo canónico $(\mathcal{O}_X/\mathcal{I})_x \cong \mathcal{I}_{X,x}/\mathcal{I}_x$.) Así pues, $i^\#$ convierte a la inclusión $i : V(\mathcal{I}) \longrightarrow X$ en una inmersión cerrada.

Para expresar más claramente lo que hemos obtenido, llamemos $Z = V(\mathcal{I})$ y $\mathcal{O}_Z = i^{-1}[\mathcal{O}_X/\mathcal{I}]$. Hemos construido una inmersión cerrada $i : Z \longrightarrow X$ tal que, para cada $x \in Z$, el homomorfismo $i^\#_x : \mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow \mathcal{O}_{Z,x}$ es suprayectivo y su núcleo es $\mathcal{I}_x$. Esto implica a su vez que $\mathcal{I} = \mathrm{N}(i^\#)$.

En particular, todo haz de ideales determina una inmersión cerrada. Ahora probamos que toda inmersión cerrada puede obtenerse de esta forma:

Teorema 2.18 *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una inmersión cerrada entre espacios anillados locales y sea $\mathcal{I} = \mathrm{N}(f^\#)$, que es un subhaz de ideales de $\mathcal{O}_Y$. Entonces f se expresa como composición de un isomorfismo $X \longrightarrow V(\mathcal{I})$ seguido de la inclusión $V(\mathcal{I}) \longrightarrow Y$.*

Demostración: El hecho de que $f[X]$ sea cerrado en Y se traduce en que

$$f_*(\mathcal{O}_X)_y = \begin{cases} 0 & \text{si } y \notin f[X], \\ \mathcal{O}_{X,x} & \text{si } y = f(x). \end{cases}$$

Tenemos una sucesión exacta de haces sobre Y:

$$0 \longrightarrow \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{O}_Y \xrightarrow{f^\#} f_*(\mathcal{O}_X) \longrightarrow 0.$$

La exactitud en $f_*(\mathcal{O}_X)$ se debe a que los homomorfismos $\mathcal{O}_{Y,y} \longrightarrow f_*(\mathcal{O}_X)_y$ son suprayectivos, por definición de inmersión cerrada cuando $y \in f[X]$ y porque el segundo anillo es nulo en caso contrario. Para cada $y \in Y$ tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_y \longrightarrow \mathcal{O}_{Y,y} \longrightarrow f_*(\mathcal{O}_X)_y \longrightarrow 0.$$

De ella se deduce que $y \in V(\mathcal{I})$ si y sólo si $\mathcal{O}_{Y,y} \neq \mathcal{I}_y$, si y sólo si $y \in f[X]$, luego $f[X] = V(\mathcal{I})$.

Llamemos $Z = V(\mathcal{I})$, sea $g_0 = f_0 : X \longrightarrow Z$ y sea $i : Z \longrightarrow Y$ la inclusión. Trivialmente entonces $f_0 = g_0 \circ i_0$. Consideremos ahora el isomorfismo de haces $\bar{f} : \mathcal{O}_Y/\mathcal{I} \longrightarrow \operatorname{Im} f^\# = f_*(\mathcal{O}_X)$. Si $U \subset Y$ es un abierto, $r \in (\mathcal{O}_Y/\mathcal{I})(U)$ y $x \in f^{-1}[U]$, entonces $\bar{f}_U(r)_x = \bar{f}_x(r_{f(x)})$. Por lo tanto, si $U' \subset Y$ es otro abierto tal que $f^{-1}[U] = f^{-1}[U']$ (o, equivalentemente, $V = U \cap Z = U' \cap Z$) y $r' \in (\mathcal{O}_X/\mathcal{I})(U')$ cumple que $r_y = r'_y$ para todo $y \in Z \cap U \cap U'$, entonces $\bar{f}_U(r) = \bar{f}_{U'}(r')$. Dado que todo abierto $V \subset Z$ puede expresarse como $V = U \cap Z$, esto nos permite definir un homomorfismo

$$g_U^- : i^{-1}[\mathcal{O}_Y/\mathcal{I}]^-(V) \longrightarrow \mathcal{O}_X(g_0^{-1}[V])$$

que claramente conmuta con las restricciones, por lo que tenemos un homomorfismo de prehaces g^- que a su vez se extiende a un homomorfismo de haces $g^\# : i^{-1}[\mathcal{O}_Y/\mathcal{I}] \longrightarrow g_{0*}(\mathcal{O}_X)$. La construcción hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{O}_Y/\mathcal{I})(U) \arrow[r, "\bar{f}_U"] \arrow[d, "\phi_U"'] & \mathcal{O}_X(f^{-1}[U]) \\
i^{-1}[\mathcal{O}_Y/\mathcal{I}](U \cap Z) \arrow[ur, "g^\#_{U\cap Z}"'] &
\end{tikzcd}$$

Aquí ϕ es el isomorfismo construido en la definición de $i^\#$. Como $\bar{f}_U$ y ϕ_U son isomorfismos, también lo es $g^\#_{U\cap Z}$, lo que implica que $g^\#$ es un isomorfismo de haces. Componiendo con $\mathcal{O}_Y \longrightarrow \mathcal{O}_Y/\mathcal{I}$ obtenemos la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_Y(U) \arrow[r, "f^\#_U"] \arrow[d, "i^\#_U"'] & \mathcal{O}_X(f^{-1}[U]) \\
\mathcal{O}_Z(U \cap Z) \arrow[ur, "g^\#_{U\cap Z}"'] &
\end{tikzcd}$$

Así, tenemos un isomorfismo $g = (g_0, g^{\#}) : X \longrightarrow Z$ de espacios anillados tal que $f = g \circ i$. ■

Observemos que si X es un espacio anillado y $U \subset X$ es un abierto, sólo existe (salvo isomorfismo) una estructura de espacio anillado en U con la que la inclusión $i : U \longrightarrow X$ puede completarse hasta una inmersión abierta $(i, i^{\#})$ de espacios anillados (concretamente, cualquier estructura en tales condiciones ha de ser isomorfa a $\mathcal{O}_U = \mathcal{O}_X|_U$). Además, si X es un esquema, el abierto U resulta ser también un esquema con dicha estructura. En cambio, la situación para un subconjunto cerrado $C \subset X$ es muy distinta: dos haces de ideales $\mathcal{I}$ y $\mathcal{J}$ pueden cumplir $C = V(\mathcal{I}) = V(\mathcal{J})$ y definir dos estructuras de subespacio anillado en C que no sean isomorfas entre sí. Si X es un esquema, la estructura de espacio anillado en C no tiene por qué ser una estructura de esquema.

Estas consideraciones nos llevan, en primer lugar, a la definición siguiente:

Definición 2.19 Si X es un esquema, un *subesquema cerrado* de X es una terna $(Z, \mathcal{O}_Z, j)$, donde $Z \subset X$ es un subconjunto cerrado, $\mathcal{O}_Z$ es un haz en Z con el que Z es un esquema y $j : Z \longrightarrow X$ es una inmersión cerrada tal que j_0 es la inclusión.

En definitiva, un subesquema cerrado de un esquema X no está determinado simplemente por un subconjunto cerrado Z de X (al contrario de lo que sucede con los subesquemas abiertos), sino que, en principio, necesitamos especificar tanto el haz de anillos como la inmersión cerrada.

El teorema 2.18 implica ahora que una inmersión cerrada $f : X \longrightarrow Y$ entre esquemas es un isomorfismo entre X y un cierto subesquema cerrado $Z \subset Y$. Concretamente, $Z = V(\mathcal{I})$, donde $\mathcal{I} = \mathrm{N}(f^{\#})$, y la estructura de subesquema $(Z, \mathcal{O}_Z, i)$ es la construida antes del teorema. Observemos que Z es un esquema porque ha de ser isomorfo a X. Sin embargo, como ya hemos comentado, en general un haz de ideales en un esquema no tiene por qué definir un subesquema cerrado. El teorema 5.10 nos dará una condición necesaria y suficiente para que lo haga.

Ahora probamos que para determinar un subesquema cerrado en un esquema afín $\operatorname{Esp} A$ no necesitamos un haz de ideales, sino que basta con un ideal de A:

Teorema 2.20 *Sea A un anillo y sea I un ideal de A. La proyección canónica $A \longrightarrow A/I$ induce un homomorfismo de esquemas $i : \operatorname{Esp}(A/I) \longrightarrow \operatorname{Esp} A$, el cual es una inmersión cerrada cuya imagen es $V(I)$. Además, para todo $g \in A$, se cumple que $(\mathrm{N}\, i^{\#})(D(g)) \cong I \otimes_A A_g$.*

Demostración: Es inmediato que $i_0 : \operatorname{Esp}(A/I) \longrightarrow V(I)$ es un homeomorfismo. Por construcción (antes del teorema 2.10), $i^{\#}_{D(g)} : A_g \longrightarrow (A/I)_{\bar{g}}$ es el epimorfismo natural. El hecho de que $i^{\#}_U$ sea suprayectivo para todo abierto principal U implica claramente que los homomorfismos i_P son suprayectivos, por lo que i es ciertamente una inmersión cerrada. Además, claramente $(\mathrm{N}\, i^{\#})(D(g)) = \mathrm{N}\, i^{\#}_{D(g)} = I_g \cong I \otimes_A A_g$. ■

Así, por ejemplo, si $X = \operatorname{Esp} A$ y consideramos un ideal I de A que no sea radical, tenemos que $Z = V(I) = V(\operatorname{rad} I)$, luego las inmersiones cerradas $\operatorname{Esp}(A/I) \longrightarrow \operatorname{Esp} A$ y $\operatorname{Esp}(A/\operatorname{rad} I) \longrightarrow \operatorname{Esp} A$ determinan en Z dos estructuras de subesquema cerrado de X. No son isomorfas porque A/I no es un anillo reducido y $A/\operatorname{rad} I$ sí que lo es.

Más concretamente, si $A = k[X_1, \ldots, X_n]$, sabemos que los cerrados de A_k^n se corresponden biunívocamente con los ideales radicales de A, mientras que ahora acabamos de ver que cada ideal de A (radical o no) determina un subesquema cerrado de A_k^n. El hecho de que un mismo cerrado de A_k^n admita varias estructuras de subesquema cerrado se corresponde con que un mismo conjunto algebraico pueda definirse con distintos ideales. La diferencia es que distintos ideales (con el mismo radical) definen el mismo conjunto algebraico, mientras que pueden definir subesquemas cerrados no isomorfos.

En realidad esto no es un inconveniente de los esquemas, sino una muestra de la capacidad de matización adicional que éstos ofrecen. Por ejemplo, consideremos las inmersiones cerradas $\operatorname{Esp}(k[X]/(X^n)) \longrightarrow A_k^1$, cuya imagen es $V(X^n) = \{(X)\}$ (notemos que $\mathfrak{p} = (X)$ es la versión abstracta del punto 0 en la recta afín). Estas inmersiones permiten definir infinitas estructuras de subesquema cerrado en el punto $\mathfrak{p}$, y es fácil ver que son no isomorfas dos a dos. Veremos que tienen su interpretación: la estructura correspondiente a $\operatorname{Esp}(k[X]/(X^n))$ representa al punto $\mathfrak{p}$ "contado n veces", es decir, la estructura de esquema añade al punto una noción de "multiplicidad" que será útil en determinados contextos. ■

Ahora vamos a probar que los únicos subesquemas cerrados de un esquema afín son los de la forma considerada en el teorema 2.20:

Teorema 2.21 *Sea $j : Z \longrightarrow X$ una inmersión cerrada de un esquema Z en un esquema afín $X = \operatorname{Esp} A$. Entonces Z es afín y existe un único ideal I de A tal que existe un isomorfismo $\bar{\jmath} : Z \longrightarrow \operatorname{Esp}(A/I)$ de modo que $j = \bar{\jmath} \circ i$, donde $i : \operatorname{Esp}(A/I) \longrightarrow X$ es la inmersión natural.*

Demostración: Veamos en primer lugar que Z admite un buen cubrimiento afín. Existen abiertos $\{U_r\}_r$ de X tales que $\{j^{-1}[Uri]\}_r$ es un cubrimiento afín de Z. Cada U_r es unión de abiertos principales $\{U_{rs}\}$ de X y $j^{-1}[U_{rs}]$ es afín porque es un abierto principal de $j^{-1}[U_r]$. Añadimos abiertos principales que cubran el abierto $X \setminus j[Z]$ y tomamos un subcubrimiento finito, con lo que tenemos un cubrimiento finito de X, que representaremos de nuevo por $\{U_r\}_r$, formado por abiertos principales y de modo que cada $j^{-1}[U_r]$ es un abierto afín en Z. Además $j^{-1}[U_r] \cap j^{-1}[U_s] = j^{-1}[U_r \cap U_s]$ y $U_r \cap U_s$ es un abierto principal en X, luego también en U_r, y así la intersección de las antiimágenes es un abierto principal en $j^{-1}[U_r]$, luego es afín. Concluimos que $\{j^{-1}[U_r]\}_r$ es un buen cubrimiento afín de Z.

Según el teorema 2.18, llamando $\mathcal{I} = \mathrm{N}(j^{\#})$, tenemos que Z es isomorfo a $V(\mathcal{I})$ con el haz $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}$. Llamemos $I = \mathcal{I}(X)$, que es un ideal de $\mathcal{O}_X(X) \cong A$.

Vamos a probar que para todo $g \in A$ se cumple que $\mathcal{I}(D(g)) \cong I_g$. Sea $h = j_X^{\#}(g) \in \mathcal{O}_Z(Z)$. Observemos que $j^{-1}[D(g)] = j^{-1}[X_g] = Z_h$. Tenemos entonces el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_X(X) \arrow[r, "j_X^{\#}"] \arrow[d] & \mathcal{O}_Z(Z) \arrow[d] \\ \mathcal{O}_X(D(g)) \arrow[r, "j_{D(g)}^{\#}"'] & \mathcal{O}_Z(Z_h), \end{tikzcd}$$

del que se sigue a su vez la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_X(X)_g \arrow[r, "j_X^{\#}"] \arrow[d] & \mathcal{O}_Z(Z)_g \arrow[d] \\ \mathcal{O}_X(D(g)) \arrow[r, "j_{D(g)}^{\#}"'] & \mathcal{O}_Z(Z_h). \end{tikzcd}$$

Las flechas verticales son ahora isomorfismos (por el teorema 2.15). Así, a través del isomorfismo natural $\mathcal{O}_X(D(g)) \cong \mathcal{O}_X(X)_g$, el núcleo de $j_{D(g)}^{\#}$ se corresponde con el núcleo del homomorfismo inducido por $j_X^{\#}$ entre las localizaciones. Ahora bien, la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow \mathcal{O}_X(X) \longrightarrow \mathcal{O}_Z(Z)$$

se localiza a la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow I_g \longrightarrow \mathcal{O}_X(X)_g \longrightarrow \mathcal{O}_Z(Z)_g,$$

luego el núcleo es $\mathcal{I}(D(g)) \cong I_g$. Según el teorema 2.20, sabemos que $\mathrm{N}(i^{\#})(D(g))$ también se corresponde con I_g a través del isomorfismo natural, luego concluimos que $\mathcal{I}(D(g)) = \mathrm{N}(i^{\#})(D(g))$, y esto implica que $\mathcal{I} = \mathrm{N}(i^{\#})$.

Por otra parte, ahora podemos probar que $V(\mathcal{I}) = V(I)$. En efecto, si $P \in X$, tenemos que $P \notin V(\mathcal{I})$ si y sólo si $1 \in \mathcal{I}_P$, si y sólo si existe un entorno $D(g)$ de P en X tal que $1 \in \mathcal{I}(D(g)) \cong I_g$. Esto se cumple si y sólo si existe un $i \in I$ y un número natural n tal que $i/g^n = 1$, si y sólo si existen i, m, n tales que $g^m(i - g^n) = 0$, si y sólo si existe un natural r tal que $g^r \in I$, si y sólo si $g \in \operatorname{rad} I$, si y sólo si $D(g) \subset X \setminus V(\operatorname{rad} I) = X \setminus V(I)$. En definitiva, tenemos que $P \notin V(\mathcal{I})$ si y sólo si $P \notin V(I)$.

En resumen, la situación es la reflejada en el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[dd, "\bar{\jmath}"'] \arrow[dr] \arrow[drr, "j"] & & \\ & V(I) \arrow[r] & X \\ \mathrm{Esp}(A/I) \arrow[ur] \arrow[urr, "i"'] & & \end{tikzcd}$$

Tenemos que j e i factorizan como isomorfismos en $V(I)$ seguidos de la inclusión $V(I) \longrightarrow X$. Cada abierto de Z es de la forma $j^{-1}[U]$, para un abierto U de X, de modo que

$$\mathcal{O}_Z(j^{-1}[U]) \cong \mathcal{O}_X(U)/\,\mathrm{N}(j^{\#})(U) = \mathcal{O}_X(U)/\,\mathrm{N}(i^{\#})(U) \cong \mathcal{O}_{\mathrm{Esp}(A/I)}(i^{-1}[U]).$$

Estos isomorfismos determinan un isomorfismo $\bar{\jmath} : Z \longrightarrow \mathrm{Esp}(A/I)$ que cumple lo pedido. La unicidad de I se debe a que si otro ideal I' cumpliera lo mismo tendríamos un isomorfismo $A/I \longrightarrow A/I'$ que conmutaría con las proyecciones canónicas, luego tendría que ser $I = I'$. ■

En particular, vemos que todo subesquema cerrado de un esquema A_B^n es isomorfo a un esquema de la forma $B[X_1, \ldots, X_n]/I$, para un cierto ideal I. Más en particular, los conjuntos algebraicos afines en sentido clásico se corresponden con los subesquemas cerrados de A_k^n asociados a ideales radicales o, equivalentemente, a subesquemas cerrados X con la propiedad de que $\mathcal{O}_X(X)$ es reducido. Esta propiedad puede extenderse a esquemas arbitrarios:

Definición 2.22 Un esquema X es *reducido* en un punto $P \in X$ si el anillo $\mathcal{O}_{X,P}$ es reducido (es decir, no tiene elementos nilpotentes no nulos). Diremos que X es *reducido* si lo es en todos sus puntos.

Si A es un anillo, representaremos por $R(A) = \operatorname{rad} 0$. Si X es un esquema, para cada abierto U de X definimos

$$\mathcal{R}_X(U) = \{s \in \mathcal{O}_X(U) \mid s_P \in R(\mathcal{O}_{X,P}) \text{ para todo } P \in U\}.$$

Evidentemente, $\mathcal{R}_X$ es un haz de ideales de $\mathcal{O}_X$ y tenemos que X es reducido si y sólo si $\mathcal{R}_X = 0$.

Notemos que si $P \in X$ entonces $\mathcal{R}_{X,P} = R(\mathcal{O}_{X,P})$, pues una inclusión es obvia y si $s \in R(\mathcal{O}_{X,P})$ entonces $s^n = 0$ para cierto natural n, luego existe un entorno abierto V de P y un $t \in \mathcal{O}_X(V)$ de modo que $s = t_P$ y $t^n = 0$, luego $t \in \mathcal{R}_X(V)$, luego $s \in \mathcal{R}_{X,P}$.

Esto implica que si U es un abierto en X entonces $\mathcal{R}_X|_U = \mathcal{R}_U$.

Si U es cuasicompacto (en particular si U es afín) $\mathcal{R}_X(U) = R(\mathcal{O}_X(U))$. En efecto, si $s \in R(\mathcal{O}_X(U))$ entonces s es nilpotente, luego lo mismo le sucede a cada s_P, luego $s \in \mathcal{R}_X(U)$. Recíprocamente, si $s \in \mathcal{R}_X(U)$, para cada $P \in U$

existe un natural n tal que $s^n = 0$, luego existe un abierto $P \in V \subset U$ de modo que $s|_V^n = 0$. Podemos cubrir U por un número finito de abiertos V y tomar un mismo número natural n tal que $s|_V^n = (s^n)|_V = 0$ para todo V, luego $s^n = 0$ y $s \in R(\mathcal{O}_X(U))$.

Observemos que la inclusión $R(\mathcal{O}_X(U)) \subset \mathcal{R}_X(U)$ es válida para todo abierto. Ahora es fácil probar el teorema siguiente:

Teorema 2.23 *En un esquema X, las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

a) X es reducido,

b) Para todo abierto U de X, el anillo $\mathcal{O}_X(U)$ es reducido,

c) Todo punto de X tiene un entorno afín U tal que $\mathcal{O}_X(U)$ es reducido.

DEMOSTRACIÓN: a) $\Rightarrow$ b) Si X es reducido entonces $\mathcal{R}_X = 0$ y hemos visto que $R(\mathcal{O}_X(U)) \subset \mathcal{R}_X(U)$, luego $\mathcal{O}_X(U)$ es reducido.

b) $\Rightarrow$ c) es trivial.

c) $\Rightarrow$ a) Si $U = \operatorname{Esp} A$ es un abierto afín tal que $\mathcal{O}_X(U) \cong A$ es reducido, entonces, para todo abierto principal $D(g)$ de U, tenemos que

$$\mathcal{R}_X(D(g)) = R(\mathcal{O}_X(D(g))) = R(\mathcal{O}_U(D(g))) \cong R(A_g) = 0.$$

Tenemos que $\mathcal{R}_X(U) = 0$ cuando U recorre una base de X (los abiertos principales de los abiertos afines que cumplen c). Concluimos que $\mathcal{R}_X = 0$ y que X es reducido. ■

En particular, un esquema afín X es reducido si y sólo si el anillo $\mathcal{O}_X(X)$ es reducido.

Vamos a probar ahora que el espacio anillado local $(X, \mathcal{O}_X/\mathcal{R}_X)$ es un esquema (obviamente reducido). Para ello basta tomar un abierto afín U de X y probar que $(U, (\mathcal{O}_X/\mathcal{R})|_U)$ es un esquema afín. Ahora bien, se cumple que $(\mathcal{O}_X/\mathcal{R}_X)|_U = \mathcal{O}_X|_U/\mathcal{R}_X|_U = \mathcal{O}_U/\mathcal{R}_U$, luego podemos suponer que $X = \operatorname{Esp} A$ es afín y hemos de demostrar que $(X, \mathcal{O}_X/\mathcal{R}_X)$ también es un esquema afín. Para ello consideramos la inmersión cerrada natural $i : \operatorname{Esp}(A/R(A)) \longrightarrow \operatorname{Esp} A$, cuya imagen es $V(R(A)) = X$. Si $g \in A$, sabemos que

$$\mathrm{N}(i^\#)(D(g)) \cong R(A)_g = R(A_g) = \mathcal{R}_X(D(g)),$$

luego $\mathcal{R}_X = \mathrm{N}(i^\#)$. Es claro entonces que $(X, \mathcal{O}_X/\mathcal{R}_X) \cong \operatorname{Esp}(A/R(A))$.

Definición 2.24 Si X es un esquema, definimos $X_{\mathrm{red}} = (X, \mathcal{O}_X/\mathcal{R}_X)$, que, según acabamos de probar, es un esquema reducido. Tenemos una inmersión cerrada natural $i : X_{\mathrm{red}} \longrightarrow X$, luego X_{red} es un subesquema cerrado de X.

Teorema 2.25 *Si X es un esquema arbitrario e Y es un esquema reducido, todo homomorfismo $f : Y \longrightarrow X$ factoriza de forma única en un homomorfismo $\tilde{f} : Y \longrightarrow X_{\mathrm{red}}$ seguido de la inmersión $i : X_{\mathrm{red}} \longrightarrow X$.*

DEMOSTRACIÓN: Para cada abierto afín U de X, se cumple claramente que $\mathcal{R}_X(U) = R(\mathcal{O}_X(U)) \subset \mathrm{N}(f^\#)(U)$, lo que nos permite definir un homomorfismo de haces $\tilde{f}^\# : \mathcal{O}_X/\mathcal{R}_X \longrightarrow f_{0*}(\mathcal{O}_Y)$ de modo que $i^\# \circ \tilde{f}^\# = f^\#$. Tomamos $\tilde{f} = (f_0, \tilde{f}^\#)$. En particular, si $P \in Y$, tenemos que la composición

$$\mathcal{O}_{X,f(P)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,f(P)}/R(\mathcal{O}_{X,f(P)}) \xrightarrow{\tilde{f}_P^\#} \mathcal{O}_{Y,P}$$

ha de ser igual a $f_P^\#$, de donde se sigue que $\tilde{f}_P^\#$ está unívocamente determinado, luego $\tilde{f}^\#$ también. ■

Si nos restringimos a esquemas reducidos, cada subconjunto cerrado determina una única estructura de subesquema cerrado:

Teorema 2.26 *Si X es un esquema y $Z \subset X$ es un conjunto cerrado, entonces Z admite salvo isomorfismo una única estructura de subesquema cerrado reducido.*

DEMOSTRACIÓN: Probemos primero la unicidad. Consideremos una estructura $j : (Z, \mathcal{O}_Z) \longrightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ de subesquema cerrado reducido. Fijemos un abierto afín $U \subset X$. Entonces $j|_{Z\cap U} : (Z \cap U, \mathcal{O}_Z|_{Z\cap U}) \longrightarrow (U, \mathcal{O}_X|_U)$ convierte a $Z \cap U$ en un subesquema cerrado del esquema afín U. Por el teorema 2.21, esta estructura está determinada por un ideal I_U de $\mathcal{O}_X(U)$. En particular, $\mathcal{O}_Z(Z \cap U) \cong \mathcal{O}_X(U)/I_U$, luego el ideal I_U tiene que ser radical y, como $V(I_U) = Z \cap U$, tenemos que I_U está completamente determinado por el cerrado Z. Así pues, $\mathcal{O}_Z|_{Z\cap U}$ y $j|_{Z\cap U}$ están completamente determinados por Z, luego lo mismo vale para $\mathcal{O}_Z$ y j.

Respecto a la existencia, para cada abierto afín U de X definimos I_U como el único ideal radical de $\mathcal{O}_X(U)$ que cumple $Z \cap U = V(I_U)$. Podemos dotar a $Z \cap U$ de una estructura de esquema isomorfo a $\mathrm{Esp}(\mathcal{O}_X(U)/I_U)$. Si lo hacemos de forma canónica y $U_1 \subset U_2$ son dos abiertos afines, entonces los anillos asociados a $Z \cap U_1$ son canónicamente isomorfos a los asociados a los abiertos mismos abiertos en $Z \cap U_2$. En definitiva, tenemos definidos anillos $\mathcal{O}_Z(V)$ (y restricciones entre ellos) para todos los abiertos $V \subset Z$ contenidos en abiertos de la forma $U \cap Z$, con U abierto afín en X.

En general, siempre que tenemos definido un haz sobre una base $\mathcal{B}$ de un espacio topológico Z (es decir, algo que no es propiamente un haz, sino lo que podríamos llamar un $\mathcal{B}$-haz) podemos extenderlo hasta un haz en Z sin más que definir para un abierto U arbitrario el anillo $\mathcal{O}_Z(U)$ formado por los elementos

$$s \in \prod_{\substack{V\in\mathcal{B}\\ V\subset U}} \mathcal{O}_Z(V)$$

tales que para todo par V_1, $V_2 \in \mathcal{B}$ se cumple que $s_{V_1}|_{V_1\cap V_2} = s_{V_2}|_{V_1\cap V_2}$, con las operaciones y las restricciones obvias.

Tenemos así un haz $\mathcal{O}_Z$ cuya restricción a cada espacio $Z \cap U$ es un haz isomorfo al que ya teníamos definido. En particular los anillos $\mathcal{O}_{Z,P}$ son los mismos que los de cualquier haz $\mathcal{O}_{Z\cap U}$ con $P \in Z \cap U$, lo que implica que son anillos locales y así $(Z, \mathcal{O}_Z)$ es un espacio anillado local. Obviamente es un esquema (reducido) y tenemos inmersiones cerradas $j_{Z\cap U} : Z \cap U \longrightarrow U$, las cuales determinan una inmersión cerrada $j : Z \longrightarrow X$. ■

En particular el teorema anterior implica que si X es un esquema, entonces X_{red} es el único subesquema cerrado reducido de X sobre el mismo espacio topológico.

Ahora vamos a estudiar las inmersiones cerradas en espectros homogéneos. Sean B y C dos anillos graduados sobre un mismo anillo $A = B_0 = C_0$ y sea $\phi : C \longrightarrow B$ un homomorfismo de anillos graduados, en el sentido general de que existe un $d \geq 0$ tal que $\phi[C_r] \subset C_{dr}$. Sea $M = \phi[C_+]B$, que es un ideal homogéneo de B. Entonces ϕ induce una aplicación continua

$$\bar{\phi} : \operatorname{Proy} B \setminus V(M) \longrightarrow \operatorname{Proy} C.$$

En efecto, si $\mathfrak{p} \in \operatorname{Proy} B \setminus V(M)$, entonces $\phi^{-1}[\mathfrak{p}]$ es un ideal primo homogéneo que no contiene a C_+, luego $\bar{\phi}(p) = \phi^{-1}[\mathfrak{p}] \in \operatorname{Proy} C$. Si I es un ideal de C, entonces $\bar{\phi}^{-1}[V(I)] = V(\phi^{-1}[I])$, luego ϕ es continua.

Si $h \in C$ es homogéneo de grado no nulo, entonces $\bar{\phi}^{-1}[D(h)] = D(\phi(h))$. Por otra parte, en la demostración del teorema 2.6 hemos construido un isomorfismo $D(h) \longrightarrow \operatorname{Esp} C_{(h)}$ cuyo homeomorfismo asociado viene dado por $\mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{p}C_h \cap C_{(h)}$. Una comprobación rutinaria muestra que el diagrama siguiente (de aplicaciones continuas) es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
D(\phi(h)) \arrow[r, "\bar{\phi}"] \arrow[d] & D(h) \arrow[d] \\
\operatorname{Esp} B_{(\phi(h))} \arrow[r] & \operatorname{Esp} C_{(h)},
\end{tikzcd}$$

donde la flecha horizontal inferior es el homomorfismo de esquemas inducido por el homomorfismo de anillos $C_{(h)} \longrightarrow B_{(\phi(h))}$ inducido por ϕ. Esto nos permite completar la aplicación continua $\phi|_{D(\phi(h))}$ con una estructura de homomorfismo de esquemas que hace conmutativo el diagrama (viendo ahora las flechas como homomorfismos de esquemas y no sólo como aplicaciones continuas).

Se comprueba que estos homomorfismos conmutan con las restricciones, luego por el teorema 2.1 determinan un homomorfismo de esquemas

$$\bar{\phi} : \operatorname{Proy} B \setminus V(M) \longrightarrow \operatorname{Proy} C.$$

Observemos que todos los esquemas están definidos sobre A, y el homomorfismo también.

El caso más interesante lo tenemos cuando $C = A[X_0, \ldots, X_n]$ y $B = C/I$, donde I es un ideal homogéneo. Si tomamos $\phi : C \longrightarrow B$ como la proyección natural, entonces $\phi[C_+] = B_+$, luego $V(M) = \varnothing$ y tenemos un homomorfismo de esquemas

$$\bar{\phi} : \operatorname{Proy} B \longrightarrow \operatorname{Proy} C.$$

Si $h \in C$ es homogéneo de grado no nulo, entonces $\phi_h : C_{(h)} \longrightarrow B_{(\phi(h))}$ es un epimorfismo, luego podemos descomponerlo como el epimorfismo canónico $C_{(h)} \longrightarrow C_{(h)}/\operatorname{N}(\phi_h)$ seguido de un isomorfismo $C_{(h)}/\operatorname{N}(\phi_h) \longrightarrow B_{(\phi(h))}$. Consecuentemente, $\bar{\phi}|_{D(\phi(h))}$ se descompone como composición de un isomorfismo de esquemas $D(\phi(h)) \longrightarrow \operatorname{Esp}(C_{(h)}/\operatorname{N}(\phi_h))$ seguido de la inmersión cerrada canónica $\operatorname{Esp}(C_{(h)}/\operatorname{N}(\phi_h)) \longrightarrow V(\operatorname{N}(\phi_h)) \subset D(h)$. En definitiva, tenemos que $\bar{\phi}|_{D(\phi(h))} : D(\phi(h)) \longrightarrow D(h)$ es una inmersión cerrada para cada h. Esto implica claramente que $\bar{\phi}$ es una inmersión cerrada. En resumen:

Teorema 2.27 *Si I es un ideal homogéneo en $A[X_0, \ldots, X_n]$, entonces la proyección $\phi : A[X_0, \ldots, X_n] \longrightarrow A[X_0, \ldots, X_n]/I$ induce una inmersión cerrada $\bar{\phi} : \operatorname{Proy}(A[X_0, \ldots, X_n]/I) \longrightarrow \mathrm{P}_A^n$ definida sobre A.*

Se cumple un resultado análogo al teorema 2.21, de modo que los subesquemas cerrados de P_A^n son precisamente los de la forma $\operatorname{Proy}(A[X_0, \ldots, X_n]/I)$, para un cierto ideal homogéneo I, pero no estamos en condiciones de probarlo ahora. Lo veremos más adelante (teorema 5.55).

En particular, tenemos que los esquemas asociados a conjuntos algebraicos proyectivos, es decir, los esquemas de la forma $\operatorname{Proy}(k[X_0, \ldots, X_n]/I)$, donde I es un ideal homogéneo radical, son isomorfos a subesquemas cerrados de P_k^n, y el concepto de subesquema cerrado de P_k^n es ligeramente más general en cuanto que admite esquemas definidos por ideales no radicales.

Un poco más en general: si B es un anillo graduado finitamente generado (como B_0-álgebra) por elementos de B_1, entonces, llamando $A = B_0$, tenemos un epimorfismo graduado $\phi : A[X_0, \ldots, X_n] \longrightarrow B$, cuyo núcleo será un cierto ideal homogéneo I. Por consiguiente, tenemos una inmersión cerrada $\operatorname{Proy} B \longrightarrow \mathrm{P}_A^n$.

2.4 Inmersiones

Vamos a definir aquí una noción de inmersión entre esquemas que generalice tanto a las inmersiones abiertas como a las inmersiones cerradas. Esta noción se comportará adecuadamente bajo algunas hipótesis que estudiamos primeramente. Para ello introducimos la noción de esquema noetheriano:

Definición 2.28 Un esquema X es *noetheriano* si admite un cubrimiento finito formado por abiertos afines U tales que los anillos $\mathcal{O}_X(U)$ son noetherianos.

Es evidente que si A es un anillo noetheriano, entonces $\operatorname{Esp} A$ es un esquema noetheriano. El recíproco no es obvio, pero es cierto también:

Teorema 2.29 *Un esquema afín X es noetheriano si y sólo si el anillo $\mathcal{O}_X(X)$ es noetheriano.*

Demostración: Sea X un esquema afín noetheriano y tomemos un ideal I en $\mathcal{O}_X(X)$. Hemos de probar I que es finitamente generado. Por hipótesis X

puede cubrirse por un número finito de abiertos U tales que $\mathcal{O}_X(U)$ es noetheriano. El ideal $\rho_U^X[I]\mathcal{O}_X(U)$ es finitamente generado, y podemos tomar un generador finito formado por restricciones de elementos de I. Haciendo lo mismo para todos los abiertos U, podemos formar un ideal $J \subset I$ finitamente generado tal que $\rho_U^X[J]\mathcal{O}_X(U) = \rho_U^X[I]\mathcal{O}_X(U)$ para todos los abiertos U simultáneamente. En particular, si $P \in X$ y $j : \mathcal{O}_X(X) \longrightarrow \mathcal{O}_{X,P}$ es el homomorfismo natural, tenemos que $j[J]\mathcal{O}_{X,P} = j[I]\mathcal{O}_{X,P}$. Ahora bien, el punto P se corresponde con un ideal primo $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}_X(X)$, de modo que j se corresponde con el homomorfismo natural $\mathcal{O}_X(X) \longrightarrow \mathcal{O}_X(X)_{\mathfrak{p}}$ Lo que tenemos es que $J_{\mathfrak{p}} = I_{\mathfrak{p}}$ para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}_X(X)$, y esto implica que $J = I$ (teorema [3.10]). ■

El teorema [3.83] afirma que si U es un esquema afín noetheriano, entonces todos los subconjuntos de U son cuasicompactos, de donde se sigue, más en general, que todo subespacio topológico de un esquema noetheriano es cuasicompacto.

Del mismo modo, si U es un esquema afín noetheriano entonces U es también noetheriano como espacio topológico, y esto implica fácilmente que todo esquema noetheriano es también noetheriano como espacio topológico.

Teorema 2.30 *Todo subesquema abierto o cerrado de un esquema noetheriano X es noetheriano, al igual que lo son los anillos locales $\mathcal{O}_{X,P}$, para todo punto $P \in X$.*

DEMOSTRACIÓN: Observemos en primer lugar que si U es un esquema afín tal que $\mathcal{O}_X(U)$ es noetheriano y $g \in \mathcal{O}_X(U)$, entonces $\mathcal{O}_X(D(g)) \cong \mathcal{O}_X(U)_g$ también es noetheriano, luego X tiene una base formada por abiertos afines noetherianos. Por consiguiente, todo abierto en X se expresa como unión de abiertos afines noetherianos y, por la cuasicompacidad, la unión puede tomarse finita. En definitiva, todos los abiertos de X son noetherianos.

Si Z es un subesquema cerrado de X (con una cierta inmersión $j : Z \longrightarrow X$), para cada abierto afín U de X, tenemos que $j|_{Z\cap U} : Z \cap U \longrightarrow U$ es una inmersión cerrada (en particular $Z \cap U$ es un esquema afín). Basta probar que si $\mathcal{O}_X(U)$ es noetheriano entonces $\mathcal{O}_Z(Z \cap U)$ también lo es, pues Z es unión de un número finito abiertos en estas condiciones. Equivalentemente, podemos suponer que $X = \operatorname{Esp} A$ es un esquema afín, donde el anillo A es noetheriano. Entonces el teorema 2.21 nos da que $Z \cong \operatorname{Esp}(A/I)$, para un cierto ideal I de A, luego también es noetheriano.

Finalmente, si $P \in X$, tomamos un abierto afín U tal que $P \in U \subset X$ y $\mathcal{O}_{X,P} \cong \mathcal{O}_{U,P} \cong \mathcal{O}_X(U)_{\mathfrak{p}}$, donde $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de $\mathcal{O}_X(U)$, luego ciertamente $\mathcal{O}_{X,P}$ es noetheriano. ■

Ahora es evidente que los esquemas noetherianos admiten buenos cubrimientos afines, tal y como anunciábamos antes de teorema 2.15.

Aunque nos van a interesar principalmente los esquemas noetherianos, lo cierto es que para muchos resultados nos bastará una propiedad más débil:

Definición 2.31 Un esquema X es *localmente noetheriano* si todo punto de X tiene un entorno abierto noetheriano.

Observemos que si X es un esquema localmente noetheriano y U es un abierto afín, entonces U puede cubrirse con abiertos noetherianos y, como U es cuasicompacto, el cubrimiento puede tomarse finito y, por consiguiente, U es noetheriano. Así pues, un esquema X es localmente noetheriano si y sólo si todos sus abiertos afines son noetherianos.

El mismo argumento prueba que un esquema es noetheriano si y sólo si es cuasicompacto y localmente noetheriano. También es fácil ver que todo subesquema abierto o cerrado en un esquema localmente noetheriano es localmente noetheriano.

Definición 2.32 Un homomorfismo de esquemas $f : X \longrightarrow Y$ es *cuasicompacto* si la antiimagen por f de todo abierto afín de Y es cuasicompacta.

Por ejemplo, toda inmersión cerrada $j : X \longrightarrow Y$ es cuasicompacta, ya que si U es un abierto afín en Y, entonces $j^{-1}[U]$ es un subconjunto cerrado de U, luego es cuasicompacto (porque U lo es).

Por otra parte, si $i : X \longrightarrow Y$ es una inmersión abierta e Y es localmente noetheriano, entonces i es cuasicompacta. En efecto, si U es un abierto afín en Y, entonces U es noetheriano y, como $i^{-1}[U]$ es un subesquema abierto de U, también es noetheriano, luego cuasicompacto.

Otro hecho obvio es que la composición de homomorfismos cuasicompactos es cuasicompacta. El resultado principal que necesitamos es el siguiente:

Teorema 2.33 *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un homomorfismo de esquemas cuasicompacto y sea $Z = \overline{f[X]} \subset Y$. Entonces existe en Z una única estructura de subesquema cerrado de Y (salvo isomorfismo) tal que f se descompone como $f = \bar{f} \circ j$, donde $\bar{f} : X \longrightarrow Z$ es un homomorfismo de esquemas y $j : Z \longrightarrow Y$ es la inmersión cerrada correspondiente a la estructura de Z; y para cualquier otra descomposición $f = f' \circ j'$, donde $j' : Z' \longrightarrow Y$ es una inmersión cerrada y $f' : X \longrightarrow Z'$ es un homomorfismo de esquemas, existe una única inmersión cerrada $j'' : Z \longrightarrow Z'$ tal que $\bar{f} \circ j'' = f'$, $j'' \circ j' = j$, es decir, que hace conmutativo el diagrama siguiente:*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f'"] \arrow[ddr, "\bar{f}"'] & & Y \\
& Z' \arrow[ur, "j'"] & \\
& Z \arrow[u, "j''"] \arrow[uur, "j"'] &
\end{tikzcd}$$

Demostración: Para cada abierto U de Y tenemos el homomorfismo de anillos $f_U^\# : \mathcal{O}_Y(U) \longrightarrow \mathcal{O}_X(f^{-1}[U])$. Llamemos $\mathcal{I}(U)$ a su núcleo. De este modo $\mathcal{I}$ es un haz de ideales de $\mathcal{O}_Y$ y podemos considerar el espacio anillado local

$$V(\mathcal{I}) = \{P \in Y \mid \mathcal{I}_P \neq \mathcal{O}_{Y,P}\}.$$

definido tras 2.17. De este modo, para cada $P \in Y$, tenemos que $P \in Y \setminus V(\mathcal{I})$ si y sólo si $\mathcal{I}_P = \mathcal{O}_{Y,P}$, si y sólo si existe $[(U,g)] \in \mathcal{I}_P$ (con $g \in \mathcal{I}(U)$) que, visto como elemento de $\mathcal{O}_{Y,P}$ es $[(U,g)] = 1$. Esto equivale a que existe un abierto $P \in V \subset U$ de modo que $g|_V = 1$. De aquí se sigue que $P \in Y \setminus V(\mathcal{I})$ si y sólo P tiene un entorno abierto V tal que $1|_V \in \mathcal{I}(V)$, lo que equivale a que $1|_{f^{-1}[V]} = f_Y^\#(1)|_{f^{-1}[V]} = f_V^\#(1|_V) = 0$, y esto a su vez sólo es posible si $\mathcal{O}_X(f^{-1}[V]) = 0$, es decir, si $f^{-1}[V] = \varnothing$.

Concluimos que $P \in Y \setminus V(\mathcal{I})$ si y sólo si P tiene un entorno abierto V tal que $V \cap f[X] = \varnothing$. Así pues, $V(\mathcal{I}) = \overline{f[X]} = Z$ (como espacio topológico).

Ahora tenemos definida en Z una estructura de espacio anillado local y una inmersión cerrada $j : Z \longrightarrow Y$ de modo que $\mathcal{O}_Z = j^{-1}(\mathcal{O}_Y/\mathcal{I})$. No es evidente que Z sea un esquema con esta estructura. Para probarlo tomamos un punto $P \in Z$ y vamos a ver que tiene un entorno afín. Sea U un entorno afín de P en Y. Es evidente que la restricción $\tilde{f} : f^{-1}[U] \longrightarrow U$ es también cuasicompacta y que $\tilde{Z} = Z \cap U$. Además el diagrama siguiente es claramente conmutativo:

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "j"] & Y \\ \tilde{Z} \arrow[u, "i"] \arrow[r, "\tilde{j}"'] & U \arrow[u, "i"'] \end{tikzcd}$$

Esto significa que la estructura de espacio anillado local que estamos considerando en $\tilde{Z}$ es la restricción de la de Z, luego basta probar que P tiene un entorno afín en $\tilde{Z}$. Equivalentemente, podemos suponer que $Y = \operatorname{Esp} A$ es afín. El hecho de que f sea cuasicompacto se traduce en que $X = U_1 \cup \cdots \cup U_r$, donde cada abierto U_i es afín, digamos $U_i = \operatorname{Esp} A_i$.

Sea $\phi = f_Y^\# : A \longrightarrow \mathcal{O}_X(X)$ y sea $I = \mathcal{I}(Y)$ su núcleo. Cada elemento de $\mathcal{O}_X(X)$ está completamente determinado por sus restricciones a los abiertos U_i. En particular, si llamamos $\phi_i = \phi \circ \rho_{U_i}^X : A \longrightarrow A_i$, para cada $g \in A$ tenemos que $\phi(g)$ está determinado por los $\phi_i(g)$. Notemos también que $\phi_i = (f|_{U_i})_Y^\#$.

Consideremos el abierto principal $D(g) \subset Y$ y observemos que

$$f^{-1}[D(g)] \cap U_i = D(\phi_i(g)).$$

En efecto, un punto $\mathfrak{P} \in f^{-1}[D(g)] \cap U_i$ es un ideal de A_i que verifica $f|_{U_i}(\mathfrak{P}) = \phi_i^{-1}[\mathfrak{P}] \in D(g)$, lo que equivale a que $g \notin \phi_i^{-1}[\mathfrak{P}]$, o a que $\phi_i(g) \notin \mathfrak{P}$, o a que $\mathfrak{P} \in D(\phi_i(g))$. Esto nos lleva al siguente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & \mathcal{O}_X(X) \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus\limits_i A_i \arrow[d] \\ A_g \arrow[r, "f^{\#}_{D(g)}"'] & \mathcal{O}_X(f^{-1}[D(g)]) \arrow[r] & \bigoplus\limits_i A_{\phi_i(g)} \end{tikzcd}$$

Como la suma de las restricciones es inyectiva, tenemos que I es el núcleo de toda la fila horzontal superior, el igualmente $\mathcal{I}(D(g))$ es el núcleo de la fila horizontal inferior. Así pues, $v/g^s \in \mathcal{I}(D(g))$ si y sólo si $\phi_i(v)/\phi_i(g)^s = 0$ para todo i. (Aquí usamos la conmutatividad del diagrama.) Esto a su vez equivale a que existe un $s' \geq 0$ tal que $\phi_i(v)\phi_i(g)^{s+s'} = 0$ para todo i (el hecho de que el número de abiertos sea finito permite tomar el mismo s' para todos los índices, aquí es donde usamos la hipótesis de cuasicompacidad). Esto equivale a que $\phi_i(vg^{s+s'}) = 0$ para todo i, y también a que $vg^{s+s'} \in I$, o a que $v/g^s \in I_g$.

Así hemos probado que, para todo $g \in A$, se cumple $\mathcal{I}(D(g)) = I_g$.

Con esto podemos probar que, como espacios topológicos, $Z = V(I)$. En efecto, si $P \in Y \setminus Z$ entonces $\mathcal{I}_P = A_P$, luego existe un $g \in A$ tal que $g \notin P$ y $1|_{D(g)} \in \mathcal{I}(D(g)) = I_g$, luego $1 = v/g^s$ para cierto $v \in I$ y cierto $s \geq 0$, luego $(g^s - v)g^{s'} = 0 \in P$ para cierto $s' \geq 0$, luego $g^s - v \in P$, luego $v \notin P$, luego $I \not\subset P$, luego $P \notin V(I)$. Esto prueba que $V(I) \subset Z$.

Por otra parte ϕ induce un monomorfismo de anillos $\bar{\phi} : A/I \longrightarrow \mathcal{O}_X(X)$ tal que $p \circ \bar{\phi} = \phi$, donde p es la proyección en el cociente. A su vez, $\bar{\phi}$ induce un homomorfismo de esquemas $\bar{f} : X \longrightarrow V(I)$ tal que $\bar{f} \circ i = f$, donde $i : V(I) \longrightarrow Y$ es la inmersión natural. Esto implica que $f[X] \subset V(I)$ luego, al tomar la clausura, $Z \subset V(I)$.

Ahora basta probar que la estructura de espacio anillado local en Z es la misma que la de $V(I)$, con lo que será ciertamente una estructura de esquema.

Tomemos $[g] \in \mathcal{O}_{V(I)}(V(I)) = A/I$. Entonces

$$\mathcal{O}_{V(I)}(D([h])) = (A/I)_{[g]} \cong A_g/I_g = \mathcal{O}_Y(D(g))/\mathcal{I}(D(g)),$$

y tenemos un homomorfismo natural $\mathcal{O}_{V(I)}(D([g])) \longrightarrow (\mathcal{O}_Y/\mathcal{J})(D(g))$.

Observemos que $D([g]) = D(g) \cap Z$ y recordemos que $\mathcal{O}_Z$ es el haz asociado al prehaz $\mathcal{F}$ que a $D([g])$ le asigna el límite inductivo de los anillos $(\mathcal{O}_Y/\mathcal{I})(U)$ con $D([g]) \subset U$. El homomorfismo anterior da lugar a un homomorfismo $\mathcal{O}_{V(I)}(D([g])) \longrightarrow \mathcal{F}(D([g]))$ que conmuta con las restricciones, por lo que determina un homomorfismo de prehaces $\mathcal{O}_{V(I)} \longrightarrow \mathcal{F}$ que a su vez da lugar a un homomorfismo de haces $\psi : \mathcal{O}_{V(I)} \longrightarrow \mathcal{O}_Z$.

Para probar que ψ es un isomorfismo basta probar que lo son los homomorfismo $\psi_P : \mathcal{O}_{V(I),P} \longrightarrow \mathcal{O}_{Z,P}$ para cada $P \in V(I) = Z$. Ahora bien, sabemos que ambos anillos son isomorfos a $(A/I)_{(P/I)} \cong A_P/I_P$, y ψ_P es el isomorfismo natural entre ambos.

Con esto hemos probado que Z es un esquema. Vamos a probar el resto del teorema manteniendo la hipótesis de que Y es afín. Ya hemos visto que f se descompone como $f = \bar{f} \circ j$. Notemos que el homomorfismo $\bar{\phi}$ es el único que cumple $p \circ \bar{\phi} = \phi$, luego $\bar{f}$ es el únicmo homomorfismo que cumple $\bar{f} \circ j = f$.

Si $f = f' \circ j'$, donde $j' : Z' \longrightarrow Y$ es una inmersión cerrada y $f' : X \longrightarrow Z'$ es un homomorfismo de esquemas, por el teorema 2.21 podemos considerar que $Z' = V(J)$, para cierto ideal J de A y que $p' = j'^{\#} : A \longrightarrow A/J$ es la proyección natural. En particular Z' es afín. Sea $\phi' = f'^{\#}_{Z'} : A/J \longrightarrow \mathcal{O}_X(X)$, de modo que $p' \circ \phi' = \phi$. De aquí se sigue que $J \subset I$, luego $Z \subset Z'$ y la proyección natural $p'' : A/J \longrightarrow A/I$ es el único homomorfismo de anillos que cumple $p' \circ p'' = p$, y además cumple $p'' \circ \phi' = \phi$. Esto implica que existe una única inmersión cerrada $j'' : Z \longrightarrow Z'$ que cumple el teorema.

En el caso general, para cada abierto afín U en Y tenemos que la restricción $f^{-1}[U] \longrightarrow U$ factoriza en un homomorfismo $f^{-1}[U] \longrightarrow Z \cap U$ seguido de la inmersión cerrada $Z \cap U \longrightarrow Y$. La unicidad del caso afín nos permite unir todos estos homomorfismos en un único $\bar{f} : X \longrightarrow Z$ tal que $f = \bar{f} \circ j$. El resto se razona análogamente. ■

Notemos que el par (Z, j) es único salvo isomorfismo, en el sentido de que si otro par (Z', j') cumple el teorema (para un homomorfismo f) entonces existe un único isomorfismo $j'' : Z \longrightarrow Z'$ tal que $j'' \circ j' = j$. Es fácil ver que si el esquema X es reducido entonces Z también lo es. (Se reduce al caso en que Y es afín y entonces Z es afín y $\mathcal{O}_Z(Z)$ es un cociente de $\mathcal{O}_Y(Y)$ isomorfo a un subanillo de $\mathcal{O}_X(X)$, luego es reducido.)

Finalmente estamos en condiciones de dar la definición general de inmersión:

Definición 2.34 Un homomorfismo de esquemas $f : X \longrightarrow Y$ es una *inmersión* si se descompone como $f = i \circ j$, donde $i : X \longrightarrow Z$ es una inmersión abierta y $j : Z \longrightarrow Y$ es una inmersión cerrada.

De este modo, las inmersiones abiertas y las inmersiones cerradas son inmersiones en este sentido general. En las condiciones de la definición anterior, $f[X]$ es un abierto en $j[Z]$, luego podemos tomar un abierto U en Y tal que $f[X] = j[Z] \cap U$. Entonces $f_0 : X \longrightarrow U$ es una inmersión cerrada y f induce de forma natural una inmersión cerrada $j' : X \longrightarrow U$ tal que $f = j' \circ i'$, donde $i' : U \longrightarrow Y$ es la inmersión abierta natural. En definitiva, vemos que toda inmersión se descompone también como una inmersión cerrada seguida de una inmersión abierta.

Veamos ahora que si un homomorfismo $f : X \longrightarrow Y$ es cuasicompacto y se descompone como $f = j' \circ i'$, donde $j' : X \longrightarrow U$ es una inmersión cerrada e $i' : U \longrightarrow Y$ es una inmersión abierta, entonces f es una inmersión. No perdemos generalidad si suponemos que $X \subset U \subset Y$ y que j'_0, i'_0 son las inclusiones. Aplicamos a f el teorema anterior, que nos da una estructura de esquema en $Z = \overline{X}$ junto con un homomorfismo $\bar{f} : X \longrightarrow Z$ y una inmersión cerrada $j : Z \longrightarrow Y$ de modo que $f = \bar{f} \circ j$. Como X es cerrado en U, tenemos que $X = Z \cap U$, luego es un abierto en Z. Por otra parte $\bar{f}_0$ es la inclusión, luego es una inmersión abierta de espacios topológicos. Falta probar que si consideramos $\bar{f} : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (X, \mathcal{O}_Z|_X)$ entonces es un isomorfismo.

Para ello basta observar que si cambiamos f por j' (es decir, si cambiamos Y por U), el esquema dado por el teorema anterior es $Z \cap U = X$ y $\bar{f} : X \longrightarrow Z$ se sustituye por $\bar{f} : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (X, \mathcal{O}_Z|_X)$. Ahora bien, como j' ya es una inmersión cerrada, la unicidad de Z hace que la inmersión cerrada $X \longrightarrow U$ sea (salvo un isomorfismo) la propia j' y $\bar{f}$ la identidad (o el isomorfismo indicado).

Lo que acabamos de probar es un caso particular del teorema siguiente:

Teorema 2.35 *Si $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$ son inmersiones y g es cuasicompacta, entonces $f \circ g$ es una inmersión.*

DEMOSTRACIÓN: Descompongamos $f = i \circ j$, $g = j' \circ i'$, donde i, i' son inmersiones abiertas y j, j' son inmersiones cerradas. Entonces $j \circ j'$ es una inmersión cerrada y $j \circ j' \circ i'$ es un homomorfismo cuasicompacto (porque todas las inmersiones cerradas lo son). Según acabamos de probar, esta composición es una inmersión, luego $j \circ j' \circ i' = i'' \circ j''$, donde i'' es una inmersión abierta y j'' una inmersión cerrada. Claramente entonces, $i \circ j \circ j' \circ i' = i \circ i'' \circ j''$ es una inmersión. ■

La hipótesis de cuasicompacidad no es realmente restrictiva:

Teorema 2.36 *Si $f : X \longrightarrow Y$ es una inmersión e Y es localmente noetheriano, entonces X también es localmente noetheriano y f es cuasicompacta.*

DEMOSTRACIÓN: Descompongamos $f = i \circ j$, donde $i : X \longrightarrow Z$ es una inmersión abierta y $j : Z \longrightarrow Y$ es una inmersión cerrada. Entonces Z es un subesquema cerrado de Y, luego también es localmente noetheriano. Igualmente, X es un subesquema abierto de Z, luego es localmente noetheriano. Hemos probado que esto implica que i es cuasicompacta, y j también lo es por ser cerrada. Concluimos que f es también cuasicompacta. ■

2.5 Conjuntos algebraicos

Finalmente introducimos la noción general, intrínseca, de conjunto algebraico.

Definición 2.37 Un *conjunto algebraico afín* definido sobre un cuerpo k es un esquema X/k tal que $\mathcal{O}_X(X)$ es una k-álgebra afín (o sea, finitamente generada).

Un *conjunto algebraico* definido sobre un cuerpo k es un esquema X/k que puede ser cubierto por un número finito de conjuntos algebraicos afines abiertos (definidos sobre k).

Así, si X/k es un conjunto algebraico afín, $\mathcal{O}_X(X) = k[x_1, \ldots, x_n]$, luego existe un ideal I de $k[X_1, \ldots, X_n]$ tal que $\mathcal{O}_X(X) \cong k[X_1, \ldots, X_n]/I$, lo que implica a su vez que $X \cong \operatorname{Esp}(k[X_1, \ldots, X_n]/I)$. El ideal I será radical si y sólo si el esquema X es reducido. En tal caso $k[X_1,\ldots,X_n]/I \cong k[C]$, donde $C = V(I)$ es un conjunto algebraico afín (definido sobre k) en el sentido clásico. Recíprocamente, si C/k es un conjunto algebraico afín (clásico), entonces el esquema $X = \operatorname{Esp} k[C]$ es un conjunto algebraico afín reducido.

En definitiva, los conjuntos algebraicos afines reducidos son los k-esquemas k-isomorfos a los esquemas de la forma $\operatorname{Esp} k[C]$, donde C/k es un conjunto algebraico afín clásico.

Más aún, el teorema 2.21 nos da[1] que los conjuntos algebraicos afines definidos sobre k son los k-esquemas k-isomorfos a subesquemas cerrados de A_k^n o, equivalentemente, los esquemas X/k tales que existe una inmersión cerrada $X \longrightarrow A_k^n$ definida sobre k (para un cierto n).

En particular vemos que todo k-subesquema cerrado de un conjunto algebraico afín definido sobre k es también un conjunto algebraico afín definido sobre k.

De la propia definición se sigue que los abiertos principales en un conjunto algebraico afín X/k son también conjuntos algebraicos afines, pues si $g \in \mathcal{O}_X(X) = k[x_1,\ldots,x_n]$, entonces $\mathcal{O}_X(D(g)) \cong \mathcal{O}_X(X)_g \cong k[x_1,\ldots,x_n,1/g]$.

A su vez, esto implica que todo conjunto algebraico X/k tiene una base formada por conjuntos algebraicos afines.

Consideremos ahora los conjuntos algebraicos arbitrarios. Puesto que las k-álgebras afines son noetherianas, es evidente que todo conjunto algebraico es noetheriano. Esto implica que todo abierto U en un conjunto algebraico X definido sobre k es también un conjunto algebraico definido sobre k. En efecto, como X tiene una base formada por conjuntos algebraicos afines, podemos expresar U como unión de tales conjuntos, y al ser cuasicompacto podemos tomar un subcubrimiento finito.

El hecho de que todo subconjunto cerrado de un conjunto algebraico definido sobre k es también un conjunto algebraico definido sobre k es consecuencia inmediata del hecho análogo para conjuntos algebraicos afines.

Definición 2.38 Un *conjunto algebraico proyectivo* definido sobre un cuerpo k es un esquema X/k isomorfo a un subesquema cerrado de P_k^n, para cierto natural n.

Es inmediato comprobar que los espacios P_k^n son conjuntos algebraicos definidos sobre k, luego todo conjunto algebraico proyectivo es en particular un conjunto algebraico. Más aún, todo subesquema cerrado de un conjunto algebraico proyectivo es un conjunto algebraico proyectivo.

[1]Aquí usamos que todos los resultados que hemos probado para esquemas son obviamente válidos para k-esquemas con la misma prueba, es decir que todos valen igualmente si suponemos que todos los anillos involucrados son k-álgebras y que todos los homomorfismos de anillos son homomorfismos de k-álgebras.

La última observación de la sección precedente demuestra que si I es un ideal homogéneo en un anillo de polinomios $A = k[X_0, \ldots, X_n]$ entonces $\mathrm{Proy}(A/I)$ es un conjunto algebraico proyectivo definido sobre k. En particular, si C/k es un conjunto algebraico proyectivo en el sentido clásico, entonces $\mathrm{Proy} A_k[C]$ es un conjunto algebraico proyectivo abstracto.

El teorema 5.55 (el análogo proyectivo de 2.21) garantizará que todo conjunto algebraico proyectivo es k-isomorfo a uno de la forma $\mathrm{Proy}(A/I)$, con lo que los conjuntos algebraicos proyectivos en sentido clásico se corresponden con los conjuntos algebraicos proyectivos reducidos en sentido abstracto.

Definición 2.39 Un conjunto algebraico C/k es *cuasiproyectivo* si existe una inmersión $C \longrightarrow \mathrm{P}_k^n$ para cierto $n \geq 0$.

Equivalentemente, C/k es cuasiproyectivo si es isomorfo a un abierto de un conjunto algebraico proyectivo. Los resultados de la sección anterior prueban que todo subesquema abierto y todo subesquema cerrado de un conjunto algebraico cuasiproyectivo es también un conjunto algebraico cuasiproyectivo.

Es claro que si C/k es un conjunto algebraico cuasiproyectivo en el sentido clásico, su esquema asociado es abierto en un conjunto algebraico cuasiproyectivo (abstracto).

Vamos a investigar ahora el conjunto de puntos cerrados de un conjunto algebraico.

Definición 2.40 Si X/k es un conjunto algebraico, llamaremos X^0 al espacio topológico formado por sus puntos cerrados.

Recordemos que si X es un esquema arbitrario y $P \in X$, hemos definido el cuerpo $k(P) = \mathcal{O}_{X,P}/\mathfrak{m}_P$. Si $X = \mathrm{Esp}\, A$ es un esquema afín y $\mathfrak{p} \in X$, entonces

$$k(\mathfrak{p}) = \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}}/\mathfrak{m}_\mathfrak{p} \cong A_\mathfrak{p}/S_\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{p} \cong (A/\mathfrak{p})_0,$$

es decir, $k(\mathfrak{p})$ es el cuerpo de cocientes del dominio íntegro $A/\mathfrak{p}$. A partir de aquí podemos obtener una caracterización de los puntos cerrados de un conjunto algebraico arbitrario X/k. Notemos que en tal caso los cuerpos $k(P)$ tienen una estructura natural de k-álgebra, es decir, son extensiones de k.

Teorema 2.41 *Sea X/k un conjunto algebraico y $P \in X$. Entonces P es cerrado si y sólo si $k(P)$ es una extensión finita de k.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que P es cerrado y sea U un entorno afín de P. Entonces P también es cerrado en U, y la extensión $k(P)/k$ construida a partir de U es k-isomorfa a la construida a partir de X. Equivalentemente, podemos suponer que X es afín. A través de un k-isomorfismo $X \cong A$, donde A es una k-álgebra afín, el punto P se corresponde con un ideal maximal $\mathfrak{p}$ de A y $k(P)$ se corresponde con el cuerpo de cocientes de $A/\mathfrak{p}$, o sea, con $A/\mathfrak{p}$, pues al ser $\mathfrak{p}$ maximal el cociente ya es un cuerpo. El teorema [3.82] nos da que $k(P)$ es una extensión finita de k.

Recíprocamente, supongamos que $k(P)$ es una extensión finita de k (y que X es un conjunto algebraico arbitrario, no necesariamente afín). Para probar que P es cerrado en X basta ver que es cerrado en todos sus entornos afines, pues si existiera un punto $Q \in \overline{\{P\}}$, $Q \neq P$, un entorno afín U de Q contendría también a P y entonces P no sería cerrado en U. En definitiva, podemos suponer nuevamente que X es un conjunto algebraico afín. A través de un k-isomorfismo $X \cong \operatorname{Esp} A$, el punto P se corresponde con un ideal primo $\mathfrak{p}$ de A. Ahora tenemos las inclusiones

$$k \subset A/\mathfrak{p} \subset k(\mathfrak{p}),$$

pero el hecho de que la extensión $k(P)/k$ sea finita y que $A/\mathfrak{p}$ es una k-álgebra finitamente generada implica que $A/\mathfrak{p}$ es la adjunción a k de un número finito de elementos algebraicos, luego es un cuerpo y $\mathfrak{p}$ es maximal. Esto implica que $\mathfrak{p}$ es cerrado en $\operatorname{Esp} A$ y, por consiguiente, P es cerrado en X. ■

De aquí deducimos varias consecuencias. La primera es que si X/k es un conjunto algebraico y U es un abierto en X entonces $U^0 = U \cap X^0$. En efecto, el teorema anterior implica que un punto $P \in U$ es cerrado en U si y sólo si es cerrado en X.

Puesto que todo esquema afín tiene puntos cerrados, ahora tenemos, más en general, que si X/k es un conjunto algebraico entonces X^0 es denso en X, pues todo abierto no vacío contiene un abierto afín que a su vez contiene un punto cerrado.

En particular, si U es abierto en X entonces U es la clausura de U^0, luego la correspondencia $U \mapsto U^0$ biyecta los abiertos de X con los abiertos de X^0. Si $i : X^0 \longrightarrow X$ es la inclusión y $\mathcal{F} = i^{-1}[\mathcal{O}_X]$, entonces $(X^0, \mathcal{F})$ es un espacio anillado local. De hecho $i^{-1}[\mathcal{O}_X] = i^{-1}[\mathcal{O}_X]^-$, es decir, $\mathcal{F}(U^0) = \mathcal{O}_X(U)$ para todo abierto U de X, pues el prehaz $\mathcal{F}$ así definido es ya un haz.

Otra consecuencia de la caracterización de los puntos cerrados es la siguiente:

Teorema 2.42 *Si X/k, Y/k son conjuntos algebraicos y $f : X \longrightarrow Y$ es un morfismo definido sobre k, entonces $f[X^0] \subset Y^0$.*

DEMOSTRACIÓN: Si $P \in X$, el homomorfismo $f_P : \mathcal{O}_{X,f(P)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,P}$ induce un k-monomorfismo de cuerpos $k(f(P)) \longrightarrow k(P)$. Si $P \in X^0$ entonces $k(P)$ es una extensión finita de k, luego $k(f(P))$ también lo es, luego $f(P) \in Y^0$. ■

Capítulo III

Conceptos básicos sobre esquemas

Ahora vamos a profundizar en el estudio de los esquemas que hemos iniciado en el capítulo anterior. En la primera sección expondremos los hechos básicos sobre la topología de un esquema: componentes irreducibles, componentes conexas, etc. Luego traduciremos a conjuntos algebraicos abstractos los resultados que conocemos sobre la dimensión de los conjuntos algebraicos afines en sentido clásico. En la tercera sección introduciremos el polinomio de Hilbert de un conjunto algebraico proyectivo junto con algunas aplicaciones, con lo que ilustraremos el uso de los esquemas en geometría algebraica. Por último introduciremos la noción de producto de esquemas y discutiremos algunos conceptos relacionados con ella.

3.1 Algunas propiedades globales

Aunque los esquemas que más nos van a interesar son los conjuntos algebraicos, las propiedades que vamos a estudiar en esta sección son aplicables a esquemas arbitrarios.

Irreducibilidad En ese primer apartado demostraremos que los puntos de un esquema se corresponden biunívocamente con sus cerrados irreducibles, pero antes de entrar en ello conviene observar una diferencia entre el comportamiento de los conjuntos algebraicos que hemos empezado a estudiar en el capítulo anterior y la situación en el caso de esquemas generales. Hemos probado que en todo conjunto algebraico el conjunto de puntos cerrados es denso. Sin embargo, esto no es cierto en general, pues, por ejemplo, el espectro de un anillo local tiene un único punto cerrado, que obviamente no es denso (salvo casos triviales). Puede darse incluso el caso de que un esquema no tenga ningún punto cerrado, si bien se trata de una situación muy atípica, como muestra el teorema siguiente:

Teorema 3.1 *Todo esquema cuasicompacto tiene al menos un punto cerrado.*

DEMOSTRACIÓN: Diremos que un espacio topológico X tiene la propiedad $\mathcal{P}$ si todo cerrado en X no vacío contiene un punto cerrado.

Observamos en primer lugar que todo esquema afín $\operatorname{Esp} A$ cumple la propiedad $\mathcal{P}$, pues los puntos cerrados se corresponden con los ideales maximales de A y todo ideal de A está contenido en un ideal maximal.

Ahora basta probar que si un espacio topológico X es unión de dos abiertos U y V que cumplen la propiedad $\mathcal{P}$, entonces X también cumple la propiedad $\mathcal{P}$. En efecto, en tal caso, por inducción lo mismo vale cuando X es unión de un número finito de abiertos con la propiedad $\mathcal{P}$, y todo esquema cuasicompacto es unión de un número finito de abiertos afines.

Pongamos, pues, que $X = U \cup V$, donde U y V son abiertos que cumplen $\mathcal{P}$. Tomamos un cerrado C en X y hemos de ver que contiene un punto cerrado. Ahora bien, los espacios $U' = C \cap U$ y $V' = C \cap V$ cumplen la propiedad $\mathcal{P}$ por ser cerrados en U y V respectivamente, y además $C = U' \cup V'$. Esto significa que podemos suponer $C = X$ y basta probar que X tiene un punto cerrado.

Podemos suponer que $U \not\subset V$. Entonces $U \setminus V \neq \varnothing$ es un cerrado en U, luego existe un punto $P \in U \setminus V$ cerrado en U. Si P es cerrado en X ya no hay nada que probar. En caso contrario $\overline{\{P\}} \cap U = \{P\}$ y $\overline{\{P\}} \cap V$ es un cerrado en V, luego contiene un punto Q cerrado en V.

Entonces $\overline{\{Q\}} \cap V = \{Q\}$ y $\overline{\{Q\}} \cap U \subset \overline{\{P\}} \cap U = \{P\}$, pero $P \notin \overline{\{Q\}}$, porque U es un entorno de P que no corta a $\{Q\}$ (porque si $Q \in U$ entonces $Q \in \overline{\{P\}} \cap U$, luego $P = Q \in V$). Así pues $\overline{\{Q\}} = \{Q\}$ y Q es cerrado en X. ■

Para estudiar los puntos de un esquema conviene introducir las relaciones siguientes:

Definición 3.2 Sea X un espacio topológico y sean P, $Q \in X$. Diremos que P es una *generalización* de Q, o que Q es una *especialización* de P o que Q se *especializa* a P si $Q \in \overline{\{P\}}$.

Así, los puntos cerrados son los puntos que no admiten especializaciones distintas de sí mismos y, en el extremo opuesto tenemos los puntos *cuasigenéricos,* definidos como los puntos que no admiten generalizaciones distintas de sí mismos. (Recordemos que un punto genérico es un punto denso en todo el espacio.)

La interpretación más simple de estos conceptos la tenemos en el caso en que $X = \operatorname{Esp} A$ para un anillo A. Entonces $\overline{\{\mathfrak{p}\}} = V(\mathfrak{p})$, con lo que las especializaciones de un ideal primo $\mathfrak{p}$ son los ideales primos que lo contienen. Más concretamente, si $A = k[C]$, para un conjunto algebraico afín C/k (en el sentido clásico), entonces los puntos de X se corresponden con las subvariedades de C, y una subvariedad especializa a otra cuanto está contenida en ella. Ahora demostramos que algo similar es cierto para esquemas arbitrarios:

Teorema 3.3 *Si X es un esquema, cada subconjunto cerrado irreducible de X no vacío tiene un único punto genérico. Los puntos cuasigenéricos de X son los puntos genéricos de las componentes irreducibles de X.*

Demostración: Recordemos que un conjunto es irreducible si y sólo si lo es su clausura. (Ver la observación tras el teorema [3.28].)

Sea Z un cerrado irreducible de X y U un abierto afín en X tal que $Z \cap U \neq \varnothing$. Entonces $Z \cap U$ es un abierto no vacío en el espacio irreducible Z luego ha de ser $Z = \overline{Z \cap U}$. Esto implica que $Z \cap U$ es irreducible. El teorema [3.41] nos da que existe un punto genérico $P \in Z \cap U$, es decir, un punto denso en $Z \cap U$. Como a su vez $Z \cap U$ es un abierto denso en Z, concluimos que $\overline{\{P\}} = Z$.

Si $\overline{\{P\}} = \overline{\{Q\}}$, tomamos un entorno afín U de P y entonces también $Q \in U$. Las clausuras de P y Q en U son también iguales, luego el teorema [3.41] implica que $P = Q$.

Si $Z = \overline{\{P\}}$ es una componente irreducible de X entonces P es un punto cuasigenérico, pues si Q es una generalización, tenemos que $Z = \overline{\{P\}} \subset \overline{\{Q\}}$ y el último espacio es irreducible, luego $\overline{\{P\}} = \overline{\{Q\}}$, luego $P = Q$.

Recíprocamente, si P es un punto cuasigenérico de X, entonces Z es una componente irreducible, ya que un punto genérico de un cerrado irreducible que contuviera estrictamente a Z sería una generalización de P distinta de P. ■

Vemos, pues, que los puntos de un esquema se corresponden con sus subconjuntos cerrados irreducibles. En particular, un esquema es irreducible si y sólo si tiene un punto genérico.

Teorema 3.4 *Si X es un esquema y $P \in X$, entonces las componentes irreducibles de* $\operatorname{Esp} \mathcal{O}_{X,P}$ *se corresponden biunívocamente con las componentes irreducibles de X que contienen a P.*

Demostración: Sea U un entorno afín de P. Vamos a probar que la correspondencia $Z \mapsto Z \cap U$ biyecta las componentes irreducibles de X que contienen a P con las componentes irreducibles de U que contienen a P. En efecto, si Z es una componente irreducible de X que pasa por P, entonces $Z \cap U$ es un abierto denso en Z, luego es irreducible. Además es una componente irreducible, pues si C es la componente irreducible de U tal que $Z \cap U \subset C \subset U$, entonces $\overline{C} = Z$, luego la clausura de C en U (que es C) es $C = \overline{C} \cap U = Z \cap U$.

Recíprocamente, si Z es una componente irreducible de U que pasa por P, entonces está contenido en una componente irreducible C, luego $Z \subset C \cap U$, luego $Z = C \cap U$.

Por consiguiente podemos suponer que $X = \operatorname{Esp} A$ es un esquema afín y que $P = \mathfrak{p}$ es un ideal primo de A. Entonces $\mathcal{O}_{X,P} = A_{\mathfrak{p}}$. Las componentes irreducibles de X se corresponden con los primos minimales de A (ver las observaciones tras la definición [3.42]) y, por el mismo motivo, las componentes irreducibles de $\operatorname{Esp} \mathcal{O}_{X,P}$ se corresponden con los primos minimales de $A_{\mathfrak{p}}$, que a su vez se corresponden con los primos minimales de A contenidos en $\mathfrak{p}$, que a su vez se corresponden con las componentes irreducibles de X que pasan por P. ■

Ahora vamos a definir unos homomorfismos que resultan útiles para estudiar los puntos de un esquema.

Consideremos un esquema X y un punto $P \in X$. Podemos definir un homomorfismo $\operatorname{Esp} \mathcal{O}_P \longrightarrow X$ como sigue: fijamos un entorno afín U de P en X y consideramos el homomorfismo natural $\mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{O}_{X,P}$. Éste induce un homomorfismo $\operatorname{Esp} \mathcal{O}_{X,P} \longrightarrow U$, que podemos componer con la inclusión, y así obtenemos un homomorfismo $\operatorname{Esp} \mathcal{O}_{X,P} \longrightarrow X$.

Notemos que este homomorfismo no depende de la elección de U. Para ello basta probar que si tomamos dos abiertos $P \in U \subset V$ el homomorfismo definido con ambos es el mismo. En efecto, el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X(V) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_{X,P} \\
\mathcal{O}_X(U) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

se traduce en el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Esp} \mathcal{O}_{X,P} \arrow[r] \arrow[dr] & V \arrow[r] & X \\
& U \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Explícitamente, si $U \cong \operatorname{Esp} A$ y P se corresponde con el ideal $\mathfrak{p}$ de A, entonces el homomorfismo $\mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{O}_{X,P}$ se corresponde con la localización $A \longrightarrow A_{\mathfrak{p}}$. Los elementos de $\operatorname{Esp} A_{\mathfrak{p}}$ se corresponden con los ideales primos de A contenidos en $\mathfrak{p}$, es decir, con las generalizaciones de $\mathfrak{p}$. Por consiguiente, la imagen de $\operatorname{Esp} \mathcal{O}_{X,P}$ en U está formada por los puntos $Q \in U$ tales que $P \in \overline{\{Q\}}$ (clausura en U), pero éstos son los mismos que los puntos $Q \in X$ tales que $P \in \overline{\{Q\}}$ (clausura en X). En resumen, la imagen de $\operatorname{Esp} \mathcal{O}_{X,P}$ en X está formada por las generalizaciones de P. Ahora es inmediato el teorema siguiente:

Teorema 3.5 *Dado un esquema X y un punto $P \in X$, existe un único homomorfismo de esquemas $\operatorname{Esp} \mathcal{O}_{X,P} \longrightarrow X$ cuya imagen está formada por las generalizaciones de P y tal que para todo entorno afín U de P el homomorfismo $\mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{O}_{X,P}$ es el natural. Si X está definido sobre un esquema S, entonces dicho homomorfismo también está definido sobre S.*

Demostración: Notemos que si U es un entorno afín de P en X, entonces U contiene a todas las generalizaciones de P, de donde se sigue inmediatamente que un homomorfismo en las condiciones del enunciado se expresa como composición un homomorfismo $\operatorname{Esp} \mathcal{O}_{X,P} \longrightarrow U$ con la inclusión $U \longrightarrow X$. Este homomorfismo entre esquemas afines ha de ser el determinado por el homomorfismo natural $\mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{O}_{X,P}$, luego el homomorfismo dado es necesariamente el que acabamos de construir.

Supongamos ahora que X está definido sobre S y sea $\pi : X \longrightarrow S$ el homomorfismo estructural. Tomamos un entorno afín U de $\pi(P)$ y consideramos el homomorfismo

$$\mathcal{O}_S(U) \xrightarrow{\pi_U^\#} \mathcal{O}_X(\pi^{-1}[U]) \longrightarrow \mathcal{O}_{X,P},$$

que induce un homomorfismo $\operatorname{Esp} \mathcal{O}_{X,P} \longrightarrow U \longrightarrow S$ (independiente de la elección de U). Éste hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Esp} \mathcal{O}_{X,P} \arrow[r] \arrow[dr] & X \arrow[d, "\pi"] \\ & S \end{tikzcd}$$

de modo que el homomorfismo del teorema también está definido sobre S. ■

Ahora consideramos el epimorfismo natural $\mathcal{O}_{X,P} \longrightarrow k(P)$, que define un homomorfismo $\operatorname{Esp} k(P) \longrightarrow \operatorname{Esp} \mathcal{O}_{X,P}$. Al componerlo con el homomorfismo dado por el teorema anterior obtenemos un homomorfismo $\operatorname{Esp} k(P) \longrightarrow X$. Observemos que el único punto de $\operatorname{Esp} k(P)$ tiene por imagen en $\operatorname{Esp} \mathcal{O}_{X,P}$ al ideal $\mathfrak{m}_P$, y es fácil ver que éste se corresponde con $P \in X$. Si U es un entorno afín de P en X, entonces el homomorfismo asociado $\mathcal{O}_X(U) \longrightarrow k(P)$ es la composición de los homomorfismos $\mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{O}_{X,P} \longrightarrow k(P)$. Es evidente que esto determina el homomorfismo:

Teorema 3.6 *Si X es un esquema y $P \in X$, entonces existe un único homomorfismo de esquemas $\operatorname{Esp} k(P) \longrightarrow X$ cuya imagen es $\{P\}$ y de modo que para cada entorno afín U de P en X el homomorfismo asociado es la composición $\mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{O}_{X,P} \longrightarrow k(P)$.*

Conexión Todo espacio topológico se descompone en unión disjunta de componentes conexas. Éstas son cerradas, y todo subespacio conexo no vacío está contenido en una única componente conexa. Los conjuntos irreducibles son obviamente conexos, luego toda componente irreducible está contenida en una única componente conexa. Un espacio noetheriano tiene un número finito de componentes irreducibles, luego también tiene un número finito de componentes conexas. Esto implica a su vez que las componentes conexas son abiertas o, lo que es lo mismo, que el espacio es *localmente conexo.* Un poco más en general: ahora es claro que todo espacio localmente noetheriano es localmente conexo.

Las componentes conexas de un esquema X están relacionadas con los elementos idempotentes de $\mathcal{O}_X(X)$. En general, un elemento e de un anillo A es *idempotente* si $ee = e$.

Teorema 3.7 *Sea X un esquema. Para cada elemento idempotente $e \in \mathcal{O}_X(X)$ existe un abierto cerrado $U_e \subset X$ tal que $e|_{U_e} = 1$ y $e|_{X \setminus U_e} = 0$, de modo que la correspondencia $e \mapsto U_e$ biyecta los elementos idempotentes de $\mathcal{O}_X(X)$ con los abiertos cerrados de X. En particular, X es conexo si y sólo si los únicos idempotentes de $\mathcal{O}_X(X)$ son 0 y 1.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos primero que $X = \operatorname{Esp} A$ es afín. Si $e \in A$ es idempotente, basta tomar $U_e = V(1-e)$, Claramente $V(1-e) \cap V(e) = \varnothing$ y $V(1-e) \cup V(e) = X$, luego U_e es abierto y cerrado en X.

Si $\mathfrak{p} \in U_e$, entonces $e \notin \mathfrak{p}$, luego $e(1-e) = 0$ se interpreta como que $e = 1$ en $A_{\mathfrak{p}}$, luego $e|_{U_e} = 1$. Por otra parte, si $\mathfrak{p} \in X \setminus U_e = V(e)$, entonces $1 - e \notin \mathfrak{p}$, luego $e(1-e) = 0$ se intepreta como que $e = 0$ en $A_{\mathfrak{p}}$, luego $e|_{X \setminus U_e} = 0$.

Es claro que si $U_e = U_f$, entonces $e = f$.

Consideremos ahora $U \subset X$ abierto y cerrado. Digamos que $U = V(I)$, $X \setminus U = V(J)$, para ciertos ideales I, J de A. Como $V(I) \cap V(J) = \varnothing$, ha de ser $I + J = A$, luego podemos descomponer $1 = b + c$, con $b \in I$, $c \in J$.

Como $V(I) \cup V(J) = \operatorname{Esp} A$, $IJ \subset \operatorname{rad} 0$, luego bc es nilpotente, digamos $(bc)^n = 0$. Es claro que $(b^n, c^n) = A$, luego $1 = ub^n + vc^n$. Llamemos $e = ub^n$, que es nilpotente, pues $e = ub^n(ub^n + vc^n) = e^2$.

Como $e \in I$, se cumple que $U = V(I) \subset V(e)$. Igualmente,

$$X \setminus U = V(J) \subset V(vc^n) = V(1-e) = X \setminus V(e),$$

luego $U = V(e)$.

Esto prueba el teorema en el caso afín. Si X es arbitrario y $e \in \mathcal{O}_X(X)$ es idempotente, para cada abierto afín $G \subset X$ tenemos que $e|_G \in \mathcal{O}_G(G)$ es idempotente, luego existe un abierto cerrado $G_e \subset G$ tal que $e|_{G_e} = 1$, $e|_{G \setminus G_e} = 0$. Llamemos U_e a la unión de los abiertos G_e, donde G recorre los abiertos afines de X, y sea U_e' la unión de los abiertos $G \setminus G_e$.

Como todo punto tiene un entorno afín, es claro que $X = U_e \cup U_e'$ y, como $e|_{U_e} = 1$ y $e|_{U_e'} = 0$, ha de ser $U_e \cap U_e' = \varnothing$, luego $U_e' = X \setminus U_e$ y U_e es abierto y cerrado en X.

Si U es abierto y cerrado en X, para cada abierto afín $G \subset X$, tenemos que $U \cap G$ es abierto y cerrado en G, luego existe un idempotente $e_G \in \mathcal{O}_X(G)$ tal que $e_G|_{U \cap G} = 1$, $e_G|_{G \setminus (U \cap G)} = 0$. Es claro entonces que los e_G determinan un elemento $e \in \mathcal{O}_X(X)$ tal que $e|_U = 1$, $e|_{X \setminus U} = 0$, y obviamente es idempotente. ■

Los esquemas locales siempre son conexos:

Teorema 3.8 *Si A es un anillo local, entonces sus únicos elementos idempotentes son* 0 *y* 1.

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathfrak{m}$ el ideal maximal de A y supongamos que $e \in A$ es idempotente. Entonces $e(e-1) = 0 \in \mathfrak{m}$, luego $e \in \mathfrak{m}$ o bien $e - 1 \in \mathfrak{m}$. El mismo argumento prueba que, para cada ideal primo $\mathfrak{p}$ de A, se cumple $e \in \mathfrak{p}$ o bien $e - 1 \in \mathfrak{p}$. Ahora bien, como $\mathfrak{m}$ contiene a todos los ideales primos y no puede ser que tanto e como $e - 1$ estén en $\mathfrak{m}$, concluimos que $e \in \operatorname{rad} 0$ o bien $e - 1 \in \operatorname{rad} 0$. Esto significa que uno de los dos es nilpotente. Si $e^n = 0$, entonces $e = 0$, y si $(e-1)^n = \pm(e-1) = 0$, entonces $e = 1$. ■

Integridad La irreducibilidad de un esquema como espacio topológico está relacionada con el carácter íntegro de sus anillos, tal y como vamos a ver a continuación.

Definición 3.9 Un esquema X es *íntegro* si para todo abierto U de X el anillo $\mathcal{O}_X(U)$ es un dominio íntegro.

Observemos que si X es un esquema íntegro, entonces los anillos locales $\mathcal{O}_{X,P}$ son dominios íntegros para todos los puntos $P \in X$, pero el recíproco no es cierto. En efecto, que $\mathcal{O}_{X,P}$ sea un dominio íntegro equivale a que sea un anillo reducido y a que tenga un único divisor primo minimal, lo cual, por 3.4, equivale a que $\mathcal{O}_{X,P}$ sea un anillo reducido y exista una única componente irreducible de X que pase por P. Así, por ejemplo, si X es un conjunto algebraico afín (reducido) formado por dos rectas paralelas, tenemos que todos los anillos $\mathcal{O}_{X,P}$ son dominios íntegros, pero X no es un esquema íntegro, en virtud del teorema siguiente:

Teorema 3.10 *Un esquema es íntegro si y sólo si es reducido e irreducible.*

Demostración: Sea X un esquema reducido e irreducible. Veamos en primer lugar que si $U \neq \varnothing$ es un abierto afín en X entonces $\mathcal{O}_X(U)$ es un dominio íntegro. En efecto, como U es denso en X, es irreducible y, por el teorema 2.23, tenemos que $\mathcal{O}_X(U)$ es reducido. A través de un isomorfismo $U \cong \operatorname{Esp} A$ vemos que el anillo A es reducido y tiene un único divisor primo minimal, luego éste tiene que ser 0 y, por consiguiente A es un dominio íntegro, al igual que $\mathcal{O}_X(U)$.

Pasamos ahora al caso general. Puesto que todo abierto de X es también reducido e irreducible, basta probar que $\mathcal{O}_X(X)$ es un dominio íntegro. Tomemos $f,\, g \in \mathcal{O}_X(X)$ tales que $fg = 0$ y sea $U \neq \varnothing$ cualquier abierto afín de X. Por la parte ya probada podemos suponer que $f|_U = 0$.

Si $W \neq \varnothing$ es cualquier otro abierto afín no vacío de X, a través de un isomorfismo $W \cong \operatorname{Esp} A$ (donde A es un dominio íntegro, por la parte ya probada) el elemento $f|_W$ se corresponde con un $s \in A$ con la propiedad de que su restricción a un cierto abierto U' (el correspondiente con $U \cap W$) se anula. Sea $g \in A$ no nulo tal que $D(g) \subset U'$. Entonces también se anula la restricción de s a $D(g)$, lo cual significa que $s = 0$ en A_g. Puesto que A es un dominio íntegro, esto equivale a que $s = 0$ en A, es decir, tenemos que $f|_W = 0$. Como esto vale para todo abierto afín de X, concluimos que $f = 0$.

Recíprocamente, si X es un esquema íntegro, obviamente es reducido. Hemos de probar que es irreducible. Si X tuviera al menos dos componentes irreducibles, con puntos genéricos P_1 y P_2, tomamos abiertos afines $P_i \in U_i$. Como los anillos $\mathcal{O}_X(U_i)$ son dominios íntegros, cada uno de ellos tiene un único divisor primo minimal, luego los esquemas U_i son irreducibles. Así pues, ha de ser $P_i \in U_i \subset \overline{\{P_i\}}$. Los dos abiertos han de ser disjuntos, pues si $U = U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$, entonces $P_1,\, P_2 \in U$ y los conjuntos $\overline{\{P_i\}} \cap U$ serían dos componentes del espacio irreducible U, luego habría de ser $P_1 = P_2$, contradicción. Consideramos ahora el abierto $U' = U_1 \cap U_2$. Por la definición de haz existe $s_i \in \mathcal{O}(U')$ tal que $s_i|_{U_i} = 1$ y $s_i|_{U_{3-i}} = 0$. Claramente entonces $s_1 s_2 = 0$ (de nuevo por la definición de haz) y tenemos que $\mathcal{O}_X(U')$ no es un dominio íntegro. ■

Como es habitual, la integridad en un esquema afín X se reduce a la integridad de $\mathcal{O}_X(X)$:

Teorema 3.11 *Un esquema afín X es íntegro si y sólo si $\mathcal{O}_X(X)$ es un dominio íntegro.*

Demostración: Esto equivale a probar que $X = \operatorname{Esp} A$ es un esquema íntegro si y sólo si A es un dominio íntegro. Una implicación es obvia. Si A es un dominio íntegro en particular es reducido, y esto implica que X es reducido. Además A tiene un único divisor primo minimal, luego X es irreducible. ■

Los esquemas íntegros son conexos, y el teorema siguiente muestra que la conexión es precisamente la parte global de la integridad:

Teorema 3.12 *Un esquema X es íntegro si y sólo si es conexo y cada anillo local $\mathcal{O}_{X,P}$ es un dominio íntegro.*

Demostración: Las condiciones son claramente necesarias. También son suficientes, pues ciertamente implican que X es reducido y, si fuera reducible, sería $X = C_1 \cup C_2$, con C_1 y C_2 cerrados no vacíos. No pueden ser disjuntos, pues entonces X sería disconexo. Un punto $P \in C_1 \cap C_2$ pertenece a más de una componente irreducible de X. Según el teorema 3.4, el esquema $\operatorname{Esp} \mathcal{O}_{X,P}$ no es irreducible, pero debería serlo, ya que $\mathcal{O}_{X,P}$ es un dominio íntegro. Esta contradicción prueba que X es irreducible, luego íntegro. ■

Los esquemas íntegros satisfacen una serie de propiedades adicionales de interés:

Teorema 3.13 *Sea X un esquema íntegro y sea $\xi \in X$ su punto genérico. Si $U \neq \varnothing$ es un abierto afín en X, entonces la aplicación natural $\mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{O}_\xi$ induce un isomorfismo entre el cuerpo de fracciones de $\mathcal{O}_X(U)$ y $\mathcal{O}_{X,\xi}$.*

Demostración: Observemos que $\xi \in U$ es también el punto genérico de U. A través de un isomorfismo $U \cong \operatorname{Esp} A$, el punto ξ se corresponde con el ideal nulo de A y el teorema 2.4 implica que $\mathcal{O}_{X,\xi} = A_0$ es el cuerpo de cocientes de A. La aplicación natural $\mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{O}_{X,\xi}$ se corresponde con la inmersión natural de A en su cuerpo de cocientes, la cual ciertamente induce un isomorfismo. ■

Definición 3.14 Si X es un esquema íntegro, definimos su *cuerpo de funciones racionales* como $K(X) = \mathcal{O}_{X,\xi} = k(\xi)$, donde $\xi \in X$ es su punto genérico. Si X/k es un conjunto algebraico, escribiremos también $k(X)$.

Vamos a ver que todos los anillos asociados a un esquema íntegro X pueden indentificarse con subanillos de $K(X)$. Para ello observemos primero que si X es un esquema arbitrario, P, $Q \in X$ y $Q \in \overline{\{P\}}$, tenemos un homomorfismo natural $\mathcal{O}_{X,Q} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,P}$. En efecto, basta observar que si U es un abierto tal que $Q \in U$, entonces también $P \in U$, y el homomorfismo es el dado por $[(U, f)] \mapsto [(U, f)]$.

Teorema 3.15 *Sea X un esquema íntegro, sea ξ su punto genérico, sea U un abierto en X y $P \in U$. Entonces los homomorfismos $\mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{O}_{X,P}$ y $\mathcal{O}_{X,P} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,\xi}$ son inyectivos.*

Demostración: Sea $f \in \mathcal{O}_X(U)$ tal que $f_P = 0$. Esto significa que existe un entorno V de P tal que $f|_V = 0$. Si $W \subset U$ es un abierto afín, tenemos que $f|_{W\cap V} = 0$. (Notemos que $W \cap V \neq \varnothing$.) Tenemos el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X(W) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_{X,\xi} \\
\mathcal{O}_X(W\cap V) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Como la flecha horizontal es inyectiva (por el teorema anterior), concluimos que $f = 0$.

Si $[(U, f)] \in \mathcal{O}_{X,P}$ es nulo como elemento de $\mathcal{O}_{X,\xi}$, existe un abierto V tal que $f|_V = 0$, pero entonces f está en el núcleo del monomorfismo $\mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{O}_{X,\xi}$, luego $f = 0$. ■

En todas las demostraciones precedentes está implícito un hecho que ahora podemos demostrar en general:

Teorema 3.16 *Si X es un esquema íntegro, entonces las restricciones entre abiertos de X (no vacíos) son inyectivas.*

Demostración: Si $U \subset V \subset X$ y ξ es el punto genérico de X, basta considerar el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X(V) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_{X,\xi} \\
\mathcal{O}_X(U) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

teniendo en cuenta que los homomorfismos en $\mathcal{O}_{X,\xi}$ son inyectivos. ■

Así pues, si identificamos todos los anillos $\mathcal{O}_X(U)$ y $\mathcal{O}_{X,P}$ con subanillos de $\mathcal{O}_{X,\xi}$, si $P \in U \subset V$ tenemos las inclusiones

$$\mathcal{O}_X(V) \subset \mathcal{O}_X(U) \subset \mathcal{O}_{X,P}.$$

Más precisamente, se cumple que

$$\mathcal{O}_X(U) = \bigcap_{P\in U} \mathcal{O}_{X,P}.$$

En efecto, tomamos $[(V, f)] \in \mathcal{O}_{X,\xi}$ que esté en la intersección. Esto significa que para cada $P \in U$ existe $[(U_P, s_P)] \in \mathcal{O}_{X,P}$ de manera que $P \in U_P$ y $[(U_P, s_P)] = [(V, f)]$ en $\mathcal{O}_{X,\xi}$. Entonces existe un abierto no vacío $W_P \subset U_p \cap V$

tal que $s_P|_{W_P} = f|_{W_P}$. Como las restricciones son inyectivas, de hecho se cumple que $s_P|_{U_p \cap V} = f|_{U_P \cap V}$. Llamando $W_P = U_P \cup V$, existe una única $t_P \in \mathcal{O}_X(W_P)$ tal que $t_P|_V = f$. Dos cualesquiera de ellas coinciden en V, luego coinciden en la intersección de sus dominios. Esto implica que existe una $t \in (U \cap V)$ tal que $t|_V = f$. Entonces $[(V, f)] = [(U, t|_U)] \in \mathcal{O}_X(U)$. ■

El teorema siguiente es una primera muestra de por qué se llaman "genéricos" los puntos genéricos:

Teorema 3.17 *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un homomorfismo entre esquemas íntegros y sean ξ_X, ξ_Y sus respectivos puntos genéricos. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

a) $f[X]$ *es denso en* Y,

b) $f^\# : \mathcal{O}_Y \longrightarrow f_*(\mathcal{O}_X)$ *es inyectivo,*

c) $f(\xi_X) = \xi_Y$,

d) $\xi_Y \in f[X]$.

Demostración: a) $\Rightarrow$ b) Supongamos que existe un abierto U en Y tal que $f^\# : \mathcal{O}_Y(U) \longrightarrow \mathcal{O}_X(f^{-1}[U])$ no es inyectiva. Esto significa que existe $h \in \mathcal{O}_Y(U)$, $h \neq 0$ tal que $f_U^\#(h) = 0$. Como las restricciones son inyectivas, podemos suponer que U es un abierto afín, y a su vez podemos sustituir éste por el abierto principal $D(h)$, lo que significa que h es una unidad de $\mathcal{O}_Y(U)$.

Por hipótesis existe un punto $P \in X$ tal que $f(P) \in U$. Entonces tenemos que $f_P^\#(h_P) = 0$ y h_P es una unidad de $\mathcal{O}_{Y,P}$. Esto contradice la relación $(f_P^\#)^{-1}[\mathfrak{m}_P] = \mathfrak{m}_{f(P)}$.

b) $\Rightarrow$ a) Si $f[X]$ no es denso en Y entonces existe un abierto no vacío U en Y tal que $f^{-1}[U] = \varnothing$. El homomorfismo $f_U^\# : \mathcal{O}_Y(U) \longrightarrow 0$ no puede ser inyectivo.

a) $\Rightarrow$ c) Si $U \neq \varnothing$ es un abierto en Y entonces ha de ser $f^{-1}[U] \neq \varnothing$, luego $\xi_X \in f^{-1}[U]$, luego $f(\xi_X) \in U$. Esto prueba que $f(\xi_X)$ es denso en Y, luego ha de ser $f(\xi_X) = \xi_Y$.

c) $\Rightarrow$ d) $\Rightarrow$ a) son triviales. ■

Puntos asociados El teorema 3.16 admite una generalización a esquemas que no sean íntegros en términos del concepto siguiente:

Definición 3.18 Un punto P de un esquema localmente noetheriano X es un *punto asociado* de X si el ideal maximal $\mathfrak{m}_P$ es un primo asociado del anillo $\mathcal{O}_{X,P}$. Llamaremos $\mathrm{As}(X)$ al conjunto de los puntos asociados de X.

El teorema [3.50] implica que si A es un anillo noetheriano, los puntos asociados de $\operatorname{Esp} A$ son precisamente los primos asociados de A. En particular forman un conjunto finito no vacío.

Es evidente que si X es un esquema localmente noetheriano y U es un abierto afín noetheriano en X, entonces $\operatorname{As}(U) = \operatorname{As}(X) \cap U$. En particular, el conjunto $\operatorname{As}(X)$ es localmente finito no vacío, y si X es noetheriano es finito.

Otra consecuencia elemental de las propiedades de los primos asociados en anillos noetherianos es que si X es un anillo localmente noetheriano, entonces sus puntos cuasigenéricos son asociados, y si X es noetheriano y reducido entonces sus puntos asociados son exactamente sus puntos cuasigenéricos.

Los puntos asociados de un esquema que no son cuasigenéricos se llaman *puntos inmersos*. En estos términos, acabamos de observar que los esquemas noetherianos reducidos no tienen puntos inmersos.

La generalización de 3.16 a la que hacíamos referencia es la siguiente:

Teorema 3.19 *Sea X un esquema localmente noetheriano y $U \subset X$ un abierto. Entonces $\operatorname{As}(X) \subset U$ si y sólo si para todo abierto $V \subset X$ la restricción $\mathcal{O}_X(V) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U \cap V)$ es inyectiva.*

DEMOSTRACIÓN: Veamos en primer lugar que basta probar que si X es un esquema afín noetheriano, entonces $\operatorname{As}(X) \subset U$ si y sólo si la restricción $\mathcal{O}_X(X) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U)$ es inyectiva.

En efecto, si admitimos esto y tuviéramos que (en el caso general) $\operatorname{As}(X) \subset U$ pero una restricción $\mathcal{O}_X(V) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U \cap V)$ no fuera inyectiva, cubriendo V por abiertos afines noetherianos encontraríamos un abierto afín $V' \subset V$ tal que la restricción $\rho^{V'}_{V' \cap U}$ no sería inyectiva, pero $\operatorname{As}(V') = \operatorname{As}(X) \cap V' \subset U \cap V'$, en contradicción con el caso afín que estamos suponiendo.

Recíprocamente, si las restricciones son inyectivas y $P \in \operatorname{As}(X)$, tomamos un entorno afín noetheriano V de P, con lo que la inyectividad de $\rho^V_{U \cap V}$ implica que

$$P \in \operatorname{As}(V) \subset V \cap U \subset U,$$

luego $\operatorname{As}(X) \subset U$.

Tomemos, pues, que $X = \operatorname{Esp} A$ y supongamos que $\operatorname{As}(X) \subset U$. Si $a \in A$ cmple que $a|_U = 0$ pero $a \neq 0$, el A-módulo $M = aA$ tiene un primo asociado $\mathfrak{p} = \operatorname{An}(ab) \in \operatorname{As}(X) \subset U$. Esto implica que a es nulo en $A_\mathfrak{p}$, luego existe un $s \in A \setminus \mathfrak{p}$ tal que $sa = 0$, pero entonces $s \in \mathfrak{p}$, lo cual es absurdo. Así pues, $a = 0$ y la restricción es inyectiva.

Recíprocamente, si existe $\mathfrak{p} \in \operatorname{As}(X) \setminus U$, entonces $\mathfrak{p} = \operatorname{An}(a)$, para un cierto $a \in A$ no nulo. Si $\mathfrak{q} \in U$, entonces, como $V(\mathfrak{p}) \subset X \setminus U$, tenemos que $\mathfrak{p} \not\subset \mathfrak{q}$, y si tomamos $s \in \mathfrak{p} \setminus \mathfrak{q}$, tenemos que $sa = 0$, luego $a/1 = 0$ en $A_\mathfrak{q}$, es decir, $a_\mathfrak{q} = 0$ para todo $\mathfrak{q} \in U$, luego $a|_U = 0$. La restricción no es inyectiva. ■

Definición 3.20 Diremos que un abierto U es un esquema localmente noetheriano X es *fuertemente denso* si contiene a los puntos asociados de X. (Notemos que un abierto es denso si contiene a los puntos cuasigenéricos de X).

3.2 La dimensión de un conjunto algebraico

Introducimos ahora la noción de dimensión de un esquema. La definición es general, si bien nos ocuparemos únicamente del caso de los conjuntos algebraicos.

Definición 3.21 Si X es un esquema, la dimensión de X es su dimensión de Krull como espacio topológico.

Evidentemente, si X es un esquema afín tenemos que $\dim X = \dim \mathcal{O}_X(X)$.

Teorema 3.22 *Sea X/k un conjunto algebraico íntegro.*

a) $\dim X < +\infty$.

b) $\dim X$ *es el grado de trascendencia de la extensión* $k(X)/k$.

c) Si $U \neq \varnothing$ *es abierto en* X*, entonces* $\dim U = \dim X$.

Demostración: Observemos que, en general, si Y es un subespacio de un espacio topológico X, entonces $\dim Y \leq \dim X$. En efecto, si

$$\varnothing \subsetneq W_0 \subsetneq W_1 \subsetneq \cdots \subsetneq W_n$$

es una cadena de cerrados irreducibles en Y, sus clausuras en X forman una cadena de cerrados irreducibles en X y las inclusiones siguen siendo estrictas, pues $W_i = \overline{W}_i \cap Y$.

Otro hecho general es que si $\mathcal{B}$ es un cubrimiento abierto de X, entonces

$$\dim X = \sup_{U \in \mathcal{B}} \dim U.$$

En efecto, una desigualdad es clara. Si $\dim X \geq n$, entonces existe una cadena de cerrados irreducibles en X

$$\varnothing \subsetneq W_0 \subsetneq W_1 \subsetneq \cdots \subsetneq W_n$$

Existe un abierto $U \in \mathcal{B}$ tal que $U \cap W_0 \neq \varnothing$, con lo que

$$\varnothing \subsetneq U \cap W_0 \subsetneq U \cap W_1 \subsetneq \cdots \subsetneq U \cap W_n$$

es una cadena de cerrados irreducibles en U. (Cada $U \cap W_i$ es irreducible porque es un abierto no vacío en W_i, luego es denso, luego irreducible. La densidad justifica también que las inclusiones son estrictas.) Así pues, $\dim U \geq n$, y tenemos la otra desigualdad.

Como consecuencia de estos hechos, basta probar que si X/k es un conjunto algebraico íntegro, entonces todo abierto afín $U \neq \varnothing$ tiene dimensión finita y que ésta es igual al grado de trascendencia indicado. Notemos además que en realidad, si ξ es el punto genérico, $k(U) = \mathcal{O}_{U,\xi} = \mathcal{O}_{X,\xi} = k(X)$, luego basta probar que si X/k es un conjunto algebraico íntegro afín, entonces $\dim X = \operatorname{grad\,tr} k(X)/k < \infty$. Ahora bien, si tenemos que $X = \operatorname{Esp} A$ para una cierta

k-álgebra afín A, entonces $k(X)$ es el cuerpo de cocientes de A, y basta aplicar los teoremas [3.74] y [3.75]. ■

Si X/k es un conjunto algebraico reducido, no necesariamente irreducible, entonces su dimensión también es finita, pues es el máximo de las dimensiones de sus componentes irreducibles. Si no es reducido observamos que, obviamente, $\dim X = \dim X_{\mathrm{red}}$, ya que ambos esquemas tienen el mismo espacio topológico subyacente. En definitiva:

Teorema 3.23 *Los conjuntos algebraicos tienen dimensión finita.*

Recordemos que si X es un espacio topológico arbitrario y W es un cerrado irreducible en X, se cumple obviamente la relación

$$\dim W + \operatorname{codim}_X W \leq \dim X,$$

pero la igualdad no es cierta en general. En los conjuntos algebraicos se cumple lo siguiente:

Teorema 3.24 *Si X/k es un conjunto algebraico cuyas componentes irreducibles tienen todas la misma dimensión, entonces, para cada cerrado irreducible W de X, se cumple que*

$$\dim W + \operatorname{codim}_X W = \dim X.$$

Demostración: Sea $\xi \in W$ el punto genérico y sea $U \subset X$ un entorno afín de ξ. Sea $W' = W \cap U$. Las componentes irreducibles de U son de la forma $V \cap U$, donde V es una componente irreducible de X, luego todas tienen la misma dimensión que X. Así pues, todas las componentes irreducibles de U tienen la misma dimensión, igual a $\dim U = \dim X$. Así mismo, $\dim W' = \dim W$. También se cumple que $\operatorname{codim}_X W = \operatorname{codim}_U W'$ (una cadena ascendente de cerrados irreducibles en X que empiece con W da lugar a otra de la misma longitud en U que empieza por W' tomando las intersecciones con U de sus componentes y, recíprocamente, si partimos de una cadena en U que empiece por W' obtenemos una en X que empieza por W tomando las clausuras de sus componentes).

Esto prueba que no perdemos generalidad si suponemos que X es afín, y entonces basta aplicar el teorema [3.79]. ■

Teorema 3.25 *Si X es un esquema, $W \subset X$ es un cerrado irreducible y $\xi \in W$ es su punto genérico, entonces* $\dim \mathcal{O}_{X,\xi} = \operatorname{codim}_X W$.

Demostración: Como en la prueba del teorema anterior, si U es un entorno afín de ξ y $W' = W \cap U$, entonces $\operatorname{codim}_X W = \operatorname{codim}_U W'$, luego podemos suponer que $X = \operatorname{Esp} A$ es afín. Entonces ξ es un ideal primo de A y ambos miembros de la igualdad son su altura. ■

Teorema 3.26 *Si k es un cuerpo y B es una k-álgebra graduada finitamente generada, entonces* $\dim \operatorname{Esp} B = \dim \operatorname{Proy} B + 1$.

Demostración: Los cerrados irreducibles de $\operatorname{Esp} B$ se corresponden biunívocamente con los ideales primos de B, mientras que los cerrados irreducibles de $\operatorname{Proy} B$ se corresponden con los ideales primos homogéneos contenidos en B_+. Es claro entonces que la dimensión de $\operatorname{Esp} B$ es el máximo de las dimensiones de los esquemas $\operatorname{Esp}(B/\mathfrak{p})$, donde $\mathfrak{p}$ recorre los primos minimales de B. Como estos primos minimales son homogéneos, también podemos decir que la dimensión de $\operatorname{Proy} B$ es el máximo de las dimensiones de los esquemas $\operatorname{Proy}(B/\mathfrak{p})$. Por consiguiente, no perdemos generalidad si suponemos que B es un dominio íntegro. Así, tanto $\operatorname{Esp} B$ como $\operatorname{Proy} B$ son conjuntos algebraicos íntegros y sus dimensiones coinciden con las de cualquier abierto no vacío.

Tomemos un elemento homogéneo $f \in B_+$. Entonces el homomorfismo $B_{(f)}[X] \longrightarrow B_f$ dado por $X \mapsto 1/f$ es un isomorfismo. Aplicando [4.63] obtenemos la igualdad:

$$\dim \operatorname{Esp} B = \dim D(f) = \dim \operatorname{Esp} B_f = \dim \operatorname{Esp} B_{(f)}[X] = \dim B_{(f)}[X]$$

$$= \dim B_{(f)} + 1 = \dim \operatorname{Esp} B_{(f)} + 1 = \dim D_+(f) + 1 = \dim \operatorname{Proy} B + 1.$$

(Donde $D_+(f) = D(f) \cap \operatorname{Proy} B$.) ■

El teorema siguiente es una versión abstracta de 1.14 que resulta útil para hacer razonamientos inductivos sobre la dimensión de un conjunto algebraico proyectivo:

Teorema 3.27 *Sea k un cuerpo y B una k-álgebra graduada finitamente generada por elementos de B_1. Sea $f \in B$ un elemento homogéneo de grado no nulo que no pertenezca a ningún primo minimal de B. Entonces*

$$\dim \operatorname{Proy}(B/(f)) = \dim \operatorname{Proy} B - 1.$$

Demostración: En primer lugar observamos que no perdemos generalidad si suponemos que B es reducida. En efecto, B_{red} cumple las mismas hipótesis que B y sus esquemas proyectivos correspondientes tienen la misma dimensión. Si llamamos $f' \in B_{\mathrm{red}}$ a la imagen de f, entonces f' tampoco pertenece a ningún primo minimal. Además es claro que $B_{\mathrm{red}}/(f') \cong (B/(f))_{\mathrm{red}}$.

Supongamos, pues, que B es reducida y consideremos un epimorfismo graduado

$$\phi : k[X_0, \ldots, X_n] \longrightarrow B.$$

Su núcleo I será un ideal radical del anillo de polinomios, luego podemos identificar a B con el álgebra homogénea $A_k[C]$ asociada al conjunto algebraico proyectivo $C = V(I) \subset \mathrm{P}^r$. Así, $\dim \operatorname{Proy} B = \dim C$.

Podemos representar $f = [F]$, para un $F \in k[X_0, \ldots, X_n]$ homogéneo. Componiendo ϕ con el epimorfismo $B \longrightarrow B/(f) \longrightarrow (B/(f))_{\mathrm{red}}$ obtenemos un epimorfismo cuyo núcleo es $\operatorname{rad}(I + (F)) = I(V(I + (F))) = I(V_C(f))$, luego podemos identificar $(B/(f))_{\mathrm{red}}$ con el álgebra homogénea de $V_C(f)$, luego $\dim \operatorname{Proy}(B/(f)) = \dim V_C(f)$.

La hipótesis sobre f significa que no es idénticamente nulo en ninguna componente irreducible de C. Por lo tanto, si W es una componente irreducible de C, tenemos que $V_W(f) \subsetneq W$, por lo que $\dim V_W(f) \leq \dim W - 1$. El teorema 1.14 nos da que, de hecho, tenemos la igualdad: $\dim V_W(f) = \dim W - 1$.

Ahora bien, $\dim C$ es el máximo de las dimensiones $\dim W$, y es claro que $\dim V_C(f)$ es el máximo de las dimensiones $\dim V_W(f)$, luego se da la relación $\dim V_C(f) = \dim C - 1$. ■

3.3 El polinomio de Hilbert

En esta sección fijamos un cuerpo k, llamamos $S = k[X_0, \ldots, X_r]$, y vamos a estudiar los esquemas de la forma $X = \mathrm{Proy}(S/I)$, donde I es un ideal homogéneo de S. Llamaremos $B = S/I$, que es un S-módulo graduado. Aunque todavía no lo hemos probado, ya hemos comentado que los esquemas de esta forma son en realidad todos los subesquemas cerrados de P_k^r, es decir, son todos los conjuntos algebraicos proyectivos. En cualquier caso, lo cierto es que tenemos una inmersión cerrada $X \longrightarrow \mathrm{P}_k^r$ cuya imagen es el cerrado $V(I)$.

Consideremos, más en general, un S-módulo graduado $M = \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{Z}} M_n$ finitamente generado.

Definimos la *función de Hilbert* de M como la función $h_M : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ dada por $h_M(n) = \dim_k M_n$.

Las dimensiones son finitas en virtud del teorema [4.41], que nos da además un polinomio $P_M(T) \in \mathbb{Q}[T]$ con la propiedad de que, para todo número natural n suficientemente grande, se cumple que $P_M(n) = h_M(n)$. A dicho polinomio (que obviamente es único) lo llamaremos *polinomio de Hilbert* del S-módulo M.

El teorema [4.41] nos da una expresión para el grado de $P_M(T)$, pero ahora vamos a obtener otra mucho más simple. Necesitamos algunos resultados previos. Empezamos con la observación siguiente:

Teorema 3.28 *Sea $S = k[X_0, \ldots, X_r]$ y sea*

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$$

una sucesión exacta de S-módulos graduados finitamente generados. Entonces

$$P_M(T) = P_{M'}(T) + P_{M''}(T).$$

Demostración: La sucesión da lugar a sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow M'_n \longrightarrow M_n \longrightarrow M''_n \longrightarrow 0,$$

de las que se deduce inmediatamente que $h_M(n) = h_{M'}(n) + h_{M''}(n)$. Por consiguiente, $P_M(T) = P_{M'}(T) + P_{M''}(T)$. ■

Si M es un S-módulo graduado y $l \in \mathbb{Z}$, definimos $M(l)$ como el mismo módulo M pero con la graduación dada por $M(l)_n = M_{l+n}$.

Teorema 3.29 *Sea $S = k[X_0, \ldots, X_r]$ y sea M un S-módulo graduado finitamente generado. Entonces existe una sucesión de submódulos graduados*

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_t = M$$

tales que $M_i/M_{i-1} \cong (S/\mathfrak{p}_i)(l_i)$, donde $\mathfrak{p}_i$ es un ideal primo homogéneo y $l_i \in \mathbb{Z}$.

Demostración: Consideremos el conjunto de todos los submódulos graduados de M para los que existe tal sucesión. Es no vacío, porque contiene al módulo trivial. Como M es noetheriano existe un $M' \subset M$ maximal en dicho conjunto. Si $M' = M$ el teorema está probado. En caso contrario consideramos $M'' = M/M' \neq 0$.

Para cada $m \in M''$ homogéneo y no nulo, definimos $I_m = \{s \in A \mid sm = 0\}$, que claramente es un ideal homogéneo de S. Como S es noetheriano, existe un $m \in M''$ homogéneo no nulo tal que $\mathfrak{p} = I_m$ no está contenido en ningún otro $I_{m'}$. Vamos a probar que $\mathfrak{p}$ es un ideal primo.

Tomemos a, $b \in S$ tales que $ab \in \mathfrak{p}$ pero $b \notin \mathfrak{p}$. Queremos probar que $a \in \mathfrak{p}$. Como $\mathfrak{p}$ es homogéneo, podemos suponer que a y b son homogéneos. Como $b \notin \mathfrak{p}$, tenemos que $bm \neq 0$. Claramente $\mathfrak{p} = I_m \subset I_{bm}$, luego por la maximalidad ha de ser $\mathfrak{p} = I_{bm}$, pero $ab \in \mathfrak{p}$, luego $abm = 0$, luego $a \in I_{bm} = \mathfrak{p}$.

Sea l el grado de m y sea $N = \langle m \rangle \subset M''$. Claramente $N \cong (S/\mathfrak{p})(-l)$. Sea $N' \subset M$ tal que $N = N'/M'$. Es evidente que N' contradice la maximalidad de M'. ■

Dado un S-módulo graduado M, definimos el *anulador* de M como el ideal

$$\mathfrak{I}(M) = \{s \in S \mid sM = 0\}.$$

Claramente es un ideal homogéneo de S. Por ejemplo, en el caso que realmente nos va a interesar, $M = S/I$, tenemos que $\mathfrak{I}(M) = I$.

Teorema 3.30 *Sea $S = k[X_0, \ldots, X_r]$ y sea M un S-módulo graduado finitamente generado. Entonces el polinomio de Hilbert $P_M(T)$ tiene grado*[1] *igual a la dimensión de $V(\mathfrak{I}(M))$.*

Demostración: Razonaremos por inducción sobre $\dim V(\mathfrak{I}(M))$. En primer lugar demostraremos que si el teorema se cumple para módulos $S/\mathfrak{p}$, donde $\mathfrak{p}$ es un ideal primo homogéneo de S tal que $\dim V(\mathfrak{p}) \leq \dim V(\mathfrak{I}(M))$, entonces se cumple para M.

Admitámoslo probado en este caso. Entonces, el grado del polinomio de Hilbert de cada $(S/\mathfrak{p})(l)$ también es $V(\mathfrak{I}(S/\mathfrak{p})) = V(\mathfrak{p})$, pues este polinomio se diferencia del de $S/\mathfrak{p}$ en un cambio de variable $T \mapsto T + l$.

Observemos ahora que si tenemos una sucesión exacta de S-módulos graduados

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0,$$

[1] Con el convenio de que el polinomio nulo tiene grado -1.

y el teorema se cumple para M' y M'', también se cumple para M.

En efecto, por una parte tenemos que $V(\mathfrak{I}(M)) = V(\mathfrak{I}(M')) \cup V(\mathfrak{I}(M''))$, pues si $\mathfrak{I}(M) \subset \mathfrak{p}$ pero existe un $s \in \mathfrak{I}(M') \setminus \mathfrak{p}$, entonces, para todo $t \in \mathfrak{I}(M'')$ y todo $m \in M$ tenemos que $tm \in M'$, luego $stm = 0$, luego $st \in \mathfrak{I}(M) \subset \mathfrak{p}$, luego $t \in \mathfrak{p}$. Así pues, $\mathfrak{I}(M'') \subset \mathfrak{p}$. La otra inclusión es inmediata. Concluimos que la dimensión de $V(\mathfrak{I}(M))$ es el máximo de las dimensiones de $V(\mathfrak{I}(M'))$ y $V(\mathfrak{I}(M''))$.

Por otra parte, el teorema anterior nos da que $P_M(T) = P_{M'}(T) + P_{M''}(T)$ y el grado de la suma es el máximo de los grados de los sumandos (pues el coeficiente director de un polinomio de Hilbert es siempre mayor que cero, ya que el polinomio toma valores positivos sobre los naturales grandes.)

Ahora es evidente que si M' y M'' cumplen la relación entre grados y dimensiones, también la cumple M.

Tomemos ahora un S-módulo arbitrario M y consideremos la sucesión dada por el teorema anterior:

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_n = M.$$

Las sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow M_{i-1} \longrightarrow M_i \longrightarrow M_i/M_{i-1} \longrightarrow 0$$

implican que $\dim V(\mathfrak{I}(M_{i-1}))$ y $\dim V(\mathfrak{I}(M_i/M_{i-1}))$ son ambas menores o iguales que $\dim V(\mathfrak{I}(M_i))$, luego tenemos que todas las dimensiones

$$\dim V(\mathfrak{I}(M_i)), \qquad \dim V(\mathfrak{I}(M_i/M_{i-1}))$$

son menores o iguales que $\dim V(\mathfrak{I}(M))$, luego, en particular, estamos suponiendo que los módulos M_i/M_{i-1} cumplen el teorema (y también $M_1 = M_1/M_0$).

La sucesión

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_2/M_1 \longrightarrow 0$$

nos da que el teorema se cumple para M_2, y entonces la sucesión

$$0 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_3 \longrightarrow M_3/M_2 \longrightarrow 0$$

nos da que se cumple para M_3, etc. Tras un número finito de pasos llegamos a que M cumple el teorema.

Teniendo esto en cuenta, empezamos el razonamiento inductivo. En primer lugar, consideramos el caso en que $\dim V(\mathfrak{I}(M)) = -1$. Si $M = 0$, es obvio que $P_M = 0$, luego se cumple el teorema. En otro caso, el razonamiento anterior reduce el problema a $M = S/\mathfrak{p}$, donde $V(\mathfrak{p}) = \varnothing$, luego ha de ser $\mathfrak{p} = (X_0, \ldots, X_r)$, y entonces, $M_n = 0$ para $n \geq 1$, luego también $P_M = 0$.

Supongamos el teorema probado para módulos M con $\dim V(\mathfrak{I}(M)) < d$ y consideremos un módulo M tal que $\dim V(\mathfrak{I}(M)) = d$. El razonamiento precedente reduce el problema al caso de módulos $M = S/\mathfrak{p}$ con $\dim V(\mathfrak{p}) \leq d$, y podemos suponer, concretamente, que $\dim V(\mathfrak{p}) = d$, ya que en el caso de la desigualdad tenemos la hipótesis de inducción.

Como $\dim V(\mathfrak{p}) \geq 0$, existe un i tal que $X_i \notin \mathfrak{p}$. Pongamos, por concretar, que $X_r \notin \mathfrak{p}$. Entonces tenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M(-1) \xrightarrow{\cdot x_r} M \longrightarrow M/(x_r) \longrightarrow 0.$$

Si llamamos $M' = M/(x_r)$, el teorema 3.27 nos da que

$$\dim V(\mathfrak{I}(M')) = \dim \operatorname{Proy}(M/(x_r)) = \dim \operatorname{Proy} M - 1 = d - 1,$$

luego podemos aplicarle la hipótesis de inducción, que nos da que

$$P_{M'}(T) = P_M(T) - P_M(T-1)$$

es un polinomio de grado $d-1$. Ahora bien, es claro que si $P(T)$ es un polinomio de grado $d \geq 0$, entonces $P(T) - P(T-1)$ es un polinomio de grado $d-1$. Por consiguiente $P_M(T)$ es un polinomio de grado d. ■

Ahora ya podemos centrarnos el el caso que realmente nos interesa:

Definición 3.31 Sea $S = k[X_0, \ldots, X_r]$ y $X = \operatorname{Proy}(S/I)$ un conjunto algebraico proyectivo. Definimos el *polinomio de Hilbert* de X como el polinomio de Hilbert de $B = S/I$, es decir, como el único polinomio $P_X(T) \in \mathbb{Q}[T]$ que cumple $P_X(n) = \dim_k B_n$ para todo natural n suficientemente grande.

Notemos que $P_X(T)$ no depende únicamente del esquema X, sino de la representación concreta de X en la forma $\operatorname{Proy}(S/I)$. Equivalentemente, $P_X(T)$ es en realidad un concepto asociado al ideal homogéneo I y no al esquema X.

Esto significa que el polinomio de Hilbert depende del modo en que consideramos a X sumergido en P_k^r. Podemos encontrar dos representaciones distintas de un mismo esquema como subesquema cerrado de P_k^r de modo que cada una de ellas tenga un polinomio de Hilbert distinto. Dicho de otro modo: podemos tener esquemas isomorfos $\operatorname{Proy}(S/I) \cong \operatorname{Proy}(S/J)$ con polinomios de Hilbert distintos.

El polinomio de Hilbert de un conjunto algebraico proyectivo contiene, pues, información sobre la forma en que X está sumergido en P_k^r, aunque también contiene información intrínseca. Por ejemplo, sabemos que $X = \operatorname{Proy}(S/I)$ es isomorfo a un subesquema cerrado de P_k^r definido sobre $V(I) = V(\mathfrak{I}(S/I))$, luego el teorema anterior nos da que el grado de $P_X(T)$ es precisamente $\dim X$.

Otro invariante contenido en $P_X(T)$ es $P_X(0)$. No es evidente en absoluto que este número sea realmente un invariante, es decir, que no dependa de la representación de X como subesquema de P_k^r, y no estamos en condiciones de probarlo ahora. Conviene definir el *género aritmético* de X como

$$p_a(X) = (-1)^d (P_X(0) - 1),$$

donde $d = \dim X$. Obviamente, la invarianza de $P_X(0)$ equivale a la del género aritmético.

Ejemplo Si $X = \mathrm{P}_k^r$, entonces $I = 0$ y $B = S$. La función de Hilbert de X cumple que $h_X(n)$ es el número de monomios de grado n en S, luego[2]

$$h_X(n) = \binom{r+n}{r}.$$

Por consiguiente,

$$P_X(T) = \binom{r+T}{r},$$

donde, en general, definimos

$$\binom{T}{r} = \frac{1}{r!}T(T-1)\cdots(T-(r-1)) \in \mathbb{Q}[T].$$

En particular, $p_a(\mathrm{P}_k^r) = (-1)^r(\binom{r}{r} - 1) = 0$. ■

Del mero hecho de que los polinomios de Hilbert toman valores enteros sobre números naturales grandes podemos deducir algo sobre su forma:

Teorema 3.32 *Sea $P(T) \in \mathbb{Q}[T]$ un polinomio que tome valores enteros sobre números naturales suficientemente grandes. Entonces existen números enteros $c_0, \ldots, c_r$ tales que*

$$P(T) = c_0\binom{T}{r} + c_1\binom{T}{r-1} + \cdots + c_r.$$

En particular $P(T)$ toma valores enteros sobre todos los números enteros.

DEMOSTRACIÓN: Observemos que $\binom{T}{r}$ es un polinomio de grado r que toma valores enteros sobre los números enteros, pues para enteros negativos se cumple que

$$\binom{-n}{r} = (-1)^r\binom{n+r-1}{r}.$$

En particular, si r es el grado de $P(T)$, los polinomios $\binom{T}{i}$, para $0 \leq i \leq r$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{Q}$, luego podemos expresar a $P(T)$ como indica el enunciado para ciertos $c_i \in \mathbb{Q}$. Hemos de probar que $c_i \in \mathbb{Z}$. Lo probamos por inducción sobre el grado de P.

Si $P(T)$ es constante es evidente que $P(T) = c_0 = c_0\binom{T}{0}$, donde $c_0 \in \mathbb{Z}$. Supongamos ahora que $P(T)$ tiene grado r y que el teorema es cierto para grados menores.

Para un polinomio arbitrario $F(T) \in \mathbb{Q}[T]$ definimos $\Delta F = F(T+1) - F(T)$. Claramente, Δ es lineal y

$$\Delta\binom{T}{r} = \binom{T}{r-1}$$

[2]Ver la nota al pie de la [página 170].

(Pues la diferencia entre ambos miembros se anula en los números naturales, luego es idénticamente nula.) Por consiguiente,

$$\Delta P = c_0\binom{T}{r-1} + c_1\binom{T}{r-2} + \cdots + c_{r-1}.$$

Por hipótesis de inducción tenemos que $c_0, \ldots, c_{r-1} \in \mathbb{Z}$ (pues obviamente ΔP toma valores enteros en los enteros y los c_i están unívocamente determinados por P). En particular tenemos que $P - c_r$ toma valores enteros en los enteros, luego c_r ha de ser entero. ■

Definición 3.33 Sea $X = \operatorname{Proy}(S/I)$ un conjunto algebraico proyectivo de dimensión r. Entonces su polinomio de Hilbert tiene grado r y, por el teorema anterior, su coeficiente director es de la forma $d/r!$, donde d es un número entero (positivo, pues el polinomio toma valores positivos para naturales suficientemente grandes). A dicho entero d lo llamaremos *grado* de X.

Nuevamente, el grado de un conjunto algebraico proyectivo depende de su representación como subesquema cerrado de un espacio proyectivo (es decir, depende del ideal I), de modo que conjuntos isomorfos pueden tener grados diferentes.

Por ejemplo, antes hemos calculado el polinomio de Hilbert de P_k^r, y de la expresión obtenida se deduce que $\operatorname{grad} \mathrm{P}_k^r = 1$.

Veamos ahora que este concepto de grado generaliza al usual para hipersuperficies:

Teorema 3.34 *Sea $F \in k[X_0, \ldots, X_r]$ un polinomio homogéneo de grado d. Entonces el grado del esquema $X = \operatorname{Proy}(k[X_0, \ldots, X_r]/(F))$ es d.*

Demostración: Llamemos $S = k[X_0, \ldots, X_r]$ y $B = S/(F)$. Entonces tenemos una sucesión exacta de S-módulos graduados

$$0 \longrightarrow S(-d) \xrightarrow{\cdot F} S \longrightarrow B \longrightarrow 0,$$

de la que deducimos la relación

$$P_X(T) = P_Y(T) - P_Y(T-d),$$

donde $Y = \mathrm{P}_k^r$. Por consiguiente,

$$P_X(T) = \binom{T+r}{r} - \binom{T+r-d}{r},$$

cuyo coeficiente director es

$$\frac{1}{r!}\frac{r(r+1)}{2} - \frac{1}{r!}\frac{r(r-d-d+1)}{2} = \frac{d}{(r-1)!}$$

Esto prueba que $\operatorname{grad} X = d$. ■

Nota Acabamos de ver que el polinomio de Hilbert de una hipersuperficie X de grado d es

$$P_X(T) = \binom{T+r}{r} - \binom{T+r-d}{r}.$$

Como consecuencia, su género aritmético es

$$p_a(X) = (-1)^r \binom{r-d}{r} = \binom{d-1}{r}.$$

■

El concepto de grado es uno de los ingredientes necesarios para poder enunciar el teorema de Bezout. El otro es el concepto de intersección:

Definición 3.35 Sea $S = k[X_0, \ldots, X_r]$. Si $X = \operatorname{Proy}(S/I)$, $Y = \operatorname{Proy}(S/J)$ son dos conjuntos algebraicos proyectivos, definimos $X \cap Y = \operatorname{Proy}(S/(I+J))$.

Notemos que $V(I+J) = V(I) \cap V(J)$, luego, si identificamos a X y a Y con dos subesquemas cerrados de P_k^r, entonces $X \cap Y$ se corresponde con una estructura de subesquema cerrado en la intersección.

Teorema 3.36 (Bezout) *Sea $S = k[X_0, \ldots, X_r]$, sea $X = \operatorname{Proy}(S/I)$ un conjunto algebraico proyectivo y sea $Y = \operatorname{Proy}(S/(F))$ una hipersuperficie (donde F es un polinomio homogéneo). Supongamos que Y no contiene ninguna componente irreducible de X. Entonces*

$$\operatorname{grad}(X \cap Y) = (\operatorname{grad} X)(\operatorname{grad} Y).$$

Demostración: Si llamamos f a la imagen de F en $B = S/I$, tenemos que

$$S/(I + (F)) \cong B/(f).$$

Las componentes irreducibles de X son los cerrados $V(\mathfrak{p})$, donde $\mathfrak{p}$ recorre los primos minimales de I. La hipótesis de que Y no contenga a ninguna de ellas equivale a que $V(\mathfrak{p})$ no esté contenido en $V(F)$, o a que $F \notin \mathfrak{p}$, o a que $f \notin \mathfrak{p}/I$, es decir, equivale a que f no pertenezca a ningún primo minimal de B. Por el teorema 3.27 tenemos que $\dim(X \cap Y) = \dim X - 1$

Sea $e = \operatorname{grad} Y = \operatorname{grad} F$. Consideremos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow (S/I)(-e) \xrightarrow{\cdot f} S/I \longrightarrow S/(I+(F)) \longrightarrow 0,$$

de la que deducimos que

$$P_{X\cap Y}(T) = P_X(T) - P_X(T-e).$$

Si X tiene grado g y dimensión d, entonces

$$P_X(T) = \frac{g}{d!}T^d + \cdots,$$

luego

$$P_{X\cap Y}(T) = \frac{g}{d!}T^d + \cdots - \frac{g}{d!}(T-e)^d - \cdots = \frac{ged}{d!} + \cdots = \frac{ge}{(d-1)!} + \cdots$$

Así pues, $\operatorname{grad}(X \cap Y) = ge = (\operatorname{grad} X)(\operatorname{grad} Y)$. ■

Una consecuencia inmediata es que los conjuntos proyectivos lineales (intersecciones de hiperplanos) tienen grado 1.

Veamos ahora que el grado de un conjunto algebraico proyectivo puede expresarse en términos de los grados de sus componentes irreducibles. Para ello necesitamos estudiar más a fondo las sucesiones dadas por el teorema 3.29. Consideremos una sucesión

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_t = M$$

en las condiciones del teorema, es decir, tal que $M_i/M_{i-1} \cong (S/\mathfrak{p}_i)(l_i)$ para ciertos primos $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_t$ de S.

Consideremos un ideal primo $\mathfrak{p}$ de S y supongamos que $\mathcal{I}(M) \subset \mathfrak{p}$. Consideramos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M_{t-1} \longrightarrow M_t \longrightarrow M_t/M_{t-1} \longrightarrow 0.$$

En la prueba del teorema 3.30 hemos visto que

$$V(\mathcal{I}(M_t)) = V(\mathcal{I}(M_{t-1})) \cup V(\mathcal{I}(M_t/M_{t-1})),$$

luego $\mathfrak{p}_t \subset \mathfrak{p}$ o bien $\mathcal{I}(M_{t-1}) \subset \mathfrak{p}$. En el segundo caso repetimos el argumento y, tras un número finito de pasos, llegamos a que $\mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{p}$ para algún i. Igualmente se prueba el recíproco, es decir, $\mathcal{I}(M) \subset \mathfrak{p}$ si y sólo si $\mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{p}$ para algún i.

Si $\mathfrak{p}$ es un primo minimal de $\mathcal{I}(M)$, entonces tenemos que $\mathcal{I}(M) \subset \mathfrak{p}_i \subset \mathfrak{p}$, luego ha de ser $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_i$, es decir, todos los primos minimales de $\mathcal{I}(M)$ aparecen entre los $\mathfrak{p}_i$.

Si $\mathfrak{p}$ es un primo minimal de $\mathcal{I}(M)$, tenemos la sucesión de $S_{\mathfrak{p}}$-módulos

$$0 = (M_0)_{\mathfrak{p}} \subset (M_1)_{\mathfrak{p}} \subset \cdots \subset (M_t)_{\mathfrak{p}} = M_{\mathfrak{p}},$$

donde (prescindiendo de la graduación) $(M_i)_{\mathfrak{p}}/(M_{i-1})_{\mathfrak{p}} \cong (S/\mathfrak{p}_i)_{\mathfrak{p}}$ es 0 si $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_i$ (pues entonces $\mathfrak{p}_i \not\subset \mathfrak{p}$) y es el cuerpo de cocientes de $S/\mathfrak{p}_i$ si $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_i$. Eliminando las repeticiones tenemos una serie de composición de $M_{\mathfrak{p}}$, luego concluimos que cada primo minimal $\mathfrak{p}$ aparece exactamente $l(M_{\mathfrak{p}})$ veces entre los $\mathfrak{p}_i$.

Consideremos ahora un conjunto algebraico proyectivo $X = \operatorname{Proy}(S/I)$, tomemos $M = S/I$ y consideremos una serie para M en las condiciones de 3.29. Aplicando varias veces el teorema 3.28 concluimos que

$$P_X(T) = P_1(T) + \cdots + P_t(T),$$

donde $P_i(T)$ es el polinomio de Hilbert de $(S/\mathfrak{p}_i)(l_i)$, cuyo grado es la dimensión de $V(\mathfrak{p}_i)$. Para calcular el coeficiente director de $P_X(T)$ podemos fijarnos únicamente en los $P_i(T)$ tales que $\mathfrak{p}_i$ es un primo minimal de $\mathcal{I}(M) = I$, pues cualquier otro primo cumplirá que $V(\mathfrak{p}_i)$ tiene dimensión estrictamente menor que la de un primo minimal, luego estrictamente menor que $\dim X$, luego el grado de P_i será estrictamente menor que el de P_X. Más aún, basta considerar los P_i correspondientes a primos minimales de I tales que la dimensión de $V(\mathfrak{p}_i)$ sea la misma que la de X. Entonces,

$$\operatorname{grad} X = \sum_i l(\mathfrak{p}_i) \operatorname{grad} \operatorname{Proy}(S/\mathfrak{p}_i),$$

donde aquí $\mathfrak{p}_i$ recorre (sin repeticiones) los primos minimales de I tales que $\dim V(\mathfrak{p}_i) = \dim X$. Para enunciar esto adecuadamente necesitamos una definición:

Definición 3.37 Sea $S = k[X_0, \ldots, X_r]$ y sea $X = \operatorname{Proy}(S/I)$ un conjunto algebraico proyectivo. Sea Z una componente irreducible de X, que será de la forma $Z = V(\mathfrak{p})$, donde $\mathfrak{p}$ es un primo minimal de I. Definimos la *multiplicidad* de Z en X como la longitud de $(S/I)_{\mathfrak{p}}$ como $S_{\mathfrak{p}}$-módulo. La representaremos por $\mu(Z)$.

Hemos probado que la longitud que define $\mu(Z)$ es finita. Consideramos a Z como conjunto algebraico proyectivo $Z = \operatorname{Proy}(S/\mathfrak{p}_i)$ (es decir, con la única estructura de subesquema cerrado reducido de P_k^r). En estos términos, hemos demostrado el teorema siguiente:

Teorema 3.38 *Sea $S = k[X_0, \ldots, X_r]$, sea $X = \operatorname{Proy}(S/I)$ un conjunto algebraico proyectivo y sean $Z_1, \ldots, Z_t$ las componentes irreducibles de X de dimensión igual a la dimensión de X. Entonces*

$$\operatorname{grad} X = \sum_i \mu(Z_i) \operatorname{grad} Z_i.$$

Si X e Y son dos conjuntos algebraicos proyectivos en las condiciones del teorema de Bezout y Z es una componente irreducible de $X \cap Y$, la multiplicidad $\mu(Z)$ en $X \cap Y$ se llama *índice de intersección* de X e Y en Z. Si lo representamos por $I(Z, X \cap Y)$, la igualdad del teorema de Bezout puede escribirse así:

$$\sum_Z I(X \cap Y, Z) \operatorname{grad} Z = (\operatorname{grad} X)(\operatorname{grad} Y),$$

donde Z recorre las componentes irreducibles de $X \cap Y$ de dimensión máxima. Veamos otro resultado útil para calcular grados:

Teorema 3.39 *Sea $S = k[X_0, \ldots, X_r]$. Si $X = \operatorname{Proy}(S/I)$ e $Y = \operatorname{Proy}(S/J)$ son dos conjuntos algebraicos proyectivos de dimensión d y $\dim(X \cap Y) < d$, entonces $\operatorname{grad}(X \cup Y) = \operatorname{grad} X + \operatorname{grad} Y$, donde $X \cup Y = \operatorname{Proy}(S/I \cap J)$.*

Demostración: Formamos la sucesión exacta de S-módulos graduados

$$0 \longrightarrow S/(I \cap J) \longrightarrow (S/I) \oplus (S/J) \longrightarrow S/(I + J) \longrightarrow 0,$$

(con los homomorfismos $[s] \mapsto ([s],[s])$ y $([s],[s']) \mapsto [s-s']$). De ella deducimos que $P_X + P_Y = P_{X\cap Y} + P_{X\cup Y}$. Como X, Y, $X\cup Y$ tienen dimensión d y $X \cap Y$ tiene dimensión menor que d, el teorema es inmediato. ■

El mismo argumento prueba que si unimos dos conjuntos algebraicos de dimensiones distintas, el grado de la unión es el grado del conjunto de dimensión mayor.

Si $X = \operatorname{Proy}(S/I)$ y $Z_1, \ldots, Z_t$ son sus componentes irreducibles, consideradas como esquemas $Z_i = \operatorname{Proy}(S/\mathfrak{p}_i)$, donde $\mathfrak{p}_i$ es el primo minimal de I que cumple $Z_i = V(\mathfrak{p}_i)$, entonces $\mathfrak{p}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{p}_t = \operatorname{rad} I$, además la intersección de un Z_i con la unión de otros Z_j es un cerrado contenido estrictamente en Z_i, luego tiene dimensión menor. Aplicando un número finito de veces el teorema anterior y la observación subsiguiente, concluimos que $\operatorname{grad} X_{\mathrm{red}}$ es la suma de los grados de las componentes Z_i de dimensión máxima. Si X es reducido, comparando con la fórmula del teorema 3.38 concluimos que $\mu(Z_i) = 1$ siempre que Z_i tiene dimensión máxima. Vemos así que las multiplicidades de las componentes irreducibles de un conjunto algebraico proyectivo X están contenidas en su estructura “no reducida”. Por ello es útil admitir esquemas no reducidos.

Ejemplo Consideremos la curva proyectiva $C = V(F_1, F_2, F_3)$, donde

$$F_1 = X_1^2 - X_0X_2, \quad F_2 = X_2^2 - X_1X_3, \quad F_3 = X_0X_3 - X_1X_2$$

que estudiamos en el capítulo I. Ahora consideramos su esquema asociado $X = \operatorname{Proy}(S/I)$, donde $I = I(C) = (F_1, F_2, F_3)$. Al comprobar que I es un ideal primo hemos obtenido la estructura de $B = S/I$. Hemos visto que es isomorfo al subanillo S_3 de $k[S,T]$ formado por los polinomios de grado múltiplo de 3. El isomorfismo es graduado si consideramos en S_3 la graduación en la que un monomio de grado (usual) $3n$ tiene grado n.

La dimensión de B_n es la dimensión del espacio de los polinomios de grado $3n$ en $k[S,T]$, luego el polinomio de Hilbert de X es

$$P_X(T) = 3T + 1,$$

luego X tiene grado 3 y género $p_a(X) = 0$.

Al final del capítulo I vimos que C puede expresarse como intersección de una hipersuperficie $V(P)$ de grado 3 con otra $V(F_1)$ de grado 2. Ahora bien, esta intersección corresponde al esquema $X' = S/(P, F_1)$, que no es el esquema X, pues por el teorema de Bezout tiene grado 6. Esto se interpreta como que la única componente irreducible de X' (que es X, de grado 3) tiene multiplicidad 2 en X'. En particular, $(P, F_1) \neq I$.

Cabe preguntarse si es posible expresar C como intersección de dos hipersuperficies que generen el ideal I o, dicho de otro modo, si I admite un generador con dos elementos. La respuesta es negativa, y es consecuencia del teorema de Bezout: si fuera $I = (F, G)$, entonces $(\operatorname{grad} F)(\operatorname{grad} G) = \operatorname{grad} X = 3$, luego una de las dos formas, F o G, debería tener grado 1, lo cual es imposible, pues I no contiene formas lineales. ■

3.4 Producto de esquemas

Introducimos ahora un concepto fundamental en la teoría básica de los esquemas: la noción de producto fibrado. Para comprenderla adecuadamente vamos a discutir brevemente su análogo conjuntista, que es una generalización del producto cartesiano:

Dadas dos aplicaciones $f : X \longrightarrow S$, $g : Y \longrightarrow S$, definimos el producto fibrado de X, Y sobre S como

$$X \times_S Y = \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) = g(y)\}.$$

Como casos particulares de esta definición de producto tenemos:

a) Si $S = \{s\}$, entonces $X \times_S Y = X \times Y$.

b) Si g hace corresponder a todos los puntos de Y un mismo $s \in S$, entonces $X \times_S Y = f^{-1}[s]$.

c) Si $X \subset S$, $Y \subset S$ y f, g son las inclusiones, entonces $X \times_S Y = X \cap Y$.

Vemos así que con el concepto de producto fibrado de conjuntos permite expresar numerosos conceptos conjuntistas. En el caso conjuntista no tiene interés expresar intersecciones o antiimágenes en términos de productos fibrados, pero, en el contexto de los esquemas, el producto fibrado es la forma más adecuada de tratar numerosos conceptos.

La construcción del producto fibrado de esquemas es algo técnica. Nos apoyaremos en el siguiente teorema general que nos permite "pegar" esquemas a través de isomorfismos:

Teorema 3.40 *Sea S un esquema y sea $\{X_i\}_i$ una familia de esquemas definidos sobre S. Para cada índice i sea $\{X_{ij}\}_j$ una familia de subesquemas abiertos de X_i de modo que existan isomorfismos $f_{ij} : X_{ij} \longrightarrow X_{ji}$ definidos sobre S. Supongamos que $X_{ii} = X_i$ y que f_{ii} es la identidad en X_i, que $f_{ij}[X_{ij} \cap X_{ik}] = X_{ji} \cap X_{jk}$ y que $f_{ik}|_{X_{ij}\cap X_{ik}} = f_{ij}|_{X_{ij}\cap X_{ik}} \circ f_{jk}|_{X_{ji}\cap X_{jk}}$. Entonces existe un esquema X definido sobre S, único salvo isomorfismo, tal que existen inmersiones abiertas $g_i : X_i \longrightarrow X$ definidas sobre S tales que $g_i|_{X_{ij}} = f_{ij} \circ g_j|_{X_{ji}}$ y de modo que $X = \bigcup\limits_i g_i[X_i]$.*

Demostración: Sea $\overline{X} = \bigcup\limits_i X_i \times \{i\}$ y en el conjunto $\overline{X}$ consideramos la relación de equivalencia dada por $(x, i) \sim (y, j)$ si y sólo si $x \in X_{ij}$ e $y = f_{ij}(x)$. Llamamos X al conjunto cociente. Consideramos a $\overline{X}$ con la topología suma (caracterizada por que cada $X_i \times \{i\}$ es abierto en $\overline{X}$ y la biyección natural $X_i \longrightarrow X_i \times \{i\}$ es un isomorfismo) y a X con la topología cociente (caracterizada por que $U \subset X$ es abierto si y sólo si $p^{-1}[U]$ es abierto en $\overline{X}$, donde $p : \overline{X} \longrightarrow X$ es la proyección natural). Tenemos entonces aplicaciones $g_i : X_i \longrightarrow X$ que son inmersiones abiertas (es decir, $U_i = g_i[X_i]$ es abierto en X y g_i es un homeomorfismo en su imagen) y $g_i|_{X_{ij}} = f_{ij} \circ g_j|_{X_{ji}}$. Además X es la unión de los U_i.

Ahora definimos $\mathcal{O}_{U_i} = g_{i*}(\mathcal{O}_{X_i})$. Si $U \subset U_i \cap U_j$ es un abierto, entonces $\mathcal{O}_{U_i}(U) = \mathcal{O}_{X_i}(g_i^{-1}[U])$, mientras que $\mathcal{O}_{U_j}(U) = \mathcal{O}_{X_j}(g_j^{-1}[U])$, de manera que $f_{ij,g_j^{-1}[U]} : \mathcal{O}_{U_j}(U) \longrightarrow \mathcal{O}_{U_i}(U)$ es un isomorfismo. Es fácil ver entonces que los isomorfismos f_{ij} inducen isomorfismos

$$\bar{f}_{ij} : (U_i \cap U_j, \mathcal{O}_{U_i}|_{U_i \cap U_j}) \longrightarrow (U_i \cap U_j, \mathcal{O}_{U_j}|_{U_i \cap U_j})$$

definidos sobre S cuyas aplicaciones continuas subyacentes son identidades. Las propiedades del enunciado se cumplen ahora con los $\bar{f}_{ij}$ en lugar de los f_{ij}, los U_i en lugar de los X_i y $(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_{U_i}|_{U_i \cap U_j})$ en lugar de X_{ij}. No es difícil cambiar los haces $\mathcal{O}_{U_i}$ por otros isomorfos de modo que los isomorfismos $\bar{f}_{ij}$ se conviertan en identidades. Por ejemplo, para cada $U \subset U_i$ podemos cambiar $\mathcal{O}_{U_i}(U)$ por el subanillo del producto de todos los anillos (isomorfos) $\mathcal{O}_{U_j}(U)$ tales que $U \subset U_j$ formado por los elementos (x_j) tales que $x_j = \bar{f}_{jk,U}(x_k)$ para todo j, k.

Entonces podemos definir un único haz $\mathcal{O}$ en X tal que $\mathcal{O}|_{U_i} = \mathcal{O}_{U_i}$. Es obvio que con él X se convierte en un esquema. Los homomorfismos $\pi_i : U_i \longrightarrow S$ que determinan la estructura de esquema sobre S en cada U_i se extienden a una aplicación continua $\pi : X \longrightarrow S$. Ésta se convierte en un homomorfismo de esquemas de forma natural: para cada abierto G en S y cada $s \in \mathcal{O}_S(G)$, los elementos $\pi_{i,G}^{\#}(s) \in \mathcal{O}_X(\pi^{-1}[G] \cap U_i)$ determinan un único $\pi_G^{\#}(s) \in \mathcal{O}_X(\pi^{-1}[G])$ y así tenemos una aplicación $\pi_G^{\#} : \mathcal{O}_S(G) \longrightarrow \mathcal{O}_X(\pi^{-1}[G])$ que claramente es un homomorfismo de anillos. De este modo π se convierte en un homomorfismo de esquemas tal que $\pi|_{U_i} = \pi_i$. Esto equivale a que X adquiere una estructura de esquema definido sobre S respecto a la cual cada U_i es un subesquema. Los homomorfismos g_i son ahora inmersiones abiertas de esquemas. La unicidad se comprueba sin dificultad. ■

Veamos ya la definición del producto de esquemas:

Teorema 3.41 *Sean X e Y dos esquemas definidos sobre un esquema S. Entonces existe un único esquema $X \times_S Y$ y dos homomorfismos de esquemas $p : X \times_S Y \longrightarrow X$ y $q : X \times_S Y \longrightarrow Y$ (definidos sobre S) con la propiedad de que si Z es un esquema definido sobre S y $f : Z \longrightarrow X$, $g : Z \longrightarrow Y$ son homomorfismos de esquemas definidos sobre S, entonces existe un único homomorfismo $(f, g) : Z \longrightarrow X \times_S Y$ de esquemas definidos sobre S que hace conmutativo el diagrama siguiente:*

$$\begin{tikzcd}
& X \\
Z \arrow[ru, "f"] \arrow[r, "{(f,g)}"] \arrow[rd, "g"'] & X \times_S Y \arrow[u, "p"'] \arrow[d, "q"] \\
& Y
\end{tikzcd}$$

La terna $(X\times_S Y, p, q)$ es única en el sentido de que si $(X\times'_S Y, p', q')$ cumple también el teorema entonces existe un isomorfismo $\phi : X \times_S Y \longrightarrow X \times'_S Y$ de esquemas definidos sobre S que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & X & \\
X \times_S Y \arrow[ur, "p"] \arrow[rr, "\phi"] \arrow[dr, "q"'] & & X \times'_S Y \arrow[ul, "p'"'] \arrow[dl, "q'"] \\
 & Y &
\end{tikzcd}$$

DEMOSTRACIÓN: La unicidad se prueba tomando $\phi = (p, q)'$ y $\psi = (p', q')$, de modo que $\phi \circ \psi$ hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & X \\
X \times_S Y \arrow[ur, "p"] \arrow[r, "\phi\circ\psi"] \arrow[dr, "q"'] & X \times_S Y \arrow[u, "p"'] \arrow[d, "q"] \\
 & Y
\end{tikzcd}$$

La unicidad de la propiedad del teorema implica que $\phi \circ \psi = 1$, e igualmente $\psi \circ \phi = 1$. Por consiguiente ϕ es un isomorfismo.

Observemos ahora que si existe $(X \times_S Y, p, q)$ y U es un abierto en X, entonces también existe $U \times_S Y = p^{-1}[U]$ (tomando como proyecciones las restricciones de p y q). En efecto, si tenemos $f : Z \longrightarrow U$ y $g : Z \longrightarrow Y$, componiendo f con la inclusión $U \longrightarrow X$ obtenemos $\bar{f} : Z \longrightarrow X$ que nos permite construir $(\bar{f}, g) : Z \longrightarrow X \times_S Y$ tal que $(\bar{f}, g) \circ p = \bar{f}$. Entonces $p[(\bar{f}, g)[Z]] = \bar{f}[Z] = f[Z] \subset U$, luego $(\bar{f}, g)[Z] \subset p^{-1}[U] = U \times_S Y$. Existe entonces un único homomorfismo $(f, g) : Z \longrightarrow U \times_S Y$ que compuesto con la inclusión es $(\bar{f}, g)$. Es inmediato que hace conmutativo el diagrama correspondiente y, cualquier otro con esta propiedad, al componerlo con la inclusión en $X \times_S Y$ hace conmutativo el diagrama correspondiente de $X \times_S Y$, luego sería $(\bar{f}, g)$, y de aquí se sigue la unicidad de (f, g).

Otra observación es que si existe $(X \times_S Y, p, q)$ entonces $(X \times_S Y, q, p)$ sirve como producto $Y \times_S X$.

Consideremos en primer lugar el caso en que todos los esquemas son afines: $S = \operatorname{Esp} A$, $X = \operatorname{Esp} B$, $Y = \operatorname{Esp} C$. Entonces B y C son álgebras sobre A y podemos definir $X \times_S Y = \operatorname{Esp}(B \otimes_A C)$, con las proyecciones inducidas por los homomorfismos naturales $B \longrightarrow B \otimes_A C$, $C \longrightarrow B \otimes_A C$. Así, si tenemos homomorfismos $f : Z \longrightarrow X$ y $g : Z \longrightarrow Y$, éstos estarán inducidos por homomorfismos de A-álgebras $\bar{f} : B \longrightarrow \mathcal{O}_Z(Z)$, $\bar{g} : C \longrightarrow \mathcal{O}_Z(Z)$. Éstos definen a su vez un homomorfismo $(\bar{f}, \bar{g}) : B \otimes_A C \longrightarrow \mathcal{O}_Z(Z)$ que induce un homomorfismo de esquemas $(f, g) : Z \longrightarrow X \times_S Y$. Es claro que cumple todo lo pedido.

Supongamos ahora que S e Y son afines, mientras que X es arbitrario. Sea $\{X_i\}_i$ un cubrimiento de X por abiertos afines. Por la parte ya probada existen los productos $(X_i \times_S Y, p_i, q_i)$. También hemos visto que $U_{ij} = p_i^{-1}[X_i \cap X_j]$ sirve como $(X_i \cap X_j) \times_S Y$, luego existe un único isomorfismo

$$f_{ij} : p_i^{-1}[X_i \cap X_j] \longrightarrow p_j^{-1}[X_i \cap X_j]$$

que cumple la condición de unicidad del enunciado. Para aplicar el teorema anterior observamos en primer lugar que

$$f_{ij}[p_i^{-1}[X_i \cap X_j \cap X_k]] = p_j^{-1}[X_j \cap X_i] \cap p_j^{-1}[X_j \cap X_k].$$

En efecto, si tomamos $P \in p_i^{-1}[X_i \cap X_j \cap X_k]$, entonces se cumple que $p_j(f_{ij}(P)) = p_i(P) \in X_i \cap X_j \cap X_k$, luego $f_{ij}(P) \in p_j^{-1}[X_j \cap X_i] \cap p_j^{-1}[X_j \cap X_k]$. Recíprocamente, si $P \in p_i^{-1}[X_i \cap X_j]$ cumple que

$$f_{ij}(P) \in p_j^{-1}[X_j \cap X_i] \cap p_j^{-1}[X_j \cap X_k],$$

entonces $p_i(P) = p_j(f_{ij}(P)) \in X_i \cap X_j \cap X_k$, luego $P \in p_i^{-1}[X_i \cap X_j \cap X_k]$.

De aquí se sigue que $f_{ij}[U_{ij} \cap U_{ik}] = U_{ji} \cap U_{jk}$. Ahora hemos de ver que $f_{ik}|_{U_{ij} \cap U_{ik}} = f_{ij}|_{U_{ij} \cap U_{ik}} \circ f_{jk}|_{U_{ji} \cap U_{jk}}$. Ello es consecuencia inmediata de que $U_{ij} \cap U_{ik} = p_i^{-1}[X_i \cap X_j \cap X_k]$ sirve como $(X_i \cap X_j \cap X_k) \times_S Y$ y los dos isomorfismos conmutan con las proyecciones, luego han de ser el mismo.

El teorema anterior nos da un esquema W definido sobre S de modo que cada $X_i \times_S Y$ puede verse como un subesquema abierto de W. El hecho de que los isomorfismos f_{ij} conmutan con las proyecciones p_i y q_i hace que éstas se extienden a proyecciones p y q en X e Y respectivamente. Se comprueba sin dificultad que W sirve como $X \times_S Y$.

Ahora suprimimos la hipótesis de que Y sea afín. Cubrimos Y por una familia de abiertos afines $\{Y_i\}_i$. Por la parte ya probada existen los productos $(X \times_S Y_i, p_i, q_i)$. El mismo razonamiento anterior nos da un producto $X \times_S Y$.

Por último eliminamos la hipótesis de que S sea afín. Sea $\{S_i\}_i$ un cubrimiento de S por abiertos afines. Sean $\pi_1 : X \longrightarrow S$ y $\pi_2 : Y \longrightarrow S$ los homomorfismos estructurales. Sean $X_i = \pi_1^{-1}[S_i]$, $Y_i = \pi_2^{-1}[S_i]$. Así X_i e Y_i son esquemas sobre S_i, por lo que existe $X_i \times_{S_i} Y_i$. Es inmediato que X_i e Y_i también son esquemas sobre S de forma natural y que el producto anterior sirve también como $X_i \times_S Y_i$.

Aplicaremos de nuevo el teorema anterior con

$$U_{ij} = p_i^{-1}[X_i \cap X_j] \cap q_i^{-1}[Y_i \cap Y_j],$$

que satisface las condiciones de $(X_i \cap X_j) \times_S (Y_i \cap Y_j)$. Una leve modificación del argumento anterior (para trabajar con las dos coordenadas al mismo tiempo) nos permite construir un esquema definido sobre S que satisface las condiciones del teorema. ■

Definición 3.42 Sean X e Y dos esquemas definidos sobre un esquema S. Definimos el *producto fibrado* de X e Y sobre S como cualquier terna $(X \times_S Y, p, q)$ que cumpla las condiciones del teorema anterior. En la práctica escribiremos simplemente $X \times_S Y$, y si $S = \operatorname{Esp} A$ escribiremos también $X \times_A Y$.

Observemos que si

$$X = \operatorname{Esp} k[X_1, \ldots, X_n]/I, \qquad Y = \operatorname{Esp} k[Y_1, \ldots, Y_m]/J$$

son dos conjuntos algebraicos afines, entonces la construcción del producto fibrado muestra que $X \times_k Y = \operatorname{Esp}((k[X_1, \ldots, X_n]/I) \otimes_k (k[Y_1, \ldots, Y_m]/J))$. Es fácil ver que

$$(k[X_1, \ldots, X_n]/I) \otimes_k (k[Y_1, \ldots, Y_m]/J) \cong k[X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_m]/(I \cup J),$$

de modo que el producto de dos conjuntos algebraicos afines es el conjunto algebraico afín definido por las ecuaciones de ambos. En particular tenemos que $A_k^n \times_k A_k^m = A_k^{n+m}$.

Ejercicio: Probar que $\mathrm{P}^1_{\mathbb{C}} \times_{\mathbb{C}} \mathrm{P}^1_{\mathbb{C}} \not\cong \mathrm{P}^2_{\mathbb{C}}$. (AYUDA: En el producto hay curvas que no se cortan, y en el plano proyectivo no las hay.)

El teorema siguiente se demuestra sin dificultad a partir de la definición de producto fibrado:

Teorema 3.43 *Sea S un esquema y sean X, Y, Z esquemas definidos sobre S. Entonces:*

a) Existen isomorfismos canónicos

$$X \times_S S \cong X, \quad X \times_S Y \cong Y \times_S X, \quad (X \times_S Y) \times_S Z \cong X \times_S (Y \times_S Z).$$

b) Si Z es un esquema definido sobre Y y su estructura sobre S es la dada por $Z \longrightarrow Y \longrightarrow S$, entonces $(X \times_S Y) \times_Y Z \cong X \times_S Z$, donde $X \times_S Y$ es un esquema definido sobre Y a través de la segunda proyección.

c) Si $f : X \longrightarrow X'$, $g : Y \longrightarrow Y'$ son homomorfismos de esquemas definidos sobre S, entonces existe un único homomorfismo de esquemas (definido sobre S) $f \times g : X \times_S Y \longrightarrow X' \times_S Y'$ que hace conmutativo el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] & X' \\
X \times_S Y \arrow[u, "p"] \arrow[r, "f \times g"] \arrow[d, "q"'] & X' \times_S Y' \arrow[u, "p'"'] \arrow[d, "q'"] \\
Y \arrow[r, "g"'] & Y'
\end{tikzcd}$$

d) Si $i : U \longrightarrow X$, $j : V \longrightarrow Y$ son subesquemas abiertos, entonces el homomorfismo $i \times j$ induce un isomorfismo

$$U \times_S V \cong p^{-1}[U] \cap q^{-1}[V] \subset X \times_S Y.$$

Representamos por $\mathrm{Hom}_S(X, Y)$ el conjunto de los homomorfismos de esquemas de X en Y definidos sobre S. Si Z es otro esquema definido sobre S, las proyecciones inducen por composición aplicaciones

$$\mathrm{Hom}_S(Z, X \times_S Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_S(Z, X), \qquad \mathrm{Hom}_S(Z, X \times_S Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_S(Z, Y).$$

Con ellas podemos formar una aplicación

$$\mathrm{Hom}_S(Z, X \times_S Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_S(Z, X) \times \mathrm{Hom}_S(Z, Y), \tag{3.1}$$

que es biyectiva por la definición de producto fibrado.

Terminamos la sección con una aplicación importante del producto fibrado. Observemos que si Y es cualquier esquema y $P \in Y$, entonces el homomorfismo $\mathrm{Esp}\, k(P) \longrightarrow Y$ dado por 3.6 nos permite considerar a $\mathrm{Esp}\, k(P)$ como un esquema definido sobre Y.

Definición 3.44 Sea $f : X \longrightarrow Y$ un homomorfismo de esquemas. Para cada punto $P \in Y$ definimos la *fibra* de f en P como $X_P = X \times_Y \mathrm{Esp}\, k(P)$, donde consideramos a X como esquema sobre Y a través de f. Consideramos a X_P como esquema sobre $k(P)$.

Conviene observar quién es explícitamente la fibra en el caso de un homomorfismo entre esquemas afines $f : \mathrm{Esp}\, B \longrightarrow \mathrm{Esp}\, A$, determinado por un homomorfismo de anillos $\phi : A \longrightarrow B$ con el que B adquiere estructura de A-módulo. Un punto $P \in Y$ se corresponde con un ideal $\mathfrak{p} \in \mathrm{Esp}\, A$. Entonces, $k(P) = A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ y el homomorfismo $\mathrm{Esp}\, k(P) \longrightarrow Y$ se corresponde con el homomorfismo $A \longrightarrow A_\mathfrak{p} \longrightarrow A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$. Según la construcción del producto fibrado,

$$X_P = \mathrm{Esp}(B \otimes_A (A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p})).$$

La sucesión exacta $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p} \longrightarrow A_\mathfrak{p} \longrightarrow A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p} \longrightarrow 0$ da lugar a la sucesión exacta

$$B \otimes_A \mathfrak{p}A_\mathfrak{p} \longrightarrow B \otimes_A A_\mathfrak{p} \longrightarrow B \otimes_A (A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}) \longrightarrow 0.$$

Llamemos $B_\mathfrak{p}$ a la localización de B respecto al conjunto $S_\mathfrak{p} = \phi[A \setminus \mathfrak{p}]$. Se comprueba inmediatamente que $B_\mathfrak{p} \cong B \otimes_A A_\mathfrak{p}$, y la sucesión exacta anterior nos da que

$$B \otimes_A (A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}) \cong B_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}B_\mathfrak{p}.$$

En definitiva, $X_P \cong \mathrm{Esp}(B_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}B_\mathfrak{p})$.

Teorema 3.45 *Si $f : X \longrightarrow Y$ es un homomorfismo de esquemas y $P \in Y$, entonces la proyección $X_P \longrightarrow X$ induce un homeomorfismo $X_P \cong f^{-1}[P]$.*

Demostración: Sea V un entorno afín de P en Y. Entonces, por la propiedad b) del teorema 3.43 tenemos que

$$X_P = X \times_Y \operatorname{Esp} k(P) \cong (X \times_Y V) \times_V \operatorname{Esp} k(P).$$

A través del isomorfismo, la primera proyección en X_P se corresponde con la composición de la primera proyección en $X \times_Y V$ con la primera proyección en X. Por otra parte, la primera proyección induce un isomorfismo

$$X \times_Y V \cong f^{-1}[V]$$

(como esquemas sobre V). En efecto, si llamamos $\pi : X \times_Y V \longrightarrow Y$ al homomorfismo estructural del producto, tenemos que $p \circ f = \pi = q \circ i$, luego $p[X \times_Y V] \subset f^{-1}[V]$. Esto nos da el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
& f^{-1}[V] \\
f^{-1}[V] \arrow[ur, "i"] \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "f"'] & X \times_Y V \arrow[u, "p"'] \arrow[d, "q"] \\
& V
\end{tikzcd}$$

En particular, $h \circ p = i$. Para probar que $p \circ h = i$ basta observar que ambos miembros hacen conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& X \\
X \times_Y V \arrow[ur, "p"] \arrow[r, "p\circ h", "i"'] \arrow[dr, "q"'] & X \times_Y V \arrow[u, "p"'] \arrow[d, "q"] \\
& V
\end{tikzcd}$$

Concluimos entonces que $X_P \cong f^{-1}[V] \times_V \operatorname{Esp} k(P) = f^{-1}[V]_P$, y que la primera proyección en X_P se corresponde a través del isomorfismo con la primera proyección en $f^{-1}[V]_P$. Equivalentemente, podemos suponer que $Y = \operatorname{Esp} A$ es afín.

Si U es un abierto afín en X y $p : X_P \longrightarrow X$ es la primera proyección, sabemos que $p^{-1}[U] \cong U \times_Y k(P) \cong U_P$. Si demostramos que la restricción $p|_{p^{-1}[U]} : p^{-1}[U] \longrightarrow f|_{p^{-1}[U]}^{-1}[P]$ es un homeomorfismo para todo U, podremos concluir que p también lo es. En definitiva, también podemos suponer que $X = \operatorname{Esp} B$ es afín.

El homomorfismo $f : X \longrightarrow Y$ se corresponde con un homomorfismo de anillos $\phi : A \longrightarrow B$, con lo que estamos en la situación descrita tras la definición de fibra. Concretamente, $X_P = \operatorname{Esp}(B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}})$. Más detalladamente, la proyección

$X \times_Y \operatorname{Esp} k(P) \longrightarrow X$ se corresponde con el homomorfismo $B \longrightarrow B \otimes_A A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$, que a su vez se corresponde con el homomorfismo natural $B \longrightarrow B_{\mathfrak{p}} \longrightarrow B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}$

Según el teorema [3.39] tenemos que el homomorfismo $B \longrightarrow B_{\mathfrak{p}}$ induce un homeomorfismo entre $\operatorname{Esp} B_{\mathfrak{p}}$ y el espacio $\Sigma = \{\mathfrak{P} \in B \mid \phi^{-1}[\mathfrak{P}] \subset \mathfrak{p}\}$, mientras que $B_{\mathfrak{p}} \longrightarrow B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}$ induce un homeomorfismo entre $\operatorname{Esp}(B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}})$ y el cerrado $V(\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}) \subset \operatorname{Esp} B_{\mathfrak{p}}$ que, a través del homeomorfismo anterior, se corresponde con

$$\{\mathfrak{P} \in B \mid \phi^{-1}[\mathfrak{P}] = \mathfrak{p}\} = f^{-1}[P].$$

Así pues, la proyección induce un homeomorfismo entre X_P y $f^{-1}[P]$. ■

El homeomorfismo dado por el teorema anterior permite considerar a las fibras $f^{-1}[P]$ como esquemas sobre $k(P)$ isomorfos a X_P. A través del isomorfismo, la inclusión $f^{-1}[P] \longrightarrow X$ se corresponde con la proyección $p : X_P \longrightarrow X$. Para cada $Q \in X_P$, vamos a describir el homomorfismo $p_Q^\# : \mathcal{O}_{X,p(Q)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X_P,Q}$.

No perdemos generalidad si suponemos que $X = \operatorname{Esp} B$, $Y = \operatorname{Esp} A$, con lo que f se corresponde con un homomorfismo $\phi : A \longrightarrow B$. Entonces P se corresponde con un ideal $\mathfrak{p} \in \operatorname{Esp} A$ y Q se corresponde con un cierto ideal $\mathfrak{Q} \in \operatorname{Esp}(B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}})$. Así mismo, $p(Q)$ se corresponde con un ideal $\mathfrak{q} \in \operatorname{Esp} B$, concretamente con la antiimagen de $\mathfrak{Q}$ por el homomorfismo

$$B \longrightarrow B_{\mathfrak{p}} \longrightarrow B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}.$$

Por otra parte, $f(\mathfrak{q}) = f(p(\mathfrak{Q})) = \mathfrak{p}$, luego $\mathfrak{p} = \phi^{-1}[\mathfrak{q}]$ y $\mathfrak{Q} = \mathfrak{q}B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}}$.

El homomorfismo $p_Q^\#$ es la composición de los homomorfismos

$$B_{\mathfrak{q}} \longrightarrow (B_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{q}B_{\mathfrak{p}}} \longrightarrow (B_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{Q}} \cong (B_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{q}B_{\mathfrak{p}}}/(\mathfrak{p}B_{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{q}B_{\mathfrak{p}}}.$$

Como $\phi[A \setminus \mathfrak{p}] \subset B \setminus \mathfrak{q}$, el primer homomorfismo es un isomorfismo, y la composición se corresponde con

$$B_{\mathfrak{q}} \longrightarrow B_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{p}B_{\mathfrak{q}}.$$

Así pues, $p_Q^\#$ es un epimorfismo y su núcleo es $\mathfrak{p}B_{\mathfrak{q}}$, que es la imagen de $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ por el homomorfismo natural $A_{\mathfrak{p}} \longrightarrow B_{\mathfrak{q}}$.

Con esto hemos demostrado el teorema siguiente:

Teorema 3.46 *Si $f : X \longrightarrow Y$ es un homomorfismo de esquemas, $P \in Y$ y $Q \in X_P$, y $p : X_P \longrightarrow X$ es la proyección, entonces tenemos una sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow \mathfrak{m}_P \mathcal{O}_{X,p(Q)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,p(Q)} \xrightarrow{p_Q^\#} \mathcal{O}_{X_P,Q} \longrightarrow 0.$$

En particular, si P es cerrado entonces p es una inmersión cerrada.

Ejemplo Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado y consideremos el conjunto algebraico $V = \operatorname{Esp} A$, donde $A = k[X,Y,T]/(TY - X^2)$. (Notemos que el polinomio $TY - X^2$ es irreducible por el criterio de Eisenstein, luego V es irreducible.) En términos clásicos, X se corresponde con el subconjunto de A^3 definido por la ecuación $TY - X^2 = 0$.

Consideremos el homomorfismo $p : X \longrightarrow A^1_k$ inducido por el homomorfismo $k[T] \longrightarrow A$. En términos clásicos es la proyección en la componente T. Cada punto $a \in k$ se corresponde con el ideal $(T - a) \in \operatorname{Esp} k[T] = A^1_k$, y su fibra es

$$V_a = \operatorname{Esp}(A \otimes_{k[T]} (k[T]/(T-a))).$$

Desde el punto de vista clásico, la fibra V_a es el conjunto algebraico afín en A^2 definido por la ecuación $aY - X^2 = 0$, que es una parábola salvo en el caso $a = 0$, en el que se reduce a la recta $X = 0$. Desde el punto de vista de los esquemas hay un matiz que no se ve reflejado en el caso clásico. Es fácil ver que

$$(k[X,Y,T]/(TY - X^2)) \otimes_{k[T]} (k[T]/(T-a)) = k[X,Y]/(aY - X^2),$$

por lo que las fibras V_a las son esquemas asociados a las fibras en el sentido clásico excepto para $a = 0$, en el que la fibra es el esquema no reducido $k[X,Y]/(X^2)$ que —aunque no hemos definido la noción de multiplicidad más que en el contexto de los esquemas proyectivos— está reflejando el hecho de que su única componente irreducible, la recta $X = 0$, debe ser contada dos veces. ■

El teorema siguiente nos permite reducir algunos problemas al caso de esquemas definidos sobre anillos locales:

Teorema 3.47 *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un homomorfismo de esquemas y $P \in Y$. Consideremos $Y' = \operatorname{Esp} \mathcal{O}_{Y,P}$, $P' = \mathfrak{m}_P \in Y'$, $X' = X \otimes_Y Y'$ y la proyección natural $f' : X' \longrightarrow Y'$. Entonces tenemos un diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} X'_{P'} \arrow[r] \arrow[d] & X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d] & Y' \arrow[d] \\ X_P \arrow[r] & X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

en el que la flecha vertical izquierda es un isomorfismo. Además, si $Q' \in X'_{P'}$ se corresponde con $Q \in X_P$ a través de dicho isomorfismo, $\mathcal{O}_{X,Q} \cong \mathcal{O}_{X',Q'}$.

Demostración: Tenemos que

$$X'_{P'} = X \times_Y Y' \times_{Y'} \operatorname{Esp} k(P') \cong X \times_Y \operatorname{Esp} k(P) = X_P,$$

y es fácil ver que el isomorfismo natural hace conmutativo el diagrama del enunciado. Esto significa que si Q y Q' se corresponden a través del isomorfismo, entonces, como puntos de X y X', se corresponden a través de la proyección.

Para calcular $\mathcal{O}_{X,Q}$ y $\mathcal{O}_{X',Q'}$ podemos sustituir Y por un entorno afín de P y X por un entorno afín de Q contenido en la antiimagen del anterior, con lo que podemos suponer que $X = \operatorname{Esp} B$, $Y = \operatorname{Esp} A$, y así $X' = \operatorname{Esp}(B \otimes_A A_P)$. Si Q es un ideal en B cuya antiimagen en A es P, entonces $Q' = Q_P$, y es claro que $\mathcal{O}_{X',Q'} = (B_P)_{Q_P} \cong B_Q = \mathcal{O}_{X,Q}$. ■

3.5 Cambio de base

Si X/k es un conjunto algebraico y K/k es una extensión de cuerpos, entonces podemos considerar a X definido sobre K. Esto está claro en términos clásicos. Ahora vamos a ver cómo debe ser entendido en términos de esquemas.

Definición 3.48 Sea X un esquema definido sobre un esquema S y sea S' otro esquema definido sobre S. Entonces definimos $X_{S'} = X \times_S S'$, que es un esquema definido sobre S' a través de la segunda proyección. Diremos que $X_{S'}$ se obtiene de S mediante un *cambio de base.* Si $f : X \longrightarrow Y$ es un homomorfismo de esquemas definidos sobre S, definimos $f_{S'} = f \times 1 : X_{S'} \longrightarrow Y_{S'}$. El homomorfismo $f_{S'}$ está definido sobre S' y hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} X_{S'} \arrow[r, "f_{S'}"] \arrow[d] & Y_{S'} \arrow[d] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

Cuando $S' = \operatorname{Esp} B$ es un esquema afín, escribiremos también X_B y f_B en lugar de $X_{S'}$ y $f_{S'}$.

La propiedad b) del teorema 3.43 se enuncia de forma más natural en términos de cambios de base: lo que afirma es que si tenemos homomorfismos $X \longrightarrow S$ y $Z \longrightarrow Y \longrightarrow S$ entonces $(X_Y)_Z \cong X_Z$.

Observemos que si $X = \operatorname{Esp}(A[X_1, \ldots, X_n]/(F_1, \ldots, F_m))$ y B es una A-álgebra, entonces

$$X_B \cong \operatorname{Esp}((A[X_1, \ldots, X_n]/(F_1, \ldots, F_m)) \otimes_A B)$$

$$\cong \operatorname{Esp}(B[X_1, \ldots, X_n]/(F_1, \ldots, F_m)).$$

En particular, si X/k es un conjunto algebraico afín y K/k es una extensión de cuerpos, entonces X_K es el conjunto algebraico afín que se corresponde con el mismo conjunto algebraico afín que X en el sentido clásico, pero considerado sobre K.

Más en general, observemos que si X/k es un conjunto algebraico y K/k es una extensión de cuerpos, entonces X_K también es un conjunto algebraico. En efecto, si X está cubierto por un número finito de conjuntos algebraicos afines

U_i, entonces X_K está cubierto por los abiertos $p^{-1}[U_i] \cong U_i \otimes_k \operatorname{Esp} K = (U_i)_K$, que son también conjuntos algebraicos afines.

Para el caso proyectivo observamos lo siguiente: si A es un anillo graduado y B es una A_0-álgebra, entonces

$$A \otimes_{A_0} B = \bigoplus_{d \geq 0} (A_d \otimes_{A_0} B),$$

y esta descomposición determina de forma natural una estructura de anillo graduado en el producto.

Teorema 3.49 *En las condiciones anteriores,*

$$\operatorname{Proy}(A \otimes_{A_0} B) \cong \operatorname{Proy} A \times_{A_0} \operatorname{Esp} B.$$

Demostración: Sea $\phi : A \longrightarrow A \otimes_{A_0} B$ el homomorfismo natural. Observemos que $\phi[A_+]B = (A \otimes_{A_0} B)_+$, luego el resultado visto al final de la sección 2.3 nos da un homomorfismo de esquemas $g : \operatorname{Proy}(A \otimes_{A_0} B) \longrightarrow \operatorname{Proy} A$. Por otra parte, sabemos que $\operatorname{Proy}(A \otimes_{A_0} B)$ es un esquema definido sobre B, a través de un homomorfismo $\operatorname{Proy}(A \otimes_{A_0} B) \longrightarrow \operatorname{Esp} B$. Ambos homomorfismos están definidos sobre A_0. Con ellos podemos formar un homomorfismo

$$h : \operatorname{Proy}(A \otimes_{A_0} B) \longrightarrow \operatorname{Proy} A \times_{A_0} \operatorname{Esp} B.$$

Si $f \in A$ es homogéneo de grado no nulo, entonces

$$h^{-1}[D(f) \times_{A_0} \operatorname{Esp} B] = g^{-1}[D(f)] = D(\phi(f)),$$

luego basta demostrar que la restricción $D(\phi(f)) \longrightarrow D(f) \times_{A_0} \operatorname{Esp} B$ es un isomorfismo de esquemas. Este homomorfismo se corresponde con

$$\operatorname{Esp}((A \otimes_{A_0} B)_{(\phi(f))}) \longrightarrow \operatorname{Esp} A_{(f)} \times_{A_0} \operatorname{Esp} B \cong \operatorname{Esp}(A_{(f)} \otimes_{A_0} B),$$

luego hemos de ver que el homomorfismo

$$\psi : A_{(f)} \otimes_{A_0} B \longrightarrow (A \otimes_{A_0} B)_{(\phi(f))}$$

dado por $\psi((a/f^n) \otimes b) = (a \otimes b)/\phi(f)^n$ es un isomorfismo. Claramente es suprayectivo. Para probar que es inyectivo basta ver que lo es considerado como homomorfismo $A_{(f)} \otimes_{A_0} B \longrightarrow (A \otimes_{A_0} B)_{\phi(f)} \cong A_f \otimes_{A_0} B$. Visto así, se trata del homomorfismo inducido por la inclusión $A_{(f)} \longrightarrow A_f$. La inyectividad se debe a que

$$A_f = A_{(f)} \oplus \bigoplus_{m \neq nd} A_m/f^n,$$

donde d es el grado de f, y el producto tensorial distribuye las sumas directas.

■

De aquí se sigue que si $X = \operatorname{Proy}(A[X_1, \ldots, X_n]/(F_1, \ldots, F_m))$ y B es una A-álgebra, entonces

$$\begin{aligned} X_B &\cong \operatorname{Proy}((A[X_1, \ldots, X_n]/(F_1, \ldots, F_m)) \otimes_A B) \\ &\cong \operatorname{Proy}(B[X_1, \ldots, X_n]/(F_1, \ldots, F_m)). \end{aligned}$$

Definición 3.50 Si S es un esquema, definimos el *espacio proyectivo* de dimensión n sobre S como el esquema $\mathrm{P}_S^n = \mathrm{P}_{\mathbb{Z}}^n \times_{\mathbb{Z}} S$.

Notemos que si $S = \operatorname{Esp} A$ entonces

$$\mathrm{P}_S^n = \operatorname{Proy}(\mathbb{Z}[X_0, \ldots, X_n]) \times_{\mathbb{Z}} \operatorname{Esp} A \cong \operatorname{Proy}(A[X_0, \ldots, X_n]),$$

es decir, P_S^n coincide con el esquema P_A^n definido en 2.13. Vemos así que todos los espacios proyectivos pueden obtenerse a partir de los espacios proyectivos sobre $\mathbb{Z}$ mediante un cambio de base.

Teorema 3.51 *Si X/k es un conjunto algebraico y K/k es una extensión de cuerpos, entonces $\mathcal{O}_{X_K}(X_K) \cong \mathcal{O}_X(X) \otimes_k K$.*

Demostración: Por la construcción del producto fibrado, sabemos que el teorema es cierto para esquemas afines. Si $p : X_K \longrightarrow X$ es la proyección, para cada abierto afín U de X, tenemos que $U_K = U \times_k \operatorname{Esp} K = p^{-1}[U]$ y $\mathcal{O}_{X_K}(U_K) = \mathcal{O}_X(U) \otimes_k K$. Si $V \subset U \subset X$ son abiertos afines, la restricción de $\mathcal{O}_{X_K}(U_K)$ a $\mathcal{O}_{X_K}(V_K)$ se corresponde con $\rho_V^U \otimes 1$. Esto es consecuencia de la conmutatividad de los diagramas siguientes:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X(U) \arrow[r, "I\otimes 1"] \arrow[d, "\rho"'] & \mathcal{O}_X(U) \otimes_k K \arrow[d, "\rho"] \\
\mathcal{O}_X(V) \arrow[r, "I\otimes 1"'] & \mathcal{O}_X(V) \otimes_k K
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
U \times_k \operatorname{Esp} K \arrow[r, "p"] & \operatorname{Esp} K \\
V \times_k \operatorname{Esp} K \arrow[u, "i"] \arrow[ur, "p"'] &
\end{tikzcd}$$

Consideremos un cubrimiento finito de X por abiertos afines U_i. Podemos definir un homomorfismo de anillos

$$\phi : \mathcal{O}_X(X) \otimes_k K \longrightarrow \mathcal{O}_{X_K}(X_K)$$

de la forma siguiente: para cada $f \otimes \alpha \in \mathcal{O}_X(X) \otimes_k K$, las imágenes de $f|_{U_i} \otimes \alpha$ en $\mathcal{O}_{X_K}(U_{iK})$ determinan un único $\phi(f) \in \mathcal{O}_{X_K}(X_K)$. Se trata de un isomorfismo, pues podemos definir su inverso

$$\psi : \mathcal{O}_{X_K}(X_K) \longrightarrow \mathcal{O}_X(X) \otimes_k K$$

del modo siguiente: Dado $f \in \mathcal{O}_{X_K}(X_K)$, tenemos que $f|_{U_{iK}}$ se expresa de forma única como

$$f|_{U_{iK}} = \sum_j f_{ij} \otimes \alpha_j, \qquad f_{ij} \in \mathcal{O}_{X_{U_i}}(U_i)$$

donde $\{\alpha_j\}$ es una k-base de K. La unicidad hace que cada conjunto $\{f_{ij}\}_i$ determine un único $f_j \in \mathcal{O}_X(X)$, y hacemos

$$\psi(f) = \sum_j f_j \otimes \alpha_j \in \mathcal{O}_X(X) \otimes_k K.$$

■

Teorema 3.52 *Sea $S = k[X_0, \ldots, X_r]$, sea I un ideal homogéneo en S y sea $X = \operatorname{Proy}(S/I)$ un conjunto algebraico proyectivo. Si K/k es una extensión de cuerpos, el polinomio de Hilbert de X_K es el mismo que el de X.*

DEMOSTRACIÓN: Llamemos $B = S/I$. Entonces $X_K = \operatorname{Proy}(B \otimes_k K)$. Para n suficientemente grande tenemos que

$$P_{X_K}(n) = \dim_K (B \otimes_k K)_n = \dim_K (B_n \otimes_k K) = \dim_k B_n P_X(n),$$

luego $P_{X_K}(T) = P_X(T)$. ■

Definición 3.53 Diremos que una propiedad $\mathcal{P}$ de homomorfismos entre esquemas es *local en la base* si, para todo homomorfismo $f : X \longrightarrow Y$, se cumple que f cumple $\mathcal{P}$ si y sólo todo $P \in Y$ tiene un entorno abierto afín V tal que $f|_{f^{-1}[V]} : f^{-1}[V] \longrightarrow V$ cumple $\mathcal{P}$.

Por ejemplo, ser una inmersión abierta o cerrada son propiedades locales en la base.

Diremos que una propiedad $\mathcal{P}$ de homomorfismos entre esquemas es *estable bajo cambios de base* si, cuando $f : X \longrightarrow Y$ es un homomorfismo que verifica $\mathcal{P}$, para todo homomorfismo $Y' \longrightarrow Y$ se cumple que $X \times_Y Y' \longrightarrow Y'$ también verifica $\mathcal{P}$.

En tal caso se cumple algo más fuerte, pues si $f : X \longrightarrow Y$ es un homomorfismo de esquemas definidos sobre S que verifica $\mathcal{P}$ y $S' \longrightarrow S$ es un homomorfismo de esquemas, aplicamos la definición a la proyección $Y \times_S S' \longrightarrow Y$, con lo que concluimos que la proyección $X \times_Y (Y \times_S S') \longrightarrow Y \times_S S'$ verifica $\mathcal{P}$. El primer esquema es isomorfo (sobre S') a $X \times_S S'$ y, al componer con el isomorfismo, la proyección se convierte en $f_{S'} : X \times_S S' \longrightarrow Y \times_S S'$, luego $f_{S'}$ también verifica $\mathcal{P}$.

Teorema 3.54 *Las inmersiones abiertas y cerradas son estables bajo cambios de base.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $X \longrightarrow Y$ una inmersión abierta y sea $Y' \longrightarrow Y$ un homomorfismo. Si $p : Y \times_Y Y' \longrightarrow Y$ es la proyección, sabemos que $p^{-1}[X]$ cumple la definición de producto fibrado $X \times_Y Y'$. Así pues, tenemos una inmersión abierta $X \times_Y Y' \longrightarrow Y \times_Y Y'$ que compuesta con las proyecciones del segundo producto da las proyecciones del primero, pero la segunda proyección es un isomorfismo $Y \times_Y Y' \longrightarrow Y'$, luego podemos concluir que la proyección $X \times_Y Y' \longrightarrow Y'$ es una inmersión abierta.

Supongamos ahora que $X \longrightarrow Y$ es una inmersión cerrada. Hemos de probar que $X \times_Y Y' \longrightarrow Y'$ también lo es. Dado un punto de Y', su imagen en Y tiene un entorno afín U tal que la restricción $X' \longrightarrow U$ es una inmersión cerrada. La antiimagen de U en Y' es un abierto que a su vez contiene un entorno afín V del punto dado. Basta probar que la restricción $X \times_Y V \longrightarrow V$ es una inmersión cerrada.

Si $\pi : X \times_Y V \longrightarrow Y$ es el homomorfismo estructural del producto, para cada $P \in X \times_Y U$, la imagen en Y de $p_1(P)$ ha de ser $\pi(P)$, que ha su vez ha de coincidir con la imagen en Y de $p_2(P)$, pero dicha imagen está en U. En definitiva, vemos que la primera proyección toma imágenes en X', luego

$$X \times_Y V = p_1^{-1}[X'] = X' \times_Y V.$$

En definitiva, hemos de probar que la proyección $X' \times_Y V \longrightarrow V$ es una inmersión cerrada. Ahora bien, esta proyección puede verse también como la proyección $X' \times_U V \longrightarrow V$. Equivalentemente, basta probar el teorema cuando $Y = \operatorname{Esp} A$, $Y' = \operatorname{Esp} B$. Por 2.21, podemos suponer además que $X = \operatorname{Esp} A/I$, donde I es un ideal de A. La proyección es el homomorfismo inducido por el homomorfismo de anillos $B \longrightarrow (A/I) \otimes_A B \cong B/IB$. Ciertamente, se trata de una inmersión cerrada. ■

Teorema 3.55 *La suprayectividad (de la aplicación continua subyacente a un homomorfismo de esquemas) es estable bajo cambios de base.*

Demostración: Sea $X \longrightarrow Y$ un homomorfismo de esquemas cuya aplicación subyacente sea suprayectiva y sea $Y' \longrightarrow Y$ un homomorfismo de esquemas arbitrario. Hemos de ver que la proyección $X \times_Y Y' \longrightarrow Y'$ es suprayectiva.

Tomemos $P' \in Y'$ y sea P su imagen en Y. Los homomorfismos dados por el teorema 3.6 hacen conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Esp} k(P') & \longrightarrow & Y' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \operatorname{Esp} k(P) & \longrightarrow & Y \end{array}$$

Entonces

$$\begin{aligned} (X \times_Y Y')_{P'} &= (X \times_Y Y') \times_{Y'} \operatorname{Esp} k(P') \cong X \times_Y \operatorname{Esp} k(P') \\ &\cong (X \times_Y \operatorname{Esp} k(P)) \times_{k(P)} \operatorname{Esp} k(P') = X_P \times_{k(P)} \operatorname{Esp} k(P'). \end{aligned}$$

Sabemos que $X_P \neq \varnothing$, luego contiene un abierto afín no vacío $U = \operatorname{Esp} A$, luego el producto contiene al producto $U \times_{k(P)} \operatorname{Esp} k(P') \cong \operatorname{Esp}(A \otimes_{k(P)} k(P'))$, obviamente no vacío, pues $A \neq 0$ y $k(P')$ es libre sobre $k(P)$. ■

Por ejemplo, si X/k es un conjunto algebraico y K/k es una extensión de cuerpos, entonces la el homomorfismo de esquemas $\operatorname{Esp} K \longrightarrow \operatorname{Esp} k$ es trivialmente suprayectivo (ambos espectros constan de un único punto), luego la proyección $X_K \longrightarrow X$ es suprayectiva.

Ahora estudiamos las extensiones de constantes de conjuntos algebraicos, para lo cual necesitamos un resultado previo.

Teorema 3.56 *Sea X/k un conjunto algebraico y K/k una extensión algebraica de cuerpos. Para cada subconjunto cerrado y reducido W de X_K existe un cuerpo intermedio $k \subset K' \subset K$ de modo que la extensión K'/k es finita y existe un único subconjunto cerrado y reducido W' de $X_{K'}$ tal que $W = W'_K$.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos en primer lugar que $X = \operatorname{Esp} A$. Entonces el teorema 2.21 nos da que $W = \operatorname{Esp}(A_K/I)$, para cierto ideal radical I de $A_K = A \otimes_k K$. Podemos considerar $A \subset A_K$ y, como I es finitamente generado, existe una extensión finita K'/k tal que $A_{K'}$ contiene un generador de I. Sea I' el ideal generado por dicho generador en $A_{K'}$ y sea $W' = \operatorname{Esp} A_{K'}/I'$. Entonces $W = W'_K$. Se cumple que W' es reducida porque tenemos un monomorfismo $A_{K'}/I' \longrightarrow (A_{K'}/I') \otimes_{K'} K \cong A_K/I \cong \mathcal{O}_W(W)$.

Observemos ahora que la suprayectividad de $\operatorname{Esp} K \longrightarrow \operatorname{Esp} K'$ implica que la proyección $X_K \longrightarrow X_{K'}$ ha de ser suprayectiva (por el teorema 3.55 la suprayectividad es estable bajo cambios de base y X_K, $X_{K'}$ pueden verse como cambios de base de $\operatorname{Esp} K$ y $\operatorname{Esp} K'$ a través de $X \longrightarrow \operatorname{Esp} k$). Por otra parte, el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X_K \arrow[r] & X_{K'} \\ W'_K \arrow[u] \arrow[r] & W' \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Si W' cumple el teorema, entonces el espacio topológico subyacente a W'_K es necesariamente el de W, luego es espacio topológico subyacente a W' es necesariamente la proyección del de W. El teorema 2.26 nos da ahora la unicidad. (La igualdad $W = W'_K$ del enunciado ha de entenderse como que W'_K tiene el mismo espacio subyacente que W y su estructura de esquema es isomorfa a la de W.)

Para el caso general observamos en primer lugar que si (W', K') cumple el teorema y K''/K' es una extensión finita, entonces $(W'_{K''}, K'')$ también cumple el teorema (la unicidad de W' es relativa a K'). Cubrimos X con un número finito de abiertos afines X_i (con lo que X_K está cubierta por los $(X_i)_K$, notemos que $(X_i)_K$ es la antiimagen de X_i por la proyección $X_K \longrightarrow X$) y aplicamos la parte ya probada a cada subconjunto $W \cap (X_i)_K$. Por la observación que acabamos de hacer podemos encontrar un mismo cuerpo K' tal que existen subconjuntos cerrados y reducidos W'_i de $(X_i)_{K'}$ tales que $(W'_i)_K = W \cap (X_i)_K$.

Sea W' la unión de los espacios topológicos subyacentes a los conjuntos W'_i, que es un cerrado en $X_{K'}$, y lo consideramos como subconjunto algebraico con la estructura dada por el teorema 2.26. Cada W'_i es abierto en W' y la unicidad de dicho teorema implica que, de hecho, cada W'_i es un subesquema abierto. Ahora es inmediato comprobar que W' cumple el teorema. ■

Nos ocupamos ya de los conjuntos algebraicos:

Teorema 3.57 *Sea X/k un conjunto algebraico y sea K/k una extensión algebraica.*

a) $\dim X_K = \dim X$.

b) Si X es reducido y K/k es separable, entonces X_K es reducido.

c) Si K/k es puramente inseparable, la proyección $X_K \longrightarrow X$ es un homeomorfismo.

d) En cualquier caso, la proyección $X_K \longrightarrow X$ es abierta.

Demostración: a) Expresamos X como unión de un número finito de abiertos afines X_i. Entonces X_K es la unión de los abiertos $(X_i)_K$, la dimensión de X es el máximo de las dimensiones de los X_i y la dimensión de X_K es el máximo de las dimensiones de los $(X_i)_K$, luego basta probar a) para cada X_i. Equivalentemente, podemos suponer que $X = \operatorname{Esp} A$ es afín. Entonces $X_K = \operatorname{Esp} A \times_k \operatorname{Esp} K = \operatorname{Esp}(A \otimes_k K)$ y basta aplicar el teorema [3.77].

b) Al igual que en el apartado anterior, podemos suponer que $X = \operatorname{Esp} A$. Sean $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ los primos minimales de A. Como A es reducido, su intersección es nula, y el homomorfismo natural $A \longrightarrow \bigoplus_i (A/\mathfrak{p}_i)$ es inyectivo. Como K es un k-módulo libre, también tenemos que $A \otimes_k K \longrightarrow \bigoplus_i (A/\mathfrak{p}_i) \otimes_k K$ es inyectivo.

Los anillos $A/\mathfrak{p}_i$ son reducidos (son dominios íntegros), y si probamos que los $(A/\mathfrak{p}_i) \otimes_k K$ también lo son, lo mismo valdrá para $A \otimes_k K$. Equivalentemente, podemos suponer que A es un dominio íntegro.

Si F es el cuerpo de cocientes de K, la inclusión $A \subset F$ determina un monomorfismo $A \otimes_k K \longrightarrow F \otimes_k K$. Basta probar que si F/k es una extensión arbitraria, entonces $F \otimes_k K$ es reducido.

Si $k \subset K' \subset K$, tenemos también un monomorfismo $F \otimes_k K' \longrightarrow F \otimes_k K$ y todo elemento de $F \otimes_k K$ está contenido en un $F \otimes_k K'$, para cierta extensión finita K'/k, luego podemos suponer que la extensión K/k es finita (y separable).

Pongamos que $K = k(\alpha)$ y sea $p(X)$ el polinomio mínimo de α sobre k. La sucesión exacta

$$0 \longrightarrow (p(X)) \longrightarrow k[X] \longrightarrow K \longrightarrow 0$$

da lugar a la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow (p(X)) \longrightarrow F[X] \longrightarrow F \otimes_k K \longrightarrow 0,$$

luego $F \otimes_k K = F[X]/(p(X))$. El polinomio $p(X)$ no tiene por qué ser irreducible en $F[X]$, pero sigue siendo separable. Por lo tanto es producto de primos distintos, luego el ideal $(p(X))$ es intersección de ideales primos, luego es radical, luego $F \otimes_k K$ es reducido.

c) También podemos suponer que $X = \operatorname{Esp} A$. La proyección $p : X_K \longrightarrow X$ es la inducida por el homomorfismo $A \longrightarrow A \otimes_k K$. Sabemos que es suprayectiva (ver la observación tras el teorema 3.55).

Sea $\mathfrak{P}$ un ideal primo de $A \otimes_k K$. Entonces $p(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P} \cap A$, y claramente $\operatorname{rad} p(\mathfrak{P})(A \otimes_k K) \subset \mathfrak{P}$. Ahora bien, si $a \in \mathfrak{P}$, el hecho de que K/k es puramente inseparable implica que $a^n \in \mathfrak{P} \cap A$, para cierto n, luego $a \in \operatorname{rad} p(\mathfrak{P})(A \otimes_k K)$. Esto prueba que $\mathfrak{P} = \operatorname{rad} p(\mathfrak{P})(A \otimes_k K)$, de donde se sigue que p es biyectiva.

Veamos que p es cerrada. Para ello tomamos un ideal I de $A \otimes_k K$ y consideramos $J = I \cap A$. Obviamente, si $\mathfrak{P} \in V(I)$ entonces $p(\mathfrak{P}) = \mathfrak{P} \cap A \in V(J)$.

Recíprocamente, si $\mathfrak{P} \cap A \in V(J)$ y $a \in I$, entonces $a^n \in J \subset \mathfrak{P} \cap A$, para cierto exponente n, luego $a \in \mathfrak{P}$. Así pues, $\mathfrak{P} \in V(I)$. Con esto hemos probado que $p[V(I)] = V(J)$.

d) Sea L la clausura puramente inseparable de k en K, de modo que la extensión K/L es separable. La proyección puede expresarse como composición $X_K \longrightarrow X_L \longrightarrow X$ y la segunda es un homeomorfismo por el apartado anterior. Basta probar que $X_K \longrightarrow X_L$ es abierta o, equivalentemente, podemos suponer que la extensión K/k es separable. Sea ahora N la clausura normal de K sobre k. De nuevo tenemos $X_N \longrightarrow X_K \longrightarrow X$ y, como las proyecciones son suprayectivas, basta ver que es abierta la correspondiente a N/k. Equivalentemente, podemos suponer que la extensión K/k es de Galois.

Para probar que una aplicación es abierta basta ver que envía abiertos básicos a abiertos, luego podemos suponer que $X = \operatorname{Esp} A$ es afín y hemos de demostrar que $p[D(f)]$ es abierto, para un $f \in A \otimes_k \bar{k}$. Equivalentemente, hemos de probar que $C = X \setminus p[D(f)]$ es cerrado.

Observemos que el grupo de Galois $G = G(K/k)$ actúa sobre $A \otimes_k K$ de modo que los elementos de A (a través de la inyección canónica $A \longrightarrow A \otimes_k K$) son exactamente los fijados por G. Sean $f_1, \ldots, f_r$ los conjugados de f por G (es claro que son un número finito) y sean $g_1, \ldots, g_s$ los polinomios simétricos elementales en r indeterminadas evaluados en los f_i. Sea $I = (g_1, \ldots, g_s) \subset A$ y vamos a probar que $C = V(I)$.

Si $\mathfrak{p} \in C$, entonces $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap A$, para cierto $\mathfrak{P} \in \operatorname{Esp}(A \otimes_k \bar{k})$ tal que $f \in \mathfrak{P}$. Más aún, todo $f_i \in \mathfrak{P}$, pues si existiera un i tal que $f_i \notin \mathfrak{P}$, entonces existiría $\sigma \in G$ tal que $f \notin \mathfrak{P}^\sigma$, pero $p(\mathfrak{P}^\sigma) = \mathfrak{P}^\sigma \cap A = \mathfrak{P} \cap A = \mathfrak{p}$, luego $\mathfrak{p} \in p[D(f)]$. Concluimos que $g_i \in \mathfrak{P} \cap A = \mathfrak{p}$ para todo i, luego $I \subset \mathfrak{p}$ y $\mathfrak{p} \in V(I)$.

Recíprocamente, si $\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \cap A \in V(I)$, entonces todos los g_i están en $\mathfrak{P}$, y los f_i también (por ejemplo, el hecho de que $f_1 \cdots f_r \in \mathfrak{P}$ implica que un f_i está en $\mathfrak{P}$, digamos $f_1 \in \mathfrak{P}$; ahora, usando el polinomio simétrico de grado $r-1$ obtenemos que $f_2 \cdots f_r \in \mathfrak{P}$, luego otro f_i está en $\mathfrak{P}$, digamos $f_2 \in \mathfrak{P}$, etc. En particular $f \in \mathfrak{P}$, luego $\mathfrak{P} \notin D(f)$. ■

En general, las propiedades de un conjunto algebraico pueden perderse al tomar una extensión de constantes, por lo que conviene introducir los conceptos siguientes:

Definición 3.58 Sea X/k un conjunto algebraico y sea $\overline{k}$ una clausura algebraica de k. Diremos que X es *geométricamente* (o *absolutamente*) *íntegro, reducido, irreducible* o *conexo* si $X_{\bar{k}}$ es íntegro, reducido, irreducible o conexo, respectivamente.

Es evidente que estas definiciones no dependen de la elección de la clausura algebraica. Si X es geométricamente íntegro, reducido, irreducible o conexo y K/k es una extensión algebraica, entonces X_K cumple también la propiedad correspondiente. En efecto, puesto que $X_{\bar{k}} \cong (X_K)_{\bar{k}}$, no perdemos generalidad si suponemos $K = k$. Consideremos la proyección $p : X_{\bar{k}} \longrightarrow X$.

Supongamos que $X_{\bar{k}}$ es reducido, sea $P \in X$ y sea U un entorno afín de P en X. Sea $Q \in X_{\bar{k}}$ tal que $p(Q) = P$. Entonces $p^{-1}[U] = U \otimes_k \operatorname{Esp} \bar{k}$ es un entorno afín de Q en $X_{\bar{k}}$ y es reducido, luego $\mathcal{O}_X(U) \otimes_k \bar{k}$ es un anillo reducido, luego $\mathcal{O}_X(U)$ también lo es, luego U es reducido, luego X también.

Similarmente, si X es reducible entonces $X = X_1 \cup X_2$, donde X_1 y X_2 son cerrados no contenidos uno en el otro. Por consiguiente $X_{\bar{k}} = p^{-1}[X_1] \cup p^{-1}[X_2]$ y de aquí se sigue que $X_{\bar{k}}$ es reducible.

Estos dos hechos implican el correspondiente para esquemas íntegros y la prueba para esquemas conexos es similar al argumento anterior. ∎

Por otra parte, el teorema anterior prueba que si k es perfecto entonces un conjunto algebraico X/k es reducido si y sólo si es geométricamente reducido.

Ejercicio: Sea K/k una extensión finita no trivial. Sea $X = \operatorname{Esp} K$ (considerado como esquema sobre k). Si K/k es puramente inseparable entonces X es reducido y no geométricamente reducido. Si K/k es separable entonces X es íntegro y no geométricamente íntegro (ni geométricamente conexo).

Veamos un primer ejemplo de la necesidad de este tipo de hipótesis:

Teorema 3.59 *Si X/k es un conjunto algebraico geométricamente reducido (resp. íntegro) e Y/k es un conjunto algebraico reducido (resp. íntegro) entonces $X \times_k Y$ es un conjunto algebraico reducido (resp. íntegro).*

DEMOSTRACIÓN: No perdemos generalidad si suponemos que los esquemas son afines. (En el caso de la integridad notemos que los abiertos $U \times_k V$, donde $U \subset X$ y $V \subset Y$ son abiertos afínes no vacíos, son íntegros, luego conexos, cubren el producto y se cortan dos a dos, luego el producto es conexo, luego es íntegro por el teorema 3.12.) Pongamos que $X = \operatorname{Esp} A$, $Y = \operatorname{Esp} B$, donde A y B son k-álgebras reducidas, y vamos a ver que la k-álgebra $A \otimes_k B$ es reducida.

Sea $\{a_i\}_i$ una k-base de A, de modo que todo elemento del producto se expresa de forma única como $x = \sum\limits_i a_i \otimes b_i$, para ciertos $b_i \in B$, casi todos nulos.

Hemos de probar que si x es nilpotente, entonces es nulo. Para ello sea $\mathfrak{m}$ un ideal maximal de B y consideremos el homomorfismo $A \otimes_k B \longrightarrow A \otimes_k (B/\mathfrak{m})$. El cociente $B/\mathfrak{m}$ es una extensión finita de k (por 2.41 o [3.82]), luego el segundo producto tensorial es reducido porque X es geométricamente reducido. La imagen de x es nilpotente, luego es nula, lo que implica que $a_i \in \mathfrak{m}$ para todo i, luego $a_i \in \operatorname{rad} A = 0$, por el teorema [3.23], luego $x = 0$.

Si A y B son dominios íntegros, razonamos igualmente, ahora con x y un $x' = \sum\limits_i a'_i \otimes b_i$. Si $xx' = 0$, entonces, fijado $\mathfrak{m}$, tenemos que bien la imagen de x o bien la de x' ha de ser nula en $A \otimes_k (B/\mathfrak{m})$, ya que este producto es un dominio íntegro por hipótesis. A su vez esto implica que todos los a_i están en $\mathfrak{m}$ o bien todos los a'_i están en $\mathfrak{m}$. Esto prueba que $Y = V(a_i) \cup V(a'_i)$. (En principio hemos probado que la unión contiene a todos los puntos cerrados de Y, pero éstos forman un conjunto denso.) Como Y es irreducible, ha de ser

$Y = V(a_i)$ o bien $Y = V(a_i')$, lo que implica (por ejemplo, en el primer caso) que los a_i están en todos los ideales primos de B, luego son nulos, luego $x = 0$. ■

De aquí se sigue inmediatamente que el producto de dos conjuntos algebraicos geométricamente reducidos o geométricamente íntegros cumple esta misma propiedad.

Teorema 3.60 *Si X/k es un conjunto algebraico geométricamente íntegro y K/k es una extensión de cuerpos arbitraria (no necesariamente algebraica), entonces X_K es geométricamente íntegro.*

DEMOSTRACIÓN: Veamos en primer lugar que podemos suponer que X es afín. En efecto, si el teorema es cierto para esquemas afines, entonces los abiertos U_K, donde $U \neq \varnothing$ recorre los abiertos afines de X, cubren X_K, son íntegros (en particular conexos) y se cortan dos a dos, luego X es conexo e íntegro, por el teorema 3.12. Como esto vale para todo cuerpo K, de hecho X es geométricamente íntegro.

Ahora veamos que podemos suponer que k es algebraicamente cerrado. Sea $\overline{K}$ una clausura algebraica de K y sea $\bar{k} \subset \overline{K}$ la clausura algebraica de k. Entonces $X_{\bar{k}}$ es geométricamente íntegro y, admitiendo el teorema para cuerpos algebraicamente cerrados, concluimos que $X_{\overline{K}}$ es íntegro, luego X_K es geométricamente íntegro.

Por último veamos que podemos suponer que la extensión K/k es finitamente generada. Pongamos que $X = \operatorname{Esp} A$, de modo que $X_K = \operatorname{Esp}(A \otimes_k K)$. Si $A \otimes_k K$ no es un dominio íntegro, podemos encontrar dos elementos no nulos que multiplicados den 0. Dichos elementos son sumas finitas de tensores puros, luego podemos encontrar un subcuerpo $L \subset K$ finitamente generado sobre K, tal que ambos factores están en la imagen del monomorfismo $A \otimes_k L \longrightarrow A \otimes_k K$. Concluimos entonces que $A \otimes_k L$ no es un dominio íntegro, luego X_L no es íntegro.

Sea, pues, $K = k(b_1, \ldots, b_n)$ y sea $B = k[b_1, \ldots, b_n]$, que es un dominio íntegro cuyo cuerpo de cocientes es K. Entonces $Y = \operatorname{Esp} B$ es un conjunto algebraico geométricamente íntegro. Por el teorema anterior, $X \times_k Y$ es íntegro, luego $A \otimes_k B$ es un dominio íntegro, y lo que hemos de probar es que $A \otimes_k K$ también lo es. Para ello basta observar que tenemos un monomorfismo natural $A \otimes_k B \longrightarrow A \otimes_k K$ y que todo elemento del segundo anillo es de la forma α/b, donde $\alpha \in A \otimes_k B$ y $b \in B$, $b \neq 0$ (el cociente corresponde a la estructura natural de K-espacio vectorial). Si $(\alpha_1/b_1)(\alpha_2/b_2) = 0$, entonces $\alpha_1\alpha_2 = 0$, luego un $\alpha_i = 0$, luego $\alpha_i/b_i = 0$. ■

Teorema 3.61 *Sea X/k un conjunto algebraico íntegro y sea $k(X)$ su cuerpo de funciones. Entonces X es geométricamente reducido (resp. íntegro) si y sólo si el anillo $k(X) \otimes_k \overline{k}$ es reducido (resp. íntegro).*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que $k(X) \otimes_k \overline{k}$ es reducido (resp. íntegro). Observemos en primer lugar que si $U \neq \varnothing$ es un abierto afín en X entonces el anillo $\mathcal{O}_X(U)$ se sumerge de forma natural en $k(X)$ (teorema 3.13), y entonces $\mathcal{O}_{X_{\bar{k}}}(U_{\bar{k}}) = \mathcal{O}_{X_{\bar{k}}}(U \times_k \operatorname{Esp} \bar{k}) = \mathcal{O}(U) \otimes_k \bar{k}$ se sumerge de forma natural en $k(X) \otimes_k \bar{k}$. Así pues, los anillos $\mathcal{O}(U_{\bar{k}})$ son reducidos (resp. íntegros). Como los abiertos $U_{\bar{k}}$ cubren X, podemos concluir que X es reducido.

Si además tenemos que cada $\mathcal{O}_{X_{\bar{k}}}(U_{\bar{k}})$ es íntegro, entonces concluimos que todos los anillos locales $\mathcal{O}_{X_{\bar{k}},P}$ son dominios íntegros y basta probar que $X_{\bar{k}}$ es conexo. Supongamos que $X_{\bar{k}} = V_1 \cup V_2$, donde V_1 y V_2 son abiertos disjuntos no vacíos en $X_{\bar{k}}$. Consideramos la proyección $p : X_{\bar{k}} \longrightarrow X$. Tomamos un punto $P_i \in V_i$, consideramos un entorno afín U_i de $p(P_i)$ en X, y entonces $(U_i)_{\bar{k}} = p^{-1}[U_i]$ es un entorno conexo de P_i, luego ha de ser $(U_i)_{\bar{k}} \subset V_i$, lo que implica que $(U_1)_{\bar{k}} \cap (U_2)_{\bar{k}} = \varnothing$ y esto sólo puede ocurrir si $U_1 \cap U_2 = \varnothing$, pero esto es imposible porque X es irreducible, luego sus abiertos son densos.

Suponemos ahora que X es geométricamente reducido (resp. íntegro) y hemos de probar que el anillo $k(X) \otimes_k \bar{k}$ también lo es. Ahora sabemos que para cada abierto afín U de X el anillo $\mathcal{O}_X(U) \otimes_k \bar{k} = \mathcal{O}_{X_{\bar{k}}}(U_{\bar{k}})$ es reducido (resp. íntegro). Si en $k(X) \otimes_k \bar{k}$ hubiera un elemento nilpotente (o un dos elementos no nulos cuyo producto fuera cero), podríamos encontrar un abierto afín U en X de modo que dicho elemento (o dichos elementos) estarían en la imagen del monomorfismo natural $\mathcal{O}_X(U) \otimes_k \bar{k} \longrightarrow k(X) \otimes_k \bar{k}$. Por consiguiente, $\mathcal{O}_X(U) \otimes_k \bar{k}$ no sería reducido (o íntegro). ■

En realidad podemos precisar más la situación:

Teorema 3.62 *Un conjunto algebraico íntegro X/k es geométricamente íntegro si y sólo si los cuerpos $k(X)$ y $\bar{k}$ son linealmente disjuntos, y en tal caso se cumple que $\bar{k}(X) = k(X) \otimes_k \bar{k}$.*

DEMOSTRACIÓN: Si $k(X)$ y $\bar{k}$ son linealmente disjuntos entonces tenemos que $k(X) \otimes_k \bar{k} \cong k(X)\bar{k}$, luego en particular $k(X) \otimes_k \bar{k}$ es un dominio íntegro, y por el teorema anterior X es geométricamente íntegro.

Recíprocamente, si X es geométricamente íntegro el teorema anterior nos da que $k(X) \otimes_k \bar{k}$ es un dominio íntegro. Más concretamente, es el dominio que resulta de adjuntar al cuerpo $k(X)$ un conjunto de elementos algebraicos sobre k (el conjunto $\bar{k}$), luego de hecho es un cuerpo. Tenemos, entonces, que $k(X) \otimes_k \bar{k} = k(X)\bar{k}$, luego $k(X)$ y $\bar{k}$ son linealmente disjuntos.

En estas condiciones, tomemos un abierto afín $U = \operatorname{Esp} A$ de X. Si representamos por $F(A)$ el cuerpo de fracciones de A, el teorema 3.13 nos da que

$$\bar{k}(X) = F(\mathcal{O}(U_{\bar{k}})) = F(A \otimes_k \bar{k}) = F(A) \otimes_k \bar{k} = k(X) \otimes_k \bar{k}.$$

■

También podemos caracterizar la irreducibilidad geométrica:

Teorema 3.63 *Un conjunto algebraico íntegro X/k es geométricamente irreducible si y sólo si $k(X) \cap k^s = k$, donde k^s es la clausura separable de k.*

Demostración: Llamemos $K = k(X) \cap k^s$ y supongamos que X es geométricamente irreducible. Por el teorema 3.57 tenemos que X_{k^s} es íntegro. Igual que en el teorema anterior, comprobamos que $k^s(X) = k(X) \otimes_k k^s$. Este cuerpo contiene al dominio íntegro $K \otimes_k K$, pero este producto sólo puede ser un dominio íntegro si $K = k$. En efecto, en caso contrario tomamos $\alpha \in K \setminus k$, algebraico de grado m. El producto $L = k(\alpha) \otimes_k k(\alpha)$ sería un dominio íntegro, y por lo tanto un cuerpo de grado m^2 sobre k, pero si llamamos $\alpha_1 = \alpha \otimes 1$, $\alpha_2 = 1 \otimes \alpha$, entonces $L = k(\alpha_1, \alpha_2)$ y el grado de L sobre k puede ser a lo sumo $m(m-1)$, contradicción.

Supongamos ahora que $K = k$. Por el teorema 3.57 c), basta probar que X_{k^s} es íntegro. Si U es un abierto afín en X, tenemos que $\mathcal{O}_X(U)$ se sumerge en $k(X)$, luego $\mathcal{O}_{X_{k^s}}(U_{k^s}) = \mathcal{O}_X(U) \otimes_k k^s$ se sumerge en $k(X) \otimes_k k^s$, luego basta probar que $k(X) \otimes_k k^s$ es un dominio íntegro. Si no lo fuera, existiría una extensión finita separable K'/k tal que $k(X) \otimes_k K'$ tampoco lo sería. Digamos que $K' = k(\alpha)$ y sea $P(T)$ el polinomio mínimo de α sobre k. Entonces $K' \cong k[T]/(P(T))$ y $k(X) \otimes_k K' \cong k(X)[T]/(P(T))$. Basta probar que $P(T)$ es irreducible en $k(X)[T]$. Sea $Q(T)$ un factor mónico irreducible. Entonces $Q(T) \in k^s[T]$, porque $P(T)$ se escinde en $k^s[T]$. Por lo tanto $Q(T) \in K[T] = k[T]$, luego ha de ser $Q(T) = P(T)$ y el teorema queda probado. ■

Veamos ahora un resultado técnico que necesitaremos un poco más adelante:

Teorema 3.64 *Sea X/k un conjunto algebraico íntegro. Entonces X es geométricamente reducido si y sólo si la extensión $k(X)/k$ es separablemente generada (es decir, es una extensión finita separable de una extensión de k puramente trascendente).*

Demostración: Supongamos que $k(X)$ es una extensión finita separable de un cuerpo de fracciones algebraicas $L = k(T_1, \ldots, T_d)$. (Notemos que el grado de trascendencia de $k(X)/k$ es finito por el teorema 3.22.) Por el teorema del elemento primitivo, $k(X) = L(\alpha)$, para un cierto $\alpha \in k(X)$. Sea $p(T)$ el polinomio mínimo de α sobre K.

Entonces $k(X) \cong L[T]/(p(T))$ y $k(X) \otimes_k \bar{k} \cong L'(T)/(p(T))$, donde llamamos $L' = \bar{k}(T_1, \ldots, T_d)$. Aquí usamos que la sucesión exacta de k-espacios vectoriales

$$0 \longrightarrow (p(T)) \longrightarrow L[T] \longrightarrow k(X) \longrightarrow 0$$

sigue siendo exacta al multiplicar por $\bar{k}$. El polinomio $p(T)$ tiene sus raíces simples, y esto sigue siendo cierto al verlo como elemento de $L'[T]$. Es claro entonces que el ideal $(p(T)) \subset L'[T]$ es radical, luego el anillo $k(X) \otimes_k \bar{k}$ es reducido. El teorema 3.61 nos da entonces que X es geométricamente reducido.

Supongamos ahora que X es geométricamente reducido. Por 3.22 tenemos que $k(X)$ es una extensión finita de un cuerpo de fracciones algebraicas $L = k(T_1, \ldots, T_d)$. Si $k(X)/L$ es separable, no hay nada que probar. En caso contrario llamamos L_s a la clausura separable de L en $k(X)$. Tomemos $f \in k(X) \setminus L_s$ tal que $f^p \in L_s$ (donde p es la característica de k, que obviamente ha de ser prima). Vamos a probar que el cuerpo $L_s[f]$ es una extensión finita separable de una extensión de k puramente trascendente y finitamente generada. El teorema queda entonces probado sin más que tomar una cadena de extensiones puramente inseparables de grado p entre L_s y $k(X)$.

Sea $P(T) = T^r + a_{r-1}T^{r-1} + \cdots + a_0 \in L[T]$ el polinomio mínimo de f^p sobre L. Así $P(T^p)$ es el polinomio mínimo de f sobre L, luego

$$L[f] \cong L[T]/(P(T^p)), \qquad L[f] \otimes_k \bar{k} \cong \bar{k}[T]/(P(T^p)).$$

Vamos a ver que algún $a_i \notin k(T_1^p, \ldots, T_d^p)$. En caso contrario tendríamos que $P(T^p) = Q(T)^p$, para cierto $Q(T) \in \bar{k}[T]$, con lo que $L[f] \otimes_k \bar{k}$ no sería reducido, pero este anillo es un subanillo de $k(X) \otimes_k \bar{k}$, que es reducido por el teorema 3.61.

Podemos suponer, pues, que un a_i contiene una potencia de T_1 prima con p. Esto implica que T_1 es algebraico y separable sobre $k(f, T_2, \ldots, T_d)$ (es raíz de un polinomio con derivada no nula).

Por otra parte, $L_s[f]$ es una extensión finita separable de $k(f, T_1, \ldots, T_d)$, luego también de $k(f, T_2, \ldots, T_d)$, y este cuerpo es una extensión puramente trascendente de k porque su grado de trascendencia sobre k ha de ser el mismo que el de $L_s[f]$, que es d. ■

3.6 Puntos racionales

Para terminar el capítulo daremos una definición abstracta de punto racional en un esquema:

Definición 3.65 Sea S un esquema y X un esquema definido sobre S. Una *sección* de X es un homomorfismo de esquemas $\sigma : S \longrightarrow X$ definido sobre S. El conjunto de todas las secciones de X se representa por $X(S)$. Si $S = \operatorname{Esp} A$, escribiremos también $X(A)$.

Si k es un cuerpo y X/k es un esquema definido sobre k, entonces $X(k)$ se corresponde con el conjunto de los puntos $P \in X$ tales que $k(P) = k$. En efecto, cada $\sigma \in X(k)$ determina una aplicación $\sigma_0 : \{0\} \longrightarrow X$ que nos da un punto $P = \sigma(0) \in X$, y un homomorfismo de k-álgebras $\sigma_P^\# : \mathcal{O}_{X,P} \longrightarrow k$, el cual determina a su vez un k-homomorfismo de cuerpos $k(P) \longrightarrow k$. Obviamente entonces $k(P) = k$.

Además, σ está completamente determinado por P, pues si U es un abierto en X, entonces $\sigma_U^\# : \mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{O}_k(\sigma_0^{-1}[U])$ ha de ser el homomorfismo nulo si $P \notin U$ y en caso contrario hemos de tener el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X(U) \arrow[r, "\sigma_U^\#"] \arrow[d] & k \\
\mathcal{O}_{X,P} \arrow[ur, "\sigma_P^\#"'] &
\end{tikzcd}$$

y la flecha diagonal es fija, pues su núcleo es $\mathfrak{m}_P$ y entonces $\sigma_P^{\#}$ es la proyección asociada a $\mathcal{O}_{X,P} = \mathfrak{m}_P \oplus \langle 1 \rangle_k$.

Recíprocamente, si $P \in X$ cumple $k(P) = k$, el homomorfismo del teorema 3.6 es una sección $\sigma \in X(k)$ tal que $\sigma(0) = P$. ■

Así pues, si X es un esquema definido sobre un cuerpo k, podemos considerar $X(k) \subset X$. A los elementos de $X(k)$ los llamaremos *puntos racionales* de X (sobre k). Si Y/k es un subesquema abierto o cerrado de X/k y $P \in Y$, es claro que los cuerpos $k(P)$ para ambos esquemas son isomorfos, luego tenemos que $Y(k) = X(k) \cap Y$.

Observemos ahora que los puntos racionales sobre un cuerpo son siempre cerrados. En efecto, si X/k es un esquema y $P \in X(k)$, para probar que es cerrado basta ver que es cerrado en cada abierto afín que lo contiene (si no fuera cerrado, tomaríamos un punto Q en su clausura y un entorno afín de Q, el cual contendría a P y P no sería cerrado en él). Equivalentemente, podemos suponer que $X = \operatorname{Esp} A$ es afín. Entonces P es un ideal primo de A y tenemos un monomorfismo de k-álgebras $A/P \longrightarrow k(P) = k$, luego ha de ser $A/P = k$, luego P es un ideal maximal, es decir, un punto cerrado.

Por último, si $X = \operatorname{Esp}(k[X_1, \ldots, X_n]/I)$ y $C = V(I) \subset k^n$, vamos a ver que se corresponden biunívocamente con los puntos de $C \cap k^n$.

En efecto, llamemos $A = k[X_1, \ldots, X_n]/I$. Si $\mathfrak{p} \in X(k)$, sea $\alpha_i \in k$ tal que $x_i \equiv \alpha_i \ (\text{mód}\ \mathfrak{m}_\mathfrak{p})$, con lo que formamos un punto $P = (\alpha_i) \in k^n$. Entonces $x_i - \alpha_i \in A \cap \mathfrak{m}_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}$, luego $(x_1 - \alpha_1, \ldots, x_n - \alpha_n) \subset \mathfrak{p}$. El primer ideal es maximal luego, de hecho, $\mathfrak{p} = (x_1 - \alpha_1, \ldots, x_n - \alpha_n)$. Si $F \in I$, desarrollándolo en potencias de $X_i - \alpha_i$ y tomando clases módulo I obtenemos que $F(P) \in \mathfrak{p}$, luego ha de ser $F(P) = 0$, pues de lo contrario sería una unidad. Así pues, $P \in C \cap k^n$. El hecho de que $\mathfrak{p}$ esté generado por los elementos $x_i - \alpha_i$ prueba que la correspondencia es inyectiva. Recíprocamente, si $P = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in C \cap k^n$, tenemos que

$$I \subset I(P) = (X_1 - \alpha_1, \ldots, X_n - \alpha_n) \subsetneq k[X_1, \ldots, X_n],$$

luego $\mathfrak{p} = (x_1 - \alpha_1, \ldots, x_n - \alpha_n) \in X$, y es claro que $k(\mathfrak{p}) = k$, luego $\mathfrak{p} \in X(k)$. ■

El mismo argumento de la demostración del teorema 2.42 prueba que los homomorfismos definidos sobre k (entre conjuntos algebraicos definidos sobre k) transforman puntos racionales en puntos racionales.

Observemos ahora que tomando $Z = S$ en (3.1) tenemos una biyección entre las secciones

$$(X \times_S Y)(S) \longrightarrow X(S) \times Y(S).$$

Ahora estudiamos los puntos racionales de una extensión de constantes.

Definición 3.66 Sean X y T esquemas definidos sobre un esquema S. Llamaremos $X(T)$ al conjunto de todos los homomorfismos de esquemas $T \longrightarrow X$ definidos sobre S.

Esta definición es muy similar a la del conjunto $X_T(T)$ de las secciones de X_T, formado por todos los homomorfismos de esquemas $T \longrightarrow X_T$ definidos sobre T. Vamos a ver que existe una biyección natural entre ambos conjuntos. En efecto, para ello partimos de la biyección (3.1):

$$\mathrm{Hom}_S(Z, X \times_S Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_S(Z, X) \times \mathrm{Hom}_S(Z, Y).$$

Al tomar $Y = Z = T$ se reduce a una biyección

$$\mathrm{Hom}_S(T, X_T) \longrightarrow \mathrm{Hom}_S(T, X) \times \mathrm{Hom}_S(T, T).$$

Concretamente, si $\sigma \in \mathrm{Hom}_S(T, X_T)$, su imagen es el par $(\sigma \circ p, \sigma \circ q)$, donde $p : X_T \longrightarrow X$ y $q : X_T \longrightarrow T$ son las proyecciones. La segunda es la que determina la estructura de esquema sobre T en X_T. Por lo tanto, σ estará definido sobre T si y sólo si $\sigma \circ q$ es la identidad. Concluimos entonces que la biyección anterior se restringe a una biyección

$$X_T(T) = \mathrm{Hom}_T(T, X_T) \longrightarrow \mathrm{Hom}_S(T, X) = X(T)$$

dada por $\sigma \mapsto \sigma \circ p$.

Consideremos ahora una extensión de cuerpos K/k y tomemos $S = \mathrm{Esp}\, k$, $T = \mathrm{Esp}\, K$. Dado un esquema X/k, cada elemento $\sigma \in X(K)$ determina (y está determinado por) un punto $P = \sigma(0) \in X$ y un homomorfismo de k-álgebras $\sigma_P^\# : \mathcal{O}_P \longrightarrow K$, el cual induce a su vez un k-monomorfismo $k(P) \longrightarrow K$. Recíprocamente, dados un punto $P \in X$ y un k-monomorfismo $f : k(P) \longrightarrow K$, éste induce un homomorfismo de esquemas $\mathrm{Esp}\, K \longrightarrow \mathrm{Esp}\, k(P)$ definido sobre k, el cual, compuesto con el homomorfismo natural $\mathrm{Esp}\, k(P) \longrightarrow X$ dado por 3.6, determina un homomorfismo $\sigma : \mathrm{Esp}\, K \longrightarrow X$ definido sobre k, es decir, un punto $\sigma \in X(K)$. Según 3.6, sabemos que $\sigma(0) = P$, y $\sigma_P^\#$ es la composición del homomorfismo natural $\mathcal{O}_P \longrightarrow k(P)$ con el monomorfismo dado $f : k(P) \longrightarrow K$, luego el k-monomorfismo que induce de $k(P) \longrightarrow K$ es el f dado.

Concluimos que los elementos de $X(K)$ se corresponden biunívocamente con los pares (P, f), donde $P \in X$ y $f : k(P) \longrightarrow K$ es un k-monomorfismo de cuerpos.

Observemos también que si tenemos una cadena $k \subset K \subset K'$ entonces la composición con el homomorfismo $\mathrm{Esp}\, K' \longrightarrow \mathrm{Esp}\, K$ induce una aplicación $X(K) \longrightarrow X(K')$, de modo que cada elemento de $X(K)$ se corresponde con el mismo par (P, f) que su imagen en $X(K')$. En particular, la aplicación es inyectiva, por lo que podemos considerar $X(K) \subset X(K')$.

En particular $X(k) \subset X(K) = X_K(K)$. Explícitamente, cada $\sigma \in X(k)$ determina secciones σ' y σ'' que hacen conmutativo el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Esp}\, K \arrow[r, "\sigma''"] \arrow[d] \arrow[dr, "\sigma'"] & X_K \arrow[d, "p"] \\
\mathrm{Esp}\, k \arrow[r, "\sigma"'] & X
\end{tikzcd}$$

Si $\sigma(0) = P$, entonces $P'' = \sigma''(0)$ cumple que $p(P'') = P$, y P'' es el único punto de X_K que cumple esto, pues la fibra de P es

$$(X_K)_P = \operatorname{Esp} K \times_k X \times_X \operatorname{Esp} k(P) = \operatorname{Esp} K \times_k \operatorname{Esp} k = \operatorname{Esp} K,$$

luego consta de un solo punto.

Consideremos ahora el caso en que $X = \operatorname{Esp}(k[X_1, \ldots, X_n]/I)$. Entonces $X_K \cong \operatorname{Esp}(K[X_1, \ldots, X_n]/(I))$. Sea $C = V(I)$. Los puntos de $X(K)$ se corresponden con los puntos racionales de X_K, y éstos se corresponden a su vez con los puntos de $C \cap K^n$. Explícitamente, un punto $\sigma \in X(K)$ tiene asociado un único $\sigma' \in X_K(K)$ tal que $\sigma = \sigma' \circ p$. A su vez, σ' se corresponde con el punto $\mathfrak{P} = \sigma'(0) \in X_K$, que a su vez se corresponde con el punto $P = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in C \cap K^n$ determinado por $x_i \equiv \alpha_i$ (mód $\mathfrak{m}_{\mathfrak{P}}$).

Si llamamos $\mathfrak{p} = \sigma(0) \in \operatorname{Esp}(k[X_1, \ldots, X_n]/I)$, tenemos que $p_{\mathfrak{p}}^{\#} \circ \sigma'^{\#}_{\mathfrak{P}} = \sigma_{\mathfrak{p}}^{\#}$. Sea $f : k(\mathfrak{p}) \longrightarrow K$ el k-monomorfismo inducido por $\sigma_{\mathfrak{p}}^{\#}$. Entonces

$$f([x_i]) = \sigma'^{\#}_{\mathfrak{P}}(p_{\mathfrak{p}}^{\#}(x_i)) = \sigma'^{\#}_{\mathfrak{P}}(x_i) = \sigma'^{\#}_{\mathfrak{P}}(\alpha_i) = \alpha_i.$$

En definitiva, un punto $(\mathfrak{p}, f) \in X(K)$, donde $f : k(\mathfrak{p}) \longrightarrow K$, se corresponde con el punto $(f([x_1]), \ldots, f([x_n])) \in C \cap K^n$. ■

Volvamos al caso general en el que X/k es un conjunto algebraico arbitrario y K/k es una extensión de Galois con grupo de Galois $G = G(K/k)$. Cada $\sigma \in G$ determina obviamente un automorfismo de esquemas $\sigma : \operatorname{Esp} K \longrightarrow \operatorname{Esp} K$ definido sobre K. Éste induce a su vez un automorfismo $\sigma : X_K \longrightarrow X_K$ (el determinado por σ y la identidad en X). Tenemos así un homomorfismo de grupos $G \longrightarrow \operatorname{Aut} X$ (en otras palabras, G actúa sobre X como esquema). También podemos definir de forma natural acciones de G sobre $X(K)$ y sobre $X_K(K)$, y ambas se corresponden a través de la biyección natural entre ambos conjuntos.

Explícitamente, si $(P, f) \in X(K)$, tenemos que $(P, f)^\sigma = (P, f \circ \sigma)$, por lo que, en el caso en que $X = \operatorname{Esp}(k[X_1, \ldots, X_n]/I)$ y $C = V(I)$, la acción de G sobre $X(K)$ se corresponde con la acción natural de G sobre $C \cap K^n$.

Por otra parte, el conjunto F_P de todos los puntos $(P, f) \in X(K)$ (con P fijo), se corresponde biunívocamente con el conjunto de los k-monomorfismos $k(P) \longrightarrow K$ y la acción de G sobre F_P se corresponde con la acción $f \mapsto f \circ \sigma$. Es conocido que esta acción es transitiva (porque cada k-monomorfismo se extiende a un k-automorfismo de K) y, por consiguiente, la aplicación $X(K) \longrightarrow X$ dada por $(P, f) \mapsto P$ induce una aplicación inyectiva en el cociente $X(K)/G \longrightarrow X$.

Es claro que un homomorfismo $X \longrightarrow Y$ entre conjuntos algebraicos definido sobre k induce una aplicación $X(K) \longrightarrow Y(K)$.

Teorema 3.67 *Sean X/k e Y/k dos conjuntos algebraicos, de los cuales X es gemétricamente reducido, y sean f, $g : X \longrightarrow Y$ dos homomorfismos definidos sobre k que inducen la misma aplicación $X(\bar{k}) \longrightarrow Y(\bar{k})$. Entonces $f = g$.*

Demostración: Veamos en primer lugar que f y g actúan igual sobre los puntos cerrados de X. En efecto, si $P \in X$ es un punto cerrado, el teorema 2.41 nos da que $k(P)$ es una extensión finita de k, luego existe un k-monomorfismo $k(P) \longrightarrow \bar{k}$, el cual determina, a través del teorema 3.6, un elemento

$$\operatorname{Esp} \bar{k} \longrightarrow \operatorname{Esp} k(P) \longrightarrow X$$

de $X(\bar{k})$ cuya imagen es P. Al pasar a $Y(\bar{k})$ obtenemos un elemento cuya imagen es $f(P)$ o $g(P)$ según con qué homomorfismo la calculemos, luego $f(P) = g(P)$.

Sea ahora un punto arbitrario $P \in X$ y veamos que $f(P) \in \overline{\{g(P)\}}$. En caso contrario $f(P) \in U = Y \setminus \overline{\{g(P)\}}$, luego $P \in f^{-1}[U]$. Tenemos que $\overline{\{P\}}$ es un conjunto algebraico y $\overline{\{P\}} \cap U$ es un abierto no vacío, luego contiene un punto cerrado Q, que también es un punto cerrado de X. Por la continuidad de g tenemos que $f(Q) = g(Q) \in \overline{\{g(P)\}}$, pero por otra parte $f(Q) \in Y \setminus \overline{\{g(P)\}}$, contradicción.

Con esto hemos probado que $\overline{\{f(P)\}} \subset \overline{\{g(P)\}}$, e igualmente tenemos la otra inclusión, luego $f(P)$ y $g(P)$ son ambos puntos genéricos del mismo conjunto algebraico. Esto implica que $f(P) = g(P)$.

Con esto hemos probado que f y g coinciden como aplicaciones continuas. Ahora hemos de ver que coinciden como homomorfismos de esquemas. Para ello basta comprobar que $f_P^\# = g_P^\#$ para cada $P \in X$. Tomemos un abierto afín $f(P) = g(P) \in V \subset Y$ y un abierto afín $P \in U \subset f^{-1}[V] = g^{-1}[V]$. Entonces f y g se restringen a homomorfismos $U \longrightarrow V$, U sigue siendo absolutamente reducido y la aplicación que inducen $U(\bar{k}) \longrightarrow V(\bar{k})$ es la restricción de la original. Así pues, podemos suponer que X e Y son afines.

Digamos que $X = \operatorname{Esp} B$, $Y = \operatorname{Esp} A$, donde A y B son dos k-álgebras finitamente generadas, B reducida. Sean ϕ, $\psi : A \longrightarrow B$ los homomorfismos de anillos asociados a f y g. Basta probar que $f_{\bar{k}} = g_{\bar{k}}$, pues esto equivale a que $\phi \otimes 1 = \psi \otimes 1$, y de aquí se sigue obviamente que $\phi = \psi$. Por otra parte, $f_{\bar{k}}$ y $g_{\bar{k}}$ también inducen la misma aplicación $X_{\bar{k}}(\bar{k}) \longrightarrow Y_{\bar{k}}(\bar{k})$, como se sigue de las identificaciones entre $X_{\bar{k}}(\bar{k}) = X(\bar{k})$ y $Y_{\bar{k}}(\bar{k}) = Y(\bar{k})$. Equivalentemente, podemos suponer que k es algebraicamente cerrado.

Consideremos un epimorfismo $\chi : k[X_1, \ldots, X_n] \longrightarrow A$, que determina un homomorfismo $h : Y \longrightarrow A_k^n$. Es claro que $f \circ h$ y $g \circ h$ determinan la misma aplicación $X(k) \longrightarrow A_k^n(k)$ y basta probar que $\chi \circ \phi = \chi \circ \psi$, pues entonces es obvio que $\phi = \psi$. Equivalentemente, podemos suponer que $Y = A_k^n$.

En resumen, tenemos dos homomorfismos f, $g : X \longrightarrow A_k^n$ que inducen la misma aplicación $X(k) \longrightarrow A_k^n(k)$ y $X = \operatorname{Esp} B$, donde B es una k-álgebra reducida finitamente generada (y k es algebraicamente cerrado). Hemos de probar que los homomorfismos ϕ, $\psi : k[X_1, \ldots, X_n] \longrightarrow B$ coinciden. Para ello basta ver que $\phi(X_i) = \psi(X_i)$ para todo i.

Sea $\mathfrak{P}$ un ideal maximal de B. Entonces $f(\mathfrak{P}) = g(\mathfrak{P}) = \phi^{-1}[\mathfrak{P}] = \psi^{-1}[\mathfrak{P}]$ es un ideal maximal de $k[X_1, \ldots, X_n]$ (teorema 2.42), luego es de la forma

$$(X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n),$$

para ciertos $a_i \in k$. En particular $X_i \equiv a_i \pmod{f(\mathfrak{P})}$, de donde se sigue que $\phi(X_i) \equiv \phi(a_i) = a_i \pmod{\mathfrak{P}}$. Igualmente $\psi(X_i) \equiv a_i \pmod{\mathfrak{P}}$, luego $\phi(X_i) - \psi(X_i) \in \mathfrak{P}$, para todo ideal maximal $\mathfrak{P}$ de B. Por el teorema [3.23] concluimos que $\phi(X_i) - \psi(X_i) \in \operatorname{rad} 0 = 0$. ■

De aquí se sigue en particular que si se cumple $f_{\bar{k}} = g_{\bar{k}}$ entonces $f = g$ (siempre con la hipótesis de que X es geométricamente reducido).

Veamos ahora un teorema de existencia de puntos racionales:

Teorema 3.68 *Si X/k es un conjunto algebraico geométricamente reducido y k^s es la clausura separable de k, entonces $X(k^s) \neq \varnothing$.*

Demostración: El conjunto X_{k^s} es geométricamente reducido, luego podemos reemplazar k por k^s y suponer entonces que $k = k^s$. Hemos de probar que $X(k) \neq \varnothing$. También podemos sustituir X por un abierto afín irreducible, con lo que podemos suponer que X es afín e íntegro. Por el teorema 3.64 tenemos que $k(X) = k(T_1, \ldots, T_d)[f]$, donde f es separable sobre $k(T_1, \ldots, T_d)$.

Pongamos que $X = \operatorname{Esp} B$, con lo que $k(X)$ es el cuerpo de cocientes de B, y sea $A = k[T_1, \ldots, T_d]$. Sea $P(T)$ el polinomio mínimo de f sobre $k(T_1, \ldots, T_d)$.

Tanto f como cada T_i son cocientes de elementos de B, y podemos localizar B respecto del producto de los denominadores (lo cual equivale a sustituir X por un abierto principal). Entonces se cumple que $A[f] \subset B$. Notemos que $k(X)$ es también el cuerpo de cocientes de $A[f]$ y B es una k-álgebra finitamente generada. Si llamamos $g \in A$ al producto de coeficientes de los denominadores de los generadores de B (expresados éstos como fracciones de $A[f]$) por el producto de los denominadores de los coeficientes de $P(T)$, tenemos que $B \subset A_g[f]$ y que $P(T) \in A_g[T]$. Consecuentemente, $B_g = A_g[f] \cong A_g[T]/(P(T))$.

Como $P(T)$ es un polinomio separable, su discriminante $\Delta \in A_g$ es no nulo. Por otra parte, como el cuerpo k es infinito (porque es separablemente cerrado), existe un $t \in k^d$ tal que $g(t) \neq 0$ y $\Delta(t) \neq 0$.

Observemos ahora que el epimorfismo natural $k[T_1, \ldots, T_d, T] \longrightarrow A_g$ dado por $T_i \mapsto T_i$, $T \mapsto 1/g$ induce una inmersión cerrada $\operatorname{Esp} A_g \longrightarrow A^{d+1}$ cuya imagen es $C = V(Tg - 1)$. El punto $(t, 1/g(t)) \in C \cap k^{d+1}$ se corresponde con un punto racional $P \in \operatorname{Esp} A_g$. En particular $k(P) = k$.

Por otro lado, la inclusión $A_g \longrightarrow B_g$ induce un homomorfismo de esquemas $X \longrightarrow \operatorname{Esp} A_g$ y tenemos una inmersión cerrada $X_P = X \times_{A_g} k(P) \longrightarrow X$. Basta probar que X_P tiene puntos racionales, ya que las imágenes de éstos serán puntos racionales en X.

Ahora bien, $X_P = \operatorname{Esp}(B_g \otimes_{A_g} k(P))$, y es fácil ver que

$$B_g \otimes_{A_g} k(P) \cong k[T]/(\tilde{P}(T)),$$

donde $\tilde{P}(T)$ es la imagen de $P(T)$ por el epimorfismo natural $A_g[T] \longrightarrow k[T]$. (Se definen dos homomorfismos mutuamente inversos de forma natural.) Ahora observamos que el discriminante de $\tilde{P}(T)$ es $\Delta(t) \neq 0$, por lo que $\tilde{P}(T)$ es separable sobre k (notemos que no es constante, pues $P(T)$ es mónico y al reducir se conserva el grado.) Como k es separablemente cerrado, esto implica que $\tilde{P}(T) = (T - \alpha_1) \cdots (T - \alpha_r)$, para ciertos $\alpha_i \in k$ distintos dos a dos. De aquí se sigue que $k[T]/(\tilde{P}(T)) \cong k^r$, luego, en definitiva, $X_P \cong \operatorname{Esp} k^r$.

Ciertamente, $\operatorname{Esp} k^r$ tiene puntos racionales, por ejemplo, $\mathfrak{P} = \{0\} \times k^{r-1}$, que es un ideal maximal tal que $k(\mathfrak{P}) = k^r/\mathfrak{P} \cong k$. ∎

Capítulo IV

Algunas clases de esquemas y homomorfismos

La mayoría de las clases de esquemas que hemos definido hasta ahora se corresponden con propiedades algebraicas de los anillos: esquemas noetherianos, esquemas reducidos, esquemas íntegros, etc. Hemos considerado también algunas propiedades topológicas elementales, como la cuasicompacidad o la irreducibilidad, pero es en este capítulo donde vamos a introducir propiedades análogas a conceptos topológicos usuales, como la propiedad de Hausdorff o la compacidad. También vamos a necesitar algunas propiedades algebraicas adicionales, como la que introducimos en la primera sección.

4.1 Homomorfismos de tipo finito

Empezamos estudiando el concepto de homomorfismo de tipo finito y el concepto asociado de esquema de tipo finito sobre un esquema dado. Todos los conceptos que vamos a estudiar en este capítulo son en realidad propiedades de homomorfismos de esquemas, que se particularizan a propiedades de esquemas a través de los homomorfismos estructurales.

Definición 4.1 Un homomorfismo de esquemas $f : X \longrightarrow Y$ es *de tipo finito* si es cuasicompacto y para todo abierto afín V de Y y todo abierto afín U de $f^{-1}[V]$, el homomorfismo natural $\mathcal{O}_Y(V) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U)$ convierte a $\mathcal{O}_X(U)$ en una $\mathcal{O}_Y(V)$-álgebra finitamente generada. Un esquema X/S es *de tipo finito* si lo es su homomorfismo estructural.

Por ejemplo, si X es un esquema definido sobre un cuerpo k, el único abierto no vacío de $\operatorname{Esp} k$ es $V = \operatorname{Esp} k$, luego X será de tipo finito si y sólo X es cuasicompacto, es decir, si es unión de un número finito de abiertos afines U, y para cada abierto afín U de X el anillo $\mathcal{O}_X(U)$ es una k-álgebra finitamente generada. Ahora bien, ésta es precisamente la definición de conjunto algebraico. En definitiva:

Los conjuntos algebraicos sobre un cuerpo k son los esquemas de tipo finito sobre k.

A la hora de comprobar que un homomorfismo es de tipo finito es útil tener en cuenta el teorema siguiente:

Teorema 4.2 *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un homomorfismo de esquemas. Supongamos que existe un cubrimiento $\{V_i\}$ de Y formado por abiertos afines de modo que, para cada i, el abierto $f^{-1}[V_i]$ es unión finita de abiertos afines U_{ij} y que $\mathcal{O}_X(U_{ij})$ es un álgebra finitamente generada sobre $\mathcal{O}_Y(V_i)$. Entonces f es de tipo finito.*

Demostración: Sea $V \subset Y$ un abierto afín. Para cada índice i, podemos expresar $V \cap V_i$ como unión de abiertos V_{ik} que son principales tanto en V como en V_i. En efecto, para cada $P \in V \cap V_i$ tomamos un abierto $P \in U \subset V \cap V_i$ que sea principal en V, y luego un abierto $P \in U' \subset U \subset V \cap V_i$ que sea principal en V_i. Entonces U' también es principal en U —aquí usamos que los abiertos principales tienen una caracterización local (definición 2.14) —, y esto implica que U' es principal en V. (Si $U = D_V(f)$ con $f \in \mathcal{O}_Y(V)$, entonces $\mathcal{O}_Y(U) = \mathcal{O}_Y(V)_f$, y si $U' = D_U(g/f^n)$, con $f, g \in \mathcal{O}_Y(V)$, entonces $U' = D_V(fg)$.)

Como V es cuasicompacto, es unión de un número finito de abiertos V_{ik}. Si llamamos $U_{ijk} = U_{ij} \cap f^{-1}[V_{ik}]$, tenemos que $f^{-1}[V_{ik}] = \bigcup\limits_j U_{ijk}$.

Como V_{ik} es principal en V, tenemos que U_{ijk} es principal en U_{ij} (basta considerar la restricción de f a $U_{ij} \longrightarrow V$ y tener en cuenta que la antiimagen de un abierto principal por un homomorfismo entre esquemas afines es un abierto principal). En particular los abiertos U_{ijk} son afines y, como (i, k) y j recorren conjuntos finitos, vemos que $f^{-1}[V]$ es unión de un número finito de abiertos afines U_{ijk}. Por consiguiente, tenemos que $f^{-1}[V]$ es cuasicompacto, luego el homomorfismo f es cuasicompacto.

El hecho de que U_{ijk} sea principal en U_{ij} implica que el álgebra $\mathcal{O}_X(U_{ijk})$ es finitamente generada sobre $\mathcal{O}_X(U_{ij})$, es decir, que cada elemento $g \in \mathcal{O}_X(U_{ijk})$ se expresa como polinomio en un número finito de elementos de $\mathcal{O}_X(U_{ijk})$ (uno solo, de hecho) con coeficientes de la forma $h|_{U_{ijk}}$, con $h \in \mathcal{O}_X(U_{ij})$. A su vez, $\mathcal{O}_X(U_{ij})$ es finitamente generada sobre $\mathcal{O}_Y(V_i)$, lo que significa que cada uno de estos coeficientes h se expresa como polinomio en un número finito de elementos de $\mathcal{O}_X(U_{ij})$ con coeficientes de la forma $f^{\#}_{V_i}(t)|_{U_{ij}}$, con $t \in \mathcal{O}_Y(V_i)$. En definitiva, el elemento g de partida se expresa como polinomio en un número finito de elementos (fijos) de $\mathcal{O}_X(U_{ijk})$ con coeficientes de la forma

$$f^{\#}_{V_i}(t)|_{U_{ijk}} = f^{\#}_{V_i}(t)|_{f^{-1}[V_{ik}]}|_{U_{ijk}} = f^{\#}_{V_{ik}}(t|_{V_{ik}})|_{U_{ijk}},$$

lo que prueba que el álgebra $\mathcal{O}_X(U_{ijk})$ es finitamente generada sobre $\mathcal{O}_Y(V_{ik})$. Más aún, tenemos que V_{ik} es principal en V, luego $\mathcal{O}_X(U_{ijk})$ es finitamente generada sobre $\mathcal{O}_Y(V)$.

En definitiva, tenemos que $f^{-1}[V]$ es unión de un número finito de abiertos afines U_r, de modo que las álgebras $\mathcal{O}_X(U_r)$ son finitamente generadas sobre $\mathcal{O}_Y(V)$. Consideremos ahora un abierto afín $U \subset f^{-1}[V]$. Razonando como lo hemos hecho con V e Y, podemos descomponer U en unión de un número finito de abiertos U_{rs} principales tanto en U_r como en U. Entonces cada álgebra $\mathcal{O}_X(U_{rs})$ es finitamente generada sobre $\mathcal{O}_X(U_r)$, luego también sobre $\mathcal{O}_Y(V)$.

Sea $V = \operatorname{Esp} A$, sea $U = \operatorname{Esp} B$ y llamemos $D(b_i)$ (para $i = 1, \ldots, l$) a los abiertos U_{rs}, donde $b_i \in B$. La restricción $f|_U : \operatorname{Esp} B \longrightarrow \operatorname{Esp} A$ se corresponde con un homomorfismo de anillos $\phi : A \longrightarrow B$, y tenemos que, a través de ϕ, cada álgebra B_{b_i} es finitamente generada sobre A. Hemos de probar que B es también finitamente generada. Sea C el álgebra generada en B sobre A por los b_i y los numeradores de los generadores de las álgebras B_{b_i} sobre A. De este modo, C es una subálgebra de B finitamente generada sobre A con la propiedad de que $B_{b_i} = C_{b_i}$ para todo i. Esto significa que si $a \in B$, entonces, para cada i, podemos expresar $a = c/b_i^n$, con $c \in C$, luego $b_i^m(ab_i^n - c) = 0$, luego $ab_i^{m+n} \in C$. En definitiva, para cada $a \in C$ existe un natural n tal que $b_i^n a \in C$. (Podemos tomar un mismo n válido para todos los índices i.)

El hecho de que $\operatorname{Esp} B$ sea la unión de todos los b_i se traduce en que $(b_1, \ldots, b_l) = B$. Por consiguiente podemos expresar $1 = c_1 b_1 + \cdots + c_l b_l$, para ciertos $c_i \in B$. Vamos a probar que los c_i generan a B sobre C, con lo que B será también finitamente generada sobre A.

En efecto, dado $a \in B$, consideremos el natural n que cumple que $b_i^n a \in C$ para todo i. Entonces $1 = 1^{ln} = (c_1 b_1 + \cdots + c_l b_l)^{ln}$ se desarrolla en suma de monomios formados por ln factores $c_i b_i$. En cada monomio, al menos uno de estos factores ha de aparecer al menos n veces, luego todos ellos son de la forma $cb_i^n c_1^{r_1} \cdots c_l^{r_l}$, para cierto índice i y cierto $c \in C$. Al multiplicar $a = a \cdot 1$ expresamos a como suma de monomios de la forma $(cb_i^n a) c_1^{r_1} \cdots c_l^{r_l}$, y toda la parte entre paréntesis está en C. ■

En particular, la propiedad de ser de tipo finito es local en la base. Ahora es fácil demostrar varias propiedades:

Teorema 4.3 *Se cumple:*

a) La composición de homomorfismos de tipo finito es de tipo finito.

b) Los homomorfismos de tipo finito son estables bajo cambios de base.

c) Si $X \longrightarrow Z$ y $Y \longrightarrow Z$ son homomorfismos de tipo finito, también lo es $X \times_Z Y \longrightarrow Z$.

d) Si la composición de dos homomorfismos $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$ es de tipo finito y f es cuasicompacto, entonces f es de tipo finito.

Demostración: a) Pongamos que $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$. Sea V un abierto afín en Z. Entonces $g^{-1}[V]$ es unión de abiertos afines U_i y cada $f^{-1}[U_i]$ es unión de abiertos afines W_{ij}. Como f y g son de tipo finito, tenemos que cada álgebra $\mathcal{O}_X(W_{ij})$ es finitamente generada sobre $\mathcal{O}_Y(U_i)$ y ésta a su vez es finitamente generada sobre $\mathcal{O}_Z(V)$. Por consiguiente $\mathcal{O}_X(W_{ij})$ es finitamente generada sobre $\mathcal{O}_Z(V)$. El teorema anterior prueba, entonces, que $f \circ g$ es de tipo finito.

b) Consideramos un homomorfismo de tipo finito $f : X \longrightarrow Y$ y un homomorfismo arbitrario $g : Y' \longrightarrow Y$. Hemos de probar que $p : X \times_Y Y' \longrightarrow Y'$ es de tipo finito.

Cubrimos Y por abiertos afines U_i, de modo que los abiertos $Y_i = g^{-1}[U_i]$ cubren Y'. Llamamos $X_i = f^{-1}[U_i]$. En la construcción del producto fibrado hemos visto que el producto $X \times_Y Y'$ puede obtenerse pegando los productos $X_i \times_{U_i} Y_i = X_i \times_Y Y_i$, luego estos abiertos cubren $X \times_Y Y'$. Notemos también que si $P \in p^{-1}[Y_i]$, entonces $f(p_X(P)) = g(p(P)) \in U_i$, luego $p_X(P) \in X_i$, luego $P \in p_X^{-1}[X_i] \cap p^{-1}[Y_i] = X_i \times_Y Y_i$. El recíproco es trivial, luego concluimos que $p^{-1}[Y_i] = X_i \times_{U_i} Y_i$. Basta probar, entonces, que la proyección $X_i \times_{U_i} Y_i \longrightarrow Y_i$ es de tipo finito, y contamos con que la restricción de f a $X_i \longrightarrow U_i$ es de tipo finito. Equivalentemente, podemos suponer que Y es afín.

Para cada abierto afín $V \subset Y'$, tenemos que $p^{-1}[V] = X \times_Y V$ y basta probar que la proyección $X \times_Y V \longrightarrow V$ es de tipo finito. Equivalentemente, podemos suponer que Y' es afín.

Como f es de tipo finito, tenemos que X es unión de un número finito de abiertos afines U_i tales que cada álgebra $\mathcal{O}_X(U_i)$ es finitamente generada sobre $\mathcal{O}_Y(Y)$. Los abiertos afines $U_i \times_Y Y'$ cubren el producto, y basta probar que cada álgebra $\mathcal{O}(U_i \times_Y Y') = \mathcal{O}_X(U_i) \otimes_{\mathcal{O}_Y(Y)} \mathcal{O}_{Y'}(Y')$ es finitamente generada sobre $\mathcal{O}_{Y'}(Y')$, pero esto es inmediato.

c) Basta ver que $X \times_Z Y \longrightarrow Y \longrightarrow Z$ y aplicar los apartados anteriores.

d) Cubrimos Z con abiertos afines U_i. Entonces los abiertos $g^{-1}[U_i]$ cubren Y. Por el teorema anterior, basta probar que las restricciones de f a los abiertos $f^{-1}[g^{-1}[U_i]]$ son de tipo finito o, equivalentemente, podemos suponer que Z es afín.

Sea V un abierto afín en Y. Por hipótesis $f^{-1}[V]$ es unión finita de abiertos afines U_i. Tenemos que cada $\mathcal{O}_X(U_i)$ es finitamente generada sobre $\mathcal{O}_Z(Z)$, luego también sobre $\mathcal{O}_Y(V)$. ■

En particular, el producto de dos esquemas de tipo finito X/S e Y/S es de tipo finito, y si X/S es de tipo finito, un homomorfismo $f : X \longrightarrow Y$ definido sobre S es de tipo finito si y sólo si es cuasicompacto.

Teorema 4.4 *Las inmersiones cerradas son de tipo finito, al igual que las inmersiones arbitrarias en esquemas localmente noetherianos.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $f : X \longrightarrow Y$ una inmersión cerrada. Si V es un abierto afín en Y, entonces la restricción de f a $f^{-1}[V] \longrightarrow V$ también es una inmersión cerrada, luego podemos suponer que Y es afín. Entonces aplicamos el teorema 2.21, según el cual X también es afín y $\mathcal{O}_X(X)$ es un cociente de $\mathcal{O}_Y(Y)$, luego está generada por 1.

Ahora suponemos que f es una inmersión abierta y que Y es localmente noetheriano y vamos a ver que f es de tipo finito (y esto implica inmediatamente el caso general). Tomamos un cubrimiento de Y por abiertos afines noetherianos U_i. Basta probar que la restricción $f^{-1}[U_i] \longrightarrow U_i$ (que sigue siendo una inmersión abierta) es de tipo finito. Equivalentemente, podemos suponer que Y es afín y noetheriano. Digamos $Y = \operatorname{Esp} A$, donde A es un anillo noetheriano. Podemos cubrir X por un número finito de abiertos principales en Y. Basta probar que las álgebras A_f son finitamente generadas sobre A, pero $A_f = A[1/f]$. ■

Así pues, si Y/S es un esquema localmente noetheriano de tipo finito, todo esquema X/S que pueda sumergirse en Y a través de una inmersión (definida sobre S) es también de tipo finito.

Terminamos con ejemplos de resultados que requieren la hipótesis de finitud:

Teorema 4.5 *Sean X, Y esquemas definidos sobre un esquema localmente noetheriano S, de modo que Y sea de tipo finito sobre S. Sea $P \in X$ y $f : \operatorname{Esp} \mathcal{O}_{X,P} \longrightarrow Y$ un homomorfismo definido sobre S. Entonces existe un entorno U de P en X y un homomorfismo $\bar{f} : U \longrightarrow Y$ definido sobre S tal que el diagrama siguiente es conmutativo:*

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Esp} \mathcal{O}_{X,P} \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \\ U \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

(Donde la flecha vertical es el homomorfismo dado por el teorema 3.5.*)*

Demostración: Tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Esp} \mathcal{O}_{X,P} \arrow[r, "f"] \arrow[d] \arrow[dr] & Y \arrow[d, "\pi_2"] \\ X \arrow[r, "\pi_1"'] & S \end{tikzcd}$$

Tomemos un abierto noetheriano $V \subset S$ que contenga a la imagen de P por el homomorfismo estructural, así como abiertos afines $P \in V_1 \subset \pi_1^{-1}[V]$, $f(\mathfrak{m}_P) \in V_2 \subset \pi_2^{-1}[V]$.

Observemos que $\mathfrak{m}_P$ no está contenido en ningún abierto de $\operatorname{Esp} \mathcal{O}_{X,P}$ distinto del propio $\operatorname{Esp} \mathcal{O}_{X,P}$. En efecto, si $\mathfrak{m}_P \in W \subset \operatorname{Esp} \mathcal{O}_{X,P}$, podemos tomar un abierto principal $\mathfrak{m}_P \in D(\alpha) \subset W$, con $\alpha \in \mathcal{O}_{X,P}$, pero entonces $\alpha \notin \mathfrak{m}_P$, luego $D(\alpha) = \operatorname{Esp} \mathcal{O}_{X,P}$, pues todo ideal de $\mathcal{O}_{X,P}$ está contenido en $\mathfrak{m}_P$.

Esto implica que $f^{-1}[V_2] = \operatorname{Esp} \mathcal{O}_{X,P}$, e igualmente con la flecha vertical, luego podemos restringir el diagrama a

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Esp} \mathcal{O}_{X,P} \arrow[r, "f"] \arrow[d] & V_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\ V_1 \arrow[r, "\pi_1"'] & V \end{tikzcd}$$

Pongamos que $V_1 = \operatorname{Esp} A$, $V = \operatorname{Esp} B$, $V_2 = \operatorname{Esp} C$. El punto P se corresponde con un ideal primo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Esp} A$. El diagrama anterior se corresponde con un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\phi"] & A_{\mathfrak{p}} \\ B \arrow[r] \arrow[u] & A \arrow[u] \end{tikzcd}$$

El anillo B es noetheriano y C es una B-álgebra finitamente generada. Pongamos que $C = B[X_1, \ldots, X_n]/I$, donde el ideal $I = (F_1, \ldots, F_m)$ es finitamente generado porque el anillo de polinomios es noetheriano.

Pongamos que $\phi([X_i]) = a_i/b_i$, donde a_i, $b_i \in A$, y definimos

$$\psi : B[X_1, \ldots, X_n] \longrightarrow A_{\mathfrak{p}}$$

mediante $\psi(X_i) = a_i/b_i$. Sea $\psi(F_i) = u_i/v_i$, con u_i, $v_i \in A$, $v_i \notin \mathfrak{p}$. Aquí hay que entender que u_i y v_i son los elementos de A que se obtienen al operar $F_i(a_1/b_1, \ldots, a_n/b_n)$ según las reglas formales de suma y producto de fracciones, pero sin usar ninguna relación particular del anillo $A_{\mathfrak{p}}$. Como $u_i/v_i = 0$, existe un $p_i \in A \setminus \mathfrak{p}$ tal que $p_i u_i = 0$. De este modo, si llamamos

$$\alpha = b_1 \cdots b_n v_1 \cdots v_m p_1 \cdots p_m \in A \setminus \mathfrak{p},$$

podemos definir

$$\bar{\psi} : B[X_1, \ldots, X_n] \longrightarrow A_\alpha$$

mediante $\bar{\psi}(X_i) = a_i/b_i$, de modo que sigue siendo cierto que $\bar{\psi}(F_i) = u_i/v_i$, pero en A_α se cumple $u_i/v_i = 0$, ya que $\alpha u_i = 0$. Esto hace que $\bar{\psi}$ induce un homomorfismo $C \longrightarrow A_\alpha$, que claramente hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr] & A_{\mathfrak{p}} \\ B \arrow[r] \arrow[u] & A_\alpha \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Este homomorfismo induce un homomorfismo de esquemas que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Esp} \mathcal{O}_{X,P} \arrow[r, "f"] \arrow[d] & V_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\ D(\alpha) \arrow[r, "\pi_1"'] \arrow[ur] & V \end{tikzcd}$$

Llamando $U = D(\alpha) \subset V_1$, tenemos el diagrama del enunciado. ■

En cierto sentido, lo que afirma teorema anterior es que todo homomorfismo $\operatorname{Esp} \mathcal{O}_{X,P} \longrightarrow Y$ se extiende a un entorno de P.

Definición 4.6 Un homomorfismo $f : X \longrightarrow Y$ entre dos esquemas íntegros es *birracional* si transforma el punto genérico ξ de X en el punto genérico de Y, y el homomorfismo $f_\xi^\# : K(Y) \longrightarrow K(X)$ es un isomorfismo.

Teorema 4.7 *Sean X, Y dos esquemas de tipo finito sobre un esquema S y $f : X \longrightarrow Y$ un homomorfismo definido sobre S. Entonces f es birracional si y sólo si se restringe a un isomorfismo entre un abierto de X y un abierto de Y.*

Demostración: Si existen abiertos (no vacíos) $U \subset X$, $V \subset Y$ tales que $f|_U : U \longrightarrow V$ es un isomorfismo de esquemas, entonces $f(\xi) = f|_U(\xi)$ ha de ser el punto genérico de V, luego también el punto genérico de Y. Tomando abiertos menores podemos suponer que U y V son afines. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} K(Y) \arrow[r, "f_\xi^\#"] & K(X) \\ \mathcal{O}_Y(V) \arrow[u] \arrow[r, "(f|_U)_U^\#"'] & \mathcal{O}_X(U) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Por el teorema 3.13 sabemos que las flechas verticales son monomorfismos de anillos, luego $f_\xi^\#$ es un isomorfismo (es la única extensión de $(f|_U)_U^\#$ a los cuerpos de fracciones.

Supongamos ahora que f es birracional. Tomemos un abierto afín $U_0 \neq \varnothing$ en S y sean $V \subset \pi^{-1}[U_0] \subset Y$, $U \subset f^{-1}[V]$ abiertos afines no vacíos. Entonces f se restringe a un homomorfismo $f : U \longrightarrow V$ definido sobre U_0 que también es birracional. Además U y V son de tipo finito sobre U_0. Esto prueba que podemos suponer que los esquemas $X = \operatorname{Esp} B$, $Y = \operatorname{Esp} A$, $S = \operatorname{Esp} C$ son afines.

Tenemos entonces un homomorfismo de C-álgebras $\phi : A \longrightarrow B$ que induce un isomorfismo entre los cuerpos de cocientes (en particular es un monomorfismo). Consideramos $A \subset B \subset K$, donde K es el cuerpo de fracciones de A. Podemos tomar un generador de B como C-álgebra de la forma $a_1/s, \ldots, a_m/s$, con $a_1, \ldots, a_m, s \in A$. Es evidente entonces que ϕ induce un isomorfismo $A_s \longrightarrow B_s$, el cual se traduce en que f se restringe a un isomorfismo $D(s) \subset X \longrightarrow D(s) \subset Y$. ■

4.2 Homomorfismos separados

Los espacios topológicos subyacentes a los esquemas no tienen la propiedad de Hausdorff salvo en casos triviales. No obstante, ahora vamos a introducir una propiedad que representa un papel análogo al de la propiedad de Hausdorff en la topología general.

Definición 4.8 Sea $f : X \longrightarrow Y$ un homomorfismo de esquemas. Llamamos *homomorfismo diagonal* de f al homomorfismo $\Delta_f : X \longrightarrow X \times_Y X$ inducido por la identidad en X. Si no se presta a confusión escribiremos Δ en vez de Δ_f. Diremos que f es *separado* si Δ es una inmersión cerrada (de esquemas). Un esquema X/S es *separado* si lo es su homomorfismo estructural. Un esquema es *separado* si es separado sobre $\mathbb{Z}$.

Podemos considerar como "patológicos" a los esquemas no separados, lo cual no significa que no existan. A título de curiosidad, vamos a ver un ejemplo:

Ejemplo Partimos de $\operatorname{Esp}\mathbb{Z}$, cuya estructura topológica es muy simple: sus puntos se corresponden con los ideales (p), donde $p \in \mathbb{Z}$ es primo, y además está el punto genérico 0. Los abiertos son los conjuntos formados por el punto genérico y todos los primos salvo a lo sumo un número finito de ellos. Fijamos un primo q y consideramos el abierto $D(q) = \operatorname{Esp}\mathbb{Z} \setminus \{(q)\}$. Ahora tomamos dos copias de $\operatorname{Esp}\mathbb{Z}$, a las que llamaremos X_{11} y X_{22}. Dentro de ellas tenemos las copias correspondientes de $D(q)$, a las que llamaremos X_{12} y X_{21}, de tal forma que $X_{11} = X_{12} \cup \{(q_1)\}$, $X_{22} = X_{21} \cup \{(q_2)\}$. Sin más que considerar el isomorfismo natural $f_{12} : X_{12} \longrightarrow X_{21}$ y su inverso f_{21}, estamos en las condiciones del teorema 3.40, que nos da un esquema X caracterizado por que $X = U_1 \cup U_2$, donde U_1 y U_2 son dos abiertos isomorfos a $\operatorname{Esp}\mathbb{Z}$, y $U_1 \cap U_2 = U$ se corresponde a traves de ambos isomorfismos con $D(q)$. Por consiguiente $U_1 = U \cup \{Q_1\}$, $U_2 = U \cup \{Q_2\}$.

Vamos a probar que el esquema X no es separado. Consideramos el producto $X \times_{\mathbb{Z}} X$, las proyecciones $p_1, p_2 : X \times_{\mathbb{Z}} X \longrightarrow \operatorname{Esp}\mathbb{Z}$ y el homomorfismo diagonal $\Delta : X \longrightarrow X \times_{\mathbb{Z}} X$.

Aunque no necesitamos demostrarlo, la idea subyacente al argumento que vamos a dar es la siguiente: en $X \times_{\mathbb{Z}} X$ hay cuatro puntos que se corresponden con (q) a través del homomorfismo estructural: dos de ellos están en la diagonal, y sus proyecciones son ambas iguales a Q_1 o ambas iguales a Q_2, pero también hay otros dos con las proyecciones distintas. Estos dos no están en la diagonal, pero sí en su clausura, lo que hace que $\Delta[X]$ no sea cerrado en el producto.

En la práctica sólo necesitamos considerar uno de estos puntos. Lo obtenemos a partir de los isomorfismos $i_i : \operatorname{Esp}\mathbb{Z} \longrightarrow U_i$, que cumplen $i_i(q) = Q_i$, y que determinan un homomorfismo $f : \operatorname{Esp}\mathbb{Z} \longrightarrow X \times_{\mathbb{Z}} X$. El punto $Q = f(q)$ cumple que $p_i(Q) = Q_i$. Tenemos que $Q \notin \Delta[X]$, pues $p_1(Q) \neq p_2(Q)$. Vamos a probar, no obstante, que todo entorno de Q corta a $\Delta[X]$.

Para ello observamos en primer lugar que $Q \in p_1^{-1}[U_1] \cap p_2^{-1}[U_2] = U_1 \times_{\mathbb{Z}} U_2$ y que $\Delta^{-1}[U_1 \times_{\mathbb{Z}} U_2] = U_1 \cap U_2 = U$. Basta probar que todo entorno de Q en $U_1 \times_{\mathbb{Z}} U_2$ corta a $\Delta[U]$.

Ahora bien, el producto $U_1 \times_{\mathbb{Z}} U_2$ es un esquema afín, caracterizado por el anillo $\mathcal{O}(U_1 \times_{\mathbb{Z}} U_2) \cong \mathbb{Z} \times_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$. Así pues, $U_1 \otimes_{\mathbb{Z}} U_2 \cong \operatorname{Esp}\mathbb{Z}$. La diagonal $U \longrightarrow U_1 \times_{\mathbb{Z}} U_2$ está inducida por los homomorfismos $U \longrightarrow U_i$ correspondientes al homomorfismo de anillos $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_q$, luego dicha diagonal se corresponde con el homomorfismo natural $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_q$, y a través del isomorfismo $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$ se corresponde con el homomorfismo $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_q$. Por otra parte, éste se corresponde con la inclusión $D(q) \longrightarrow \operatorname{Esp} \mathbb{Z}$. En definitiva, tenemos que, a través del isomorfismo $U_1 \times_{\mathbb{Z}} U_2 \cong \operatorname{Esp} \mathbb{Z}$, el homomorfismo $\Delta : U \longrightarrow U_1 \times_{\mathbb{Z}} U_2$ se corresponde con la inmersión abierta $D(q) \longrightarrow \operatorname{Esp} \mathbb{Z}$. En particular $\Delta[U]$ se corresponde con $D(q)$. Como $Q \in U_1 \times_{\mathbb{Z}} U_2 \setminus \Delta[U]$, tenemos que, a través del isomorfismo, Q ha de corresponderse con (q).

Ahora basta probar que todo entorno de (q) en $\mathbb{Z}$ corta a $D(q)$, pero esto es trivial. ■

Pasamos ya a estudiar las propiedades de los homomorfismos separados. Como primera observación demostramos lo siguiente:

Teorema 4.9 *La propiedad de ser separado es local en la base.*

Demostración: Recordemos que esto quiere decir que un homomorfismo $f : X \longrightarrow Y$ es separado si y sólo si todo $P \in Y$ tiene un entorno afín U tal que la restricción $f^{-1}[U] \longrightarrow U$ es separada.

En efecto, consideremos un cubrimiento de Y por abiertos afines. Sea U uno de sus elementos. Entonces $\Delta[f^{-1}[U]] \subset f^{-1}[U] \times_Y f^{-1}[U] = f^{-1}[U] \times_U f^{-1}[U]$, luego Δ_f se restringe a la diagonal $f^{-1}[U] \longrightarrow f^{-1}[U] \times_U f^{-1}[U]$.

Los abiertos $f^{-1}[U] \times_U f^{-1}[U]$ cubren $X \times_Y X$, luego Δ es una inmersión cerrada si y sólo si todas sus restricciones de este tipo son inmersiones cerradas (porque ser una inmersión cerrada es local en la base), si y sólo si todas las restricciones de f son inmersiones cerradas. ■

Observemos que, en las condiciones de la definición de homomorfismo separado, si llamamos p y q a las proyecciones del producto y $P \in X \times_Y X$, entonces $f(p(P)) = f(q(P))$; si, más concretamente, $P \in \Delta[X]$, digamos $P = \Delta(Q)$, entonces $p(P) = q(P) = Q$; pero el recíproco no es cierto, es decir, aunque $p(P) = q(P)$, esto no implica que $P \in \Delta[X]$. Un ejemplo viene dado por el homomorfismo natural $\operatorname{Esp} \mathbb{C} \longrightarrow \operatorname{Esp} \mathbb{R}$. Notemos que

$$\operatorname{Esp} \mathbb{C} \times_{\mathbb{R}} \operatorname{Esp} \mathbb{C} = \operatorname{Esp}(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}),$$

donde el anillo $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ no es un cuerpo (es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión 4, generado por $1 \otimes 1$, $1 \otimes i$, $i \otimes 1$, $i \otimes i$). La diagonal está inducida por el epimorfismo $\mathbb{C} \otimes \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ dado por $a \otimes b \mapsto ab$, luego $\Delta[\operatorname{Esp} \mathbb{C}] = \Delta[\{0\}]$ contiene un único ideal maximal (el núcleo de este epimorfismo, que no es el ideal nulo.) Tenemos así que $\Delta[X]$ es un solo punto, mientras que en $X \times_Y X$ hay más puntos y todos ellos cumplen $p(P) = q(P)$, ya que X sólo tiene un punto. ■

Teorema 4.10 *Todo homomorfismo entre esquemas afines es separado. En particular, todo esquema afín es separado.*

Demostración: Sean $X = \operatorname{Esp} B$, $Y = \operatorname{Esp} A$ y consideremos un homomorfismo de esquemas inducido por un homomorfismo de anillos $A \longrightarrow B$.

Entonces la diagonal está inducida por el homomorfismo $\delta : B \otimes_A B \longrightarrow B$ dado por $\delta(b_1 \otimes b_2) = b_1 b_2$. Obviamente δ es suprayectivo, luego si llamamos I a su núcleo entonces Δ es la inmersión cerrada dada por el teorema 2.20. ■

Todo esquema puede obtenerse pegando esquemas afines, y lo que indica el teorema anterior es que la no separación de un esquema indica que sus abiertos afines están "mal pegados", como en el ejemplo que hemos visto. Ahora podemos simplificar considerablemente la definición de homomorfismo separado:

Teorema 4.11 *Si $f : X \longrightarrow Y$ es un homomorfismo de esquemas y $\Delta[X]$ es cerrado en $X \times_Y X$, entonces f es separado.*

Demostración: Tenemos que Δ es un homeomorfismo en su imagen porque tiene por inversa a cualquiera de las dos proyecciones $\Delta[X] \longrightarrow X$. Ahora tomamos un punto $P \in X$ y hemos de ver que el homomorfismo $\mathcal{O}_{\Delta(P)} \longrightarrow \mathcal{O}_P$ es suprayectivo, pero esto es una propiedad local, luego podemos tomar un entorno afín V de $f(P)$ y un entorno afín $P \in U \subset f^{-1}[V]$, de tal modo que $U \times_V U = U \times_Y U$ es un entorno de $\Delta(P)$ en el producto y Δ se restringe a la diagonal $U \longrightarrow U \times_V U$ inducida por la restricción $U \longrightarrow V$ de f. Esta restricción induce el mismo homomorfismo $\mathcal{O}_{\Delta(P)} \longrightarrow \mathcal{O}_P$, que es suprayectivo por el teorema anterior. ■

Teorema 4.12 *Se cumplen las propiedades siguientes:*

a) Si Y es un esquema separado sobre Z y X_1, X_2 son esquemas sobre Y, el homomorfismo canónico $X_1 \times_Y X_2 \longrightarrow X_1 \times_Z X_2$ es una inmersión cerrada.

b) La composición de homomorfismos separados es un homomorfismo separado.

c) Las inmersiones son homomorfismos separados.

d) Los homomorfismos separados son estables bajo cambios de base.

e) Si $X \longrightarrow Z$, $Y \longrightarrow Z$ son homomorfismos separados, también lo es el homomorfismo estructural $X \times_Z Y \longrightarrow Z$.

f) Si una composición $f \circ g$ de homomorfismos es separada, entonces f es separado.

Demostración: a) Podemos descomponer el homomorfismo como

$$X_1 \times_Y X_2 \longrightarrow X_1 \times_Y Y \times_Y X_2 \longrightarrow X_1 \times_Y Y \times_Z Y \times_Y X_2 \longrightarrow X_1 \times_Z X_2,$$

donde el primero y el último son isomorfismos y el intermedio es $(1, \Delta, 1)$. Por hipótesis Δ es una inmersión cerrada, y $(1, \Delta, 1)$ se obtiene de ella mediante dos extensiones de constantes. Como las inmersiones cerradas son estables bajo cambios de base, concluimos que $(1, \Delta, 1)$ también es una inmersión cerrada.

b) Tomemos dos homomorfismos separados $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$. Descomponemos la diagonal $\Delta_{f\circ g} : X \longrightarrow X \times_Z X$ como

$$X \longrightarrow X \times_Y X \longrightarrow X \times_Z X.$$

El primer homomorfismo es la diagonal, que es una inmersión cerrada por hipótesis, y el segundo lo es por el apartado anterior.

c) Basta probarlo para inmersiones abiertas o cerradas. Ahora bien, sucede que si $f : X \longrightarrow Y$ es una inmersión abierta o cerrada entonces la diagonal $\Delta : X \longrightarrow X \times_Y X$ es un isomorfismo. Para probarlo basta ver que X cumple la definición de $X \times_Y X$ tomando como proyecciones la identidad.

En efecto, si Z es un homomorfismo definido sobre Y y tenemos dos homomorfismos $u, v : Z \longrightarrow X$ definidos sobre Y, entonces $u \circ f = v \circ f$, pues ambos coinciden con el homomorfismo estructural de Z, y el hecho de que f sea una inmersión implica entonces que $u = v$, luego podemos tomar $(u, v) = u = v$ y se cumple la propiedad que caracteriza al producto fibrado.

d) Sea $f : X \longrightarrow Y$ un homomorfismo separado y consideremos un homomorfismo arbitrario $Y' \longrightarrow Y$. Hemos de probar que $X \times_Y Y' \longrightarrow Y'$ es separado. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
X \times_Y Y' \arrow[r, "\Delta"] \arrow[dr, "\Delta\times 1"'] & (X \times_Y Y') \times_{Y'} (X \times_Y Y') \arrow[d] \\
& (X \times_Y X) \times_Y Y'
\end{tikzcd}$$

donde la flecha vertical es un isomorfismo. El homomorfismo $\Delta \times 1$ es una inmersión cerrada por ser una extensión de constantes de Δ.

e) El homomorfismo estructural se descompone como $X \times_Z Y \longrightarrow Y \longrightarrow Z$ y el primero es separado por d)

f) Pongamos que $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$. Consideremos el homomorfismo natural $h : X \times_Y X \longrightarrow X \times_Z X$. Entonces $\Delta_f[X] \subset h^{-1}[\Delta_{f\circ g}[X]]$. Vamos a probar la otra inclusión, con lo que tendremos que $\Delta_f[X]$ es cerrado y f será separado.

Sea $s \in h^{-1}[\Delta_{f\circ g}[X]]$ y sea $x \in X$ tal que $h(s) = \Delta_{f\circ g}(x)$. Sea $t = \Delta_f(x)$, de modo que $h(t) = h(\Delta_f(x)) = \Delta_{f\circ g}(x) = h(s)$. Hemos de probar que $s = t$.

Consideremos un abierto afín tal que $g(f(x)) \in W \subset Z$, y otro tal que $f(x) \in V \subset g^{-1}[W] \subset Y$, y otro tal que $x \in U \subset f^{-1}[V] \subset X$.

Entonces $s, t \in U \times_V U$, pues las proyecciones de ambos son iguales a $x \in U$. Además, h se restringe a la inmersión natural $U \times_V U \longrightarrow U \times_W U$, que es una inmersión cerrada por a), ya que V y W son afines. Por consiguiente $s = t$. ■

En particular, si Y/S es un esquema separado, todo esquema X/S que puede sumergirse en Y a través de una inmersión (definida sobre S) es también separado, si X/S, Y/S son esquemas separados su producto también lo es, y si

X/S es separado, todo homomorfismo $f : X \longrightarrow Y$ definido sobre S también es separado.

El teorema siguiente implica que todos los conjuntos algebraicos proyectivos y cuasiproyectivos son separados:

Teorema 4.13 *Si S es un esquema arbitrario, P_S^n es separado sobre S.*

Demostración: Por el teorema anterior basta demostrar que el esquema $X = \mathrm{P}_{\mathbb{Z}}^n = \operatorname{Proy} \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_{n+1}]$ es separado. Los abiertos afines $U_i = D(X_i) \cong A_{\mathbb{Z}}^n$ cubren $\mathrm{P}_{\mathbb{Z}}^n$ y es fácil ver que sus intersecciones $U_i \cap U_j = D(X_i X_j)$ también son afines (son abiertos principales en $A_{\mathbb{Z}}^n$). Llamemos $A = \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_{n+1}]$. Según el teorema 2.6, sabemos que $\mathcal{O}_X(U_i) = A_{(X_i)}$, y es fácil ver que la restricción $\mathcal{O}_X(U_i) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)$ es la inclusión natural. Consideramos el homomorfismo

$$\mathcal{O}_X(U_i) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_X(U_j) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)$$

dado por $f \otimes g \mapsto f|_{U_i \cap U_j} g|_{U_i \cap U_j}$. Es claro que se trata de un epimorfismo, pues un generador de $\mathcal{O}_X(U_i \cap U_j)$ es de la forma $P/(X_i X_j)^n$, donde P es un monomio homogéneo de grado $2n$, que podemos factorizar como $P_1 P_2$, donde cada P_i es homogéneo de grado n. Una antiimagen es

$$\frac{P_1}{X_i^n} \otimes \frac{P_2}{X_j^n}.$$

Este epimorfismo nos da una inmersión cerrada $f : U_i \cap U_j \longrightarrow U_i \times_{\mathbb{Z}} U_j$. Consideremos la diagonal $\Delta : \mathrm{P}_{\mathbb{Z}}^n \longrightarrow \mathrm{P}_{\mathbb{Z}}^n \times_{\mathbb{Z}} \mathrm{P}_{\mathbb{Z}}^n$ y observemos que $U_i \cap U_j = \Delta^{-1}[U_i \times_{\mathbb{Z}} U_j]$.

La composición de f con las proyecciones se corresponde con la composición

$$\mathcal{O}_X(U_i) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U_i) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_X(U_j) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j),$$

que no es sino la restricción, luego $f \circ p_i$ es la inclusión $U_i \cap U_j \longrightarrow U_i$. Esto implica que f es la restricción de Δ. Así pues, hemos probado que las restricciones $\Delta : \Delta^{-1}[U_i \times_{\mathbb{Z}} U_j] \longrightarrow U_i \times U_j$ son inmersiones cerradas. Como la propiedad de ser una inmersión cerrada es local en la base, concluimos que Δ es una inmersión cerrada, luego $\mathrm{P}_{\mathbb{Z}}^n$ es separado. ■

Veamos ahora algunas propiedades de los esquemas separados.

Teorema 4.14 *Si $f : X \longrightarrow Y$ es un homomorfismo de un esquema afín X en un esquema separado Y y $U \subset Y$ es un abierto afín, entonces el abierto $f^{-1}[U]$ es también afín.*

Demostración: Si llamamos g a la composición

$$X \xrightarrow{(1,f)} X \times_Y Y \xrightarrow{1 \times 1} X \times_{\mathbb{Z}} Y$$

el teorema 4.12 a) nos da que g es una inmersión cerrada, luego se restringe a una inmersión cerrada

$$g^{-1}[X \times_{\mathbb{Z}} U] \longrightarrow X \times_{\mathbb{Z}} U.$$

El esquema $X \times_{\mathbb{Z}} U$ es afín, luego $f^{-1}[U] = g^{-1}[X \times_{\mathbb{Z}} U]$ también lo es. ■

En particular:

Teorema 4.15 *Si X es un esquema separado, la intersección de dos abiertos afines de X es de nuevo un abierto afín.*

Demostración: Si U y V son dos abiertos afines en X, basta aplicar el teorema anterior a la inclusión $i : V \longrightarrow X$ y al abierto U. ■

El teorema siguiente es uno de los resultados más importantes sobre separación:

Teorema 4.16 *Sean f, $g : X \longrightarrow Y$ dos homomorfismos de esquemas definidos sobre un esquema S. Supongamos que X es reducido y que Y es separado. Entonces, si f y g coinciden sobre un abierto denso U de X, se cumple que $f = g$.*

Demostración: Consideremos la diagonal $\Delta : Y \longrightarrow Y \times_S Y$ y sea $h = (f, g) : X \longrightarrow Y \times_S Y$. Se cumple que $f \circ \Delta = (f, f)$, luego $f \circ \Delta$ y h coinciden en U. Esto implica que $U \subset h^{-1}[\Delta[Y]]$, pero $\Delta[Y]$ es cerrado y su antiimagen también. Concluimos que $h^{-1}[\Delta[Y]] = X$, y esto implica que $f = g$ como aplicaciones. Ahora falta ver que coinciden como homomorfismos, es decir, que $f^\# = g^\#$. Para ello basta con que se cumpla $f^\#_P = g^\#_P$ para todo punto $P \in X$, luego se trata de un problema local y podemos suponer que $X = \operatorname{Esp} A$, $Y = \operatorname{Esp} B$. Sean ϕ, $\psi : B \longrightarrow A$ los homomorfismos que inducen a f y a g.

Tomemos $b \in B$ y sea $a = \phi(b) - \psi(b)$. Entonces $a|_U = 0$, luego $U \subset V(a)$. Como U es abierto y $V(a)$ es cerrado, ha de ser $X = V(a)$, pero entonces a es nilpotente. Por hipótesis A es reducido, luego $a = 0$ y así $\phi(b) = \psi(b)$. Esto prueba que $\phi = \psi$, luego $f = g$. ■

El siguiente es un resultado muy general:

Teorema 4.17 *Sea $\mathcal{P}$ una propiedad de homomorfismos de esquemas que cumpla las condiciones siguientes:*

a) Las inmersiones cerradas cumplen $\mathcal{P}$,

b) La composición de homomorfismos que cumplen $\mathcal{P}$ también cumple $\mathcal{P}$,

c) $\mathcal{P}$ es estable bajo cambios de base.

Entonces se cumplen también los dos hechos siguientes:

1. *Si dos homomorfismos $X \longrightarrow Z$, $Y \longrightarrow Z$ cumplen $\mathcal{P}$, el homomorfismo estructural $X \times_Z Y \longrightarrow Z$ también cumple $\mathcal{P}$.*

2. *Si la composición de dos homomorfismos $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ cumple $\mathcal{P}$ y g es separado, entonces f cumple $\mathcal{P}$.*

Demostración: 1) Podemos descomponer

$$X \times_Z Y \longrightarrow Y \longrightarrow Z.$$

El primer homomorfismo es un cambio de base obtenido a partir de $X \longrightarrow Z$, luego cumple $\mathcal{P}$ por c), y la composición cumple $\mathcal{P}$ por b).

2) Podemos descomponer f como

$$X \xrightarrow{(1,f)} X \times_Y Y \longrightarrow X \times_Z Y \longrightarrow Y.$$

Entonces $(1, f)$ es un isomorfismo, luego cumple $\mathcal{P}$ por a), el segundo homomorfismo es una inmersión cerrada por 4.12 a), luego también cumple $\mathcal{P}$, y el tercero cumple $\mathcal{P}$ por c). Concluimos que f cumple $\mathcal{P}$ por b). ■

Por ejemplo, podemos aplicar el teorema a la propiedad "ser de tipo finito", lo que nos da una variante del teorema 4.3 d): Si $f \circ g$ es de tipo finito y g es separado entonces f es de tipo finito. En particular, si X/S es un esquema de tipo finito e Y/S es un esquema separado, todo homomorfismo de $X \longrightarrow Y$ (definido sobre S) es de tipo finito.

Teorema 4.18 *Sean X/S, Y/S dos esquemas, de los cuales el segundo es separado. Si $f : X \longrightarrow Y$ es un homomorfismo definido sobre S, entonces la imagen del homomorfismo $(1, f) : X \longrightarrow X \times_S Y$ (o sea, la* gráfica *de f) es un subconjunto cerrado de $X \times_S Y$.*

Demostración: Basta expresar $(1, f)$ como composición

$$X \xrightarrow{(1,f)} X \times_Y Y \xrightarrow{1\times 1} X \times_S Y,$$

y observar que el primer homomorfismo es, de hecho un isomorfismo y que el segundo es una inmersión cerrada. ■

4.3 Homomorfismos propios

En topología general se define una aplicación propia como una aplicación continua con la propiedad de que las antiimágenes de los compactos son compactas. Los homomorfismos propios son un análogo en la teoría de esquemas. Los esquemas propios se corresponden con los espacios compactos.

Definición 4.19 Un homomorfismo $f : X \longrightarrow Y$ es *cerrado* si las imágenes de los cerrados de X son cerrados en Y. Diremos que f es *universalmente cerrado* si para todo homomorfismo de esquemas $Y' \longrightarrow Y$ la proyección $X \times_Y Y' \longrightarrow Y'$ es cerrada. Diremos que f es *propio* si es de tipo finito, separado y universalmente cerrado. Un esquema X/S es *propio* si lo es su homomorfismo estructural. Los conjuntos algebraicos X/k propios se llaman también *completos.*

Empezamos demostrando que ser un homomorfismo propio es una propiedad local en la base. Para ello observamos primero que ser una aplicación cerrada es una propiedad local en la base: Si $p : X \longrightarrow Y$ es una aplicación continua entre espacios topológicos y, para todos los abiertos V de un cubrimiento de Y, las restricciones $p^{-1}[V] \longrightarrow V$ son cerradas, entonces p es cerrada. En efecto, si C es un cerrado en X y $P \in \overline{p[C]}$, tomamos un abierto V tal que $P \in V$. Entonces $P \in \overline{p[C \cap p^{-1}[V]]} = p[C \cap p^{-1}[V]] \subset p[C]$. El recíproco es trivial.

Teorema 4.20 *El carácter propio de un homomorfismo es una propiedad local en la base.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $f : X \longrightarrow Y$ un homomorfismo de esquemas y consideremos un cubrimiento de Y por abiertos afines. Sabemos que f es de tipo finito y separado si y sólo si lo son todas las restricciones $f^{-1}[U] \longrightarrow U$ (donde U recorre los abiertos del cubrimiento). Falta probar que lo mismo ocurre con la propiedad de ser universalmente cerrado.

Supongamos que las restricciones son universalmente cerradas y consideremos un homomorfismo $g : Y' \longrightarrow Y$. Hemos de ver que la proyección $X \times_Y Y' \longrightarrow Y'$ es cerrada. Los abiertos

$$f^{-1}[U] \times_U g^{-1}[U] = X \times_Y g^{-1}[U] = p^{-1}[g^{-1}[U]]$$

cubren el producto $X \times_Y Y'$, y por hipótesis, las proyecciones

$$f^{-1}[U] \times_U g^{-1}[U] \longrightarrow g^{-1}[U]$$

son cerradas. Como los abiertos $g^{-1}[U]$ cubren Y' y ser cerrado es local en la base, concluimos que la proyección es cerrada.

Recíprocamente, si f es universalmente cerrada, U es un abierto en Y y $g : Y' \longrightarrow U$ es un homomorfismo de esquemas, hemos de probar que la proyección $f^{-1}[U] \times_U Y' \longrightarrow Y'$ es cerrada. Ahora bien, es fácil ver que $f^{-1}[U] \times_U Y' = X \times_Y Y'$ (notemos que si proyectamos sobre X y aplicamos f debemos llegar al mismo punto que proyectando sobre Y' y aplicando g, o sea, a un punto de U). Por hipótesis la proyección $X \times_Y Y' \longrightarrow Y'$ es cerrada. ■

Demostramos ahora las propiedades básicas de los homomorfismos propios:

Teorema 4.21 *Se cumplen las propiedades siguientes:*

a) Las inmersiones cerradas son propias.

b) Los homomorfismos propios son estables bajo cambios de base.

c) La composición de homomorfismos propios es un homomorfismo propio.

d) Si $X \longrightarrow Z$, $Y \longrightarrow Z$ son homomorfismos propios, el homomorfismo estructural $X \times_Z Y \longrightarrow Z$ también lo es.

e) Si la composición de dos homomorfismos $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ es propia y g es separado, entonces f es propio.

f) Si X/S es un esquema propio, Y/S es un esquema separado de tipo finito y $f : X \longrightarrow Y$ es un homomorfismo suprayectivo definido sobre S (o sea, cuya aplicación continua subyacente es suprayectiva), entonces Y es también propio.

Demostración: a) Sabemos que las inmersiones cerradas son separadas y de tipo finito. Además, si $f : X \longrightarrow Y$ es una inmersión cerrada y $Y' \longrightarrow Y$ es un homomorfismo arbitrario, entonces $X \times_Y Y' \longrightarrow Y'$ es también una inmersión cerrada (porque las inmersiones cerradas son estables bajo cambios de base) y, obviamente, las inmersiones cerradas son cerradas. Esto prueba que f es universalmente cerrada.

b) Sabemos que los homomorfismos de tipo finito y separados son estables bajo cambios de base, y falta probar lo mismo para los homomorfismos universalmente cerrados, pero esto es trivial: Si $X \longrightarrow Y$ es universalmente cerrado y tenemos otro homomorfismo $Y' \longrightarrow Y$, entonces $X \times_Y Y' \longrightarrow Y'$ también es universalmente cerrado, ya que si $Y'' \longrightarrow Y'$ es cualquier homomorfismo, tenemos que $(X \times_Y Y') \times_{Y'} Y'' = X \times_Y Y''$, y la proyección $X \times_Y Y'' \longrightarrow Y''$ es cerrada por ser f universalmente cerrado.

c) Sabemos que la composición de homomorfismos de tipo finito y separados cumple estas mismas propiedades. Falta probar lo mismo para los homomorfismos universalmente cerrados: si $X \longrightarrow Y \longrightarrow Z$ son universalmente cerrados y $Z' \longrightarrow Z$ es un homomorfismo arbitrario, entonces la proyección $X \times_Z Z'' \longrightarrow Z''$ se descompone en dos homomorfismos cerrados:

$$X \times_Z Z'' \longrightarrow Y \times_Z Z'' \longrightarrow Z''.$$

El primero es (universalmente) cerrado por b), y el segundo por hipótesis.

d) y e) son consecuencias inmediatas del teorema 4.17.

f) Sea $T \longrightarrow S$ un homomorfismo arbitrario. Hemos de probar que la proyección $Y \times_S T \longrightarrow T$ es cerrada.

Por el teorema 3.55 sabemos que $f_T : X \times_S T \longrightarrow Y \times_S T$ es suprayectiva y la composición

$$X \times_S T \longrightarrow Y \times_S T \longrightarrow T$$

es cerrada porque $X \longrightarrow S$ es un homomorfismo propio. Es claro entonces que $Y \times_S T \longrightarrow T$ es cerrada. ■

En particular, todo subesquema cerrado de un esquema propio es propio, si X/S, Y/S son esquemas propios, entonces $X \times_S Y$ es propio, si X/S es propio e Y/S es separado, entonces todo homomorfismo $X \longrightarrow Y$ (definido sobre S) es propio, y si el homomorfismo es suprayectivo e Y/S es de tipo finito, entonces Y/S es propio. Más en general, dado un homomorfismo $f : X \longrightarrow Y$ definido sobre S con X/S propio e Y/S de tipo finito y separado, si consideramos en $f[X]$ (que es cerrado en Y) la estructura de esquema dada por el teorema 2.33, tenemos que $f[X]$ es propio.

Con esto no tenemos más ejemplos de homomorfismos propios que las inmersiones cerradas. El teorema siguiente nos da muchos más:

Teorema 4.22 *Si S es un esquema arbitrario, el espacio proyectivo P_S^n es propio sobre S.*

DEMOSTRACIÓN: Por definición, $\mathrm{P}_S^n = \mathrm{P}_{\mathbb{Z}}^n \times_{\mathbb{Z}} S$, y por el teorema anterior basta probar que $\mathrm{P}_{\mathbb{Z}}^n$ es propio. Ciertamente es de tipo finito por 4.2, pues $\mathrm{P}_{\mathbb{Z}}^n = \mathrm{Proy}(\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_{n+1}])$ es unión de los abiertos afines $D(X_i)$ y

$$\mathcal{O}(D(X_i)) \cong \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$$

es una $\mathbb{Z}$-álgebra finitamente generada. En 4.13 hemos probado que $\mathrm{P}_{\mathbb{Z}}^n$ es separado. Falta probar que es universalmente cerrado. Para ello tomamos un esquema Y y hemos de ver que la proyección $p : \mathrm{P}_{\mathbb{Z}}^n \times_{\mathbb{Z}} Y \longrightarrow Y$ es cerrada.

Como "ser cerrado" es una propiedad local en la base, podemos suponer que $Y = \mathrm{Esp}\, A$ es un esquema afín. Entonces el teorema 3.49 nos da que

$$\mathrm{P}_{\mathbb{Z}}^n \times_{\mathbb{Z}} Y \cong \mathrm{Proy}(\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_{n+1}] \otimes_{\mathbb{Z}} A) = \mathrm{Proy}(A[X_1, \ldots, X_{n+1}]),$$

y es fácil ver que, a través de este isomorfismo, la proyección se corresponde con el homomorfismo correspondiente a la inclusión de A en el anillo de polinomios. Llamemos $B = A[X_1, \ldots, X_{n+1}]$. Un cerrado (no vacío) en $\mathrm{Proy}\, B$ es de la forma $V(I)$, donde I es un ideal homogéneo en B que no contiene a $(X_1, \ldots, X_{n+1})$. Hemos de probar que $p[V(I)]$ es cerrado en Y. Si $P \in Y$ es un punto arbitrario. El teorema 3.45 nos da que los puntos de $p^{-1}[P]$ se corresponden con los del esquema $\mathrm{Proy}\, B \times_Y \mathrm{Esp}\, k(P) \cong \mathrm{Proy}(B \otimes_A k(P))$. Más precisamente, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Proy\ B} \arrow[r] & \mathrm{Esp}\, A \\
\mathrm{Proy}(B \otimes_A k(P)) \arrow[u, "q"] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

donde la flecha vertical es la proyección, y está asociada al homomorfismo de anillos (graduados) $i : B \longrightarrow B \otimes_A k(P)$ (ver la demostración de 3.49).

Así pues, tenemos que $P \in Y \setminus p[V(I)]$ si y sólo si $V(I) \cap p^{-1}[P] = \varnothing$, si y sólo si $q^{-1}[V(I)] = \varnothing$. Ahora bien, un punto $Q \in \mathrm{Proy}(B \otimes_A k(P))$ cumple $i^{-1}[Q] = q(Q) \in V(I)$ si y sólo si $I \subset i^{-1}[Q]$, si y sólo si $(i[I]) \subset Q$, si y sólo si $Q \in V(i[I])$, luego

$$q^{-1}[V(I)] = V(I \otimes_A k(P)).$$

Concluimos que $P \in Y \setminus p[V(I)]$ si y sólo si $B_+ \otimes_A k(P) \subset \mathrm{rad}\,(I \otimes_A k(P))$.

Quizá convenga matizar que cuando hablamos de $I \otimes_A k(P)$ como ideal de $B \otimes_A k(P)$ nos referimos en realidad a la imagen del homomorfismo natural $I \otimes_A k(P) \longrightarrow B \otimes_A k(P)$, que en principio no tiene por qué ser inyectivo. Lo mismo vale a continuación para $B_m \otimes_A k(P)$.

Ahora observamos que $B_+ \otimes_A k(P) \subset \mathrm{rad}\,(I \otimes_A k(P))$ si y sólo si existe un $m \geq 1$ tal que $B_m \otimes_A k(P) = I_m \otimes_A k(P)$. En efecto: si se da la inclusión existe un r tal que $X_i^r \otimes 1 \in I_m \otimes k(P)$ y basta tomar $m = nr$. La otra implicación es trivial.

Ahora observamos que la igualdad $B_m \otimes_A k(P) = I_m \otimes_A k(P)$ equivale a que $(B/I)_m \otimes_A k(P) = 0$. Basta tener en cuenta que la sucesión exacta

$$I_m \longrightarrow B_m \longrightarrow (B/I)_m \longrightarrow 0$$

continúa siendo exacta al multiplicar por $k(P)$.

En resumen, hemos probado que $P \in Y \setminus p[V(I)]$ si y sólo si existe un $m \geq 1$ tal que $(B/I)_m \otimes_A k(P) = 0$.

Entonces $(B/I)_m \otimes_A \mathcal{O}_{Y,P} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,P}} k(P) = 0$. Como $(B/I)_m$ es un A-módulo finitamente generado, tenemos que $(B/I)_m \otimes_A \mathcal{O}_{Y,P}$ es un $\mathcal{O}_{Y,P}$-módulo finitamente generado. Podemos aplicar el lema de Nakayama para concluir que $(B/I)_m \otimes_A \mathcal{O}_{Y,P} = (B/I)_{mP} = 0$.

Si b es un generador de $(B/I)_m$, el hecho de que sea nulo en la localización en P equivale a que existe un $f \in A \setminus P$ tal que $fb = 0$. Considerando el producto de los f para todos los generadores de $(B/I)_m$ encontramos un $f \in A$ tal que $P \in D(f)$ y $(B/I)_m f = 0$, pero entonces $(B/I)_m \otimes_A k(Q) = 0$ para todo $Q \in D(f)$, lo que implica que $P \in D(f) \subset Y \setminus p[V(I)]$. Así pues, $Y \setminus p[V(I)]$ es abierto y $p[V(I)]$ es cerrado. ■

Como consecuencia, todos los conjuntos algebraicos proyectivos son completos.

Vamos a probar un teorema de finitud sobre esquemas propios, para lo que necesitamos un resultado previo:

Teorema 4.23 *Sea $\phi : A \longrightarrow B$ un homomorfismo de anillos tal que el homomorfismo asociado* $\operatorname{Esp} B \longrightarrow \operatorname{Esp} A$ *sea propio. Entonces B es entero sobre A.*

Demostración: El hecho de que el homomorfismo de esquemas sea propio implica en particular que es de tipo finito, lo que significa que $B = A[b_1, \ldots, b_m]$.

Supongamos en primer lugar que $B = A[b]$ y consideremos el epimorfismo $\phi : A[T] \longrightarrow B$ dado por $\phi[T] = b$. Consideramos a $A_A^1 = \operatorname{Esp} A[T]$ como subesquema abierto de $\mathrm{P}_A^1 = \operatorname{Proy} A[T_1, T_2]$ identificándolo con $D(T_2)$ (ver el teorema 2.6). Concretamente, $T = T_1/T_2$.

Llamemos $Y = \operatorname{Esp} B$ y sea $f : Y \longrightarrow \mathrm{P}_A^1$ la composición de la inmersión $i : Y \longrightarrow A_A^1$ inducida por ϕ y la inmersión $A_A^1 \longrightarrow \mathrm{P}_A^1$. Claramente f está definido sobre A. Como la recta proyectiva es separada, el teorema 4.21 e) nos da que f es un homomorfismo propio. En particular es cerrado, luego existe un ideal homogéneo $I \subset A[T_1, T_2]$ tal que $f[Y] = V(I)$. Como $f[Y] \subset D(T_2) = \mathrm{P}_A^1 \setminus V(T_2)$, tenemos que $V(I) \cap V(T_2) = \varnothing$.

Esto implica que $(T_1, T_2) \subset \operatorname{rad}(I + (T_2))$. En particular $T_1 \in \operatorname{rad}(I + (T_2))$, luego existe un $n \geq 1$ tal que $T_1^n \in I + (T_2)$, luego existe un polinomio $Q(T_1, T_2)$ tal que $P(T_1, T_2) = T_1^n + Q(T_1, T_2)T_2 \in I$. Quedándonos con la parte homogénea de grado n (y teniendo en cuenta que I es homogéneo), podemos suponer que $P(T_1, T_2)$ es homogéneo.

Tenemos que $i[Y] = V(I) \cap D(T_2)$ y este conjunto, a través del isomorfismo $D(T_2) \cong \operatorname{Esp} A[T_1, T_2]_{(T_2)}$ construido en la prueba del teorema 2.6 se corresponde con $V(I_{(T_2)})$, donde $I_{(T_2)} = \{R/S \in A[T_1, T_2]_{(T_2)} \mid R \in I\}$. Así pues, $P(T_1, T_2)/T_2^n \in I_{(T_2)}$.

A través del isomorfismo $A[T_1, T_2]_{(T_2)} \cong A[T]$, el ideal $I_{(T_2)}$ se corresponde con un ideal I' y $P(T_1, T_2)/T_2^n$ se corresponde con $P(T) = P(T, 1)$. En estos términos, $i[Y] = V(I') \subset A_A^1$ y $P(T) = T^n + Q(T) \in I'$, donde $\operatorname{grad} Q \leq n - 1$.

Notemos ahora que $\phi[I'] \subset B$ está formado por elementos nilpotentes. En efecto, si $\mathfrak{P} \in \operatorname{Esp} B$, tenemos que $i(\mathfrak{P}) = \phi^{-1}[\mathfrak{P}] \in V(I')$, luego $I' \subset \phi^{-1}[\mathfrak{P}]$, luego $\phi[I] \subset \mathfrak{P}$. Esto prueba que $\phi[I] \subset \operatorname{rad} 0$, luego sus elementos son nilpotentes.

En particular, $\phi(P) = b^n + Q(b)$ es nilpotente, luego $(b^n + Q(b))^m = 0$ para cierto natural $m \geq 1$. Esto prueba que b es entero sobre A.

En el caso general tenemos que $B = A[b_1, \ldots, b_m]$. Sea $B_1 = A[b_1, \ldots, b_{m-1}]$. La inclusión define un homomorfismo $\operatorname{Esp} B \longrightarrow \operatorname{Esp} B_1$ que compuesto con el homomorfismo $\operatorname{Esp} B_1 \longrightarrow \operatorname{Esp} A$ definido también por la inclusión es el homomorfismo inducido por ϕ, que es propio, por hipótesis. Por 4.21 e) tenemos que $\operatorname{Esp} B \longrightarrow \operatorname{Esp} B_1$ es propio, luego por la parte ya probada B es entero sobre B_1. El teorema [3.63] nos da que $\operatorname{Esp} B \longrightarrow \operatorname{Esp} B_1$ es suprayectiva, luego el teorema 4.21 implica que el homomorfismo $\operatorname{Esp} B_1 \longrightarrow \operatorname{Esp} A$ es propio. Razonando inductivamente podemos concluir que B_1 es un A-módulo finitamente generado y, por consiguiente, lo mismo vale para B. ■

Ahora generalizamos el teorema anterior al caso en que el primer esquema no es necesariamente afín:

Teorema 4.24 *Si X es un esquema propio sobre un anillo A, entonces $\mathcal{O}_X(X)$ es entero sobre A.*

Demostración: Veamos en primer lugar que podemos suponer que X es reducido. Para ello consideramos el esquema X_{red} definido en 2.24 y la inmersión cerrada $i : X_{\mathrm{red}} \longrightarrow X$. Notemos que como X es de tipo finito sobre A, en particular es cuasicompacto, y esto implica que $\mathcal{O}_{X_{\mathrm{red}}}(X_{\mathrm{red}}) = \mathcal{O}_X(X)/\operatorname{rad} 0$. La inmersión cerrada nos da que X_{red} también es propio sobre A. Si demostramos que $\mathcal{O}_{X_{\mathrm{red}}}(X_{\mathrm{red}})$ es entero sobre A, es claro que lo mismo vale para $\mathcal{O}_X(X)$.

Sea $h \in \mathcal{O}_X(X)$. El homomorfismo $\phi : A[T] \longrightarrow \mathcal{O}_X(X)$ dado por $\phi(T) = h$ induce un homomorfismo de esquemas $f : X \longrightarrow \operatorname{Esp} A[T]$, que claramente es propio. En particular es cerrado, luego existe un ideal radical I de $A[T]$ tal que $f[X] = V(I)$. El teorema 2.33 nos permite descomponer f en dos homomorfismos

$$X \longrightarrow \operatorname{Esp} A[T]/I \longrightarrow \operatorname{Esp} A[T].$$

(Notemos que como X es reducido la estructura de esquema en $f[X]$ ha de ser la determinada por el ideal radical I.) Como el primero es suprayectivo, concluimos que $\operatorname{Esp} A[T]/I \longrightarrow \operatorname{Esp} A$ es propio, y el teorema anterior nos da entonces que $A[T]/I$ es entero sobre A. En particular $[T]$ es raíz de un polinomio mónico con coeficientes en A, y su imagen en $\mathcal{O}_X(X)$, que es h, es raíz de ese mismo polinomio. ■

Ahora particularizamos el resultado a conjuntos algebraicos:

Teorema 4.25 *Si X/k es un conjunto algebraico reducido y completo, entonces $\mathcal{O}_X(X)$ es un espacio vectorial de dimensión finita sobre k.*

Demostración: Sean $X_1, \ldots, X_m$ las componentes irreducibles de X, dotadas de la única estructura de esquema reducido. Veamos que el homomorfismo natural

$$\mathcal{O}_X(X) \longrightarrow \bigoplus_i \mathcal{O}_{X_i}(X_i)$$

es inyectivo. En efecto, si $f \in \mathcal{O}(X)$ es no nulo, como no puede ser nilpotente, tenemos que $D(f) \neq \varnothing$. Existe un i tal que $U = D(f) \cap X_i \neq \varnothing$ y, como X_i es irreducible, U es denso en X_i. El complemento V en X_i de la unión de las restantes componentes X_j es un abierto no vacío de X contenido en X_i. Sea $W = V \cap U = V \cap D(f) \neq \varnothing$, que es un abierto en X contenido en $D(f) \cap X_i$.

La inmersión cerrada $X_i \longrightarrow X$ se restringe obviamente a la inmersión cerrada $W \longrightarrow W$, que es la identidad, luego tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(X) & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X_i}(X_i) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_X(W) & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X_i}(W) \end{array}$$

donde la flecha horizontal inferior es la identidad. Como la restricción de f a W no es nula, tampoco lo es la restricción de su imagen en $\mathcal{O}_{X_i}(X_i)$ a W, dicha imagen no es nula.

Esto prueba que podemos suponer que X es irredudible, luego íntegro. Por el teorema anterior, $\mathcal{O}_X(X)$ es un dominio íntegro entero sobre k, luego es un cuerpo.

Si $P \in X$ es un punto cerrado, entonces el homomorfismo $\mathcal{O}_X(X) \longrightarrow k(P)$ es inyectivo, porque es un homomorfismo de cuerpos. Como la extensión $k(P)/k$ es finita, lo mismo le sucede a $\mathcal{O}_X(X)/k$. ■

Más precisamente:

Teorema 4.26 *Sea X/k un conjunto algebraico reducido, conexo y completo. Entonces $\mathcal{O}_X(X)$ es un cuerpo de grado finito sobre k. Si X es geométricamente conexo entonces es puramente inseparable sobre k, y si además X es geométricamente reducido entonces $\mathcal{O}_X(X) = k$.*

Demostración: Llamemos $K = \mathcal{O}_X(X)$. En principio K es una k-álgebra reducida y por el teorema anterior tiene dimensión finita sobre k. El teorema [3.82] nos da que $\operatorname{Esp} K$ es finito y tiene dimensión 0 luego todos sus puntos son cerrados (y también abiertos). Si $\operatorname{Esp} K = \{P_1, \ldots, P_m\}$, tenemos un isomorfismo

$$K \longrightarrow \mathcal{O}(\{P_1\}) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}(\{P_m\}).$$

Ahora bien, si $m > 1$ la descomposición anterior nos daría elementos idempotentes en K, en contradicción con el teorema 3.7. Concluimos que K tiene un único ideal primo y, al ser reducido, éste ha de ser 0, luego K es un cuerpo.

Sea $\bar{k}$ la clausura algebraica de k y k^s la clausura separable. Si X es geométricamente conexo entonces X_{k^s} sigue siendo conexo, reducido (por 3.57) y completo. Por la parte ya probada y por el teorema 3.51, tenemos que el anillo $\mathcal{O}(X_{k^s}) = K \otimes_k k^s$ es un cuerpo, que contiene a $(K \cap k^s) \otimes_k (K \cap k^s)$ pero este producto sólo puede ser un dominio íntegro si $K \cap k^s = k$ (ver la prueba del teorema 3.63, donde usamos el mismo argumento). Esto prueba que K/k es puramente inseparable.

Si X es geométricamente reducido entonces todo el razonamiento precedente puede hacerse con $\bar{k}$ en lugar de con k^s, y la conclusión es que $K \cap \bar{k} = k$, pero por otra parte sabemos que K tiene grado finito sobre k, luego ha de ser $K = k$.

■

Veamos una consecuencia de estos resultados: consideremos un conjunto algebraico reducido X/k que sea afín y completo a la vez. Sea Y una componente irreducible, que también será afín y completa. Entonces $\mathcal{O}_Y(Y)$ es un cuerpo, luego $k(Y) = \mathcal{O}_Y(Y)$ es una extensión finita de k. Por el teorema 3.22 concluimos que $\dim Y = 0$, luego también $\dim X = 0$. Esto se traduce en que X es un conjunto finito de puntos. Por otra parte, es fácil ver que cualquier conjunto finito de puntos es un conjunto proyectivo, luego es completo. De aquí deducimos, a su vez:

Teorema 4.27 *Todo homomorfismo $f : X \longrightarrow Y$ de un conjunto algebraico reducido, completo y conexo X/k en un conjunto algebraico afín Y/k es constante.*

Demostración: La imagen $f[X]$ es cerrada en Y, y podemos considerarla como subesquema cerrado reducido de Y, de modo que f induce un homomorfismo $f : X \longrightarrow f[X]$ (teorema 2.33). Por el teorema 4.21 tenemos que $f[X]$ es un esquema propio, claramente conexo y, por ser un subesquema cerrado de Y, es un conjunto algebraico afín. Según acabamos de ver, $f[X]$ se reduce a un punto, lo que prueba que f es constante. ■

Para terminar demostramos unos teoremas sobre extensión de homomorfismos que necesitaremos más adelante.

Teorema 4.28 *Sea X un esquema propio sobre un anillo de valoración discreta A y sea K el cuerpo de cocientes de A. Entonces, la aplicación natural $X(A) \longrightarrow X_K(K)$ dada por $f \mapsto f_K$ es biyectiva.*

Demostración: Recordemos que $X(A)$ está formado por todos los homomorfismos $\operatorname{Esp} A \longrightarrow X$ definidos sobre A, e igualmente con $X_K(K)$ y

$X_K = X \times_A \operatorname{Esp} K$. Notemos que $\operatorname{Esp} A$ consta de dos puntos: el ideal nulo (el punto genérico 0) y el ideal maximal (el punto cerrado $\mathfrak{m}$). El homomorfismo natural $\operatorname{Esp} K \longrightarrow \operatorname{Esp} A$ es una inmersión abierta y podemos identificar $X_K = \pi^{-1}[0]$, donde $\pi : X \longrightarrow \operatorname{Esp} A$ es el homomorfismo estructural, tomando como proyecciones la inclusión $X_K \longrightarrow X$ y la restricción de π, cuya imagen es $\operatorname{Esp} K$. Esto se comprueba observando que X_K así definido cumple la definición de producto fibrado. Para cada $f \in X(A)$, tenemos que f_K es su restricción a $\operatorname{Esp} K$, luego lo que queremos probar es que todo homomorfismo $\operatorname{Esp} K \longrightarrow X_K$ se extiende a un homomorfismo $\operatorname{Esp} A \longrightarrow X$.

En efecto, la inyectividad se debe al teorema 4.16, pues tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Esp} K \arrow[r, "f_K"] \arrow[d] & X_K \arrow[d] \\ \operatorname{Esp} A \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

Basta tener en cuenta que el esquema $\operatorname{Esp} A$ es obviamente reducido, X es separado sobre A y la imagen de $\operatorname{Esp} K$ es el punto genérico de $\operatorname{Esp} A$, que es denso. El problema es probar la suprayectividad.

Dado un homomorfismo $g : \operatorname{Esp} K \longrightarrow X_K$ definido sobre K, consideremos $P = g(0) \in X_K$. Tenemos que P es cerrado en X_K porque es un punto racional sobre un cuerpo. Sea Z la clausura de P en X, dotada de la estructura de subesquema cerrado reducido (luego íntegro) de X. Notemos que Z también es un esquema propio sobre A. Por lo tanto $\pi[Z]$ es cerrado en $\operatorname{Esp} A$, y contiene a $\pi(P) = 0$, luego $\pi[Z] = \operatorname{Esp} A$. Así pues, existe un $Q \in Z$ tal que $\pi(Q) = \mathfrak{m}$. Consideramos el anillo $\mathcal{O}_{Z,Q}$ y el homomorfismo $\pi_Q^\# : \mathcal{O}_{\operatorname{Esp} A,\mathfrak{m}} \longrightarrow \mathcal{O}_{Z,Q}$.

Observemos que $\mathcal{O}_{\operatorname{Esp} A,\mathfrak{m}} = A_\mathfrak{m} = A$ (pues $A \setminus \mathfrak{m}$ es el conjunto de las unidades de A). Por otra parte, $\mathcal{O}_{Z,Q}$ es un dominio íntegro cuyo cuerpo de cocientes es $\mathcal{O}_{Z,P}$ (pues P es el punto genérico de Z). Más explícitamente, tenemos un monomorfismo de A-álgebras $\mathcal{O}_{Z,Q} \longrightarrow \mathcal{O}_{Z,P}$.

No puede ocurrir que $\mathcal{O}_{Z,Q}$ sea él mismo un cuerpo, pues tomando un entorno afín de Q (que contendrá también a P), podemos representar $\mathcal{O}_{Z,Q}$ como la localización de un dominio íntegro respecto a un ideal primo distinto de 0. Equivalentemente, tenemos que $\mathfrak{m}_Q \neq 0$. El núcleo de $\pi_Q^\#$ es un ideal primo que no puede ser $\mathfrak{m}$ (pues $\mathfrak{m} = \pi_Q^{\#-1}[\mathfrak{m}_Q]$), luego dicho núcleo ha de ser 0 y así $\pi_Q^\#$ es un monomorfismo (de A-álgebras).

Como P es cerrado en X_K, tenemos que $\overline{\{P\}} = Z \cap X_K$ es abierto en Z, luego $\mathcal{O}_{Z,P} = \mathcal{O}_{\overline{\{P\}},P}$. La inmersión cerrada $Z \longrightarrow X$ se restringe a una inmersión cerrada $\overline{\{P\}} \longrightarrow X_K$, luego la estructura de esquema de $\overline{\{P\}}$ es la estructura de subesquema cerrado reducido (íntegro) de X_K. El homomorfismo g se restringe a un homomorfismo $g : \operatorname{Esp} K \longrightarrow \overline{\{P\}}$ definido sobre K. Esto implica que $\overline{\{P\}} = \operatorname{Esp} K$ y $\mathcal{O}_{\overline{\{P\}},P} = K$. En resumen, tenemos monomorfismos de A-álgebras $A \longrightarrow \mathcal{O}_{Z,Q} \longrightarrow K$. Podemos considerar $A \subset \mathcal{O}_{Z,Q} \subset K$. Más aún, como el primer monomorfismo es esencialmente $\pi_Q^\#$, sabemos además que $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_Q \cap A$.

Sea $v : K \longrightarrow \mathbb{Z}$ la valoración de A. Si $t \in \mathcal{O}_{Z,Q} \setminus A$, entonces $v(t) < 0$, luego $v(1/t) < 0$, luego $1/t \in \mathfrak{m}$, luego $1 \in \mathfrak{m}_Q$, contradicción. Así pues, concluimos que $\mathcal{O}_{Z,Q} = A$. El teorema 3.5 nos da un homomorfismo de esquemas

$$\operatorname{Esp} A = \operatorname{Esp} \mathcal{O}_{Z,Q} \longrightarrow Z \longrightarrow X.$$

Llamamos f a este homomorfismo y observamos que $\pi(f(0)) = 0$, luego $f(0) \in Z \cap X_K = \{P\}$, luego $f(0) = P$. Entonces $f_K : \operatorname{Esp} K \longrightarrow Z_K$ cumple $f_K(0) = g(0)$, y esto implica que $f_K = g$, pues una sección en un esquema sobre un cuerpo está determinada por su imagen. ■

Veamos ahora una variante del teorema anterior:

Teorema 4.29 *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un homomorfismo propio, sea A un anillo de valoración discreta con cuerpo de cocientes K y sea $\pi : \operatorname{Esp} A \longrightarrow Y$ un homomorfismo de esquemas. Entonces la aplicación natural $X(A) \longrightarrow X(K)$ es biyectiva.*

Demostración: Hemos de entender que $X(A)$ es el conjunto de homomorfismos $\operatorname{Esp} A \longrightarrow X$ *definidos sobre* Y, e igualmente con $X(K)$. Aplicamos el teorema anterior a la proyección

$$X_A = X \times_Y \operatorname{Esp} A \longrightarrow \operatorname{Esp} A,$$

que nos da una una biyección $X_A(A) \longrightarrow X_K(K)$. Ahora bien, $X_A(A)$ se identifica con $X(A)$ a través de la proyección $X_A \longrightarrow X$ y $X_K(K)$ se identifica igualmente con $X(K)$. El esquema siguiente muestra que la biyección $f \mapsto f_K$ se corresponde con la aplicación natural $X(A) \longrightarrow X(K)$, es decir, que $f'_K = p \circ f'$:

$$\begin{tikzcd}
X_K \arrow[r, "p"] & X_A \arrow[r, "p"] & X \\
\operatorname{Esp} K \arrow[u, "f_K"] \arrow[r, "p"'] & \operatorname{Esp} A \arrow[u, "f"] \arrow[ru, "f'"'] &
\end{tikzcd}$$

■

En otras palabras, lo que tenemos es que todo homomorfismo $\operatorname{Esp} K \longrightarrow X$ definido sobre Y se extiende a un único homomorfismo $\operatorname{Esp} A \longrightarrow X$ definido también sobre Y.

4.4 Homomorfismos proyectivos

Vamos a definir ahora una noción de homomorfismo proyectivo que a su vez dará lugar de la forma habitual a la de esquema proyectivo sobre un esquema dado, que será a su vez una generalización de la noción que ya tenemos de conjunto algebraico proyectivo.

Definición 4.30 Un homomorfismo de esquemas $f : X \longrightarrow S$ es *proyectivo* si puede expresarse como composición de una inmersión cerrada $X \longrightarrow \mathrm{P}_S^n$, para cierto $n \geq 0$, seguida del homomorfismo natural (la proyección) $\mathrm{P}_S^n \longrightarrow S$. Un esquema X/S es proyectivo (diremos también que X es proyectivo sobre S) si lo es su homomorfismo estructural.

Así pues, un esquema X/S es proyectivo si y sólo si X es isomorfo (sobre S) a un subesquema cerrado de un espacio proyectivo P_S^n. Es evidente que los conjuntos algebraicos proyectivos sobre un cuerpo k en el sentido de 2.13 son los esquemas proyectivos sobre $\operatorname{Esp} k$ en el sentido de la definición anterior.

Otro hecho elemental es que la n que aparece en la definición de homomorfismo proyectivo se puede tomar arbitrariamente grande, pues si $m \leq n$ el homomorfismo natural

$$\mathbb{Z}[X_0,\ldots,X_n] \longrightarrow \mathbb{Z}[X_0,\ldots,X_m] \cong \mathbb{Z}[X_0,\ldots,X_n]/(X_{m+1},\ldots,X_n)$$

induce una inmersión cerrada $\mathrm{P}_\mathbb{Z}^m \longrightarrow \mathrm{P}_\mathbb{Z}^n$, que a su vez determina por cambio de base una inmersión cerrada $\mathrm{P}_S^m \longrightarrow \mathrm{P}_S^n$ (definida sobre S).

El teorema 4.22 implica que todos los homomorfismos proyectivos son propios, pues son composición de una inmersión completa (luego propia) con un homomorfismo natural $\mathrm{P}_S^n \longrightarrow S$, que también es propio.

Conviene observar quién es P_S^0. Para ello empezamos notando que

$$\mathrm{P}_\mathbb{Z}^0 = \operatorname{Proy}\mathbb{Z}[X] = D(X) \cong \operatorname{Esp}\mathbb{Z}[X]_{(X)} \cong \operatorname{Esp}\mathbb{Z}.$$

Más precisamente, el isomorfismo ha de ser el único homomorfismo que existe $\mathrm{P}_\mathbb{Z}^0 \longrightarrow \operatorname{Esp}\mathbb{Z}$. En general, $\mathrm{P}_S^0 = S \times_\mathbb{Z} \mathrm{P}_\mathbb{Z}^0 \cong S \times_\mathbb{Z} \operatorname{Esp}\mathbb{Z} \cong S$, y el isomorfismo no es sino la proyección $\mathrm{P}_S^0 \longrightarrow S$.

Para demostrar las propiedades básicas de los homomorfismos proyectivos necesitamos un resultado previo:

Teorema 4.31 *Dado un esquema S, existe una inmersión cerrada*

$$\mathrm{P}_S^m \times_S \mathrm{P}_S^n \longrightarrow \mathrm{P}_S^{mn+m+n}.$$

Demostración: Lo demostramos en primer lugar para $S = \operatorname{Esp}\mathbb{Z}$. Pongamos

$$\mathrm{P}_\mathbb{Z}^m = \operatorname{Proy}\mathbb{Z}[S_0,\ldots,S_m], \quad \mathrm{P}_\mathbb{Z}^n = \operatorname{Proy}\mathbb{Z}[T_0,\ldots,T_n],$$
$$\mathrm{P}_\mathbb{Z}^{mn+m+n} = \operatorname{Proy}\mathbb{Z}[U_{ij}, i = 0,\ldots,m,\ j = 0,\ldots,n].$$

Sea $f_{ij} : D(S_i) \times_\mathbb{Z} D(T_j) \longrightarrow D(U_{ij})$ es homomorfismo asociado al homomorfismo de anillos

$$\mathcal{O}(D(U_{ij})) \longrightarrow \mathcal{O}(D(S_i)) \otimes_\mathbb{Z} \mathcal{O}(D(T_j))$$

dado por $U_{rs}/U_{ij} \mapsto (S_r/S_i) \otimes (T_s/T_j)$. Es claro que este homomorfismo es suprayectivo, luego el homomorfismo de esquemas es una inmersión cerrada.

Se comprueba sin dificultad que los homomorfismos f_{ij} se extienden a un único homomorfismo $\mathrm{P}^m_{\mathbb{Z}} \times_{\mathbb{Z}} \mathrm{P}^n_{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathrm{P}^{mn+m+n}_{\mathbb{Z}}$, que es también una inmersión cerrada.

Si $S = \operatorname{Esp} A$, para cualquier anillo A, entonces mediante dos cambios de base obtenemos una inmersión cerrada $\mathrm{P}^m_S \times_{\mathbb{Z}} \mathrm{P}^n_S \longrightarrow \mathrm{P}^{mn+m+n}_S$, que podemos componer con la inmersión cerrada $\mathrm{P}^m_S \times_S \mathrm{P}^n_S \longrightarrow \mathrm{P}^m_S \times_{\mathbb{Z}} \mathrm{P}^n_S$ (que es ciertamente una inmersión cerrada por el teorema 4.12).

Con esto tenemos el teorema probado para esquemas afines (o, más en general, para esquemas separados). Si S es un esquema arbitrario, un cubrimiento de S por abiertos afines U da lugar a un cubrimiento de P^{mn+m+n}_S por abiertos P^{mn+m+n}_U. Tenemos inmersiones cerradas $\mathrm{P}^m_U \times_U \mathrm{P}^n_U \longrightarrow \mathrm{P}^{mn+m+n}_U$ y los abiertos $\mathrm{P}^m_U \times_U \mathrm{P}^n_U = \mathrm{P}^m_U \times_S \mathrm{P}^n_U$ cubren $\mathrm{P}^m_S \times_S \mathrm{P}^n_S$. Una comprobación rutinaria muestra que las inmersiones cerradas (entendiendo que se trata concretamente de las construidas anteriormente) se extienden a una inmersión cerrada de acuerdo con el enunciado. ■

Ejemplo Vamos a calcular la imagen de la inmersión $\mathrm{P}^1_k \times_k \mathrm{P}^1_k \longrightarrow \mathrm{P}^3_k$.

Es claro que la construcción hecha para $\mathbb{Z}$ en el teorema anterior vale en realidad para un anillo arbitrario (en nuestro caso k). Basta calcular la imagen de la restricción $D(S_0) \times D(T_0) \longrightarrow D(U_{00}) \subset A^3_k$ y tomar su clausura en P^3_k. Dicha imagen es $V(I)$, donde I es el núcleo del epimorfismo

$$k[U_{10}, U_{01}, U_{11}] \longrightarrow k[S_1, T_1]$$

dado por $U_{10} \mapsto S_1$, $U_{01} \mapsto T_1$, $U_{11} \mapsto S_1T_1$. Particularizando la notación, tenemos $k[X, Y, Z] \longrightarrow k[S, T]$ dado por $X \mapsto S$, $Y \mapsto T$, $Z \mapsto ST$ y sabemos que su núcleo I es un ideal primo tal que $V(I) \cong A^2_k$. Obviamente $(XY-Z) \subset I$, y ambos ideales son primos de la misma dimensión, luego han de coincidir. La clausura de $V(I)$ en P^3_k es $Q = V(XY - ZW)$. En particular hemos probado que $Q \cong \mathrm{P}^1_k \times_k \mathrm{P}^1_k$.

El isomorfismo se restringe a un isomorfismo $V(I) \cong A^1_k \times_k A^1_k \cong A^2_k$ de esquemas afines determinado a su vez por el isomorfismo

$$k[X, Y, Z]/I \cong k[S, T] \cong k[S] \otimes_k k[T]$$

dado por $[X] \mapsto S$, $[Y] \mapsto T$, $[Z] = [X][Y] \mapsto ST$.

Las proyecciones $\mathrm{P}^1_k \times_k \mathrm{P}^1_k \longrightarrow \mathrm{P}^1_k$ se restringen a las proyecciones $A^2_k \longrightarrow A^1_k$ asociadas a los monomorfismos $k[S] \longrightarrow k[S, T]$ y $k[T] \longrightarrow k[S, T]$, luego al componerlas con el isomorfismo se corresponden con los homomorfismos de esquemas asociados a los homomorfismos de anillos

$$k[S] \longrightarrow k[X, Y, Z]/I, \quad k[T] \longrightarrow k[X, Y, Z]/I$$

dadas por $S \mapsto [X]$ y $T \mapsto [Y]$. Por consiguiente, se trata de los homomorfismos $V(I) \longrightarrow A^1_k$ dados por $(x, y, z) \mapsto x$ y $(x, y, z) \mapsto y$, respectivamente. En términos de coordenadas homogéneas son

$$(x, y, z, w) \mapsto (x, w) \quad \text{y} \quad (x, y, z, w) \mapsto (y, w).$$

Estos homomorfismos se extienden (necesariamente de forma única) a monomorfismos $Q \longrightarrow \mathrm{P}^1_k$, a saber, los dados por

$$p_1(x,y,z,w) = (x,w) = (z,y) \quad \text{y} \quad p_2(x,y,z,w) = (y,w) = (z,x).$$

Aquí usamos que la ecuación $xy - zw = 0$ equivale a que la matriz

$$\begin{pmatrix} x & z \\ w & y \end{pmatrix}$$

tenga determinante nulo, lo que justifica la igualdad de los puntos de coordenadas homogéneas indicadas, con la característica de que, para un punto arbitrario $(x,y,z,w) \in Q$, a lo sumo uno de los dos vectores (x,w), (z,y) puede ser nulo, luego p_1 siempre está definida, e igualmente sucede con p_2.

A partir de las proyecciones $p_1(P) = (u,v)$, $p_2(P) = (r,s)$ podemos recuperar el punto (cerrado) $P \in Q$ como $P = (us, vr, ur, vs)$. ■

Pasemos ya a los resultados básicos sobre homomorfismos proyectivos:

Teorema 4.32 *Se cumplen las propiedades siguientes:*

a) Las inmersiones cerradas son proyectivas.

b) Los homomorfismos proyectivos son estables bajo cambios de base.

c) La composición de homomorfismos proyectivos es un homomorfismo proyectivo.

d) Si $X \longrightarrow Z$, $Y \longrightarrow Z$ son homomorfismos proyectivos, el homomorfismo estructural $X \times_Z Y \longrightarrow Z$ también lo es.

e) Si la composición de dos homomorfismos $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ es proyectiva y g es separado, entonces f es proyectivo.

Demostración: a) Si $f : X \longrightarrow S$ una inmersión cerrada, componiéndola con el isomorfismo $S \cong \mathrm{P}^0_S$ tenemos una inmersión cerrada $X \longrightarrow \mathrm{P}^0_S$ que cumple la definición de homomorfismo proyectivo.

b) Si $X \longrightarrow \mathrm{P}^n_S \longrightarrow S$ es un homomorfismo proyectivo y consideramos un homomorfismo arbitrario $Y \longrightarrow S$, entonces tenemos

$$X \times_S Y \longrightarrow \mathrm{P}^n_S \times_S Y \longrightarrow S \times_S Y,$$

donde el primer homomorfismo es una inmersión cerrada. Equivalentemente, tenemos

$$X \times_S Y \longrightarrow \mathrm{P}^n_Y \longrightarrow Y,$$

luego el homomorfismo $X \times_S Y \longrightarrow Y$ es también proyectivo.

c) Cosideremos dos homomorfismos proyectivos:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "i"'] & & Y \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "i'"'] & & Z \\
& \mathrm{P}^m_Y \arrow[ur] & & \mathrm{P}^n_Z \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

En el diagrama siguiente, las flechas horizontales superiores son todas inmersiones cerradas (usamos en particular que Y es un esquema propio, luego separado, sobre Z):

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "{(1,f)}"] \arrow[dr, "f"'] & X \times_Y Y \arrow[r, "1\times 1"] \arrow[d, "p"'] & X \times_Z Y \arrow[r, "i\times i'"] \arrow[d, "p"'] & \mathrm{P}^m_Y \times_Z \mathrm{P}^n_Z \arrow[r] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "\pi"] & \mathrm{P}^r_Z \arrow[d, "\rho"] \\
& Y \arrow[r, "1"] & Y \arrow[r, "i'"] & \mathrm{P}^m_Z \arrow[r] & Z
\end{tikzcd}$$

(Aquí $r = mn+m+n$.) La conmutatividad del diagrama hace que si llamamos h a la fila superior (que es una inmersión cerrada), se cumple que $f \circ g = h \circ \rho$, luego $f \circ g$ también es proyectivo. Las propiedades d) y e) se siguen de 4.17. ■

Definición 4.33 Si X_1 y X_2 son dos esquemas definidos sobre un esquema S, definimos la *suma directa* $X_1 \oplus X_2$ como el único esquema (salvo isomorfismo) definido sobre S que puede expresarse como unión disjunta de dos subesquemas abiertos (luego también cerrados) isomorfos a X_1 y X_2 respectivamente.

Es fácil enunciar y demostrar las propiedes básicas de esta suma de esquemas, como por ejemplo el hecho de que distribuye a los productos:

$$(X_1 \oplus X_2) \times_S Y \cong (X_1 \times_S Y) \oplus (X_2 \times_S Y).$$

Observemos ahora que en $\mathrm{P}_{\mathbb{Z}}^{mn+m+n} = \operatorname{Proy} \mathbb{Z}[X_0, \ldots, X_m, Y_0, \ldots, Y_n]$ podemos definir los subesquemas cerrados

$$C_1 = V(Y_0, \ldots, Y_n) \cong \mathrm{P}^m_{\mathbb{Z}}, \qquad C_2 = V(X_0, \ldots, X_m) \cong \mathrm{P}^n_{\mathbb{Z}},$$

de modo que $C_1 \cap C_2 = V(X_0, \ldots, X_m, Y_0, \ldots, Y_n) = \varnothing$. Esto implica que tenemos una inmersión cerrada $i : \mathrm{P}^m_{\mathbb{Z}} \oplus \mathrm{P}^n_{\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathrm{P}^{mn+m+n}_{\mathbb{Z}}$. Si S es un esquema arbitrario, de ella obtenemos a su vez una inmersión cerrada

$$\mathrm{P}^m_S \oplus \mathrm{P}^n_S \longrightarrow \mathrm{P}^{mn+m+n}_S.$$

En otras palabras, la suma de espacios proyectivos es un esquema proyectivo, y de aquí se deduce inmediatamente que la suma de esquemas proyectivos es un esquema proyectivo.

Puede probarse que existen conjuntos algebraicos completos que no son proyectivos. Sin embargo, ambas clases de esquemas están relacionadas:

Teorema 4.34 (Lema de Chow) *Sea $X \longrightarrow Y$ un homomorfismo propio, donde Y es un esquema noetheriano. Entonces existen homomorfismos proyectivos f y g que hacen conmutativo el diagrama siguiente:*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & X \arrow[d] \\ & Y \end{tikzcd}$$

y un abierto denso U en X tal que $f^{-1}[U] \longrightarrow U$ es un isomorfismo.

DEMOSTRACIÓN: Veamos en primer lugar que podemos reducir la prueba al caso en que X es íntegro. El hecho de que Y sea noetheriano y el homomorfismo de tipo finito implica que X también es noetheriano, luego tiene un número finito de componentes irreducibles $C_1, \ldots, C_r$. Sea U_i el complemento en C_i de la unión de las restantes componentes. Entonces U_i es un abierto denso en C_i. Consideramos en C_i la estructura de subesquema cerrado reducido en X (con lo que cada C_i es un esquema íntegro). Las restricciones $C_i \longrightarrow Y$ son también propias, luego por el teorema para esquemas íntegros existen homomorfismos proyectivos $f_i : C_i' \longrightarrow C_i$, $g_i : C_i' \longrightarrow Y$ y abiertos $U_i' \subset C_i$ que cumplen el enunciado.

Al componer con las inmersiones cerradas $C_i \longrightarrow X$ obtenemos homomorfismos proyectivos $f_i : C_i' \longrightarrow X$. Ahora basta llamar $X' = C_1' \oplus \cdots \oplus C_r'$ y considerar las extensiones $f : X' \longrightarrow X$, $g : X' \longrightarrow Y$. Es fácil ver que f y g también son proyectivos y hacen conmutativo el diagrama del enunciado. Si $U_i'' = U_i \cap U_i'$ y $U = U_1'' \cup \cdots \cup U_r'' \subset X$, entonces U es denso en X y cumple el enunciado.

Así pues, partimos de un homomorfismo propio $h : X \longrightarrow Y$ con Y noetheriano y X íntegro. Sean $V \subset Y$ y $U \subset h^{-1}[V]$ abiertos afines. Pongamos que $V = \operatorname{Esp} B$. Como h es de tipo finito, tenemos que $\mathcal{O}_X(U)$ es una B-álgebra finitamente generada. Un sistema generador con r elementos nos da un epimorfismo de álgebras $B[X_1, \ldots, X_r] \longrightarrow \mathcal{O}_X(U)$, que a su vez determina una inmersión cerrada $i : U \longrightarrow A_B^r$ (definida sobre B, luego también sobre Y).

Por otra parte, la inmersión abierta $V \longrightarrow Y$ determina, por extensión de constantes, una inmersión abierta $\mathrm{P}_B^r \longrightarrow \mathrm{P}_Y^r$, de la que obtenemos a su vez una inmersión abierta $A_B^r \longrightarrow \mathrm{P}_Y^r$. Combinándola con la anterior llegamos a una inmersión $U \longrightarrow \mathrm{P}_Y^r$ (definida sobre Y).

Cubriendo Y con un número finito de abiertos afines V y cada $h^{-1}[V]$ por un número finito de abiertos afines U, obtenemos un cubrimiento finito $\{U_i\}_i$ de X de modo que para cada i tenemos una inmersión $U_i \longrightarrow \mathrm{P}_Y^r$. (Podemos tomar el mismo r para todos ellos.) Por la propia definición de inmersión, podemos expresarla como composición de una inmersión abierta $U_i \longrightarrow X_i$ seguida de una inmersión cerrada $X_i \longrightarrow \mathrm{P}_Y^r$. Consideramos a X_i como esquema sobre Y con el homomorfismo $X_i \longrightarrow \mathrm{P}_Y^r \longrightarrow Y$ y entonces es evidente que las dos inmersiones están definidas sobre Y. En particular, X_i es un esquema proyectivo sobre Y.

Como X es irreducible, todos los abiertos U_i son densos, al igual que lo es su intersección, a la que llamaremos $U \subset X$. Llamemos X^* al producto (sobre Y) de los esquemas X_i, que es un esquema proyectivo sobre Y. Las inmersiones abiertas $\psi : U \longrightarrow X$ y $\psi_i : U \longrightarrow U_i \longrightarrow X_i$ definen un homomorfismo $\phi : U \longrightarrow X \times_Y X^*$. El teorema 2.33 nos da un esquema X' junto con un homomorfismo $\phi : U \longrightarrow X'$ y una inmersión cerrada $X' \longrightarrow X \times_Y X^*$.

Como X es reducido, lo mismo le sucede a U, y entonces X' también es reducido. Al igual que antes, podemos considerar que X' y ambos homomorfismos están definidos sobre Y. Llamemos $g : X' \longrightarrow Y$ al homomorfismo estructural.

La proyección $X \times_Y X^* \longrightarrow X$ se restringe a un homomorfismo $f : X' \longrightarrow X$ definido sobre Y (lo que equivale a la conmutatividad del diagrama del enunciado). Observemos ahora que

$$\phi[U] = (U \times_Y X^*) \cap X'.$$

En efecto, X' es la clausura de $\phi[U]$ en $X \times_Y X^*$, luego la igualdad anterior equivale a que $\phi[U]$ es cerrado en $U \times_Y X^*$. Ahora bien, cuando consideramos a ϕ como homomorfismo $\phi : U \longrightarrow U \times_Y X^*$, vemos que es precisamente el homomorfismo que define la gráfica de (ψ_i) (teorema 4.18), y dicho teorema afirma precisamente que $\phi[U]$ es cerrado. Más aún, en la prueba se ve que $\phi : U \longrightarrow U \times_Y X^*$ es una inmersión cerrada, luego $\phi : U \longrightarrow \phi[U]$ es un homeomorfismo.

La igualdad anterior se interpreta como que $\phi[U]$ es la antiimagen del abierto $U \times_Y X^*$ por la inmersión cerrada $X' \longrightarrow X \times_Y X^*$, luego tenemos una inmersión cerrada $\phi[U] \longrightarrow U \times_Y X^*$. Esto significa que la estructura de esquema en $\phi[U]$ visto como abierto en X' es precisamente la única estructura de esquema reducido que lo convierte en subesquema cerrado de $U \times_Y X^*$, pero esta estructura puede obtenerse también transportando a través de ϕ la estructura de esquema de U. Concluimos que $\phi : U \longrightarrow \phi[U]$ es un isomorfismo de esquemas.

Pero $U \times_Y X^* = p^{-1}[U]$ y f es la restricción a X' de la proyección p, luego otra consecuencia de la igualdad anterior es que $\phi[U] = f^{-1}[U]$. Además, por definición de ϕ, tenemos que $\phi \circ p = 1$ en U, luego también $\phi \circ f = 1$. Como ϕ es un isomorfismo, podemos concluir que $f = \phi^{-1} : f^{-1}[U] \longrightarrow U$ es un isomorfismo de esquemas.

Falta demostrar que $g : X' \longrightarrow Y$ es proyectivo, lo cual implica inmediatamente que f también lo es. El que la inmersión cerrada $X' \longrightarrow X \times_Y X^*$ esté definida sobre Y se traduce en que g es composición de esta inmersión con la proyección $p : X \times_Y X^* \longrightarrow X^*$ y con el homomorfismo estructural de X^*. Basta probar que la composición $X' \longrightarrow X^*$ de las dos primeras es una inmersión cerrada, pues entonces g será composición de dos homomorfismos proyectivos.

Como ser una inmersión cerrada es una propiedad local en la base, basta encontrar abiertos $V_i \subset X^*$ cuyas antiimágenes cubran X' y de modo que las restricciones $X' \cap p^{-1}[V_i] \longrightarrow V_i$ sean inmersiones cerradas. Tomamos concretamente $V_i = p_i^{-1}[U_i]$, donde $p_i : X^* \longrightarrow X_i$ es la proyección.

En primer lugar observamos que el diagrama siguiente es conmutativo por definición de ϕ:

$$\begin{tikzcd} X \times X^* \arrow[r, "p"] & X^* \arrow[d, "p_i"] \\ U \arrow[u, "\phi"] \arrow[r, "\psi_i"'] & X_i \end{tikzcd}$$

Considerando a ψ_i como una mera inclusión, esto implica la conmutatividad de los diagramas siguientes:

$$\begin{tikzcd} \phi[U] \arrow[r, "p"] & X^* \arrow[d, "p_i"] \\ & U \arrow[ul, "\phi"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} f^{-1}[U] \arrow[r, "p"] \arrow[dr, "f"'] & X^* \arrow[d, "p_i"] \\ & U_i \end{tikzcd}$$

Tenemos así que f y $p \circ p_i$, vistos como homomorfismos $f^{-1}[U_i] \longrightarrow X_i$, coinciden sobre el abierto $f^{-1}[U]$ (que es reducido porque X' lo es). Podemos aplicar el teorema 4.16 para concluir que $f = p \circ p_i$, vistos como homomorfismos en $f^{-1}[U_i]$. Concluimos que $f^{-1}[U_i] = p^{-1}[p_i^{-1}[U_i]] = p^{-1}[V_i]$, luego los abiertos $p^{-1}[V_i]$ cubren X', como queríamos probar.

Llamemos $\hat{X}_i^*$ al producto (sobre Y) de los X_j, para $j \neq i$, de modo que

$$V_i = p_i^{-1}[U_i] = U_i \times_Y \hat{X}_i^*, \qquad p^{-1}[V_i] = X \times_Y U_i \times_Y \hat{X}_i^*.$$

Consideremos el homomorfismo $U_i \times_Y \hat{X}_i^* \longrightarrow U_i \longrightarrow X$ así como su gráfica $Z_i \subset X \times_Y U_i \times_Y \hat{X}_i^* = p^{-1}[V_i]$, que es cerrada por el teorema 4.18. Más aún, tenemos una inmersión cerrada $V_i \longrightarrow p^{-1}[V_i]$ cuya imagen es Z_i. Notemos que V_i es reducido porque lo es X^*, luego la inmersión induce un isomorfismo $V_i \longrightarrow Z_i$ cuando en Z_i consideramos la estructura de subesquema cerrado reducido en $p^{-1}[V_i]$. Su inverso es claramente la proyección $p : Z_i \longrightarrow V_i$.

Por otra parte tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} U_i \times_Y \hat{X}_i^* \arrow[r] & X \times_Y U_i \times_Y \hat{X}_i^* \\ U \arrow[u] \arrow[ur, "\phi"'] & \end{tikzcd}$$

del que deducimos que $\phi[U] \subset Z_i$.

La situación es la que describe el esquema de la página siguiente. Observemos que X' es la clausura de $\phi[U]$ en $X \times_Y X^*$, luego $X' \cap p^{-1}[V_i]$ es la clausura de $\phi[U]$ en $p^{-1}[V_i]$ y, puesto que Z_i es cerrado en $p^{-1}[V_i]$, tenemos la inclusión $X' \cap p^{-1}[V_i] \subset Z_i$ reflejada en el diagrama.

La inmersión cerrada $X' \longrightarrow X \times_Y X^*$ se restringe a una inmersión cerrada $X' \cap p^{-1}[V_i] \longrightarrow p^{-1}[V_i]$, considerando en la intersección la estructura de subesquema abierto de X'. Esta inmersión se descompone en una composición de inmersiones cerradas $X' \cap p^{-1}[V_i] \longrightarrow Z_i \longrightarrow p^{-1}[V_i]$, pues la única estructura en $X' \cap p^{-1}[V_i]$ de subesquema cerrado reducido de $p^{-1}[V_i]$ convierte a la intersección en subesquema cerrado reducido de $p^{-1}[V_i]$, luego ha de ser la estructura que ya estamos considerando.

$$\begin{tikzcd}
 & X \times_Y X^* \arrow[rr, "p"] & & X^* \\
X' \arrow[ur] & & p^{-1}[V_i] \arrow[ul] \arrow[ur, "p"] \arrow[r, "p"] & V_i \arrow[u] \\
 & & Z_i \arrow[u] \arrow[ur, "\cong"'] & \\
 & X' \cap p^{-1}[V_i] \arrow[uul] \arrow[uur] \arrow[ur] & & \\
 & \phi[U] \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

Ahora es inmediato que p se restringe a una inmersión cerrada

$$X' \cap p^{-1}[V_i] \longrightarrow V_i.$$

■

Un enunciado equivalente del lema de Chow es que si X/S es un esquema propio sobre S, entonces existe un esquema X'/S proyectivo sobre S y un homomorfismo $f : X' \longrightarrow X$ definido sobre S que se restringe a un isomorfismo $f^{-1}[U] \longrightarrow U$, para cierto abierto denso $U \subset X$.

Este hecho permite en ocasiones extender a esquemas propios resultados probados para esquemas proyectivos. Existen ejemplos de esquemas propios que no son proyectivos. El teorema 4.37 proporciona un ejemplo de una propiedad de los esquemas proyectivos que no es cierta en general para esquemas propios.

Definición 4.35 Un homomorfismo de esquemas $f : X \longrightarrow Y$ es *cuasiproyectivo* si puede expresarse como composición de una inmersión abierta de tipo finito $X \longrightarrow Z$ seguida de un homomorfismo proyectivo $Z \longrightarrow Y$. Un esquema X/S es *cuasiproyectivo* si lo es su homomorfismo estructural.

Es claro que los conjuntos algebraicos cuasiproyectivos sobre un cuerpo k son los esquemas cuasiproyectivos sobre $\operatorname{Esp} k$ en el sentido de la definición anterior. Todo homomorfismo proyectivo es cuasiproyectivo.

Teorema 4.36 *Sea A un anillo, $F \subset \mathrm{P}_A^n$ un conjunto finito de puntos y Z un subconjunto cerrado de P_A^n disjunto con F. Entonces existe $f \in A[X_0, \ldots, X_n]$ homogéneo tal que $Z \subset V(f)$ y $V(f) \cap F = \varnothing$.*

Demostración: Pongamos que $Z = V(I)$, donde I es un ideal homogéneo de $A[X_0, \ldots, X_n]$. El conjunto F está formado por un número finito de ideales primos homogéneos $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$, ninguno de los cuales contiene a I. Por el teorema [3.51] existe un $f \in I$ tal que $f \notin \mathfrak{p}_i$, para $i = 1, \ldots, r$. Modificando ligeramente la prueba podemos exigir además que f sea homogéneo. Es claro que cumple lo pedido. ■

Teorema 4.37 *Sea A un anillo y X un esquema cuasiproyectivo sobre A. Entonces, todo subconjunto finito de X está contenido en un abierto afín.*

Demostración: Tenemos que X es un abierto en un subesquema cerrado $Y \subset \mathrm{P}_A^n$. Entonces $Z = Y \setminus X$ es también cerrado en P_A^n. Sea $V(f)$ según el teorema anterior. Entonces $F \subset D(f) \cap Y = U$, y el abierto U es cerrado en el abierto afín $D(f)$, luego U es un abierto afín. ■

Teorema 4.38 *Todo esquema cuasiproyectivo de dimensión d sobre un anillo noetheriano puede cubrirse con $d+1$ abiertos afines.*

Demostración: Sea X_0 un esquema cuasiproyectivo de dimensión d sobre un anillo noetheriano A. Esto significa que podemos considerar a X_0 como un abierto en un subesquema cerrado de P_A^n y, concretamente, podemos tomar como tal subesquema cerrado a su clausura $\overline{X}_0$ en P_A^n (con la estructura de esquema dada por 2.33). Llamemos $Z = \overline{X}_0 \setminus X_0$, que es un cerrado en P_A^n.

Observemos que P_A^n es un espacio topológico noetheriano, al igual que $\overline{X}_0$, al igual que X_0, luego X_0 tiene un número finito de puntos cuasigenéricos. Por el teorema 4.36 existe $f_0 \in A[X_0, \ldots, X_n]$ tal que $Z \subset V(f_0)$ y $V(f_0)$ no contiene a ningún punto cuasigenérico de X_0, es decir, que no contiene a ninguna de sus componentes irreducibles. Esto implica que $X_1 = X_0 \cap V(f_0)$ cumple $\dim X_1 < \dim X_0$. Además X_1 es cerrado en X_0, luego también es un espacio topológico noetheriano, y por otra parte $U_0 = \overline{X}_0 \cap D(f_0) \subset X$ es abierto en $\overline{X}_0$, luego también en X_0, y con su estructura de subesquema abierto de $\overline{X}_0$ es un subesquema cerrado de $D(f_0)$ (la inmersión cerrada $\overline{X}_0 \longrightarrow \mathrm{P}_A^n$ se restringe a una inmersión cerrada $X_1 \longrightarrow D(f_0)$), luego es un esquema afín.

Ahora repetimos el argumento con X_1, es decir, tomamos un f_1 tal que $Z \subset V(f_1)$ y $V(f_1)$ no contiene a ningún punto cuasigenérico de X_1. Esto hace que $X_2 = X_1 \cap V(f_1)$ cumpla que $\dim X_2 < \dim X_1$ y $U_1 = \overline{X}_0 \cap D(f_1) \subset X_0$ es un abierto afín.

Como la dimensión va disminuyendo, se ha de cumplir que $\dim X_d < 0$, es decir, que

$$X_d = X_0 \cap \bigcap_{i=0}^{d} V(f_i) = \varnothing,$$

lo que implica que

$$X_0 = \bigcup_{i=0}^{d} U_i.$$

■

4.5 Homomorfismos finitos

Los homomorfismos finitos son otro ejemplo importante, junto a los homomorfismos proyectivos, de homomorfismos propios.

Definición 4.39 Un homomorfismo de esquemas $f : X \longrightarrow Y$ es *finito* si para cada abierto afín V de Y el abierto $f^{-1}[V]$ es afín y el homomorfismo $\mathcal{O}_Y(V) \longrightarrow \mathcal{O}_X(f^{-1}[V])$ convierte a $\mathcal{O}_X(f^{-1}[V])$ en un $\mathcal{O}_Y(V)$-módulo finitamente generado. Si en lugar de esta condición de finitud se cumple que $\mathcal{O}_X(f^{-1}[V])$ es una extensión entera de (la imagen de) $\mathcal{O}_Y(V)$ diremos que el homomorfismo f es *entero.*

Es evidente que todo homomorfismo finito es de tipo finito, pero no hemos de confundir ambos conceptos, pues el segundo es mucho más restrictivo. Por otra parte, todo homomorfismo finito es entero. En primer lugar demostramos un teorema análogo a 4.2:

Teorema 4.40 *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un homomorfismo de esquemas tal que existe un cubrimiento abierto afín $Y = \bigcup\limits_i Y_i$ tal que cada $f^{-1}[Y_i]$ es afín y $\mathcal{O}_X(f^{-1}[Y_i])$ es un $\mathcal{O}_Y(Y_i)$-módulo finitamente generado (respectivamente, una extensión entera de $\mathcal{O}_Y(Y_i)$). Entonces f es finito (respectivamente, entero).*

Demostración: Tomemos un abierto afín V en Y. Tal y como vimos en la prueba de 4.2, podemos expresar $V \cap Y_i$ como unión de abiertos V_{ik} que son principales tanto en V como en Y_i. Entonces $f^{-1}[V]$ se expresa como unión de los abiertos $f^{-1}[V_{ik}]$.

Digamos que $V_{ik} = D_{Y_i}(h_{ik})$, con $h_{ik} \in \mathcal{O}_Y(Y_i)$. Entonces se cumple que $f^{-1}[V_{ik}] = D_{f^{-1}[Y_i]}(h'_{ik})$, donde $h'_{ik} = f^{\#}_{Y_i}(h_{ik}) \in \mathcal{O}_X(f^{-1}[Y_i])$. Por consiguiente $\mathcal{O}_Y(V_{ik}) = \mathcal{O}_Y(Y_i)_{h_{ik}}$ y $\mathcal{O}_X(f^{-1}[V_{ik}]) = \mathcal{O}_X(f^{-1}[Y_i])_{h'_{ik}}$. Estamos suponiendo que $\mathcal{O}_X(f^{-1}[Y_i])$ es un $\mathcal{O}_Y(Y_i)$-módulo finitamente generado (resp., una extensión entera de $\mathcal{O}_Y(Y_i)$, luego claramente $\mathcal{O}_X(f^{-1}[V_{ik}])$ es un $\mathcal{O}_Y(V_{ik})$-módulo finitamente generado (resp., una extensión entera de $\mathcal{O}_Y(V_{ik})$).

Esto significa que la restricción $f^{-1}[V] \longrightarrow V$ está en las hipótesis del teorema y basta probar que es finita (resp., entera). Equivalentemente, podemos suponer que Y es afín y que los abiertos $Y_i = D(h_i)$ son principales (donde $h_i \in \mathcal{O}_Y(Y)$). Sólo hemos de probar que X es afín y que $\mathcal{O}_X(X)$ es un $\mathcal{O}_Y(Y)$-módulo finitamente generado (resp., una extensión entera de $\mathcal{O}_Y(Y)$).

Notemos que, como Y es afín, es cuasicompacto, luego el cubrimiento Y_i puede tomarse finito. Por otra parte, el mismo argumento empleado en 4.2 demuestra que f es cuasicompacto. Los abiertos $f^{-1}[Y_i]$ son afines por hipótesis, las intersecciones $Y_i \cap Y_j$ son afines (porque Y es afín), luego $f^{-1}[Y_i] \cap f^{-1}[Y_j] = f^{-1}[Y_i \cap Y_j]$ es unión de un número finito de abiertos afines. Esto significa que los abiertos $f^{-1}[Y_i]$ forman un buen cubrimiento afín de X, y podemos aplicar el teorema 2.15. Concretamente, sea $h'_i = f^{\#}_Y(h_i) \in \mathcal{O}_X(X)$. Entonces $f^{-1}[Y_i] = f^{-1}[Y_{h_i}] = X_{h'_i}$, y en el siguiente diagrama las flechas horizontales son isomorfismos:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(X) & \xleftarrow{1} & \mathcal{O}_X(X) \\ {\scriptstyle\rho}\downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_X(X_{h_i'}) & \longleftarrow & \mathcal{O}_X(X)_{h_i'} \end{array}$$

Estos homomorfismos de anillos inducen homomorfismos de esquemas que forman también un diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \operatorname{Esp}\mathcal{O}_X(X) \\ {\scriptstyle i}\uparrow & & \uparrow \\ X_{h_i'} & \longrightarrow & \operatorname{Esp}(\mathcal{O}_X(X)_{h_i'}) \end{array}$$

La flecha horizontal inferior es un isomorfismo (para cada i), y queremos probar que la flecha superior también lo es, pues entonces X será afín. De hecho, basta probar que la flecha superior es biyectiva, ya que al ser localmente un isomorfismo esto ya implica que es un isomorfismo. Para ello observamos que $X_{h_i'} \cap X_{h_j'}$ es el abierto principal en $X_{h_i'}$ determinado por $h_j'|_{X_{h_i'}}$. Por otra parte, cada $\operatorname{Esp}(\mathcal{O}_X(X)_{h_i'})$ es el abierto principal en $\operatorname{Esp}\mathcal{O}_X(X)$ determinado por h_i', luego $\operatorname{Esp}(\mathcal{O}_X(X)_{h_i'}) \cap \operatorname{Esp}(\mathcal{O}_X(X)_{h_j'})$ es el abierto principal en $\operatorname{Esp}(\mathcal{O}_X(X)_{h_i'})$ determinado por h_j'. Esto hace que el homomorfismo $X_{h_i'} \longrightarrow \operatorname{Esp}(\mathcal{O}_X(X)_{h_i'})$ transforme la intersección en la intersección. De aquí se deduce fácilmente que el homomorfismo $X \longrightarrow \operatorname{Esp}\mathcal{O}_X(X)$ es biyectivo.

Ya tenemos probado que X es afín. Ahora el problema se puede expresar en términos de anillos: si $X = \operatorname{Esp} A$ e $Y = \operatorname{Esp} B$, tenemos un homomorfismo $\phi : B \longrightarrow A$ y elementos $h_i \in B$ tales que $(h_1, \ldots, h_r) = 1$ y, si $h_i' = \phi(h_i)$, entonces cada $A_{h_i'}$ es un B_{h_i}-módulo finitamente generado (resp., una extensión entera de B_{h_i}). Queremos probar que A es un B-módulo finitamente generado (resp., una extensión entera de B).

Llamemos M al B-módulo generado por los numeradores de los generadores (finitos) de los módulos $A_{h_i'}$ (resp., llamamos M a la clausura entera de B en A). Basta probar que $A = M$.

En principio, es claro que cada $a \in A$ se expresa en la forma $a = m_i/h_i'^n$, para cierto $m_i \in M$ y cierto natural n (que depende de a, pero podemos tomar el mismo para todo i.) Por otra parte podemos expresar $1 = b_1h_1' + \cdots + b_rh_r'$, con $b_i \in B$. Elevando a rn obtenemos una expresión de 1 como combinación lineal con coeficientes en B de las potencias $h_i'^n$. Multiplicándola por a obtenemos así una expresión de a como combinación lineal con coeficientes en B de los $h_i'^n a = m_i \in M$, luego concluimos que $a \in M$. ■

Volveremos a tratar con homomorfismos enteros en el capítulo siguiente. Ahora nos centramos en el estudio de los homomorfismos finitos y probamos que satisfacen las propiedades usuales:

Teorema 4.41 *Se cumplen las propiedades siguientes:*

a) Las inmersiones cerradas son finitas.

b) Los homomorfismos finitos son estables bajo cambios de base.

c) La composición de homomorfismos finitos es un homomorfismo finito.

d) Si $X \longrightarrow Z$, $Y \longrightarrow Z$ *son homomorfismos finitos, el homomorfismo estructural* $X \times_Z Y \longrightarrow Z$ *también lo es.*

e) Si la composición de dos homomorfismos $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ *es finita y* g *es separado, entonces* f *es finito.*

Demostración: a) lo hemos visto de hecho en la prueba del teorema 4.4 y b) es inmediato.

Para probar c) partimos de un homomorfismo finito $f : X \longrightarrow Y$ y de un homomorfismo arbitrario $g : Y' \longrightarrow Y$, y hemos de probar que la proyección $X \times_Y Y' \longrightarrow Y'$ es finita. Exactamente igual que en la prueba del apartado correspondiente de 4.3 podemos restringirnos al caso en que Y e Y' son afines, pero entonces X es afín porque f es finita, luego $X \times_Y Y'$ también es afín. Si $X = \operatorname{Esp} A$, $Y = \operatorname{Esp} C$, $Y' = \operatorname{Esp} B$, tenemos que A es un C-módulo finitamente generado y esto implica que $A \otimes_C B$ es un B-módulo finitamente generado.

Los apartados d) y e) son consecuencia del teorema 4.17. ■

Ahora podemos probar:

Teorema 4.42 *Los homomorfismos finitos son propios, y sus fibras son conjuntos finitos.*

Demostración: Sea $f : X \longrightarrow Y$ un homomorfismo finito. Vamos a probar en primer lugar que es cerrado y que sus fibras son finitas. Para probar que es cerrado basta tomar un abierto afín $V \subset Y$ y probar que la restricción $f^{-1}[V] \longrightarrow V$ es cerrada. Similarmente, para probar que la fibra de un punto $P \in Y$ es finita basta tomar un entorno afín V de P y considerar la misma restricción. Dicha restricción es también finita, luego para probar ambas cosas podemos suponer que Y es afín. Entonces X también lo es.

Pongamos que $X = \operatorname{Esp} B$, $Y = \operatorname{Esp} A$. Tenemos un homomorfismo de anillos $\phi : A \longrightarrow B$ que convierte a B es un A-módulo finitamente generado. Sea N su núcleo y sea $A' = A/N$. Entonces podemos factorizar ϕ como composición de dos homomorfismos $A \longrightarrow A' \longrightarrow B$. Esto se corresponde con una descomposición de f en dos homomorfismos de esquemas $X \longrightarrow X' \longrightarrow Y$, el segundo de los cuales es una inmersión cerrada. Como el homomorfismo $A' \longrightarrow B$ es inyectivo, podemos considerar a B como una extensión de A', y como B es finitamente generado como A-módulo, también lo es como A'-módulo. El teorema [3.58] implica entonces que la extensión B/A' es entera, el teorema [3.64] nos da que las fibras del homomorfismo $X \longrightarrow X'$ son finitas y [3.63] nos da que es cerrado. Obviamente ambas propiedades se conservan al componerlo con la imersión cerrada.

Para ver que f es separado hemos de ver que la diagonal $\Delta : X \longrightarrow X \times_Y X$ es una inmersión cerrada. Los abiertos $f^{-1}[V] \times_V f^{-1}[V]$, donde V recorre los abiertos afines de Y, son un cubrimiento del producto formados por abiertos afines, y basta probar que la restricción $f^{-1}[V] \longrightarrow f^{-1}[V] \times_V f^{-1}[V]$ es una inmersión cerrada, pero esto es consecuencia de que $f^{-1}[V]$ es separado sobre V, ya que, por la finitud de f, ambos esquemas son afines.

Finalmente, sabemos que los homomorfismos finitos son cerrados y estables bajo cambios de base, luego son universalmente cerrados. ■

Entre los homomorfismos proyectivos, la finitud de las fibras caracteriza la finitud:

Teorema 4.43 *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un homomorfismo proyectivo y sea $y \in Y$ un punto tal que la fibra $f^{-1}[y]$ sea finita, entonces y tiene un entorno V tal que la restricción $f^{-1}[V] \longrightarrow V$ es finita. En particular, si las fibras de f son finitas, entonces f es finito.*

DEMOSTRACIÓN: No perdemos generalidad si suponemos que $Y = \operatorname{Esp} A$ es afín. Consideremos una inmersión cerrada $i : X \longrightarrow \mathrm{P}_Y^n$ tal que f sea la composición de i con el homomorfismo natural $\pi : \mathrm{P}_Y^n \longrightarrow Y$. Aumentando n si es preciso podemos asegurar que existe un punto cerrado en P_Y^n que no está en $f^{-1}[y]$. El teorema 4.36 nos da entonces un $u \in A[X_0, \ldots, X_n]$ homogéneo de grado no nulo tal que el abierto afín $U = D(u) \subset \mathrm{P}_Y^n$ contiene a $f^{-1}[y]$.

Como f es un homomorfismo cerrado, tenemos que $f[X \setminus U]$ es cerrado en Y, y no contiene a y, luego existe un abierto afín V tal que

$$y \in V \subset Y \setminus f[X \setminus U].$$

Equivalentemente, $f^{-1}[V] = X \cap \pi^{-1}[V] \subset U$. Así pues, la inmersión cerrada i se restringe a una inmersión cerrada $f^{-1}[V] \longrightarrow \mathrm{P}_V^n$, cuya imagen está contenida en el abierto afín $\mathrm{P}_V^n \cap U = D(u|_{\mathrm{P}_V^n})$, luego $f^{-1}[V]$ es un abierto afín en X.

Por otra parte, tenemos que $f^{-1}[V]$ es proyectivo sobre V, luego propio, y el teorema 4.24 nos da que $\mathcal{O}_X(f^{-1}[V])$ es entero sobre $\mathcal{O}_Y(V)$ y, como f es de tipo finito, de hecho $\mathcal{O}_X(f^{-1}[V])$ es un $\mathcal{O}_Y(V)$-módulo finitamente generado. Esto prueba que $f^{-1}[V] \longrightarrow V$ es finito. ■

Observemos que todo homomorfismo de esquemas $f : X \longrightarrow Y$ cuasicompacto puede descomponerse como un homomorfismo denso $X \longrightarrow X'$ y una inmersión cerrada $X' \longrightarrow Y$ (teorema 2.33). Esto vale en particular si f es un homomorfismo finito, en cuyo caso el homomorfismo $X \longrightarrow X'$ también ha de ser finito (por el teorema 4.41). Como es denso y cerrado, ha de ser suprayectivo. Así pues:

Teorema 4.44 *Todo homomorfismo finito se descompone como un homomorfismo finito y suprayectivo seguido de una inmersión cerrada.*

Veamos un último resultado:

Teorema 4.45 *Si $f : X \longrightarrow Y$ es un homomorfismo finito y suprayectivo entre esquemas noetherianos, entonces* $\dim X = \dim Y$.

Demostración: Supongamos en primer lugar que Y es afín (con lo que X también lo es). Pongamos que $X = \operatorname{Esp} B$, $Y = \operatorname{Esp} A$. Entonces f se corresponde con un homomorfismo de anillos $\phi : A \longrightarrow B$, que dota a B de estructura de A-módulo finitamente generado. Sea N el núcleo de ϕ y $A' = A/N$. Entonces ϕ se expresa como composición de un epimorfismo $A \longrightarrow A'$ seguido de un monomorfismo $A' \longrightarrow B$, que nos permite considerar a A' como subanillo de B. El teorema [3.58] nos da que la extensión B/A' es entera, luego el teorema [3.68] implica que $\dim B = \dim A'$. La descomposición de ϕ se corresponde con una descomposición de f en la forma $X \longrightarrow X' \longrightarrow Y$, donde $\dim X = \dim X'$ y el homomomorfismo $X' \longrightarrow Y$ es una inmersión cerrada. Como ha de ser suprayectiva, es un homeomorfismo, luego también $\dim X' = \dim Y$, y tenemos el teorema probado en este caso.

En el caso general tomamos un cubrimiento finito $\{U_i\}_i$ de Y por abiertos afines. Entonces $\{f^{-1}[U_i]\}_i$ es un cubrimiento de X por abiertos afines y sabemos que $\dim f^{-1}[U_i] = \dim U_i$. Entonces

$$\dim X = \max_i \dim f^{-1}[U_i] = \max_i \dim U_i = \dim Y.$$

■

4.6 Homomorfismos planos

Recordemos que un A-módulo M es plano si el funtor $\otimes_A M$ es exacto, y que un homomorfismo de anillos $A \longrightarrow B$ es plano si convierte a B en un A-módulo plano. Esta propiedad algebraica da lugar a una propiedad sobre los homomorfismos de esquemas que resulta tener una interpretación geométrica. Los homomorfismos planos que vamos a definir y estudiar a continuación presentan cierta uniformidad en sus fibras, en el sentido de que éstas comparten características comunes.

Definición 4.46 Un homomorfismo de esquemas $f : X \longrightarrow Y$ es *plano* en un punto $P \in X$ si el homomorfismo $f_P^\# : \mathcal{O}_{Y,f(P)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,P}$ es plano. Diremos que f es *plano* si lo es en todos sus puntos.

Veamos las propiedades elementales de los homomorfismos planos:

Teorema 4.47 *Se cumplen las propiedades siguientes:*

a) Un homomorfismo de anillos $A \longrightarrow B$ es plano si y sólo si el homomorfismo de esquemas $\operatorname{Esp} B \longrightarrow \operatorname{Esp} A$ *es plano.*

b) Las inmersiones abiertas son planas.

c) Los homomorfismos planos son estables por cambios de base.

d) La composición de homomorfismos planos es plano.

e) El producto fibrado de homomorfismos planos es plano.

DEMOSTRACIÓN: a) Es el teorema [A.5] para $M = B$.

b) Si $f : X \longrightarrow Y$ es una inmersión abierta, entonces los homomorfismos $f_P^\#$ son isomorfismos, luego trivialmente son planos.

c) Sea $f : X \longrightarrow Y$ un homomorfismo plano e $Y' \longrightarrow Y$ un homomorfismo arbitrario. Hemos de probar que $p : X \times_Y Y' \longrightarrow Y'$ es plano. Como el problema es local podemos suponer que todos los esquemas son afines. Entonces se reduce a que si un homomorfismo $A \longrightarrow B$ es plano y $A \longrightarrow C$ es arbitrario, entonces $C \longrightarrow B \otimes_A C$ es plano, pero esto es [A.1 c)].

d) Al reducir esta propiedad al caso afín se convierte en equivalente a [A.1 d)].

e) Si $X \longrightarrow Y$, $X' \longrightarrow Y'$ son homomorfismos planos de esquemas definidos sobre S, la estabilidad por cambios de base implica que $X \times_S Y \longrightarrow X' \times_S Y$, $X' \times_S Y \longrightarrow X' \times_S Y'$ son planos y por d) también lo es $X \times_S Y \longrightarrow X' \times_S Y'$. ■

Observemos que si k es un cuerpo, todo homomorfismo $X \longrightarrow \operatorname{Esp} k$ es plano, pues toda k-álgebra es plana sobre k.

Teorema 4.48 *Si X es un esquema localmente noetheriano, una inmersión cerrada en X no es plana salvo que también sea abierta.*

DEMOSTRACIÓN: Consideremos una inmersión cerrada plana $f : C \longrightarrow X$, sea $P \in C$, sea V un entorno afín noetheriano de $f(P)$ y sea $U = f^{-1}[V]$. Entonces $f|_U : U \longrightarrow V$ es también una inmersión cerrada plana. Si $V = \operatorname{Esp} A$, entonces existe un ideal I de A (finitamente generado) tal que $f|_V$ se corresponde con la proyección $A \longrightarrow A/I$, que es plana, luego por el teorema [A.6] tenemos que $I = (e)$, donde $e^2 = 1$. Si llamamos $I' = (1-e)$, entonces $A = I \oplus I'$, $II' = 0$, luego $f[U] = V(I) = V \setminus V(I')$ es abierto en U. El punto P se corresponde con un ideal $\mathfrak{P}/I$, de modo que $f_P^\#$ se corresponde con

$$A_{\mathfrak{P}} \longrightarrow (A/I)_{\mathfrak{P}/I} \cong A_{\mathfrak{P}}/I_{\mathfrak{P}} \cong A_{\mathfrak{P}},$$

pues $e \in \mathfrak{P}$, luego $1 - e \in A \setminus \mathfrak{P}$, luego $I_{\mathfrak{P}} = 0$. Así pues, $f_P^\#$ es un isomorfismo. Esto prueba que f es una inmersión abierta. ■

Si el espacio imagen es irreducible, el teorema siguiente muestra más claramente por qué una inmersión cerrada no puede ser plana:

Teorema 4.49 *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un homomorfismo plano con Y irreducible. Entonces todo abierto no vacío de X tiene imagen densa en Y. Si X tiene un número finito de componentes irreducibles, cada una de ellas tiene también imagen densa en Y.*

Demostración: Sea $U \neq \varnothing$ un abierto en X. Tomamos un abierto afín en Y que corte a $f[U]$ y basta probar que $f[U]$ es denso en dicho abierto. Equivalentemente, podemos suponer que Y es afín. También podemos reducir U y suponer que es afín. El teorema 4.47 implica que $f|_U$ sigue siendo plano. Así pues, basta probar el teorema en el caso en que $U = X$ es afín. Pongamos que $U = \operatorname{Esp} B$, $Y = \operatorname{Esp} A$, de modo que f se corresponde con un homomorfismo plano $A \longrightarrow B$.

Sea ξ el punto genérico de Y. Basta probar que $\xi \in f[X]$ o, equivalentemente, que la fibra genérica X_ξ no es vacía. Sea $N = \operatorname{rad} 0 \subset A$. Entonces A/N es reducido e irreducible, luego es un dominio íntegro y podemos considerar su cuerpo de cocientes K. Observemos que $\xi = N$, luego

$$k(\xi) = A_N/N_N = (A/N)_0 = K.$$

Como B es plano, tenemos un monomorfismo

$$B/NB = B \otimes_A (A/N) \longrightarrow B \otimes_A K = B \otimes_A k(\xi) = \mathcal{O}_{X_\xi}(X_\xi).$$

Si la fibra genérica fuera vacía tendríamos que $B = NB$ y todos los elementos de B serían nilpotentes, pero entonces $X = \operatorname{Esp} B = \varnothing$, contradicción.

Si X tiene un número finito de componentes irreducibles, cada una de ellas contiene un abierto no vacío, luego su imagen es densa por la parte ya probada. ■

El teorema siguiente no es trivial en absoluto, pues se apoya en [A.17]:

Teorema 4.50 *Si $f : X \longrightarrow Y$ es un homomorfismo de tipo finito entre esquemas localmente noetherianos, entonces el conjunto de los puntos donde f es plano es abierto en X (tal vez vacío).*

Demostración: Sea $f : X \longrightarrow Y$ un homomorfismo de tipo finito entre esquemas localmente noetherianos y sea $P \in X$ un punto plano. Hemos de ver que f es plano en un entorno de P. Podemos tomar un entorno afín noetheriano V de $f(P)$ y un entorno afín noetheriano $U \subset f^{-1}[V]$ de P. Equivalentemente, podemos suponer que X e Y son afines y noetherianos, digamos $X = \operatorname{Esp} B$, $Y = \operatorname{Esp} A$, de modo que f está determinado por un homomorfismo $A \longrightarrow B$ que convierte a B en una A-álgebra de tipo finito.

Los puntos planos de f se corresponden con los ideales $\mathfrak{p} \in \operatorname{Esp} B$ tales que $B_\mathfrak{p}$ es plano sobre $A_\mathfrak{q}$, donde $\mathfrak{q}$ es la antiimagen de $\mathfrak{p}$ en A. Ahora bien, como $A_\mathfrak{q}$ es plano sobre A, tenemos que si $B_\mathfrak{p}$ es plano sobre $A_\mathfrak{q}$, también es plano sobre A y, recíprocamente, si $B_\mathfrak{p}$ es plano sobre A entonces $(B_\mathfrak{p})_\mathfrak{q} \cong B_\mathfrak{p}$ es plano sobre $A_\mathfrak{q}$. En definitiva, el conjunto de puntos planos de f se corresponde con el conjunto

$$U = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Esp} B \mid B_\mathfrak{p} \text{ es plano sobre } A\},$$

que es abierto por el teorema [A.17]. ■

Veamos un primer ejemplo del buen comportamiento de las fibras de un homomorfismo plano:

Teorema 4.51 *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un homomorfismo plano en un esquema Y con un número finito de componentes irreducibles. Si Y es reducido (o irreducible o íntegro) y las fibras cuasigenéricas de f son también reducidas (o irreducibles o íntegras) entonces X es reducido (o irreducible o íntegro).*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos en primer lugar que Y es irreducible con punto genérico ξ, y que la fibra X_ξ es irreducible. Entonces $Z = \overline{X}_\xi$ es un cerrado irreducible en X. Su complementario $U = X \setminus Z$ es abierto y $\xi \notin f[U]$. Ahora bien, $f|_U : U \longrightarrow Y$ es también un homomorfismo plano, y en la prueba del teorema anterior hemos visto que $\xi \in f[U]$. La única posibilidad es que $U = \varnothing$, luego $X = Z$ es irreducible.

Supongamos ahora que Y es reducido. Como ser reducido es una propiedad local, podemos suponer que $X = \operatorname{Esp} B$, $Y = \operatorname{Esp} A$, de modo que f se corresponde con un homomorfismo plano $A \longrightarrow B$. Sean $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ los primos minimales de A (que se corresponden con los puntos cuasigenéricos de Y). Como A es reducido, el homomorfismo canónico $A \longrightarrow \bigoplus\limits_i (A/\mathfrak{p}_i)$ es inyectivo.

Como B es plano sobre A, tenemos monomorfismos

$$B \longrightarrow \bigoplus_i (B \otimes_A (A/\mathfrak{p}_i)) \longrightarrow \bigoplus_i (B \otimes_A k(\mathfrak{p}_i)) = \bigoplus_i \mathcal{O}_{X_{\mathfrak{p}_i}}(X_{\mathfrak{p}_i}).$$

Por hipótesis, cada anillo $\mathcal{O}_{X_{\mathfrak{p}_i}}(X_{\mathfrak{p}_i})$ es reducido, luego B también lo es.

Teniendo en cuenta que un esquema es íntegro si y sólo si es reducido e irreducible, el tercer caso del enunciado es consecuencia inmediata de los dos ya probados. ■

Nos ocupamos ahora de la dimensión de las fibras de un homomorfismo plano. Empezamos con un resultado local:

Teorema 4.52 *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un homomorfismo entre esquemas localmente noetherianos, sea $P \in X$ y $Q = f(P)$. Entonces*

$$\dim \mathcal{O}_{X_Q,P} \geq \dim \mathcal{O}_{X,P} - \dim \mathcal{O}_{Y.Q}$$

y si f es plano se da la igualdad.

DEMOSTRACIÓN: Vamos a considerar los esquemas $X' = X \times_Y \operatorname{Esp} \mathcal{O}_{Y,Q}$, $Y' = \operatorname{Esp} \mathcal{O}_{Y,Q}$ y la proyección $f' : X' \longrightarrow Y'$. Llamamos $Q' = \mathfrak{m}_Q \in Y'$. Por el teorema 3.47, existe un punto $P' = P_Q \in X'$ tal que $f'(P') = Q'$, y se cumple que $\mathcal{O}_{Y',Q'} = \mathcal{O}_{Y,Q}$, $\mathcal{O}_{X',P'} = \mathcal{O}_{X,P}$, $X'_{Q'} = X_Q$. Esto significa que basta probar el teorema para f', P' y Q' (notemos además que si f es plano entonces f' también lo es). Equivalentemente, podemos suponer que $Y = \operatorname{Esp} A$, donde A es un anillo noetheriano local, y que Q es su único punto cerrado.

Razonaremos por inducción sobre la dimensión de Y. Si $\dim Y = 0$ entonces Q es el único primo de A, y está formado por sus elementos nilpotentes. Claramente $\dim \mathcal{O}_{Y,Q} = 0$. Por otra parte, si $U = \operatorname{Esp} B$ es un abierto afín en X, tenemos que

$$\mathcal{O}_{X_Q}(U_Q) = B \otimes_A (A/Q),$$

y es fácil definir un isomorfismo $(B \otimes_A (A/Q))_{\mathrm{red}} \cong B_{\mathrm{red}}$. De aquí se sigue que $(X_Q)_{\mathrm{red}} \cong X_{\mathrm{red}}$, luego $\dim \mathcal{O}_{X_Q,P} = \dim \mathcal{O}_{X,P}$. Así pues, la relación del enunciado se cumple con igualdad.

Supongamos ahora que $\dim Y \geq 1$. Hagamos un nuevo cambio de base y pasemos a $X' = X \times_Y Y_{\mathrm{red}}$, $Y' = Y_{\mathrm{red}}$ y $f' : X' \longrightarrow Y'$. Razonando análogamente al caso anterior (cambiando Q por $\operatorname{rad} 0 \subset A$) concluimos que $X'_{\mathrm{red}} = X_{\mathrm{red}}$, por lo que X y X' son homeomorfos como espacios topológicos y podemos considerar un punto $P' \in X'$ cuya imagen por f' sea el punto $Q' \in Y'$ que se corresponde con Q y de modo que $\dim \mathcal{O}_{X',P'} = \dim \mathcal{O}_{X,P}$. También se conservan las fibras:

$$X'_{Q'} = X \times_Y Y' \times_{Y'} k(Q') \cong X \times_Y k(Q) = X_Q,$$

y si f es plano también lo es f'. Equivalentemente, podemos suponer que Y es reducido. El ideal Q no puede estar formado únicamente por divisores de 0, ya que en tal caso el teorema [3.43] nos daría que Q sería un primo minimal de A (y sería el único, lo cual es imposible). Tomemos, pues, $t \in Q \subset A$ no nulo ni divisor de cero. Por el teorema [4.58] tenemos que $\dim A/(t) = \dim A - 1$.

Ahora consideramos $Y' = \operatorname{Esp}(A/(t))$, $X' = X \times_Y Y'$ y $f' : X' \longrightarrow Y'$. Llamamos $Q' = Q/(t) \in Y'$. Si $U = \operatorname{Esp} B$ es un entorno de P en X, tenemos que $U \times_Y Y' = \operatorname{Esp}(B \otimes_A (A/(t)))$ y es fácil ver que $B \otimes_A (A/(t)) \cong B/(t')$, donde $t' \in P$ es la imagen de t por el homomorfismo $A \longrightarrow B$. Llamamos $P' = P/(t') \in U \times_Y Y' \subset X'$, de modo que $f'(P') = Q'$. Además

$$\mathcal{O}_{X',P'} \cong (B/(t'))_{P/(t')} \cong B_P/(t') \cong \mathcal{O}_{X,P}/(t').$$

Se cumple que $\dim \mathcal{O}_{X',P'} \geq \dim \mathcal{O}_{X,P} - 1$, pues la prueba de esta desigualdad en el teorema [4.58] es elemental y no requiere la hipótesis de que t' no sea divisor de cero. Más aún, si f es plano entonces $\mathcal{O}_{X,P}$ es plano sobre A_Q, que a su vez es plano sobre A, luego $\mathcal{O}_{X,P}$ es plano sobre A. De aquí se sigue a su vez que t' no es un divisor de cero en $\mathcal{O}_{X,P}$, pues la multiplicación por t determina un monomorfismo $A \longrightarrow A$ que induce un monomorfismo $\mathcal{O}_{X,P} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,P}$ al multiplicar por $\otimes_A \mathcal{O}_{X,P}$, y dicho monomorfismo es la multiplicación por t'. Por consiguiente, en este caso tenemos que $\dim \mathcal{O}_{X',P'} = \dim \mathcal{O}_{X,P} - 1$. Como en los casos anteriores se comprueba que $X'_{Q'} = X_Q$. Por hipótesis de inducción

$$\dim \mathcal{O}_{X'_{Q'},P'} \geq \dim \mathcal{O}_{X',P'} - \dim \mathcal{O}_{Y',Q'},$$

y si f es plano se da la igualdad. Por lo tanto

$$\dim \mathcal{O}_{X_Q,P} \geq \dim \mathcal{O}_{X,P} - 1 - (\dim \mathcal{O}_{Y,P} - 1) = \dim \mathcal{O}_{X,P} - \dim \mathcal{O}_{Y,Q},$$

y si f es plano se da la igualdad. ■

Para conjuntos algebraicos tenemos un resultado global:

Teorema 4.53 *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un homomorfismo plano y suprayectivo entre conjuntos algebraicos. Supongamos que Y es irreducible y que todas las componentes irreducibles de X tienen la misma dimensión. Entonces, para cada $Q \in Y$ las componentes irreducibles de X_Q tienen todas la misma dimensión, y*

$$\dim X_Q = \dim X - \dim Y.$$

Demostración: Observemos que si X es un conjunto algebraico sobre k, entonces X_Q es un conjunto algebraico sobre $k(Q)$, pues los homomorfismos de tipo finito son estables bajo cambios de base.

Sea W una componente irreducible de X_Q y tomemos un punto cerrado $P \in W$ que no pertenezca a ninguna otra componente irreducible de X_Q. Por el teorema anterior,

$$\dim W = \dim \mathcal{O}_{W,P} = \dim \mathcal{O}_{X_Q,P} = \dim \mathcal{O}_{X,P} - \dim \mathcal{O}_{Y,Q}.$$

En la primera igualdad hemos usado [3.88 c)] y [3.79 f)], que nos dan también

$$\dim \mathcal{O}_{X,P} = \operatorname{codim}_X \overline{\{P\}} = \dim X - \dim \overline{\{P\}},$$

$$\dim \mathcal{O}_{Y,Q} = \operatorname{codim}_X \overline{\{Q\}} = \dim Y - \dim \overline{\{Q\}}.$$

Por último, como P es cerrado en W, también lo es en X_Q, luego $k(P)$ es una extensión finita de $k(Q)$, luego, por 3.22,

$$\dim \overline{\{P\}} = \operatorname{grad.tr.} k(P)/k = \operatorname{grad.tr.} k(Q)/k = \dim \overline{\{Q\}}.$$

En resumen tenemos que $\dim W = \dim X - \dim Y$. ■

Veamos un criterio útil para reconocer homomorfismos planos. En el teorema siguiente aparece la noción de regularidad de un esquema, que estudiaremos en el capítulo VII. Aquí sólo necesitamos la pura definición: Un esquema X es regular si todos sus anillos locales $\mathcal{O}_{P,X}$ son regulares (en el sentido de [5.8]).

Teorema 4.54 *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un homomorfismo de esquemas, donde X es localmente noetheriano e Y es íntegro, regular y $\dim Y = 1$. Entonces f es plano si y sólo si la imagen de cada punto asociado de X es el punto genérico de Y. En particular, si X es reducido, esto equivale a que cada componente irreducible de X tiene imagen densa en Y.*

Demostración: Supongamos que f es plano. Observemos que todos los puntos de Y distintos del punto genérico son cerrados. Tomemos un punto $P \in X$ tal que $Q = f(P)$ sea un punto cerrado y veamos que P no puede ser un punto asociado de X.

Como Y es regular, el anillo $\mathcal{O}_{Y,Q}$ es regular y de dimensión 1, luego por [5.17] tenemos que es un dominio de ideales principales. Sea $\mathfrak{m}_P = (t)$. Ciertamente, t no es un divisor de cero en $\mathcal{O}_{Y,Q}$ y, como $f_P^\#$ es plano, concluimos que $f_P^\#(t) \in \mathfrak{m}_P$ no es un divisor de cero en $\mathcal{O}_{X,P}$, luego [3.49] implica que P no es un punto asociado de X.

Supongamos ahora la condición del enunciado y veamos que f es plano. Tomemos $P \in X$ y $Q = f(P)$. Hemos de probar que $f_P^\# : \mathcal{O}_{Y,Q} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,P}$ es plano. Si Q es el punto genérico de Y entonces $\mathcal{O}_{Y,Q}$ es un cuerpo y no hay nada que probar. Supongamos, pues, que Q es un punto cerrado. El anillo $\mathcal{O}_{Y,Q}$ es un dominio de ideales principales, luego según [A.8] basta probar que $\mathcal{O}_{X,P}$ es libre de torsión sobre $\mathcal{O}_{Y,P}$.

En caso contrario, existe un $y \in \mathcal{O}_{Y,Q}$ tal que $f_P^{\#}(y)$ es un divisor de cero en $\mathcal{O}_{X,P}$. Ciertamente, y no puede ser una unidad, luego $y \in \mathfrak{m}_Q$. Si $\mathfrak{m}_Q = (t)$, también $f_P^{\#}(t)$ es un divisor de cero. Por el teorema [3.49] existe un primo asociado $\mathfrak{p} \in \operatorname{Esp} \mathcal{O}_{X,P}$ tal que $f_P^{\#}(t) \in \mathfrak{p}$. Este ideal se corresponde con un punto $P' \in X$ tal que $\mathcal{O}_{X,P'} \cong (\mathcal{O}_{X,P})_{\mathfrak{p}}$, luego [3.50] implica que $\mathfrak{m}_{P'}$ es un primo asociado de $\mathcal{O}_{X,P'}$, luego P' es un punto asociado de X. Vamos a probar que $f(P') = Q$ y así tendremos una contradicción, pues $f(P')$ debería ser el punto genérico de Y.

Tomemos abiertos afines $Q \in V \subset Y$, $P \in U \subset f^{-1}[V]$. Entonces $P' \in U$, porque $P \in \overline{\{P'\}}$. Digamos que $V = \operatorname{Esp} A$, $V = \operatorname{Esp} B$, con lo que f induce un homomorfismo de anillos $\phi : A \longrightarrow B$. Podemos identificar a P y P' con ideales primos $P' \subset P \subset B$, de modo que $\phi^{-1}[P] = Q$. Además tenemos que el homomorfismo $A_Q \longrightarrow B_P$ envía los puntos de Q a $\mathfrak{p} = P'_P$, luego también $\phi[Q] \subset P'$, luego $Q \subset \phi^{-1}[P'] \subset \phi^{-1}[P] = Q$, luego $f(P') = Q$.

Si X es reducido, la condición es que los puntos cuasigenéricos de X se correspondan con el punto genérico de Y. Si W es una componente irreducible de X, consideramos en ella la única estructura de subesquema cerrado reducido, con lo que W es un esquema íntegro y f se restringe a $f_W : W \longrightarrow Y$. Sea ξ el punto genérico de W, es decir, el punto que cumple $W = \overline{\{\xi\}}$. Por el teorema 3.17 tenemos que $f(\xi)$ es el punto genérico de Y si y sólo si $f[W]$ es denso en Y. ■

Así, la proyección del ejemplo de la página 85 es plana, lo que muestra que aunque X sea íntegro las fibras no tienen por qué ser todas reducidas. Razonando análogamente con la ecuación $XY - T$ obtenemos una familia de hipérbolas (irreducibles) excepto en 0, donde tenemos un par de rectas. Así pues, las fibras de un homomorfismo plano entre esquemas íntegros tampoco tienen por qué ser todas irreducibles.

Terminamos con un resultado técnico que necesitaremos más adelante:

Teorema 4.55 *Sea S un esquema localmente noetheriano, sea $f : Z \longrightarrow X$ una inmersión cerrada en un esquema localmente noetheriano X/S de modo que Z/S es plano. Sea $s \in S$ tal que f induzca un isomorfismo $Z_s \cong X_s$. Entonces existe un abierto $Z_s \subset U \subset Z$ tal que $f|_U : U \longrightarrow X$ es una inmersión abierta.*

DEMOSTRACIÓN: Tomemos un abierto afín noetheriano $s \in U \subset S$. Es claro que f se restringe a una inmersión cerrada $f : \pi^{-1}[U] \longrightarrow \pi'^{-1}[U]$ con las mismas fibras Z_s y X_s. Por lo tanto, podemos suponer que $S = \operatorname{Esp} A$ es un esquema afín, donde A es un anillo noetheriano.

Basta probar que f se restringe a una inmersión abierta en un entorno de cada punto $z \in Z_s$, luego podemos tomar un abierto afín noetheriano tal que $f(z) \in U \subset X$ y trabajar con la restricción $f^{-1}[U] \longrightarrow U$, pues entonces el isomorfismo $Z \times_S k(s) \longrightarrow X \times_S k(s)$ se restringe claramente a un isomorfismo $f^{-1}[U] \times_S k(s) \longrightarrow U \times_S k(s)$.

Equivalentemente, podemos suponer que $X = \operatorname{Esp} B$ es afín, donde B es un anillo noetheriano, y entonces $Z = \operatorname{Esp}(B/I)$, donde I es un ideal de B. Tenemos homomorfismos

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r] & B/I \\ A \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

de modo que B/I es plano como A-módulo. El punto s se corresponde con un ideal $\mathfrak{p} \in \operatorname{Esp} A$ y la hipótesis sobre las fibras se traduce en que el homomorfismo

$$B \otimes_A k(\mathfrak{p}) \longrightarrow (B/I) \otimes_A k(\mathfrak{p})$$

es un isomorfismo. El punto z se corresponde con un ideal $\mathfrak{P}/I \in \operatorname{Esp}(B/I)$ tal que $\mathfrak{P} \cap A = \mathfrak{p}$. Ahora observamos que

$$B_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} k(\mathfrak{p}) \cong B \otimes_A A_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} k(\mathfrak{p}) \cong B \otimes_A k(\mathfrak{p}),$$

e igualmente $(B/I)_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} k(\mathfrak{p}) \cong (B/I) \otimes_A k(\mathfrak{p})$. El isomorfismo anterior nos da que el homomorfismo natural

$$B_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} k(\mathfrak{p}) \longrightarrow (B/I)_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} k(\mathfrak{p})$$

es también un isomorfismo. De la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow I_{\mathfrak{p}} \longrightarrow B_{\mathfrak{p}} \longrightarrow (B/I)_{\mathfrak{p}} \longrightarrow 0$$

se deduce la sucesión exacta

$$0 = \operatorname{Tor}_1^{A_{\mathfrak{p}}}((B/I)_{\mathfrak{p}}, k(\mathfrak{p})) \longrightarrow I_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} k(\mathfrak{p}) \longrightarrow B_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} k(\mathfrak{p}) \longrightarrow (B/I)_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} k(\mathfrak{p}),$$

donde el grupo de torsión es nulo porque el módulo $(B/I)_{\mathfrak{p}}$ es plano sobre $A_{\mathfrak{p}}$ (teorema [A.3]). Como el último homomorfismo es en realidad un isomorfismo resulta que $I_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} k(\mathfrak{p}) = 0$. No podemos aplicar el lema de Nakayama porque $I_{\mathfrak{p}}$ no es finitamente generado como $A_{\mathfrak{p}}$-módulo. Ahora bien, tenemos homomorfismos $B_{\mathfrak{p}} \longrightarrow B_{\mathfrak{P}}$ y $k(\mathfrak{p}) \longrightarrow k(\mathfrak{P})$ que nos permiten multiplicar:

$$0 = B_{\mathfrak{P}} \otimes_{B_{\mathfrak{p}}} I_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} k(\mathfrak{p}) \otimes_{k(\mathfrak{p})} k(\mathfrak{P}) = I_{\mathfrak{P}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} k(\mathfrak{P}),$$

y el epimorfismo natural $I_{\mathfrak{P}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} k(\mathfrak{P}) \longrightarrow I_{\mathfrak{P}} \otimes_{B_{\mathfrak{P}}} k(\mathfrak{P})$ nos permite concluir que $I_{\mathfrak{P}} \otimes_{B_{\mathfrak{P}}} k(\mathfrak{P}) = 0$. Ahora sí que podemos aplicar el lema de Nakayama, que nos da que $I_{\mathfrak{P}} = 0$. Teniendo en cuenta que I es un B-módulo finitamente generado, es claro que existe un $f \in B \setminus \mathfrak{P}$ tal que $I_f = 0$. Por consiguiente, la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow I_f \longrightarrow B_f \longrightarrow (B/I)_f \longrightarrow 0$$

implica que $B_f \longrightarrow (B/I)_f$ es un isomorfismo o, equivalentemente, que la inclusión $Z \cap D(f) \longrightarrow D(f) \subset X$ es un isomorfismo de esquemas. En definitiva, la inmersión $Z \longrightarrow X$ se restringe a una inmersión abierta en un entorno del punto $z \in Z$ prefijado. ∎

Capítulo V

Haces coherentes

En este capítulo estudiaremos los módulos sobre un esquema. Veremos que si $X = \operatorname{Esp} A$ es un esquema afín, una construcción análoga a construcción de la estructura de esquema sobre X nos permite asociar un $\mathcal{O}_X$-módulo $\widetilde{M}$ a cada A-módulo M. Si X es un esquema arbitrario, los haces cuasicoherentes sobre X serán los que localmente tienen esta forma, y al añadir una condición de finitud obtendremos el concepto de haz coherente.

5.1 Haces cuasicoherentes

Del mismo modo que cada anillo A tiene asociado el esquema $X = \operatorname{Esp} A$, vamos a ver ahora cómo asignar a cada A-módulo M un $\mathcal{O}_X$-módulo de forma natural.

Definición 5.1 Sea A un anillo y M un A-módulo. Definimos el *haz asociado a* M en $X = \operatorname{Esp} A$, como el $\mathcal{O}_X$-módulo $\widetilde{M}$ construido como sigue: Para cada abierto $U \subset \operatorname{Esp} A$ definimos $\widetilde{M}(U)$ como el conjunto de todas las aplicaciones

$$s : U \longrightarrow \bigoplus_{\mathfrak{p} \in U} M_{\mathfrak{p}}$$

tales que para cada $\mathfrak{p} \in U$ se cumple que $s(\mathfrak{p}) \in M_{\mathfrak{p}}$ y existen $m \in M$, $f \in A$ y un entorno $\mathfrak{p} \in V \subset U$ tales que para todo $\mathfrak{q} \in V$ se cumple que $f \notin \mathfrak{q}$ y $s(\mathfrak{q}) = m/f$.

Podemos considerar a $\widetilde{M}(U)$ como grupo abeliano de forma natural y $\widetilde{M}$ es un haz en $\operatorname{Esp} A$ con las restricciones definidas de forma natural. Más aún, teniendo en cuenta la definición 2.3 es inmediato que $\widetilde{M}$ admite una estructura natural de $\mathcal{O}_X$-módulo.

La prueba del teorema siguiente es una modificación obvia de la prueba del teorema 2.4:

Teorema 5.2 *Si A es un anillo, M un A-módulo y $X = \operatorname{Esp} A$, entonces:*

a) Para cada $\mathfrak{p} \in X$*, se cumple que* $\widetilde{M}_{\mathfrak{p}} \cong M_{\mathfrak{p}}$.

b) Para cada $a \in A$*, se cumple que* $\widetilde{M}(D(a)) \cong M_a$.

c) En particular, $\widetilde{M}(X) \cong M$.

Más precisamente, a través de estos isomorfismos las restricciones y los homomorfismos $\widetilde{M}(D(f)) \longrightarrow \widetilde{M}_{\mathfrak{p}}$ se corresponden con los homomorfismos naturales.

Notemos que si $X = \operatorname{Esp} A$ y consideramos $M = A$, entonces $\widetilde{M} = \mathcal{O}_X$.

Se comprueba fácilmente que cada homomorfismo de módulos $f : M \longrightarrow N$ induce de forma natural un único homomorfismo $\tilde{f} : \widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{N}$ que, a través de los isomorfismos del teorema anterior, se corresponde con los homomorfismos naturales entre las localizaciones. Recíprocamente, si $f : \widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{N}$ es un homomorfismo de $\mathcal{O}_X$-módulos, ha de ser $f = \widetilde{f_X}$.

Más en general, si $X = \operatorname{Esp} A$, M es un A-módulo y $\mathcal{M}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo, entonces cada homomorfismo $\phi : M \longrightarrow \mathcal{M}(X)$ induce un homomorfismo de haces $\tilde{\phi} : \widetilde{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ de la forma siguiente: para cada $f \in A$, al componer ϕ con la restricción obtenemos un homomorfismo $M \longrightarrow \mathcal{M}(D(f))$ que induce a su vez un homomorfismo $\widetilde{M}(D(f)) = M_f \longrightarrow \mathcal{M}(D(f))$, y estos homomorfismos inducen el homomorfismo indicado.

Teorema 5.3 *Sea* $X = \operatorname{Esp} A$ *un esquema afín.*

a) Si $\{M_i\}_i$ *es una familia de* A*-módulos, entonces*

$$\widetilde{\bigoplus_i M_i} \cong \bigoplus_i \widetilde{M}_i.$$

b) Una sucesión de A*-módulos* $L \longrightarrow M \longrightarrow N$ *es exacta si y sólo si lo es la sucesión de* $\mathcal{O}_X$*-módulos* $\widetilde{L} \longrightarrow \widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{N}$.

c) Si M *y* N *son dos* A*-módulos, entonces* $\widetilde{M \otimes_A N} \cong \widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \widetilde{N}$.

d) Si N *es un submódulo de* N*, entonces* $\widetilde{M/N} \cong \widetilde{M}/\widetilde{N}$.

Demostración: a) es inmediato a partir de las definiciones.

b) Si $L \longrightarrow M \longrightarrow N$ es exacta, entonces también lo son las sucesiones $L_{\mathfrak{p}} \longrightarrow M_{\mathfrak{p}} \longrightarrow N_{\mathfrak{p}}$, para cada $\mathfrak{p} \in \operatorname{Esp} A$ (teorema [3.2]) y esto equivale a que la sucesión de $\mathcal{O}_X$-módulos es exacta. El recíproco es consecuencia inmediata del teorema [3.11].

c) Sea $L = M \otimes_A N$. Para cada abierto principal $D(a)$ de X tenemos un isomorfismo natural de A_a-módulos

$$\widetilde{L}(D(a)) = (M \otimes_A N)_a \cong (M \otimes_A N) \otimes_A A_a \cong (M \otimes_A A_a) \otimes_{A_a} (N \otimes_A A_a)$$
$$\cong M_a \otimes_{A_a} N_a = \widetilde{M}(D(a)) \otimes_{\mathcal{O}_X(D(a))} \widetilde{N}(D(a)).$$

Estos isomorfismos son compatibles con las restricciones, luego inducen un isomorfismo $\widetilde{L} \cong \widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \widetilde{N}$.

d) Por b) tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \widetilde{N} \longrightarrow \widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{M/N} \longrightarrow 0,$$

de la que se deduce el isomorfismo indicado. ■

Podríamos definir un haz cuasicoherente en un esquema X como un $\mathcal{O}_X$-módulo $\mathcal{M}$ con la propiedad de que cada punto de X tiene un entorno afín U tal que $\mathcal{M}|_U \cong \widetilde{M}$, para cierto $\mathcal{O}_X(U)$-módulo M, pero vamos a dar otra definición válida para espacios anillados arbitrarios, y demostraremos esto como una caracterización en el caso de haces sobre un esquema.

Definición 5.4 Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ un espacio anillado y sea $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo. Diremos que $\mathcal{M}$ es un *haz cuasicoherente* si cada punto de X tiene un entorno abierto U para el que existe una sucesión exacta de $\mathcal{O}_X$-módulos

$$\mathcal{O}_X^{(I)}|_U \longrightarrow \mathcal{O}_X^{(J)}|_U \longrightarrow \mathcal{M}|_U \longrightarrow 0,$$

donde $\mathcal{O}_X^{(I)} = \bigoplus\limits_{i \in I} \mathcal{O}_X$.

Por ejemplo, es inmediato que el propio $\mathcal{O}_X$ es un haz cuasicoherente en X, pues basta tomar la sucesión formada por la identidad en $\mathcal{O}_X$. El ejemplo fundamental es el siguiente:

Teorema 5.5 *Si $X = \operatorname{Esp} A$ es un esquema afín y M es un A-módulo, entonces $\widetilde{M}$ es un haz cuasicoherente.*

Demostración: Podemos formar una sucesión exacta

$$K \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

donde K y L son A-módulos libres. Entonces $K = A^{(I)}$, luego $\widetilde{K} = \mathcal{O}_X^{(I)}$, e igualmente $\widetilde{L} = \mathcal{O}_X^{(J)}$ y la sucesión exacta induce una sucesión exacta de $\mathcal{O}_X$-módulos en las condiciones de la definición de haz cuasicoherente. ■

Para llegar a la caracterización que hemos anunciado necesitamos un resultado técnico:

Teorema 5.6 *Sea $\mathcal{M}$ un haz cuasicoherente en un esquema X. Supongamos que X es noetheriano o, alternativamente, que es separado y cuasicompacto. Entonces, para cada $f \in \mathcal{O}_X(X)$, el homomorfismo canónico*

$$\mathcal{M}(X)_f \longrightarrow \mathcal{M}(X) \otimes_{\mathcal{O}_X(X)} \mathcal{O}_X(X)_f \longrightarrow \mathcal{M}(X_f)$$

es un isomorfismo.

Demostración: Recordemos que, según 2.14,

$$X_f = \{P \in X \mid f_P \in \mathcal{O}_P^* = \mathcal{O}_P \setminus \mathfrak{m}_P\}.$$

Las hipótesis sobre X aseguran que éste tiene un buen cubrimiento afín, y entonces sabemos que X_f es un abierto en X tal que la restricción induce un isomorfismo $j : \mathcal{O}_X(X)_f \longrightarrow \mathcal{O}_X(X_f)$. El segundo homomorfismo de la sucesión del enunciado es el dado por $m \otimes a \mapsto j(a)m|_{X_f}$.

Vamos a probar que cada punto $P \in X$ tiene un entorno abierto U tal que el homomorfismo canónico $\phi : \widetilde{\mathcal{M}(U)} \longrightarrow \mathcal{M}|_U$ es un isomorfismo (el dado por $\phi_{D(s)}(m/s^n) = m|_{D(s)}/s^n$, para $m \in \mathcal{M}(U)$, $s \in \mathcal{O}_X(U)$). Por hipótesis podemos tomar U afín de modo que existe una sucesión exacta

$$\mathcal{O}_X^{(J)}|_U \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}_X^{(I)}|_U \xrightarrow{\alpha} \mathcal{M}|_U \longrightarrow 0.$$

Observemos que los dos primeros módulos son $\mathcal{O}_X\widetilde{(U)^{(J)}}$ y $\mathcal{O}_X\widetilde{(U)^{(I)}}$, luego $\beta = \widetilde{\beta}_U$, por lo que el prehaz $(\operatorname{Im}\beta)^- = \widetilde{\operatorname{Im}\beta_U}$ es ya un haz. Esto significa que la sucesión

$$\mathcal{O}_X(U)^{(J)} \xrightarrow{\beta_U} \mathcal{O}_X(U)^{(I)} \xrightarrow{\alpha_U} \mathcal{M}(U) \longrightarrow 0$$

es exacta en $\mathcal{O}_X(U)^{(I)}$, aunque no necesariamente en $\mathcal{M}(U)$. Sea $M = \operatorname{Im}\alpha_U$, de modo que la sucesión

$$\mathcal{O}_X(U)^{(J)} \xrightarrow{\beta_U} \mathcal{O}_X(U)^{(I)} \xrightarrow{\alpha_U} M \longrightarrow 0$$

sí que es exacta. Por el teorema anterior induce una sucesión exacta

$$\mathcal{O}_X^{(J)}|_U \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}_X^{(I)}|_U \xrightarrow{\tilde{\alpha}_U} \widetilde{M} \longrightarrow 0.$$

Claramente tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X^{(J)}|_U \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_X^{(J)}|_U \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{M} \arrow[r] \arrow[d, "\phi"] & 0 \\
\mathcal{O}_X^{(J)}|_U \arrow[r] & \mathcal{O}_X^{(J)}|_U \arrow[r] & \mathcal{M}|_U \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

en el que las dos primeras flechas verticales son la identidad. Para cada $P \in U$, al localizar obtenemos un diagrama similar con filas exactas que prueba que ϕ_P es un isomorfismo, luego ϕ es un isomorfismo.

Podemos tomar un buen cubrimiento afín de X formado por abiertos U_i tales que $\widetilde{\mathcal{M}(U_i)} \cong \mathcal{M}|_{U_i}$. Sea $V_i = U_i \cap X_f = D(f|_{U_i})$. Observemos que el isomorfismo $\phi_{D(f|_{U_i})} : \mathcal{M}(U_i)_f \longrightarrow \mathcal{M}(V_i)$ es precisamente el isomorfismo canónico descrito en el enunciado para U_i en lugar de X.

El mismo razonamiento que en la prueba del teorema 2.15 nos da un diagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{M}(X)_f \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & \bigoplus\limits_i \mathcal{M}(U_i)_f \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus\limits_{i,j} \mathcal{M}(U_i \cap U_j)_f \arrow[d, "\beta"] \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{M}(X_f) \arrow[r] & \bigoplus\limits_i \mathcal{M}(V_i) \arrow[r] & \bigoplus\limits_{i,j} \mathcal{M}(V_i \cap V_j) \end{tikzcd}$$

Las flechas verticales son los homomorfismos canónicos descritos en el enunciado. Sabemos que la central es un isomorfismo. Por consiguiente α es inyectiva. Ahora bien, $\mathcal{M}|_{U_i\cap U_j}$ es un haz cuasicoherente en el esquema $U_i \cap U_j$, y ambos cumplen las mismas hipótesis que $\mathcal{M}$ y X. Además $V_i \cap V_j = (U_i \cap U_j)_f$. Por consiguiente, β también es inyectiva, lo que implica que α es un isomorfismo.

■

Finalmente tenemos la caracterización natural de los haces cuasicoherentes sobre un esquema:

Teorema 5.7 *Sea X un esquema y $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo. Entonces $\mathcal{M}$ es un haz cuasicoherente si y sólo si para todo abierto afín U de X se cumple que $\mathcal{M}|_U \cong \widetilde{\mathcal{M}(U)}$.*

Demostración: La definición de haz cuasicoherente es local y los módulos $\widetilde{\mathcal{M}(U)}$ son cuasicoherentes, luego si se dan los isomorfismos indicados es que $\mathcal{M}$ es un haz cuasicoherente. Recíprocamente, si $\mathcal{M}$ es cuasicoherente y U es un abierto afín, entonces U es cuasicompacto y separado luego, por el teorema anterior, para cada $f \in \mathcal{O}_X(U)$, se cumple que $\mathcal{M}(U)_f \cong \mathcal{M}(D(f))$. Los isomorfismos son consistentes con las restricciones. En efecto, si $D(f) \subset D(g)$, entonces $f^n = ag$ y los diagramas siguientes conmutan:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}(U)_g \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{M}(D(g)) \arrow[d] \arrow[dr, "\rho"] & \\ \mathcal{M}(U)_f \arrow[r] & \mathcal{M}(D(g))_f \arrow[r] & \mathcal{M}(D(f)) \end{tikzcd}$$

(La composición de la segunda fila horizontal es el isomorfismo canónico.)

Por consiguiente tenemos un isomorfismo $\widetilde{\mathcal{M}(U)} \cong \mathcal{M}|_U$. ■

En particular vemos que los haces cuasicoherentes sobre un esquema afín $X = \operatorname{Esp} A$ son exactamente los de la forma $\widetilde{M}$, donde M es un A-módulo.

Ahora es evidente que la suma directa y el producto de una familia de haces cuasicoherentes sobre un esquema X es también cuasicoherente. El producto tensorial de dos haces cuasicoherentes $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ es cuasicoherente. Más aún, para cada abierto afín U en X se cumple que

$$(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N})(U) = \mathcal{M}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{N}(U).$$

Similarmente, si $\mathcal{N}$ es un subhaz de $\mathcal{M}$ entonces $\mathcal{M}/\mathcal{N}$ es cuasicoherente y, para cada abierto afín U de X tenemos que $(\mathcal{M}/\mathcal{N})(U) = \mathcal{M}(U)/\mathcal{N}(U)$.

También es fácil ver que el núcleo y la imagen de un homomorfismo entre dos haces cuasicoherentes son haces cuasicoherentes. Para imágenes inversas tenemos el teorema siguiente:

Teorema 5.8 *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un homomorfismo de esquemas y $\mathcal{M}$ un haz cuasicoherente en Y. Entonces $f^*(\mathcal{M})$ es cuasicoherente y para cada abierto afín $V \subset Y$ y cada abierto afín $U \subset X$ tal que $f[U] \subset V$, se cumple que*

$$f^*(\mathcal{M})(U) \cong \mathcal{M}(V) \otimes_{\mathcal{O}_Y(V)} \mathcal{O}_X(U).$$

Demostración: Sea $g : U \longrightarrow V$ la restricción de f. Es fácil ver que $f^*(\mathcal{M})|_U \cong g^*(\mathcal{M}|_V)$, luego podemos suponer sin pérdida de generalidad que $X = U = \operatorname{Esp} B$, $Y = V = \operatorname{Esp} A$. Consideremos una sucesión exacta

$$K \xrightarrow{\alpha} L \xrightarrow{\beta} \mathcal{M}(X) \longrightarrow 0$$

en la que K y L son A-módulos libres. Ésta determina una sucesión exacta

$$\widetilde{K} \longrightarrow \widetilde{L} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0,$$

la cual determina a su vez una sucesión exacta

$$f^*(\widetilde{K}) \longrightarrow f^*(\widetilde{L}) \longrightarrow f^*(\mathcal{M}) \longrightarrow 0.$$

(La exactitud se comprueba considerando las sucesiones en los anillos locales.)

Es fácil ver que f^* conmuta con las sumas directas. Tenemos que $K = A^{(J)}$, luego $\widetilde{K} = \mathcal{O}_Y^{(J)}$ y $f^*(\widetilde{K}) = \mathcal{O}_X^{(J)}$, e igualmente $f^*(\widetilde{L}) = \mathcal{O}_X^{(I)}$. Esto prueba que $f^*(\mathcal{M})$ es cuasicoherente, lo que implica a su vez que tenemos una sucesión exacta

$$K \otimes_A B \longrightarrow L \otimes_A B \longrightarrow f^*(\mathcal{M})(X) \longrightarrow 0.$$

Se comprueba que el primer homomorfismo es $\alpha \otimes 1$, y también tenemos la sucesión exacta

$$K \otimes_A B \xrightarrow{\alpha\otimes 1} L \otimes_A B \longrightarrow \mathcal{M}(Y) \otimes_A B \longrightarrow 0,$$

de donde se sigue que $f^*(\mathcal{M})(X) \cong \mathcal{M}(Y) \otimes_{\mathcal{O}_Y(Y)} \mathcal{O}_X(X)$, como había que probar. ∎

Nota Aunque aparentemente el isomorfismo que hemos construido en la prueba del teorema anterior depende de la elección de K, L y de los homomorfismos, es fácil ver que para cada $P \in U$ tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
f^*(\mathcal{M})(U) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{M}(V) \otimes_{\mathcal{O}_Y(V)} \mathcal{O}_X(U) \arrow[d] \\
f^*(\mathcal{M})_P \arrow[r] & \mathcal{M}_{f(P)} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,f(P)}} \mathcal{O}_{X,P}
\end{tikzcd}$$

donde la flecha inferior es el isomorfismo canónico. Esto determina completamente el isomorfismo del teorema anterior. ■

Para imágenes directas la situación es la siguiente:

Teorema 5.9 *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un homomorfismo de esquemas y $\mathcal{M}$ un haz cuasicoherente en X. Si X es noetheriano o bien f es separado y cuasicompacto, entonces $f_*(\mathcal{M})$ es cuasicoherente.*

DEMOSTRACIÓN: Si $U \subset Y$ es un abierto afín y $g : f^{-1}[U] \longrightarrow U$ es la restricción de f, es claro que $f_*(\mathcal{M})|_U = g_*(\mathcal{M}|_U)$, luego podemos suponer que Y es afín, así como que X es noetheriano o bien separado y cuasicompacto. Esto nos permite aplicar el teorema 5.6:

Sea $g \in \mathcal{O}_Y(Y)$ y sea g' su imagen en $\mathcal{O}_X(X)$. Entonces

$$f_*(\mathcal{M})(D(g)) = \mathcal{M}(f^{-1}[D(g)]) = \mathcal{M}(D(g')) \cong \mathcal{M}(X)_{g'} = f_*(\mathcal{M})(Y)_g,$$

y estos isomorfismos conmutan con los restricciones, luego $f_*(\mathcal{M}) \cong f_*\widetilde{(\mathcal{M})(X)}$. ■

Veamos un primer ejemplo del interés de los haces cuasicoherentes:

Teorema 5.10 *Si X es un esquema y (Z, i) es un subesquema cerrado, entonces el núcleo de $i^\#$ es un haz cuasicoherente de ideales de $\mathcal{O}_X$. La correspondencia $(Z, i) \mapsto \mathrm{N}(i^\#)$ biyecta los subesquemas cerrados de X con los haces cuasicoherentes de ideales de $\mathcal{O}_X$.*

DEMOSTRACIÓN: Tenemos que $i^\# : \mathcal{O}_X \longrightarrow i_*(\mathcal{O}_Z)$ es un homomorfismo de haces de anillos. Tomemos un abierto afín $U \subset X$. Entonces la restricción $i|_{i^{-1}[U]} : i^{-1}[U] \longrightarrow U$ es una inmersión cerrada y el teorema 2.21 nos da que $i^{-1}[U]$ es afín y existe un ideal $I \subset \mathcal{O}_X(U)$ de modo que $i|_{i^{-1}[U]}$ es, salvo isomorfismo la aplicación descrita en el teorema 2.20, con lo que, en particular, para cada $g \in \mathcal{O}_X(U)$ se cumple que $\mathrm{N}(i^\#)(U_g) \cong I_g$. Esto implica que $\mathrm{N}(i^\#)|_U \cong \widetilde{I} = \widetilde{\mathrm{N}(i^\#)(U)}$. Así pues, $\mathrm{N}(i^\#)$ es ciertamente un haz cuasicoherente de ideales de $\mathcal{O}_X$.

El teorema 2.18 (con los hechos precedentes) prueba que la correspondencia $(Z, i) \mapsto \mathrm{N}(i^\#)$ biyecta los pares (salvo isomorfismo) (Z, i), donde Z es un espacio anillado local e $i : Z \longrightarrow X$ una inmersión cerrada de espacios anillados, con los haces de ideales de $\mathcal{O}_X$. Ya hemos probado que si Z es un esquema entonces $\mathrm{N}(i^\#)$ es un haz cuasicoherente. Ahora suponemos que $\mathcal{I} = \mathrm{N}(i^\#)$ es cuasicoherente y hemos de probar que Z es un esquema. Componiendo con un isomorfismo podemos suponer que $Z = V(\mathcal{I})$ y que la estructura de espacio anillado es $i^{-1}(\mathcal{O}_X/\mathcal{I})$.

Cada punto de Z tiene un entorno de la forma $i^{-1}[U]$, donde U es un abierto afín en X. Basta probar que $i^{-1}[U]$ es un esquema afín, pero la estructura de espacio anillado en $i^{-1}[U]$ es $i^{-1}(\mathcal{O}_X|_U/\mathcal{I}|_U)$. Equivalentemente, podemos suponer que X es un esquema afín. Como $\mathcal{I}$ es cuasicoherente, ha de ser de la forma

$\mathcal{I} = \widetilde{I}$, para un cierto ideal I de $\mathcal{O}(X)$, que determina por el teorema 2.20 un subesquema cerrado (Z', i') de X cuyo haz de ideales asociado es precisamente $\mathcal{I}$.

Sabemos que los haces de ideales se corresponden biunívocamente con las inmersiones cerradas de espacios anillados en X, luego $(Z, i) \cong (Z', i')$, luego Z es un esquema. ■

Si A es un anillo y M es un A-módulo, la construcción del haz $\widetilde{M}$ es el análogo para módulos de la construcción de la estructura de esquema sobre $\operatorname{Esp} A$. Ahora vamos a introducir el análogo para módulos de la construcción de los esquemas $\operatorname{Proy} A$.

Definición 5.11 Consideremos un anillo graduado A y sea M un A-módulo graduado:

$$A = \bigoplus_{n\geq 0} A_n, \qquad M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n.$$

Llamemos $X = \operatorname{Proy} A$.

Para cada $\mathfrak{p} \in \operatorname{Proy} A$, definimos $M_{(\mathfrak{p})}$ como el grupo de elementos de grado 0 en $M_{\mathfrak{p}}$, es decir, los elementos de $M_{(\mathfrak{p})}$ son de la forma m/s, donde $m \in M_d$ y $s \in A_d \setminus \mathfrak{p}$.

Para cada abierto $U \subset \operatorname{Proy} A$, recordemos (definición 2.5) que $S_{(\mathfrak{p})}$ es el conjunto de los elementos homogéneos de A que no están en $\mathfrak{p}$ y que $A_{(\mathfrak{p})}$ es el subanillo de $S_{(\mathfrak{p})}^{-1}A$ formado por las fracciones cuyo numerador es homogéneo del mismo grado que el denominador. Similarmente definimos $M_{(\mathfrak{p})}$ como el subgrupo de $S_{(\mathfrak{p})}^{-1}M$ formado por las fracciones cuyo numerador es homogéneo del mismo grado que el denominador. Claramente es un $A_{(\mathfrak{p})}$-módulo.

Igualmente, si $f \in A$ es homogéneo de grado no nulo, $A_{(f)}$ es el subanillo de A_f formado por las fracciones cuyo numerador es homogéneo del mismo grado que el denominador, y ahora definimos $M_{(f)}$ como el submódulo análogo de M_f.

Definimos $\widetilde{M}(U)$ como el conjunto de todas las aplicaciones

$$f : U \longrightarrow \bigoplus_{\mathfrak{p}\in U} M_{(\mathfrak{p})}$$

tales que para cada $\mathfrak{p} \in U$ existe un abierto $\mathfrak{p} \in V \subset U$ y elementos $m \in M_d$, $s \in A_d$ tales que para cada $\mathfrak{q} \in V$ se cumple que $s \notin \mathfrak{q}$ y $f(\mathfrak{q}) = m/s \in M_{(\mathfrak{q})}$. Es claro que $\widetilde{M}$ es un haz sobre X con las restricciones naturales. Más aún, teniendo en cuenta la definición de la estructura de esquema en $X = \operatorname{Proy} A$, es claro que $\widetilde{M}$ tiene una estructura natural de $\mathcal{O}_X$-módulo.

Teorema 5.12 *Sea A un anillo graduado y M un A-módulo graduado. Sea* $X = \operatorname{Proy} A$.

a) Para cada $\mathfrak{p} \in A$ se cumple que $\widetilde{M}_{\mathfrak{p}} = M_{(\mathfrak{p})}$.

b) Si $f \in A$ es homogéneo de grado no nulo, entonces $\widetilde{M}|_{D(f)} \cong \widetilde{M_{(f)}}$ (donde el haz de la derecha es el definido en la sección anterior).

c) $\widetilde{M}$ *es un haz cuasicoherente en* X.

DEMOSTRACIÓN: La prueba de a) y b) es idéntica a la del teorema 2.6. Recordemos que, precisamente por dicho teorema, $D(f) \cong \operatorname{Esp} A_{(f)}$. En principio $\widetilde{M_{(f)}}$ es un haz sobre $\operatorname{Esp} A_{(f)}$, pero lo consideramos como un haz sobre $D(f)$ a través de dicho isomorfismo.

El apartado c) es una consecuencia inmediata de b). ■

Observemos que, en las condiciones del teorema anterior, si

$$N = \bigoplus_{n \geq n_0} M_n,$$

para cada $f \in A$ homogéneo, se cumple que $M_{(f)} = N_{(f)}$, por lo que $\widetilde{M} = \widetilde{N}$. Vemos así que, al contrario de lo que sucede en el caso afín, el haz $\widetilde{M}$ no determina el A-módulo M.

Análogamente a lo que sucede en el caso afín, (bajo ciertas hipótesis naturales sobre el anillo graduado A) sucede que todo haz cuasicoherente sobre un esquema $\operatorname{Proy} A$ es de la forma $\widetilde{M}$, para cierto A-módulo graduado M, pero esto no es evidente en absoluto y pospondremos la demostración. Terminaremos esta sección con algunos resultados técnicos sobre los haces $\widetilde{M}$ y los homomorfismos entre ellos.

Definición 5.13 Si A es un anillo graduado y $f : M \longrightarrow N$ es un homomorfismo de A-módulos graduados (de grado 0, es decir, un homomorfismo que cumple $f[M_i] \subset N_i$ para todo $i \in \mathbb{Z}$), es claro que f induce un homomorfismo de haces $\tilde{f} : \widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{N}$ completamente determinado por que, para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Proy} A$, el homomorfismo $\tilde{f}_{\mathfrak{p}} : M_{(\mathfrak{p})} \longrightarrow N_{(\mathfrak{p})}$ es el homomorfismo inducido por f.

Teorema 5.14 *Si* A *es un anillo graduado y* $M \longrightarrow N \longrightarrow P$ *es una sucesión exacta de homomorfismos graduados entre* A*-módulos graduados, entonces la sucesión* $\widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{N} \longrightarrow \widetilde{P}$ *también es exacta.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $d > 0$ y $f \in A_d$. Entonces la sucesión

$$M_f \longrightarrow N_f \longrightarrow P_f$$

es exacta, de donde se sigue que también lo es

$$M_{(f)} \longrightarrow N_{(f)} \longrightarrow P_{(f)},$$

pues si un elemento $b/f^n \in N_{(f)}$ tiene imagen nula, entonces tiene una antiimagen $a/f^m \in M_f$. Si llamamos α al primer homomorfismo, esto significa que $f^{n+k}\alpha(a) = f^{m+k}b$, para cierto k. Descomponiendo a en componentes homogéneas e igualando las componentes de grado $d(m+n+k)$, obtenemos que $f^{n+k}\alpha(a') = f^{m+k}b$, donde a' es la componente homogénea de a de grado dm. Esto implica que $\alpha(a'/f^m) = b/f^n$, y $a'/f^m \in M_{(f)}$.

Esto implica a su vez la exactitud de la sucesión

$$\widetilde{M_{(f)}} \longrightarrow \widetilde{N_{(f)}} \longrightarrow \widetilde{P_{(f)}},$$

que claramente se corresponde con

$$\widetilde{M}|_{D(f)} \longrightarrow \widetilde{N}|_{D(f)} \longrightarrow \widetilde{P}|_{D(f)}$$

Como los abiertos $D(f)$ cubren $\operatorname{Proy} A$, concluimos que la sucesión del enunciado es exacta. ■

Si A es un anillo graduado y M, N son dos A-módulos graduados, para cada $d \in \mathbb{Z}$ definimos $(M \otimes_A N)_d$ como el subgrupo de $M \otimes_A N$ generado por los tensores $m \otimes n$ tales que $m \in M_r$, $n \in N_s$ y $r + s = d$. Es inmediato que $A_d(M \otimes_A N)_{d'} \subset (M \otimes_A N)_{d+d'}$, lo que nos permite definir una estructura natural de A-módulo graduado en la suma directa (externa)

$$\bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} (M \otimes_A N)_d.$$

A su vez, es claro que podemos definir un homomorfismo de A-módulos

$$M \otimes_A N \longrightarrow \bigoplus_{d\in\mathbb{Z}} (M \otimes_A N)_d,$$

que tiene un inverso obvio, luego se trata de un isomorfismo. En definitiva, la suma directa es interna y tenemos una estructura de A-módulo graduado en $M \otimes_A N$.

Teorema 5.15 *Sea A un anillo graduado generado (como A_0-algebra) por elementos de A_1, sea $X = \operatorname{Proy} A$ y sean M y N dos A-módulos graduados. Entonces $\widetilde{M \otimes_A N} \cong \widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \widetilde{N}$.*

Demostración: Bajo la hipótesis sobre A tenemos que X está cubierto por los abiertos $D(f)$, donde $f \in A_1$.

Veamos que si $f \in A_1$ entonces $(M \otimes_A N)_{(f)} \cong M_{(f)} \otimes_{A_{(f)}} N_{(f)}$. Podemos definir de forma natural un epimorfismo $i : M_{(f)} \otimes_{A_{(f)}} N_{(f)} \longrightarrow (M \otimes_A N)_{(f)}$. Ahora definimos $\rho_M : M \longrightarrow M_{(f)}$ mediante

$$\rho_M(m) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \frac{m_i}{f^i}.$$

Es claro que se trata de un homomorfismo de grupos y satisface la relación

$$\rho_M(am) = \frac{a}{f^r}\rho_M(f), \qquad \text{donde } a \in A_r.$$

En particular $\rho_M(f^r m) = \rho_M(m)$. Igualmente definimos $\rho_N : N \longrightarrow N_{(f)}$. Se comprueba sin dificultad que ρ_M y ρ_N inducen un homomorfismo de grupos

$$\rho : M \otimes_A N \longrightarrow M_{(f)} \otimes_{A_{(f)}} N_{(f)}$$

dado por $\rho(m \otimes n) = \rho_M(m) \otimes \rho_N(n)$. Finalmente ρ induce un homomorfismo $\bar{\rho} : (M \otimes_A N)_{(f)} \longrightarrow M_{(f)} \otimes_{A_{(f)}} N_{(f)}$ dado por $\bar{\rho}(x/f^r) = \rho(x)$. Es inmediato que $i \circ \rho = 1$, por lo que i es un isomorfismo.

Seguidamente observamos que

$$(\widetilde{M \otimes_A N})(D(f)) = (M \otimes_A N)_{(f)} \cong M_{(f)} \otimes_{A_{(f)}} N_{(f)}$$

$$= \widetilde{M}(D(f)) \otimes_{\mathcal{O}_X(D(f))} \widetilde{N}(D(f)) = (\widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \widetilde{N})(D(f)),$$

y es fácil ver que estos isomorfismos conmutan con las restricciones, luego determinan el isomorfismo del enunciado. ■

Muchos resultados sobre esquemas de tipo Proy A requieren, como es el caso del teorema anterior, que el anillo graduado A esté finitamente generado (como A_0-álgebra) por elementos de A_1. Esto lo cumplen los anillos de polinomios (con un número finito de indeterminadas) y, más en general, los cocientes de anillos de polinomios sobre ideales homogéneos, que son los únicos ejemplos que nos van a interesar.

5.2 Haces coherentes

El concepto de haz coherente sobre un esquema resulta de añadir una condición de finitud al concepto de haz cuasicoherente. En realidad conviene discutir dos condiciones de finitud relacionadas, que, al igual que hemos hecho con la noción de haz cuasicoherente, las presentamos aquí en el contexto general de los espacios anillados. A continuación vemos que para haces sobre esquemas localmente noetherianos son equivalentes y pueden caracterizarse por una condición mucho más simple:

Definición 5.16 Sea X un espacio anillado y $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo. Diremos que $\mathcal{M}$ es *finitamente generado* si cada $P \in X$ tiene un entorno abierto U tal que existe un homomorfismo suprayectivo $\mathcal{O}_X^n|_U \longrightarrow \mathcal{M}|_U$, para un $n \geq 1$. Diremos que $\mathcal{M}$ es *coherente* si es finitamente generado y además, para cada homomorfismo en estas condiciones, su núcleo es también un $\mathcal{O}_X$-módulo finitamente generado.

Las dos nociones que acabamos de introducir son locales, y en todos los casos que nos van a interesar son equivalentes:

Teorema 5.17 *Sea X un esquema y $\mathcal{M}$ un haz cuasicoherente en X. Consideremos las propiedades siguientes:*

a) $\mathcal{M}$ es coherente.

b) $\mathcal{M}$ es finitamente generado.

c) Para cada abierto afín U de X, el módulo $\mathcal{M}(U)$ es finitamente generado sobre $\mathcal{O}_X(U)$.

Se cumple que a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c), y si X es localmente noetheriano entonces las tres son equivalentes.

Demostración: Claramente a) $\Rightarrow$ b). Supongamos ahora que $\mathcal{M}$ es finitamente generado y sea U un abierto afín de X. Entonces U puede cubrirse por un número finito de abiertos principales U_i tales que existe una sucesión exacta

$$\mathcal{O}_X^{n_i}|_{U_i} \longrightarrow \mathcal{M}|_{U_i} \longrightarrow 0.$$

Por el teorema 5.3 también es exacta la sucesión

$$\mathcal{O}_X(U_i)^{n_i} \longrightarrow \mathcal{M}(U_i) \longrightarrow 0,$$

luego $\mathcal{M}(U_i)$ es finitamente generado sobre $\mathcal{O}_X(U_i)$. En términos de anillos, lo que tenemos es un anillo A y un A-módulo M y un número finito de elementos $h_i \in A$ tales que $(h_1, \ldots, h_r) = A$ y para los cuales M_{h_i} es un A_{h_i}-módulo finitamente generado. Esto implica que M es un A-módulo finitamente generado (ver el final de la prueba del teorema 4.40). En nuestro caso, lo que tenemos es que $\mathcal{M}(U)$ es finitamente generado sobre $\mathcal{O}_X(U)$.

Supongamos ahora c) y que X es localmente noetheriano. Hemos de probar que $\mathcal{M}$ es coherente, para lo cual tomamos un abierto V en X y un homomorfismo $\alpha : \mathcal{O}_X^n|_V \longrightarrow \mathcal{M}|_V$. Hemos de probar que el núcleo de α es un $\mathcal{O}_V$-módulo finitamente generado. Como se trata de una propiedad local, podemos suponer que V es afín y noetheriano, pero entonces $\mathrm{N}(\alpha) = \widetilde{\mathrm{N}(\alpha_V)}$ y $\mathrm{N}(\alpha_V)$ es un submódulo de $\mathcal{O}_X(V)^n$, luego es finitamente generado, porque $\mathcal{O}_X(V)$ es un anillo noetheriano. De aquí se sigue claramente que $\mathrm{N}(\alpha)$ es finitamente generado.

■

Es claro que si A es un anillo y M un A-módulo, entonces $\widetilde{M}$ es un módulo finitamente generado sobre $\operatorname{Esp} A$ si y sólo si M es finitamente generado sobre A.

De la propia definición se sigue que el la suma directa y el producto tensorial de un número finito de haces cuasicoherentes finitamente generados son finitamente generados. En particular, si el esquema es localmente noetheriano, la suma directa y el producto tensorial de dos haces coherentes es un haz coherente.

Así mismo, si $f : X \longrightarrow Y$ es un homomorfismo de esquemas y $\mathcal{M}$ es un haz cuasicoherente y finitamente generado en Y, entonces el teorema 5.8 implica que $f^*\mathcal{M}$ es un haz finitamente generado en X, pues podemos cubrir X por abiertos afines U tales que $f[U] \subset V \subset Y$ para un abierto afín V, y entonces $f^*\mathcal{M}(U)$ es un $\mathcal{O}_X(U)$-módulo finitamente generado, luego $f^*\mathcal{M}|_U$ es un haz finitamente generado. En particular, si X es localmente noetheriano, la imagen inversa de un haz coherente en Y es un haz coherente en X.

Para imágenes directas tenemos el teorema siguiente:

Teorema 5.18 *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un homomorfismo finito y sea $\mathcal{M}$ un haz cuasicoherente y finitamente generado en X. Entonces $f_*(\mathcal{M})$ es un haz cuasicoherente y finitamente generado en Y. En particular, si Y es localmente* *noetheriano, la imagen directa de un haz coherente en X por un homomorfismo finito es un haz coherente en Y.*

Demostración: Si V es un abierto afín en Y y $U = f^{-1}[V]$, entonces $f|_U$ es finita, $f_*(\mathcal{M})|_V = (f|_U)_*(\mathcal{M}|_U)$ y basta probar que estos haces son cuasicoherentes y finitamente generados. Equivalentemente, podemos suponer que Y es afín. Entonces X también es afín (por la definición de homomorfismo finito), luego f es separado y cuasicompacto. El teorema 5.9 implica entonces que $f_*(\mathcal{M})$ es cuasicoherente. Por lo tanto, $f_*(\mathcal{M}) = \widetilde{\mathcal{M}(X)}$. Por hipótesis $\mathcal{M}(X)$ es un $\mathcal{O}_X(X)$-módulo finitamente generado y, como f es finito, tenemos que $\mathcal{O}_X(X)$ es un $\mathcal{O}_Y(Y)$-módulo finitamente generado, luego $\mathcal{M}(X)$ es también un $\mathcal{O}_Y(Y)$-módulo finitamente generado, lo que implica que $f_*(\mathcal{M})$ es finitamente generado. ■

El teorema siguiente es un ejemplo de resultado sobre haces que requiere que sean coherentes:

Teorema 5.19 *Sea X un esquema localmente noetheriano, sean $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ dos haces coherentes sobre X, sea $P \in X$ y sea $f : \mathcal{M}_P \longrightarrow \mathcal{N}_P$ un isomorfismo de módulos. Entonces existe un entorno afín U de P y un isomorfismo de módulos $\bar{f} : \mathcal{M}(U) \longrightarrow \mathcal{N}(U)$ que hace conmutativo el diagrama siguiente:*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}(U) \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d] & \mathcal{N}(U) \arrow[d] \\ \mathcal{M}_P \arrow[r, "f"'] & \mathcal{N}_P \end{tikzcd}$$

Demostración: Cambiando X por un entorno de P podemos suponer que X es afín y noetheriano, es decir, que $X = \operatorname{Esp} A$, donde A es un anillo noetheriano, y podemos identificar a P con un ideal primo $\mathfrak{p}$ de A. Así mismo, $\mathcal{M} = \widetilde{M}$, $\mathcal{N} = \widetilde{N}$, donde M y N son A-módulos finitamente generados. Tenemos un isomorfismo $f : M_\mathfrak{p} \longrightarrow N_\mathfrak{p}$.

Podemos representar $M = L/K$, donde $L = \langle l_1, \ldots, l_r \rangle_A$ es un A-módulo libre. Sea $m_i = [l_i]$, de modo que $M = \langle m_1, \ldots, m_r \rangle_A$. Igualmente, pongamos que $N = \langle n_1, \ldots, n_s \rangle_A$ y que $K = \langle k_1, \ldots, k_t \rangle_A$.

Tomamos $a \in A \setminus \mathfrak{p}$ tal que

a) $f(m_i/1) = y_i/a$, para cierto $y_i \in N$,

b) $n_i/1 = f(x_i/a)$, para cierto $x_i \in M$,

c) $ax = 0$, para todo x en el núcleo del homomorfismo $M \longrightarrow M_\mathfrak{p}$.

Si $k_i = a_{i1}l_1 + \cdots + a_{irl_r}$, con $a_{ij} \in A$, entonces $a_{i1}m_1 + \cdots + a_{ir}m_r = 0$, luego

$$f(0/1) = (a_{i1}y_1 + \cdots + a_{ir}m_r)/a = 0,$$

lo que significa que existe un $b \in A \setminus \mathfrak{p}$ tal que $b(a_{i1}y_1 + \cdots + a_{ir}m_r) = 0$. Podemos tomar el mismo b para todos los índices i. Sea $h = ab$.

Definimos $f_1 : L \longrightarrow N_h$ mediante $f_1(l_i) = by_i/h$, de modo que

$$f_1(k_i) = b(a_{i1}y_1 + \cdots + a_{ir}m_r)/h = 0.$$

Por consiguiente, f_1 induce un homomorfismo $f_2 : M \longrightarrow N_h$, el cual induce a su vez un homomorfismo de A_h-módulos $\bar{f} : M_h \longrightarrow N_h$ que hace conmutativo el diagrama del enunciado (tomando $U = D(h)$).

Tenemos que $\bar{f}$ es inyectivo, pues si $\bar{f}(m/h^j) = 0$, entonces $f(m/h^j) = 0$, luego $m/h^j = 0$ en $M_\mathfrak{p}$, luego $m/1 = 0$ en $M_\mathfrak{p}$, luego $am = 0$ por la elección de a, luego $hm = 0$, luego $m/h^j = 0$. También es suprayectivo, pues $\bar{f}(bx_i/h) = n_i/1$.

■

Vamos a estudiar ahora la coherencia de los módulos de homomorfismos. En primer lugar observamos que si $X = \operatorname{Esp} A$ y $\mathcal{M}$ es cuasicoherente, entonces

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) \cong \operatorname{Hom}_A(\mathcal{M}(X), \mathcal{N}(X)).$$

En efecto, cada $\alpha \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ determina por definición un homomorfismo $\alpha_X \in \operatorname{Hom}_A(\mathcal{M}(X), \mathcal{N}(X))$, y cada $\beta \in \operatorname{Hom}_A(\mathcal{M}(X), \mathcal{N}(X))$ define, para cada $h \in A$, un homomorfismo $\beta_h : \mathcal{M}(D(h)) = \mathcal{M}(X)_h \longrightarrow \mathcal{N}(D(h))$. A su vez, los homomorfismos β_h inducen un homomorfismo $\alpha \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ tal que $\alpha_X = \beta$.

Así pues, si X es un esquema arbitrario, $\mathcal{M}$ es cuasicoherente y U es un abierto afín en X, entonces cada módulo $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N})(U)$ puede identificarse con $\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X(U)}(\mathcal{M}(U), \mathcal{N}(U))$.

El teoema [3.3] nos da que si A es un anillo noetheriano, M y N son A-módulos y M es finitamente generado, entonces, para cada $h \in A$ se cumple que

$$\operatorname{Hom}_A(M, N)_h \cong \operatorname{Hom}_{A_h}(M_h, N_h).$$

De aquí concluimos que si $X = \operatorname{Esp} A$, entonces

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\widetilde{M}, \widetilde{N}) \cong \widetilde{\operatorname{Hom}_A(M, N)}.$$

Más en general:

Teorema 5.20 *Si X es un esquema localmente noetheriano, $\mathcal{M}$ es un haz coherente en X y $\mathcal{N}$ es un haz cuasicoherente en X, entonces $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ es un haz cuasicoherente en X. Si además $\mathcal{N}$ es coherente, entonces $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ también lo es.*

Demostración: La primera parte es consecuencia inmediata del isomorfismo previo al teorema. Para probar la segunda basta ver que si M y N son A-módulos finitamente generados, entonces $\operatorname{Hom}_A(M, N)$ también es finitamente generado. En efecto, basta tomar un A-módulo libre finitamente generado L y un epimorfismo $\pi : L \longrightarrow M$, el cual induce un monomorfismo

$$\operatorname{Hom}_A(M, N) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(L, N).$$

El segundo módulo es claramente finitamente generado, y el primero también lo es porque A es noetheriano. ■

Si X es un esquema localmente noetheriano, entonces es obvio que los haces localmente libres de rango n sobre X son coherentes. Además, si $\mathcal{M}$ es un haz coherente en X, entonces X es localmente libre de rango n si y sólo si para todo $P \in X$ se cumple que $\mathcal{M}_P$ es un $\mathcal{O}_{X,P}$-módulo libre de rango n.

En efecto, una implicación es inmediata y para la otra basta aplicar el teorema 5.19: si $\mathcal{M}_P$ es libre de rango n tomamos $\mathcal{N} = \mathcal{O}_X^n$ y tenemos que $\mathcal{M}_P \cong \mathcal{N}_P$, luego existe un entorno U de P tal que $\mathcal{M}(U) \cong \mathcal{O}_X^n(U)$, de donde $\mathcal{M}|_U \cong \mathcal{O}_U^n$.

El teorema siguiente generaliza a 3.16 y los teoremas previos:

Teorema 5.21 *Si X es un esquema íntegro y $\mathcal{L}$ es un haz localmente libre en X, entonces las restricciones de $\mathcal{L}$ entre abiertos (no vacíos) de X son inyectivas.*

DEMOSTRACIÓN: En virtud del teorema 3.16, es obvio que los haces libres cumplen el enunciado. Si $\mathcal{L}$ es localmente libre, $V \subset U \subset X$ son abiertos no vacíos y $f \in \mathcal{L}(U)$ cumple que $f|_V = 0$, tomamos un punto arbitrario $P \in U$. Existe un entorno W de P tal que $\mathcal{L}|_W$ es libre, por lo que las restricciones entre abiertos contenidos en W son inyectivas. Como $f|_{V\cap W} = 0$, también $f|_{U\cap W} = 0$. En particular, $f_P = 0$. Esto prueba que $f = 0$. ■

Como consecuencia, si ξ es el punto genérico de X, U es un abierto en X y $P \in X$, los homomorfismos naturales

$$\mathcal{L}(U) \longrightarrow \mathcal{L}_\xi, \quad \mathcal{L}_P \longrightarrow \mathcal{L}_\xi$$

son inyectivos, lo que nos permite considerar a todos los módulos $\mathcal{L}(U)$ y $\mathcal{L}_P$ coo submódulos de $\mathcal{L}_\xi$. Es fácil ver que

$$\mathcal{L}(U) = \bigcap_{P\in U} \mathcal{L}_P.$$

Terminamos la sección con algunos resultados que necesitaremos más adelante.

Teorema 5.22 *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un homomorfismo de esquemas, sea $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo y sea $\mathcal{N}$ un $\mathcal{O}_Y$-módulo localmente libre de rango finito. Entonces existe un isomorfismo natural*

$$f_*(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{N}) \cong f_*\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{N}.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea V un abierto afín en Y tal que $\mathcal{N}|_V$ sea libre de rango n y sea U un abierto afín en X tal que $U \subset f^{-1}[V]$. Tenemos un isomorfismo natural

$$\mathcal{M}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} (\mathcal{N}(V) \otimes_{\mathcal{O}_Y(V)} \mathcal{O}_X(U)) \cong \mathcal{M}(U) \otimes_{\mathcal{O}_Y(V)} \mathcal{N}(V).$$

Equivalentemente, tenemos isomorfismos

$$\phi_{U,V} : (\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{N})(U) \longrightarrow \mathcal{M}(U) \otimes_{\mathcal{O}_Y(V)} \mathcal{N}(V).$$

Si hacemos variar U entre los abiertos afines contenidos en $f^{-1}[V]$, podemos unir estos isomorfismos en un homomorfismo

$$\phi_V : (\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{N})(f^{-1}[V]) \longrightarrow \mathcal{M}(f^{-1}[V]) \otimes_{\mathcal{O}_Y(V)} \mathcal{N}(V).$$

En efecto, tenemos que $\mathcal{N}(V)$ es un $\mathcal{O}_Y(V)$-módulo libre de rango n. Sea $b_1, \ldots, b_n$ una base. Dado $x \in (\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{N})(f^{-1}[V])$ consideramos las imágenes

$$\phi_{U,V}(x|_U) = \sum_i m_{i,U} \otimes b_i,$$

donde los $m_{i,U} \in \mathcal{M}(U)$ inducen elementos $m_i \in \mathcal{M}(f^{-1}[V])$, y basta definir

$$\phi_V(x) = \sum_i m_i \otimes b_i.$$

Similarmente construimos un homomorfismo inverso de ϕ_V, luego se trata de un isomorfismo

$$\phi_V : f_*(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{N}))(V) \longrightarrow (f_*\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{N})(V)$$

Además, los isomorfismos ϕ_V son compatibles entre sí, por lo que inducen el isomorfismo de haces del enunciado. ■

Teorema 5.23 *Sea X un esquema noetheriano, sea $U \subset X$ un abierto, sea $\mathcal{M}$ un haz cuasicoherente en X y sea $\mathcal{N}$ un subhaz coherente de $\mathcal{M}|_U$. Entonces existe un subhaz coherente $\overline{\mathcal{N}}$ de $\mathcal{M}$ tal que $\overline{\mathcal{N}}|_U = \mathcal{N}$.*

Demostración: Consideremos primero el caso en que $X = \operatorname{Esp} A$ es afín. Sea $i : U \longrightarrow X$ la inclusión. Por el teorema 5.9, sabemos que el haz $i_*\mathcal{N}$ es cuasicoherente, y trivialmente cumple que $i_*\mathcal{N}|_U = \mathcal{N}$, pero no es un subhaz de $\mathcal{M}$. Sin embargo, como el funtor i_* es exacto por la izquierda, tenemos que $i_*\mathcal{N}$ es un subhaz de $i_*(\mathcal{M}|_U)$. Este haz también es cuasicoherente.

Notemos que si $V \subset X$ es un abierto, $i_*(\mathcal{M}|_U)(V) = \mathcal{M}(U \cap V)$, por lo que podemos definir un homomorfismo $\phi : \mathcal{M} \longrightarrow i_*\mathcal{M}|_U$ de forma obvia. Notemos que $\phi|_U$ es la identidad.

Si $\mathcal{M} = \widetilde{M}$, $\widetilde{i_*(\mathcal{M}|_U)} = \widetilde{M'}$, $i_*\mathcal{N} = \widetilde{N}$, donde N es un submódulo de M', definimos $\widehat{\mathcal{N}} = \phi_X^{-1}[N]$. Ciertamente, se trata de un subhaz cuasicoherente de $\mathcal{M}$. Además, si $f \in A$ cumple que $V = D(f) \subset U$, entonces

$$\widehat{\mathcal{N}}(V) = \phi_X^{-1}[N]_f = \phi_V^{-1}[N_f] = \phi_V^{-1}[\mathcal{N}(V)] = \mathcal{N}(V),$$

luego lo mismo vale para todo abierto $V \subset U$, luego $\widehat{\mathcal{N}}|_U = \mathcal{N}$. Sin embargo, el haz $\widehat{\mathcal{N}}$ no tiene por qué ser coherente. Para corregir esto expresamos U como unión finita de abiertos principales $V_i = D(f_i)$, con $f_i \in A$. El $\mathcal{O}_X(V_i)$-módulo

$\mathcal{N}(V_i) = \widehat{\mathcal{N}}(V_i)$ es finitamente generado. Tomemos un sistema generador, que será de la forma n_{ij}/f_i^m, para ciertos $n_{ij} \in \widehat{\mathcal{N}}(X)$. Sea $N' \subset \widehat{\mathcal{N}}(X)$ el submódulo generado por los n_{ij} y sea $\overline{\mathcal{N}} = \widetilde{N}'$. Se trata de un subhaz coherente de $\widehat{\mathcal{N}}$ y, por lo tanto, también de $\mathcal{M}$, y además $\overline{\mathcal{N}}(V_i) = \widehat{\mathcal{N}}(V_i)$ para todo i, luego $\overline{\mathcal{N}}(U) = \widehat{\mathcal{N}}(U) = \mathcal{N}(U)$, luego $\overline{\mathcal{N}}|_U = \mathcal{N}$.

Ahora consideramos el caso en que el esquema X es arbitrario. Lo cubrimos con un número finito de abiertos afines $U_1, \ldots, U_m$. Por la parte ya probada, el haz coherente $\mathcal{N}|_{U\cap U_1}$ se extiende a un subhaz coherente $\mathcal{N}_1'$ de $\mathcal{M}|_{U_1}$. Entonces los haces $\mathcal{N}$ y $\mathcal{N}_1'$ determinan un subhaz coherente $\mathcal{N}_1$ de $\mathcal{M}|_{U\cup U_1}$ que extiende a $\mathcal{N}$.

Del mismo modo, el haz coherente $\mathcal{N}_1|_{(U\cup U_1)\cap U_2}$ se extiende a un subhaz coherente $\mathcal{N}_2'$ de $\mathcal{M}|_{U_2}$, y los haces $\mathcal{N}_1$ y $\mathcal{N}_2'$ determinan un subhaz coherente $\mathcal{N}_2$ de $\mathcal{M}|_{U\cup U_1\cup U_2}$ que extiende a $\mathcal{N}$. Tras un número finito de pasos llegamos a un haz que cumple el teorema. ■

5.3 Homomorfismos en espacios proyectivos

Si $X \subset A_k^m$ es un conjunto algebraico afín, un homomorfismo $\phi : X \longrightarrow A_k^n$ está completamente determinado por n polinomios $F_1, \ldots, F_n \in k[X_1, \ldots, X_m]$. En términos clásicos, estos polinomios determinan, concretamente, el homomorfismo dado por

$$\phi(P) = (F_1(P), \ldots, F_n(P)).$$

En términos de esquemas vemos que en realidad lo que importa son las clases $f_i = [F_i] \in \mathcal{O}_X(X)$, que a su vez determinan el homomorfismo de anillos $k[X_1, \ldots, X_n] \longrightarrow \mathcal{O}_X(X)$ dado por $X_i \mapsto f_i$, el cual a su vez determina el homomorfismo de esquemas $\phi : X \longrightarrow A_k^n$. Todo homomorfismo ϕ puede obtenerse de esta forma.

Más en general, esto es válido si X/S es un esquema afín arbitrario definido sobre un anillo S y consideramos homomorfismos en A_S^n definidos sobre S. Si no exigimos que el esquema X sea afín, el teorema 2.11 nos asegura que la situación sigue siendo la misma: cada homomorfismo en A_S^n está determinado por n elementos de $\mathcal{O}_X(X)$.

En esta sección vamos a ocuparnos del problema de qué determina un homomorfismo de un esquema X/S en un espacio proyectivo P_S^n. Un esbozo de respuesta en el caso clásico sería, por analogía al caso afín, conjeturar que un homomorfismo $\phi : X \subset \mathrm{P}_k^m \longrightarrow \mathrm{P}_k^n$ viene determinado por $n+1$ formas de $m+1$ variables y del mismo grado d, y viene dado por

$$\phi(P) = (F_0(P), \ldots, F_n(P)).$$

Sin embargo esto es falso por dos razones:

- Las n formas pueden no definir un homomorfismo en todo X. En principio sólo lo definen sobre el conjunto de puntos donde no se anulan todas simultáneamente. Es el caso de $\phi : \mathrm{P}_k^{n+1} \setminus \{P\} \longrightarrow \mathrm{P}_k^n$ dada por

$$\phi(x_0, \ldots, x_{n+1}) = (x_0, \ldots, x_n),$$

que no está definida en el punto $P = (0, \ldots, 0, 1)$.

- Un homomorfismo puede necesitar formas diferentes para ser definido en abiertos distintos, de manera que ningún conjunto de formas sea válido para todos los puntos su dominio. Por ejemplo, si $Q = V(XY - XZ)$ es la superficie del ejemplo de la página 129, la proyección $p_1 : Q \longrightarrow \mathrm{P}_k^1$ viene definida por $p_1(x, y, z, w) = (x, w) = (z, y)$, de modo que las formas X y W sirven para ciertos puntos y las formas Z e Y sirven para otros.

Nuestro propósito es tratar de entender adecuadamente estos fenómenos, para lo cual tenemos que introducir varios conceptos. Empezaremos estudiando esquemas de la forma $\operatorname{Proy} A$, donde A es un anillo graduado finitamente generado como A_0-álgebra por elementos de A_1. Esto incluye, obviamente, a los esquemas P_S^n, para todo anillo S, y a los esquemas proyectivos determinados por cocientes $A = S[X_0, \ldots, X_n]/I$, donde I es un ideal homogéneo.

Definición 5.24 Sea A un anillo graduado, sea $X = \operatorname{Proy} A$ y sea M un A-módulo graduado. Para cada $n \in \mathbb{Z}$ hemos definido $M(n)$ como el A-módulo graduado determinado por $M(n)_d = M_{n+d}$. Definimos $\mathcal{O}_X(n) = \widetilde{A(n)}$. Si $\mathcal{M}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo, definimos $\mathcal{M}(n) = \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n)$.

Observemos que si $f \in A_1$, entonces $A(n)_{(f)} = f^n A_{(f)}$, luego

$$\mathcal{O}_X(n)|_{D(f)} \cong \widetilde{A(n)_{(f)}} = f^n \widetilde{A_{(f)}} \cong f^n \mathcal{O}_X|_{D(f)} \cong \mathcal{O}_X|_{D(f)}.$$

Si A está generada (como A_0-álgebra) por A_1, entonces los abiertos $D(f)$ con $f \in A_1$ cubren el esquema X, luego podemos concluir que los haces $\mathcal{O}_X(n)$ son localmente libres de rango 1, es decir, son haces inversibles. Obviamente $\mathcal{O}_X(0) = \mathcal{O}_X$.

Teorema 5.25 *Sea A un anillo graduado generado (como A_0-álgebra) por elementos de A_1 y sea $X = \operatorname{Proy} A$.*

a) El $\mathcal{O}_X$-módulo $\mathcal{O}_X(n)$ es inversible.

b) Para cada A-módulo graduado M, se cumple que $\widetilde{M}(n) \cong \widetilde{M(n)}$.

c) $\mathcal{O}_X(m) \otimes \mathcal{O}_X(n) \cong \mathcal{O}_X(m+n)$.

Demostración: El apartado a) está demostrado en las observaciones previas a la definición de módulo inversible.

b) Basta aplicar el teorema 5.15, pues

$$\widetilde{M}(n) = \widetilde{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \widetilde{A(n)} \cong \widetilde{M \otimes_A A(n)} \cong \widetilde{M(n)}.$$

c) Es un caso particular de b):

$$\mathcal{O}_X(m) \otimes \mathcal{O}_X(n) = \widetilde{A(m)}(n) \cong \widetilde{A(m)(n)} = \widetilde{A(m+n)} = \mathcal{O}_X(m+n).$$

■

Esto se traduce en que la aplicación $\mathbb{Z} \longrightarrow \operatorname{Pic}(X)$ dada por $n \mapsto [\mathcal{O}_X(n)]$ es un homomorfismo de grupos.

Observemos que, en general, si A es un anillo graduado y $X = \operatorname{Proy} A$, entonces X está definido sobre A_0, lo cual implica que $\mathcal{O}_X(X)$ tiene estructura de A_0-álgebra. Explícitamente, el homomorfismo $A_0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(X)$ está determinado por que cada $s \in A_0$ se corresponde con el único $\bar{s} \in \mathcal{O}_X(X)$ tal que para todo $f \in A_+$ homogéneo se cumple que $\bar{s}|_{D(f)} = s/1 \in A_{(f)}$.

Más en general aún, si M es un A-módulo graduado y $\mathcal{M} = \widetilde{M}$, tenemos un homomorfismo de A_0-módulos $M_0 \longrightarrow \mathcal{M}(X)$ determinado igualmente: cada $m \in M_0$ se corresponde con el único $\bar{m} \in \mathcal{M}(X)$ tal que $\bar{m}|_{D(f)} = m/1$.

En particular tenemos homomorfismos $A_n \longrightarrow \mathcal{O}_X(n)(X)$. En la mayoría de los casos son monomorfismos. Por ejemplo, basta con que exista al menos un elemento homogéneo $f \in A_+$ que no sea un divisor de cero. Otra condición suficiente es que A sea reducido, pues un elemento del núcleo ha de ser nilpotente. En efecto, si $a \in A_n$ cumple que $\bar{a} = 0$, entonces $a/1 = 0$ en A_f para todo $f \in A_+$ homogéneo. Por consiguiente, $a/1 = 0$ en $A_\mathfrak{p}$, para todo $\mathfrak{p} \in X$, luego $a \in \mathfrak{p}$, luego $a \in \operatorname{rad} 0$, luego a es nilpotente.

Así pues, la primera observación de cara a comprender el papel de los haces $\mathcal{O}_X(n)$ es que $\mathcal{O}_X(n)(X)$ es (en la mayoría de los casos) una extensión de A_n. En el caso más simple tenemos la igualdad:

Teorema 5.26 *Sea A_0 un anillo y $A = A_0[X_0, \ldots, X_r]$. Sea $X = \operatorname{Proy} A$. Entonces el homomorfismo natural $A_n \longrightarrow \mathcal{O}_X(n)(X)$ es un isomorfismo, para todo $n \geq 0$, mientras que si $n < 0$ entonces $\mathcal{O}_X(n)(X) = 0$.*

Demostración: Un $s \in \mathcal{O}_X(n)(X)$ está completamente determinado por la $r+1$-tupla de restricciones $(s|_{D(X_0)}, \ldots, s|_{D(X_r)})$. Recíprocamente, una $r+1$-tupla

$$(s_0, \ldots, s_r) \in \mathcal{O}_X(n)(D(X_0)) \times \cdots \times \mathcal{O}_X(n)(D(X_r))$$

determina un elemento de $\mathcal{O}_X(n)(X)$ si y sólo si $s_i|_{D(X_iX_j)} = s_j|_{D(X_iX_j)}$ para todo i, j.

Ahora observemos que $\mathcal{O}_X(n)(D(X_i)) = A(n)_{(X_i)}$ está formado por las funciones racionales F/X_i^s, donde F es una forma de grado $s+n$, y similarmente con $\mathcal{O}_X(n)(D(X_iX_j))$. Sea $M = A_{X_0 \cdots X_n}$. Como las indeterminadas no son divisores de cero, los homomorfismos canónicos

$$\mathcal{O}_X(n)(D(X_i)) \subset A_{X_i} \longrightarrow M \quad \text{y} \quad \mathcal{O}_X(n)(D(X_iX_j)) \subset A_{X_iX_j} \longrightarrow M$$

son inyectivos y, si identificamos los módulos $\mathcal{O}_X(n)(D(X_i))$ y $\mathcal{O}_X(n)(D(X_iX_j))$ con submódulos de M, las restricciones se convierten en las inclusiones. Todas las componentes de una $r+1$-tupla $(s_0,\ldots,s_r)$ asociada a un elemento de $\mathcal{O}_X(n)(X)$ se convierten en el mismo elemento de M.

En conclusión, podemos identificar $\mathcal{O}_X(n)(X)$ con los las funciones racionales de grado n en

$$\bigcap_i A_{X_i} \subset M.$$

Si $n \geq 0$, el homomorfismo $A_n \longrightarrow \mathcal{O}_X(n)(X)$ se corresponde ahora con la inclusión $A_n \longrightarrow M$. Un elemento homogéneo de $A_{X_0\cdots X_r}$ se expresa de forma única como

$$X_0^{i_0}\cdots X_r^{i_r}F(X_0,\ldots,X_r),$$

donde cada $i_j \in \mathbb{Z}$ y $F \in A$ es un polinomio homogéneo no divisible entre ningún X_i. Este elemento estará en A_{X_i} si y sólo si $i_j \geq 0$ para $j \neq i$, luego estará en la intersección si y sólo si $i_j \geq 0$ para todo j. Concluimos que la intersección es exactamente A, luego $\mathcal{O}_X(n)(X)$ se corresponde con A_n si $n \geq 0$ y es nulo en caso contrario. ■

Así pues, si S es un anillo y $X = \mathrm{P}_S^r$, podemos identificar los elementos de $\mathcal{O}_X(n)(X)$ con las formas de grado n, en el sentido de que cada $s \in \mathcal{O}_X(n)(X)$ está completamente determinado por una única forma F de grado n tal que $s|_{X_i} = F/1 \in S[X_0,\ldots,X_r]_{(X_i)}$.

En particular es claro que, en este caso, $\mathcal{O}_X(n)$ no es libre cuando $n \neq 0$, pues $\mathcal{O}_X(X) = \mathcal{O}_X(0)(X) \cong S \not\cong \mathcal{O}_X(n)(X)$. En otros términos, tenemos un monomorfismo $\mathbb{Z} \longrightarrow \operatorname{Pic}(\mathrm{P}_S^r)$.

Ahora vamos a ver que si $\mathcal{L}$ es cualquier haz inversible en cualquier esquema X, los elementos de $\mathcal{L}(X)$ se comportan como formas, aunque realmente no lo sean. Antes de entrar en el caso general veamos la situación con más detalle en el caso que hemos considerado hasta ahora:

Si $X = \mathrm{P}_S^r$, una forma F de grado n no determina una función en X, pero sí determina un conjunto cerrado. En términos clásicos es el conjunto de los puntos $P \in X$ tales que $F(P) = 0$, y en términos de esquemas es el cerrado $V(F) = \{\mathfrak{P} \in X \mid F \in \mathfrak{P}\}$.

Un poco más en general, si $X = \operatorname{Proy} A$ y $a \in A_n$, entonces a determina igualmente el cerrado $V(a) = \{\mathfrak{P} \in X \mid a \in \mathfrak{P}\}$. Hay un caso en el que este cerrado tiene una interpretación geométrica clara: si $A = S[X_0,\ldots,X_r]/I$, donde I es un ideal homogéneo, entonces $a \in A_n$ es de la forma $a = [F]$, para cierta forma F de grado n, y $V(a) = X \cap V(F)$, considerando $X \subset \mathrm{P}_S^r$ a través de la inmersión cerrada inducida por el epimorfismo $S[X_0,\ldots,X_r] \longrightarrow A$. En otras palabras, a puede verse como la restricción a X de una forma en P_S^r, y $V(a)$ es la intersección de X con la hipersuperficie que F define en P_S^r.

Observemos ahora que $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{P}}$ está formado por los cocientes de formas del mismo grado con denominador fuera de $\mathfrak{P}$, mientras que $\mathcal{O}_X(n)_{\mathfrak{P}}$ está formado por los cocientes similares pero en los que el numerador tiene el grado del denominador $+n$. Es claro entonces que $\mathcal{O}_X(n)_{\mathfrak{P}} = a\mathcal{O}_X(n)$ si y sólo si $a \notin \mathfrak{P}$, por lo que

$$X \setminus V(a) = \{\mathfrak{P} \in X \mid \mathcal{O}_X(n)_{\mathfrak{P}} = a\mathcal{O}_X(n)\}.$$

En estos términos, el miembro derecho tiene sentido si X es cualquier esquema proyectivo y si en lugar de $\mathcal{O}_X(n)$ ponemos cualquier haz inversible:

Definición 5.27 Sea X un esquema y $\mathcal{L}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo inversible en X. Si $s \in \mathcal{L}(X)$ definimos

$$X_s = \{P \in X \mid \mathcal{L}_P = s_P\mathcal{O}_{X,P}\}.$$

Notemos que si $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X$ entonces X_s es el definido en 2.14. Se trata de un conjunto abierto, pues si $P \in X_s$ podemos tomar un entorno afín U y un isomorfismo $f : \mathcal{L}|_U \longrightarrow \mathcal{O}_X|_U$, y entonces $X_s \cap U = X_{f(s)} \cap U$, luego X_s es un entorno de P.

Así pues, si "pensamos" en $s \in \mathcal{L}(X)$ como una forma, entonces X_s es el conjunto de puntos donde la forma no se anula. Hemos visto que esto es realmente así cuando tiene sentido considerar a s como una forma.

Teorema 5.28 *Si X es un esquema reducido, $\mathcal{L}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo inversible y $s \in \mathcal{L}(X)$ cumple que $X_s = \varnothing$, entonces $s = 0$.*

Demostración: Podemos cubrir X con abiertos afines U tales que $\mathcal{L}|_U$ es libre. Entonces $U_{s|_u} = \varnothing$, luego si probamos el teorema en el caso en que X es afín y $\mathcal{L}$ es libre, podremos concluir que $s|_U = 0$ y, por consiguiente, que $s = 0$.

Si X es afín y $\mathcal{L}$ es libre, podemos suponer que $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X$, pero entonces $X_s = D(s) = \varnothing$ equivale a que $s \in \mathcal{O}_X(X)$ es nilpotente, luego si X es reducido ha de ser $s = 0$. ■

Las formas no son funciones, pero los cocientes de formas definen funciones. Vamos a probar esto en general:

Sea X un esquema, sea $\mathcal{L}$ un haz inversible en X y sean s, $t \in \mathcal{L}(X)$. Para cada punto $P \in X_t$, tenemos que $s_P = a_Pt_P$, para un único $a_P \in \mathcal{O}_{X,P}$. Existe un abierto $U \subset X_t$, entorno de P, y un $a_U \in \mathcal{O}_X(U)$ tal que $a_P = a_{U,P}$. Restringiendo U si es preciso podemos suponer que $s|_U = a_Ut|_U$. La unicidad hace que $a_{U,Q} = a_Q$ para todo $Q \in U$. El teorema [1.3] implica que los a_U determinan un único $a \in \mathcal{O}_X(X_t)$ tal que $s|_{X_t} = at|_{X_t}$.

Definición 5.29 Sea X un esquema, sea $\mathcal{L}$ un haz inversible en X y consideremos s, $t \in \mathcal{L}(X)$. Llamaremos $s/t \in \mathcal{O}_X(X_t)$ al único elemento que cumple

$$s|_{X_t} = \frac{s}{t}\, t|_{X_t}.$$

Para cubrir un esquema X mediante abiertos X_s, donde s varía en $\mathcal{L}(X)$, necesitamos un generador global de $\mathcal{L}$:

Definición 5.30 Sea X un espacio anillado local y $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo. Un *generador global* de $\mathcal{M}$ es un conjunto $S \subset \mathcal{M}(X)$ tal que para cada $P \in X$ el conjunto $\{s_P \mid s \in S\}$ es un generador de $\mathcal{M}_P$ como $\mathcal{O}_{X,P}$-módulo. (Esto no implica necesariamente que S genere $\mathcal{M}(X)$ como $\mathcal{O}_X(X)$-módulo.)

Por ejemplo, si A es un anillo y M es un A-módulo, entonces un sistema generador de M es claramente un generador global de $\widetilde{M}$.

Teorema 5.31 *Sea X un esquema, $\mathcal{L}$ un haz inversible y $S \subset \mathcal{L}(X)$. Entonces S es un generador global de $\mathcal{L}$ si y sólo si $\{X_s \mid s \in S\}$ es un cubrimiento abierto de X.*

Demostración: Si S es un generador global y $P \in X$, sea $m \in \mathcal{L}_P$ un generador. Para cada $s \in S$ existe un $a_s \in \mathcal{O}_{X,P}$ tal que $s_P = a_s m$. Si $a_s \in \mathfrak{m}_P$ para todo $s \in S$, entonces los s_P no pueden generar $\mathcal{L}_P$, luego $a_s \in \mathcal{O}_{X,P}^*$ para algún s, lo que implica que $\mathcal{L}_P = s_P\mathcal{O}_{X,P}$, es decir, que $P \in X_s$. El recíproco es obvio. ■

Por ejemplo, si S es un anillo, $Y = \mathrm{P}_S^r$ y $\mathcal{L} = \mathcal{O}_Y(1)$, entonces las indeterminadas $X_i \in \mathcal{L}(Y)$ son un generador global de $\mathcal{L}$, pues los abiertos $Y_{X_i} = D(X_i)$ cubren Y.

Luego necesitaremos esta caracterización:

Teorema 5.32 *Sea X un espacio anillado local y $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo. Entonces $\mathcal{M}$ tiene un generador global S si y sólo si existe un epimorfismo $\mathcal{O}_X^{(I)} \longrightarrow \mathcal{M}$, para un conjunto I, en cuyo caso podemos tomar $I = S$.*

Demostración: Notemos que $1 \in \mathcal{O}_X(X)$ es un generador global de $\mathcal{O}_X$, y que, más en general, la base canónica de $\mathcal{O}_X^{(I)}(X)$ es un generador global de $\mathcal{O}_X^{(I)}$. Para cada $P \in X$ tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_X^{(I)}(X) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{M}(X) \arrow[d] \\ \mathcal{O}_{X,P}^{(I)} \arrow[r] & \mathcal{M}_P \end{tikzcd}$$

Como todas las flechas son epimorfismos, concluimos que las imágenes de la base canónica en $\mathcal{M}(X)$ son un generador global de $\mathcal{M}$.

Recíprocamente, si S es un generador global de $\mathcal{M}$, sea $\{\epsilon_s\}_{s\in S}$ la base canónica de $\mathcal{O}_X^{(S)}(X)$. Para cada abierto U de X, tenemos que esta base canónica se restringe a la base canónica de $\mathcal{O}_X^{(S)}(U)$, luego podemos definir un homomorfismo $\phi_U : \mathcal{O}_X^{(S)}(U) \longrightarrow \mathcal{M}(U)$ mediante

$$\phi_U\Big(\sum_{s\in S} a_s\epsilon_s|_U\Big) = \sum_{s\in S} a_s s|_U.$$

Estos homomorfismos ϕ_U determinan claramente un homomorfismo de haces $\phi : \mathcal{O}_X^{(S)} \longrightarrow \mathcal{M}$ tal que, para cada $P \in X$, se cumple que $\phi_P((\epsilon_s)_P) = s_P$, luego ϕ_P es un epimorfismo y, por definición, ϕ también. ■

Consideremos ahora un homomorfismo de esquemas $f : X \longrightarrow Y$ definido sobre S. El teorema 5.8 nos da que $f^*\mathcal{O}_Y(1)$ es un haz cuasicoherente en X, y si V es un abierto afín en Y tal que $\mathcal{O}_Y(1)|_V \cong \mathcal{O}_Y|_V$ y U es un abierto afín en X tal que $U \subset f^{-1}[V]$, tenemos que

$$f^*\mathcal{O}_Y(1)(U) \cong \mathcal{O}_Y(1)(V) \otimes_{\mathcal{O}_Y(V)} \mathcal{O}_X(U) \cong \mathcal{O}_X(U).$$

Esto implica que $f^*\mathcal{O}_Y(1)$ es inversible.

El homomorfismo natural de haces $\mathcal{O}_Y(1) \longrightarrow f_*f^*\mathcal{O}_Y(1)$ nos da en particular un homomorfismo natural $f^* : \mathcal{O}_Y(1)(Y) \longrightarrow f^*\mathcal{O}_Y(1)(X)$. Para cada punto $P \in X$ tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_Y(1)(Y) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d] & f^*\mathcal{O}_Y(1)(X) \arrow[d] \\ \mathcal{O}_Y(1)_{f(P)} \arrow[r] & f^*\mathcal{O}_Y(1)_P \end{tikzcd}$$

La flecha horizontal inferior se corresponde con el homomorfismo natural $\mathcal{O}_Y(1)_{f(P)} \longrightarrow \mathcal{O}_Y(1)_{f(P)} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,f(P)}} \mathcal{O}_{X,P}$, que claramente transforma un generador como $\mathcal{O}_{Y,f(P)}$-módulo en un generador como $\mathcal{O}_{X,P}$-módulo. Por consiguiente, los elementos $f^*(X_i) \in f^*\mathcal{O}_Y(1)(X)$ forman un generador global de $f^*\mathcal{O}_Y(1)$.

Esto prueba la primera parte del teorema siguiente:

Teorema 5.33 *Sea S un anillo, $Y = \mathrm{P}_S^n$ y X un esquema definido sobre S.*

a) Si $f : X \longrightarrow Y$ es un homomorfismo de esquemas definido sobre S, entonces $f^*\mathcal{O}_Y(1)$ es un haz inversible en X que admite un generador global de $n+1$ elementos.

b) Si $\mathcal{L}$ es un haz inversible en X que admite un generador global de $n+1$ elementos $s_0, \ldots, s_n \in \mathcal{L}(X)$, entonces existe un único homomorfismo de esquemas $f : X \longrightarrow Y$ definido sobre S tal que $\mathcal{L} \cong f^*\mathcal{O}_Y(1)$ y, a través de este isomorfismo, $f^*(X_i) = s_i$.

Demostración: Sólo falta probar la parte b). Los abiertos X_{s_i} son un cubrimiento abierto de X y tenemos definidos los elementos $s_j/s_i \in \mathcal{O}_X(X_{s_i})$.

Definimos un homomorfismo de anillos $\mathcal{O}_Y(D(X_i)) \longrightarrow \mathcal{O}_X(X_{s_i})$ mediante $X_j/X_i \mapsto s_j/s_i$. Esto es correcto, pues $\mathcal{O}_Y(D(X_i)) = S[X_0/X_i, \ldots, X_n/X_i]$ y $\mathcal{O}_X(X_{s_i})$ es un S-módulo. De aquí obtenemos homomorfismos de esquemas $f_i : X_{s_i} \longrightarrow D(X_i) \subset Y$ definidos sobre S.

La restricción de f_i a $X_{s_i} \cap X_{s_j}$ está determinada por un homomorfismo $\mathcal{O}_Y(D(X_iX_j)) \longrightarrow \mathcal{O}_X(X_{s_i} \cap X_{s_j})$ que, a través de la identificación

$$\mathcal{O}_Y(D(X_iX_j)) \cong \mathcal{O}_Y(D(X_i))_{X_j/X_i},$$

ha de ser el inducido por el homomorfismo que hemos construido, por lo que está completamente determinado por que

$$\frac{X_uX_v}{X_iX_j} = \frac{X_uX_v/X_i^2}{X_i/X_j} \mapsto \frac{(s_u/s_i)(s_v/s_i)}{s_i/s_j}.$$

Similarmente, la restricción de f_j a $X_{s_i} \cap X_{s_j}$ está determinada por el homomorfismo que cumple

$$\frac{X_uX_v}{X_iX_j} = \frac{X_uX_v/X_j^2}{X_j/X_i} \mapsto \frac{(s_u/s_j)(s_v/s_j)}{s_j/s_i}.$$

Queremos probar que ambas restricciones coinciden, para lo cual basta ver que, en $\mathcal{O}_X(X_{s_i} \cap X_{s_j})$ se cumple la igualdad

$$\frac{s_u}{s_i}\bigg|_{X_{s_i}\cap X_{s_j}} \frac{s_v}{s_i}\bigg|_{X_{s_i}\cap X_{s_j}} \frac{s_i}{s_j}\bigg|_{X_{s_i}\cap X_{s_j}} = \frac{s_u}{s_j}\bigg|_{X_{s_i}\cap X_{s_j}} \frac{s_v}{s_j}\bigg|_{X_{s_i}\cap X_{s_j}} \frac{s_j}{s_i}\bigg|_{X_{s_i}\cap X_{s_j}},$$

para lo cual basta aplicar (dos veces) la identidad

$$\frac{s_v}{s_j}\bigg|_{X_{s_i}\cap X_{s_j}} = \frac{s_v}{s_i}\bigg|_{X_{s_i}\cap X_{s_j}} \frac{s_i}{s_j}\bigg|_{X_{s_i}\cap X_{s_j}}.$$

Ésta a su vez se comprueba fácilmente: Tenemos que

$$s_v = \frac{s_v}{s_j}s_j, \qquad s_i = \frac{s_i}{s_j}s_j, \qquad s_v = \frac{s_v}{s_i}s_i,$$

luego

$$\frac{s_v}{s_j}\bigg|_{X_{s_i}\cap X_{s_j}} s_j|_{X_{s_i}\cap X_{s_j}} = s_v|_{X_{s_i}\cap X_{s_j}} = \frac{s_v}{s_i}\bigg|_{X_{s_i}\cap X_{s_j}} \frac{s_i}{s_j}\bigg|_{X_{s_i}\cap X_{s_j}} s_j|_{X_{s_i}\cap X_{s_j}},$$

y basta tener en cuenta que $(s_j|_{X_{s_i}\cap X_{s_j}})_P$ es una base de $\mathcal{O}_{X,P}$ para cada $P \in X_{s_i} \cap X_{s_j}$.

Concluimos entonces que los homomorfismos f_i se extienden a un único homomorfismo de esquemas $f : X \longrightarrow Y$.

Sea $\mathcal{L}' = f^*\mathcal{O}_Y(1)$ y sea $t_i = f^*(X_i) \in \mathcal{L}'(X)$, de modo que $t_0, \ldots, t_n$ forman un generador global de $\mathcal{L}'$. Hemos de construir un isomorfismo entre $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$ que haga corresponder cada s_i con t_i. Por construcción, $X_{s_i} \subset f^{-1}[D(X_i)]$. En $\mathcal{O}_Y(1)(D(X_i))$ tenemos la relación

$$X_j|_{D(X_i)} = \frac{X_j}{X_i}\, X_i|_{D(X_i)},$$

de donde

$$t_j|_{X_{s_i}} = f^\#_{D(X_i)}(X_j/X_i)|_{X_{s_i}} t_i|_{X_{s_i}} = \frac{s_j}{s_i}\, t_i|_{X_{s_i}}.$$

De aquí se sigue que, para cada $P \in X_{s_i}$, el isomorfismo $\phi_P : \mathcal{L}'_P \longrightarrow \mathcal{L}_P$ determinado por $\phi_P((t_i)_P) = (s_i)_P$ cumple también $\phi_P((t_j)_P) = (s_j)_P$ para todo j. Como los haces son coherentes, estos isomorfismos determinan a su vez isomorfismos $\phi_i : \mathcal{L}'|_{X_{s_i}} \longrightarrow \mathcal{L}|_{X_{s_i}}$ tales que $(\phi_i)_P = \phi_P$ (basta tener en cuenta la definición de los haces $\widetilde{M}$) y, como en realidad los isomorfismos locales ϕ_P no dependen del i tal que $P \in X_{s_i}$, los isomorfismos ϕ se extienden a un único isomorfismo $\phi_i : \mathcal{L}' \longrightarrow \mathcal{L}$ que cumple $\phi(t_i) = s_i$.

Falta probar la unicidad de f: Si un homomorfismo $f : X \longrightarrow Y$ cumple lo pedido, por las consideraciones previas al teorema es claro que se cumple la relación $X_{s_i} = f^{-1}[D(X_i)]$ (pues $(X_i)_{f(P)}$ genera $\mathcal{O}_Y(1)_{f(P)}$ si y sólo si $(s_i)_P = (X_i)_{f(P)} \otimes 1$ genera $f^*(\mathcal{O}_Y(1))_P = \mathcal{O}_Y(1)_{f(P)} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,f(P)}} \mathcal{O}_{X,P}$).

El homomorfismo f está completamente determinado por sus restricciones $f|_{X_{s_i}} : X_{s_i} \longrightarrow D(X_i)$, las cuales están determinadas a su vez por los homomorfismos $f^{\#}_{D(X_i)} : \mathcal{O}_Y(D(X_i)) \longrightarrow \mathcal{O}_X(X_{s_i})$. Así mismo, estos homomorfismos están determinados por las imágenes de los generadores X_j/X_i. Ahora bien, de la relación

$$X_j|_{D(X_i)} = \frac{X_j}{X_i}\, X_i|_{D(X_i)}$$

se sigue que

$$t_j|_{X_{s_i}} = f^{\#}_{D(X_i)}(X_j/X_i)\, t_i|_{X_{s_i}},$$

donde $t_j = f^*(X_j)$, lo que implica que $f^{\#}_{D(X_i)}(X_j/X_i) = t_j/t_i = s_j/s_i$. Así pues, f es necesariamente el homomorfismo que hemos construido. ■

Nota Observemos que si $f : X \longrightarrow Y = \mathrm{P}^n_S$ es un homomorfismo definido sobre S y, para $d \geq 1$, llamamos $\mathcal{L}_d = f^*\mathcal{O}_Y(d)$, a cada forma $F \in \mathcal{O}_Y(d)(Y)$ de grado d le corresponde un $s = f^*F \in \mathcal{L}_d(X)$. Para cada $P \in X$ tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_Y(d)(Y) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d] & \mathcal{L}_d(X) \arrow[d] \\ \mathcal{O}_Y(d)_{f(P)} \arrow[r] & \mathcal{L}_{d,P} \end{tikzcd}$$

en el que la flecha horizontal inferior corresponde al homomorfismo

$$\mathcal{O}_Y(d)_{f(P)} \longrightarrow \mathcal{O}_Y(d)_{f(P)} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,P}} \mathcal{O}_{X,P},$$

y es claro entonces que s_P genera $\mathcal{L}_{d,P}$ si y sólo si F_P genera $\mathcal{O}_Y(d)_P$ o, equivalentemente, $f^{-1}[D(F)] = X_s$. En otras palabras, $X \setminus X_s$ está formado por los puntos de X cuya imagen en P^r_S está en $V(F)$. Si f es una inmersión que nos permite considerar $X \subset \mathrm{P}^r_S$, podemos expresar esto también mediante la igualdad $X \setminus X_s = X \cap V(F)$, o $X_s = X \cap D(F)$.

Por otra parte, hay que tener presente que esta interpretación de X_s sólo tiene sentido cuando s es la imagen de una forma de $\mathcal{O}_{\mathrm{P}^n_S}(d)(\mathrm{P}^n_S)$, si bien la aplicación $\mathcal{O}_{\mathrm{P}^n_S}(d)(\mathrm{P}^n_S) \longrightarrow \mathcal{L}_d(X)$ no tiene por qué ser suprayectiva. ■

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1 Uno de los casos más simples es el claso clásico en el que $X \subset \mathrm{P}_k^m$ es un conjunto algebraico proyectivo y $f : X \longrightarrow \mathrm{P}_k^r$ viene definido por $r+1$ formas del mismo grado d: $f(P) = (F_0(P), \ldots, F_r(P))$. Esto presupone que las formas $F_i \in k[Y_1, \ldots, Y_m]$ no se anulan simultáneamente en ningún punto de X.

Si $X = \operatorname{Proy} A$, donde $A = k[Y_0, \ldots, Y_m]/I(X)$, entonces tenemos que las clases $s_i = [F_i] \in A_d \subset \mathcal{O}_X(d)(X)$ son un generador global de $\mathcal{O}_X(d)$, pues los abiertos X_{s_i} están formados por los puntos de X donde F_i no se anula. Es fácil ver que f es el homomorfismo determinado por el haz $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(d)$ y la asignación $X_i \mapsto s_i$, para $i = 0, \ldots, r$.

En efecto, para cada i, la restricción $f|_{X_{s_i}} : X_{s_i} \longrightarrow D(X_i)$ viene dada por $f(P) = (F_0(P)/F_i(P), \ldots, F_r(P)/F_i(P))$ y se corresponde con el homomorfismo de anillos $k[X_0/X_i, \ldots, X_r/X_i] \longrightarrow \mathcal{O}_X(X_{s_i})$ dado por

$$X_j/X_i \mapsto [F_j]/[F_i] = s_j/s_i.$$

Ahora bien, de acuerdo con la construcción realizada en la prueba del teorema 5.33, este homomorfismo define la restricción a X_{s_i} del homomorfismo definido por el generador $s_0, \ldots, s_r$, luego éste es el propio f.

En particular deducimos que $f^*\mathcal{O}_{\mathrm{P}_k^r}(1) = \mathcal{O}_X(d)$. ■

Ejemplo 2 Un caso similar al anterior, pero en un contexto más general, es el caso en que $X = \operatorname{Proy}(A)$, donde A es un anillo graduado finitamente generado sobre $S = A_0$ por elementos $a_0, \ldots, a_r \in A_1$. Entonces tenemos un epimorfismo $S[X_0, \ldots, X_r] \longrightarrow A$ dado por $X_i \mapsto a_i$, que a su vez induce una inmersión cerrada $f : X \longrightarrow \mathrm{P}_S^r$.

Podemos considerar $a_i \in \mathcal{O}_X(1)(X)$, y el mismo razonamiento que en el ejemplo anterior muestra que f es el homomorfismo asociado a $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(1)$ y la asignación $X_i \mapsto s_i$. En particular $f^*\mathcal{O}_{\mathrm{P}_S^r}(1) = \mathcal{O}_X(1)$. ■

Ejemplo 3 Un ejemplo más de homomorfismo definido por formas del mismo grado es el siguiente: Sea S un anillo, sean r, $d \geq 1$ y sea $F_0, \ldots, F_N$ una enumeración de todos los monomios de grado d (y coeficiente 1) en $A = S[Y_0, \ldots, Y_r]$ (concretamente, $N = \binom{r+d}{r} - 1$). Sea $X = \mathrm{P}_S^r$. Es claro que los monomios F_i son un generador global de $\mathcal{O}_X(d)$, pues entre ellos están Y_i^d, para $i = 0, \ldots, r$, y ellos solos ya son un generador global.

Consideremos el homomorfismo $\phi : S[X_0, \ldots, X_N] \longrightarrow A$ dado por $X_i \mapsto F_i$. Claramente es un homomorfismo graduado de grado d, es decir, transforma formas de grado n en formas de grado nd. Estamos, pues en la situación discutida en la última parte de la sección 2.3. Claramente

$$V(\phi[S[X_0, \ldots, X_N]_+]A) \subset V(Y_0^d, \ldots, Y_r^d) = \varnothing,$$

luego ϕ induce un homomorfismo $f : \mathrm{P}_S^r \longrightarrow \mathrm{P}_S^N$, determinado por que, para cada i, se restringe al homomorfismo $D(F_i) \longrightarrow D(X_i)$ asociado al homomorfismo de anillos $\phi_i : S[X_0, \ldots, X_N]_{(X_i)} \longrightarrow S[Y_0, \ldots, Y_r]_{(F_i)}$ inducido por ϕ.

Este homomorfismo es el dado por $X_j/X_i \mapsto F_j/F_i$, luego f es el homomorfismo asociado a la asignación $X_i \mapsto F_i$. En particular, $f^*\mathcal{O}_{\mathrm{P}_S^N}(1) = \mathcal{O}_{\mathrm{P}_S^r}(d)$.

Observemos que los homomorfismos ϕ_i son suprayectivos, luego las restricciones $f|_{D(X_i)}$ son inmersiones cerradas, luego f es una inmersión cerrada. La llamaremos *inmersión de grado* d de P_S^r.

En el caso clásico, en el que $S = k$ es un cuerpo, la inmersión de grado d es el homomorfismo $\mathrm{P}_k^r \longrightarrow \mathrm{P}_k^N$ dado por $\phi(P) = (F_1(P), \ldots, F_N(P))$. Por ejemplo, la inmersión de grado 2 de P_k^1 es el homomorfismo $f : \mathrm{P}_k^1 \longrightarrow \mathrm{P}_k^2$ dado por $f(s,t) = (s^2, st, t^2)$, que se restringe a $f : A^1 \longrightarrow A^2$ dado por $f(s) = (s^2, s)$, cuya imagen es una parábola. La inmersión $f : \mathrm{P}_k^1 \longrightarrow \mathrm{P}_k^3$ de grado 3 es la discutida en los ejemplos de las páginas 5 y 17. ■

Ejemplo 4 Cuando un conjunto de elementos $s_0, \ldots, s_r \in \mathcal{L}(X)$ no es un generador global, define igualmente un homomorfismo, pero no sobre todo el esquema X, sino sobre el abierto $U = X_{s_0} \cup \cdots \cup X_{s_r}$.

Consideremos, concretamente, $X = \mathrm{P}_k^{r+1}$ y $X_0, \ldots, X_r \in \mathcal{O}_X(1)(X)$ (donde hemos omitido X_{r+1}). Entonces $U = X \setminus \{P\}$, donde $P = (X_0, \ldots, X_r)$ que, en términos clásicos, se corresponde con el punto $(0, \ldots, 0, 1)$. Si llamamos $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(1)|_U$, es claro que las restricciones $X_i|_U$ son un generador global de $\mathcal{L}(U)$, luego definen un homomorfismo $f : U \longrightarrow \mathrm{P}_k^r$, y es fácil ver que se trata del dado por $f(x_0, \ldots, x_{r+1}) = (x_0, \ldots, x_r)$. Si identificamos $\mathrm{P}_k^r = V(X_{r+1})$, entonces f viene dado por $f(x_0, \ldots, x_{r+1}) = (x_0, \ldots, x_r, 0)$ y es fácil ver su interpretación geométrica: a cada punto $Q \in U$ le asigna la intersección entre el hiperplano $H = V(X_{r+1})$ y la recta que une P y Q. ■

Ejemplo 5 Consideremos de nuevo el ejemplo planteado al principio de la sección, en el que $Q = V(XY - XZ)$ y $p_1 : Q \longrightarrow \mathrm{P}_k^1$ es la proyección dada por $p_1(x, y, z, w) = (x, w) = (z, y)$.

Es claro que x, y, z, $w \in \mathcal{O}_Q(1)$ es un generador global, pero en él no sobra ningún elemento, luego no nos sirve para definir p_1 (que ha de definirse con sólo dos generadores globales). Llamemos $\mathcal{L} = p_1^*\mathcal{O}_{\mathrm{P}_k^1}(1)$. Si consideramos $Y = \mathrm{P}_k^1 = \mathrm{Proy}(k[U, V])$, sabemos que $s_1 = p_1^*(U)$ y $s_2 = p_1^*(V)$ forman un generador global de $\mathcal{L}$. Además

$$Q_{s_1} = p_1^{-1}[Y_U] = Q_x \cup Q_z, \qquad Q_{s_2} = p_1^{-1}[Y_V] = Q_y \cup Q_w.$$

Vemos que $x/w \in \mathcal{O}_Q(Q_w)$ y $z/y \in \mathcal{O}_Q(Q_y)$ coinciden en $Q_w \cap Q_y$, luego se extienden a un elemento de $\mathcal{O}_Q(Q_{s_1})$, y es fácil ver que éste no es sino s_2/s_1. Similarmente, s_1/s_2 es la extensión común de w/x e y/z. En el ejemplo siguiente veremos que $\mathcal{L}$ no es isomorfo a $\mathcal{O}_Q(1)$. ■

Ejemplo 6 Sea A un anillo y consideremos la inmersión

$$f : \mathrm{P}_A^m \times_A \mathrm{P}_A^n \longrightarrow \mathrm{P}_A^{mn+m+n}.$$

dada por el teorema 4.31 (llamada *inmersión de Segre*.) Es fácil ver que, explícitamente, viene dada por la misma construcción que en la prueba de 4.31 se hace para $A = \mathbb{Z}$. Así, si llamamos

$$\mathrm{P}_A^m = \operatorname{Proy} A[S_0,\ldots,S_m], \quad \mathrm{P}_A^n = \operatorname{Proy} A[T_0,\ldots,T_n],$$
$$\mathrm{P}_A^{mn+m+n} = \operatorname{Proy} A[U_{ij}, i = 0,\ldots,m,\ j = 0,\ldots,n],$$

entonces f está dada por sus restricciones $f_{ij} : D(S_i)\times_A D(T_j) \longrightarrow D(U_{ij})$, que son las asociadas a los homomorfismos de anillos

$$\mathcal{O}(D(U_{ij})) \longrightarrow \mathcal{O}(D(S_i)) \otimes_A \mathcal{O}(D(T_j))$$

dado por $U_{rs}/U_{ij} \mapsto (S_r/S_i)\otimes(T_s/T_j)$.

Vamos a probar que $f^*\mathcal{O}(1) = p_1^*\mathcal{O}(1)\otimes_{\mathcal{O}_X} p_2^*\mathcal{O}(1)$.

Llamemos $X = \mathrm{P}_A^m \times_A \mathrm{P}_A^n$, $\mathcal{L}_1 = p_1^*\mathcal{O}_{\mathrm{P}_A^m}(1)$, $\mathcal{L}_2 = p_2^*\mathcal{O}_{\mathrm{P}_A^n}(1)$, $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{L}_2$ y consideremos $s_i = p_1^*S_i \in \mathcal{L}_1(X)$, $\quad t_j = \mathcal{L}_2(X)$. Entonces

$$X_{s_i} = p_1^{-1}[D(S_i)] = D(S_i)\times_A \mathrm{P}_A^n, \quad X_{t_j} = p_2^{-1}[D(T_j)] = \mathrm{P}_A^m \times_A D(T_j).$$

Como los abiertos $X_{s_i}\cap X_{t_j} = D(S_i)\times_A D(T_j)$ son afines, podemos considerar

$$s_i|_{X_{s_i}\cap X_{t_j}} \otimes t_j|_{X_{s_i}\cap X_{t_j}} \in \mathcal{L}_1(X_{s_i}\cap X_{t_j})\otimes\mathcal{L}_2(X_{s_i}\cap X_{t_j}) = \mathcal{L}(X_{s_i}\cap X_{t_j}).$$

Estos elementos determinan un $s_i\otimes t_j \in \mathcal{L}(X)$ tal que para cada $P\in X$ se cumple que

$$(s_i\otimes t_j)_P = s_{i,P}\otimes t_{j,P} \in \mathcal{L}_{1,P}\otimes_{\mathcal{O}_{X,P}}\mathcal{L}_{2,P} = \mathcal{L}_P.$$

Es claro que $s_{i,P}\otimes t_{j,P}$ genera $\mathcal{L}_{1,P}\otimes_{\mathcal{O}_{X,P}}\mathcal{L}_{2,P}$ si y sólo si $s_{i,P}$ genera $\mathcal{L}_{1,P}$ y $t_{j,P}$ genera $\mathcal{L}_{2,P}$. Por consiguiente, $X_{s_i\otimes t_j} = X_{s_i}\cap X_{t_j}$ y concluimos que los $s_i\otimes t_j$ forman un generador global de $\mathcal{L}$.

Por otra parte, en $\mathcal{L}(X_{s_i}\cap X_{t_j})$ tenemos que

$$s_u\otimes t_v = \frac{s_u}{s_i}\,s_i\otimes\frac{t_v}{t_j}\,t_j = \Big(\frac{s_u}{s_i}\otimes\frac{t_v}{t_j}\Big)(s_i\otimes t_j) = \frac{s_u\otimes t_v}{s_i\otimes t_j}\,s_i\otimes t_j,$$

luego

$$\frac{s_u\otimes t_v}{s_i\otimes t_j} = \frac{s_u}{s_i}\otimes\frac{t_v}{t_j} = \frac{S_u}{S_i}\otimes\frac{T_v}{T_j}.$$

Ahora es inmediato que f_{ij} es precisamente la restricción a $D(S_i)\times_A D(T_j)$ del homomorfismo determinado por la asignación $U_{ij}\mapsto s_i\otimes t_j$. Así pues, dicho homomorfismo es la inmersión f, lo cual implica que $f^*\mathcal{O}(1) = \mathcal{L}$.

Con esto podemos justificar la última afirmación del ejemplo anterior. Con la notación que estamos empleando aquí, sucede que $\mathcal{L}$ no puede ser isomorfo a $\mathcal{L}_1$, pues en tal caso, operando en el grupo de Picard, obtendríamos que $\mathcal{L}_2\cong\mathcal{O}_X$, lo cual es imposible, porque entonces $\mathcal{L}_2(X)\cong\mathcal{O}_X(X)\cong k$ (teorema 4.26), con lo que $\mathcal{L}_2$ no tendría un generador global. ■

Ejemplo 7 Consideremos dos homomorfismos $f_1 : X \longrightarrow \mathrm{P}_A^m$ y $f_2 : X \longrightarrow \mathrm{P}_A^n$ y sus haces inversibles asociados $\mathcal{L}_1 = f_1^*\mathcal{O}_{\mathrm{P}_A^m}(1)$, $\mathcal{L}_2 = f_2^*\mathcal{O}_{\mathrm{P}_A^n}(1)$. Llamemos $h : X \longrightarrow Y = \mathrm{P}_A^m \times_A \mathrm{P}_A^n$ al homomorfismo determinado por f_1 y f_2 y sean $p_1 : Y \longrightarrow \mathrm{P}_A^m$, $p_2 : Y \longrightarrow \mathrm{P}_A^n$ las proyecciones. Aplicando el teorema [B.4], vemos que

$$h^*(p_1^*\mathcal{O}_{\mathrm{P}_A^m}(1) \otimes_{\mathcal{O}_Y} p_2^*\mathcal{O}_{\mathrm{P}_A^n}(1)) \cong \mathcal{L}_1 \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{L}_2.$$

Si componemos h con la inmersión de Segre obtenemos un homomorfismo $g : X \longrightarrow \mathrm{P}_A^{mn+m+n}$, y teniendo en cuenta el ejemplo precedente vemos que $g^*\mathcal{O}(1) = \mathcal{L}_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}_2$. No es difícil ver entonces que el generador global asociado a este homomorfismo es el producto tensorial de los generadores globales asociados a f_1 y f_2. ■

Ejemplo 8 Sea $X = \mathrm{P}_k^1$ y consideremos el haz $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(4)$. Entonces $\mathcal{L}(X)$ es el espacio vectorial de las formas de grado 4 en $k[S,T]$, y es claro que las formas S^4, T^4 constituyen un generador global, ya que $X_{S^4} = D(S^4) = D(S)$, $X_{T^4} = D(T^4) = D(T)$. Por consiguiente, las formas S^4, S^3T, ST^3, T^4 también son un generador global, luego definen un homomorfismo $f : \mathrm{P}_k^1 \longrightarrow \mathrm{P}_k^3$ tal que $\mathcal{O}_X(4) = f^*\mathcal{O}_{\mathrm{P}_k^4}(1)$.

Concretamente, la restricción de f a $D(S^4)$ tiene su imagen en $D(X_0)$ y está asociada al homomorfismo de anillos $k[X_1/X_0, X_2/X_0, X_3/X_0] \longrightarrow k[T/S]$ dado por

$$X_1/X_0 \mapsto T/S, \quad X_2/X_0 \mapsto (T/S)^3, \quad X_3/X_0 \mapsto (T/S)^4.$$

Obviamente es suprayectivo luego $f|_{D(S)}$ es una inmersión cerrada, y lo mismo sucede con $f|_{D(T)}$, luego f es una inmersión cerrada. Tenemos así un ejemplo de inmersión para la que el homomorfismo $\mathcal{O}_{\mathrm{P}_k^3}(1)(\mathrm{P}_k^3) \longrightarrow \mathcal{O}_X(4)(X)$ no es suprayectivo, pues el primer espacio vectorial tiene dimensión 4 y el segundo tiene dimensión 5. Concretamente, la forma $S^2T^2 \in \mathcal{L}(X)$ no tiene antiimagen.

Si llamamos $C \subset \mathrm{P}_k^3$ a la imagen de f, entonces C tiene estructura de subesquema cerrado de P_k^3 isomorfo a P_k^1. Veremos más adelante (teorema 5.55) que C es de la forma $\mathrm{Proy}(B)$, donde $B = k[X_0, X_1, X_2, X_3]/I$, para un cierto ideal homogéneo I. (Alternativamente, el lector puede encontrar explícitamente el ideal I). El homomorfismo f se descompone en un isomorfismo $\mathrm{P}_k^1 \longrightarrow C$ seguido de la inmersión canónica $p : C \longrightarrow \mathrm{P}_k^3$. Según el ejemplo 2, tenemos que $p^*\mathcal{O}_{\mathrm{P}_k^3}(1) = \mathcal{O}_C(1)$, luego el isomorfismo entre C y P_k^1 hace corresponder $\mathcal{O}_C(1)$ con $\mathcal{O}_X(4)$ y, en particular, $\mathcal{O}_C(1)(X)$ tiene dimensión 5. Tenemos así un ejemplo en el que el monomorfismo $B_1 \longrightarrow \mathcal{O}_C(1)(X)$ no es suprayectivo, pues B_1 es el espacio vectorial generado por las formas x_4, x_1, x_2, x_3 y tiene a lo sumo dimensión 4. (De hecho, es fácil ver que tiene exactamente dimensión 4).

■

Muchos de los homomorfismos que nos han aparecido en estos ejemplos eran inmersiones cerradas. Hay un criterio sencillo que determina cuándo un homomorfismo asociado a un generador global de un haz inversible es una inmersión cerrada. (Comparar con los ejemplos 3 y 8, donde lo hemos aplicado tácitamente.)

Teorema 5.34 *Sea $f : X \longrightarrow \mathrm{P}_A^n$ un homomorfismo de esquemas definido sobre A correspondiente a un haz inversible $\mathcal{L}$ y un generador $s_0, \ldots, s_n \in \mathcal{L}(X)$. Entonces f es una inmersión cerrada si y sólo si:*

a) Los abiertos X_{s_i} son afines.

b) Los homomorfismos de anillos $A[X_0, \ldots, X_n] \longrightarrow \mathcal{O}_{X_i}(X_{s_i})$ dados por $X_j \mapsto s_j/s_i$ son suprayectivos.

Demostración: Si f es una inmersión cerrada también lo es la restricción $f|_{X_{s_i}} : X_{s_i} \longrightarrow D(X_i)$ y $D(X_i)$ es un esquema afín, luego X_{s_i} también es afín. Además, el homomorfismo $f^{\#}_{D(X_i)} : \mathcal{O}_Y(D(X_i)) \longrightarrow \mathcal{O}_X(X_{s_i})$ es suprayectivo. Si lo componemos con el epimorfismo $A[X_0, \ldots X_n] \longrightarrow \mathcal{O}_Y(D(X_i))$ dado por $X_j \mapsto X_j/X_i$ obtenemos el epimorfismo de b).

Recíprocamente, si se cumplen las condiciones del enunciado, entonces las aplicaciones $f^{\#}_{D(X_i)}$ son suprayectivas, luego cada $f|_{X_{s_i}}$ es una inmersión cerrada, luego f también lo es. ■

En realidad, como se ve en la demostración, no hace falta comprobar que todos los abiertos X_{s_i} son afines, sino que basta con que esto se cumpla para un conjunto de elementos s_i tales que los abiertos X_{s_i} cubran X (o, equivalentemente, que constituyan por sí solos un generador global de $\mathcal{L}$).

El teorema siguiente muestra que a menudo no perdemos generalidad si consideramos generadores globales linealmente independientes:

Teorema 5.35 *Sea k un cuerpo y X/k un esquema reducido, sea $f : X \longrightarrow \mathrm{P}_k^r$ un homomorfismo de esquemas, sea $\mathcal{L} = f^*\mathcal{O}_{\mathrm{P}_k^r}(1)$ y $s_i = f^*(X_i) \in \mathcal{L}(X)$. Entonces $s_0, \ldots, s_r$ son linealmente independientes si y sólo si $f[X]$ no está contenido en ningún hiperplano de P_k^r.*

Demostración: Si $s_0, \ldots, s_r$ son linealmente dependientes, sean $a_i \in k$ no todos nulos tales que $a_0 s_0 + \cdots + a_r s_r = 0$. Entonces la forma

$$F = a_0 X_0 + \cdots + a_r X_r \in \mathcal{O}_{\mathrm{P}_k^r}(1)(\mathrm{P}_k^r)$$

cumple que $f^*(F) = 0$, luego $f^{-1}[D(F)] = X_s = \varnothing$, luego $f[X] \subset V(F)$.

Recíprocamente, si existe un hiperplano $V(F)$ que contiene a $f[X]$ y llamamos $s = f^*(F)$, tenemos que $X_s = f^{-1}[D(F)] = \varnothing$, luego el teorema 5.28 nos da que $s = 0$, lo que implica que $s_0, \ldots, s_r$ son linealmente dependientes. ■

De este modo, eliminar un generador linealmente dependiente equivale a reducir en una dimensión el espacio proyectivo de llegada. También podemos dar una interpretación sencilla del efecto que tiene cambiar un generador global linealmente independiente por otro que genere el mismo espacio vectorial.

Para ello observamos que cada automorfismo $\mathcal{O}_{\mathrm{P}_k^r}(1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathrm{P}_k^r}(1)$, considerado como k-espacio vectorial, está determinado por su imagen sobre las indeterminadas:

$$X_i \mapsto a_{i0}X_0 + \cdots + a_{ir}X_r,$$

donde la matriz (a_{ij}) ha de ser regular. Según el ejemplo 1, esta asignación determina un homomorfismo $\mathrm{P}_k^r \longrightarrow \mathrm{P}_k^r$, que claramente es un automorfismo.

Si tenemos además un homomorfismo $f : X \longrightarrow \mathrm{P}_k^r$ definido por un generador global linealmente independiente $s_0, \ldots, s_r \in \mathcal{L}(X)$, donde $\mathcal{L} = f^*\mathcal{O}_{\mathrm{P}_k^r}(1)$, es fácil ver que la composición $X \longrightarrow \mathrm{P}_k^r \longrightarrow \mathrm{P}_k^r$ se corresponde con el mismo haz $\mathcal{L}$ y con la asignación $X_i \mapsto a_{i0}s_0 + \cdots + a_{ir}s_r$. En definitiva, dicha composición se corresponde con otro generador global de $\mathcal{L}$ que constituye otra base del mismo espacio vectorial $L = \langle s_0, \ldots, s_r\rangle \subset \mathcal{L}(X)$.

Un hecho no trivial es que todo automorfismo $\phi : \mathrm{P}_k^r \longrightarrow \mathrm{P}_k^1$ es de la forma que acabamos de considerar, es decir, que cumple que $\phi^*\mathcal{O}_{\mathrm{P}_k^r}(1) = \mathcal{O}_{\mathrm{P}_k^r}(1)$ y que, por consiguiente, está determinado por un cambio de base en $\mathcal{O}_{\mathrm{P}_k^r}(1)(\mathrm{P}_k^r)$. Esto lo demostraremos más adelante (teorema 8.31), pero admitiendo este hecho tenemos el teorema siguiente:

Teorema 5.36 *Sea X/k un esquema, $\mathcal{L}$ un haz inversible en X y $L \subset \mathcal{L}(X)$ un subespacio vectorial de dimensión r que contenga un generador global de $\mathcal{L}$. Entonces, los homomorfismos $X \longrightarrow \mathrm{P}_k^r$ asociados a las distintas bases de L forman una clase de equivalencia respecto de la relación por la que dos homomorfismos están relacionados si y sólo si uno se obtiene componiendo el otro con un automorfismo de P_k^r.*

Ejemplo Consideremos un homomorfismo $f : \mathrm{P}_k^1 \longrightarrow \mathrm{P}_k^3$ de manera que $f^*\mathcal{O}_{\mathrm{P}_k^3}(1) = \mathcal{O}_{\mathrm{P}_k^1}(3)$ y cuya imagen no esté contenida en ningún hiperplano. Por el teorema 5.35 los elementos $f^*(X_0)$, $f^*(X_1)$, $f^*(X_2)$, $f^*(X_3) \in \mathcal{O}_{\mathrm{P}_k^1}(3)(\mathrm{P}_k^1)$ han de ser linealmente independientes, pero este espacio tiene dimensión 4, luego estos cuatro elementos generan necesariamente el espacio $L = \mathcal{O}_{\mathrm{P}_k^1}(3)(\mathrm{P}_k^1)$. El teorema anterior nos dice que dos cualesquiera de ellos se diferencian en un automorfismo de P_k^3.

Un ejemplo de homomorfismo es estas condiciones es la inmersión de grado 3 considerada en el ejemplo 3 precedente. Como se trata de una inmersión cerrada, cualquier otro también lo es, luego, en particular, concluimos que sólo existe una curva en P_k^3 que no esté contenida en un plano y que sea isomorfa a P_k^1 a través de un isomorfismo asociado al haz $\mathcal{O}_{\mathrm{P}_k^1}(3)$.

La situación es completamente distinta si consideramos el haz $\mathcal{O}_{\mathrm{P}_k^1}(4)$, pues ahora $\mathcal{O}_{\mathrm{P}_k^1}(3)(\mathrm{P}_k^1)$ tiene dimensión 5 y podemos elegir distintos subespacios L de dimensión 4. En el ejemplo 8 precedente tenemos un ejemplo de homomorfismo asociado a $L = \left\langle S^4, S^3T, ST^3, T^4\right\rangle$ que resulta ser una inmersión cerrada. Más en general, si tomamos $a \in k$, podemos considerar el homomorfismo asociado a $L_a = \left\langle S^4, S^3T + aS^2T^2, ST^3, T^4\right\rangle$, que resulta ser también una inmersión cerrada. La comprobación es idéntica a la que hemos hecho en el citado ejemplo 8, salvo que ahora hay que probar que el homomorfismo de anillos $k[X_1/X_0, X_2/X_0, X_3/X_0] \longrightarrow k[T/S]$ dado por

$$X_1/X_0 \mapsto T/S + a(T/S)^2, \quad X_2/X_0 \mapsto (T/S)^3, \quad X_3/X_0 \mapsto (T/S)^4$$

es suprayectivo. Llamando $u = T/S$, tenemos que $(u+au^2)^2 = u^2+2au^3+a^2u^4$ está en la imagen, luego también lo está u^2, luego también lo está u, luego es suprayectivo.

Sin embargo, los espacios vectoriales L_a son distintos dos a dos, luego tenemos infinitos homomorfismos $\mathrm{P}^1_k \longrightarrow \mathrm{P}^3_k$ esencialmente distintos dos a dos, en el sentido de que ninguno se obtiene de otro de ellos por composición con un automorfismo de P^3_k. En particular, si llamamos C_a a la imagen de la inmersión correspondiente a L_a, tenemos que cada $C_a \subset \mathrm{P}^1_k$ es una curva proyectiva racional (es decir, isomorfa a P^3_k) pero que ninguna de ellas puede transformarse en otra mediante un automorfismo de P^3_k. ■

Vamos a ver otro criterio más útil que 5.34 para reconocer una inmersión cerrada en el caso de esquemas definidos sobre un cuerpo algebraicamente cerrado. En la prueba usaremos el teorema 6.49, que demostraremos en el capítulo siguiente. Naturalmente, en su demostración no usaremos el teorema que ahora nos ocupa.

Teorema 5.37 *Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado, sea X/k un esquema propio y sea $f : X \longrightarrow \mathrm{P}^n_k$ un homomorfismo de esquemas definido sobre k correspondiente a un haz inversible $\mathcal{L}$ y a un generador $s_0, \ldots, s_n \in \mathcal{L}(X)$. Sea $V = \langle s_0, \ldots, s_n \rangle_k$. Entonces f es una inmersión cerrada si y sólo si:*

a) Para cada par de puntos cerrados distintos P, $Q \in X$ existe un $s \in V$ tal que $s_P \in \mathfrak{m}_P\mathcal{L}_P$, $s_Q \notin \mathfrak{m}_Q\mathcal{L}_Q$ o viceversa.

b) Para cada punto cerrado $P \in X$, el conjunto $\{s \in V \mid s_P \in \mathfrak{m}_P\mathcal{L}_P\}$ genera el k-espacio vectorial $\mathfrak{m}_P\mathcal{L}_P/\mathfrak{m}_P^2\mathcal{L}_P$.

Demostración: La condición a) equivale a que $P \notin X_s$ y $Q \in X_s$ (o viceversa), y también a que $f(P)$ pertenece a un cierto hiperplano de P^n_k al cual no pertenece Q (o viveversa). Es claro entonces que si f es una inmersión cerrada cumple a). Recíprocamente, si f cumple a), entonces f es inyectiva sobre los puntos cerrados de X. Como f es continua y cerrada, para todo punto $\xi \in X$, se cumple que $f[\bar{\xi}] = \overline{f(\xi)}$, luego si $\xi, \psi \in X$ cumplen $f(\xi) = f(\psi)$, entonces $f[\bar{\xi}] = f[\bar{\psi}]$, luego $\bar{\xi}$ y $\bar{\psi}$ tienen los mismos puntos cerrados, luego $\bar{\xi} = \bar{\psi}$, luego $\xi = \psi$. En suma, f es inyectiva y, por consiguiente, una inmersión cerrada de espacios topológicos.

Veamos ahora que las inmersiones cerradas cumplen b). Tomemos $P \in X$. Entonces $P \in X_{s_i}$ para algún i. No perdemos generalidad si suponemos que $P \in X_{s_0}$, lo que equivale a que $f(P) \in D(X_0)$. Podemos ver a $f(P)$ como un ideal maximal de $\mathcal{O}_Y(D(X_0)) = k[x_1, \ldots, x_n]$, donde $x_i = X_i/X_0$. Como k es algebraicamente cerrado, $f(P) = (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$ para ciertos $a_i \in k$, y al localizar respecto de $f(P)$ tenemos también que $\mathfrak{m}_{f(P)} = (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$.

El epimorfismo $\mathcal{O}_{Y,f(P)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,P}$ cumple que $x_i \mapsto s_i/s_0$, luego transforma $\mathfrak{m}_{f(P)}$ en el ideal $\mathfrak{m}_P$ generado por $(s_i - a_i s_0)/s_0$, para $i = 1, \ldots, n$. Por consiguiente,

$$\mathfrak{m}_P \mathcal{L}_P = \mathfrak{m}_P s_0 = \langle s_1 - a_1 s_0, \ldots, s_n - a_n s_0 \rangle_{\mathcal{O}_{X,P}},$$

luego el espacio $\mathfrak{m}_P \mathcal{L}_P / \mathfrak{m}_P^2 \mathcal{L}_P$ está generado, ciertamente, por los elementos $s_i - a_i s_0 \in V$, como había que probar.

Supongamos, por último, que f cumple a) y b), con lo que ya sabemos que f es una inmersión cerrada de espacios topológicos, y sólo nos falta probar que el homomorfismo $\mathcal{O}_{Y,f(P)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,P}$ es suprayectivo. La hipótesis b) se traduce en la suprayectividad del homomorfismo inducido $\mathfrak{m}_{f(P)} \longrightarrow \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$. En efecto: supongamos como antes, que $P \in X_{s_0}$, con lo que $\mathcal{L}_P = s_{0P}\mathcal{O}_{X,P}$. Si $a \in \mathfrak{m}_P$, entonces, por b), existen $\alpha_i \in k$ y $x \in \mathfrak{m}_P^2$ tales que

$$a s_{0P} = \alpha_1 s_{1P} + \cdots + \alpha_n s_{nP} + x s_{0P} = \big(\alpha_1 \frac{s_1}{s_0} + \cdots + \alpha_n \frac{s_n}{s_0} + x\big) s_{0P},$$

luego

$$a = f_P^{\#}\big(\alpha_1 \frac{X_1}{X_0} + \cdots + \alpha_n \frac{X_n}{X_0}\big) + x,$$

donde $X_i/X_0 \in \mathfrak{m}_{f(P)}$. En definitiva, la clase de a módulo $\mathfrak{m}_P^2$ es la imagen de un elemento de $\mathfrak{m}_{f(P)}$, como queríamos probar.

Ahora usamos el teorema 6.49, que nos da que el haz $f_*\mathcal{O}_X$ es coherente, por lo que $\mathcal{O}_{X,P}$ es un $\mathcal{O}_{Y,f(P)}$-módulo finitamente generado.

En general, tenemos un homomorfismo $\phi : A \longrightarrow B$ de anillos noetherianos locales que convierte a B es un A-módulo finitamente generado, que induce un isomorfismo $A/\mathfrak{m}_A \longrightarrow B/\mathfrak{m}_B$ (porque k es algebraicamente cerrado) y tal que el homomorfismo natural $\mathfrak{m}_A \longrightarrow \mathfrak{m}_B/\mathfrak{m}_B^2$ es suprayectivo.

El teorema quedará probado si, bajo estas hipótesis, demostramos que ϕ es suprayectivo. Consideremos el ideal $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}_A B$. Tenemos que $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}_B$, y que $\mathfrak{m}_B = \mathfrak{a} + \mathfrak{m}_B^2$. Podemos aplicar el Lema de Nakayama [4.51], del que obtenemos que $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}_B$.

Ahora vamos a aplicar nuevamente el Lema de Nakayama, pero al anillo A y a los módulos $\phi[A] \subset B$. Se cumple que $B/\phi[A]$ es un A-módulo finitamente generado porque B lo es y

$$B/\mathfrak{m}_A B = B/\mathfrak{m}_B \cong A/\mathfrak{m}_A,$$

luego $B = \phi[A] + \mathfrak{m}_A B$. Concluimos que $B = \phi[A]$. ■

En la sección siguiente estudiamos los haces inversibles sobre un esquema que definen inmersiones, no necesariamente cerradas.

5.4 Haces amplios y muy amplios

Definición 5.38 Sea A un anillo y X/A un esquema. Diremos que un haz $\mathcal{L}$ en X es *muy amplio* (respecto de A) si existe una inmersión $f : X \longrightarrow Y = \mathrm{P}_A^n$, definida sobre A, tal que $\mathcal{L} \cong f^*\mathcal{O}_Y(1)$. En tal caso, para cada $d \in \mathbb{Z}$, definimos $\mathcal{O}_X(d) = f^*\mathcal{O}_Y(d)$.

Es claro que los haces $\mathcal{O}_X(d)$ son inversibles. En principio dependen de la inmersión f, pero vamos a ver que en realidad sólo dependen (salvo isomorfismo) del haz muy amplio $\mathcal{L}$. Concretamente, sucede que la clase de $\mathcal{O}_X(d)$ en el grupo de Picard de X es $[\mathcal{L}]^d$.

Si $d > 0$, se cumple que $\mathcal{O}_Y(d) \cong \mathcal{O}_Y(1)^{\otimes d}$ (teorema 5.25), y el teorema [B.4] nos da, al aplicar f^*, que $[\mathcal{O}_X(d)] = [\mathcal{L}]^d$.

Para $d < 0$ usamos que $\mathcal{O}_Y(d) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_Y(-d) \cong \mathcal{O}_Y$, con lo que al aplicar f^* resulta que $[\mathcal{O}_X(d)][\mathcal{L}]^{-d} = 1$, luego también $[\mathcal{O}_X(d)] = [\mathcal{L}]^d$.

Por último, es obvio que $\mathcal{O}_X(0) \cong \mathcal{O}_X$.

La fórmula $[\mathcal{O}_X(d)] = [\mathcal{L}]^d$ implica a su vez que

$$\mathcal{O}_X(d + d') \cong \mathcal{O}_X(d) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(d').$$

Si A es un anillo graduado finitamente generado sobre $S = A_0$ por elementos $a_0, \ldots, a_r \in A_1$ y $X = \operatorname{Proy} A$, tenemos definidos de otro modo unos haces a los que hemos llamado $\mathcal{O}_X(d)$ (definición 5.24). Sin embargo, el ejemplo 2 de la sección anterior muestra que $\mathcal{O}_X(1)$ en el sentido de 5.24 coincide con el que acabamos de definir respecto a la inmersión cerrada $f : X \longrightarrow \mathrm{P}_S^n$ asociada al epimorfismo $S[X_0, \ldots, X_r] \longrightarrow A$ dado por $X_i \mapsto a_i$, y esto a su vez implica que todos los haces $\mathcal{O}_X(d)$ son el mismo en los dos sentidos.

En particular, si $A = S[X_0, \ldots, X_n]/I$, donde I es un ideal homogéneo, y $X = \operatorname{Proy} A$ los haces $\mathcal{O}_X(d)$ en el sentido de 5.24 son los determinados por la inmersión cerrada natural $X \longrightarrow \mathrm{P}_S^n$.

Es evidente que un esquema X/A es cuasiproyectivo (sobre A) si y sólo si tiene un haz muy amplio. Si X/A es un esquema propio (sobre A) entonces X es proyectivo (sobre A) si y sólo si tiene un haz muy amplio.

Sabemos que un haz muy amplio en un esquema X ha de ser inversible y ha de admitir un generador global finito. No obstante, estas propiedades no caracterizan a los haces muy amplios (pues están asociadas a homomorfismos arbitrarios, no necesariamente inmersiones).

Ejemplo El haz $\mathcal{O}_{\mathrm{P}_A^n}(d)$ es muy amplio cuando $d \geq 1$, pues define la inmersión de grado d, mientras que no es muy amplio si $d < 0$, pues entonces no tiene generadores globales. ■

Teorema 5.39 *Sea X/A un esquema y $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ dos haces muy amplios en X (sobre A). Entonces $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$ es un haz muy amplio. Si X es proyectivo no es necesario que $\mathcal{M}$ sea muy amplio, sino que basta con que admita un generador global.*

DEMOSTRACIÓN: Existen inmersiones $f_1 : X \longrightarrow \mathrm{P}^m_A$ y $f_2 : X \longrightarrow \mathrm{P}^n_A$ tales que $f_1^*\mathcal{O}(1) = \mathcal{L}$, $f_2^*\mathcal{O}(1) = \mathcal{M}$. Según el ejemplo 7 de la sección anterior, se cumple que $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M} \cong g^*\mathcal{O}(1)$, donde g es la composición del homomorfismo $h : X \longrightarrow \mathrm{P}^m_A \times_A \mathrm{P}^n_A$ inducido por f_1 y f_2, con la inmersión de Segre. Es claro que h es una inmersión, luego g también, por lo que $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$ es muy amplio.

Si X es proyectivo y $\mathcal{M}$ admite un generador global, entonces tenemos una inmersión cerrada f_1 y un homomorfismo f_2. Basta probar que h es igualmente una inmersión cerrada, y ello se debe al teorema 4.17, aplicado a h y p_1. ■

Vamos a probar una propiedad muy importante de los haces muy amplios sobre un esquema proyectivo. Necesitamos un resultado técnico:

Teorema 5.40 *Sea X un esquema noetheriano o bien separado y cuasicompacto. Sea $\mathcal{M}$ un haz cuasicoherente en X y $\mathcal{L}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo inversible. Sea $f \in \mathcal{M}(X)$ y $s \in \mathcal{L}(X)$.*

a) Si $f|_{X_s} = 0$ existe un $n \geq 1$ tal que $f \otimes s^{\otimes n} = 0$ en $\mathcal{M} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}$.

b) Si $g \in \mathcal{M}(X_s)$ existe un $n_0 \geq 1$ tal que para todo $n \geq n_0$ se cumple que $g \otimes s^{\otimes n}|_{X_s}$ se extiende a $(\mathcal{M} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})(X)$.

DEMOSTRACIÓN: Cubrimos X con un número finito de abiertos afines X_i tales que $\mathcal{L}|_{X_i} \cong \mathcal{O}_{X_i}$. (Aquí usamos que X es cuasicompacto). Llamemos $e_i \in \mathcal{L}(X_i)$ a la imagen de $1 \in \mathcal{O}_X(X_i)$ por el isomorfismo (de modo que $\mathcal{L}(X_i) = e_i\mathcal{O}_X(X_i)$) y sea $h_i \in \mathcal{O}_X(X_i)$ tal que $s|_{X_i} = e_i h_i$ (o sea, la imagen de $s|_{X_i}$ por el isomorfismo). Entonces tenemos que $X_s \cap X_i = D(h_i)$ (abierto principal en X_i).

a) Si $f|_{X_s} = 0$ también $f|_{X_s \cap X_i} = 0$ en $\mathcal{M}(D(h_i)) = \mathcal{M}(X_i)_{h_i}$, luego existe un $n \geq 1$ tal que $f|_{X_i} h_i^n = 0$. Podemos tomar n suficientemente grande para que sirva para todos los índices i. Consideremos ahora el isomorfismo

$$\mathcal{M}|_{X_i} \longrightarrow (\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X)|_{X_i} \longrightarrow (\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X^{\otimes n})|_{X_i} \longrightarrow (\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^{\otimes n})|_{X_i}.$$

Se cumple que

$$0 = f|_{X_i} h_i^n \mapsto f|_{X_i} h_i^n \otimes 1 \mapsto f|_{X_i} h_i^n \otimes 1^{\otimes n} \mapsto f|_{X_i} h_i^n \otimes e_i^{\otimes n} = f|_{X_i} \otimes (s|_{X_i})^{\otimes n},$$

luego $(f \otimes s^{\otimes n})|_{X_i} = 0$, para todo i, luego $f \otimes s^{\otimes n} = 0$.

b) Como $g|_{X_s \cap X_i} \in \mathcal{M}(D(h_i)) = \mathcal{M}(X_i)_{h_i}$, existe un $m \geq 1$ tal que

$$g|_{X_s \cap X_i} h_i^m|_{X_s \cap X_i} = f_i|_{X_s \cap X_i},$$

para cierto $f_i \in \mathcal{M}(X_i)$. Podemos tomar el mismo m para todo i. Llamemos $t_i \in (\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^{\otimes m})(X_i)$ a la imagen de f_i por el isomorfismo anterior. Entonces

$$t_i|_{X_s \cap X_i} = g|_{X_s \cap X_i} h_i^m|_{X_s \cap X_i} \otimes e^{\otimes m} = g|_{X_s \cap X_i} \otimes (s^{\otimes m}|_{X_s \cap X_i}).$$

De aquí se sigue que $t_i|_{X_s\cap X_i\cap X_j} = t_j|_{X_s\cap X_i\cap X_j}$. Podemos aplicar el apartado anterior al esquema $X_i \cap X_j$ (que es cuasicompacto por las hipótesis sobre X) y a la función $t_i|_{X_i\cap X_j} - t_j|_{X_i\cap X_j}$. Concluimos que existe un $q \geq 1$ tal que

$$(t_i|_{X_i\cap X_j} - t_j|_{X_i\cap X_j}) \otimes s^{\otimes q}|_{X_i\cap X_j} = 0.$$

Ahora tomamos $n_0 = m + q$, de modo que si $n \geq n_0$, entonces los elementos $t_i \otimes s^{\otimes(q+n-n_0)}|_{X_i} \in (\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^{\otimes n})(X_i)$ coinciden en las intersecciones $X_i \cap X_j$, luego determinan un $t \in (\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^{\otimes n})(X)$ tal que

$$t|_{X_s\cap X_i} = t_i|_{X_s\cap X_i} \otimes s^{\otimes(q+n-n_0)}|_{X_s\cap X_i} = g|_{X_s\cap X_i} \otimes s^{\otimes n}|_{X_s\cap X_i},$$

luego $t|_{X_s} = g \otimes s^{\otimes n}|_{X_s}$. ■

Si $\mathcal{M}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo, definimos $\mathcal{M}(m) = \mathcal{M}\otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(m)$, definición relativa a un haz muy amplio prefijado en X.

Teorema 5.41 (Serre) *Sea A un anillo, X/A un esquema proyectivo sobre A y $f : X \longrightarrow Y = \mathrm{P}^d_A$ una inmersión cerrada definida sobre A. Sea $\mathcal{M}$ un haz en X cuasicoherente y finitamente generado. Entonces existe un natural n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ el haz $\mathcal{M}(n)$ admite un generador global.*

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema 5.18 tenemos que $f_*\mathcal{M}$ es un haz en Y cuasicoherente y finitamente generado, y el teorema 5.22 nos da que

$$f_*(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{O}_Y(n)) \cong f_*\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_Y(n).$$

Basta probar el teorema para $X = \mathrm{P}^d_A$ (con f igual a la identidad), pues entonces tendremos que el haz de la derecha admite un generador global para todo n suficientemente grande, y es fácil ver que lo mismo vale entonces para $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{O}_Y(n) = \mathcal{M}(n)$.

Así pues, suponemos que $\mathcal{M}$ es un haz en $Y = \mathrm{P}^d_A = \mathrm{Proy}(A[X_1, \ldots, X_d])$. Entonces $X_i \in \mathcal{O}_Y(1)$. Sea $U_i = D(X_i) = Y_{X_i}$. Por hipótesis $\mathcal{M}(U_i)$ está generado por un número finito de elementos s_{ij}, $j = 1, \ldots, m$. Ahora aplicamos el teorema 5.40, que nos da un $n_0 \geq 1$ tal que para todo $n \geq n_0$ podemos extender $X_i^n \otimes s_{ij}$ hasta un elemento $t_{ij} \in (\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_Y(n))(X)$. Es claro que los t_{ij} son un generador global de $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_Y(n)$. ■

Para interpretar lo que hemos obtenido necesitamos una definición:

Definición 5.42 Sea X un esquema cuasicompacto y $\mathcal{L}$ un haz inversible en X. Diremos que $\mathcal{L}$ es *amplio* si para cada haz cuasicoherente y finitamente generado $\mathcal{M}$ en X existe un $n_0 \geq 1$ tal que para todo $n \geq n_0$ el haz $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^n$ admite un generador global.

En estos términos, el teorema anterior afirma que todo haz muy amplio en un esquema proyectivo sobre un anillo A es amplio. (Notemos que la noción de haz amplio es absoluta, es decir, no depende de ningún anillo sobre el que esté definido el esquema X.)

Observemos que, en las condiciones de la definición de haz amplio, el haz $\mathcal{N} = \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^n$ admite, de hecho, un generador global finito. En efecto, para cada $P \in X$ existe un conjunto finito $S \subset \mathcal{N}(X)$ cuyos elementos generan $\mathcal{N}_P$ (porque $\mathcal{N}$ es también finitamente generado). Si U es un entorno afín de P, tomamos un generador finito de $\mathcal{N}(U)$ y expresamos sus imágenes en $\mathcal{N}_P$ como combinaciones lineales de las imágenes de los elementos de S con coeficientes en $\mathcal{O}_{X,P}$, pero dichos coeficientes pueden verse también en $\mathcal{O}_X(D(f))$, para un $f \in \mathcal{O}_X(U)$ tal que $P \in D(f)$. Así pues, las restricciones de S a $\mathcal{N}(D(f))$ generan este módulo. En suma, cada punto P tiene un entorno V tal que $\mathcal{N}(V)$ está generado por las restricciones de un número finito de elementos de $\mathcal{N}(X)$. Como X es cuasicompacto, podemos encontrar un cubrimiento abierto finito $\{V_i\}$ de X y un conjunto finito $T \subset \mathcal{N}(X)$ cuyas restricciones generan los todos los módulos $\mathcal{N}(V_i)$. Es claro que T es un generador global de $\mathcal{N}$.

Esto nos da una consecuencia útil del teorema de Serre:

Teorema 5.43 *Si $\mathcal{O}_X(1)$ es un haz muy amplio en un esquema proyectivo X/A y $\mathcal{M}$ es un haz cuasicoherente en X finitamente generado, entonces existe un epimorfismo $\mathcal{O}_X(m)^r \longrightarrow \mathcal{M}$, para cierto $m \in \mathbb{Z}$ y cierto $r \geq 1$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $m \geq 1$ tal que $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(m)$ admita un generador global. Según acabamos de ver, podemos tomarlo finito, digamos con r elementos. Por el teorema 5.32 existe un epimorfismo

$$\mathcal{O}_X^r \longrightarrow \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(m).$$

De aquí obtenemos el epimorfismo $\mathcal{O}_X(-m)^r \longrightarrow \mathcal{M}$. (Se comprueba inmediatamente que es un epimorfismo considerando sus localizaciones.) ■

Ahora podemos probar:

Teorema 5.44 *Sea A un anillo noetheriano y X/A un esquema cuasiproyectivo. Entonces el grupo $\operatorname{Pic}(X)$ está generado por los haces muy amplios.*

DEMOSTRACIÓN: Por hipótesis existe una inmersión abierta $i : X \longrightarrow Y$, donde Y/A es un esquema proyectivo. Sea $\mathcal{L} \in \operatorname{Pic}(X)$ y sea $\mathcal{M}$ un haz muy amplio en Y. Como $\mathcal{M}$ es amplio, existe un natural n tal que $i_*\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{M}^n$ admite un generador global. El teorema 5.39 implica que tanto $i_*\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{M}^{n+1}$ como $\mathcal{M}^{n+1}$ son haces muy amplios en Y, luego tanto $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} i^*\mathcal{M}^{n+1}$ como $\mathcal{L}_2 = i^*\mathcal{M}^{n+1}$ son haces muy amplios en X, y $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}_2^*$. ■

El concepto de haz amplio no es equivalente al de haz muy amplio, pero vamos a ver que la existencia de un haz amplio equivale a la existencia de un haz muy amplio.

Empezamos con una consecuencia sencilla de la definición:

Teorema 5.45 *Sea X un esquema cuasicompacto y $\mathcal{L}$ un haz inversible en X. Entonces son equivalentes:*

a) $\mathcal{L}$ *es amplio.*

b) $\mathcal{L}^n$ *es amplio para todo* $n \geq 1$.

c) $\mathcal{L}^n$ *es amplio para algún* $n \geq 1$.

Demostración: La única implicación no trivial es c) $\Rightarrow$ a). Supongamos que $\mathcal{L}^n$ es amplio y sea $\mathcal{M}$ un haz en X cuasicoherente y finitamente generado. Lo mismo vale entonces para los haces $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^k$, para $0 \leq k < n$. Como $\mathcal{L}$ es coherente, para todo r suficientemente grande los haces $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^{k+nr}$ admite un generador global, pero esto esquivale a decir que $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^m$ tiene un generador global para todo m suficientemente grande, luego $\mathcal{L}$ es amplio. ■

Es fácil ver que si dos haces cuasicoherentes $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ sobre un esquema cuasicompacto X admiten un generador global, entonces $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N}$ también lo admite. De aquí se sigue que si $\mathcal{L}$ es amplio y $\mathcal{M}$ admite un generador global entonces $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$ es amplio, y el teorema anterior implica entonces que si $\mathcal{L}_1$ y $\mathcal{L}_2$ son haces amplios, entonces $\mathcal{L}_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}_2$ también es amplio (pues existe un n tal que $\mathcal{L}_1^n$ admite un generador global, luego $\mathcal{L}_1^n \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}_2^n$ es amplio, luego $\mathcal{L}_1 \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}_2$ es amplio).

El resultado básico sobre haces amplios es el teorema siguiente:

Teorema 5.46 *Sea* X/A *un esquema de tipo finito sobre un anillo noetheriano* A. *Si* $\mathcal{L}$ *es un haz amplio en* X*, entonces existe un* $m \geq 1$ *tal que* $\mathcal{L}^m$ *es muy amplio sobre* A.

Demostración: Tomemos $P \in X$. Vamos a probar que existe un $n = n(P)$ y un $s \in \mathcal{L}^n(X)$ tal que X_s es un entorno afín de P.

Sea U un entorno afín de P tal que $\mathcal{L}|_U$ sea libre. Consideramos en $X \setminus U$ la estructura de subesquema cerrado reducido, que se corresponde con un haz cuasicoherente $\mathcal{I}$ de ideales de $\mathcal{O}_X$. De hecho, como A es noetheriano y X es de tipo finito sobre A, tenemos que X es noetheriano, de donde se sigue fácilmente que el haz $\mathcal{I}$ es finitamente generado (o coherente). Como $\mathcal{L}$ es amplio, para todo n suficientemente grande se cumple que $\mathcal{I} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^n$ admite un generador global. Uno de sus elementos, $t \in (\mathcal{I} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^n)(X)$ ha de cumplir que t_P genera el módulo local $(\mathcal{I} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^n)_P$.

Para cada punto $Q \in X$, consideramos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{I} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^n)(X) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{L}^n(X) \arrow[d] \\
\mathcal{I}_Q \otimes_{\mathcal{O}_{X,Q}} \mathcal{L}^n_Q \arrow[r] & \mathcal{L}^n_Q
\end{tikzcd}$$

Sea $s \in \mathcal{L}^n(X)$ la imagen de t. Como $V(\mathcal{L}) = X \setminus U$, para cada $Q \in X \setminus U$ tenemos que $\mathcal{I}_Q \subset \mathfrak{m}_Q$, luego s_Q no puede generar $\mathcal{L}^n_Q$, luego $Q \notin X_s$. En cambio, para $Q = P$ tenemos que $\mathcal{I}_P = \mathcal{O}_{X,P}$, luego la fila inferior del diagrama es un isomorfismo, luego s_P genera $\mathcal{L}^n_P$, luego $P \in X_s \subset U$.

Pongamos que $\mathcal{L}|_U = e\mathcal{O}_U$ y sea $s|_U = eh$, con $h \in \mathcal{O}_X(U)$. Entonces $X_s = D_U(h)$, luego X_s es un abierto afín.

Podemos cubrir X por un número finito de abiertos X_{s_i} en las condiciones anteriores. Más aún, tomando potencias de los s_i podemos suponer que todos ellos pertenecen al mismo $\mathcal{L}^n(X)$.

Como X es de tipo finito sobre A, tenemos que $\mathcal{O}_X(X_{s_i}) = A[f_{ij}]$, para un número finito de elementos $f_{ij} \in \mathcal{O}_X(X_{s_i})$. Por el teorema 5.40 existe un $r \geq 1$ tal que $s_i^r \otimes f_{ij}$ se extiende a un $s_{ij} \in \mathcal{L}^{nr}(X)$. (Aquí usamos que $\mathcal{L}^{nr} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X \cong \mathcal{L}^{nr}$ y, a través de este isomorfismo, $s_{ij}|_{X_{s_i}} = f_{ij}s_i^r$.) Podemos tomar el mismo r para todos los índices.

Es claro que los s_i son un generador global de $\mathcal{L}^n$, luego los s_i^r son un generador global de $\mathcal{L}^{nr}$, luego también lo es el conjunto formado por los s_i^r y los s_{ij}. El teorema 5.33 nos da un homomorfismo

$$f : X \longrightarrow Y = \operatorname{Proy}(A[X_i, X_{ij}])$$

que cumple que $f^*(\mathcal{O}_Y(1)) \cong \mathcal{L}^{nr}$ y, a través de este isomorfismo, $f^*(X_i) = s_i^r$, $f^*(X_{ij}) = s_{ij}$. Sea $U_i = D_Y(X_i)$. Entonces $X_{s_i} = f^{-1}[U_i]$ (ver la prueba de la unicidad en el teorema 5.33), luego f induce un homomorfismo $g : X \longrightarrow U$, donde $U = \bigcup\limits_i U_i$, de modo que $f = g \circ i$, donde $i : U \longrightarrow Y$ es la inmersión abierta.

Basta probar que g es una inmersión cerrada, pues entonces f será una inmersión y $\mathcal{L}^{nr}$ será un haz muy amplio.

A su vez, basta con que sean inmersiones cerradas todas las restricciones $f|_{X_{s_i}} : X_{s_i} \longrightarrow U_i$. Como son homomorfismos entre esquemas afines, para ello basta con que sean suprayectivos los homomorfismos

$$f_{U_i}^{\#} : \mathcal{O}_Y(D(X_i)) \longrightarrow \mathcal{O}_X(X_{s_i}),$$

lo cual se cumple porque transforman $X_{ij}/X_i \mapsto f_{ij}$. ■

Ejemplo Ahora es claro que el haz $\mathcal{O}_{\mathrm{P}_A^n}(d)$ no es amplio cuando $d \leq 0$, luego $\mathcal{O}_{\mathrm{P}_A^n}(d)$ es amplio si y sólo si es muy amplio, si y sólo si $d > 0$. ■

Acabamos de ver que la existencia de un haz amplio en un esquema (de tipo finito sobre un anillo noetheriano) implica la existencia de un haz muy amplio. El recíproco lo tenemos demostrado únicamente para esquemas proyectivos. El caso general se deduce del teorema siguiente:

Teorema 5.47 *Sea X un esquema noetheriano y $\mathcal{L}$ un haz inversible en X.*

a) Si existen $s_1, \ldots, s_r \in \mathcal{L}(X)$ tales que cada X_{s_i} es afín y $X = \bigcup\limits_i X_{s_i}$, entonces $\mathcal{L}$ es amplio.

b) Si U es un abierto en X y $\mathcal{L}$ es amplio, entonces $\mathcal{L}|_U$ es amplio.

Demostración: a) Sea $\mathcal{M}$ un haz en X cuasicoherente y finitamente generado. Sean $f_1, \ldots, f_q$ generadores de $\mathcal{M}(X_{s_1})$. Por el teorema 5.40, para todo n suficientemente grande, $f_i \otimes s_i^n$ se extiende a un elemento de $(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^n)(X)$.

Como $s_1^n|_{X_{s_1}}$ es un generador de $\mathcal{L}^n(X_{s_1})$, es claro que dichas extensiones generan $(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^n)_P$ para todo $P \in X_{s_1}$. Repitiendo lo mismo con los demás abiertos X_{s_i} (y tomando un n suficientemente grande) obtenemos un generador global de $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^n$. Por lo tanto $\mathcal{L}$ es amplio.

b) La primera parte de la prueba del teorema anterior no usa que el esquema dado es de tipo finito sobre un anillo noetheriano, sino únicamente que es noetheriano. Por lo tanto, si $\mathcal{L}$ es amplio, bajo las hipótesis actuales, podemos encontrar igualmente elementos $s_1, \ldots, s_r \in \mathcal{L}^n$ que cumplen las hipótesis de a) para $\mathcal{L}^n$. Vamos a probar que $\mathcal{L}^n|_U = (\mathcal{L}|_U)^n$ es amplio, lo que implica que $\mathcal{L}|_U$ también es amplio. Equivalentemente, podemos sustituir $\mathcal{L}$ por $\mathcal{L}^n$ y suponer que $\mathcal{L}$ cumple las hipótesis de a).

Cada abierto $U \cap X_{s_i}$ es noetheriano, luego cuasicompacto, luego puede expresarse como unión de un número finito de abiertos principales $D(h_{ij})$, con $h_{ij} \in \mathcal{O}_X(X_{s_i})$. Por el teorema 5.40, existe un n tal que cada $h_{ij} \otimes s_i^n$ se extiende a un elemento $t_{ij} \in (\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^n)(X)$. Podemos sustituir de nuevo $\mathcal{L}$ por $\mathcal{L}^n$ e identificar $\mathcal{O}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^n \cong \mathcal{L}^n = \mathcal{L}$, con lo que $t_{ij} \in \mathcal{L}(X)$ cumple $t_{ij}|_{X_{s_i}} = h_{ij}s_i$.

Ahora definimos $s_{ij} = t_{ij}|_U \in \mathcal{L}(U)$, de modo que $U_{s_{ij}} = D(h_{ij})$, pues $(s_{ij})_P$ genera $\mathcal{L}_P$ exactamente cuando s_i genera $\mathcal{L}_P$ y h_{ij} genera $\mathcal{O}_{X,P}$, lo cual sucede si $P \in X_{s_i}$ y además $P \in D(h_{ij})$.

Esto significa que $\mathcal{L}|_U$ cumple las hipótesis de a) con los s_{ij}, luego es un haz amplio en U. ■

En resumen tenemos lo siguiente:

Teorema 5.48 *Sea X/A un esquema de tipo finito sobre un anillo noetheriano A. Entonces X es cuasiproyectivo sobre A (es decir, existe un haz muy amplio sobre A) si y sólo si existe un haz amplio en X.*

Demostración: Una implicación es el teorema 5.46. Recíprocamente, si X es cuasiproyectivo, entonces es isomorfo a un abierto en un cerrado Y en un espacio P_A^n. Por el teorema de Serre (ver la observación tras la definición 5.42), tenemos que Y tiene un divisor amplio, luego por el teorema anterior X también lo tiene. ■

Hemos definido el concepto de haz muy amplio para un esquema definido sobre un anillo o, equivalentemente, sobre un esquema afín. Terminamos la sección generalizando la definición al caso de un esquema definido sobre un esquema arbitrario. Para ello necesitamos unas observaciones que garantizarán que en el caso afín la nueva definición coincide con la que ya tenemos.

Sea A un anillo, sea $X = \mathrm{P}_A^n$ y sea $Y = \mathrm{P}_{\mathbb{Z}}^n$. El haz $\mathcal{O}_X(1)$ tiene a $X_0, \ldots, X_n$ como generador global, luego, según el teorema 5.33 para $S = \mathbb{Z}$, define un homomorfismo $\pi : X \longrightarrow Y$ determinado por que $\pi^*(X_i) = X_i$, para todo $i = 0, \ldots, n$. Más detalladamente, π se restringe a homomorfismos

$$\pi|_{D(X_i)} : D_X(X_i) \longrightarrow D_Y(X_i)$$

que se corresponden con los homomorfismos naturales

$$\mathbb{Z}[X_1/X_i, \ldots, X_n/X_i] \longrightarrow A[X_1/X_i, \ldots, X_n/X_i].$$

Es claro entonces que π es el homomorfismo determinado por el homomorfismo natural de anillos graduados $\mathbb{Z}[X_0, \ldots, X_n] \longrightarrow A[X_0, \ldots, X_n]$. Así hemos probado que esta proyección cumple $\pi^*\mathcal{O}_Y(1) = \mathcal{O}_X(1)$. A través del isomorfismo natural $\mathrm{P}_A^n \cong \mathrm{P}_X^n \times_{\mathbb{Z}} \operatorname{Esp} A$, el homomorfismo π se corresponde con la proyección en la primera componente.

Definición 5.49 Sea S un esquema y $X = \mathrm{P}_S^n$. Definimos el haz inversible $\mathcal{O}_X(1) = \pi^*\mathcal{O}_Y(1)$, donde $Y = \mathrm{P}_{\mathbb{Z}}^n$ y $\pi : \mathrm{P}_S^n \longrightarrow \mathrm{P}_{\mathbb{Z}}^n$ es la proyección natural.

Las observaciones precedentes muestran que si $S = \operatorname{Esp} A$, entonces el haz $\mathcal{O}_X(1)$ que acabamos de definir coincide con el que ya teníamos definido. Si $U \subset S$ es un abierto, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathrm{P}_U^n \arrow[r, "i"] \arrow[dr] & \mathrm{P}_S^n \arrow[d] \\ & \mathrm{P}_{\mathbb{Z}}^n \end{tikzcd}$$

del que se desprende que $\mathcal{O}_{\mathrm{P}_S^n}(1)|_{\mathrm{P}_U^n} = i^*\mathcal{O}_{\mathrm{P}_S^n}(1) = \mathcal{O}_{\mathrm{P}_U^n}(1)$. Esto nos da una caracterización de $\mathcal{O}_{\mathrm{P}_S^n}(1)$ como el único haz en P_S^n que al restringirlo a cada abierto P_U^n, donde $U \subset S$ es un abierto afín, es el haz $\mathcal{O}_{\mathrm{P}_U^n}(1)$ que ya teníamos definido.

Si X/S es un esquema arbitrario y $j : X \longrightarrow \mathrm{P}_S^n$ es una inmersión, definimos $\mathcal{O}_X(1) = j^*\mathcal{O}_{\mathrm{P}_S^n}(1)$. Los haces inversibles de esta forma se llaman *haces muy amplios* respecto de S. Es claro que si $X = \mathrm{P}_S^n$, entonces el haz $\mathcal{O}_X(1)$ que ya teníamos definido se corresponde con el que acabamos de definir cuando j es la identidad. Por otra parte, cuando $S = \operatorname{Esp} A$, los haces muy amplios respecto de S coinciden con los haces muy amplios respecto de A que ya teníamos definidos.

Si $\pi : X \longrightarrow S$ es el homomorfismo estructural, $U \subset S$ es un abierto y $V = \pi^{-1}[U] = j^{-1}[\mathrm{P}_U^n]$, entonces

$$\mathcal{O}_X(1)|_V = j|_V^{-1}\mathcal{O}_{\mathrm{P}_U^n}(1) = \mathcal{O}_V(1).$$

Definimos

$$\mathcal{O}_X(m) = \begin{cases} \mathcal{O}_X(1)^m & \text{si } m > 0, \\ \mathcal{O}_X & \text{si } m = 0, \\ (\mathcal{O}_X(1)^*)^{-m} & \text{si } m < 0. \end{cases}$$

Si $\mathcal{M}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo, definimos $\mathcal{M}(m) = \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(m)$. Si, al igual que antes, $U \subset S$ es un abierto y $V = \pi^{-1}[U]$, entonces

$$\mathcal{M}(m)|_V = \mathcal{M}|_V \otimes_{\mathcal{O}_V} \mathcal{O}_V(m) = \mathcal{M}|_V(m).$$

Como se ve en la demostración, el teorema siguiente no es más que una ligera generalización del teorema 5.41:

Teorema 5.50 *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un homomorfismo proyectivo, donde el esquema Y es noetheriano, sea $\mathcal{M}$ un haz coherente en X y $\mathcal{O}_X(1)$ un haz muy amplio en X respecto de Y. Entonces, para todo natural n suficientemente grande, el homomorfismo natural $f^*(f_*(\mathcal{M}(n))) \longrightarrow \mathcal{M}(n)$ es suprayectivo.*

Demostración: Podemos cubrir Y por un número finito de abiertos afines noetherianos. Si $U \subset Y$ es uno de estos abiertos, sea $V = f^{-1}[U]$ y llamemos $f' : V \longrightarrow U$ a la restricción de f. Es claro que f' también es proyectivo, por lo que, en particular, V es noetheriano (f' es de tipo finito). El homomorfismo del enunciado se restringe a $f'^*(f'_*(\mathcal{M}(n)|_V)) \longrightarrow \mathcal{M}(n)|_V$. De acuerdo con las observaciones posteriores a la definición 5.49, este homomorfismo puede verse también como $f'^*(f'_*(\mathcal{M}|_V(n))) \longrightarrow \mathcal{M}|_V(n)$. Basta probar que cada uno de estos homomorfismos es suprayectivo para n suficientemente grande o, equivalentemente, podemos suponer que el esquema $Y = \operatorname{Esp} A$ es afín.

Según las observaciones previas al teorema [B.5], para cada punto $P \in X$, el homomorfismo natural del enunciado se localiza al homomorfismo natural

$$f_*(\mathcal{M}(n))_{f(P)} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,f(P)}} \mathcal{O}_{X,P} \longrightarrow \mathcal{M}(n)_P.$$

Por otra parte

$$f_*(\mathcal{M}(n))_{f(P)} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,f(P)}} \mathcal{O}_{X,P} \cong \mathcal{M}(n)(X)_{f(P)} \otimes_{A_{f(P)}} \mathcal{O}_{X,P} \cong \mathcal{M}(n)(X) \otimes_A \mathcal{O}_{X,P}$$

y, a través de este isomorfismo, el homomorfismo anterior se corresponde con el homomorfismo natural

$$\mathcal{M}(n)(X) \otimes_A \mathcal{O}_{X,P} \longrightarrow \mathcal{M}(n)_P.$$

La imagen de este homomorfismo está generada por la imagen del homomorfismo de A-módulos $\mathcal{M}(n)(X) \longrightarrow \mathcal{M}(n)_P$, luego el homomorfismo será suprayectivo si y sólo si $\mathcal{M}(n)$ admite un generador global en P. En general, el homomorfismo del enunciado será suprayectivo si y sólo si $\mathcal{M}(n)$ admite un generador global, y el teorema 5.41 nos da que esto sucede para todo n suficientemente grande. ■

De forma análoga podemos probar un resultado más elemental:

Teorema 5.51 *Si $f : X \longrightarrow Y$ es un homomorfismo afín (es decir, tal que las antiimágenes de abiertos afines sean afines, por ejemplo un homomorfismo finito) y $\mathcal{M}$ es un haz cuasicoherente en X, entonces el homomorfismo natural $f^*f_*\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ es suprayectivo. Si $f_*\mathcal{M}$ admite un generador global, lo mismo le sucede a $\mathcal{M}$.*

Demostración: Como en la demostración del teorema anterior, para la primera parte podemos suponer que $Y = \operatorname{Esp} A$ es afín, y por hipótesis también $X = \operatorname{Esp} B$. La suprayectividad del homomorfismo del enunciado se reduce a la de los homomorfismos $\mathcal{M}(X) \otimes_A B_P \longrightarrow \mathcal{M}_P = \mathcal{M}(X) \otimes_B B_P$, para cada punto $P \in X$, que es evidente.

Si $f_*\mathcal{M}$ admite un generador global $S \subset (f_*\mathcal{M})(Y) = \mathcal{M}(X)$, para cada punto $P \in X$, el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
(f_*\mathcal{M})_{f(P)} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,f(P)}} \mathcal{O}_{X,P} \arrow[r] & \mathcal{M}_P \\
\mathcal{M}(X) \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

donde la flecha horizontal es un epimorfismo por la parte ya probada, muestra que los elementos de S generan $\mathcal{M}_P$, por lo que S es también un generador global de $\mathcal{M}$. ■

Como consecuencia probamos un último resultado sobre haces amplios que necesitaremos más adelante:

Teorema 5.52 *Si $f : X \longrightarrow Y$ es un homomorfismo finito entre esquemas cuasicompactos y $\mathcal{L}$ es un haz amplio en Y, entonces $f^*\mathcal{L}$ es amplio en X.*

Demostración: Sea $\mathcal{M}$ un haz cuasicoherente y finitamente generado en X. Hemos de probar que $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{L}^n$ admite un generador global para todo n suficientemente grande. Por el teorema anterior y 5.22, basta probar que lo tiene

$$f_*(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{L}^n) \cong f_*\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{L}^n,$$

y ello se debe a que $\mathcal{L}$ es amplio y a que $f_*\mathcal{M}$ es cuasicoherente y finitamente generado por 5.18. ■

5.5 Complementos sobre esquemas proyectivos

El teorema 5.40, a partir del cual hemos probado el teorema de Serre, tiene otras consecuencias importantes sobre los esquemas proyectivos y sus haces cuasicoherentes, que recogemos en esta última sección.

En primer lugar vamos a demostra que si A es un anillo graduado finitamente generado por elementos de grado 1, entonces todo haz cuasicoherente sobre $\operatorname{Proy} A$ es de la forma $\widetilde{M}$, para cierto A-módulo graduado M.

Definición 5.53 Sea A un anillo graduado, sea $X = \operatorname{Proy} A$ y sea $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo. Definimos

$$\overline{\mathcal{M}} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{M}(n)(X).$$

Dotamos a $\overline{\mathcal{M}}$ de estructura de A-módulo graduado de la forma siguiente: Para cada $s \in A_d$ y cada $t \in \mathcal{M}(n)(X)$, sea $\bar{s}$ la imagen de s por el homomorfismo natural $A_d \longrightarrow \mathcal{O}_X(d)(X)$, y definimos st como la imagen de

$$t \otimes \bar{s} \in \mathcal{M}(n)(X) \otimes_{\mathcal{O}_X(X)} \mathcal{O}_X(d)(X) \longrightarrow (\mathcal{M}(n) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(d))(X) \cong \mathcal{M}(n+d)(X).$$

Es claro que este producto se extiende a un producto $A \times \overline{\mathcal{M}} \longrightarrow \overline{\mathcal{M}}$.

Por ejemplo, si $A = A_0[X_0, \ldots, X_r]$ y $\mathcal{M} = \mathcal{O}_X$, el teorema 5.26 nos dice que podemos identificar a $\overline{M}$ con A, y el producto que acabamos de definir coincide con el de A a través de esta identificación. Así pues, $\overline{\mathcal{O}}_X \cong A$ y, trivialmente entonces, $\widetilde{\overline{\mathcal{O}}}_X \cong \mathcal{O}_X$.

Sabemos que si A es otro anillo graduado ya no tiene por qué darse el isomorfismo $\overline{\mathcal{O}}_X \cong A$, pero vamos a probar que, para cualquier anillo graduado A y cualquier módulo $\mathcal{M}$, el isomorfismo $\widetilde{\overline{\mathcal{M}}} \cong \mathcal{M}$ se sigue manteniendo.

Teorema 5.54 *Sea A un anillo graduado finitamente generado (como A_0-álgebra) por elementos de grado 1. Sea $X = \mathrm{Proy} A$ y sea $\mathcal{M}$ un haz cuasicoherente en X. Entonces existe un isomorfismo natural $\widetilde{\overline{\mathcal{M}}} \cong \mathcal{M}$.*

Demostración: Tomemos un $f \in A_1$ y vamos a definir un homomorfismo $\phi : \widetilde{\overline{\mathcal{M}}}(D(f)) \longrightarrow \mathcal{M}(D(f))$. Recordemos que $\widetilde{\overline{\mathcal{M}}}(D(f))) = \overline{\mathcal{M}}_{(f)}$. Un elemento de este anillo es de la forma m/f^d, donde $m \in \mathcal{M}(d)(X)$. Entonces

$$m|_{D(f)} \in \mathcal{M}(d)(D(f)) \otimes_{\mathcal{O}_X(D(f))} \mathcal{O}_X(d)(D(f)),$$

y $\mathcal{O}_X(d)(D(f)) = f^d \mathcal{O}_X(D(f))$, es decir, $\mathcal{O}_X(d)(D(f))$ es un $\mathcal{O}_X(D(f))$-módulo libre de base f^d, luego $m|_{D(f)}$ se expresa de forma única como $m|_{D(f)} = s \otimes f^d$, con $s \in \mathcal{M}(D(f))$. Definimos $\phi(m/f^d) = s$.

Observemos que ϕ está bien definido, pues si $m/f^d = m'/f^{d'}$, entonces existe un $r \geq 0$ tal que $f^{r+d'}m = f^{r+d}m'$ en $\overline{\mathcal{M}}$. Por la definición del producto en $\overline{\mathcal{M}}$, esto significa que $m \otimes \bar{f}^{r+d'}$ y $m' \otimes \bar{f}^{r+d}$ se corresponden con el mismo elemento de $\mathcal{M}(d + d' + r)(X)$, luego sus restricciones $s \otimes f^d \otimes f^{r+d'}$ y $s' \otimes f^{d'} \otimes f^{r+d}$ se corresponden con el mismo elemento de $\mathcal{M}(d + d' + r)(D(f))$, o sea, que

$$s \otimes f^{d+d'+r} = s' \otimes f^{d+d'+r},$$

lo que implica que $s = s'$ porque $f^{d+d'+r}$ es una base de $\mathcal{O}_X(d + d' + r)(D(f))$.

Ahora es fácil ver que se trata de un homomorfismo de módulos. A su vez, ϕ induce un homomorfismo de haces $\tilde{\phi} : \widetilde{\overline{\mathcal{M}}}|_{D(f)} \longrightarrow \mathcal{M}|_{D(f)}$.

Tomemos ahora otro elemento $g \in A_1$ y vamos a calcular el homorfismo $\tilde{\phi}_{D(fg)} : \widetilde{\overline{\mathcal{M}}}(D(fg)) \longrightarrow \mathcal{M}(D(fg))$. Un elemento de

$$\widetilde{\overline{\mathcal{M}}}(D(fg)) = \overline{\mathcal{M}}_{(fg)} \cong (\overline{\mathcal{M}}_{(f)})_{g/f}$$

es de la forma

$$\frac{m}{(fg)^d} = \frac{m/f^{2d}}{(g/f)^d}, \qquad \text{con } m \in \mathcal{M}(2d)(X).$$

Pongamos que $m|_{D(f)} = s \otimes f^{2d}$, con $s \in \mathcal{M}(D(f))$. La imagen por $\tilde{\phi}_{D(fg)}$ es la imagen de m/f^{2d} restringida a $D(fg)$ y dividida entre $(g/f)^d$, es decir, multiplicada por $1/(g/f)^d = f^{2d}/(fg)^d$. Concretamente:

$$\tilde{\phi}|_{D(fg)}(m/(fg)^d) = \frac{f^{2d}}{(fg)^d}\, s|_{D(fg)}.$$

Si invertimos los papeles de f y g, entonces hemos de partir de la descomposición $m|_{D(g)} = t \otimes g^{2d}$, que está relacionada con la anterior de la forma siguiente:

$$m|_{D(fg)} = t|_{D(fg)} \otimes g^{2d} = \frac{g^{2d}}{f^{2d}}\, t|_{D(fg)} \otimes f^{2d} = s|_{D(fg)} \otimes f^{2d},$$

de donde resulta que $s|_{D(fg)} = (g/f)^{2d}\, t|_{D(fg)}$, luego

$$\frac{f^{2d}}{(fg)^d}\, s|_{D(fg)} = \frac{f^{2d}}{(fg)^d}\, \frac{g^{2d}}{f^{2d}}\, t|_{D(fg)} = \frac{g^{2d}}{(fg)^d}\, t|_{D(fg)}.$$

Esto significa que los homomorfismos

$$\tilde{\phi}_f : \widetilde{\overline{\mathcal{M}}}|_{D(f)} \longrightarrow \mathcal{M}|_{D(f)}, \qquad \tilde{\phi}_g : \widetilde{\overline{\mathcal{M}}}|_{D(g)} \longrightarrow \mathcal{M}|_{D(g)}$$

inducen el mismo homomorfismo en $D(f) \cap D(g)$, luego se restringen al mismo homomorfismo de haces sobre este abierto. Por consiguiente, estos homomorfismos se extienden a un homomorfismo $\tilde{\phi} : \widetilde{\overline{\mathcal{M}}} \longrightarrow \mathcal{M}$. Hemos de probar que es un isomorfismo. Para ello basta ver que los homomorfismos ϕ son isomorfismos de módulos. Notemos que hasta aquí no hemos usado que $\mathcal{M}$ sea cuasicoherente.

Vamos a usar el teorema 5.40. Observemos que X es ciertamente un esquema separado y, por hipótesis, es unión de un número finito de esquemas afines $D(f)$, luego es cuasicompacto. Vamos a aplicar el teorema con $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(1)$.

Notemos que $f \in A(1)_0$, luego podemos considerar $\bar{f} \in \mathcal{O}_X(1)(X)$ tal que $\bar{f}|_{D(f)} = f \in A(1)_{(f)}$. Notemos también que $X_{\bar{f}} = X_f = D(f)$. En efecto, dado un punto $P \in X$, tomamos $g \in A_1$ tal que $P \in D(g)$. Entonces tenemos que $\mathcal{O}_X(1)|_{D(g)} = g\mathcal{O}_X|_{D(g)}$, luego $P \in X_f$ si y sólo si $\mathcal{O}_{X,P} = f_P\mathcal{O}_{X,P}$, si y sólo si $\mathcal{O}_X(1)_P = f_P g_P \mathcal{O}_{X,P} = \bar{f}_P\mathcal{O}_{X,P}$ (porque $P \in D(g)$), si y sólo si $P \in X_{\bar{f}}$.

Supongamos ahora que $\phi(m/f^d) = s = 0$, donde $m \in \mathcal{M}(d)$, $m|_{D(f)} = s \otimes f^d$. Entonces $m|_{D(f)} = 0$, luego por el teorema anterior existe un $n \geq 1$ tal que $m \otimes \bar{f}^n = 0$, lo cual equivale a que $f^n m = 0$ en $\overline{\mathcal{M}}$, y esto a su vez implica que $m/f^d = 0$. Por consiguiente ϕ es inyectiva.

Si $s \in \mathcal{M}(D(g))$, el teorema 5.40 nos da un $m \in \mathcal{M}(d)$ de manera que $m|_{D(f)} = s \otimes f^d$, lo que significa que $\phi(m/f^d) = s$. Por consiguiente ϕ es suprayectiva. ■

Como aplicación de este teorema podemos determinar todos los subesquemas cerrados de un esquema Proy$A$ (comparar con 2.21):

Teorema 5.55 *Si A_0 es un anillo y $A = A_0[X_0, \ldots, X_n]$, todo subesquema cerrado de $\mathrm{P}^n_{A_0}$ es de la forma* $\mathrm{Proy}(A/I)$*, donde I es un ideal homogéneo de A.*

Demostración: Sea Z un subesquema cerrado de $X = \mathrm{P}^n_{A_0}$ y sea $\mathcal{I}$ el haz cuasicoherente de ideales de $\mathcal{O}_X$ asociado a Z por el teorema 5.10. Llamemos

$I = \overline{\mathcal{I}}$. El homomorfismo $\mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{O}_X$ induce un homomorfismo $\mathcal{I}(n) \longrightarrow \mathcal{O}_X(n)$. Se trata de un monomorfismo, pues, para cada $P \in X$, la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_P \longrightarrow \mathcal{O}_{X,P} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,P}/\mathcal{I}_P \longrightarrow 0$$

da lugar a una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}(n)_P \longrightarrow \mathcal{O}_X(n)_P \longrightarrow (\mathcal{O}_{X,P})/\mathcal{I}_P) \otimes_{\mathcal{O}_{X,P}} \mathcal{O}_X(n)_P \longrightarrow 0,$$

pues $\mathcal{O}_X(n)_P \cong \mathcal{O}_{X,P}$ es un $\mathcal{O}_{X,P}$-módulo libre. Por consiguiente (teniendo en cuenta la observación tras la definición 5.53) tenemos un monomorfismo de módulos

$$I = \bigoplus_n \mathcal{I}(n)(X) \longrightarrow \bigoplus_n \mathcal{O}_X(n)(X) = \overline{\mathcal{O}_X} \cong A.$$

Así pues, podemos ver al A-módulo I como un ideal homogéneo de A. Por el teorema anterior tenemos que $\mathcal{I} \cong \widetilde{I}$. Ahora basta observar que el haz de ideales asociado a la inmersión natural $i : \mathrm{Proy}(A/I) \longrightarrow \mathrm{P}^n_{A_0}$ es precisamente $\widetilde{I}$. En efecto, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Proy}(A/I) \arrow[r, "i"] & \mathrm{Proy}A \\
\mathrm{Esp}(A_{(X_i)}/I_{(X_i)}) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{Esp}\, A_{(X_i)} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

donde las flechas verticales son inmersiones abiertas con imagen $D([X_i])$ y $D(X_i)$. Además, en la prueba del teorema 5.10 hemos visto que el haz de ideales asociado a la flecha inferior (o sea, la restricción a $D(X_i)$ del asociado a i) es (isomorfo a) $\widetilde{I_{(X_i)}} = \widetilde{I}|_{D(X_i)}$. Los isomorfismos son consistentes entre sí, por lo que el haz de ideales de i es precisamente $\widetilde{I}$. ■

En particular podemos caracterizar los esquemas proyectivos sobre un esquema afín:

Teorema 5.56 *Si A es un anillo, los esquemas proyectivos sobre A son exactamente los de la forma* $\mathrm{Proy}B$*, donde B es un anillo graduado finitamente generado por elementos de B_1 como álgebra sobre $B_0 = A$.*

Demostración: Es obvio que los esquemas de la forma indicada son proyectivos sobre A. Recíprocamente, un esquema es proyectivo sobre A si es isomorfo a un subesquema cerrado de P^n_A. Por el teorema anterior es de la forma $\mathrm{Proy}B$, con $B = A[X_0, \ldots, X_n]/I$, donde I es un ideal homogéneo en $A[X_0, \ldots, X_n]$. Podemos suponer $I_0 = 0$, con lo que $B_0 = A$ (en efecto, los anillos $B_{(\mathfrak{p})}$ no se modifican si cambiamos I por $\bigoplus\limits_{d>0} I_d$, luego $\mathrm{Proy}\, B$ es el mismo.) ■

Capítulo VI

Cohomología

En este capítulo estudiaremos los grupos de cohomología introducidos en la Sección [2.2] para el caso de los haces coherentes sobre un esquema. Empezaremos introduciendo los grupos de cohomología de Čech, que, según veremos, en los casos que nos van a interesar son los mismos que ya conocemos, pero desde este punto de vista resultan mucho más fáciles de calcular.

6.1 La cohomología de Čech

Definición 6.1 Sea X un espacio anillado, $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo y $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento abierto de X. Para cada multiíndice $s = (i_0, \ldots, i_n) \in I^{n+1}$ llamaremos $U_s = U_{i_1} \cap \cdots \cap U_{i_n}$. Llamaremos $C^n(\mathcal{U}, \mathcal{M})$ al conjunto de todos los $\alpha \in \prod\limits_{s\in I^{n+1}} \mathcal{M}(U_s)$ que cumplan las dos condiciones siguientes:

a) Si $U_s = \varnothing$ o bien s tiene dos índices iguales, entonces $\alpha(s) = 0$.

b) En caso contrario, para toda permutación σ de $\{0, \ldots, n\}$, si llamamos $\sigma(s) = (i_{\sigma 0}, \ldots, i_{\sigma n})$, se cumple que $\alpha(\sigma(s)) = \operatorname{sig}\sigma\, \alpha(s)$, donde $\operatorname{sig}\sigma$ es la signatura de σ en el sentido usual.

A los elementos de $C^n(\mathcal{U}, \mathcal{M})$ los llamaremos *cocadenas de Čech* de dimensión n. Es claro que $C^n(\mathcal{U}, \mathcal{M})$ es un $\mathcal{O}_X(X)$-módulo.

Si fijamos un orden total en el conjunto de índices I, es inmediato comprobar que cada cocadena está completamente determinada por su restricción a los multiíndices formados por índices estrictamente crecientes, y que dicha restricción determina un isomorfismo

$$C^n(\mathcal{U}, \mathcal{M}) \cong \prod_{i_0<\cdots<i_n} \mathcal{M}(U_{i_0,\ldots,i_n}).$$

En la práctica podemos hacer los cálculos considerando las cocadenas restringidas de este modo.

Definimos $d^n : C^n(\mathcal{U}, \mathcal{M}) \longrightarrow C^{n+1}(\mathcal{U}, \mathcal{M})$ mediante

$$(d^n\alpha)(s) = \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \alpha(s_j)|_{U_s},$$

donde s_j es el multiíndice que resulta de suprimir el índice j-ésimo de s. Una comprobación rutinaria muestra que d^n está bien definido (es decir, transforma cocadenas en cocadenas), que es un homomorfismo de $\mathcal{O}_X(X)$-módulos y que $d^n d^{n+1} = 0$. En otras palabras, tenemos definido un complejo inverso $C(\mathcal{U}, \mathcal{M})$. Llamaremos $Z^n(\mathcal{U}, \mathcal{M})$ al núcleo de d^n, y a sus elementos los llamaremos *cociclos de Čech* de dimensión n. Así mismo, llamaremos $F^n(\mathcal{U}, \mathcal{M})$ a la imagen de d^{n-1}, y a sus elementos los llamaremos *cofronteras de Čech* de dimensión n. Los grupos de cohomología los representaremos por

$$H^n(\mathcal{U}, \mathcal{M}) = Z^n(\mathcal{U}, \mathcal{M})/F^n(\mathcal{U}, \mathcal{M}).$$

Observemos que los elementos de $C^0(\mathcal{U}, \mathcal{M})$ pueden verse en la forma $(f_i)_{i\in I}$ con $f_i \in \mathcal{M}(U_i)$, y los cociclos son los que cumplen $f_i|_{U_i\cap U_j} = f_j|_{U_i\cap U_j}$, luego cada cociclo determina un único $f \in \mathcal{M}(X)$. Como las cocadenas de dimensión 0 son nulas, es evidente que $H^0(\mathcal{U}, \mathcal{M}) \cong \mathcal{M}(X)$.

Un homomorfismo de módulos $f : M \longrightarrow \mathcal{N}$ induce un homomorfismo de complejos $f^n : C^n(\mathcal{U}, \mathcal{M}) \longrightarrow C^n(\mathcal{U}, \mathcal{N})$ mediante $(f^n\alpha)(s) = f_{U_s}(\alpha(s))$, el cual induce a su vez homomorfismos $\bar{f}^n : H^n(\mathcal{U}, \mathcal{M}) \longrightarrow H^n(\mathcal{U}, \mathcal{N})$. Es fácil ver que $\bar{1} = 1$ y $\overline{f \circ g} = \bar{f} \circ \bar{g}$, con lo que tenemos definidos funtores covariantes

$$H^n(\mathcal{U}, -) : \mathrm{Mod}(X) \longrightarrow \mathrm{Mod}(\mathcal{O}_X(X)).$$

Las cohomologías de Čech dependen del cubrimiento abierto con el que se calculan. Es posible definir una cohomología independiente de los cubrimientos estudiando la relación entre la cohomología de un cubrimiento y la de un refinamiento del mismo y tomando luego un límite inductivo para todos los cubrimientos, pero no vamos a entrar en ello aquí, pues nos bastará demostrar que las cohomologías de Čech nos permiten calcular los grupos de cohomología usuales en el caso de esquemas noetherianos. El primer paso para comparar la cohomología de Čech con la usual es introducir la construcción siguiente:

Definición 6.2 Sea X un espacio anillado, $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo y $\mathcal{U}$ un cubrimiento abierto de X. Definimos el prehaz $\mathcal{C}^n(\mathcal{U}, \mathcal{M})$ mediante

$$\mathcal{C}^n(\mathcal{U}, \mathcal{M})(V) = C^n(V \cap \mathcal{U}, \mathcal{M}|_V),$$

donde $V \cap \mathcal{U}$ es el cubrimiento de V formado por las intersecciones con V de los abiertos de $\mathcal{U}$ y las restricciones vienen dadas por $\rho^V_W(\alpha)(s) = \alpha(s)|_{U_s\cap W}$.

Es fácil ver que $\mathcal{C}^n(\mathcal{U}, \mathcal{M})$ es en realidad un haz y, por consiguiente, un $\mathcal{O}_X$-módulo. El operador cofrontera

$$d^n_V : C^n(V \cap \mathcal{U}, \mathcal{M}|_V) \longrightarrow C^{n+1}(V \cap \mathcal{U}, \mathcal{M}|_V)$$

es compatible con las restricciones, luego define un homomorfismo de módulos $d^n : \mathcal{C}^n(\mathcal{U}, \mathcal{M}) \longrightarrow \mathcal{C}^{n+1}(\mathcal{U}, \mathcal{M})$ tal que $d^n d^{n+1} = 0$.

Notemos que $C^n(\mathcal{U}, \mathcal{M}) = \mathcal{C}^n(\mathcal{U}, \mathcal{M})(X)$. Por otra parte, definimos un homomorfismo $\eta : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{M})$ mediante $\eta(f) = (f|_{V\cap U_i})_{i\in I}$ (donde $f \in \mathcal{M}(V)$).

Teorema 6.3 *En las condiciones de la definición anterior, la sucesión*

$$0 \longrightarrow \mathcal{M} \xrightarrow{\eta} \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{M}) \xrightarrow{d^0} \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{M}) \xrightarrow{d^1} \mathcal{C}^2(\mathcal{U}, \mathcal{M}) \xrightarrow{d^2} \cdots$$

es exacta.

Demostración: Tomemos $n > 0$ y $P \in X$. Un elemento de $C^n(\mathcal{U}, M)_P$ está representado por un $\alpha \in \mathcal{C}^n(\mathcal{U}, M)(U)$, donde U es un entorno de P y podemos suponer que $U \subset U_{i_0}$, para cierto índice $i^* \in I$. Entonces, si $s = (i_0, \ldots, i_{n-1})$ y $\tilde{s} = (i^*, i_0, \ldots, i_{n-1})$, tenemos que $U \cap U_{\tilde{s}} = U \cap U_s$. Definimos $\beta \in \mathcal{C}^{n-1}(\mathcal{U}, \mathcal{M})(U)$ mediante $\beta(s) = \alpha(\tilde{s})$. Entonces

$$(d\beta)(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \beta(t_k)|_{U\cap U_t} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \alpha(\tilde{t}_k)|_{U\cap U_t}.$$

Si $d^n([\alpha]) = 0$, reemplazando U por un abierto menor, podemos suponer que $d^n\alpha = 0$. Entonces

$$0 = (d^n\alpha)(\tilde{t}) = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k \alpha(\widetilde{t_k})|_{U\cap U_{\tilde{t}}} = \alpha(t) + \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \alpha(\widetilde{t_k})|_{U\cap U_{\tilde{t}}}$$

$$= \alpha(t) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \alpha(\tilde{t}_k)|_{U\cap U_t} = \alpha(t) - (d\beta)(t),$$

donde hemos usado que $\widetilde{t_k} = \tilde{t}_{k+1}$, para $k \geq 1$ (es decir, quitar la componente $k+1$-ésima después de haber añadido i^* es equivalente a quitar la componente k-ésima y después añadir i^*).

Así pues, α es una cofrontera y $[\alpha]$ también. Esto prueba la exactitud en $\mathcal{C}^n(\mathcal{U}, \mathcal{M})$ para $n > 0$. Para $n = 0$ lo que tenemos es que, para todo $i \in I$,

$$0 = (d^0\alpha)(i^*, i) = \alpha(i^*)|_{U\cap U_i} - \alpha(i),$$

luego $[\alpha] = \eta_P([\alpha(i^*)])$. Además, si $f \in \mathcal{M}(U)$ tenemos que

$$d^0(\eta(f))(i, j) = (f|_{U\cap U_i})|_{U_i\cap U_j} - (f|_{U\cap U_j})|_{U_i\cap U_j} = 0,$$

luego la sucesión es exacta en $\mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathcal{M})$. La inyectividad de η es inmediata. ■

A la resolución de $\mathcal{M}$ dada por el teorema anterior la llamaremos *resolución de Čech* de $\mathcal{M}$. Es claro que los grupos $H^n(\mathcal{U}, \mathcal{M})$ se obtienen a partir de este complejo por el mismo procedimiento que los grupos $H^n(X, \mathcal{M})$ se obtienen a partir de una resolución inyectiva de $\mathcal{M}$.

Teorema 6.4 *Si X es un espacio anillado, $\mathcal{U}$ es un cubrimiento abierto de X y $\mathcal{M}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo diseminado, entonces los $\mathcal{O}_X$-módulos $\mathcal{C}^n(\mathcal{U}, \mathcal{M})$ son diseminados.*

DEMOSTRACIÓN: Tomemos un abierto $V \subset X$. Hemos de probar que la restricción $\rho_V^X : C^n(\mathcal{U}, \mathcal{M}) \longrightarrow C^n(V \cap \mathcal{U}, \mathcal{M}|_V)$ es suprayectiva. Tomemos $\alpha \in C^n(V \cap \mathcal{U}, \mathcal{M}|_V)$. Fijemos un orden total en el conjunto de índices I del cubrimiento $\mathcal{U}$. Si $s = (i_0, \ldots, i_n)$ con $i_0 < \cdots < i_n$, tomamos $\tilde{\alpha}(s) \in \mathcal{M}(U_s)$ tal que $\tilde{\alpha}(s)|_{V \cap U_s} = \alpha(s)$. (Esto es posible porque $\mathcal{M}$ es diseminado.)

Si σ es una permutación de $i_0, \ldots, i_n$, definimos $\tilde{\alpha}(\sigma(s)) = \operatorname{sig} \sigma \tilde{\alpha}(s)$, con lo que tenemos definido $\tilde{\alpha}$ para todo multiíndice sin repeticiones. Para multiíndices con repeticiones definimos $\tilde{\alpha}(s) = 0$. Es claro entonces que $\tilde{\alpha} \in C^n(\mathcal{U}, \mathcal{M})$ y $\rho_V^X(\tilde{\alpha}) = \alpha$. ∎

De aquí deducimos el análogo al teorema [2.8] para la cohomología de Čech:

Teorema 6.5 *Si X es un espacio anillado, $\mathcal{U}$ es un cubrimiento abierto y $\mathcal{M}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo diseminado, entonces $H^i(\mathcal{U}, \mathcal{M}) = 0$ para todo $i \geq 1$.*

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema anterior la resolución de Čech de $\mathcal{M}$ es diseminada, luego el teorema [1.46] nos dice que podemos usarla para calcular los grupos de cohomología $H^i(X, \mathcal{M})$, pero los grupos que obtenemos entonces son precisamente los grupos $H^i(\mathcal{U}, \mathcal{M})$, y el teorema [2.8] nos dice que son nulos. ∎

Teorema 6.6 *Sea X un espacio anillado, sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento abierto de X y sea $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo tal que $H^1(U_s, \mathcal{M}|_{U_s}) = 0$ para todo multiíndice s. Para cada sucesión exacta de $\mathcal{O}_X$-módulos*

$$0 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{P} \longrightarrow 0$$

existen homomorfismos de conexión $\delta^i : H^i(\mathcal{U}, \mathcal{P}) \longrightarrow H^{i+1}(\mathcal{U}, \mathcal{M})$ que forman una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow H^0(\mathcal{U}, \mathcal{M}) \xrightarrow{\bar{\alpha}^0} H^0(\mathcal{U}, \mathcal{N}) \xrightarrow{\bar{\beta}^0} H^0(\mathcal{U}, \mathcal{P})$$

$$\xrightarrow{\delta^0} H^1(\mathcal{U}, \mathcal{M}) \xrightarrow{\bar{\alpha}^1} H^1(\mathcal{U}, \mathcal{N}) \xrightarrow{\bar{\beta}^1} H^1(\mathcal{U}, \mathcal{P}) \xrightarrow{\delta^1} \cdots$$

DEMOSTRACIÓN: Para cada $s \in I^{n+1}$, tenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}|_{U_s} \longrightarrow \mathcal{N}|_{U_s} \longrightarrow \mathcal{P}|_{U_s} \longrightarrow 0,$$

que, por la hipótesis, determina una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}(U_s) \longrightarrow \mathcal{N}(U_s) \longrightarrow \mathcal{P}(U_s) \longrightarrow 0.$$

Es fácil ver ahora que la sucesión

$$0 \longrightarrow C^n(\mathcal{U}, \mathcal{M}) \longrightarrow C^n(\mathcal{U}, \mathcal{N}) \longrightarrow C^n(\mathcal{U}, \mathcal{P}) \longrightarrow 0$$

(que resulta de restringir el producto de las sucesiones anteriores) es también exacta. En definitiva, tenemos una sucesión exacta de complejos de Čech, de la cual se deduce la sucesión exacta del enunciado por el teorema [1.36] aplicado a un complejo de $\mathcal{O}_X(X)$-módulos. ∎

Nota Es claro que también se verifica la segunda condición que define a los homomorfismos de conexión, es decir, si partimos de un diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathcal{N} & \longrightarrow & \mathcal{P} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{M}' & \longrightarrow & \mathcal{N}' & \longrightarrow & \mathcal{P}' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

con filas exactas de modo que tanto $\mathcal{M}$ como $\mathcal{M}'$ cumplan la hipótesis del teorema anterior, de él obtenemos un homomorfismo entre las sucesiones exactas de complejos de Čech, por lo que las sucesiones de cohomología de ambos complejos forman un diagrama conmutativo. ■

Con esto podemos probar finalmente el teorema que relaciona la cohomología de Čech con la cohomología usual:

Teorema 6.7 *Sea X un espacio anillado, sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento abierto y sea $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo tal que $H^i(U_s, \mathcal{M}|_{U_s}) = 0$ para todo $i \geq 1$ y todo $s \in I^{n+1}$. Entonces $H^n(\mathcal{U}, \mathcal{M}) \cong H^n(X, \mathcal{M})$ para todo $n \geq 0$.*

Demostración: Llamemos $\mathfrak{C}$ a la categoría de los $\mathcal{O}_X$-módulos $\mathcal{M}$ tales que $H^i(U_s, \mathcal{M}|_{U_s}) = 0$ para todo multiíndice s y todo $i \geq 1$. Obviamente contiene a todos los $\mathcal{O}_X$-módulos diseminados y, en particular, a los inyectivos. Más aún, si

$$0 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{P} \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de $\mathcal{O}_X$-módulos y los dos primeros están en $\mathfrak{C}$, el tercero también está en $\mathfrak{C}$ (basta considerar la sucesión exacta de cohomología asociada a la restricción de la sucesión a cada U_s). Esto hace que la demostración del teorema [1.50] siga siendo válida para un sistema de funtores definidos únicamente sobre $\mathfrak{C}$. Los funtores de cohomología $H^n(X, -) : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathrm{Mod}(\mathcal{O}_X(X))$ siguen teniendo homomorfismos de conexión al restringirlos a $\mathfrak{C}$, pero ahora el teorema 6.6 nos da que los funtores $H^n(\mathcal{U}, -) : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathrm{Mod}(\mathcal{O}_X(X))$ también lo tienen (y además se anulan sobre los $\mathcal{O}_X$-módulos diseminados, y $H^0(\mathcal{U}, -)$ es isomorfo a $\Gamma(X, -)$). Concluimos que existen isomorfismos $\eta_n : H^n(X, -) \longrightarrow H^n(\mathcal{U}, -)$ definidos sobre $\mathfrak{C}$. ■

El teorema siguiente es un ejemplo de cómo la cohomología de Čech permite hacer cálculos explícitos:

Teorema 6.8 *Sea $X = \operatorname{Esp} A$ un esquema afín y sea $\mathcal{F}$ un haz cuasicoherente en X. Sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ un cubrimiento finito de X formado por abiertos principales $U_i = D(g_i)$. Entonces $H^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$ para todo $n \geq 1$.*

Demostración: Sea $f \in Z^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ un cociclo de dimensión n. Hemos de probar que es una cofrontera. Para cada $s = (i_0, \ldots, i_n) \in I^{n+1}$ tenemos que $f_s \in \mathcal{F}(U_s) = \mathcal{F}(X)_{g_{i_0}\cdots g_{i_n}}$, luego podemos expresarlo en la forma

$$f_s = \frac{x_s}{(g_{i_0} \cdots g_{i_n})^r}, \qquad x_s \in \mathcal{F}(X).$$

Notemos que podemos tomar el mismo r para todos los multiíndices s. Que f sea un cociclo significa que para todo multiíndice $[i,s] = (i, i_0, \ldots, i_n)$ se cumple la relación

$$df_{[i,s]} = \frac{g_i^r x_s}{g_i^r (g_{i_0}\cdots g_{i_n})^r} + \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \frac{g_{i_k}^r x_{[i,s_k]}}{g_i^r (g_{i_0}\cdots g_{i_n})^r} = 0.$$

Considerando a $\mathcal{F}(U_{[i,s]})$ como $\mathcal{F}(U_s)_{g_i}$, la ecuación anterior equivale a que exista un $l \geq 1$ tal que en $\mathcal{F}(U_s)$ se cumple la identidad siguiente (para todo multiíndice $[i,s]$):

$$\frac{g_i^{r+l} x_s}{(g_{i_0}\cdots g_{i_n})^r} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{g_i^l g_{i_k}^r x_{[i,s_k]}}{(g_{i_0}\cdots g_{i_n})^r}.$$

Como los abiertos $D(g_i^{r+l}) = D(g_i)$ cubren X, tenemos que existen $h_i \in A$ tales que

$$1 = \sum_{i\in I} h_i g_i^{r+l}.$$

Para cada $t = (i_0, \ldots, i_{n-1}) \in I^n$ definimos

$$f'_t = \sum_{i\in I} h_i g_i^l \frac{x_{[i,t]}}{(g_{i_0}\cdots g_{i_{n-1}})^r} \in \mathcal{F}(U_t).$$

Es fácil ver que $f \in C^{n-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ y además, si $s = (i_0, \ldots, i_n)$,

$$f'_{s_k}|_{U_s} = \sum_{i\in I} h_i g_i^l \frac{g_{i_k}^r x_{[i,s_k]}}{(g_{i_0}\cdots g_{i_n})^r}.$$

Por consiguiente,

$$(df')_s = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k f'_{s_k}|_{U_s} = \sum_{i\in I} h_i \frac{g_i^{r+l} x_s}{(g_{i_0}\cdots g_{i_n})^r} = f_s.$$

■

Veamos una aplicación:

Teorema 6.9 *Sea X un esquema afín y sea $0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$ una sucesión exacta de $\mathcal{O}_X$-módulos con $\mathcal{F}$ cuasicoherente. Entonces la sucesión*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{G}(X) \longrightarrow \mathcal{H}(X) \longrightarrow 0$$

es exacta.

Demostración: El teorema sería trivial si supiéramos que $H^1(X, \mathcal{F}) = 0$. Esto es cierto, pero no lo hemos demostrado (en 6.13 lo veremos para esquemas noetherianos). En su lugar, usaremos el teorema anterior. Basta probar la exactitud en $\mathcal{H}(X)$.

Tomemos $s \in \mathcal{H}(X)$. Para cada $P \in X$, tenemos que el homomorfismo $\mathcal{G}_P \longrightarrow \mathcal{H}_P$ es suprayectivo, lo cual significa que existe un entorno U_P de P (que podemos tomar principal) tal que $s|_{U_P}$ tiene una antiimagen en $\mathcal{G}(U_P)$. Como X es cuasicompacto, podemos tomar un cubrimiento finito $\{U_i\}_{i\in I}$ formado por abiertos principales, tal que $s|_{U_i}$ tiene una antiimagen $t_i \in \mathcal{G}(U_i)$.

Para cada par (i,j), la imagen de $t_i|_{U_{ij}} - t_j|_{U_{ij}}$ en $\mathcal{H}(U_{ij})$ es nula, luego existe $f_{ij} \in \mathcal{F}(U_{ij})$ que, identificado con su imagen en $\mathcal{G}(U_{ij})$, cumple que $f_{ij} = t_i|_{U_{ij}} - t_j|_{U_{ij}}$. Aquí hemos usado que la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}|_{U_{ij}} \longrightarrow \mathcal{G}|_{U_{ij}} \longrightarrow \mathcal{H}|_{U_{ij}} \longrightarrow 0$$

también es exacta, luego también lo es

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U_{ij}) \longrightarrow \mathcal{G}(U_{ij}) \longrightarrow \mathcal{H}(U_{ij}).$$

Observemos que así hemos definido una cocadena $f \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. Su cofrontera es

$$(df)_{ijk} = f_{ij}|_{U_{ijk}} - f_{ik}|_{U_{ijk}} + f_{jk}|_{U_{ijk}} = (t_i - t_j - (t_i - t_k) + t_j - t_k)|_{U_{ijk}} = 0,$$

luego el teorema anterior nos da que $f = dg$, para cierta $g \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, de modo que $f_{ij} = g_i|_{U_{ij}} - g_j|_{U_{ij}}$. Esto implica que $t_i - g_i$ coinciden en cada U_{ij}, luego definen un $t \in \mathcal{G}(X)$ tal que $t|_{U_i} = t_i - g_i$, luego la imagen de $t|_{U_i}$ en $\mathcal{H}(U_i)$ es s_i, luego la imagen de t es s. ■

Esto nos permite a su vez demostrar la parte no trivial del teorema siguiente:

Teorema 6.10 *Sea X un esquema y $0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$ una sucesión exacta de $\mathcal{O}_X$-módulos. Si dos de ellos son cuasicoherentes, también lo es el tercero. Si X es localmente noetheriano lo mismo vale para haces coherentes.*

Demostración: El caso no trivial se da cuando $\mathcal{F}$ y $\mathcal{H}$ son cuasicoherentes. Hemos de probar que, para todo abierto afín $U \subset X$, se cumple que $\mathcal{G}|_U \cong \widetilde{\mathcal{G}(U)}$. La sucesión sigue siendo exacta si se restringe a U, luego no perdemos generalidad si suponemos que X es afín y, entonces, lo que hemos de probar es que $\mathcal{G} \cong \widetilde{\mathcal{G}(X)}$. Tenemos un diagrama conmutativo con filas exactas (por el teorema anterior)

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \widetilde{\mathcal{F}(X)} \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{\mathcal{G}(X)} \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{\mathcal{H}(X)} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] & \mathcal{G} \arrow[r] & \mathcal{H} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Por hipótesis las flechas verticales primera y tercera son isomorfismos, de donde se sigue fácilmente que la central también lo es. El mismo argumento vale en el caso en que $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son cuasicoherentes. Si lo son $\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}$, entonces el problema se reduce igualmente al caso en que X es afín, y entonces $\mathcal{F}$ es el núcleo de un homomorfismo entre haces cuasicoherentes en un esquema afín. Dicho homomorfismo está inducido por un homomorfismo $\mathcal{G}(X) \longrightarrow \mathcal{H}(X)$, y es claro que ha de ser el haz cuasicoherente asociado al núcleo de este homomorfismo.

Si X es localmente noetheriano, para cada abierto afín noetheriano U de X tenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U) \longrightarrow \mathcal{H}(U) \longrightarrow 0,$$

y basta probar que si dos de los módulos son finitamente generados, el tercero también lo es, lo cual es trivial porque el anillo $\mathcal{O}_X(U)$ es noetheriano. ■

6.2 Esquemas afines noetherianos

En esta sección demostraremos que los esquemas afines noetherianos se caracterizan (entre los esquemas noetherianos) por que su cohomología respecto de haces cuasicoherentes es trivial. En realidad la hipótesis de Noether se puede eliminar, pero la prueba se complica.

Teorema 6.11 *Sea A un anillo noetheriano, $\mathfrak{a}$ un ideal de A e I un A-módulo inyectivo. Entonces $J = \{w \in I \mid \mathfrak{a}^n w = 0$ para un $n > 0\}$ es también un A-módulo inyectivo.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathfrak{b}$ un ideal de A. Por el teorema [1.23] basta probar que todo homomorfismo $\phi : \mathfrak{b} \longrightarrow J$ se extiende hasta A. Para cada $b \in \mathfrak{b}$ existe un $n > 0$ tal que $\mathfrak{a}^n\phi(b) = 0$. Como $\mathfrak{b}$ es un ideal finitamente generado, podemos tomar un m suficientemente grande como para que $\phi[\mathfrak{a}^m\mathfrak{b}] = 0$. Por el Lema de Artin-Rees existe un $k > 0$ tal que si $n \geq k$ entonces

$$\mathfrak{a}^n A \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{a}^{n-k}(\mathfrak{a}^k A \cap \mathfrak{b}) \subset \mathfrak{a}^{n-k}\mathfrak{b}.$$

Así, si $n \geq m+k$ se cumple que $\phi[\mathfrak{a}^n \cap \mathfrak{b}] = 0$. Tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] & A/\mathfrak{a}^n \arrow[rrd, dashed, "\bar{\psi}"] & & \\
\mathfrak{b} \arrow[u] \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\phi"'] & \mathfrak{b}/(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}^n) \arrow[u] \arrow[r, "\bar{\phi}"] & J \arrow[r] & I
\end{tikzcd}$$

La inyectividad de I nos da un homomorfismo $\bar{\psi}$ que extiende a $\bar{\phi}$ y que a su vez nos da un $\psi : A \longrightarrow I$. Ahora bien, como $\psi[\mathfrak{a}^n] = 0$ en realidad $\psi : A \longrightarrow J$. Es claro que extiende a ϕ. ■

Teorema 6.12 *Sea A un anillo noetheriano, $X = \operatorname{Esp} A$ e I un A-módulo inyectivo. Entonces $\widetilde{I}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo diseminado.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\mathcal{I} = \widetilde{I}$ y sea U un abierto en X. Hemos de probar que la restricción $\mathcal{I}(X) \longrightarrow \mathcal{I}(U)$ es suprayectiva. En primer lugar supondremos que U es un abierto principal, $U = D(f) \neq \varnothing$, con $f \in A$. Entonces lo que hay que probar es que la localización $I \longrightarrow I_f$ es suprayectiva. Sea

$$\mathfrak{a} = \{a \in A \mid f^n a = 0 \text{ para un } n > 0\}.$$

Entonces $\mathfrak{a}$ es un ideal de A y $\mathfrak{a} = A$ sólo en el caso en que f es nilpotente, pero entonces $U = \varnothing$. Como $\mathfrak{a}$ es finitamente generado, existe un $N > 0$ tal que $f^N\mathfrak{a} = 0$.

Tomemos un elemento arbitrario $x/f^n \in I_f$ y sea $x' = f^N x$. Definimos $\phi : A \longrightarrow I$ mediante $\phi(a) = ax'$ y $\alpha : A \longrightarrow A$ mediante $\alpha(a) = f^{n+N}a$. Así, si $\alpha(a) = 0$ tenemos que $a \in \mathfrak{a}$, luego $f^N a = 0$, luego $\phi(a) = af^N x = 0$. Así, podemos definir sobre el ideal $(f^{n+N}) = A/\operatorname{N}(\alpha)$ el homomorfismo dado por $f^{n+N} \mapsto f^N x$, que se extiende a un homomorfismo $\psi : (f^{n+N}) \longrightarrow I$. Si llamamos $y = \psi(1)$, tenemos que $f^{n+N}y = f^N x$, luego $x/f^n = y/1$.

En el caso general, tomemos $u \in \mathcal{I}(U)$ y vamos a encontrarle una extensión. Podemos suponer que $u \neq 0$, y entonces existe un $P \in U$ tal que $u_P \neq 0$.

Consideremos el soporte $\operatorname{sop}\mathcal{I} = \{P \in X \mid \mathcal{I}_P \neq 0\}$ y sea $Y_0 = \overline{\operatorname{sop}\mathcal{I}}$. Tenemos que $P \in Y_0 \cap U$, luego podemos tomar un $f \in A$ tal que $D(f) \subset U$ y $D(f) \cap Y_0 \neq \varnothing$.

Sea $I_1 = \{w \in I \mid f^n w = 0 \text{ para un } n \geq 1\} \subset I$, que es un A-módulo inyectivo por el teorema anterior. Definimos $\mathcal{I}_1 = \widetilde{I_1}$, $Y_1 = \overline{\operatorname{sop}\mathcal{I}_1}$. Obviamente $Y_1 \subset Y_0$ y la inclusión es estricta, pues $Y_1 \cap D(f) = \varnothing$. (Si $\mathfrak{p} \in D(f)$ entonces $(I_1)_\mathfrak{p} = 0$, luego $\mathfrak{p} \in X \setminus \operatorname{sop}\mathcal{I}_1$.)

Observemos que $\mathcal{I}_1(U) = \{x \in \mathcal{I}(U) \mid x|_{D(f)} = 0\}$. En efecto, si $x \in \mathcal{I}(U)$ cumple que $x|_{D(f)} = 0$, entonces, para todo $g \in A$ tal que $D(g) \subset U$, tenemos que $x|_{D(g)} = w/g^n$, con $w \in I$, y así

$$x|_{D(f)\cap D(g)} = x|_{D(fg)} = (wf^n)/(fg)^n = 0,$$

lo que implica que $(fg)^m f^n w = 0$, para cierto m, luego $wg^m \in I_1$, de donde $x|_{D(g)} \in (I_1)_g = \mathcal{I}_1(D(g))$. Esto implica que $x \in \mathcal{I}_1(U)$. Recíprocamente, si $x \in \mathcal{I}_1(U)$, entonces $x|_{D(f)} = w/f^n$, para cierto $w \in I_1$, luego $x|_{D(f)} = 0$.

Por la parte ya probada, $u|_{D(f)} = z_1|_{D(f)}$, para cierto $z_1 \in \mathcal{I}(X)$, luego $(u - z_1|_U)|_{D(f)} = 0$, luego $u - z_1|_U \in \mathcal{I}_1(U)$. Si $u - z_1|_U \neq 0$, entonces podemos tomar un $f_1 \in A$ tal que $D(f_1) \subset U$ y $D(f_1) \cap Y_1 \neq \varnothing$.

Definimos $I_2 = \{w \in I_1 \mid f_1^n w = 0 \text{ para un } n \geq 1\}$, $\mathcal{I}_2 = \widetilde{I_2}$, $Y_2 = \overline{\operatorname{sop}\mathcal{I}_2}$ y concluimos como antes que $Y_2 \subsetneq Y_1 \subsetneq Y_0$, así como que existe un $z_2 \in \mathcal{I}(X)$ tal que $u - z_1|_U - z_2|_U \in \mathcal{I}_2(U)$. Como X es un espacio topológico noetheriano, la obtención de los cerrados Y_i no puede prolongarse indefinidamente, sino que tras un número finito de pasos encontraremos un $z = z_1 + \cdots + z_r \in \mathcal{I}(U)$ tal que $u = z|_U$. ■

De aquí obtenemos la mitad del resultado que pretendemos probar en esta sección:

Teorema 6.13 *Sea A un anillo noetheriano, sea $X = \operatorname{Esp} A$ y sea $\mathcal{M}$ un haz cuasicoherente en X. Entonces $H^0(X, \mathcal{M}) \cong \mathcal{M}(X)$ y $H^n(X, \mathcal{M}) = 0$ para todo $n \geq 1$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $M = M(X)$, de modo que $\mathcal{M} = \widetilde{M}$. Consideremos una resolución inyectiva de M:

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow I_0 \longrightarrow I_1 \longrightarrow I_2 \longrightarrow \cdots$$

Por el teorema 5.3 la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \widetilde{I}_0 \longrightarrow \widetilde{I}_1 \longrightarrow \widetilde{I}_2 \longrightarrow \cdots$$

es una resolución de $\mathcal{M}$, y por el teorema anterior es diseminada. Por el teorema [1.46], los grupos de cohomología de $\mathcal{M}$ son los grupos de cohomología del complejo que resulta de particularizar a X esta sucesión y eliminar $\mathcal{M}(X)$, pero así obtenemos la resolución inicial de M, luego todos los grupos son triviales menos el primero. ■

Como primera aplicación obtenemos la equivalencia entre la cohomología usual y la de Čech para esquemas separados localmente noetherianos:

Teorema 6.14 *Sea X un esquema separado, sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento de X formado por abiertos afines noetherianos y sea $\mathcal{M}$ un haz cuasicoherente en X. Entonces $H^n(X,\mathcal{M}) \cong H^n(\mathcal{U},\mathcal{M})$ para todo $n \geq 0$.*

Demostración: Si $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$, el teorema 4.15 implica que todos los abiertos U_s, con $s \in I^{n+1}$ son afines (y también son noetherianos). Además, para $n \geq 1$, tenemos que $H^n(U_s,\mathcal{M}) = H^n(U_s,\mathcal{M}|_{U_s}) = 0$ por el teorema anterior. Ahora basta aplicar 6.7. ■

Otra aplicación es este teorema sobre cambio de base:

Teorema 6.15 *Sea X un esquema noetheriano separado sobre un anillo A, sea B una A-álgebra plana y sea $p : X_B \longrightarrow X$ la proyección natural. Si $\mathcal{F}$ es un haz cuasicoherente en X, entonces, para todo $n \geq 0$ se cumple que*

$$H^n(X_B, p^*\mathcal{F}) \cong H^n(X,\mathcal{F}) \otimes_A B.$$

Demostración: Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento finito formado por abiertos afines. Por el teorema anterior podemos usar la cohomología de Čech de este cubrimiento para calcular la cohomología de $\mathcal{F}$.

Observemos que si U es un abierto afín en X, entonces $p^{-1}[U]$ es un abierto afín en X_B. En particular, las antiimágenes de los elementos de $\mathcal{U}$ forman un cubrimiento afín $\mathcal{U}_B$ de X_B que podemos usar para calcular la cohomología de $p^*\mathcal{F}$. Además, el teorema 5.8 nos da que

$$(p^*\mathcal{F})(p^{-1}[U]) \cong \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{O}_{X_B}(p^{-1}[U]),$$

pero $p^{-1}[U] = U \times_A \operatorname{Esp} B$, luego $\mathcal{O}_{X_B}(p^{-1}[U]) \cong \mathcal{O}_X(U) \otimes_A B$, luego

$$(p^*\mathcal{F})(p^{-1}[U]) \cong \mathcal{F}(U) \otimes_A B.$$

La finitud del cubrimiento implica que $C^n(\mathcal{U}_B, p^*\mathcal{F}) \cong C^n(\mathcal{U},\mathcal{F}) \otimes_A B$ (y que, a través de este isomorfismo, la diferencial d se corresponde con $d \otimes 1$). Ahora basta aplicar el teorema [1.37] al funtor exacto $\otimes_A B$. ■

He aquí una tercera aplicación:

Teorema 6.16 *Si X es un esquema cuasiproyectivo sobre un anillo noetheriano,* $\dim X = d$, *entonces* $H^p(X, \mathcal{M}) = 0$ *para todo haz cuasicoherente* $\mathcal{M}$ *sobre X y todo $p > d$.*

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema 4.38 tenemos que X tiene un cubrimiento $\mathcal{U}$ formado por $d+1$ abiertos afines, y por el teorema 6.14 se cumple que $H^p(X, \mathcal{M}) = H^p(\mathcal{U}, \mathcal{M})$. Por la propia definición es evidente que $H^p(\mathcal{U}, \mathcal{M}) = 0$ para $p > d$. ■

Finalmente probamos el teorema principal:

Teorema 6.17 (Serre) *Si X es un esquema noetheriano, las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

a) X es afín.

b) Para todo haz cuasicoherente $\mathcal{M}$ en X y todo natural $n \geq 1$ se cumple que $H^n(X, \mathcal{M}) = 0$.

c) Para todo haz coherente $\mathcal{M}$ en X se cumple que $H^1(X, \mathcal{M}) = 0$.

DEMOSTRACIÓN: Sólo hemos de probar c) ⇒ a). Llamemos $A = \mathcal{O}_X(X)$ y consideremos el homomorfismo $\phi : X \longrightarrow \operatorname{Esp} A$ determinado por que $\phi^\#_{\operatorname{Esp} A}$ es la identidad en A (ver el teorema 2.11). Basta probar que ϕ es un isomorfismo.

Para cada $f \in A$, tenemos que $\phi^{-1}[D(f)] = X_f$, luego $\phi^\#_{\operatorname{Esp} A}$ se restringe a un homomorfismo $\phi^\#_{D(f)} : A_f \longrightarrow \mathcal{O}_X(X_f)$. Ahora bien, como X es noetheriano, admite un buen cubrimiento afín, y el teorema 2.15 nos da que $\mathcal{O}_X(X_f) \cong X_f$, y es claro entonces que $\phi^\#_{D(f)}$ es un isomorfismo. Si X_f es afín, esto implica que $\phi|_{X_f} : X_f \longrightarrow D(f)$ es un isomorfismo.

Basta encontrar elementos $f_1, \ldots, f_n \in A$ tales que los abiertos X_{f_i} sean afines y cubran X, y los abiertos $D(f_i)$ cubran $\operatorname{Esp} A$. En primer lugar tomamos $P \in X$ y vamos a probar que pertenece a un abierto afín de la forma X_f. El cerrado $\overline{\{P\}}$ es cuasicompacto porque X lo es, luego el teorema 3.1 nos da que contiene un punto cerrado Q (que también será cerrado en X). Si encontramos un abierto afín X_f que contenga a Q, también contendrá a P, luego podemos suponer que P es cerrado.

Sea U un abierto afín tal que $P \in U \subset X$. Consideremos en $C = X \setminus U$ la estructura de subesquema cerrado reducido y sea $\mathcal{I}$ su haz de ideales asociado. Igualmente consideramos el haz de ideales $\mathcal{I}'$ asociado a $C' = (X \setminus U) \cup \{P\}$. Notemos que, como X es noetheriano, todos los haces cuasicoherentes de ideales de $\mathcal{O}_X$ son en realidad coherentes.

Para cada abierto afín $V \subset X$, tenemos que $\mathcal{I}(V)$ e $\mathcal{I}'(V)$ son ideales radicales de $\mathcal{O}_X(V)$ correspondientes a los cerrados $C \cap V \subset C' \cap V$, luego ha de ser $\mathcal{I}'(V) \subset \mathcal{I}(V)$, y las inclusiones inducen un monomorfismo de haces $\mathcal{I}' \longrightarrow \mathcal{I}$. Tenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}' \longrightarrow \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{I}/\mathcal{I}' \longrightarrow 0.$$

Veamos cómo es el cociente: Si $V \subset X$ es un abierto afín tal que $P \in V$, entonces $\mathcal{I}'(V)$ e $\mathcal{I}(V)$ pueden identificarse con ideales radicales de $\mathcal{O}_X(V)$ y P con un ideal maximal, de modo que $\mathcal{I}'(V) = \mathcal{I}(V) \cap P$. Por lo tanto

$$\mathcal{I}(V)/\mathcal{I}'(V) \cong (\mathcal{I}(V) + P)/P = \mathcal{O}_X(V)/P \cong \mathcal{O}_{X,P}/\mathfrak{m}_P = k(P).$$

En definitiva, el isomorfismo es el inducido por el homomorfismo

$$\mathcal{I}(V) \longrightarrow \mathcal{O}_X(V) \longrightarrow \mathcal{O}_{X,P} \longrightarrow k(P),$$

luego es compatible con las restricciones, es decir, que si $P \in V \subset W$ la restricción ρ_C^W del prehaz $(\mathcal{I}/\mathcal{I}')^-$ es un isomorfismo.

Por otra parte, si $P \notin V$ entonces $C \cap V = C' \cap V$, luego $\mathcal{I}'(V) = \mathcal{I}(V)$ y $(\mathcal{I}/\mathcal{I}')^-(V) = 0$. En estas condiciones es fácil ver que el prehaz $(\mathcal{I}/\mathcal{I}')^-$ es, de hecho, un haz, luego coincide con $\mathcal{I}/\mathcal{I}'$. Además, se cumple que $(\mathcal{I}/\mathcal{I}')(X) = k(P)$ (aunque X no sea afín).

Ahora consideramos la sucesión exacta de cohomología asociada a la sucesión exacta anterior:

$$\mathcal{I}(X) \longrightarrow (\mathcal{I}/\mathcal{I}')(X) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{I}') = 0.$$

Vemos que el primer homomorfismo es suprayectivo, luego existe un cierto $f \in \mathcal{I}(X) \subset \mathcal{O}_X(X) = A$ cuya imagen es 1. Esto significa que $f_P = 1$, luego $P \in X_f$. Por otra parte, si $Q \in C$, tomamos un entorno afín V de Q, de modo que $f|_V \in \mathcal{I}(V) \subset Q \subset \mathcal{O}_X(V)$, luego $f_Q = 0$, luego $Q \notin X_f$. En definitiva, tenemos que $P \in X_f \subset U$. Pero entonces $X_f = U_{f|_U} = D(f|_U)$ es un abierto afín.

Como X es cuasicompacto, podemos tomar $f_1, \ldots, f_n \in A$ tales que los abiertos X_{f_i} son afines y cubren X. Falta probar que los abiertos $D(f_i)$ cubren $\operatorname{Esp} A$ o, equivalentemente, que $(f_1, \ldots, f_n) = A$. Para ello consideramos el homomorfismo $\psi : \mathcal{O}_X^n \longrightarrow \mathcal{O}_X$ que, sobre cada abierto U de X, viene dado por $\psi_U(a_1, \ldots, a_n) = f_1 a_1 + \cdots + f_n a_n$.

Para cada $P \in X$, existe un i tal que $P \in X_{f_i}$, luego $(f_i)_P$ es una unidad de $\mathcal{O}_{X,P}$, luego genera $\mathcal{O}_{X,P}$ como $\mathcal{O}_{X,P}$-módulo. Esto implica que ψ_P es suprayectiva. Por consiguiente tenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathrm{N}(\psi) \longrightarrow \mathcal{O}_X^n \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow 0.$$

Notemos que $\mathrm{N}(\psi)$ es un haz coherente, pues, para cada abierto afín $U \subset X$, se ha de cumplir que $\mathrm{N}(\psi)|_U = \widetilde{\mathrm{N}(\psi_U)}$, y $\mathrm{N}(\psi|_U)$ es un submódulo de $\mathcal{O}_X(U)^n$, luego es un $\mathcal{O}_X(U)$-módulo finitamente generado (pues, $\mathcal{O}_X(U)$ es un anillo noetheriano). Consecuentemente tenemos la sucesión exacta

$$\mathcal{O}_X^n(X) \longrightarrow \mathcal{O}_X(X) \longrightarrow H^1(X, \mathrm{N}(\psi)) = 0,$$

según la cual, el homomorfismo $\psi_X : A^n \longrightarrow A$ es suprayectivo. Esto significa que $(f_1, \ldots, f_n) = A$. ■

Veamos una aplicación. El teorema 5.37 aplicado a $V = \mathcal{L}(X)$ caracteriza los haces muy amplios de un esquema propio definido sobre un cuerpo algebraicamente cerrado. Si el cuerpo no es algebraicamente cerrado, el estudio de si un haz inversible dado es amplio o muy amplio puede reducirse a dicho teorema mediante el resultado que demostramos a continuación.

Observemos en primer lugar que si K/k es una extensión de cuerpos y V es un k-espacio vectorial, entonces un conjunto $B \subset V$ es un generador de V si y sólo si $B \otimes 1$ es un generador de $V \otimes_k K$. Una implicación es obvia. Supongamos que $B \otimes 1$ es un generador y fijemos una k-base $\{\beta_i\}_i$ de K que contenga a 1. Si $v \in V$, tenemos que

$$v \otimes 1 = \sum_{b \in B} b \otimes \alpha_b = \sum_i \sum_{b \in B} b\alpha_{bi} \otimes \beta_i,$$

para ciertos $\alpha_b \in K$ casi todos nulos y donde $\alpha_{bi} \in k$ son las coordenadas de α_b en la base $\{\beta_i\}$. Si $\beta_{i_0} = 1$ entonces

$$v = \sum_{b \in B} b\alpha_{bi_0},$$

lo que prueba que B es un generador de V.

De aquí se sigue que si $\phi : V \longrightarrow W$ es una aplicación lineal entre k-espacios vectoriales y $\phi_K : V \otimes_k K \longrightarrow W \otimes_k K$ es suprayectiva, también lo es ϕ.

En efecto, si ϕ_K es suprayectiva, entonces $\phi[V] \otimes 1$ es un sistema generador de $W \otimes_k K$, luego $\phi[V]$ es un sistema generador de W, luego $\phi[V] = W$.

Teorema 6.18 *Sea X/k un esquema cuasicompacto, sea K/k una extensión de cuerpos, sea $\pi : X_K \longrightarrow X$ la proyección natural y sea $\mathcal{L}$ un haz cuasicoherente en X.*

a) $\mathcal{L}$ admite un generador global si y sólo si lo admite $\pi^*\mathcal{L}$.

b) Si $\mathcal{L}$ es inversible y $\pi^*\mathcal{L}$ es amplio, entonces $\mathcal{L}$ también lo es.

c) Si X/k es propio, $\mathcal{L}$ es inversible y $\pi^*\mathcal{L}$ es muy amplio, entonces $\mathcal{L}$ también lo es.

Demostración: En primer lugar necesitamos un ligero refinamiento del teorema 5.32. Si tomamos $S = \mathcal{L}(X)$, podemos construir un homomorfismo $\phi : \mathcal{O}_X^{(S)} \longrightarrow \mathcal{L}$ como se hace en la prueba de dicho teorema aunque S no sea un generador global de $\mathcal{L}$. En general no podemos demostrar que ϕ sea un epimorfismo de haces, pero trivialmente tenemos que $\phi_X : \mathcal{O}_X^{(S)}(X) \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ es un epimorfismo.

Por otra parte, es inmediato que si $\phi : \mathcal{O}_X^{(I)} \longrightarrow \mathcal{L}$ es un homomorfismo arbitrario tal que ϕ_X sea un epimorfismo, entonces $\mathcal{L}$ admite un generador global si y sólo si ϕ es un epimorfismo.

a) Dado un homomorfismo $\phi : \mathcal{O}_X^{(I)} \longrightarrow \mathcal{L}$ en las condiciones anteriores, consideramos la extensión $\pi^*\phi : \mathcal{O}_{X_K}^{(I)} \longrightarrow \pi^*\mathcal{L}$. Veamos en primer lugar que $(\pi^*\phi)(X_K)$ es suprayectivo. Observemos que si $U \subset X$ es un abierto afín, entonces

$$(\pi^*\mathcal{L})(U_K) = \mathcal{L}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{O}_{X_K}(U_K) = \mathcal{L}(U) \otimes_k K.$$

Fijemos una base $\{\alpha_j\}_j$ de K sobre k y un cubrimiento $\{U_i\}_i$ de X por abiertos afines. Tomemos $s \in (\pi^*\mathcal{L})(X_K)$. Entonces,

$$s|_{U_{iK}} = \sum_j s_{ij} \otimes \alpha_j,$$

para ciertos $s_{ij} \in \mathcal{L}(U_i)$, y es claro que cada familia $\{s_{ij}\}_i$ define un $s_j \in \mathcal{L}(X)$. Por hipótesis, $s_j = \phi_X(t_j)$, para cierto $t_j \in \mathcal{O}_X^{(I)}(X)$. Los elementos

$$\sum_j t_j|_{U_i} \otimes \alpha_j$$

definen un $t \in \mathcal{O}_{X_K}^{(I)}(X_K)$, que claramente cumple $(\pi^*\phi)(t) = s$.

Según hemos visto antes de enunciar este teorema, fijado $P \in X_K$, la suprayectividad del homomorfismo $\phi_P^\# : \mathcal{O}_{X,\pi(P)}^{(I)} \longrightarrow \mathcal{L}_{\pi(P)}$ equivale a la de $\mathcal{O}_{X,\pi(P)}^{(I)} \otimes_k K \longrightarrow \mathcal{L}_{\pi(P)} \otimes_k K$. A su vez, esto significa que ϕ es suprayectiva si y sólo si $\pi^*\phi$ lo es, lo que demuestra a).

b) Notemos que $\pi^*\mathcal{L}$ es inversible, pues $(\pi^*\mathcal{L})_P = \mathcal{L}_{\pi(P)} \otimes_k K$. Similarmente, si $\mathcal{M}$ es un haz cuasicoherente y finitamente generado en X, el haz $\pi^*\mathcal{M}$ es un haz cuasicoherente y finitamente generado en X_K. Por hipótesis, para todo n suficientemente grande, tenemos que $\pi^*\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_{X_K}} \pi^*\mathcal{L}^n \cong \pi^*(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^n)$ tiene un generador global, luego por a) también lo tiene $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^n$, luego $\mathcal{L}$ es amplio.

c) Por el apartado b) sabemos que $\mathcal{L}$ es amplio, luego el esquema X es proyectivo sobre k y, en particular, es separado. El teorema 6.15 nos da entonces que $(\pi^*\mathcal{L})(X_K) = \mathcal{L}(X) \otimes_k K$.

Como $\pi^*\mathcal{L}$ es muy amplio, tiene un generador global $s'_0, \ldots, s'_n$ asociado a una inmersión cerrada $f' : X_K \longrightarrow \mathrm{P}_K^n$. Si eliminamos los generadores linealmente dependientes estamos sustituyendo P_K^n por una variedad lineal y es fácil ver que si completamos el generador hasta una base de $(\pi^*\mathcal{L})(X)$ obtenemos un nuevo generador global que sigue definiendo una inmersión cerrada. Componiéndola con un automorfismo adecuado de P_K^n podemos sustituir el generador global por cualquier otra base de $(\pi^*\mathcal{L})(X)$. De este modo, podemos suponer que $s'_i = s_i \otimes 1$, donde $s_0, \ldots, s_n$ es una base de $\mathcal{L}(X)$.

Notemos que si $P \in X_K$, entonces s'_{iP} genera $(\pi^*\mathcal{L})_P = \mathcal{L}_{\pi(P)} \otimes_k K$ sobre $\mathcal{O}_{X_K,P} = \mathcal{O}_{X,\pi(P)} \otimes_k K$ si y sólo si $s_{i\pi(P)}$ genera $\mathcal{L}_{\pi(P)}$ sobre $\mathcal{O}_{X,\pi(P)}$.

En efecto, si $s_{i\pi(P)}$ no es un generador, entonces $s_{i\pi(P)} \in \mathfrak{m}_{\pi(P)}\mathcal{L}_P$, luego $s'_{iP} \in \mathfrak{m}_P(\pi^*\mathcal{L})_P$, luego s'_{iP} no es un generador. El recíproco es obvio.

En particular, tenemos que $(X_K)_{s'_i} = \pi^* X_{s_i}$, así como que $s_0, \ldots, s_n$ es un generador global de $\mathcal{L}$, que determina un homomorfismo $f : X \longrightarrow \mathrm{P}_k^n$, y es fácil ver que f' no es sino el homomorfismo inducido por f. Hemos de probar que f es una inmersión cerrada.

El teorema 6.17, junto con 6.15, nos da que los abiertos X_{s_i} son afines. El homomorfismo $\mathcal{O}_{\mathrm{P}_K^n}(D(X_i)) \longrightarrow \mathcal{O}_{X_K}(X_{Ks'_i})$ inducido por f' es suprayectivo porque $f'|_{D(X_i)}$ es una inmersión cerrada entre esquemas afines, y se corresponde con el homomorfismo $\mathcal{O}_{\mathrm{P}_k^n}(D(X_i)) \otimes_k K \longrightarrow \mathcal{O}_X(X_{s_i}) \otimes_k K$ inducido por el homomorfismo $\mathcal{O}_{\mathrm{P}_k^n}(D(X_i)) \longrightarrow \mathcal{O}_X(X_{s_i})$ inducido por f. Como el primero es suprayectivo, el segundo también lo es. Esto a su vez implica que $f|_{X_{s_i}}$ es una inmersión cerrada, luego f también lo es. ■

6.3 La cohomología de los espacios proyectivos

En esta sección obtendremos los resultados básicos sobre la cohomología de los espacios proyectivos P_A^r, donde A es un anillo noetheriano. Llamemos $S = A[X_0, \ldots, X_r]$, con lo que $X = \mathrm{P}_A^r = \mathrm{Proy}(S)$.

Una observación elemental (a partir del teorema 6.14) es que si $\mathcal{M}$ es un haz cuasicoherente en X entonces $H^n(X, \mathcal{M}) = 0$ para todo $n > r$. En efecto, los abiertos afines $D(X_i)$ forman un cubrimiento $\mathcal{U}$ de X con $r+1$ elementos. Tenemos que $H^n(X, \mathcal{M}) = H^n(\mathcal{U}, \mathcal{M})$, pero si $n > r$, entonces todo multiíndice $s \in I^{n+1}$ (donde $I = \{0, \ldots, r\}$ es el conjunto de índices del cubrimiento) tiene dos índices iguales, luego $C^n(\mathcal{U}, \mathcal{M}) = 0$ y también $H^n(\mathcal{U}, \mathcal{M}) = 0$.

De acuerdo con 5.53 podemos considerar el S-módulo graduado

$$\overline{\mathcal{O}_X} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{O}_X(n)(X) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} H^0(X, \mathcal{O}_X(n)).$$

Tenemos un homomorfismo graduado natural $S \longrightarrow \overline{\mathcal{O}_X}$. Concretamente, cada $s \in S_n = S(n)_0$ se corresponde con el único $\bar{s} \in \mathcal{O}_X(n)(X) = \widetilde{S(n)}(X)$ que cumple que $\bar{s}|_{D(f)} = s/1 \in S(n)_{0(f)}$, para cada $f \in S_+$.

Teorema 6.19 *Consideremos un anillo noetheriano A, sea $S = A[X_0, \ldots, X_r]$ y sea $X = \mathrm{P}_A^r = \mathrm{Proy}(S)$. Entonces:*

a) El homomorfismo natural $S \longrightarrow \overline{\mathcal{O}_X}$ es un isomorfismo.

b) $H^i(X, \mathcal{O}_X(n)) = 0$ para $0 < i < r$ y todo $n \in \mathbb{Z}$.

c) $H^r(X, \mathcal{O}_X(-r-1)) \cong A$.

d) $H^r(X, \mathcal{O}_X(-n-r-1))$ es un A-módulo libre, y existe una forma bilineal regular

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(n)) \times H^r(X, \mathcal{O}_X(-n-r-1)) \longrightarrow H^r(X, \mathcal{O}_X(-r-1)) \cong A,$$

de modo que $H^r(X, \mathcal{O}_X(-n-r-1))$ es isomorfo al módulo dual de $H^0(X, \mathcal{O}_X(n))$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Demostración: Consideremos el haz cuasicoherente $\mathcal{M} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{O}_X(n)$.

Vamos a calcular sus grupos de cohomología de Čech usando el cubrimiento dado por los abiertos $U_i = D(X_i)$, para $i = 0, \ldots, r$. Si $s = (i_0, \ldots, i_p) \in I^{p+1}$ es un mutiíndice tal que $i_0 < \cdots < i_p$, entonces $U_s = D(X_{i_0} \cdots X_{i_p})$.

Así, $\mathcal{O}_X(n)(U_s) = S(n)_{(X_{i_0}\cdots X_{i_p})}$, de donde $\mathcal{M}(U_s) = S_{X_{i_0}\cdots X_{i_p}}$, y en este anillo consideramos la graduación natural que resulta de considerar homogéneas de grado n las fracciones con numerador homogéneo de grado n unidades mayor que el del denominador. Por consiguiente,

$$\begin{array}{rcll} C^0(\mathcal{U},\mathcal{M}) & = & \prod\limits_{i_0} S_{X_{i_0}} & \cong \bigoplus\limits_n C^0(\mathcal{U},\mathcal{O}_X(n)), \\ C^1(\mathcal{U},\mathcal{M}) & = & \prod\limits_{i_0<i_1} S_{X_{i_0}X_{i_1}} & \cong \bigoplus\limits_n C^1(\mathcal{U},\mathcal{O}_X(n)), \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C^r(\mathcal{U},\mathcal{M}) & = & S_{X_0\cdots X_r} & \cong \bigoplus\limits_n C^r(\mathcal{U},\mathcal{O}_X(n)). \end{array}$$

(Notemos que los productos son finitos, luego son lo mismo que sumas directas, y por esto conmutan con las sumas directas infinitas.)

Una simple comprobación muestra que el operador cofrontera d para $\mathcal{M}$ es la suma directa de los operadores correspondientes a los módulos $\mathcal{O}_X(n)$. Esto implica que

$$H^n(\mathcal{U},\mathcal{M}) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} H^n(\mathcal{U},\mathcal{O}_X(n)),$$

donde la descomposición en suma directa es precisamente la inducida por la gradación que estamos considerando en la resolución de $\mathcal{M}$. También es graduado el monomorfismo

$$\overline{\mathcal{O}_X} = \mathcal{M}(X) \longrightarrow C^0(\mathcal{U},\mathcal{M}),$$

La imagen de este monomorfismo es $H^0(\mathcal{U},\mathcal{M})$ y, por otra parte, es claro que al componerlo con el homomorfismo $S \longrightarrow \overline{\mathcal{O}_X}$, obtenemos la suma directa de los monomorfismos naturales $S \longrightarrow S_{X_i}$, luego para demostrar a) basta probar que la imagen es el núcleo del operador d, es decir, que un elemento

$$(s_0,\ldots,s_r) \in S_{X_0}\times\cdots\times S_{X_r}$$

es imagen de un elemento de S si y sólo si $s_i|_{D(X_iX_j)} = s_j|_{D(X_iX_j)}$, para todos los índices i, j, pero esto es justo lo que se demuestra en el teorema 5.26.

Veamos ahora el apartado c). Para ello nos fijamos en la cofrontera

$$d^{r-1} : \prod_i S_{X_0\cdots\hat{X}_i\cdots X_r} \longrightarrow S_{X_0\cdots X_r},$$

(donde $\hat{X}_i$ indica que falta esta indeterminada). Su acción es la dada por

$$d^{r-1}(F_0,\ldots,F_r) = \sum_j (-1)^j F_j.$$

Es claro que $S_{X_0\cdots X_r}$ es un A-módulo libre que tiene por base al conjunto de todos los "monomios" $X_0^{l_0}\cdots X_r^{l_r}$, con $l_i\in\mathbb{Z}$. El submódulo de las cofronteras está generado por los monomios con algún $l_i \geq 0$, luego es también un submódulo libre y el cociente es isomorfo al submódulo libre generado por el complementario de este generador en la base de los monomios, es decir, el cociente $H^r(\mathcal{U},\mathcal{M})$ es isomorfo al A-submódulo libre de $S_{X_0 \cdots X_r}$ generado por los monomios con todos los exponentes negativos. Por otra parte, el grado de cada monomio es la suma de sus exponentes, luego $H^r(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X(-r-1))$ está generado por los monomios cuyos exponentes suman $-r-1$, y la única posibilidad es $(X_0 \cdots X_r)^{-1}$. Esto prueba que $H^r(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X(-r-1))$ tiene rango 1, luego es isomorfo a A.

Probamos ahora el apartado d): En primer lugar observamos que para $n < 0$ es trivial, pues $H^0(X, \mathcal{O}_X(n)) = 0$ por el apartado a) y, por otra parte, $H^r(X, \mathcal{O}_X(-n-r-1)) = 0$ por lo que acabamos de ver, es decir, porque no hay monomios con exponentes negativos cuya suma sea $-n-r-1 > -r-1$. Para $n \geq 0$, tenemos que $H^0(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X(n))$ es isomorfo al A-submódulo de S generado por los monomios de grado n, luego podemos definir una forma bilineal sobre esta base y la que tenemos para $H^r(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X(-n-r-1))$ mediante

$$(X_0^{m_0} \cdots X_r^{m_r})(X_0^{l_0} \cdots X_r^{l_r}) = X_0^{m_0+l_0} \cdots X_r^{m_r+l_r},$$

entendiendo que el miembro derecho es 0 si tiene algún exponente no negativo. Con más detalle, definimos así la forma bilineal (sin suponer esta última condición) pero con imagen en $S_{X_0 \cdots X_r}$, entonces es inmediato comprobar que es una forma bilineal, y luego la componemos con la proyección en el cociente (que anula los monomios con algún exponente no negativo).

Es claro entonces el el par de dos elementos de la base es nulo salvo si $m_i + l_i = -1$. Esto quiere decir que la matriz de la forma bilineal en estas bases (ordenadas adecuadamente) es la identidad, luego la forma es regular.

Nos falta probar el apartado b): Razonamos por inducción sobre r. Para $r = 1$ no hay nada que probar, así que suponemos $r > 1$.

En primer lugar observamos que los módulos de la resolución de Čech de $\mathcal{M}$ tienen todos una estructura natural de S-módulo, y que los operadores cofrontera son homomorfismos de S-módulos, por lo que tenemos una estructura natural de S-módulo en los grupos $H^i(\mathcal{U}, \mathcal{M})$.

Ahora observamos que si localizamos respecto de X_r los S-módulos $C^i(\mathcal{U}, \mathcal{M})$ obtenemos la resolución de Čech del esquema afín U_r respecto del cubrimiento $\mathcal{U} \cap U_r = \{U_i \cap U_r\}_{i=0}^r$ y para el haz $\mathcal{M}|_{U_r}$.

En efecto, tomemos un multiíndice $s = (i_0, \ldots, i_m)$ con índices crecientes. No perdemos generalidad si suponemos $i_0 = 0$. Supongamos en primer lugar que $i_m < r$. Entonces

$$\mathcal{O}_X(U_{i_0}) = S_{(X_0)} \cong A[X_1, \ldots, X_r],$$

donde, a través del isomorfismo, la estructura de S-módulo consiste en hacer $X_0 = 1$ y multiplicar. Es claro que U_s es un abierto principal en U_{i_0}, determinado por $X_{i_1} \cdots X_{i_m} \in \mathcal{O}_X(U_{i_0})$. Por consiguiente,

$$\mathcal{O}_X(U_s) = \mathcal{O}_X(U_{i_0})_{X_{i_1} \cdots X_{i_m}}, \quad \mathcal{M}(U_s) = \mathcal{M}(U_{i_0})_{X_{i_1} \cdots X_{i_m}}.$$

Lo mismo vale para $U_s \cap U_r$ añadiendo el índice r al multiíndice, de donde se sigue fácilmente que

$$\mathcal{M}(U_s \cap U_r) = \mathcal{M}(U_{i_0})_{X_{i_1} \cdots X_{i_m} X_r} \cong \mathcal{M}(U_s)_{X_r}.$$

Si $i_m = r$ entonces $U_s \cap U_r = U_s$ y es fácil ver también que

$$\mathcal{M}(U_s \cap U_r) = \mathcal{M}(U_s) = \mathcal{M}(U_s)_{X_r},$$

pues X_r es una unidad de $\mathcal{O}_X(U_s)$. Ahora basta tener en cuenta la definición del complejo de Čech. Más aún, el operador cofrontera de $C^i(\mathcal{U} \cap U_r, \mathcal{M}|_{U_r})$ se corresponde con la localización del operador cofrontera de $C^i(\mathcal{U}, \mathcal{M})$, por lo que los módulos de cociclos y cofronteras de U_r son las localizaciones de los correspondientes módulos de X.

Por el teorema de Serre, tenemos que $H^i(\mathcal{U} \cap U_r, \mathcal{M}|_{U_r}) = 0$ para $i > 0$, lo que equivale a que $H^i(\mathcal{U}, \mathcal{M})_{X_r} = 0$ (donde usamos que la localización de un cociente de módulos es el cociente de las localizaciones). Esto significa que todo elemento de $H^i(\mathcal{U}, \mathcal{M})$ es anulado por una potencia de X_r. Ahora basta demostrar que la multiplicación por X_r induce un automorfismo en $H^i(\mathcal{U}, \mathcal{M})$, para $0 < i < r$.

Para ello consideramos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow S \xrightarrow{X_r} S \longrightarrow S/(X_r) \longrightarrow 0.$$

Notemos que el cociente puede identificarse con $S' = A[X_0, \ldots, X_{r-1}]$. Localizando y formando sumas directas obtenemos sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow C^i(\mathcal{U}, \mathcal{M}) \xrightarrow{X_r} C^i(\mathcal{U}, \mathcal{M}) \longrightarrow C^i(\mathcal{U}', \mathcal{M}') \longrightarrow 0,$$

donde $\mathcal{U}'$ y $\mathcal{M}'$ son los análogos a $\mathcal{U}$ y $\mathcal{M}$ para una indeterminada menos (considerando a $C^i(\mathcal{U}', \mathcal{M}')$ como S-módulo a través del epimorfismo canónico $S \longrightarrow S'$). Es fácil ver que estas sucesiones exactas conmutan con las cofronteras, es decir, que definen una sucesión exacta entre los complejos de Čech, la cual a su vez determina una sucesión exacta de cohomología:[1]

$$0 \longrightarrow H^0(\mathcal{U}, \mathcal{M}) \xrightarrow{X_r} H^0(\mathcal{U}, \mathcal{M}) \longrightarrow H^0(\mathcal{U}', \mathcal{M}') \longrightarrow H^1(\mathcal{U}, \mathcal{M}) \xrightarrow{X_r} \cdots$$

La hipótesis de inducción nos da que $H^i(\mathcal{U}', \mathcal{M}') = 0$ para $0 < i < r - 1$. Esto implica que la multiplicación por X_r es un isomorfismo en $H^i(\mathcal{U}, \mathcal{M})$ para $1 < i < r - 1$.

Observemos que el principio de la sucesión de cohomología se corresponde con la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow S \xrightarrow{X_r} S \longrightarrow S/(X_r) \longrightarrow 0,$$

luego también es exacta la sucesión

$$0 \longrightarrow H^1(\mathcal{U}, \mathcal{M}) \xrightarrow{X_r} H^1(\mathcal{U}, \mathcal{M}) \longrightarrow H^1(\mathcal{U}', \mathcal{M}') \longrightarrow 0,$$

con lo que la multiplicación por X_r también es un isomorfismo en $H^1(\mathcal{U}, \mathcal{M})$.

[1]Ver el teorema 2.25 de mi Topología Algebraica. Allí está enunciado para complejos directos, es decir, con índices descendentes, pero la diferencia es sólo de notación.

Calculemos ahora explícitamente el homomorfismo de conexión[2]

$$H^{r-1}(\mathcal{U}',\mathcal{M}') \xrightarrow{\delta} H^r(\mathcal{U},\mathcal{M}) \xrightarrow{X_r} H^r(\mathcal{U},\mathcal{M}) \longrightarrow 0.$$

Para ello tomamos un elemento de $\alpha \in H^{r-1}(\mathcal{U}',\mathcal{M}')$ y le elegimos un representante $\alpha = [f]$, con $f \in Z^{r-1}(\mathcal{U}',\mathcal{M}') = S'_{X_0\cdots X_{r-1}}$; le tomamos una antiimagen en

$$C^{r-1}(\mathcal{U},\mathcal{M}) = \prod_{i=0}^{r} S_{X_0\cdots \hat{X}_i\cdots X_r},$$

por ejemplo, $(0,\ldots,0,f)$; calculamos su cofrontera, que es $f \in S_{X_0\cdots X_r}$; calculamos una antiimagen en $Z^r(\mathcal{U},\mathcal{M}) = S_{X_0\cdots X_r}$, que es $X_r^{-1}f$; por último tomamos su clase de equivalencia y concluimos que $\delta(\alpha) = X_r^{-1}\alpha$.

Hemos visto antes que una base de $H^{r-1}(\mathcal{U}',\mathcal{M}')$ como A-módulo lo forman los monomios en $X_0,\ldots,X_{r-1}$ con exponentes negativos, y las imágenes de estos monomios son parte de la base correspondiente en $H^r(\mathcal{U},\mathcal{M})$. Por consiguiente, el homomorfismo δ es inyectivo y tenemos una sucesión exacta:

$$H^{r-2}(\mathcal{U}',\mathcal{M}') \longrightarrow H^{r-1}(\mathcal{U},\mathcal{M}) \xrightarrow{X_r} H^{r-1}(\mathcal{U},\mathcal{M}) \longrightarrow 0.$$

Si $r-2=0$ entonces $r-1=1$ y ya hemos probado que la multiplicación por X_r es inyectiva en $H^{r-1}(\mathcal{U},\mathcal{M})$. Si $r-2>0$ entonces $H^{r-1}(\mathcal{U}',\mathcal{M}') = 0$ por hipótesis de inducción y llegamos a la misma conclusión. ■

De aquí podemos deducir un resultado general sobre haces coherentes en esquemas proyectivos. Nos basaremos en el siguiente hecho elemental:

Teorema 6.20 *Si $f : X \longrightarrow Y$ es una inmersión cerrada entre esquemas localmente noetherianos y $\mathcal{M}$ es un haz coherente en X, entonces $f_*\mathcal{M}$ es un haz coherente en Y, y además*

$$H^i(X,\mathcal{M}) \cong H^i(Y,f_*\mathcal{M}), \qquad \textit{para todo } i \geq 0.$$

Demostración: El haz $f_*\mathcal{M}$ es coherente por el teorema 5.18. Si

$$0 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{I}^1 \longrightarrow \mathcal{I}^2 \longrightarrow \cdots$$

es una resolución diseminada de $\mathcal{M}$, entonces, como el funtor f_* es exacto, la sucesión

$$0 \longrightarrow f_*\mathcal{M} \longrightarrow f_*\mathcal{I}^1 \longrightarrow f_*\mathcal{I}^2 \longrightarrow \cdots$$

es una resolución diseminada de $f_*\mathcal{M}$ y las sucesiones

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}(X) \longrightarrow \mathcal{I}^1(X) \longrightarrow \mathcal{I}^2(X) \longrightarrow \cdots$$

$$0 \longrightarrow f_*\mathcal{M}(Y) \longrightarrow f_*\mathcal{I}^1(Y) \longrightarrow f_*\mathcal{I}^2(Y) \longrightarrow \cdots$$

son la misma, luego los grupos de cohomología coinciden. ■

[2]Ver de nuevo el teorema 2.25 de mi Topología Algebraica.

Teorema 6.21 (Serre) *Sea A un anillo noetheriano, X/A un esquema proyectivo*[3] *y $\mathcal{M}$ un haz coherente en X.*

a) Para todo $n \geq 0$ se cumple que $H^n(X, \mathcal{M})$ es un A-módulo finitamente generado.

b) Existe un m_0 tal que para todo $m \geq m_0$ y todo $n \geq 1$ se cumple que $H^n(X, \mathcal{M}(m)) = 0$.

Demostración: Sea $f : X \longrightarrow Y = \mathrm{P}_A^r$ una inmersión cerrada (respecto a la cual calculamos los haces $\mathcal{M}(m)$ en b). El teorema 5.18 nos da que $f_*\mathcal{M}$ es un haz coherente en Y. Por el teorema 5.22 tenemos que

$$f_*(\mathcal{M}(m)) = f_*(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{O}_Y(m)) \cong f_*(\mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_Y(m) = f_*(\mathcal{M})(m).$$

Por 6.20 tenemos además que $H^i(X, \mathcal{M}(n)) \cong H^i(Y, (f_*\mathcal{M})(n))$. Por consiguiente, basta probar el teorema para $X = \mathrm{P}_A^r$.

Por el teorema 6.19 sabemos que las propiedades a) y b) se cumplen cuando $\mathcal{M} = \mathcal{O}_X(m)$. Observemos ahora que

$$H^i(X, \mathcal{M} \oplus \mathcal{N}) \cong H^i(X, \mathcal{M}) \oplus H^i(X, \mathcal{N}).$$

En efecto, es claro que al sumar sendas resoluciones diseminadas de $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ obtenemos una resolución diseminada de la suma. Por consiguiente, el teorema es cierto también cuando $\mathcal{M} = \mathcal{O}_X(m)^l$.

Sabemos que $H^n(X, \mathcal{M}) = 0$ cuando $n > r$, para cualquier haz coherente $\mathcal{M}$, por lo que el teorema se cumple trivialmente para $n > r$. Veremos que se cumple para todo n por inducción descendente, es decir, lo suponemos cierto para todo $i > n$ y vamos a probar que también se cumple para n.

Por el teorema 5.43 podemos formar una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{O}_X(m_0)^l \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0,$$

para cierto $m_0 \in \mathbb{Z}$. Multiplicando por $\mathcal{O}_X(m)$ obtenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}(m) \longrightarrow \mathcal{O}_X(m_0 + m)^l \longrightarrow \mathcal{M}(m) \longrightarrow 0.$$

(La sucesión se conserva exacta porque las sucesiones locales son exactas, ya que los $\mathcal{O}_{X,P}$-módulos $\mathcal{O}_X(m)_P$ son libres.) Ahora formamos la sucesión de cohomología:

$$H^n(X, \mathcal{O}_X(m_0 + m)^l) \longrightarrow H^n(X, \mathcal{M}(m)) \longrightarrow H^{n+1}(X, \mathcal{N}(m)).$$

Para $m = 0$, los A-módulos de los extremos son finitamente generados, luego noetherianos (el de la izquierda porque $\mathcal{O}_X(m_0)^l$ cumple el teorema, el de la derecha por hipótesis de inducción). Por consiguiente, $H^n(X, \mathcal{M})$ también es finitamente generado y a) se cumple para n. Por otro lado, para todo m suficientemente grande los módulos de los extremos son nulos, luego el del centro también. ■

Una consecuencia elemental es la siguiente:

[3] El apartado a) de este teorema sigue siendo cierto si exigimos únicamente que el esquema X/A sea propio en lugar de proyectivo. Ver la nota tras el teorema 6.49.

Teorema 6.22 *Sea A un anillo noetheriano, sea X/A un esquema proyectivo, sea $\mathcal{O}_X(1)$ un haz muy amplio en X y $\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{P}$ una sucesión exacta de haces coherentes en X. Entonces existe un $n_0 \geq 0$ tal que, para todo $n \geq n_0$, también es exacta la sucesión $\mathcal{M}(n)(X) \longrightarrow \mathcal{N}(n)(X) \longrightarrow \mathcal{P}(n)(X)$.*

Demostración: Si partimos de una sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{P} \longrightarrow 0,$$

entonces también es exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}(n) \longrightarrow \mathcal{N}(n) \longrightarrow \mathcal{P}(n) \longrightarrow 0,$$

y de ella obtenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}(n)(X) \longrightarrow \mathcal{N}(n)(X) \longrightarrow \mathcal{P}(n)(X) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{M}(n)).$$

Ahora basta tener en cuenta que, por el teorema anterior, para n suficientemente grande se cumple que $H^1(X, \mathcal{M}(n)) = 0$. En otras palabras, hemos probado que, para cada sucesión exacta corta, existe un n_0 tal que, si $n \geq n_0$, entonces el funtor $\Gamma(X, - \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n))$ conserva la exactitud de la sucesión. Podemos tomar un n_0 que valga simultáneamente para un número finito dado de sucesiones exactas cortas. Esto permite aplicar la prueba del teorema [1.20] al funtor $\Gamma(X, - \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(n))$, pues en dicha prueba sólo se usa la exactitud del funtor de partida sobre un número finito de sucesiones (sobre tres, concretamente).

■

El apartado d) del teorema 6.19 puede generalizarse a haces coherentes arbitrarios:

Teorema 6.23 *Sea A un anillo noetheriano, $X = \mathrm{P}^r_A$ y sea $\omega^\circ_X = \mathcal{O}_X(-r-1)$. Entonces $H^r(X, \omega^\circ_X) \cong A$ y, para cada haz coherente $\mathcal{M}$ en X, existe una forma bilineal regular*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \omega^\circ_X) \times H^r(X, \mathcal{M}) \longrightarrow H^r(X, \omega^\circ_X) \cong A.$$

Demostración: El isomorfismo $H^r(X, \omega^\circ_X) \cong A$ está probado en 6.19 c). Cada homomorfismo $\alpha : \mathcal{M} \longrightarrow \omega^\circ_X$ induce un homomorfismo

$$H^r(X, \alpha) : H^r(X, \mathcal{M}) \longrightarrow H^r(X, \omega^\circ_X),$$

lo que nos da la forma bilineal. Hemos de probar que es regular. Supongamos en primer lugar que $\mathcal{M} \cong \mathcal{O}_X(q)$, para un $q \in \mathbb{Z}$. Entonces (usando los resultados de la Sección [2.3]):

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \omega^\circ_X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X(q), \mathcal{O}_X(-r-1))$$

$$\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X(-q-r-1)) \cong H^0(X, \mathcal{O}_X(-q-r-1)).$$

Hemos de comprobar que, a través de este isomorfismo, la forma bilineal se corresponde con la considerada en 6.19 d). En virtud del teorema 6.14 podemos identificar los grupos de cohomología con los correspondientes a la cohomología de Čech respecto del cubrimiento $\mathcal{U}$ de X formado por los abiertos $D(X_i)$. Además, el teorema 6.19 nos permite restringirnos al caso $n = -q - r - 1 \geq 0$, ya que si se da la desigualdad contraria entonces

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(-q-r-1)) = 0 \quad \text{y} \quad H^r(X, \mathcal{O}_X(q)) = 0,$$

con lo que no hay nada que probar.

Observemos que $\mathcal{O}_X(q)|_{D(X_i)} = X_i^q \mathcal{O}_X|_{D(X_i)}$, así como que cada homomorfismo $\alpha : \mathcal{M} \longrightarrow \omega_X^\circ$ está completamente determinado por las imágenes $\alpha_{D(X_i)}(X_i^q) \in \mathcal{O}_X(-r-1)(D(X_i))$. Más concretamente, podemos expresar $\alpha_{D(X_i)}(X_i^q) = F|_{D(X_i)} X_i^q$, donde $F \in \mathcal{O}_X(n)(X)$ es la imagen de α por el isomorfismo anterior. Como $n \geq 0$, en virtud de 6.19 a) podemos identificar a F con una forma de grado n.

Por otra parte, $C^r(\mathcal{U}, \mathcal{M}) = \mathcal{O}_X(q)(D(X_0 \cdots X_r))$ está formado por las fracciones de $k(X_0, \ldots, X_r)$ homogéneas de grado q, y el homomorfismo inducido $C^r(\mathcal{U}, \mathcal{M}) \longrightarrow C^r(\mathcal{U}, \omega_X^\circ)$ no es sino $\alpha_{D(X_0 \cdots X_r)}$ o, equivalentemente, la multiplicación por F. Ahora es claro que la forma bilineal que estamos considerando es la misma considerada en 6.19 d), luego es regular.

Consideremos ahora el caso en que $\mathcal{M} = \mathcal{O}_X(q)^m$. Es claro que

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \omega_X^\circ) \cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X(q), \omega_X^\circ)^m, \qquad H^r(X, \mathcal{M}) \cong H^r(X, \mathcal{O}_X(q))^r,$$

y que la matriz de la forma bilineal para $\mathcal{M}$ en una base adecuada es la suma diagonal de las matrices de las formas asociadas a los sumandos directos, por lo que también es regular.

Si $\mathcal{M}$ es un haz coherente arbitrario, por el teorema 5.43 tenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{O}_X(q)^m \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0,$$

donde el haz $\mathcal{N}$ es coherente por 6.10, luego podemos pasar a una sucesión exacta de la forma

$$\mathcal{M}_2 \longrightarrow \mathcal{M}_1 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0,$$

donde $\mathcal{M}_1 = \mathcal{O}_X(q)^m$ y $\mathcal{M}_2 = \mathcal{O}_X(q')^{m'}$.

Ahora bien, los funtores $\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(-, \omega_X^\circ)$ y $H^r(X, -)^*$ (donde el asterisco denota el módulo dual) son contravariantes y exactos por la izquierda, de donde se desprende que las filas del diagrama siguiente son exactas:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \omega_X^\circ) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}_1, \omega_X^\circ) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}_2, \omega_X^\circ) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & H^r(X, \mathcal{M})^* \arrow[r] & H^r(X, \mathcal{M}_1)^* \arrow[r] & H^r(X, \mathcal{M}_2)^*
\end{tikzcd}$$

Por la parte ya probada, las dos últimas flechas verticales son isomorfismos, lo que implica fácilmente que la primera también lo es, y esto equivale a la regularidad de la forma bilineal. ■

Veamos otra consecuencia del teorema 6.21:

Teorema 6.24 *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un homomorfismo proyectivo, donde el esquema Y es localmente noetheriano, y sea $\mathcal{M}$ un haz coherente en X. Entonces $f_*\mathcal{M}$ es un haz coherente en Y.*

DEMOSTRACIÓN: No perdemos generalidad si suponemos que $Y = \operatorname{Esp} A$, donde A es un anillo noetheriano. En cualquier caso, sabemos que $f_*\mathcal{M}$ es cuasicoherente, por 5.9, y el teorema 6.21 nos da que $(f_*\mathcal{M})(Y) = \mathcal{M}(X)$ es un A-módulo finitamente generado, luego $f_*\mathcal{M}$ es coherente. ■

Para terminar, daremos una caracterización cohomológica de los haces amplios:

Teorema 6.25 *Sea X un esquema propio sobre un anillo noetheriano A y sea $\mathcal{L}$ un haz inversible en X. Las propiedades siguientes son equivalentes:*

a) $\mathcal{L}$ es amplio.

b) Para cada haz coherente $\mathcal{F}$ en X, existe un entero n_0 tal que, para todo $n \geq n_0$ y todo $p \geq 1$ se cumple que $H^p(X, \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^n) = 0$.

c) Para cada haz coherente $\mathcal{I}$ de ideales de $\mathcal{O}_X$, existe un entero n_0 tal que, para todo $n \geq n_0$ se cumple que $H^1(X, \mathcal{I} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^n) = 0$.

DEMOSTRACIÓN: Si $\mathcal{L}$ es amplio, entonces el teorema 5.46 nos da que $\mathcal{L}^n$ es muy amplio, para cierto natural n. Por definición, esto significa que existe una inmersión $i : X \longrightarrow \mathrm{P}_A^N$ definida sobre A tal que $\mathcal{L}^n \cong i^*\mathcal{O}_{\mathrm{P}_A^N}(1)$. Como X/A es propio, la inmersión i es también propia, luego X es proyectivo sobre A y basta aplicar el teorema 6.21 a los haces $\mathcal{F}$, $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}$, ..., $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^{n-1}$.

Como b) $\Rightarrow$ c) es trivial, suponemos c) y sólo falta probar a). En primer lugar vamos a demostrar que para todo punto $P \in X$ existe un natural n y un $s \in \mathcal{L}^n(X)$ de modo que el abierto X_s es afín y contiene a P. El mismo argumento empleado en el teorema 6.17 nos permite suponer que P es cerrado. Tomamos un entorno afín U de P que cumpla además que $\mathcal{L}|_U$ sea libre, y razonamos como en dicho teorema, es decir, llamamos $\mathcal{I}$ al haz de ideales que define al cerrado $C = X \setminus U$ e $\mathcal{I}'$ al haz de ideales asociado a $C' = (X \setminus U) \cup \{P\}$ (considerando en ambos cerrados la estructura de subesquema irreducible). Tenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}' \longrightarrow \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{I}/\mathcal{I}' \longrightarrow 0.$$

Como $\mathcal{L}^n$ es plano sobre $\mathcal{O}_X$ (para todo n), también es exacta la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}' \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^n \longrightarrow \mathcal{I} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^n \longrightarrow (\mathcal{I}/\mathcal{I}') \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^n \longrightarrow 0.$$

Si n cumple c) para $\mathcal{I}'$, esto nos da un epimorfismo

$$(\mathcal{I}\mathcal{L}^n)(X) \longrightarrow k(P) \otimes_{\mathcal{O}_{X,P}} \mathcal{L}_P^n,$$

donde hemos usado la estructura del haz $\mathcal{I}/\mathcal{I}'$ determinada en la prueba del teorema 6.17. Veamos ahora que el homomorfismo natural

$$f : (\mathcal{I}\mathcal{L}^n)(X) \otimes_A \mathcal{O}_{X,P} \longrightarrow \mathcal{L}_P^n$$

también es suprayectivo. Para ello consideramos el diagrama siguiente, en el que la línea superior es exacta:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Im} f \otimes_{\mathcal{O}_{X,P}} k(P) \arrow[r] & \mathcal{L}_P^n \otimes_{\mathcal{O}_{X,P}} k(P) \arrow[r] & (\mathcal{L}_P^n/\operatorname{Im} f) \otimes_{\mathcal{O}_{X,P}} k(P) \arrow[r] & 0 \\
\mathcal{I}\mathcal{L}^n(X) \arrow[u] \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

Como la flecha oblicua también es suprayectiva, es claro que

$$(\mathcal{L}_P^n/\operatorname{Im} f) \otimes_{\mathcal{O}_{X,P}} k(P) = 0,$$

luego el lema de Nakayama nos da que $\operatorname{Im} f = \mathcal{L}_P^n$.

Tomemos, pues, $s \in (\mathcal{I}\mathcal{L}^n)(X)$ tal que s_P genere $\mathcal{L}_P^n$. Como en la prueba del teorema 6.17, concluimos ahora que $P \in X_s \subset U$, de donde se sigue a su vez que X_s es afín. Ahora podemos seguir literalmente el final de la prueba de 5.46, que nos da que $\mathcal{L}^m$ es muy amplio, para cierto m, luego $\mathcal{L}$ es amplio, por 5.45. ∎

6.4 El polinomio de Hilbert

Como aplicación de los resultados de la sección anterior vamos a dar una caracterización cohomológica del polinomio de Hilbert de un conjunto algebraico proyectivo X sobre un cuerpo k.

Según el teorema 5.56, tenemos que $X = \operatorname{Proy} S$, donde S es un anillo graduado sobre $S_0 = k$, finitamente generado como k-álgebra por elementos de grado 1. En particular S es un anillo noetheriano. Llamemos $\mathfrak{m} = S_+$, que es un ideal maximal de S, pues $S/\mathfrak{m} \cong k$. Si $\mathcal{M}$ es un haz coherente sobre X, el teorema 5.54 nos da que $\mathcal{M} = \widetilde{M}$, donde M es un S-módulo graduado finitamente generado. Empecemos probando una versión del lema de Nakayama para módulos graduados:

Teorema 6.26 *En las condiciones anteriores, si $m_1, \ldots, m_n \in M$ son homogéneos y generan $M/\mathfrak{m}M$, entonces generan M.*

Demostración: El hecho de que los elementos m_i sean homogéneos implica que $M' = \langle m_1, \ldots, m_n \rangle$ es un submódulo graduado.[4] Sea $N = M/M'$, que es también un S-módulo graduado. Claramente $N/\mathfrak{m}N = 0$, luego $N = \mathfrak{m}N$. Si $N \neq 0$, como N es finitamente generado, tiene que haber un $n \in N$ no nulo y homogéneo de grado mínimo. Este n debería expresarse como

$$n = c_1x_1 + \cdots + c_lx_l, \qquad c_i \in \mathfrak{m},\ x_i \in N.$$

[4] Es fácil ver que un submódulo M' de un módulo graduado M es un submódulo graduado (en el sentido de que es suma directa de los subgrupos $M' \cap M_n$) si y sólo si está generado por elementos homogéneos, si y sólo si cuando un elemento está en M' también lo están sus componentes homogéneas. Comparar con el teorema 1.2.

Igualando las componentes homogéneas, podemos suponer que todos los c_i y los x_i son homogéneos, y que el grado de $c_i x_i$ es el de n. En particular, el grado de cada x_i es menor estrictamente que el de n, luego cada $x_i = 0$ y también $n = 0$, en contradicción con la forma en que lo hemos elegido. Así pues, $N = 0$, lo que significa que $m_1, \ldots, m_n$ generan M. ■

Con este teorema podemos desarrollar una teoría sobre resoluciones minimales de módulos graduados similar a la que hemos desarrollado a partir de la definición [5.57] para módulos sobre anillos locales:

Un *generador minimal* de M es un sistema generador de M formado por elementos homogéneos de cardinal mínimo. Observemos que $M/\mathfrak{m}M$ es un espacio vectorial sobre $k = S/\mathfrak{m}S$. El teorema anterior implica que un conjunto de elementos homogéneos de M es un generador minimal si y sólo si sus clases módulo $\mathfrak{m}M$ son un generador minimal de $M/\mathfrak{m}M$, es decir, si y sólo si son una k-base del cociente.

Una *resolución (libre) graduada* de M es una resolución de M:

$$\cdots \longrightarrow L_2 \xrightarrow{\partial_2} L_1 \xrightarrow{\partial_1} L_0 \xrightarrow{\partial_0} M \longrightarrow 0$$

en la que cada L_i es un S-módulo graduado de la forma

$$L_i = \bigoplus_{j=1}^{t_i} S(n_{ij}),$$

con $n_{ij} \in \mathbb{Z}$, los homomorfismos δ_i son todos homogéneos. La resolución es *minimal* si la imagen de la base canónica de L_i es un generador minimal de $\operatorname{Im} \delta_i$.

Es evidente que M admite una resolución minimal: tomamos un generador minimal de M, digamos $m_1, \ldots, m_{t_0}$, donde $\operatorname{grad} m_j = n_{0j}$, y consideramos el epimorfismo $\partial_0 : S^{t_0} \longrightarrow M$ que transforma la base canónica en los m_j. Entonces δ_0 es un homomorfismo graduado si consideramos cada sumando directo S con la graduación $S(n_{0j})$. Ahora consideramos $N_0 = \mathrm{N}\, \partial_0$, que es un submódulo graduado de L_0. Puesto que S es noetheriano, tenemos que N_0 es finitamente generado, luego tiene un generador minimal, a partir del cual obtenemos un epimorfismo $\partial_1 : L_1 \longrightarrow N_0$ por el mismo procedimiento con el que hemos construido δ_0. Así tenemos una sucesión exacta $L_1 \longrightarrow L_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$, que podemos prolongar indefinidamente hasta una resolución minimal.

Teorema 6.27 *En las condiciones anteriores, una resolución libre de M es minimal si y sólo si $\operatorname{Im} \partial_i \subset \mathfrak{m}L_{i-1}$, para todo $i \geq 1$.*

DEMOSTRACIÓN: La condición equivale a que los epimorfismos

$$L_i/\mathfrak{m}L_i \longrightarrow (\operatorname{Im} \partial_i)/\mathfrak{m}(\operatorname{Im} \partial_i)$$

sean isomorfismos para $i \geq 0$. En efecto, si un $x \in L_i$ cumple que $\partial_i(x) \in \mathfrak{m}\mathrm{Im}\partial_i$, entonces $\partial_i(x) = \partial_i(y)$, con $y \in \mathfrak{m}L_i$, luego $x - y \in \mathrm{N}\, \partial_i = \mathrm{Im}\partial_{i+1} \subset \mathfrak{m}L_i$, luego

$x \in \mathfrak{m}L_i$. Recíprocamente, si los epimorfismos son biyectivos y $x \in L_i$ (con $i \geq 1$), entonces $\partial_{i-1}(\partial_i(x)) = 0$, luego $\partial_i(x) \in \mathfrak{m}L_{i-1}$.

Si la resolución es minimal, la base canónica de L_i se transforma en un generador minimal de $\mathrm{Im}\partial_i$, luego el homomorfismo anterior transforma una base en una base, luego es un isomorfismo. Igualmente se razona el recíproco. ■

Tomemos ahora una resolución miminal de M y consideremos a $k = S/\mathfrak{m}S$ como S-módulo. Entonces, la sucesión

$$\longrightarrow L_2 \otimes_S k \longrightarrow L_1 \otimes_S k \longrightarrow L_0 \otimes_S k \longrightarrow M \otimes_S k \longrightarrow 0$$

tiene todos sus homomorfismos nulos, por el teorema anterior. Por consiguiente,

$$\mathrm{Tor}_i^S(M, k) = L_i \otimes_S k \cong k^{\beta_i},$$

donde $\beta_i = \mathrm{rang}_S L_i$.

A partir de aquí vamos a restringirnos momentáneamente al caso en que $X = \mathrm{P}_k^n$ y, por consiguiente, $S = k[X_0, \ldots, X_r]$. El teorema [5.65] nos da que S es un anillo regular (ver también las observaciones tras [5.21]). El teorema [5.63] nos da que la dimensión homológica de S es $r+1$, luego la dimensión proyectiva de M es menor o igual que $r + 1$, luego admite una resolución proyectiva de longitud $r+1$, con la que podemos calcular $\mathrm{Tor}_i^S(M, k) = 0$ para $i > r+1$. Esto implica a su vez que cualquier resolución minimal de M cumple que $\beta_i = 0$ para $i > r + 1$, lo que equivale a que $L_i = 0$ para $i > r + 1$. En resumen:

Teorema 6.28 (Hilbert) *Si k es un cuerpo y M es un módulo graduado y finitamente generado sobre $S = k[X_0, \ldots, X_r]$, entonces M admite una resolución libre de la forma*

$$0 \longrightarrow L_n \longrightarrow L_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

donde $n \leq r + 1$, los L_i son sumas directas finitas de módulos $S(m_{ij})$, con $m_{ij} \in \mathbb{Z}$ y los homomorfismos de la resolución son graduados.

Usando el teorema 5.14 podemos enunciar este resultado en términos de haces coherentes:

Teorema 6.29 *Si k es un cuerpo y $\mathcal{M}$ es un haz coherente en $X = \mathrm{P}_k^r$, entonces existe una sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_n \longrightarrow \mathcal{L}_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{L}_0 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0,$$

donde $n \leq r + 1$ y cada $\mathcal{L}_i$ es una suma directa de un número finito de haces $\mathcal{O}_X(m_{ij})$.

Veamos una primera consecuencia del teorema de Hilbert (y del de Serre):

Teorema 6.30 *Sea $S = k[X_0, \ldots, X_r]$ y M un S-módulo graduado finitamente generado. Sea $\mathcal{M} = \widetilde{M}$ el haz coherente asociado sobre $X = \mathrm{P}_k^r$. Para todo natural n suficientemente grande, el homomorfismo canónico $M_n \longrightarrow \mathcal{M}(n)(X)$ es un isomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN: Si $M = S$ entonces $\mathcal{M} = \mathcal{O}_X$ y el teorema 5.26 afirma que $\mathcal{M}(n)(X) \cong M_n$ para todo n. Si $M = S(m)$, para un $m \in \mathbb{Z}$, entonces $\mathcal{M} = \mathcal{O}_X(m)$, luego

$$M(n) = S_{m+n} \cong \mathcal{O}_X(m+n)(X) \cong \mathcal{M}(n)(X).$$

Es claro entonces que el teorema se cumple también cuando M es una suma directa de un número finito de módulos $S(m_i)$.

Consideremos ahora una sucesión exacta de módulos graduados:

$$0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0.$$

Vamos a probar que si M y M' cumplen el teorema, también lo cumple M''. Tomemos n suficientemente grande como para que tengamos isomorfismos $M'_n \cong \mathcal{M}'(n)(X)$, $M_n \cong \mathcal{M}(n)(X)$ y para que $H^1(X, \mathcal{M}'(n)) = 0$ (teorema de Serre). Entonces, la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M'(n) \longrightarrow M(n) \longrightarrow M''(n) \longrightarrow 0$$

nos da la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}'(n) \longrightarrow \mathcal{M}(n) \longrightarrow \mathcal{M}''(n) \longrightarrow 0,$$

que a su vez nos da el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & M'' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{M}'(n)(X) \arrow[r] & \mathcal{M}(n)(X) \arrow[r] & \mathcal{M}''(n)(X) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

(La fila inferior es la sucesión exacta de cohomología.) Como las dos primeras flechas verticales son isomorfismos, la tercera también lo es.

Ahora, si M es arbitrario, basta aplicar el teorema de Hilbert, que nos da una resolución

$$0 \longrightarrow L_n \xrightarrow{\partial_n} L_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_0 \xrightarrow{\partial_0} M \longrightarrow 0,$$

en la que todos los módulos L_i cumplen el teorema. Considerando la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow L_n \xrightarrow{\partial_n} L_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \operatorname{Im} \partial_{n-1} \longrightarrow 0$$

llegamos a que $\operatorname{Im} \partial_{n-1} = \mathrm{N}\, \partial_{n-2}$ cumple el teorema, luego la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathrm{N}\, \partial_{n-2} \longrightarrow L_{n-2} \xrightarrow{\partial_{n-2}} \operatorname{Im} \partial_{n-2} \longrightarrow 0$$

nos da que $\operatorname{Im}\partial_{n-1} = \operatorname{N}\partial_{n-3}$ cumple el teorema. Tras un número finito de pasos, llegamos a que M cumple el teorema. ■

Volvemos ahora al caso general en que X es un conjunto algebraico proyectivo arbitrario sobre un cuerpo k.

Definición 6.31 Si X es un conjunto algebraico proyectivo sobre un cuerpo k y $\mathcal{M}$ es un haz coherente en X, definimos la *característica de Euler* de $\mathcal{M}$ como

$$\chi(\mathcal{M}) = \sum_i (-1)^i \dim_k H^i(X, \mathcal{M}).$$

Esta definición es correcta porque los grupos $H^i(X, \mathcal{M})$ son k-espacios vectoriales de dimensión finita por el teorema de Serre 6.21, y además sabemos que son nulos para i suficientemente grande (para i mayor que el cardinal de un cubrimiento de X por abiertos afines, pues entonces la cohomología de Čech se anula).

La característica de Euler se comporta bien en las sucesiones exactas:

Teorema 6.32 *Si X/k es un conjunto algebraico proyectivo sobre un cuerpo k y*

$$0 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{P} \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta de haces coherentes en X, entonces $\chi(\mathcal{N}) = \chi(\mathcal{M}) + \chi(\mathcal{P})$.

Demostración: Basta probar que si tenemos una sucesión exacta de k-espacios vectoriales

$$0 \longrightarrow V_0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow V_n \longrightarrow 0$$

entonces $\sum_i (-1)^i \dim_k V_i = 0$. En efecto, si $n \leq 2$ es evidente, y en general razonamos por inducción sobre n, descomponiendo la sucesión en

$$0 \longrightarrow V_0 \longrightarrow V_1 \longrightarrow \operatorname{Im} d_1 \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \operatorname{Im} d_1 \longrightarrow V_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow V_n \longrightarrow 0$$

y sumando las igualdades correspondientes a ambas.

El teorema se sigue de aplicar esto a la sucesión exacta de cohomología asociada a la sucesión exacta del enunciado. ■

En particular se cumple que $\chi(\mathcal{M} \oplus \mathcal{P}) = \chi(\mathcal{M}) \oplus \chi(\mathcal{P})$.

El resultado principal de esta sección es el siguiente:

Teorema 6.33 *Sea X un conjunto algebraico proyectivo sobre un cuerpo k, sea $\mathcal{O}_X(1)$ un haz muy amplio en X y sea $\mathcal{M}$ un haz coherente en X. Entonces existe un polinomio $P \in \mathbb{Q}[T]$ tal que, para todo $n \in \mathbb{Z}$, se cumple $\chi(\mathcal{M}(n)) = P(n)$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $Y = \mathrm{P}_k^r$ y $f : X \longrightarrow Y$ la inmersión cerrada asociada al haz muy amplio que estamos considerando en X, de modo que se cumple la relación $\mathcal{O}_X(1) = f^*\mathcal{O}_Y(1)$.

En virtud del teorema 6.20 tenemos que $f_*\mathcal{M}$ es un haz coherente en Y, que $f_*(\mathcal{M}(m)) = f_*(\mathcal{M})(m)$ y que $H^i(X, \mathcal{M}) \cong H^i(Y, f_*\mathcal{M})$. Por consiguiente, también $\chi(\mathcal{M}(m)) = \chi((f_*\mathcal{M})(m))$.

Esto reduce el teorema al caso en que $X = \mathrm{P}_k^r$. Observemos en primer lugar que, por el teorema 6.19,

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{O}_X(n)) &= \dim_k H^0(X, \mathcal{O}_X(n)) = +(-1)^r \dim_k H^r(X, \mathcal{O}_X(n)) \\ &= \begin{cases} \dim S_n & \text{si } n \geq 0, \\ (-1)^r \dim S_{-n-r-1} & \text{si } n < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Más concisamente:

$$\chi(\mathcal{O}_X(n)) = \frac{(r+n)(r+n-1)\cdots(n+1)}{r!} = \binom{r+n}{r}.$$

En efecto, la igualdad es clara[5] si $n \geq 0$. Si $n < 0$, entonces $n + 1 \leq 0$. Si $-n - r - 1 < 0$, es decir, si $r + n \geq 0$, el número combinatorio es nulo, al igual que la característica. En cambio, si $-n - r - 1 \geq 0$, tenemos que $r + n \leq -1$, luego

$$\binom{r+n}{r} = (-1)^r \binom{-n-1}{r},$$

que es también el valor correcto de la característica. Así pues, tenemos que $\chi(\mathcal{O}_X(n))$ es un polinomio de grado r con coeficientes racionales. Con esto tenemos probado el teorema para $\mathcal{M} = \mathcal{O}_X$.

En realidad tenemos probado el teorema cuando $\mathcal{M} = \mathcal{O}_X(m)$, pues si $P(T)$ es el polinomio para $\mathcal{O}_X$, entonces $P(T + m)$ es el polinomio para $\mathcal{O}_X(m)$. La aditividad de la característica de Euler hace que el teorema sea cierto también cuando $\mathcal{M}$ es suma directa de haces $\mathcal{O}_X(m_i)$. Finalmente, el teorema 6.29 nos da la prueba para un haz coherente arbitrario $\mathcal{M}$, pues el mismo argumento empleado en la prueba de 6.32 nos da que

$$\chi(\mathcal{M}(n)) = \pm \sum_i (-1)^i \chi(\mathcal{L}_i(n)).$$

■

Evidentemente, el polinomio dado por el teorema anterior está completamente determinado por $\mathcal{M}$ y $\mathcal{O}_X(1)$ (pues un polinomio está completamente determinado por su valor en infinitos puntos). Ahora vamos a probar que el polinomio dado por el teorema anterior no es realmente nada nuevo:

Consideremos un conjunto algebraico proyectivo X/k, sea $\mathcal{L}$ un haz muy amplio en X y sea $\mathcal{M}$ un haz coherente. Entonces podemos representar a X en la forma $X = \operatorname{Proy} B$, donde $B = S/I$, con $S = k[X_0, \ldots, X_r]$ e I un

[5] Ver la nota al pie de la [página 170].

ideal homogéneo de S, de forma que $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(1)$. A su vez, el haz $\mathcal{M}$ será de la forma $\mathcal{M} = \widetilde{M}$, donde M es un B-módulo graduado. Consideremos la inmersión canónica $i : X \longrightarrow \mathrm{P}_k^r$.

Es fácil ver que $i_*\mathcal{M} = \widetilde{M}$, donde en el miembro derecho consideramos a M como S-módulo graduado. Por los teoremas 6.20, 6.21 y 6.30 tenemos que, para todo natural n suficientemente grande,

$$\chi(\mathcal{M}(n)) = H^0(X, \mathcal{M}(n)) \cong H^0(\mathrm{P}_k^r, \widetilde{M}(n)) \cong \widetilde{M}(n)(\mathrm{P}_k^r) \cong M_n.$$

Por consiguiente, el polinomio dado por el teorema anterior no es sino el polinomio de Hilbert de M.

Definición 6.34 Si X es un esquema proyectivo sobre un cuerpo k, $\mathcal{O}_X(1)$ es un haz muy amplio en X y $\mathcal{M}$ es un haz coherente en X, llamaremos *polinomio de Hilbert* de $\mathcal{M}$ (respecto del haz muy amplio prefijado) al único polinomio $P_{\mathcal{M}}(T) \in \mathbb{Q}[T]$ que cumple $P_{\mathcal{M}}(n) = \chi(\mathcal{M}(n))$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Según acabamos de ver, si $X = \operatorname{Proy} B$ y M es un B-módulo graduado, entonces el polinomio de Hilbert $P_M(T)$ definido en la sección 3.3 es el polinomio de Hilbert del haz $\widetilde{M}$ respecto del haz muy amplio $\mathcal{O}_X(1)$ asociado a B.

En particular, el polinomio de Hilbert de X es el que ahora hemos definido como polinomio de Hilbert de $\mathcal{O}_X$.

La nueva definición del polinomio de Hilbert no es realmente una generalización de la anterior, sino tan sólo una reformulación, ya que todo conjunto algebraico proyectivo puede representarse como $\operatorname{Proy} B$ y todo haz coherente puede expresarse como $\widetilde{M}$. Lo que aporta de nuevo es que ahora sabemos que el polinomio de Hilbert de un módulo M sobre un conjunto X no depende directamente de la inmersión cerrada $f : X \longrightarrow \mathrm{P}_k^r$ que permite representarlo como $\operatorname{Proy} B$, sino a través del haz muy amplio $\mathcal{O}_X(1)$ determinado por la inmersión. Además, la primera definición sólo interpretaba los números $P_M(n)$ para valores grandes de n, mientras que la nueva nos dice qué es $P_{\mathcal{M}}(n)$ para todo entero n. Vamos a enunciar esto para el caso particular del polinomio de un conjunto algebraico:

Teorema 6.35 *Si X es un conjunto algebraico proyectivo sobre un cuerpo k y $\mathcal{O}_X(1)$ es un haz muy amplio, el polinomio de Hilbert de X (respecto a dicho haz) verifica que*

$$P_X(n) = \chi(\mathcal{O}_X(n)),$$

para todo entero n.

En particular,

$$P_X(0) = \chi(\mathcal{O}_X) = \sum_i (-1)^i \dim_k H^i(X, \mathcal{O}_X)$$

es independiente del haz muy amplio considerado (es un invariante de X, se conserva por isomorfismos). En particular, el género aritmético

$$p_a(X) = (-1)^d(P_X(0) - 1),$$

es también un invariante (donde d es la dimensión de X).

En el ejemplo de la página 71 hemos visto que el polinomio de Hilbert de P_k^r (respecto al haz muy amplio $\mathcal{O}_{\mathrm{P}_k^r}(1)$) es $P(T) = \binom{T+r}{r}$, luego ahora deducimos que

$$\chi(\mathcal{O}_{\mathrm{P}_k^r}(n)) = \binom{n+r}{r}.$$

A su vez, esto implica que el polinomio de Hilbert de P_k^r respecto al haz muy amplio $\mathcal{O}_{\mathrm{P}_k^r}(d)$ es $P(T) = \binom{dT+r}{r}$, cuyo coeficiente director es $d^r/r!$. Ahora es inmediato el teorema siguiente:

Teorema 6.36 *Si $f : \mathrm{P}_k^r \longrightarrow \mathrm{P}_k^n$ es una inmersión tal que $f^*\mathcal{O}_{\mathrm{P}_k^n}(1) = \mathcal{O}_{\mathrm{P}_k^r}(d)$, entonces su imagen es un conjunto algebraico proyectivo de P_k^n de grado d^r.*

Así, ahora es inmediato que la curva del ejemplo de la página 76 tiene grado 3, o que las curvas del ejemplo de la página 179 tienen grado 4. En este último ejemplo hemos demostrado que sólo existe una cúbica en P_k^3 isomorfa[6] a P_k^1, mientras que existen infinitas cuárticas en P_k^3 (si k es infinito) isomorfas a P_k^1 y que no se corresponden dos a dos por ningún automorfismo de P_k^3.

Ejemplo Consideremos la inmersión $f : \mathrm{P}_k^2 \longrightarrow \mathrm{P}_k^5$ de grado 2, es decir, la inmersión asociada al haz $\mathcal{O}_{\mathrm{P}_k^2}(2)$ y a la correspondencia

$$f^*X_0 = S^2,\ f^*X_1 = T^2,\ f^*X_2 = U^2,\ f^*X_3 = ST,\ f^*X_4 = SU,\ f^*X_5 = TU.$$

Su imagen es una superficie S isomorfa a P_k^2, pero su grado no es 2, sino 4. Para poner esto en evidencia vamos a considerar su intersección con el hiperplano $H = V(X_5)$, que tiene grado 1. Según el teorema de Bezout, la intersección $S \cap H$ ha de tener grado 4.

Observemos que $f^{-1}[H] = V(TU) = V(T) \cup V(U)$, luego podemos descomponer $S \cap H = C_1 \cup C_2$, donde $C_1 = f[V(T)]$ y $C_2 = f[V(U)]$.

Si componemos la inmersión natural $\mathrm{P}_k^1 \longrightarrow \mathrm{P}_k^2$ cuya imagen es $V(T)$ con la inmersión f, obtenemos la inmersión $\mathrm{P}_k^1 \longrightarrow \mathrm{P}_k^5$ asociada al generador global de $\mathcal{O}_{\mathrm{P}_k^1}(2)$ formado por $S^2, 0, U^2, 0, SU, 0$, luego C_1 es una curva de grado 2, e igualmente obtenemos una inmersión asociada al generador global $S^2, T^2, 0, ST, 0, 0$ cuya imagen es C_2, lo que prueba que C_2 es también una curva de grado 2.

Aquí estamos considerando a C_1 y C_2 con sus estructuras de subesquema cerrado reducido en P_k^5, pero hay que tener presente que pueden tener una multiplicidad en $S \cap H$. Pero lo que tenemos en total es que

$$4 = \operatorname{grad}(S \cap H) = \mu(C_1) \operatorname{grad} C_1 + \mu(C_2) \operatorname{grad} C_2 = 2\mu(C_1) + 2\mu(C_2).$$

[6]Observemos que no hace falta especificar que no está contenida en ningún hiperplano, pues no puede estarlo: el tal caso podríamos pasar a una inmersión cerrada $\mathrm{P}_k^1 \longrightarrow \mathrm{P}_k^2$ cuya imagen sería una hipersuperficie de grado 3 y género aritmético 0, mientras que la nota de la página 73 exige que en tal caso el género sea 1.

Concluimos que las multiplicidades son 1 y que, en definitiva, el hiperplano H corta a S en dos curvas de grado 2.

En cambio, es fácil ver que el hiperplano $H' = V(X_0)$ corta a S en una única curva de grado 2 que, por consiguiente, ha de tener multiplicidad 2 en la intersección. ■

Veamos ahora qué podemos decir sobre el género de un esquema proyectivo a partir de la caracterización cohomológica del polinomio de Hilbert:

Ejemplo Si X es un esquema proyectivo geométricamente íntegro sobre un cuerpo k, el teorema 4.26 nos da que

$$H^0(X, \mathcal{O}_X) = \mathcal{O}_X(X) = k,$$

luego el sumando $\dim_k H^0(X, \mathcal{O}_X)$ se cancela con el 1 que aparece en la definición de género aritmético, y el factor $(-1)^d$ hace que el término $\dim_k H^d(X, \mathcal{O}_X)$ aparezca con signo positivo en la suma alternada. Así pues:

$$p_a(X) = \dim_k H^d(X, \mathcal{O}_X) - \dim_k H^{d-1}(X, \mathcal{O}_X) + \cdots + (-1)^{d-1} \dim_k H^1(X, \mathcal{O}_X).$$

En particular, si X es una curva proyectiva geométricamente íntegra,

$$p_a(X) = \dim_k H^1(X, \mathcal{O}_X).$$

■

Ejemplo Sea $X = \mathrm{P}_k^r$ y $x \in X$ un punto cerrado. Consideramos en x su estructura de subesquema cerrado reducido. El polinomio de Hilbert P_x es constante, y este valor constante (igual, por ejemplo, a $P_x(0)$) es lo que en 3.33 hemos definido como el grado de x. Ahora podemos calcularlo explícitamente:

$$\operatorname{grad} x = P_x(0) = \chi(\mathcal{O}_x) = \dim_k \mathcal{O}_x(x)$$

$$= \dim_k \mathcal{O}_{x,x} = \dim_k \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_k = \dim_k k(x).$$

■

Enseguida vamos a necesitar el siguiente resultado de álgebra conmutativa:

Teorema 6.37 *Sea A un dominio íntegro noetheriano local, sea k su cuerpo de restos y K su cuerpo de cocientes. Si M es un A-módulo finitamente generado y $\dim_k M \otimes_A k = \dim_K M \otimes_A K = r$, entonces M es libre de rango r.*

DEMOSTRACIÓN: Si $M \otimes_A k = \langle m_1 \otimes 1, \ldots, m_r \otimes 1 \rangle$, consideramos el submódulo $N = \langle m_1, \ldots, m_r \rangle$. En la sucesión exacta

$$N \otimes_A k \longrightarrow M \otimes_A k \longrightarrow (M/N) \otimes_A k \longrightarrow 0$$

el primer homomorfismo es suprayectivo, luego $(M/N) \otimes_A k = 0$, y el lema de Nakayama nos da que $M = N$, es decir, que M admite un generador con r elementos. De aquí obtenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow A^r \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

y, como K es plano sobre A, tenemos también

$$0 \longrightarrow R \otimes_A K \longrightarrow K^r \longrightarrow M \otimes_A K \longrightarrow 0.$$

La dimensión de $M \otimes_A K$ implica que el epimorfismo es en realidad un isomorfismo, luego $R \otimes_A K = 0$.

De aquí podemos deducir que $R = 0$, pues si existiera $r \in R$ no nulo, entonces tendríamos un monomorfismo $\langle r \rangle \otimes_A K \longrightarrow R \otimes_A K = 0$, pero R es libre de torsión, luego $0 = \langle r \rangle \otimes_A K \cong A \otimes_A K \cong K$, lo cual es absurdo. Así pues, $M \cong A^r$ es un A-módulo libre de rango r. ■

Vamos a probar que los homomorfismos proyectivos son planos si y sólo si todas sus fibras tienen el mismo polinomio de Hilbert. En efecto, sea $X \longrightarrow T$ un homomorfismo proyectivo. Esto significa que podemos descomponerlo en una inmersión cerrada $X \longrightarrow \mathrm{P}_T^r = \mathrm{P}_\mathbb{Z}^r \otimes_\mathbb{Z} T$ seguida de la proyección $\mathrm{P}_T^r \longrightarrow T$. Sea ahora $t \in T$ un punto arbitrario. Tenemos una inmersión cerrada

$$X_t = X \otimes_T \operatorname{Esp} k(t) \longrightarrow \mathrm{P}_T^r \otimes_T \operatorname{Esp} k(t)$$

$$= \mathrm{P}_\mathbb{Z}^r \otimes_\mathbb{Z} T \otimes_T \operatorname{Esp} k(t) = \mathrm{P}_\mathbb{Z}^r \otimes_\mathbb{Z} \operatorname{Esp} k(t) = \mathrm{P}_{k(t)}^r.$$

Así pues, cada fibra X_t puede verse de forma natural como un conjunto algebraico proyectivo sobre $k(t)$.

Consideremos el caso particular en que tanto X como T son conjuntos algebraicos proyectivos sobre un cuerpo k algebraicamente cerrado. Entonces cualquier homomorfismo $X \longrightarrow T$ definido sobre k es proyectivo. A partir de una inmersión cerrada $X \longrightarrow \mathrm{P}_k^r$ podemos obtener la siguiente factorización del homomorfismo dado:

$$X \cong X \times_T T \longrightarrow X \times_k T \longrightarrow \mathrm{P}_k^r \times_k T \cong \mathrm{P}_T^r \longrightarrow T.$$

Si $t \in T$ es un punto cerrado, entonces $k(t) = k$, y la factorización correspondiente a la fibra es

$$X_t \cong X \times_T \operatorname{Esp} k(t) \longrightarrow X \times_k \operatorname{Esp} k(t) \longrightarrow \mathrm{P}_k^r \times_k \operatorname{Esp} k \cong \mathrm{P}_k^r \longrightarrow k.$$

Equivalentemente, podemos expresarla como la composición

$$X_t \longrightarrow X \longrightarrow \mathrm{P}_k^r \longrightarrow k.$$

En otras palabras, la inmersión cerrada $X_t \longrightarrow \mathrm{P}_k^r$ que estamos considerando es en este caso la composición de la inmersión cerrada natural $X_t \longrightarrow X$ con la inmersión dada $X \longrightarrow \mathrm{P}_k^r$.

Teorema 6.38 *Sea T un esquema íntegro noetheriano y sea $X \subset \mathrm{P}_T^r$ un subesquema cerrado. Para cada $t \in T$, sea P_t el polinomio de Hilbert de la fibra X_t, considerada como subesquema cerrado de $\mathrm{P}^r_{k(t)}$. Entonces X es plano sobre T si y sólo si el polinomio P_t es independiente de t.*

Demostración: Tenemos el siguiente diagrama conmutativo, en el que las flechas verticales son inmersiones cerradas:

$$\begin{tikzcd} X_t \arrow[r, "p_t"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "i'"] \\ \mathrm{P}^r_{k(t)} \arrow[r, "p_t'"'] & \mathrm{P}^r_T \end{tikzcd}$$

Entonces, teniendo en cuenta el teorema [B.5],

$$i_*\mathcal{O}_{X_t} \cong i_*p_t^*\mathcal{O}_X \cong i_*p_t^*i'^*i'_*\mathcal{O}_X \cong i_*i^*p_t'^*i'_*\mathcal{O}_X \cong p_t'^*i'_*\mathcal{O}_X.$$

Llamemos $\mathcal{F} = i'_*\mathcal{O}_X$, que es un haz coherente en P^r_T. Para cada natural m suficientemente grande se cumple que

$$P_t(m) = \dim_{k(t)} H^0(X_t, \mathcal{O}_{X_t}(m)) = \dim_{k(t)} H^0(\mathrm{P}^r_{k(t)}, (i_*\mathcal{O}_{X_t})(m))$$

$$= \dim_{k(t)} H^0(\mathrm{P}^r_{k(t)}, (p_t'^*\mathcal{F})(m)).$$

Así pues, P_t es también el polinomio de Hilbert del haz coherente $p_t'^*\mathcal{F}$.

En general, si $X \longrightarrow Y$ es un homomorfismo de esquemas y $\mathcal{F}$ es un haz sobre X, diremos que $\mathcal{F}$ es *plano* sobre Y si para cada $P \in X$ se cumple que $\mathcal{F}_P$ es un $\mathcal{O}_{Y,f(P)}$-módulo plano. En estos términos, X es plano sobre Y si y sólo si lo es $\mathcal{O}_X$.

En nuestro contexto, $\mathcal{F}$ es plano sobre T si y sólo si $\mathcal{O}_X$ también lo es, pues, para cada $P \in X$, se cumple que $\mathcal{O}_{X,P} \cong \mathcal{F}_{i'(P)}$, mientras que $\mathcal{F}_Q = 0$ si $Q \notin i'[X]$.

En vista de todo esto, basta probar que si $\mathcal{F}$ es un haz coherente sobre P^r_T, entonces $\mathcal{F}$ es plano sobre T si y sólo si el polinomio de Hilbert de $p_t'^*\mathcal{F}$ es independiente de t.

Fijemos ahora un punto $t_0 \in T$ y llamemos $T' = \operatorname{Esp} \mathcal{O}_{T,t_0}$, que es también un esquema íntegro noetheriano. Consideremos el homomorfismo $i : T' \longrightarrow T$ dado por el teorema 3.5. Llamemos t_0' al ideal maximal de $\mathcal{O}_{T,t}$, y τ' a su punto genérico (el ideal nulo). Es claro que $i(t_0') = t_0$, así como que $i(\tau') = \tau$ (el punto genérico de T). Tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \mathrm{P}^r_{T'} \arrow[r, "j"] \arrow[d] & \mathrm{P}^r_T \arrow[d] \\ T' \arrow[r, "i"'] & T \end{tikzcd}$$

Sea $\mathcal{F}' = j^*\mathcal{F}$, que es un haz coherente en $\mathrm{P}^r_{T'}$. Consideremos un punto $P' \in \mathrm{P}^r_{T'}$, sea t' su imagen en T, sea $P = j(P')$ y sea $t = i(t')$. Es claro que el homomorfismo $\mathcal{O}_{T,t} \longrightarrow \mathcal{O}_{T',t'}$ es un isomorfismo, que se corresponde con el isomorfismo natural $\mathcal{F}'_{P'} \cong \mathcal{F}_P$, por lo que $\mathcal{F}'_{P'}$ es plano sobre $\mathcal{O}_{T',t'}$ si y sólo si $\mathcal{F}_P$ es plano sobre $\mathcal{O}_{T,t}$.

Por otra parte, consideramos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{P}^r_{k(t')} \arrow[r, "p'_{t'}"] \arrow[d, "j'"'] & \mathrm{P}^r_{T'} \arrow[d, "j"] \\
\mathrm{P}^r_{k(t)} \arrow[r, "p_t"'] & \mathrm{P}^r_T
\end{tikzcd}$$

La flecha vertical izquierda es un isomorfismo, a través del cual $p'^*_{t'}\mathcal{F}'$ se corresponde con $p_t^*\mathcal{F}$. Esto implica que los polinomios de Hilbert de ambos haces coinciden.

Vamos a comprobar que estos hechos nos permiten reducir el teorema al caso en que T es el espectro de un dominio íntegro noetheriano local. Supongamos el teorema probado en este caso.

Si $\mathcal{F}$ es plano sobre T, entonces $\mathcal{F}'$ es plano sobre T', y por la hipótesis de que T' cumple el teorema, tenemos que el polinomio de Hilbert P_{t_0} coincide con P_τ, para todo t_0, como había que probar.

Recíprocamente, si los polinomios de Hilbert P_t son independientes de $t \in T$, igualmente los polinomios de Hilbert $P_{t'}$ son independientes de $t' \in T'$, luego $\mathcal{F}'$ es plano sobre T'. Si a esto añadimos que la fibra de t'_0 es isomorfa a la de t_0, de aquí se sigue que $\mathcal{F}_P$ es plano sobre $\mathcal{O}_{T,t_0}$ para todo $P \in \mathrm{P}^r_T$ cuya imagen en T sea t_0. Como esto es válido para todo t_0, concluimos que $\mathcal{F}$ es plano sobre T.

A partir de aquí suponemos que $T = \operatorname{Esp} A$, donde A es un dominio íntegro noetheriano local. Llamamos $X = \mathrm{P}^r_T = \mathrm{P}^r_A$ y fijamos un haz coherente $\mathcal{F}$ en X. Vamos a probar que las tres afirmaciones siguientes son equivalentes:

a) $\mathcal{F}$ es plano sobre T.

b) $H^0(X, \mathcal{F}(m))$ es un A-módulo libre de rango finito, para todo natural m suficientemente grande.

c) Si $p_t : \mathrm{P}^r_{k(t)} \longrightarrow \mathrm{P}^r_T$ es la proyección natural, el polinomio de Hilbert P_t de $p_t^*\mathcal{F}$ no depende de t.

En efecto, veamos que a) $\Rightarrow$ b): En primer lugar observamos que los haces $\mathcal{O}_X(m)$ son localmente libres, luego, para cada $P \in X$ se cumple que $\mathcal{O}_X(m)_P$ es un $\mathcal{O}_{X,P}$-módulo plano y el $\mathcal{O}_{X,P}$-módulo $\mathcal{F}_P$ es un $\mathcal{O}_{T,t}$-módulo plano (donde $t \in T$ es la imagen de P). Esto implica que $\mathcal{F}(m)_P = \mathcal{F}_P \otimes_{\mathcal{O}_{X,P}} \mathcal{O}_X(m)_P$ es también un $\mathcal{O}_{T,t}$-módulo plano. En suma: los haces $\mathcal{F}(m)$ son planos, para todo entero m.

Calculamos $H^0(X, \mathcal{F}(m))$ como el grupo de cohomología de Čech asociado al cubrimiento afín estándar $\mathcal{U}$ de X. El teorema [A.5] implica que, para todo abierto afín U de X, los A-módulos $\mathcal{F}(m)(U)$ son planos, de donde se sigue que todos los $C^i(\mathcal{U}, \mathcal{F}(m))$ son A-módulos planos. Por el teorema 6.21, tomando m suficientemente grande tenemos que $H^i(X, \mathcal{F}(m)) = 0$ para $i \geq 1$, luego tenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow H^0(X, \mathcal{F}(m)) \longrightarrow C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}(m)) \longrightarrow \cdots \longrightarrow C^r(\mathcal{U}, \mathcal{F}(m)) \longrightarrow 0.$$

Ahora basta aplicar repetidamente el teorema [A.10] para concluir que el A-módulo $H^0(X, \mathcal{F}(m))$ es plano, pero por el teorema 6.21 sabemos también que es finitamente generado, luego es libre, ya que A es un anillo local (teorema [A.4]).

b) $\Rightarrow$ a) Sea $S = A[X_0, \ldots, X_r]$ y sea

$$M = \bigoplus_{m \geq m_0} H^0(X, \mathcal{F}(m)),$$

donde m_0 es suficientemente grande como para que los grupos de cohomología sean A-módulos libres. Por el teorema 5.54 tenemos que $\mathcal{F} = \widetilde{M}$. Como M es un A-módulo libre, es plano. Como S_{X_i} es plano sobre S, es claro entonces que los módulos $M_{X_i} = M \otimes_S S_{X_i}$ son también planos sobre A, así como que $M_{X_i} = M_{(X_i)} \oplus M_i'$ (donde M_i' está formado por los cocientes m/X_i^r tales que ninguna componente homogénea de $m \in M$ tiene grado r). Esto implica que los A-módulos $M_{(X_i)}$ son planos. Finalmente, si $P \in X$ entonces existe una indeterminada X_i tal que $P \in D(X_i)$, con lo que $\mathcal{F}_P$ es una localización de $M_{(X_i)}$ respecto de un ideal primo de $\mathcal{O}_X(D(X_i))$, que será plana sobre el correspondiente $\mathcal{O}_{T,t}$. En suma, tenemos que $\mathcal{F}$ es plano.

b) $\Rightarrow$ c) Basta probar que, para valores grandes de m,

$$P_t(m) = \operatorname{rang}_A H^0(X, \mathcal{F}(m)).$$

Para ello veremos que

$$H^0(X_t, p_t^*\mathcal{F}(m)) \cong H^0(X, \mathcal{F}(m)) \otimes_A k(t)$$

y en la prueba no usaremos la hipótesis b), por lo que luego podremos usar este isomorfismo en la prueba de la implicación inversa.

Vamos a ver que no perdemos generalidad si suponemos que t es el punto cerrado de T. En efecto, sea $A' = A_t$ y $T' = \operatorname{Esp} A'$. El homomorfismo $T' \longrightarrow T$ es plano, transforma en t el punto cerrado $t' \in T'$ e induce un isomorfismo $k(t) \longrightarrow k(t')$.

Llamamos $X' = X \times_T T'$ y $\mathcal{F}' = p'^*\mathcal{F}$, donde $p' : X' \longrightarrow X$ es la proyección. El teorema 6.15 nos da que $H^0(X', \mathcal{F}'(m)) \cong H^0(X, \mathcal{F}(m)) \otimes_A A'$. Por otra parte,

$$X'_{t'} = X \times_T T' \times_{T'} k(t') \cong X \times_T k(t') \cong X \times_T k(t) \times_{k(t)} k(t') = X_t \times_{k(t)} k(t').$$

En otras palabras, $X'_{t'}$ se obtiene de X_t por el cambio de base $k(t) \longrightarrow k(t')$, obviamente plano, luego 6.15 nos da también que

$$H^0(X'_{t'}, p'^*_{t'}\mathcal{F}'(m)) \cong H^0(X_t, p_t^*\mathcal{F}(m)) \otimes_{k(t)} k(t').$$

Aquí hemos usado la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd} X'_{t'} \arrow[r, "p'_t"] \arrow[d] & X' \arrow[d, "p'"] \\ X_t \arrow[r, "p_t"'] & X \end{tikzcd}$$

sobre el haz $\mathcal{F}$.

Si demostramos el segundo isomorfismo en

$$H^0(X_t, p_t^*\mathcal{F}(m)) \otimes_{k(t)} k(t') \cong H^0(X'_{t'}, p'^*_{t'}\mathcal{F}'(m)) \cong H^0(X, \mathcal{F}'(m)) \otimes_{A'} k(t')$$

$$\cong H^0(X, \mathcal{F}(m)) \otimes_A A' \otimes_{A'} k(t') \cong H^0(X, \mathcal{F}(m)) \otimes_A k(t) \otimes_{k(t)} k(t'),$$

tendremos claramente el isomorfismo para t. Así pues, podemos suponer que t es el punto cerrado de T (con lo que p_t es una inmersión cerrada. Si llamamos $\mathcal{F}_0 = p_{t*}p_t^*\mathcal{F}$, el teorema 6.20 nos da que

$$H^0(X_t, p_t^*\mathcal{F}(m)) \cong H^0(X, \mathcal{F}_0(m)).$$

Por otra parte, por 5.8 tenemos que, si U es un abierto afín en X, entonces

$$\mathcal{F}_0(U) = \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{O}_{X_t}(p_t^{-1}[U])$$

$$\cong \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{O}_X(U) \otimes_A k(t) \cong \mathcal{F}(U) \otimes_A k(t).$$

Fijamos una sucesión exacta

$$A^n \longrightarrow A \longrightarrow k(t) \longrightarrow 0.$$

Multiplicando por $\mathcal{F}(m)(U) \otimes_A$ obtenemos la sucesión exacta

$$\mathcal{F}(U)^n \longrightarrow \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}_0(U) \longrightarrow 0.$$

Estas sucesiones exactas (para cada U) determinan una sucesión exacta

$$\mathcal{F}^n \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}_0 \longrightarrow 0$$

(donde el exponente n representa una suma directa.) Por el teorema 6.22, para todo m suficientemente grande tenemos una sucesión exacta

$$H^0(X, \mathcal{F}(m))^n \longrightarrow H^0(X, \mathcal{F}(m)) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{F}_0(m)) \longrightarrow 0.$$

Por otra parte, si multiplicamos por $H^0(X, \mathcal{F}(m)) \otimes_A$ la sucesión exacta de partida obtenemos una sucesión exacta

$$H^0(X, \mathcal{F}(m))^n \longrightarrow H^0(X, \mathcal{F}(m)) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{F}(m)) \otimes_A k(t) \longrightarrow 0.$$

Se comprueba que el primer homomorfismo de ambas sucesiones es el mismo, de donde concluimos que $H^0(X, \mathcal{F}_0(m)) \cong H^0(X, \mathcal{F}(m)) \otimes_A k(t)$.

c) $\Rightarrow$ b) La hipótesis c) juntamente con el isomorfismo que hemos obtenido en la prueba de la implicación precedente nos da que $\dim_{k(t)} H^0(X, \mathcal{F}) \otimes_A k(t)$ es independiente de $t \in A$. Si consideramos como t el punto cerrado y el punto genérico de T, el cuerpo $k(t)$ es, respectivamente, el cuerpo de restos y el cuerpo de cocientes de A, luego el teorema 6.37 nos da la conclusión. ■

Así, si k es un cuerpo algebraicamente cerrado, $X \subset \mathrm{P}_k^r$ es un conjunto algebraico proyectivo y $X \longrightarrow T$ es un homomorfismo plano en otro conjunto algebraico proyectivo T, para cada punto cerrado $t \in T$ se cumple que el polinomio de Hilbert de la fibra X_t, vista como subesquema cerrado de P_k^r, es independiente de t. En particular, todas las fibras cerradas tienen la misma dimensión y el mismo género.

6.5 Imágenes directas superiores

Si $f : X \longrightarrow Y$ es un homomorfismo entre espacios anillados, al final del Apéndice [B] vimos que el funtor $f_* : \mathrm{Mod}(X) \longrightarrow \mathrm{Mod}(Y)$ es exacto por la izquierda, por lo que podemos considerar sus funtores derivados por la derecha. Estos funtores están íntimamente relacionados con la cohomología de X y resultan ser una herramienta muy útil para estudiarla. En la sección siguiente los usaremos para generalizar el teorema 6.21 a) al caso de homomorfismos propios, no necesariamente proyectivos.

Definición 6.39 Sea $f : X \longrightarrow Y$ un homomorfismo de espacios anillados. Llamaremos $D^m f_* : \mathrm{Mod}(X) \longrightarrow \mathrm{Mod}(Y)$ a los funtores derivados del funtor $f_* : \mathrm{Mod}(X) \longrightarrow \mathrm{Mod}(Y)$. Si $\mathcal{M}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo, el $\mathcal{O}_Y$-módulo $D^m f_* \mathcal{M}$ se llama *imagen directa i-ésima* de $\mathcal{M}$ por f.

La relación básica entre las imágenes directas de un haz por un homomorfismo de esquemas y sus grupos de cohomología es el siguiente:

Teorema 6.40 *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un homomorfismo de espacios anillados y sea $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo. Entonces $D^m f_* \mathcal{M}$ es el haz asociado al prehaz dado por*

$$V \mapsto H^m(f^{-1}[V], \mathcal{M}|_{f^{-1}[V]}).$$

DEMOSTRACIÓN: Llamemos $\mathcal{H}^m(X, \mathcal{M})^-$ al prehaz en Y descrito en el enunciado y $\mathcal{H}^m(X, \mathcal{M})$ a su compleción, que es, de hecho, un $\mathcal{O}_Y$-módulo. Así, para cada natural m, tenemos definido un funtor $\mathcal{H}^m(X, -) : \mathrm{Mod}(X) \longrightarrow \mathrm{Mod}(Y)$. Vamos a aplicar el teorema [1.50].

Para $m = 0$, el prehaz considerado es $f_*\mathcal{M}$, por lo que en particular es ya un haz, y el funtor $\mathcal{H}^0(X, -)$ es isomorfo a f_*.

Consideremos ahora una sucesión exacta de $\mathcal{O}_X$-módulos

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}' \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}'' \longrightarrow 0.$$

Si $V \subset Y$ es un abierto, también es exacta la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}'|_{f^{-1}[V]} \longrightarrow \mathcal{M}|_{f^{-1}[V]} \longrightarrow \mathcal{M}''|_{f^{-1}[V]} \longrightarrow 0,$$

la cual determina a su vez una sucesión exacta larga de $\mathcal{O}_Y(V)$-módulos:

$$\begin{gathered}
0 \longrightarrow H^0(f^{-1}[V], \mathcal{M}'|_{f^{-1}[V]}) \longrightarrow H^0(f^{-1}[V], \mathcal{M}|_{f^{-1}[V]}) \\
\longrightarrow H^0(f^{-1}[V], \mathcal{M}''|_{f^{-1}[V]}) \longrightarrow H^1(f^{-1}[V], \mathcal{M}'|_{f^{-1}[V]}) \\
\longrightarrow H^1(f^{-1}[V], \mathcal{M}|_{f^{-1}[V]}) \longrightarrow H^1(f^{-1}[V], \mathcal{M}''|_{f^{-1}[V]}) \longrightarrow \cdots
\end{gathered}$$

Es claro que estas sucesiones para los distintos abiertos V determinan una sucesión exacta de prehaces

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}^0(X, \mathcal{M}')^- \longrightarrow \mathcal{H}^0(X, \mathcal{M})^- \longrightarrow \mathcal{H}^0(X, \mathcal{M}'')^- \longrightarrow \mathcal{H}^1(X, \mathcal{M}')^- \longrightarrow \cdots$$

La sucesión es exacta en el sentido de que lo son las sucesiones locales. Como éstas no se alteran al pasar a las compleciones, tenemos también una sucesión exacta de $\mathcal{O}_Y$-módulos

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}^0(X, \mathcal{M}') \longrightarrow \mathcal{H}^0(X, \mathcal{M}) \longrightarrow \mathcal{H}^0(X, \mathcal{M}'') \xrightarrow{\delta_0} \mathcal{H}^1(X, \mathcal{M}') \longrightarrow \cdots$$

Se comprueba sin dificultad que los homomorfismos δ_i forman un homomorfismo de conexión para los funtores $\mathcal{H}^m(X, -)$, en el sentido de [1.48].

Por último, si $\mathcal{I}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo inyectivo, entonces $\mathcal{I}|_{f^{-1}[V]}$ es un $\mathcal{O}_{f^{-1}[V]}$-módulo inyectivo por [1.30], luego $\mathcal{H}^m(X, \mathcal{M})^- = 0$ para todo $m \geq 1$, y también $\mathcal{H}^m(X, \mathcal{M}) = 0$. El teorema [1.50] nos garantiza que $\mathcal{H}^m(X, -)$ es una familia universal de funtores y, por consiguiente, tenemos isomorfismos naturales $D^m f_* \cong \mathcal{H}^m(X, -)$. ■

El teorema [2.8] implica ahora que $D^m f_* \mathcal{M} = 0$ cuando $m \geq 1$ y $\mathcal{M}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo diseminado. Así pues, las imágenes directas superiores pueden calcularse a partir de resoluciones diseminadas, no necesariamente inyectivas. En particular, si $\mathcal{M}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo arbitrario, la estructura de grupo abeliano en $D^m f_* \mathcal{M}$ depende únicamente de la estructura de haz de grupos abelianos en $\mathcal{M}$ (por el mismo argumento empleado tras la prueba de [2.8] para el caso de los grupos $H^n(X, \mathcal{M})$).

En el caso de haces cuasicoherentes en un esquema podemos decir más, pero necesitamos un resultado previo:

Teorema 6.41 *Sea X un esquema noetheriano y $\mathcal{M}$ un haz cuasicoherente en X. Entonces existe un monomorfismo $\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{I}$ de $\mathcal{M}$ en un haz cuasicoherente $\mathcal{I}$ que es inyectivo en la categoría de los haces cuasicoherentes sobre X.*

DEMOSTRACIÓN: Sea U_i un cubrimiento finito de X por abiertos afines. Como $\mathcal{M}$ es cuasicoherente, tenemos que $\mathcal{M}|_{U_i} = \widetilde{M}_i$, donde M_i es un $\mathcal{O}_X(U_i)$-módulo. Por el teorema [1.28] existe un monomorfismo $M_i \longrightarrow I_i$, donde I_i es un $\mathcal{O}_X(U_i)$-módulo inyectivo. Sea $j_i : U_i \longrightarrow X$ la inmersión abierta natural. Definimos

$$\mathcal{I} = \bigoplus_i j_{i*}\widetilde{I}_i.$$

El teorema 5.9 nos da que $\mathcal{I}$ es cuasicoherente. Tenemos monomorfismos $\phi_i : \mathcal{M}|_{U_i} \longrightarrow \widetilde{I}_i$ que inducen un homomorfismo $\phi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{I}$ dado por

$$\phi_U(s)_i = \phi_{i,U\cap U_i}(s|_{U\cap U_i}),$$

donde $U \subset X$ es un abierto y $s \in \mathcal{M}(U)$. Se trata de un monomorfismo, pues si $\phi_U(s) = 0$ entonces $s|_{U\cap U_i} = 0$ para todo i, luego $s = 0$.

Falta probar que $\mathcal{I}$ es inyectivo en la categoría de los haces cuasicoherentes. Esto significa que si $\mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}'$ es un monomorfismo entre dos haces cuasicoherentes sobre X, todo homomorfismo $\mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{I}$ se extiende a $\mathcal{N}'$. Basta ver que cada $j_{i*}\widetilde{I}_i$ tiene esta propiedad.

Por claridad vamos a suprimir los subíndices: tenemos un abierto $U \subset X$, un $\mathcal{O}_X(U)$-módulo inyectivo I, la inclusión $j : U \longrightarrow X$ y un homomorfismo $\phi : \mathcal{N} \longrightarrow j_*\widetilde{I}$. Entonces $\phi_U : \mathcal{N}(U) \longrightarrow I$ se extiende a un homomorfismo $\psi_U : \mathcal{N}'(U) \longrightarrow I$, que a su vez determina un homomorfismo $\psi' : \mathcal{N}'|_U \longrightarrow \widetilde{I}$. Definimos $\psi : \mathcal{N}' \longrightarrow j_*\widetilde{I}$ mediante $\psi_V(s) = \psi'_{U\cap V}(s|_{U\cap V})$, donde $V \subset X$ es un abierto y $s \in \mathcal{N}'(V)$. Hemos de probar que ψ extiende a ϕ.

Para ello observamos que $\psi|_U = \psi'$ extiende a $\phi|_U$, por lo que si $V \subset X$ es un abierto arbitrario y $s \in \mathcal{N}(V)$, tenemos que

$$\psi_V(s) = (\psi|_U)_{U\cap V}(s|_{U\cap V}) = (\phi|_U)_{U\cap V}(s|_{U\cap V}) = \phi_V(s).$$

La última igualdad se debe al diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{N}(V) \arrow[r, "\phi_V"] \arrow[d] & \widetilde{I}(U\cap V) \arrow[d, "1"] \\
\mathcal{N}(U\cap V) \arrow[r, "\phi|_{U\cap V}"'] & \widetilde{I}(U\cap V)
\end{tikzcd}$$

■

Ahora ya podemos caracterizar las imágenes superiores de un haz cuasicoherente:

Teorema 6.42 *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un homomorfismo de un esquema noetheriano X en un esquema afín Y. Entonces, para cada haz cuasicoherente $\mathcal{M}$ en X se cumple que*

$$D^m f_*\mathcal{M} \cong \widetilde{H^m(X,\mathcal{M})},$$

donde consideramos a $H^m(X,\mathcal{M})$ como $\mathcal{O}_Y(Y)$-módulo a través de f.

Demostración: La prueba es análoga a la de 6.40, salvo por el hecho de que hemos de considerar ambos miembros como funtores $\mathfrak{C} \longrightarrow \mathrm{Mod}(Y)$, donde $\mathfrak{C}$ es la categoría de los haces cuasicoherentes en X. Teniendo en cuenta el teorema anterior, es fácil ver que la prueba del teorema [1.50] sigue siendo válida si consideramos que todos los haces considerados (en el dominio del funtor, no en la imagen) son cuasicoherentes. Se comprueba sin dificultad que las dos familias de funtores tienen un homomorfismo de conexión, así como que los funtores correspondientes a $m = 0$ son isomorfos (por el teorema 5.9). Observemos, por último, que el haz construido en el teorema anterior es diseminado, luego las dos familias de funtores se anulan sobre ellos para $m \geq 1$. En efecto, con la notación del teorema anterior, tenemos que cada $\widetilde{I}_i$ es diseminado por 6.12, de donde se sigue inmediatamente que lo es cada $j_{i*}\widetilde{I}_i$, y también $\mathcal{I}$. ■

Como consecuencia inmediata obtenemos:

Teorema 6.43 *Si $f : X \longrightarrow Y$ es un homomorfismo de esquemas con X noetheriano y $\mathcal{M}$ es un haz cuasicoherente en X, entonces los haces $D^m f_*\mathcal{M}$ son también cuasicoherentes.*

Demostración: Basta probar que si $U \subset Y$ es un abierto afín, entonces $(D^m f_*\mathcal{M})|_U$ es cuasicoherente. Ahora bien, el teorema 6.40 implica que este haz coincide con $D^m f'_*(\mathcal{M}|_{f^{-1}[U]})$, donde $f' : f^{-1}[U] \longrightarrow U$ es la restricción. Equivalentemente, podemos suponer que Y es afín, y entonces basta aplicar el teorema anterior. ■

Demostramos ahora la reformulación del teorema 6.21 a) que anunciábamos al principio de la sección. En la sección siguiente veremos que se cumple, más en general, para homomorfismos propios.

Teorema 6.44 *Si $f : X \longrightarrow Y$ es un homomorfismo proyectivo, donde el esquema Y es localmente noetheriano, y $\mathcal{M}$ es un haz coherente en X, entonces los haces $D^m f_*\mathcal{M}$ son también coherentes.*

Demostración: Al igual que en el teorema anterior, podemos suponer que $Y = \operatorname{Esp} A$, donde A es un anillo noetheriano (en cuyo caso X también es noetheriano, pues f es de tipo finito). Puesto que el haz $D^m f_*\mathcal{M}$ es cuasicoherente, basta probar que $(D^m f_*\mathcal{M})(Y) = H^m(X, \mathcal{M})$ es un A-módulo finitamente generado, y esto es cierto por el teorema 6.21. ■

Notemos que este teorema incluye a 6.24 como caso particular. La segunda parte de 6.21 también puede ser expresada en términos de imágenes directas superiores:

Teorema 6.45 *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un homomorfismo proyectivo entre esquemas noetherianos. Sea $\mathcal{M}$ un haz coherente en X y $\mathcal{O}_X(1)$ un haz muy amplio en X respecto de Y. Entonces, para todo natural $m \geq 1$ y todo n suficientemente grande, $D^m f_*(\mathcal{M}(n)) = 0$.*

Demostración: Cubrimos Y por un número finito de abiertos afines. Si U es uno de estos abiertos y llamamos $V = f^{-1}[U]$, basta probar que $D^m f_*(\mathcal{M}(n))|_V = D^m f'_*(\mathcal{M}|_V(n)) = 0$, donde $f' : V \longrightarrow U$ es la restricción de f y $\mathcal{M}|_V(n)$ está calculado respecto al haz muy amplio $\mathcal{O}_X(1)|_V$, que es un haz muy amplio en V respecto de U. Equivalentemente, podemos suponer que el esquemna Y es afín.

Como las imágenes directas superiores son cuasicoherentes, basta probar que $D^m f_*(\mathcal{M}(n))(Y) = 0$, es decir, que $H^m(X, \mathcal{M}(n)) = 0$, pero esto es lo que afirma el teorema 6.21. ■

6.6 El teorema de finitud

En esta sección vamos a generalizar a esquemas propios el teorema de Serre 6.21 a), que tenemos demostrado para esquemas proyectivos. Con más detalle, el teorema de finitud que pretendemos demostrar es simplemente el teorema 6.44 cambiando la palabra “proyectivo” por “propio”.

En primer lugar demostramos un sencillo hecho técnico que vamos a necesitar. Para enunciarlo conviene introducir una definición:

Definición 6.46 Si $\mathcal{N}$ es un haz sobre un espacio anillado X, se llama *soporte* de $\mathcal{N}$ al conjunto

$$\operatorname{sop} \mathcal{N} = \{P \in X \mid \mathcal{N}_P \neq 0\}.$$

Recordemos que si $f : X \longrightarrow Y$ es una inmersión cerrada entre espacios anillados, el teorema [B.6] nos da una condición suficiente para que un $\mathcal{O}_Y$-módulo $\mathcal{N}$ cumpla $f_*f^*\mathcal{N} \cong \mathcal{N}$. La condición es doble: por una parte se ha de cumplir que $\operatorname{sop} \mathcal{N} \subset f[X]$ y, además, $\mathcal{I}\mathcal{N} = 0$, donde $\mathcal{I}$ es el ideal que determina la inmersión cerrada. Lo que vamos a probar es que, en el caso en que f es un homomorfismo de esquemas y $\mathcal{N}$ es un haz coherente, la primera condición implica una versión débil de la segunda:

Teorema 6.47 *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una inmersión cerrada entre esquemas noetherianos asociada al haz coherente de ideales $\mathcal{I}$ y sea $\mathcal{N}$ un haz coherente en Y tal que* $\operatorname{sop} \mathcal{N} \subset f[X]$. *Entonces existe un natural no nulo n tal que $\mathcal{I}^n\mathcal{N} = 0$.*

Demostración: Cubriendo Y con un número finito de abiertos afines, podemos reducir el problema al caso en que $Y = \operatorname{Esp} A$ es afín. Entonces $\mathcal{I} = \widetilde{I}$, $\mathcal{N} = \widetilde{N}$, para cierto ideal I de A y cierto A-módulo N.

Si $f \in I$, entonces $D(f) \cap f[X] = \varnothing$, luego $\mathcal{N}(D(f)) = N_f = 0$. Como N es finitamente generado, existe un natural $m > 0$ tal que $f^m N = 0$. Si I admite un generador con h elementos, podemos tomar m suficientemente grande como para que la relación $f^m N = 0$ la cumplan simultáneamente los h generadores, y entonces es claro que $n = hm$ cumple $I^n N = 0$, luego también $\mathcal{I}^n\mathcal{N} = 0$. ■

Vamos a demostrar el teorema de finitud reduciéndolo al teorema 6.44 a través del lema de Chow 4.34. El proceso de reducción no es trivial en absoluto, sino que se basa en el siguiente teorema general:

Teorema 6.48 *Sea X un esquema noetheriano y $\mathfrak{C}$ una clase de haces coherentes en X que cumpla las propiedades siguientes:*

a) $0 \in \mathfrak{C}$.

b) Si $0 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{P} \longrightarrow 0$ *es una sucesión exacta de haces coherentes en X y dos de ellos están en $\mathfrak{C}$, entonces el tercero también está en $\mathfrak{C}$.*

c) Si $\mathcal{M}$ *y* $\mathcal{N}$ *son haces coherentes en X tales que* $\mathcal{M}\oplus\mathcal{N} \in \mathfrak{C}$, *entonces* $\mathcal{M} \in \mathfrak{C}$.

d) Para cada $P \in X$ existe un $\mathcal{M} \in \mathfrak{C}$ tal que $\operatorname{sop}\mathcal{M} \subset \overline{\{P\}}$ *y* $\mathcal{M}_P \neq 0$.

Entonces $\mathfrak{C}$ es la clase de todos los haces coherentes en X.

Demostración: Vamos a probar el teorema mediante el principio de *inducción noetheriana,* que no es sino el siguiente hecho elemental:

> *Sea X un espacio topológico noetheriano y sea $\mathcal{P}$ una propiedad sobre los subconjuntos cerrados de X. Supongamos que si todos los cerrados estrictamente contenidos en un cerrado Y tienen la propiedad $\mathcal{P}$, entonces Y también la tiene. Entonces todos los cerrados de X tienen la propiedad $\mathcal{P}$.*

En efecto, si un cerrado Y_0 no tuviera la propiedad $\mathcal{P}$, existiría un cerrado $Y_1 \subsetneq Y_0$ que tampoco la tendría, luego existiría otro cerrado $Y_2 \subsetneq Y_1$ que tampoco la tendría, y, en general, podríamos construir una sucesión estrictamente decreciente de subconjuntos cerrados de X, lo que contradice la definición es espacio noetheriano [3.31].

Vamos a considerar la siguente propiedad $\mathcal{P}(Y)$: *Todo haz coherente en X cuyo soporte está contenido en Y pertenece a $\mathfrak{C}$.*

Hemos de probar $\mathcal{P}(X)$. Por el principio de inducción noetheriana, fijamos un cerrado $Y \subset X$ y suponemos que todos los haces coherentes en X cuyo soporte está contenido en un cerrado estrictamente contenido en Y están en $\mathfrak{C}$. Fijamos también un haz coherente $\mathcal{M}$ tal que $\operatorname{sop}\mathcal{M} \subset Y$ y hemos de probar que $\mathcal{M} \in \mathfrak{C}$. Con esto quedará demostrado el teorema.

Podemos suponer que $Y \neq \varnothing$, pues en caso contrario $\mathcal{M} = 0 \in \mathfrak{C}$ por hipótesis. Consideramos en Y la única estructura de subesquema cerrado reducido. Dicha estructura está determinada por un haz coherente $\mathcal{I}$ de ideales de $\mathcal{O}_X$. Sea $j : Y \longrightarrow X$ la inmersión canónica.

Por el teorema 6.47 tenemos que $\mathcal{I}^n\mathcal{M} = 0$, para cierto $n > 0$. Para cada $2 \leq k \leq n$, podemos formar la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}^{k-1}\mathcal{M}/\mathcal{I}^k\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}/\mathcal{I}^k\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}/\mathcal{I}^{k-1}\mathcal{M} \longrightarrow 0.$$

Si probamos que $\mathcal{I}^{k-1}\mathcal{M}/\mathcal{I}^k\mathcal{M} \in \mathfrak{C}$, inductivamente concluimos que $\mathcal{M} \in \mathfrak{C}$. (Notemos que para $k = 2$ ambos extremos de la sucesión exacta están en $\mathfrak{C}$.) Equivalentemente, podemos trabajar con un módulo $\mathcal{M}$ que cumple además $\mathcal{I}\mathcal{M} = 0$. Según el teorema [B.6], esto significa que $\mathcal{M} = j_*(j^*\mathcal{M})$).

Consideremos en primer lugar el caso en que el cerrado Y es reducible, de modo que $Y = Y_1 \cup Y_2$, para ciertos cerrados Y_1, Y_2 estrictamente contenidos en Y. Consideramos en ambos la estructura de subesquema cerrado reducido. Sean $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$ los haces de ideales de $\mathcal{O}_X$ que determinan estas estructuras. Reduciendo el problema al caso afín, se comprueba sin dificultad que $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \cap \mathcal{I}_2$. (Aquí usamos que los tres subesquemas cerrados son reducidos.)

Definimos $\mathcal{M}_i = \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_X} (\mathcal{O}_X/\mathcal{I}_i)$, y consideremos el homomorfismo natural $u : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2$.

Si $P \in X \setminus Y_1$, entonces $\mathcal{I}_{1P} = \mathcal{O}_{X,P}$, luego $\mathcal{M}_{1P} = 0$. Por otra parte, $\mathcal{I}_P = \mathcal{I}_{2P}$, luego

$$\mathcal{M}_{2P} = \mathcal{M}_P \otimes_{\mathcal{O}_{X,P}} (\mathcal{O}_{X,P}/\mathcal{I}_P) \cong \mathcal{M}_P,$$

donde usamos que $\mathcal{I}_P\mathcal{M}_P = 0$. Esto implica que u_P es un isomorfismo, y lo mismo sucede si $P \in X \setminus Y_2$. Por consiguiente, el núcleo y el conúcleo de u tienen su soporte contenido en $Y_1 \cap Y_2$, luego ambos están en $\mathfrak{C}$ por hipótesis de inducción.

También hemos visto que $\operatorname{sop} \mathcal{M}_i \subset Y_i$, luego $\mathcal{M}_i \in \mathfrak{C}$, lo que a su vez implica que $\mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2 \in \mathfrak{C}$. La sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \operatorname{Im} u \longrightarrow \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2 \longrightarrow \operatorname{CN} u \longrightarrow 0$$

nos da que $\operatorname{Im} u \in \mathfrak{C}$, y la sucesión

$$0 \longrightarrow \operatorname{N} u \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \operatorname{Im} u \longrightarrow 0$$

nos da que $\mathcal{M} \in \mathfrak{C}$.

Ahora pasamos al caso en que Y es irreducible, luego como esquema es íntegro. Sea $\xi \in Y$ su punto genérico. Como $j^*\mathcal{M}$ es un haz coherente en Y, tenemos que $\mathcal{M}_\xi = (j^*\mathcal{M})_\xi$ es un $k(Y)$-espacio vectorial de dimensión finita m.

Por hipótesis, existe un $\mathcal{N} \in \mathfrak{C}$ tal que $\operatorname{sop} \mathcal{N} \subset Y$ y $\mathcal{N}_\xi \neq 0$. También se cumple que $\mathcal{N}_\xi$ es un $k(Y)$-espacio vectorial de dimensión finita $q > 0$. Obviamente, tenemos un isomorfismo de espacios vectoriales $\mathcal{N}_\xi^m \cong \mathcal{M}_\xi^q$, que es trivialmente un isomorfismo de $\mathcal{O}_{X,\xi}$-módulos. El teorema 5.19 nos da que existe un entorno afín U de ξ en X tal que $\mathcal{N}^m(U) \cong \mathcal{M}^q(U)$. Como los haces son coherentes, esto equivale a que existe un isomorfismo $\phi : \mathcal{N}^m|_U \longrightarrow \mathcal{M}^q|_U$. Sea Γ la gráfica de este isomorfismo, es decir, el submódulo de $(\mathcal{N}^m \oplus \mathcal{M}^q)|_U$ dado por

$$\Gamma(V) = \{(n, m) \in (\mathcal{N}^m \oplus \mathcal{M}^q)(V) \mid \phi_V(n) = m\}.$$

Es claro que las restricciones de las proyecciones determinan isomorfismos

$$\mathcal{N}^m|_U \cong \Gamma \cong \mathcal{M}^q|_U.$$

En particular, Γ es un haz coherente en U. Por el teorema 5.23 existe un subhaz coherente $\mathcal{G}$ de $\mathcal{N}^m \oplus \mathcal{M}^q$ que extiende a Γ. Notemos que $\mathcal{G}|_{X \setminus Y} = 0$, pues tanto $\mathcal{N}^m$ como $\mathcal{M}^q$ tienen su soporte contenido en Y.

Las restricciones de las proyecciones son homomorfismos $u : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{N}^m$, $v : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{M}^q$ que se restringen a isomorfismos sobre U y, trivialmente, sobre

$X \setminus Y$. Equivalentemente, sus núcleos y conúcleos tienen el soporte contenido en el cerrado $Y \setminus (Y \cap U)$, que está estrictamente contenido en Y porque no contiene a ξ. Por hipótesis de inducción los cuatro haces están en $\mathfrak{C}$.

Por otra parte, como $\mathcal{H} \in \mathfrak{C}$, también $\mathcal{N}^m \in \mathfrak{C}$. Esto implica que $\operatorname{Im} u \in \mathfrak{C}$, luego $\mathcal{G} \in \mathfrak{C}$, luego $\operatorname{Im} v \in \mathfrak{C}$, luego $\mathcal{M}^q \in \mathfrak{C}$. Por último, la condición c) del enunciado implica que $\mathcal{M} \in \mathfrak{C}$. ∎

Ahora ya podemos demostrar:

Teorema 6.49 (Teorema de finitud) *Si $f : X \longrightarrow Y$ es un homomorfismo propio, donde el esquema Y es localmente noetheriano, y $\mathcal{M}$ es un haz coherente en X, entonces los haces $D^m f_*\mathcal{M}$ son también coherentes.*

Demostración: No perdemos generalidad si sustituimos Y por un abierto noetheriano, luego podemos suponer que Y es noetheriano, en cuyo caso X también es noetheriano, pues f es de tipo finito.

Llamamos $\mathfrak{C}$ a la clase de los haces coherentes $\mathcal{M}$ en X tales que los haces $D^m f_*\mathcal{M}$ son coherentes para todo $m \geq 0$. El teorema de finitud equivale a que $\mathfrak{C}$ es la clase de todos los haces coherentes en X. Para demostrarlo basta ver que cumple las hipótesis del teorema anterior. La condición a) es trivial. Consideremos una sucesión exacta de haces coherentes

$$0 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{P} \longrightarrow 0.$$

Supongamos, por ejemplo, que $\mathcal{M}$ y $\mathcal{P}$ están en $\mathfrak{C}$. Consideramos la sucesión exacta de cohomología:

$$D^{n-1}f_*\mathcal{P} \longrightarrow D^n f_*\mathcal{M} \longrightarrow D^n f_*\mathcal{N} \longrightarrow D^n f_*\mathcal{P} \longrightarrow D^{n+1} f_*\mathcal{M},$$

en la que los cuatro haces de los extremos son coherentes. (Si $n = 0$, el primer haz es 0.) Tenemos entonces que la imagen del primer homomorfismo y el núcleo del último son coherentes, con lo que el teorema 6.10 nos da que $D^n f_*\mathcal{N}$ también es coherente. Los otros dos casos de b) se prueban del mismo modo.

Supongamos ahora que $\mathcal{M} \oplus \mathcal{N} \in \mathfrak{C}$. Entonces

$$D^n f_*(\mathcal{M} \oplus \mathcal{N}) \cong (D^n f_*\mathcal{M}) \oplus (D^n f_*\mathcal{N}).$$

(Esto es un hecho general sobre funtores derivados: podemos tomar como resolución inyectiva de $\mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$ la suma directa de sendas resoluciones inyectivas de los sumandos.) Los sumandos son cuasicoherentes por 6.43 y, como la suma es coherente, son finitamente generados, luego coherentes.

Nos falta probar únicamente la condición d) del teorema anterior. La demostraremos como consecuencia de la propiedad siguiente:

> (∗) *Sea $f : X' \longrightarrow Y$ un homomorfismo propio entre esquemas noetherianos, donde X' es íntegro con punto genérico ξ. Entonces existe un haz coherente $\mathcal{M}$ en X' tal que $\mathcal{M}_\xi \neq 0$ y $D^n f_*\mathcal{M}$ es coherente para todo $n \geq 0$.*

En efecto, la propiedad d) exige probar que para cada punto $\xi \in X$ existe un haz coherente $\mathcal{M}$ en X con soporte contenido en $X' = \overline{\{\xi\}}$ tal que $\mathcal{M} \in \mathfrak{C}$ y $\mathcal{M}_\xi \neq 0$.

Consideremos a X' como subesquema cerrado reducido de X y llamemos $j : X' \longrightarrow X$ a la inmersión cerrada correspondiente. Entonces es un esquema íntegro, y la composición $j \circ f$ es un homomorfismo propio. Podemos aplicar $(*)$, que nos da un haz coherente $\mathcal{M}$ en X' tal que $\mathcal{M}_\xi \neq 0$ y los haces $D^n(j \circ f)_*\mathcal{M}$ son coherentes.

Notemos ahora que $D^n(j \circ f)_*\mathcal{M} = D^n f_*(j_*\mathcal{M})$. En efecto, como j es una inmersión cerrada, el funtor j_* es exacto (ver el final del apéndice [B]). Por otra parte, es inmediato que j_* transforma haces diseminados en haces diseminados. Como consecuencia de estos dos hechos, si aplicamos j_* a una resolución inyectiva de $\mathcal{M}$, obtenemos una resolución diseminada de $j_*\mathcal{M}$, luego al calcular con ella los grupos $D^n f_*(j_*\mathcal{M})$ estamos calculando también los grupos $D^n(j \circ f)_*\mathcal{M}$. Así pues, $j_*\mathcal{M}$ es un haz coherente en X (por ejemplo, por 5.18), cuyo soporte está contenido en X' y además $j_*\mathcal{M} \in \mathfrak{C}$ y $(j_*\mathcal{M})_\xi = \mathcal{M}_\xi \neq 0$. Esto prueba d).

Así pues, sólo nos falta probar $(*)$. Equivalentemente, hemos de probar la propiedad d) únicamente en el caso en que el esquema X es íntegro y P es su punto genérico.

Aplicamos el lema de Chow 4.34, que nos da un homomorfismo $g : X' \longrightarrow X$ proyectivo y suprayectivo tal que $g \circ f : X' \longrightarrow Y$ es también proyectivo. En particular, el esquema X' es noetheriano.

Podemos tomar un haz muy amplio $\mathcal{O}_{X'}(1)$ en X' respecto de X. Por los teoremas 5.50, 6.44 y 6.45, existe un natural $n \geq 1$ tal que $\mathcal{M} = g_*\mathcal{O}_{X'}(n)$ es un haz coherente en X, el homomorfismo $g^*(g_*\mathcal{O}_{X'}(n)) \longrightarrow \mathcal{O}_{X'}(n)$ es suprayectivo y $D^m g_*\mathcal{O}_{X'}(n) = 0$ para todo $m \geq 1$.

Si P es el punto genérico de X, ha de ser $\mathcal{M}_P \neq 0$, pues en caso contrario existiría un abierto afín $U \subset X$ tal que $\mathcal{M}(U) = 0$, y, si $V = g^{-1}[U]$, también $\mathcal{O}_V(n)(V) = \mathcal{O}_{X'}(n)(V) = 0$. Ahora bien, si $g' = g|_V$, el homomorfismo natural $g'^*(g'_*\mathcal{O}_V(n)) \longrightarrow \mathcal{O}_V(n)$ es suprayectivo, y en la demostración del teorema 5.50 hemos visto que esto equivale a que el haz $\mathcal{O}_V(n)$ tenga un generador global, luego no puede ser $\mathcal{O}_V(n)(V) = 0$.

Sólo falta probar $\mathcal{M} \in \mathfrak{C}$. Ahora bien, el hecho de que $D^m g_*\mathcal{O}_{X'}(n) = 0$ para todo $m \geq 1$ se traduce en que si aplicamos g_* a una resolución inyectiva de $\mathcal{O}_{X'}(n)$ obtenemos una sucesión exacta. (La exactitud del principio de la sucesión se sigue de la exactitud izquierda de g_*). Así pues, lo que obtenemos es una resolución diseminada de $\mathcal{M}$. Al calcular con ella los funtores derivados $D^m f_*\mathcal{M}$ estamos calculando también los funtores derivados $D^m(f \circ g)_*\mathcal{O}_{X'}(n)$. En definitiva, tenemos que

$$D^m f_*\mathcal{M} = D^m(f \circ g)_*\mathcal{O}_{X'}(n),$$

y los haces del miembro derecho son coherentes por el teorema 6.44. ■

Nota Observemos que el caso $m = 0$ en el teorema anterior generaliza al teorema 6.24. Invirtiendo el razonamiento del teorema 6.44 obtenemos ahora que el teorema 6.21 a) es válido cuando el esquema X/A es propio, no necesariamente proyectivo.

Capítulo VII

Regularidad

Dedicamos este capítulo a estudiar la noción de regularidad de un esquema, aunque primero nos ocupamos de una noción algebraica más débil:

7.1 Esquemas normales

Definición 7.1 Un esquema X es *normal* en un punto $P \in X$ si el anillo local $\mathcal{O}_{X,P}$ es (un dominio íntegro) íntegramente cerrado. Diremos que X es *normal* si es irreducible y es normal en todos sus puntos.

Hemos incluido la irreducibilidad en la definición de esquema normal por una mera cuestión de conveniencia. Aunque en principio sería más natural no incluirla, es más cómodo así. Con esta definición, puesto que los esquemas normales son obviamente reducidos, tenemos que son en realidad esquemas íntegros.

Teorema 7.2 *Para cada esquema irreducible X, las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

a) X es normal.

b) Para cada abierto U de X, el anillo $\mathcal{O}_X(U)$ es (un dominio íntegro) íntegramente cerrado.

Si además X es cuasicompacto, estas afirmaciones equivalen a

c) X es normal en sus puntos cerrados.

Demostración: Supongamos que X es normal, sea U un abierto en X y α un elemento entero del cuerpo de cocientes de $\mathcal{O}_X(U)$. Sea $V \neq \varnothing$ un abierto afín en U.

Podemos considerar $\mathcal{O}_X(U) \subset \mathcal{O}_X(V) \subset K(X)$, lo que nos permite considerar a α como elemento entero sobre $\mathcal{O}_X(V)$ del cuerpo de cocientes de $\mathcal{O}_X(V)$ (que es $K(X)$). Si demostramos que $\alpha \in \mathcal{O}_X(V)$, como esto es válido para todo abierto afín V, la observación tras el teorema 3.16 implica que $\alpha \in \mathcal{O}_X(U)$. Equivalentemente, podemos suponer que el abierto U es afín.

Llamemos $A = \mathcal{O}_X(U)$. Consideramos el A-módulo $(\alpha A + A)/A$ y sea $I \subset A$ su anulador. Basta probar que $I = A$, pues entonces $\alpha A + A = A$, luego $\alpha \in A$.

En caso contrario existe un ideal primo $\mathfrak{p}$ en A tal que $I \subset \mathfrak{p}$. Es un hecho conocido que toda localización de un dominio íntegro íntegramente cerrado es también íntegramente cerrado (la prueba es elemental), luego $A_{\mathfrak{p}}$ es íntegramente cerrado. Ahora bien, α es entero sobre A_p, luego $\alpha \in A_{\mathfrak{p}}$, es decir, existe un $s \in A \setminus \mathfrak{p}$ tal que $s\alpha \in A$, pero entonces $s \in I$, contradicción.

Supongamos ahora que se cumple b) y sea $P \in X$. Tomamos un entorno afín U de P, de modo que, por hipótesis $\mathcal{O}_X(U)$ es íntegramente cerrado, pero $\mathcal{O}_{X,P}$ es una localización de $\mathcal{O}_X(U)$, luego también es íntegramente cerrado.

Supongamos ahora que X es cuasicompacto, irreducible y normal en sus puntos cerrados. Sea $P \in X$ un punto arbitrario. Por el teorema 3.1 existe un punto cerrado $Q \in \overline{\{P\}}$. Sea U un abierto afín en X que contenga a Q. Entonces también $P \in U$ y $\mathcal{O}_{X,P}$ es una localización de $\mathcal{O}_{X,Q}$, luego es íntegramente cerrado. ■

La prueba del teorema anterior muestra que, en realidad, para que un esquema irreducible X sea normal basta con que tenga un cubrimiento por abiertos afines U cuyos anillos $\mathcal{O}_X(U)$ sean íntegramente cerrados. En particular, un esquema afín X es normal si y sólo si $\mathcal{O}(X)$ es íntegramente cerrado. También es claro entonces que si k es un cuerpo entonces los esquemas A_k^n y P_k^n son normales.

Vamos a demostrar un teorema sobre extensión de funciones regulares, para lo cual necesitamos algunos resultados previos:

Teorema 7.3 *Sea A un dominio íntegro noetheriano, sea K su cuerpo de cocientes y sea $I \neq 0$ un ideal de A. Entonces el conjunto $B = \{f \in A \mid fI \subset I\}$ es un subanillo de K finitamente generado como A-módulo.*

Demostración: Es evidente que B es un subanillo de K que contiene a A. Tenemos un homomorfismo de A-módulos $\phi : B \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(I, I)$ dado por $\phi(f)(i) = fi$. Es inyectivo porque A es un dominio íntegro.

Como A es noetheriano, I es finitamente generado, luego existe un epimorfismo de A-módulos $A^n \longrightarrow I$, el cual induce un monomorfismo de A-módulos $\operatorname{Hom}_A(I, I) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(A^n, I) \cong I^n$. Así pues, podemos considerar a B como submódulo de I^n y, usando de nuevo que A es noetheriano, concluimos que B es un A-módulo finitamente generado. ■

Teorema 7.4 *Sea A un anillo noetheriano íntegramente cerrado de dimensión ≥ 1. Entonces*

$$A = \bigcap_{\mathfrak{p}} A_{\mathfrak{p}},$$

donde $\mathfrak{p}$ recorre los ideales primos de A de altura 1.

Demostración: Sea A' la intersección y supongamos que $A \neq A'$. Para cada $f \in A' \setminus A$ sea $I_f = \{a \in A \mid af \in A\}$, que es un ideal propio de A. Como A es noetheriano, el conjunto de los ideales I_f tiene un elemento maximal, digamos $\mathfrak{p} = I_g$, con $g \in A' \setminus A$.

Veamos que $\mathfrak{p}$ es un ideal primo: Si $a, b \in A$ cumplen $ab \in \mathfrak{p}$ y $b \notin \mathfrak{p}$, entonces $bg \in A' \setminus A$, $a \in I_{bg}$ y $\mathfrak{p} \subset I_{bg}$. Pero la maximalidad de $\mathfrak{p}$ implica que, de hecho, $\mathfrak{p} = I_{bg}$, luego $a \in \mathfrak{p}$.

Observemos que $g \notin A_\mathfrak{p}$, pues en caso contrario existe $s \in A \setminus \mathfrak{p}$ tal que $sg \in A$, pero entonces $s \in I_g = \mathfrak{p}$, contradicción.

Consideremos el ideal $g\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ de $A_\mathfrak{p}$. Veamos que es un ideal propio. En caso contrario $g^{-1} \in \mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ y, de hecho, $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p} = g^{-1}A_\mathfrak{p}$, es decir, $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ es un ideal primo principal de $A_\mathfrak{p}$. El teorema de los ideales principales implica que tiene altura 1 en $A_\mathfrak{p}$ y, por consiguiente, en A. Por definición de A' tenemos entonces que $g \in A_\mathfrak{p}$, contradicción.

Concluimos que $g\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$ es un ideal propio, luego $g\mathfrak{p}A_\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$. Aplicamos el teorema anterior al ideal $\mathfrak{p}A_\mathfrak{p}$, que nos da un subanillo B finitamente generado como $A_\mathfrak{p}$-módulo y tal que $g \in B$. Esto implica que g es entero sobre $A_\mathfrak{p}$, luego $g \in A_\mathfrak{p}$, contradicción. ■

Teorema 7.5 *Sea X un esquema normal localmente noetheriano y sea $F \subset X$ un cerrado de codimensión ≥ 2. Entonces la restricción $\mathcal{O}_X(X) \longrightarrow \mathcal{O}_X(X \setminus F)$ es un isomorfismo. En otras palabras, cada función regular en $X \setminus F$ se extiende de forma única a una función regular en X.*

Demostración: Cubrimos X por abiertos afines noetherianos U, de modo que $F' = U \cap F$ es un cerrado en U de codimensión ≥ 2. Si el teorema es cierto para cada abierto U y $f \in \mathcal{O}_X(X \setminus F)$, entonces las extensiones de cada $f|_{U \cap F'}$ a $\mathcal{O}_X(U)$ determinan (por la unicidad de la extensión) una única función en $\mathcal{O}_X(X)$ que extiende a f. Así pues, podemos suponer que $X = \operatorname{Esp} A$ es afín y noetheriano. Entonces todo punto $\mathfrak{p} \in F$ cumple

$$\operatorname{alt} \mathfrak{p} = \operatorname{codim} V(\mathfrak{p}) \geq \operatorname{codim} F \geq 2,$$

luego, recíprocamente, los puntos $\mathfrak{p} \in \operatorname{Esp} A$ con $\operatorname{alt} \mathfrak{p} = 1$ cumplen $\mathfrak{p} \in X \setminus F$. Si consideramos

$$\mathcal{O}_X(X) \subset \mathcal{O}_X(X \setminus F) \subset \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} \subset K(X),$$

entonces la primera inclusión es la restricción. El teorema anterior nos da que

$$\mathcal{O}_X(X) \subset \mathcal{O}_X(X \setminus F) \subset \bigcap_{\mathfrak{p}} \mathcal{O}_{X,\mathfrak{p}} = \mathcal{O}_X(X),$$

luego $\mathcal{O}_X(X) = \mathcal{O}_X(X \setminus F)$. ■

Similarmente probamos a continuación un resultado sobre extensión de homomorfismos. En el enunciado del teorema siguiente entendemos que la dimensión (y la codimensión) de un punto de un esquema es la dimensión (o la codimensión) de su clausura.

Teorema 7.6 *Sea S un esquema localmente noetheriano, sea Y un esquema propio sobre S y sea X un esquema normal de tipo finito sobre S. Si $U \subset X$ es un abierto no vacío y $f : U \longrightarrow Y$ es un homomorfismo definido sobre S, entonces f se extiende de forma única a un homomorfismo $V \longrightarrow Y$, donde V es un abierto que contiene a todos los puntos de X de codimensión 1.*

DEMOSTRACIÓN: La unicidad se debe a que U es denso en V y V es reducido y separado sobre S (teorema 4.16).

Sea ξ el punto genérico de X. Entonces $\xi \in U$ y f induce un homomorfismo $f_\xi : \operatorname{Esp} K(X) \longrightarrow Y$ definido sobre S (la composición $\operatorname{Esp} \mathcal{O}_\xi \longrightarrow X \longrightarrow Y$, donde el primer homomorfismo es el dado por el teorema 3.5).

Sea $P \in X$ un punto de codimensión 1. Tomamos un abierto afín noetheriano $W \subset S$ que contenga a la imagen de P por el homomorfismo estructural π, y un abierto afín $W' \subset X$ tal que $P \in W' \subset \pi^{-1}[W]$. El hecho de que X sea de tipo finito sobre S implica que W' es noetheriano. Digamos que $W' = \operatorname{Esp} A$, donde A es un anillo noetheriano. Es claro que P sigue teniendo codimensión 1 en W, lo que significa que, visto como ideal de A, tiene altura 1, luego el ideal maximal $\mathfrak{m}_P$ de $\mathcal{O}_{X,P} = A_P$ también tiene altura 1. Así pues, $\mathcal{O}_{X,P}$ es un dominio íntegro noetheriano íntegramente cerrado con un único ideal primo no nulo $\mathfrak{m}_P$, y su cuerpo de cocientes es $K(X)$. Entonces $\mathcal{O}_{X,P}$ es un dominio de Dedekind con un único ideal primo no nulo, luego es un anillo de valoración discreta. Por el teorema 4.29 tenemos que f_ξ se extiende a un homomorfismo $\operatorname{Esp} \mathcal{O}_{X,P} \longrightarrow Y$, que a su vez se extiende por 4.5 a un homomorfismo $g_P : U_P \longrightarrow Y$ definido sobre S, donde U_P es un entorno abierto de P.

Tomemos un entorno afín W de $g(P)$ y consideremos las restricciones de f y g_P a $U' = f^{-1}[W] \cap g^{-1}[W]$, que es un abierto no vacío en X, pues X es irreducible. Los homomorfismos $\mathcal{O}_Y(W) \longrightarrow \mathcal{O}_X(U')$ dados por $f|_{U'}$ y $g_P|_{U'}$ son idénticos, pues al componerlos con el monomorfismo $\mathcal{O}_X(U') \longrightarrow K(X)$ obtenemos los homomorfismos de anillos que inducen los homomorfismos de esquemas $f_\xi : \operatorname{Esp} K(X) \longrightarrow W$ y $g_\xi : \operatorname{Esp} K(X) \longrightarrow W$, y basta observar que g_ξ puede construirse también como

$$\operatorname{Esp} K(X) \longrightarrow \operatorname{Esp} \mathcal{O}_{X,P} \longrightarrow U' \xrightarrow{g_P} W,$$

luego $g_\xi = f_\xi$ por construcción. Como X es separado sobre S, concluimos que f y g_P coinciden en $U \cap U_P$. De este modo, si $P' \in X$ es cualquier otro punto de codimensión 1, tenemos que g_P y $g_{P'}$ coinciden con f en $U \cap U_P \cap U_{P'}$, luego g_P y $g_{P'}$ coinciden en $U_P \cap U_{P'}$, luego los homomorfismos g_P determinan un homomorfismo de esquemas $V \longrightarrow Y$ definido sobre un abierto V que contiene a U y a todos los abiertos U_P, que claramente extiende a f. ■

El teorema anterior se simplifica especialmente cuando X tiene dimensión 1:

Teorema 7.7 *En las condiciones del teorema anterior, si X tiene dimensión 1, entonces f se extiende a un homomorfismo $X \longrightarrow Y$.*

Vamos a ver ahora que a todo esquema íntegro se le puede asociar unívocamente un esquema normal.

Definición 7.8 Sea X un esquema íntegro. Una *normalización* de X es un homomorfismo $\pi : X' \longrightarrow X$ tal que X' es un esquema normal y para cada homomorfismo $f : Y \longrightarrow X$ con Y normal y $f[Y]$ denso en X existe un único homomorfismo de esquemas que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "\pi"] & X \\ Y \arrow[u] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

En primer lugar hemos de demostrar que la normalización de un esquema íntegro existe y es única salvo isomorfismo. Para ello necesitamos un resultado previo, que no es sino la existencia para el caso afín:

Teorema 7.9 *Sea A un dominio íntegro, sea K su cuerpo de cocientes y sea A' la clausura entera de A en K. Entonces el homomorfismo $\pi : \operatorname{Esp} A' \longrightarrow \operatorname{Esp} A$ es una normalización de* $\operatorname{Esp} A$.

Demostración: Sea $f : Y \longrightarrow \operatorname{Esp} A$ un homomorfismo de esquemas donde Y es normal y $f[Y]$ es denso en $\operatorname{Esp} A$. Por el teorema 3.17 sabemos que el homomorfismo $A \longrightarrow \mathcal{O}_Y(Y)$ es inyectivo. Si consideramos a A como subanillo de $\mathcal{O}_Y(Y)$, como éste es normal, tenemos las inclusiones $A \subset A' \subset \mathcal{O}_Y(Y)$ o, equivalentemente, el monomorfismo $A \longrightarrow \mathcal{O}_Y(Y)$ se descompone en dos monomorfismos $A \longrightarrow A' \longrightarrow \mathcal{O}_Y(Y)$. El segundo de ellos da lugar a un homomorfismo $Y \longrightarrow \operatorname{Esp} \mathcal{O}_Y(Y) \longrightarrow \operatorname{Esp} A'$, que compuesto con π da lugar al homomorfismo $Y \longrightarrow \operatorname{Esp} \mathcal{O}_Y(Y) \longrightarrow \operatorname{Esp} A$, que no es sino f, pues es un homomorfismo en un esquema afín cuyo homomorfismo asociado $A \longrightarrow \mathcal{O}_Y(Y)$ es el determinado por f (compuesto con la identidad).

La unicidad es clara, pues un homomorfismo $Y \longrightarrow \operatorname{Esp} A'$ que haga conmutativo el diagrama de la definición de normalización está determinado por un homomorfismo de anillos $A' \longrightarrow \mathcal{O}_Y(Y)$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r] & \mathcal{O}_Y(Y) \\ A \arrow[u] \arrow[ur, "f^\#"'] & \end{tikzcd}$$

pero $f^\#$ sólo admite una extensión a A', que es la restricción de la única extensión de $f^\#$ de K en el cuerpo de cocientes de $\mathcal{O}_Y(Y)$. ∎

Teorema 7.10 *Si X es un esquema íntegro, entonces existe la normalización $\pi : X' \longrightarrow X$ y es única salvo isomorfismo de esquemas definidos sobre X. Más aún, un homomorfismo $\pi : Y \longrightarrow X$ es la normalización de X si y sólo si Y es normal, y π es entero y birracional.*

Demostración: La unicidad de la normalización es consecuencia inmediata de la definición. Consideremos ahora un cubrimiento de X por abiertos afines U_i.

Por el teorema anterior, cada uno de ellos tiene una normalización $U'_i \longrightarrow U_i$. Si llamamos U'_{ij} a la antiimagen de $U_i \cap U_j$ en U'_i, entonces tanto U'_{ij} como U'_{ji} son normalizaciones de $U_i \cap U_j$, luego existe un único isomorfismo $f_{ij} : U'_{ij} \longrightarrow U'_{ji}$ que conmuta con los homomorfismos $U'_{ij} \longrightarrow U_i \cap U_j$, $U'_{ji} \longrightarrow U_i \cap U_j$. La unicidad hace también que se cumplan todas las hipótesis del teorema 3.40, que nos da un esquema X' y un homomorfismo $\pi : X' \longrightarrow X$ (aquí X es el esquema S del teorema 3.40).

El esquema X' es unión de los esquemas U'_i. Más aún, fijado un índice i, un abierto cualquiera U ha de cortar a un U'_j y, más concretamente, ha de cortar a $U'_i \cap U'_j$, luego X' es la clausura de U'_i. Esto prueba que es irreducible, luego es íntegro y, de hecho, es normal.

Si $f : Y \longrightarrow X$ es un homomorfismo con imagen densa e Y normal, entonces $f^{-1}[U_i]$ es también normal y la restricción $f^{-1}[U_i] \longrightarrow U_i$ tiene imagen densa. Por lo tanto existe un homomorfismo $f^{-1}[U_i] \longrightarrow U'_i$ que conmuta con f y π. Razonando igualmente con $U_i \cap U_j$ concluimos que existe un único homomorfismo $f^{-1}[U_i] \cap f^{-1}[U_j] \longrightarrow U'_i \cap U'_j$ que conmuta con f y π, de donde se sigue que los homomorfismos $f^{-1}[U_i] \longrightarrow U'_i$ coinciden en sus dominios comunes, luego determinan un único homomorfismo de esquemas $Y \longrightarrow X'$ que conmuta con f y π. Es definitiva, π es una normalización de X.

Por construcción y por el teorema anterior, $\mathcal{O}_{X'}(\pi^{-1}[U_i])$ es una extensión entera de $\mathcal{O}_X(U_i)$, luego el teorema 4.40 nos da que $\pi : X' \longrightarrow X$ es un homomorfismo entero. La normalización de un esquema afín dada por el teorema anterior es claramente birracional (pues la normalización es el espectro de un anillo mayor con el mismo cuerpo de cocientes), y el hecho de que π se restrinja a un homomorfismo birracional entre dos abiertos $U'_i \longrightarrow U_i$ implica que π es también birracional (pues podemos indentificar $K(U_i) = K(X)$, $K(U'_i) = K(X')$ y tanto π como su restricción inducen el mismo homomorfismo entre los cuerpos de funciones racionales).

Supongamos ahora que $\pi : Y \longrightarrow X$ es un homomorfismo entero y birracional e Y es un esquema normal arbitrario. Entonces, si $U \subset X$ es un abierto afín, se cumple que $\pi^{-1}[U]$ es también afín y normal y la restricción $\pi^{-1}[U] \longrightarrow U$ cumple las mismas propiedades. Si probamos que estas restricciones son normalizaciones de los abiertos U, el mismo argumento anterior prueba que π es una normalización de X. Equivalentemente, podemos suponer que $X = \operatorname{Esp} A$ e $Y = \operatorname{Esp} A'$ son afines y π está inducida por un homomorfismo $\phi : A \longrightarrow A'$. Las hipótesis implican que ϕ es un monomorfismo que induce un isomorfismo entre los cuerpos de cocientes, luego π es un homomorfismo de la forma indicada en el teorema anterior, luego es una normalización de X. ■

Cuando trabajamos con esquemas definidos sobre cuerpos no algebraicamente cerrados es útil contar con una noción más general de normalización. Observemos que si X es un esquema íntegro y L es una extensión de $K(X)$, la inclusión $K(X) \longrightarrow L$ determina un homomorfismo de esquemas

$$\operatorname{Esp} L \longrightarrow \operatorname{Esp} K(X) \longrightarrow X,$$

donde el segundo homomorfismo es el dado por el teorema 3.5.

Definición 7.11 Sea X un esquema íntegro y sea L una extensión algebraica del cuerpo de funciones $K(X)$. Una *normalización* de X en L es un homomorfismo entero $\pi : X' \longrightarrow X$ tal que X' es normal, $K(X') = L$ y el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "\pi"] & X \\ \operatorname{Esp} L \arrow[u] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Vamos a probar que esta normalización existe y es única salvo isomorfismo definido sobre X.

En primer lugar, si $X = \operatorname{Esp} A$, donde A es un dominio íntegro, entonces $K(X) \subset L$ es el cuerpo de cocientes de A. Llamamos A' a la clausura entera de A en L y llamamos $\pi : \operatorname{Esp} A' \longrightarrow X$ al homomorfismo inducido por la inclusión. Ciertamente es entero. Como L es algebraico sobre K, todo elemento de L es raíz de un polinomio no necesariamente mónico con coeficientes en A, de donde se sigue que para cada $\alpha \in L$ existe un $a \in A$ no nulo tal que $a\alpha \in A'$. Por consiguiente, L es el cuerpo de cocientes de A'. La conmutatividad del diagrama es trivial, lo que nos da que π es ciertamente una normalización de X.

Veamos ahora la unicidad (siempre en el caso $X = \operatorname{Esp} A$). Si $\pi : X' \longrightarrow X$ es una normalización de X en L, entonces, por ser un homomorfismo entero, el esquema $X' = \operatorname{Esp} A'$ ha de ser afín y A' ha de ser un dominio íntegro con cuerpo de cocientes L. El diagrama de la definición de normalización puede desarrollarse como

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Esp} A' \arrow[r, "\pi"] & \operatorname{Esp} A \\ \operatorname{Esp} L \arrow[u] \arrow[r] & \operatorname{Esp} K \arrow[u] \end{tikzcd}$$

donde $K = K(X)$ es el cuerpo de cocientes de A. La conmutatividad equivale a la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\phi"] \arrow[d] & A' \arrow[d] \\ K \arrow[r] & L \end{tikzcd}$$

donde ϕ es el homomorfismo que induce a π. Concluimos que ϕ es un monomorfismo y que A' es la clausura entera de A en L. En definitiva, π es, salvo isomorfismo sobre X, la normalización que hemos construido antes. Más precisamente, de este desarrollo se deduce que si X' y X'' son dos normalizaciones de X existe un único isomorfismo $X' \longrightarrow X'$ entre ambas definido sobre X. Esto permite construir la normalización de un esquema arbitrario X pegando las normalizaciones de sus abiertos afines a través de las normalizaciones de sus intersecciones (como en el teorema 7.10). La unicidad en el caso general es consecuencia de que la restricción de la normalización de un esquema arbitrario X a un abierto afín ha de ser necesariamente la normalización de dicho abierto afín. ■

Es inmediato comprobar que la normalización de un esquema íntegro X es lo mismo que su normalización sobre el cuerpo $K(X)$. Si X' es la normalización de X y X'' es la normalización de X' sobre un cuerpo L, entonces X'', con la composición de homomorfismos $X'' \longrightarrow X' \longrightarrow X$ es también la normalización de X sobre L.

En general, las normalizaciones son homomorfismos enteros. Vamos a ver bajo qué circunstancias podemos asegurar que son finitos.

Teorema 7.12 *Sea X un esquema normal noetheriano y L una extensión finita separable de $K(X)$. Entonces la normalización de X en L es un homomorfismo finito.*

Demostración: Como la finitud es una propiedad local podemos suponer que X es afín, digamos $X = \operatorname{Esp} A$, donde A es un dominio íntegro noetheriano íntegramente cerrado en su cuerpo de cocientes K. Lo que hemos de probar es que la clausura entera B de A en L es un A-módulo finitamente generado. Sea L' la clausura entera de L sobre K y sea B' la clausura entera de A en L'. Si probamos que L' es un A-módulo finitamente generado, entonces, como A es noetheriano, lo mismo valdrá para B. Equivalentemente, podemos suponer que L/K es una extensión finita de Galois.

Tomemos una base $e_1, \ldots, e_n$ de L sobre K formada por elementos de B, y sea $e_1^*, \ldots, e_n^*$ su base dual (respecto de la forma bilineal dada por la traza). Todo $b \in B$ se expresa como $b = \lambda_1 e_1^* + \cdots + \lambda_n e_n^*$, para ciertos $\lambda_i \in K$, pero $\lambda_i = \operatorname{Tr}(be_i) \in B \cap K = A$ (pues A es íntegramente cerrado en K), luego $B \subset \langle e_1^*, \ldots, e_n^* \rangle_A$ y, usando de nuevo que A es noetheriano, concluimos que B es un A-módulo finitamente generado. ■

El teorema siguiente nos dará la finitud de las normalizaciones de los conjuntos algebraicos:

Teorema 7.13 *Sea k un cuerpo y L una extensión finita de $k(X_1, \ldots, X_n)$. Entonces la clausura entera de $k[X_1, \ldots, X_n]$ en L es un módulo finitamente generado sobre $k[X_1, \ldots, X_n]$.*

Demostración: Llamemos $K = k(X_1, \ldots, X_n)$ y $A = k[X_1, \ldots, X_n]$. Sea $K \subset K' \subset L$ de modo que K'/K es puramente inseparable y L/K' es separable. Basta probar que la clausura entera A' de A en K' es un A-módulo finitamente generado, pues el teorema anterior nos da entonces que la clausura entera de A' en L es un A'-módulo finitamente generado, luego también es un A-módulo finitamente generado. Equivalentemente, podemos suponer que la extensión L/K es puramente inseparable, luego los cuerpos tendrán característica $p > 0$.

Sea $e_1, \ldots, e_r$ una base de L sobre K. Existe un $q = p^m$ tal que $e_i^q \in K$ para todo i. Fijamos una clausura algebraica de L y en ella consideramos los elementos $\sqrt[q]{e_i}$ e $Y_i = \sqrt[q]{X_i}$. Llamamos $k' = k(\sqrt[q]{e_1}, \ldots, \sqrt[q]{e_r})$, de modo que

$k'[Y_1,\ldots,Y_n]$ es un A-módulo finitamente generado (porque es la adjunción a A de un número finito de elementos enteros) y, por otra parte, es íntegramente cerrado (pues es un anillo de polinomios, luego un dominio de factorización única). Concluimos que $A' \subset k'[Y_1,\ldots,Y_n]$ y, como A es noetheriano, también A' es un A-módulo finitamente generado. ■

Teorema 7.14 *Sea X/k un conjunto algebraico íntegro y $L/K(X)$ una extensión finita. Entonces, la normalización $X' \longrightarrow X$ de X en L es un homomorfismo finito. En particular X'/k es un conjunto algebraico, y es proyectivo o cuasiproyectivo si X lo es.*

DEMOSTRACIÓN: Como la finitud es una propiedad local, podemos suponer que $X = \operatorname{Esp} A$ es afín. Por el teorema de normalización de Noether A tiene un submódulo $k[X_1,\ldots,X_d]$ sobre el cual es un módulo finitamente generado. La clausura entera de A en L es también la clausura entera de $k[X_1,\ldots,X_d]$ en L, que es finitamente generada sobre este anillo y, por consiguiente, también lo es sobre A.

Si X/k es cuasiproyectivo, también lo es X'/k por los teoremas 5.52 y 5.48, mientras que si X/k es proyectivo entonces X'/k es propio por el teorema 4.42, y un esquema propio cuasiproyectivo es proyectivo. ■

Aunque un conjunto algebraico no sea normal, lo cierto es que tiene necesariamente muchos puntos normales:

Teorema 7.15 *Si X es un esquema íntegro tal que la normalización $X' \longrightarrow X$ es un homomorfismo finito, entonces el conjunto de los puntos normales de X es un abierto no vacío.*

DEMOSTRACIÓN: Es claro que basta probar el teorema para esquemas afines. Pongamos que $X = \operatorname{Esp} A$ y sea A' la clausura entera de A. Para cada punto $\mathfrak{p} \in \operatorname{Esp} A$, la clausura entera $A'_\mathfrak{p}$ de $A_\mathfrak{p}$ cumple $A'_\mathfrak{p} \cong A' \otimes_A A_\mathfrak{p}$. Claramente tenemos un homomorfismo $A' \otimes_A A_\mathfrak{p} \longrightarrow A'_\mathfrak{p}$ para el que podemos construir un inverso: si $\alpha \in A'_\mathfrak{p}$, existe un $b \in A \setminus \mathfrak{p}$ tal que $b\alpha \in A'$. La aplicación $\alpha \mapsto b\alpha \otimes (1/b)$ está bien definida, pues si $c\alpha \in A'$ con $c \in A \setminus \mathfrak{p}$, entonces

$$b\alpha \otimes (1/b) = bc\alpha \otimes (1/cb) = c\alpha \otimes (1/c).$$

Es fácil ver que es el homomorfismo inverso del anterior. Por otra parte, tenemos la sucesión exacta

$$A \otimes_A A_\mathfrak{p} \longrightarrow A' \otimes_A A_\mathfrak{p} \longrightarrow (A'/A) \otimes_A A_\mathfrak{p} \longrightarrow 0,$$

luego $\mathfrak{p}$ es normal si y sólo si $(A'/A)_\mathfrak{p} \cong (A'/A) \otimes_A A_\mathfrak{p} = 0$. Llamemos $I \subset A$ al anulador de A'/A. Entonces, todos los puntos $\mathfrak{p} \in \operatorname{Esp} A \setminus V(I)$ son normales, pues existe $b \in I \setminus \mathfrak{p}$, de modo que si $\alpha \otimes \beta \in (A'/A) \otimes_A A_\mathfrak{p}$, entonces

$$\alpha \otimes \beta = \alpha b \otimes (\beta/b) = 0 \otimes (\beta/b) = 0.$$

Recíprocamente, si $\mathfrak{p}$ es normal, entonces $(A'/A)_{\mathfrak{p}} = 0$ y, como A'/A es finitamente generado sobre A (por la hipótesis), existe un $a \in A \setminus \mathfrak{p}$ tal que $a(A'/A) = 0$. Así pues, $\mathfrak{p} \in \operatorname{Esp} A \setminus V(I)$. Esto prueba que el conjunto de los puntos normales de $\operatorname{Esp} A$ es el abierto $\operatorname{Esp} A \setminus V(I)$. ■

En particular, el conjunto de los puntos normales de un conjunto algebraico íntegro sobre un cuerpo k es un abierto no vacío.

Hemos visto que la normalización de un conjunto algebraico proyectivo es proyectiva. En el caso de curvas tenemos un resultado más fuerte:

Teorema 7.16 *Toda curva completa y normal sobre un cuerpo k es proyectiva.*

DEMOSTRACIÓN: Sea C/k una curva completa y normal. Sea $\{U_i\}$ un cubrimiento de C por un número finito de abiertos afines. Consideramos una inmersión cerrada $U_i \longrightarrow A_k^n \longrightarrow \mathrm{P}_k^n$ y llamamos Y_i a la clausura de U_i en P_k^n. De este modo Y_i es una curva proyectiva sobre k y tenemos una inmersión abierta $U_i \longrightarrow Y_i$. Sea $U = \bigcap\limits_i U_i$ y sea $Y = \prod\limits_i Y_i$.

De este modo, Y/k es un esquema proyectivo íntegro y el homomorfismo diagonal $\Delta : U \longrightarrow Y$ se extiende (teorema 7.7) a un homomorfismo $f : C \longrightarrow Y$ definido sobre k. Como C es propia f también lo es. Sea $Z = f[C]$, con la estructura de subesquema cerrado reducido de Y. Entonces Z es un esquema proyectivo íntegro y tenemos un homomorfismo $f : C \longrightarrow Z$ suprayectivo. Vamos a probar que es un isomorfismo.

Observemos en primer lugar que $f|_{U_i} \circ p_i : U_i \longrightarrow Y_i$ extiende a la inclusión $U \longrightarrow Y_i$, luego ha de ser la inclusión $U_i \longrightarrow Y_i$.

Sea $U' \subset Y$ el producto de todas las copias de $U \subset Y_i$. Entonces U' es abierto en Y y $\Delta[U] = U' \cap Z$. En efecto, si $Q \in U' \cap Z$ entonces $Q = f(P)$, para cierto $P \in C$. Existe un i tal que $P \in U_i$, y entonces $p_i(Q) = p_i(f(P)) = P \in U$, luego $Q = f(P) = \Delta(P) \in \Delta[U]$.

Así pues, $\Delta[U]$ es abierto en Z. Como U es separado, $\Delta : U \longrightarrow U'$ es una inmersión cerrada y se convierte en un isomorfismo entre U y $\Delta[U]$ con la estructura de subesquema cerrado reducido de U', pero dicha estructura coincide con la estructura de esquema en $\Delta[U]$ como abierto de Z. En resumen, f se restringe a un isomorfismo entre U y $f[U] = \Delta[U]$. El hecho de que U sea denso en C implica que $f[U]$ es denso en Z. En particular Z es irreducible y tiene dimensión 1.

Tenemos que $f[U] \subset f[U_i] \subset Z$ y de aquí se sigue que $f[U_i]$ es también abierto en Z, pues $Z \setminus f[U]$ es un cerrado propio de Z, luego tiene dimensión 0, luego es un conjunto finito de puntos cerrados, luego $Z \setminus f[U_i]$ también es finito, luego también es cerrado. Ahora observamos que el isomorfismo inverso de $f|_U$ es la proyección i-ésima (pues $f|_U = \Delta$), que se extiende a un homomorfismo $p : f[U_i] \longrightarrow Y_i$. El hecho de que $f \circ p = 1$ en U y $p \circ f = 1$ en $f[U]$ implica que ambas relaciones también valen en U_i y $f[U_i]$ respectivamente o, lo que es lo mismo, que $f|_{U_i} : U_i \longrightarrow f[U_i]$ es un isomorfismo de esquemas.

Esto implica que Z es normal, luego el homomorfismo $p : f[U] \longrightarrow C$ se extiende a un homomorfismo $Z \longrightarrow C$ y, como es el inverso de f sobre U, también es su inverso sobre C. En resumen, f es un isomorfismo. ■

7.2 Esquemas regulares

Pasamos ya a estudiar el concepto de regularidad. Conviene destacar que en la sección [5.6] hemos estudiado la regularidad para variedades afines definidas sobre cuerpos algebraicamente cerrados, mientras que aquí evitaremos dicha hipótesis sobre el cuerpo.

Notemos en primer lugar que si X es un esquema y $P \in X$, entonces

$$\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2 \cong \mathfrak{m}_P \otimes_{\mathcal{O}_P} k(P).$$

En efecto, la aplicación $\mathfrak{m}_P \times k(P) \longrightarrow \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$ dada por $(m, [a]) \mapsto [ma]$ está bien definida e induce un homomorfismo de $\mathcal{O}_P$-módulos sobre el producto tensorial, cuyo inverso es $[m] \mapsto m \otimes [1]$. En particular podemos considerar a $\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$ como $k(P)$-espacio vectorial con el producto $[a][m] = [am]$.

Definición 7.17 Si X es un esquema y $P \in X$, llamaremos *espacio tangente (de Zariski)* de X en P al espacio vectorial dual $T_PX = (\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2)^*$.

Observemos ahora que si X es localmente noetheriano y $P \in X$ entonces, por el teorema [4.52] y el teorema de la dimensión,

$$\dim_{k(P)} T_PX = \dim_{k(P)} \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2 = \mu(\mathfrak{m}_P) \geq \delta(\mathcal{O}_P) = \dim \mathcal{O}_P$$

y, por definición, la igualdad equivale a que el anillo $\mathcal{O}_P$ sea regular.

Si X es un esquema localmente noetheriano y $P \in X$, diremos que P es un punto *regular* de X si el anillo $\mathcal{O}_P$ es regular. Según acabamos de observar, esto equivale a que $\dim_{k(P)} T_PX = \dim \mathcal{O}_P$. Los puntos que no son regulares se llaman *singulares*. Un esquema X es *regular* si todos sus puntos son regulares.

El teorema siguiente se apoya en [5.64], que a su vez se basa en las técnicas del álgebra homológica, por lo que no es trivial en absoluto.

Teorema 7.18 *Un esquema noetheriano X es regular si y sólo si lo son sus puntos cerrados.*

DEMOSTRACIÓN: Si $P \in X$ es un punto arbitrario, entonces el conjunto $\overline{\{P\}}$ (con la estructura de subesquema cerrado reducido) es un esquema noetheriano, luego cuasicompacto, luego contiene un punto cerrado Q. Si U es un entorno afín de Q en X, entonces $P \in U$ y Q es también un punto cerrado de X. Por hipótesis $\mathcal{O}_{X,Q} = \mathcal{O}_{U,Q}$ es regular y $\mathcal{O}_P$ es una localización de $\mathcal{O}_Q$. El teorema [5.64] nos da entonces que P es un punto regular. ■

A su vez, el teorema [5.16] nos da de forma inmediata el teorema siguiente:

Teorema 7.19 *Si X es un esquema localmente noetheriano, los puntos regulares de X son normales. En particular, si X es regular sus componentes irreducibles son normales.*

Notemos que, en realidad, si X es un esquema localmente noetheriano y $P \in X$, entonces el anillo $\mathcal{O}_P$ no sólo es íntegramente cerrado (tal y como afirma el teorema anterior), sino que, en virtud del teorema de Auslander-Buchsbaum, es un dominio de factorización única.

En dimensión 1, la regularidad equivale a la normalidad:

Teorema 7.20 *Todo esquema localmente noetheriano y normal de dimensión* 1 *es regular.*

Demostración: Sea C un esquema en las condiciones del enunciado. Si $P \in C$ es un punto cerrado, entonces $\mathcal{O}_{C,P}$ es un anillo normal de dimensión 1, es decir, es un dominio de Dedekind con un único ideal primo no nulo, luego es un anillo de valoración discreta, luego es regular. ■

El teorema siguiente es una consecuencia inmediata (una reformulación, en realidad) del teorema [5.74]:

Teorema 7.21 *Si C/k es un conjunto algebraico reducido sobre un cuerpo perfecto k, entonces el conjunto de los puntos regulares de C es un abierto no vacío. Un punto $P \in C$ es regular si y sólo si $\overline{\{P\}}$ contiene un punto cerrado regular.*

En el caso de esquemas normales todavía podemos afirmar algo más sobre la existencia de puntos regulares:

Teorema 7.22 *Si C/k es un conjunto algebraico normal sobre un cuerpo perfecto k, entonces el conjunto de los puntos singulares de C es un cerrado de codimensión ≥ 2.*

Demostración: Sea $P \in C$ un punto de codimensión 1, es decir, tal que $\overline{\{P\}}$ tenga codimensión 1 en C. Entonces, al igual que, en la prueba de 7.20, concluimos que P es regular. Basta aplicar esto a los puntos genéricos de las componentes irreducibles del conjunto de puntos singulares de C. ■

Ejemplo Si k es un cuerpo algebraicamente cerrado de característica distinta de 2, el cono $C \subset A_k^3$ dado por la ecuación $X^2 + Y^2 = Z^2$ es normal, pero tiene una singularidad en el origen.

En efecto, es fácil ver que C es íntegro. Hemos de probar que el anillo $\mathcal{O}_C(C) = k[x, y, z]$ es íntegramente cerrado en $k(x, y, z)$. Observemos que x, y son algebraicamente independientes y que z es entero sobre $k[x, y]$ (porque su polinomio mínimo tiene sus coeficientes en $k[x, y]$. Por lo tanto, $k[x, y, z]$ es una extensión entera de $k[x, y]$. Si $\alpha = p(x, y) + q(x, y)z \in k(x, y, z)$ es entero sobre $k[x, y, z]$ también ha de ser entero sobre $k[x, y]$, luego su polinomio mínimo sobre $k(x, y)$, que es

$$F(T) = T^2 - 2p(x, y)T + p^2(x, y) - (x^2 + y^2)q^2(x, y),$$

ha de tener sus coeficientes en $k[x, y]$. Por consiguiente $p(x, y) \in k[x, y]$ y también $(x^2 + y^2)q^2(x, y) \in k[x, y]$.

Ahora usamos la factorización única en $k[x,y]$. Si llamamos $i = \sqrt{-1} \in k$, entonces $x^2 + y^2 = (x+iy)(x-iy)$ es producto de dos factores irreducibles distintos (no conjugados), luego ha de ser $q(x,y) \in k[x,y]$. En definitiva llegamos a que $\alpha \in k[x,y,z]$, luego C es normal.

Es inmediato que, si P es el origen, la variedad tangente T_PC en el sentido de [5.69] es A^3, luego teniendo en cuenta [5.70] tenemos que P no es regular. ■

Ahora estudiaremos en qué condiciones las extensiones de constantes conservan la regularidad. Para ello conviene introducir un nuevo concepto:

Definición 7.23 Sea X/k un conjunto algebraico y sea $\bar{k}$ la clausura algebraica de k. Diremos que un punto $P \in X$ es *geométricamente regular* si los puntos de $X_{\bar{k}}$ situados sobre P (es decir, las antiimágenes de P por la proyección) son regulares en $X_{\bar{k}}$. Diremos que X es *geométricamente regular* si lo es en todos sus puntos (es decir, si $X_{\bar{k}}$ es regular).

El teorema siguiente relaciona la regularidad y la regularidad geométrica en el caso de puntos cerrados:

Teorema 7.24 *Sea X/k un conjunto algebraico y $P \in X$ un punto cerrado. Si P es geométricamente regular entonces es regular, y el recíproco también es cierto si la extensión $k(P)/k$ es separable.*

Demostración: Tanto la regularidad como la regularidad geométrica son conceptos locales, luego podemos suponer que X es afín. Sea $Q \in X_{\bar{k}}$ un punto situado sobre P. Tenemos entonces un homomorfismo $\mathcal{O}_{X,P} \longrightarrow \mathcal{O}_{X_{\bar{k}},Q}$ que induce a su vez un monomorfismo de cuerpos $k(P) \longrightarrow \bar{k}(Q) = \bar{k}$.

Vamos a aplicar el teorema [5.73] (con las observaciones posteriores) para las álgebras $A = \mathcal{O}_X(X)$ y $\bar{A} = \mathcal{O}_{X_{\bar{k}}}(X_{\bar{k}}) = A \otimes_k \bar{k}$. Si $A = k[X_1, \ldots, X_n]/I$, entonces $\bar{A} = \bar{k}[X_1, \ldots, X_n]/(I)$, los puntos P y Q se corresponden con ideales maximales de estas álgebras, de modo que $P = A \cap Q$, por lo que las matrices $J(P)$ y $J(Q)$ (formadas por las derivadas de un generador de I evaluadas en las clases de las indeterminadas módulo P y módulo Q respectivamente) son la misma matriz si las identificamos a través del monomorfismo $k(P) \longrightarrow \overline{k}(Q)$. Así pues, $\operatorname{rang} J(P) = \operatorname{rang} J(Q) = r$. El teorema [5.73] nos da las relaciones $r = n - \mu(\mathfrak{m}_Q)$ y $r \leq n - \mu(\mathfrak{m}_P)$, y en el segundo caso tenemos la igualdad si la extensión $k(P)/k$ es separable. Así pues, concluimos que

$$\mu(\mathfrak{m}_P) \leq \mu(\mathfrak{m}_Q)$$

y se da la igualdad si la extensión $k(P)/k$ es separable.

Por otro lado tenemos la igualdad $\dim \mathcal{O}_{X,P} = \dim \mathcal{O}_{X_{\bar{k}},Q}$. En efecto, si $X = W_1 \cup \cdots \cup W_m$ es la descomposición de X en componentes irreducibles, entonces $X_{\bar{k}} = (W_1)_{\bar{k}} \cup \cdots \cup (W_m)_{\bar{k}}$. Los cerrados $(W_i)_{\bar{k}}$ no son necesariamente irreducibles, pero por el teorema [3.79] cada uno de ellos se descompone en componentes irreducibles de la misma dimensión. Si $P \in W_i$ entonces Q está en una de las componentes irreducibles de $(W_i)_{\bar{k}}$, mientras que si $P \notin W_i$ entonces $Q \notin (W_i)_{\bar{k}}$. Ahora basta tener en cuenta que $\dim \mathcal{O}_{X,P}$ es el máximo de las dimensiones de las componentes W_i que contienen a P, y que lo mismo sucede con $\dim \mathcal{O}_{X_{\bar{k}},Q}$.

Por último, basta atar cabos: si P es geométricamente regular entonces Q es regular, luego

$$\dim \mathcal{O}_{X,P} \leq \mu(\mathfrak{m}_P) \leq \mu(\mathfrak{m}_Q) = \dim \mathcal{O}_{X_{\bar{k}},Q} = \dim \mathcal{O}_{X,P},$$

luego la primera desigualdad es en realidad una igualdad y P es regular. Recíprocamente, si P es regular y la extensión $k(P)/k$ es separable entonces

$$\dim \mathcal{O}_{X_{\bar{k}},Q} = \dim \mathcal{O}_{X,P} = \mu(\mathfrak{m}_P) = \mu(\mathfrak{m}_Q),$$

luego Q es regular. ■

Nota Observemos que en la demostración anterior hemos visto que $\mu(Q)$ y $\dim \mathcal{O}_{X_{\bar{k}},Q}$ (luego también la regularidad de Q) no dependen de la antiimagen de P considerada, es decir, que para que un punto cerrado P sea geométricamente regular basta con que una de sus antiimágenes en $X_{\bar{k}}$ sea regular.

Teorema 7.25 *Si X/k es un conjunto algebraico, entonces todo punto de X geométricamente regular es regular.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $P \in X$ y sea $Q \in X_{\bar{k}}$ un punto sobre P. Si P es geométricamente regular entonces Q es regular, luego por 7.21 sabemos que $\overline{\{Q\}}$ contiene un punto cerrado regular Q'. Por la nota precedente tenemos que $P' = p(Q') \in \overline{\{P\}}$ es un punto cerrado geométricamente regular, luego P' es regular por el teorema anterior y P es regular, de nuevo por 7.21. ■

Respecto al recíproco, tenemos la siguiente consecuencia inmediata del teorema 7.18:

Teorema 7.26 *Un conjunto algebraico definido sobre un cuerpo perfecto es regular si y sólo si es geométricamente regular.*

El argumento del teorema 7.25 permite concluir que la nota precedente es cierta aunque el punto P no sea cerrado:

Teorema 7.27 *Si X/k es un conjunto algebraico y $Q \in X_{\bar{k}}$ es un punto regular, entonces $p(Q) \in X$ es geométricamente regular.*

DEMOSTRACIÓN: No perdemos generalidad si suponemos que X es afín, digamos $S = \operatorname{Esp} A$, donde A es una k-álgebra afín. Como en la prueba del teorema 7.25 obtenemos un punto cerrado $P' \in \overline{\{P\}}$ geométricamente regular. Sea $Q^* \in X_{\bar{k}}$ tal que $p(Q^*) = Q$. Hemos de probar que Q^* es regular.

Podemos identificar a P y P' con ideales de A tales que $P \subset P'$, e igualmente tenemos que Q^* es un ideal de $A \otimes_k \bar{k}$ tal que $Q^* \cap A = P$. Como $A \otimes_k \bar{k}$ es obviamente entero sobre A (porque $\bar{k}$ es entero sobre k), podemos aplicar el teorema del ascenso, que nos da un ideal Q' de $A \otimes_k \bar{k}$ tal que $Q^* \subset Q'$ y $Q' \cap A = P'$. En otros términos, tenemos un punto $Q' \in \overline{\{Q^*\}} \subset X_{\bar{k}}$ tal que $p(Q') = P'$. Como P' es geométricamente regular, tenemos que Q' es regular, luego Q^* también lo es por 7.21. ■

De aquí deducimos lo siguiente:

Teorema 7.28 *En un conjunto algebraico, el conjunto de los puntos geométricamente regulares es abierto (tal vez vacío).*

Demostración: Sea X/k un conjunto algebraico y sea $P \in X$ un punto geométricamente regular. Esto significa que existe un punto regular $Q \in X_{\bar{k}}$ tal que $p(Q) = P$. Como $\mathcal{O}_{X_{\bar{k}},Q}$ es un dominio íntegro, podemos tomar un entorno abierto G de Q que sea íntegro. (Tomamos un entorno afín cualquiera $G' = \operatorname{Esp} A$, consideramos el núcleo I del homomorfismo $A \longrightarrow A_Q$ y, usando que I es finitamente generado, tomamos un $s \in A \setminus Q$ tal que, para todo $a \in I$, se cumpla $s^n a = 0$, para cierto $n \geq 0$, con lo que el homomorfismo $A_s \longrightarrow A_Q$ es inyectivo, y basta considerar $G = D(s) \subset G'$.) El teorema 7.21 nos dice que, restringiendo U, podemos suponer que es regular. El teorema 3.57 nos da que $V = p[U] \subset X$ es un entorno abierto de P, y el teorema anterior implica que está formado por puntos geométricamente regulares. ■

Veamos un último resultado:

Teorema 7.29 *Si X/k es un conjunto algebraico geométricamente regular y K/k es una extensión de cuerpos (no necesariamente algebraica), entonces X_K es geométricamente regular.*

Demostración: Es claro que no perdemos generalidad si suponemos que X es conexo, en cuyo caso es íntegro. También podemos suponer que X es afín, así como que k y K son algebraicamente cerrados. (Tomamos una clausura algebraica $\overline{K}$ de K, y en ella la clausura algebraica $\bar{k}$ de k. Entonces tenemos que $X_{\bar{k}}$ es geométricamente regular, luego también lo es $X_{\overline{K}}$, luego, por definición, también lo es X_K.)

Basta probar que todos los puntos cerrados $Q \in X_K$ son regulares. Llamamos $P \in X$ a la proyección de Q, y sabemos que P es regular. Basta aplicar el razonamiento del teorema 7.24 con k y K en lugar de k y $\bar{k}$. La extensión $k(P)/k$ es trivial, luego separable. Obtenemos que $\mu(\mathfrak{m}_P) = \mu(\mathfrak{m}_Q)$. La segunda parte es más sencilla: por el teorema 3.60 sabemos que X_K es íntegro, luego

$$\dim \mathcal{O}_{X,P} = \dim X = \dim X_K = \dim \mathcal{O}_{X_K,Q}.$$

La conclusión es inmediata. ■

7.3 Diferenciales de Kähler

En esta sección estudiaremos una noción abstracta de forma diferencial que nos permitirá, en la sección siguiente, definir haces de formas diferenciales sobre un esquema, análogos a los que se definen en geometría diferencial.

Definición 7.30 Sea A un anillo, B una A-álgebra y M un B-módulo. Una A-*derivación* de B en M es una aplicación A-lineal $d : B \longrightarrow M$ tal que, para todo $b_1, b_2 \in B$, cumple

$$d(b_1b_2) = b_2\, db_1 + b_1\, db_2.$$

Representaremos por $\mathrm{Der}_A(B, M)$ el conjunto de todas las A-derivaciones de B en M, que tiene una estructura de A-módulo con las operaciones definidas puntualmente.

Notemos que de la definición de derivación se sigue que $da = 0$ para todo $a \in A$ (basta aplicar la linealidad y la regla del producto a $a \cdot 1$).

Teorema 7.31 *Si B es una A-álgebra, existe un B-módulo $\Omega^1_{B/A}$ y una derivación $d : B \longrightarrow \Omega^1_{B/A}$ tales que para cada B-módulo M y cada A-derivación $d' : B \longrightarrow M$, existe un único homomorfismo de B-módulos $\phi : \Omega^1_{B/A} \longrightarrow M$ tal que $d' = d \circ \phi$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea L un B-módulo libre de rango $|B|$. Representaremos por $\{db\}_{b\in B}$ una base de L. Sea N el submódulo de L generado por todos los elementos de la forma

$$da, \quad d(b_1 + b_2) - db_1 - db_2, \quad d(b_1b_2) - b_2\, db_1 - b_1\, db_2.$$

Tomamos $\Omega^1_{B/A} = L/N$ y definimos $d : B \longrightarrow \Omega^1_{B/A}$ como la aplicación dada por $db = [db]$. Es inmediato comprobar que se cumple la propiedad del enunciado. ∎

Es claro que el par $(\Omega^1_{B/A}, d)$ es único salvo isomorfismo, es decir, que si otro par cumple la misma propiedad del teorema entonces existe un isomorfismo entre ambos módulos que conserva las derivaciones respectivas. A los elementos de $\Omega^1_{B/A}$ los llamaremos *formas diferenciales* (o diferendiales de Käler) en B respecto de A. Podemos definir un homomorfismo de módulos

$$\mathrm{Hom}_B(\Omega^1_{B/A}, M) \longrightarrow \mathrm{Der}_A(B, M)$$

mediante $\phi \mapsto d \circ \phi$. La propiedad que caracteriza a $\Omega^1_{B/A}$ equivale a que este homomorfismo es un isomorfismo. La construcción muestra que $\Omega^1_{B/A}$ está generado como B-módulo por las diferenciales de los elementos de B.

Veamos un primer ejemplo:

Teorema 7.32 *Si $B = A[X_1, \ldots, X_n]$, entonces $\Omega^1_{B/A}$ es el B-módulo libre generado por $dX_1, \ldots, dX_n$.*

DEMOSTRACIÓN: Si $F \in B$ y $d' : B \longrightarrow M$ es una A-derivación de B en un B-módulo M, es fácil ver que

$$d'F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial X_i}\, d'X_i.$$

Por lo tanto d' está completamente determinada por las imágenes $d'X_i$. Así mismo, si definimos $\Omega^1_{B/A}$ como el B-módulo libre generado por las dX_i y definimos $d : B \longrightarrow \Omega^1_{B/A}$ mediante la fórmula anterior, se comprueba sin dificultad que d es ciertamente una derivación y que cumple la propiedad que caracteriza a $\Omega^1_{B/A}$. ■

Otro ejemplo de interés es el siguiente:

Teorema 7.33 *Si B es un cociente o una localización de A, entonces se cumple que $\Omega^1_{B/A} = 0$.*

DEMOSTRACIÓN: Si B es un cociente de A, entonces todo elemento de B es de la forma $a \cdot 1$, para cierto $a \in A$, y hemos probado que los elementos de esta forma tienen diferencial nula.

Si $B = S^{-1}A$, donde S es un subconjunto multiplicativo de A, entonces, para cada $b \in B$ existe un $s \in S$ tal que $sb \in A$, luego $s\,db = d(sb) = 0$, luego $db = 0$, pues s tiene inverso en B. ■

Si $\rho : B \longrightarrow C$ es un homomorfismo de A-álgebras podemos definir homomorfismos de C-módulos

$$\alpha : \Omega^1_{B/A} \otimes_B C \longrightarrow \Omega^1_{C/A}, \qquad \beta : \Omega^1_{C/A} \longrightarrow \Omega^1_{C/B}.$$

Para definir el primero vemos que tenemos una derivación $B \longrightarrow \Omega^1_{C/A}$ dada por $d'b = d\phi(b)$, que nos da un homomorfismo de B-módulos $\Omega^1_{B/A} \longrightarrow \Omega^1_{C/A}$ tal que $db \mapsto d\rho(b)$. A su vez, este homomorfismo nos permite definir α mediante

$$\alpha(db \otimes c) = c\,d\rho(b).$$

El homomorfismo β es el inducido por la B-derivación $C \longrightarrow \Omega^1_{C/B}$ vista como A-derivación.

Teorema 7.34 *Sea B un álgebra sobre un anillo A.*

a) Si A' es una A-álgebra y $B' = B \otimes_A A'$, existe un isomorfismo canónico de B'-módulos $\Omega^1_{B'/A'} \cong \Omega^1_{B/A} \otimes_B B'$.

b) Sea $B \longrightarrow C$ un homomorfismo de A-álgebras y α, β los homomorfismos descritos antes del teorema. Entonces la sucesión

$$\Omega^1_{B/A} \otimes_B C \xrightarrow{\alpha} \Omega^1_{C/A} \xrightarrow{\beta} \Omega^1_{C/B} \longrightarrow 0$$

es exacta.

c) Si $S \subset B$ es un conjunto multiplicativo, $S^{-1}\Omega^1_{B/A} \cong \Omega^1_{S^{-1}B/A}$.

d) Si $C = B/I$, entonces tenemos una sucesión exacta

$$I/I^2 \xrightarrow{\delta} \Omega^1_{B/A} \otimes_B C \xrightarrow{\alpha} \Omega^1_{C/A} \longrightarrow 0,$$

donde $\delta([b]) = db \otimes 1$.

Demostración: a) La derivación $d : B \longrightarrow \Omega^1_{B/A}$ induce una A'-derivación $d' = d \otimes 1 : B' \longrightarrow \Omega^1_{B/A} \otimes_A A' = \Omega^1_{B/A} \otimes_B B'$, y es fácil ver que d' satisface la propiedad que caracteriza a $\Omega^1_{B'/A'}$.

b) Observemos primero un hecho general: dada una sucesión de homomorfismos de A-módulos
$$M \xrightarrow{\alpha} N \xrightarrow{\beta} R,$$
una condición suficiente para que sea exacta es que, para cada A-módulo P, sea exacta la sucesión
$$\mathrm{Hom}_A(R, P) \xrightarrow{\beta^\#} \mathrm{Hom}_A(N, P) \xrightarrow{\alpha^\#} \mathrm{Hom}_A(M, P).$$

En efecto, tomando $P = R$, tenemos que $0 = \alpha^\#(\beta^\#(1_R)) = \alpha \circ \beta$. Así pues, $\mathrm{Im}\alpha \subset \mathrm{N}(\beta)$. Si la inclusión fuera estricta, tomamos $P = N/\mathrm{Im}\alpha$ y $p : N \longrightarrow P$ la proyección canónica. Entonces $p \in \mathrm{N}(\alpha^\#)$, pero $p \notin \mathrm{Im}\beta^\#$, pues existe un $n \in \mathrm{N}(\beta) \setminus \mathrm{Im}\alpha$, para el cual $p(n) \neq 0$, pero si p estuviera en $\mathrm{Im}\alpha$ sería $p(n) = 0$.

De este modo, para probar b) basta ver la exactitud de la sucesión
$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_C(\Omega^1_{C/B}, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_C(\Omega^1_{C/A}, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_C(\Omega^1_{B/A} \otimes_B C, M),$$
para todo C-módulo M. Es fácil ver que
$$\mathrm{Hom}_C(\Omega^1_{B/A} \otimes_B C, M) \cong \mathrm{Hom}_B(\Omega^1_{B/A}, M).$$

El isomorfismo viene dado por $\phi(f)(x) = f(x \otimes 1)$. De las definiciones se sigue inmediatamente la conmutatividad del diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_C(\Omega^1_{C/B}, M) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_C(\Omega^1_{C/A}, M) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_C(\Omega^1_{B/A} \otimes_B C, M) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_B(\Omega^1_{B/A}, M) \arrow[d] \\
\mathrm{Der}_B(C, M) \arrow[r] & \mathrm{Der}_A(C, M) \arrow[rr] & & \mathrm{Der}_A(B, M)
\end{tikzcd}$$

El homomorfismo $\mathrm{Der}_A(C, M) \longrightarrow \mathrm{Der}_A(B, M)$ es la composición con el homomorfismo dado $\rho : B \longrightarrow C$.

Por consiguiente, basta probar la exactitud de la sucesión
$$0 \longrightarrow \mathrm{Der}_B(C, M) \longrightarrow \mathrm{Der}_A(C, M) \longrightarrow \mathrm{Der}_A(B, M).$$

El primer homomorfismo es la inclusión, luego es inyectivo. Por otra parte, si $d \in \mathrm{Der}_B(C, M)$, entonces $d(\rho(b)) = 0$ porque las diferenciales de los elementos de B son nulas. Si $d \in \mathrm{Der}_A(C, M)$ cumple que $\rho \circ d = 0$, entonces, para todo $c \in C$ y todo $b \in B$ tenemos que
$$d(bc) = d(\rho(b)c) = \rho(b)\, dc = b\, dc,$$
luego $d \in \mathrm{Der}_B(C, M)$. Así pues, la sucesión es exacta.

c) Aplicamos b) con $C = S^{-1}B$, con lo que obtenemos una sucesión exacta

$$S^{-1}\Omega^1_{B/A} = \Omega^1_{B/A} \otimes_B S^{-1}B \xrightarrow{\alpha} \Omega^1_{S^{-1}B/A} \xrightarrow{\beta} \Omega^1_{S^{-1}B/B} \longrightarrow 0$$

Por el teorema 7.33 tenemos que α es suprayectiva. El argumento de b) muestra que para que α sea inyectiva basta con que el homomorfismo

$$\mathrm{Der}_A(S^{-1}B, M) \longrightarrow \mathrm{Der}_A(B, M)$$

sea suprayectivo para todo $S^{-1}B$-módulo M. Equivalentemente, hemos de probar que toda A-derivación $d : B \longrightarrow M$ se extiende a una A-derivación en $S^{-1}B$.

La extensión será única, pues si $b \in B$ y $s \in S$, entonces

$$db = d(s(b/s)) = \frac{b}{s}\,ds + s\,d(b/s),$$

luego ha de ser

$$d(b/s) = \frac{s\,db - b\,ds}{s^2}.$$

Hemos de probar que esta expresión define ciertamente una derivación en $S^{-1}B$. Veremos sólo que está bien definida. El hecho de que es una derivación es fácil de comprobar.

Si $b/s = b'/s'$, entonces $s''(bs' - sb') = 0$, luego

$$(bs' - sb')ds'' + s''s'\,db + s''b\,ds' - s''s\,db' - s''b'\,ds = 0.$$

Multiplicamos por $ss's''$:

$$ss'^2s''^2\,db - ss's''^2b'\,ds - (s^2s's''^2\,db' - ss's''^2b\,ds') = 0.$$

Usamos la relación $s''s'b = s''sb'$:

$$ss'^2s''^2\,db - s'^2s''^2b\,ds - (s^2s's''^2\,db' - s^2s's''^2b'\,ds') = 0.$$

Dividiendo entre $s^2s'^2s''^2$ concluimos que

$$\frac{s\,db - b\,ds}{s^2} = \frac{s'\,db' - b'\,ds'}{s'^2}.$$

d) Por el mismo argumento de b), basta probar la exactitud de la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_C(\Omega^1_{C/A}, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_C(\Omega^1_{B/A} \otimes_B C, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_C(I/I^2, M)$$

para todo C-módulo M.

Notemos que $I/I^2 \cong I \otimes_B C$, luego, al igual que tenemos el isomorfismo

$$\mathrm{Hom}_C(\Omega^1_{B/A} \otimes_B C, M) \cong \mathrm{Hom}_B(\Omega^1_{B/A}, M),$$

también se cumple que $\mathrm{Hom}_C(I/I^2, M) \cong \mathrm{Hom}_B(I, M)$. Así pues, hemos de probar la exactitud de la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_C(\Omega^1_{C/A}, M) \xrightarrow{\phi} \mathrm{Hom}_B(\Omega^1_{B/A}, M) \xrightarrow{\psi} \mathrm{Hom}_B(I, M),$$

donde $\phi(f)(db) = f(d[b])$ y $\psi(f)(i) = f(di)$. A su vez, esta sucesión es isomorfa a

$$0 \longrightarrow \mathrm{Der}_A(C, M) \longrightarrow \mathrm{Der}_A(B, M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_B(I, M),$$

donde el último homomorfismo es la restricción a i. La exactitud de esta sucesión es inmediata. ■

De aquí deducimos una condición de finitud:

Teorema 7.35 *Si A es un anillo y B una A-álgebra finitamente generada (o una localización de una A-álgebra finitamente generada), entonces $\Omega^1_{B/A}$ es un B-módulo finitamente generado.*

DEMOSTRACIÓN: Si B es una A-álgebra finitamente generada, podemos expresarla como $B = A[X_1, \ldots, X_n]/I$. Si llamamos $C = A[X_1, \ldots, X_n]$, el teorema anterior nos da un epimorfismo $\Omega^1_{C/A} \otimes_C B \longrightarrow \Omega^1_{B/A}$, y por el teorema 7.32 sabemos que $\Omega^1_{C/A}$ es un C-módulo finitamente generado.

Si $S \subset B$ es un conjunto multiplicativo, por el teorema anterior tenemos que $\Omega^1_{S^{-1}B/A} \cong S^{-1}\Omega^1_{B/A}$, que es un $S^{-1}B$-módulo finitamente generado. ■

Necesitaremos una última propiedad básica de los módulos de diferenciales:

Teorema 7.36 *Sean B_1 y B_2 dos A-álgebras y $R = B_1 \otimes_A B_2$. Entonces*

$$(\Omega^1_{B_1/A} \otimes_{B_1} R) \oplus (\Omega^1_{B_2/A} \otimes_{B_2} R) \cong \Omega^1_{R/A},$$

donde el isomorfismo viene dado por

$$(db_1 \otimes r_1) + (db_2 \otimes r_2) \mapsto r_1\, d(b_1 \otimes 1) + r_2\, d(1 \otimes b_2).$$

DEMOSTRACIÓN: Consideramos las sucesiones exactas dadas por 7.34:

$$\Omega^1_{B_1/A} \otimes_{B_1} R \xrightarrow{\phi_1} \Omega^1_{R/A} \xrightarrow{\psi_2} \Omega^1_{R/B_1} \cong \Omega^1_{B_2/A} \otimes_{B_2} R \longrightarrow 0,$$

$$\Omega^1_{B_2/A} \otimes_{B_2} R \xrightarrow{\phi_2} \Omega^1_{R/A} \xrightarrow{\psi_1} \Omega^1_{R/B_2} \cong \Omega^1_{B_1/A} \otimes_{B_1} R \longrightarrow 0.$$

Observemos que

$$\phi_1(db_1 \otimes r_1) = r_1\, d(b_1 \otimes 1), \qquad \phi_2(db_2 \otimes r_2) = r_2\, d(1 \otimes b_2),$$

$$\psi_1(d(b_1 \otimes b_2)) = db_1 \otimes 1 \otimes b_2, \qquad \psi_2(d(b_1 \otimes b_2)) = db_2 \otimes b_1 \otimes 1.$$

Observamos que $\phi_i \circ \psi_i = 1$, de donde se sigue que cada ϕ_i es inyectiva. Más aún, es fácil concluir que

$$\Omega^1_{R/A} = \mathrm{Im}\, \phi_1 \oplus \mathrm{N}\, \psi_1 = \mathrm{Im}\, \phi_1 \oplus \mathrm{Im}\, \phi_2.$$

Ahora es claro que $\phi_1 \oplus \phi_2$ es el isomorfismo del enunciado. ■

Las formas diferenciales están muy relacionadas con la separabilidad de las extensiones de cuerpos. Para probar los resultados en esta línea necesitamos un ahondar un poco más en los homomorfismos que hemos estudiado en el teorema 7.34:

Teorema 7.37 *Sea A un anillo, sea B una A-álgebra, $\bar{B} = B[X_1, \ldots, X_n]$ y $C = C/I$, para un cierto ideal I de $\bar{B}$. Consideremos los homomorfismos*

$$\alpha : \Omega^1_{B/A} \otimes_B C \longrightarrow \Omega^1_{C/A}, \qquad \delta : I/I^2 \longrightarrow \Omega^1_{\bar{B}/B} \otimes_{\bar{B}} C$$

definidos antes del teorema 7.34 *y en* 7.34 d). *Entonces existe un epimorfismo de B-módulos* $\mathrm{N}\,\delta \longrightarrow \mathrm{N}\,\alpha$.

Demostración: Tenemos que $\bar{B} = \bar{A} \otimes_A B$, donde $\bar{A} = A[X_1, \ldots, X_n]$ luego el teorema anterior nos da un isomorfismo

$$\Omega^1_{\bar{B}/A} \cong (\Omega^1_{\bar{A}/A} \otimes_{\bar{A}} \bar{B}) \oplus (\Omega^1_{B/A} \otimes_B \bar{B}) = \Omega^1_{\bar{B}/B} \oplus (\Omega^1_{B/A} \otimes_B \bar{B}).$$

De aquí obtenemos a su vez un isomorfismo

$$\rho : \Omega^1_{\bar{B}/A} \otimes_{\bar{B}} C \longrightarrow (\Omega^1_{\bar{B}/B} \otimes_{\bar{B}} C) \oplus (\Omega^1_{B/A} \otimes_B C).$$

Una comprobación rutinaria muestra que el diagrama siguiente es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
I/I^2 \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\delta_1"'] & \Omega^1_{\bar{B}/B} \otimes_{\bar{B}} C \\
\Omega^1_{\bar{B}/A} \otimes_{\bar{B}} C \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\alpha_1"'] & (\Omega^1_{\bar{B}/B} \otimes_{\bar{B}} C) \oplus (\Omega^1_{B/A} \otimes_B C) \arrow[u, "p"'] \\
\Omega^1_{C/A} & \Omega^1_{B/A} \otimes_B C \arrow[l, "\alpha"] \arrow[u, "i"']
\end{tikzcd}$$

donde δ_1 y α_1 son los homomorfismos análogos a δ y α, p es la proyección e i es la inclusión. De aquí se sigue que

$$i[\mathrm{N}\,\alpha] = \rho[\delta_1[\mathrm{N}\,\delta]].$$

El epimorfismo buscado es $\delta_1 \circ \rho$ seguido de la proyección en $\Omega^1_{B/A} \otimes_B C$. ■

Vamos a aplicar el teorema anterior al caso en el que $n = 1$ e I está generado por un polinomio mónico $P(X) \in B[X]$. Tenemos una sucesión exacta:

$$I/I^2 \xrightarrow{\delta} \Omega^1_{B[X]/B} \otimes_{B[X]} C \xrightarrow{\alpha} \Omega^1_{C/B} \longrightarrow 0.$$

Por el teorema 7.32 sabemos que $\Omega^1_{B[X]/B} \otimes_{B[X]} C$ es un C-módulo libre generado por $dX \otimes 1$ y $\delta([P]) = dP \otimes 1 = P'(X)\, dX \otimes 1$. Por consiguiente,

$$\Omega^1_{C/B} \cong C/(P'(x)),$$

donde $x = [X] \in C$. Por otra parte,

$$\mathrm{N}\,\delta = \{[Q(X)P(X)] \mid Q(x)P'(x) = 0\}.$$

Consideremos la localización $C' = C_{P'(x)}$. Entonces $\mathrm{N}\,\delta \otimes_C C' = 0$, pues

$$[Q(X)P(X)] \otimes Y = Q(x)[P(X)] \otimes Y = [P(X)] \otimes Q(x)P'(x)Y/P'(x) = 0$$

y $\Omega^1_{C/B} \otimes_C C' = 0$, pues

$$[Q(x)] \otimes Y = [Q(x)][P'(x)] \otimes Y/P'(x) = 0.$$

Ahora consideramos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathrm{N}\,\alpha \longrightarrow \Omega^1_{B/A} \otimes_B C \xrightarrow{\alpha} \Omega^1_{C/A} \xrightarrow{\beta} \Omega^1_{C/B} \longrightarrow 0.$$

Multiplicar un C-módulo por $\otimes_C C'$ equivale a localizar respecto a $P'(x)$, luego el teorema [3.2] nos da la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathrm{N}\,\alpha \otimes_C C' \longrightarrow \Omega^1_{B/A} \otimes_B C' \longrightarrow \Omega^1_{C'/A} \longrightarrow 0,$$

donde hemos usado además el teorema 7.34 c).

Por el teorema anterior tenemos un epimorfismo $\mathrm{N}\,\delta \otimes_C C' \longrightarrow \mathrm{N}\,\alpha \otimes_C C'$, luego ambos módulos son nulos y así concluimos que

$$\Omega^1_{B/A} \otimes_B C' \cong \Omega^1_{C'/A}.$$

Usaremos este isomorfismo en la prueba del teorema siguiente:

Teorema 7.38 *Sea L/k una extensión de cuerpos, sea $P(X) \in L[X]$ un polinomio mónico irreducible y $K = L[X]/(P(X))$ una extensión simple de L.*

a) Si K/L es separable entonces $\Omega^1_{K/L} = 0$ y $\Omega^1_{L/k} \otimes_L K \longrightarrow \Omega^1_{K/k}$ es un isomorfismo. (En particular, $\dim_K \Omega^1_{K/k} = \dim_L \Omega^1_{L/k}$.)

b) Si K/L es inseparable, entonces $\Omega^1_{K/L} \cong K$ y

$$\dim_L \Omega^1_{L/k} \leq \dim_K \Omega^1_{K/k} \leq \dim_L \Omega^1_{L/k} + 1.$$

c) Si K/k es finita, entonces es separable si y sólo si $\Omega^1_{K/k} = 0$.

Demostración: Según acabamos de ver, se cumple que $\Omega^1_{K/L} \cong K/(P'(x))$, donde $x = [X] \in K$ es una raíz de $P(X)$. En el caso a) tenemos que $P'(x) \neq 0$, luego $\Omega^1_{K/L} = 0$. Con la notación de la discusión previa al teorema tenemos que $K = C = C'$, lo que nos da el isomorfismo indicado en a).

Si K/L es inseparable entonces $P'(x) = 0$, luego $\Omega^1_{K/L} \cong K$. Con la notación de la demostración de 7.37 tenemos que $\Omega^1_{K/k} \cong (\Omega^1_{L[X]/k} \otimes_{L[X]} K)/\langle \delta_1(P)\rangle_K$ y el isomorfismo ρ nos da que

$$\begin{aligned}\dim_K(\Omega^1_{L[X]/k} \otimes_{L[X]} K) &= \dim_K(\Omega^1_{L[X]/L} \otimes_{L[X]} K) + \dim_K(\Omega^1_{L/k} \otimes_L K)\\ &= 1 + \dim_L \Omega^1_{L/k}.\end{aligned}$$

De aquí se siguen las desigualdades del enunciado.

c) Si K/k es finita separable, entonces es simple y $\Omega^1_{K/k} = 0$ por a). Si K/k es inseparable entonces existe un cuerpo $k \subset L \subset K$ tal que K/L es inseparable y simple. Por b) tenemos que $\Omega_{K/L} \neq 0$ y entonces $\Omega^1_{K/k} \neq 0$ por 7.34 b). ■

El resultado fundamental que relaciona la separabilidad de una extensión de cuerpos con las formas diferenciales es el siguiente:

Teorema 7.39 *Sea K un cuerpo de funciones algebraicas de grado de trascendencia n sobre un cuerpo k. Entonces $\Omega^1_{K/k}$ es un K-espacio vectorial de dimensión finita,* $\dim_K \Omega^1_{K/k} \geq n$ *y se da la igualdad si y sólo si K/k es separablemente generada.*

Demostración: La hipótesis de que K sea un *cuerpo de funciones algebraicas* sobre k significa que existe un cuerpo de fracciones algebraicas $F = k(X_1, \ldots, X_n)$ tal que la extensión K/F es finita. Que sea *separablemente generada* significa que la base de trascendencia $X_1, \ldots, X_n$ puede elegirse de modo que K/F sea separable. (Y en tal caso se dice que es una *base de trascendencia separadora.*)

Podemos ver a F como una localización de $k[X_1, \ldots, X_n]$, luego los teoremas 7.32 y 7.34 c) implican que $\dim_F \Omega^1_{F/k} = n$. Ahora basta descomponer la extensión K/F en un número finito de extensiones simples, con lo que los apartados a) y b) del teorema anterior implican que

$$n \leq \dim_K \Omega^1_{K/k} < \infty,$$

y se da la igualdad si K/k es separablemente generada.

Supongamos ahora que $\dim_K \Omega^1_{K/k} = n$ y sean $f_1, \ldots, f_n \in K$ tales que $df_1, \ldots, df_n$ formen una base de $\Omega^1_{K/k}$. Llamemos $L = k(f_1, \ldots, f_n) \subset K$ y consideremos la sucesión exacta

$$\Omega^1_{L/k} \otimes_L K \longrightarrow \Omega^1_{K/k} \longrightarrow \Omega^1_{K/L} \longrightarrow 0.$$

Tenemos que el primer homomorfismo es suprayectivo, luego $\Omega^1_{K/L} = 0$. La parte ya probada implica que la extensión K/L es finita, pues en caso contrario tendría que ser trascendente (pues es finitamente generada), y $\dim_K \Omega^1_{K/L}$ sería al menos el grado de trascendencia. A su vez, esto implica que L/k es puramente trascendente. El apartado c) del teorema anterior implica entonces que K/L es separable, luego, por definición, K/k también lo es. ■

Conviene observar que, según la demostración del teorema anterior, si K/k es un cuerpo de funciones algebraicas separablemente generado sobre k, entonces una condición suficiente para que $f_1, \ldots, f_n$ formen una base de trascendencia separadora de K sobre k es que $df_1, \ldots, df_n$ formen una K-base de $\Omega^1_{K/k}$. Es fácil ver que la condición también es necesaria.

7.4 Haces de formas diferenciales

Estudiamos ahora los haces de formas diferenciales sobre un esquema (o, más precisamente, asociados a un homomorfismo de esquemas) determinados por el teorema siguiente:

Teorema 7.40 *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un homomorfismo de esquemas. Entonces existe (salvo isomorfismo) un único haz cuasicoherente $\Omega^1_{X/Y}$ en X tal que para cada abierto afín V de Y y cada abierto afín $U \subset f^{-1}[V]$ se cumple que*

$$\Omega^1_{X/Y}|_U \cong \widetilde{\Omega}^1_{\mathcal{O}_X(U)/\mathcal{O}_Y(V)},$$

y para cada $P \in X$ se cumple que

$$(\Omega^1_{X/Y})_P \cong \Omega^1_{\mathcal{O}_{X,P}/\mathcal{O}_{Y,f(P)}}.$$

DEMOSTRACIÓN: Observemos que, en general, si $\rho : A \longrightarrow B$ es un homomorfismo de anillos, $\mathfrak{q} \in \operatorname{Esp} B$ y $\mathfrak{p} = \rho^{-1}[\mathfrak{q}] \in \operatorname{Esp} A$, tenemos isomorfismos

$$\Omega^1_{B/A} \otimes_B B_{\mathfrak{q}} \cong \Omega^1_{B_{\mathfrak{q}}/A} \cong \Omega^1_{B_{\mathfrak{q}}/A_{\mathfrak{p}}}.$$

El primero es 7.34, y el segundo se sigue de 7.34 b), que nos da la sucesión exacta

$$0 = \Omega^1_{A_{\mathfrak{p}}/A} \longrightarrow \Omega^1_{B_{\mathfrak{q}}/A} \longrightarrow \Omega^1_{B_{\mathfrak{q}}/A_{\mathfrak{p}}} \longrightarrow 0.$$

Para cada $P \in X$ llamemos $\Omega_P = \Omega^1_{\mathcal{O}_{X,P}/\mathcal{O}_{Y,f(P)}}$. Si $V \subset Y$ y $U \subset f^{-1}[V]$ son abiertos afines y $P \in U$, entonces

$$\Omega^1_{\mathcal{O}_X(U)/\mathcal{O}_Y(V)} \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{O}_{X,P} \cong \Omega_P.$$

Para cada $\omega \in \Omega^1_{\mathcal{O}_X(U)/\mathcal{O}_Y(V)}$, llamamos ω_P a la imagen de $\omega \otimes 1$ por el isomorfismo anterior.

Para cada abierto U en X definimos $\Omega^1_{X/Y}(U)$ como el conjunto de todas las aplicaciones

$$s : U \longrightarrow \bigoplus_{P \in U} \Omega^1_P$$

tales que para cada punto $P \in U$ existen abiertos afines $f(P) \in V_P \subset U$, $P \in U_P \subset f^{-1}[V_P]$ y un $\omega \in \Omega^1_{\mathcal{O}_X(U_P)/\mathcal{O}_Y(V_P)}$ de modo que para cada $Q \in U_P$ se cumple que $s(Q) = \omega_Q$.

Consideramos a $\Omega^1_{X/Y}(U)$ como $\mathcal{O}_X(U)$-módulo con las operaciones definidas puntualmente. Es fácil ver que estos módulos forman un $\mathcal{O}_X$-módulo $\Omega^1_{X/Y}$ con las restricciones usuales de aplicaciones. Además, para cada $P \in X$ tenemos un isomorfismo natural $\Omega^1_{X/Y,P} \cong \Omega^1_P$.

Consideremos ahora abiertos afines $V \subset Y$, $U \subset f^{-1}[V]$. Por construcción tenemos un homomorfismo natural de $\mathcal{O}_X(U)$-módulos

$$\Omega^1_{\mathcal{O}_X(U)/\mathcal{O}_Y(V)} \longrightarrow \Omega^1_{X/Y}(U)$$

que induce un homomorfismo de $\mathcal{O}_X|_U$-módulos

$$\widetilde{\Omega}^1_{\mathcal{O}_X(U)/\mathcal{O}_Y(V)} \longrightarrow \Omega^1_{X/Y}|_U.$$

Como los homomorfismos locales asociados son isomorfismos, concluimos que se trata de un isomorfismo. En particular, el haz $\Omega^1_{X/Y}$ es cuasicoherente. La unicidad es clara. ■

Si X es un esquema definido sobre un esquema S escribiremos Ω^1_X en lugar de $\Omega^1_{X/S}$. Observemos que si S es afín, entonces podemos tomar $V = S$ y $f^{-1}[V] = X$, luego tenemos los isomorfismos del teorema anterior para todo abierto afín U de X.

Por construcción, si $f : X \longrightarrow Y$ es un homomorfismo de esquemas y U es un abierto en X, entonces $\Omega^1_{X/Y}|_U = \Omega^1_{U/Y}$.

Si U y V son abiertos afines en las condiciones del teorema anterior, tenemos que $\Omega^1_{X/Y}(U) \cong \Omega^1_{\mathcal{O}_X(U)/\mathcal{O}_Y(V)}$ es un $\mathcal{O}_X(U)$-módulo generado por los elementos de la forma df, con $f \in \mathcal{O}_X(U)$. Es fácil ver que si $U' \subset U$ es otro abierto afín, entonces $df|_{U'} = d(f|_{U'})$.

El teorema 7.34 se traduce de forma inmediata al resultado siguiente:

Teorema 7.41 *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un homomorfismo de esquemas.*

a) Sea $\pi : Y' \longrightarrow Y$ un homomorfismo de esquemas, sea $X' = X \times_Y Y'$ y sea $p : X' \longrightarrow X$ la primera proyección. Entonces $\Omega^1_{X'/Y'} \cong p^*\Omega^1_{X/Y}$.

b) Si $Y \longrightarrow Z$ es un homomorfismo de esquemas, tenemos una sucesión exacta

$$f^*\Omega^1_{Y/Z} \longrightarrow \Omega^1_{X/Z} \longrightarrow \Omega^1_{X/Y} \longrightarrow 0.$$

c) Si $P \in X$ entonces $\Omega^1_{X/Y,P} \cong \Omega^1_{\mathcal{O}_{X,P}/\mathcal{O}_{Y,f(P)}}$.

d) Si $i : Z \longrightarrow X$ es un subesquema cerrado de X definido por un haz cuasicoherente de ideales $\mathcal{I}$, entonces tenemos una sucesión exacta

$$i^*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2) \longrightarrow i^*(\Omega^1_{X/Y}) \longrightarrow \Omega^1_{Z/Y} \longrightarrow 0.$$

Demostración: a) Sea V un abierto afín en Y y tomemos abiertos afines $U_1 \subset f^{-1}[Y] \subset X$, $U_2 \subset \pi^{-1}[Y] \subset Y'$. Sea $U' = U_1 \times_Y U_2$. Es claro que los abiertos U' construidos de esta forma cubren X'. Aplicamos 5.8 y 7.34 a):

$$(p^*\Omega^1_{X/Y})|_{U'} \cong \Omega^1_{X/Y}(U_1) \widetilde{\otimes_{\mathcal{O}_X(U_1)}} \mathcal{O}_{X'}(U') \cong \Omega^1_{\mathcal{O}_X(U_1)/\mathcal{O}_Y(V)} \widetilde{\otimes_{\mathcal{O}_X(U_1)}} \mathcal{O}_{X'}(U')$$

$$\cong \widetilde{\Omega}^1_{\mathcal{O}_{X'}(U')/\mathcal{O}_{Y'}(U_2)} \cong \Omega^1_{X'/Y'}|_{U'}.$$

Los isomorfismos son naturales, de donde se sigue fácilmente que se combinan para formar un mismo isomorfismo de $\mathcal{O}_X$-módulos.

b) Tomamos un abierto afín $U_1 \subset Z$, un abierto afín $U_2 \subset Y$ contenido en su antiimagen y un abierto afín $U_3 \subset X$ contenido en la antiimagen de U_2. El teorema 7.34 b) nos da una sucesión exacta

$$\Omega^1_{Y/Z}(U_2) \otimes_{\mathcal{O}_Y(U_2)} \mathcal{O}_X(U_3) \longrightarrow \Omega^1_{\mathcal{O}_X(U_3)/\mathcal{O}_Z(U_1)} \longrightarrow \Omega^1_{\mathcal{O}_X(U_3)/\mathcal{O}_Y(U_2)} \longrightarrow 0.$$

Esta sucesión induce una sucesión exacta entre los haces cuasicoherentes asociados a estos módulos, es decir:

$$f^*\Omega^1_{Y/Z}|_{U_3} \longrightarrow \Omega^1_{X/Z}|_{U_3} \longrightarrow \Omega^1_{X/Y}|_{U_3} \longrightarrow 0.$$

Los abiertos U_3 cubren todo el esquema X y es fácil ver que los homomorfismos se unen para formar una sucesión

$$f^*\Omega^1_{Y/Z} \longrightarrow \Omega^1_{X/Z} \longrightarrow \Omega^1_{X/Y} \longrightarrow 0,$$

que también es exacta porque lo son las sucesiones locales.

c) Tomamos un entorno afín V de $f(P)$ y un entorno afín $P \in U \subset f^{-1}[V]$, de modo que

$$\Omega^1_{X/Y,P} \cong (\Omega^1_{\mathcal{O}_X(U)/\mathcal{O}_Y(V)})_P \cong \Omega^1_{\mathcal{O}_{X,P}/\mathcal{O}_Y(V)} \cong \Omega^1_{\mathcal{O}_{X,P}/\mathcal{O}_{Y,f(P)}}.$$

El último isomorfismo es por 7.34 b), ya que $\Omega^1_{\mathcal{O}_{Y,f(P)}/\mathcal{O}_Y(V)} = 0$ por 7.33.

d) Tomemos abiertos afines $V \subset Y$ y $U \subset f^{-1}[V]$. Entonces $U' = i^{-1}[U]$ es un abierto afín en Z y $\mathcal{O}_Z(U') = \mathcal{O}_X(U)/\mathcal{I}(U)$. El teorema 7.34 d) nos da una sucesión exacta

$$(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)(U) \longrightarrow \Omega^1_{X/Y}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{O}_Z(U') \longrightarrow \Omega^1_{Z/Y}(U') \longrightarrow 0.$$

Componiendo el primer homomorfismo con el isomorfismo

$$(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{O}_Z(U') \cong (\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)(U),$$

el teorema 5.8 nos permite reformularla como

$$i^*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)(U') \longrightarrow i^*(\Omega^1_{X/Y})(U') \longrightarrow \Omega^1_{Z/Y}(U') \longrightarrow 0.$$

Estos homomorfismos pueden unirse para formar la sucesión exacta del enunciado. ■

Es fácil ver que en las condiciones del apartado c), si $f \in \mathcal{O}_X(U)$ y $P \in U$, entonces se cumple que $(df)_P = d(f_P)$.

Observemos ahora que bajo ciertas condiciones de finitud los haces de formas diferenciales son coherentes:

Teorema 7.42 *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un homomorfismo de tipo finito entre dos esquemas X e Y, donde Y es noetheriano. Entonces $\Omega^1_{X/Y}$ es un haz coherente en X.*

Demostración: Bajo estas hipótesis X es también noetheriano. Si V es un abierto afín en Y y $U \subset f^{-1}[V]$ es un abierto afín en X tenemos que $\mathcal{O}_X(U)$ es finitamente generado sobre $\mathcal{O}_Y(V)$, luego el teorema 7.35 nos da que $\Omega^1_{X/Y}(U) \cong \Omega^1_{\mathcal{O}_X(U)/\mathcal{O}_Y(V)}$ es un $\mathcal{O}_X(U)$-módulo finitamente generado. Esto implica que $\Omega^1_{X/Y}$ es finitamente generado, luego coherente. ■

El teorema siguiente nos permitirá relacionar la regularidad geométrica con los haces de formas diferenciales:

Teorema 7.43 *Sea A una k-álgebra afín y sea $\mathfrak{m} \in \operatorname{Esp} A$ un punto racional. Entonces el homomorfismo*

$$\delta : \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \longrightarrow \Omega^1_{A/k} \otimes_A k(\mathfrak{m})$$

dado por 7.34 *d) es un isomorfismo.*

Demostración: Tenemos que δ es suprayectivo por el teorema 7.34 d), pues $\Omega^1_{k(\mathfrak{m})/k} = 0$. Representemos $A = B/I$, donde $B = k[X_1, \ldots, X_n]$ y sea $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}/I$. Así $k(\mathfrak{m}) = A/\mathfrak{m} = B/\mathfrak{n} = k$.

El teorema 7.34 d) nos da la sucesión exacta de A-módulos

$$I/I^2 \longrightarrow \Omega^1_{B/k} \otimes_B A \longrightarrow \Omega^1_{A/k} \longrightarrow 0.$$

De ella obtenemos la sucesión exacta

$$(I/I^2) \otimes_A k(\mathfrak{m}) \longrightarrow \Omega^1_{B/k} \otimes_B k(\mathfrak{m}) \longrightarrow \Omega^1_{A/k} \otimes_A k(\mathfrak{m}) \longrightarrow 0.$$

Ahora observamos que el homomorfismo natural $I \longrightarrow (I/I^2) \otimes_A k(\mathfrak{m})$ es suprayectivo, por lo que también es exacta la sucesión

$$I \longrightarrow \Omega^1_{B/k} \otimes_B k(\mathfrak{m}) \longrightarrow \Omega^1_{A/k} \otimes_A k(\mathfrak{m}) \longrightarrow 0.$$

Más aún, tenemos el siguiente diagrama conmutativo con filas exactas:

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r] \arrow[d, "1"'] & \mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2 \arrow[r] \arrow[d, "\delta'"'] & \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \arrow[r] \arrow[d, "\delta"'] & 0 \\
I \arrow[r, "\gamma"'] & \Omega^1_{B/k} \otimes_B k(\mathfrak{m}) \arrow[r] & \Omega^1_{A/k} \otimes_A k(\mathfrak{m}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Ahora es fácil ver que si δ' es inyectivo entonces δ también lo es.

El hecho de que $B/\mathfrak{n} = k$ siginifica que $\mathfrak{n} = (X_1 - \xi_1, \ldots, X_n - \xi_n)$, para cierto $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in k^n$. Si $F \in \mathfrak{n}$ cumple

$$\delta([F]) = dF \otimes 1 = \sum_i \frac{\partial F}{\partial X_i} dX_i \otimes 1 = \sum_i dX_i \otimes \left[\frac{\partial F}{\partial X_i}\right] = 0,$$

entonces $\partial F/\partial X_i \in \mathfrak{n}$ para todo i, lo que significa que

$$\left.\frac{\partial F}{\partial X_i}\right|_{\xi} = 0.$$

De aquí se sigue que el desarrollo de Taylor de F alrededor de F no tiene términos de grado 0 o 1, luego $F \in \mathfrak{n}^2$. ■

Conviene observar que

$$\Omega^1_{A/k} \otimes_A k(\mathfrak{m}) \cong \Omega^1_{A/k} \otimes_A A_{\mathfrak{m}} \otimes_{A_{\mathfrak{m}}} k(\mathfrak{m}) \cong \Omega^1_{A_{\mathfrak{m}}/k} \otimes_{A_{\mathfrak{m}}} k(\mathfrak{m}).$$

Ahora necesitamos un resultado técnico:

Teorema 7.44 *Sea X un esquema localmente noetheriano y $\mathcal{M}$ un haz coherente en X. Para cada $P \in X$ definimos $\phi(P) = \dim_{k(P)}(\mathcal{M}_P \otimes_{\mathcal{O}_{X,P}} k(P))$. Entonces:*

a) Para cada natural n, el conjunto $\{P \in X \mid \phi(P) \leq n\}$ es abierto.

b) Si ϕ es constante igual a n y X es reducido, entonces $\mathcal{M}$ es localmente libre de rango n.

DEMOSTRACIÓN: Tomamos un punto $P \in X$ tal que $\phi(P) = n$ y hemos de encontrar un entorno en el que $\phi \leq n$. Como el problema es local podemos suponer que $X = \operatorname{Esp} A$, donde A es un anillo noetheriano. Entonces $\mathcal{M} = \widetilde{M}$, para cierto A-módulo finitamente generado M.

Tenemos que $M_P \otimes_{A_P} k(P)$ tiene dimensión n, luego tiene una base de la forma $m_1/s \otimes 1, \ldots, m_n/s \otimes 1$, con $m_1, \ldots, m_n \in M$, $s \in A \setminus P$. Consideremos el submódulo $N = \langle m_1/s, \ldots, m_n/s \rangle_{A_P}$. Multiplicando por $\otimes_{A_P} k(P)$ la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow M_P \longrightarrow M_P/N \longrightarrow 0$$

obtenemos una sucesión exacta

$$N \otimes_{A_P} k(P) \longrightarrow M_P \otimes_{A_P} k(P) \longrightarrow (M_P/N) \otimes_{A_P} k(P) \longrightarrow 0,$$

y el primer homomorfismo es obviamente suprayectivo, luego concluimos que $(M_P/N) \otimes_{A_P} k(P) = 0$. El lema de Nakayama nos da entonces que $M_P/N = 0$. En otras palabras, M_P está generado por los elementos $m_1/s, \ldots, m_n/s$.

Sea $R = \langle m_1, \ldots, m_n \rangle_A$. Para cada $m \in M$, tenemos que $m/1 = m'/s$, para cierto $m' \in R$, luego existe un $t \in A \setminus P$ tal que $tm \in R$. En principio, t depende de m, pero como M es finitamenge generado, podemos encontrar un t que valga para todo M. Esto implica que $M_t = \langle m_1/t, \ldots, m_n/t \rangle_{A_t}$. Cambiando X por $D(t)$ podemos suponer que M tiene un generador con n elementos, y entonces es claro que para todo $Q \in X$ se cumple que $M_Q \otimes_{A_Q} k(Q)$ tiene un generador con n elementos, luego $\phi(Q) \leq n$.

Para probar b) podemos situarnos en las mismas condiciones que en a), es decir, $X = \operatorname{Esp} A$, donde A es un anillo noetheriano (reducido, por hipótesis) y $\mathcal{M} = \widetilde{M}$, donde M es un A-módulo generado por n elementos. Fijemos un epimorfismo $\phi : A^n \longrightarrow M$. Vamos a ver que es un isomorfismo.

Sea $v \in A^n$ tal que $\phi(v) = 0$ y sea $P \in \operatorname{Esp} A$. consideramos el epimorfismo

$$\alpha_P \otimes 1 : A_P^n \otimes_{A_P} k(P) \longrightarrow M_P \otimes_{A_P} k(P).$$

El primer módulo es isomorfo a $k(P)^n$ y, como, por hipótesis, el segundo tiene dimensión n sobre $k(P)$, concluimos que $\alpha_P \otimes 1$ ha de ser un isomorfismo. Dado que $v \otimes 1$ tiene imagen nula, ha de ser $v \otimes 1 = 0$, pero $v \otimes 1$ se corresponde con $([v_1], \ldots, [v_n]) \in k(P)^n$, luego resulta que $v_i \in P$ para todo i. Como esto vale para todo $P \in \operatorname{Esp} A$, esto nos lleva a que $v_i \in \operatorname{Rad} 0 = 0$, luego $v = 0$.

En definitiva, M es libre de rango n, luego (teniendo en cuenta que hemos reducido el esquema original) $\mathcal{M}$ es localmente libre de rango n. ■

Ahora ya podemos mostrar la relación entre los puntos geométricamente regulares y los módulos de formas diferenciales, pero antes conviene dar una definición:

Definición 7.45 Si X es un espacio topológico y $P \in X$, definimos la *dimensión* de X en P, a la que representaremos por $\dim_P X$, como el ínfimo de las dimensiones de los entornos de P en X.

Es fácil ver que $\dim X$ (finita o infinita) es el supremo de las dimensiones de los puntos de X. Si X es un conjunto algebraico, es claro que $\dim_P X$ es el máximo de las dimensiones de las componentes irreducibles de X que contienen a P.

Teorema 7.46 *Sea X/k un conjunto algebraico y $P \in X$. Entonces, P es geométricamente regular si y sólo si $\Omega^1_{X,P}$ es libre de rango* $\dim_P X$.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos en primer lugar que $\Omega^1_{X,P}$ es libre de rango $n = \dim_P X$. Entonces P tiene un entorno afín U tal que $\Omega^1_X|_U$ es libre de rango n (ver las observaciones anteriores al teorema 5.21). Podemos suponer que U es conexo y que $\dim U = n$.

Sea $\bar{k}$ la clausura algebraica de k y sea $\overline{U} = U_{\bar{k}}$. Entonces $\dim \overline{U} = n$ y $\Omega^1_{\overline{U}/\bar{k}} \cong p^*\Omega^1_{U/k}$ es localmente libre de rango n. Si $Q \in \overline{U}$ es un punto cerrado, el teorema 7.43 (con la observación posterior) nos da que

$$\dim_{\bar{k}(Q)} T_Q\overline{U} = \dim_{\bar{k}(Q)} \Omega^1_{\overline{U},Q} \otimes_{\mathcal{O}_{\bar{U},Q}} \bar{k}(Q) = n.$$

Esto implica que $\overline{U}$ es regular en todos los puntos cerrados Q tales que $\dim_Q \overline{U} = n$. En particular $\overline{U}$ es regular en los puntos situados sobre P (pues la dimensión se conserva por las extensiones de constantes), luego P es geométricamente regular.

Supongamos ahora que P es geométricamente regular. Por el teorema 7.28 tiene un entorno U formado por puntos geométricamente regulares. Podemos suponer que U es irreducible de dimensión $n = \dim_P X$. Sea $Q \in U$ un punto cerrado y sea $Q' \in \overline{U}$ un punto sobre Q. Entonces

$$\dim_{k(Q)} \Omega^1_{U,Q} \otimes_{\mathcal{O}_{U,Q}} k(Q) = \dim_{\bar{k}(Q')} \Omega^1_{U,Q} \otimes_{\mathcal{O}_{U,Q}} k(Q) \otimes_{k(Q)} \bar{k}(Q')$$

$$= \dim_{\bar{k}(Q')} \Omega^1_{U,Q} \otimes_{\mathcal{O}_{U,Q}} \bar{k}(Q') = \dim_{\bar{k}(Q')} \Omega^1_{U,Q} \otimes_{\mathcal{O}_{U,Q}} \mathcal{O}_{\bar{U},Q'} \otimes_{\mathcal{O}_{\bar{U},Q'}} \bar{k}(Q')$$

$$= \dim_{\bar{k}(Q')} \Omega^1_{\bar{U},Q'} \otimes_{\mathcal{O}_{\bar{U},Q'}} \bar{k}(Q') = \dim_{\bar{k}(Q)} T_{Q'}\overline{U} = n.$$

Si R es un punto arbitrario tomamos un punto cerrado $Q \in \overline{\{R\}}$. Tenemos que $\dim_{k(Q)} \Omega^1_{U,Q} \otimes_{\mathcal{O}_{U,Q}} k(Q) = n$, y en la prueba del teorema 7.44 hemos visto que $\Omega^1_{U,Q}$ tiene un generador con n elementos. Pero $\Omega^1_{U,R}$ es una localización de $\Omega^1_{U,Q}$, luego también está generado por n elementos, luego $\dim_{k(R)} \Omega^1_{U,R} \otimes_{\mathcal{O}_{U,R}} k(R) \leq n$.

Por otra parte, el conjunto

$$\{Q \in U \mid \dim_{k(Q)} \Omega^1_{U,Q} \otimes_{\mathcal{O}_{U,Q}} k(Q) \leq n-1\}$$

es abierto por el teorema 7.44 y no contiene a ningún punto cerrado de U. Como los puntos cerrados forman un conjunto denso, este conjunto ha de ser vacío y la dimensión es n en todos los puntos. El teorema 7.44 implica entonces que $\Omega^1_{X,P}$ es libre de rango n. ■

En particular:

Teorema 7.47 *Si X/k es un conjunto algebraico conexo equidimensional (es decir, con todas las componentes irreducibles de la misma dimensión), entonces X es geométricamente regular si y sólo si Ω^1_X es localmente libre de rango* $\dim X$.

Veamos una aplicación de 7.46:

Teorema 7.48 *Un conjunto algebraico X/k es geométricamente regular si y sólo si para toda extensión de cuerpos K/k el conjunto X_K es regular. (Y en tal caso X_K es, de hecho, geométricamente regular.)*

Demostración: La condición es suficiente, sin más que aplicarla cuando K es la clausura algebraica de k. Si X/k es geométricamente regular, consideremos la proyección $p : X_K \longrightarrow X$, sea $P \in X_K$ y sea $Q = p(P) \in X$. Por el teorema anterior sabemos que Ω^1_Q es un $\mathcal{O}_{X,Q}$-módulo libre de rango $\dim_Q X$. Del teorema [3.79] se deduce que $\dim_P X_K = \dim_Q X$ y, por otra parte,

$$\Omega^1_{X_K,P} = p^*(\Omega^1_X)_P = \Omega^1_{X,Q} \otimes_{\mathcal{O}_{X,Q}} \mathcal{O}_{X_K,P}$$

es un $\mathcal{O}_{X_K,P}$-módulo libre de la misma dimensión. Por lo tanto X_K es geométricamente regular. ■

7.5 Homomorfismos suaves

Vamos a estudiar ahora una versión relativa de la regularidad geométrica. Observemos en primer lugar que si $f : X \longrightarrow Y$ es un homomorfismo de tipo finito y $Q \in Y$, entonces la fibra X_Q es un esquema de tipo finito sobre $\operatorname{Esp} k(Q)$ (porque los homomorfismos de tipo finito se conservan por cambios de base). En otras palabras, X_Q es un conjunto algebraico sobre el cuerpo $k(Q)$.

Definición 7.49 Sea Y un esquema localmente noetheriano y $f : X \longrightarrow Y$ un homomorfismo de tipo finito. Diremos que f es *suave* en un punto $P \in X$ si es plano en P y P es geométricamente regular en la fibra X_Q, donde $Q = f(P)$, considerada como conjunto algebraico sobre el cuerpo $k(Q)$. Diremos que f es *suave* si lo es en todos los puntos de X. Diremos que f es *suave de dimensión relativa* n si es suave y todas sus fibras tienen dimensión n.

Así, un conjunto algebraico X/k es geométricamente regular en un punto $P \in X$ si y sólo si el homomorfismo estructural $f : X \longrightarrow \operatorname{Esp} k$ es suave en P, pues f es obviamente plano y X es su única fibra.

Empezamos generalizando el teorema 7.25:

Teorema 7.50 *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un homomorfismo suave y supongamos que Y es regular y localmente noetheriano. Entonces X es regular.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $P \in X$ y $Q = f(P)$. Llamemos $m = \dim \mathcal{O}_{X,P}$ y $n = \dim \mathcal{O}_{Y,Q}$. El teorema 4.52 nos da que $\dim \mathcal{O}_{X_Q,P} = m - n$. El punto P es geométricamente regular, luego regular en X_Q, lo cual significa que el anillo $\mathcal{O}_{X_Q,P}$ es regular, luego su ideal maximal está generado por $m - n$ elementos $b'_{n+1}, \ldots, b'_m$. La proyección $X_Q \longrightarrow X$ nos da un epimorfismo $\mathcal{O}_{X,P} \longrightarrow \mathcal{O}_{X_Q,P}$. Podemos tomar $b_{n+1}, \ldots, b_m \in \mathfrak{m}_P$ cuyas imágenes sean los b'_i.

Por otra parte, $\mathcal{O}_{Y,Q}$ es regular, luego $\mathfrak{m}_Q$ está generado por n elementos $a_1, \ldots, a_n$. Llamemos $b_1, \ldots, b_n$ a sus imágenes en $\mathcal{O}_{X,P}$. El teorema 3.46 implica que $\mathfrak{m}_P = (b_1, \ldots, b_m)$, y esto significa que P es regular. ■

Teorema 7.51 *Los homomorfismos suaves son estables bajo cambio de base, composición y productos fibrados. Las inmersiones abiertas son suaves.*

DEMOSTRACIÓN: Los homomorfismos planos y de tipo finito se conservan por las operaciones indicadas, luego sólo hemos de preocuparnos por la regularidad geométrica de las fibras. Por la definición de homomorfismo suave todos los esquemas considerados son localmente noetherianos.

Sea $X \longrightarrow Y$ un homomorfismo suave y sea $Y' \longrightarrow Y$ un homomorfismo arbitrario. Hemos de probar que $X \times_Y Y' \longrightarrow Y'$ es suave. Si $Q' \in Y'$ y llamamos Q a su imagen en Y, entonces

$$\begin{aligned}(X \times_Y Y')_{Q'} = X \times_Y Y' \times_{Y'} \operatorname{Esp} k(Q') &\cong X \times_Y \operatorname{Esp} k(Q) \times_{k(Q)} \operatorname{Esp} k(Q') \\ &= X_Q \times_{k(Q)} \operatorname{Esp} k(Q').\end{aligned}$$

Si llamamos $\overline{K}$ a la clausura algebraica de $k(Q')$ y $\bar{k} \subset \overline{K}$ a la clausura algebraica de $k(Q)$, hemos de comprobar que el conjunto algebraico

$$X_{Q\,\overline{K}} = X_Q \times_{k(Q)} \operatorname{Esp} \overline{K} = X_{Q\,\bar{k}} \times_{\bar{k}} \operatorname{Esp} \overline{K}$$

es regular, sabiendo que $X_{Q\,\bar{k}}$ lo es, pero, como $\bar{k}$ es algebraicamente cerrado, $X_{Q\,\bar{k}}$ es geométricamente regular, y basta aplicar 7.48.

Consideremos ahora dos homomorfismos suaves $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$. Tomemos ahora $P \in Z$, y hemos de probar que la fibra X_P es geométricamente regular o, lo que es lo mismo, que $X_P \times_{k(P)} \operatorname{Esp} \overline{k(P)} = X \times_Z \operatorname{Esp} \overline{k(P)}$ es regular, donde $\overline{k(P)}$ es la clausura algebraica de $k(P)$. Por la parte ya probada, el homomorfismo

$$X \times_Z \operatorname{Esp} \overline{k(P)} \longrightarrow Y \times_Z \operatorname{Esp} \overline{k(P)}$$

es suave, y la fibra Y_P es geométricamente regular, lo que significa que

$$Y_P \times_{k(P)} \operatorname{Esp} \overline{k(P)} = Y \times_Z \operatorname{Esp} \overline{k(P)}$$

es regular. Por el teorema anterior $X \times_Z \operatorname{Esp} \overline{k(P)}$ es regular.

Si $X \longrightarrow Z$, $Y \longrightarrow Z$ son suaves, también lo es

$$X \times_Z Y \longrightarrow Y \longrightarrow Z.$$

Por último, consideremos una inmersión abierta $f : X \longrightarrow Y$. Entonces f es plana y de tipo finito. Si $P \in X$, la fibra es $X_P = \operatorname{Esp} k(P)$, que sin duda es geométricamente regular. ■

Ejemplo Es fácil comprobar que $\mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}} \longrightarrow \operatorname{Esp} \mathbb{Z}$ es suave, luego también lo es $\mathrm{P}^n_{\mathbb{Z}} \longrightarrow \operatorname{Esp} \mathbb{Z}$, así como los homomorfismos $A^n_S \longrightarrow S$ y $\mathrm{P}^n_S \longrightarrow S$, para cualquier esquema S localmente noetheriano. ■

Para caracterizar los homomorfismos suaves en términos de haces de formas diferenciales necesitamos un resultado técnico:

Teorema 7.52 *Sea $X \longrightarrow S$ un homomorfismo de tipo finito, donde S es un esquema localmente noetheriano. Sea $s \in S$ y $P \in X_s$. Llamemos*

$$d = \dim_{k(P)} \Omega^1_{X_s/k(s),P} \otimes_{\mathcal{O}_{X_s,P}} k(P).$$

Entonces existe un entorno U de P y una inmersión cerrada $U \longrightarrow Z$ en un esquema Z suave sobre S en P tal que $\dim_P Z_s = d$ y $\Omega^1_{Z/S,P}$ es libre de rango d.

Demostración: No perdemos generalidad si suponemos que los esquemas son afines, digamos $S = \operatorname{Esp} A$, $X = \operatorname{Esp} B$, donde B es una A-álgebra de tipo finito. Llamemos $C = A[X_1, \ldots, X_r]$, donde r es suficientemente grande como para que exista un epimorfismo $C \longrightarrow B$. Llamemos $Y = \operatorname{Esp} C$, que es un espacio afín sobre A, luego todos sus puntos son suaves. Tenemos una inmersión cerrada $X \longrightarrow Y$ definida sobre S. Sabemos (7.32) que $\Omega^1_{Y/S} = \Omega^1_{C/A}$ es un C-módulo libre de rango r, luego también es localmente libre y, en particular $\Omega^1_{Y/S,P}$ es un $\mathcal{O}_{Y,P}$-módulo libre de rango r. Por otra parte, el cambio de base $\otimes_A k(s)$ nos da que $\Omega^1_{Y_s/k(s)}(Y_s) \cong \Omega^1_{C/A} \otimes_A k(s)$ es un $\mathcal{O}_{Y_s}(Y_s)$-módulo libre de rango r, luego $\Omega^1_{Y_s/k(s)}$ es un $\mathcal{O}_{Y_s}$-módulo libre de rango r. En particular es localmente libre, luego $\Omega^1_{Y_s,P}$ es un $\mathcal{O}_{Y_s,P}$-módulo libre de rango r. Ahora bien, como Y es suave, tenemos que Y_s es geométricamente regular, y el teorema 7.46 nos da que $r = \dim_P Y_s$.

Así hemos demostrado que existen un esquema afín Y/S y una inmersión cerrada $X \longrightarrow Y$ definida sobre S de modo que Y es suave en P y $\Omega^1_{Y/S,P}$ es un $\mathcal{O}_{Y,P}$-módulo libre de rango $r = \dim_P Y_s$. En otras palabras Y cumple lo que el enunciado requiere para Z pero cambiando d por r. A partir de aquí trabajamos con un esquema afín arbitrario Y/S que cumpla estas condiciones (no necesariamente el que hemos construido).

Conservamos la notación $Y = \operatorname{Esp} C$, si bien ya no suponemos que C sea concretamente $A[X_1, \ldots, X_r]$. Pongamos que $B = C/I$, para un cierto ideal I de C, El punto $s \in S$ se corresponde con un ideal $\mathfrak{q} \in \operatorname{Esp} A$, el punto $P \in X$ se corresponde con $\mathfrak{p} \in \operatorname{Esp} B$, y entonces $\mathfrak{p} = \mathfrak{P}/I$, para un cierto $\mathfrak{P} \in \operatorname{Esp} C$ que se corresponde con P visto como punto de Y. Claramente $B_\mathfrak{p} = C_\mathfrak{P}/I_\mathfrak{P}$, y podemos aplicar el teorema 7.34, que nos da una sucesión exacta de $B_\mathfrak{p}$-módulos

$$I_\mathfrak{P}/I_\mathfrak{P}^2 \longrightarrow \Omega^1_{C_\mathfrak{P}/A_\mathfrak{q}} \otimes_{C_\mathfrak{P}} B_\mathfrak{p} \longrightarrow \Omega^1_{B_\mathfrak{p}/A_\mathfrak{q}} \longrightarrow 0.$$

Por otra parte, $Y_s = \operatorname{Esp}(C \otimes_A k(\mathfrak{q}))$. El punto $P \in Y$ se corresponde con un ideal $\mathfrak{P}' \in \operatorname{Esp}(C \otimes_A k(\mathfrak{q}))$, de modo que

$$Y_{s,P} = \operatorname{Esp}((C \otimes_A k(\mathfrak{q}))_{\mathfrak{P}'}).$$

Ahora observamos que $(C \otimes_A k(\mathfrak{q}))_{\mathfrak{P}'} \cong C_\mathfrak{P} \otimes_{A_\mathfrak{q}} k(\mathfrak{q})$. En efecto, tenemos un homomorfismo natural $C \otimes_A k(\mathfrak{q}) \longrightarrow C_\mathfrak{P} \otimes_{A_\mathfrak{q}} k(\mathfrak{q})$ y es fácil ver que cada $u \in C \otimes_A k(\mathfrak{q})$ se expresa como un tensor puro $u = c \otimes \alpha$, de modo que si $u \notin \mathfrak{P}'$ entonces $c \notin \mathfrak{P}$, por lo que su imagen en $C_\mathfrak{P} \otimes_{A_\mathfrak{q}} k(\mathfrak{q})$ tiene inverso. Esto significa que podemos extender el homomorfismo a $(C \otimes_A k(\mathfrak{q}))_{\mathfrak{P}'} \longrightarrow C_\mathfrak{P} \otimes_{A_\mathfrak{q}} k(\mathfrak{q})$. Es fácil definir su inverso.

Por consiguiente, aplicando de nuevo 7.34:

$$\Omega^1_{Y_s/k(s),P} \cong \Omega^1_{C_\mathfrak{P} \otimes_{A_\mathfrak{q}} k(\mathfrak{q})/k(\mathfrak{q})} \cong \Omega^1_{C_\mathfrak{P}/A_\mathfrak{q}} \otimes_{A_\mathfrak{q}} k(\mathfrak{q}).$$

Igualmente: $\Omega^1_{X_s/k(s),P} \cong \Omega^1_{B_\mathfrak{p}/A_\mathfrak{q}} \otimes_{A_\mathfrak{q}} k(\mathfrak{q})$. De la sucesión exacta precedente obtenemos la sucesión exacta

$$(I_\mathfrak{P}/I_\mathfrak{P}^2) \otimes_{A_\mathfrak{q}} k(\mathfrak{q}) \longrightarrow (\Omega^1_{C_\mathfrak{P}/A_\mathfrak{q}} \otimes_{A_\mathfrak{q}} k(\mathfrak{q})) \otimes_{C_\mathfrak{P}} B_\mathfrak{p} \longrightarrow \Omega^1_{B_\mathfrak{p}/A_\mathfrak{q}} \otimes_{A_\mathfrak{q}} k(\mathfrak{q}) \longrightarrow 0.$$

Observemos que

$$(\Omega^1_{C_\mathfrak{P}/A_\mathfrak{q}} \otimes_{A_\mathfrak{q}} k(\mathfrak{q})) \otimes_{C_\mathfrak{P}} B_\mathfrak{p} \cong (\Omega^1_{C_\mathfrak{P}/A_\mathfrak{q}} \otimes_{A_\mathfrak{q}} k(\mathfrak{q})) \otimes_{C_\mathfrak{P}} (B_\mathfrak{p} \otimes_{A_\mathfrak{q}} k(\mathfrak{q})),$$

así como que el producto $\otimes_{C_\mathfrak{P}}$ puede sustituirse por $\otimes_{C_\mathfrak{P}\otimes_{A_\mathfrak{q}} k(\mathfrak{q})}$. En definitiva tenemos una sucesión exacta de $\mathcal{O}_{X_s,P}$-módulos:

$$(I_\mathfrak{P}/I_\mathfrak{P}^2)\otimes_{A_\mathfrak{q}} k(\mathfrak{q}) \longrightarrow \Omega^1_{Y_s/k(s),P}\otimes_{\mathcal{O}_{Y_s,P}}\mathcal{O}_{X_s,P} \longrightarrow \Omega^1_{X_s/k(s),P} \longrightarrow 0.$$

Ahora la multiplicamos por $\otimes_{\mathcal{O}_{X_s,P}} k(\mathfrak{p})$, con lo que obtenemos

$$((I_\mathfrak{P}/I_\mathfrak{P}^2)\otimes_{A_\mathfrak{q}} k(\mathfrak{q}))\otimes_{\mathcal{O}_{X_s,P}} k(\mathfrak{p}) \longrightarrow \Omega^1_{Y_s,P}\otimes_{\mathcal{O}_{Y_s,P}} k(\mathfrak{p}) \longrightarrow \Omega^1_{X_s,P}\otimes_{\mathcal{O}_{X_s,P}} k(\mathfrak{p}) \longrightarrow 0.$$

El homomorfismo natural $I_\mathfrak{P}/I_\mathfrak{P}^2 \longrightarrow ((I_\mathfrak{P}/I_\mathfrak{P}^2)\otimes_{A_\mathfrak{q}} k(\mathfrak{q}))\otimes_{\mathcal{O}_{X_s,P}} k(\mathfrak{p})$ es suprayectivo, luego seguimos teniendo una sucesión exacta si componemos con éste el primer homomorfismo:

$$\mathcal{I}_P/\mathcal{I}_P^2 \longrightarrow \Omega^1_{Y_s,P}\otimes_{\mathcal{O}_{Y_s,P}} k(P) \longrightarrow \Omega^1_{X_s,P}\otimes_{\mathcal{O}_{X_s,P}} k(P) \longrightarrow 0,$$

donde $\mathcal{I} = \widetilde{I}$ es el haz cuasicoherente de ideales de $\mathcal{O}_Y$ que define al subesquema cerrado X, de modo que $\mathcal{I}_P = I_\mathfrak{P}$.

Notemos que $\Omega^1_{Y_s,P}\otimes_{\mathcal{O}_{Y_s,P}} k(P)$ es un $k(P)$-espacio vectorial de dimensión r, luego la sucesión exacta nos da que $r \geq d$.

Si $r = d$ entonces el teorema se cumple tomando $Z = Y$. Si, por el contrario, $r > d$, vamos a construir un nuevo esquema Z que cumpla las mismas condiciones que Y pero con $r-1$ en lugar de r. Así, repitiendo el proceso un número finito de veces llegaremos al esquema requerido.

Si $r > d$ el homomorfismo

$$\mathcal{I}_P/\mathcal{I}_P^2 \longrightarrow \Omega^1_{Y_s,P}\otimes_{\mathcal{O}_{Y_s,P}} k(P)$$

no es nulo. Rastreando la construcción precedente se comprueba sin dificultad que este homomorfismo es el dado por $[f] \mapsto d\bar{f}\otimes 1$, donde $\bar{f}$ es la imagen de $f \in \mathcal{I}_P \subset \mathcal{O}_{Y,P}$ por el homomorfismo $\mathcal{O}_{Y,P} \longrightarrow \mathcal{O}_{Y_s,P}$ determinado por la proyección $Y_s \longrightarrow Y$. Concluimos, pues, que existe un $f \in \mathcal{I}_P$ tal que $d\bar{f}\otimes 1 \neq 0$.

Sustituyendo Y por un entorno de P se conservan las propiedades locales de Y que estamos considerando alrededor de P y podemos suponer que $f \in \mathcal{I}(Y)$.

Podemos formar una base $\omega_1\otimes 1,\ldots,\omega_r\otimes 1$ de $\Omega^1_{Y_s,P}\otimes_{\mathcal{O}_{Y_s,P}} k(P)$ con $\omega_1 = d\bar{f}$. Si llamamos $N = \langle\omega_1,\ldots,\omega_r\rangle$, la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow \Omega^1_{Y_s,P} \longrightarrow \Omega^1_{Y_s,P}/N \longrightarrow 0$$

nos da una sucesión exacta

$$N\otimes_{\mathcal{O}_{Y_s,P}} k(P) \longrightarrow \Omega^1_{Y_s,P}\otimes_{\mathcal{O}_{Y_s,P}} k(P) \longrightarrow (\Omega^1_{Y_s,P}/N)\otimes_{\mathcal{O}_{Y_s,P}} k(P) \longrightarrow 0$$

en la que el primer homomorfismo es suprayectivo, luego el último módulo es 0 y el lema de Nakayama implica entonces que $\Omega^1_{Y_s,P} = N$, es decir, que $\omega_1,\ldots,\omega_r$ es un generador de $\Omega^1_{Y_s,P}$. Como este módulo es libre de rango r sobre $\mathcal{O}_{Y_s,P}$, podemos concluir que $\omega_1,\ldots,\omega_r$ forman una base. (Observemos que $\mathcal{O}_{Y_s,P}$ es un dominio íntegro porque P es regular en Y_s, lo que nos permite sumergir a $\Omega^1_{Y_s,P}$ en un espacio vectorial sobre el cuerpo de cocientes.)

Definimos $Z = V(f) \subset Y$. Como $f \in \mathcal{I}(Y)$, se cumple que $X \subset Z$ o, más precisamente, que tenemos una inmersión cerrada $X \longrightarrow Z$. Puesto que $\mathcal{O}_{Z,P} = \mathcal{O}_{Y,P}/(f)$, el teorema 7.34 nos da una sucesión exacta

$$(f)/(f^2) \xrightarrow{\delta} \Omega^1_{Y,P} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,P}} \mathcal{O}_{Z,P} \xrightarrow{\alpha} \Omega^1_{Z,P} \longrightarrow 0,$$

donde $\delta([f]) = df \otimes 1$. Por consiguiente $\Omega^1_{Z,P} \cong (\Omega^1_{Y,P}/(df)) \otimes_{\mathcal{O}_{Y,P}} \mathcal{O}_{Z,P}$ es un $\mathcal{O}_{Z,P}$-módulo libre de rango $r-1$.

Si $p : Y_s \longrightarrow Y$ es la proyección, entonces $Z_s = p^{-1}[Z] = V(p^{\#}(f))$, luego $\mathcal{O}_{Z_s,P} = \mathcal{O}_{Y_s,P}/(p^{\#}(f)_P) = \mathcal{O}_{Y_s,P}/(\bar{f})$. Tenemos que $\mathcal{O}_{Y_s,P}$ es un dominio íntegro y que $\bar{f} \neq 0$ (pues su diferencial es no nula). Por el teorema [4.58] se cumple que $\dim_P Z_s = r-1$.

Por estos mismos motivos, y teniendo en cuenta el teorema 3.46, que nos da el isomorfismo $\mathcal{O}_{Y,P}/\mathfrak{m}_s\mathcal{O}_{Y,P} \cong \mathcal{O}_{Y_s,P}$, podemos concluir que f no es un divisor de cero en el cociente, que es justo la hipótesis que necesitamos para aplicar el teorema [A.15] al homomorfismo $\mathcal{O}_{S,s} \longrightarrow \mathcal{O}_{Y,P}$. La conclusión es que el homomorfismo $\mathcal{O}_{S,s} \longrightarrow \mathcal{O}_{Z,P}$ también es plano. Por otra parte, el teorema refgeoregfd nos da que P es geométricamente regular en Z_s y esto nos lleva a que Z es suave en P. En definitiva, Z cumple las mismas condiciones que Y pero con $r-1$ en lugar de r. ■

Como primera aplicación demostramos lo siguiente:

Teorema 7.53 *Sea S un esquema localmente noetheriano y $X \longrightarrow S$ un homomorfismo de tipo finito, suave en un punto $P \in X$, y sea $s \in S$ la imagen de P. Entonces $\Omega^1_{X/S}$ es libre de rango $\dim_P X_s$ en un entorno de P.*

DEMOSTRACIÓN: Podemos sustituir X y S por entornos de P y s, por lo que podemos suponer que tenemos una inmersión cerrada $X \longrightarrow Z$ en las condiciones del teorema anterior. Más aún, por el teorema 4.50 podemos suponer que X es plano sobre S.

Tenemos que X_P es geométricamente regular en P, y el teorema 7.46 nos da entonces que $\Omega^1_{X_P,P}$ es libre de rango $\dim_P X_s$, luego $\dim_P X_s = d$, según la definición de d en el enunciado del teorema anterior. En definitiva tenemos que $\dim_P X_s = \dim_P Z_s$.

El epimorfismo $\mathcal{O}_{Z_s,P} \longrightarrow \mathcal{O}_{X_s,P}$ ha de ser un isomorfismo, pues $\mathcal{O}_{X_s,P}$ es un dominio íntegro, luego el núcleo ha de ser un ideal primo, pero ambos anillos tienen la misma dimensión. Esto implica que la inmersión $X_s \longrightarrow Z_s$ se restringe a un isomorfismo $X_s \cap U \longrightarrow U$, para un cierto abierto $P \in U \subset Z_s$. En efecto, tomando un entorno afín de P, lo que tenemos es un isomorfismo $A_{\mathfrak{p}} \longrightarrow (A/I)_{\mathfrak{p}}$, que implica que $I_{\mathfrak{p}} = 0$, de donde a su vez existe un $f \in A \setminus \mathfrak{p}$ tal que $I_f = 0$, luego $A_f \cong (A/I)_f$ y basta tomar $U = D(f)$.

Este abierto U será de la forma $U' \cap Z_s$, para cierto abierto $U' \subset Z$. Sustituyendo Z por U', podemos suponer que $X_s = Z_s$. Entonces podemos aplicar el teorema 4.55, que nos da que $X \longrightarrow Z$ se restringe a una inmersión abierta en un entorno de P, luego $\Omega^1_{X/S,P} \cong \Omega^1_{Z/S,P}$ es libre de rango $d = \dim_P X_s$. Esto implica que $\Omega^1_{X/S}$ es libre del mismo rango en un entorno de P. (Ver las observaciones anteriores al teorema 5.21). ■

A menudo es conveniente complementar como sigue la noción de homomorfismo suave:

Definición 7.54 Diremos que un homomorfismo de esquemas $f : X \longrightarrow S$ es *suave de dimensión relativa* n si es suave y toda fibra no vacía de f tiene dimensión n.

Por ejemplo, sucede que la estructura de $\Omega^1_{X/S}$ no es suficiente para caracterizar la suavidad de un homomorfismo, pero sí lo es cuando las fibras son equidimensionales de la misma dimensión (recordemos que equidimensionales quiere decir que sus componentes irreducibles tienen todas la misma dimensión):

Teorema 7.55 *Sea S un esquema localmente noetheriano y $f : X \longrightarrow S$ un homomorfismo plano de tipo finito con fibras equidimensionales de dimensión n. Entonces f es suave de dimensión relativa n si y sólo si el haz $\Omega^1_{X/S}$ es localmente libre de rango n.*

Demostración: Una implicación es el teorema anterior. Si se cumple la condición sobre $\Omega^1_{X/S}$, hemos de probar que cada $x \in X$ es geométricamente regular en su fibra X_s (donde $s = f(x)$). Por 7.46 basta ver que $\Omega^1_{X_s,x}$ es libre de rango n. Ahora bien, según el teorema 7.41 tenemos que

$$\Omega^1_{X_s,x} = p^*(\Omega^1_X)_x \cong \Omega^1_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{O}_{X_s,x},$$

donde $p : X_s \longrightarrow X$ es la proyección. Como $\Omega^1_{X,x}$ es, por hipótesis, un $\mathcal{O}_{X,x}$-módulo libre de rango n, es claro que $\Omega^1_{X_s,x}$ es un $\mathcal{O}_{X_s,x}$-módulo libre de rango n. ■

Ahora podemos completar la sucesión exacta del teorema 7.41 b), para lo cual conviene probar antes un resultado elemental que usaremos en varias ocasiones:

Teorema 7.56 *Si X es un esquema localmente noetheriano y $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ es un epimorfismo entre dos haces coherentes en X localmente libres y del mismo rango, entonces f es un isomorfismo.*

Demostración: Tenemos que $\mathrm{N}(f)$ es también un haz coherente en X. Para cada $x \in X$ tenemos la sucesión exacta de $\mathcal{O}_{X,x}$-módulos

$$0 \longrightarrow \mathrm{N}(f)_x \longrightarrow \mathcal{M}_x \longrightarrow \mathcal{N}_x \longrightarrow 0,$$

en la que los dos últimos módulos son libres, luego planos. Por [A.10], también es plano $\mathrm{N}(f)_x$, que además es finitamente generado, luego por [A.4] es libre. Por la propiedad proyectiva, es un sumando directo de $\mathcal{M}_X$, luego su rango ha de ser 0, y así $\mathrm{N}(f) = 0$. ■

En la prueba del teorema siguiente usaremos sólo un caso particular de este teorema, en el que f es un epimorfismo de módulos libres sobre un anillo noetheriano A. El teorema se aplica a través de los haces coherentes asociados a dichos módulos sobre el espectro de A.

Teorema 7.57 *Si $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ son homomorfismos suaves de esquemas localmente noetherianos, tenemos una sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow f^*\Omega^1_{Y/Z} \longrightarrow \Omega^1_{X/Z} \longrightarrow \Omega^1_{X/Y} \longrightarrow 0.$$

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema 7.41, basta probar la exactitud por la izquierda. Supongamos el teorema probado en el caso en que Z es el espectro de un cuerpo.

En el caso general, consideremos un punto $x \in X$, sea $y = f(x)$ y sea $s = g(y)$. Tenemos que f induce un homomorfismo suave $f' : X_s \longrightarrow Y_s$ definido sobre $Z' = \operatorname{Esp} k(s)$.

Por 7.53 sabemos que $\Omega^1_{X/Z,x}$ es un $\mathcal{O}_{X,x}$-módulo libre, y por 7.41 a), tenemos que $\Omega^1_{X_s/k(s)} \cong p^*\Omega^1_{X/Z}$, luego $\Omega^1_{X_s/k(s)}$ es un $\mathcal{O}_{X_s,x}$-módulo libre del mismo rango. Lo mismo sucede con los otros dos haces de formas diferenciales. Notemos también que $\operatorname{rang}_{\mathcal{O}_{X,x}}(f^*\Omega^1_{Y/Z})_x = \operatorname{rang}_{\mathcal{O}_{Y,y}}\Omega^1_{Y/Z,y}$.

Admitiendo el teorema para Z', la sucesión exacta del enunciado nos da que, en la sucesión exacta

$$(f^*\Omega^1_{Y/Z})_x \longrightarrow \Omega^1_{X/Z,x} \longrightarrow \Omega^1_{X/Y,x} \longrightarrow 0,$$

el rango del módulo central es la suma de los otros dos. Si llamamos r a dicho rango, la sucesión nos permite construir un sistema generador del segundo módulo formado por r elementos y que contenga a la imagen de una base del primer módulo. A su vez, podemos construir un epimorfismo $\Omega^1_{X/Z,x} \longrightarrow \Omega^1_{X/Z,x}$ que envíe una base a dicho generador. Por el teorema anterior (ver la observación posterior), dicho epimorfismo es un isomorfismo. Esto significa que la imagen de una base del primer módulo es linealmente independiente, luego es una base de la imagen, luego el primer homomorfismo es inyectivo y la sucesión es exacta.

Así pues, podemos suponer que X e Y son conjuntos algebraicos suaves, es decir, geométricamente regulares, sobre un cuerpo k. Tomemos, de nuevo, un punto $x \in X$ y sea $y = f(x)$. Reduciendo X e Y podemos suponer que son esquemas afines íntegros y que los haces de formas diferenciales son libres. Por el teorema 7.53 sabemos que

$$\operatorname{rang}\Omega^1_{X/k} = \dim X, \quad \operatorname{rang}\Omega^1_{Y/k} = \dim Y, \quad \operatorname{rang}\Omega^1_{X/Y} = \dim X_y.$$

Más aún, la última igualdad es válida en un entorno de y, luego, reduciendo Y, podemos suponer que f es suprayectivo. El teorema 4.53 nos da que, en la sucesión del enunciado, el rango del módulo central es la suma de los otros dos, y podemos concluir igual que antes. ∎

7.6 Inmersiones regulares

El concepto siguiente es la versión abstracta en términos de esquemas de la definición [5.7], junto con su análogo proyectivo:

Definición 7.58 Si k es un cuerpo, una *intersección completa* en A_k^n es un subesquema cerrado de la forma $C = \operatorname{Esp}(A/I)$, donde $A = k[X_1, \ldots, X_n]$ e I es un ideal de A generado por $n-d$ polinomios, con $d = \dim C$.

Una *intersección completa* en P_k^n se define análogamente, salvo que ahora $C = \operatorname{Proy}(A/I)$ y $A = k[X_0, \ldots, X_n]$.

En el caso afín, si $W \subset C$ es una componente irreducible, entonces C se corresponde con un primo minimal $\mathfrak{P}$ de I, que ha de cumplir $\dim W \leq d$, y según el teorema de la altura [5.1],

$$n - d \leq \operatorname{codim}_{A_k^n} W = \operatorname{alt} \mathfrak{P} \leq \mu(I) \leq n - d,$$

luego $\dim W = d$. Hemos aplicado (dos veces) el teorema 3.24 a W y A_k^n.

En definitiva, hemos probado que si C es una intersección completa en A_k^n, todas sus componentes irreducibles tienen la misma dimensión. Lo mismo vale si C es una intersección completa en P_k^n, pues en tal caso cada $C \cap D(X_i)$ (el esquema definido por el ideal que resulta de deshomogeneizar los polinomios de I respecto de X_i) es una intersección completa en A_k^n. ■

Ejemplo Consideremos nuevamente la curva $C = V(I)$, donde

$$I = (X_1^2 - X_0X_2, \quad X_2^2 - X_1X_3, \quad X_0X_3 - X_1X_2),$$

del ejemplo de la página 1.1. Allí demostramos que $I = I(C)$. En la página 1.4 vimos que C es una curva isomorfa a P^1, y en la página 3.3 vimos que I no admite un generador con dos elementos, es decir que no es una intersección completa en P_k^3. La propiedad de ser una intersección completa no es una propiedad intrínseca de un esquema, sino que depende de la inmersión en A^n o P^n que consideremos. Por ejemplo, podemos sumergir P^1 en P^3 como una variedad lineal y entonces sí que es una intersección completa, mientras que sumergido como C no lo es.

Sin embargo, si deshomogeneizamos respecto de cualquiera de las variables, por ejemplo respecto de X_0, pasamos a la curva afín C_0 determinada por

$$I(C_0) = (X_1^2 - X_2, X_2^2 - X_1X_3, X_3 - X_1X_2),$$

y es fácil ver que sobra el segundo generador, pues módulo los otros dos se cumple:

$$x_2^2 - x_1x_3 = x_1^2x_2 - x_1(x_1x_2) = 0.$$

Igualmente se razona si se deshomogeneiza respecto de las otras variables. En otros términos, los ideales $I_{(X_i)}$ son intersecciones completas y, en particular, si $x \in C$ es un punto arbitrario, el núcleo del homomorfismo $\mathcal{O}_{\mathrm{P}^3,x} \longrightarrow \mathcal{O}_{C,x}$ asociado a la inmersión cerrada $C \longrightarrow \mathrm{P}^3$ es una intersección completa. En la sección siguiente veremos que esta propiedad de C, aunque aparentemente sea también extrínseca, en realidad es intrínseca (se conserva por isomorfismos y es, por tanto, independiente de la inmersión cerrada de C en P^3 o en cualquier otro esquema regular). Las inmersiones regulares que vamos a estudiar ahora están relacionadas también con este tipo de situaciones.

Definición 7.59 Sea $f : X \longrightarrow Y$ una inmersión cerrada en un esquema localmente noetheriano Y. Diremos que f es *regular* en un punto $x \in X$ si el núcleo del epimorfismo $\mathcal{O}_{Y,f(x)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ está generado por una sucesión regular. Diremos que f es una *inmersión regular* si lo es en todos los puntos de X.

Sabemos que una inmersión cerrada f está determinada por un haz de ideales $\mathcal{I}$ de $\mathcal{O}_Y$, y los núcleos considerados en la definición anterior son precisamente los ideales $\mathcal{I}_x$.

Observemos que si $\mathcal{I}_x$ está generado por una sucesión regular de n elementos, entonces

$$\dim \mathcal{O}_{X,x} = \dim \mathcal{O}_{Y,f(x)}/\mathcal{I}_x = \dim \mathcal{O}_{Y,f(x)} - n,$$

luego el número de generadores es independiente de la sucesión regular elegida. Podemos decir, entonces, que f es *regular de codimensión* n en x. Diremos que f es una *inmersión regular de codimensión* n si lo es en todos sus puntos.

Si f es regular en x, entonces $\mathcal{I}_x$ es una intersección completa en $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$ (teorema [5.24]) y, recíprocamente, si $\mathcal{I}_x$ es una intersección completa y $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$ es un anillo de Cohen-Macaulay (por ejemplo, si Y es regular en $f(x)$), entonces f es regular en x, por el teorema [5.39].

Más aún, si $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$ es un anillo de Cohen-Macaulay, f es regular en x si y sólo si $\mathcal{I}_x$ admite un generador con $n = \dim \mathcal{O}_{Y,f(x)} - \dim \mathcal{O}_{X,x}$ elementos. En efecto, en tal caso $\operatorname{alt} \mathcal{I}_x = n$ por [5.44], luego $\mathcal{I}_x$ es una intersección completa.

Teorema 7.60 *Si C es una intersección completa en A_k^n o P_k^n, entonces la inclusión $i : C \longrightarrow A_k^n$ (resp. P_k^n) es una inmersión regular.*

DEMOSTRACIÓN: Llamemos $X = A_k^n$ o $X = \mathrm{P}_k^n$ según el caso. Hemos visto que todas las componentes irreducibles de C tienen la misma dimensión d, luego podemos aplicar el teorema 3.24 a C (y, por supuesto a X).

Si $x \in C$ y $W = \overline{\{x\}}$, entonces

$$\dim \mathcal{O}_{X,x} = \operatorname{codim}_X W = n - \dim W, \quad \dim \mathcal{O}_{C,x} = \operatorname{codim}_X W = d - \dim W,$$

luego

$$\dim \mathcal{O}_{X,x} - \dim \mathcal{O}_{C,x} = n - d.$$

Puesto que los anillos $\mathcal{O}_{X,x}$ son regulares y, en particular, de Cohen-Macaulay, la observación previa al teorema nos da que i es regular en x. ■

Las inmersiones regulares son las que permiten relacionar adecuadamente las geometrías de los esquemas correspondientes. En particular garantizan un buen comportamiento del haz conormal que definimos a continuación:

Definición 7.61 Sea $f : X \longrightarrow Y$ una inmersión cerrada determinada por un haz $\mathcal{I}$ de ideales de $\mathcal{O}_Y$. Definimos el *haz conormal* de X en Y (respecto a la inmersión dada) como el haz $\mathcal{C}_{X/Y} = f^*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)$ en X.

Observemos que $(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)_P = 0$ si $P \in Y \setminus f[X]$, por lo que $f_*(\mathcal{C}_{X/Y}) = \mathcal{I}/\mathcal{I}^2$.

Ya habíamos considerado el haz conormal en el teorema 7.41 d), aunque sin darle nombre. Luego veremos que en el caso de esquemas suaves, el primer homomorfismo de la sucesión exacta que aparece en dicho teorema es inyectivo, con lo que $\mathcal{C}_{X/Y,x}$ puede identificarse con el espacio de formas diferenciales de $\Omega^1_{X/Z,f(x)}$ que se anulan al restringirlas a X.

Es claro que el haz conormal de una inmersión entre esquemas localmente noetherianos es un haz coherente. Si la inmersión es regular podemos decir más:

Teorema 7.62 *Si $f : X \longrightarrow Y$ es una inmersión regular, entonces $\mathcal{C}_{X/Y}$ es un haz localmente libre, y f es de codimensión n si y sólo si $\mathcal{C}_{X/Y}$ tiene rango n.*

Demostración: Si $x \in X$, sea $y = f(x)$. Tenemos que $\mathcal{C}_{X/Y,x} = \mathcal{I}_y/\mathcal{I}_y^2$, y el ideal $\mathcal{I}_y$ está generado por una sucesión regular, digamos de longitud n. El teorema [5.23] implica que $\mathcal{I}_y/\mathcal{I}_y^2$ es libre de rango n como $\mathcal{O}_{Y,y}/\mathcal{I}_y$-módulo, es decir, como $\mathcal{O}_{X,x}$-módulo. Por lo tanto $\mathcal{C}_{X/Y}$ es localmente libre, y tiene rango n si y sólo si f tiene codimensión n. ■

Observemos que si X es conexo y $\mathcal{C}_{X/Y}$ es localmente libre, entonces ha de ser localmente libre de rango n para un n, luego toda inmersión regular $f : X \longrightarrow Y$ tiene codimensión n para algún n.

Ejemplo Consideremos un dominio íntegro A, sea $B = A[X_0, \ldots, X_r]$, sea $Y = \mathrm{P}^r_A$, sea $F \in B$ una forma de grado d, sea $X = \operatorname{Proy}(B/(F))$ y sea $i : X \longrightarrow Y$ la inmersión cerrada natural. Vamos a calcular $\mathcal{C}_{X/Y}$.

Llamemos $\mathcal{I}$ al haz de ideales asociado a i y consideremos los abiertos afines $U_i = D(X_i) \subset Y$. Si identificamos $\mathcal{O}_Y(U_i) = A[X_0/X_i, \ldots, X_n/X_i]$, entonces $\mathcal{I}(U_i) = (F_i)$, donde $F_i = F/X_i^d$. Así, $V_i = X \cap U_i$ es el subesquema cerrado del espacio afín U_i determinado por $\mathcal{I}(U_i)$, de modo que $\mathcal{O}_X(V_i) = \mathcal{O}_Y(U_i)/\mathcal{I}(U_i)$.

Puesto que todos los anillos que estamos considerando son dominios íntegros, es obvio que, para cada $P \in X$, el ideal $\mathcal{I}_P$ está generado por una sucesión regular (de un solo término). Esto significa que i es una inmersión regular de codimensión 1 y, por el teorema anterior, sabemos que $\mathcal{C}_{X/Y}$ es un haz inversible en X.

Explícitamente, es obvio que $\mathcal{I}(U_i)$ es un $\mathcal{O}_Y(U_i)$-módulo libre generado por F_i, de donde se sigue inmediatamente que $\mathcal{C}_{X/Y}(V_i) = (\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)(U_i)$ es un $\mathcal{O}_X(V_i)$-módulo libre generado por $[F_i]$.

Llamemos $V_{ij} = V_i \cap V_j = X \cap U_i \cap U_j$. Tenemos que

$$[F_i]|_{V_{ij}} = [FX_j^d/(X_iX_j)^d] = [X_j^2/(X_iX_j)]^d[FX_i^d/(X_iX_j)^d]$$

$$= [X_j^2/(X_iX_j)]^d[F_j]|_{V_{ij}}.$$

Consideremos, por otra parte, el haz $\mathcal{O}_X(-d)$. Tenemos que $\mathcal{O}_X(-d)(V_i)$ es el $\mathcal{O}_X(U_i)$-módulo libre generado por $\eta_i = 1/[X_i]^d$, y estos generadores cumplen la misma relación:

$$\eta_i|_{V_{ij}} = ([X_j]/[X_iX_j])^d = [X_j^2/(X_iX_j)]^d([X_i]/[X_iX_j])^d = [X_j^2/(X_iX_j)]^d\eta_j|_{V_{ij}}.$$

Así pues, los isomorfismos $\mathcal{C}_{X/Y}(V_i) \cong \mathcal{O}_X(-d)(V_i)$ dados por $[F_i] \mapsto \eta_i$ determinan isomorfismos de haces $\mathcal{C}(X/Y)|_{V_i} \cong \mathcal{O}_X(-d)|_{V_i}$ que coinciden sobre cada V_{ij}, por lo que se pegan paa formar un isomorfismo $\mathcal{C}_{X/Y} \cong \mathcal{O}_X(-d)$. ■

Teorema 7.63 *Si $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$ son inmersiones regulares entre esquemas localmente noetherianos (de codimensión m y n respectivamente) entonces $f \circ g$ es una inmersión regular (de codimensión $m+n$) y tenemos una sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow f^*\mathcal{C}_{Y/Z} \longrightarrow \mathcal{C}_{X/Z} \longrightarrow \mathcal{C}_{X/Y} \longrightarrow 0.$$

Demostración: Sea $\mathcal{I}$ el haz de ideales de $\mathcal{O}_Z$ asociado a Y, de modo que, para cada abierto U de Z tenemos que $\mathcal{I}(U)$ es el núcleo del homomorfismo $g_U^\# : \mathcal{O}_Z(U) \longrightarrow \mathcal{O}_Y(g^{-1}[U])$ y, para cada $y \in Y$, el ideal $\mathcal{I}_{g(y)}$ es el núcleo del epimorfismo $g_y^\# : \mathcal{O}_{Z,g(y)} \longrightarrow \mathcal{O}_{Y,y}$. Igualmente, sea $\mathcal{J}$ el haz de ideales de $\mathcal{O}_Z$ asociado a X y sea $\mathcal{K}$ el haz de ideales de $\mathcal{O}_Y$ asociado a X.

Es claro que $\mathcal{I} \subset \mathcal{J}$, así como que, para cada punto $y \in Y$, el isomorfismo $\mathcal{O}_{Z,g(y)}/\mathcal{I}_{g(y)} \longrightarrow \mathcal{O}_{Y,y}$ inducido por $g_y^\#$ se restringe a un isomorfismo $\mathcal{J}_{g(y)}/\mathcal{I}_{g(y)} \longrightarrow \mathcal{K}_y$.

Fijemos un punto $x \in X$, sea $y = f(x)$ y sea $z = g(y)$. Como g es regular en y, tenemos que $\mathcal{I}_z = (a_1, \ldots, a_n)$, donde los generadores forman una sucesión regular en $\mathcal{O}_{Z,z}$. Por otra parte, $\mathcal{K}_y$ también está generado por una sucesión regular en $\mathcal{O}_{Y,y}$, luego $\mathcal{J}_z/\mathcal{I}_z = ([b_1], \ldots, [b_m])$, donde los generadores forman también una sucesión regular en $\mathcal{O}_{Z,z}/\mathcal{I}_z$.

De aquí concluimos que $\mathcal{J}_z = (a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m)$, donde los generadores forman una sucesión regular en $\mathcal{O}_{Z,z}$. Esto prueba que $f \circ g$ es una inmersión regular en x (y la codimensión es $m+n$ si f y g tienen codimensiones m y n).

Observemos ahora que $\mathcal{K} \cong g^*(\mathcal{I}/\mathcal{J})$. En efecto, para cada abierto U de Z, tenemos que $g_U^\#$ induce un monomorfismo

$$\mathcal{J}(U)/\mathcal{I}(U) \longrightarrow \mathcal{K}(g^{-1}[U]) = g_*(\mathcal{K})(U).$$

Este monomorfismo de haces $(\mathcal{J}/\mathcal{I})^- \longrightarrow g_*(\mathcal{K})$ se extiende a un monomorfismo $\mathcal{J}/\mathcal{I} \longrightarrow g_*(\mathcal{K})$. A su vez, éste induce un monomorfismo $g^*(\mathcal{J}/\mathcal{I}) \longrightarrow \mathcal{K}$ tal que, para cada $y \in Y$, el homomorfismo $g^*(\mathcal{J}/\mathcal{I})_y \longrightarrow \mathcal{K}_y$ se corresponde con el isomorfismo $\mathcal{J}_z/\mathcal{I}_z \longrightarrow \mathcal{K}_y$ (donde $z = g(y)$).

Claramente, tenemos una sucesión exacta de $\mathcal{O}_Z$-módulos

$$\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \longrightarrow \mathcal{J}/\mathcal{J}^2 \longrightarrow (\mathcal{J}/\mathcal{I}) \,/\, (\mathcal{J}/\mathcal{I})^2 \longrightarrow 0.$$

Aplicando g^* obtenemos la sucesión exacta de $\mathcal{O}_Y$-módulos

$$\mathcal{C}_{Y/Z} \longrightarrow g^*(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2) \longrightarrow \mathcal{K}/\mathcal{K}^2 \longrightarrow 0,$$

y aplicando f^* obtenemos la sucesión exacta de $\mathcal{O}_X$-módulos

$$f^*\mathcal{C}_{Y/Z} \longrightarrow \mathcal{C}_{X/Z} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{C}_{X/Y} \longrightarrow 0.$$

El homomorfismo $f^*\mathcal{C}_{Y/Z} \longrightarrow \mathrm{N}(\alpha)$ es suprayectivo, y hemos de probar que es un isomorfismo. Si $x \in X$, entonces 7.62 nos da que $f^*(\mathcal{C}_{Y/Z})_x$, $\mathcal{C}_{X/Z,x}$ y $\mathcal{C}_{X/Y,x}$ son $\mathcal{O}_{X,x}$-módulos libres de rango n, $m+n$ y m respectivamente. En particular son planos, luego por [A.10] también es plano $\mathrm{N}(\alpha)_x$. Ahora bien, $\mathrm{N}(\alpha)$ es un haz coherente, luego $\mathrm{N}(\alpha)_x$ es un $\mathcal{O}_{X,x}$-módulo finitamente generado. Por el teorema [A.4] es libre. Obviamente, su rango es n, es decir, el mismo que el de $f^*(\mathcal{C}_{Y/Z})_x$. En definitiva, los haces $f^*(\mathcal{C}_{Y/Z})_x$ y $\mathrm{N}(\alpha)$ son localmente libres del mismo rango. Basta aplicar el teorema 7.56 ■

Ahora ya podemos ocuparnos de la sucesión exacta del teorema 7.41 d):

Teorema 7.64 *Sea S un esquema localmente noetheriano y sean X, Y esquemas suaves sobre S. Entonces, toda inmersión cerrada $f : X \longrightarrow Y$ definida sobre S es una inmersión regular, y tenemos una sucesión exacta de $\mathcal{O}_X$-módulos:*

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}_{X/Y} \longrightarrow f^*\Omega^1_{Y/S} \longrightarrow \Omega^1_{X/S} \longrightarrow 0.$$

Demostración: Sea $x \in X$, sea $y = f(x)$ y sea $s \in S$ la imagen de ambos. Vamos a probar por inducción sobre $e = \dim_y Y_s - \dim_x X_s$ que f es una inmersión regular de codimensión e en x.

Si $e = 0$ entonces la inmersión $X \longrightarrow Y$ está en las mismas circunstancias que la inmersión $X \longrightarrow Z$ considerada en la prueba del teorema 7.53. Allí, a partir únicamente de la hipótesis de que $e = 0$ (y de que los puntos x e y son suaves sobre S) concluimos que la inmersión (en nuestro caso $X \longrightarrow Y$) se restringe a una inmersión abierta en un entorno de x. En particular, es una inmersión regular de codimensión 0 en x.

Supongamos ahora que $e \geq 1$. Tal y como se razona al principio de la prueba de 7.53, tenemos que $d = \dim_x X_s$ es el mismo que se define en el enunciado del teorema 7.52. La inmersión $f : X \longrightarrow Y$ cumple lo requerido por dicho teorema salvo que $r = \dim_y Y_s > d$.

La prueba de 7.52 nos da entonces que, restringiendo f a entornos afines de x e y, podemos factorizarla en inmersiones cerradas $X \longrightarrow Z \longrightarrow Y$ de modo que $\dim_z Z_s = r - 1$. Por hipótesis de inducción, $X \longrightarrow Z$ es una inmersión regular en x de codimensión $e - 1$. Basta probar que $Z \longrightarrow Y$ es una inmersión regular de codimensión 1. Ahora bien, Z se construye como $Z = V(f)$, para cierto $f \in \mathcal{I}(Y)$, donde $\mathcal{I}$ es el ideal asociado a la inmersión dada (a la que también hemos llamado f). Es claro entonces que el núcleo de $\mathcal{O}_{Y,y} \longrightarrow \mathcal{O}_{Z,z}$ es (f_y), y $f_y \neq 0$ (o no se habría rebajado la dimensión r).

Además, en la prueba de 7.52 vemos también que f_y no es un divisor de cero en $\mathcal{O}_{Y,y}/\mathfrak{m}_s\mathcal{O}_{Y,y} \cong \mathcal{O}_{Y_s,y}$, luego tampoco lo es en $\mathcal{O}_{Y,y}$, lo que significa precisamente que la inmersión $Z \longrightarrow Y$ es regular de codimensión 1 en z.

La sucesión del enunciado es la dada por el teorema 7.41 d), y sólo hemos de probar la exactitud en $\mathcal{C}_{X/Y}$. Los tres haces son localmente libres y los teoremas 7.53, 7.62 y lo que acabamos de probar, resulta que, para cada $x \in X$,

$$\operatorname{rang} \mathcal{C}_{X/Y} = \operatorname{rang} (f^*\Omega^1_{Y/S})_x - \operatorname{rang} \Omega^1_{X/S,x}.$$

Ahora basta aplicar el mismo argumento que en 7.63. ■

Veamos ahora que la palabra "codimensión" en la definición de inmersión regular es oportuna:

Teorema 7.65 *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una inmersión regular de codimensión n. Para cada componente irreducible Y' de Y tal que $X' = Y' \cap f[X] \neq \varnothing$, se cumple que X' tiene codimensión n en Y'.*

Demostración: Si tomamos un entorno afín U de un punto de X' y restringimos f a $f^{-1}[U] \longrightarrow U$, es claro que f sigue siendo regular de codimensión n y que la codimensión de $X' \cap U$ en $Y' \cap U$ sigue siendo la misma. Equivalentemente, podemos suponer que $Y = \operatorname{Esp} A$ es un esquema afín noetheriano. Entonces Y' se corresponde con un primo minimal $\mathfrak{p}$ de A, mientras que X se corresponde con un ideal I de A y X' se corresponde con el ideal $I' = I + \mathfrak{p} \neq A$, por hipótesis. Fijemos un ideal maximal $\mathfrak{m}$ de A tal que $I' \subset \mathfrak{m}$.

La regularidad de f equivale a que, para todo ideal $\mathfrak{q} \in \operatorname{Esp} A$ que contiene a I, el ideal $I_\mathfrak{q}$ está generado por una sucesión regular de n elementos. De aquí se sigue que lo mismo es cierto para todo ideal $\mathfrak{q} \in \operatorname{Esp} A_\mathfrak{m}$ que contiene a $I_\mathfrak{m}$. Así pues, la inmersión natural $\operatorname{Esp}(A_\mathfrak{m}/I_\mathfrak{m}) \longrightarrow \operatorname{Esp} A_\mathfrak{m}$ es regular de codimensión n.

Además, la codimensión de X' en Y' es la máxima longitud de una cadena de ideales primos de A comprendidos entre $\mathfrak{p}$ e I', que coincide con la máxima longitud de una cadena de ideales primos de $A_\mathfrak{m}$ comprendidos entre $\mathfrak{p}_\mathfrak{m}$ e $I'_\mathfrak{m}$, es decir, con la codimensión de $V(I_\mathfrak{m}) \cap V(\mathfrak{p}_\mathfrak{m})$ en $V(\mathfrak{m})$. Por consiguiente, no perdemos generalidad si suponemos que $X = \operatorname{Esp} A$, donde A es un anillo noetheriano local.

En tal caso, el propio ideal $I = I_\mathfrak{m}$ está generado por una sucesión regular, digamos $I = (a_1, \ldots, a_n)$. Es claro que podemos expresar f como composición de n inmersiones regulares de codimensión 1, por lo que basta probar el teorema para $n = 1$. Entonces $I = (a)$, donde $a \in A$ no es un divisor de cero. En particular $a \notin \mathfrak{p}$ (pues los primos minimales están formados por divisores de cero), y hemos de probar que la codimensión de $V([a])$ en $A/\mathfrak{p}$ es 1, pero esto es el teorema de los ideales principales (que nos asegura que todos los primos minimales de $([a])$ en $A/\mathfrak{p}$ tienen altura 1). ■

Para terminar probamos que las inmersiones regulares se conservan por cambios de base planos:

Teorema 7.66 *Sea $f : X \longrightarrow Y$ una inmersión regular, sea $Y' \longrightarrow Y$ un homomorfismo plano y sea $X' = X \times_Y Y'$. Entonces, la proyección $X' \longrightarrow Y'$ es un inmersión regular, y si $p : X' \longrightarrow X$ es la otra proyección, existe un isomorfismo de haces $p^*\mathcal{C}_{X/Y} \cong \mathcal{C}_{X'/Y'}$.*

Demostración: Llamemos $\pi : Y' \longrightarrow Y$, $\bar{f} : X' \longrightarrow Y'$. Tomemos un abierto afín $U \subset Y$, con lo que $f^{-1}[U]$ es un abierto afín en X. Sea $U' \subset Y'$ un abierto afín tal que $U' \subset \pi^{-1}[U]$. Entonces $\bar{f}^{-1}[U'] = X' \times_Y U' = f^{-1}[U] \times_U U'$. Los abiertos $f^{-1}[U] \times_U U'$ son un cubrimiento abierto de X'.

Si $U = \operatorname{Esp} A$ y $U' = \operatorname{Esp} B$, tenemos un homomorfismo plano $A \longrightarrow B$, $f^{-1}[U] = \operatorname{Esp}(A/I)$, para cierto ideal $I \subset A$, y

$$f^{-1}[U] \times_U U' = \operatorname{Esp}(B \otimes_A A/I) = \operatorname{Esp}(B/BI).$$

El hecho de que f sea regular (en los puntos de $f^{-1}[U]$) quiere decir que el ideal I está localmente generado por una sucesiones regulares, y lo que hemos de probar es que el ideal IB está localmente generado por sucesiones regulares. Ahora bien, lo cierto es que IB está localmente generado por las mismas sucesiones que generan a I. Lo único que hemos de probar es que si $\phi : A \longrightarrow B$ es un homomorfismo plano entre anillos noetherianos locales, la imagen de una sucesión A-regular $a_1, \ldots, a_n$ es una sucesión B-regular.

En primer lugar notamos que $A/(a_1, \ldots, a_i) \longrightarrow B/(a_1, \ldots, a_i)$ también es plano. En efecto, si $I = (a_1, \ldots, a_i)$, tenemos que $B/BI \cong B \otimes_A (A/I)$. Como consecuencia, basta probarlo para $n = 1$.

Tenemos $a \in A$ tal que a no es una unidad ni un divisor de cero en a. Entonces $\phi(a)$ no es una unidad (pues suponemos que $\phi[\mathfrak{m}_A] \subset \mathfrak{m}_B$) y, como la multiplicación por a es un monomorfismo $A \longrightarrow A$, al multiplicarla por $\otimes_A B$ obtenemos que la multiplicación por $\phi(a)$ es un monomorfismo $B \longrightarrow B$, es decir, que $\phi(a)$ no es un divisor de cero en B.

Con esto hemos probado que $\bar{f}$ es una inmersión regular (sobre cada uno de los puntos de cada uno de los abiertos de un cubrimiento de X') de la misma codimensión que f.

Sea ahora $\mathcal{I}$ el haz de ideales de $\mathcal{O}_Y$ asociado a la inmersión cerrada f y sea $\mathcal{I}'$ el haz de ideales de $\mathcal{O}_{Y'}$ asociado a $\bar{f}$. Conservamos la notación precedente. Por el teorema 5.8 tenemos que

$$(\pi^*\mathcal{I})(U') = \mathcal{I}(U) \otimes_{\mathcal{O}_Y(U)} \mathcal{O}_{Y'}(U') \cong \mathcal{I}(U)\mathcal{O}_{Y'}(U') = IB = \mathcal{I}'(U'),$$

donde hemos usado el teorema [A.7]. Los abiertos U' forman un cubrimiento de Y' y es claro que estos isomorfismos conmutan con las restricciones, luego definen un isomorfismo de haces $\pi^*\mathcal{I} \cong \mathcal{I}'$. De aquí se deriva a su vez un isomorfismo $\pi^*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2) \cong \mathcal{I}'/\mathcal{I}'^2$, y entonces

$$p^*\mathcal{C}_{X/Y} \cong p^*f^*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2) \cong \bar{f}^*\pi^*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2) = \bar{f}^*(\mathcal{I}'/\mathcal{I}'^2) = \mathcal{C}_{X'/Y'}.$$

■

7.7 Intersecciones completas locales

Finalmente estamos en condiciones de probar que el hecho de que los ideales locales de un subesquema cerrado de un conjunto algebraico regular sean intersecciones completas es una propiedad intrínseca del subesquema. Para probarlo conviene definir el concepto siguiente:

Definición 7.67 Sea S un esquema localmente noetheriano y $f : X \longrightarrow S$ un homomorfismo de tipo finito. Diremos que f es *una intersección completa* alrededor de un punto $P \in X$ si existe un entorno U de P y un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[d, "g"] \\ U \arrow[ru, "i"] \arrow[r, "f|_U"'] & S \end{tikzcd}$$

donde i es una inmersión regular y g es un homomorfismo suave. Diremos que X es *localmente una intersección completa* si lo es alrededor de todos sus puntos.

En otras palabras: un esquema X/S de tipo finito es localmente una intersección completa si cada punto tiene un entorno que se puede sumergir mediante una inmersión regular en un esquema Z/S suave sobre S. El resultado principal que hemos de probar es que, en tal caso, toda inmersión cerrada de X/S en *cualquier* esquema suave Z/S es regular.

Observemos que la situación es más natural si el esquema S es regular. Entonces, un esquema Z en las condiciones de la definición anterior ha de ser también regular (teorema 7.50). En particular Z es un esquema de Cohen-Macaulay (es decir, sus anillos locales son anillos de Cohen-Macaulay). En virtud de los teoremas [5.39] y [5.44], que i sea una inmersión regular, es decir, que el núcleo de cada $i_P^\#$ esté generado por una sucesión regular, equivale a que dicho núcleo esté generado por $\dim \mathcal{O}_{Z,P} - \dim \mathcal{O}_{X,P}$ elementos. Además, en tal caso el teorema [5.37] nos da que $\mathcal{O}_{X,P}$ es también un anillo de Cohen-Macaulay.

En particular hemos probado lo siguiente:

Teorema 7.68 *Si un esquema X/S es localmente una intersección completa y S es regular, entonces X es un esquema de Cohen-Macaulay.*

En virtud del teorema 7.60, es obvio que toda intersección completa en A_k^n o en P_k^n es localmente una intersección completa.

Veamos ahora las propiedades básicas de las intersecciones completas locales:

Teorema 7.69 *Se cumplen las propiedades siguientes:*

a) Las inmersiones regulares y los homomorfismos suaves son localmente intersecciones completas.

b) Todo homomorfismo de tipo finito entre esquemas regulares localmente noetherianos es localmente una intersección completa.

c) La composición de intersecciones completas locales es una intersección completa local.

d) Las intersecciones completas locales se conservan por cambios de base planos.

Demostración: a) es inmediato a partir de la definición.

b) Fijado un punto $P \in X$, podemos sustituir Y por un entorno afín noetheriano de $f(P)$ y X por un entorno afín noetheriano de P contenido en su antiimagen. Entonces f sigue siendo un homomorfismo de tipo finito entre esquemas noetherianos (ahora afines) y es claro que si esta restricción es una intersección completa en P también lo será el homomorfismo original.

En definitiva, podemos partir de un homomorfismo $f : \operatorname{Esp} B \longrightarrow \operatorname{Esp} A$ inducido por un homomorfismo de anillos $A \longrightarrow B$ que convierte a B en una A-álgebra de tipo finito. Podemos descomponerlo como $A \longrightarrow C \longrightarrow B$, donde $C = A[X_1, \ldots, X_n]$, el primer homomorfismo es el natural y el segundo es un epimorfismo. Equivalentemente, tenemos una factorización

$$\begin{tikzcd}
& A_Y^n \arrow[d] \\
X \arrow[ur, "i"] \arrow[r, "f"'] & Y
\end{tikzcd}$$

El homomorfismo $A_Y^n \longrightarrow Y$ es suave, luego sólo hemos de probar que la inmersión cerrada i es regular. La hipótesis de que Y es regular equivale a que el anillo A lo es, y entonces C es regular por [5.21]. En otras palabras, A_Y^n es regular cuando Y lo es.

Fijado un punto $P \in X$, consideramos el epimorfismo $i_P^\# : \mathcal{O}_{i(P)} \longrightarrow \mathcal{O}_P$. Los dos anillos son regulares (el particular son anillos de Cohen-Macaulay), luego los teoremas [5.19], [5.18] y [5.39] implican que el núcleo de $i_P^\#$ está generado por una sucesión regular.

c) Sean $f : X \longrightarrow Y$ y $g : Y \longrightarrow Z$ intersecciones completas locales. Fijamos un punto $P \in X$ y, restringiendo los esquemas a entornos de P, $f(P)$ y $g(f(P))$, tenemos factorizaciones $f = i_1 s_1$, $g = i_2 s_2$, donde i_1, i_2 son inmersiones cerradas y s_1, s_2 son homomorfismos suaves.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "i_1"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "i_2"] & Z \\
& W_1 \arrow[u, "s_1"'] \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "i_3"'] & W_2 \arrow[u, "s_2"'] \\
& & W_3 \arrow[u, "s_3"']
\end{tikzcd}$$

Si probamos que $h = s_1 i_2$ es localmente una intersección completa, entonces (restringiendo nuevamente los esquemas si es necesario) factorizará como $h = i_3 s_3$, y tendremos la factorización buscada de $fg = i_1 i_3 s_3 s_2$. Así pues, basta probar el teorema cuando f es un homomorfismo suave y g es una inmersión regular.

Restringiendo los esquemas como en la prueba del apartado b), podemos factorizar f a través de A_Y^n, de modo que tenemos la situación reflejada en el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "i"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z \\ & A_Y^n \arrow[u] \arrow[r, "h"'] & A_Z^n \arrow[u] \end{tikzcd}$$

El homomorfismo i es una inmersión cerrada, que por el teorema 7.64 es una inmersión regular. El homomorfismo h inducido por g entre los espacios afines correspondientes es también una inmersión regular porque el cambio de base $A_{\mathbb{Z}}^n \longrightarrow \mathbb{Z}$ es plano. Así pues, ih es una inmersión regular y la proyección $A_Z^n \longrightarrow Z$ es suave. Esto prueba que fg es localmente una intersección completa.

d) es consecuencia inmediata de los teoremas análogos sobre homomorfismos suaves (teorema 7.51) y sobre inmersiones cerradas (teorema 7.66). ■

Teorema 7.70 *Sea Y un esquema localmente noetheriano y supongamos que $f : X \longrightarrow Y$ es a la vez una inmersión cerrada y una intersección completa local. Entonces f es una inmersión regular.*

DEMOSTRACIÓN: Consideremos una descomposición

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[d, "s"] \\ X \arrow[ur, "i"] \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

según la definición de intersección completa local, donde hemos sustituido X por un entorno de un punto arbitrario. Restringiendo más los esquemas podemos suponer que todos ellos son afines. Puesto que $\mathcal{O}_Z(Z)$ es una $\mathcal{O}_Y(Y)$-álgebra de tipo finito, podemos factorizar s como

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[d, "s"] \arrow[r, "i'"] & A_Y^n \arrow[dl, "s'"] \\ X \arrow[ur, "i"] \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

donde s' es suave y la inmersión cerrada i' es regular por 7.64. Equivalentemente, podemos suponer que Z es A_Y^n. En términos de anillos tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A[X_1,\ldots,X_n] \arrow[dr, "q"] & \\ A \arrow[u] \arrow[r, "p"'] & B \end{tikzcd}$$

donde p y q son epimorfismos y el anillo A es noetheriano (luego los demás también). Además, los núcleos de las localizaciones de q están generados por sucesiones regulares, y queremos probar que lo mismo sucede con p.

Elegimos $a_i \in A$ tal que $q(X_i) = p(a_i)$ (para $i = 1,\ldots,n$). Entonces la sustitución $X_i \mapsto X_i - a_i$ determina un autormofismo de $A[X_1,\ldots,X_n]$ que, compuesto con q, nos da un homomorfismo q' que hace que el diagrama siga siendo conmutativo, que el los núcleos de las localizaciones de q' estén generados también por sucesiones regulares y además $q'(X_i) = 0$ para todo i. Equivalentemente, podemos suponer que $q(X_i) = 0$. Entonces q es simplemente el homomorfismo que a cada polinomio le asigna la imagen por p de su término independiente.

Fijemos un ideal primo $\mathfrak{q}$ en B y sea $\mathfrak{p}$ su antiimagen en A. Entonces tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} A_{\mathfrak{p}}[X_1,\ldots,X_n] \arrow[dr, "q'"] & \\ A_{\mathfrak{p}} \arrow[u] \arrow[r, "p'"'] & B_{\mathfrak{q}} \end{tikzcd}$$

Notemos que p' es la localización de p en $\mathfrak{q}$ y que, aunque q' no es la localización de q en $\mathfrak{q}$ (porque el anillo de polinomios no es local), se cumple que la localización de q en $\mathfrak{q}$ coincide con la localización de q' en $\mathfrak{q}$. Equivalentemente, podemos suponer que los anillos A y B son locales.

Si $\mathfrak{m}$ es el ideal maximal de A, entonces la localización de q es el homomorfismo $\bar{q} : A[X_1,\ldots,X_n]_{\mathfrak{m}'} \longrightarrow B$, donde $\mathfrak{m}' = (\mathfrak{m}, X_1,\ldots,X_n)$. Igualmente, si I es el núcleo de p, entonces el núcleo de $\bar{q}$ es $I' = (I, X_1,\ldots,X_n)_{\mathfrak{m}'}$.

Con esto hemos reducido el problema al siguiente enunciado de álgebra conmutativa:

Sea A un anillo noetheriano local y sea $\mathfrak{m}$ su ideal maximal, consideremos $\mathfrak{m}' = (\mathfrak{m}, X_1,\ldots,X_n)$, sea $I \subset \mathfrak{m}$ un ideal de A tal que el ideal $(I, X_1,\ldots,X_n)_{\mathfrak{m}'}$ esté generado por una sucesión regular en $A[X_1,\ldots,X_n]_{\mathfrak{m}'}$. Entonces I está generado por una sucesión regular en A.

La prueba es muy sencilla (teniendo en cuenta los resultados con los que contamos sobre sucesiones regulares): Si $I = (a_1,\ldots,a_r)$, entonces

$$(I, X_1,\ldots,X_n)_{\mathfrak{m}'} = (a_1,\ldots,a_r, X_1,\ldots,X_n).$$

Podemos eliminar generadores hasta tener un generador minimal, pero es evidente que no podemos eliminar ninguna indeterminada, luego llegamos a que $(I, X_1, \ldots, X_n)_{\mathfrak{m}'}$ admite un sistema generador minimal de la forma

$$X_1, \ldots, X_n, a_1, \ldots, a_s,$$

donde $a_1, \ldots, a_s \in I$. Por el teorema [5.35] (ver la observación posterior), tenemos que estos generadores forman una sucesión regular. En particular, $a_1, \ldots, a_s$ son una sucesión regular del cociente

$$A[X_1, \ldots, X_n]_{\mathfrak{m}'}/(X_1, \ldots, X_n)_{\mathfrak{m}'} \cong \big(A[X_1, \ldots, X_n]/(X_1, \ldots, X_n)\big)_{\mathfrak{m}'/(X_1,\ldots,X_n)}$$

$$\cong A_{\mathfrak{m}} \cong A.$$

A través del isomorfismo, la sucesión se corresponde con ella misma (vista ahora como sucesión en I) y el ideal generado por ella es

$$(I, X_1, \ldots, X_n)_{\mathfrak{m}'}/(X_1, \ldots, X_n)_{\mathfrak{m}'} \cong I.$$

Por lo tanto, $I = (a_1, \ldots, a_r)$ está generado por una sucesión regular. ∎

Finalmente demostramos el resultado que perseguíamos:

Teorema 7.71 *Supongamos que X/S es localmente una inmersión completa y que $i : X \longrightarrow Y$ es una inmersión cerrada (definida sobre S) en un esquema suave Y/S. Entonces i es una inmersión regular.*

Demostración: Sea $Z = X \times_S Y$, con lo que tenemos el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "q"] \arrow[d, shift right, "p"'] & Y \arrow[d, "\rho"] \\ X \arrow[u, shift right, "j"'] \arrow[ur, "i"] \arrow[r, "\pi"'] & S \end{tikzcd}$$

donde p y q son las proyecciones y $j = (1, i)$, de modo que $jp = 1$. Como p se obtiene de ρ a través de un cambio de base, tenemos que p es suave y, como ρ es plano (por ser suave) y π es localmente una intersección completa, q es también localmente una intersección completa.

Puesto que la regulridad de i es una propiedad local, podemos restringirnos a entornos de un punto arbitrario de X (y de sus correspondientes imágenes), por lo que podemos suponer que todos los esquemas son afines. En particular Z es separado sobre X, de donde se sigue que j es una inmersión cerrada, pues podemos descomponerla como $X \cong X \times_Z Z \longrightarrow X \times_X Z \cong Z$ y aplicar el teorema 4.12 a). Considerando a X y Z como esquemas suaves sobre X, el teorema 7.64 nos da que j es una inmersión regular, luego $i = jq$ es localmente una intersección completa. Por el teorema anterior es una inmersión regular. ∎

Más adelante necesitaremos el hecho siguiente:

Teorema 7.72 *En las condiciones del teorema anterior, si además el homomorfismo $\pi : X \longrightarrow S$ es una inmersión regular, entonces tenemos una sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}_{X/S} \longrightarrow \mathcal{C}_{X/Y} \longrightarrow i^*\Omega^1_{Y/S} \longrightarrow 0.$$

DEMOSTRACIÓN: Continuando la demostración del teorema anterior, ahora tenemos que q es una inmersión cerrada porque se obtiene de π por cambio de base, y sabemos que es localmente una intersección completa, luego el teorema 7.70 nos da que q es una inmersión regular. También lo es j, y el teorema 7.63 nos da una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow j^*\mathcal{C}_{Z/Y} \longrightarrow \mathcal{C}_{X/Y} \longrightarrow \mathcal{C}_{X/Z} \longrightarrow 0.$$

Por otra parte, $\mathcal{C}_{Z/Y} = p^*\mathcal{C}_{X/S}$ por el teorema 7.66, luego

$$j^*\mathcal{C}_{Z/Y} \cong j^*p^*\mathcal{C}_{X/S} \cong \mathcal{C}_{X/S}.$$

Por último, aplicamos el teorema 7.64 a j con $S = X$, lo que, junto con 7.41 a), nos da un isomorfismo

$$\mathcal{C}_{X/Z} \cong j^*\Omega^1_{Z/X} \cong j^*q^*\Omega^1_{Y/S} \cong i^*\Omega^1_{Y/S}.$$

Al poner estos dos isomorfismos en la sucesión exacta precedente, tenemos la sucesión exacta del enunciado. ■

Capítulo VIII

Divisores

Un divisor en un esquema es esencialmente una posible distribución de ceros y polos de una función racional. Enseguida estaremos en condiciones de comprender por qué esta noción representa un papel central en el estudio de los esquemas, pero, de momento, podemos destacar que los divisores permiten expresar de la forma más operativa posible el grupo de Picard. En realidad vamos a definir dos tipos de divisores: los divisores de Weil son los más sencillos, pero sólo se comportan adecuadamente en esquemas noetherianos normales; en cambio, los divisores de Cartier sólo requieren que los esquemas sean localmente noetherianos, y ambas nociones son equivalentes sobre esquemas noetherianos íntegros regulares. Empezaremos generalizando y estudiando más a fondo la noción de función racional, que hasta ahora sólo tenemos definida sobre esquemas íntegros.

8.1 Funciones racionales

Si X/k es un conjunto algebraico cuasiproyectivo en el sentido clásico, $\mathcal{O}_X(X)$ es la k-álgebra de las funciones regulares en X. Vamos a ver que, siempre en el caso clásico, las funciones racionales pueden verse como funciones regulares definidas en "casi todo" X, pero que admiten un conjunto de "singularidades" o "polos" donde no están definidas. Con "casi todo" queremos decir que este conjunto de polos ha de ser "pequeño", en el sentido de que será un cerrado de interior vacío. Equivalentemente, una función racional en X será esencialmente una función regular definida en un abierto denso en X. En el caso abstracto, en el que el esquema que estemos considerando no sea necesariamente reducido, tendremos que exigir en realidad que los dominios de las funciones racionales sean fuertemente densos, de acuerdo con la definición 3.20. En un esquema reducido, fuertemente denso equivale a denso, pero en general necesitamos trabajar con abiertos fuertemente densos porque entonces el teorema 3.19 nos permite probar la siguiente versión del principio de prolongación analítica, que es la base de la definición de función racional:

Teorema 8.1 *Sea X un esquema localmente noetheriano y sea $\mathcal{F}$ el conjunto de todos los pares (V, f) tales que $V \subset X$ es un abierto fuertemente denso y $f \in \mathcal{O}_X(V)$. La relación en $\mathcal{F}$ dada por*

$$(V, f) \sim (V', f') \quad \textit{si} \quad f|_{V \cap V'} = f'|_{V \cap V'}$$

es una relación de equivalencia.

DEMOSTRACIÓN: La única propiedad no trivial es la transitividad: si tenemos $(V, f) \sim (V', f') \sim (V'', f'')$, entonces f y f'' coinciden en $V \cap V' \cap V''$, que es un abierto fuertemente denso en X. El teorema 3.19 implica que la restricción de $V \cap V''$ a $V \cap V' \cap V''$ es inyectiva, luego f y f'' coinciden en $V \cap V''$. ■

Definición 8.2 En las condiciones del teorema anterior, llamaremos *funciones racionales* en X a las clases de equivalencia en $\mathcal{F}$ respecto a la relación indicada. Representaremos por $\mathcal{K}(X)$ al conjunto de todas las funciones racionales en X.

Si $f \in \mathcal{K}(X)$, entonces f es un conjunto de pares $(V_i, f_i) \in \mathcal{F}$, y si llamamos $V_0 = \bigcup_i V_i$, la definición de haz nos da que las f_i determinan un $f_0 \in \mathcal{O}_X(V_0)$ tal que $f = [(V_0, f_0)]$. Llamaremos a V_0 el *dominio* de f.

Así pues, una función racional $f \in \mathcal{K}(X)$ con dominio $V \subset X$ puede verse como un $f \in \mathcal{O}_X(V)$ con la propiedad de que no puede extenderse a un abierto mayor. En particular podemos considerar que $\mathcal{O}_X(X) \subset \mathcal{K}(X)$.

Es evidente que si $V \subset X$ es un abierto fuertemente denso en X, entonces toda $f \in \mathcal{O}_X(V)$ se extiende a una única función racional en $\mathcal{K}(X)$ definida en un abierto tal vez mayor (a saber, la función $[(V, f)]$).

El conjunto $\mathcal{K}(X)$ tiene estructura de anillo con las operaciones definidas de forma natural: dadas f, $f' \in \mathcal{K}(X)$ con dominios V y V', el abierto $V \cap V'$ es fuertemente denso en X y $f|_{V \cap V'} + f'|_{V \cap V'} \in \mathcal{O}_X(V \cap V')$ se extiende a una única función racional $f + g$. El producto fg se define de forma similar. Con estas operaciones, $\mathcal{O}_X(X)$ es un subanillo de $\mathcal{K}(X)$.

Observemos que si X es un esquema íntegro, entonces todos los abiertos no vacíos son fuertemente densos, y además los abiertos no vacíos son los entornos del punto genérico $\xi \in X$. Esto hace que $\mathcal{K}(X) = \mathcal{O}_{X,\xi}$, de modo que el anillo de funciones racionales que acabamos de definir coincide con el cuerpo $K(X)$ definido en 3.14.

En general, $\mathcal{K}(X)$ no es un cuerpo. Vamos a mostrar su estructura algebraica en el caso de los esquemas afines noetherianos, para lo cual necesitamos el siguiente resultado elemental:

Teorema 8.3 *Si A es un anillo noetheriano y U es un abierto fuertemente denso en* $\operatorname{Esp} A$*, entonces existe un $s \in A$ regular tal que $D(s) \subset U$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\operatorname{Esp} A \setminus U = V(I)$, donde I es un ideal de A. Como U contiene a todos los primos asociados de A (que son un número finito porque A es noetheriano), el ideal I no está contenido en ninguno de ellos, luego por el teorema [3.51] no está contenido en la unión. Por consiguiente, existe un $s \in I$ regular, y obviamente $D(s) \subset U$. ■

Teorema 8.4 *Si X es un esquema afín noetheriano, el monomorfismo natural $\mathcal{O}_X(X) \longrightarrow \mathcal{K}(X)$ se extiende a un isomorfismo $F(\mathcal{O}_X(X)) \cong \mathcal{K}(X)$ (donde F representa el anillo completo de cocientes).*

DEMOSTRACIÓN: Pongamos que $X = \operatorname{Esp} A$, donde A es un anillo noetheriano, y hemos de probar que el monomorfismo $A \longrightarrow \mathcal{K}(X)$ se extiende a un isomorfismo $F(A) \cong \mathcal{K}(A)$.

Si $s \in A$ es regular, entonces $U = D(s)$ es un abierto fuertemente denso en X (por el teorema [3.49]) y podemos extender $1/s \in A_s = \mathcal{O}_X(U)$ hasta una función racional que representaremos igualmente por $1/s \in \mathcal{K}(X)$ (pues es la inversa de $s \in \mathcal{O}_X(X) \subset \mathcal{K}(X)$). Esto implica que el monomorfismo $A \longrightarrow \mathcal{K}(X)$ se extiende de forma única a un homomorfismo

$$F(A) \longrightarrow \mathcal{K}(X).$$

Se trata de un monomorfismo, pues si $a/s = 0$ en $\mathcal{K}(X)$, también $a/s = 0$ como función de $\mathcal{O}_X(D(s)) = A_s$, luego también como función de $F(A)$.

Tomemos ahora $f \in \mathcal{K}(X)$ y sea $U \subset X$ su dominio. Por el teorema anterior existe $s \in A$ regular tal que $V = D(s) \subset U$, con lo que $f = [(V, a/s^n)]$ para cierto $a \in A$. Es claro que $a/s^n \in F(A)$ es una antiimagen de f. ■

Cuando X es íntegro, el teorema 3.13 dice más que el teorema anterior, pues afirma que $\mathcal{K}(X)$ puede identificarse con el cuerpo de cocientes de cualquier abierto de X afín y no vacío. En el caso general esto es cierto para cualquier abierto afín fuertemente denso. Para probarlo, conviene observar primero que podemos hablar del haz de funciones racionales sobre un esquema X.

En efecto, si $U \subset X$ es un abierto arbitrario y $f \in \mathcal{K}(X)$ tiene dominio V, entonces $V \cap U$ es un abierto fuertemente denso en U, luego $f|_{V\cap U}$ se extiende a una única función racional que representaremos por $f|_U \in \mathcal{K}(U)$. Es claro que si dos funciones racionales tienen la misma restricción a un abierto fuertemente denso, entonces son iguales.

Con estas restricciones, $\mathcal{K}$ se convierte en un prehaz. Escribiremos por claridad $\mathcal{K}_X$, si bien, cuando $U \subset X$ es un abierto, $\mathcal{K}_X(U)$ es simplemente $\mathcal{K}(U)$. Tenemos un monomorfismo natural $\mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{K}_X$.

Teorema 8.5 *Si X es un esquema localmente noetheriano, el prehaz $\mathcal{K}_X$ es en realidad un haz de $\mathcal{O}_X$-álgebras.*

DEMOSTRACIÓN: Tomemos una unión de abiertos $U = \bigcup\limits_i U_i \subset X$.

Si tenemos funciones $f_i \in \mathcal{K}_X(U_i)$ tales que $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$ para todo par de índices i, j, sea V la unión de los dominios de las f_i. Es claro que V es un abierto fuertemente denso en U y que las f_i determinan una $g \in \mathcal{O}_X(V)$ (porque $\mathcal{O}_X$ es un haz), y g se extiende a una única $f \in \mathcal{K}_X(U)$ que cumple que $f|_{U_i} = f_i$. Similarmente se comprueba que si una $f \in \mathcal{K}_X(U)$ cumple $f|_{U_i} = 0$, entonces $f = 0$. ■

Las restricciones de funciones racionales tienen una expresión natural en términos de los isomorfismos dados por el teorema 8.4. Conviene observar primero lo siguiente:

Teorema 8.6 *Si X es un esquema afín, un elemento $f \in \mathcal{O}_X(X)$ es regular si y sólo si $f_P \in \mathcal{O}_{X,P}$ es regular para todo punto $P \in X$.*

DEMOSTRACIÓN: Si $X = \operatorname{Esp} A$, hemos de probar que un $a \in A$ es regular si y sólo si $a/1 \in A_{\mathfrak{p}}$ es regular para todo $\mathfrak{p} \in \operatorname{Esp} A$.

Si a es regular y $\mathfrak{p} \in \operatorname{Esp} A$, entonces $a/1 \neq 0$ y si $(a/1)(b/s) = 0$, existe un $s' \in A \setminus \mathfrak{p}$ tal que $as'b = 0$, luego $s'b = 0$, luego $b/s = 0$. Esto prueba que $a/1$ es regular.

Si las localizaciones de a son regulares entonces $a \neq 0$ y, si $ab = 0$ con $b \neq 0$, podríamos tomar un ideal maximal $\mathfrak{m} \subset A$ tal que $\operatorname{An}(b) \subset \mathfrak{m}$. Entonces $(a/1)(b/1) = 0$ en $A_{\mathfrak{m}}$ y $b/1 \neq 0$, luego $a/1$ no es regular en $A_{\mathfrak{m}}$, contradicción. ■

El teorema anterior implica en particular que si X es un esquema arbitrario y $V \subset U \subset X$ son abiertos afines, entonces cada $s \in \mathcal{O}_X(U)$ regular cumple que $s|_V \in \mathcal{O}_X(V)$ es también regular, luego la restricción determina un homomorfismo $F(\mathcal{O}_X(U)) \longrightarrow F(\mathcal{O}_X(V))$.

Ahora es fácil comprobar que si X es un esquema localmente noetheriano y $V \subset U \subset X$ son abiertos afines noetherianos, la restricción $\mathcal{K}_X(U) \longrightarrow \mathcal{K}_X(V)$ se corresponde, a través de los isomorfismos dados por el teorema 8.4, con el homomorfismo $a/s \mapsto a|_V/s|_V$.

Por otra parte, si $P \in U$, también tenemos un homomorfismo natural $F(\mathcal{O}_X(U)) \longrightarrow F(\mathcal{O}_{X,P})$. El teorema siguiente muestra que este homomorfismo se corresponde con $\mathcal{K}_X(U) \longrightarrow \mathcal{K}_{X,P}$.

Teorema 8.7 *Si X es un esquema localmente noetheriano y $P \in X$, entonces $\mathcal{K}_{X,P} \cong F(\mathcal{O}_{X,P})$.*

DEMOSTRACIÓN: El monomorfismo de haces $\mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{K}_X$ determina un homomorfismo $\mathcal{O}_{X,P} \longrightarrow \mathcal{K}_{X,P}$. Vamos a probar que si $s \in \mathcal{O}_{X,P}$ es regular, existe un entorno afín noetheriano V de P y un $f \in \mathcal{O}_X(V)$ regular tal que $s = f_P$.

En principio existe un abierto afín noetheriano $P \in U \subset X$ y un $g \in \mathcal{O}_X(U)$ tal que $s = g_P$. Sea $I = \operatorname{An}(g) \subset \mathcal{O}_X(U)$, que es un ideal finitamente generado. Si h recorre un generador finito de I, tenemos que $h_P s = 0$, luego $h_P = 0$, luego existe un entorno V de P tal que $h|_V = 0$. Podemos tomar el mismo entorno V para todos generadores h y exigir además que $V = D(a)$, para cierto $a \in \mathcal{O}_X(U)$.

Entonces $h|_V = 0$ para todo $h \in I$. Llamamos $f = g|_V$, de modo que $s = f_P$. Hemos de ver que f es regular en $\mathcal{O}_X(V) = \mathcal{O}_X(U)_a$. Ciertamente $f \neq 0$ y si $f(b/a^n) = 0$ en $\mathcal{O}_X(V)$, con $b \in \mathcal{O}_X(U)$, entonces $gba^m = 0$, luego $ba^m \in I$, luego $ba^m/1 = 0$ en $\mathcal{O}_X(V)$, luego $ba^r = 0$, luego $b/a^n = 0$. Esto prueba que f es regular.

Consecuentemente, podemos considerar $1/f \in F(\mathcal{O}_X(V)) \cong \mathcal{K}_X(V)$ cuya imagen en $\mathcal{K}_{X,P}$ es el inverso de la imagen de s. Esto nos da un homomorfismo natural

$$F(\mathcal{O}_{X,P}) \longrightarrow \mathcal{K}_{X,P},$$

caracterizado por los diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd} F(\mathcal{O}_X(U)) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{K}_X(U) \arrow[d] \\ F(\mathcal{O}_{X,P}) \arrow[r] & \mathcal{K}_{X,P} \end{tikzcd}$$

(donde U es cualquier entorno afín noetheriano de P).

Además hemos probado que para todo $f \in F(\mathcal{O}_{X,P})$ existe un entorno U de P tal que f tiene antiimagen en $\mathcal{O}_X(U)$. Teniendo en cuenta los isomorfismos $F(\mathcal{O}_X(U)) \cong \mathcal{K}_X(U)$, es fácil ver que también $F(\mathcal{O}_{X,P}) \cong \mathcal{K}_{X,P}$. ■

Ahora generalizamos el teorema 3.19:

Teorema 8.8 *Sea X un esquema localmente noetheriano y $U \subset X$ un abierto fuertemente denso. Entonces, para cada abierto $V \subset X$, la restricción*

$$\mathcal{K}_X(V) \longrightarrow \mathcal{K}_X(V \cap U)$$

es un isomorfismo.

Demostración: Es claro que basta probarlo cuando $V = X$ es afín y noetheriano. Pongamos que $X = \operatorname{Esp} A$. Por el teorema 8.3 existe un $s \in A$ regular tal que $D(s) \subset U$. El homomorfismo natural $A \longrightarrow A_s$ se extiende a un isomorfismo $F(A) \longrightarrow F(A_s)$. Equivalentemente, tenemos que la composición de las restricciones

$$\mathcal{K}_X(X) \longrightarrow \mathcal{K}_X(U) \longrightarrow \mathcal{K}_X(D(s))$$

es un isomorfismo. En particular la primera es inyectiva y la segunda suprayectiva. Si probamos que la segunda es inyectiva, la primera será suprayectiva. Ahora bien, por la parte ya probada, si $W \subset U$ es un abierto afín noetheriano, la restricción $\mathcal{K}_X(W) \longrightarrow \mathcal{K}_X(W \cap D(s))$ es inyectiva, lo que implica la inyectividad de la restricción en $\mathcal{K}_X(U)$. ■

En particular, si U es un abierto afín fuertemente denso en X tenemos que

$$\mathcal{K}(X) \cong \mathcal{K}(U) \cong F(\mathcal{O}_X(U)),$$

lo que generaliza al teorema 3.13.

Observemos ahora que si X es un esquema íntegro y $V \subset U$ son dos abiertos cualesquiera, la restricción $\mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{O}_X(V)$ es inyectiva e induce un isomorfismo $F(\mathcal{O}_X(U)) \longrightarrow F(\mathcal{O}_X(V))$ entre los cuerpos de cocientes. Esto nos permite definir un prehaz

$$\mathcal{K}'_X(U) = F(\mathcal{O}_X(U))$$

con estas restricciones, que obviamente es un haz. Además, el hecho de que $\mathcal{K}'_X(U) \cong \mathcal{K}_X(U)$ cuando U es un abierto afín noetheriano nos permite construir un isomorfismo $\mathcal{K}'_X \cong \mathcal{K}_X$. Por consiguiente:

Teorema 8.9 *Si X es un esquema íntegro localmente noetheriano, entonces $\mathcal{K}_X(U) \cong F(\mathcal{O}_X(U)) \cong K(X)$ para todo abierto U de X no vacío, y las restricciones en $\mathcal{K}_X$ son todas isomorfismos (excepto las restricciones a $\mathcal{K}_X(\varnothing) = 0$).*

Vamos a obtener una expresión explícita para el cuerpo de funciones racionales de un conjunto algebraico $X = \operatorname{Proy}(B)$, donde $B = k[X_0, \ldots, X_n]/I$ e I es un ideal primo. Vamos a probar que $\mathcal{K}(X)$ es isomorfo al subcuerpo $F(B)_0$ de $F(B)$ formado por las fracciones de grado 0, es decir, fracciones cuyo numerador tiene el mismo grado que el denominador.

En efecto, si $a/s \in F(B)_0$, para cada $g \in B_1$ podemos considerar el elemento

$$\phi_g(a/s) = \frac{a/g^d}{s/g^d} \in F(\mathcal{O}_X(D(g))) \cong \mathcal{K}(D(g)),$$

donde d es el grado común de a y s. Es fácil ver que $\phi_g(a/s)$ no depende de la representación de a/s como fracción. Si tomamos otro $g' \in B_1$, las restricciones de a $\mathcal{K}(D(gg'))$ de $\phi_g(a/s)$ y son

$$\frac{ag'^d/(gg')^d}{sg'^d/(gg')^d} = \frac{ag^d/(gg')^d}{sg^d/(gg')^d}.$$

Esto prueba que $\phi_g(a/s)$ y $\phi_{g'}(a/s)$ se extienden a una misma función racional $\phi(a/s) \in \mathcal{K}(X)$. Es fácil ver entonces que

$$\phi : F(B)_0 \longrightarrow \mathcal{K}(X)$$

es un monomorfismo de cuerpos. De hecho es un isomorfismo, pues cada función $f \in \mathcal{K}(X)$ está determinado por su restricción a cualquier abierto $D(g)$, la cual ha de ser de la forma

$$\frac{a/g^d}{s/g^{d'}} = \frac{(ag^{d'})/g^{d+d'}}{(sg^d)/g^{d+d'}} = \phi_g(ag^{d'}/sg^d),$$

luego $f = \phi(ag^{d'}/sg^d)$. ■

Ejemplo 1 En particular, según la discusión precedente, podemos identificar a $\mathcal{K}(\mathrm{P}_k^n)$ con el cuerpo de las fracciones algebraicas de grado 0 en las indeterminadas $X_0, \ldots, X_n$, que a su vez se identifica (a través de la restricción a $D(X_i)$) con el cuerpo de las fracciones algebraicas de grado arbitrario en $X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_n$, sin más que sustituir $X_i = 1$ en cada fracción de grado 0 (o, recíprocamente, homogeneizando con X_i el numerador y el denominador de una fracción arbitraria sin X_i). ■

Ejemplo 2 Más en general, se cumple que $\mathcal{K}(\mathrm{P}_k^{n_1} \times_k \cdots \times_k \mathrm{P}_k^{n_r})$ es isomorfo al cuerpo de fracciones algebraicas en $(n_1+1)+\cdots+(n_r+1)$ intedeterminadas tales que tanto el numerador como el denominador son homogéneos (y del mismo grado) respecto de cada grupo de $n_i + 1$ indeterminadas. A través de esta representación, la restricción a un producto de abiertos principales $D(X_{ij_i})$ es la dehomogeneización $X_{ij_i} = 1$, para $i = 1, \ldots, r$.

Por simplificar la notación consideraremos $r = 2$, aunque el argumento es general. Vamos a probar que $\mathcal{K}(\mathrm{P}_k^m \times_k \mathrm{P}_k^n)$ es isomorfo al cuerpo K de las fracciones de $k(X_0, \ldots, X_m, Y_0, \ldots, Y_n)$ que tienen grado 0 tanto en $X_0, \ldots, X_m$ como en $Y_0, \ldots, Y_n$. Para ello consideramos los homomorfismos

$$\phi_{ij} : K \longrightarrow \mathcal{K}(D(X_i) \times D(Y_j)) \cong k(X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_m, Y_0, \ldots, \hat{Y}_j, \ldots, Y_n)$$

dados por la deshomogeneización $X_i = Y_j = 1$. Es fácil ver que son isomorfismos. Observemos ahora que

$$(D(X_i) \times D(Y_j)) \cap (D(X_{i'}) \times D(Y_{j'})) = D(X_i X_{i'}) \times D(Y_j Y_{j'})$$

y que

$$\mathcal{O}_{\mathrm{P}_k^m \times_k \mathrm{P}_k^n}(D(X_i X_{i'}) \times D(Y_j Y_{j'})) \cong \mathcal{O}_{\mathrm{P}_k^m}(D(X_i X_{i'})) \otimes_k \mathcal{O}_{\mathrm{P}_k^n}(D(Y_j Y_{j'})),$$

de modo que la restricción desde

$$\mathcal{O}_{\mathrm{P}_k^m \times_k \mathrm{P}_k^n}(D(X_i) \times D(Y_j)) \cong \mathcal{O}_{\mathrm{P}_k^m}(D(X_i)) \otimes_k \mathcal{O}_{\mathrm{P}_k^n}(D(Y_j))$$

viene dada por $F \otimes G \mapsto F|_{D(X_i X_{i'})} \otimes G|_{D(Y_j Y_{j'})})$.

Por otra parte, K está generado sobre k por los cocientes X_u/X_v, Y_u/Y_v, con $u \neq v$, y vemos que

$$\phi_{ij}(X_u/X_v) = \begin{cases} X_u/X_v & \text{si } u \neq i \neq v, \\ X_u & \text{si } v = i, \\ 1/X_v & \text{si } u = i. \end{cases}$$

Si aplicamos a estas fracciones el isomorfismo

$$k[X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_m] \cong \mathcal{O}_{\mathrm{P}_k^m}(D(X_i)) \cong k[X_0, \ldots, X_m]_{(X_i)},$$

los tres casos se corresponden con

$$\phi_{ij}(X_u/X_v) = \frac{(X_u/X_i) \otimes 1}{(X_v/X_i) \otimes 1} \in F(\mathcal{O}_{\mathrm{P}_k^m}(D(X_i)) \otimes_k \mathcal{O}_{\mathrm{P}_k^n}(D(Y_j))),$$

luego

$$\phi_{ij}(X_u/X_v)|_{D(X_iX_{i'})\times D(Y_jY_{j'})} = \frac{(X_uX_{i'}/X_iX_{i'})\otimes 1}{(X_vX_{i'}/X_iX_{i'})\otimes 1},$$

que claramente coincide con

$$\phi_{i'j'}(X_u/X_v)|_{D(X_iX_{i'})\times D(Y_jY_{j'})} = \frac{(X_uX_i/X_iX_{i'})\otimes 1}{(X_vX_i/X_iX_{i'})\otimes 1}.$$

Igualmente se razona con un cociente Y_u/Y_v, luego concluimos que todas las $\phi_{ij}(F/G)$ se extienden a una misma $\phi(F/G)\in \mathcal{K}(\mathrm{P}_k^m\times_k \mathrm{P}_k^n)$, de modo que

$$\phi : K \longrightarrow K(\mathrm{P}_k^m\times_k \mathrm{P}_k^n)$$

es un isomorfismo. También es claro que $\phi(F/G)$ restringido a $D(X_i)\times D(Y_j)$ no es sino $\phi_{ij}(F/G)$, luego se trata de la deshomogeneización respecto a las indeterminadas X_i e Y_j. ■

8.2 Divisores de Weil

Pronto veremos que, si X es un esquema noetheriano normal, el conjunto de puntos donde una función racional no nula no está definida (su conjunto de polos) es vacío o bien un cerrado de codimensión 1, y lo mismo le sucede al conjunto de puntos donde se anula (su conjunto de ceros). Más aún, veremos que es posible asignar un índice o multiplicidad a cada componente irreducible de los conjuntos de ceros y polos de forma que se cumplen las propiedades algebraicas que es razonable esperar. Esto nos lleva a la noción de divisor de Weil, que no es más que una posible distribución de ceros y polos (con unas multiplicidades específicas) que puede corresponder o no, de hecho, a una función racional.

En general, si X es un esquema arbitrario, conviene recordar que la aplicación $P\mapsto \overline{\{P\}}$ biyecta los puntos de X con los subconjuntos cerrados irreducibles no vacíos en X (teorema 3.3). Por consiguiente, podemos hablar de la *dimensión* y la *codimensión* de un punto $P\in X$, para referirnos a la dimensión y la codimensión de su clausura en X.

Es claro que tanto la dimensión como la codimensión de un punto son propiedades locales (se conservan al sustituir X por un entorno del punto).

Definición 8.10 Si X es un esquema, llamaremos *divisores primos* de X a sus puntos de codimensión 1 (o, indistintamente, a los subconjuntos cerrados irreducibles de X de codimensión 1). Llamaremos *divisores de Weil* de X a los elementos del $\mathbb{Z}$-módulo libre $\mathrm{Div}(X)$ generado por divisores primos de X.

Usaremos notación multiplicativa, de modo que un divisor de Weil $Z\neq 1$ en X se expresa de forma única como $Z = P_1^{n_1}\cdots P_r^{n_r}$, donde los n_i son enteros no nulos y los P_i son puntos de X de codimensión 1.

Si $Z \in \operatorname{Div}(X)$ y $P \in X$ es un divisor primo, está definida la *multiplicidad* de Z en P, como el exponente $v_P(Z) \in \mathbb{Z}$ de P en Z. De este modo,

$$Z = \prod_P P^{v_P(Z)},$$

donde P recorre los divisores primos de X, si bien el producto es finito porque $v_P(Z) = 0$ excepto a lo sumo para un número finito de primos.

Diremos que un primo P *divide* a un divisor Z si $v_P(Z) \neq 0$.

En $\operatorname{Div}(X)$ tenemos la relación de orden parcial dada por $Z_1 \leq Z_2$ si y sólo si $v_P(Z_1) \leq v_P(Z_2)$ para todo divisor primo P de X. Los divisores que cumplen $Z \geq 1$ se llaman *enteros* o *efectivos*. Obviamente, todo divisor Z puede expresarse como cociente de dos divisores enteros. La expresión es única si exigimos que éstos no tengan divisores primos comunes. La representaremos por $Z = Z_0/Z_\infty$. Llamaremos a Z_0 el *divisor de ceros* y a Z_∞ el *divisor de polos* del divisor Z.

El *soporte* de un divisor Z es la unión de todos los cerrados irreducibles $\overline{\{P\}}$ tales que $v_P(Z) \neq 0$. Lo representaremos por $\operatorname{sop} Z$. (Equivalentemente, es la clausura en X del conjunto de divisores de Z.)

A partir de aquí suponemos que X es un esquema noetheriano normal. Si $P \in X$ es un divisor primo, entonces $\mathcal{O}_{X,P}$ es un dominio íntegro noetheriano de dimensión 1 e íntegramente cerrado. En otras palabras, $\mathcal{O}_{X,P}$ es un dominio de Dedekind local, luego es un anillo de valoración discreta. Su cuerpo de cocientes es el cuerpo de funciones $K(X)$, en el cual tenemos definida una valoración $v_P : K(X)^* \longrightarrow \mathbb{Z}$ tal que

$$\mathcal{O}_{X,P} = \{f \in K(X)^* \mid v_P(f) \geq 0\} \cup \{0\}$$

y

$$\mathcal{O}_{X,P}^* = \{f \in K(X)^* \mid v_P(f) = 0\}.$$

Ahora observamos lo siguiente:

Teorema 8.11 *Sea X un esquema íntegro noetheriano y $f \in K(X)$ no nula. Entonces existe a lo sumo un número finito de divisores primos $P \in X$ tales que $f \notin \mathcal{O}_{X,P}^*$.*

Demostración: Sea U un abierto (denso) afín en X. Entonces $f = a/b$, donde a, $b \in \mathcal{O}_X(U)$ son no nulos. Consideremos el cerrado

$$Y = V_U(a) \cup V_U(b) \cup (X \setminus U) \subset X.$$

Así, si $P \in X \setminus Y$, se cumple que $f \in \mathcal{O}_{X,P}^*$. Basta probar que Y contiene a lo sumo un número finito de divisores primos P. Ahora bien, si $P \in X \setminus U$, entonces $W = \overline{\{P\}}$ ha de estar contenido en una componente irreducible de $X \setminus U$, pero, al tener codimensión 1 y ser X irreducible, W ha de ser una componente irreducible. Así pues, P es uno de los puntos cuasigenéricos de $X \setminus U$, que son un número finito.

Similarmente, como $V_U(a) \neq U$, tenemos que $\overline{V_U(a)} \neq X$, y los puntos de codimensión 1 contenidos en $V_U(a)$ han de ser puntos cuasigenéricos de su clausura. Lo mismo vale para $V_U(b)$. ■

Volviendo al caso en que el esquema X es normal, el teorema anterior implica que si $f \in K(X)^*$, entonces $v_P(f) = 0$ para todos los divisores primos de X salvo quizá un número finito de ellos. Esto da sentido a la definición siguiente:

Definición 8.12 Sea X un esquema noetheriano normal y $f \in K(X)$. Definimos

$$(f) = \prod_P P^{v_P(f)} \in \operatorname{Div}(X),$$

donde P recorre los divisores primos de X. Los divisores de la forma (f), para un $f \in K(X)^*$, se llaman *divisores principales* de X.

Por las propiedades de las valoraciones, la aplicación $K(X)^* \longrightarrow \operatorname{Div}(X)$ dada por $f \mapsto (f)$ es un homomorfismo de grupos. En particular, el conjunto de los divisores principales es un subgrupo de $\operatorname{Div}(X)$.

Ahora podemos definir el *divisor de ceros* y el *divisor de polos* de una función $f \in K(X)^*$ como los correspondientes a su divisor asociado, $(f) = (f)_0/(f)_\infty$.

Equivalentemente, un divisor primo P es un *cero* de una función racional $f \in K(X)^*$ si $v_P(f) = n > 0$, y entonces decimos que P es un *cero de orden n;* mientras que P es un *polo* de f si $v_P(f) = -n < 0$, y entonces decimos que es un *polo de orden* n (no $-n$). El orden de un cero o de un polo puede interpretarse en términos del desarrollo en serie de potencias de f en la compleción del anillo local correspondiente a cada cero o polo, pero no vamos a entrar en ello aquí. El teorema siguiente interpreta los soportes de los divisores de ceros y de polos de una función.

Teorema 8.13 *Sea X un esquema noetheriano normal, sea $f \in K(X)^*$ y sea U un abierto en X. Entonces:*

a) $f \in \mathcal{O}_X(U)$ si y sólo si $U \cap \operatorname{sop}(f)_\infty = \varnothing$.

b) Si $P \in U$, entonces $f \in \mathfrak{m}_P\mathcal{O}_{X,P}$ si y sólo si $P \in \operatorname{sop}(f)_0 \setminus \operatorname{sop}(f)_\infty$.

Demostración: a) Supongamos que $f \in \mathcal{O}_X(U)$ y sea P un primo que divida a $(f)_\infty$. Necesariamente $P \in X \setminus U$, pues en caso contrario tendríamos que $f \in \mathcal{O}_P(U)$, luego $v_P(f) \geq 0$. Por consiguiente, $\overline{\{P\}} \subset X \setminus U$, y el soporte de $(f)_\infty$ es la unión de estas clausuras.

Para probar el recíproco no perdemos generalidad si suponemos que U es afín. Si U es disjunto del soporte de $(f)_\infty$, consideremos un punto $P \in U$ de codimensión 1 (en U o en X, que es lo mismo, pues es tanto como decir que $\mathcal{O}_{U,P} = \mathcal{O}_{X,P}$ tiene dimensión 1). Por hipótesis P no divide a $(f)_\infty$, luego $v_P(f) \geq 0$. Esto significa que $f \in \mathcal{O}_{X,P}$. El teorema 7.4 implica entonces que $f \in \mathcal{O}_X(U)$.

b) Si $f \in \mathfrak{m}_P \mathcal{O}_{X,P}$, entonces $P \notin \operatorname{sop}(f)_\infty$ por a). Si $P \notin \operatorname{sop}(f)_0 = \operatorname{sop}(1/f)_\infty$, entonces $1/f \in \mathcal{O}_{X,P}$, también por a), luego f sería una unidad de $\mathcal{O}_{X,P}$.

Recíprocamente, si $P \in \operatorname{sop}(f)_0 \setminus \operatorname{sop}(f)_\infty$, entonces $f \in \mathcal{O}_{X,P}$ por a). Si f no perteneciera al ideal maximal, tendríamos que $1/f \in \mathcal{O}_{X,P}$, con lo que, nuevamente por a), $P \notin \operatorname{sop}(1/f)_\infty = \operatorname{sop}(f)_0$. ■

En particular, una función $f \in K(X)^*$ no tiene polos si y sólo si $f \in \mathcal{O}_X(X)$, y no tiene ni ceros ni polos (es decir, cumple que $(f) = 1$) si y sólo si $f \in \mathcal{O}_X(X)^*$. Equivalentemente, dos funciones f, $g \in K(X)^*$ cumplen $(f) = (g)$ si y sólo si $f = \alpha g$, para cierto $\alpha \in \mathcal{O}_X(X)^*$.

Si X es un esquema proyectivo normal geométricamente íntegro definido sobre un cuerpo k, el teorema 4.26 nos da que $\mathcal{O}_X(X)^* = k^*$, con lo que resulta que los ceros y polos de una función racional (con sus órdenes correspondientes) determinan a ésta salvo una constante.

Definición 8.14 Si X es un esquema noetheriano normal, el *grupo de clases* de X como el cociente del grupo $\operatorname{Div}(X)$ sobre el subgrupo de los divisores principales. Lo representaremos por $\operatorname{Cl}(X)$. Si dos divisores pertenecen a la misma clase diremos que son *linealmente equivalentes.*

De este modo tenemos la siguiente sucesión exacta de grupos abelianos:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(X)^* \longrightarrow K(X)^* \longrightarrow \operatorname{Div}(X) \longrightarrow \operatorname{Cl}(X) \longrightarrow 0.$$

Veremos que si X es regular entonces $\operatorname{Cl}(X)$ es isomorfo al grupo de Picard $\operatorname{Pic}(X)$. Enseguida veremos que esta representación en términos de divisores nos proporciona técnicas para determinar explícitamente la estructura de estos grupos en algunos casos.

Ejemplo Si D es un dominio de Dedekind y $X = \operatorname{Esp} D$, entonces los divisores primos de X son los ideales primos no nulos de D, los divisores de X que hemos definido son los divisores de D definidos en la teoría algebraica de números, y lo mismo sucede con los divisores principales, luego el grupo de clases de X es el grupo de clases de D definido en la teoría algebraica de números. ■

Un poco más en general: Si A es un dominio íntegro noetheriano íntegramente cerrado (con lo que $X = \operatorname{Esp} A$ es un esquema noetheriano normal), los divisores primos de X son los ideales primos $\mathfrak{p}$ de A de altura 1. Supongamos además que A no es un cuerpo, o de lo contrario no hay tales primos. Vamos a probar que $\mathfrak{p}$ es principal como divisor de X si y sólo si es principal como ideal de A.

Ciertamente, si $\mathfrak{p} = (\pi)$ con $\pi \in A$ (como ideal), entonces $v_\mathfrak{p}(\pi) = 1$ y $v_\mathfrak{q}(\pi) = 0$ para todo primo $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$ de altura 1, pues $\pi \notin \mathfrak{q}$, o de lo contrario $0 \subsetneq \mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ y, como $\operatorname{alt} \mathfrak{q} = 1$, ha de ser $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$. Esto prueba que $\mathfrak{p} = (\pi)$ como divisor.

Supongamos ahora que $\mathfrak{p} = (f)$ como divisor, donde $f \in K(X)$. Hemos de probar que $f \in A$ y que genera a $\mathfrak{p}$ como ideal.

Como $v_{\mathfrak{p}}(f) = 1$, tenemos que f genera el ideal $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ y, para todo primo $\mathfrak{q}$ de altura 1 distinto de $\mathfrak{p}$, tenemos que $v_{\mathfrak{q}}(f) = 0$, lo que implica que $f \in A_{\mathfrak{q}}$. Por el teorema 7.4 concluimos que $f \in A$. Más concretamente, $f \in A \cap \mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$.

Falta probar que f genera $\mathfrak{p}$. Para ello tomamos cualquier $g \in \mathfrak{p}$, y tenemos que $v_{\mathfrak{p}}(g) \geq 1$ y $v_{\mathfrak{q}}(g) \geq 0$ para todo $\mathfrak{q} \neq \mathfrak{p}$. Por consiguiente $v_{\mathfrak{q}}(g/f) \geq 0$ para todo $\mathfrak{q}$ (incluido $\mathfrak{p}$), de modo que $g/f \in A_{\mathfrak{q}}$ para todo $\mathfrak{q}$. De nuevo por 7.4 llegamos a que $g/f \in A$, luego $g \in (f)$. ■

Ahora podemos enunciar el teorema [5.66] de una forma más natural:

Teorema 8.15 *Un dominio íntegro noetheriano A es un dominio de factorización única si y sólo si es íntegramente cerrado y el grupo de clases de* $\operatorname{Esp} A$ *es trivial.*

Demostración: Es sabido que todo dominio de factorización única es íntegramente cerrado, luego podemos suponer que A es un dominio íntegro noetheriano íntegramente cerrado, y hemos de probar que A es un dominio de factorización única si y sólo si todos los divisores de $\operatorname{Esp} A$ son principales. Ahora bien, acabamos de ver que esto equivale a que todos los ideales primos de A de altura 1 sean principales, y el teorema [5.66] afirma precisamente que esto equivale a que A sea un dominio de factorización única.

El argumento anterior suponía que A no es un cuerpo, pero es que un cuerpo es trivialmente un dominio de factorización única y su grupo de divisores es trivial por definición. ■

Nota Si A es un dominio de factorización única noetheriano y $X = \operatorname{Esp} A$, tenemos que los divisores primos de X son los ideales de la forma $\mathfrak{p} = (\pi)$, donde $\pi \in A$ es primo. (Observemos que todo ideal de esta forma tiene altura 1, por el teorema de los ideales principales [5.2].) Además, la valoración $v_{\mathfrak{p}}$ que $\mathfrak{p}$ induce sobre $\mathcal{K}(X)$ (el cuerpo de cocientes de A) es la inducida por la multiplicidad de π en un elemento de A, es decir, que si $f \in \mathcal{K}(X)^*$ factoriza como $f = \pi_1^{r_1} \cdots \pi_n^{r_n}$, con $r_i \in \mathbb{Z}$, entonces $v_{(\pi_i)}(f) = r_i$. Por consiguiente, la factorización del divisor principal asociado a f es $(f) = (\pi_1)^{r_1} \cdots (\pi_n)^{r_n}$. ■

En particular, si D es un dominio de factorización única noetheriano tenemos que $\operatorname{Cl}(A_D^n) = 0$.

Definición 8.16 Sea X un esquema noetheriano normal y U un abierto en X. Para cada $Z \in \operatorname{Div}(X)$, definimos su *restricción* $Z|_U$ como el divisor que resulta de eliminar en Z los primos que no están en U.

El teorema siguiente nos permitirá calcular algunos grupos de clases:

Teorema 8.17 *Sea X un esquema noetheriano normal, sea Z un subconjunto cerrado propio y $U = X \setminus Z$. Entonces:*

a) La restricción induce un epimorfismo $\mathrm{Cl}(X) \longrightarrow \mathrm{Cl}(U)$.

b) Si $\mathrm{codim}_X Z \geq 2$, *el epimorfismo anterior es un isomorfismo.*

c) Si Z *es irreducible y* $\mathrm{codim}_X Z = 1$, *entonces el epimorfismo anterior se completa hasta una sucesión exacta*

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Cl}(X) \longrightarrow \mathrm{Cl}(U) \longrightarrow 0,$$

donde el primer homomorfismo viene dado por $1 \mapsto [\zeta]$, *donde* ζ *es el punto genérico de* Z.

Demostración: La aplicación definida en a) es ciertamente un epimorfismo $\mathrm{Div}(X) \longrightarrow \mathrm{Div}(U)$. Si $f \in K(X)$ y $P \in U$, el isomorfismo $K(X) \cong K(U)$ hace corresponder $\mathcal{O}_{X,P} \cong \mathcal{O}_{U,P}$, por lo que $v_P(f)$ es el mismo tanto si consideramos a f en $K(X)$ o en $K(U)$. Esto prueba que el epimorfismo entre los grupos de divisores transforma (f) (como divisor de X) en (f) (como divisor de U), luego induce un epimorfismo entre los grupos de clases.

Si $\mathrm{codim}_X Z \geq 2$ entonces Z no contiene ningún punto de codimensión 1, luego el epimorfismo entre los grupos de divisores es un isomorfismo y el inducido entre los grupos de clases también.

Si Z es irreducible y de codimensión 1, entonces contiene un único punto de codimensión 1, a saber, ζ. Si un divisor D cumple que $D|_U = (f)$, para una cierta $f \in K(X)$, esto significa que $(Df^{-1})|_U = 1$, luego $Df^{-1} = Z^n$, para cierto $n \in \mathbb{Z}$, luego $[D] = [Z]^n$. ■

Ejemplo 1 Sea Y una curva irreducible de grado d en P_k^2. Entonces

$$\mathrm{Cl}(\mathrm{P}_k^2 \setminus Y) = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}.$$

Demostración: Llamemos $U = \mathrm{P}_k^2 \setminus Y$, que es un esquema noetheriano regular, luego normal. Tenemos una sucesión exacta

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Cl}(U) \longrightarrow 0,$$

donde el primer homomorfismo cumple $1 \mapsto d$ (pues hemos sustituido $\mathrm{Cl}(\mathrm{P}_k^2)$ por $\mathbb{Z}$ a través del isomorfismo dado por el grado). ■

Ejemplo 2 Consideremos el cono afín $X = \mathrm{Esp}\, A$, donde

$$A = k[X, Y, Z]/(XY - Z^2).$$

Observemos que el automorfismo de $k[X, Y, Z]$ dado por

$$\begin{aligned} X &= Z' + Y' \\ Y &= Z' - Y' \\ Z &= X' \end{aligned}$$

induce un isomorfismo entre X y el cono del ejemplo de la página 254, luego X es un conjunto algebraico normal.

Consideremos una recta W contenida en X, por ejemplo $W = V_X(y, z)$. (Podríamos tomar cualquier otra, pero precisamente hemos hecho el cambio de coordenadas respecto del ejemplo de la página 254 para simplificar la expresión de la recta.)

El punto genérico de W es el ideal $\mathfrak{p} = (y, z) \in X$. Observemos que también $W = V_X(y)$, pues en A se cumple que $z^2 = xy$, luego z está en todo ideal primo que contenga a y. (En otras palabras, $\operatorname{rad}(y) = \mathfrak{p}$.) Así pues, si llamamos $U = X \setminus W = D(y)$, tenemos que $U = \operatorname{Esp} A_y$. Ahora bien, el homomorfismo

$$k[X, Y, Z] \longrightarrow k[Y, Z]_Y$$

dado por $X \mapsto Z^2/Y$ tiene a $XY - Z^2$ en su núcleo, luego induce un homomorfismo $A \longrightarrow k[Y, Z]_Y$, que a su vez induce un homomorfismo $A_y \longrightarrow k[Y, Z]_Y$. Es fácil construir su inverso, luego se trata se un isomorfismo. Es claro que $k[Y, Z]_Y$ es un dominio de factorización única y el teorema 8.15 nos da que $\mathrm{Cl}(U) = 0$.

Por consiguiente, la sucesión exacta del teorema anterior se reduce a que el homomorfismo $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Cl}(X)$ dado por $1 \mapsto [\mathfrak{p}]$ es un epimorfismo. Vamos a probar que su núcleo es $2\mathbb{Z}$, con lo que concluiremos que

$$\mathrm{Cl}(X) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

En primer lugar observamos que $(y) = \mathfrak{p}^2$. En efecto, para calcular $v_{\mathfrak{p}}(y)$ consideramos el anillo $A_{\mathfrak{p}}$, en el cual podemos expresar $y = z^2/x$, luego tenemos que $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} = (z)$, luego $v_{\mathfrak{p}}(z) = 1$ y $v_{\mathfrak{p}}(y) = 2$. Por otra parte, si $\mathfrak{q}$ es otro primo de altura 1, ha de ser $y \notin \mathfrak{q}$, o de lo contrario $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$ y tendría que darse la igualdad. Por consiguiente y es una unidad de $A_{\mathfrak{q}}$ y $v_{\mathfrak{q}}(y) = 0$.

En definitiva, $\mathfrak{p}^2$ es un divisor principal, luego $[\mathfrak{p}^2] = 1$ y 2 está en el núcleo del epimorfismo. Ahora basta probar que $\mathfrak{p}$ no es un divisor principal. Por los razonamientos previos al teorema 8.15 esto equivale a que $\mathfrak{p}$ no sea principal como ideal de A. Para ello nos apoyaremos en la singularidad del cono en el origen. Concretamente, sea $\mathfrak{m} = (x, y, z) \in X$. El espacio cotangente $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ tiene dimensión 3 sobre $k \cong A/\mathfrak{m}$, pues las clases $[x]$, $[y]$, $[z]$ son linealmente independientes:

Si a, b, $c \in k$ cumplen que $ax + by + cz \in \mathfrak{m}^2$, puesto que

$$(XY - Z^2) \subset (X, Y, Z)^2,$$

tenemos que $aX + bY + cZ \in (X, Y, Z)^2$, lo que sólo es posible si $a = b = c = 0$.

Si $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}$ fuera principal, es decir, si estuviera generado como A-módulo por un único elemento, entonces su imagen en $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ estaría generada sobre k por un único elemento, es decir, tendría dimensión 1 (o 0), pero tiene dimensión 2, ya que contiene a $[y]$, $[z]$. ■

Vamos a estudiar ahora $X = \mathrm{P}_k^n$, donde k es un cuerpo. Los divisores primos de X son los ideales primos homogéneos $\mathfrak{p}$ de $k[X_0, \ldots, X_n]$ tales que el cociente

$B = k[X_0, \ldots, X_n]/\mathfrak{p}$ cumple $\dim \operatorname{Proy}(B) = n - 1$. Por el teorema 3.26, esto equivale a que $\dim B = n$ y por [3.81] esto equivale a que $\mathfrak{p}$ sea principal. Obviamente, un generador de un primo homogéneo ha de ser una forma irreducible. Concluimos que los divisores primos de X se corresponden con las hipersuperficies irreducibles en X, es decir, con los conjuntos de la forma $V(F)$, donde $F \in k[X_0, \ldots, X_n]$ es un polinomio homogéneo irreducible.

La aplicación que a cada uno de estos ideales primos le asigna su grado se extiende a un epimorfismo de grupos $\operatorname{grad} : \operatorname{Div}(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$.

Sea ahora $f \in K(X)^*$ una función racional no nula (un cociente de polinomios homogéneos no nulos del mismo grado), que podemos factorizar como

$$f = \prod_i \pi_i^{n_i},$$

donde los π_i son un polinomios homogéneos[1] irreducibles primos entre sí dos a dos y $n_i \in \mathbb{Z}$. El hecho de que f tenga grado 0 se traduce en que

$$\sum_i n_i \operatorname{grad} \pi_i = 0.$$

Sea $\mathfrak{p}_i = (\pi_i) \in X$, que es un divisor primo. Vamos a probar que

$$(f) = \prod_i \mathfrak{p}_i^{n_i}.$$

Obervemos que esto implica en particular que $\operatorname{grad}(f) = \sum\limits_i n_i \operatorname{grad} \mathfrak{p}_i = 0$.

Sea $P \in X$ un divisor primo, digamos que $P = (G)$. Fijemos un polinomio homogéneo H del mismo grado que G pero que sea primo con G. Entonces $v_P(G/H) = 1$, lo que implica que G/H genera el ideal maximal de $\mathcal{O}_{X,P}$. Por consiguiente, podemos expresar $f = (G/H)^r L$, donde $L \in K(X)$ es una unidad de $\mathcal{O}_{X,P}$, es decir, una función racional tal que G no divide ni a su numerador ni a su denominador, y $r = n_i$ si $P = \mathfrak{p}_i$ para algún i o $r = 0$ en caso contrario. Esto implica que $v_P(f) = r$, luego tenemos la igualdad buscada.

Puesto que los divisores principales tienen grado 0, el grado induce un epimorfismo de grupos

$$\operatorname{grad} : \operatorname{Cl}(X) \longrightarrow \mathbb{Z}.$$

Vamos a probar que se trata de un isomorfismo, es decir, que los divisores principales de P_k^n son exactamente los divisores de grado 0. Incluimos esto y lo que ya hemos probado en el enunciado del teorema siguiente:

Teorema 8.18 *Sea k un cuerpo y $X = \mathrm{P}_k^n$. Entonces los puntos de codimensión 1 son los puntos genéricos de las hipersuperficies irreducibles y el grado* $\operatorname{grad} : \operatorname{Div}(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$ *induce un isomorfismo* $\operatorname{Cl}(X) \cong \mathbb{Z}$.

[1] Notemos que si un producto de dos polinomios es homogéneo, es porque ambos factores lo son. En efecto, si $F = F_r + F_{r+1} + \cdots + F_m$ y $G = G_s + G_{s+1} + \cdots + G_n$ son las descomposiciones en formas de los factores, el producto tiene grado $m + n$, pero contiene la forma $F_r G_s$ de grado $r + s$. Si es homogéneo, entonces $m = r$ y $n = s$.

Demostración: Sólo falta probar que los divisores de grado 0 son principales. Sea

$$Z = \sum_i P_i^{n_i}$$

un divisor de grado 0. Entonces $P_i = V(F_i)$, donde F_i es un polinomio homogéneo irreducible. Sea

$$f = \prod_i F_i^{n_i}.$$

El hecho de que $\operatorname{grad} Z = 0$ implica que f tiene grado 0 como función racional, es decir, que $f \in K(X)$. Hemos visto antes que $(f) = Z$, luego Z es principal. ■

Más en general:

Teorema 8.19 *Si $X = \mathrm{P}_k^{n_1} \times_k \cdots \times_k \mathrm{P}_k^{n_m}$, donde k es un cuerpo, entonces $\mathrm{Cl}(X) \cong \mathbb{Z}^m$.*

Demostración: Fijemos en $\mathrm{P}_k^{n_i} = \operatorname{Proy}(k[X_{i,0}, \ldots, X_{i,n_i}])$ el hiperplano $H_i = V(X_{i,0})$, de modo que $\mathrm{P}_k^{n_i} \setminus H_i \cong A_k^{n_i}$. Llamemos

$$W_i = p_i^{-1}[H_i] = \mathrm{P}_k^{n_1} \times_k \cdots \times_k H_i \times_k \cdots \times_k \mathrm{P}_k^{n_m},$$

que es un divisor primo de X, y sea ζ_i su punto genérico. Sea

$$U = A_k^{n_1} \times_k \cdots \times_k A_k^{n_m} \cong A_k^n,$$

donde $n = n_1 + \cdots + n_m$. De este modo

$$X \setminus U = W_1 \cup \cdots \cup W_m.$$

(Incidentalmente observamos que, cambiando la elección de los hiperplanos H_i, podemos cubrir X por un número finito de abiertos isomorfos a U, que obviamente son densos, íntegros, noetherianos y regulares, luego X es un esquema íntegro noetheriano y regular.)

Si $Z \subset X \setminus U$ es un cerrado irreducible de codimensión 1 en X, entonces existe un i tal que $Z \subset W_i$ y, como ambos tienen la misma codimensión, $Z = W_i$. Esto significa que U contiene todos los divisores primos de X excepto a $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$.

Si $Z \in \operatorname{Div}(X)$, entonces $Z|_U$ es principal por el teorema 8.15, luego existe $f \in K(X)^*$ tal que $Z|_U = (f)$, luego $[Z] \in \langle [\zeta_1], \ldots, [\zeta_m] \rangle$. Basta probar que las clases $[\zeta_i]$ son linealmente independientes sobre $\mathbb{Z}$. Ahora bien, si un divisor $Z = \zeta_1^{r_1} \cdots \zeta_m^{r_m}$ es principal, con $r_i \in \mathbb{Z}$, digamos $Z = (f)$, con $f \in K(X)^*$, entonces $(f|_U) = Z|_U = 0$. Observemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_X(U) &= k[X_{1,1}, \ldots, X_{1,n_1}] \otimes_k \cdots \otimes_k k[X_{m,1}, \ldots, X_{m,n_m}] \\ &\cong k[X_{1,1}, \ldots, X_{1,n_1}, \ldots, X_{m,1}, \ldots, X_{m,n_m}], \end{aligned}$$

luego podemos considerar que

$$f|_U \in k(X_{1,1}, \ldots, X_{1,n_1}, \ldots, X_{m,1}, \ldots, X_{m,n_m}).$$

Según el teorema 8.15 y las observaciones previas, los divisores primos de U son los ideales primos $\mathfrak{p}$ de $\mathcal{O}_X(U)$ de altura 1, que se corresponden con los ideales generados por polinomios irreducibles. Además $v_{\mathfrak{p}}(f|_U)$ no es sino la multiplicidad de $\mathfrak{p}$ en la descomposición de $f|_U$ en factores primos. El hecho de que todas estas multiplicidades sean nulas se traduce en que $f|_U$ es una unidad de $\mathcal{O}_X(U)$, es decir, en que $f|_U \in k^*$, pero entonces $f \in k^* \subset k(X)^*$, luego f es una unidad en cualquier anillo $\mathcal{O}_{X,P}$, para todo divisor primo P de X, luego $Z = (f) = 1$ en $\mathrm{Div}(X)$, luego $r_i = 0$ para todo i. ■

Nota Siguiendo con los razonamientos de la demostración del teorema anterior, observemos que cada función racional $f \in K(X)$ está determinada por su restricción a $U = A_k^n$, y sabemos que el divisor $(f)|_U$ se corresponde con la descomposición de f en factores primos, considerada como cociente de polinomios en las variables X_{ij}, para $i = 1, \ldots, m$ y $j = 1, \ldots, m_i$. Falta calcular las multiplicidades $v_{\zeta_i}(f)$. Para ello basta cambiar la elección del hiperplano H_i. Por ejemplo, si tomamos $H_i' = V(X_{in_i})$ y definimos acordemente W_i' y U', tenemos que $v_{\zeta_i}(f) = v_{X_{i0}}(f|_{U'})$. El isomorfismo $\mathcal{K}(U) \cong \mathcal{K}(U')$ dado por la extensión a X seguida de la restricción a U' está determinado por su acción sobre las intederminadas. Para $j = 1, \ldots, n_i - 1$, tenemos que

$$X_{ij} \mapsto \frac{X_{ij}}{X_{i0}} \mapsto \frac{X_{ij}}{X_{i0}},$$

mientras que

$$X_{in_i} \mapsto \frac{X_{in_i}}{X_{i0}} \mapsto \frac{1}{X_{i0}}.$$

Es fácil ver que si a una fracción algebraica le hacemos estas transformaciones, entonces el grado en X_{i0} de la fracción resultante será

$$v_{\zeta_i}(f) = \text{grado en } X_{i1}, \ldots, X_{in_i} \text{ del denominador de } f|_U$$

$$-\text{grado en } X_{i1}, \ldots, X_{in_i} \text{ del numerador de } f|_U.$$

Más concisamente: $v_{\zeta_i}(f) = -\operatorname{grad}_i(f|_U)$. ■

8.3 Divisores de Cartier

Introducimos ahora otra noción de divisor válida para esquemas no necesariamente normales. Los divisores de Cartier coincidirán con los de Weil sobre esquemas íntegros regulares. Veremos que muchos conceptos relacionados con divisores se definen de forma natural sobre divisores de Cartier y no sobre divisores de Weil, por lo que la posibilidad de expresar los divisores de Weil como divisores de Cartier hace que éstos sean una herramienta valiosa incluso en el caso de los esquemas íntegros regulares.

Definición 8.20 Si X es un esquema localmente noetheriano, definimos el grupo de los *divisores de Cartier* como el grupo

$$\mathrm{Div}_c(X) = (\mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*)(X)$$

(donde el asterisco denota los haces de los grupos de unidades).

Veamos qué son explícitamente los divisores de Cartier. En principio, por la definición de compleción de un prehaz, un divisor de Cartier D es una aplicación que a cada punto $P \in X$ le asigna un elemento $D_P \in (\mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*)_P$, de forma que existe un cubrimiento abierto $\{U_i\}_i$ de X (que podemos suponer formado por abiertos afines noetherianos) y elementos $[f_i] \in \mathcal{K}^*(U_i)/\mathcal{O}_X^*(U_i)$, de modo que si $P \in U_i$ entonces $D_P = [f_i]_P$. En particular, D está determinado por un conjunto de pares $\{(U_i, f_i)_i\}$, donde $\{U_i\}_i$ es un cubrimiento afín de X y $f_i \in \mathcal{K}_X^*(U_i)$.

Para que un conjunto de pares de esta forma determine un divisor de Cartier es necesario (y suficiente) que para todo par de índices i, j y todo $P \in U_i \cap U_j$ se cumpla que $[f_i]_P = [f_j]_P$. A su vez, esto equivale a que $U_i \cap U_j$ puede cubrirse por abiertos afines U tales que $[f_i]|_U = [f_j]|_U$ o, equivalentemente, tales que $f_i|_U/f_j|_U \in \mathcal{O}_X(U)^*$. Como $\mathcal{O}_X$ es un haz, esto implica que

$$f_i|_{U_i \cap U_j}/f_j|_{U_i \cap U_j} \in \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j),$$

e intercambiando i por j vemos que, de hecho,

$$f_i|_{U_i \cap U_j}/f_j|_{U_i \cap U_j} \in \mathcal{O}_X^*(U_i \cap U_j).$$

En resumen:

Un divisor de Cartier en un esquema X está determinado por un sistema de pares $\{(U_i, f_i)\}_i$ tales que $\{U_i\}_i$ es un cubrimiento por abiertos de X (que podemos tomar afines y noetherianos) y $f_i \in \mathcal{K}^*(U_i)$, de modo que, para todo par de índices i, j, se cumple que $f_i|_{U_i \cap U_j}/f_j|_{U_i \cap U_j} \in \mathcal{O}_X^*(U_i \cap U_j)$.

Es fácil ver que dos de estos sistemas $\{(U_i, f_i)\}_i$ y $\{(V_j, g_j)\}_j$ determinan el mismo divisor si y sólo si para todo par de índices i, j, se cumple que $f_i|_{U_i \cap V_j}/g_j|_{U_i \cap V_j} \in \mathcal{O}_X^*(U_i \cap V_j)$.

Si tenemos divisores D_1 y D_2 determinados, respectivamente, por los sistemas $\{(U_i, f_i)\}_i$ y $\{(V_j, f_j)\}_j$, entonces $D_1 D_2$ está determinado por el sistema $\{(U_i \cap U_j, f_i|_{U_i \cap U_j} g_j|_{U_i \cap U_j})\}_{i,j}$.

Tenemos un homomorfismo natural

$$\mathcal{K}_X^*(X) \longrightarrow (\mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*)(X).$$

Explícitamente, a cada $f \in \mathcal{K}_X^*(X)$ le asigna el divisor (f) dado por $\{(X, f)\}$. Los divisores de la forma (f) se llaman *principales.* Llamaremos *grupo de clases de Cartier* al cociente $\mathrm{Cl}_c(X)$ de $\mathrm{Div}_c(X)$ sobre el subgrupo de los divisores principales.

Diremos que un divisor $D \in \operatorname{Div}_c(X)$ es *entero* si admite una representación $\{(U_i, f_i)\}_i$ tal que $f_i \in \mathcal{O}_X(U_i) \cap \mathcal{K}_X^*(U_i)$.

Es claro que el producto de divisores enteros es entero, así como que el único divisor que cumple que D y D^{-1} son ambos enteros es $D = 1$. Esto permite definir la relación de orden parcial $D_1 \leq D_2$ si y sólo si D_2/D_1 es entero. En términos de esta relación, los divisores enteros son los que cumplen $D \geq 1$.

Vamos a comparar los divisores de Cartier con los divisores de Weil. Para ello suponemos que X es un esquema noetheriano normal. Si D es un divisor de Cartier determinado por $\{(U_i, f_i)\}_i$, entonces podemos considerar que $f_i \in K(X)^*$. Además, si $P \in X$ es un divisor primo y $P \in U_i \cap U_j$, entonces $f_i/f_j \in \mathcal{O}_X(U_i \cap U_j) \subset \mathcal{O}_{X,P}$, luego $v_P(f_i/f_j) = 0$. Equivalentemente, tenemos que $v_P(f_i) = v_P(f_j)$. Más aún, es claro que este valor no depende de la representación elegida para el divisor D, luego podemos representarlo por $v_P(D)$.

Observemos ahora que el conjunto de primos $P \in U_i$ tales que $v_P(D) \neq 0$ es el conjunto de primos de U_i que dividen al divisor de Weil principal (f_i), luego son un número finito. Como X es noetheriano, podemos extraer un subcubrimiento finito del cubrimiento $\{U_i\}_i$, y concluimos que $v_P(D) = 0$ para todo primo $P \in X$ salvo a lo sumo en un número finito de casos. Esto nos permite definir el divisor de Weil

$$[D] = \prod_P P^{v_P(D)}.$$

Es inmediato que esto define un homomorfismo de grupos

$$\operatorname{Div}_c(X) \longrightarrow \operatorname{Div}(X).$$

De hecho se trata de un monomorfismo, pues si $D \in \operatorname{Div}_c(X)$ cumple que $v_P(D) = 0$ para todo primo $P \in X$, entonces $D = 1$. En efecto, si D viene definido por $\{(U_i, f_i)\}_i$, tenemos que $v_P(f_i) = 0$ para todo punto $P \in U_i$ de codimensión 1, luego $f_i \in \mathcal{O}_X(U_i)^*$, luego la clase de f_i en $\mathcal{K}_X^*(U_i)/\mathcal{O}_X^*(U_i)$ es el neutro, y $D = 1$.

Es evidente que este monomorfismo transforma divisores principales en divisores principales, luego induce un monomorfismo

$$\operatorname{Cl}_c(X) \longrightarrow \operatorname{Cl}(X).$$

Una observación clara es que un divisor D cumple $D \geq 1$ si y sólo si $[D] \geq 1$, de donde, más en general, $D_1 \leq D_2$ si y sólo si $[D_1] \leq [D_2]$.

El teorema siguiente recoge lo que hemos demostrado:

Teorema 8.21 *Sea X un esquema noetheriano normal. Para cada divisor $D \in \operatorname{Div}_c(X)$ definido por $\{(U_i, f_i)\}_i$ y cada divisor primo $P \in U_i$, definimos $v_P(D) = v_P(f_i)$. Esta definición no depende de i ni de la representación de D, y la aplicación $\operatorname{Div}_c(X) \longrightarrow \operatorname{Div}(X)$ dada por*

$$D \mapsto [D] = \prod_P P^{v_P(D)}$$

es un monomorfismo que induce a su vez un monomorfismo $\mathrm{Cl}_c(X) \longrightarrow \mathrm{Cl}(X)$. *Si* X *es regular, el segundo monomorfismo es, de hecho, un isomorfismo.*

Demostración: Sólo falta probar la última afirmación. Suponemos que X es regular. (En realidad sólo vamos a necesitar que los anillos locales $\mathcal{O}_{X,P}$ son dominios de factorización única.) Tomemos un divisor de Weil $W \in \mathrm{Div}(X)$ y un punto arbitrario $P \in X$.

Los divisores primos de $\mathrm{Esp}\,\mathcal{O}_{X,P}$ se corresponden biunívocamente con los divisores primos de X que pasan por P, luego podemos definir la localización $W_P \in \mathrm{Div}(\mathrm{Esp}\,\mathcal{O}_{X,P})$ sin más que eliminar de W los divisores primos que no pasan por P.

Como $\mathcal{O}_{X,P}$ es un dominio de factorización única, el teorema 8.15 nos da que W_P es principal, digamos $W_P = (f_P)$, para cierta $f_P \in K(X)$. Podemos considerar el divisor $(f_P) \in \mathrm{Div}(X)$, y es fácil ver que W y (f_P) tienen las mismas multiplicidades sobre los primos que pasan por P. Equivalentemente, los primos en los que difieren ambos divisores (vistos como subconjuntos cerrados de X) son un número finito y no contienen a P, luego si llamamos U_P al complementario de su unión, tenemos un entorno abierto de P tal que $W|_{U_P} = (f_P)|_{U_P}$.

Con esto tenemos definido $\{(U_i, f_i)\}_i$ de modo que $\{U_i\}_i$ es un cubrimiento abierto de X y $f_i|_{U_i} = W|_{U_i}$ para todo índice i. Por consiguiente, si $P \in U_i \cap U_j$ es un divisor primo, se cumple que $v_P(f_i) = v_P(f_j) = v_P(W)$, por lo que $v_P(f_i/f_j) = 0$, lo que prueba que $f_i/f_j \in \mathcal{O}_X^*(U_i \cap U_j)$.

Por consiguiente, $\{(U_i, f_i)\}_i$ define un divisor de Cartier $D \in \mathrm{Div}_c(X)$ tal que $v_P(D) = v_P(W)$ para todo divisor primo P de X. Equivalentemente, $[D] = W$.

■

Nota Si X es un esquema noetheriano normal, un divisor $Z \in \mathrm{Div}(X)$ es *localmente principal* si todo punto de X tiene un entorno abierto U tal que $Z|_U$ es principal. Es fácil ver que los divisores localmente principales forman un subgrupo de $\mathrm{Div}(X)$ que contiene a los divisores principales, luego podemos considerar el cociente $\mathrm{Cl}_{lp}(X)$. La demostración del teorema anterior puede descomponerse en dos partes: por una parte, $\mathrm{Cl}_c(X) \cong \mathrm{Cl}_{lp}(X)$ y, por otra parte, si X es regular entonces todos los divisores de Weil son localmente principales y, por consiguiente, $\mathrm{Cl}_{lp}(X) = \mathrm{Cl}(X)$. ■

Ejemplo En el cono X del ejemplo 2 de la página 305 hemos demostrado que $\mathrm{Cl}(X) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, y también hemos visto que si W es la recta $V_X(y, z)$ (o cualquier otra, pues es fácil definir un automorfismo de X que transforme una recta en otra), entonces el divisor W no es principal. De hecho, lo que hemos probado es que si $\mathfrak{m} = V(x, y, z)$ es el vértice del cono y $\mathfrak{p}$ es el ideal primo correspondiente a W, entonces $\mathfrak{p}_\mathfrak{m}$ no es principal en $\mathcal{O}_{X,\mathfrak{m}}$, lo que no sólo implica que W no es principal, sino que no lo es su restricción a cualquier entorno de $\mathfrak{m}$. Así pues, el divisor W no es localmente principal. Concluimos que $\mathrm{Cl}_{lp}(X) \neq \mathrm{Cl}(X)$, lo que sólo puede ser si $\mathrm{Cl}_{lp}(X) = 1$. Equivalentemente, $\mathrm{Cl}_c(X) = 1$. ■

A continuación vamos a probar que es posible asignar un divisor de Weil a cada divisor de Cartier sobre un esquema que no sea necesariamente normal.

Más que la generalización a esquemas no necesariamente normales, el interés de este hecho es que nos proporcionará caracterizaciones últiles del soporte de un divisor y de los homomorfismos $v_P : \mathrm{Div}(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$. Empezamos definiendo el soporte de un divisor de Cartier:

Definición 8.22 Sea X un esquema localmente noetheriano y $D \in \mathrm{Div}_c(X)$. Definimos el *soporte* de D como el conjunto

$$\mathrm{sop}\, D = \{P \in X \mid D_P \neq 1\}.$$

Si D viene representado por $\{(U_i, f_i)\}$ y $P \in U_i$, entonces D_P es la clase de f_i en $\mathcal{K}^*_{X,P}/\mathcal{O}^*_{X,P}$, luego la condición $D_P \neq 1$ equivale a que $f_{i,P} \notin \mathcal{O}^*_{X,P}$, es decir, a que $f_{i,P}$ no sea una unidad de $\mathcal{O}_{X,P}$. Esto puede deberse bien a que $f_{i,P} \notin \mathcal{O}_{X,P}$ o bien a que $f_{i,P} \in \mathfrak{m}_P$.

Observamos que $\mathrm{sop}\, D$ es un subconjunto cerrado de X, pues si $P \notin \mathrm{sop}\, D$, entonces existe un i tal que $P \in U_i$ y $f_{i,P} \in \mathcal{O}^*_{X,P}$, luego existe un abierto $P \in V \subset U_i$ tal que $f_i|_V \in \mathcal{O}_X(V)^*$, luego $f_{i,Q} \in \mathcal{O}^*_{X,Q}$ para todo $Q \in V$, luego $P \in V \subset X \setminus \mathrm{sop}\, D$. Podemos decir más:

Teorema 8.23 *Si X es un esquema localmente noetheriano y $D \in \mathrm{Div}_c X$, entonces $X \setminus \mathrm{sop}\, D$ es un abierto fuertemente denso en X.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\{(U_i, f_i)\}$ una representación de D, donde los abiertos U_i son afines y noetherianos. Si $P \in X$, tomamos un i tal que $P \in U_i$. Puesto que $\mathcal{K}^*_{X,P} = F(\mathcal{O}_{X,P})^*$, podemos representar $f_{iP} = u_{iP}/v_{iP}$, para ciertos u_{iP}, $v_{iP} \in \mathcal{O}_{X,P}$ regulares en $\mathcal{O}_{X,P}$. En la prueba de 8.7 hemos visto que existe un abierto afín $P \in V_P \subset U_i$ tal que u_i, $v_i \in \mathcal{O}_X(V_P)$ son regulares. Entonces $W_P = D_{V_P}(u_i v_i)$ es un abierto fuertemente denso en V_P tal que $W_P \cap \mathrm{sop}\, D = \varnothing$.

Como los abiertos V_P cubren X, es claro que la unión de los abiertos W_P es un abierto W fuertemente denso en X y disjunto de $\mathrm{sop}\, D$. ■

Veamos que este concepto de soporte generaliza al correspondiente a los divisores de Weil:

Teorema 8.24 *Sea X un esquema noetheriano y normal, sea $D \in \mathrm{Div}_c X$ y sea $[D] \in \mathrm{Div}\, X$ su divisor de Weil asociado. Entonces $\mathrm{sop}\, D = \mathrm{sop}\, [D]$.*

DEMOSTRACIÓN: Fijemos un punto $P \in X$ y un i tal que $P \in U_i$. Tenemos que $f_i \in K(X)^*$ y podemos considerar los soportes $\mathrm{sop}(f_i) = \mathrm{sop}(f_i)_0 \cup \mathrm{sop}(f_i)_\infty$ en el sentido definido para divisores de Weil. Vamos a probar que $P \in \mathrm{sop}\, D$ si y sólo si $P \in \mathrm{sop}(f_i)$.

En efecto, si $P \in \mathrm{sop}\, D$, ello puede deberse a que $f_{i,P} \notin \mathcal{O}_{X,P}$, en cuyo caso $P \in \mathrm{sop}(f_i)_\infty$ (en caso contrario $X \setminus \mathrm{sop}(f_i)_\infty$ sería un entorno de P donde f_i sería regular), o bien a que $f_{i,P} \in \mathfrak{m}_P$, lo que implica que $P \in \mathrm{sop}(f_i)_0$. En cualquier caso $P \in \mathrm{sop}\, f_i$. Igualmente, si $P \notin \mathrm{sop}\, D$, entonces $f_{i,P} \in \mathcal{O}_{X,P} \setminus \mathfrak{m}_P$, lo que implica que $P \notin \mathrm{sop}(f_i)_\infty \cup \mathrm{sop}(f_i)_0$.

Así pues, si $P \in \operatorname{sop} D$ existe un divisor primo Q de X tal que $v_Q(f_i) \neq 0$ y $P \in \overline{\{Q\}}$. Esto implica que $Q \in U_i$, luego Q es uno de los divisores primos de $[D]$ y así $P \in \operatorname{sop}[D]$.

Recíprocamente, si $P \in \operatorname{sop}[D]$, entonces existe un divisor primo Q de $[D]$ tal que $P \in \overline{\{Q\}}$, luego $Q \in U_i$, luego $v_Q(f_i) = v_Q([D]) \neq 0$, por lo que $\overline{\{Q\}} \subset \operatorname{sop}(f_i)$ y así $P \in \operatorname{sop} D$. ■

En particular, el soporte de un divisor de Cartier sobre un esquema noetheriano normal es un cerrado de codimensión 1. Esto no es cierto en general, pero luego veremos que sí lo es para divisores enteros (teorema 8.29).

Nos ocupamos ahora de la generalización de los homomorfismos v_P:

Teorema 8.25 *Sea A un anillo noetheriano local de dimensión 1 y sea $f \in A$ un elemento regular (es decir, que no es un divisor de cero). Entonces el cociente A/fA tiene longitud finita y, si $g \in A$ es también regular, entonces*

$$l_A(A/fgA) = l_A(A/fA) + l_A(A/gA).$$

Demostración: Notemos que A/fA tiene longitud finita como A/fA-módulo si y sólo si tiene longitud finita como A-módulo, pues los submódulos para ambas estructuras son los mismos. Según el teorema [4.38] basta probar que $\dim A/fA = 0$. En caso contrario, existirían ideales primos $fA \subset \mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{q} \subset A$ y, como A tiene dimensión 1, necesariamente $\mathfrak{p}$ sería un primo minimal de A, lo que contradice a [3.43]. La segunda parte del teorema se sigue de [4.37] aplicado a

$$0 \subsetneq fA/fgA \subset A/fgA.$$

Concretamente, obtenemos que

$$l_A(A/fgA) = l_A(A/fA) + l_A(fA/fgA),$$

y es fácil ver que $fA/fgA \cong A/gA$. ■

En las condiciones del teorema anterior, tenemos una aplicación multiplicativa del conjunto de elementos regulares de A en $\mathbb{N}$, que se extiende a un homomorfismo de grupos $F(A)^* \longrightarrow \mathbb{Z}$ (donde $F(A)^*$ es el grupo de las unidades del anillo de cocientes de A, formado por fracciones f/g, con f, $g \in A$ regulares. Si $f \in A$ es una unidad, entonces $A/fA = 0$, por lo que f está en el núcleo del homomorfismo. Consecuentemente, tenemos un homomorfismo $F(A)^*/A^* \longrightarrow \mathbb{Z}$.

Definición 8.26 Si X es un esquema localmente noetheriano, $D \in \operatorname{Div}_c(X)$ y $P \in X$ es un divisor primo, entonces

$$D_P \in (\mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*)_P = F(\mathcal{O}_{X,P})^*/\mathcal{O}_{X,P}^*,$$

y $\mathcal{O}_{X,P}$ es un anillo noetheriano local de dimensión 1. Según acabamos de ver, tenemos definido el homomorfismo $(\mathcal{K}_X^*/\mathcal{O}_X^*)_P \longrightarrow \mathbb{Z}$ que a su vez nos da un homomorfismo $v_P : \operatorname{Div}_c(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$ (que toma valores naturales sobre los divisores enteros).

Supongamos que X es un esquema noetheriano normal, en cuyo caso $\mathcal{O}_{X,P}$ es un anillo de valoración discreta. Si $\pi \in \mathcal{O}_{X,P}$ es primo, entonces (π) es un ideal maximal, luego $\mathcal{O}_{X,P}/(\pi)$ es un $\mathcal{O}_{X,P}$-módulo simple, lo que implica que $l_{\mathcal{O}_{X,P}}(\mathcal{O}_{X,P}/(\pi)) = 1$. Un elemento no nulo arbitrario $\alpha \in \mathcal{O}_{X,P}$ es de la forma $\alpha = \epsilon\pi^n$, para un $n \geq 0$ y $\epsilon \in \mathcal{O}_{X,P}^*$. Por la multiplicatividad es claro que

$$l_{\mathcal{O}_{X,P}}(\mathcal{O}_{X,P}/(\alpha)) = n = v_P(\alpha).$$

Vemos, pues, que el homomorfismo $F(\mathcal{O}_{X,P})^* \longrightarrow \mathbb{Z}$ no es sino la valoración $v_P : K(X)^* \longrightarrow \mathbb{Z}$, lo que a su vez implica que el homomorfismo v_P que acabamos de definir coincide con el definido en el teorema 8.21. Equivalentemente, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Div}_c(X) \arrow[r] \arrow[dr, "v_P"'] & \mathrm{Div}(X) \arrow[d, "v_P"] \\
& \mathbb{Z}
\end{tikzcd}$$

donde la flecha horizontal es el homomorfismo entre ambos grupos de divisores definido en dicho teorema.

Volviendo al caso general, si suponemos únicamente que X es un esquema noetheriano, ahora podemos definir un homomorfismo $\mathrm{Div}_c(X) \longrightarrow \mathrm{Div}(X)$ como en el teorema 8.21 (usando la generalización de v_P), pero si X no es normal no podemos definir los divisores principales de Weil, por lo que no tiene sentido hablar de un homomorfismo entre los grupos de clases.

Observemos por último que si $D \in \mathrm{Div}_c X$, el conjunto

$$S = \{P \in X \mid \mathrm{codim}_X P = 1,\ v_P(D) \neq 0\}$$

es localmente finito, pues si $P \in S$, entonces $P \in \mathrm{sop}\, D$ y, por tener codimensión 1, ha de ser un punto cuasigenérico de $\mathrm{sop}\, D$. Es claro entonces que cada abierto afín noetheriano en X sólo puede contener un número finito de divisores primos P tales que $v_P(D) \neq 1$. (y esto implica a su vez que lo mismo es cierto para cualquier abierto afín de X). En particular, si X noetheriano el conjunto S es finito. El teorema 8.24, junto con la correspondencia entre los homomorfismos v_P para divisores de Weil y de Cartier, implica que si X es noetheriano y normal, entonces el conjunto S es precisamente el conjunto de los puntos cuasigenéricos de $\mathrm{sop}\, D$.

Ahora vamos a ver que cada divisor de Cartier determina un haz inversible.

Definición 8.27 Sea X un esquema localmente noetheriano y $D \in \mathrm{Div}_c(X)$ un divisor representado por $\{(U_i, f_i)\}_i$. Para cada abierto $U \subset X$ definimos $\mathcal{O}_X(D)(U)$ como el conjunto de todos los $f \in \mathcal{K}_X(U)$ tales que

$$f|_{U\cap U_i} \in f_i^{-1}|_{U\cap U_i}\mathcal{O}_X(U \cap U_i)$$

para todo índice i.

Claramente $\mathcal{O}_X(D)$ es un subhaz de $\mathcal{K}_X$. Para ver que no depende de la representación de D observamos que si tenemos dos de ellas, $\{(U_i, f_i)\}_i$, $\{(V_j, g_j)\}_j$, podemos obtener otras dos de la forma $\{(U_i \cap V_j, f_i|_{U_i \cap V_j})\}_{i,j}$, $\{(U_i \cap V_j, g_i|_{U_i \cap V_j})\}_{i,j}$, que claramente definen los mismos haces que las dos dadas, luego basta comparar dos representaciones $\{(U_i, f_i)\}_i$ y $\{(U_i, g_i)\}_i$ correspondientes a un mismo cubrimiento abierto de X. En tal caso $f_i g_i^{-1} \in \mathcal{O}_X(U_i)^*$, de donde se sigue a su vez que ambas definen el mismo haz.

También es claro que si $U \subset U_i$, entonces $\mathcal{O}_X(D)(U)$ está formado por todos los $f \in \mathcal{K}_X(U)$ tales que $f|_U \in f_i^{-1}\mathcal{O}_X(U)$ (sin necesidad de tener en cuenta otros índices $j \neq i$). En otras palabras, $\mathcal{O}_X(D)|_{U_i} = f_i^{-1}\mathcal{O}_X|_{U_i}$ es un $\mathcal{O}_X|_{U_i}$-módulo libre de rango 1 y $\mathcal{O}_X(D)$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo localmente libre de rango 1.

Observemos ahora que si D_1, $D_2 \in \mathrm{Div}_c(X)$, se cumple que

$$\mathcal{O}_X(D_1D_2) \cong \mathcal{O}_X(D_1) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(D_2).$$

En efecto, podemos tomar representantes de ambos divisores con un mismo cubrimiento abierto de X, digamos $\{(U_i, f_i)\}_i$ y $\{(U_i, g_i)\}_i$. Entonces D_1D_2 corresponde a $\{(U_i, f_i g_i)\}_i$ y es fácil definir el isomorfismo indicado.

Esto significa que la aplicación $D \mapsto \mathcal{O}_X(D)$ induce un homomorfismo de grupos

$$\mathrm{Div}_c(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X).$$

Más aún, si $f \in \mathcal{K}_X^*(X)$, al divisor principal (f) le corresponde la clase del módulo libre $f^{-1}\mathcal{O}_X \cong \mathcal{O}_X$, que es el elemento neutro del grupo de Picard, luego el homomorfismo anterior induce un homomorfismo

$$\mathrm{Cl}_c(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X).$$

Teorema 8.28 *Sea X un esquema localmente noetheriano. El homomorfismo*

$$\mathrm{Cl}_c(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X)$$

inducido por $D \mapsto \mathcal{O}_X(D)$ es un monomorfismo de grupos cuya imagen la forman las clases de $\mathcal{O}_X$-módulos isomorfos a un subhaz de $\mathcal{K}_X$. Si X es noetheriano y no tiene puntos inmersos (por ejemplo, si es reducido) entonces tenemos un isomorfismo $\mathrm{Cl}_c(X) \cong \mathrm{Pic}(X)$.

Demostración: Para probar la inyectividad suponemos que $\mathcal{O}_X(D) \cong \mathcal{O}_X$ y hemos de probar que D es principal.

Sea $f \in \mathcal{O}_X(D)(X) \subset \mathcal{K}_X(X)$ la función correspondiente a $1 \in \mathcal{O}_X(X)$ a través del isomorfismo $\mathcal{O}_X(D)(X) \cong \mathcal{O}_X(X)$. Para cada abierto $U \subset X$, como $1|_U$ genera $\mathcal{O}_X(U)$, también $f|_U$ genera $\mathcal{O}_X(D)(U)$ (como $\mathcal{O}_X(U)$-módulo).

Si D admite una representación $\{(U_i, f_i)\}_i$, tenemos que $\mathcal{O}_X(D)(U_i)$ está generado tanto por f_i^{-1} como por $f|_{U_i}$, luego ambos se diferencian en una unidad de $\mathcal{O}_X(U_i)$. Esto prueba que $f|_{U_i} \in \mathcal{K}_X(U_i)^*$, lo que a su vez implica que $f \in \mathcal{K}_X^*(X)$. Más aún, f_i y $f^{-1}|_{U_i}$ se diferencian en una unidad, de donde se sigue que $D = (f^{-1})$.

Tomemos ahora un haz inversible $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}_X$, sea $\{U_i\}_i$ un cubrimiento abierto de X tal que cada $\mathcal{L}|_{U_i}$ sea libre, digamos $\mathcal{L}|_{U_i} = f_i \mathcal{O}_X|_{U_i}$, para cierta función racional $f_i \in \mathcal{K}_X(U_i)$. Podemos suponer que los abiertos U_i son noetherianos, con lo que $f_i = a_i/s_i$, para ciertos a_i, $s_i \in \mathcal{O}_X(U_i)$ con s_i regular. Si a_i no fuera también regular, entonces f_i sería un divisor de cero y no sería linealmente independiente en $\mathcal{L}|_{U_i}$. Así pues, $f_i \in \mathcal{K}_X^*(U_i)$. Es claro que $\{(U_i, f_i^{-1})\}_i$ determina un divisor $D \in \mathrm{Div}_c(X)$, así como que $\mathcal{O}_X(D) = \mathcal{L}$.

Supongamos ahora que X es noetheriano y que no tiene puntos inmersos. Por la parte ya probada, lo que hemos de ver es que todo haz inversible $\mathcal{L}$ es isomorfo a un subhaz de $\mathcal{K}_X$. Sean $\xi_1, \ldots, \xi_n$ los puntos cuasigenéricos de X que, por hipótesis, son también sus puntos asociados. Sus clausuras, $W_i = \overline{\{\xi_i\}}$ son las componentes irreducibles de X. Podemos tomar abiertos

$$\xi_i \in U_i \subset W_i \setminus \bigcup_{j \neq i} W_j$$

tales que $\mathcal{L}|_{U_i}$ sea libre. Sea $U = \bigcup\limits_i U_i \subset X$, que es un abierto fuertemente denso. Sea $i : U \longrightarrow X$ la inclusión.

Veamos que si V es un abierto de X, la restricción $\mathcal{L}(V) \longrightarrow \mathcal{L}(V \cap U)$ es inyectiva. En efecto, podemos cubrir V por abiertos V_i donde $\mathcal{L}|_{V_i}$ es libre y basta probar que las restricciones $\mathcal{L}(V_i) \longrightarrow \mathcal{L}(V_i \cap U)$ son inyectivas. Equivalentemente, podemos suponer que $\mathcal{L}|_V$ es libre (de rango 1), pero entonces es isomorfo a $\mathcal{O}_V$ y basta aplicar el teorema 3.19. En otros términos, tenemos un monomorfismo de haces $\mathcal{L} \longrightarrow i_*(\mathcal{L}|_U)$.

Por otra parte, los isomorfismos $\mathcal{L}|_{U_i} \cong \mathcal{O}_{U_i}$ inducen claramente un isomorfismo $\mathcal{L}|_U \cong \mathcal{O}_U$, luego tenemos la siguiente cadena de monomorfismos e isomorfismos de $\mathcal{O}_X$-módulos:

$$\mathcal{L} \longrightarrow i_*(\mathcal{L}|_U) \cong i_*(\mathcal{O}_U) \longrightarrow i_*(\mathcal{K}_U) \cong \mathcal{K}_X,$$

donde el último isomorfismo es una reformulación del teorema 8.8. ■

Si X es un esquema localmente noetheriano y $D \in \mathrm{Div}_c(X)$ es un divisor entero, representado por un sistema $\{(U_i, f_i)\}$, entonces $\mathcal{O}_X(D^{-1})|_{U_i} = f_i \mathcal{O}_X(U_i)$, luego $\mathcal{O}_X(D^{-1})$ es un haz coherente de ideales de $\mathcal{O}_X$. Según el teorema 5.10 determina una inmersión cerrada $i : Y \longrightarrow X$ de modo que $\mathcal{O}_X(D^{-1})$ es el núcleo de $i^{\#}$. Para cada punto $P \in X$, tenemos que f_{iP} es regular en $\mathcal{O}_{X,P}$, luego i es una inmersión regular de codimensión 1.

Por otra parte, es obvio que $D_P = 1$ si y sólo si $P \in U_i$ y f_{iP} es una unidad en $\mathcal{O}_{X,P}$, si y sólo si $\mathcal{O}_{X,P} = \mathcal{O}_X(D^{-1})_P$, si y sólo si $P \notin X$, luego Y no es sino el soporte de D. Teniendo en cuenta el teorema 7.65, hemos probado lo siguiente:

Teorema 8.29 *Si X es un esquema localmente noetheriano y $D \in \mathrm{Div}_c(X)$ es un divisor entero, entonces* $\mathrm{sop}\, D$ *tiene codimensión* 1 *en cada componente irreducible de X que contenga alguno de sus puntos.*

Si X es un esquema íntegro, para todo abierto $U \subset X$ no vacío, podemos identificar $\mathcal{K}_X(U) = K(X)$ y, en particular, $\mathcal{K}^*_X(U) = K(X) \setminus \{0\}$.

Si un divisor D está definido por $\{(U_i, f_i)\}_i$, entonces $D|_U$ está representado por $\{(U_i \cap U, f_i|_{U_i \cap U})\}_i$. Un $f \in K(X)^*$ cumple $f \in \mathcal{O}_X(D)(U)$ si y sólo si $f|_{U \cap U_i} f_i|_{U \cap U_i} \in \mathcal{O}_X(U \cap U_i)$ para todo i, pero esto equivale a que el divisor $(f|_U)D|_U \in \operatorname{Div}_c(U)$ sea entero. En definitiva:

Teorema 8.30 *Sea X un esquema íntegro y $D \in \operatorname{Div}_c(X)$. Entonces, para todo abierto U de X, se cumple que*

$$\mathcal{O}_X(D)(U) = \{f \in K(X)^* \mid (f)|_U D|_U \geq 1\} \cup \{0\}.$$

La ventaja de esta expresión para $\mathcal{O}_X(D)$ es que, si X es un esquema íntegro noetheriano regular, puede calcularse indistintamente en términos de divisores de Cartier o de Weil. Más explícitamente, en tal caso tenemos que

$$\mathcal{O}_X(D)(U) = \{f \in K(X)^* \mid v_P(f) \geq -v_P(D) \text{ para todo primo } P \in U\} \cup \{0\}.$$

Ejemplo Vamos a aplicar el teorema 8.28 al caso en que $X = \mathrm{P}^n_k$, donde k es un cuerpo, y vamos a encontrar un divisor correspondiente al haz $\mathcal{O}_X(1)$.

Sea $U_i = D(X_i)$, de modo que las restricciones $\mathcal{O}_X(1)|_{U_i} = X_i \mathcal{O}_X|_{U_i}$ son libres. Explícitamente, los elementos de $\mathcal{O}_X(1)(U_i)$ son de la forma $X_i F/X_i^r$, donde $F \in k[X_0, \ldots, X_n]$ es un polinomio homogéneo de grado r, y los de $\mathcal{O}_X(U_i)$ son de la forma F/X_i^r. Por otra parte, $K(X)$ es el cuerpo de cocientes de $\mathcal{O}_X(U_i)$, y podemos considerarlo formado por cocientes de polinomios homogéneos del mismo grado.

El primer paso es sumergir $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(1)$ en $\mathcal{K}_X$. Puesto que X tiene un único punto genérico, el argumento empleado en el teorema 8.28 se puede aplicar con $U = U_0$. El monomorfismo $\mathcal{L} \longrightarrow i_*(\mathcal{L}|_U)$ transforma $\mathcal{L}(U_i) = X_i \mathcal{O}_X|_{U_i}$ en $i_*(\mathcal{L}|_U)(U_i) = X_i \mathcal{O}_X|_{U_i \cap U_0}$.

El isomorfismo $\mathcal{L}|_U \cong \mathcal{O}_X|_U$ transforma $X_i = X_i X_0/X_0 \in \mathcal{L}(U_i \cap U_0)$ en $X_i/X_0 \in \mathcal{O}_X(U_i \cap U_0)$, luego $\mathcal{L}(U_i)$ se corresponde con

$$\frac{X_i}{X_0}\, \mathcal{O}_X(U_i \cap U_0) \subset K(X).$$

Por último, el isomorfismo $i_*(\mathcal{K}_U) \cong \mathcal{K}_X$ transforma este módulo en

$$\frac{X_i}{X_0}\, \mathcal{O}_X(U_i) \subset K(X).$$

En definitiva, podemos identificar $\mathcal{L}(U_i) = \frac{X_i}{X_0}\, \mathcal{O}_X(U_i)$. Según el teorema anterior, el divisor asociado a $\mathcal{O}_X(1)$ es el determinado por $\{(U_i, X_0/X_i)\}_i$.

Puesto que X es normal, podemos representarlo también como un divisor de Weil. Para ello, si $i \neq 0$, identificamos $\mathcal{O}_X(U_i) = k[X_0, \ldots, \hat{X}_i, \ldots X_r]$ y $X_0/X_i = X_0$, y observamos que si $\mathfrak{p}$ es un divisor primo de U_i, entonces X_0 es una unidad en $\mathcal{O}_{U_i,\mathfrak{p}}$ salvo si $X_0 \in \mathfrak{p}$. Puesto que (X_0) es un ideal primo de codimensión 1, ha de ser $\mathfrak{p} = (X_0)$, en cuyo caso $v_{\mathfrak{p}}(X_0) = 1$. Si $i = 0$ entonces $X_0/X_0 = 1$ es una unidad en todos los anillos locales.

En definitiva, si llamamos $H = V(X_0) \subset X$, tenemos que H es un divisor primo de X y $\mathcal{O}_X(1)$ se corresponde con $H \in \operatorname{Div}(X)$. Puesto que $\operatorname{grad} H = 1$, el teorema 8.18 implica que $[H]$ genera $\operatorname{Cl}(X)$, luego la clase de isomorfía del haz $\mathcal{O}_X(1)$ genera el grupo $\operatorname{Pic}(X)$.

Esto nos permite concluir que todo haz inversible en P_k^n es isomorfo a $\mathcal{O}_X(m)$, para un único $m \in \mathbb{Z}$. ■

Como aplicación vamos a demostrar el resultado que ya hemos utilizado en la demostración del teorema 5.36:

Teorema 8.31 *Todo automorfismo $f : \mathrm{P}_k^n \longrightarrow \mathrm{P}_k^n$ es de la forma descrita en el teorema* 5.33 *para una cierta base $s_0, \ldots, s_n$ de $\mathcal{O}_{\mathrm{P}_k^n}(1)(\mathrm{P}_k^n) = \langle X_0, \ldots, X_n \rangle_k$.*

DEMOSTRACIÓN: La aplicación $\mathcal{L} \mapsto f^*\mathcal{L}$ es un automorfismo del grupo $\operatorname{Pic}(\mathrm{P}_k^n)$, que está generado por $\mathcal{O}_{\mathrm{P}_k^n}(1)$, luego $f^*\mathcal{O}_{\mathrm{P}_k^n}(1)$ ha de ser uno de los dos generadores de este grupo (isomorfo a $\mathbb{Z}$), que son $\mathcal{O}_{\mathrm{P}_k^n}(\pm 1)$. Ahora bien, la imagen ha de ser un haz muy amplio en P_k^n y $\mathcal{O}_{\mathrm{P}_k^n}(-1)$ no lo es (no tiene un generador global). Concluimos, pues, que $f^*\mathcal{O}_{\mathrm{P}_k^n}(1) = \mathcal{O}_{\mathrm{P}_k^n}(1)$.

Los elementos $f^*X_i \in \mathcal{O}_{\mathrm{P}_k^n}(1)(\mathrm{P}_k^n)$ han de ser linealmente independientes sobre k (por el teorema 5.35), luego la asignación $X_i \mapsto f^*(X_i)$ ha de ser un cambio de base en el espacio de las formas lineales de $k[X_0, \ldots, X_n]$. ■

8.4 Imágenes inversas de divisores

Sea $h : X \longrightarrow Y$ un homomorfismo entre esquemas localmente noetherianos. Es evidente que la correspondencia $\mathcal{L} \mapsto h^*\mathcal{L}$ induce un homomorfismo de grupos

$$h^* : \operatorname{Pic}(Y) \longrightarrow \operatorname{Pic}(X).$$

Por otra parte, a cada divisor $D \in \operatorname{Div}_c(Y)$ le hemos asignado un haz inversible $\mathcal{O}_Y(D)$, por lo que podemos calcular $h^*([\mathcal{O}_Y(D)]) \in \operatorname{Pic}(X)$. Sería interesante dar una definición explícita de un divisor $h^*(D) \in \operatorname{Div}_c(X)$ tal que $h^*(\mathcal{O}_Y(D)) \cong \mathcal{O}_X(h^*(D))$, pues entonces el homomorfismo h^* podría calcularse mediante divisores. Sucede que en general no es posible definir tal divisor $h^*(D)$, pero sí es posible hacerlo si D pertenece a un cierto subgrupo de $\operatorname{Div}_c(Y)$. Para definirlo observamos las siguientes propiedades elementales del soporte de un divisor de Cartier:

$$\operatorname{sop} D^{-1} = \operatorname{sop} D, \qquad \operatorname{sop} D_1 D_2 \subset \operatorname{sop} D_1 \cup \operatorname{sop} D_2, \qquad \operatorname{sop} 1 = \varnothing.$$

Estas propiedades implican que si $E \subset X$ es un conjunto cualquiera, entonces

$$\operatorname{Div}_c(X)_E = \{D \in \operatorname{Div}_c(X) \mid \operatorname{sop} D \cap E = \varnothing\}$$

es un subgrupo de $\operatorname{Div}_c(X)$. El cociente de este subgrupo respecto del subgrupo de divisores principales contenidos en $\operatorname{Div}_c(X)_E$ determina un subgrupo $\operatorname{Cl}_c(X)_E$ del grupo de clases $\operatorname{Cl}_c(X)$.

Volvamos ahora a la situación que habíamos planteado: tenemos un homomorfismo de esquemas localmente noetherianos $h : X \longrightarrow Y$ y llamamos $E \subset Y$ al conjunto de las imágenes por h de los puntos asociados de X. Vamos a demostrar que es posible asignar una antiimagen en $\operatorname{Div}_c(X)$ a los divisores $D \in \operatorname{Div}_c(Y)_E$.

Pongamos que $D \in \operatorname{Div}_c(Y)_E$ está representado por el sistema $\{(U_i, f_i)\}_i$. Entonces $f_i \in \mathcal{K}_Y^*(U_i)$ es una función racional definida en un dominio abierto fuertemente denso $V_i \subset U_i$. Observemos en primer lugar que $U_i \setminus V_i \subset \operatorname{sop} D$, ya que si $P \in U_i \setminus V_i$, entonces $f_{i,P} \notin \mathcal{O}_{Y,P}$. Sea $V_i' = V_i \setminus \operatorname{sop} D$. Es claro entonces que todo punto asociado de $h^{-1}[U_i]$ está, de hecho, en $h^{-1}[V_i']$, pues en caso contrario su imagen estaría en $\operatorname{sop} D$. Esto quiere decir que $h^{-1}[V_i']$ es un abierto fuertemente denso en $h^{-1}[U_i]$.

Podemos considerar entonces la función $g_i = h_{V_i}^{\#}(f_i|_{V_i}) \in \mathcal{O}_X(h^{-1}[V_i])$. Para cada punto $P \in h^{-1}[V_i']$ tenemos que $h(P) \notin \operatorname{sop} D$, luego $g_{i,h(P)} \in \mathcal{O}_{Y,P}^*$, luego $g_{i,P} = h_P^{\#}(f_{i,h(P)}) \in \mathcal{O}_{X,P}^*$. Esto significa que g_i tiene inversa en un entorno de P, y como la inversa es única, las inversas locales determinan una inversa de g_i en $h^{-1}[V_i']$. Esto prueba que $g_i \in \mathcal{K}_X^*(U_i)$.

Veamos ahora que $\{(h^{-1}[U_i], g_i)\}_i$ define un divisor de Cartier en X. Sabemos que, para todo i, j, se cumple que $a_{ij} = f_i f_j^{-1} \in \mathcal{O}_Y(U_i \cap U_j)^*$. Explícitamente, esto significa que si $G \subset U_i \cap U_j$ es la intersección de los dominios de f_i y f_j^{-1}, entonces $f_i f_j^{-1} = a_{ij}|_G$. Sea $b_{ij} = h_{U_i \cap U_j}^{\#}(a_{ij}) \in \mathcal{O}_X(h^{-1}[U_i] \cap h^{-1}[U_j])^*$. Es claro que $V_i' \cap V_j' \subset G$, por lo que $g_i g_j^{-1}|_{h^{-1}[V_i'] \cap h^{-1}[V_j']} = b_{ij}|_{h^{-1}[V_i'] \cap h^{-1}[V_j']}$, lo que a su vez nos lleva a que $g_i g_j^{-1} = b_{ij} \in \mathcal{O}_X(h^{-1}[U_i] \cap h^{-1}[U_j])^*$.

Una comprobación similar muestra que este divisor no depende de la representación de partida para D, por lo que podemos llamarlo $h^*(D) \in \operatorname{Div}_c(X)$. Otras observaciones inmediatas a partir de los razonamientos anteriores son las siguientes:

- Si D es principal, es decir, si está definido por un único par (Y, f), entonces $h^*(D)$ está definido por un único par $(X, h_V^{\#}(f|_V))$, luego es principal.
- Si D es entero, entonces $V_i = U_i$ y $g_i \in \mathcal{O}_X(h^{-1}[U_i])$, luego $h^*(D)$ también es entero.
- Si $P \in h^{-1}[U_i]$ cumple que $h(P)$ no está en el soporte de D, entonces $h(P) \in V_i'$, luego $P \in h^{-1}[V_i']$, y hemos visto que entonces g_i no está en el soporte de $h^*(D)$. Por consiguiente, $\operatorname{sop} h^*(D) \subset h^{-1}[\operatorname{sop} D]$.
- Si D es entero y $P \in h^{-1}[U_i]$ cumple que $h(P)$ está en el soporte de D, eso significa que $f_{i\,h(P)} \in \mathfrak{m}_{h(P)}$, luego $g_{iP} \in \mathfrak{m}_P$, luego P está en el soporte de $h^*(D)$. Por consiguiente $\operatorname{sop} h^*(D) = h^{-1}[\operatorname{sop} D]$.

Teorema 8.32 *Sea $h : X \longrightarrow Y$ un homomorfismo de esquemas localmente noetherianos y sea $E \subset Y$ el conjunto de las imágenes de los puntos asociados de X. Entonces, la aplicación $h^* : \mathrm{Div}_c(Y)_E \longrightarrow \mathrm{Div}_c(X)$ es un homomorfismo de grupos que cumple las propiedades siguientes:*

a) Transforma divisores enteros en divisores enteros.

b) Transforma divisores principales en divisores principales, por lo que induce un homomorfismo $\mathrm{Cl}_c(Y)_E \longrightarrow \mathrm{Cl}_c(X)$.

c) Para cada $D \in \mathrm{Div}_c(Y)_E$, se cumple que $\operatorname{sop} h^*(D) \subset h^{-1}[\operatorname{sop} D]$, y se da la igualdad si D es entero.

d) Para cada $D \in \mathrm{Div}_c(Y)_E$, se cumple que $h^*(\mathcal{O}_Y(D)) \cong \mathcal{O}_X(h^*(D))$.

Demostración: Todas las afirmaciones están ya demostradas o son obvias, excepto la última. Si D viene representado por $\{(U_i, f_i)\}_i$ (donde podemos suponer que los abiertos U_i son afines, el subhaz $\mathcal{O}_Y(D)$ de $\mathcal{K}_Y$ está determinado por el hecho de que $\mathcal{O}_Y(D)|_{U_i} = f_i^{-1}\mathcal{O}_Y|_{U_i}$. Sea $W \subset h^{-1}[U_i]$ un abierto afín. Entonces

$$(h^*\mathcal{O}_Y(D))(W) \cong \mathcal{O}_Y(D)(U_i) \otimes_{\mathcal{O}_Y(U_i)} \mathcal{O}_X(W) \cong f_i^{-1}\mathcal{O}_Y(U_i) \otimes_{\mathcal{O}_Y(U_i)} \mathcal{O}_X(W).$$

Esto significa que $(h^*\mathcal{O}_Y(D))(W)$ es el $\mathcal{O}_X(W)$-módulo libre generado por $f_i^{-1} \otimes 1$. Por otra parte, $\mathcal{O}_X(h^*(D))(W_i)$ es el $\mathcal{O}_X(W)$-módulo libre generado por g_i^{-1}. Esto nos da un isomorfismo entre ambos módulos determinado por $f_i^{-1} \otimes 1 \mapsto g_i^{-1}$. Puesto que los haces son coherentes, este isomorfismo induce a su vez un isomorfismo $(h^*\mathcal{O}_Y(D))|_W \cong \mathcal{O}_X(h^*(D))|_W$.

Estos isomorfismos son consistentes, pues si $W \subset U_i \cap U_j$, entonces (conservando la notación previa al teorema) $f_j^{-1} = f_i^{-1}a_{ij}$ y $g_j^{-1} = g_i^{-1}b_{ij}$, donde $b_{ij} = h^{\#}_{U_i \cap U_j}(a_{ij})$, luego

$$f_j^{-1} \otimes 1 = f_i^{-1}a_{ij} \otimes 1 = f_i^{-1} \otimes b_{ij} = (f_i^{-1} \otimes 1)b_{ij},$$

por lo que el isomorfismo dado por $f_i^{-1} \otimes 1 \mapsto g_i^{-1}$ es el mismo que el dado por $f_j^{-1} \otimes 1 \mapsto g_j^{-1}$. Es fácil ver entonces que estos isomorfismos se unen en un único isomorfismo $h^*(\mathcal{O}_Y(D)) \cong \mathcal{O}_X(h^*(D))$. ■

Nota 1 Observemos que si X es un esquema íntegro, entonces tiene un único punto asociado ξ (su punto genérico), y la condición $\{h(\xi)\} \cap \operatorname{sop} D = \varnothing$ equivale a que $h[X] \not\subset \operatorname{sop} D$. Esto se cumple trivialmente (para todo divisor D) si $h[X]$ es denso en Y.

Más detalladamente, supongamos que $h : X \longrightarrow Y$ es un homomorfismo entre esquemas íntegros localmente noetherianos que transforma el punto genérico de X en el punto genérico de Y (lo que equivale a que $h[X]$ sea denso en Y). Según acabamos de razonar, $\mathrm{Div}_c(Y)_E = \mathrm{Div}_c(Y)$, y el cálculo de $h^*(D)$ es especialmente simple:

Pongamos que D está representado por un sistema $\{(U_i, f_i)\}_i$, donde los abiertos U_i podemos tomarlos afines y noetherianos. Entonces $f_i = u_i/v_i$, para ciertos u_i, $v_i \in \mathcal{O}_Y(U_i)$ regulares (es decir, no nulos). Entonces el abierto $D_{U_i}(u_i) \cap D_{U_i}(v_i) \subset U_i$ no es vacío y, como $h[X]$ es denso, la antiimagen $D_{h^{-1}[U_i]}(h^{\#}_{U_i}(u_i)) \cap D_{h^{-1}[U_i]}(h^{\#}_{U_i}(v_i))$ es un abierto no vacío en $h^{-1}[U_i]$, lo que prueba que $h^{\#}_{U_i}(u_i)$, $h^{\#}_{U_i}(v_i) \in \mathcal{O}_X(h^{-1}[Y])$ son no nulos, luego definen un $g_i = h^{\#}_{U_i}(u_i)/h^{\#}_{U_i}(v_i) \in \mathcal{K}^*(h^{-1}[U_i])$, y $h^*(D)$ está definido precisamente por estos pares $(h^{-1}[U_i], g_i)$. (Este g_i y el considerado en la definición de $h^*(D)$ coinciden sobre el abierto que allí hemos llamado $h^{-1}[V_i]$, luego son iguales.)

En particular, si $P \in X$ y $D_{h(P)}$ está definido por $u_i/v_i \in \mathcal{K}^*_{h(P)}$, entonces $h^*(D)_P$ está definido por $h^{\#}_P(u_i)/h^{\#}_P(v_i) \in \mathcal{K}^*_P$. ■

Nota 2 Una situación muy similar a la que acabamos de considerar se da en el caso en que $h : X \longrightarrow Y$ es un homomorfismo plano entre esquemas noetherianos.

Si D está definido por $\{(U_i, f_i)\}_i$, donde los abiertos U_i son afines y noetherianos, entonces $f_i = u_i/v_i$, con u_i, $v_i \in \mathcal{O}_Y(U_i)$ regulares. Claramente, se cumple que $U_i \cap \operatorname{sop} D \subset V_{U_i}(u_i) \cup V_{U_i}(v_i)$. No puede ser que un punto asociado $\xi \in X$ cumpla $h(\xi) \in \operatorname{sop} D$, pues entonces existiría un i tal que $h(\xi) \in V_{U_i}(u_i) \cup V_{U_i}(v_i)$, luego $\xi \in V_{h^{-1}[U_i]}(h^{\#}_{U_i}(u_i)) \cup V_{h^{-1}[U_i]}(h^{\#}_{U_i}(v_i))$, luego o bien $h^{\#}_{U_i}(u_i)$ o bien $h^{\#}_{U_i}(v_i)$ no es regular en $\mathcal{O}_X(h^{-1}[U_i])$ (teorema [3.49]), pero esto es imposible, porque el homomorfismo $h^{\#}_{U_i} : \mathcal{O}_Y(U_i) \longrightarrow \mathcal{O}_X(h^{-1}[U_i])$ es plano, y los homomorfismos planos transforman elementos regulares en elementos regulares.[2]

Como en la nota precedente, se demuestra ahora que $h^*(D)$ está definido por los pares $(h^{-1}[U_i], g_i)$, donde $g_i = h^{\#}_{U_i}(u_i)/h^{\#}_{U_i}(v_i)$. La última afirmación de la nota anterior vale igualmente en este caso. ■

Ejemplo Consideremos la proyección $p_1 : X = \mathrm{P}^{n_1}_k \times \cdots \times \mathrm{P}^{n_m}_k \longrightarrow \mathrm{P}^{n_1}_k$ y el haz inversible $\mathcal{O}_{\mathrm{P}^{n_1}_k}(1)$ en $\mathrm{P}^{n_1}_k$, que, según hemos visto en el ejemplo de la página 318, corresponde al divisor D dado por el sistema $\{(U_j, X_0/X_j)\}_j$, donde $U_j = D(X_j)$. Es claro que su soporte es $H = V(X_0)$.

El divisor $p_1^*(D)$ está determinado por $\{(V_j, g_j)\}_j$, donde

$$V_j = p_1^{-1}[U_j] = D(X_j) \times \mathrm{P}^{n_2}_k \times \cdots \times \mathrm{P}^{n_m}_k,$$

y $g_j = p^{\#}_{1D(X_j)}(X_0/X_j)$. Si identificamos las funciones racionales del espacio multiproyectivo con fracciones de $k(X_{ij} \mid i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n_i)$, entonces

[2] Si $f : A \longrightarrow B$ es plano y $a \in A$ es regular, la multiplicación por a es un monomorfismo $A \longrightarrow A$, que al multiplicar por $\otimes_A B$ se convierte en la multiplicación por $f(a)$ en B, luego ésta es inyectiva y $f(a)$ es regular.

$p^{\#}_{1D(X_j)}$ se corresponde con la inclusión $k(X_{1j}) \longrightarrow k(X_{ij})$, con lo que, en definitiva, el divisor $p_1^*(D)$ es el determinado por $\{(V_j, 1/X_{1j})\}_j$. De acuerdo con la nota posterior al teorema 8.19, tenemos que

$$\left(\frac{1}{X_{1j}}\right) = \frac{\zeta_1}{(X_{1j})}$$

Despreciamos el polo (X_{1j}) porque no pertenece a V_j, con lo que concluimos que, visto como divisor de Weil, $p_1^*(D) = \zeta_1$.

Obviamente, lo mismo vale para las otras proyecciones, con lo que hemos demostrado que

$$\mathcal{O}_X(\zeta_i) = p_i^*(\mathcal{O}_{\mathrm{P}_k^{n_i}}(1)).$$

Así, el ejemplo 6 de la página 175 nos da que el haz $\mathcal{O}_X(1)$ correspondiente a la inmersión de Segre $\mathrm{P}_k^m \times_k \mathrm{P}_k^n \longrightarrow \mathrm{P}_k^{mn+m+n}$ es $\mathcal{O}_X(\zeta_1\zeta_2)$. ■

Las posibilidades de aplicación del teorema 8.32 son mayores de lo que podría pensarse debido al teorema siguiente:

Teorema 8.33 *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un homomorfismo de esquemas localmente noetherianos y supongamos que X es íntegro. Sea ξ el punto genérico de X y sea $E = \{f(\xi)\}$. Entonces todo divisor de* $\mathrm{Div}_c(Y)$ *es linealmente equivalente a un divisor de* $\mathrm{Div}_c(Y)_E$*, por lo que* $\mathrm{Cl}_c(Y)_E = \mathrm{Cl}_c(Y)$.

Demostración: Sea D un divisor, representado por el sistema $\{(U_i, f_i)\}_i$. Sea i_0 el índice que cumple que $f(\xi) \in U_{i_0}$. El divisor $D' = (f_{i_0}^{-1})D$ es linealmente equivalente a D, y está representado por el sistema $\{(U_i, f_i f_{i_0}^{-1})\}_i$. En particular en U_{i_0} está representado por la función 1, luego $D'_P = 1$ para todo $P \in U_{i_0}$. Esto implica que $U_{i_0} \cap \mathrm{sop} D' = \varnothing$, luego $D' \in \mathrm{Div}_c(Y)_E$. ■

Veamos una aplicación de las imágenes inversas de divisores:

Teorema 8.34 *Si X/k es un esquema cuasiproyectivo, entonces el monomorfismo* $\mathrm{Cl}_c(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X)$ *es un isomorfismo.*

Demostración: Por el teorema 5.44 sabemos que $\mathrm{Pic}(X)$ está generado por los haces muy amplios, luego basta probar que todo haz muy amplio $\mathcal{L}$ de X es de la forma $\mathcal{O}_X(D)$, para cierto $D \in \mathrm{Div}_c(X)$. Consideremos una inmersión $i : X \longrightarrow \mathrm{P}_k^n$ tal que $\mathcal{L} = i^*\mathcal{O}_{\mathrm{P}_k^n}(1)$ y sea E el conjunto de las imágenes en P_k^n de los puntos asociados de X. En el ejemplo de la página 318 hemos visto que $\mathcal{O}_{\mathrm{P}_k^n}(1) = \mathcal{O}_{\mathrm{P}_k^n}(D)$, donde D es cualquier divisor de Cartier cuyo divisor de Weil asociado tenga grado 1. En particular, podemos exigir que $\mathrm{sop}\, D$ sea cualquier hiperplano prefijado.

Si existe un hiperplano H disjunto con E, entonces estará definido el divisor $i^*D \in \mathrm{Div}_c(X)$ y se cumplirá que $\mathcal{O}_X(i^*D) \cong \mathcal{L}$.

Si el cuerpo k es finito no podemos asegurar la existencia de dicho hiperplano, pues sólo hay un número finito de ellos y puede haber un punto de E en cada uno. No obstante, consideremos los puntos $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ de E, que son ideales homogéneos de $k[X_0, \ldots, X_n]$, ninguno de los cuales contiene a $I = (X_0, \ldots, X_n)$.

El teorema [3.51] nos da que existe un $F \in I$ que no pertenece a ninguno de los $\mathfrak{p}_i$. Una simple modificación de la prueba nos permite exigir que F sea homogéneo de cualquier grado suficientemente grande.[3] En particular podemos tomar dos polinomios homogéneos F y F' de grados d y $d+1$ que no pertenezcan a ningún $\mathfrak{p}_i$. Equivalentemente, tenemos dos hipersuperficies V y V' en P_k^n de grados d y $d+1$, respectivamente, tales que $V \cap E = V' \cap E = \varnothing$. Ahora consideramos la inmersión de grado d dada por el ejemplo 3 de la página 174. Al componerla con i obtenemos una nueva inmersión

$$j : X \longrightarrow \mathrm{P}_k^n \longrightarrow \mathrm{P}_k^N$$

tal que $j^*\mathcal{O}_{\mathrm{P}_k^N}(1) = \mathcal{L}^d$, y existe un hiperplano $H \subset \mathrm{P}_k^N$ tal que $H \cap \mathrm{P}_k^n = V$, luego $V \cap E = \varnothing$. Por el razonamiento precedente, esto nos permite asegurar que $\mathcal{L}^d \cong \mathcal{O}_X(D)$, para un cierto $D \in \mathrm{Div}_c(X)$, e igualmente concluimos que $\mathcal{L}^{d+1} \cong \mathcal{O}_X(D')$, con lo que $\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_X(D'/D)$. ■

Vamos a obtener información adicional sobre la imagen inversa de un divisor en algunos casos de interés. Para ello empezamos con una definición:

Definición 8.35 Sea $A \longrightarrow B$ un homomorfismo de anillos locales. Definimos el *índice de ramificación* de B sobre A como $e_{B/A} = l_B(B/\mathfrak{m}_A B)$. (En general puede ser infinito.) Si $f : X \longrightarrow Y$ es un homomorfismo de esquemas, $x \in X$, y llamamos $y = f(x)$, definimos $e_{x/y} = e_{\mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{O}_{Y,y}}$.

Ejemplo Según las observaciones tras la definición 8.26, si B/A es una extensión de anillos de valoración discreta, entonces $e_{B/A} = v_B(\pi)$, donde π es un primo cualquiera de A. Equivalentemente, vemos que $e_{B/A}$ es el exponente de la ecuación $\mathfrak{m}_A B = \mathfrak{m}_B^e$. (En definitiva, $e_{B/A}$ es el índice de ramificación en el sentido usual.)

Más en general, si B/A es una extensión de dominios de Dedekind, la inclusión determina un homomorfismo finito suprayectivo $\mathrm{Esp}\, B \longrightarrow \mathrm{Esp}\, A$. Los espectros son noetherianos y normales. Se trata del homomorfismo dado por $\mathfrak{P} \mapsto \mathfrak{P} \cap A$. Más precisamente, el ideal nulo se corresponde con el ideal nulo y cada divisor primo $\mathfrak{P}$ de B se corresponde con el único primo $\mathfrak{p}$ de A al cual divide. Es obvio que $e_{\mathfrak{P}/\mathfrak{p}}$ es el exponente de $\mathfrak{P}$ en $\mathfrak{p}$, luego también coincide con el índice de ramificación en el sentido usual de la teoría algebraica de números. ■

El teorema siguiente demuestra la finitud del índice de ramificación en dos casos, el segundo de los cuales generaliza al ejemplo anterior:

[3] Con la notación de la prueba, podemos exigir que los f_j sean homogéneos por hipótesis de inducción, y elevándolos a potencias adecuadas podemos exigir que todos tengan el mismo grado. Entonces los g_i son homogéneos del mismo grado d. Por último, para cada i, tomamos una indeterminada $X_{m_i} \notin \mathfrak{p}_i$. Si cambiamos g_i por $g_i' = X_{m_i}^s g_i$, los elementos g_i' cumplen lo mismo pero tienen grado $d+s$, y el F obtenido tiene grado $d+s$ para cualquier $s \geq 0$.

Teorema 8.36 *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un homomorfismo de esquemas noetherianos. Supongamos que se cumple uno de los dos casos siguientes:*

a) f es plano.

b) X e Y son íntegros y f finito y suprayectivo.

Si $x \in X$ es un punto de codimensión 1, entonces la codimensión de $y = f(x)$ es ≤ 1 en el caso a) y es $= 1$ en el caso b). Cuando la codimensión es 1, el índice $e_{x/y}$ es finito.

Demostración: Si f es plano, el teorema 4.52 nos da que la codimensión de y es igual a

$$\dim \mathcal{O}_{Y,y} = \dim \mathcal{O}_{X,x} - \dim \mathcal{O}_{X_y,y} \leq 1,$$

y si se da la igualdad entonces, aplicando el teorema al homomorfismo plano

$$\operatorname{Esp} \mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow \operatorname{Esp} \mathcal{O}_{Y,y},$$

tenemos que la fibra de $\mathfrak{m}_y$, que es el espectro de

$$\mathcal{O}_{X,x} \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} (\mathcal{O}_{Y,y}/\mathfrak{m}_y) \cong \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_y\mathcal{O}_{X,x},$$

tiene dimensión 0 al localizarla a $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{m}_y\mathcal{O}_{X,x}$, pero la localización es trivial, por lo que concluimos que $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_y\mathcal{O}_{X,x}$ tiene longitud finita.

Si f es finito y suprayectivo, sea $Y' = \operatorname{Esp} A$ un entorno afín de y, en cuyo caso $X' = f^{-1}[Y]$ es un entorno afín de x, digamos $X' = \operatorname{Esp} B$, de modo que B es un A-módulo finitamente generado. Como f es suprayectiva, la antiimagen en A del ideal nulo de B ha de ser el ideal nulo, luego el homomorfismo $A \longrightarrow B$ es inyectivo y podemos considerar a B como una extensión de A. En particular, considerando a x e y como ideales de B y A respectivamente, tenemos que $y = x \cap A$, luego el teorema [3.68] nos da que $\operatorname{alt} x \leq \operatorname{alt} y = 1$. Ahora bien, la altura de x no puede ser 0, pues entonces sería el punto genérico de X, y su imagen sería el punto genérico de Y. Así pues, la codimensión de x es exactamente 1. Por último, el homomorfismo

$$\operatorname{Esp} \mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow \operatorname{Esp} \mathcal{O}_{Y,y}$$

es suprayectivo y ambos anillos son dominios íntegros, luego $\mathfrak{m}_y\mathcal{O}_{X,x} \neq 0$, luego $\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_y\mathcal{O}_{X,x}$ tiene dimensión 0, luego tiene longitud finita. ■

Ahora necesitamos un sencillo resultado técnico:

Teorema 8.37 *Sea $A \longrightarrow B$ un homomorfismo plano de anillos locales tal que $e_{B/A}$ sea finito, y sea M un A-módulo de longitud finita. Entonces*

$$l_B(M \otimes_A B) = e_{B/A}\, l_A(M).$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $0 = M_0 \subset M_1 \subset \cdots \subset M_r = M$ una serie de composición de M. Entonces, como B es plano sobre A, tenemos inclusiones

$$0 = M_0 \otimes_A B \subset M_1 \otimes_A B \subset \cdots \subset M_r \otimes_A B = M \otimes_A B.$$

Usando de nuevo que B es plano sobre A y el teorema [4.33], vemos que

$$l_B((M_{i+1} \otimes_A B)/(M_i \otimes_A B)) = l_B((M_{i+1}/M_i) \otimes_A B) = l_B((A/\mathfrak{m}_A) \otimes_A B)$$

$$= l_B(B/\mathfrak{m}_A B) = e_{B/A}.$$

La penúltima igualdad se debe a que el isomorfismo $A \otimes_A B \cong B$ transforma $m_A \otimes_A B$ en $\mathfrak{m}_A B$. La conclusión es ahora inmediata. ■

Ahora ya podemos probar:

Teorema 8.38 *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un homomorfismo de esquemas en las condiciones del teorema* 8.36 *y sea $D \in \operatorname{Div}_c(Y)$. Si $x \in X$ tiene codimensión* 1 *(es un divisor primo) y llamamos $y = f(x)$, entonces*

$$v_x(f^*D) = \begin{cases} e_{x/y}\, v_y(D) & \textit{si } y \textit{ tiene codimensión } 1, \\ 0 & \textit{si } y \textit{ tiene codimensión } 0. \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN: Si y tiene codimensión 0, entonces $\mathfrak{m}_y$ es un primo minimal de $\mathcal{O}_{Y,y}$, luego los únicos elementos regulares de este anillo son las unidades. Por consiguiente, D está representado en y por una unidad de $\mathcal{O}_{Y,y}$, luego f^*D está representado en x por una unidad de $\mathcal{O}_{X,x}$, luego $v_x(f^*D) = 0$.

Si y tiene codimensión 1 y $u \in \mathcal{O}_{Y,y}$ es regular, la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow (u) \longrightarrow \mathcal{O}_{Y,y} \longrightarrow \mathcal{O}_{Y,y}/(u) \longrightarrow 0$$

da lugar a la sucesión exacta

$$(u) \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} \mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow (\mathcal{O}_{Y,y}/(u)) \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} \mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow 0,$$

de la que deducimos que, si $u' \in \mathcal{O}_{X,x}$ es la imagen de u en $\mathcal{O}_{X,x}$,

$$\mathcal{O}_{X,x}/(u') \cong (\mathcal{O}_{Y,y}/(u)) \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} \mathcal{O}_{X,x},$$

luego el teorema 8.37 nos da que

$$l_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathcal{O}_{X,x}/(u')) = l_{\mathcal{O}_{Y,y}}(\mathcal{O}_{Y,y}/(u))\, e_{x/y}$$

Ahora basta observar que D_y está representado por un cociente de elementos regulares de $\mathcal{O}_{Y,y}$, y al aplicarles a ambos la relación precedente, obtenemos la relación del enunciado. ■

Ejemplo 1 Si $f : X \longrightarrow Y$ es un homomorfismo finito y suprayectivo entre esquemas íntegros regulares de dimensión 1 y $P \in Y$ es un punto cerrado (que podemos identificar con un divisor de Weil y, a su vez, con un divisor de Cartier), tenemos que

$$f^*P = \prod_{Q \in f^{-1}[P]} Q^{e_{Q/P}}.$$

En particular, si $f : \operatorname{Esp} B \longrightarrow \operatorname{Esp} A$ es el homomorfismo asociado a una extensión B/A de dominios de Dedekind, vemos que f^*P es el divisor asociado al ideal primo PB. ■

Ejemplo 2 Sea k un cuerpo y sean V/k, W/k conjuntos algebraicos, el primero de dimensión 1 y el segundo geométricamente íntegro. Consideremos la proyección $p : V \times_k W \longrightarrow V$, que es un homomorfismo plano, luego le podemos aplicar el teorema anterior.

Sea $x \in V \times_k W$ un divisor primo tal que $y = p(x)$ tenga codimensión 1 en V, es decir, que sea un punto cerrado. Entonces $x \in p^{-1}[y] \cong W \times_k \operatorname{Esp} k(y)$ y esta fibra es una extensión de constantes de W, luego es irreducible por hipótesis, y su dimensión es la misma que la de W, luego también coincide con la de $\overline{\{x\}}$. Así pues, x es el punto genérico de $p^{-1}[y]$. En definitiva, los divisores primos de $V \times_k W$ cuya proyección es un divisor primo de V son exactamente (los puntos genéricos de) las fibras de p.

Vamos a calcular el índice de ramificación $e_{x/y}$. Como su definición es local, podemos restringir p a un entorno afín $V_0 \times_k W_0$ del punto x. Si $V_0 = \operatorname{Esp} A$ y $W_0 = \operatorname{Esp} B$, donde A y B son k-álgebras afines, entonces p se corresponde con el homomorfismo natural $A \longrightarrow A \otimes_k B$.

Observemos que $y \otimes_k B$ es un ideal de $A \otimes_k B$, y es primo, pues

$$(A \otimes_k B)/(y \otimes_k B) \cong k(y) \otimes_k B \cong \mathcal{O}_{W_{k(y)}}(W_{0\,k(y)}),$$

que es un dominio íntegro porque W es geométricamente íntegro. Además, es claro que $y \otimes_k B \subset x$, así como que ambos ideales dan un cociente de la misma dimensión, luego $x = y \otimes_k B$. En otros términos, x es el ideal generado por y en el producto tensorial. Esto se conserva al localizar, por lo que $\mathfrak{m}_x = \mathfrak{m}_y \mathcal{O}_x$, luego $\mathcal{O}_x/\mathfrak{m}_y\mathcal{O}_y$ es un $\mathcal{O}_x$-módulo simple, luego $e_{x/y} = 1$.

Si suponemos que los esquemas son regulares (para que tenga sentido considerar a los divisores primos como divisores de Cartier) y convenimos en representar por $\{y\} \times_k W$ la fibra de y (lo cual es literalmente cierto si entendemos que $\{y\}$ es el esquema $\operatorname{Esp} k(y)$), hemos probado que $p^*y = \{y\} \times_k W$. ■

Ahora necesitamos otro resultado de álgebra conmutativa:

Teorema 8.39 *Sea A un anillo local, sea $\mathfrak{m}$ su ideal maximal y sea B una A-álgebra.*

a) Si B es también un anillo local con ideal maximal $\mathfrak{n}$, el índice $|B/\mathfrak{n} : A/\mathfrak{m}|$ es finito y M es un B-módulo de longitud finita, entonces M tiene también longitud finita como A-módulo y

$$l_A(M) = |B/\mathfrak{n} : A/\mathfrak{m}|\, l_B(M).$$

b) *Si A es noetheriano de dimensión 1, B está finitamente generada como A-módulo, sus ideales maximales son $\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_q$, y $b \in B$ es un elemento regular, entonces, llamando $B_i = B_{\mathfrak{n}_i}$, se cumple que*

$$l_A(B/bB) = \sum_i |B_i/\mathfrak{n}_i B_i : A/\mathfrak{m}|\, l_{B_i}(B_i/bB_i).$$

Demostración: a) Sea $0 = M_0 \subsetneq M_1 \subsetneq \cdots \subsetneq M_l = M$ una serie de composición de M como B-módulo. Entonces cada M_{i+1}/M_i es un B-módulo simple y, por [4.33], es isomorfo a $B/\mathfrak{n}$. El teorema [4.37] reduce el problema al caso en que $M \cong B/\mathfrak{n}$, pero entonces es claro que

$$l_A(B/\mathfrak{n}) = l_{A/\mathfrak{m}}(B/\mathfrak{n}) = |B/\mathfrak{n} : A/\mathfrak{m}|.$$

b) Observemos que B es una extensión entera de un cociente de A, por lo que los teoremas [3.63] y [3.64] implican que B tiene un número finito de ideales maximales $\mathfrak{n}_i$. Además, por [3.68] tenemos que $\dim B \leq \dim A = 1$, lo que a su vez implica que $\dim(B/bB) = 0$ (ya que b no pertenece a ningún primo minimal de B).

Los únicos ideales de B/bB son los ideales $\mathfrak{n}_i/bB$, para todo i tal que $b \in \mathfrak{n}_i$ (puede no haber ninguno, lo que significa que b es una unidad y que $B/bB = 0$). Observemos que tenemos un isomorfismo natural

$$B/bB \cong \bigoplus_i B_i/bB_i$$

(donde, en principio, i recorre los índices tales que $b \in \mathfrak{n}_i$, pero podemos admitir también los demás valores de i porque aportan sumandos nulos). En efecto, más en general: si B es un anillo noetheriano de dimensión 0 con un número finito de ideales maximales $\mathfrak{n}_i$, se cumple que

$$B \cong \bigoplus_i B_{\mathfrak{n}_i}.$$

Basta considerar el esquema $X = \operatorname{Esp} B$, en el que los conjuntos $U_i = \{\mathfrak{n}_i\}$ son cerrados, luego abiertos, por lo que $B = \bigoplus \mathcal{O}_X(U_i)$. Además los abiertos U_i son afines (principales, de hecho, digamos que $U_i = D(f_i)$), de manera que $\mathcal{O}_X(U_i) = B_{f_i}$ es un anillo con un único ideal primo, luego concluimos que $\mathcal{O}_X(U_i) = \mathcal{O}_X(U_i)_{\mathfrak{n}_i} = (B_{f_i})_{\mathfrak{n}_i} = B_{\mathfrak{n}_i}$.

Así pues,

$$l_A(B/bB) = \sum_i l_A(B_i/bB_i),$$

supuesto que los A-módulos B_i/bB_i tengan longitud finita. Ahora bien, el anillo B/bB es noetheriano de dimensión 0, y lo mismo vale para B_i/bB_i, luego éste tiene longitud finita como B_i/bB_i-módulo. Por el apartado a), también tiene longitud finita como B_i-módulo (la misma longitud, de hecho) y, de nuevo por el apartado a), también tiene longitud finita como A-módulo, puesto que

$$|B_i/\mathfrak{n}_i B_i : A/\mathfrak{m}| = |B/\mathfrak{n}_i : A/\mathfrak{m}|$$

es finito. ■

Ahora generalizamos el resultado a esquemas y divisores:

Teorema 8.40 *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un homomorfismo finito suprayectivo entre dos esquemas íntegros noetherianos. Consideremos un divisor primo $y \in Y$ y sea $D \in \operatorname{Div}_c(X)$. Entonces*

$$|K(X) : K(Y)|\, v_y(D) = \sum_{x \in f^{-1}[y]} |k(x) : k(y)|\, v_x(f^*D).$$

DEMOSTRACIÓN: Notemos que, según el teorema 8.36, el divisor f^*D está definido para todo D, y que todo $x \in f^{-1}[y]$ tiene codimensión 1. Si Y' es un entorno afín de y, entonces $f^{-1}[X']$ es un abierto afín que contiene a $f^{-1}[y]$, por lo que no perdemos generalidad si suponemos que $X = \operatorname{Esp} B$, $Y = \operatorname{Esp} A$. En la prueba de 8.36 hemos visto que entonces A es un subanillo de B.

Si el divisor D está representado por un sistema $\{(U_i, g_i)\}_i$, donde los abiertos U_i son afines, podemos sustituir Y por un U_i que contenga a y, de modo que no perdemos generalidad si suponemos que $D = (a)$ es un divisor principal, donde $a \in K(Y) = F(A)$. Si $a = u/v$, basta probar el teorema para los divisores (u) y (v), luego podemos suponer que $a \in A$. Entonces $f^*D = (a)$.

Viendo a y como ideal primo de A, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A_y \arrow[r] & B_y \end{tikzcd}$$

Si llamamos $X' = \operatorname{Esp} B_y$, $Y' = \operatorname{Esp} A_y$, el diagrama anterior se corresponde con

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ X' \arrow[u] \arrow[r, "f'"] & Y' \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Llamemos $y' = yA_y \in Y'$, de modo que $k(y) = A_y/y = k(y')$. El divisor $D' = (a/1) \in \operatorname{Div}_c(Y')$ cumple que

$$v_y(D) = l_{A_y}(A_y/aA_y) = v_{y'}(D').$$

Los elementos de $x' \in X'$ se corresponden biunívocamente con los $x \in X$ tales que $x \cap A \subset y$. En particular, los elementos $x \in f^{-1}[y]$ se corresponden biunívocamente con los $x' = xB_y \in Y'$ tales que $x' \cap A_y = y'$ y por [3.63] éstos son los ideales maximales de B_y.

También tenemos que $k(x) = k(x')$ y que $v_x(f^*D) = v_{x'}(f'^*D')$. En definitiva, vemos que basta probar el teorema para el homomorfismo f' o, equivalentemente, que podemos suponer que A es un anillo noetheriano local cuyo único ideal maximal es y. El teorema anterior nos da que

$$l_A(B/aB) = \sum_{x \in f^{-1}[y]} |B_x/xB_x : A/y|\, l_{B_x}(B_x/aB_x).$$

Equivalentemente:

$$l_A(B/aB) = \sum_{x\in f^{-1}[y]} |k(x):k(y)|\, v_x(f^*D).$$

Basta probar que $l_A(B/aB) = |K(X):K(Y)|\, l_A(A/aA)$.

Podemos tomar una base de $K(X)$ sobre $K(Y)$ formada por elementos $b_1,\ldots,b_n \in B$. Sea $M = \langle b_1,\ldots,b_n\rangle_A$. Claramente, B/M es un A-módulo de torsión finitamente generado. Podemos tomar un $u \in A$, $u \neq 0$, que anule a B/M, lo que nos permite expresar a B/M como imagen de una suma directa $(A/uA)^r$. El A-módulo A/uA tiene longitud finita por 8.25, luego B/M también tiene longitud finita.

Ahora consideramos las siguientes sucesiones exactas de A-módulos:

$$0 \longrightarrow aB/aM \longrightarrow B/aM \longrightarrow B/aB \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow M/aM \longrightarrow B/aM \longrightarrow B/M \longrightarrow 0.$$

Sabemos que los módulos de los extremos de ambas sucesiones tienen longitud finita (notemos que $aB/aM \cong B/M$), luego B/aM también tiene longitud finita. Además:

$$l_A(B/aB) + l_A(aB/aM) = l_A(M/aM) + l_A(B/M),$$

luego $l_A(B/aB) = l_A(M/aM) = l_A((A/aA)^n) = n\, l_A(A/aA)$. ■

Notemos que el teorema anterior generaliza a la conocida fórmula $n = \sum e_i f_i$ de la teoría algebraica de números. A su vez sugiere la definición siguiente:

Definición 8.41 Sea $f : X \longrightarrow Y$ un homomorfismo finito suprayectivo entre dos esquemas íntegros noetherianos y sea $D \in \operatorname{Div}(X)$ un divisor de Weil. Definimos

$$f_*D = \prod_y y^{\sum\limits_{x\in f^{-1}[y]} |k(x):k(y)|v_x(D)} \in \operatorname{Div}(Y),$$

donde y recorre los divisores primos de Y. Notemos que en la prueba del teorema anterior hemos visto que si y es un divisor primo de Y y $x \in f^{-1}[y]$ entonces x es un divisor primo de X.

En estos términos, el teorema anterior puede enunciarse así:

Teorema 8.42 *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un homomorfismo finito suprayectivo entre dos esquemas íntegros noetherianos y sea $D \in \operatorname{Div}_c(Y)$. Entonces*

$$f_*([f^*D]) = |K(X):K(Y)|\,[D].$$

8.5 Sistemas lineales

Según el teorema 5.33, un homomorfismo $f : X \longrightarrow \mathrm{P}_k^n$ está determinado por un generador global de un haz inversible $\mathcal{L}$ en X, de modo que, si $L \subset \mathcal{L}(X)$ es la envoltura lineal del generador global, cada $s \in L$ no nulo es de la forma $s = f^*F$, donde F es una forma lineal no nula y $X \setminus X_s = f^{-1}[V(F)]$.

Si f es una inmersión cerrada y llamamos $H = V(F)$, entonces podemos escribir que $X \setminus X_s = X \cap H$, de modo que, aproximadamente, lo que tenemos es que f está determinada por las intersecciones de X con los hiperplanos de P_k^n. No obstante, esto no es exacto porque f está determinada por los $s \in L$, no por los cerrados $X \setminus X_s$ con $s \in L$.

Podemos preguntarnos qué información adicional contiene s más allá del hecho de que determina el abierto X_s, o el cerrado $X \setminus X_s$. Bajo hipótesis razonables, la respuesta es que s asocia además ciertas multiplicidades a las componentes irreducibles de $X \setminus X_s$ o, en otros términos, que s determina un divisor de soporte $X \setminus X_s$.

Supongamos que X/k es un esquema proyectivo íntegro. Sea $\mathcal{L}$ un haz inversible en X, $s \in \mathcal{L}(X)$ no nulo y vamos a asociar a s un divisor de Cartier.

Para ello observamos que si $P \in X$, entonces $\mathcal{L}_P$ es un $\mathcal{O}_{X,P}$-módulo libre de rango 1, luego podemos tomar una base $\epsilon_P \in \mathcal{L}_P$, y entonces el elemento $s_P \in \mathcal{L}_P$ se expresa de forma única como $s_P = \alpha_P \epsilon_P$, para cierto $\alpha_P \in \mathcal{O}_{X,P}$. Naturalmente, α_P depende de la elección de la base ϵ_P, pero un cambio de base multiplica α_P por una unidad de $\mathcal{O}_{X,P}$, luego la clase de α_P en $\mathcal{O}_{X/P}/\mathcal{O}_{X,P}^*$ no depende de la elección de la base. Por otra parte, si un divisor $D \in \mathrm{Div}_c(X)$ es entero, tenemos que $D_P \in \mathcal{O}_{X/P}/\mathcal{O}_{X,P}^*$.

Teorema 8.43 *Sea X/k un esquema proyectivo íntegro, sea $\mathcal{L}$ un haz inversible en X y sea $s \in \mathcal{L}(X)$. Entonces existe un único divisor entero $s_0 \in \mathrm{Div}_c(X)$ tal que, para cada punto $P \in X$, se cumple que $s_P = \alpha_P \epsilon_P$, donde ϵ_P es una base de $\mathcal{L}_P$ y $s_{0P} = [\alpha_P] \in \mathcal{O}_{X,P}/\mathcal{O}_{X,P}^*$.*

Demostración: Sea $U \subset X$ un abierto afín tal que $\mathcal{L}|_X$ sea libre. Sea $\epsilon_U \in \mathcal{L}(U)$ una base y sea $s|_U = f_U \epsilon_U$, donde $f_U \in \mathcal{O}_X(U)$. Teniendo en cuenta que X es íntegro, es fácil ver que no puede ser $f_U = 0$, luego $f_U \in k(X)^*$.

Los pares (U, f_U) determinan un divisor de Cartier. En efecto: si (V, f_V) es otro par en las mismas condiciones, tomamos un abierto afín $W \subset U \cap V$ tal que $\mathcal{L}|_W$ sea libre. Entonces $\epsilon_U|_W$ y $\epsilon_V|_W$ son dos bases de $\mathcal{L}(W)$, luego existe un único $\alpha_W \in \mathcal{O}_X(W)^*$ tal que $\epsilon_U|_W = \alpha_W \epsilon_V|_W$, luego $f_V|_W = \alpha_W f_U|_W$. Los abiertos W cubren $U \cap V$ y la unicidad de los α_W hace que éstos determinen un $\alpha \in \mathcal{O}_X(U \cap V)^*$ tal que $f_V|_{U\cap V} = \alpha f_U|_{U\cap V}$.

Llamamos s_0 al divisor determinado por los pares (U, f_U). Es claro que cumple lo pedido, y la unicidad también es evidente. ■

Definición 8.44 Si X/k es un esquema proyectivo íntegro, $\mathcal{L}$ es un haz inversible en X y $s \in \mathcal{L}(X)$, el divisor entero s_0 dado por el teorema anterior se llama *divisor de ceros* de s.

Observemos que $s_{0P} = 1$ si y sólo si $\mathcal{L}_P = s_P \mathcal{O}_{X,P}$, es decir, si y sólo si $P \notin X_s$. En definitiva: $\operatorname{sop} s_0 = X \setminus X_s$. En general, s_{0P} mide la "distancia" de s_P a un generador de $\mathcal{L}_P$. Si el conjunto X es normal, el divisor s_0 está completamente determinado por su divisor de Weil asociado y, en tal caso, podemos ver a s_0 como una asignación de multiplicidades a las componentes irreducibles de su soporte, tal y como comentábamos al principio de la sección.

Como X es íntegro, todo haz inversible $\mathcal{L}$ es de la forma $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(D)$, para un cierto divisor $D \in \mathrm{Div}_c(X)$. Según el teorema 8.30 sabemos que

$$\mathcal{L}(X) = \{f \in K(X)^* \mid (f)D \geq 1\} \cup \{0\}.$$

Entonces, para cada $f \in \mathcal{L}(X)$ no nulo, $f_0 = (f)D$.

En efecto, si D viene representado por $\{(U_i, f_i)\}_i$ y tomamos $P \in U_i$, entonces $\mathcal{L}_P = f_{iP}^{-1}\mathcal{O}_{X,P}$, luego una base de $\mathcal{L}_P$ es f_i^{-1} y $f_P = (ff_i)_P f_{iP}^{-1}$, luego $f_{0P} = (ff_i)_P = ((f)D)_P$, luego $f_0 = (f)D$.

En particular, $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(f_0)$.

Definición 8.45 Si X es un esquema localmente noetheriano y $D \in \mathrm{Div}_c(X)$, definimos el *sistema lineal completo* asociado a D como el conjunto (tal vez vacío) $|D|$ formado por todos los divisores (de Cartier) enteros linealmente equivalentes a D.

Notemos que si $|D| \neq \varnothing$ y $D' \in \mathrm{Div}_c(X)$, entonces $|D| = |D'|$ si y sólo si D y D' son linealmente equivalentes, luego $|D|$ está asociado en realidad a la clase de D en el grupo $\mathrm{Cl}_c(X)$.

Según hemos visto, si X/k es un esquema proyectivo íntegro y $D \in \mathrm{Div}_c(X)$, tenemos una aplicación suprayectiva $\mathcal{O}_X(D)(X) \setminus \{0\} \longrightarrow |D|$ dada por $f \mapsto f_0$.

Supongamos además que X/k es geométricamente íntegro, con lo que el teorema 4.26 nos da que $\mathcal{O}_X(X) = k$. Una consecuencia de esto es que, por la propia construcción de los divisores de Cartier, si $f \in K(X)^*$, se cumple trivialmente que $(f) = 1$ si y sólo si $f \in \mathcal{O}_X(X)^* = k^*$, luego una función racional está completamente determinada por su divisor salvo una constante (ya habíamos observado esto en el contexto de los divisores de Weil).

Ahora, si tomamos $f, g \in \mathcal{O}_X(D)(X) \setminus \{0\}$ y se cumple que $f_0 = g_0$, entonces $(f)D = (g)D$, luego $(f) = (g)$, luego f y g se diferencian en un factor en k^*. Ahora es inmediato el teorema siguiente:

Teorema 8.46 *Si X/k es un esquema proyectivo geométricamente íntegro, sea $D \in \mathrm{Div}_c(X)$ y sea $L = \mathcal{L}(D)(X)$. Llamemos $\mathrm{P}(L)$ al conjunto de todos los subespacios vectoriales de L de dimensión 1. Entonces, la aplicación $f \mapsto f_0 = (f)D$ induce una biyección $\mathrm{P}(L(D)) \longrightarrow |D|$.*

Notemos que $L(D)$ es un k-espacio vectorial de dimensión finita, por lo que $\mathrm{P}(L(D))$ es un espacio proyectivo de dimensión $\dim_k L(D) - 1$.

Definición 8.47 En las condiciones del teorema anterior, un *sistema lineal* asociado al divisor D es la imagen por la biyección del teorema de una subvariedad lineal de $\mathrm{P}(L(D))$. Equivalentemente, es un conjunto de la forma

$$\mathfrak{d} = \{(f)D \mid f \in V \setminus \{0\}\} \subset |D|,$$

donde $V \subset L(D)$ es un subespacio vectorial. Definimos la *dimensión* de $\mathfrak{d}$ como la dimensión de la correspondiente variedad lineal ($\dim_k \mathfrak{d} = \dim_k V - 1$).

Notemos que los subespacios vectoriales de $L(D)$ se corresponden biunívocamente con los sistemas lineales asociados a D. De entre ellos nos interesan especialmente los generados por generadores globales de $\mathcal{O}_X(D)$, pues se corresponden con homomofismos de X en espacios proyectivos. Podemos caracterizarlos en términos de sistemas lineales:

Llamaremos *puntos básicos* de un sistema lineal $\mathfrak{d}$ a los puntos que están en todos los soportes de todos los divisores de $\mathfrak{d}$. Diremos que $\mathfrak{d}$ es *libre de puntos básicos* si no tiene puntos básicos.

Teorema 8.48 *Sea X/k es un esquema proyectivo geométricamente íntegro. Si $D \in \mathrm{Div}_c(X)$ y $V \subset L(D)$ es un subespacio vectorial correspondiente al sistema lineal $\mathfrak{d}$, entonces $\mathfrak{d}$ es libre de puntos básicos si y sólo si V está generado por un generador global de $\mathcal{O}_X(D)$.*

DEMOSTRACIÓN: Sabemos que $s_0, \ldots, s_n \in V$ son un generador global si y sólo si los abiertos X_{s_i} cubren X. Puesto que X es cuasicompacto, V contiene un generador global (finito) si y sólo si los abiertos X_s con $s \in V$ cubren X. Esto equivale a que sus complementarios, que son los soportes $\operatorname{sop} s_0$, con $s \in V$, tengan intersección vacía. Ahora bien, los divisores s_0 son precisamente los divisores de $\mathfrak{d}$. ■

En estos términos tenemos un enunciado alternativo del teorema 5.36:

Teorema 8.49 *Si X/k es un esquema proyectivo geométricamente íntegro, existe una biyección entre los sistemas lineales de divisores de X libres de puntos base y las clases de equivalencia de homomorfismos $X \longrightarrow \mathrm{P}_k^r$ cuya imagen no está contenida en ningún hiperplano, donde dos homomorfismos se consideran equivalentes si uno se obtiene del otro componiéndolo con un automorfismo de P_k^r.*

Más precisamente, a cada sistema lineal $\mathfrak{d}$ de dimensión r le corresponde una clase de homomorfismos en P_k^r.

Finalmente, vamos a reformular el teorema 5.37. Para ello recordemos que antes del teorema 8.29 hemos visto que si X es un esquema localmente noetheriano y $D \in \mathrm{Div}_c(X)$ es un divisor entero, el subesquema cerrado Y de X definido por el haz de ideales $\mathcal{O}_X(D^{-1})$ de $\mathcal{O}_X$ tiene por soporte al soporte de D. Si $P \in Y$ es un punto cerrado, definimos $T_PD = T_PY$.

Observemos que el epimorfismo $\mathcal{O}_{X,P} \longrightarrow \mathcal{O}_{Y,P}$ induce un epimorfismo $\mathfrak{m}_{X,P}/\mathfrak{m}_{X,P}^2 \longrightarrow \mathfrak{m}_{Y,P}/\mathfrak{m}_{Y,P}^2$ y, pasando a los espacios duales, obtenemos un monomorfismo de $k(P)$-espacios vectoriales $T_PD \longrightarrow T_PX$.

Con más detalle, si D está definido por un par (U, f) alrededor de P, como D es entero, tenemos que $f \in \mathcal{O}_X(U)$. El hecho de que $P \in \operatorname{sop} D$ equivale a que $f_P \in \mathfrak{m}_P$. Por otra parte, $\mathcal{O}_{Y,P} = \mathcal{O}_{X,P}/(f_P)$.

Si llamamos d_Pf a la clase de f_P en $\mathfrak{m}_{X,P}/\mathfrak{m}_{X,P}^2$, el epimorfismo entre los espacios cotangentes tiene por núcleo al subespacio vectorial generado por d_Pf, por lo que el monomorfismo entre los espacios tangentes nos lleva a la identificación

$$T_PD = \{t \in T_PX \mid d_Pf(t) = 0\}.$$

Teorema 8.50 *Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado, sea X/k un esquema propio y sea $\mathfrak{d}$ un sistema lineal en X libre de puntos básicos. Entonces $\mathfrak{d}$ define una inmersión cerrada $X \longrightarrow \mathrm{P}_k^n$ si y sólo si cumple:*

a) Para cada par de puntos cerrados distintos $P, Q \in X$ existe un $D \in \mathfrak{d}$ tal que $P \in \operatorname{sop} D$ y $Q \notin \operatorname{sop} D$, o viceversa.

b) Si $P \in X$ es un punto cerrado y $t \in T_PX$ es un vector tangente no nulo, entonces existe un $D \in \mathfrak{d}$ tal que $P \in \operatorname{sop} D$ y $t \notin T_PD$.

Demostración: Sea $D_0 \in \mathrm{Div}_c(X)$ y $V \subset L(D_0) = \mathcal{O}_X(D_0)(X)$ un subespacio vectorial tal que $\mathfrak{d} = \{(s)D_0 \mid s \in V \setminus \{0\}\}$. Basta probar que las condiciones del enunciado equivalen a las del teorema 5.37 para el haz $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(D_0)$.

Si $P \in X$ es un punto cerrado y $D \in \mathfrak{d}$, entonces $D = (s)D_0$, para un $s \in V$ no nulo. Pongamos que D_0 está definido por f en un entorno U de P, con lo que D está definido por $sf \in \mathcal{O}_X(U)$. Entonces $P \in \operatorname{sop} D$ si y sólo si $s_Pf_P \in \mathfrak{m}_P$, si y sólo si $s_P \in \mathfrak{m}_P f_P^{-1}\mathcal{O}_{X,P} = \mathfrak{m}_P\mathcal{L}_P$. Ahora es inmediato que la condición a) del enunciado equivale a la condición a) de 5.37.

Con la misma notación anterior, y suponiendo que $P \in \operatorname{sop} D$, la multiplicación por f_P nos da un isomorfismo $\mathfrak{m}_P\mathcal{L}_P/\mathfrak{m}_P^2\mathcal{L}_P \cong \mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2 = (T_PX)^*$.

Cada $s \in V$ (no nulo) tal que $s_P \in \mathfrak{m}_P\mathcal{L}_P$, se corresponde con un divisor entero $D = (s)D_0 \in \mathfrak{d}$ tal que $P \in \operatorname{sop} D$, y su clase en el cociente $\mathfrak{m}_P\mathcal{L}_P/\mathfrak{m}_P^2\mathcal{L}_P$ se corresponde a través del isomorfismo anterior con la clase $[s_Pf_P] \in (T_PX)^*$, donde s_Pf_P es un representante de D_P. Así pues, el conjunto de las clases de los elementos

$$\{s \in V \mid s_P \in \mathfrak{m}_P\mathcal{L}_P\}$$

en $\mathfrak{m}_P\mathcal{L}_P/\mathfrak{m}_P^2\mathcal{L}_P$ (que aparece en la condición b de 5.37), se corresponde a través de un isomorfismo con el conjunto S de las diferenciales $d_Ph \in (T_PX)^*$, donde h define alrededor de P a un divisor $D \in \mathfrak{d}$ tal que $P \in \operatorname{sop} D$. Hemos de probar que estas diferenciales generan $(T_PX)^*$ si y sólo si para todo $t \in T_PX$ no nulo existe un $\phi \in S$ tal que $\phi(t) \neq 0$.

En efecto: sea $V \subset (T_PX)^*$ el subespacio generado por S y sea $W \subset T_PX$ el subespacio anulado por V. Hay que ver que $V = (T_PX)^*$ si y sólo si $W = 0$, pero esto se debe a que

$$\dim_{k(P)} T_PX = \dim_{k(P)} V + \dim_{k(P)} W.$$

■

Capítulo IX

Dualidad

El teorema de dualidad es una generalización del teorema 6.23 (el cual es sólo una parte del teorema de dualidad para el especio proyectivo). Para demostrarlo necesitaremos algunos resultados previos acerca de los funtores Ext sobre haces coherentes y sobre cohomología, a lo que dedicamos la primera sección.

9.1 Preliminares de álgebra homológica

En [5.51] caracterizamos la dimensión proyectiva de un módulo finitamente generado sobre un anillo local en términos del funtor Tor. Aquí vamos a necesitar una caracterización similar en términos de Ext válida para anillos locales regulares. En primer lugar probamos un resultado general que no requiere ninguna hipótesis sobre A:

Teorema 9.1 *Sea A un anillo y M un A-módulo. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

a) $\mathrm{dp}_A M \leq d$.

b) $\mathrm{Ext}^i_A(M,N) = 0$ *para todo A-módulo N y todo $i > d$.*

c) $\mathrm{Ext}^{d+1}_A(M,N) = 0$ *para todo A-módulo N.*

Demostración: a) $\Rightarrow$ b) Podemos calcular $\mathrm{Ext}^i_A(M,N)$ mediante una resolución proyectiva de M de longitud d, y entonces es evidente que se cumple b).

b) $\Rightarrow$ c) es obvio. Veamos que c) $\Rightarrow$ a). Sea

$$\cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{\partial_2} P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\partial_0} M \longrightarrow 0$$

una resolución proyectiva de M y sea $K_{d+1} = \mathrm{N}(\partial_{d+1}) \subset P_{d+1}$. La hipótesis es que, para todo A-módulo N, la sucesión siguiente es exacta:

$$\mathrm{Hom}_A(P_d,N) \xrightarrow{\bar{\partial}_{d+1}} \mathrm{Hom}_A(P_{d+1},N) \xrightarrow{\bar{\partial}_{d+2}} \mathrm{Hom}_A(P_{d+2},N).$$

Teniendo en cuenta que $K \cong P_{d+1}/\,\mathrm{N}(\partial_{d+1})$, es claro que

$$\mathrm{N}(\bar{\partial}_{d+2}) \cong \mathrm{Hom}_A(P_{d+1}/K_{d+1}, N) \cong \mathrm{Hom}_A(K_d, N),$$

y la exactitud se traduce en que todo homomorfismo $\phi : K_d \longrightarrow N$ se extiende a un homomorfismo $\bar{\phi} : P_d \longrightarrow N$. Aplicamos esto cuando $N = K_d$ y $\phi = 1$, lo que nos da un homomorfismo $\bar{\phi} : P_d \longrightarrow K_d$ que extiende a la identidad. Esto implica que $P_d = K_d \oplus K_{d-1}$, luego K_{d-1} es proyectivo y

$$0 \longrightarrow K_{d-1} \longrightarrow P_{d-1} \longrightarrow P_{d-2} \longrightarrow \cdots$$

es una resolución proyectiva de M de longitud d. ■

Nota Si en el teorema anterior suponemos que A es noetheriano y que M es finitamente generado, las condiciones b) y c) pueden restringirse a módulos N finitamente generados. En efecto, en la prueba de c) ⇒ b) podemos partir de una resolución proyectiva de M formada por módulos P_i finitamente generados, y entonces K_d también es finitamente generado. ■

En el caso de anillos locales regulares podemos decir más:

Teorema 9.2 *Sea A un anillo local regular y M un A-módulo finitamente generado. Entonces $\mathrm{dp}_A(M) \leq d$ si y sólo si $\mathrm{Ext}^i_A(M, A) = 0$ para todo $i > d$.*

Demostración: Una implicación es un caso particular del teorema anterior. Si suponemos la hipótesis sobre Ext, es claro que

$$\mathrm{Ext}^i_A(M, A^m) \cong \mathrm{Ext}^i_A(M, A)^m,$$

luego tenemos que $\mathrm{Ext}^i_A(M, L) = 0$ para todo A-módulo libre L de rango finito y todo $i > d$. En virtud del teorema anterior y la nota que le sigue, basta probar que lo mismo es válido para todo A-módulo N finitamente generado, no necesariamente libre.

La clave ahora es el teorema [5.63], según el cual, si $d' = \dim A$, entonces $\mathrm{dp}_A N \leq d'$, para todo A-módulo N finitamente generado, luego por el teorema anterior $\mathrm{Ext}^i_A(M, N) = 0$ para todo $i > d'$. Si $d' \leq d$ no hay nada que probar. Si $d < d'$ consideramos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow L \longrightarrow N \longrightarrow 0,$$

donde L es un A-módulo libre de rango finito. De ella obtenemos una sucesión exacta

$$0 = \mathrm{Ext}^{d'}_A(M, L) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{d'}_A(M, N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{d'+1}_A(M, K) = 0,$$

en la que el primer módulo es nulo porque $d' > d$ y L es libre, y el último porque $d' + 1 > d'$. Concluimos que $\mathrm{Ext}^i_A(M, N) = 0$ para todo $i > d' - 1$, y podemos seguir rebajando la cota hasta llegar a d. ■

Recordemos [2.15] que si X es un espacio anillado y $\mathcal{M}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo, los funtores $\mathrm{Ext}^n_X(\mathcal{M}, -)$ y $\mathcal{E}\mathrm{xt}^n_X(\mathcal{M}, -)$ son, respectivamente, los funtores derivados de los funtores $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, -)$ y $\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, -)$. Ahora vamos a centrarnos en el caso en que X es un esquema y los módulos considerados son haces cuasicoherentes. En primer lugar consideramos el caso de un esquema afín:

Teorema 9.3 *Sea A un anillo noetheriano y $X = \operatorname{Esp} A$. Sean M y N dos A-módulos, y supongamos que M es finitamente generado. Entonces*

$$\mathrm{Ext}^n_X(\widetilde{M}, \widetilde{N}) \cong \mathrm{Ext}^n_A(M, N), \qquad \mathcal{E}\mathrm{xt}^n_X(\widetilde{M}, \widetilde{N}) \cong \widetilde{\mathrm{Ext}^n_A(M, N)}.$$

DEMOSTRACIÓN: Consideremos una resolución libre

$$\cdots \longrightarrow L_2 \longrightarrow L_1 \longrightarrow L_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

donde los A-módulos L_n tienen rango finito. De ella obtenemos una resolución libre

$$\cdots \longrightarrow \widetilde{L}_2 \longrightarrow \widetilde{L}_1 \longrightarrow \widetilde{L}_0 \longrightarrow \widetilde{M} \longrightarrow 0.$$

El teorema [2.19] nos da que podemos calcular los módulos $\mathrm{Ext}^n_A(M, N)$ como los grupos de cohomología del complejo

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(L_0, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(L_1, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_A(L_2, N) \longrightarrow \cdots$$

y los módulos $\mathrm{Ext}^n_X(\widetilde{M}, \widetilde{N})$ como los grupos de cohomología del complejo

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\widetilde{L}_0, \widetilde{N}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\widetilde{L}_1, \widetilde{N}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\widetilde{L}_2, \widetilde{N}) \longrightarrow \cdots$$

Ahora bien, ambos complejos son isomorfos, luego también lo son sus grupos de cohomología. Similarmente, los módulos $\mathcal{E}\mathrm{xt}^n_X(\widetilde{M}, \widetilde{N})$ son los grupos de cohomología del complejo

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{O}_X}(\widetilde{L}_0, \widetilde{N}) \longrightarrow \mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{O}_X}(\widetilde{L}_1, \widetilde{N}) \longrightarrow \mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{O}_X}(\widetilde{L}_2, \widetilde{N}) \longrightarrow \cdots$$

Este complejo es isomorfo a

$$0 \longrightarrow \widetilde{\mathrm{Hom}_A(L_0, N)} \longrightarrow \widetilde{\mathrm{Hom}_A(L_1, N)} \longrightarrow \widetilde{\mathrm{Hom}_A(L_2, N)} \longrightarrow \cdots$$

y basta aplicar el teorema [1.37] al funtor exacto $M \mapsto \widetilde{M}$. ■

Como consecuencia:

Teorema 9.4 *Sea X un esquema localmente noetheriano, sea $\mathcal{M}$ un haz coherente en X y $\mathcal{N}$ un haz cuasicoherente en X. Entonces los haces $\mathcal{E}\mathrm{xt}^n_X(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ son cuasicoherentes y son coherentes si $\mathcal{N}$ lo es.*

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema [2.16] podemos suponer que $X = \operatorname{Esp} A$, con A noetheriano, y entonces $\mathcal{E}\mathrm{xt}^n_X(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ es cuasicoherente por el teorema anterior. La segunda afirmación es consecuencia de que si, en el teorema anterior, N es también finitamente generado, entonces los módulos $\mathrm{Ext}^n_A(M, N)$ son finitamente generados, pues son los grupos de cohomología de un complejo de A-módulos finitamente generados. ■

Teorema 9.5 *Sea X un esquema localmente noetheriano, $\mathcal{F}$ un haz coherente en X y $\mathcal{G}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo arbitrario. Para cada punto $P \in X$ se cumple que*

$$\mathcal{E}\mathrm{xt}^n_X(\mathcal{F}, \mathcal{G})_P \cong \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}_{X,P}}(\mathcal{F}_P, \mathcal{G}_P).$$

Demostración: Notemos que el funtor del segundo miembro es el correspondiente a la categoría $\mathrm{Mod}(\mathcal{O}_{X,P})$ de los $\mathcal{O}_{X,P}$-módulos. En virtud del teorema [2.16] podemos sustituir X por un entorno afín de P, luego podemos suponer que $X = \operatorname{Esp} A$, donde A es un anillo noetheriano. Entonces $\mathcal{F} = \widetilde{M}$, para un cierto A-módulo finitamente generado M. Puesto que todo A-módulo es cociente de un módulo libre, concluimos que $\mathcal{F}$ tiene una resolución libre de rango finito:

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0,$$

que a su vez determina una resolución libre

$$\cdots \mathcal{L}_{1P} \longrightarrow \mathcal{L}_{0P} \longrightarrow \mathcal{F}_P \longrightarrow 0.$$

Según el teorema [2.19], podemos calcular los módulos del enunciado como los grupos de cohomología de los complejos

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}_0, \mathcal{G}) \longrightarrow \mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}_1, \mathcal{G}) \longrightarrow \cdots$$

y

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,P}}(\mathcal{L}_{0P}, \mathcal{G}_P) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,P}}(\mathcal{L}_{1P}, \mathcal{G}_P) \longrightarrow \cdots$$

(Observemos que en la categoría $\mathrm{Mod}(\mathcal{O}_{X,P})$ se cumple que Hom y $\mathcal{H}$om son lo mismo.) Veamos ahora que

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,P}}(\mathcal{L}_{nP}, \mathcal{G}_P) \cong \mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}_n, \mathcal{G})_P.$$

En efecto, definimos un homomorfismo

$$\phi : \mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}_n, \mathcal{G})_P \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,P}}(\mathcal{L}_{nP}, \mathcal{G}_P)$$

mediante $\phi([\alpha]) = \alpha_P$. Para probar que es un isomorfismo tomamos un entorno afín U de P tal que $\mathcal{L}_n|_U \cong \mathcal{O}_U^r$ y fijamos una base $s_1, \ldots, s_r \in \mathcal{L}_n(U)$, de modo que si $V \subset U$ es un abierto, entonces los $s_i|_V$ forman una base de $\mathcal{L}_n(V)$. Definimos

$$\psi : \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,P}}(\mathcal{L}_{nP}, \mathcal{G}_P) \longrightarrow \mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}_n, \mathcal{G})_P$$

de la forma siguiente: dado $f : \mathcal{L}_{nP} \longrightarrow \mathcal{G}_P$, pongamos que $f(s_{iP}) = [t_i]$, donde podemos suponer que $t_i \in \mathcal{G}(V)$, para un mismo abierto $V \subset U$ independiente de i. Para cada abierto $W \subset V$, definimos $\psi_0(f)_W : \mathcal{L}_n(W) \longrightarrow \mathcal{G}(W)$ mediante $\psi_0(f)_W(s_i|_W) = t_i|_W$. Estos homomorfismos definen a su vez un homomorfismo $\psi_0(f) \in \mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}_n, \mathcal{G})(V)$ y definimos $\psi(f) = [\psi_0(f)]$. Es fácil ver que ϕ y ψ son mutuamente inversos. Más aún, es fácil ver que tenemos un isomorfismo de funtores

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X,P}}(-, \mathcal{G}_P) \cong \mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{O}_X}(-, \mathcal{G})_P.$$

Esto implica que los módulos $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}_{X,P}}(\mathcal{F}_P, \mathcal{G}_P)$ pueden calcularse como los grupos de cohomología del complejo

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}_0, \mathcal{G})_P \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}_1, \mathcal{G})_P \longrightarrow \cdots,$$

que se obtiene del complejo

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}_0, \mathcal{G}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}_1, \mathcal{G}) \longrightarrow \cdots,$$

aplicando el funtor exacto $\mathrm{Mod}(X) \longrightarrow \mathrm{Mod}(\mathcal{O}_{X,P})$ dado por $\mathcal{M} \mapsto \mathcal{M}_P$. Ahora basta aplicar el teorema [1.37]. ■

Teorema 9.6 *Sea A un anillo noetheriano y X/A un esquema proyectivo. Sea $\mathcal{O}_X(1)$ un haz muy amplio en X y sean $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ dos haces coherentes en X. Entonces para cada $i \geq 0$ existe un natural $n_0 > 0$ (que depende de $\mathcal{M}$, de $\mathcal{N}$ y de i) tal que para todo $n \geq n_0$ se cumple que*

$$\mathrm{Ext}^i_X(\mathcal{M}, \mathcal{N}(n)) \cong \mathcal{E}\mathrm{xt}^i_X(\mathcal{M}, \mathcal{N}(n))(X).$$

Demostración: Para $i = 0$ se cumple para todo n, por definición de los funtores Hom y $\mathcal{H}$om. Así pues, podemos suponer $i \geq 1$. Consideremos ahora el caso en que $\mathcal{M} = \mathcal{O}_X$. Entonces el miembro izquierdo es $H^i(X, \mathcal{N}(n))$ por [2.17], y es nulo para n suficientemente grande por el teorema 6.21. El miembro derecho es siempre nulo por [2.17], luego en este caso se cumple el teorema.

Supongamos ahora que $\mathcal{M}$ es localmente libre. Entonces aplicamos el teorema [2.21], según el cual

$$\mathrm{Ext}^i_X(\mathcal{M}, \mathcal{N}(n)) \cong \mathrm{Ext}^i_X(\mathcal{O}_X, (\mathcal{M}^* \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N})(n)),$$

$$\mathcal{E}\mathrm{xt}^i_X(\mathcal{M}, \mathcal{N}(n)) \cong \mathcal{E}\mathrm{xt}^i_X(\mathcal{O}_X, (\mathcal{M}^* \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{N})(n)),$$

y basta aplicar el caso anterior.

Pasemos ya al caso en que M es arbitrario. El teorema 5.43 nos da una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0,$$

donde $\mathcal{L}$ es localmente libre de rango finito. Por la parte ya probada, para n suficientemente grande, el teorema [2.18] nos da una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N}(n)) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{N}(n)) \longrightarrow$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{P}, \mathcal{N}(n)) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_X(\mathcal{M}, \mathcal{N}(n)) \longrightarrow 0$$

e isomorfismos $\mathrm{Ext}^i_X(\mathcal{P}, \mathcal{N}(n)) \cong \mathrm{Ext}^{i+1}_X(\mathcal{M}, \mathcal{N}(n))$ para $i \geq 1$, e igualmente con $\mathcal{H}$om y $\mathcal{E}$xt. El teorema 6.22 nos da la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N}(n))(m) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{N}(n))(m) \longrightarrow$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{P}, \mathcal{N}(n))(m) \longrightarrow \mathcal{E}\mathrm{xt}^1_X(\mathcal{M}, \mathcal{N}(n))(m)(X) \longrightarrow 0$$

para todo m suficientemente grande.

El teorema [2.21] nos permite sumar la m a la n, luego, para todo n suficientemente grande, tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{N}(n)) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{N}(n)) \longrightarrow$$
$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{P}, \mathcal{N}(n)) \longrightarrow \mathcal{E}\mathrm{xt}^1_X(\mathcal{M}, \mathcal{N}(n))(X) \longrightarrow 0.$$

Comparando las dos sucesiones exactas obtenemos el isomorfismo del enunciado para $i = 1$. Los isomorfismos

$$\operatorname{Ext}^i_X(\mathcal{P}, \mathcal{N}(n)) \cong \operatorname{Ext}^{i+1}_X(\mathcal{M}, \mathcal{N}(n)), \quad \mathcal{E}\mathrm{xt}^i_X(\mathcal{P}, \mathcal{N}(n)) \cong \mathcal{E}\mathrm{xt}^{i+1}_X(\mathcal{M}, \mathcal{N}(n)),$$

nos dan inductivamente el teorema para todo i. ■

Para terminar demostraremos una versión "dual" del teorema [1.50]. El principal problema con que nos encontramos es que, en general, las categoría de módulos sobre un espacio anillado no tienen suficientes módulos proyectivos, en el sentido de que no siempre es posible expresar un módulo como imagen de un módulo proyectivo. No obstante, si nos restringimos a considerar haces coherentes sobre un esquema proyectivo X/A, donde A es un anillo noetheriano, entonces es posible sustituir los $\mathcal{O}_X$-módulos proyectivos por módulos de la forma $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(-q)^m$, donde q, $m \geq 0$. Nos apoyaremos en dos hechos:

Por una parte, el teorema 5.43 nos da que si $\mathcal{M}$ es un haz coherente en X, existe un epimorfismo $\mathcal{O}_X(-q)^m \longrightarrow \mathcal{M}$, donde q puede tomarse arbitrariamente grande.

En segundo lugar, si $0 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{P} \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta de haces coherentes sobre X y $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(-q)^m$, tenemos que

$$\operatorname{Ext}^1_X(\mathcal{L}, \mathcal{M}) \cong \operatorname{Ext}^1_X(\mathcal{O}_X(-q), \mathcal{M})^m \cong \operatorname{Ext}^1_X(\mathcal{O}_X, \mathcal{M}(q))^m$$
$$\cong H^1(X, \mathcal{M}(q))^m = 0$$

si q es suficientemente grande, por el teorema 6.21. A su vez, esto implica que el homomorfismo natural $\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{N}) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{P})$ es suprayectivo, es decir, que $\mathcal{L}$ cumple la definición de módulo proyectivo para el epimorfismo prefijado $\mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{P}$. Naturalmente, tomando q suficientemente grande podemos exigir que la cumpla para cualquier conjunto finito de epimorfismos.

Con estas consideraciones podemos probar el resultado que necesitamos:

Teorema 9.7 *Sea A un anillo noetheriano y sea X/A un esquema proyectivo. Sea $\mathfrak{C}$ la categoría de los haces coherentes sobre X y sea $(T^n)_{n\geq 0}$ una familia de funtores contravariantes $\mathfrak{C} \longrightarrow \operatorname{Mod}(Y)$, donde Y es cualquier espacio anillado. Supongamos que la familia dada tiene un homomorfismo de conexión y que para cada $n \geq 1$ y cada $\mathcal{M} \in \mathfrak{C}$ existe un $q_0 \geq 0$ tal que si $q \geq q_0$ entonces $T^n(\mathcal{O}_X(-q)^m) = 0$. Entonces la familia de funtores es universal.*

DEMOSTRACIÓN: Sea (T'^n) otra familia de funtores contravariantes y sea $\eta_0 : T^0 \longrightarrow T'^0$ una transformación natural. Tomemos un $\mathcal{M} \in \mathfrak{C}$ y sea $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(-q)^m$ tal que $T^1\mathcal{L} = 0$ y que exista una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0.$$

Observemos que entonces $\mathcal{N}$ también es coherente. Tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & T^0\mathcal{M} \arrow[r] \arrow[d, "\eta_{0\mathcal{M}}"'] & T^0\mathcal{L} \arrow[r] \arrow[d, "\eta_{0\mathcal{L}}"'] & T^0\mathcal{N} \arrow[r] \arrow[d, "\eta_{0\mathcal{N}}"'] & T^1\mathcal{M} \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\eta_{1\mathcal{M}}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & T'^0\mathcal{M} \arrow[r] & T'^0\mathcal{L} \arrow[r] & T'^0\mathcal{N} \arrow[r] & T'^1\mathcal{M} \arrow[r] & T'^1\mathcal{L}
\end{tikzcd}$$

que claramente nos da un único homomorfismo $\eta_{1\mathcal{M}}$ que conmuta con los homomorfismos de conexión. Hemos de probar que no depende de la elección de la sucesión exacta con la que se calcula.

Consideremos ahora un homomorfismo $\alpha : \mathcal{M}' \longrightarrow \mathcal{M}$ de haces coherentes y tomemos $\mathcal{L}'$ de forma análoga pero exigiendo además que $\operatorname{Ext}^1_X(\mathcal{L}', \mathcal{N}) = 0$. Esto nos permite formar un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{N}' \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{L}' \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{M}' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{N} \arrow[r] & \mathcal{L} \arrow[r] & \mathcal{M} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

(La flecha vertical derecha es el homomorfismo dado, la central existe por la propiedad que hemos exigido a $\mathcal{L}'$ y la izquierda existe por la exactitud de las filas.)

Este diagrama induce a su vez dos diagramas conmutativos para las sucesiones exactas largas asociadas a los dos funtores, de los que se desprende fácilmente la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd}
T^1\mathcal{M}' \arrow[r, "T^1\alpha"] \arrow[d, "\eta_{1\mathcal{M}'}"'] & T^1\mathcal{M} \arrow[d, "\eta_{1\mathcal{M}}"] \\
T'^1\mathcal{M}' \arrow[r, "T'^1\alpha"'] & T'^1\mathcal{M}
\end{tikzcd}$$

En particular, si tenemos dos construcciones de $\eta_{1\mathcal{M}}$, con dos haces $\mathcal{L}$ y $\mathcal{L}'$, podemos tomar un tercer $\mathcal{L}''$ que cumpla $\operatorname{Ext}^1_X(\mathcal{L}'', \mathcal{N}) = 0$ y $\operatorname{Ext}^1_X(\mathcal{L}'', \mathcal{N}') = 0$, con lo que obtenemos dos diagramas conmutativos como el anterior (para α la identidad en $\mathcal{M}$) que muestran que los tres homomorfismos $\eta_{1\mathcal{M}}$ son el mismo.

Esto prueba que $\eta_1 : T^1 \longrightarrow T'^1$ es una transformación natural bien definida.

Ahora el mismo argumento usado en el teorema [1.50] (con las mínimas modificaciones obvias) demuestra que η_1 conmuta con todos los homomorfismos de conexión entre sucesiones exactas de haces coherentes, por lo que es la única transformación natural con esta propiedad.

Supuestos definidos $\eta_1, \ldots, \eta_n$, tomamos $\mathcal{M} \in \mathfrak{C}$ y un $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(-q)^m$ tal que $T^n\mathcal{L} = T^{n+1}\mathcal{L} = 0$ y que exista una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow 0.$$

Entonces tenemos un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] & T^n\mathcal{N} \arrow[r] \arrow[d, "\eta_n\mathcal{N}"'] & T^{n+1}\mathcal{M} \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\eta_{n+1}\mathcal{M}"] & 0 \\
 & T'^n\mathcal{L} \arrow[r] & T'^n\mathcal{N} \arrow[r] & T^{n+1}\mathcal{M} \arrow[r] & T^{n+1}\mathcal{L}
\end{tikzcd}$$

La comprobación de que η_{n+1} así definida es la única transformación natural que conmuta con los homomorfismos de conexión es más simple que la que hemos visto para η_1. ■

9.2 Haces dualizantes

Tal y como hemos avanzado al principio del capítulo, nuestro propósito es generalizar el teorema 6.23. Empezamos introduciendo el concepto de haz dualizante, que nos permitirá reformular este teorema de una forma más adecuada. Nos vamos a restringir al caso de esquemas definidos sobre un cuerpo k.

Definición 9.8 Sea k un cuerpo y X/k un esquema propio de dimensión n. Un *haz dualizante* en X es un haz coherente ω_X° juntamente con una *traza* $t : H^n(X, \omega_X^\circ) \longrightarrow k$ de modo que, para cada haz coherente $\mathcal{M}$ en X, la forma bilineal natural

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \omega_X^\circ) \times H^n(X, \mathcal{M}) \longrightarrow H^n(X, \omega_X^\circ) \xrightarrow{t} k,$$

compuesta con t, es regular o, lo que es lo mismo, induce un isomorfismo

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \omega_X^\circ) \longrightarrow H^n(X, \mathcal{M})^*,$$

donde el asterisco denota el espacio vectorial dual.

En estos términos, el teorema 6.23 afirma que el espacio proyectivo $X = \mathrm{P}_k^r$ tiene un haz dualizante, que es concretamente $\omega_X^\circ = \mathcal{O}_X(-r-1)$. El teorema siguiente demuestra que es el único:

Teorema 9.9 *Sea k un cuerpo y X/k un esquema propio. Si X tiene un haz dualizante, éste es único. Más precisamente, si ω_X° es un haz dualizante con traza t y el par (ω', t') cumple lo mismo, entonces existe un único isomorfismo $\phi : \omega_X^\circ \longrightarrow \omega'$ tal que $t = H^n(X, \phi) \circ t'$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea n la dimensión de X. Como ω' es dualizante, existe un isomorfismo

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\omega_X^\circ, \omega') \cong H^n(X, \omega_X^\circ)^*,$$

luego existe un único homomorfismo $\phi : \omega_X^\circ \longrightarrow \omega'$ que se corresponda con t' por dicho isomorfismo, es decir, que cumpla que $t = H^n(X, \phi) \circ t'$. Invirtiendo los papeles, obtenemos un único homomorfismo $\psi : \omega' \longrightarrow \omega_X^\circ$ de manera que $t' = H^n(X, \psi) \circ t$. Consecuentemente, $t = H^n(X, \phi \circ \psi) \circ t$.

Por otra parte, tenemos un isomorfismo

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\omega_X^\circ, \omega_X^\circ) \cong H^n(X, \omega_X^\circ)^*,$$

y la igualdad anterior prueba que la imagen de $\phi \circ \psi$ es t, pero la identidad también tiene imagen t, luego $\phi \circ \psi = 1$. Igualmente concluimos que $\psi \circ \phi = 1$, luego ϕ es un isomorfismo. ∎

A continuación demostramos que un haz dualizante cumple, de hecho, más de lo que exige la definición:

Teorema 9.10 *Sea k un cuerpo y X/k un esquema proyectivo de dimensión n que admite un haz dualizante ω_X°. Para cada haz coherente $\mathcal{M}$ existen homomorfismos naturales*

$$\theta^i_{\mathcal{M}} : \mathrm{Ext}^i_X(\mathcal{M}, \omega_X^\circ) \longrightarrow H^{n-i}(X, \mathcal{M})^*$$

para todo $i \geq 0$, de modo que para $i = 0$ se trata del isomorfismo natural dado por la definición de haz dualizante. Además las afirmaciones siguientes son equivalentes:

a) Los homomorfismos $\theta^i_{\mathcal{M}}$ son isomorfismos.

b) Fijado un haz muy amplio $\mathcal{O}_X(1)$, para todo haz localmente libre $\mathcal{L}$ sobre X, existe un natural q_0 tal que si $q \geq q_0$ entonces $H^i(X, \mathcal{L}(-q)) = 0$ para todo $i < n$.

c) X es un esquema equidimensional de Cohen-Macaulay.

Demostración: Llamemos $\mathfrak{C}$ a la categoría de los haces coherentes en X y consideremos a $\mathrm{Ext}^i_X(-, \omega_X^\circ)$ y $H^{n-i}(X, -)^*$ como funtores contravariantes $\mathfrak{C} \longrightarrow \mathrm{Mod}(k)$ para todo $i \geq 0$ (entendiendo que $H^{n-i}(X, -)^*$ es el funtor nulo si $n - i < 0$).

Si $X \in \mathfrak{C}$, entonces $H^i(X, \mathcal{M}) = 0$ para $i > n$ (teorema 6.16), por lo que la sucesión exacta larga asociada a una sucesión exacta corta de haces coherentes es finita. Al calcula su sucesión dual, obtenemos una sucesión exacta que empieza con $H^n(X, -)^*$ y termina con $H^0(X, -)^*$. Esto significa que, si definimos $H^i(X, -)$ como el funtor nulo cuando $i < 0$, entonces la familia de funtores $\{H^{n-i}(X, -)^*\}_{i \geq 0}$ tiene un homomorfismo de conexión. Lo mismo es cierto para la familia $\{\mathrm{Ext}^i_X(-, \omega_X^\circ)\}_{i \geq 0}$ (sobre $\mathrm{Mod}(X)$ y, en particular, sobre $\mathfrak{C}$) por el teorema [2.18].

Si $\mathcal{M} \in \mathfrak{C}$. Por el teorema 5.43, existe un epimorfismo $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(-q)^m \longrightarrow \mathcal{M}$, y en la prueba se ve que podemos tomar $q > 0$ arbitrariamente grande. Entonces

$$\mathrm{Ext}^i_X(\mathcal{L}, \omega_X^\circ) \cong \mathrm{Ext}^i_X(\mathcal{O}_X(-q), \omega_X^\circ)^m \cong \mathrm{Ext}^i_X(\mathcal{O}_X, \omega_X^\circ(q))^m$$

$$\cong H^i(X, \omega_X^\circ(q))^m = 0,$$

para $i > 0$, por el teorema 6.21.

Esto significa que la familia de funtores $\{\mathrm{Ext}^i_X(-,\omega^\circ_X)\}_{i\geq 0}$ cumple las hipótesis del teorema 9.7, luego es universal y esto nos da las transformaciones naturales θ^i.

Si suponemos b), también es universal la segunda familia de funtores, pues

$$H^{n-i}(X,\mathcal{L})^* \cong H^{n-i}(X,\mathcal{O}_X(-q))^{*m} = 0$$

para $i>0$ y q suficientemente grande. Esto implica a).

Recíprocamente, si tenemos a) y $\mathcal{L}$ es un haz localmente libre, entonces, para $i<n$

$$H^i(X,\mathcal{L}(-q)) \cong H^i(X,\mathcal{L}(-q))^* \cong \mathrm{Ext}^{n-i}_X(\mathcal{L}(-q),\omega^\circ_X)$$
$$\cong \mathrm{Ext}^{n-i}_X(\mathcal{O}_X,(\mathcal{L}^*\otimes_{\mathcal{O}_X}\omega^\circ_X)(q)) \cong H^{n-i}(X,(\mathcal{L}^*\otimes_{\mathcal{O}_X}\omega^\circ_X)(q)) = 0$$

para q suficientemente grande, por el teorema 6.21.

Notemos que para probar b) $\Rightarrow$ a) sólo hemos usado que $H^i(X,\mathcal{O}_X(-q))=0$ para todo $i<n$ y todo q suficientemente grande. El teorema 6.19 muestra que $X=\mathrm{P}^r_k$ cumple esta hipótesis, luego a) es válido para los espacios proyectivos.

Supongamos ahora c), es decir, que todas las componentes irreducibles de X tienen la misma dimensión n y que todos los anillos locales $\mathcal{O}_{X,P}$ son anillos de Cohen-Macaulay. Fijemos una inmersión cerrada $j:X\longrightarrow \mathrm{P}^r_k$. Consideremos un haz $\mathcal{L}$ localmente libre sobre X y un punto cerrado $P\in X$. Entonces $\mathrm{pr}\,\mathcal{O}_{X,P} = \dim \mathcal{O}_{X,P} = n$ y $\mathcal{L}_P$ es un $\mathcal{O}_{X,P}$-módulo libre.

Es inmediato comprobar que una sucesión en $\mathfrak{m}_{X,P}$ es $\mathcal{L}_P$-regular si y sólo si es $\mathcal{O}_{X,P}$-regular, luego también se cumple que $\mathrm{pr}\,\mathcal{L}_P=n$. Por otra parte, el epimorfismo $j^\#_P:\mathcal{O}_{\mathrm{P}^r_k,P}\longrightarrow \mathcal{O}_{X,P}$ nos permite considerar a $\mathcal{L}_P$ como $\mathcal{O}_{\mathrm{P}^r_k,P}$-módulo, y también es claro que las imágenes y antiimágenes de sucesiones $\mathcal{L}_P$-regulares son sucesiones $\mathcal{L}_P$-regulares, por lo que $\mathrm{pr}_{\mathcal{O}_{\mathrm{P}^r_k,P}}\mathcal{L}_P = \mathrm{pr}_{\mathcal{O}_{X,P}}\mathcal{L}_P = n$.

Ahora bien, el esquema P^r_k es regular y P es un punto cerrado, por lo que $\mathcal{O}_{\mathrm{P}^r_k,P}$ es un anillo local regular de dimensión r. El teorema [5.59] nos da que la dimensión proyectiva de $\mathcal{L}_P$ (como $\mathcal{O}_{\mathrm{P}^r_k,P}$-módulo) es:

$$\mathrm{dp}_{\mathcal{O}_{\mathrm{P}^r_k,P}}\mathcal{L}_P = r-n.$$

Por las observaciones previas al teorema [2.19], los funtores $\mathrm{Ext}^m_{\mathcal{O}_{\mathrm{P}^r_k,P}}(\mathcal{L}_P,-)$ pueden calcularse mediante una resolución proyectiva de $\mathcal{L}_P$, luego (considerando además 9.5) concluimos que

$$\mathcal{E}\mathrm{xt}^i_{\mathrm{P}^r_k}(j_*\mathcal{L},-)_P = \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_{\mathrm{P}^r_k,P}}(\mathcal{L}_P,-_P) = 0$$

para $i>r-n$. En principio hemos probado esto para todo punto cerrado $P\in X$, pero si $P\in \mathrm{P}^r_k\setminus X$, entonces $(j_*\mathcal{L})_P=0$, luego también concluimos que $\mathcal{E}\mathrm{xt}^i_{\mathrm{P}^r_k}(j_*\mathcal{L},-)_P=0$. Los teoremas 9.4 y [3.9] nos dan que $\mathcal{E}\mathrm{xt}^i_{\mathrm{P}^r_k}(j_*\mathcal{L},-)=0$ (sobre la categoría de los haces cuasicoherentes en P^r_k).

Recordemos ahora que hemos probado que a) es válido para P_k^r, luego tenemos que

$$H^i(X,\mathcal{L}(-q))^* \cong H^i(\mathrm{P}_k^r, j_*\mathcal{L}(-q)) \cong \mathrm{Ext}^{r-i}_{\mathrm{P}_k^r}(j_*\mathcal{L}, \omega^\circ_{\mathrm{P}_k^r}(q))$$

$$\cong \mathcal{E}\mathrm{xt}^{r-i}_{\mathrm{P}_k^r}(j_*\mathcal{L}, \omega^\circ_{\mathrm{P}_k^r}(q))(\mathrm{P}_k^r) = 0,$$

para $r-i > r-n$ y q suficientemente grande. (Hemos usado además 6.20, [2.21] y 9.6.) Así pues, $H^i(X,\mathcal{L}(-q)) = 0$ para $i < n$ y q suficientemente grande. Esto es b).

Supongamos finalmente b) y probaremos c). Fijamos al igual que antes una inmersión cerrada $j : X \longrightarrow \mathrm{P}_k^r$ y aplicamos a) al esquema P_k^r:

$$\mathcal{E}\mathrm{xt}^i_{\mathrm{P}_k^r}(j_*\mathcal{O}_X, \omega^\circ_{\mathrm{P}_k^r})(q)(\mathrm{P}_k^r) \cong \mathcal{E}\mathrm{xt}^i_{\mathrm{P}_k^r}(j_*\mathcal{O}_X, \omega^\circ_{\mathrm{P}_k^r}(q))(\mathrm{P}_k^r) \cong \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{P}_k^r}(j_*\mathcal{O}_X, \omega^\circ_{\mathrm{P}_k^r}(q))$$

$$\cong \mathrm{Ext}^i_{\mathrm{P}_k^r}(j_*\mathcal{O}_X(-q), \omega^\circ_{\mathrm{P}_k^r}) \cong H^{r-i}(\mathrm{P}_k^r, j_*\mathcal{O}_X(-q))^* \cong H^{r-i}(X, \mathcal{O}_X(-q))^*.$$

Estos isomorfismos son válidos para q suficientemente grande, y b) aplicado a $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X$ nos da que $\mathcal{E}\mathrm{xt}^i_{\mathrm{P}_k^r}(j_*\mathcal{O}_X, \omega^\circ_{\mathrm{P}_k^r})(q)(\mathrm{P}_k^r) = 0$ para $i > r-n$. Ahora bien, si q es suficientemente grande el haz coherente $\mathcal{E}\mathrm{xt}^i_{\mathrm{P}_k^r}(j_*\mathcal{O}_X, \omega^\circ_{\mathrm{P}_k^r})(q)$ admite un generador global (teorema 5.41), luego concluimos que $\mathcal{E}\mathrm{xt}^i_{\mathrm{P}_k^r}(j_*\mathcal{O}_X, \omega^\circ_{\mathrm{P}_k^r})(q) = 0$, lo que a su vez implica que $\mathcal{E}\mathrm{xt}^i_{\mathrm{P}_k^r}(j_*\mathcal{O}_X, \omega^\circ_{\mathrm{P}_k^r}) = 0$ para $i > r-n$.

Si $P \in X$ es un punto cerrado, deducimos que

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_{\mathrm{P}_k^r,P}}(\mathcal{O}_{X,P}, \mathcal{O}_{\mathrm{P}_k^r,P}(-r-1)) = 0,$$

lo que a su vez implica que $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_{\mathrm{P}_k^r,P}}(\mathcal{O}_{X,P}, \mathcal{O}_{\mathrm{P}_k^r,P}) = 0$, para $i > r-n$. El teorema 9.2 nos da que $\mathrm{dp}_{\mathcal{O}_{\mathrm{P}_k^r,P}} \mathcal{O}_{X,P} \leq r-n$, y el teorema [5.59] implica entonces que

$$\mathrm{pr}_{\mathcal{O}_{X,P}} \mathcal{O}_{X,P} = \mathrm{pr}_{\mathcal{O}_{\mathrm{P}_k^r,P}} \mathcal{O}_{X,P} \geq n = \dim X \geq \dim \mathcal{O}_{X,P} \geq \mathrm{pr}_{\mathcal{O}_{X,P}} \mathcal{O}_{X,P},$$

luego todas las desigualdades son igualdades, y $\mathcal{O}_{X,P}$ resulta ser un anillo de Cohen-Macaulay de dimensión n. El hecho de que $\dim \mathcal{O}_{X,P} = \dim X$ para todo punto cerrado $P \in X$ implica claramente que X es equidimensional. Finalmente, el teorema [5.43] implica que $\mathcal{O}_{X,P}$ es un anillo de Cohen-Macaulay para todo punto $P \in X$, no necesariamente cerrado. Así pues, X es un esquema de Cohen-Macaulay. ■

La demostración de c) $\Rightarrow$ b) puede adaptarse para probar un resultado de interés:

Teorema 9.11 (Lema de Enriques-Severi-Zariski) *Sea X un esquema proyectivo normal de dimensión ≥ 2 y $\mathcal{L}$ un haz localmente libre en X. Entonces $H^1(X,\mathcal{L}(-q)) = 0$ para todo q suficientemente grande.*

Demostración: Si $P \in X$ es un punto cerrado, tenemos que $\mathcal{O}_{X,P}$ es un dominio íntegro local íntegramente cerrado de dimensión ≥ 2. El teorema siguiente prueba que $\operatorname{pr}\mathcal{O}_{X,P} \geq 2$, y todo el argumento empleado en la prueba de c) $\Rightarrow$ b) en el teorema anterior sigue siendo válido sin más que cambiar "$= n$" por "≥ 2". Consecuentemente, la conclusión no es válida para $i < n$ sino para $i < 2$, es decir, para $i = 1$. ■

Teorema 9.12 *Todo dominio íntegro noetheriano local íntegramente cerrado de dimensión ≥ 2 tiene profundidad ≥ 2.*

Demostración: Sea A un anillo en las condiciones del enunciado, sea $\mathfrak{m}$ su ideal maximal y sea K su cuerpo de cocientes. Fijemos cualquier $a \in \mathfrak{m}$ no nulo (que será regular) y hemos de probar que $\mathfrak{m}/(a)$ contiene un elemento regular. En caso contrario, $\mathfrak{m}/(a)$ es un primo asociado de $A/(a)$, es decir, existe un $[b] \in A/(a)$ no nulo tal que $\mathfrak{m}/(a)$ es el anulador de $[b]$.

Llamemos $\mathfrak{m}^{-1} = \{c \in K \mid c\,\mathfrak{m} \subset A\}$, que es un A-submódulo de K que contiene a A. Además, $c = b/a \in \mathfrak{m}^{-1} \setminus A$, por lo que $A \subsetneq \mathfrak{m}^{-1}$.

Veamos ahora que $\mathfrak{m}\mathfrak{m}^{-1} = A$ (donde el producto ha de entenderse como el A-submódulo de K generado por los productos de elementos de ambos factores). Obviamente $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}\mathfrak{m}^{-1} \subset A$. Si no se da la igualdad $\mathfrak{m}\mathfrak{m}^{-1} = A$, ha de ser $\mathfrak{m}\mathfrak{m}^{-1} = \mathfrak{m}$, de donde $\mathfrak{m}(\mathfrak{m}^{-1})^n = \mathfrak{m} \subset A$ para todo $n \geq 1$.

Fijemos un $m \in \mathfrak{m}$ no nulo y sea $c \in \mathfrak{m}^{-1}$. Entonces $mc^n \in A$ para todo $n \geq 0$, luego $A[c] \subset m^{-1}A$, y $m^{-1}A$ es un A-módulo finitamente generado. Como A es noetheriano, $A[c]$ es también finitamente generado, luego c es entero sobre A. Como A es íntegramente cerrado, concluimos que $c \in A$. En definitiva, concluimos que $\mathfrak{m}^{-1} \subset A$, contradicción.

Por [4.22] sabemos que $\bigcap_n \mathfrak{m}^n = 0$, luego $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{m}^2$. Tomemos $d \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{m}^2$, de modo que $d\mathfrak{m}^{-1} \subset A$. Si fuera $d\mathfrak{m}^{-1} \subset \mathfrak{m}$, entonces $dA = d\mathfrak{m}\mathfrak{m}^{-1} \subset \mathfrak{m}^2$, contradicción. Así pues, ha de ser $d\mathfrak{m}^{-1} = A$, de donde

$$(d) = dA = d\mathfrak{m}\mathfrak{m}^{-1} = \mathfrak{m}A = \mathfrak{m}.$$

En definitiva, $\mathfrak{m}$ es un ideal principal, pero entonces, el teorema de los ideales principales [5.2] implica que $\dim A = \operatorname{alt}\mathfrak{m} \leq 1$, en contradicción con la hipótesis. ■

Para demostrar la existencia de haces dualizantes necesitamos algunos resultados previos.

Teorema 9.13 *Sea k un cuerpo e $i : X \longrightarrow \mathrm{P}_k^r$ una inmersión cerrada de codimensión n. Entonces, para todo $j < n$, $\mathcal{E}\mathrm{xt}^j_{\mathrm{P}_k^r}(i_*\mathcal{O}_X, \omega^\circ_{\mathrm{P}_k^r}) = 0$.*

Demostración: Por el teorema 5.18 tenemos que $i_*\mathcal{O}_X$ es un haz coherente en P_k^r y por 9.4 también son coherentes los haces $\mathcal{F}^j = \mathcal{E}\mathrm{xt}^j_{\mathrm{P}_k^r}(i_*\mathcal{O}_X, \omega^\circ_{\mathrm{P}_k^r})$. Por el teorema 5.41 los módulos $\mathcal{F}^j(q)$ admiten un generador global para q suficientemente grande, luego si probamos que $\mathcal{F}^j(q)(X) = 0$ para q grande, tendremos también que $\mathcal{F}^j(q) = 0$ y, por lo tanto, que $\mathcal{F}^j = 0$. Ahora bien, por [2.21],

$$\mathcal{F}^j(q) = \mathcal{E}\mathrm{xt}^j_{\mathrm{P}^r_k}(i_*\mathcal{O}_X, \omega^\circ_{\mathrm{P}^r_k}) \otimes_{\mathrm{P}^r_k} \mathcal{O}_{\mathrm{P}^r_k}(q) \cong \mathcal{E}\mathrm{xt}^j_{\mathrm{P}^r_k}(i_*\mathcal{O}_X, \omega^\circ_{\mathrm{P}^r_k}(q))$$

y por 9.6 (siempre para q suficientemente grande)

$$\mathcal{F}^j(q)(X) \cong \mathrm{Ext}^j_{\mathrm{P}^r_k}(i_*\mathcal{O}_X(-q), \omega^\circ_{\mathrm{P}^r_k}).$$

Por el teorema 9.10 (aplicado a P^r_k) y 6.20 tenemos que

$$\mathcal{F}^j(q)(X) \cong H^{r-j}(\mathrm{P}^r_k, i_*\mathcal{O}_X(-q))^* \cong H^{r-j}(X, \mathcal{O}_X(-q))^*.$$

Finalmente, si $j < n$, entonces $r - j > r - n = \dim X$, luego $\mathcal{F}^j(q)(X) = 0$ por 6.16. ■

En la prueba del teorema siguiente necesitaremos un hecho elemental sobre módulos inyectivos: si $\mathcal{I} \oplus \mathcal{J}$ es un $\mathcal{O}_X$-módulo inyectivo, también lo es cada sumando directo. En efecto, si $\phi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{I}$ es un homomorfismo y $\psi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ es un monomorfismo, por la inyectividad de la suma existe un homomorfismo $\bar{\phi}_1 : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{I} \oplus \mathcal{J}$ tal que $\psi \circ \bar{\phi}_1 = \phi$, luego $\bar{\phi} = \bar{\phi}_1 \circ \pi_1 : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{I}$ cumple que $\psi \circ \bar{\phi} = \phi$. Esto prueba la inyectividad de $\mathcal{I}$. El recíproco es igual de elemental, aunque no lo necesitamos.

Teorema 9.14 *Sea k un cuerpo e $i : X \longrightarrow \mathrm{P}^r_k$ una inmersión cerrada de codimensión n. Llamemos*

$$\omega^\circ_X = i^*\mathcal{E}\mathrm{xt}^n_{\mathrm{P}^r_k}(i_*\mathcal{O}_X, \omega^\circ_{\mathrm{P}^r_k}).$$

Entonces existe un isomorfismo natural de k-espacios vectoriales

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \omega^\circ_X) \cong \mathrm{Ext}^n_{\mathrm{P}^r_k}(i_*\mathcal{M}, \omega^\circ_{\mathrm{P}^r_k})$$

para todo $\mathcal{O}_X$-módulo $\mathcal{M}$.

Demostración: Observemos en primer lugar que, si U es un abierto en P^r_k disjunto con X, se cumple que

$$\mathcal{E}\mathrm{xt}^n_{\mathrm{P}^r_k}(i_*\mathcal{O}_X, \omega^\circ_{\mathrm{P}^r_k})|_U \cong \mathcal{E}\mathrm{xt}^n_U((i_*\mathcal{O}_X)|_U, \omega^\circ_{\mathrm{P}^r_k}|_U) \cong \mathcal{E}\mathrm{xt}^n_U(0, \omega^\circ_{\mathrm{P}^r_k}|_U) = 0,$$

por lo que $\mathcal{E}\mathrm{xt}^n_{\mathrm{P}^r_k}(i_*\mathcal{O}_X, \omega^\circ_{\mathrm{P}^r_k})_Q = 0$ para todo $Q \in \mathrm{P}^r_k \setminus X$.

Esto es la condición a) del teorema [B.6]. Veamos que también se cumple la condición b): si $P \in X$, entonces

$$\mathcal{E}\mathrm{xt}^n_{\mathrm{P}^r_k}(i_*\mathcal{O}_X, \omega^\circ_{\mathrm{P}^r_k})_{i(P)} = \mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}_{\mathrm{P}^r_k,i(P)}}(\mathcal{O}_{X,P}, \omega^\circ_{\mathrm{P}^r_k,i(P)}),$$

y hemos de ver que este $\mathcal{O}_{\mathrm{P}^r_k,i(P)}$-módulo es anulado por el núcleo I del epimorfismo $\mathcal{O}_{\mathrm{P}^r_k,i(P)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,P}$. Ahora bien, $\mathrm{Ext}^n_{\mathcal{O}_{\mathrm{P}^r_k,i(P)}}(\mathcal{O}_{X,P}, \omega^\circ_{\mathrm{P}^r_k,i(P)})$ es un cociente de un submódulo de un módulo de la forma $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathrm{P}^r_k,i(P)}}(\mathcal{O}_{X,P}, J)$, donde el $\mathcal{O}_{\mathrm{P}^r_k,i(P)}$-módulo J forma parte de una resolución inyectiva de $\omega^\circ_{\mathrm{P}^r_k,i(P)}$. Es inmediato que este módulo de homomorfismos es anulado por I.

El teorema [B.6] implica entonces que

$$\mathcal{E}\mathrm{xt}^n_{\mathrm{P}^r_k}(i_*\mathcal{O}_X,\omega^\circ_{\mathrm{P}^r_k})\cong i_*\omega^\circ_X.$$

Sea

$$0\longrightarrow \omega^\circ_{\mathrm{P}^r_k}\longrightarrow \mathcal{I}^0\longrightarrow \mathcal{I}^1\longrightarrow \mathcal{I}^2\longrightarrow\cdots$$

una resolución inyectiva, de modo que el miembro derecho del isomorfismo del enunciado es el grupo de cohomología n-simo del complejo

$$0\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathrm{P}^r_k}}(i_*\mathcal{M},\mathcal{I}^0)\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathrm{P}^r_k}}(i_*\mathcal{M},\mathcal{I}^1)\longrightarrow\cdots$$

Si llamamos $\mathcal{J}^j = i^*\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{O}_{\mathrm{P}^r_k}}(i_*\mathcal{O}_X,\mathcal{I}^j)$, el mismo argumento que hemos aplicado a ω°_X nos da que

$$\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{O}_{\mathrm{P}^r_k}}(i_*\mathcal{O}_X,\mathcal{I}^j)\cong i_*\mathcal{J}^j.$$

Observemos que los grupos de cohomología del complejo

$$0\longrightarrow i_*\mathcal{J}^0\longrightarrow i_*\mathcal{J}^1\longrightarrow i_*\mathcal{J}^2\longrightarrow\cdots$$

son los módulos $\mathcal{E}\mathrm{xt}^j_{\mathcal{O}_{\mathrm{P}^r_k}}(i_*\mathcal{O}_X,\omega^\circ_{\mathrm{P}^r_k})$, y el teorema anterior nos da que son nulos para $j<n$, mientras que el n-simo es $i_*\omega^\circ_X$. Como i es una inmersión cerrada, el funtor i_* es exacto, luego el complejo

$$0\longrightarrow \mathcal{J}^0\longrightarrow \mathcal{J}^1\longrightarrow \mathcal{J}^2\longrightarrow\cdots$$

también tiene nulos sus n primeros grupos de cohomología, y el n-simo es ω°_X (aquí usamos [B.5]). Por otra parte, para todo $\mathcal{O}_X$-módulo $\mathcal{F}$ se cumple que

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathrm{P}^r_k}}(i_*\mathcal{F},\mathcal{I}^j)\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathrm{P}^r_k}}(i_*\mathcal{F}\otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{P}^r_k}} i_*\mathcal{O}_X,\mathcal{I}^j)$$

$$\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathrm{P}^r_k}}(i_*\mathcal{F},\mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{O}_{\mathrm{P}^r_k}}(i_*\mathcal{O}_X,\mathcal{I}^j))\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathrm{P}^r_k}}(i_*\mathcal{F},i_*\mathcal{J}^j)$$

$$\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{J}^j),$$

donde hemos usado [B.2], [2.13] y [B.3]. Todos los isomorfismos son funtoriales. Como $\mathcal{I}^j$ es inyectivo, el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathrm{P}^r_k}}(-,\mathcal{I}^j)$ es exacto, y también lo es i_*, luego el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(-,\mathcal{J}^j)$ también es exacto, lo que significa que los módulos $\mathcal{J}^j$ son inyectivos.

Para el caso concreto $\mathcal{F}=\mathcal{M}$ vemos que el miembro derecho del isomorfismo del enunciado es el grupo de cohomología de la sucesión

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M},\mathcal{J}^{n-1})\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M},\mathcal{J}^n)\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M},\mathcal{J}^{n+1}).$$

Si $n > 0$, podemos aplicar el teorema [1.31] a la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}^0 \xrightarrow{d^0} \mathcal{J}^1 \longrightarrow \mathrm{CN}(d^0) \longrightarrow 0,$$

de modo que $\mathcal{J}^1 = (\operatorname{Im} d^0) \oplus \mathrm{CN}(d^0)$, y cada sumando es inyectivo por la observación previa al teorema. Si $n > 1$ entonces $\operatorname{Im} d^0 = \mathrm{N}\, d^1$, por lo que tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathrm{CN}(d^0) \xrightarrow{\bar{d}_1} \mathcal{J}^2 \longrightarrow \mathrm{CN}(d^1) \longrightarrow 0,$$

y el teorema [1.31] nos da la descomposición $\mathcal{J}^2 = (\operatorname{Im} d^1) \oplus \mathrm{CN}(d^1)$, de modo que la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}^0 \longrightarrow \mathcal{J}^1 \longrightarrow \operatorname{Im} d^1 \longrightarrow 0$$

es exacta. Razonando de este modo llegamos hasta una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{J}^0 \longrightarrow \mathcal{J}^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{J}^{n-1} \longrightarrow \mathcal{J}_1^n \longrightarrow 0$$

y a una descomposición $\mathcal{J}^n = \mathcal{J}_1^n \oplus \mathcal{J}_2^n$, donde $\mathcal{J}_1^n = \operatorname{Im} d^{n-1}$ y $\mathcal{J}_2^n = \mathrm{CN}(d^{n-1})$. Además $\mathcal{J}_1^n \subset \mathrm{N}\, d^n$, por lo que d^n induce un homomorfismo $\bar{d}^n : \mathcal{J}_2^n \longrightarrow \mathcal{J}^{n+1}$, de modo que $\omega_X^\circ = \mathrm{N}(\bar{d}^n)$. Por la observación previa al teorema, $\mathcal{J}_1^n$ y $\mathcal{J}_2^n$ son ambos inyectivos.

Podemos considerar el complejo $\{\mathcal{J}^j\}_j$ como suma directa de dos complejos inyectivos, $\{\mathcal{J}_1^j\}_j$ y $\{\mathcal{J}_2^j\}_j$, donde

$$\mathcal{J}_1^j = \begin{cases} \mathcal{J}^j & \text{si } j < n, \\ 0 & \text{si } j > n, \end{cases} \qquad \mathcal{J}_2^j = \begin{cases} 0 & \text{si } j < n, \\ \mathcal{J}^j & \text{si } j > n. \end{cases}$$

El primero de estos complejos es exacto, y puede verse como una resolución inyectiva del módulo nulo, por lo que al aplicarle el funtor $\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, -)$ obtenemos una sucesión exacta (sus grupos de cohomología son los módulos $\operatorname{Ext}_X^j(\mathcal{M}, 0) = 0$). Queremos calcular el grupo de cohomología n-simo del complejo

$$\{\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{I}^j)\}_j = \{\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{I}_1^j)\}_j \oplus \{\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{I}_2^j)\}_j.$$

Será la suma directa de los grupos de cohomología n-simos de ambos sumandos, pero ya hemos observado que el del primero es nulo. En definitiva, el grupo de cohomología que buscamos (que, según hemos visto, es isomorfo a $\operatorname{Ext}^n_{\mathrm{P}_k^r}(i_*\mathcal{M}, \omega^\circ_{\mathrm{P}_k^r})$), es el grupo de cohomología de la sucesión

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{J}_2^n) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{J}^{n+1}),$$

que claramente es igual a $\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \omega_X^\circ)$. No es difícil ver la naturalidad del isomorfismo (es decir, que se trata de un isomorfismo de funtores). ■

Teorema 9.15 *Si X es un esquema proyectivo sobre un cuerpo k, entonces X tiene un haz dualizante.*

Demostración: Sea $i: X \longrightarrow \mathrm{P}_k^r$ una inmersión cerrada, sea $d = \dim X$ y sea $n = r - d$ la codimensión de X en P_k^r. Llamemos $\omega_X^\circ = i^*\mathcal{E}\mathrm{xt}^n_{\mathrm{P}_k^r}(i_*\mathcal{O}_X, \omega^\circ_{\mathrm{P}_k^r})$, que es un haz coherente en X. Por el teorema anterior juntamente con 9.10 (para P_k^r) y 6.20, vemos que si $\mathcal{M}$ es un haz coherente en X, entonces

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \omega_X^\circ) \cong \mathrm{Ext}^n_{\mathrm{P}_k^r}(i_*\mathcal{M}, \omega^\circ_{\mathrm{P}_k^r}) \cong H^d(\mathrm{P}_k^r, i_*\mathcal{M})^* \cong H^d(X, \mathcal{M})^*.$$

El isomorfismo es funtorial. Tomando en particular $\mathcal{M} = \omega_X^\circ$, la identidad se corresponde con un homomorfismo $t : H^d(X, \omega_X^\circ) \longrightarrow k$. Si llamamos

$$\eta : \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(-, \omega_X^\circ) \longrightarrow H^d(X, -)^*$$

al isomorfismo, entonces $t = \eta_{\omega_X^\circ}(1)$ y, para cada homomorfismo $\phi : \mathcal{M} \longrightarrow \omega_X^\circ$ tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\omega_X^\circ, \omega_X^\circ) \arrow[r, "\eta_{\omega_X^\circ}"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\phi, \omega_X^\circ)"'] & H^d(X, \omega_X^\circ)^* \arrow[d, "H^d(\phi)^*"] \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{M}, \omega_X^\circ) \arrow[r, "\eta_{\mathcal{M}}"'] & H^d(X, \mathcal{M})^*
\end{tikzcd}$$

Al aplicarlo a la identidad obtenemos que $H^d(\phi) \circ t = \eta_{\mathcal{M}}(\phi)$, es decir, vemos que $\eta_{\mathcal{M}}$ no es sino el isomorfismo natural que requiere la definición de haz dualizante. ■

Con esto queda probado el teorema de dualidad, que no es más que 9.10 combinado con el teorema anterior, según el cual la existencia de un haz dualizante no es en realidad una hipótesis. Para los haces localmente libres la dualidad tiene una expresión más natural:

Teorema 9.16 *Sea X/k un esquema proyectivo de Cohen-Macaulay cuyas componentes irreducibles tengan todas dimensión n. Entonces, para cada haz localmente libre $\mathcal{L}$ en X existe un isomorfismo natural:*

$$H^i(X, \mathcal{L}) \cong H^{n-i}(X, \mathcal{L}^* \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^\circ)^*.$$

Demostración: En principio, el teorema de dualidad nos da el isomorfismo

$$\mathrm{Ext}^i_X(\mathcal{L}, \omega_X^\circ) \cong H^{n-i}(X, \mathcal{L})^*.$$

Por [2.21] y [2.17] resulta que

$$\mathrm{Ext}^i_X(\mathcal{L}, \omega_X^\circ) \cong \mathrm{Ext}^i_X(\mathcal{O}_X, \mathcal{L}^* \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^\circ) \cong H^i(X, \mathcal{L}^* \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^\circ).$$

En definitiva, tenemos que

$$H^{n-i}(X, \mathcal{L})^* \cong H^i(X, \mathcal{L}^* \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_X^\circ).$$

Esto vale para todo índice i. Si cambiamos i por $n-i$ tenemos el isomorfismo del enunciado. ■

Hemos visto, que el haz dualizante de $X = \mathrm{P}_k^r$ es $\omega_X^\circ = \mathcal{O}_X(-r-1)$. Sería interesante tener identificado de forma similar el haz dualizante de otros esquemas, pero la demostración del teorema 9.15 no ayuda en nada a ello. En la sección siguiente nos ocuparemos de este problema.

9.3 El haz canónico

Hasta ahora hemos trabajado únicamente con formas diferenciales de dimensión 1 sobre un esquema. Aquí vamos a definir las formas diferenciales de dimensión superior.

Definición 9.17 Si A es un anillo y M es un A-módulo, definimos el *álgebra tensorial* de M como la suma directa

$$T(M) = \bigoplus_{n \geq 0} M^{\otimes n}.$$

que es un álgebra graduada (no conmutativa) con el producto tensorial, donde convenimos que $M^{\otimes 0} = A$, incluso si $M = 0$.

Es claro que todo generador de M como módulo es un generador de $T(M)$ como álgebra. Además, si M es un A-módulo libre con base $b_1, \ldots, b_r$, entonces $M^{\otimes n}$ es también un A-módulo libre, y una base está formada por los r^n tensores

$$b_{i_1} \otimes \cdots \otimes b_{i_n}, \qquad i_j = 1, \ldots, r.$$

Definimos el *álgebra exterior* de M como el cociente $\Lambda(M)$ de $T(M)$ respecto al ideal generado por los tensores $m \otimes m$, para todo $m \in M$. Como los elementos $m \otimes m$ son homogéneos, es fácil ver que

$$\Lambda(M) = \bigoplus_{n \geq 0} \Lambda^n(M),$$

donde $\Lambda^n(M)$ es la imagen del submódulo $M^{\otimes n}$ por el epimorfismo canónico $T(M) \longrightarrow \Lambda(M)$. Identificaremos cada $m \in M$ con su clase $[m] \in \Lambda^1(M)$ y representaremos por $\wedge$ el producto en $\Lambda(M)$, de modo que $\Lambda^n(M)$ está generado por los elementos

$$m_1 \wedge \cdots \wedge m_n = [m_1 \otimes \cdots \otimes m_n].$$

Desarrollando $(m_1 + m_2) \wedge (m_1 + m_2) = 0$ vemos que

$$m_1 \wedge m_2 = -m_2 \wedge m_1, \qquad m_1, m_2 \in M.$$

Esto implica, más en general, que si σ es una permutación de los índices $1, \ldots, n$, entonces

$$m_{\sigma 1} \wedge \cdots \wedge m_{\sigma n} = (\operatorname{sig} \sigma)\, m_1 \wedge \cdots \wedge m_n,$$

donde $m_i \in M$ y $\operatorname{sig} \sigma = \pm 1$ es la signatura de σ.

También es fácil ver que si $\omega \in \Lambda^m(M)$, $\eta \in \Lambda^n(M)$, entonces

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{mn} \eta \wedge \omega.$$

Teorema 9.18 *Si A es un anillo, M un A-módulo libre y $b_1, \ldots, b_r$ es una base, entonces $\Lambda^n(M)$ es también un A-módulo libre y una base está formada por los elementos*

$$b_{i_1} \wedge \cdots \wedge b_{i_n} \qquad \text{con } 1 \leq i_1 < \cdots < i_n \leq r.$$

Demostración: Es claro que estos elementos generan $\Lambda^n(M)$ (en particular, si $n > r$ se cumple que $\Lambda^n(M) = 0$). Para ver que son linealmente independientes conviene introducir algo de notación: si $i = (i_1, \ldots, i_n)$ es un multiíndice, representaremos por $b_i = b_{i_1} \otimes \cdots \otimes b_{i_n}$. Así, cada elemento $\omega \in T(M)$ se expresa de forma única como

$$\omega = \sum_i \omega_i b_i,$$

donde i recorre todos los multiíndices y $\omega_i \in A$ es nulo salvo en un número finito de casos.

Diremos que un multiíndice i está *ordenado* si $i_1 < \cdots < i_n$. Representaremos por P_i el conjunto de todos los multiíndices de la forma $j = (i_{\sigma 1}, \ldots, i_{\sigma n})$, donde σ es una permutación de $\{1, \ldots, n\}$. Llamaremos $\operatorname{sig} j = \operatorname{sig} \sigma$.

Consideremos el conjunto $\mathcal{I} \subset T(M)$ formado por los elementos $\omega \in T(M)$ tales que para cada multiíndice ordenado i, se cumple que

$$\sum_{j \in P_i} (\operatorname{sig} j) \omega_j = 0.$$

Es claro que la suma de dos elementos de $\mathcal{I}$ está en $\mathcal{I}$. Vamos a probar que $\mathcal{I}$ es un ideal, para lo cual basta ver que si $\omega, \eta \in T(M)$ y uno de los dos pertenece a $\mathcal{I}$, entonces $\omega \otimes \eta \in \mathcal{I}$.

Si i, j son dos multiíndices, definimos $(i, j) = (i_1, \ldots, i_m, j_1, \ldots, j_n)$. Vamos a admitir a $\varnothing$ como multiíndice de longitud 0, de modo que $(i, \varnothing) = (\varnothing, i) = i$. Si convenimos además que $b_\varnothing = 1$, entonces $b_i \otimes b_j = b_{(i,j)}$.

Si i es un multiíndice ordenado, llamamos D_i al conjunto de pares de multiíndices ordenados (j_1, j_2) tales que $j_1 + j_2 \in P_i$. Entonces

$$\sum_{j \in P_i} (\operatorname{sig} j)(\omega \otimes \eta)_j = \sum_{j \in P_i} \sum_{(u,v)=j} (\operatorname{sig} j) \omega_u \eta_v = \sum_{(j_1,j_2) \in D_i} \sum_{u \in P_{j_1}} \sum_{v \in P_{j_2}} \operatorname{sig}(u, v) \omega_u \eta_v$$

$$= \sum_{(j_1,j_2) \in D_i} \pm \Big(\sum_{u \in P_{j_1}} (\operatorname{sig} u) \omega_u \sum_{v \in P_{j_2}} (\operatorname{sig} v) \eta_v \Big) = 0.$$

Notemos que $\operatorname{sig}(u, v) = \pm(\operatorname{sig} u)(\operatorname{sig} v)$, donde el signo $\pm$ depende únicamente del par (j_1, j_2) (es la signatura de la permutación que ordena (j_1, j_2)). Hemos probado que $\omega \otimes \eta \in \mathcal{I}$.

Es fácil ver que el ideal $\mathcal{I}$ contiene a los elementos $m \otimes m$, para todo $m \in M$, luego $\mathcal{I}$ contiene al núcleo del epimorfismo $T(M) \longrightarrow \Lambda(M)$. (No es difícil ver que $\mathcal{I}$ es dicho núcleo, pero no necesitamos este hecho.) Si tenemos una combinación lineal

$$\sum_i a_i \, b_{i_1} \wedge \cdots \wedge b_{i_n} = 0,$$

donde i recorre los multiíndices ordenados de longitud n, entonces

$$\sum_i a_i \, b_i \in \mathcal{I},$$

lo que implica, por definición de $\mathcal{I}$, que $a_i = 0$ para todo i. ■

Definición 9.19 Sea A un anillo y M un A-módulo libre de rango r. Definimos el *determinante* de M como el A-módulo $\det M = \Lambda^r(M)$. (Notemos que las definiciones implican que $\det 0 = A$).

El teorema anterior prueba que $\det M$ es un A-módulo libre de rango 1. Más concretamente, si $b_1, \ldots, b_r$ es una base de M, entonces $b_1 \wedge \cdots \wedge b_r$ es una base de $\det M$. Es fácil ver que si $c_1, \ldots, c_r$ es otra base y

$$c_i = \sum_j a_{ij} b_j,$$

entonces $c_1 \wedge \cdots \wedge c_r = \det(a_{ij})\, b_1 \wedge \cdots \wedge b_r$.

Observemos que todo homomorfismo de A-módulos $\phi : M \longrightarrow N$ induce homomorfismos $\phi_n : M^{\otimes n} \longrightarrow N^{\otimes n}$ de A-módulos que determinan un homomorfismo de álgebras $\phi : T(M) \longrightarrow T(N)$, que a su vez induce un homomorfismo $\phi : \Lambda(M) \longrightarrow \Lambda(N)$ que a su vez se restringe a homomorfismos $\phi_n : \Lambda^n(M) \longrightarrow \Lambda^n(N)$, y si los dos módulos son libres del mismo rango (finito), en particular tenemos un homomorfismo $\det \phi : \det M \longrightarrow \det N$. Esto significa que todos estos conceptos definen funtores covariantes.

Veamos algunas propiedades de los determinantes de módulos:

Teorema 9.20 *Sea A un anillo y M un A-módulo libre de rango finito.*

a) Si B es una A-álgebra, existe un isomorfismo canónico

$$\det(M \otimes_A B) \cong (\det M) \otimes_A B.$$

b) Si $0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta de A-módulos libres de rango finito, existe un isomorfismo natural

$$\det M \cong (\det L) \otimes_A (\det N).$$

c) Existe un isomorfismo natural $\det(M^*) \cong (\det M)^*$.

d) Los isomorfismos de b) y c) conmutan con las extensiones de escalares a).

Demostración: En todos los apartados el resultado es trivial si alguno de los módulos es nulo. Supondremos lo contrario.

a) Si $\{b_i\}_{i=1}^r$ es una base de M, entonces $b_i' = b_i \otimes 1$ forman una base de $M \otimes_A B$, y $(b_1 \wedge \cdots \wedge b_r) \otimes 1$ es una base de $(\det M) \otimes_A B$. Es fácil ver que el isomorfismo dado por

$$(b_1 \wedge \cdots \wedge b_r) \otimes 1 \mapsto b_1' \wedge \cdots \wedge b_r'$$

es independiente de la elección de la base.

b) Sea $l_1, \ldots, l_r$ una base de L y $n_1, \ldots, n_r$ una base de N. Sea $m_i \in M$ una antiimagen de n_i. Es fácil ver que $l_1, \ldots, l_r, m_1, \ldots, m_s$ es una base de M. El isomorfismo

$$l_1 \wedge \cdots \wedge l_r \wedge m_1 \wedge \cdots \wedge m_s \mapsto (l_1 \wedge \cdots \wedge l_r) \otimes (n_1 \wedge \cdots \wedge n_s)$$

no depende de la elección de las bases. (En primer lugar se comprueba que no depende de la elección de las antiimágenes m_i y luego que no depende de la elección de las dos bases de partida.)

c) Si $b_1, \ldots, b_r$ es una base de M, entonces una base de M^* es la base dual b_i^* dada por $b_i^*(b_j) = \delta_{ij}$ (donde (δ_{ij}) es la matriz identidad). Definimos una aplicación bilineal $\psi : \det M \times \det M^* \longrightarrow A$ mediante

$$\psi(b_1 \wedge \cdots \wedge b_r, b_1^* \wedge \cdots \wedge b_r^*) = 1.$$

es inmediato que ψ es regular y que no depende de la elección de la base, por lo que induce un isomorfismo canónico $\det M^* \cong (\det M)^*$.

d) Es una comprobación rutinaria. Por ejemplo, en el caso de b) tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow L \otimes_A B \longrightarrow M \otimes_A B \longrightarrow N \otimes_A B \longrightarrow 0$$

y se trata de probar la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd}
(\det M) \otimes_A B \arrow[r] \arrow[dd] & ((\det L) \otimes_A (\det N)) \otimes_A B \arrow[d] \\
& ((\det L) \otimes_A B) \otimes_B ((\det N) \otimes_A B)) \arrow[d] \\
\det(M \otimes_A B) \arrow[r] & \det(L \otimes_A B) \otimes_B \det(N \otimes_A B)
\end{tikzcd}$$

■

Ahora trasladamos estos conceptos al caso de haces sobre espacios anillados.

Definición 9.21 Sea X un espacio anillado y $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_X$-módulo. Definimos $\Lambda^n(\mathcal{M})^-$ como el prehaz en X que a cada abierto U le asigna el módulo

$$\Lambda^n(\mathcal{M})^-(U) = \Lambda^n(\mathcal{M}(U)),$$

con las restricciones inducidas por las restricciones de $\mathcal{M}$. Llamaremos $\Lambda^n(\mathcal{M})$ a la compleción de este prehaz. Si $\mathcal{M}$ es localmente libre de rango r, definimos $\det \mathcal{M} = \Lambda^r(\mathcal{M})$. Más en general, si $\mathcal{M}$ es localmente libre de rango finito, aunque el rango no sea constante, lo será de todos modos en cada componente conexa de X, por lo que igualmente podemos definir $\det \mathcal{M}$.

Teorema 9.22 *Sea X un esquema y $\mathcal{M}$ un haz cuasicoherente en X. Entonces $\Lambda^n(\mathcal{M})$ también es un haz cuasicoherente y para cada abierto afín U de X se cumple que $\Lambda^n(\mathcal{M})(U) \cong \Lambda^n(\mathcal{M}(U))$.*

Demostración: Supongamos que $X = U = \operatorname{Esp} A$, y entonces tenemos que $\mathcal{M} = \widetilde{M}$, para cierto A-módulo M. Si $g \in A$, el homomorfismo $M \longrightarrow M_g$ induce un homomorfismo de A-módulos $\Lambda^n(M) \longrightarrow \Lambda^n(M_g)$ dado por

$$m_1 \wedge \cdots \wedge m_n \mapsto (m_1/1) \wedge \cdots \wedge (m_n/1),$$

que a su vez induce un homomorfismo de A_g-módulos $\phi_g : \Lambda^n(M)_g \longrightarrow \Lambda^n(M_g)$ dado por
$$\frac{m_1 \wedge \cdots \wedge m_n}{g^r} \mapsto \frac{1}{g^r}((m_1/1) \wedge \cdots \wedge (m_n/1)).$$

Recíprocamente, podemos definir un homomorfismo $M_g^{\otimes n} \longrightarrow \Lambda^n(M)_g$ mediante
$$\frac{m_1}{g^{r_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{m_n}{g^{r_n}} \mapsto \frac{1}{g^{r_1+\cdots+r_n}}(m_1 \wedge \cdots \wedge m_n).$$

Estos homomorfismos determinan un homomorfismo de álgebras
$$T(M_g) \longrightarrow \bigoplus_n \Lambda^n(M)_g,$$
y es claro que los elementos $(m/g^r) \otimes (m/g^r)$ tienen imagen nula, luego este homomorfismo induce otro sobre $\Lambda(M_g)$ que a su vez se restringe a un homomorfismo $\psi_g : \Lambda^n(M_g) \longrightarrow \Lambda^n(M)_g$ dado por
$$\frac{m_1}{g^{r_1}} \wedge \cdots \wedge \frac{m_r}{g^{r_n}} \mapsto \frac{1}{g^{r_1+\cdots+r_n}}(m_1 \wedge \cdots \wedge m_n).$$

Se comprueba inmediatamene que ϕ_g y ψ_g son mutuamente inversos, por lo que tenemos un isomorfismo $\psi_g : \Lambda^n(\widetilde{M})^-(D(g)) \longrightarrow \widetilde{\Lambda^n(M)}(D(g))$. Es fácil ver que estos isomorfismos son compatibles con las restricciones entre abiertos principales, luego inducen un homomorfismo de prehaces $\Lambda^n(\widetilde{M})^- \longrightarrow \widetilde{\Lambda^n(M)}$ cuyos homomorfismos locales son isomorfismos. Por consiguiente tenemos un isomorfismo de haces $\Lambda^n(\widetilde{M}) \cong \widetilde{\Lambda^n(M)}$. Esto prueba que $\Lambda^n(\mathcal{M})$ es cuasicoherente y que $\Lambda^n(\mathcal{M})(X) \cong \Lambda^n(\mathcal{M}(X))$.

En el caso general, es claro que $\Lambda^n(\mathcal{M})|_U \cong \Lambda^n(\mathcal{M}|_U)$, luego $\Lambda^n(\mathcal{M})$ es cuasicoherente, y
$$\Lambda^n(\mathcal{M})(U) = \Lambda^n(\mathcal{M}|_U)(U) \cong \Lambda^n(\mathcal{M}|_U(U)) = \Lambda^n(\mathcal{M}(U)).$$

■

En particular, si $\mathcal{M}$ es un haz localmente libre de rango finito en un esquema X, para cada abierto afín $U \subset X$ se cumple que $(\det \mathcal{M})(U) \cong \det(\mathcal{M}(U))$.

Es obvio que si X es un esquema localmente noetheriano y $\mathcal{M}$ es un haz coherente, entonces $\Lambda^n(\mathcal{M})$ es también un haz coherente en X.

Teorema 9.23 *Sea X un esquema y $\mathcal{M}$ un haz localmente libre en X de rango finito.*

a) Si $f : Y \longrightarrow X$ es un homomorfismo de esquemas, entonces
$$\det f^*\mathcal{M} \cong f^*(\det \mathcal{M}).$$

b) Si $0 \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta de haces localmente libres de rango finito, entonces
$$\det \mathcal{M} \cong (\det \mathcal{L}) \otimes_{\mathcal{O}_X} (\det \mathcal{N}).$$

c) Tenemos un isomorfismo $\det(\mathcal{M}^*) \cong (\det \mathcal{M})^*$.

d) Los isomorfismos de b) y c) conmutan con los cambios de base.

Demostración: a) Cubrimos X con abiertos afines U tales que $\mathcal{M}|_U$ sea libre. Para cada abierto afín $V \subset f^{-1}[U]$ tenemos que

$$(f^*\mathcal{M})(V) \cong \mathcal{M}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{O}_Y(V)$$

es un $\mathcal{O}_Y(V)$-módulo libre del mismo rango que $\mathcal{M}(U)$. Entonces

$$(\det f^*\mathcal{M})(V) = \det((f^*\mathcal{M})(V)) \cong (\det \mathcal{M}(U)) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{O}_Y(V) \cong f^*(\det \mathcal{M})(V).$$

Esto isomorfismos conmutan con las restricciones, por lo que inducen el isomorfismo del enunciado.

b) Podemos cubrir X con abiertos afines U en los que los tres haces sean libres. La propiedad análoga en el teorema 9.20 nos da un isomorfismo

$$\det \mathcal{M}(U) \cong \det \mathcal{L}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \det \mathcal{N}(U).$$

Como los haces son cuasicoherentes, éste induce un isomorfismo

$$\det \mathcal{M}|_U \cong \det \mathcal{L}|_U \otimes_{\mathcal{O}_X|_U} \det \mathcal{N}|_U,$$

y como los isomorfismos son canónicos, conmutan con las restricciones, por lo que inducen el isomorfismo del enunciado.

c) Si U es un abierto afín donde $\mathcal{M}$ es libre, tenemos que

$$\begin{aligned}
(\det \mathcal{M}^*)(U) &= \det(\mathcal{M}^*(U)) = \det(\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X|U}(\mathcal{M}|_U, \mathcal{O}_X|_U)) \\
&\cong \det(\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X(U)}(\mathcal{M}(U), \mathcal{O}_X(U)) = \det(\mathcal{M}(U)^*) \cong (\det \mathcal{M}(U))^* \\
&= \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X(U)}((\det \mathcal{M})(U), \mathcal{O}_X(U)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X|_U}((\det \mathcal{M})|_U, \mathcal{O}_X|_U) \\
&= \mathcal{H}\mathrm{om}_{\mathcal{O}_X}(\det \mathcal{M}, \mathcal{O}_X)(U) = (\det \mathcal{M})^*(U).
\end{aligned}$$

Una vez más, estos isomorfismos determinan el isomorfismo del enunciado.

d) Se trata de una comprobación rutinaria. Por ejemplo, en el caso de b), si $f : Y \longrightarrow X$ es un homomorfismo de esquemas, el hecho de que los haces sean localmente libres implica la exactitud de la sucesión

$$0 \longrightarrow f^*\mathcal{L} \longrightarrow f^*\mathcal{M} \longrightarrow f^*\mathcal{N} \longrightarrow 0,$$

y por b) se cumple que

$$\det f^*\mathcal{M} \cong (\det f^*\mathcal{L}) \otimes_{\mathcal{O}_X} (\det f^*\mathcal{N}).$$

Lo que hay que comprobar es la conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd}
\det \mathcal{M} \arrow[r] \arrow[d] & (\det \mathcal{L}) \otimes_{\mathcal{O}_X} (\det \mathcal{N}) \arrow[d] \\
\det f^*\mathcal{M} \arrow[r] & (\det f^*\mathcal{L}) \otimes_{\mathcal{O}_X} (\det f^*\mathcal{N})
\end{tikzcd}$$

donde las flechas verticales son las dadas por a). ■

Las álgebras exteriores que más nos van a interesar son las correspondientes a los haces de formas diferenciales sobre un esquema:

Definición 9.24 Si A es un anillo, B una A-álgebra y $r \geq 1$, llamaremos $\Omega^r_{B/A} = \Lambda^r(\Omega^1_{B/A})$. Análogamente, si $f : X \longrightarrow Y$ es un homomorfismo de esquemas, definimos $\Omega^r_{X/Y} = \Lambda^r(\Omega^1_{X/Y})$.

Así, $\Omega^r_{X/Y}$ es un haz cuasicoherente en X y, paa cada abierto afín V en Y y cada abierto afín $U \subset f^{-1}[V]$, se cumple que

$$\Omega^r_{X/Y}(U) \cong \Omega^r_{\mathcal{O}_X(U)/\mathcal{O}_Y(V)},$$

que es un $\mathcal{O}_X(U)$-módulo generado por los elementos de la forma $df_1 \wedge \cdots \wedge df_r$, con $f_i \in \mathcal{O}_X(U)$.

Si Y es localmente noetheriano y $f : X \longrightarrow Y$ es suave, el teorema 7.53 nos da que el haz $\Omega^1_{X/Y}$ es localmente libre, luego podemos definir el *haz canónico* $\omega_{X/Y} = \det \Omega^1_{X/Y}$, que es un haz inversible en X.

El caso más simple se da cuando X/k es un conjunto algebraico geométricamente regular (lo que equivale a que el homomorfismo estructural $X \longrightarrow \operatorname{Esp} k$ es suave) cuyas componentes irreducibles tienen todas la misma dimensión n. En tal caso $\omega_{X/k} = \Lambda^n(\Omega^1_{X/k})$. Vamos a calcular explícitamente el haz canónico de los espacios proyectivos:

Teorema 9.25 *Sea A un anillo y $X = \mathrm{P}^n_A$. Entonces $\omega_{X/A} \cong \mathcal{O}_X(-n-1)$.*

Demostración: Tenemos que $X = \operatorname{Proy}(B)$, donde $B = A[X_0, \ldots, X_n]$. Consideremos los abiertos $U_i = D(X_i)$ y $U_{ij} = U_i \cap U_j = D(X_iX_j)$.

Tenemos que $\omega_{X/A}(U_i) = \det B_{(X_i)}$. Puesto que

$$B_{(X_i)} = A[X_0/X_i, \ldots \widehat{X_i/X_i}, \ldots, X_n/X_i],$$

el teorema 7.32 nos da que $\Omega^1_{B_{(X_i)}/A}$ es el $B_{(X_i)}$-módulo libre generado por $d(X_u/X_i)$, para $u \neq i$, luego $\omega_{X/A}(U_i)$ es el $\mathcal{O}_X(U_i)$-módulo libre generado por

$$\omega_i = d\left(\frac{X_0}{X_i}\right) \wedge \cdots \wedge \widehat{d\left(\frac{X_i}{X_i}\right)} \wedge \cdots \wedge d\left(\frac{X_n}{X_i}\right).$$

Si $j \neq i$, entonces $\omega_{X/A}(U_{ij})$ es el $\mathcal{O}_X(U_{ij})$-módulo libre generado por

$$\omega_i|_{U_{ij}} = d\left(\frac{X_0X_j}{X_iX_j}\right) \wedge \cdots \wedge \widehat{d\left(\frac{X_iX_j}{X_iX_j}\right)} \wedge \cdots \wedge d\left(\frac{X_nX_j}{X_iX_j}\right).$$

Vamos a comparar esta forma diferencial con $\omega_j|_{U_{ij}}$. Para ello observamos que, para $u \neq i$,

$$d\left(\frac{X_uX_j}{X_iX_j}\right) = d\left(\frac{X_uX_i}{X_iX_j}\,\frac{X_j^2}{X_iX_j}\right) = \frac{X_j^2}{X_iX_j}\,d\left(\frac{X_uX_i}{X_iX_j}\right) + \frac{X_uX_i}{X_iX_j}\,d\left(\frac{X_j^2}{X_iX_j}\right).$$

Notemos además que si $u = j$ esta igualdad se vuelve trivial. La expresión de $\omega_i|_{U_{ij}}$ consta de n factores y $n-1$ de ellos podemos sustituirlos por las expresiones anteriores, con dos sumandos cada una. Al desarrollar quedan 2^{n-1} sumandos, pero serán nulos todos los que tengan una diferencial repetida. Puesto que el j-ésimo factor de todos los sumandos va a ser siempre $d(X_j^2/X_iX_j)$, en realidad sólo queda un sumando no nulo, que es el que resulta de sustituir

$$d\left(\frac{X_uX_j}{X_iX_j}\right) \mapsto \frac{X_j^2}{X_iX_j}\, d\left(\frac{X_uX_i}{X_iX_j}\right)$$

para $u \neq i, j$. Por otra parte,

$$0 = d\left(\frac{X_i^2}{X_iX_j}\,\frac{X_j^2}{X_iX_j}\right) = \frac{X_i^2}{X_iX_j}\, d\left(\frac{X_j^2}{X_iX_j}\right) + \frac{X_j^2}{X_iX_j}\, d\left(\frac{X_i^2}{X_iX_j}\right),$$

luego

$$d\left(\frac{X_j^2}{X_iX_j}\right) = -\left(\frac{X_j^2}{X_iX_j}\right)^2 d\left(\frac{X_i^2}{X_iX_j}\right).$$

Teniendo en cuenta todo esto, vemos que

$$\omega_i|_{U_{ij}} = (-1)^{i+j}\left(\frac{X_j^2}{X_iX_j}\right)^{n+1} d\left(\frac{X_0X_i}{X_iX_j}\right) \wedge \cdots \wedge \widehat{d\left(\frac{X_j^2}{X_iX_j}\right)} \wedge \cdots \wedge d\left(\frac{X_nX_i}{X_iX_j}\right).$$

(Notemos que después de hacer las sustituciones hay que trasladar el factor j-ésimo a la posición i-ésima.) Concluimos que

$$(-1)^i\omega_i|_{U_{ij}} = \left(\frac{X_j^2}{X_iX_j}\right)^{n+1} (-1)^j\omega_j|_{U_{ij}}.$$

Por otra parte, $\mathcal{O}_X(-n-1)(U_i)$ está generado por $\eta_i = X_i^{-n-1}$ y obviamente

$$\eta_i|_{U_{ij}} = \left(\frac{X_j^2}{X_iX_j}\right)^{n+1} \eta_j|_{U_{ij}}.$$

Así, los isomorfismos de $\mathcal{O}_X(U_i)$-módulos $\omega_{X/A}(U_i) \cong \mathcal{O}_X(-n-1)(U_i)$ determinados por $(-1)^i\omega_i \mapsto \eta_i$ determinan isomorfismos $\omega_{X/A}|_{U_i} \cong \mathcal{O}_X(-n-1)|_{U_i}$ que coinciden en las intersecciones, luego los podemos pegar para formar un único isomorfismo $\omega_{X/A} \cong \mathcal{O}_X(-n-1)$. ■

En particular vemos que si k es un cuerpo y $X = \mathrm{P}_k^r$, entonces $\omega_X^\circ = \omega_{X/k}$, es decir, que el haz canónico coincide con el haz dualizante. Hemos de probar que lo mismo es cierto cuando X es un conjunto algebraico proyectivo que sea localmente una intersección completa, pero para probar esto hemos de observar primeramente que sólo tenemos definido el haz canónico cuando X/k es suave (o, equivalentemente, cuando X es geométricamente regular). El teorema siguiente nos permitirá extender el concepto de haz canónico:

Teorema 9.26 *Sea $f : X \longrightarrow S$ un homomorfismo de tipo finito entre esquemas localmente noetherianos y consideremos el siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "i_1"'] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "i_2"] & \\ Z_1 \arrow[r, "g_1"'] & S & Z_2 \arrow[l, "g_2"] \end{tikzcd}$$

en el que i_1, i_2 son inmersiones cerradas regulares y g_1, g_2 son homomorfismos suaves. Entonces existe un isomorfismo canónico

$$\det(\mathcal{C}_{X/Z_1})^* \otimes_{\mathcal{O}_X} i_1^*\omega_{Z_1/S} \cong \det(\mathcal{C}_{X/Z_2})^* \otimes_{\mathcal{O}_X} i_2^*\omega_{Z_2/S}.$$

DEMOSTRACIÓN: Llamemos $W = Z_1 \times_S Z_2$ y sea $h = (i_1, i_2) : X \longrightarrow W$. Como W es suave sobre S, h es una inmersión cerrada y X/S es localmente una intersección completa, el teorema 7.71 nos da que h es una inmersión regular.

Aplicamos el teorema 7.72 a las descomposiciones $i_1 = h \circ p_1$, $i_2 = h \circ p_2$, obtenemos las sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}_{X/Z_1} \longrightarrow \mathcal{C}_{X/W} \longrightarrow h^*\Omega^1_{W/Z_1} \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}_{X/Z_2} \longrightarrow \mathcal{C}_{X/W} \longrightarrow h^*\Omega^1_{W/Z_2} \longrightarrow 0.$$

Ahora bien, $\Omega^1_{W/Z_1} = p_2^*\Omega^1_{Z_2/S}$ y $\Omega^1_{W/Z_2} = p_1^*\Omega^1_{Z_1/S}$ (teorema 7.41), luego

$$h^*\Omega^1_{W/Z_1} \cong h^*p_2^*\Omega^1_{Z_2/S} \cong i_2^*\Omega^1_{Z_2/S}, \quad h^*\Omega^1_{W/Z_2} \cong h^*p_1^*\Omega^1_{Z_1/S} \cong i_1^*\Omega^1_{Z_1/S}.$$

Introduciendo estos isomorfismos en las sucesiones exactas y aplicando el teorema 9.23 concluimos que

$$(\det \mathcal{C}_{X/Z_1}) \otimes_{\mathcal{O}_X} (\det i_2^*\Omega^1_{Z_2/S}) \cong (\det \mathcal{C}_{X/Z_2}) \otimes_{\mathcal{O}_X} (\det i_1^*\Omega^1_{Z_1/S}).$$

Equivalentemente:

$$(\det \mathcal{C}_{X/Z_1}) \otimes_{\mathcal{O}_X} (i_2^*\omega_{Z_2/S}) \cong (\det \mathcal{C}_{X/Z_2}) \otimes_{\mathcal{O}_X} (i_1^*\omega_{Z_1/S}).$$

Operando en el grupo de Picard obtenemos el isomorfismo del enunciado.

■

Definición 9.27 Sea X un esquema proyectivo y localmente una intersección completa sobre un esquema localmente noetheriano S. Esto significa que existe una inmersión regular $i : X \longrightarrow Z$, donde Z/S es un esquema suave. Definimos el *haz canónico* de X sobre S como el haz inversible

$$\omega_{X/S} = \det \mathcal{N}_{X/Z} \otimes_{\mathcal{O}_X} i^* \det \omega_{Z/S},$$

donde $\mathcal{N}_{X/Z} = \mathcal{C}^*_{X/Z}$ es el *haz normal* de X en Z y $\omega_{Z/S} = \det \Omega^1_{Z/S}$.

El teorema anterior implica que $\omega_{X/S}$ no depende (salvo isomorfismo) de la elección de la inmersión regular i. Más precisamente, conviene observar que, como $\omega_{X/S}$ sólo está definido salvo isomorfismo, en realidad hemos definido la *clase canónica* en el grupo de Picard de X.

Observemos que, si X/S es un esquema suave, podemos tomar $Z = X$, de modo que $\omega_{X/S} = \det \Omega^1_{X/S}$, es decir, el haz canónico que acabamos de definir es el que ya teníamos definido cuando el esquema es suave.

Similarmente, si $X \longrightarrow S$ es una inmersión regular, podemos tomar $Z = S$ y entonces $\omega_{X/S} = \det \mathcal{N}_{X/S}$. Así pues, la definición de $\omega_{X/S}$ en el caso general puede leerse como $\omega_{X/S} = \omega_{X/Z} \otimes_{\mathcal{O}_X} i^*\omega_{Z/S}$, donde los haces canónicos de la derecha tienen definiciones distintas.

Ahora vamos a probar que esta relación es cierta en general para la composición de dos intersecciones completas locales, aunque no sean concretamente una inmersión regular y un homomorfismo suave.

Teorema 9.28 *Sean $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ dos intersecciones completas locales proyectivas. Entonces existe un isomorfismo natural*

$$\omega_{X/Z} \cong \omega_{X/Y} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\omega_{Y/Z}.$$

Demostración: Podemos tomar un mismo natural n tal que existan inmersiones cerradas $i : X \longrightarrow \mathrm{P}^n_Y$, $j : Y \longrightarrow \mathrm{P}^n_Z$ a través de las cuales factoricen f y g. Por 7.71 sabemos que ambas son inmersiones regulares.

Llamemos $U = \mathrm{P}^n_Y$, $W = \mathrm{P}^n_Z$, $V = \mathrm{P}^n_W$. Por la definición de los espacios proyectivos a partir de $\mathrm{P}^n_{\mathbb{Z}}$ es claro que $U = Y \times_Z W = Y \times_W V$, con la misma primera proyección. Tenemos el diagrama conmutativo siguiente:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & U \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "p"] & V \arrow[d, "q"] \\
& Y \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "g"'] & W \arrow[d] \\
& & Z
\end{tikzcd}$$

Las flechas horizontales son inmersiones regulares y las verticales son suaves. Usando los teoremas 7.63 y 7.66, así como las propiedades de los determinantes, vemos que

$$\omega_{X/V} = \omega_{X/U} \otimes_{\mathcal{O}_X} i^*\omega_{U/V} = \omega_{X/U} \otimes_{\mathcal{O}_X} i^*p^*\omega_{Y/W} = \omega_{X/U} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\omega_{Y/W}.$$

Análogamente, usando 7.57 y 7.41 a), vemos que

$$\omega_{V/Z} = \omega_{V/W} \otimes_{\mathcal{O}_V} q^*\omega_{W/Z}, \qquad j'^*\omega_{V/W} = \omega_{U/Y}.$$

Por consiguiente,

$$(i \circ j')^* \omega_{V/Z} = i^* \omega_{U/Y} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^* j^* \omega_{W/Z}.$$

Por último, por la definición del haz canónico:

$$\begin{aligned}\omega_{X/Z} = \omega_{X/V} \otimes_{\mathcal{O}_X} (i \circ j')^* \omega_{V/Z} &= \omega_{X/U} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^* \omega_{Y/W} \otimes_{\mathcal{O}_X} i^* \omega_{U/Y} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^* j^* \omega_{W/Z} \\ &= \omega_{X/Y} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^* \omega_{Y/Z}.\end{aligned}$$

■

Los haces canónicos se conservan por cambios de base planos:

Teorema 9.29 *Si X/S es un esquema proyectivo y localmente una intersección completa, entonces, para todo cambio de base plano $S' \longrightarrow S$, la proyección $p : X_{S'} \longrightarrow X$ cumple que*

$$\omega_{X_{S'}/S'} \cong p^* \omega_{X/S}.$$

Demostración: Recordemos que X'/S' es localmente una intersección completa por el teorema 7.69.

Si tomamos una inmersión cerrada regular $i : X \longrightarrow Z$ definida sobre S en un esquema suave Z/S, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X_{S'} \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "p"'] & Z_{S'} \arrow[d, "p'"] \\ X \arrow[r, "i"'] & Z \end{tikzcd}$$

El teorema 7.66 aplicado a i y al cambio de base plano $Z \times_S S' \longrightarrow Z$ nos da que i' es una inmersión cerrada y que $p^* \mathcal{C}_{X/Z} \cong \mathcal{C}_{X_{S'}/Z_{Z'}}$. Entonces

$$\begin{aligned} p^* \omega_{X/S} = p^* \det \mathcal{C}^*_{X/Z} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{S'}}} p^* i^* \omega_{Z/S} &\cong \det(p^* \mathcal{C}_{X/Z})^* \otimes_{\mathcal{O}_{X_{S'}}} \det i'^* p'^* \Omega^1_{Z/S} \\ &\cong \det \mathcal{C}^*_{X_{S'}/Z_{S'}} \otimes_{\mathcal{O}_{X_{S'}}} \det i' \Omega^1_{Z_{S'}/S'} \cong \omega_{X_{S'}/S'}. \end{aligned}$$

Aquí hemos usado, además de las propiedades básicas de las imágenes inversas y de los determinantes, el teorema 7.41 a). ■

Veamos un ejemplo de cálculo de haces canónicos:

Ejemplo Sea A un dominio íntegro noetheriano, sea $B = A[X_0, \ldots, X_n]$, sea $Z = \mathrm{P}^r_A$, sea $F \in B$ una forma de grado d, sea $X = \mathrm{Proy}(B/(F))$ y sea $i : X \longrightarrow Z$ la inmersión cerrada natural.

En el ejemplo de la página 282 hemos visto que i es una inmersión regular de codimensión 1 y, como Z/A es suave, vemos que X/A es localmente una inmersión completa. En dicho ejemplo hemos visto también que $\mathcal{C}_{X/Z} \cong \mathcal{O}_X(-d)$, luego $\mathcal{N}_{X/Z} \cong \mathcal{O}_X(d)$. Puesto que la codimensión es 1, resulta que

$$\det \mathcal{N}_{X/Z} \cong \mathcal{N}_{X/Z} \cong \mathcal{O}_X(d).$$

Teniendo en cuenta además el teorema 9.25 concluimos que

$$\omega_{X/A} \cong \mathcal{O}_X(d) \otimes_{\mathcal{O}_X} i^*\mathcal{O}_Z(-r-1)$$
$$\cong \mathcal{O}_X(d) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(-r-1) \cong \mathcal{O}_X(d-r-1).$$

■

Para probar que el haz dualizante de un conjunto algebraico proyectivo íntegro (que sea localmente una intersección completa) coincide con el haz canónico, hemos de introducir y estudiar los complejos de Koszul. Nos ocupamos de ello en la sección siguiente.

9.4 Complejos de Koszul

Sea A un anillo y $f \in A$. Definimos el *complejo de Koszul* asociado a f como el complejo

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow K_1(f) \longrightarrow K_0(f) \longrightarrow 0$$

dado por

$$K_0(f) = A, \qquad K_1(f) = \langle e \rangle \quad (A\text{-módulo libre de base } e),$$

con el operador determinado por $\partial_1(e) = f$. Obviamente, los grupos de homología del complejo de Koszul son

$$H_0(K_*(f)) = A/fA, \quad H_1(K_*(f)) = \operatorname{An} f, \quad H_n(K_*(f)) = 0 \text{ para } n > 1.$$

Si $\mathcal{C}$ es un complejo (directo) de A-módulos y $f_1, \ldots, f_r \in A$, definimos el *complejo de Koszul* asociado a $\mathcal{C}$ como el complejo

$$\mathcal{C}(f_1, \ldots, f_r) = \mathcal{C} \otimes_A K_*(f_1) \otimes_A \cdots \otimes_A K_*(f_r).$$

Recordemos que el producto tensorial de dos complejos $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ está definido como[1]

$$(\mathcal{C} \otimes_A \mathcal{D})_n = \bigoplus_{p+q=n} \mathcal{C}_p \otimes_A \mathcal{D}_q,$$

con el operador que sobre $\mathcal{C}_p \otimes_A \mathcal{D}_q$ viene dado por

$$\partial(c \otimes d) = \partial c \otimes d + (-1)^p c \otimes \partial d.$$

Si identificamos un A-módulo M con el complejo $\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$, entonces $\mathcal{C} \otimes_A M$ (segun la definición de producto de complejos que acabamos de dar) es simplemente el complejo dado por $(\mathcal{C} \otimes_A M)_n = \mathcal{C}_n \otimes_A M$ con el operador dado por $\partial(c \otimes m) = \partial c \otimes m$.

Así, si M es un A-módulo y $f_1, \ldots, f_r \in A$, tenemos definido el complejo de Koszul de M visto como complejo, que representaremos por

$$K_*(f_1, \ldots, f_r; M) = M \otimes_A K_*(f_1) \otimes_A \cdots \otimes_A K_*(f_r).$$

[1] Ver el teorema 6.3 de mi Topología Algebraica.

Vamos a describir este complejo con más detenimiento:

En primer lugar, $K_n(f_1, \ldots, f_r; M) = 0$ para $n > r$, pues se trata de la suma directa de los productos tensoriales de la forma

$$M \otimes_A K_{i_1}(f_1) \otimes_A \cdots \otimes_A K_{i_r}(f_r),$$

donde $i_1 + \cdots + i_r = n$, lo que obliga a que algún $i_j \geq 2$, luego $K_{i_j}(f_j) = 0$.

Por otra parte, si $n \leq r$, entonces

$$K_n(f_1, \ldots, f_r; M) = \bigoplus_{i_1,\ldots,i_r} M \otimes_A K_{i_1}(f_1) \otimes_A \cdots \otimes_A K_{i_r}(f_r),$$

donde n índices $i_1, \ldots, i_r$ toman el valor 1 y el resto toma el valor 0. Pongamos que $K_1(f_i) = \langle e_i \rangle$ y, para $1 \leq i_1 < \cdots < i_n \leq r$, definamos

$$e_{i_1,\ldots,i_n} = u_1 \otimes \cdots \otimes u_r,$$

donde $u_j = e_j$ si $j \in \{i_1, \ldots, i_n\}$ y $u_j = 1$ en caso contrario. Entonces

$$K_n(f_1, \ldots, f_r; M) = \bigoplus_{1 \leq i_1 < \cdots < i_n \leq r} M \otimes e_{i_1,\ldots,i_n} \cong M^{\binom{r}{n}},$$

entendiendo que $K_0(f_1, \ldots, f_r; M) = M$.

Al aplicar r veces la definición del operador de un producto de complejos, vemos que

$$\partial(m \otimes e_{i_1,\ldots,i_n}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} f_{i_j} m \otimes e_{i_1,\ldots,\hat{i}_j,\ldots,i_n},$$

donde el circunflejo indica la supresión del índice.

Ahora es fácil obtener otra representación útil de los complejos de Koszul. Definamos $K_1(f_1, \ldots, f_r) = \langle e_1, \ldots, e_r \rangle$ como un A-módulo libre de base $e_1, \ldots, e_r$ y $K_n(f_1, \ldots, f_r) = \Lambda^n(K_1(f_1, \ldots, f_r))$, que es un A-módulo libre de base $e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n}$, para $1 \leq i_1 < \cdots < i_n \leq r$, entendiendo que

$$K_0(f_1, \ldots, f_r) = A, \quad K_n(f_1, \ldots, f_r) = 0 \text{ para } n > r.$$

Obviamente, la asignación $e_{i_1,\ldots,i_n} \mapsto e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n}$ define un isomorfismo $K_n(f_1, \ldots, f_n; M) \cong M \otimes_A K_n(f_1, \ldots, f_n)$, y estos isomorfismos determinan un isomorfismo de complejos si definimos $\partial : K_n(f_1, \ldots, f_n) \longrightarrow K_{n-1}(f_1, \ldots, f_n)$ mediante

$$\partial(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} f_{i_j} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge \hat{e}_{i_j} \wedge \cdots \wedge e_{i_n}.$$

Consideremos ahora la siguiente sucesión exacta de complejos:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 & 0 & 0 & \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[u] & K_0(f) \arrow[r] \arrow[u] & 0 \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[u] & K_1(f) \arrow[r] \arrow[u] & A \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[u] & 0 \arrow[r] \arrow[u] & 0 \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

La primera columna es el A-módulo A considerado como complejo, la segunda es $K_*(f)$ y a la tercera la llamaremos A', de modo que, más brevemente, tenemos la sucesión

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow K_*(f) \longrightarrow A' \longrightarrow 0.$$

Puesto que los tres complejos son libres, si $\mathcal{C}$ es un complejo arbitrario, también es exacta la sucesión

$$0 \longrightarrow \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}(f) \longrightarrow \mathcal{C}' \longrightarrow 0,$$

donde $\mathcal{C}' = \mathcal{C} \otimes_A A'$ no es más que el complejo $\mathcal{C}$ trasladado en un índice: $\mathcal{C}'_n = \mathcal{C}_{n-1}$, $\partial'_n = \partial_{n-1}$. Por consiguiente $H_n(\mathcal{C}') = H_{n-1}(\mathcal{C})$.

La sucesión exacta da lugar a una sucesión exacta de homología:

$$\cdots \longrightarrow H_1(\mathcal{C}) \longrightarrow H_1(\mathcal{C}(f)) \longrightarrow H_0(\mathcal{C}) \xrightarrow{\delta_0} H_0(\mathcal{C}) \longrightarrow H_0(\mathcal{C}(f)) \longrightarrow 0$$

Vamos a calcular el homomorfismo de conexión

$$\delta_n : H_n(\mathcal{C}) \longrightarrow H_n(\mathcal{C}).$$

Tomamos $[c] \in H_n(\mathcal{C}) = H_{n+1}(\mathcal{C}')$. Esto significa que

$$c = c \otimes 1 \in \mathcal{C}_n \otimes_A A = \mathcal{C}'_{n+1}$$

cumple $\partial c = 0$. Tomamos una antiimagen en

$$\mathcal{C}_{n+1}(f) = (\mathcal{C}_{n+1} \otimes_A A) \oplus (\mathcal{C}_n \otimes_A K_1(f)),$$

por ejemplo $c \otimes e$, calculamos su frontera

$$\partial(c \otimes e) = (-1)^n c \otimes \partial e = (-1)^n fc \otimes 1,$$

y tomamos una antiimagen en $\mathcal{C}_n$, por ejemplo $(-1)^n fc$. En definitiva, concluimos que $\delta_n([c]) = (-1)^n f[c]$.

Supongamos ahora que el complejo $\mathcal{C}$ cumple que $H_n(\mathcal{C}) = 0$ para todo $n > 0$. Entonces la sucesión exacta de homología muestra que $H_n(\mathcal{C}(f)) = 0$ para todo $n > 1$, y además tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow H_1(\mathcal{C}(f)) \longrightarrow H_0(\mathcal{C}) \xrightarrow{\cdot f} H_0(\mathcal{C}) \longrightarrow H_0(\mathcal{C}(f)) \longrightarrow 0.$$

Si, además, f no es un divisor de cero de $H_0(\mathcal{C})$, entonces $H_n(\mathcal{C}(f)) = 0$ para $n > 0$ y $H_0(\mathcal{C}(f)) = H_0(\mathcal{C})/fH_0(\mathcal{C})$.

Ahora es inmediato el teorema principal que necesitamos:

Teorema 9.30 *Sea A un anillo, sea M un A-módulo y sea $f_1, \ldots, f_r \in A$ una sucesión M-regular. Entonces*

$$H_n(K_*(f_1, \ldots, f_r; M)) = 0, \quad \textit{para } n > 0$$

y $H_0(K_*(f_1, \ldots, f_r; M)) = M/(f_1, \ldots, f_r)M$.

Demostración: Partimos del complejo $\mathcal{C}^0 = M$, que ciertamente cumple $H_n(\mathcal{C}) = 0$ para $n > 0$ y además $H_0(\mathcal{C}^0) = M$. Por lo tanto, podemos aplicar las conclusiones previas al teorema, que se refieren al complejo $\mathcal{C}^1 = M \otimes_A K_*(f_1)$. Puesto que f_1 no es un divisor de cero de $H_0(\mathcal{C}^0)$, tenemos que $H_n(\mathcal{C}^1) = 0$ para todo $n > 1$ y $H_0(\mathcal{C}^1) = M/f_1M$. Ahora aplicamos el mismo argumento al complejo $\mathcal{C}^1$, lo que nos da que el complejo $\mathcal{C}^2 = M \otimes_A K_*(f_1) \otimes_A K_*(f_2)$ cumple que $H_n(\mathcal{C}^2) = 0$ para $n > 0$ y

$$H_0(\mathcal{C}^2) = (M/f_1M) \bigm/ f_2(M/f_1M) \cong M/(f_1, f_2)M.$$

Siguiendo de este modo, llegamos a que el complejo $\mathcal{C}^r = K_*(f_1, \ldots, f_r; M)$ cumple el teorema. ■

En particular, para $M = A$ tenemos el teorema siguiente:

Teorema 9.31 *Sea A un anillo y $f_1, \ldots, f_r$ una sucesión A-regular en A. Entonces el complejo de Koszul*

$$\cdots \longrightarrow K_1(f_1, \ldots, f_r) \longrightarrow K_0(f_1, \ldots, f_r) \longrightarrow A/(f_1, \ldots, f_r) \longrightarrow 0$$

es una resolución libre del A-módulo $A/(f_1, \ldots, f_r)$.

Ahora ya podemos probar el teorema fundamental de esta sección:

Teorema 9.32 *Sea X/k un esquema proyectivo que sea localmente una intersección completa sobre el cuerpo k. Entonces el haz dualizante $\omega^\circ_{X/k}$ coincide con el haz canónico $\omega_{X/k}$. En particular el haz dualizante es un haz inversible.*

DEMOSTRACIÓN: Fijemos una inmersión cerrada $i : X \longrightarrow \mathrm{P}_k^r$, que por 7.71 será una inmersión regular. Según 9.15 y 9.25 tenemos que

$$\omega_X^\circ = i^* \mathcal{E}\mathrm{xt}^n_{\mathrm{P}_k^r}(i_*\mathcal{O}_X, \omega_{\mathrm{P}_k^r/k}).$$

Sea $\mathcal{I} = \mathrm{N}(i^\#)$. Tomemos un punto $P \in X$ y consideremos una sucesión regular que genere $\mathcal{I}_P = (f_{1,P}, \ldots, f_{n,P}) \subset \mathcal{O}_{\mathrm{P}_k^r,P}$. Tomando un entorno afín de P y, dentro de éste, un abierto principal adecuado, podemos encontrar un abierto afín $U \subset \mathrm{P}_k^r$ tal que $P \in U$, $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{O}_{\mathrm{P}_k^r}(U) = A$ y además $\mathcal{I}(U) = (f_1, \ldots, f_n) \subset A$. Notemos que n es la codimensión de i en P (ver las observaciones tras 7.59), o también el rango de $\mathcal{C}_{\mathrm{P}_k^r/X,P}$ (por 7.62), luego es localmente constante, y podemos suponer que es constante en U. Podemos ver a P como un ideal primo de A que contiene a $\mathcal{I}(U)$.

Por el teorema anterior, el complejo de Koszul $K_*(f_{1,P}, \ldots, f_{n,P})$ es una resolución libre del A_P-módulo $A_P/(f_{1,P}, \ldots, f_{n,P}) = A_P/\mathcal{I}_P$. Ahora bien, es evidente que podemos identificar

$$K_p(f_{1,P}, \ldots, f_{n,P}) \cong K_p(f_1, \ldots, f_n)_P,$$

de modo que el operador del complejo de A_P se corresponde a través de este isomorfismo con la localización del complejo de A. Así pues, el complejo

$$\cdots \longrightarrow K_1(f_1, \ldots, f_n) \longrightarrow K_0(f_1, \ldots, f_n) \longrightarrow A/(f_1, \ldots, f_n) \longrightarrow 0$$

da lugar a una sucesión exacta cuando se localiza en P. Teniendo en cuenta que el complejo es finito y que todos los módulos son finitamente generados, es fácil ver que el complejo sigue siendo exacto cuando se localiza a un cierto elemento $f \in A \setminus P$. Equivalentemente, reduciendo el entorno U de P podemos suponer que el complejo de Koszul $K_*(f_1, \ldots, f_n)$ es una resolución libre de $A/(f_1, \ldots, f_n)$ como A-módulo.

Consideremos, por otra parte, el haz $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$. El teorema [5.23] implica que las clases $[f_{1P}], \ldots, [f_{nP}]$ son una base de $(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)_P$ como $\mathcal{O}_{X,P}$-módulo. Reduciendo más el entorno U podemos exigir también que $[f_1], \ldots, [f_r]$ sean una base del $A/\mathcal{I}(U)$-módulo $\mathcal{I}(U)/\mathcal{I}(U)^2$.

En efecto: en general, si A es un anillo noetheriano (en nuestro caso $A/\mathcal{I}(U)$) y $M = \langle f_1, \ldots, f_n \rangle$ es un A-módulo tal que M_P es un A_P-módulo libre de base $f_1/1, \ldots, f_n/1$, para cierto ideal primo P de A, entonces el conjunto S de los $a \in A^n$ tales que $a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n = 0$ es un submódulo de A^n (finitamente generado, porque A es noetheriano) y $S_P = 0$, luego existe un $f \in A \setminus P$ tal que $S_f = 0$, lo que implica que $f_1/1, \ldots, f_n/1$ forman una base de M_f como A_f-módulo.

En definitiva, hemos probado que X puede cubrirse por abiertos afines U de P_k^r tales que $\mathcal{I}(U) = (f_1, \ldots, f_n) \subset \mathcal{O}_{\mathrm{P}_k^r}(U)$, donde n es la codimensión de i en U, el complejo de Koszul $K_*(f_1, \ldots, f_n)$ es una resolución libre de $(i_*\mathcal{O}_X)(U)$ como $\mathcal{O}_{\mathrm{P}_k^r}(U)$-módulo y $[f_1], \ldots, [f_n]$ es una base de $(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)(U)$ como $(i_*\mathcal{O}_X)(U)$-módulo.

Aún podemos decir más: si $P \in X \cap U$ es un punto arbitrario (no necesariamente el que hemos tomado al principio), entonces tenemos que $\mathcal{I}_P = (f_{1P}, \ldots, f_{nP})$, donde

$$n = \dim \mathcal{O}_{\mathrm{P}^r_k,P} - \dim \mathcal{O}_{X,P} = \operatorname{alt} \mathcal{I}_P$$

(por el teorema [5.44], ya que $\mathcal{O}_{\mathrm{P}^r_k,P}$ es un anillo local regular, luego de Cohen-Macaulay), y el teorema [5.39] nos da entonces que $f_{1P}, \ldots, f_{nP}$ es una sucesión regular en $\mathcal{O}_{\mathrm{P}^r_k,P}$. Esto implica que si $P \in V \subset U$, entonces, partiendo de P y de $f_{1P}, \ldots, f_{nP}$ como hemos hecho al principio de la prueba, encontramos un abierto $P \in U' \subset V$ que cumple las mismas propiedades de U con los generadores $f_1|_{U'}, \ldots, f_n|_{U'}$.

Queremos calcular $\mathcal{E}\mathrm{xt}^n_{\mathrm{P}^r_k}(i_*\mathcal{O}_X, \omega_{\mathrm{P}^r_k})|_U$. Según el teorema 9.3, se trata del haz coherente asociado al A-módulo $\operatorname{Ext}^n_A(A/(f_1, \ldots, f_n), \omega_{\mathrm{P}^r_k}(U))$. Podemos calcularlo con el complejo de Koszul, es decir, como el n-simo grupo de cohomología del complejo

$$\operatorname{Hom}_A(K_*(f_1, \ldots, f_n), \omega_{\mathrm{P}^r_k}(U)).$$

Tenemos que $K_n(f_1, \ldots, f_n) = \langle e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \rangle$, por lo que

$$\operatorname{Hom}_A(K_n(f_1, \ldots, f_n), \omega_{\mathrm{P}^r_k}(U)) \cong \omega_{\mathrm{P}^r_k}(U),$$

y todos sus elementos son cociclos. Además $K_{n-1}(f_1, \ldots, f_n) = \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$, donde $v_j = e_1 \wedge \cdots \wedge \hat{e}_j \wedge \cdots \wedge e_n$ y $\partial(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) = f_1 e_1 + \cdots + f_n e_n$, por lo que si $\phi \in \operatorname{Hom}_A(K_{n-1}(f_1, \ldots, f_n), \omega_{\mathrm{P}^r_k}(U))$, entonces la cofrontera $d\phi$ se corresponde, a través del isomorfismo anterior, con el elemento

$$(d\phi)(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) = f_1\phi(e_1) + \cdots + f_n\phi(e_n).$$

En definitiva, vemos que

$$\begin{aligned} \operatorname{Ext}^n_A(A/(f_1, \ldots, f_n), \omega_{\mathrm{P}^r_k}(U)) &\cong \omega_{\mathrm{P}^r_k}(U)/(f_1, \ldots, f_n)\omega_{\mathrm{P}^r_k}(U) \\ &\cong \omega_{\mathrm{P}^r_k}(U) \otimes_A (A/(f_1, \ldots, f_n)). \end{aligned}$$

Pasando a haces, tenemos que

$$\mathcal{E}\mathrm{xt}^n_{\mathrm{P}^r_k}(i_*\mathcal{O}_X, \omega_{\mathrm{P}^r_k})|_U \cong (\omega_{\mathrm{P}^r_k} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{P}^r_k}} (i_*\mathcal{O}_X))|_U.$$

Ahora bien, este isomorfismo no es canónico, sino que depende de la elección del generador $f_1, \ldots, f_n$. En efecto, supongamos que $\mathcal{I}(U) = (g_1, \ldots, g_n)$ en las mismas condiciones. Podemos expresar

$$g_l = \sum_{j=1}^n c_{lj} f_j, \qquad l = 1, \ldots, n,$$

donde $c_{lj} \in A = \mathcal{O}_{\mathrm{P}^r_k}(U)$. Sea $K_1(g_1, \ldots, g_n) = \langle e'_1, \ldots, e'_n \rangle$ y consideremos el homomorfismo $\phi_1 : K_1(g_1, \ldots, g_n) \longrightarrow K_1(f_1, \ldots, f_n)$ dado por

$$\phi_1(e'_i) = \sum_{j=1}^n c_{lj} e_j.$$

Es claro que ϕ_1 conmuta con los operadores frontera, e induce un homomorfismo (ϕ_p) entre los complejos de Koszul, que a su vez induce un homomorfismo entre las resoluciones

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & K_1(g_1,\ldots,g_n) \arrow[r] \arrow[d, "\phi_1"] & K_0(g_1,\ldots,g_n) \arrow[r] \arrow[d, "\phi_0=1_A"] & A/(g_1,\ldots,g_n) \arrow[r] \arrow[d, "1"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & K_1(f_1,\ldots,f_n) \arrow[r] & K_0(f_1,\ldots,f_n) \arrow[r] & A/(f_1,\ldots,f_n) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Observemos que

$$\phi_n(e'_1 \wedge \cdots \wedge e'_n) = \phi_1(e'_1) \wedge \cdots \wedge \phi_1(e'_n) = \det(c_{lj})\, e_1 \wedge \cdots \wedge e_n.$$

El homomorfismo $(\phi_p)_p$ induce un homomorfismo entre los complejos de homomorfismos

$$\operatorname{Hom}_A(K_*(f_1,\ldots,f_n), \omega_{\mathrm{P}_k^r}(U)) \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(K_*(g_1,\ldots,g_n), \omega_{\mathrm{P}_k^r}(U)),$$

que a su vez induce un isomorfismo

$$\operatorname{Ext}^n_A(A/(f_1,\ldots,f_n), \omega_{\mathrm{P}_k^r}(U)) \longrightarrow \operatorname{Ext}^n_A(A/(g_1,\ldots,g_n), \omega_{\mathrm{P}_k^r}(U)).$$

Un elemento $[\psi]$ del primer grupo se corresponde con

$$\psi(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) \otimes 1 \in \omega_{\mathrm{P}_k^r}(U) \otimes_A (A/\mathcal{I}(U)),$$

mientras que su imagen $[\phi_n \circ \psi]$ en el segundo grupo se corresponde con

$$\psi(\phi_n(e'_1 \wedge \cdots \wedge e'_n)) = \det(c_{lj})\psi(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) \otimes 1 \in \omega_{\mathrm{P}_k^r}(U) \otimes_A (A/\mathcal{I}(U)).$$

En definitiva, tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ext}^n_A(A/\mathcal{I}(U), \omega_{\mathrm{P}_k^r}(U)) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\phi}_n"'] & \omega_{\mathrm{P}_k^r}(U) \otimes_A (A/\mathcal{I}(U)) \arrow[d, "\cdot \det(c_{lj})"] \\
\operatorname{Ext}^n_A(A/\mathcal{I}(U), \omega_{\mathrm{P}_k^r}(U)) \arrow[r] & \omega_{\mathrm{P}_k^r}(U) \otimes_A (A/\mathcal{I}(U))
\end{tikzcd}$$

donde las flechas horizontales son los isomorfismos calculados con uno y otro complejo de Koszul. De aquí obtenemos a su vez el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}\mathrm{xt}^n_{\mathrm{P}_k^r}(i_*\mathcal{O}_X, \omega_{\mathrm{P}_k^r})|_U \arrow[r] \arrow[d] & (\omega_{\mathrm{P}_k^r} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{P}_k^r}} (i_*\mathcal{O}_X))|_U \arrow[d, "\cdot \det(c_{lj})"] \\
\mathcal{E}\mathrm{xt}^n_{\mathrm{P}_k^r}(i_*\mathcal{O}_X, \omega_{\mathrm{P}_k^r})|_U \arrow[r] & (\omega_{\mathrm{P}_k^r} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{P}_k^r}} (i_*\mathcal{O}_X))|_U
\end{tikzcd}$$

Esto muestra explícitamente que los isomorfismos correspondientes a las flechas horizontales no son naturales, sino que dependen de la elección del generador de $\mathcal{I}(U)$, y esto nos impide pegar los isomorfismos correspondientes a cada abierto U para obtener un isomorfismo sobre todo P_k^r.

Para arreglar esto consideramos el A-módulo $\det(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)^*(U)$. Una base de $(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)^*(U) = \operatorname{Hom}_A((\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)(U), A)$ es la base dual $[f_1]^*, \ldots, [f_n]^*$, determinada por $[f_i]^*([f_j]) = \delta_{ij}$. Si consideramos otro generador $g_1, \ldots, g_n$, la relación entre las bases duales es

$$[f_l]^* = \sum_{j=1}^n c_{lj}[g_j]^*,$$

luego la relación entre la base $[f_1]^* \wedge \cdots \wedge [f_n]^*$ del A-módulo $\det(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)^*(U)$ y la base correspondiente al segundo generador es la dada por

$$[f_1]^* \wedge \cdots \wedge [f_n]^* = \det(c_{lj})\,[g_1]^* \wedge \cdots \wedge [g_n]^*.$$

Ahora podemos corregir el isomorfismo anterior pasando al isomorfismo

$$\operatorname{Ext}^n_A(A/\mathcal{I}(U), \omega_{\mathrm{P}^r_k}(U)) \longrightarrow \omega_{\mathrm{P}^r_k}(U) \otimes_A (A/\mathcal{I}(U)) \otimes_{A/\mathcal{I}(U)} \det(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)^*(U)$$

que a cada $[\psi]$ le hace corresponder el elemento

$$\psi(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) \otimes 1 \otimes ([f_1]^* \wedge \cdots \wedge [f_n]^*).$$

Podemos contraer el segundo producto tensorial, con lo que tenemos un isomorfismo

$$\operatorname{Ext}^n_A(A/\mathcal{I}(U), \omega_{\mathrm{P}^r_k}(U)) \longrightarrow \omega_{\mathrm{P}^r_k}(U) \otimes_A \det(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)^*(U)$$

que a cada $[\psi]$ le hace corresponder el elemento

$$\psi(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) \otimes ([f_1]^* \wedge \cdots \wedge [f_n]^*).$$

Ahora bien, este isomorfismo no depende del generador con que se calcula, pues $[\psi]$ se corresponde con $[\phi_n \circ \psi]$ en el grupo Ext^n_A calculado con el segundo generador, y la imagen de esta clase es

$$\det(c_{lj})\psi(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) \otimes ([g_1]^* \wedge \cdots \wedge [g_n]^*),$$

que claramente coincide con la imagen de $[\psi]$.

Este isomorfismo de módulos se corresponde con un isomorfismo de haces coherentes

$$\mathcal{E}xt^n_{\mathrm{P}^r_k}(i_*\mathcal{O}_X, \omega_{\mathrm{P}^r_k})|_U \cong (\omega_{\mathrm{P}^r_k} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{P}^r_k}} \det(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)^*)|_U.$$

Pero ahora, si tenemos dos abiertos U y U' con generadores $f_1, \ldots, f_n$ y $g_1, \ldots, g_n$ en las condiciones que hemos exigido y $P \in X \cap U \cap V$, podemos tomar un abierto afín $P \in U'' \subset U \cap U'$ de modo que U'' cumpla dichas condiciones tanto con $f_1|_{U''}, \ldots, f_n|_{U''}$ como con $g_1|_{U''}, \ldots, g_n|_{U''}$. La restricción a U'' de los isomorfismos para U y U' son los isomorfismos correspondientes a estos generadores, y tenemos que en realidad son el mismo, luego los isomorfismos que hemos construido se pegan para formar un único isomorfismo de haces

$$\mathcal{E}xt^n_{\mathrm{P}^r_k}(i_*\mathcal{O}_X, \omega_{\mathrm{P}^r_k}) \cong \omega_{\mathrm{P}^r_k} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathrm{P}^r_k}} \det(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)^*.$$

Aplicando i^* obtenemos finalmente que

$$\omega^\circ_X \cong i^*(\omega_{\mathrm{P}^r_k}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \det \mathcal{N}_{\mathrm{P}^r_k/X} \cong \omega_{X/k}.$$

■

9.5 El género geométrico

Estudiamos ahora un invariante que podemos asociar a los conjuntos algebraicos proyectivos:

Definición 9.33 Si X/k es un esquema proyectivo geométricamente regular, definimos el *género geométrico* de X como $p_g(X) = \dim_k \omega_X(X)$, que es un número natural no negativo.

Si X tiene dimensión d, el teorema 9.16 aplicado a $\mathcal{O}_X$ nos da que

$$\omega_X(X) = H^0(X, \omega_X) \cong H^d(X, \mathcal{O}_X)^*,$$

luego $p_g(X) = \dim_k H^d(X, \mathcal{O}_X)$.

Ejemplo Si X/k es una curva proyectiva geométricamente regular y geométricamente conexa, el ejemplo de la página 226 nos da que $p_g(X) = p_a(X)$.

En general el género aritmético no tiene por qué coincidir con el geométrico. Por ejemplo, si X tiene dimensión 2 (y es geométricamente conexo), la fórmula para el género aritmético es

$$p_a(X) = \dim_k H^2(X, \mathcal{O}_X) - \dim_k H^1(X, \mathcal{O}_X),$$

luego

$$\dim_k H^1(X, \mathcal{O}_X) = p_g(X) - p_a(X).$$

En particular vemos que $p_g(X) \geq p_a(X)$. ■

El teorema 6.15 muestra que el género geométrico (al igual que el aritmético) no se altera si extendemos el cuerpo base.

Teorema 9.34 *Si X/k e Y/k son esquemas proyectivos geométricamente regulares, geométricamente conexos y birracionalmente equivalentes (es decir, tales que un abierto no vacío de X es isomorfo a un abierto de Y) entonces $p_g(X) = p_g(Y)$.*

Demostración: Observemos que, al ser geométricamente regulares, los esquemas son reducidos e irreducibles, es decir, son esquemas íntegros. Sea $f : U \longrightarrow Y$ un isomorfismo de un abierto U de X en un abierto $f[U]$ de Y. Por el teorema 7.6 podemos extender f a un homomorfismo $f : V \longrightarrow Y$, donde el abierto V contiene a todos los puntos de codimensión 1.

El homomorfismo $f^*\Omega^1_{Y/k} \longrightarrow \Omega^1_{V/k}$ dado por el teorema 7.41 b) induce un homomorfismo $f^*\omega_Y \longrightarrow \omega_V$, que a su vez determina un homomorfismo $(f^*\omega_Y)(V) \longrightarrow \omega_X(V)$. Por otra parte tenemos un homomorfismo natural

$\omega_Y \longrightarrow f_*f^*\omega_Y$, que nos da un homomorfismo $\omega_Y(Y) \longrightarrow (f^*\omega_Y)(V)$. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
\omega_Y(Y) & \longrightarrow & (f^*\omega_Y)(V) & \longrightarrow & \omega_X(V) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\omega_Y(f[U]) & \longrightarrow & (f^*\omega_Y)(f^{-1}[f[U]]) & \longrightarrow & \omega_X(f^{-1}[f[U]]) \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & (f^*\omega_Y)(U) & \longrightarrow & \omega_X(U)
\end{array}$$

Teniendo en cuenta que las flechas horizontales inferiores son isomorfismos y que las restricciones son inyectivas, es claro que la fila superior es inyectiva. Así pues,

$$p_g(Y) = \dim_k \omega_Y(Y) \leq \dim_k \omega_X(V) = \dim_k \omega_X(X) = p_g(X).$$

La última igualdad se debe al teorema 7.5, según el cual la restricción $\omega_X(X) \longrightarrow \omega_X(V)$ es un isomorfismo.

Por simetría se cumple también la desigualdad $p_g(X) \leq p_g(Y)$, luego tenemos la igualdad. ■

Observemos que $p_g(\mathrm{P}_k^r) = 0$, pues $\omega_{\mathrm{P}_k^r} = \mathcal{O}_{\mathrm{P}_k^r}(-r-1)$ y por lo tanto $\omega_{\mathrm{P}_k^r}(X) = 0$. Por consiguiente, una condición necesaria para que una esquema íntegro proyectivo X/k sea birracional (o, en particular, isomorfo) a P_k^r es que tenga género geométrico nulo.

9.6 Un teorema de conexión

Terminamos el capítulo con unas consecuencias del lema de Lema de Enriques-Severi-Zariski:

Teorema 9.35 *Sea X/k un conjunto algebraico geométricamente íntegro y proyectivo sobre el cuerpo k. Supongamos que* $\dim X \geq 2$ *y sea* $D \in \mathrm{Div}_c(X)$ *un divisor entero y amplio en X. Entonces el soporte de D es conexo.*

Demostración: Supongamos primeramente que X es normal. Llamemos Y al soporte de D. Los divisores D^q tienen el mismo soporte, luego no perdemos generalidad si suponemos que $D = \mathcal{O}_X(1)$ es muy amplio. Según las observaciones previas al teorema 8.29, el haz coherente $\mathcal{O}_X(D^{-q}) = \mathcal{O}_X(-q)$ es un haz de ideales de $\mathcal{O}_X$ que determina una inmersión cerrada $i_q : Y_q \longrightarrow X$, donde Y_q es Y con una cierta estructura de esquema. Tenemos una sucesión exacta de haces en X:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-q) \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow i_{q*}\mathcal{O}_{Y_q} \longrightarrow 0.$$

Por 9.11, tenemos que, para q suficientemente grande, $H^1(X, \mathcal{O}_X(-q)) = 0$, luego el homomorfismo de k-álgebras

$$\mathcal{O}_X(X) \longrightarrow \mathcal{O}_{Y_q}(Y_q)$$

es suprayectivo. Por el teorema 4.26, tenemos que $\mathcal{O}_X(X) = k$, luego también $\mathcal{O}_{Y_q}(Y_q) = k$. El teorema 3.7 implica que Y_q, es decir, Y, es conexo.

Si X no es normal, consideramos su normalización $\pi : X' \longrightarrow X$, que es un homomorfismo finito, luego $\pi^* D$ es un divisor entero y amplio (teorema 5.52). Observemos que X' también es geométricamente íntegro por el teorema 3.62. Así pues, $Y' = \operatorname{sop} \pi^* D$ es conexo por la parte ya probada. Como π es suprayectivo, se cumple que $\operatorname{sop} D = \pi[Y']$ también es conexo. ■

En particular, si $X \subset \mathrm{P}_k^n$ es un conjunto algebraico proyectivo geométricamente íntegro, la intersección con X de un hiperplano H de P_k^n es conexa. (Si $X \subset H$ es trivial y, en caso contrario, H es el soporte de $\mathcal{O}_{\mathrm{P}_k^n}(H) = \mathcal{O}_{\mathrm{P}_k^n}(1)$, y no contiene al punto genérico de X, luego está definida su imagen inversa $D \in \operatorname{Div}_c(X)$, que es un divisor entero muy amplio con soporte $H \cap X$.)

Teorema 9.36 *Sea k un cuerpo algebraicamente cerrado, sea X/k un conjunto algebraico propio conexo y P, $Q \in X$ dos puntos cerrados. Entonces existe una curva conexa contenida en X que pasa por P y Q.*

Demostración: Demostraremos el teorema por inducción sobre la dimensión de X. Si $\dim X = 1$ no hay nada que probar, pues X es ya una curva. Admitamos el teorema para conjuntos algebraicos de dimensión menor que $\dim X \geq 2$. Es claro que basta probar el teorema para cada componente irreducible de X, luego podemos suponer que X es (geométricamente) íntegro.

Por el lema de Chow, existe un esquema proyectivo X'/k y un homomorfismo proyectivo $X' \longrightarrow X$ que se restringe a un isomorfismo de un abierto denso en X' en un abierto denso en X. (En particular, X' es irreducible y el homomorfismo es suprayectivo.) Basta probar el teorema para X' y sendas antiimágenes P' y Q' de P y Q. Así pues, podemos suponer que X/k es proyectivo o, equivalentemente, que X es un subesquema cerrado de P_k^n.

Ahora observamos que X no puede estar contenido en la recta que une P y Q, pues su dimensión es mayor que 1. Podemos tomar, pues, un punto $R \in X$ que no esté contenido en dicha recta. A su vez, podemos tomar un hiperplano H en P_k^n que pase por P y Q pero no por R. Por la observación previa al teorema, $X' = H \cap X$ es un cerrado conexo estrictamente contenido en X que contiene a P y a Q, y basta aplicar la hipótesis de inducción. ■

Capítulo X

Curvas algebraicas

En este capítulo particularizaremos la teoría de esquemas que hemos estudiado al caso concreto de las curvas algebraicas, es decir, los conjuntos algebraicos de dimensión 1. La mayoría de los resultados se refieren a curvas proyectivas y son preliminares o consecuencias del teorema de Riemann-Roch.

10.1 Hechos básicos sobre curvas algebraicas

Vamos a empezar recordando o particularizando lo que ya sabemos sobre curvas algebraicas. Consideramos, más concretamente, una curva algebraica íntegra C/k. Obviamente, C/k es un esquema noetheriano. Por el teorema 3.22 sabemos que el cuerpo de funciones racionales $k(C)$ tiene grado de trascendencia 1 sobre k (y esto caracteriza a las curvas entre los conjuntos algebraicos de mayor dimensión). Por el teorema 7.20 sabemos que C/k es regular si y sólo si es normal, y por 7.16 sabemos que una curva normal es completa si y sólo si es proyectiva.

Observemos que la topología de C/k es especialmente simple: todos los puntos son cerrados, excepto el punto genérico. Un subconjunto cerrado de C distinto del propio C ha de tener dimensión 0, y ha de descomponerse en un número finito de componentes irreducibles, que han de ser puntos cerrados. Así pues, los subconjuntos cerrados de C son el propio C y los subconjuntos finitos de puntos cerrados. Equivalentemente, los abiertos no vacíos de C son los subconjuntos cofinitos que contienen al punto genérico.

De aquí deducimos que los homomorfismos no triviales entre curvas proyectivas son finitos:

Teorema 10.1 *Si $f : C \longrightarrow C'$ es un homomorfismo proyectivo entre dos curvas íntegras, entonces f es constante o suprayectivo, y en el segundo caso es un homomorfismo finito.*

Demostración: La imagen $f[C]$ ha de ser cerrada en C'. Si no es todo C', entonces es un conjunto finito, que ha de reducirse a un punto, o de lo contrario

C se expresaría como unión de un número finito de cerrados no vacíos. Por lo tanto, f es constante. Si se da la otra posibilidad, entonces f hace corresponder el punto genérico de C con el de C' y los puntos cerrados de C con puntos cerrados de C'. En particular, la fibra del punto genérico de C' consta de un único punto, y la fibra de un punto cerrado de C' es un cerrado en C distinto de C, luego es finita. El teorema 4.43 nos da que f es finito. ■

Debido a que la normalidad coincide con la regularidad en el caso de curvas (conexas), la normalización $\rho : C' \longrightarrow C$ de una curva íntegra C/k se denomina habitualmente *regularización.* Sabemos que C' es un conjunto algebraico con el mismo cuerpo de funciones racionales, luego se trata también de una curva.

Veamos ahora que una curva regular está completamente determinada por su cuerpo de funciones racionales:

Teorema 10.2 *Sea k un cuerpo.*

a) Para cada cuerpo K de funciones algebraicas de una variable sobre k, existe, salvo isomorfismo, una única curva proyectiva normal C/k tal que $k(X) = K$.

b) Los homomorfismos suprayectivos $X \longrightarrow Y$ definidos sobre k entre dos curvas proyectivas normales definidas sobre k se corresponden biunívocamente con los k-monomorfismos $k(Y) \longrightarrow k(X)$ entre sus cuerpos de funciones racionales.

Demostración: Veamos primero el apartado b), que a su vez prueba la unicidad de a).

Ciertamente, un homomorfismo suprayectivo $X \longrightarrow Y$ transforma el punto genérico de X en el punto genérico de Y, luego induce un k-monomorfismo entre sus cuerpos de funciones racionales. Es inmediato que la asignación es inyectiva.

Recíprocamente, un k-monomorfismo $k(Y) \longrightarrow k(X)$ induce un homomorfismo $\operatorname{Esp} k(X) \longrightarrow \operatorname{Esp} k(Y)$, que podemos componer con el homomorfismo natural $\operatorname{Esp} k(Y) \longrightarrow Y$ (el dado por el teorema 3.5), y aplicar entonces el teorema 4.5, que nos da un abierto $U \subset X$ y un homomorfismo $U \longrightarrow Y$ que induce entre los cuerpos de funciones racionales el monomorfismo de partida. Por el teorema 7.7, este homomorfismo se extiende a un homomorfismo $X \longrightarrow Y$, definido sobre k, que induce el k-monomorfismo de partida.

Consideremos ahora un cuerpo K de funciones racionales de una variable sobre k. Esto significa que K es una extensión finita de $k(X)$, luego es de la forma $K = k(X, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, donde los elementos α_i son algebraicos. Por consiguiente, K es el cuerpo de cocientes de la k-álgebra afín $A = k[X, \alpha_1, \ldots, \alpha_n]$, que es un dominio íntegro. Entonces K es el cuerpo de funciones racionales de la curva íntegra afín $\operatorname{Esp} A$, y también el de su clausura proyectiva X_0, que es una curva íntegra proyectiva, y también el de su normalización X, que es una curva completa y normal, luego proyectiva. ■

En otros términos, el teorema anterior afirma que la categoría formada por las curvas proyectivas normales definidas sobre k y los homomorfismos suprayectivos definidos sobre k es isomorfa a la categoría formada por los cuerpos de funciones algebraicas de una variable sobre k y los k-monomorfismos de cuerpos.

En la última sección necesitaremos el teorema siguiente, que se basa en algunos resultados elementales sobre dominios de Dedekind:

Teorema 10.3 *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un homomorfismo finito de Galois entre curvas proyectivas normales sobre un cuerpo k (es decir, tal que la extensión $k(Y)/k(X)$ es finita de Galois). Entonces los automorfismos de X inducidos por los $k(Y)$-automorfismos de $k(X)$ actúan transitivamente sobre las fibras de f.*

Demostración: Llamemos G al grupo de Galois de $k(X)/k(Y)$, sea $\sigma \in G$ y llamemos $s : X \longrightarrow X$ al automorfismo que induce según el teorema anterior. El diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} k(X) \arrow[r, "\sigma"] & k(X) \\ k(Y) \arrow[u] \arrow[r, "1"'] & k(Y) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

se traduce en el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "s"] \arrow[d, "f"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "1"'] & Y \end{tikzcd}$$

que implica que G actúa sobre cada fibra de f. Dado $y \in Y$, tomamos un entorno afín U, de modo que $f^{-1}[U]$ es un abierto afín de X, de modo que la restricción de f a $f^{-1}[U]$ se corresponde con un homomorfismo de anillos $D \longrightarrow E$. Ambos son anillos noetherianos íntegramente cerrados y de dimensión 1, luego son dominios de Dedekind. Además E es un D-módulo finitamente generado, luego es una extensión entera de D, luego es la clausura entera de D en $k(X)$. En suma, E/D es una extensión de dominios de Dedekind.[1]

El punto y se identifica con un ideal primo de D y su la fibra está formada por los ideales primos x de E tales que $x \cap D = y$ (en términos de la teoría algebraica de números, los divisores de y en E). Además $s(x) = \sigma^{-1}[x]$. Ahora basta tener en cuenta que el grupo de Galois de una extensión de Galois de dominios de Dedekind actúa transitivamente sobre los divisores de un mismo primo.[2] ■

Recordemos, por último, el concepto de género aritmético de una curva proyectiva C/k, dado por

$$p_a = \dim_k H^1(C, \mathcal{O}_C) - \dim_k H^0(C, \mathcal{O}_C) + 1,$$

[1] En el sentido de la definición 1.25 de mi *Teoría de cuerpos de clases.*

[2] Teorema 1.35 *ibid.*

y el concepto de género geométrico de una curva proyectiva geométricamente regular, dado por

$$p_g = \dim_k H^0(C, \omega_C) = \dim_k H^1(C, \mathcal{O}_C).$$

Si la curva es además geométricamente conexa, entonces $\mathcal{O}_C(C) \cong k$ (teorema 4.26), luego $p_g = p_a$, y hablamos simplemente del *género* de la curva, que se suele representar por g.

Observemos que el teorema 6.15 implica que el género (tanto el aritmético como el geométrico) se conserva por extensiones de constantes, así como que P^1_k tiene género $g = 0$.

10.2 El grado y la dimensión de un divisor

Los divisores primos de una curva íntegra C/k son simplemente sus puntos cerrados, y que los divisores de Weil son, por lo tanto, productos y cocientes de un número finito de puntos cerrados. Según el teorema 2.41, si $P \in C$ es un punto cerrado, el cuerpo $k(P)$ es una extensión finita de k, luego podemos definir el *grado* de P como $\operatorname{grad} P = |k(P) : k|$. (Comparar con el ejemplo de la página 226.) Esta aplicación, definida sobre los divisores primos, se extiende de forma única a un homomorfismo de grupos

$$\operatorname{grad} : \operatorname{Div}(C) \longrightarrow \mathbb{Z}.$$

Ejercicio: Comprobar que esta definición de grado generaliza a la que ya teníamos para $C = \mathrm{P}^1_k$. (Ver la discusión previa al teorema 8.18.)

Notemos que si el cuerpo k es algebraicamente cerrado, entonces todos los divisores primos tienen grado 1.

Para una curva arbitraria C/k (no necesariamente íntegra) podemos definir el grado de un divisor de Cartier como el grado de su divisor de Weil asociado o, explícitamente,

$$\operatorname{grad} D = \sum_P v_P(D) \operatorname{grad} P,$$

donde $D \in \operatorname{Div}_c(C)$, el índice P recorre los divisores primos de C y v_P es el homomorfismo definido en 8.26.

Teorema 10.4 *Sea C/k una curva y $D \in \operatorname{Div}_c(C)$ un divisor entero. Entonces* $\operatorname{grad} D \geq 0$ *y* $\operatorname{grad} D = 0$ *si y sólo si* $D = 1$.

Demostración: La hipótesis $D \geq 1$ significa que D está representado por un sistema $\{(U_i, f_i)\}_i$ con $f_i \in \mathcal{O}_C(U_i)$. Entonces, para cada divisor primo $P \in C$ tenemos que $f_{iP} \in \mathcal{O}_{C,P}$ y por definición de v_P resulta que

$$v_P(D) = \operatorname{long}_{\mathcal{O}_{C,P}}(\mathcal{O}_{C,P}/f_{iP}\mathcal{O}_{C,P}) \geq 0,$$

luego $\operatorname{grad} D \geq 0$, y si el grado es 0 entonces $v_P(D) = 0$ para todo P, luego ha de ser $f_{iP} \in \mathcal{O}^*_{C,P}$, luego $D_P = 1$. Así pues, $\operatorname{sop} D$ no contiene ningún punto cerrado, luego $\operatorname{sop} D = \varnothing$ y $D = 1$. ■

Si C/k es una curva y k' es un subcuerpo de k tal que $|k : k'|$ sea finito, entonces también podemos considerar a C como curva sobre k' (a través del homomorfismo $\operatorname{Esp} k \longrightarrow \operatorname{Esp} k'$). Es evidente que la definición de grado de un divisor primo depende del cuerpo k considerado. Concretamente:

$$\operatorname{grad}_{k'} P = |k : k'| \operatorname{grad}_k P,$$

de donde se sigue inmediatamente la misma relación para cualquier divisor D (de Weil o de Cartier):

$$\operatorname{grad}_{k'} D = |k : k'| \operatorname{grad}_k D.$$

Definición 10.5 Sea C/k una curva y $D \in \operatorname{Div}_c(C)$ un divisor de Cartier entero. Esto significa que D está representado por un sistema de funciones $\{(U_i, f_i)\}_i$ de manera que $f_i \in \mathcal{O}_C(U_i) \cap \mathcal{K}^*_C(U_i)$. Entonces, por construcción, $\mathcal{O}_C(D^{-1})(U_i) = f_i \mathcal{O}_C(U_i)$, por lo que el haz inversible $\mathcal{O}_C(D^{-1})$ es un haz de ideales de $\mathcal{O}_C$. Llamaremos $(D, \mathcal{O}_D)$ al subesquema cerrado de C/k asociado a este haz según el teorema 5.10.

Ya hemos considerado este cerrado en la demostración del teorema 8.29. Allí hemos visto que se trata del soporte de D (dotado de una cierta estructura de subesquema cerrado, que no tiene por qué ser la reducida) y que tiene codimensión 1 en C, lo que en este caso se traduce en que está formado por un número finito de puntos (cerrados).

Si $P \in U_i$ es un punto cerrado, tenemos que

$$v_P(D) = l_{\mathcal{O}_{C,P}}(\mathcal{O}_{C,P}/f_{iP}\mathcal{O}_{C,P}).$$

Por lo tanto, $v_P(D) = 0$ si $P \notin D$ y, para puntos $P \in D$, tenemos que

$$\mathcal{O}_{D,P} \cong \mathcal{O}_{C,P}/f_{iP}\mathcal{O}_{C,P} \neq 0,$$

luego $v_P(D) = l_{\mathcal{O}_{C,P}}(\mathcal{O}_{D,P}) \neq 0$. Así pues, el cerrado D está formado por los puntos $P \in C$ tales que $v_P(D) \neq 0$. Ahora aplicamos el teorema 8.39 a) con $A = k$, $B = \mathcal{O}_{C,P}$, $M = \mathcal{O}_{D,P}$, según el cual

$$\dim_k \mathcal{O}_{D,P} = |k(P) : k|\, v_P(D) = v_P(D) \operatorname{grad} P.$$

Con esto casi tenemos demostrado el teorema siguiente:

Teorema 10.6 *Sea C/k una curva y $D \in \operatorname{Div}_c(C)$ un divisor de Cartier entero. Entonces* $\operatorname{grad} D = \dim_k \mathcal{O}_D(D)$.

Demostración: El cerrado D es finito, luego sus puntos son abiertos afines, luego

$$\mathcal{O}_D(D) = \bigoplus_{P \in D} \mathcal{O}_D(\{P\}) = \bigoplus_{P \in D} \mathcal{O}_{D,P}.$$

Así pues, sumando sobre todo $P \in C$ en la igualdad previa al teorema (teniendo en cuenta que $v_P(D) = 0$ si $P \notin D$) vemos que

$$\operatorname{grad} D = \sum_{P \in D} \dim_k \mathcal{O}_{D,P} = \dim_k \mathcal{O}_D(D).$$

■

Un hecho que resulta útil a menudo es que el grupo $\operatorname{Div}_c(C)$ está generado por los divisores enteros:

Teorema 10.7 *Todo divisor de Cartier en una curva se expresa como cociente de dos divisores enteros.*

Demostración: Sea C/k una curva y sea $D \in \operatorname{Div}_c(C)$ un divisor, representado por un sistema finito $\{(U_i, f_i)\}_i$, donde los abiertos U_i son afines y $f_i = a_i/b_i$, con a_i, $b_i \in \mathcal{O}_X(U_i)$ son regulares.

Entonces, $V_i = V_{U_i}(b_i)$ es un cerrado en U_i de dimensión 0, luego consta de un número finito de puntos cerrados, luego V_i también es cerrado en C.

Sea D_i el divisor determinado por los dos pares $(X \setminus V_i, 1)$ y (U_i, b_i). Esto es correcto, pues b_i es una unidad en $\mathcal{O}_X(U_i \setminus V_i)$. Claramente, D_i es un divisor entero, y también lo es $F = \prod D_i$, y también $E = DF$, pues $D|_{U_i} D_i|_{U_i}$ es entero. Así pues, $D = E/F$ es cociente de divisores enteros. ■

Como aplicación demostramos que el grado se conserva por extensiones de constantes:

Teorema 10.8 *Sea C/k una curva, sea K una extensión de k y consideremos la proyección natural $p : C_K \longrightarrow C$. Para cada $D \in \operatorname{Div}_c(C)$ se cumple que $\operatorname{grad}_K p^*D = \operatorname{grad}_k D$.*

Demostración: Vamos a ver que el subesquema cerrado asociado a p^*D según 10.5 es $D_K = D \times_k \operatorname{Esp} K$. Consideremos la inclusión $i : D \longrightarrow C$. Por definición tenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_C(D^{-1}) \longrightarrow \mathcal{O}_C \xrightarrow{i^\#} i_*(\mathcal{O}_D) \longrightarrow 0,$$

de la que obtenemos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow p^*\mathcal{O}_C(D^{-1}) \longrightarrow \mathcal{O}_{C_K} \xrightarrow{i_K^\#} i_{K*}(\mathcal{O}_{D_K}) \longrightarrow 0.$$

En efecto, para cada $P \in D_K$, la localización de esta última sucesión es

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_C(D^{-1})_{p(P)} \otimes_k K \longrightarrow \mathcal{O}_{C,p(P)} \otimes_k K \longrightarrow \mathcal{O}_{D,p(P)} \otimes_k K \longrightarrow 0,$$

que es exacta por la exactitud de la primera sucesión. Si $P \in C_K \setminus D_K$ tenemos lo mismo pero con 0 en lugar de $\mathcal{O}_{D,p(P)}$.

Concluimos que $p^*\mathcal{O}_C(D^{-1}) = \mathcal{O}_{C_K}((p^*D)^{-1})$ es el núcleo de $i_K^\#$, luego el cerrado asociado a p^*D es D_K. Ahora basta aplicar 10.6 y 6.15:

$$\operatorname{grad}_K p^*D = \dim_K \mathcal{O}_{D_K}(D_K) = \sum_{x\in D} \dim_K \mathcal{O}_{D_K}(p^{-1}[x])$$

$$= \sum_{x\in D} \dim_K H^0(x_K, \mathcal{O}_{x_K}) = \sum_{x\in D} \dim_K H^0(x, \mathcal{O}_x) \otimes_k K =$$

$$= \sum_{x\in D} \dim_k \mathcal{O}_D(x) = \dim_k \mathcal{O}_D(D) = \operatorname{grad}_k D.$$

(Hemos usado que $\mathcal{O}_D(D) = \bigoplus\limits_{x\in D} \mathcal{O}_D(x)$ para aplicar 6.15 a los esquemas afines $\{x\}$ y tener así garantizada la propiedad de separación que requiere dicho resultado.) ■

Veamos el comportamiento del grado respecto a homomorfismos finitos:

Teorema 10.9 *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un homomorfismo finito entre dos curvas íntegras definidas sobre un cuerpo k. Entonces, para cada $D \in \operatorname{Div}_c(Y)$, se cumple que* $\operatorname{grad} f^*D = |k(X) : k(Y)| \operatorname{grad} D$.

Demostración: Notemos que la imagen del punto genérico de X no puede ser un punto cerrado de Y, pues entonces f sería constante y no sería finita. Por lo tanto, f es dominante (luego suprayectiva, pues los homomorfismos finitos son cerrados) y f^*D está definido. Aplicamos el teorema 8.42:

$$|k(X) : k(Y)| \operatorname{grad} D = \operatorname{grad} f_*[f^*D] = \sum_P v_P(f_*[f^*D])\, |k(P) : k|$$

$$= \sum_P \sum_{Q\in f^{-1}[P]} v_Q(f^*D)|k(Q) : k(P)||k(P) : k|$$

$$= \sum_Q v_Q(f^*D)|k(Q) : k| = \operatorname{grad} f^*D.$$

■

El grado de un divisor también está relacionado con la característica de Euler. Para mostrar esta relación probamos primero un resultado técnico que es útil a menudo:

Teorema 10.10 *Sea C/k una curva proyectiva, sean D, $F \in \operatorname{Div}_c(C)$, donde F es entero, y llamemos $E = DF$. Sea $i : F \longrightarrow C$ la inmersión natural. Entonces tenemos una sucesión exacta*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_C(D) \longrightarrow \mathcal{O}_C(E) \longrightarrow i_*\mathcal{O}_F \longrightarrow 0.$$

Demostración: Consideremos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_C(F^{-1}) \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow i_*\mathcal{O}_F \longrightarrow 0.$$

Como $\mathcal{O}_C(E)$ es un haz localmente libre, la sucesión que resulta de multiplicar por $\otimes_{\mathcal{O}_C}\mathcal{O}_C(E)$ sigue siendo exacta:

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_C(D) \longrightarrow \mathcal{O}_C(E) \longrightarrow i_*\mathcal{O}_F \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{O}_C(E) \longrightarrow 0.$$

Es claro que $(i_*\mathcal{O}_F)_P = 0$ si $P \in C \setminus F$, de donde se sigue que, si $U \subset C$ es un abierto arbritrario, entonces

$$(i_*\mathcal{O}_F)(U) \cong \bigoplus_{P \in U \cap F} \mathcal{O}_{F,P},$$

y las restricciones se transforman de la forma obvia a través de estos isomorfismos. Igualmente,

$$(i_*\mathcal{O}_F \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{O}_C(E))(U) \cong \bigoplus_{P \in U \cap F} \mathcal{O}_{F,P} \otimes_{\mathcal{O}_{C,P}} \mathcal{O}_C(E)_P.$$

Fijando isomorfismos $\mathcal{O}_C(E)_P \cong \mathcal{O}_{C,P}$ obtenemos isomorfismos

$$(i_*\mathcal{O}_F)(U) \cong (i_*\mathcal{O}_F \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{O}_C(E))(U)$$

que determinan un isomorfismo $i_*\mathcal{O}_F \cong i_*\mathcal{O}_F \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{O}_C(E)$. Así pues, tenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_C(D) \longrightarrow \mathcal{O}_C(E) \longrightarrow i_*\mathcal{O}_F \longrightarrow 0.$$

■

El próximo teorema es uno de los ingredientes principales del teorema de Riemann-Roch, que probaremos en la sección siguiente.

Teorema 10.11 *Sea C/k una curva proyectiva y $D \in \operatorname{Div}_c(C)$. Entonces*

$$\chi(\mathcal{O}_C(D)) = \operatorname{grad} D + \chi(\mathcal{O}_C).$$

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema 10.7 podemos expresar $D = E/F$, donde E y F son enteros. El teorema anterior nos da una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_C(D) \longrightarrow \mathcal{O}_C(E) \longrightarrow i_*\mathcal{O}_F \longrightarrow 0.$$

Ahora aplicamos el teorema 6.32, según el cual

$$\chi(\mathcal{O}_C(E)) = \chi(\mathcal{O}_C(D)) + \chi(i_*\mathcal{O}_F).$$

Observemos que

$$\chi(i_*\mathcal{O}_F) = \sum_i (-1)^i \dim_k H^i(C, i_*\mathcal{O}_F) = \sum_i (-1)^i \dim_k H^i(F, \mathcal{O}_F)$$

$$= \dim_k H^0(F, \mathcal{O}_F) = \operatorname{grad} F.$$

En definitiva: $\chi(\mathcal{O}_C(E)) = \chi(\mathcal{O}_C(D)) + \operatorname{grad} F$. Esta relación es válida para todo divisor $D = E/F$ con E y F enteros. En particular podemos aplicarla a $1 = E/E$, con lo que obtenemos $\chi(\mathcal{O}_C(E)) = \chi(\mathcal{O}_C) + \operatorname{grad} E$. Igualando ambas relaciones obtenemos la relación del enunciado. ■

En particular, si D es un divisor muy amplio en una curva proyectiva C/k, el polinomio de Hilbert de $\mathcal{O}_C$ respecto a D es el polinomio $P(T)$ que cumple

$$P(n) = \chi(D^n) = n \operatorname{grad} D + \chi(\mathcal{O}_C),$$

luego $P(T) = T\,\mathrm{grad}\,D + \chi(\mathcal{O}_C)$. Si $f : C \longrightarrow \mathrm{P}_k^r$ es una inmersión tal que $D = f^*\mathcal{O}_{\mathrm{P}_k^r}(1)$, entonces $P(T)$ es el polinomio de Hilbert de C como subesquema de P_k^r, y vemos que su grado es precisamente $\mathrm{grad}\,D$. En definitiva, hemos probado el teorema siguiente:

Teorema 10.12 *Sea C/k una curva proyectiva y $f : C \longrightarrow \mathrm{P}_k^r$ una inmersión. Entonces, el grado de C como subesquema de P_k^r es igual al grado del haz muy amplio $f^*\mathcal{O}_{\mathrm{P}_k^r}(1)$.*

Veamos otra consecuencia notable del teorema 10.11:

Teorema 10.13 *Los divisores de Cartier principales de una curva proyectiva tienen grado* 0.

DEMOSTRACIÓN: En las condiciones del teorema anterior, si D es principal entonces $\mathcal{O}_C(D) \cong \mathcal{O}_C$, luego concluimos que $\mathrm{grad}\,D = 0$. ■

Por consiguiente, si C/k es una curva proyectiva, el homomorfismo

$$\mathrm{grad} : \mathrm{Div}_c(C) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

induce un homomorfismo

$$\mathrm{grad} : \mathrm{Cl}_c(C) \longrightarrow \mathbb{Z}.$$

En el caso en que $C = \mathrm{P}_k^1$, sabemos que este homomorfismo es un isomorfismo, lo que equivale a que un divisor de C es principal si y sólo si tiene grado 0. Vamos a probar que si el cuerpo k es algebraicamente cerrado, entonces P_k^1 es, salvo isomorfismo, la única curva proyectiva regular con esta propiedad. De hecho, vamos a demostrar algo más fuerte:

Teorema 10.14 *Sea C/k una curva proyectiva normal en la que existen dos puntos racionales distintos linealmente equivalentes. Entonces $C \cong \mathrm{P}_k^1$.*

DEMOSTRACIÓN: Sean P, $Q \in C(k)$ tales que $P/Q = (f)$, para cierta $f \in k(C)^*$ y sea $\mathcal{L} = \mathcal{O}_C(Q)$. Es claro entonces que las funciones 1, f forman un generador global de $\mathcal{L}$, luego determinan un homomorfismo $\phi : C \longrightarrow \mathrm{P}_k^1$.

Notemos que $C_1 = C \setminus \{Q\}$, $C_f = C \setminus \{P\}$ y que, por ejemplo, el homomorfismo $\phi^{\#}_{D(X)} : k[x] \longrightarrow \mathcal{O}_C(C_1)$ es el dado por $x \mapsto f$, que es inyectivo, pues f es trascendente sobre k. (Si fuera algebraico sería una unidad en $\mathcal{O}_{C,P}$, pero $f \in \mathfrak{m}_P$.) Esto prueba que ϕ no es constante, luego es un homomorfismo finito.

La función $x = X/Y \in k(\mathrm{P}_k^1)$ define el divisor principal $(x) = P'/Q'$, donde $P' = (X)$, $Q' = (Y)$ son puntos racionales de P_k^1. Tenemos que

$$\phi^*P'/\phi^*Q' = \phi^*(x) = (f) = P/Q.$$

Los divisores ϕ^*P' y ϕ^*Q' son enteros y tienen soportes disjuntos (contenidos en $\phi^{-1}[P']$ y $\phi^{-1}[Q']$, respectivamente), por lo que necesariamente $\phi^*P' = P$ y $\phi^*Q' = Q$. Ahora aplicamos el teorema 10.9, que nos da que

$$1 = \mathrm{grad}\,Q = |k(C) : k(\mathrm{P}_k^1)|\,\mathrm{grad}\,Q' = |k(C) : k(\mathrm{P}_k^1)|,$$

luego $\phi_\xi^\# : k(\mathrm{P}_k^1) \longrightarrow k(C)$ es un isomorfismo, donde $\xi \in C$ es el punto genérico. Por el teorema 4.7, ϕ se restringe a un isomorfismo entre un abierto de C y un abierto de P_k^1. El teorema 7.6 nos permite extender el inverso de este isomorfismo un homomorfismo $\psi : \mathrm{P}_k^1 \longrightarrow C$. El teorema 4.16 nos da que ϕ y ψ son mutuamente inversos. En suma, ϕ es un isomorfismo. ■

Es obvio ahora que si en una curva proyectiva normal C/k todo divisor de grado 0 es principal y el cuerpo k es algebraicamente cerrado (o, más en general, $C(k)$ contiene al menos dos puntos), entonces $C \cong \mathrm{P}_k^1$.

Pasamos ahora al concepto de dimensión de un divisor:

Definición 10.15 Sea C/k una curva proyectiva. Para cada $D \in \mathrm{Div}_c(C)$, el teorema 6.21 nos da que $L(D) = \mathcal{O}_C(D)(C)$ es un k-espacio vectorial de dimensión finita. Definimos la *dimensión* de D como $\dim D = \dim_k L(D)$. Obviamente la dimensión sólo depende de la clase de D en $\mathrm{Cl}_c(C)$, por lo que podemos hablar de la *dimensión* de una clase de divisores.

Recordemos (teorema 8.30) que si la curva C/k es íntegra, entonces

$$L(D) = \{f \in k(C)^* \mid (f)D \geq 1\} \cup \{0\}.$$

Veamos algunas propiedades elementales:

Teorema 10.16 *Sea C/k una curva proyectiva.*

a) Si $D \leq E$ son divisores de Cartier en C, entonces

$$\dim D \leq \dim E \leq \dim D + \mathrm{grad}(E/D).$$

b) Si C/k es íntegra y $\mathrm{grad}\, D < 0$ entonces $\dim D = 0$.

c) Si C/k es íntegra y $\mathrm{grad}\, D = 0$, entonces $\dim D = 0$ si y sólo si D no es principal.

Demostración: a) Por hipótesis, el divisor $F = E/D$ es entero. Es obvio entonces que $L(D) \subset L(E)$, luego $\dim D \leq \dim E$. Tenemos que $D = E/F$, y el teorema 10.10 nos da una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_C(D) \longrightarrow \mathcal{O}_C(E) \longrightarrow i_*\mathcal{O}_F \longrightarrow 0.$$

De esta sucesión obtenemos a su vea la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow L(D) \longrightarrow L(E) \longrightarrow \mathcal{O}_F(F)$$

Ahora basta tener en cuenta 10.6 para concluir que $\dim E - \dim D \leq \mathrm{grad}\, F$.

b) Si $L(D) \neq 0$, sea $f \in L(D)$ no nulo. Por la observación previa al teorema, $D \sim (f)D \geq 1$, luego $\mathrm{grad}\, D = \mathrm{grad}(f)D \geq 0$.

c) Continuando el razonamiento del apartado anterior en el caso en que $\operatorname{grad} D = 0$, resulta que $(f)D = 1$ por 10.4, luego $D = (f^{-1})$. Recíprocamente, si D es principal, entonces $\dim D = \dim 1 = \dim_k \mathcal{O}_C(C) \geq 1$. ■

Si una curva C/k es íntegra y regular, entonces podemos identificar los divisores de Cartier con los de Weil, y

$$L(D) = \{f \in k(C)^* \mid v_P(f) \geq -v_P(D) \text{ para todo primo } P \in C\} \cup \{0\}.$$

También es claro que, en este caso,

$$\mathcal{O}_C(D)_P = \{f \in k(C)^* \mid v_P(f) \geq -v_P(D)\} \cup \{0\}.$$

Notemos que si $f \in k(C)^*$ define el divisor D alrededor de un punto $P \in C$, entonces, por definición, $v_P(f) = v_P(D)$ (y $v_P(f^{-1}) = -v_P(D)$). Esto hace que los generadores de $\mathcal{O}_C(D)_P$ como $\mathcal{O}_{C,P}$-módulo son las funciones que cumplen $v_P(f) = -v_P(D)$.

Teorema 10.17 *Sea C/k una curva proyectiva íntegra regular y $D \in \operatorname{Div}_c(C)$ un divisor entero. Entonces $\mathcal{O}_C(D)$ tiene un generador global si y sólo si para cada punto $P \in \operatorname{sop} D$ se cumple que* $\dim(D/P) < \dim D$.

Demostración: Como $D \geq 1$ tenemos que $1 \in \mathcal{O}_C(D)(C)$, y en el caso en que $P \notin \operatorname{sop} D$ vemos que

$$\mathcal{O}_C(D)_P = \{f \in k(C)^* \mid v_P(f) \geq -v_P(D)\} \cup \{0\} = \mathcal{O}_{C,P}$$

está generado por 1_P. Consideremos ahora un punto $P \in \operatorname{sop} D$. Entonces $\mathcal{O}_C(D/P)_P = \mathfrak{m}_P \mathcal{O}_C(D)_P$. Por hipótesis hay un $s \in \mathcal{O}_C(D)(C) \setminus \mathcal{O}_C(D/P)(C)$, para lo cual ha de cumplir que $v_P(s) = -v_P(D)$ y, por consiguiente, s_P es un generador de $\mathcal{O}_C(D)_P$.

Así pues, $\mathcal{O}_C(D)$ tiene un generador global. Recíprocamente, si suponemos esto y $P \in \operatorname{sop} D$, tomamos un $s \in \mathcal{O}_C(D)(C)$ tal que s_P genere $\mathcal{O}_C(D)_P$. Entonces $v_P(s) = -v_P(D)$, luego $s_P \notin \mathcal{O}_C(D/P)_P$, luego $s \notin \mathcal{O}_C(D/P)$, luego $\dim(D/P) < \dim D$. ■

Notemos que si el cuerpo k es algebraicamente cerrado entonces $\operatorname{grad} P = 1$, y el teorema 10.16 nos da que la condición del teorema equivale a que

$$\dim(D/P) = \dim D - 1.$$

Ahora podemos expresar el teorema 5.37 en términos de dimensiones:

Teorema 10.18 *Sea C/k una curva proyectiva íntegra y regular sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k, y sea $D \in \operatorname{Div}_c(C)$ un divisor entero tal que para todo par de puntos cerrados P, $Q \in X$, no necesariamente distintos, se cumpla que*

$$\dim(D/PQ) = \dim D - 2.$$

Entonces D es muy amplio.

Demostración: Por el teorema 10.16, las dimensiones

$$\dim(D/PQ) \leq \dim(D/P) \leq \dim D$$

pueden diferir a lo sumo en una unidad, luego la hipótesis del teorema implica que $\dim(D/P) = \dim D - 1$, y el teorema anterior nos da que $\mathcal{L} = \mathcal{O}_C(D)$ tiene un generador global. Basta probar que se cumplen las condiciones del teorema 5.37 con $V = \mathcal{L}(C)$.

Si P, $Q \in C$ son puntos cerrados distintos, podemos tomar un elemento $s \in L(D/P) \setminus L(D/PQ)$. Así, $v_Q(s) = -v_Q(D)$ y $v_P(s) \geq -v_P(D) + 1$, luego vemos que s_P no es un generador de $\mathcal{L}_P$ y s_Q es un generador de $\mathcal{L}_Q$. Esto la propiedad a) de 5.37.

Consideremos ahora un punto cerrado $P \in C$ y observemos que

$$\mathfrak{m}_P\mathcal{L}_P = \{s \in k(C)^* \mid v_P(s) \geq -v_P(D) + 1\} \cup \{0\} = \mathcal{O}_C(D/P)_P,$$

mientras que

$$\{s \in V \mid s_P \in \mathfrak{m}_P\mathcal{L}_P\} = \{s \in V \mid v_P(s) \geq -v_P(D) + 1\} \cup \{0\} = L(D/P).$$

El teorema anterior nos da que el haz $\mathcal{O}_C(D/P)$ admite un generador global, luego existe un $s_0 \in L(D/P)$ tal que $v_P(s_0) = -v_P(D) + 1$. Si $s \in \mathfrak{m}_P\mathcal{L}_P$, entonces $s/s_0 \in \mathcal{O}_{C,P}$, luego existe un $\alpha \in k$ tal que $s/s_0 \equiv \alpha$ (mód $\mathfrak{m}_P$), luego $s/s_0 = \alpha + h$, para cierto $h \in \mathfrak{m}_P$, luego $s = \alpha s_0 + hs_0 \in L(D/P) + \mathfrak{m}_P^2\mathcal{L}_P$. Esto prueba la propiedad b). ■

Puede probarse que la condición del teorema anterior es también necesaria, pero no nos va a hacer falta este hecho.

10.3 El teorema de Riemann-Roch

El teorema de Riemann Roch resulta de combinar el teorema 10.11 con el teorema de dualidad. En principio, 10.11 nos da que

$$\dim_k H^0(C, \mathcal{O}_C(D)) - \dim_k H^1(C, \mathcal{O}_C(D)) = \operatorname{grad} D + \chi(\mathcal{O}_C).$$

Según el teorema 6.35, tenemos que $p_a(C) = 1 - \chi(\mathcal{O}_C)$. Esto nos convierte la ecuación en

$$\dim D - \dim_k H^1(C, \mathcal{O}_C(D)) = \operatorname{grad} D + 1 - p_a.$$

Nos falta aplicar el teorema de dualidad (y el teorema [2.10]) para eliminar el grupo de cohomología:

$$\dim_k H^1(C, \mathcal{O}_C(D)) = \dim_k H^1(C, \mathcal{O}_C(D))^* = \dim_k \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{O}_C(D), \omega_C^\circ)$$

$$= \dim_k(\mathcal{O}_C(D)^* \otimes_{\mathcal{O}_C} \omega_C^\circ)(X) = \dim_k(\mathcal{O}_C(D^{-1}) \otimes_{\mathcal{O}_C} \omega_C^\circ)(X).$$

Así tenemos la versión más general del teorema de Riemann-Roch para curvas:

$$\dim D - \dim_k(\mathcal{O}_C(D^{-1}) \otimes_{\mathcal{O}_C} \omega_C^\circ)(X) = \operatorname{grad} D + 1 - p_a.$$

A partir de aquí vamos a suponer que C/k es localmente una intersección completa. Entonces el haz dualizante ω_C° coincide con el haz canónico ω_C, y en particular es un haz inversible. El teorema 8.34 garantiza que $\omega_C = \mathcal{O}_C(E)$, para cierto divisor $E \in \operatorname{Div}_c(C)$.

Definición 10.19 Sea C/k una curva proyectiva que sea localmente una intersección completa. Llamaremos *clase canónica* de C a la clase $W \in \operatorname{Cl}_c(C)$ que se corresponde en $\operatorname{Pic}(C)$ con la clase de los haces canónicos. Los divisores de W se llaman *divisores canónicos* de C.

Así, si $E \in \operatorname{Div}_c(C)$ es un divisor canónico, $\omega_C = \mathcal{O}_C(E)$ y

$$\dim_k(\mathcal{O}_C(D^{-1}) \otimes_{\mathcal{O}_C} \omega_C)(X) = \dim_k \mathcal{O}_C(E/D)(X) = \dim_k(E/D).$$

Esto nos da la forma definitiva del teorema que perseguíamos:

Teorema 10.20 (Riemann-Roch) *Sea C/k una curva proyectiva que sea localmente una intersección completa, sea $W \in \operatorname{Cl}_c(C)$ la clase canónica y sea $D \in \operatorname{Cl}_c(C)$ una clase arbitraria. Entonces*

$$\dim D - \dim(W/D) = \operatorname{grad} D + 1 - p_a.$$

Observemos que $\dim W = \dim_k \omega_C(C) = p_g(C)$ (definición 9.33), y si C es geométricamente regular y geométricamente conexa entonces $\dim W = p_a$. Por otra parte, el teorema 9.16 nos da que

$$\chi(\omega_C) = \dim_k H^0(X, \omega_C) - \dim_k H^1(X, \omega_C)$$

$$= \dim_k H^1(X, \mathcal{O}_X) - \dim_k H^0(X, \mathcal{O}_X) = -\chi(\mathcal{O}_X).$$

Por lo tanto, 10.11 implica que

$$\operatorname{grad} W = -2\chi(\mathcal{O}_X) = 2(p_a - 1).$$

Definición 10.21 Sea C/k una curva proyectiva que sea localmente una intersección completa y sea W su clase canónica. Llamaremos *divisores especiales* de C a los divisores $D \in \operatorname{Div}_c(C)$ tales que $\dim(W/D) > 0$.

Si la curva C/k es íntegra, el teorema 10.16 nos da que un divisor especial ha de cumplir $\operatorname{grad} D \leq \operatorname{grad} W = 2p_a - 2$. Así, para los divisores no especiales (en particular, para los divisores que cumplen $\operatorname{grad} D > 2p_a - 2$) el teorema de Riemann-Roch se reduce a

$$\dim D = \operatorname{grad} D + 1 - p_a,$$

que es una relación sencilla entre la dimensión y el grado.

Ejemplo Si una curva proyectiva C/k es localmente una intersección completa y $p_a = 0$, entonces, para cada $D \in \mathrm{Div}_c(C)$ se cumple que

$$\dim D = \begin{cases} \operatorname{grad} D + 1 & \text{si } \operatorname{grad} D \geq 0, \\ 0 & \text{si } \operatorname{grad} D < 0. \end{cases}$$

(Pues si $\operatorname{grad} D \geq 0$ entonces D no es especial.) ■

Como aplicación, probamos una variante de 10.14:

Teorema 10.22 *Sea C/k una curva proyectiva normal. Entonces $C \cong \mathrm{P}^1_k$ si y sólo si existe un divisor $D \in \mathrm{Div}(C)$ tal que $\operatorname{grad} D = 1$ y $\dim D \geq 2$.*

Demostración: Según el ejemplo anterior, si $C \cong \mathrm{P}^1_k$, entonces todos los divisores de grado 1 tienen dimensión 2 (y, ciertamente, existen tales divisores).

Si D es un divisor en las condiciones del enunciado, tomemos un $g \in L(D)$ no nulo, de modo que $(g)D \geq 1$. Como $(g)D$ es linealmente equivalente a D, tiene la misma dimensión y el mismo grado, luego podemos suponer que D es entero.

Un divisor entero de grado 1 ha de ser primo, digamos $D = P$, para un cierto punto $P \in C(k)$. Por el teorema 4.26 sabemos que $\mathcal{O}_C(C)$ es un cuerpo, y el homomorfismo natural $\mathcal{O}_C(C) \longrightarrow k(P) = k$ es un k-homomorfismo de cuerpos, luego es un isomorfismo. Esto implica que si $f \in k(C)^*$ cumple $(f) = 1$ entonces $f \in k^*$.

El espacio $L(D)$ contiene a las constantes, pero por hipótesis contiene también un $f \in L(D)$ no constante. Esto significa que $(f)D$ es también un divisor entero de grado 1, luego ha de ser un primo $Q \in C(k)$. Así pues, $f = Q/P$, y $P \neq Q$, o de lo contrario f sería constante. El teorema 10.14 nos da que $C \cong \mathrm{P}^1_k$ ■

A su vez, otra variante de este teorema es la siguiente:

Teorema 10.23 *Si C/k es una curva proyectiva normal de género $p_a = 0$ y tiene un punto racional, entonces $C \cong \mathrm{P}^1_k$.*

(Pues un punto racional es un divisor primo de grado 1 y dimensión 2.)

Ahora vamos a dar condiciones suficientes sencillas para que un haz inversible sea amplio o muy amplio:

Teorema 10.24 *Sea C/k una curva proyectiva geométricamente regular y geométricamente conexa de género g, y sea $D \in \mathrm{Div}(C)$.*

a) Si $\operatorname{grad} D \geq 2g$ entonces $\mathcal{O}_C(D)$ tiene un generador global.

b) Si $\operatorname{grad} D \geq 2g + 1$ entonces $\mathcal{O}_C(D)$ es muy amplio.

c) $\mathcal{O}_C(D)$ es amplio si y sólo si $\operatorname{grad} D > 0$.

DEMOSTRACIÓN: Observemos en primer lugar que podemos sustituir k por su clausura algebraica $\bar{k}$. En efecto, consideramos la proyección $\pi : C_{\bar{k}} \longrightarrow C$. El teorema 10.8 nos da que $\operatorname{grad} D = \operatorname{grad} \pi^* D$; el teorema 6.18 nos da que si $\pi^* \mathcal{O}_C(D) = \mathcal{O}_{C_{\bar{k}}}(\pi^* D)$ tiene un generador global, es amplio o muy amplio, lo mismo es válido para $\mathcal{O}_C(D)$; por último, el teorema 6.15 implica que el género (tanto el aritmético como el geométrico) se conserva por extensiones de constantes.

Así pues, suponemos que k es algebraicamente cerrado. Si $\operatorname{grad} D \geq 2g$, para cada punto cerrado $P \in C$, tenemos que el divisor D/P no es especial, por lo que el teorema de Riemann-Roch nos da que $\dim D/P = \dim D - 1$, luego $\mathcal{O}_C(D)$ tiene un generador global por el teorema 10.17.

Si $\operatorname{grad} D \geq 2g + 1$, entonces los divisores D/PQ tampoco son especiales, luego cumplen que $\dim(D/PQ) = \dim D - 2$, y el teorema 10.18 nos da que $\mathcal{O}_C(D)$ es muy amplio.

Si $\operatorname{grad} D > 0$ entonces existe un número natural n tal que

$$\operatorname{grad} D^n = n \operatorname{grad} D \geq 2g + 1,$$

luego D^n es muy amplio y D es amplio por el teorema 5.45. Recíprocamente, si D es amplio, entonces existe un n tal que D^n es muy amplio, luego existe una inmersión cerrada $f : C \longrightarrow \mathrm{P}_k^r$ tal que $\mathcal{O}_C(D^n) \cong f^* \mathcal{O}_{\mathrm{P}_k^r}(1)$. Podemos tomar un hiperplano H en P_k^r que no contenga a la imagen del punto genérico de C, con lo que está definido $f^*(H)$, que es un divisor de C linealmente equivalente a D^n, y es entero y no principal, porque H es efectivo y $\mathcal{O}_{\mathrm{P}_k^r}(1)$ no es libre. Así,

$$n \operatorname{grad} D = \operatorname{grad} D^n = \operatorname{grad}(f^* H) > 0,$$

luego también $\operatorname{grad} D > 0$. ■

Ejemplo Las condiciones del teorema anterior no son necesarias. Por ejemplo, si C/k es una curva proyectiva geométricamente regular y geométricamente conexa de género $g \geq 1$ y W es un divisor canónico, su grado es $\operatorname{grad} W = 2g-2$, pero aun así satisface la hipótesis del teorema 10.22: Por el teorema de Riemann-Roch, para cada punto cerrado $P \in C$ tenemos que

$$\dim(W/P) - \dim(P) = \operatorname{grad}(W/P) + 1 - g.$$

El espacio $L(P)$ contiene las constantes, luego $\dim P \geq 1$, y por 10.22 ha de ser $\dim P = 1$ (o si no, $C \cong \mathrm{P}_k^1$ tendría género 0). Así pues, la fórmula anterior se reduce a que $\dim(W/P) = g - 1 = \dim W - 1$, luego podemos aplicar el teorema 10.17 y concluir que $\mathcal{O}_C(W) = \omega_C$ tiene un generador global. ■

Ejemplo Consideremos nuevamente una curva proyectiva C/k geométricamente regular y geométricamente conexa de género $g = 0$, pero sin suponer que tenga un punto racional. Si W es un divisor canónico, su grado es -2, luego $\operatorname{grad} W^{-1} = 2$ y $\dim W^{-1} = 3$. El teorema anterior nos da que W^{-1} es muy amplio, por lo que define una inmersión cerrada $\phi : C \longrightarrow \mathrm{P}_k^2$, cuya imagen tiene grado 2, es decir, es una cónica.

Si C tiene un punto racional, entonces tiene un divisor de grado 1 (y dimensión 2), que será muy amplio por el teorema anterior, luego existe también una inmersión $C \longrightarrow \mathrm{P}_k^1$ que, obviamente, ha de ser un isomorfismo. ■

10.4 Curvas elípticas

Si k es un cuerpo, una *curva elíptica* E/k es una curva proyectiva geométricamente regular y geométricamente íntegra de género $g = 1$ que posea al menos un punto racional $O \in E(k)$.

Puesto que el género se conserva por extensiones de constantes, vemos que si K/k es una extensión algebraica de cuerpos, entonces E_K también es una curva elíptica sobre K.

Si E/k es una curva elíptica, su clase canónica W cumple $\dim W = 1$, $\operatorname{grad} W = 0$, luego el teorema 10.16 nos da que $W = 1$. Equivalentemente, se cumple que $\Omega_{E/k} \cong \mathcal{O}_E$. Los divisores de grado > 0 no son especiales, y satisfacen la relación $\dim D = \operatorname{grad} D$. Como $\operatorname{grad} O = 1$, existen divisores de todos los grados, y todo divisor de grado 3 (en particular O^3) es muy amplio, por lo que nos da una inmersión $E \longrightarrow \mathrm{P}_k^2$ de grado 3. Así pues, E/k es isomorfa a una cúbica plana.

Observemos que si $\mathrm{Cl}^0(E)$ es el grupo de las clases de divisores de grado 0 de E, entonces cada clase contiene un único divisor de la forma P/O, para un cierto punto $P \in E(k)$. En efecto, si D es un divisor de grado 0, entonces DO tiene grado 1, luego su dimensión es también 1, luego existe un $f \in \mathcal{O}_E(DO)(E)$ no nulo, lo que significa que el divisor $P = (f)DO$ es entero y tiene grado 1, luego ha de ser un punto racional. Además P/O es linealmente equivalente a D, y por el teorema 10.14 no puede haber más de un punto P en estas condiciones.

En definitiva, tenemos una biyección $E(k) \longrightarrow \mathrm{Cl}^0(E)$, que nos permite transportar a $E(k)$ la estructura de grupo de $\mathrm{Cl}^0(E)$. Usando notación aditiva, la suma de dos puntos racionales P y Q es el único punto racional $P + Q$ que cumple que

$$[PQ/O^2] = [(P + Q)/O]$$

o, equivalentemente, $[PQ] = [(P + Q)O]$. El elemento neutro es O.

La ecuación $P + Q + R = O$ equivale a que $PQR = (h)O^3$, para cierta $h \in k(E)^*$. Si sumergimos $E \longrightarrow \mathrm{P}_k^2$ a través del haz muy amplio O^3, esto equivale a que existe una forma lineal $H \in k[X, Y, Z]$ cuya restricción a E tiene a PQR por divisor de ceros. Si los tres puntos son distintos, es tanto como decir que están alineados (y si, por ejemplo, $P = Q$, se traduce en que la tangente a E por P pasa por R, etc.).

Observemos ahora que si K/k es una extensión algebraica de cuerpos, tenemos un diagrama conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
E_K(K) \arrow[r] & \mathrm{Cl}^0(E_K) \\
E(k) \arrow[r] \arrow[u] & \mathrm{Cl}^0(E) \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

donde la flecha vertical izquierda es la aplicación que a cada $P \in E(k)$ le asigna su única antiimagen P' por la proyección $p : E_K \longrightarrow E$ y la flecha vertical derecha es el homomorfismo inducido por p según el teorema 8.32 (teniendo en cuenta que p es plana, por lo que p^* está definido para todo divisor). Se entiende, naturalmente, que en E_K tomamos como elemento neutro O_K la única antiimagen de O por la proyección.

Sólo hay que ver que, considerados como divisores, se cumple que $p^*P = P'$. Según el teorema 8.38, basta probar que $e_{P'/P} = 1$, y esto se demuestra como en el ejemplo 2 de la página 327, tomando $V = E$ y $W = \operatorname{Esp} K$. Notemos que ahora no es cierto que W sea geométricamente íntegro, pero en su lugar

$$k(P) \otimes_k K = k \otimes_k K = K$$

es un dominio íntegro, y dicha hipótesis sólo se usa en el ejemplo para demostrar esto. Así pues, vemos que $E(k)$ es un subgrupo de $E_K(K)$.

Veamos ahora un teorema sobre existencia de automorfismos en una curva elíptica:

Teorema 10.25 *Sea E/k una curva elíptica y sean P, $Q \in E(k)$ puntos no necesariamente distintos. Entonces existe un único automorfismo $\sigma : E \longrightarrow E$, definido sobre k, tal que $\sigma^2 = 1$, $\sigma(P) = Q$ y, para todo punto cerrado $R \in E_{\bar{k}}$, donde $\bar{k}$ es la clausura algebraica de k, se cumple que $[R\sigma_{\bar{k}}(R)] = [PQ]$.*

Demostración: La unicidad se sigue de que $\sigma_{\bar{k}}(R)$ es el único punto de $E_{\bar{k}}$ que cumple $[\sigma_{\bar{k}}(R)/O_{\bar{k}}] = [PQ/RO_{\bar{k}}]$, luego $\sigma_{\bar{k}}$ está unívocamente determinado y σ también por el teorema 3.67. Veamos la existencia.

El divisor PQ tiene grado 2, luego según el teorema 10.24 el haz $\mathcal{O}_E(PQ)$ define un homomorfismo $f : E \longrightarrow \mathrm{P}^1_k$ de grado 2, que a su vez se corresponde con una extensión de cuerpos $k(X) = k(\mathrm{P}^1_k) \subset k(E)$ de grado 2.

Veamos que la extensión es separable. En caso contrario, los cuerpos serían de característica 2 y $k(E) = k(X, \alpha)$, para un α tal que $\alpha^2 \in k(X)$. No puede ocurrir que α sea algebraico sobre k, pues entonces $\bar{k}$ y $k(E)$ no serían linealmente disjuntos y, según el teorema 3.62, la curva E/k no sería geométricamente íntegra. Se cumple que $\bar{k}(E_{\bar{k}}) = \bar{k}(X, \alpha)$, luego la extensión $\bar{k}(E_{\bar{k}})/\bar{k}(X)$ también es puramente inseparable de grado 2. Entonces[3] $\sqrt{X} \in \bar{k}(E_{\bar{k}})$, y concluimos que $\bar{k}(E_{\bar{k}}) = \bar{k}(\sqrt{X})$, pero este cuerpo es $\bar{k}$-isomorfo a $\bar{k}(X)$, luego $E_{\bar{k}} \cong \mathrm{P}^1_{\bar{k}}$ y llegamos a que $E_{\bar{k}}$ tiene género 0, contradicción.

[3]Ver el teorema 6.31 de mi *Geometría Algebraica.*

Sea $\sigma : X \longrightarrow X$ el automorfismo inducido por el $k(X)$-automorfismo no trivial de $k(E)$ según el teorema 10.2. Ciertamente $\sigma^2 = 1$, y σ actúa transitivamente sobre las fibras de f.

Sea $p : E_{\bar{k}} \longrightarrow E$ la proyección canónica. Es fácil ver que $f_{\bar{k}} : E_{\bar{k}} \longrightarrow \mathrm{P}^1_{\bar{k}}$ es el homomorfismo definido por $p^*\mathcal{O}_E(PQ) = \mathcal{O}_{E_{\bar{k}}}(PQ)$. El diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
E_{\bar{k}} \arrow[r, "f_K"] \arrow[d, "p"'] & \mathrm{P}^1_{\bar{k}} \arrow[d] \\
E \arrow[r, "f"'] & \mathrm{P}^1_k
\end{tikzcd}$$

equivale al diagrama conmutativo de inclusiones

$$\begin{tikzcd}
\bar{k}(X) \arrow[r] & \bar{k}k(E) \\
k(X) \arrow[r] \arrow[u] & k(E) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Si σ está asociado al automorfismo s de $k(E)$, entonces $\sigma_{\bar{k}}$ está asociado a la extensión de s a $\bar{k}(E_{\bar{k}}) = \bar{k}k(E)$ que fija a $\bar{k}$, y éste es el automorfismo no trivial de $\bar{k}(E_{\bar{k}})/\bar{k}(X)$.

En resumen, tenemos que $\sigma_{\bar{k}}$ coincide con el automorfismo definido análogamente a σ sobre $E_{\bar{k}}$. Por lo tanto, para el resto de la prueba podemos suponer que $k = \bar{k}$.

Tomemos $R \in E(k)$ y sea $x = f(R) \in \mathrm{P}^1_k(k)$. Existe $H \in \mathcal{O}_{\mathrm{P}^1_k}(1)(\mathrm{P}^1_k)$ cuyo divisor de ceros es x, y entonces $h = f^*H \in \mathcal{O}_E(PQ)(E)$ cumple que $X_h = f^{-1}[\mathrm{P}^1_{k,H}] = f^{-1}[x]$. Si D es el divisor de ceros de h, entonces D es entero y linealmente equivalente a PQ, luego tiene grado 2, y su soporte es la fibra de x. Así pues, $D = R\sigma(R)$ (tanto si $\sigma(R) = R$ como si no). Esto prueba que $[R\sigma(R)] = [PQ]$.

Recíprocamente, como PQ es linealmente equivalente a sí mismo, es el divisor de ceros de f^*H, para cierto $H \in \mathcal{O}_{\mathrm{P}^1_k}(1)(\mathrm{P}^1_k)$, cuyo divisor de ceros es un punto $x \in \mathrm{P}^1_k(k)$. Por el mismo razonamiento anterior, $f^{-1}[x] = \{P, Q\}$ (tanto si $P = Q$ como si no). Por consiguiente, $\sigma(P) = Q$. ■

En particular vemos que el grupo de los automorfismos de una curva elíptica actúa transitivamente sobre sus puntos racionales.

Veamos algunas consecuencias inmediatas de este teorema:

Teorema 10.26 *Si E/k es una curva elíptica y $\bar{k}$ es la clausura algebraica de k, entonces exise un único automorfismo $i : E \longrightarrow E$ definido sobre k tal que, para todo punto cerrado $P \in E_{\bar{k}}$, se cumple $i_{\bar{k}}(P) = -P$. (En particular, para todo $P \in E(k)$, se cumple $i(P) = -P$.)*

Demostración: Basta considerar el automorfismo dado por el teorema anterior para $P = Q = O$. La propiedad que cumple es $[Pi_{\bar{k}}(P)/O^2] = [O/O]$, lo que equivale a $P + i_{\bar{k}}(P) = O$. La unicidad es obvia. ■

Teorema 10.27 *Sea E/k una curva elíptica, sea $\bar{k}$ la clausura algebraica de k y $P \in E(k)$. Entonces existe un único automorfismo $\tau_P : E \longrightarrow E$ definido sobre k tal que, para todo punto cerrado $Q \in E_{\bar{k}}$, se cumple que $\tau_{P\bar{k}}(Q) = P+Q$.*

Demostración: Apliquemos el teorema 10.25 a P y O, lo que nos da un automorfismo σ tal que $[Q\sigma_{\bar{k}}(Q)/O^2] = [P/O]$, lo que es equivalente a que $\sigma_{\bar{k}}(Q) = P - Q$. Entonces $\tau_P = i \circ \sigma$, donde i es el automorfismo del teorema anterior. ■

Finalmente demostramos que la estructura de grupo de una curva elíptica está inducida por homomorfismos de variedades. Esto es lo que expresan el teorema 10.26 y el teorema siguiente:

Teorema 10.28 *Sea E/k una curva elíptica sobre un cuerpo perfecto*[4] *k y sea $\bar{k}$ la clausura algebraica de k. Existe un único homomorfismo $\sigma : E \times_k E \longrightarrow E$ definido sobre k tal que, para todo par de puntos cerrados P, $Q \in E_{\bar{k}}$, se cumple que $\sigma_{\bar{k}}(P, Q) = P + Q$.*

Demostración: Sumergimos $E \longrightarrow \mathrm{P}^2_k$ mediante la inmersión cerrada asociada al divisor O^3. Entonces O^3 es el divisor de ceros de la forma lineal en E inducida por un hiperplano de P^2_k, lo que significa que hay un hiperplano que sólo corta a E en el punto O. Sumergimos $A^2_k \longrightarrow \mathrm{P}^2_k$ de modo que dicho hiperplano sea el complementario $\mathrm{P}^2_k \setminus A^2_k$ (el hiperplano del infinito), con lo que el conjunto $E^* = E \setminus \{O\}$ resulta ser un abierto afín. Más concretamente, es una hipersuperficie de grado 3 en A^2_k. Consideremos el abierto

$$U = \{(P, Q) \in E^* \times_k E^* \mid P \neq \pm Q\},$$

y vamos a probar que existe una aplicación σ_0 en las condiciones del enunciado, pero definida sobre U.

En términos clásicos, podemos considerar a $E^*_{\bar{k}}(\bar{k})$ como un subconjunto de $\bar{k}^2$ definido por un polinomio $F(X, Y)$, de grado 3 y con coeficientes en k. A su vez, $U_{\bar{k}}(\bar{k})$ se identifica con un subconjunto de $\bar{k}^4$. Para cada punto $(P, Q) = (x_0, y_0, x_1, y_1) \in U_{\bar{k}}(\bar{k})$, el punto $-(P + Q) = (x_2, y_2)$ es el tercer punto (además de P y de Q) que satisface a la vez la ecuación $F(x_2, y_2) = 0$ y la ecuación de la recta que pasa por P y Q. Los puntos de esta recta son los de la forma

$$(X, Y) = (x_0 + t(x_1 - x_0), y_0 + t(y_1 - y_0)), \qquad t \in \bar{k}.$$

[4]Esta hipótesis no es necesaria, pero no estamos en condiciones de probarlo. De hecho, no estamos en condiciones de dar una prueba en términos de esquemas, "sin ecuaciones", como las de los teoremas precedentes, y la prueba que vamos a ver es esencialmente la misma que aparece en mi libro de *Curvas elípticas,* teorema 2.22.

El punto P corresponde al parámetro $t = 0$, mientras que Q corresponde a $t = 1$, y $-(P+Q)$ corresponde al único parámetro $t \neq 0, 1$ que cumple la ecuación

$$F(x_0 + t(x_1 - x_0), y_0 + t(y_1 - y_0)) = 0.$$

Esta ecuación es un polinomio en x_0, y_0, x_1, y_1, t con coeficientes en k. Llamemos $G_i(x_0, y_0, x_1, y_1)$ al coeficiente de t^i, que también es un polinomio con coeficientes en k.

Para cada $(x_0, y_0, x_1, y_1) \in U_{\bar{k}}(\bar{k})$, sabemos que $F(x_0, y_0, x_1, y_1, t)$ tiene tres raíces como polinomio en t, luego G_3 no se anula sobre $U_{\bar{k}}(\bar{k})$. (Si se anulara significaría que $-(P+Q)$ estaría en el infinito, es decir, que $Q = -P$). Su tercera raíz (además de 0, 1) es

$$t(x_0, x_1, y_0, y_1) = 1 - \frac{G_2(x_0, y_0, x_1, y_1)}{G_3(x_0, y_0, x_1, y_1)},$$

luego las coordenadas de $-(P+Q)$ son

$$(x_0 + t(x_0, y_0, x_1, y_1)(x_1 - x_0), y_0 + t(x_0, y_0, x_1, y_1)(y_1 - y_0)).$$

Esta expresión define una función $s : U_{\bar{k}}(\bar{k}) \longrightarrow E^*_{\bar{k}}(\bar{k})$, que es una función regular entre conjuntos algebraicos cuasiproyectivos en el sentido clásico. El hecho de que esté definida por funciones racionales con coeficientes en k hace que determine un único homomorfismo de esquemas $\sigma' : U \longrightarrow E$ tal que $\sigma_{0\bar{k}}$ coincide con s sobre los puntos de $U_{\bar{k}}(\bar{k})$) y, por consiguiente, $\sigma_0 = s' \circ i$ cumple lo pedido (donde i es la función del teorema 10.26).

Ahora vamos a probar que $\sigma_{0\bar{k}}$ se extiende a un homomorfismo en $E_{\bar{k}} \times_{\bar{k}} E_{\bar{k}}$. Tomemos un punto $(P, Q) \in E_{\bar{k}}(\bar{k}) \times E_{\bar{k}}(\bar{k})$ y fijemos dos traslaciones $\tau_{P'}$, $\tau_{Q'}$ tales que $(P + P', Q + Q') \in U_{\bar{k}}(\bar{k})$. Así, $V = (\tau_{P'} \times \tau_{Q'})^{-1}[U_{\bar{k}}]$ es un entorno de (P, Q), sobre el cual está definida la composición

$$V \stackrel{\tau_{P'} \times \tau_{Q'}}{\longrightarrow} U_{\bar{k}} \stackrel{\sigma_{0\bar{k}}}{\longrightarrow} E_{\bar{k}} \stackrel{\tau_{-P'-Q'}}{\longrightarrow} E_{\bar{k}},$$

que sobre los puntos cerrados actúa como $(A, B) \mapsto A + B$, luego coincide con $\sigma_{0\bar{k}}$ en la intersección de los dominios. En definitiva, hemos extendido $\sigma_{0\bar{k}}$ a un entorno del punto (arbitrario) (P, Q). Ahora tenemos un homomorfismo de esquemas $\sigma' : E_{\bar{k}} \times_{\bar{k}} E_{\bar{k}} \longrightarrow E_{\bar{k}}$ que induce la suma sobre los puntos cerrados. Sólo falta probar que es la extensión de un homomorfismo en $E \times_k E$, y sabemos que cumple esto en un abierto (denso).

El resto de la prueba es un argumento general: tenemos un homomorfismo $f : X_{\bar{k}} \longrightarrow Y_{\bar{k}}$, donde X/k, Y/k son conjuntos algebraicos geométricamente regulares y geométricamente íntegros y existe un abierto $U \subset X$ de modo que $f|_{U_{\bar{k}}} = g_{\bar{k}}$, para cierto $g : U \longrightarrow Y$. Queremos probar que g se extiende a X.

Si $P \in X_{\bar{k}}$ es un punto cerrado, tomamos un entorno afín $W \subset Y$ de la proyección de $f(P)$ y un entorno afín $V \subset X$ de la proyección de P contenido en la proyección de $f^{-1}[W_{\bar{k}}]$ (que es abierta, por 3.57). Basta probar que la restricción de f a $V_{\bar{k}}$ es de la forma $g_{\bar{k}}$, para cierto homomorfismo $g : V \longrightarrow W$. Equivalentemente, podemos suponer que X e Y son afines.

Consideremos el grupo de Galois $G = G(\bar{k}/k)$. Como X es geométricamente íntegro, se cumple que $\bar{k} \cap k(X) = k$, por lo que $\bar{k}(X)/k(X)$ es una extensión de Galois cuyo grupo de Galois es isomorfo a G. Equivalentemente, cada automorfismo $\sigma \in G$ se extiende a un $k(X)$-automorfismo de $\bar{k}(X)$ (al que seguiremos llamando σ) de modo que $k(X)$ es el cuerpo fijado por G.

Por otra parte, $\mathcal{O}_X(X)$ es íntegramente cerrado en $k(X)$ y es claro que $\mathcal{O}_{X_{\bar{k}}}(X_{\bar{k}}) = \bar{k}\mathcal{O}_X(X)$ es entero sobre $\mathcal{O}_X(X)$. Por lo tanto, se cumple que $\mathcal{O}_X(X) = \mathcal{O}_{X_{\bar{k}}}(X_{\bar{k}}) \cap k(X)$ y, por consiguiente, $\mathcal{O}_X(X)$ está formado por los elementos de $\mathcal{O}_{X_{\bar{k}}}(X_{\bar{k}})$ fijados por G.

Los homomorfismos $f : X_{\bar{k}} \longrightarrow Y_{\bar{k}}$ se corresponden biunívocamente con los $\bar{k}$-homomorfismos $\phi : \mathcal{O}_{Y_{\bar{k}}}(Y_{\bar{k}}) \longrightarrow \mathcal{O}_{X_{\bar{k}}}(X_{\bar{k}})$, y cada $\sigma \in G$ determina un nuevo homomorfismo ϕ^σ dado por $\phi^\sigma(u) = \phi(u^{\sigma^{-1}})^\sigma$, que a su vez determina un homomorfismo $f^\sigma : X_{\bar{k}} \longrightarrow Y_{\bar{k}}$. Si $g : X \longrightarrow Y$ y $u \in \mathcal{O}_{Y_{\bar{k}}}(Y_{\bar{k}})$, tenemos que

$$u = \sum_i \alpha_i u_i, \qquad \alpha_i \in \bar{k}, \quad u_i \in \mathcal{O}_Y(Y),$$

y

$$g_{\bar{k}}^{\#}(u) = \sum_i \alpha_i g^{\#}(u_i).$$

Teniendo esto en cuenta es inmediato que $g_{\bar{k}}^\sigma = g_{\bar{k}}$ para todo $\sigma \in G$. Podemos suponer que el abierto U de la hipótesis sobre f es afín, y es fácil ver que

$$f^\sigma|_U = (f|_U)^\sigma = g_{\bar{k}}^\sigma = g_{\bar{k}} = f|_U,$$

lo que implica que $f = f^\sigma$, para todo $\sigma \in G$, luego su $\bar{k}$-homomorfismo asociado cumple que $\phi^\sigma = \phi$. Si $u \in \mathcal{O}_Y(Y)$, entonces

$$\phi(u)^\sigma = \phi(u^{\sigma^{-1}})^\sigma = \phi^\sigma(u) = \phi(u),$$

luego $\phi(u) \in \mathcal{O}_X(X)$, luego ϕ se restringe a un k-homomorfismo de álgebras $\phi_0 : \mathcal{O}_Y(Y) \longrightarrow \mathcal{O}_X(X)$, que induce un homomorfismo $g : X \longrightarrow Y$. Obviamente, el homomorfismo asociado a $g_{\bar{k}}$ es ϕ, luego $g_{\bar{k}} = f$, como queríamos probar. ■

Capítulo XI

El teorema de Weil

En este capítulo veremos la prueba de Weil (reformulada en términos de esquemas) de que las variedades abelianas son proyectivas (ver la introducción para más detalles). Para ello necesitaremos varios hechos sobre variedades abelianas, algunos de los cuales se basan en el teorema del cubo, un profundo teorema que, además de buena parte de los resultados que hemos visto en los capítulos anteriores, requiere ciertos teoremas sobre la cohomología de las fibras de los homomorfismos propios (11.4, 11.6), que demostraremos en la primera sección. El teorema del cubo lo probamos en la segunda y el teorema de Weil en la tercera.

11.1 Cambio de base

Vamos a demostrar aquí una generalización del teorema 6.15 (teorema 11.3), con ayuda del cual obtendremos los teoremas necesarios para demostrar el teorema del cubo en la sección siguiente. Empezamos con dos resultados previos.

Teorema 11.1 *Sea A un anillo noetheriano y $\mathcal{C}$ un complejo de A-módulos tal que $\mathcal{C}^p \neq 0$ a lo sumo para $0 \leq p \leq n$ y los grupos de cohomología $H^i(\mathcal{C})$ sean A-módulos finitamente generados. Entonces existe un complejo $\mathcal{K}$ de A-módulos finitamente generados tal que $\mathcal{K}^p \neq 0$ a lo sumo para $0 \leq p \leq n$, $\mathcal{K}^p$ es libre para $1 \leq p \leq n$ y existe un homomorfismo de complejos $\phi : \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{C}$ que induce isomorfismos entre los grupos de cohomología. Si los módulos $\mathcal{C}^p$ son planos sobre A, entonces $\mathcal{K}^0$ será también plano sobre A.*

DEMOSTRACIÓN: Definimos $\mathcal{K}^p = 0$ para $p \geq n$. Supongamos definidos $(\mathcal{K}^p, \phi_p, \partial^p)$ para $p \geq m+1$ de modo que se cumplen las propiedades siguientes:

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{K}^{m+1} \arrow[r, "\partial^{m+1}"] \arrow[d, "\phi_{m+1}"] & \mathcal{K}^{m+2} \arrow[r] \arrow[d, "\phi_{m+2}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathcal{C}^m \arrow[r] & \mathcal{C}^{m+1} \arrow[r] & \mathcal{C}^{m+2} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

a) Los cuadrados son conmutativos,

b) $\partial^p \partial^{p+1} = 0$ para $p \geq m+1$,

c) ϕ_p induce isomorfismos entre los grupos de cohomología para $p \geq m+2$,

d) $\bar{\phi}_{m+1} : \mathrm{N}\,\partial^{m+1} \longrightarrow H^{m+1}(\mathcal{C})$ es suprayectiva,

e) Los módulos $\mathcal{K}^p$ son libres de rango finito, para $p \geq m+1$.

Supongamos en primer lugar que $m \geq 0$ y vamos a construir $(\mathcal{K}^m, \phi_m, \partial^m)$ de modo que se cumplan estas propiedades con m en lugar de $m+1$.

Sea $B^{m+1} \subset \mathcal{K}^{m+1}$ el núcleo de $\bar{\phi}_{m+1}$. Como $\mathcal{K}^{m+1}$ es un A-módulo finitamente generado, también lo son $\mathrm{N}\,\partial^{m+1}$ y B^{m+1}. Existen epimorfismos

$$d : K^m \longrightarrow B^{m+1}, \quad \lambda : K'^m \longrightarrow H^m(\mathcal{C}),$$

donde K^m y K'^m son A-módulos libres de rango finito. Como K'^m es proyectivo, existe un homomorfismo $f'_m : K'^m \longrightarrow Z^m(\mathcal{C})$ tal que d' es la composición de f'_m con la proyección natural $Z^m(\mathcal{C}) \longrightarrow H^m(\mathcal{C})$. Definimos $\mathcal{K}^m = K^m \oplus K'^m$, llamamos $\partial^m : \mathcal{K}^m \longrightarrow \mathcal{K}^{m+1}$ a la extensión trivial de d. Obviamente se cumplen las propiedades b) y e) para $p = m$ y la propiedad c) para $p = m+1$.

Por otra parte, $(d \circ \phi_{m+1})[K^m] \subset \partial[\mathcal{C}^m]$, luego existe un homomorfismo $f_m : K^m \longrightarrow \mathcal{C}^m$ tal que $f_m \circ \partial = d \circ \phi_{m+1}$. Definimos $\phi_m = f_m \oplus f'_m$. Es claro que la propiedad a) se cumple para el nuevo cuadrado y d) se cumple para m.

Supongamos que $m = -1$. Podemos sustituir $\mathcal{K}^0$ por $\mathcal{K}^0/(\mathrm{N}\,\partial^0 \cap \mathrm{N}\,\phi_0)$ y se siguen cumpliendo todas las propiedades salvo que $\mathcal{K}^0$ ya no es necesariamente libre, pero el homomorfismo $\bar{\phi}_0$ es ahora un isomorfismo. Por consiguiente, basta definir $\mathcal{K}^p = 0$ para $p < 0$ y se cumple el teorema.

Supongamos ahora que los módulos $\mathcal{C}^p$ son planos y veamos que $\mathcal{K}^0$ también lo es. Para ello definimos el complejo $L^p = \mathcal{K}^p \oplus \mathcal{C}^{p-1}$ con el operador dado por $\partial(x, 0) = (\partial x, \phi(x))$, $\partial(0, y) = (0, -\partial y)$. Sea también $\mathcal{C}'^p = \mathcal{C}^{p-1}$ con el operador $-\partial$. Entonces tenemos una sucesión exacta de complejos

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}' \longrightarrow L \longrightarrow \mathcal{K} \longrightarrow 0,$$

de la que obtenemos una sucesión exacta de cohomología

$$H^p(\mathcal{K}) \longrightarrow H^p(\mathcal{C}) \longrightarrow H^{p+1}(L) \longrightarrow H^{p+1}(\mathcal{K}) \longrightarrow H^{p+1}(\mathcal{C}).$$

Los homomorfismos de conexión $H^p(\mathcal{K}) \longrightarrow H^{p+1}(\mathcal{C}') = H^p(\mathcal{C})$ son precisamente los inducidos por ϕ, que son isomorfismos, luego $H^{p+1}(L) = 0$ para todo $p \in \mathbb{Z}$. Tenemos, pues, una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}^0 = L^0 \longrightarrow L^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow L^{n+1} \longrightarrow 0,$$

y los módulos L^i para $i \geq 1$ son planos. Aplicando varias veces [A.10] concluimos que $\mathcal{K}^0$ es plano. ■

Teorema 11.2 *Sea A un anillo noetheriano, sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{K}$ complejos finitos de A-módulos planos y sea $\mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{C}$ un homomorfismo que induzca isomorfismos entre los grupos de cohomología. Entonces, para toda A-álgebra B, los homomorfismos $H^p(\mathcal{K} \otimes_A B) \longrightarrow H^p(\mathcal{C} \otimes_A B)$ son isomorfismos.*

Demostración: Sea L el mismo complejo que hemos construido en la última parte del teorema anterior. Allí hemos visto que tiene cohomología nula. Por lo tanto, tenemos sucesiones exactas

$$0 \longrightarrow Z^p \longrightarrow L^p \longrightarrow Z^{p+1} \longrightarrow 0.$$

Aplicando [A.10] concluimos que todos los módulos de cociclos Z^p también son planos. Por el teorema [A.3], la sucesión

$$0 \longrightarrow Z^p \otimes_A B \longrightarrow L^p \otimes_A B \longrightarrow Z^{p+1} \otimes_A B \longrightarrow 0$$

es exacta, lo que implica que el complejo $L \otimes_A B$ es exacto, luego tiene cohomología nula. Considerando la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}' \otimes_A B \longrightarrow L \otimes_A B \longrightarrow \mathcal{K} \otimes_A B \longrightarrow 0$$

análoga a la considerada en el teorema anterior, obtenemos una sucesión exacta de cohomología

$$0 \longrightarrow H^p(\mathcal{K} \otimes_A B) \longrightarrow H^p(\mathcal{C} \otimes_A B) \longrightarrow 0,$$

lo que prueba el teorema. ■

Teorema 11.3 *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un homomorfismo propio entre esquemas noetherianos, donde $Y = \operatorname{Esp} A$ es afín. Sea $\mathcal{M}$ un haz coherente en X plano sobre Y. Entonces existe un complejo finito $\mathcal{K}$ de A-módulos planos finitamente generados tal que, para cada A-álgebra B y cada $p \geq 0$,*

$$H^p(X_B, \pi_B^*\mathcal{M}) \cong H^p(\mathcal{K} \otimes_A B),$$

donde $\pi_B : X_B \longrightarrow X$ es la proyección natural.

Demostración: Sea $\mathcal{U}$ un cubrimiento finito de X por abiertos afines. Recordemos que un haz $\mathcal{M}$ es plano sobre Y si para cada $x \in X$ el módulo $\mathcal{M}_x$ es plano sobre $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$. Esto implica (teorema [A.5]) que si $U \subset X$ es un abierto afín, entonces $\mathcal{M}(U)$ es un A-módulo plano.

Por el teorema 6.14, el complejo de Čech $\mathcal{C}(\mathcal{U}, \mathcal{M})$ es un complejo de A-módulos planos cuyos grupos de cohomología son los grupos $H^p(X, \mathcal{M})$. El teorema 11.1 nos da un complejo finito $\mathcal{K}$ tal que

$$H^p(\mathcal{K}) \cong H^p(\mathcal{C}(\mathcal{U}, \mathcal{M})) \cong H^p(X, \mathcal{M}).$$

Los A-módulos $\mathcal{K}^p$ son libres de rango finito excepto $\mathcal{K}^0$, que es plano y finitamente generado.

Si B es una A-álgebra y $U \subset X$ es un abierto afín, se cumple que

$$(\pi_B^*\mathcal{M})(U_B) \cong \mathcal{M}(U) \otimes_A B,$$

luego si $\mathcal{U}_B$ es el cubrimiento de X_B formado por los abiertos $\pi_B^{-1}[U]$, con $U \in \mathcal{U}$, tenemos que $\mathcal{C}(\mathcal{U}_B, \pi_B^*\mathcal{M}) = \mathcal{C}(\mathcal{U}, \mathcal{M}) \otimes_A B$, luego el teorema 11.2 nos da que

$$H^p(X_B, \pi_B^*\mathcal{M}) \cong H^p(\mathcal{K} \otimes_A B).$$

Se comprueba sin dificultad que el isomorfismo es funtorial en B. ■

Notemos que el teorema [1.37] nos da una prueba del teorema 6.15 como caso particular del teorema anterior. Pasamos ya a los resultados que vamos a necesitar en la sección siguiente.

Si X es un espacio topológico, una aplicación $f : Y \longrightarrow \mathbb{Z}$ es *semicontinua superiormente* si los conjuntos $\{y \in Y \mid f(y) \geq n\}$ son cerrados. Invirtiendo la desigualdad tenemos la definición de función *semicontinua inferiormente.*

Si $f : X \longrightarrow Y$ es un homomorfismo de esquemas, $y \in Y$ y $\mathcal{M}$ es un haz en X, usaremos la notación $\mathcal{M}_y = p_y^*\mathcal{M}$, donde $p_y : X_y \longrightarrow X$ es la proyección natural. Si f es propio, entonces X_y es propio sobre $k(y)$, y el haz $\mathcal{M}_y$ es coherente, por lo que los espacios vectoriales $H^p(X_y, \mathcal{M}_y)$ tienen dimensión finita.

Teorema 11.4 *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un homomorfismo propio entre esquemas noetherianos y sea $\mathcal{M}$ un haz coherente en X, plano sobre Y. Entonces:*

a) Para cada $p \geq 0$, la función $d_p : Y \longrightarrow \mathbb{Z}$ dada por

$$d_p(y) = \dim_{k(y)} H^p(X_y, \mathcal{M}_y)$$

es semicontinua superiormente.

b) La función $y \mapsto \chi(\mathcal{M}_y)$ es continua, es decir, localmente constante.

Demostración: Podemos suponer que $Y = \operatorname{Esp} A$ es afín. Sea entonces $\mathcal{K}$ un complejo en las condiciones del teorema 11.3. Concretamente, $\mathcal{K}$ es cualquier complejo que cumpla el teorema 11.1 tomando como $\mathcal{C}$ el complejo de Čech asociado a un cubrimiento afín prefijado $\mathcal{U}$ de X.

Sea $K = \mathcal{K}^0$, del que sabemos que es un A-módulo plano y finitamente generado. Lo mismo le sucede a cada localización $K_\mathfrak{p}$, donde $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de A, pero por [A.4] esto implica que $K_\mathfrak{p}$ es libre. Así pues, el haz coherente $\widetilde{K}$ es localmente libre, luego todo punto $y \in Y$ tiene un entorno afín $D(s)$, con $s \in A$ tal que K_s es un A_s-módulo libre.

Sea $X' = f^{-1}[D(s)]$, que es un abierto en X. Si $U \subset X$ es un abierto afín, es fácil ver que $X' \cap U = D_U(s')$, donde s' es la imagen de s por el homomorfismo $A \longrightarrow \mathcal{O}_X(U)$ asociado a $f|_U$. Como $\mathcal{M}$ es coherente, esto implica que $\mathcal{M}(X' \cap U) = \mathcal{M}(U)_s$.

Por consiguiente, si llamamos $\mathcal{U}'$ a las intersecciones con X' de los abiertos de $\mathcal{U}$, tenemos un cubrimiento afín de X' tal que $\mathcal{C}(\mathcal{U}', \mathcal{M}|_{X'}) = \mathcal{C}(\mathcal{U}, \mathcal{M})_s$. A su vez, de aquí se sigue que el complejo $\mathcal{K}\otimes A_s$ cumple el teorema 11.1 para $\mathcal{C}(\mathcal{U}', \mathcal{M}|_{X'})$, luego cumple el teorema 11.3 para $f|_{X'} : X' \longrightarrow D(s)$. Equivalentemente, podemos suponer que el complejo $\mathcal{K}$ es libre.

Tomando $B = k(y)$ en 11.3, tenemos que

$$H^p(X_y, \mathcal{M}_y) \cong H^p(\mathcal{K}^p \otimes_A k(y)),$$

luego si llamamos $d^p : \mathcal{K}^p \longrightarrow \mathcal{K}^{p+1}$ al operador cofrontera, tenemos que

$$\dim_{k(y)} H^p(X_y, \mathcal{M}_y) = \dim(\mathrm{N}(d^p \otimes 1_{k(y)})) - \dim(\mathrm{Im}(d^{p-1} \otimes 1_{k(y)}))$$

$$= \dim \mathcal{K}^p \otimes_A k(y) - \dim(\mathrm{Im}(d^p \otimes 1_{k(y)})) - \dim(\mathrm{Im}(d^{p-1} \otimes 1_{k(y)})).$$

Notemos que $\dim \mathcal{K}^p \otimes_A k(y)$ es el rango de $\mathcal{K}^p$, luego no depende de y. Es claro entonces que

$$\chi(\mathcal{M}_y) = \sum_{p\geq 0} (-1)^p \dim_{k(y)} H^p(X_y, \mathcal{M}_y)$$

es constante (en el entorno de y en el que estamos trabajando). Esto prueba b). Para demostrar a) basta ver que las funciones $\rho_p(y) = \dim(\mathrm{Im}(d^p \otimes 1_{k(y)}))$ son semicontinuas inferiormente. Para ello observamos que si $r \geq 0$ y llamamos $d^p_r : \Lambda^r\mathcal{K}^p \longrightarrow \Lambda^r\mathcal{K}^{p+1}$ al homomorfismo inducido por d^p, entonces podemos identificar a $d^p_r \otimes 1_{k(y)}$ con el homomorfismo

$$\Lambda^r(\mathcal{K}^p \otimes_A k(y)) \longrightarrow \Lambda^r(\mathcal{K}^{p+1} \otimes_A k(y))$$

inducido por $d_p \otimes 1_{k(y)}$, con lo que

$$\{y \in Y \mid \rho_p(y) < r\} = \{y \in Y \mid d^r_p \otimes 1_{k(y)} = 0\}.$$

Ahora bien, d^p_r es un homomorfismo entre dos A-módulos libres de rango finito, determinado por una matriz M con coeficientes en A, cada $y \in Y$ es un ideal primo en A y cada d^r_p es el homomorfismo cuya matriz está formada por los restos módulo y de los coeficientes de M, luego el conjunto de la derecha es el conjunto $V(S)$, donde S es el conjunto de los coeficientes de M, luego es cerrado en Y. ■

Teorema 11.5 *Sea A un dominio íntegro noetheriano y $\phi : M \longrightarrow N$ un homomorfismo entre dos A-módulos planos finitamente generados tal que la aplicación*

$$y \mapsto \dim_{k(y)} \mathrm{Im}(\phi \otimes 1_{k(y)})$$

es constante en $Y = \mathrm{Esp}\, A$. Entonces podemos descomponer

$$M = M_1 \oplus M_2, \qquad N = N_1 \oplus N_2$$

de modo que $\phi|_{M_1} = 0$, $\phi[M] \subset N_1$ y $\phi|_{M_2} : M_2 \longrightarrow N_1$ es un isomorfismo.

Demostración: En el enunciado se entiende que $k(y) = A_y/yA_y$. Consideramos la sucesión exacta $0 \longrightarrow \operatorname{Im}\phi \longrightarrow N \longrightarrow N/\operatorname{Im}\phi \longrightarrow 0$. Para cada $y \in Y$ obtenemos la sucesión exacta

$$\operatorname{Im}\phi \otimes_A k(y) \longrightarrow N \otimes_A k(y) \longrightarrow (N/\operatorname{Im}\phi) \otimes_A k(y) \longrightarrow 0.$$

La imagen del primer homomorfismo es $\operatorname{Im}(\phi \otimes 1_{k(y)})$, cuya dimensión es constante por hipótesis.

Por otra parte, $N \otimes_A k(y) \cong N_y \otimes_{A_y} k(y)$, y el A_y-módulo N_y es plano y finitamente generado, luego es libre. Esto significa que el haz coherente $\widetilde{N}$ es localmente libre, luego la dimensión de N_y como A_y-módulo es constante (notemos que Y es conexo), y esta dimensión es igual a $\dim_{k(y)} N \otimes_A k(y)$.

Concluimos que $\dim_{k(y)}(N/\operatorname{Im}\phi) \otimes_A k(y)$ es constante en Y. En particular, evaluando en los ideales y, $0 \in Y$, vemos que

$$\dim_{k(y)}(N/\operatorname{Im}\phi)_y \otimes_{A_y} k(y) = \dim_{k(0)}(N/\operatorname{Im}\phi)_y \otimes_{A_y} k(0),$$

luego el teorema 6.37 nos da que $(N/\operatorname{Im}\phi)_y$ es libre para todo $y \in Y$. Por el teorema [5.46] resulta que $N/\operatorname{Im}\phi$ es un A-módulo proyectivo, y el teorema [1.32] nos da la descomposición $N = N_1 \oplus N_2$, donde $N_1 = \operatorname{Im}\phi$. A su vez, esto implica que $\operatorname{Im}\phi \cong M/\mathrm{N}(\phi)$ es proyectivo, luego el mismo teorema nos da una descomposición $M = M_1 \oplus M_2$, donde $M_1 = \mathrm{N}(\phi)$ y $M_2 \cong \operatorname{Im}\phi$. ■

Teorema 11.6 *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un homomorfismo propio entre esquemas noetherianos y sea $\mathcal{M}$ un haz coherente en X, plano sobre Y. Supongamos además que Y es íntegro. Entonces la función $y \mapsto \dim_{k(y)} H^p(X_y, \mathcal{M}_y)$ es constante si y sólo si el haz $D^p f_*\mathcal{M}$ es localmente libre y*

$$(D^p f_*\mathcal{M})_y \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} k(y) \cong H^p(X_y, \mathcal{M}_y)$$

para todo $y \in Y$. En tal caso, se cumple además que

$$(D^{p-1} f_*\mathcal{M})_y \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} k(y) \cong H^{p-1}(X_y, \mathcal{M}_y),$$

también para todo $y \in Y$.

Demostración: Podemos suponer que $Y = \operatorname{Esp} A$ es afín. Tomamos un complejo $\mathcal{K}$ en las condiciones del teorema 11.3. Si la dimensión es constante, la expresión que hemos obtenido para ella en la demostración del teorema 11.4 muestra que las funciones

$$y \mapsto \dim(\operatorname{Im}(d^p \otimes 1_{k(y)})), \quad y \mapsto \dim(\operatorname{Im}(d^{p-1} \otimes 1_{k(y)}))$$

son constantes también (ambas son semicontinuas inferiormente y su suma es constante, luego, despejando una en función de la otra, ambas son semicontinuas superiormente, luego continuas, luego constantes).

Vamos a aplicar el teorema anterior a los homomorfismos $d^p : \mathcal{K}^p \longrightarrow \mathcal{K}^{p+1}$ y $d^{p-1} : \mathcal{K}^{p-1} \longrightarrow \mathrm{N}(d^p)$. (Notemos que si aplicamos en primer lugar el teorema anterior a $d^{p-1} : \mathcal{K}^{p-1} \longrightarrow \mathcal{K}^p$, en la demostración se ve que $\operatorname{Im} d^{p-1} = \mathrm{N}(d^p)$ es proyectivo, luego plano, pues ambas propiedades equivalen a que tenga localizaciones libres. Esto justifica que podamos aplicar el teorema anterior a d^{p-1} con imagen en $\mathrm{N}(d^p)$.)

Tenemos, pues, que $\mathcal{K}^{p-1} = \mathrm{N}(d^{p-1}) \oplus K^{p-1}$ y $\mathrm{N}(d^p) = \mathrm{Im}(d^{p-1}) \oplus H^p$, así como que $\mathcal{K}^p = \mathrm{N}(d^p) \oplus K^p$ y $\mathcal{K}^{p+1} = \mathrm{Im}(d^p) \oplus H^{p+1}$. Más claramente:

$$\mathrm{N}(d^{p-1}) \oplus K^{p-1} \xrightarrow{d^{p-1}} \mathrm{Im}(d^{p-1}) \oplus H^p \oplus K^p \xrightarrow{d^p} \operatorname{Im} d^p \oplus H^{p+1}.$$

Así pues,

$$(D^p f_*\mathcal{M})(Y) = H^p(X, \mathcal{M}) \cong H^p(\mathcal{K}) \cong H^p,$$

que es un A-módulo proyectivo, luego sus localizaciones son libres. Esto prueba que $D^p f_*\mathcal{M}$ es localmente libre.

Por otra parte, para cualquier A-álgebra B, se comprueba fácilmente que

$$H^p(\mathcal{K} \otimes_A B) \cong H^p \otimes_A B \cong H^p(\mathcal{K}) \otimes_A B,$$

$$H^{p-1}(\mathcal{K}, \otimes_A B) \cong (\mathrm{N}(d^{p-1}) \otimes_A B)/\operatorname{Im}(d^{p-2} \otimes 1) \cong H^{p-1}(\mathcal{K}) \otimes_A B.$$

Aplicando esto a $B = k(y)$ vemos que

$$H^p(X_y, \mathcal{M}_y) \cong H^p(\mathcal{K} \otimes_A k(y)) \cong H^p(\mathcal{K}) \otimes_A k(y) \cong (D^p f_*\mathcal{M})(Y) \otimes_A k(y)$$

$$\cong (D^p f_*\mathcal{M})_y \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} k(y),$$

e igualmente con $p-1$ en lugar de p. La otra implicación es trivial. ■

Nota Conviene observar con más detalle el isomorfismo dado por el teorema anterior. Si sustituimos Y por un entorno afín $\operatorname{Esp} A$ de y, se reduce a

$$H^p(X, \mathcal{M}) \otimes_A k(y) \cong H^p(X_y, \mathcal{M}_y).$$

Este isomorfismo se obtiene a partir de un cubrimiento afín $\mathcal{U}$ de X, que nos da el isomorfismo natural $H^p(X, \mathcal{M}) \cong H^p(\mathcal{U}, \mathcal{M})$. Por otra parte, el conjunto $\mathcal{U}_y$ formado por las antiimágenes en X_y de los abiertos de $\mathcal{U}$ es un cubrimiento afín de X_y, de modo que $H^p(X_y, \mathcal{M}_y) \cong H^p(\mathcal{U}_y, \mathcal{M}_y)$, y tenemos un isomorfismo natural $C(\mathcal{U}_y, \mathcal{M}_y) \cong C(\mathcal{U}, \mathcal{M}) \otimes_A k(y)$. Además, tenemos un homomorfismo de complejos $\mathcal{K} \longrightarrow C(\mathcal{U}, \mathcal{M})$ que induce isomorfismos naturales

$$\begin{tikzcd}
H^p(X, \mathcal{M}) \otimes_A k(y) \arrow[r] & H^p(C(\mathcal{U}, \mathcal{M}) \otimes_A k(y)) \arrow[r] & H^p(X_y, \mathcal{M}_y) \\
H^p(\mathcal{K}) \otimes_A k(y) \arrow[r] \arrow[u] & H^p(\mathcal{K} \otimes_A k(y)) \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

La fila superior de este diagrama es un homomorfismo natural que está definido aunque no se cumplan las hipótesis del teorema (e igualmente para $p-1$). Bajo estas hipótesis (pasando por la fila inferior) hemos demostrado que tal homomorfismo es, de hecho, un isomorfismo.

En particular, en el caso $p = 0$, si U es un abierto afín en X (que podemos incluir en el cubrimiento $\mathcal{U}$), tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}(X) \otimes_A k(y) & \longrightarrow & \mathcal{M}_y(X_y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{M}(U) \otimes_A k(y) & \longrightarrow & \mathcal{M}_y(U_y) \end{array}$$

donde las flechas verticales son las restricciones, la flecha horizontal superior es el isomorfismo del enunciado y la flecha horizontal inferior es el isomorfismo natural

$$\mathcal{M}_y(U_y) = (p_y^*\mathcal{M})(p^{-1}[U]) \cong \mathcal{M}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{O}_{X_y}(U \times_Y \operatorname{Esp} k(y))$$

$$\cong \mathcal{M}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{O}_X(U) \otimes_A k(y) \cong \mathcal{M}(U) \otimes_A k(y).$$

■

11.2 Haces inversibles en productos

En lo sucesivo, una *variedad algebraica* V/k será un esquema de tipo finito sobre un cuerpo k, separado y geométricamente íntegro. Recordemos que es costumbre llamar variedades completas a las variedades propias sobre k.

Sea V/k una variedad completa y sea Y/k un esquema de tipo finito. Entonces la proyección $\pi : V \times_k Y \longrightarrow Y$ es un homomorfismo propio y, para cada $y \in Y$, tenemos un isomorfismo natural

$$(V \times_k Y)_y = (V \times_k Y) \times_Y \operatorname{Esp} k(y) \cong V \times_k \operatorname{Esp} k(y) = V_{k(y)},$$

de modo que las fibras de π son extensiones de constantes de V. A través de este isomorfismo, la proyección $(V \times_k Y)_y \longrightarrow V \times_k Y$ se corresponde con el homomorfismo $1 \times i_y : V_{k(y)} \longrightarrow V \times_k Y$, donde $i_y : \operatorname{Esp} k(y) \longrightarrow Y$ es el homomorfismo natural con el que se construye la fibra.

Si $\mathcal{M}$ es un haz coherente en Y, llamaremos $\mathcal{M}_y = (1 \times i_y)^*\mathcal{L}$, que es el haz coherente en $V_{k(y)}$ que se corresponde a través del isomorfismo con el haz que en el teorema 11.6 llamamos $\mathcal{M}_y$.

Podemos pensar en $\mathcal{M}$ como una familia de haces coherentes en V parametrizada por los puntos de Y. Esto no es exacto, pues los haces $\mathcal{M}_y$ no están en V, sino en $V_{k(y)}$. No obstante, si el punto y es racional, entonces $k(y) = k$. En particular, si k es algebraicamente cerrado, esto sucede para todos los puntos cerrados de Y.

Observemos que si $\mathcal{M} = \pi^*\mathcal{N}$, para cierto haz inversible $\mathcal{N}$ en Y, entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{CD} V\times_k Y @>{\pi}>> Y \\ @AAA @AAA \\ V_{k(y)} @>>> \operatorname{Esp} k(y) \end{CD}$$

Vemos que $\mathcal{M}_y$ es la imagen inversa de un haz inversible en $\operatorname{Esp} k(y)$, pero todo haz inversible en este esquema es trivial (libre), luego $\mathcal{M}_y$ es trivial para todo $y \in Y$. Vamos a probar el recíproco:

Teorema 11.7 *Sea V/k una variedad completa y sea Y/k un esquema íntegro de tipo finito sobre k. Si $\mathcal{M}$ es un haz inversible en $V \times_k Y$ tal que $\mathcal{M}_y$ es trivial para todo $y \in Y$, entonces existe un haz inversible $\mathcal{N}$ en Y tal que $\mathcal{M} \cong \pi^*\mathcal{N}$.*

Demostración: Notemos que $V \times_k Y$ es íntegro, por lo que podemos aplicar el teorema 11.6 a la proyección $\pi : V \times_k Y \longrightarrow Y$. Notemos que, como V es plano sobre k, la proyección π, que es un cambio de base, es plana. Por consiguiente, como $\mathcal{M}$ es localmente libre, es plano sobre Y.

Es claro que $V_{k(y)}/k(y)$ es un conjunto algebraico completo geométricamente íntegro, luego el teorema 4.26 nos da que

$$H^0(V_{k(y)}, \mathcal{M}_y) \cong H^0(V_{k(y)}, \mathcal{O}_{V_{k(y)}}) = k(y).$$

El teorema 11.6 para $p = 0$ nos da entonces que $\mathcal{N} = \pi_*\mathcal{M}$ es un haz coherente localmente libre en Y de rango 1 (por el isomorfismo del teorema), luego es un haz inversible en Y. Además, llamando $X = V \times_k Y$, para todo $y \in Y$ tenemos que $\mathcal{M}_y(X_y) \cong (\pi_*\mathcal{M})_y \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} k(y)$. Nos falta probar que $\pi^*\pi_*\mathcal{M} \cong \mathcal{M}$.

Vamos a probar que si $y \in Y$ es un punto cerrado, la imagen por la proyección $p : X_y \longrightarrow X$ del homomorfismo natural $\alpha : \pi^*\pi_*\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ es un isomorfismo.

Observemos en primer lugar que, si $V \subset Y$ es un entorno afín de y, y llamamos $X' = \pi^{-1}[V]$, entonces el homomorfismo $\alpha|_{X'} : (\pi^*\pi_*\mathcal{M})|_{X'} \longrightarrow \mathcal{M}|_{X'}$ coincide con el homomorfismo natural $\pi|_{X'}^*\pi|_{X'*}\mathcal{M}|_{X'} \longrightarrow \mathcal{M}|_{X'}$, y la fibra X'_y es la misma, por lo que no perdemos generalidad si suponemos que $Y = \operatorname{Esp} A$ es afín. El isomorfismo $\mathcal{M}_y(X_y) \cong (\pi_*\mathcal{M})_y \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} k(y)$ se traduce en que

$$\mathcal{M}_y(X_y) \cong \mathcal{M}(X) \otimes_A A_y \otimes_{A_y} k(y) \cong \mathcal{M}(X) \otimes_A k(y).$$

Teniendo en cuenta 5.8, es fácil ver que, para cada abierto afín $U \subset X$, se cumple que $(\pi^*\pi_*\mathcal{M})(U) \cong \mathcal{M}(X) \otimes_A \mathcal{O}_X(U)$, así como que el homomorfismo natural viene dado por $\alpha_U(m \otimes s) = m|_U s$. Como p es una inmersión cerrada, tenemos que $p^{-1}[U]$ es un abierto afín en X_y, y

$$\begin{aligned} p^*\pi^*\pi_*\mathcal{M}(p^{-1}[U]) &\cong \mathcal{M}(X) \otimes_A \mathcal{O}_X(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{O}_{X_y}(p^{-1}[U]) \\ &\cong (\mathcal{M}(X) \otimes_A k(y)) \otimes_{k(y)} \mathcal{O}_{X_y}(p^{-1}[U]), \end{aligned}$$

mientras que

$$(p^*\mathcal{M})(p^{-1}[U]) \cong \mathcal{M}(U) \otimes_{\mathcal{O}_X(U)} \mathcal{O}_{X_y}(p^{-1}[U]),$$

de modo que, a través de estos isomorfismos,

$$p^*(\alpha)_{p^{-1}[U]}(m \otimes s \otimes t) = m|_U \otimes st.$$

A través del isomorfismo $\mathcal{M}(X) \otimes_A k(y) \cong (p^*\mathcal{M})(X_y)$ tenemos[1] que

$$p^*(\alpha)_{p^{-1}[U]} : (p^*\mathcal{M})(X_y) \otimes_{k(y)} \mathcal{O}_{X_y}(p^{-1}[U]) \longrightarrow (p^*\mathcal{M})(p^{-1}[U])$$

viene dada por $p^*(\alpha)_{p^{-1}[U]}(m \otimes s) = m|_{p^{-1}[U]}s$, y a través del isomorfismo $p^*\mathcal{M} \cong \mathcal{O}_{X_y}$, se convierte a su vez en el homomorfismo

$$p^*(\alpha)_{p^{-1}[U]} : \mathcal{O}_{X_y}(X_y) \otimes_{k(y)} \mathcal{O}_{X_y}(p^{-1}[U]) \longrightarrow \mathcal{O}_{X_y}(p^{-1}[U])$$

definido de igual forma, que obviamente es un isomorfismo.

Volvemos ahora a caso general (en el que Y ya no es necesariamente afín).

Observemos que si $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$ es un homomorfismo entre dos haces coherentes en un esquema X y $x \in X$ es un punto cerrado, podemos considerar el homomorfismo natural $i : \operatorname{Esp} k(x) \longrightarrow X$ y la restricción $i^*f : i^*\mathcal{M} \longrightarrow i^*\mathcal{N}$, cuya interpretación es la siguiente: si $U = \operatorname{Esp} A$ es un entorno afín de x, entonces $\mathcal{M}|_U = \widetilde{M}$, $\mathcal{N}|_U = \widetilde{N}$ y f se corresponde con un homomorfismo de A-módulos $\alpha : M \longrightarrow N$, además i se corresponde con el epimorfismo $A \longrightarrow k(x)$ y i^*f se corresponde con el homomorfismo natural $M \otimes_A k(x) \longrightarrow N \otimes_A k(x)$. En particular es obvio que si f es un isomorfismo también lo es i^*f.

Por otra parte, si el esquema X es noetheriano e i^*f es un epimorfismo, viéndolo como $\alpha : M_x \otimes_{A_x} (A_x/x) \longrightarrow N_x \otimes_{A_x} (A_x/x)$, como la sucesión

$$M_x \otimes_{A_x} (A_x/x) \longrightarrow N_x \otimes_{A_x} (A_x/x) \longrightarrow (N_x/\operatorname{Im}\alpha_x) \otimes_{A_x} (A_x/x) \longrightarrow 0$$

ha de ser exacta, concluimos que $(N_x/\operatorname{Im}\alpha_x) \otimes_{A_x} (A_x/x) = 0$, y el lema de Nakayama [4.51] (ver la nota posterior) implica que $N_x/\operatorname{Im}\alpha_x = 0$, luego α_x es un epimorfismo, luego también lo es $f_x : \mathcal{M}_x \longrightarrow \mathcal{N}_x$.

Aplicamos esto a nuestro caso del modo siguiente: si $x \in X$ es un punto cerrado, entonces $y = \pi(x) \in Y$ también es un punto cerrado, y podemos identificar a x con un punto de la fibra X_y, de modo que tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} X_y \arrow[r, "p"] & X \\ \operatorname{Esp} k(x) \arrow[u, "i"] \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd}$$

Como la restricción a X_y del homomorfismo $\pi^*\pi_*\mathcal{M} \longrightarrow M$ es un isomorfismo, también lo es su restricción a $\operatorname{Esp} k(x)$, luego hemos probado que

[1]Tener en cuenta la nota tras el teorema 11.6.

$(\pi^*\pi_*\mathcal{M})_x \longrightarrow \mathcal{M}_x$ es un epimorfismo. En principio lo tenemos para puntos cerrados, pero es inmediato que entonces es cierto para puntos cualesquiera (porque la localización de un epimorfismo es un epimorfismo). En resumen, tenemos que el homomorfismo natural $\pi^*\pi_*\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ es suprayectivo. Como ambos miembros son localmente libres de rango 1, esto implica que de hecho es un isomorfismo. ■

Vemos, pues, que el hecho de que $\mathcal{M}_y$ sea trivial para todo $y \in Y$ no implica necesariamente que $\mathcal{M}$ sea trivial. Para asegurarlo basta exigir además que $\mathcal{M}_v$ sea trivial para al menos un punto racional $v \in V$. Más en general:

Teorema 11.8 *Sea V/k una variedad completa y sea Y/k un esquema íntegro de tipo finito sobre k. Si $\mathcal{M}$ y $\mathcal{N}$ son haces inversibles en $V \times_k Y$ tales que $\mathcal{M}_y \cong \mathcal{N}_y$ para todo $y \in Y$ y $\mathcal{M}_v \cong \mathcal{N}_v$ para un $v \in V(k)$, entonces $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$.*

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema anterior existe un haz coherente $\mathcal{L}$ en Y tal que $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}^* \cong \pi^*\mathcal{L}$ o, también, $\mathcal{M} \cong \mathcal{N} \otimes \pi^*\mathcal{L}$. Ahora consideramos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "i_v"] \arrow[dr, "1"'] & V \times_k Y \arrow[d, "\pi"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

donde i_v es la proyección desde la fibra $(V \times_k Y)_v$ para la primera proyección, que es $Y_{k(v)} = Y$, ya que $k(v) = k$. Vemos que

$$\mathcal{M}_v \cong \mathcal{N}_v \otimes (i_v^*\pi^*\mathcal{L}) \cong \mathcal{N}_v \otimes \mathcal{L}.$$

La hipótesis nos da entonces que $\mathcal{L}$ es trivial, luego $\mathcal{M} \cong \mathcal{N}$. ■

Puede probarse que para garantizar que un haz inversible $\mathcal{M}$ en un producto $V \times_k Y$ sea trivial, no es suficiente exigir que $\mathcal{M}$ tenga una sección trivial en cada factor, sino que, tal y como acabamos de probar, hemos de comprobar que $\mathcal{M}$ tiene triviales todas sus secciones en uno de los factores. El resultado que perseguimos, el teorema del cubo, afirma que si tenemos tres factores en lugar de dos, entonces la trivialidad en una sección (racional) de cada factor sí que garantiza la trivialidad del haz completo. Antes de probarlo vamos a ver que en el teorema anterior basta que las hipótesis se cumplan cuando y varía en un subconjunto denso de Y. (Por ejemplo, basta con que se cumpla cuando y es el punto genérico, o el conjunto de los puntos cerrados de Y.) Esto, a su vez, es consecuencia de un hecho elemental:

Teorema 11.9 *Sea V/k una variedad completa y $\mathcal{L}$ un haz inversible en V. Entonces $\mathcal{L}$ es trivial si y sólo si tanto $\mathcal{L}(V)$ como $\mathcal{L}^*(V)$ son no nulos.*

DEMOSTRACIÓN: Una implicación es trivial. Un $s \in \mathcal{L}(V)$ no nulo define un homomorfismo no nulo $f : \mathcal{O}_V \longrightarrow \mathcal{L}$ mediante $f_U(t) = ts|_U$. Igualmente tenemos un homomorfismo no nulo $g : \mathcal{O}_V \longrightarrow \mathcal{L}^*$, cuyo dual es un homomorfismo no nulo $h : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{O}_V$. Notemos que todo homomorfismo $\alpha : \mathcal{O}_V \longrightarrow \mathcal{O}_V$ está determinado por $\alpha_V(1)$ y, teniendo en cuenta que $\mathcal{O}_V(V) = k$, es un isomorfismo si y sólo si $\alpha_V(1)$ es no nulo. Esto implica que $g \circ h$ es un isomorfismo, luego h es un epimorfismo, luego es un isomorfismo (todo epimorfismo entre haces inversibles es un isomorfismo). ■

Teorema 11.10 *Sea V/k una variedad completa y sea Y/k un esquema íntegro de tipo finito sobre k. Si $\mathcal{M}$ es un haz inversible en $V \times_k Y$, entonces el conjunto $\{y \in Y \mid \mathcal{M}_y$ es trivial$\}$ es cerrado.*

Demostración: En virtud del teorema 11.9 el conjunto del enunciado es

$$\{y \in Y \mid \dim_{k(y)} H^0(V_{k(y)}, \mathcal{M}_y) \geq 1\} \cap \{y \in Y \mid \dim_{k(y)} H^0(V_{k(y)}, \mathcal{M}^*_y) \geq 1\},$$

y ambos conjuntos son cerrados por el teorema 11.4. ■

Teorema 11.11 (Teorema del cubo) *Sean U/k, V/k, W/k tres variedades completas y fijemos en ellas sendos puntos racionales $u_0 \in U(k)$, $v_0 \in V(k)$, $w_0 \in W(k)$. Entonces, un haz inversible $\mathcal{L}$ en $U \times_k V \times_k W$ es trivial si y sólo si lo son los haces $\mathcal{L}_{u_0}$, $\mathcal{L}_{v_0}$, $\mathcal{L}_{w_0}$.*

Demostración: Una implicación es obvia. Observemos que si K/k es una extensión de cuerpos, entonces $(U \times_k V \times_k W)_K = U_K \times_K V_K \times_K W_K$, y, en general, si $\mathcal{L}$ es un haz en un esquema X/k, el teorema 6.15 implica que $H^0(X_K, \mathcal{L}_K) \cong H^0(X, \mathcal{L}) \otimes_k K$. Si X/k es una variedad completa, el teorema 11.9 implica que $\mathcal{L}$ es trivial si y sólo si lo es $\mathcal{L}_K$. De estas consideraciones se sigue que no perdemos generalidad si suponemos que k es algebraicamente cerrado.

Veamos ahora que también podemos suponer que U/k es una curva regular. Para ello consideremos una curva irreducible que pase por u_0 y sea u otro cualquiera de sus puntos cerrados. Sea U'/k la normalización de dicha curva (que es una curva completa regular) y sea $p : U' \longrightarrow U$ el homomorfismo asociado (cuya imagen es la curva). Tomemos u'_0, $u' \in U'$ tales que $p(u'_0) = u_0$, $p(u') = u$. El homomorfismo p induce a su vez un homomorfismo $q : U' \times_k V \times_k W \longrightarrow U \times_k V \times_k W$, y es claro que $q^*\mathcal{L}$ cumple las hipótesis del teorema respecto a u'_0, v_0, w_0. Por ejemplo, si llamamos $X = U \times_k V \times_k W$ y $X' = U' \times_k V \times_k W$, tenemos que p induce un isomorfismo $k(u_0) \longrightarrow k(u'_0)$, que a su vez induce un isomorfismo $\operatorname{Esp} k(u'_0) \longrightarrow \operatorname{Esp} k(u_0)$, que a su vez induce un isomorfismo $q_{u'_0}$ que hace conmutativo el diagrama

$$\begin{array}{ccc} X'_{u'_0} & \xrightarrow{q_{u'_0}} & X_{u_0} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X' & \xrightarrow[q]{} & X \end{array}$$

Vemos que $(q^*\mathcal{L})_{u'_0} \cong q^*_{u'_0}(\mathcal{L}_{u_0})$ es trivial, e igualmente con v_0 y w_0. (Los homomorfismos q_{v_0} y q_{w_0} no son isomorfismos, pero esto no afecta al argumento.)

Si admitimos probado el teorema cuando la primera variedad es una curva, tenemos que $q^*\mathcal{L}$ es trivial, luego, considerando el diagrama anterior para u' y u, también lo es $(q^*\mathcal{L})_{u'} \cong \mathcal{L}_u$, para todo punto cerrado u situado sobre una curva irreducible que pase por u_0.

Por el teorema 9.36, si $u \in U$ es cualquier punto cerrado, U contiene una curva conexa que pasa por u_0 y u, luego existe una sucesión finita de puntos cerrados $u_0, u_1, \ldots, u_r = u$ de modo que u_i y u_{i+1} están sobre una misma curva irreducible. Aplicando el razonamiento anterior a cada uno de estos pares concluimos que $\mathcal{L}_u$ es trivial para todo punto cerrado $u \in U$. Como los puntos cerrados de U son un conjunto denso, el teorema anterior implica que $\mathcal{L}_u$ es trivial para todo $u \in U$.

Consideremos ahora el punto $(v_0, w_0) \in V \times_k W$, es decir, la imagen del homomorfismo $\operatorname{Esp} k \cong \operatorname{Esp} k(v_0) \times_k \operatorname{Esp} k(w_0) \longrightarrow V \times_k W$.

Tenemos homomorfismos naturales $X_{(v_0,w_0)} \longrightarrow X_{w_0} \longrightarrow X$ de los que se desprende que $\mathcal{L}_{(v_0,w_0)}$ es una imagen inversa de $\mathcal{L}_{w_0}$ y, por consiguiente, es trivial. El teorema 11.8 implica entonces que $\mathcal{L}$ es trivial.

Así pues, podemos suponer que U/k es una curva regular. Como en la reducción no hemos modificado las otras dos variedades, la simetría de las hipótesis hace que podamos suponer que las tres son curvas regulares. En realidad nos basta con suponer que U es una curva regular y que V y W son variedades regulares.

Sea $C \in \operatorname{Div}(U)$ un divisor canónico, de modo que $\dim C = \dim_k L(C) = g$ es el género de U. Si $s \in L(C)$ es no nulo, podemos tomar un punto cerrado $P_1 \in C$ que no sea un cero ni un polo de s y que no esté en el soporte de C, de modo que $s \notin L(C/P_1)$. Así, $L(C/P_1)$ está estrictamente contenido en $L(C)$ y su dimensión es estrictamente menor. Repitiendo el argumento, obtenemos puntos cerrados $P_1, \ldots, P_g \in U$ tales que si $D = P_1 \cdots P_g \in \operatorname{Div}(U)$, entonces $\dim(C/D) = 0$.

Puesto que D tiene grado g, el teorema de Riemann-Roch implica que $\dim D = 1$. Esto significa que $\mathcal{O}_U(D)(U)$, que en principio está formado por las funciones racionales en U que tienen a lo sumo polos simples en los puntos P_i, contiene únicamente las funciones constantes. A su vez, esto implica que si E es un divisor positivo tal que $\mathcal{O}_U(E) \cong \mathcal{O}_U(D)$ entonces $E = D$. En efecto, en principio $E = (f)D$, para cierta $f \in K(U)^*$, pero entonces $f \in \mathcal{O}_U(D)$ (por el teorema 8.30), luego f es constante, luego $E = D$.

Sea $p_1 : X \longrightarrow U$ la primera proyección, y sea $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} p_1^*\mathcal{O}_U(D)$. Para todo punto cerrado $v \in V$, tenemos que $\mathcal{L}_{(v,w_0)}$ es trivial, pues es una imagen inversa de $\mathcal{L}_{w_0}$, luego $\mathcal{L}'_{(v,w_0)} \cong \mathcal{O}_U(D)$, luego por dualidad vemos que

$$\dim_k H^1(U, \mathcal{L}'_{(v,w_0)}) = \dim_k H^1(U, \mathcal{O}_U(D))$$

$$= \dim_k H^0(U, \omega_U \otimes_{\mathcal{O}_U} \mathcal{O}_U(D^{-1})) = \dim(C/D) = 0.$$

Así pues, el cerrado $H = \{x \in V \times_k W \mid \dim_k H^1(U, \mathcal{L}'_x) \geq 1\}$ no contiene ningún punto de la forma (v, w_0). Por lo tanto, si $p_W : V \times_k W \longrightarrow W$ es la proyección, se cumple que $w_0 \notin p_W[H]$ (pues si hubiera un $x \in H$ tal que $p_W(x) = w_0$, entonces un punto cerrado de $\overline{\{x\}}$ sería de la forma (v, w_0), para cierto punto cerrado $v \in V$). Como V/k es completa, p_W es cerrada, luego existe un entorno abierto W' de w_0 tal que $V \times_k W'$ no corta a H. Equivalentemente: $\dim_k H^1(U, \mathcal{L}'_x) = 0$ para todo $x \in V \times_k W'$.

Como W' es denso en W, por el teorema 11.10 basta probar que $\mathcal{L}_w$ es trivial para todo $w \in W'$, pues entonces lo mismo es cierto para todo $w \in W$ y el teorema 11.8 implica que $\mathcal{L}$ es trivial. Esto nos permite sustituir W por W' y, en consecuencia, X por $U \times_k V \times_k W'$, etc. Notemos que el nuevo $\mathcal{L}'$ es la restricción del anterior y que $\mathcal{L}'_x$ no se ve alterado, por lo que ahora tenemos que $\dim_k H^1(U, \mathcal{L}'_x) = 0$ para todo $x \in V \times_k W$. También conviene observar que a partir de ahora la variedad W ya no es completa.

Como U/k sí que es completa, la proyección p_1 es un homomorfismo propio, luego el teorema 11.4 nos da que $\chi(\mathcal{L}'_{(v,w)})$ no depende de v ni de w (ya que $V \times W$ es irreducible, luego conexo). Así pues, usando 10.11, tenemos que

$$\dim H^0(U, \mathcal{L}'_{(v,w)}) = \chi(\mathcal{L}'_{(v,w)}) = \chi(\mathcal{L}'_{(v_0,w_0)}) = \chi(\mathcal{O}_U(D))$$

$$= \operatorname{grad} D + \dim H^0(U, \mathcal{O}_U) - \dim H^1(U, \mathcal{O}_U) = g + 1 - g = 1.$$

Esto nos permite aplicar el teorema 11.6 a la proyección $p_{23} : X \longrightarrow V \times_k W$, según el cual $p_{23*}\mathcal{L}'$ es un haz inversible en $V \times_k W$ y tenemos un isomorfismo

$$(p_{23*}\mathcal{L}')_{(v,w)} \otimes k(v, w) \cong \mathcal{L}'_{(v,w)}(X_{(v,w)}).$$

Sea $G \subset V \times_k W$ un abierto en el que $p_{23*}\mathcal{L}'$ sea trivial y consideremos un generador global $\sigma_G \in (p_{23*}\mathcal{L}')(G) = \mathcal{L}'(p_{23}^{-1}[G])$. Sea $\tilde{D}_G \in \operatorname{Div}_c(p_{23}^{-1}[G])$ el divisor de ceros de σ_G (definición 8.44). Notemos que si G' es otro abierto en las mismas condiciones de G y $G'' = G \cap G'$, entonces $\sigma_G|_{G''}$ y $\sigma_{G'}|_{G''}$ se diferencian en una unidad de $\mathcal{O}_{V \times_k W}(G'')$ y, vistos como elementos de $\mathcal{L}'(p_{23}^{-1}[G''])$, se diferencian en una unidad de $\mathcal{O}_X(p_{23}^{-1}[G''])$. Esto implica que $\tilde{D}_G$ y $\tilde{D}_{G'}$ coinciden en $p_{23}^{-1}[G'']$, luego los divisores $\tilde{D}_G$ se extienden a un único divisor entero $\tilde{D} \in \operatorname{Div}_c(X)$.

Fijemos un punto cerrado $(v, w) \in V \times_k W$ y consideremos la inmersión $i_{(v,w)} : X_{(v,w)} \longrightarrow X$. Vamos a demostrar que la imagen del punto genérico $\xi \in X_{(v,w)}$ no está en el soporte de $\widetilde{D}$. Sea $G \subset V \times_k W$ un entorno afín de (v, w) donde $p_{23*}(\mathcal{L}')$ sea libre y sea H un abierto afín tal que $i_{(v,w)}(\xi) \in H \subset U \times_k G$ y $\mathcal{L}'|_H$ sea libre. Si $\tau \in \mathcal{L}'(H)$ es un generador y $\sigma_G|_H = s\tau$, para cierto $s \in \mathcal{O}_X(H)$, entonces $\widetilde{D}$ está definido en H por s. Si $i_{(v,w)}(\xi) \in \operatorname{sop} \widetilde{D}$, entonces $s_{i_{(v,w)}(\xi)} \in \mathfrak{m}_{i_{(v,w)}(\xi)}$. Aplicando el homomorfismo natural de $\mathcal{O}_X(H)$-módulos $i^*_{(v,w)} : \mathcal{L}'(H) \longrightarrow (\mathcal{L}'_{(v,w)})(H_{(v,w)})$, vemos que

$$i^*_{(v,w)}(\sigma_G|_H)_\xi \in \mathfrak{m}_\xi \mathcal{L}'_{(v,w),\xi} = 0,$$

pues $\mathfrak{m}_\xi$ es el ideal nulo del cuerpo $\mathcal{O}_{X_{(v,w)},\xi} = K(X_{(v,w)})$. Esto implica que $i^*_{(v,w)}(\sigma_G|_H)$ es nulo en un abierto de $H_{(v,w)}$, lo que implica que $i^*_{(v,w)}(\sigma_G|_H) = 0$.

Si $G = \operatorname{Esp} B$, según la nota posterior al teorema 11.6, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}'(U \times_k G) \otimes_A k(v,w) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{L}'_{(v,w)}(X_{(v,w)}) \arrow[d] \\
\mathcal{L}'(H) \otimes_A k(v,w) \arrow[r] & \mathcal{L}'_{(v,w)}(H_{(v,w)})
\end{tikzcd}$$

Hemos probado que la imagen de $\sigma_G|_H \otimes 1$ por el isomorfismo de la fila inferior es nula, luego también $\sigma_G \otimes 1 = 0$, pero esto es imposible, porque σ_G es una base de $\mathcal{L}'(U \times_k G)$ como A-módulo (un A-módulo de rango 1), luego $\sigma_G \otimes 1$ debe ser una base del producto tensorial como k-espacio vectorial.

Así pues, tenemos definido el divisor $\widetilde{D}_{(v,w)} = i^*_{(v,w)}\widetilde{D} \in \operatorname{Div}_c(X_{(v,w)})$ según el teorema 8.32, de modo que $\mathcal{O}_{X_{(v,w)}}(\widetilde{D}_{(v,w)}) \cong i^*_{(v,w)}\mathcal{L}'$.

Recordemos ahora que $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} p_1^*\mathcal{O}_U(D)$. Como $\mathcal{L}_{v_0}$ es trivial, también lo es $\mathcal{L}_{(v_0,w)}$ para todo $w \in W$. Por otra parte, como $i_{(v_0,w)} \circ p_1$ es la identidad, resulta que $\mathcal{O}_{X_{(v_0,w)}}(\widetilde{D}_{(v_0,w)}) \cong \mathcal{O}_U(D)$ y, puesto que el divisor $\widetilde{D}_{(v_0,w)}$ es entero, hemos visto que $\widetilde{D}_{(v_0,w)} = D$, para todo punto cerrado $w \in W$. Igualmente, $\widetilde{D}_{(v,w_0)} = D$ para todo punto cerrado $v \in V$.

Como $\widetilde{D}$ es entero, el soporte de cada divisor $\widetilde{D}_{(v,w)}$ es la intersección con la fibra de (v,w) del soporte de $\widetilde{D}$. Así pues, si $u \in U$ es un punto cerrado distinto de todos los P_i que aparecen en el soporte de D, entonces $S = \operatorname{sop}\widetilde{D}_u$ es un cerrado en $V \times_k W$ que no corta a la fibra de w_0. Esto implica que la proyección T de S en W es un cerrado que no contiene a w_0. (Aquí usamos que V es completa.) Por consiguiente, $S \subset V \times_k T \subsetneq V \times_k W$, pero si S no es vacío, entonces tiene codimensión 1, luego ha de ser $S = V \times_k T$, pero esto contradice el hecho de que S no puede cortar a $\{v_0\} \times_k W$, luego ha de ser $S = \varnothing$.

Concluimos que el soporte de $\widetilde{D}$ ha de estar contenido en

$$\bigcup_{i=1}^{g} \{P_i\} \times_k V \times_k W$$

y, como sus componentes irreducibles han de tener todas codimensión 1, éstas han de ser algunos de los divisores primos $\{P_i\} \times_k V \times_k W$. Equivalentemente,

$$\widetilde{D} = \prod_{i=1}^{g} (\{P_i\} \times_k V \times_k W)^{n_i},$$

para ciertos $n_i \geq 0$. (Aquí usamos que el producto es una variedad regular y podemos identificar a $\widetilde{D}$ con un divisor de Weil.)

En el ejemplo 2 de la página 327 hemos visto que $\{P_i\} \times_k V \times_k W = p_1^* P_i$ y, usando de nuevo que $i_{(v_0,w_0)} \circ p_1$ es la identidad, vemos que

$$D = \widetilde{D}_{(v_0,w_0)} = \prod_{i=1}^{g} P_i^{n_i},$$

luego $n_i = 1$ para todo i. En definitiva, $\widetilde{D} = p_1^*D$, luego $\widetilde{D}_{(v,w)} = D$ para todo punto cerrado de $V \times_k W$, luego $\mathcal{L}'_{(v,w)} = \mathcal{O}_U(D)$, luego $\mathcal{L}_{(v,w)}$ es trivial. El teorema 11.8 implica entonces que $\mathcal{L}_w$ es trivial, y esto es lo que teníamos que probar. ■

11.3 Variedades abelianas

Ya estamos en condiciones de probar el teorema de Weil. En primer lugar veremos la definición de variedad abeliana y las propiedades básicas, luego extraeremos algunas consecuencias del teorema del cubo y finalmente demostraremos el teorema.

Definición 11.12 Un *grupo algebraico*[2] sobre un cuerpo k es una variedad V/k dotada de dos homomorfismos $m : V \times_k V \longrightarrow V$, $i : V \longrightarrow V$ tales que $m_{\bar{k}}$ se restringe a una operación de grupo sobre el conjunto de los puntos cerrados de $V_{\bar{k}}$, de modo que el elemento neutro es un punto $e \in V(k)$ y el homomorfismo $i_{\bar{k}}$ se restringe a la aplicación que a cada punto cerrado le asigna su inverso. Si además V es completa se dice que es una *variedad abeliana.*

Si V/k y W/k son grupos algebraicos, un *homomorfismo de grupos algebraicos* es un homomorfismo de esquemas $f : V \longrightarrow W$ (definido sobre k) tal que $f_{\bar{k}}$ se restringe a un homomorfismo de grupos $V_{\bar{k}}(\bar{k}) \longrightarrow W_{\bar{k}}(\bar{k})$.

Por ejemplo, toda curva elíptica E/k es una variedad abeliana.[3]

Enseguida veremos que las variedades abelianas son grupos abelianos[4] (conmutativos), pero antes observemos que, en un grupo algebraico, tanto $m_{\bar{k}}$ como $i_{\bar{k}}$ se restringen a aplicaciones sobre $V(k) \times V(k)$ y $V(k)$ (respectivamente) con valores en $V(k)$, luego $V(k)$ es un subgrupo de $V_{\bar{k}}(\bar{k})$.

Para cada punto $P \in V(k)$ definimos la *traslación* $\tau_P : V \longrightarrow V$ como la composición de los homomorfismos

$$V \longrightarrow V \times_k \{P\} \longrightarrow V \times_k V \xrightarrow{m} V,$$

de modo que $\tau_{P\bar{k}}$ se restringe a la traslación $Q \mapsto m_{\bar{k}}(Q, P)$ sobre $V_{\bar{k}}(\bar{k})$. Teniendo en cuenta que un homomorfismo $f : V \longrightarrow V$ está determinado por la restricción de $f_{\bar{k}}$ a $V_{\bar{k}}(\bar{k})$ (teorema 3.67), es inmediato que $\tau_{i(P)}$ es el inverso de τ_P, luego τ_P es un automorfismo de V.

Notemos que $V_{\bar{k}}$ es también un grupo algebraico, por lo que en realidad tenemos definido τ_P para todo $P \in V_{\bar{k}}(\bar{k})$ (pero si P no es racional entonces $\tau_P : V_{\bar{k}} \longrightarrow V_{\bar{k}}$ no es la extensión de un homomorfismo de V).

[2]Puede parecer redundante, pero indica que es un grupo definido sobre una variedad algebraica, igual que un grupo topológico es un grupo definido sobre un espacio topológico.

[3]Lo hemos probado en el caso en que el cuerpo k es perfecto, pero es cierto en general.

[4]Esto es un abuso de lenguaje que, no obstante, no se presta a confusión. En realidad una variedad abeliana V no es un grupo, sino que tiene asociado el grupo $V_{\bar{k}}(\bar{k})$.

En particular, podemos transformar cualquier punto cerrado de $V_{\bar{k}}(\bar{k})$ en otro cualquiera mediante una traslación, lo que implica que todo grupo algebraico es geométricamente regular (pues $V_{\bar{k}}$ tiene un conjunto abierto de puntos regulares, y cualquiera de sus puntos es imagen de uno cualquiera de ellos por un automorfismo).

La prueba de que toda variedad abeliana es un grupo abeliano se basa en el teorema siguiente:

Teorema 11.13 (Teorema de rigidez) *Sea $f : V \times_k W \longrightarrow U$ un homomorfismo entre variedades definido sobre k. Supongamos que V es completa y que existen puntos $u_0 \in U(k)$, $v_0 \in V(k)$, $w_0 \in W(k)$ tales que*

$$f[V \times_k \{w_0\}] = \{u_0\} = f[\{v_0\} \times_k W].$$

Entonces f es constante.

DEMOSTRACIÓN: Sea U_0 un entorno afín de u_0. Como V es completa, la proyección $q : V \times_k W \longrightarrow W$ es cerrada, luego $Z = q[f^{-1}[U \setminus U_0]]$ es cerrado en W. Notemos que un punto cerrado $w \in W$ cumple $w \in W \setminus Z$ si y sólo si $f[V \times_k \{w\}] \subset U_0$. En particular $w_0 \in W \setminus Z$, luego $W \setminus Z$ es un abierto (denso) en W.

Si $w \in W \setminus Z$ es un punto cerrado, tenemos un homomorfismo de variedades $f|_{V \times_k \{w\}} : V \times_k \{w\} \longrightarrow U_0$, donde $V \times_k \{w\}$ es completa y U_0 es afín. Por el teorema 4.27 concluimos que es constante. Más concretamente,

$$f[V \times_k \{w\}] = \{f(v_0, w)\} = \{u_0\},$$

para todo $w \in W \setminus Z$, luego f es constante en $V \times_k (W \setminus Z)$, que es denso en $V \times_k W$, luego f es constante en todo el producto. ■

De aquí deducimos:

Teorema 11.14 *Si A/k y B/k son variedades abelianas y $f : A \longrightarrow B$ es un homomorfismo de esquemas definido sobre k, entonces f es un homomorfismo de variedades abelianas si y sólo si $f(O_A) = O_B$ (donde O_A y O_B son los elementos neutros de cada variedad).*

DEMOSTRACIÓN: Definimos $\phi : A \times_k A \longrightarrow B$ como la composición

$$A \times_k A \xrightarrow{\Delta} (A \times_k A) \times_k (A \times_k A) \xrightarrow{m_A \times (f \times f)} A \times_k (B \times_k B)$$
$$\xrightarrow{(f \circ i_B) \times m_B} B \times_k B \xrightarrow{m_B} B.$$

En suma, para cada par de puntos cerrados $a, b \in A_{\bar{k}}$, se cumple que $\phi_{\bar{k}}(a, b)$ es lo que con la notación usual (aditiva) en teoría de grupos se escribiría

$$-f_{\bar{k}}(a + b) + f_{\bar{k}}(a) + f_{\bar{k}}(b).$$

En particular, vemos que $\phi_{\bar{k}}[A \times_k \{O_A\}] = \{O_B\} = \phi_{\bar{k}}[\{O_A\} \times_k A]$, luego por el teorema anterior $\phi_{\bar{k}}$ es nula, lo que equivale a que $f_{\bar{k}}$ es un homomorfismo de grupos. ■

Teorema 11.15 *Si A/k es una variedad abeliana, entonces $A_{\bar{k}}(\bar{k})$ es un grupo abeliano.*

Demostración: Por el teorema anterior, $i_{\bar{k}} : A_{\bar{k}}(\bar{k}) \longrightarrow A_{\bar{k}}(\bar{k})$ es un homomorfismo de grupos, y esto implica inmediatamente que el grupo es abeliano. (Un grupo es abeliano si y sólo si $g \mapsto g^{-1}$ es un homomorfismo.) ■

Ahora vamos a extraer consecuencias del teorema del cubo:

Teorema 11.16 *Sea A/k una variedad abeliana, $p_i : A \times_k A \times_k A \longrightarrow A$ la proyección en el factor i-ésimo, $p_{ij} = p_i + p_j$, $p_{ijk} = p_i + p_j + p_k$. Si $\mathcal{L}$ es un haz inversible en A, el haz*

$$p_{123}^*\mathcal{L} \otimes p_{12}^*\mathcal{L}^* \otimes p_{13}^*\mathcal{L}^* \otimes p_{23}^*\mathcal{L}^* \otimes p_1^*\mathcal{L} \otimes p_2^*\mathcal{L} \otimes p_3^*\mathcal{L}$$

es trivial.

Demostración: La restricción de este haz a $\{O\} \times_k A \times_k A = A \times_k A$ es

$$m^*\mathcal{L} \otimes p^*\mathcal{L}^* \otimes m^*\mathcal{L}^* \otimes q^*\mathcal{L}^* \otimes \mathcal{O}_{A\times_k A} \otimes p^*\mathcal{L} \otimes q^*\mathcal{L} = \mathcal{O}_{A\times_k A},$$

donde p y q son las proyecciones de $A \times_k A$. Para restringir $p_1^*\mathcal{L}$ hemos usado que, en general, si $f : X \longrightarrow Y$ es un homomorfismo constante entre dos esquemas y $\mathcal{L}$ es un haz inversible en Y, entonces $f^*\mathcal{L}$ es trivial. En efecto, basta tomar un abierto afín $U \subset Y$ que contenga a $f[X]$, de modo que $U = \operatorname{Esp} A$ y $\mathcal{L}|_U \cong A$. Entonces, para cada abierto afín $V \subset Y$, tenemos que

$$(f^*\mathcal{L})(V) = \mathcal{L}(U) \otimes_A \mathcal{O}_X(V) \cong A \otimes_A \mathcal{O}_X(V) \cong \mathcal{O}_X(V),$$

y los isomorfismos son compatibles entre sí, por lo que $f^*\mathcal{L} \cong \mathcal{O}_X$.

Del mismo modo se comprueba que el haz del enunciado tiene restricciones triviales a $A \times_k \{O\} \times_k A$ y a $A \times_k A \times_k \{O\}$. El teorema del cubo implica que es trivial. ■

Con esto llegamos a la aplicación del teorema del cubo que realmente necesitamos:

Teorema 11.17 (Teorema del cuadrado) *Sea A/k una variedad abeliana, sea $\mathcal{L}$ un haz inversible en A y sean a, $b \in A(k)$. Entonces,*

$$(\tau_{a+b}^*\mathcal{L}) \otimes \mathcal{L} \cong (\tau_a^*\mathcal{L}) \otimes (\tau_b^*\mathcal{L}).$$

Demostración: Consideremos la inmersión cerrada natural

$$\phi : A \longrightarrow A \times_k \{a\} \times_k \{b\} \longrightarrow A \times_k A \times_k A$$

y apliquemos ϕ^* al haz (trivial) del teorema anterior. Obtenemos el haz trivial

$$\tau_{a+b}^*\mathcal{L} \otimes \tau_a^*\mathcal{L}^* \otimes \tau_b^*\mathcal{L}^* \otimes \mathcal{O}_A \otimes \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_A \otimes \mathcal{O}_A.$$

Despejando llegamos al isomorfismo del enunciado. ■

La fórmula del teorema anterior adquiere un aspecto más simétrico si la multiplicamos por $\mathcal{L}^{*2}$, con lo que se convierte en

$$(\tau_{a+b}^*\mathcal{L}) \otimes \mathcal{L}^* \cong ((\tau_a^*\mathcal{L}) \otimes \mathcal{L}^*) \otimes ((\tau_b^*\mathcal{L}) \otimes \mathcal{L}^*).$$

Esto puede expresarse diciendo que la aplicación $\phi_{\mathcal{L}} : A(k) \longrightarrow \mathrm{Pic}(A)$ dada por $a \mapsto (\tau_a^*\mathcal{L}) \otimes \mathcal{L}^*$ es un homomorfismo de grupos.

En particular, si $a_1 + \cdots + a_n = O$ en $A(k)$, aplicando $\phi_{\mathcal{L}}$ obtenemos que

$$\tau_{a_1}^*\mathcal{L} \otimes \cdots \otimes \tau_{a_n}^*\mathcal{L} \cong \mathcal{L}^n.$$

Vamos a expresar estos isomorfismos en términos de divisores. Para cada $D \in \mathrm{Div}_c(A)$ y cada $a \in A(k)$, definimos $D_a = \tau_a^* D$ y representaremos por $\sim$ la equivalencia lineal de divisores. El teorema del cuadrado afirma que

$$D_{a+b}D \sim D_a D_b,$$

mientras que el isomorfismo anterior equivale a que

$$D_{a_1} \cdots D_{a_n} \sim D^n,$$

para $a_1, \ldots, a_n \in A(k)$ tales que $a_1 + \cdots + a_n = O$.

Teorema 11.18 *Toda variedad abeliana es proyectiva.*

DEMOSTRACIÓN: Tomemos una variedad abeliana A/k. En primer lugar vamos a suponer que el cuerpo k es algebraicamente cerrado, lo que nos permitirá aplicar el teorema 8.50. Empezamos probando que existen divisores primos $\{Z_i\}_{i=1}^n$ que cumplen las dos propiedades siguientes:

a) $\bigcap Z_i = \{O\}$,

b) $\bigcap T_O Z_i = \{0\}$.

En efecto, dado un punto cerrado $P \in A$, $P \neq O$, veamos en primer lugar que existe un abierto afín $U \subset A$ tal que $O, P \in U$. Basta tomar un entorno afín V de O y un punto $Q \in V \cap (V + P)$. El abierto $U = V + P - Q$ cumple lo pedido, pues $Q \in V + P$ implica que $O \in U$, mientras que $Q + P \in V + P$ implica que $P \in U$.

Consideremos una inmersión cerrada $U \longrightarrow A_k^m$. Claramente, existe un hiperplano $H \subset A_k^m$ que pasa por O y no por P. Llamamos Z_1 a la clausura de $H \cap U$ en A, que es ciertamente un divisor primo de A que cumple que $O \in Z_1$, $P \notin Z_1$.

Si existe un punto cerrado $Q \in Z_1$, $Q \neq O$, construimos de igual modo un divisor Z_2, de modo que $O \in Z_1 \cap Z_2 \subsetneq Z_1$. Como la variedad A es noetheriana, tras un número finito de pasos hemos de llegar a una sucesión $Z_1, \ldots, Z_r$ que cumple la propiedad a).

Supongamos ahora que existe un vector no nulo $t \in \bigcap T_O Z_i \subset T_O A$. Tomamos entonces un entorno afín U de O y consideramos una inmersión cerrada

$U \longrightarrow A_k^m$. Por definición, t es una aplicación lineal $t : \mathfrak{m}_O/\mathfrak{m}_O^2 \longrightarrow k$ y, por otra parte, si llamamos P a la imagen de O en A_k^m, tenemos un epimorfismo de k-espacios vectoriales $\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2 \longrightarrow \mathfrak{m}_O/\mathfrak{m}_O^2$. Como t no es nula, existe una forma lineal h, que define un hiperplano $H \subset A_k^m$, de modo que t no se anula en la imagen de h, lo que se traduce en que $t \notin T_O(H)$. Por consiguiente, llamando Z_{r+1} a la clausura de $U \cap H$ en A, tenemos que $t \notin T_O Z_{r+1}$. Como $O \in Z_{r+1}$, no deja de cumplirse a) y, tras un número finito de pasos, obtenemos una sucesión que cumple simultáneamente, a) y b).

Vamos a probar que el divisor $D = Z_1 \cdots Z_n$ es amplio. Más concretamente, veremos que D^3 es muy amplio, para lo cual comprobaremos que el sistema lineal $\mathfrak{d} = |D^3|$ cumple las condiciones del teorema 8.50.

Nos basaremos en la siguiente observación general: Si $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots b_n$ es una familia arbitraria de puntos cerrados de A, la observación previa al teorema muestra que

$$\prod_i Z_{ia_i} Z_{ib_i} Z_{i,-a_i-b_i} \sim \prod_i Z_i^3 = D^3,$$

luego

$$\prod_i Z_{ia_i} Z_{ib_i} Z_{i,-a_i-b_i} \in \mathfrak{d}.$$

Sean P, $Q \in A$ dos puntos cerrados distintos. Por a) existe un i tal que Z_i no contiene a $Q - P$. Pongamos que $Q - P \notin Z_1$. Llamemos $a_1 = -P$, de modo que $Z_{1a_1} = \tau_{-P}^*(Z_1) = Z_1 + P$ contiene a P, pero no a Q. Entonces

$$\{b_1 \in A(k) \mid Q \in Z_{1b_1}\} \subset Z_1 - Q,$$

$$\{b_1 \in A(k) \mid Q \in Z_{1,-a_1-b_1}\} \subset Z_1 + a_1 - Q,$$

luego existe un $b_1 \in A(k)$ que no está contenido en ninguno de los dos conjuntos de la izquierda, es decir, $Q \notin Z_{1b_1}$, $Q \notin Z_{1,-a_1-b_1}$.

Para cada $i \geq 2$ tomamos a_i tal que $Q \notin Z_{ia_i}$ y elegimos b_i como en el caso $i = 1$ de modo que también $Q \notin Z_{i,b_i}$, $Q \notin Z_{i,-a_i-b_i}$. De este modo, P está en el soporte de $\prod_i Z_{ia_i} Z_{ib_i} Z_{i,-a_i-b_i} \in \mathfrak{d}$ y Q no lo está.

Con esto hemos probado que $\mathfrak{d}$ no tiene puntos base y cumple la propiedad a) de 8.50. La propiedad b) se demuestra similarmente: si $t \in T_P A$ es un vector tangente no nulo, entonces el automorfismo τ_P hace corresponder a t con un vector no nulo de $T_O A$, que no pertenecerá a un cierto $T_O Z_i$ (y podemos suponer $i = 1$), con lo que, llamando $a_1 = -P$, tenemos que $t \notin T_P Z_{1a_1}$. Ahora elegimos como antes puntos b_1 y a_i, b_i para $i \geq 2$ de modo que Q no pertenezca al soporte de Z_{1b_1}, $Z_{1,-a_1-b_1}$,Z_{ia_i}, Z_{ib_i}, $Z_{i,-a_1-b_1}$. Esto hace que el espacio tangente en P del producto de todos estos divisores coincida con el de Z_{1a_1}, por lo que no contiene a t, y se cumple la propiedad b).

Con esto tenemos probado el teorema cuando el cuerpo k es algebraicamente cerrado. En general, el argumento anterior se aplica a $A_{\bar{k}}$, luego en esta extensión tenemos unos divisores enteros Z_i que cumplen las propiedades a) y b). Ahora observamos que estas propiedades se siguen cumpliendo si añadimos a la sucesión cualquier divisor entero que tenga a $O_{\bar{k}}$ en su soporte (o si repetimos alguno de sus términos), así como que la prueba de que el divisor D es amplio sólo se basa en estas propiedades. Por consiguiente, no sólo es amplio el divisor D, sino también cualquier otro divisor entero que resulte de añadirle factores primos que tengan a $O_{\bar{k}}$ en su soporte.

Observemos ahora que si $\pi : A_{\bar{k}} \longrightarrow A$ es la proyección y ξ_i es el punto genérico de Z_i, entonces, $\pi(\xi_i)$ tiene codimensión 1. En efecto, por 8.36 sabemos que la codimensión es ≤ 1, pero no puede ser 0, ya que entonces $\pi(\xi_i)$ sería el punto genérico $\eta \in A$, y vamos a ver que su fibra es un punto: Tomamos un abierto afín $U = \operatorname{Esp} S$ en A, de modo que $\pi^{-1}[U] = \operatorname{Esp}(S \otimes_k \bar{k})$, y la fibra de η es $\operatorname{Esp}(\bar{k} \otimes_k k(A)) = \operatorname{Esp}(\bar{k}(A_{\bar{k}}))$ (por el teorema 3.62). Así pues, la fibra de η consta de un único punto, que ha de ser el punto genérico de $A_{\bar{k}}$.

Sea Z_i' la clausura en A de $\pi(\xi_i)$, que es un divisor primo de A. El teorema 8.38 nos da que $\pi^* Z_i'$ es el producto de las clausuras de las antiimágenes (de codimensión 1) de $\pi(\xi_i)$ (con ciertos exponentes). Si W es una de estas clausuras, entonces π se restringe a una aplicación suprayectiva $W \longrightarrow Z_i'$, luego $O_{\bar{k}} \in W$ (ya que $O_{\bar{k}}$ es la única antiimagen de $O = \pi(O_{\bar{k}}) \in \pi[Z_i] = Z_i'$).

Así pues, el divisor $D' = \pi^* \big(\prod\limits_i Z_i'\big)$ es un múltiplo de D y todos los factores añadidos contienen a $O_{\bar{k}}$. Según hemos observado antes, esto implica que D' es amplio y por 6.18 concluimos que la variedad A tiene también un haz amplio, luego es proyectiva. ■

Apéndice A

Los teoremas de Zariski

En este apéndice exponemos algunos resultados técnicos sobre homomorfismos de esquemas debidos esencialmente a Zariski que no nos han sido necesarios en ningún momento, pero que son de cierta utilidad. Previamente necesitamos estudiar una nueva clase de homomorfismos de esquemas:

A.1 Homomorfismos afines

Definición A.1 Un homomorfismo de esquemas $f : X \longrightarrow Y$ es *afín* si Y admite un cubrimiento por abiertos afines Y_i tales que $f^{-1}[Y_i]$ es afín. Diremos que un esquema X definido sobre un esquema S es *afín* si lo es su homomorfismo estructural.

En particular, si f cumple que $f^{-1}[U]$ es afín para todo abierto afín de Y, entonces es un homomorfismo afín. Luego veremos que esta propiedad más fuerte es en realidad equivalente a la definición que acabamos de dar.

Una observación elemental es que los homomorfismos afines son separados, ya que la separación es local en la base y los homomorfismos entre esquemas afines son separados.

Hay que tener presente que si X es un esquema definido sobre S y es afín en el sentido usual, no tiene por qué ser afín sobre S. No obstante, el teorema 4.14 nos garantiza que lo es cuando S es separado.

El teorema siguiente sería obvio si ya hubiéramos probado que las antiimágenes de abiertos afines por homomorfismos afines son abiertos afines.

Teorema A.2 *Si $f : X \longrightarrow Y$ es un homomorfismo afín y $U \subset Y$ es un abierto, entonces la restricción $f^{-1}[U] \longrightarrow U$ es afín.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\{Y_i\}$ un cubrimiento afín de Y tal que los abiertos $X_i = f^{-1}[Y_i]$ sean afines. Podemos cubrir cada abierto $Y_i \cap U$ por abiertos principales en Y_i, y bastará probar que sus antiimágenes en el correspondiente

X_i son afines. Esto reduce el problema al caso en que X e Y son afines y U es un abierto principal. Ahora bien, la antiimagen de un abierto principal por un homomorfismo entre esquemas afines es un abierto principal, luego es afín. ■

Observemos que si, en el teorema anterior, U es afín, entonces es cuasicompacto, luego el cubrimiento de U puede reducirse a un cubrimiento finito, con lo que $f^{-1}[U]$ es unión de un número finito de abiertos afines, luego es cuasicompacto. Así pues, hemos probado que los homomorfismos afines son cuasicompactos. (Esto será trivial cuando hayamos probado que las antiimágenes de los abiertos afines son, de hecho, afines.)

En lo sucesivo fijamos un esquema S y vamos a considerar esquemas definidos sobre S. Para cada esquema X/S definimos $\mathcal{A}(X) = f_*(\mathcal{O}_X)$, que es claramente una $\mathcal{O}_S$-álgebra. Por la observación tras el teorema anterior, si X es afín sobre S, el teorema 5.9 implica que $\mathcal{A}(X)$ es cuasicoherente.

Es claro que un homomorfismo $f : X \longrightarrow Y$ definido sobre S induce un homomorfismo de $\mathcal{O}_S$-álgebras $\mathcal{A}(f) : \mathcal{A}(Y) \longrightarrow \mathcal{A}(X)$, de modo que $\mathcal{A}$ resulta ser un funtor contravariante de la categoría de los esquemas definidos sobre S en la categoría de las $\mathcal{O}_S$-álgebras.

Teorema A.3 *Si X es un esquema afín sobre S, para todo esquema Y definido sobre S, la correspondencia $f \mapsto \mathcal{A}(f)$ biyecta los homomorfismos de esquemas $f : Y \longrightarrow X$ definidos sobre S con los homomorfismos $\mathcal{A}(X) \longrightarrow \mathcal{A}(Y)$ de $\mathcal{O}_S$-álgebras.*

DEMOSTRACIÓN: Sean $\pi : X \longrightarrow S$, $\rho : Y \longrightarrow S$ los homomorfismos estructurales. Supongamos en primer lugar que $S = \operatorname{Esp} A$ y $X = \operatorname{Esp} B$ son afines y consideremos un homomorfismo $\omega : \mathcal{A}(X) \longrightarrow \mathcal{A}(Y)$. Para cada abierto $U \subset S$, tenemos un homomorfismo $\omega_U : \mathcal{O}_X(\pi^{-1}[U]) \longrightarrow \mathcal{O}_Y(\rho^{-1}[U])$. En particular, $\omega_S : \mathcal{O}_X(X) \longrightarrow \mathcal{O}_Y(Y)$ y por 2.11 sabemos que existe un único homomorfismo $f : Y \longrightarrow X$ tal que $\omega_S = f_X^\#$. Basta probar que $\omega = \mathcal{A}(f)$. Para ello basta ver que ambos homomorfismos coinciden sobre los abiertos principales de S. Tomemos, pues, un abierto principal $U = D(a) \subset S$, para cierto $a \in A$. Entonces $\pi^{-1}[U] = D(b)$, para cierto $b \in B$. Tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\omega_S"] \arrow[d] & \mathcal{O}_Y(Y) \arrow[d] \\ B_b \arrow[r, "\omega_U"'] & \mathcal{O}_Y(\rho^{-1}[U]) \end{tikzcd}$$

y otro análogo si cambiamos ω_U por $f_U^\#$, luego $\omega_U = f_U^\#$.

Consideramos ahora el caso general. Sea $\{S_i\}_i$ un cubrimiento de S por abiertos afines tales que los abiertos $\pi^{-1}[S_i]$ sean también afines. Entonces, cada homomorfismo $\omega : \mathcal{A}(X) \longrightarrow \mathcal{A}(Y)$ se restringe a una familia de homomorfismos $\omega_i : \mathcal{A}(\pi^{-1}[S_i]) \longrightarrow \mathcal{A}(\rho^{-1}[S_i])$, los cuales se corresponden, por la parte ya probada, con homomorfismos $f_i : \rho^{-1}[S_i] \longrightarrow \pi^{-1}[S_i]$.

Basta probar que estos homomorfismos se extienden a un mismo homomorfismo $f : Y \longrightarrow X$, pues claramente cumplirá que $\mathcal{A}(f) = \omega$ y la unicidad de los f_i implica la de f. Para ello tomamos un abierto afín $U \subset S_i \cap S_j$ y observamos que las restricciones de f_i y f_j a $\rho^{-1}[U]$ corresponden ambas a la restricción de ω a $\mathcal{A}(\pi^{-1}[U])$, luego son iguales por la unicidad del caso afín. ■

El teorema siguiente es ahora inmediato:

Teorema A.4 *Si X, Y son esquemas afines sobre S, entonces un homomorfismo $f : Y \longrightarrow X$ definido sobre S es un isomorfismo de esquemas si y sólo si $\mathcal{A}(f) : \mathcal{A}(X) \longrightarrow \mathcal{A}(Y)$ es un isomorfismo de $\mathcal{O}_S$-álgebras.*

Teorema A.5 *Dado un esquema S, para cada $\mathcal{O}_S$-álgebra cuasicoherente $\mathcal{B}$, existe un esquema X, afín sobre S, tal que $\mathcal{A}(X) = \mathcal{B}$. Además X es único salvo isomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN: La unicidad es consecuencia del teorema anterior. Para probar la existencia, si $U \subset S$ es un abierto afín, llamamos $X_U = \operatorname{Esp}\mathcal{B}(U)$. Como $\mathcal{B}(U)$ es una $\mathcal{O}_S(U)$-álgebra, el homomorfismo natural $\mathcal{O}_S(U) \longrightarrow \mathcal{B}(U)$ induce un homomorfismo $\pi_U : X_U \longrightarrow U$ que nos permite considerar a X_U como esquema definido sobre U. El hecho de que $\mathcal{B}$ sea cuasicoherente implica que $\mathcal{A}(X_U)$ se identifica de forma canónica con $\mathcal{B}|_U$.

Consideremos otro abierto afín $V \subset S$ y sea $X_{U,V} = \pi_U^{-1}[U \cap V]$. Por el teorema A.2 tenemos que $X_{U,V}$ y $X_{V,U}$ son ambos afines sobre $U \cap V$, y las álgebras $\mathcal{A}(X_{U,V})$ y $\mathcal{A}(X_{V,U})$ se identifican canónicamente con $\mathcal{B}|_{U\cap V}$, luego existe un isomorfismo canónico $\phi_{U,V} : X_{U,V} \longrightarrow X_{V,U}$. Es fácil ver que podemos aplicar el teorema 3.40, que nos da un esquema X definido sobre S que contiene a los X_U como subesquemas abiertos de tal modo que el homomorfismo estructural $\pi : X \longrightarrow S$ extiende a los homomorfismos π_U. Es claro entonces que X cumple lo pedido. ■

Notemos que el homomorfismo $\pi : X \longrightarrow S$ construido en la prueba del teorema anterior cumple que $\pi^{-1}[U]$ es afín, para todo abierto afín $U \subset S$. Ahora bien, dado cualquier homomorfismo afín $f : Y \longrightarrow S$, podemos considerar el homomorfismo afín $\pi : X \longrightarrow S$ dado por el teorema anterior para el álgebra $\mathcal{B} = \mathcal{A}(X)$, y la unicidad implica que X es isomorfo a Y (sobre S), luego f cumple también que las antiimágenes de los abiertos afines son afines. Con esto hemos demostrado lo que ya habíamos anunciado:

Teorema A.6 *Un homomorfismo de esquemas $f : X \longrightarrow Y$ es afín si y sólo si $f^{-1}[U]$ es afín para todo abierto afín $U \subset Y$.*

Ahora es inmediato que si S es un esquema afín, entonces un esquema X definido sobre S es afín sobre S si y sólo si es afín. También son triviales las propiedades siguientes:

Teorema A.7 *Las inmersiones cerradas son afines, la composición de homomorfismos afines es afín, los homomorfismos afines son estables por cambio de base.*

Demostración: La primera propiedad es trivial, la segunda es consecuencia del teorema anterior. Para probar la tercera tomamos un homomorfismo afín $f : X \longrightarrow Y$ y un homomorfismo arbitrario $g : Z \longrightarrow Y$. Hemos de probar que $\pi : X \times_Y Z \longrightarrow Z$ es afín.

Cubrimos Y por abiertos afines U, y expresamos cada abierto $g^{-1}[U]$ como unión de abiertos afines V. Basta tener presente que

$$\pi^{-1}[V] = X \times_Y V = f^{-1}[U] \times_U V$$

es afín. ■

Algunas propiedades de un homomorfismo afín $f : X \longrightarrow S$ pueden expresarse de forma natural en términos de la $\mathcal{O}_S$-álgebra $\mathcal{A}(X)$. Por ejemplo, es obvio que f es de tipo finito si y sólo si $\mathcal{A}(X)$ es de tipo finito sobre $\mathcal{O}_S$, es decir, si para cada abierto afín $U \subset X$ se cumple que $\mathcal{A}(X)(U)$ es una $\mathcal{O}_S(U)$-álgebra finitamente generada. Igualmente podemos cambiar "finitamente generado" por "finito". Notemos que decir que $\mathcal{A}(X)$ es una $\mathcal{O}_S$-álgebra finita (en el sentido obvio) equivale a decir que es finitamente generada como $\mathcal{O}_S$-módulo y, si S es localmente noetheriano, esto equivale a que $\mathcal{A}(X)$ sea coherente. Así pues:

Teorema A.8 *Sea S un esquema localmente noetheriano. Un homomorfismo afín $f : X \longrightarrow S$ es finito si y sólo si la $\mathcal{O}_S$-álgebra $\mathcal{A}(X)$ es coherente.*

Dejamos al lector la demostración de las propiedades elementales de los homomorfismos afines: las inmersiones cerradas son afines, la composición de homomorfismos afines es afín y los homomorfismos afines se conservan por cambios de base. Todas ellas son sencillas.

El teorema siguiente es una consecuencia inmediata de 6.17 y 6.42

Teorema A.9 *Si $f : X \longrightarrow Y$ es un homomorfismo afín y $\mathcal{M}$ es un haz cuasicoherente en X, entonces $D^n f_*(\mathcal{M}) = 0$ para todo $n \geq 1$.*

A su vez, de aquí deducimos una generalización de 6.20:

Teorema A.10 *Si $f : X \longrightarrow Y$ es un homomorfismo afín y $\mathcal{M}$ es un haz cuasicoherente en X, entonces $H^i(X, \mathcal{M}) \cong H^i(Y, f_*\mathcal{M})$, para todo $i \geq 0$.*

Demostración: La prueba es la misma que la de 6.20, salvo que en lugar de usar que f_* es exacto, usamos el teorema anterior, que nos garantiza que al aplicar f_* a una resolución diseminada de $\mathcal{M}$ obtenemos una sucesión exacta (ya que sus grupos de cohomología han de ser los grupos $D^n f_*(\mathcal{M}) = 0$). ■

A.2 El teorema de las funciones formales

Demostramos ahora un teorema de Grothendieck (aunque la prueba es de Serre) basado en ideas que estaban implícitas en las demostraciones de Zariski de los teoremas que veremos en las secciones siguientes.

Sea A un anillo noetheriano y X/A un esquema propio y $\mathcal{F}$ un haz coherente en X. El teorema de finitud 6.21 afirma que los grupos de cohomología $H^q(X,\mathcal{F})$ son A-módulos finitamente generados. Explícitamente, si $a \in A$, el homomorfismo $H^q(X,\mathcal{F}) \longrightarrow H^q(X,\mathcal{F})$ dado por la multiplicación por a es el homomorfismo inducido por el homomorfismo de haces $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ dado también por la multiplicación por a.

Si I es un ideal de A, podemos considerar la compleción de $H^q(X,\mathcal{F})$ respecto de la topología I-ádica, que representaremos por $\hat{H}^q(X,\mathcal{F})$. Según las observaciones tras la definición [4.4], podemos identificar esta compleción con el límite inverso

$$\hat{H}^q(X,\mathcal{F}) = \varprojlim_n \big(H^q(X,\mathcal{F})/I^n H^q(X,\mathcal{F})\big)$$

y, por [4.17], tenemos también que $\hat{H}^q(X,\mathcal{F}) \cong H^q(X,\mathcal{F}) \otimes_A \hat{A}$, donde $\hat{A}$ es la compleción de A.

Consideremos ahora los grupos de cohomología $H^q(X,\mathcal{F}/I^n\mathcal{F})$. La multiplicación por un elemento de I^n en $\mathcal{F}/I^n\mathcal{F}$ es la aplicación nula, luego también lo es en $H^q(X,\mathcal{F}/I^n\mathcal{F})$, es decir, este A-módulo es anulado por I^n, luego el homomorfismo natural $H^q(X,\mathcal{F}) \longrightarrow H^q(X,\mathcal{F}/I^n\mathcal{F})$ induce un homomorfismo

$$H^q(X,\mathcal{F})/I^n H^q(X,\mathcal{F}) \longrightarrow H^q(X,\mathcal{F}/I^n\mathcal{F}).$$

Estos homomorfismos son compatibles con la estructura de límite inverso de ambos miembros, luego inducen un homomorfismo

$$\phi_q : \hat{H}^q(X,\mathcal{F}) \longrightarrow \varprojlim_n H^q(X,\mathcal{F}/I^n\mathcal{F}).$$

Vamos a probar que es un isomorfismo. Para ello partimos de la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow I^n\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F} \xrightarrow{\beta} \mathcal{F}/I^n\mathcal{F} \longrightarrow 0,$$

que da lugar a la sucesión exacta de cohomología

$$H^q(X,I^n\mathcal{F}) \xrightarrow{\alpha_q} H^q(X,\mathcal{F}) \xrightarrow{\beta_q} H^q(X,\mathcal{F}/I^n\mathcal{F}) \xrightarrow{\delta_q} H^{q+1}(X,I^n\mathcal{F}).$$

De aquí deducimos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow R_n \longrightarrow H^q(X,\mathcal{F}) \longrightarrow H^q(X,\mathcal{F}/I^n\mathcal{F}) \longrightarrow Q_n \longrightarrow 0,$$

donde $R_n = \operatorname{Im}\alpha_q$, $Q_n = \operatorname{Im}\delta_q = \operatorname{N}\alpha_{q+1}$. A su vez, podemos formar la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow H^q(X,\mathcal{F})/R_n \longrightarrow H^q(X,\mathcal{F}/I^n\mathcal{F}) \longrightarrow Q_n \longrightarrow 0.$$

Observemos que $R_n \supset R_{n+1}$ y que el homomorfismo natural

$$H^q(X,I^{n+1}\mathcal{F}) \longrightarrow H^q(X,I^n\mathcal{F})$$

se restringe a un homomorfismo $Q_{n+1} \longrightarrow Q_n$, luego las sucesión exactas anteriores (para cada n) determinan una sucesión exacta de sistemas inversos. Como los límites inversos son exactos por la izquierda (teorema [4.5]), tenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \varprojlim_n H^q(X,\mathcal{F})/R_n \longrightarrow \varprojlim_n H^q(X,\mathcal{F}/I^n\mathcal{F}) \longrightarrow \varprojlim_n Q_n.$$

Vamos a probar que los módulos R_n forman una filtración I-ádica estable en $H^q(X,\mathcal{F})$, con lo que el teorema [4.10] nos da un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim_n H^q(X,\mathcal{F})/I^nH^q(X,\mathcal{F}) \arrow[r, "\phi_q"] \arrow[d] & \varprojlim_n H^q(X,\mathcal{F}/I^n\mathcal{F}) \\
\varprojlim_n H^q(X,\mathcal{F})/R_n \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

en el que la flecha vertical es un isomorfismo. Con esto tendremos ya la inyectividad de ϕ_q, y sólo faltará probar que el límite inverso de los módulos Q_n es nulo. (De hecho, vamos a ver que $Q_n = 0$ para todo n suficientemente grande.)

En primer lugar observamos que, para cada $a \in I^m$, tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
I^n\mathcal{F} \arrow[r, "a"] \arrow[d] & I^{n+m}\mathcal{F} \arrow[d] \\
\mathcal{F} \arrow[r, "a"'] & \mathcal{F}
\end{tikzcd}$$

donde las flechas horizontales son la multiplicación por a. De aquí obtenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
H^q(X,I^n\mathcal{F}) \arrow[r, "a"] \arrow[d, "\alpha_q^n"'] & H^q(X,I^{n+1}\mathcal{F}) \arrow[d, "\alpha_q^{n+1}"] \\
H^q(X,\mathcal{F}) \arrow[r, "a"'] & H^q(X,\mathcal{F})
\end{tikzcd}$$

en el que las flechas horizontales son también la multiplicación por a. De aquí se desprende que $I^mR_n \subset R_{n+m}$, luego la filtración $\{R_n\}$ es I-ádica.

Llamemos $A^* = \bigoplus\limits_{n\geq 0} I^n$, $R^* = \bigoplus\limits_{n\geq 0} R_n$. Entonces A^* es un anillo noetheriano (por [4.12]) y R^* tiene una estructura natural de A^*-módulo. La discusión previa al teorema [4.13] muestra que la filtración $\{R_n\}$ es estable si y sólo si R^* es un A^*-módulo finitamente generado. Ahora bien, los homomorfismos α_q^n determinan un epimorfismo

$$E = \bigoplus_{n\geq 0} H^q(X,I^n\mathcal{F}) \longrightarrow R^*.$$

Observemos que E tiene una estructura natural de A^*-módulo con la cual el epimorfismo anterior es un epimorfismo de A^*-módulos. En efecto, basta tomar como multiplicación por un elemento de I^m al homomorfismo inducido por la multiplicación correspondiente $I^n\mathcal{F} \longrightarrow I^{n+m}\mathcal{F}$. Por consiguiente, la finitud de R^* es una consecuencia inmediata del teorema siguiente:

Teorema A.11 *Sea A un anillo noetheriano, sea X/A un esquema propio, sea $\mathcal{F}$ un haz coherente en X, sea I un ideal de A y sea $A^* = \bigoplus\limits_{n\geq 0} I^n$. Entonces*

$$E = \bigoplus_{n\geq 0} H^q(X, I^n\mathcal{F})$$

es un A^*-módulo finitamente generado.

Antes de probar este teorema, vamos a ver que implica también que $Q_n = 0$ cuando n es grande. Para ello observamos que $Q_n \subset H^{q+1}(X, I^n\mathcal{F})$, luego

$$Q^* = \bigoplus_{n\geq 0} Q_n$$

es un A^*-submódulo del A^*-módulo E dado por el teorema (para $q+1$ en lugar de q), luego también es un A^*-módulo finitamente generado y, por consiguiente, es noetheriano. Los A^*-submódulos

$$Q_n^* = Q_0 \oplus \cdots \oplus Q_n \oplus IQ_n \oplus I^2Q_n \oplus \cdots$$

forman una cadena ascendente en Q^* cuya unión es todo Q^*, luego ha de ser finalmente igual a Q^*, luego, para todo $n \geq n_0$, tenemos que $Q_{n+n_0} = I^nQ_{n_0}$. Ahora observamos que Q_{n_0} es un cociente de $H^q(X, \mathcal{F}/I^n\mathcal{F})$, luego es anulado por I^{n_0}, luego $Q_n = 0$ para todo $n \geq 2n_0$.

Así pues, salvo por que falta probar el teorema anterior, tenemos demostrado el teorema siguiente:

Teorema A.12 (Teorema de las funciones formales) *Sea A un anillo noetheriano, sea X/A un esquema propio, sea $\mathcal{F}$ un haz coherente en X y sea I un ideal de A. Entonces tenemos isomorfismos naturales*

$$H^q(X, \mathcal{F}) \otimes_A \hat{A} \cong \hat{H}^q(X, \mathcal{F}) \cong \varprojlim_n H^q(X, \mathcal{F}/I^n\mathcal{F}),$$

donde el circunflejo denota la compleción respecto de la topología I-ádica.

El teorema A.11 es una consecuencia inmediata del teorema siguiente:

Teorema A.13 *Sea A un anillo noetheriano y $f : X \longrightarrow \operatorname{Esp} A$ un homomorfismo propio, sea B una A-álgebra finitamente generada, sea $\mathcal{B} = f^*\tilde{B}$ y sea $\mathcal{M}$ un haz cuasicoherente en X con estructura de $\mathcal{B}$-módulo finitamente generado. Entonces $H^q(X, \mathcal{M})$ es un B-módulo finitamente generado.*

Para probar A.11, tomamos $B = A^*$ y $\mathcal{M} = \bigoplus\limits_{n\geq 0} I^n\mathcal{F}$. Así, para cada abierto afín $U \subset X$, tenemos que $\{I^n\mathcal{F}(U)\}_n$ es una filtración I-ádica estable en $\mathcal{F}(U)$, por lo que $\mathcal{M}(U)$ es un A^*-módulo finitamente generado, luego también un $\mathcal{B}(U)$-módulo finitamente generado (notemos que $\mathcal{B}(U) = A^* \otimes_A \mathcal{O}_X(U)$).

Notemos que la graduación en $\mathcal{M}$ induce una graduación en el complejo de Čech de $\mathcal{M}$, lo que nos da un isomorfismo de A^*-módulos

$$H^q(X, \mathcal{M}) \cong \bigoplus_{n \geq 0} H^q(X, I^n \mathcal{F}).$$

Demostración (de A.13): Sea $X_B = X \times_A \operatorname{Esp} B$, que es un esquema propio sobre B y, en particular, es noetheriano. Sea $\pi : X_B \longrightarrow X$ la proyección. Si U es un abierto afín en X, tenemos que

$$\pi^{-1}[U] = U \times_A \operatorname{Esp} B = \operatorname{Esp}(\mathcal{O}_X(U) \otimes_A B) = \operatorname{Esp} \mathcal{B}(U),$$

con lo que podemos definir un haz coherente $\mathcal{M}'$ en X_B mediante

$$\mathcal{M}'|_{\pi^{-1}[U]} = \widetilde{\mathcal{M}(U)}.$$

Es claro entonces que $\pi_* \mathcal{M}' = \mathcal{M}$. Como π es un homomorfismo afín, el teorema A.10 nos da que el isomorfismo de $\mathcal{O}_{X_B}(X_B)$-módulos (en particular de B-módulos) $H^q(X_B, \mathcal{M}') \cong H^q(X, \mathcal{M})$. El teorema 6.21 (aplicado a X_B/B) nos da que son B-módulos finitamente generados. ■

No trataremos de dar una interpretación geométrica del teorema A.12, pues ello requeriría introducir el concepto de esquema formal. La idea básica es que un esquema se puede "completar" respecto de un cerrado en un sentido análogo a como se completa un anillo respecto a la topología inducida por un ideal, salvo que la compleción $\hat{X}$ de un esquema X no es un esquema, sino que pertenece a una clase más general de espacios anillados a los que se les llama esquemas formales. Sucede que A.12 es en realidad la mitad del teorema que demostró Grothendieck. La otra mitad afirma que $H^q(X, \mathcal{F}) \otimes_A \hat{A}$ es isomorfo al grupo de cohomología correspondiente a la compleción de $\mathcal{F}$ en la compleción de X respecto de la antiimagen del cerrado que I define en $\operatorname{Esp} A$. El nombre de "funciones formales" hace referencia al caso $q = 0$, pues describe la estructura de las "funciones formales" (globales) de X, es decir, de los elementos de $\mathcal{O}_{\hat{X}}(\hat{X})$.

A continuación vamos a analizar más a fondo el caso particular de A.12 en el que el ideal I es primo. Como se trata de un resultado local, no necesitamos partir en principio de un esquema afín. Supongamos, pues, que $f : X \longrightarrow Y$ es un homomorfismo propio entre esquemas localmente noetherianos y sea $y \in Y$.

Para cada natural $n \geq 1$ definimos $X_n = X \times_Y \operatorname{Esp}(\mathcal{O}_{Y,y}/\mathfrak{m}_y^n)$ y llamamos $i_n : X_n \longrightarrow X$ a la proyección. Notemos que $X_1 = X_y$ y que todos los esquemas X_n tienen el mismo espacio topológico subyacente. Más precisamente, tenemos inmersiones cerradas $j_n : X_n \longrightarrow X_{n+1}$ cuyas aplicaciones continuas subyacentes son homeomorfismos.

En efecto, si $V = \operatorname{Esp} A$ es un entorno afín de y en Y, de modo que y se corresponde con un ideal $\mathfrak{p}$ de A, podemos cubrir X_n por abiertos afines de la forma $U_n = U \times_A \operatorname{Esp}(A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^n)$, donde $U \subset f^{-1}[V]$ es un abierto afín. Si $U = \operatorname{Esp} B$, tenemos que $U_n = \operatorname{Esp}(B_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^n B_\mathfrak{p})$, que (como espacio topológico) no depende de n, ya que puede identificarse con el cerrado $V(\mathfrak{p} B_\mathfrak{p}) \subset \operatorname{Esp} B_\mathfrak{p}$, y la restricción de j_n a U_n se corresponde con el epimorfismo $B/\mathfrak{p}^{n+1}B \longrightarrow B/\mathfrak{p}^n B$, luego es una inmersión cerrada cuya aplicación continua subyacente se identifica con la identidad.

Si $\mathcal{F}$ es un haz coherente en X, el teorema A.10 nos da isomorfismos naturales

$$H^q(X_n, i_n^*\mathcal{F}) \cong H^q(X, i_{n*}i_n^*\mathcal{F}) = H^q(X, \mathcal{F} \otimes_A (A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^n)),$$

que a su vez nos permiten definir isomorfismos naturales

$$H^q(X_{n+1}, i_{n+1}^*\mathcal{F}) \longrightarrow H^q(X_n, i_n^*\mathcal{F})$$

los cuales determinan un sistema inverso tal que

$$\varprojlim_n H^q(X_n, i_n^*\mathcal{F}) \cong \varprojlim_n H^q(X, \mathcal{F} \otimes_A (A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^n)).$$

Teorema A.14 *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un homomorfismo propio entre esquemas localmente noetherianos, sea $y \in Y$ y $\mathcal{F}$ un haz coherente en X. Llamemos $i_n : X_n = X \times_Y \operatorname{Esp}(\mathcal{O}_{Y,y}/\mathfrak{m}_y^n) \longrightarrow X$ a los homomorfismos naturales. Entonces*

$$\widehat{D^q f_*(\mathcal{F})_y} \cong \varprojlim_n H^q(X_n, i_n^*\mathcal{F}),$$

donde el miembro izquierdo es la compleción del $\mathcal{O}_{Y,y}$-módulo $D^q f_*(\mathcal{F})_y$ respecto de la topología $\mathfrak{m}_y$-ádica.

Demostración: Como todo es local en y, podemos sustituir Y por un entorno afín de Y o, equivalentemente, suponer que $Y = \operatorname{Esp} A$ es un esquema afín noetheriano, de modo que y se identifica con un ideal primo $\mathfrak{p}$ de A. De acuerdo con 6.42, 6.21, [4.17] y las observaciones previas a este teorema, el isomorfismo del enunciado equivale a

$$H^q(X, \mathcal{F})_\mathfrak{p} \otimes_{A_\mathfrak{p}} \widehat{A_\mathfrak{p}} \cong \varprojlim_n H^q(X, \mathcal{F} \otimes_A (A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^n)).$$

Si $\mathfrak{p}$ es un ideal maximal de A, entonces

$$\widehat{A_\mathfrak{p}} = \varprojlim_n A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^n = \varprojlim_n A/\mathfrak{p}^n = \hat{A},$$

luego el miembro izquierdo coincide con $H^q(X, \mathcal{F}) \otimes_A \hat{A}$ y, por otra parte,

$$\mathcal{F} \otimes_A (A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^n) \cong \mathcal{F} \otimes_A (A/\mathfrak{p}^n) \cong \mathcal{F}/\mathfrak{p}^n\mathcal{F},$$

luego el isomorfismo coincide con el dado por el teorema A.12.

En el caso general hacemos el cambio de base $X' = X \times_A \operatorname{Esp} A_\mathfrak{p}$, con lo que X' es un esquema propio sobre $A_\mathfrak{p}$ y, por la parte ya probada, tenemos el isomorfismo

$$H^q(X', p^*\mathcal{F}) \otimes_{A_\mathfrak{p}} \widehat{A_\mathfrak{p}} \cong \varprojlim_n H^q(X'_n, i_n'^* p^*\mathcal{F}),$$

donde $p : X' \longrightarrow X$ es la proyección. Ahora bien,

$$X'_n = X \times_A \operatorname{Esp} A_\mathfrak{p} \times_{A_p} \operatorname{Esp}(A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^n) \cong X \times_A \operatorname{Esp}(A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^n) = X_n,$$

y tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "p"] & X \\ X'_n \arrow[u, "i'_n"] \arrow[r, "\cong"'] & X_n \arrow[u, "i_n"'] \end{tikzcd}$$

del que se deduce que $H^q(X'_n, i'^*_n p^*\mathcal{F}) \cong H^q(X_n, i_n^*\mathcal{F})$. Además, los isomorfismos canónicos son compatibles con los sistemas inversos respectivos, por lo que inducen un isomorfismo entre los límites inversos. Por otra parte, el teorema 6.15 nos da que $H^q(X', p^*\mathcal{F}) \cong H^q(X, \mathcal{F})_{\mathfrak{p}} = D^q f_*(\mathcal{F})_y$, luego tenemos también el isomorfismo del enunciado. ■

Como aplicación generalizamos el teorema 6.16:

Teorema A.15 *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un homomorfismo proyectivo entre esquemas localmente noetherianos, sea $\mathcal{F}$ un haz coherente en X y sea $d = \max\limits_{y\in Y} \dim X_y$. Entonces $D^q f_*\mathcal{F} = 0$ para todo $q > d$.*

Demostración: Si $y \in Y$, los esquemas X_n son proyectivos sobre $\mathcal{O}_y/\mathfrak{m}_y^n$, y $\dim X_n = \dim X_y \leq d$, luego el teorema 6.16 nos da que $H^q(X_n, i_n^*\mathcal{F}) = 0$. El teorema anterior implica entonces que $\widehat{D^q f_*(\mathcal{F})}_y = 0$. Ahora bien, como la topología $\mathfrak{m}_y$-ádica en $D^q f_*(\mathcal{F})_y$ es de Hausdorff (teorema [4.21]), la inmersión $D^q f_*(\mathcal{F})_y \longrightarrow \widehat{D^q f_*(\mathcal{F})}_y$ es inyectiva. (En general, el núcleo de la inmersión $M \longrightarrow \hat{M}$ es la intersección de los submódulos $I^n M$, que es nula si la topología I-ádica es de Hausdorff) luego podemos concluir que $D^q f_*(\mathcal{F})_y = 0$ para todo $y \in Y$, con lo que $D^q f_*(\mathcal{F}) = 0$. ■

Observemos que, si en el teorema anterior Y es afín, entonces la conclusión equivale a que $H^q(X, \mathcal{F}) = 0$ para todo $q > d$.

A.3 El teorema de conexión

Del teorema de las funciones formales se deduce el siguiente teorema de Zariski, que a su vez tiene numerosas consecuencias sobre la estructura de los homomorfismos propios:

Teorema A.16 (Principio de conexión de Zariski) *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un homomorfismo propio, donde Y es un esquema localmente noetheriano. Si el homomorfismo natural $\mathcal{O}_Y \longrightarrow f_*\mathcal{O}_X$ es un isomorfismo, entonces las fibras de f son conexas.*

Demostración: Tomemos $y \in Y$. Hemos de probar que X_y es conexo. Aplicamos el teorema A.14 para $q = 0$ y $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$, que, teniendo en cuenta la hipótesis, se reduce a

$$\widehat{\mathcal{O}_{Y,y}} \cong \varprojlim_n \mathcal{O}_{X_n}(X_n).$$

Los espacios X_n son todos homeomorfos a la fibra X_y, luego, si ésta no fuera conexa, podríamos encontrar dos abiertos disjuntos no vacíos tales que $X_n = U \cup V$. Esta descomposición nos da a su vez una descomposición

$$\mathcal{O}_{X_n}(X_n) = \mathcal{O}_{X_n}(U) \oplus \mathcal{O}_{X_n}(V)$$

que es compatible con los homomorfismos del sistema inverso formado por los anillos $\mathcal{O}_{X_n}(X_n)$, luego nos da una descomposición

$$\widehat{\mathcal{O}_{Y,y}} \cong \varprojlim_n \mathcal{O}_{X_n}(U) \oplus \varprojlim_n \mathcal{O}_{X_n}(V).$$

Los dos sumandos son no nulos, ya que las descomposiciones

$$1 = u_n + v_n \in \mathcal{O}_{X_n}(U) \oplus \mathcal{O}_{X_n}(V)$$

determinan elementos u, v no nulos, uno en cada sumando. Así pues, hemos descompuesto $\widehat{\mathcal{O}_{Y,y}}$ en suma directa de dos $\widehat{\mathcal{O}_{Y,y}}$-submódulos no nulos, es decir, de dos ideales no nulos, pero $\widehat{\mathcal{O}_{Y,y}}$ es un anillo local (por [4.19]), luego ambos ideales han de estar contenidos en su ideal maximal, luego todo $\widehat{\mathcal{O}_{Y,y}}$ está en dicho ideal, lo cual es absurdo. ■

A veces se llama también teorema de conexión de Zariski al siguiente caso particular:

Teorema A.17 *Sea X un esquema íntegro e Y un esquema normal localmente noetheriano. Si $f : X \longrightarrow Y$ es un homomorfismo propio birracional, todas sus fibras son conexas.*

Demostración: Sólo hemos de probar que el homomorfismo $\mathcal{O}_Y \longrightarrow f_*\mathcal{O}_X$ es un isomorfismo. A través de f podemos identificar a $K(Y) = K(X) = K$, de modo que K es el cuerpo de cocientes de todos los anillos asociados a los abiertos de X e Y.

Si U es un abierto afín en Y, entonces la restricción $f^{-1}[U] \longrightarrow U$ es propia, luego $(f_*\mathcal{O}_X)(U) = \mathcal{O}_X(f^{-1}[U])$ es entero sobre $\mathcal{O}_Y(U)$ (por 4.24), y está contenido en $K(Y)$. Como Y es normal, esto implica que $(f_*\mathcal{O}_X)(U) = \mathcal{O}_Y(U)$, luego $f_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$. ■

Veamos algunas consecuencias:

Teorema A.18 *Si $f : X \longrightarrow Y$ es un homomorfismo propio entre esquemas localmente noetherianos, entonces $f = f' \circ g$, donde $f' : X \longrightarrow Y'$ es un homomorfismo propio suprayectivo con fibras conexas y $g : Y' \longrightarrow Y$ es un homomorfismo finito.*

Demostración: El teorema de finitud 6.49 nos da que $\mathcal{A}(X) = f_*\mathcal{O}_X$ es una $\mathcal{O}_Y$-álgebra coherente. El teorema A.5 nos da la existencia de un esquema Y', afín sobre Y, tal que $\mathcal{A}(Y') = \mathcal{A}(X)$. El teorema A.8 implica que el homomorfismo estructural $g : Y' \longrightarrow Y$ es finito. El teorema A.3 nos da un homomorfismo $f' : X \longrightarrow Y'$ correspondiente a la identidad $\mathcal{A}(Y') \longrightarrow \mathcal{A}(X)$

(aunque no podemos decir que sea un isomorfismo porque Y no es necesariamente afín sobre S). Sabemos que f' está definido sobre Y, lo que significa que $f = f' \circ g$. El teorema 4.21 implica que f' también es propio.

Para probar que f' tiene las fibras conexas basta ver que el homomorfismo natural $\mathcal{O}_{Y'} \longrightarrow f'_*\mathcal{O}_X$ es un isomorfismo. Para ello cubrimos Y con abiertos afines U, y basta probar que el homomorfismo natural

$$\mathcal{O}_{Y'}(g^{-1}[U]) \longrightarrow \mathcal{O}_X(f'^{-1}[g^{-1}[U]])$$

es un isomorfismo. Ahora bien, éste es el homomorfismo natural

$$\mathcal{A}(Y')(U) = \mathcal{O}_{Y'}(g^{-1}[U]) \longrightarrow \mathcal{O}_X(f^{-1}[U]) = \mathcal{A}(X)(U),$$

que no es sino la identidad.

El isomorfismo $\mathcal{O}_{Y'} \cong f'_*\mathcal{O}_X$ implica que f' tiene imagen densa, pues si $U \subset Y'$ es un abierto afín no vacío sin antiimágenes, entonces $(f'_*\mathcal{O}_X)(U) = 0$, mientras que $\mathcal{O}_{Y'}(U) \neq 0$. Como f' es cerrado, concluimos que es suprayectivo.

■

Observemos que la descomposición dada por el teorema anterior no es única en general, pero sí lo es (salvo isomorfismo) si exigimos que f' induzca un isomorfismo $\mathcal{O}_{Y'} \longrightarrow f'_*\mathcal{O}_X$. La prueba del teorema A.17 muestra que si f es birracional e Y es normal, entonces $f = f'$.

Ahora necesitamos un hecho elemental:

Teorema A.19 *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un homomorfismo de tipo finito entre esquemas localmente noetherianos. Sea $x \in X$, sea $y = f(x)$ y supongamos que el homomorfismo $f_x^\# : \mathcal{O}_{Y,y} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ es un isomorfismo. Entonces existen abiertos afines $x \in U \subset X$, $y \in V \subset Y$ tales que $f|_U : U \longrightarrow V$ es un isomorfismo.*

Demostración: No perdemos generalidad si suponemos que $X = \operatorname{Esp} B$ e $Y = \operatorname{Esp} A$ son esquemas afines noetherianos. Entonces f se corresponde con un homomorfismo $\phi : A \longrightarrow B$ que convierte a B es una A-álgebra finitamente generada. Los puntos x e y se corresponden con ideales primos $\mathfrak{p}$ y $\mathfrak{q}$ tales que $\phi^{-1}[\mathfrak{p}] = \mathfrak{q}$.

El núcleo del homomorfismo $A \longrightarrow A_\mathfrak{q}$ es un ideal finitamente generado. Para cada generador a, existe un $s \in A \setminus \mathfrak{q}$ tal que $sa = 0$, y podemos tomar el mismo s para todos los generadores. Claramente entonces, $sa = 0$ para todo a en dicho núcleo. Esto implica a su vez que el homomorfismo natural $A_s \longrightarrow A_\mathfrak{q}$ es inyectivo. Similarmente, podemos tomar $t \in B \setminus \mathfrak{p}$ que haga inyectivo el homomorfismo $B_t \longrightarrow B_\mathfrak{p}$. Podemos cambiar t por $\phi(s)t$, y así tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A_s \arrow[r, "\phi_s"] \arrow[d] & B_t \arrow[d] \\
A_\mathfrak{q} \arrow[r, "\phi_\mathfrak{p}"'] & B_\mathfrak{p}
\end{tikzcd}$$

en el que las flechas verticales son inyectivas. Equivalentemente, sustituyendo X e Y por entornos adecuados de x e y, podemos suponer que los homomorfismos $A \longrightarrow A_{\mathfrak{q}}$, $B \longrightarrow B_{\mathfrak{p}}$ son inyectivos.

Si $b \in B$, existe un $a/s \in A_{\mathfrak{q}}$ tal que $\phi_{\mathfrak{p}}(a/s) = \phi(a)/\phi(s) = b/1$, y podemos tomar el mismo $s \in A \setminus \mathfrak{q}$ para todos los elementos b de un generador de B sobre A. Llamamos $t = \phi(s) \in B \setminus \mathfrak{p}$, con lo que tenemos el mismo diagrama conmutativo anterior, también con flechas verticales inyectivas, pero ahora podemos asegurar que ϕ es un isomorfismo. Obviamente es inyectiva, y si tomamos $b/t^n \in B_t$, existen $a \in A$ y $m \geq 0$ tales que $\phi_{\mathfrak{p}}(a/s^m) = \phi(a)/t^m = b/1$, luego $\phi_{\mathfrak{p}}(a/s^r) = \phi(a)/t^r = b/t^n$ (donde $r = m + n$). La inyectividad de la flecha vertical derecha implica que $\phi(a)/t^r = b/t^n$ también en B_t, luego $b/t^n = \phi_s(a/s^r)$. ■

Con esto ya podemos demostrar:

Teorema A.20 *Sea Y un esquema localmente noetheriano y $f : X \longrightarrow Y$ un homomorfismo propio. Sea $X \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{g} Y$ la descomposición dada por el teorema* A.18 *y sea X' el conjunto de los puntos $x \in X$ que son aislados en su fibra $X_{f(x)}$. Entonces existe un abierto $U \subset Y'$ tal que $X' = f'^{-1}[U]$, y además f' se restringe a un isomorfismo $f'^{-1}[U] \longrightarrow U$.*

Demostración: Dado un punto $x \in X$, llamemos $y = f(x)$. La fibra Y'_y es finita. Más aún, es discreta, pues es un conjunto algebraico finito sobre el cuerpo $k(y)$ (y tiene dimensión 0, luego todos los puntos son cerrados, luego abiertos también). Consecuentemente, las antiimágenes por f' de los puntos de Y'_y son las componentes conexas de X_y. Esto implica claramente que x es aislado en X_y si y sólo si es aislado en $X_{f'(x)}$, lo que a su vez equivale a que $X_{f'(x)} = \{x\}$.

Ante todo, esto nos permite simplificar la situación restringiéndonos al caso en que $f = f'$ (con lo que g es la identidad). En particular, podemos suponer que $f_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$.

Tomemos $x \in X'$ y sea $y = f(x)$. Según acabamos de ver, esto significa que $X_y = \{x\}$. Si V es un entorno abierto de x en X, como f es cerrado, resulta que $f[X \setminus V]$ es un cerrado en Y que no contiene a y. Entonces $U = Y \setminus f[X \setminus V]$ es un entorno abierto de y que cumple $f^{-1}[U] \subset V$. Con esto hemos probado que f lleva una base de entornos de y a una base de entornos de x. A su vez, la igualdad $f_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$ implica entonces que $f_x^{\#} : \mathcal{O}_{Y,y} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ es un isomorfismo.

Por el teorema anterior, existen abiertos afines $x \in V \subset X$, $y \in U \subset Y$ tales que $f|_V : V \longrightarrow U$ es un isomorfismo. Según hemos visto antes, podemos tomar un abierto afín $y \in U' \subset U$ tal que $V' = f^{-1}[U'] \subset V$, equivalentemente, podemos suponer que $V = f^{-1}[U]$, lo que implica que $x \in V \subset X'$. Esto prueba que X' es abierto en X. El resto del enunciado es ahora inmediato. ■

Según la observación tras el teorema A.18, podemos enunciar el siguiente caso particular (en el que, por completitud, hemos incluido el teorema A.17):

Teorema A.21 *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un homomorfismo propio y birracional, donde X es un esquema íntegro e Y es un esquema normal localmente noetheriano. Sea V el conjunto de los puntos de X que son aislados en su fibra. Entonces existe un abierto $U \subset Y$ tal que $V = f^{-1}[U]$ y f se restringe a un isomorfismo $V \longrightarrow U$. Además, todas las fibras de f son conexas.*

Como aplicación generalizamos el teorema 4.43:

Teorema A.22 *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un homomorfismo de esquemas y supongamos que Y es localmente noetheriano. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

a) f es finito.

b) f es afín y propio.

c) f es propio y sus fibras son finitas.

Demostración: Los homomorfismos finitos son afines por definición, y son propios por el teorema 4.42. Así pues, a) $\Rightarrow$ b).

Si f es afín y propio, para cada $y \in Y$ también la fibra $X_y \longrightarrow \operatorname{Esp} k(y)$ es afín y propia. Entonces $X_y = \operatorname{Esp} A$, donde A tiene dimensión finita sobre $k(y)$, por el teorema 6.21. El teorema [8.32] implica entonces que X_y es un conjunto finito. Así pues, b) $\Rightarrow$ c).

Si f es propio y sus fibras son finitas, de hecho son discretas, por el mismo argumento empleado al principio de la prueba del teorema A.20. Con la notación de dicho teorema tenemos entonces que $X' = X$, luego f' es un isomorfismo, a través del cual f se corresponde con g, luego es finito. Así pues, c) $\Rightarrow$ a). ■

De aquí podemos deducir un resultado sobre homomorfismos cuasiproyectivos que usaremos en la sección siguiente:

Teorema A.23 (Teorema principal de Zariski) *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un homomorfismo de esquemas cuasiproyectivo y supongamos que Y es localmente noetheriano. Sea X' el conjunto de los puntos de X que son aislados en su fibra. Entonces X' es abierto en X y $f|_{X'}$ se descompone como una inmersión abierta $X' \longrightarrow Z$ seguida de un homomorfismo finito $Z \longrightarrow Y$.*

Demostración: Por hipótesis f se descompone como una inmersión abierta $i : X \longrightarrow W$ seguida de un homomorfismo proyectivo $j : W \longrightarrow Y$. Sea W' el conjunto de puntos de W que son aislados en su fibra (respecto de j). El teorema A.20 nos da que W' es abierto en W y que $j|_{W'}$ es composición de una inmersión abierta seguida de un homomorfismo finito. Ahora basta observar que $X' = i^{-1}[W']$. ■

A.4 Homomorfismos llanos

Definición A.24 Sea $f : X \longrightarrow Y$ un homomorfismo de tipo finito entre esquemas localmente noetherianos. Sean $x \in X$, $y = f(x)$. Diremos que f es *no ramificado* en $x \in X$ si el homomorfismo $\mathcal{O}_{Y,y} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,x}$ cumple $\mathfrak{m}_y\mathcal{O}_{X,x} = \mathfrak{m}_x$ y la extensión (finita) $k(x)/k(y)$ es separable. Diremos que f es *llano* en x si es no ramificado y plano en x.

La no ramificación tiene una caracterización sencilla:

Teorema A.25 *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un homomorfismo de tipo finito entre esquemas localmente noetherianos. Sea $x \in X$ y sea $y = f(x)$. Entonces f es no ramificado en x si y sólo si x es aislado y reducido en X_y y la extensión $k(x)/k(y)$ es separable.*

Demostración: El teorema 3.46 implica que $\mathcal{O}_{X_y,x} \cong \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_y\mathcal{O}_{X,x}$. Si x es aislado en X_y, ha de ser $\{x\} = \operatorname{Esp}\mathcal{O}_{X_y,x}$, luego $\mathcal{O}_{X_y,x}$ tiene un único ideal primo, que será nulo si x es reducido. Por consiguiente $\mathcal{O}_{X_y,x} = k(x)$ y $\mathfrak{m}_y\mathcal{O}_{X,x} = k(x)$. Esto prueba que f es no ramificado en x.

Recíprocamente, si f es no ramificado en x, entonces $\mathcal{O}_{X_y,x}$ es un cuerpo, luego x es una componente irreducible de X_y, luego no puede pertenecer a ninguna otra, luego ha de ser un punto aislado. También es claro que ha de ser reducido. ■

En particular, si un homomorfismo es no reducido (en todos los puntos) entonces sus fibras son conjuntos algebraicos reducidos y discretos, luego son finitas.

También podemos caracterizar los homomorfismos llanos:

Teorema A.26 *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un homomorfismo de tipo finito entre esquemas localmente noetherianos. Sea $x \in X$ y sea $y = f(x)$. Entonces f es llano en x si y sólo si es suave en x y x es aislado en X_y.*

Demostración: Si f es llano en x entonces es no ramificado, luego x es aislado en X_y por el teorema anterior. Como además es reducido, $\{x\} = \operatorname{Esp} K$, donde K es una extensión finita separable de $k(y)$. Hemos de probar que x es geométricamente regular, lo que significa que los puntos de $\{x\} \times_{k(y)} \operatorname{Esp}\bar{k}$ son regulares, donde $\bar{k}$ es la clausura algebraica de $k(y)$. Ahora bien, podemos expresar $K = k(y)[T]/(P(T))$, donde $P(T) \in k(y)[T]$ es un polinomio irreducible y separable, y entonces $\{x\} \times_{k(y)} \operatorname{Esp}\bar{k} = \operatorname{Esp}(\bar{k}[T]/(P(T)))$. Concluimos que todos sus puntos son regulares, pues $P(T)$ y $P'(T)$ son primos entre sí.

Recíprocamente, si se cumplen las condiciones del enunciado, el hecho de que x sea geométricamente regular en X_y implica en particular que es reducido, luego sólo falta probar que la extensión $k(x)/k(y)$ es separable, pero esto se razona como acabamos de hacer: ahora sabemos que el conjunto algebraico $\{x\} \times_{k(y)} \operatorname{Esp}\bar{k} = \operatorname{Esp}(\bar{k}[T]/(P(T)))$ es regular, luego el polinomio $P(T)$ ha de ser separable. ■

En particular, un homomorfismo de tipo finito entre esquemas localmente noetherianos es llano si y sólo si es suave de dimensión relativa 0.

Teorema A.27 *Se cumplen las propiedades siguientes:*

a) Las inmersiones cerradas (entre esquemas localmente noetherianos) son no ramificadas.

b) Las inmersiones abiertas (entre esquemas localmente noetherianos) son llanas.

c) Los homomorfismos llanos y no ramificados son estables por composición y cambio de base.

DEMOSTRACIÓN: a) y b) son inmediatas, así como la primera parte de c). Supongamos ahora que $X \longrightarrow Y$ es no ramificado y sea $Z \longrightarrow Y$ un homomorfismo cualquiera. Hemos de probar que $X \times_Y Z \longrightarrow Z$ es no ramificado. Tomemos $z \in Z$ y sea y su imagen en Y. Observemos que

$$(X \times_Y Z)_z = X \times_Y Z \times_Z \operatorname{Esp} k(z) = X_y \times_{k(y)} \operatorname{Esp} k(z).$$

Sabemos que X_y es un conjunto algebraico finito y reducido, luego lo mismo le sucede a $(X \times_Y Z)_z$. Si $w \in (X \times_Y Z)_z$ y $x \in X_y$ es la proyección de w, sabemos que $k(x)/k(y)$ es separable. Notemos que $k(x)$ es el mismo si consideramos a x como elemento de X o de X_y. Como $\{x\}$ es abierto en X_y, podemos considerar $\{x\} = \operatorname{Esp}(k(y)[T]/(P(T)))$, donde $P(T) \in k(y)[T]$ es un polinomio irreducible y separable. Entonces w es uno de los puntos de

$$\{x\} \times_Y \operatorname{Esp} k(z) = \operatorname{Esp}(k(z)[T]/(P(T))),$$

que tiene esta misma forma, pero para un divisor primo de $P(T)$ en $k(z)[T]$, el cual seguirá siendo separable, luego $k(w)/k(z)$ también es separable.

El resultado para homomorfismos llanos es consecuencia de éste y de la propiedad análoga para homomorfismos planos. ■

Luego necesitaremos la siguiente caracterización de los homomorfismos no ramificados en términos de haces de formas diferenciales:

Teorema A.28 *Sea $f : X \longrightarrow S$ un homomorfismo de tipo finito entre esquemas localmente noetherianos. Se cumple que f es no ramificado en un punto $x \in X$ si y sólo si $(\Omega^1_{X/S})_x = 0$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $s = f(x)$. Por el teorema 7.41 a), tenemos que

$$(\Omega^1_{X_s/k(s)})_x = (\Omega^1_{X/S})_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} k(x).$$

Si f es no ramificado en x, entonces x es aislado en X_s, luego tenemos que $(\Omega^1_{X_s}/k(s))_x = \Omega^1_{k(x)/k(s)} = 0$, por el teorema 7.39. Como $\Omega^1_{X/S}$ es coherente, el lema de Nakayama [4.51] nos da que $(\Omega^1_{X/S})_x = 0$.

Supongamos ahora que $(\Omega^1_{X/S})_x = 0$, con lo que también se cumple que $(\Omega^1_{X_s/k(s)})_x = 0$. Como se trata de un haz coherente, existe un entorno U de x en X_s tal que $\Omega^1_{X_s/k(s)}|_U = \Omega^1_{U/k(s)} = 0$. Sea $\xi \in U$ un punto cuasigenérico. Entonces $\Omega^1_{k(\xi)/k(s)} = 0$ por el teorema 7.34. El teorema 7.39 implica entonces que la extensión $k(\xi)/k(s)$ es algebraica y separable, y el teorema [3.75] implica que U es un conjunto algebraico de dimensión 0 sobre $k(s)$. En particular x es aislado en X_s y lo dicho antes para ξ vale para x, luego la extensión $k(x)/k(y)$ es separable. El teorema 7.46 implica que X_s es geométricamente regular en x. En particular es regular, luego reducido, y el teorema A.25 implica que f es no ramificado en x. ■

Vamos a ver cómo el teorema principal de Zariski nos da la estructura local de los homomorfismos llanos. Necesitaremos un resultado técnico sencillo:

Teorema A.29 *Sea S un esquema afín noetheriano, sean X, Y dos esquemas afines de tipo finito sobre S y sea $s \in S$. Si $\phi : X \times_S \operatorname{Esp} \mathcal{O}_{S,s} \longrightarrow Y \times_S \operatorname{Esp} \mathcal{O}_{S,s}$ es un homomorfismo de esquemas definido sobre S, entonces existe un entorno abierto U de s y un único homomorfismo $f : X \times_S U \longrightarrow Y \times_S U$ definido sobre S tal que ϕ se obtiene de f por cambio de base.*

Demostración: Pongamos que $S = \operatorname{Esp} A$, $X = \operatorname{Esp} C$, $Y = \operatorname{Esp} B$ y que s se corresponde con un ideal $\mathfrak{p}$ de A. Entonces ϕ se corresponde con un homomorfismo $B_{\mathfrak{p}} \longrightarrow C_{\mathfrak{p}}$. Si $c \in C$ cumple que $c/1 = 0$ en $C_{\mathfrak{p}}$, existe un $u \in A \setminus \mathfrak{p}$ tal que $uc = 0$. Como C es noetheriano, podemos tomar un mismo u que cumpla esto con todos los generadores c del núcleo del homomorfismo $C \longrightarrow C_{\mathfrak{p}}$, y entonces u vale, de hecho, para todos los elementos de dicho núcleo.

Por otra parte, si $b \in B$, la imagen en $C_{\mathfrak{p}}$ de $b/1$ es de la forma c/v, para cierto $v \in A \setminus \mathfrak{p}$. Podemos tomar el mismo v para todos los miembros de un generador finito de B sobre A, con lo que resulta que, para todo $b \in B$, la imagen de $b/1$ en $C_{\mathfrak{p}}$ es de la forma c/v^r, para cierto $r \geq 0$.

Entonces, $a = uv$ cumple simultáneamente las propiedades de u y de v, lo que nos da un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} B_a \arrow[r] \arrow[d] & C_a \arrow[d] \\ B_{\mathfrak{p}} \arrow[r] & C_{\mathfrak{p}} \end{tikzcd}$$

En efecto, dado $b/a^m \in B_a$, consideramos su imagen en $C_{\mathfrak{p}}$, que será de la forma $c/a^n \in C_{\mathfrak{p}}$, pero $c/a^n \in C_a$ es la única antiimagen de este elemento en C_a, ya que el homomorfismo natural $C_a \longrightarrow C_{\mathfrak{p}}$ es inyectivo. Esto define la flecha horizontal superior (claramente de forma única). El teorema se cumple con $U = D(a) \subset S$. ■

Consideremos un anillo noetheriano A y un polinomio mónico $P(T) \in A[T]$. Sea $B = (A[T]/(P(T)))_{P'(T)}$. Por el ejemplo tras el teorema [A 16] sabemos que $A[T]/(P(T))$ es plano sobre A, luego B también lo es. Consideremos el homomorfismo natural $f : \operatorname{Esp} B \longrightarrow \operatorname{Esp} A$. Según acabamos de indicar, es plano. Por otra parte, si $s \in \operatorname{Esp} A$, es fácil ver que su fibra es el espectro de

$$B \otimes_A k(s) \cong (k(s)[T]/(P(T)))_{P'(T)},$$

y que si extendemos las constantes hasta la clausura algebraica de $k(s)$, digamos $\bar{k}$, obtenemos

$$\operatorname{Esp}\big((\bar{k}[T]/(P(T)))_{P'(T)}\big).$$

Así, $\operatorname{Esp}(\bar{k}[T]/(P(T))$ es un conjunto algebraico afín (de dimensión 0) y el esquema anterior es el abierto principal $D(P'(T))$, formado precisamente por sus puntos regulares. En definitiva, las fibras de f son geométricamente regulares, luego f es suave de dimensión relativa 0, es decir, es llano.

Notemos que nada impide que $\operatorname{Esp} B$ sea vacío. En caso contrario diremos que f es un homomorfismo llano *canónico.*

Teorema A.30 *Sea $f : X \longrightarrow Y$ un homomorfismo no ramificado en $x \in X$ y sea $y = f(x)$. Entonces existen abiertos $x \in U \subset X$, $y \in V \subset Y$, un homomorfismo llano canónico $h : Z \longrightarrow V$ y una inmersión cerrada g que hacen conmutativo el diagrama siguiente:*

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & V \\ Z \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Si f es llano en x la inmersión g puede tomarse abierta.

Demostración: Como tanto las hipótesis como la conclusión son locales, no perdemos generalidad si suponemos que $X = \operatorname{Esp} B$ e $Y = \operatorname{Esp} A$ son afines. El cambio de base $f' : X \times_Y \operatorname{Esp} \mathcal{O}_{Y,y} \longrightarrow \operatorname{Esp} \mathcal{O}_{Y,y}$ cumple las mismas hipótesis del teorema. Notemos que si y se corresponde con un ideal $\mathfrak{p}$ de A, entonces $X' = X \times_Y \operatorname{Esp} \mathcal{O}_{Y,y} = \operatorname{Esp} B_{\mathfrak{p}}$ contiene un único punto x' cuya proyección en X es x y cuya imagen en $Y' = \operatorname{Esp} \mathcal{O}_{Y,y}$ es el punto y' correspondiente al ideal maximal.

Admitamos que se cumple la conclusión sin necesidad de reducir Y', es decir, con $V = \operatorname{Esp} \mathcal{O}_{Y,y}$. Notemos que el entorno U de x' se puede tomar principal, luego es el espectro de una localización de la forma $(B_{\mathfrak{p}})_{b/s} \cong (B_b)_{\mathfrak{p}}$. Así pues, podemos sustituir X por un abierto menor (concretamente, $D(b) \subset X$) de modo que f' se descompone como una inmersión $g' : X' \longrightarrow Z'$ seguida de un homomorfismo llano canónico $h' : Z' \longrightarrow \operatorname{Esp} \mathcal{O}_{Y,y}$.

Observemos que $Z' = \operatorname{Esp}\big((A_{\mathfrak{p}}[T]/(P(T)))_{P'(T)}\big)$, para un cierto polinomio mónico $P(T) \in A_{\mathfrak{p}}[T]$. Podemos tomar $a \in A \setminus \mathfrak{p}$ de modo que $P(T) \in A_a[T]$. Cambiando Y por $D(a)$ cambiamos A por A_a sin alterar $\mathcal{O}_{Y,y}$. También hemos de cambiar X por un entorno afín de x contenido en la antiimagen de $D(a)$, y así tenemos la misma situación, pero ahora $P(T) \in A[T]$, lo que nos permite descomponer $Z' = \operatorname{Esp}\big((A[T]/(P(T)))_{P'(T)}\big) \times_Y \operatorname{Esp} \mathcal{O}_{Y,y}$.

Llamando Z al primer factor, es claro que h' se obtiene mediante cambio de base del homomorfismo llano canónico $h : Z \longrightarrow Y$. En definitiva, tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \times_Y \operatorname{Esp} \mathcal{O}_{Y,y} \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & Y \times_Y \operatorname{Esp} \mathcal{O}_{Y,y} \\ Z \times_Y \operatorname{Esp} \mathcal{O}_{Y,y} \arrow[ru, "h'"'] & \end{tikzcd}$$

donde g' es una inmersión (cerrada o abierta). El teorema A.29 nos da un entorno U de y y un diagrama

$$\begin{tikzcd} X \times_Y U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \times_Y U \\ Z \times_Y U \arrow[ru, "h"'] & \end{tikzcd}$$

tal que el anterior se obtiene de éste por cambio de base. Observemos que el diagrama es conmutativo por la unicidad del teorema A.29: tanto la flecha horizontal como la composición de las otras dos dan lugar al mismo homomorfismo por cambio de base. Dicha unicidad asegura también que la flecha horizontal se obtiene de f por cambio de base, e igualmente sucede con h y la flecha oblicua.

Más sencillamente, tenemos que $X \times_Y U$ se identifica con un subesquema abierto de $X \times_Y Y \cong X$, e igualmente $Z \times_Y U$ es un subesquema abierto de Z, y a través de estas identificaciones, los homomorfismos f y h son las restricciones de los homomorfismos con el mismo nombre. En definitiva, reduciendo X a $X \times_Y U$ (pero sin modificar Z ni Y), tenemos un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \\ Z \arrow[ru, "h"'] & \end{tikzcd}$$

que da lugar, por cambio de base, a los diagramas anteriores. Sólo nos falta probar que g es una inmersión cerrada o abierta, sabiendo que lo es g'.

Si g' es una inmersión cerrada, la prueba del teorema A.29 se modifica ligeramente para asegurar que g también lo es. (Con la notación empleada en la prueba, tenemos que $B_{\mathfrak{p}} \longrightarrow C_{\mathfrak{p}}$ es suprayectivo, y sólo hay que elegir a de modo que si $c \in C$ es un generador de C sobre B, entonces $c/1 \in C_{\mathfrak{p}}$ admita una antiimagen en $B_{\mathfrak{p}}$ de la forma b/a. Así $B_a \longrightarrow C_a$ también es suprayectivo.)

Supongamos ahora que g' es una inmersión abierta y tomemos un abierto principal en Z' contenido en la imagen de g' y que contenga a la imagen de x'. Al igual que hemos razonado antes, dicho abierto será de la forma $V \times_Y \operatorname{Esp} \mathcal{O}_{Y',y}$, donde V es un abierto principal en Z, cuya antiimagen en X será un abierto principal W, entorno de x.

Tenemos, entonces, un homomorfismo $V \times_Y \operatorname{Esp} \mathcal{O}_{Y,y} \longrightarrow W \times_Y \operatorname{Esp} \mathcal{O}_{Y,y}$ (el inverso de g') que, por el teorema A.29, está inducido por un homomorfismo $V \times_Y U' \longrightarrow W \times_Y U'$, para cierto entorno U' de y que podemos tomar contenido en U. Por otra parte, g induce un homomorfismo $W \times_Y U' \longrightarrow V \times_Y U'$. En otros términos, si cambiamos W y V por $W \times_Y U'$ y $V \times_Y U'$, respectivamente, tenemos que g se restringe a un homomorfismo $W \longrightarrow V$ y que existe otro homomorfismo $i : V \longrightarrow W$ de modo que $g \circ i$ e $i \circ g$ inducen el homomorfismo identidad en $W \times_Y \operatorname{Esp} \mathcal{O}_{Y,y}$ y en $V \times_Y \operatorname{Esp} \mathcal{O}_{Y,y}$, respectivamente. Por la unicidad del teorema A.29 concluimos que $g \circ i = 1$, $i \circ g = 1$, es decir, que $g|_W$ es un isomorfismo o, lo que es lo mismo, que si restringimos X a W, entonces g es una inmersión abierta, tal y como queríamos probar.

Con esto hemos probado que, para demostrar el teorema, no perdemos generalidad si suponemos que Y es un esquema local y que y es su punto cerrado. Mantenemos la notación $X = \operatorname{Esp} B$, $Y = \operatorname{Esp} A$. Como B es una A-álgebra de tipo finito, tenemos un epimorfismo $A[X_1, \ldots, X_n] \longrightarrow B$, que nos da una inmersión cerrada $X \longrightarrow A_A^n$, que a su vez podemos componer con la inmersión abierta $A_A^n \longrightarrow \mathrm{P}_A^n$, con lo que tenemos una inmersión $X \longrightarrow \mathrm{P}_A^n$ definida sobre A, es decir, tenemos que f es un homomorfismo cuasiproyectivo.

El teorema A.25 implica que x es aislado en X_y, luego está contenido en el abierto que aparece en el enunciado del teorema A.23. Así pues, restringiendo X a dicho abierto (o, mejor, a un entorno afín de x contenido en él), podemos descomponer f como una inmersión abierta $i : X \longrightarrow X'$ seguida de un homomorfismo finito $f' : X' \longrightarrow Y$. Supongamos que probamos el teorema para f' (que, obviamente, será no ramificado o llano en x si f lo es). Tendremos entonces un abierto $U \subset X'$ tal que $f'|_U$ es composición de una inmersión (abierta o cerrada) seguida de un homomorfismo llano canónico. Podemos tomar $U \subset i[X]$, y entonces la misma conclusión vale para f.

En definitiva, no perdemos generalidad si suponemos que f es finito, es decir, que B es un A-módulo finitamente generado.

Como la extensión $k(x)/k(y)$ es finita y separable, tiene un elemento primitivo $\alpha \in k(x)$ no nulo. Notemos que $\{x\}$ es abierto en X_y, así como que $\mathcal{O}_{X_y}(\{x\}) = k(x)$, luego podemos considerar $\alpha \in \mathcal{O}_{X_y}(\{x\})$. Por la propia definición de haz, existe un $b' \in \mathcal{O}_{X_y}(X_y)$ tal que $b'|_{\{x\}} = \alpha$ y $b'|_{X_y \setminus \{x\}} = 0$.

Por otra parte, $\mathcal{O}_{X_y}(X_y) = B \otimes_A (A/\mathfrak{p})$, luego $b' = b \otimes 1$, para cierto $b \in B$. Tenemos así un $b \in \mathcal{O}_X(X)$ tal que $b_x = \alpha$ y $b_{x'} = 0$, para todo $x' \in X_y \setminus \{x\}$. Sea $C = A[b]$, que define un esquema $X' = \operatorname{Esp} C$ y nos da un diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d] & Y \\ X' \arrow[ur, "f'"'] & \end{tikzcd}$$

Sea x' la imagen de x en X'. Si x se corresponde con un ideal $\mathfrak{q}$ de B, entonces x' se corresponde con $\mathfrak{r} = C \cap \mathfrak{q}$. Observemos que $\mathfrak{q}$ y, por consiguiente, $\mathfrak{r}$, contienen a b. Por el contrario, cualquier otro ideal de X_y distinto de x contiene a b. Esto prueba que x es la única antiimagen de x' en X.

Notemos ahora que $B_{\mathfrak{r}}$ es un anillo local con $\mathfrak{q}$ como único ideal maximal. En efecto, los ideales de $B_{\mathfrak{r}}$ se identifican con los ideales $\mathfrak{s}$ de B tales que $\mathfrak{s} \cap C \subset \mathfrak{r}$, pero, si $\mathfrak{s}$ cumple esto, el teorema del ascenso [3.67], existe un ideal $\mathfrak{q}'$ en B tal que $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{q}'$ y $\mathfrak{q}' \cap C = \mathfrak{r}$, luego ha de ser $\mathfrak{q}' = \mathfrak{q}$, y así $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{q}$.

Como $C_{\mathfrak{r}}$ es plano sobre C, el homomorfismo $C_{\mathfrak{r}} \longrightarrow B_{\mathfrak{r}}$ es inyectivo y $B_{\mathfrak{r}}$ es un $C_{\mathfrak{r}}$-módulo finitamente generado. Además, es claro que

$$(B_{\mathfrak{r}}/C_{\mathfrak{r}}) \otimes_{C_{\mathfrak{r}}} (C_{\mathfrak{r}}/\mathfrak{r}) = 0,$$

luego el lema de Nakayama [4.51] implica que $C_{\mathfrak{r}} = B_{\mathfrak{r}}$. En términos de esquemas tenemos un isomorfismo

$$X \times_{X'} \operatorname{Esp} \mathcal{O}_{X',x'} \longrightarrow \operatorname{Esp} \mathcal{O}_{X',x'},$$

luego podemos aplicarle a él y a su inverso el teorema A.29, lo que nos da un entorno U de x' y un isomorfismo $X \times_{X'} U \longrightarrow U$. Así pues, sustituyendo X por el abierto $X \times_{X'} U$, tenemos un diagrama conmutativo idéntico al anterior salvo que ahora la flecha vertical es una inmersión abierta. Vemos, entonces, que basta probar el teorema para f'. Como en la reducción precedente (al caso en que f es finito), podemos sustituir a B por C o, lo que es lo mismo, podemos suponer que $B = A[b]$.

Tenemos entonces que $\mathcal{O}_{X_y}(X_y) = B \otimes_A k(y) = k(x) = k(y)[\alpha]$, luego podemos tomar una base de $B \otimes_A k(y)$ sobre $k(y)$ de la forma $1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}$. Sea $N = \langle 1, b, \ldots, b^{n-1} \rangle_A \subset B$. Es claro que $(B/N) \otimes_A k(y) = 0$, luego aplicando de nuevo el lema de Nakayama concluimos que $B = N$, luego podemos expresar b^n como combinación lineal de $1, \ldots, b^{n-1}$, es decir, existe un polinomio mónico $P(T) \in A[T]$ tal que $P(b) = 0$. Además, el homomorfismo de A-álgebras $A[T]/(P(T)) \longrightarrow B$ inducido por la evaluación en b es suprayectivo.

Notemos que la imagen de $P(T)$ en $k(y)[T]$ es el polinomio mínimo de α, que es separable, luego $P'(\alpha) \neq 0$, luego $b' = P'(b) \in B$ es no nulo en $k(x)$, luego $x \in D(b')$. Cambiando X por el abierto principal $D(b')$ cambiamos B por $B_{b'}$ y tenemos un epimorfismo

$$D = (A[T]/(P(T)))_{P'(T)} \longrightarrow B.$$

Si llamamos $Z = \operatorname{Esp} D$, tenemos que se cumple el teorema en el caso en que x es no ramificado. Supongamos ahora que x es llano. Sea $\mathfrak{r}$ la antiimagen de $\mathfrak{q}$ en D y sea I el núcleo del epimorfismo natural $\psi : D_{\mathfrak{r}} \longrightarrow B_{\mathfrak{q}}$. Como $B_{\mathfrak{q}}$ es plano sobre $A_{\mathfrak{p}} = A$, la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow I \longrightarrow D_{\mathfrak{r}} \xrightarrow{\psi} B_{\mathfrak{q}} \longrightarrow 0$$

da lugar a la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow I \otimes_A k(y) \longrightarrow D_{\mathfrak{r}} \otimes_A k(y) \longrightarrow B_{\mathfrak{q}} \otimes_A k(y) \longrightarrow 0.$$

Observemos ahora que $\psi\otimes k(y)$ es un isomorfismo. En primer lugar, notamos que, como el homomorfismo natural $B\otimes_A k(y) \longrightarrow k(x)$ es un isomorfismo, también lo es el homomorfismo natural $B_{\mathfrak{q}}\otimes_A k(y) \longrightarrow k(x)$. Similarmente, el homomorfismo natural $(A[T]/(P(T))\otimes_A k(y)) \longrightarrow k(x)$ es un isomorfismo, y también lo es $D_{\mathfrak{r}}\otimes_A k(y) \longrightarrow k(x)$. La composición de ambos isomorfismos es $\psi\otimes k(y)$. Por otra parte, el epimorfismo natural $D_{\mathfrak{r}}\otimes_A k(y) \longrightarrow k(\mathfrak{r})$ es también un isomorfismo (dado que el producto tensorial es un cuerpo).

Concluimos entonces que $I\otimes_A k(y) = 0$. Ahora observamos que

$$I\otimes_{D_{\mathfrak{r}}} k(\mathfrak{r}) = I\otimes_{D_{\mathfrak{r}}} D_{\mathfrak{r}}\otimes_A k(y) = I\otimes_A k(y) = 0,$$

y el lema de Nakayama nos da entonces que $I = 0$, luego ψ es un isomorfismo. El teorema A.19 implica entonces que g se restringe a una inmersión abierta en un entorno de x. ■

Como consecuencia inmediata:

Teorema A.31 *Si $f : X \longrightarrow Y$ es un homomorfismo de tipo finito entre esquemas localmente noetherianos, el conjunto de puntos de X donde f es llano es abierto (tal vez vacío).*

Veamos otra aplicación:

Teorema A.32 *Sean X e Y esquemas de tipo finito sobre un esquema S localmente noetheriano y sea $f : X \longrightarrow Y$ un homomorfismo definido sobre S. Si f es llano en un punto $x\in X$, entonces el homomorfismo natural $\phi : (f^*\Omega^1_{Y/S})_x \longrightarrow (\Omega^1_{X/S})_x$ es un isomorfismo. Recíprocamente, si ϕ es un isomorfismo, X es suave en x sobre S e Y es suave en $f(x)$ sobre S, entonces f es llano en x.*

Demostración: Notemos que $(f^*\Omega^1_{Y/S})_x = (\Omega^1_{Y/S})_y \otimes_{\mathcal{O}_{Y,y}} \mathcal{O}_{X,x}$, donde $y = f(x)$. Si x es llano en X, como el teorema es local, no perdemos generalidad si suponemos que f es un homomorfismo llano canónico. Esto significa que $S = \operatorname{Esp} A$, $Y = \operatorname{Esp} B$ y $X = \operatorname{Esp} C'$, donde $C = B[X]/(P(x))$ y $C' = C_{p'(x)}$. Ésta es justo la situación estudiada antes del teorema 7.38, donde hemos demostrado que $\Omega^1_{B/A}\otimes_C C' \cong \Omega^1_{C'/A}$. En términos de esquemas esto equivale a que $f^*\Omega^1_{Y/S}\cong\Omega^1_{X/S}$.

Supongamos ahora que ϕ es un isomorfismo. Entonces 7.41 implica que $(\Omega^1_{X/Y})_x = 0$, luego f es no ramificado en x por el teorema A.28. Cambiando X e Y por abiertos menores, el teorema A.30 nos permite descomponer f como una inmersión cerrada $g : X \longrightarrow Z$ seguida de un homomorfismo llano canónico $h : Z \longrightarrow Y$. Por la parte ya probada, tenemos que $h^*\Omega^1_{Z/S}\cong\Omega^1_{Y/S}$, luego g cumple también la hipótesis del teorema. Consecuentemente, no perdemos generalidad si suponemos que f es una inmersión cerrada.

Por el teorema 7.53 obtenemos que $\dim_x X_s = \dim_y Y_s$, y ahora basta razonar con f como en la prueba de dicho teorema razonábamos con la inmersión cerrada $X \longrightarrow Z$. Esto nos da que f se restringe a una inmersión abierta en un entorno de x, luego ciertamente es llano en x. ■

Con esto podemos relacionar los homomorfismos llanos con los homomorfismos suaves en general:

Teorema A.33 *Sea S un esquema localmente noetheriano y $f : X \longrightarrow S$ un homomorfismo suave en un punto $x \in X$. Entonces existe un entorno abierto U de x tal que $f|_U$ se descompone como un homomorfismo $g : U \longrightarrow A_S^n$ llano en x seguido del homomorfismo natural $A_S^n \longrightarrow S$.*

DEMOSTRACIÓN: No perdemos generalidad si suponemos que $S = \operatorname{Esp} A$ y $X = \operatorname{Esp} B$ son afines. Por 7.53 sabemos que $(\Omega^1_{X/S})_x$ es un $\mathcal{O}_{X,x}$-módulo libre de rango n. Sea $df_1, \ldots, df_n$ una base. Restringiendo X, podemos suponer que $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{O}_X(X) = B$. Sea $\phi : A[T_1, \ldots, T_n] \longrightarrow B$ el homomorfismo dado por $T_i \mapsto f_i$, sea $Y = A_S^n$ y sea $g : X \longrightarrow Y$ el homomorfismo asociado a ϕ. Es claro que el homomorfismo natural $(g^*\Omega^1_{Y/S})_x \longrightarrow (\Omega^1_{X/S})_x$ cumple que $dT_i \mapsto df_i$, por lo que es suprayectivo y, como ambos $\mathcal{O}_{X,x}$-módulos son libres del mismo rango, ha de ser un isomorfismo. (Tengamos presente que $\mathcal{O}_{X,x}$ es un dominio íntegro, luego un homomorfismo de $\mathcal{O}_{X,x}$-módulos libres se extiende a una aplicación lineal entre espacios vectoriales sobre el cuerpo de cocientes.) El teorema anterior implica que g es llano en x. ■

Como consecuencia inmediata obtenemos el teorema siguiente:

Teorema A.34 *Sea S un esquema localmente noetheriano y $f : X \longrightarrow S$ un homomorfismo de tipo finito. Entonces, el conjunto de puntos de X donde f es suave es abierto en X (tal vez vacío).*

DEMOSTRACIÓN: Basta tener en cuenta el teorema anterior, el teorema A.31, así como que el homomorfismo estructural $A_S^n \longrightarrow S$ es suave. ■

Bibliografía

[1] Cornell, G., Silvermann, J. (Eds.) *Arithmetic Geometry.* Springer, New York, 1986.

[2] Grothendieck, A., Dieudonné, J. *Élements de Géométrie Algébrique.* Publ. Math. IHES, 4, 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32, 1960–1967.

[3] Hartshorne, R. *Algebraic Geometry.* Springer, New York, 1977.

[4] Hilton, P. J., Stammbach, U. *A Course in Homological Algebra.* Springer, New York, 1971.

[5] Kunz, E. *Introducction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry.* Birkhäuser, Boston, 1991.

[6] Liu, Q. *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves.* Oxford University Press, 2002.

[7] Matsumura, H. *Commutative Algebra.* Benjamin, New York, 1970.

[8] Milne, J. S. *Abelian Varieties.* en [1], pp. 103–150.

[9] Miyanishi, M. *Algebraic Geometry.* American Mathematical Society, 1994.

[10] Mumford, D. *Abelian Varieties.* Oxford University Press, 1970.

[11] Rotman, J.J. *Notes on Homological Algebra.* Van Nostrand, New York, 1970.

[12] Shafarevich, I. R. *Basic Algebraic Geometry 1–2.* Springer, New York, 1994.

Índice de Materias