



Peter Nikolaj Weakley, 3.f

---

# Jordskælvssikring af bygninger

Matematik & Fysik

Rosborg Gymnasium og HF

---

Opgavens omfang er 41.875 tegn svarende til 17,45 sider.

## Abstract:

This study investigates the causes of buildings collapsing during earthquakes, with the purpose of trying to understand this problem. There are multiple significant factors that play a role in these collapses, but a key one is resonance. To understand the precise effect of resonance, this study uses a combination of Newton's second law and Hooke's law to model harmonic oscillation in a building, and a simple sine function to model longitudinal seismic waves. A differential equation is formulated, the solution to which describes the motion of the building's top in response to the earthquake waves. By graphing this mathematical function, the amplitude of the building oscillations that result for various ratios between the building's natural frequency and the earthquake frequency can be observed. However, to fully understand the effect of resonance it is critical to have a physical reference. The study therefore includes a scientific experiment which tests the effects of simulated earthquake movement on a model building. The experiment verifies that resonance does in fact play a major role in the amplitude of the oscillation at the top of the building, while also showing evidence of a dampening effect (not modelled in the mathematical analysis). Finally, the study examines engineering techniques used to minimise the effects of earthquakes on buildings.

## Indholdsfortegnelse:

1. Indledning: .....	3
2. Jordskælvsbølger: .....	4
3. Resonans: .....	5
4. Opstilling af højhusmodel: .....	6
4.1 Den partikulære løsning: .....	11
4.2 Den homogene løsning: .....	13
4.2.1 Bevis for den homogene løsning: .....	14
4.3 Den fuldstændige løsning: .....	16
4.4 Den numeriske løsning: .....	18
5. Eksperiment af højhusmodel: .....	21
6. Diskussion: .....	25
7. Den virkelige verden: .....	30
7.1 Moderne jordskælvssikring: .....	31
8. Konklusion: .....	33
9. Litteraturliste: .....	34
10. Bilag: .....	36

## 1. Indledning:

De fleste har på et givent tidspunkt i deres liv set de ekstensive uroligheder og fysiske skader, som et jordskælv har forårsaget. Uanset om det har været på tv, eller om man fysisk har været til stede, så har det haft en negativ betydning for mange mennesker. Af dette kan det udledes, at det er svært at modvirke effekterne af disse jordskælv, siden der jævnligt ses eksempler, hvor bygningerne ikke har været i stand til at modstå jordskælvets voldsomme effekt. Så vidt forskere kan se, er der intet det tyder på, at deres hyppighed vil mindskes, tværtimod<sup>1</sup>. Men selvom at jordskælvene ikke umiddelbart kan forhindres, så kan deres katastrofale indflydelse på bygninger undersøges og potentielt formindskes.

Denne opgave vil på baggrund af dette først karakterisere de rystelser, der i jordskælvsaktive områder på jorden udgør en konstant trussel for befolkningen. Herefter vil den forsøge at udfolde en eksperimentel undersøgelse af en simpel højhusmodels respons på en jordskælvslignende rystelse samt en matematisk analyse og modellering af systemet. Opgaven vil desuden indeholde en redegørelse for bevægelsesligningen og dens entydige analytiske- og numeriske løsning. Sidst vil opgaven perspektivere de hidtil opnåede resultater fra opgaven med praktisk anvendte metoder for jordskælvssikring af bygninger.

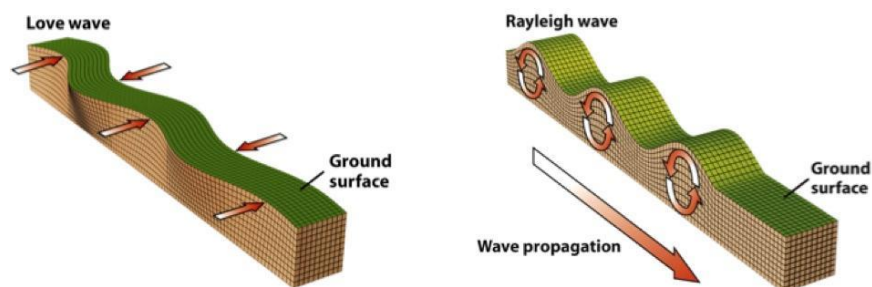
---

<sup>1</sup> <https://www.theguardian.com/world/2017/nov/18/2018-set-to-be-year-of-big-earthquakes>

## 2. Jordskælvsbølger:

Når et jordskælv forekommer, kan 4 typer af seismiske bølger følge, som vil sprede sig ud fra jordskælvets hypocenter, der er centrum for energiens opståen<sup>2</sup>. Disse seismiske bølger kan opdeles i 2 kategorier: de bølger der bevæger sig langs jordens overflade, og de bølger som bevæger sig igennem jorden, herunder p- og s-bølger. P- og s-bølgers varighed er typisk for kort til at kunne skabe resonans i en bygning<sup>3</sup>, og disse undlades derfor fra opgaven. Overfladebølgerne er dog særligt relevante, da deres følgen hen ad jordens overflade har stor betydning for, om der opstår resonans i en bygning<sup>4</sup>. Det er altså denne type af seismiske bølger, der afgør om bygninger vælter og dermed bliver en trussel for befolkningen. Der findes 2 typer af overfladebølger ved jordskælv<sup>5</sup>: rayleigh-bølger og love-bølger. Karakteristisk for rayleigh-bølger er det, at de svinger i tilbagegående elliptiske bevægelser i alle retninger (x, y og z). Desuden har rayleigh-bølger en tendens til at have højere amplitude samt længere varighed end love-bølger. Disse er generaliseret som værende bølger i 2 retninger (x og y) med kort varighed samt en særdeles mindre amplitude end rayleigh-bølger<sup>6</sup>.

I nedenstående figur vises overfladebølgernes bevægelsesegenskaber. Af disse kan det uddrages, at begge kan skabe resonans, men at rayleigh-bølgerne ofte vil være årsagen bag resonansen, medmindre jordskælvet er forekommet indenfor en tættere distance.



Figur 1: Typer af overfladebølger<sup>7</sup>

<sup>2</sup> <https://en.wikipedia.org/wiki/Epicenter>

<sup>3</sup> E-mail fra seismolog. Den kan findes i bilag.

<sup>4</sup> E-mail fra seismolog. Den kan findes i bilag.

<sup>5</sup> [http://geus.net/e-learning/njs/njs\\_iff\\_03\\_07.html](http://geus.net/e-learning/njs/njs_iff_03_07.html)

<sup>6</sup> E-mail fra seismolog. Den kan findes i bilag.

<sup>7</sup> [http://classconnection.s3.amazonaws.com/934/flashcards/2198934/jpg/surface\\_waves1351638656348.jpg](http://classconnection.s3.amazonaws.com/934/flashcards/2198934/jpg/surface_waves1351638656348.jpg)

### 3. Resonans:

Alle objekter på jorden har en egenfrekvens, også kaldet en naturlig frekvens<sup>8</sup>. Den defineres, som den frekvens et objekt vibrerer med, når det er under fysisk indflydelse<sup>9</sup>. Forskellige objekter vil altså vibrere med forskellige frekvenser<sup>10</sup>. Hvis 2 systemer forbundet sammen svinger med samme frekvens, vil der opstå en energioverførsel, som forårsager en stigning i bølgenes amplitude<sup>11</sup>. Dette fænomen kaldes resonans<sup>12</sup>.

Tilsvarende har bygninger altså også en egenfrekvens, og det betyder, at denne ikke skal være i nærheden af andre systemers frekvenser. Et sådant system, der kan påvirke bygninger med givne frekvenser, er blandt andet love- og rayleigh-bølger fra jordskælv. Forholdet imellem bygningers egenfrekvens og overfladebølgers frekvenser er derfor af væsentlig betydning. Hvis et jordskælvs overfladebølger påvirker bygningen med en frekvens, der er tæt på dens egenfrekvens, medfører det, at bygningen vil begynde at svaje frem og tilbage med større og større amplitude, hvilket i værste tilfælde kan føre til, at bygningen styrter sammen<sup>13</sup>. Derfor må det være essentielt at undersøge hvad en bygnings egenfrekvens afhænger af. Men hvad er ovenstående resonansteori baseret på, og hvilke faktorer har en påvirkning i denne? For at besvare dette, må teorien undersøges.

---

<sup>8</sup> <http://www.physicsclassroom.com/class/sound/Lesson-4/Natural-Frequency>

<sup>9</sup> <http://www.physicsclassroom.com/class/sound/Lesson-4/Natural-Frequency>

<sup>10</sup> <http://www.physicsclassroom.com/class/sound/Lesson-4/Natural-Frequency>

<sup>11</sup> <https://da.wikipedia.org/wiki/Egenfrekvens>

<sup>12</sup> <https://da.wikipedia.org/wiki/Egenfrekvens>

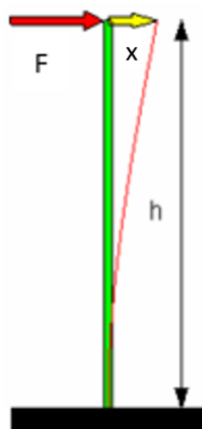
<sup>13</sup> <https://da.wikipedia.org/wiki/Egenfrekvens>

## 4. Opstilling af højhusmodel:

Ved i teorien at danne et overblik for en simpel højhusmodel under et jordskælv, kan forholdet imellem en given bygnings frekvens og et jordskælvs forstås bedre. En modellering af et højhus kan demonstreres ved at fastsætte en stang med en given masse samt højde. Hvis stangen i toppen af bygningen tilføres en kraft, vil den bevæge sig stykket  $x$ . Dette beskriver Hookes lov i følgende formel:  $F = -k \cdot x$ , hvor  $F$  er kraften,  $x$  er stangens bevægelse, og  $k$  er en konstant, der beskriver en given fjeders stivhed, som i dette tilfælde er stangens<sup>14</sup>. Gældende for denne bjælkestivhed er flere faktorer, der beskrives ved:

$$k = \frac{3E \cdot I_x}{h^3}$$

hvor  $E$  er bjælkens elasticitetsmodul, og  $I_x$  er bøjningsinertimoment af bjælkens tværsnitsareal<sup>15</sup>.



Figur 2: Bjælkestivheden beskrevet ved Hookes lov<sup>16</sup>

Når stangen påvirkes af en given kraft, vil den bevæge sig stykket  $x$  til tiden  $t$ , også kaldet  $x(t)$ . Denne bevægelse til tiden  $t$  resulterer i en hastighed per tid, altså  $x'(t)$ . Når denne hastighed yderligere differentieres, fås en acceleration per tid, givet ved  $x''(t)$ <sup>17</sup>.

<sup>14</sup> [https://en.wikipedia.org/wiki/Hooke%27s\\_law](https://en.wikipedia.org/wiki/Hooke%27s_law)

<sup>15</sup> <http://www2.mat.dtu.dk/education/gymnasieopgaver/opgaver/jordskaelv.pdf>

<sup>16</sup> <http://www2.mat.dtu.dk/education/gymnasieopgaver/opgaver/jordskaelv.pdf>

<sup>17</sup> <http://www2.mat.dtu.dk/education/gymnasieopgaver/opgaver/jordskaelv.pdf>

Massen af stangen regnes for at være masseløs. Dog tilføres en punktmasse på toppen af den, som bevirker, at der er tale om et fjedersystem<sup>18</sup>. Jo større punktmasse i toppen, desto mindre betydning har undladelsen af stangens masse.

Accelerationen for et givent legeme beskrives blandt andet i Newtons 2. lov som:  $F=m \cdot a$ <sup>19</sup>, hvor accelerationen,  $a = x''$ , og massen af stangen er  $m$ . Hvis dette forbindes med resultatet af Hookes lov, fås følgende:

$$m \cdot x''(t) = -k \cdot x(t)$$

hvor  $x(t)$  er massens udsving til tiden  $t$ , og  $k$  er bjælkestivheden. Desuden kan en funktion for egenfrekvensen, på baggrund af denne udledes. Ovenstående ligning kan også skrives som:

$$y'' = -c \cdot y, \text{ hvor } c = \frac{k}{m} \quad (1)$$

Heraf observeres det, at en negativ variabel er lig med sig selv dobbeltafledet. Cosinus (eller sinus) differentieret 2 gange er lig med sig selv med modsat tegn, lidt på samme måde som  $e^x$  differentieret giver sig selv. Heraf antages det, at løsningen ser ud som følgende:

$$y = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi), \text{ hvor } \omega = \text{faseforskydning}^{20} \quad (2)$$

Nu differentieres  $y$  ved brug af reglen for differentiering af sammensat funktion<sup>21</sup>:

$$y' = A \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

Dette gentages for at få  $y''$ :

$$y'' = -A \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$$

Denne  $y''$  og  $y$  værdi sættes nu ind i differentialligningen (1):

$$-A \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) = -\frac{k}{m} \cdot A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$$

---

<sup>18</sup> <http://www2.mat.dtu.dk/education/gymnasieopgaver/opgaver/jordskaelv.pdf>

<sup>19</sup> [https://da.wikipedia.org/wiki/Newtons\\_anden\\_lov](https://da.wikipedia.org/wiki/Newtons_anden_lov)

<sup>20</sup> <http://www.webmatematik.dk/lektioner/sarligt-for-htx/trigonometri/svingninger-og-periodiske-funktioner>

<sup>21</sup> Nielsen, Knud Erik og Esper Fogh, *Vejen til matematik A2*, HAX, 2011, side 86



Dette reduceres til:

$$-\omega^2 = -\frac{k}{m}$$

$$\Updownarrow$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Af denne udledning kan det konstateres, at ligning (2) er løsning til differentialligning (1), og at  $\omega$  er lig med  $\sqrt{\frac{k}{m}}$ . Da tiden er regnet i sekunder, og sinusfunktionen har radian som enhed, er:

$$\omega = f \cdot 2\pi$$

Derfor gælder følgende:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad ^{22}$$

Ligningen (2) viser, at hver gang bjælken bliver sat i bevægelse, uafhængigt af amplituden, vil den svinge med ovenstående frekvens. Denne frekvens er bestemt alene af massen og bjælkestivheden og kaldes systemets egenfrekvens<sup>23</sup>. Massen i ovenstående ligning for egenfrekvensen tager dog ikke forbehold for et højhus' masse i den virkelige verden<sup>24</sup>. Hvis modellens punktmasse sættes lig med højhusets masse, vil modellens egenfrekvens ende med at være alt for lav, da massen i modellen er placeret som punktmasse på toppen. I realiteten er bygningens masse naturligvis fordelt over hele bygningen. Ved at opstille følgende divisionsstykke for punktmassen kan en ækvivalent masse opstilles, som giver en realistisk og repræsentativ egenfrekvens tilsvarende rigtige bygninger<sup>25</sup>.

---

<sup>22</sup> <http://homes.civil.aau.dk/lda/Notes/DYNAMIK.pdf>

<sup>23</sup> <http://homes.civil.aau.dk/lda/Notes/DYNAMIK.pdf>

<sup>24</sup> <http://www2.mat.dtu.dk/education/gymnasieopgaver/opgaver/jordskaelv.pdf>

<sup>25</sup> <http://www2.mat.dtu.dk/education/gymnasieopgaver/opgaver/jordskaelv.pdf>

Divisionsstykket er beskrevet i følgende:

$$m_e = \frac{1}{4} \cdot m_h, \quad f_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m_e}}$$

hvor  $m_e$  er den ækvivalente masse, og  $m_h$  er højhusets masse, der er defineret som punktmassen i toppen og ikke bjælkens masse. Hermed kan der ved at anvende den ækvivalente masse findes en egenfrekvens, der tilsvarende er realistisk i forhold til den virkelige verden.

Indtil videre har modellen ikke omfattet jordskælvsrystelser. Derfor forestilles det nu, at stangen, der repræsenterer et højhus, bliver udsat for vandrette jordrystelser, der simulerer overfladebølger fra et jordskælv. Det antages, at stangens fundament til tiden  $t$  har bevæget sig stykket  $\delta(t)$ .

Udsvinget af den nyfundne ækvivalente masse  $m_e$  kaldes nu  $x(t)$ , og ved at huske tilbage til Hookes lov, som omfattede:  $F = -k \cdot x$ , kan det konstateres, at den nye u værdi, der tager forbehold for et bevægende fundament samt toppens udsving, må være  $x(t) - \delta(t)$ <sup>26</sup>.



Figur 3: Forholdet mellem massens udsving og fundamentets udsving<sup>27</sup>.

<sup>26</sup> <http://www2.mat.dtu.dk/education/gymnasieopgaver/opgaver/jordskaelv.pdf>

Heraf kan modelleringen af en longitudinal bølge fra et jordskælv defineres som<sup>28</sup>:

$$\delta(t) = \delta_0 \cdot \sin \cdot (2\pi \cdot f_s \cdot t)$$

Af denne funktion gælder det, at  $\delta_0$  er amplituden af bølgerne, og at  $f_s$  er frekvensen per sekund, som har enheden hertz. Da tiden er regnet i sekunder, og sinusfunktionen har radian som enhed, er det nødvendigt at gange frekvensen med  $2\pi$ <sup>29</sup>.

Ved at kigge tilbage på differentialligningen:

$$m_e \cdot x''(t) = -k \cdot x(t)$$

kan den nye værdi for  $x$ , taget fra Hookes lov, nu indsættes. Den nye ligning, med forbehold for fundamentets bevægelse samt punktmassens udsving bliver dermed:

$$m_e \cdot x''(t) = -k \cdot (x(t) - \delta(t))$$

Dette kan med den nye værdi for  $\delta(t)$  omformes til:

$$m_e \cdot x''(t) + k \cdot x(t) = k \cdot \delta_0 \cdot \sin \cdot (2\pi \cdot f_s \cdot t)$$

Der er nu tale om en inhomogen differentialligning af 2. orden<sup>30</sup>. Denne differentialligning beskriver en bygnings svingninger i forhold til et jordskælvs frekvens, og en forståelse af denne er af stor relevans for opgaven. Af den grund vil differentialligningen i det følgende blive løst. Dog vil dens løsning blive delt op i flere trin, da det er en kompleks differentialligning. For at løse denne differentialligning vil den partikulære løsning først blive fundet. Herefter kan differentialligningen sættes til at være lig med 0 og dermed blive regnet ud som en homogen løsning<sup>31</sup>. En sammenkobling af den homogene og partikulære løsning giver den fuldstændige løsning<sup>32</sup>.

---

<sup>27</sup> <http://www2.mat.dtu.dk/education/gymnasieopgaver/opgaver/jordskaelv.pdf>

<sup>28</sup> <http://www2.mat.dtu.dk/education/gymnasieopgaver/opgaver/jordskaelv.pdf>

<sup>29</sup> <https://en.wikipedia.org/wiki/Radian>

<sup>30</sup> <http://www.webmatematik.dk/lektioner/matematik-a/differentialligninger/inhomogene-lineare-forsteordens-differentialligninger>

<sup>31</sup> Nielsen, Knud Erik og Esper Fogh, *Vejen til matematik A2*, HAX, 2011, side 252

<sup>32</sup> Nielsen, Knud Erik og Esper Fogh, *Vejen til matematik A2*, HAX, 2011, side 252

## 4.1 Den partikulære løsning:

Det første trin i processen for at finde den fuldstændige løsning er at finde en partikulær løsning<sup>33</sup>. For at finde den partikulære løsning er det dog krævet, at en funktion for  $x(t)$  er fundet, som netop løser hele differentialligningen. I dette tilfælde er det givet, at den partikulære løsning er af formen<sup>34</sup>:

$$x(t) = x_0 \cdot \sin(\omega_s \cdot t), \text{ hvor } \omega_s = 2\pi \cdot f_s$$

Ved hjælp af reglen for sammensat funktion<sup>35</sup> kan  $x''(t)$  regnes ud til at være:

$$x''(t) = -x_0 \cdot \omega_s^2 \cdot \sin(\omega_s \cdot t)$$

For at finde den partikulære løsning skal  $x(t)$  og  $x''(t)$  indsættes i den inhomogene differentialligning, der i kombination med den tidligere angivne værdi for  $\delta(t)$  hedder:

$$m_e \cdot x''(t) + k \cdot x(t) = k \cdot \delta_0 \cdot \sin(\omega_s \cdot t)$$

Ved denne indsættelse fås:

$$m_e \cdot -x_0 \cdot \omega_s^2 \cdot \sin(\omega_s \cdot t) + k \cdot x_0 \cdot \sin(\omega_s \cdot t) = k \cdot \delta_0 \cdot \sin(\omega_s \cdot t)$$

Af denne ligning kan leddene med sinus reduceres væk:

$$\begin{aligned} m_e \cdot -x_0 \cdot \omega_s^2 \cdot \frac{\sin(\omega_s \cdot t)}{\sin(\omega_s \cdot t)} + k \cdot x_0 \cdot \frac{\sin(\omega_s \cdot t)}{\sin(\omega_s \cdot t)} &= k \cdot \delta_0 \cdot \frac{\sin(\omega_s \cdot t)}{\sin(\omega_s \cdot t)} \\ \Downarrow \\ m_e \cdot -x_0 \cdot \omega_s^2 + k \cdot x_0 &= k \cdot \delta_0 \end{aligned}$$

Isoleringen af  $x_0$  fra ovenstående ligning ser således ud:

$$\begin{aligned} x_0 \cdot (k - m_e \cdot \omega_s^2) &= k \cdot \delta_0 \\ \Downarrow \\ x_0 &= \frac{k \cdot \delta_0}{k - m_e \cdot \omega_s^2} \end{aligned}$$

<sup>33</sup> Nielsen, Knud Erik og Esper Fogh, *Vejen til matematik A2*, HAX, 2011, side 252

<sup>34</sup> <http://www2.mat.dtu.dk/education/gymnasieopgaver/opgaver/jordskaelv.pdf>

<sup>35</sup> Nielsen, Knud Erik og Esper Fogh, *Vejen til matematik A2*, HAX, 2011, side 86

Denne kan yderligere reduceres ved at dividere  $k$  ud på højre side af lighedstegnet.

$$x_0 = \frac{\delta_0}{1 - \frac{m_e \cdot \omega_s^2}{k}}$$

Det sidste led i den partikulære løsning er nu fundet. Nedenfor ses den partikulære løsning, med det fundne led for  $x_0$ .

$$x(t) = \frac{\delta_0}{1 - \frac{m_e \cdot \omega_s^2}{k}} \cdot \sin(\omega_s \cdot t)$$

For at bekræfte teorien omhandlende isoleringen af  $x_0$ , samt at denne løsning gælder, indsættes løsningen for  $x(t)$  nu i den inhomogene differentialligning af 2. orden:

$$-m_e \cdot \frac{k \cdot \delta_0}{k - m_e \cdot \omega_s^2} \cdot \omega_s^2 \cdot \sin(\omega_s \cdot t) + k \cdot \frac{k \cdot \delta_0}{k - m_e \cdot \omega_s^2} \cdot \sin(\omega_s \cdot t) = k \cdot \delta_0 \cdot \sin(\omega_s \cdot t)$$

Sinus leddene divideres på begge sider:

$$-m_e \cdot \frac{k \cdot \delta_0}{k - m_e \cdot \omega_s^2} \cdot \omega_s^2 + k \cdot \frac{k \cdot \delta_0}{k - m_e \cdot \omega_s^2} = k \cdot \delta_0$$

Venstre side af lighedstegnet kan omskrives til:

$$\delta_0 \cdot k \cdot \frac{k - m_e \cdot \omega_s^2}{k - m_e \cdot \omega_s^2} = \delta_0 \cdot k$$

Hermed er en partikulær løsning til den inhomogene differentialligning af 2. orden fundet, hvilket betyder, at den homogene løsning nu kan findes.

## 4.2 Den homogene løsning:

I det ovenstående er en partikulær løsning til differentialligningen blevet fundet.

$$x(t) = \frac{\delta_0}{1 - \frac{m_e \cdot \omega_s^2}{k}} \cdot \sin(\omega_s \cdot t)$$

Når den partikulære løsning er fundet, kan funktionen til højre for lighedstegnet, også kaldet  $g(x)$ , sættes til at være lig med 0<sup>36</sup>, resulterende i en homogen differentialligning af 2. orden, som vist i det følgende:

$$m_e \cdot x''(t) + k \cdot x(t) = 0$$

For en ligning af denne type gælder sætningen<sup>37</sup>: Lad  $x$  være en løsning med definitionsmængde  $R$  til differentialligningen:

$$y'' = -k^2 \cdot y$$

For denne differentialligning findes da tal  $c_1$  og  $c_2$ , så der gælder:

$$x(t) = c_1 \cdot \cos(kx) + c_2 \cdot \sin(kx)$$

Fra denne sætning ses det, at løsningen til den homogene differentialligning

$$m_e \cdot x''(t) + k \cdot x(t) = 0$$

er lig med:

$$x(t) = c_1 \cdot \cos(k \cdot t) + c_2 \cdot \sin(k \cdot t)$$

Af denne løsning skal det huskes, at konstanten  $-k^2$  desuden indebærer både bjælkestivheden  $k$ , og punktmassen  $m$ . Dette kan bekræftes ved følgende udregning:

$$m_e \cdot a = k \cdot x \Leftrightarrow x'' = -\frac{k}{m_e} \cdot x \Leftrightarrow y'' = -\frac{k}{m_e} \cdot y$$

Den fuldstændige løsning, som beskriver en bygnings udsving under rystelser, er en sammenkobling af den homogene løsning og den partikulære løsning. For at bekræfte troværdigheden af den givne homogene løsning, samt at løsningen er entydig, vil et bevis af dette blive lavet.

---

<sup>36</sup> Nielsen, Knud Erik og Esper Fogh, *Vejen til matematik A2*, HAX, 2011, side 252

<sup>37</sup> Hebsgaard, Thomas og Hans Sloth, *Matematik for 1-årigt A-niveau*, Trip, 1999, side 183

### 4.2.1 Bevis for den homogene løsning:

Først vil det bekræftes, at løsningen er gældende for differentialligningen. Herefter vil det bevises, at løsningen er entydig:

$$y'' = -k^2 \cdot y$$

er lig med:

$$y = c_1 \cdot \cos(kx) + c_2 \cdot \sin(kx)$$

Ved hjælp af differentieringsreglen for en sammensat funktion<sup>38</sup> kan nedenstående

$$h(x) = f(g(x)) \Leftrightarrow h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

differentieres til:

$$y' = -k \cdot c_1 \cdot \sin(kx) + k \cdot c_2 \cdot \cos(kx)$$

Ved at anvende samme regel kan differentialligningen yderligere differentieres til:

$$y'' = -k^2 \cdot c_1 \cdot \cos(kx) - k^2 \cdot c_2 \cdot \sin(kx)$$

Af dette kan  $-k^2$  reduceres til:

$$y'' = -k^2 \cdot (c_1 \cdot \cos(kx) + c_2 \cdot \sin(kx))$$

Heraf kan delen af leddet på højre side af lighedstegnet substitueres af  $y$  som giver:

$$y'' = -k^2 \cdot y$$

Hermed kan det konkluderes at den anvendte løsning for  $y$ , altså er en given løsning til den homogene differentialligning. Men hvordan vides det, at denne løsning er den eneste, og at den ikke er en iblandt mange homogene løsninger?

---

<sup>38</sup> Nielsen, Knud Erik og Esper Fogh, *Vejen til matematik A2*, HAX, 2011, side 86

Først kigges der på funktionen  $f(x)$  og den differentierede funktion af  $f'(x)$  fra oven:

$$c_1 \cdot \cos(kx) + c_2 \cdot \sin(kx) = f(x)$$

$$-k \cdot c_1 \cdot \sin(kx) + k \cdot c_2 \cdot \cos(kx) = f'(x)$$

Herefter indføres begrebet hoveddeterminant. For en hoveddeterminant gælder følgende: Hvis løsningen for hoveddeterminanten ikke er lig med 0, findes der kun én løsning<sup>39</sup>. Hoveddeterminanten regnes ud, ved at opstille funktionerne i en matrix<sup>40</sup>:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Hoveddeterminanten for funktionerne ovenfor tages:

$$\begin{vmatrix} \cos(kx) & \sin(kx) \\ -k \cdot \sin(kx) & k \cdot \cos(kx) \end{vmatrix} = \cos(kx) \cdot k \cdot \cos(kx) - \sin(kx) \cdot -k \cdot \sin(kx)$$

$$\Updownarrow$$

$$d = k \cdot \cos^2(kx) + k \cdot \sin^2(kx)$$

Heraf bruges regnereglen<sup>41</sup>, der hedder:

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

Derfor fås:

$$d = k$$

Hvis det antages at  $k \neq 0$ , må det altså konkluderes at hoveddeterminanten er forskellig fra 0, og at der dermed kun er en løsning.

---

<sup>39</sup> Hebsgaard, Thomas og Hans Sloth, *Matematik for 1-årigt A-niveau*, Trip, 1999, side 184

<sup>40</sup> <https://en.wikipedia.org/wiki/Determinant>

<sup>41</sup> <http://www.purplemath.com/modules/idents.htm>



### 4.3 Den fuldstændige løsning:

Med den partikulære samt den homogene løsning fundet, kan den fuldstændige løsning fås ved at forbinde dem. Den fuldstændige løsning for den inhomogene differentialligning af 2. orden

$$m_e \cdot x''(t) + k \cdot x(t) = k \cdot \delta_0 \cdot \sin(\omega_s \cdot t)$$

ser altså således ud:

$$y = \frac{\delta_0}{1 - \frac{m_e \cdot \omega_s^2}{k}} \cdot \sin(\omega_s \cdot t) + c_1 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m_e}} \cdot t\right) + c_2 \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m_e}} \cdot t\right)$$

Dog skal en værdi for  $c_1$  og  $c_2$  defineres. Dette gøres ved at finde en  $x$  og  $y$  værdi. Det konstateres, at bygningens udsving ved tiden 0 må være 0. Heraf udregnes  $c_1$  som:

$$0 = \frac{\delta_0}{1 - \frac{m_e \cdot \omega_s^2}{k}} \cdot \sin(\omega_s \cdot 0) + c_1 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m_e}} \cdot 0\right) + c_2 \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m_e}} \cdot 0\right)$$

Da  $\sin(0)$  er lig med 0, kan udtrykket reduceres til:

$$c_1 = 0$$

På baggrund af denne  $c$  værdi må det konkluderes, at leddet med cosinus ikke er gældende for denne specifikke differentialligning. Ved at differentiere  $y$  og herefter angive dens værdi for 0, antages det at værdien for  $c_2$  kan findes. Dog må det først bekræftes at tangentens hældning til differentialligningen er 0 ved tiden 0. Dette gøres ved at vise at accelerationen ved tiden 0 er 0, som set i følgende:

$$m_e \cdot x''(0) + k \cdot x(0) = k \cdot \delta_0 \cdot \sin(\omega_s \cdot 0)$$

Dette reduceres til:

$$m_e \cdot x''(0) = -k \cdot x(0) \quad \Leftrightarrow \quad x''(0) = 0$$

$x(0) = 0$  fordi bygningen står helt lige når jordskælvet rammer ved  $t=0$ . Da accelerationen ved tiden 0 er lig med 0, må det gælde, at tangentens hældning til tiden 0 også er 0. Heraf kan  $c_2$  findes ved følgende:

$$y = \frac{\delta_0}{1 - \frac{m_e \cdot \omega_s^2}{k}} \cdot \sin(\omega_s \cdot t) + c_1 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m_e}} \cdot t\right) + c_2 \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m_e}} \cdot t\right)$$

Reglen for differentiering af sammensat funktion<sup>42</sup> anvendes og y differentieres:

$$y' = \frac{\omega_s \cdot \delta_0}{1 - \frac{m_e \cdot \omega_s^2}{k}} \cdot \cos(\omega_s \cdot t) + c_1 \cdot -\sqrt{\frac{k}{m_e}} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m_e}} \cdot t\right) + \sqrt{\frac{k}{m_e}} \cdot c_2 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m_e}} \cdot t\right)$$

Nu sættes y' til at være 0, til tiden 0 og funktionen reduceres:

$$0 = \frac{\omega_s \cdot \delta_0}{1 - \frac{m_e \cdot \omega_s^2}{k}} \cdot \sqrt{\frac{k}{m_e}} \cdot c_2$$

Herefter isoleres c2 og udtrykket reduceres yderligere til:

$$c_2 = \frac{\sqrt{m_e \cdot k} \cdot \delta_0}{k - m_e \cdot \omega_s^2}$$

Med den fundne værdi for c1 og c2 bliver den fuldstændige løsning:

$$y = \frac{\delta_0}{1 - \frac{m_e \cdot \omega_s^2}{k}} \cdot \sin(\omega_s \cdot t) + \frac{\sqrt{m_e \cdot k} \cdot \delta_0}{k - m_e \cdot \omega_s^2} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m_e}} \cdot t\right)$$

Denne beskriver svingningerne i højhusets top som følger af jordskælvet. Det ses at massen i høj grad er med til at afgøre, hvor meget bevægelse der vil være ved bygningens top. Jo højere masse, desto højere udsving. Dette kan ses i leddet af løsningen, der hedder:

$$\frac{\delta_0}{1 - \frac{m_e \cdot \omega_s^2}{k}}$$

Årsagen bag massens effekt bunder i, at leddet ovenfor er en bestemmelse for x0, altså toppens maksimale udsving. For at forstå den fuldstændige løsning bedre er det dog væsentligt at have en visuel forståelse for bevægelserne, som den viser. Derfor vil bevægelserne fra den fuldstændige løsning blive vist i det følgende.

---

<sup>42</sup> Nielsen, Knud Erik og Esper Fogh, *Vejen til matematik A2*, HAX, 2011, side 86

#### 4.4 Den numeriske løsning:

For at få en graf over bevægelsen for den teoretiske opstilling af højhusmodellen under resonans, vil der blive kigget på differentialligningen.

$$m_e \cdot x''(t) + k \cdot x(t) = k \cdot \delta_0 \cdot \sin(\omega_s \cdot t)$$

Det er denne sammenhæng, der i det ovenstående afsnit er blevet løst teoretisk. En numerisk løsning på baggrund af denne teori kan dog også opstilles og vises grafisk, resulterende i en meget bedre visuel forståelse for, hvordan denne sammenhæng ser ud. For at optegne denne sammenhæng, må ligningen omskrives til dimensionsløs form. Den dimensionsløse form indebærer, at der ikke er nogle enheder på de forskellige led og ser for ovenstående differentialligning således ud<sup>43</sup>:

$$\ddot{\bar{x}}(\bar{t}) + H \cdot \bar{x}(\bar{t}) = H \cdot \sin(\bar{t}), \text{ hvor } H = \left(\frac{\omega_0}{\omega_s}\right)^2 \text{ og } \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Med denne dimensionsløse form givet for den teoretiske sammenhæng kan en graf nu tegnes, som beskriver denne. Før der kigges på grafen, er det dog essentielt at forstå, hvilke faktorer der spiller en rolle. Af den dimensionsløse ligning ovenfor ses det, at H har en afgørende rolle. Det ses desuden, at  $\omega_0$  beskriver bjælkens egenfrekvens, og  $\omega_s$  beskriver jordskælvets frekvens. Forholdet imellem vinkelhastigheden,  $\omega$ , og frekvensen er:

$$\omega = 2\pi \cdot f$$

Hvor f er frekvensen for et givent system. Med denne ligning kan variablerne for H ændres til følgende:

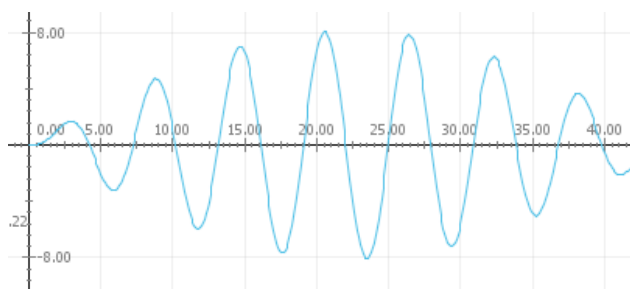
$$H = \left(\frac{2\pi \cdot f_0}{2\pi \cdot f_s}\right)^2 \Leftrightarrow H = \left(\frac{f_0}{f_s}\right)^2$$

Hvor  $f_0$  er egenfrekvensen for bygningen og  $f_s$  er frekvensen for jordskælv.

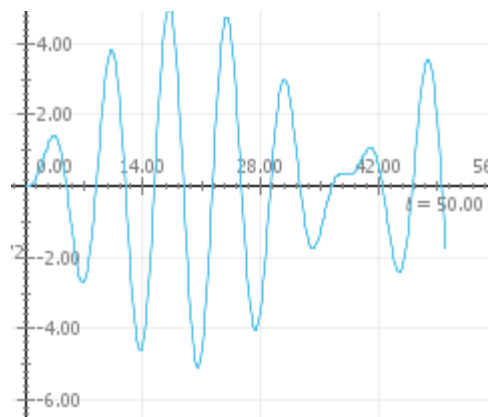
---

<sup>43</sup> PDF fil vist i bilag

Graferne nedenfor viser bevægelsen for den fuldstændige løsning. Hver af følgende grafer har en forskellig givet  $H$  værdi.



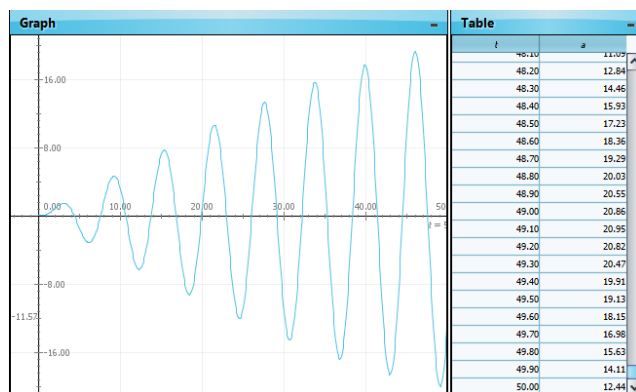
Figur 4: Graf fra modellen,  $H=1,3$



Figur 5: Graf fra programmet modellen,  $H=0,7$

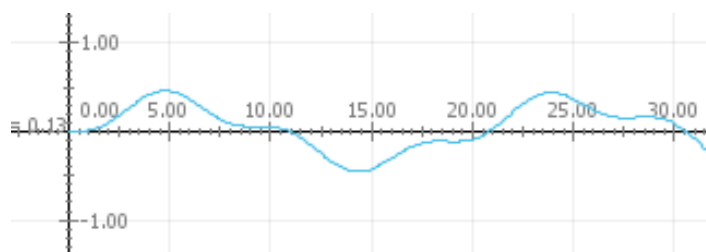
Hvis der kigges på figur 4 ses det, at  $H$  værdien beskriver et forhold imellem jordskælv og bygning, hvor jordskælvets frekvens er højere end bygningens egenfrekvens. Det kan observeres at amplituden i grafen, der repræsenterer bygningens tops amplitude ved tiden  $t$ , stadig påvirkes, men at amplituden efter en tid falder igen. Et lignende tilfælde ses i figur 5, hvor værdien for  $H$  beskriver et forhold, hvor jordskælvets frekvens er lavere end bygningens frekvens.

Her svinger bygningen stadig, men det noteres, at amplituden her ikke bliver tilsvarende høj som i figur 4. Nedenfor ses grafen, hvor et jordskælv påvirker en bygning med en frekvens svarende til bygningens. Her er  $H$  altså lig med 1.



Figur 6: Graf over den numeriske grafi modellen,  $H=1$

Det bemærkes, at amplituden stiger og i modsætning til figur 4 og 5 ikke falder igen. Dette er i overensstemmelse med teorien omhandlende den energioverførsel, der sker ved resonans, som forårsager en amplitudestigning<sup>44</sup>.



Figur 7: Graf over den numeriske graf i modellen,  $H=0,1$

I ovenstående graf ses et eksempel på et jordskælv, hvor bygningens frekvens afviger langt fra jordskælvet, som er lavere i dette tilfælde. Det konstateres, at udsvinget i toppen af bygningen her er minimal, og at der ikke forekommer nogen form for amplitudestigning, som der gjorde ovenfor i forskellige omfang.

Ifølge den matematiske model bliver amplituden under resonans ved med at stige. Men må der ikke være faktorer i den virkelige verden, der stopper bygningens amplitude fra at stige i uendelighed? For at besvare dette spørgsmål og desuden danne endnu en vinkel på sagen vil et fysisk eksperiment på baggrund af samme højhus-model og dermed teori blive lavet.

---

<sup>44</sup> <https://da.wikipedia.org/wiki/Egenfrekvens>

## 5. Eksperiment af højhusmodel:

Formålet med forsøget er at give et perspektiv på jordskælvsrystelser i den virkelige verden og at eftervise dele af den udledte sammenhæng fra ovenstående afsnit i en fysisk model. Forsøget tager udgangspunkt i den samme teori, som den matematiske udledning fremkom på baggrund af.

I løbet af forsøgets forløb blev en række overvejelser og tanker gjort. Først og fremmest skulle en bjælke findes, hvis stivhed skulle være lige tilpas for at få de bedste målinger. Hvis bjælken var for stiv, ville det resultere i dårlige målinger, da udsvingene ville være sværere at måle, hvorimod en meget bøjelig bjælke ville resultere i, at den ikke ville kunne holde punktmassen oppe. Med den ideelle bjælke valgt, skulle dens bjælkestivhed måles. Af formelen:

$$k = \frac{3E \cdot I_x}{h^3},$$

ville k ikke kunne findes, da elasticitetsmodulet samt bøjningsinertimomentet af dens tværsnitsareal ikke er simpel at måle på og udgør en helt anden matematisk opstilling. I stedet blev bjælkestivheden fundet ved en sammenkobling af følgende 2 love:

$F = m \cdot a$ , Newtons 2. lov, hvor  $a$  = tyngdeaccelerationen i dette tilfælde

$$k = -\frac{F}{x}, \text{ Hookes lov, hvor } k \text{ er isoleret}$$

$$k = -\frac{m_{lod} \cdot g}{x}$$

Det må konstateres at sammenhængen anvendt for at finde k, ikke var den ideelle, men en tilnærmelse heraf.

Ved at fastsætte den valgte stang i bunden, kunne dens top få tilført en masse, der påvirkede stangen med kraften:

$$F = m_{lod} \cdot g$$

Heraf kunne længden, som stangens top bevægede sig under tilførsel af en kraft, blive målt. Med den bevægede længde og tilsvarende masse noteret, kunne bjælkestivheden findes. For at få en så præcis som mulig bjælkestivhed, blev disse målinger dog udført med forskellige kraftpåvirkninger. Desuden blev højden af bjælken for denne bjælkestivheds måleserie noteret. Opstillingen for dette ses nedenfor.



*Figur 8: Bjælkestivheden  $k$  findes.  
Billede er taget af Peter Weakley  
d. 08/12/2017*

Med bjælkestivheden til den valgte bjælke under kontrol, blev det primære forsøg stillet op. Dette indebar mange overvejelser i forhold til, hvordan det mest præcise samt resultatrige forsøg kunne opstilles, uden af det påvirkede matematikken fra differentialligningen. For eksempel skulle den flade bjælke tilføres en fast frekvens, uden at energien blev tabt til friktion eller andet, resulterende i en dårlig frekvensmåling af rystelserne.

Den bedste opstilling, på baggrund af denne problemstilling, kan ses nedenunder. Bjælken fik boret et hul i samme størrelse som vibratorens spids, der desuden var monteret til en flad metalplade for at give en robust montering. Denne opstilling kan ses nedenunder.



*Figur 9: Billede af opstilling. Taget af Peter Weakley d. 08/12/2017*

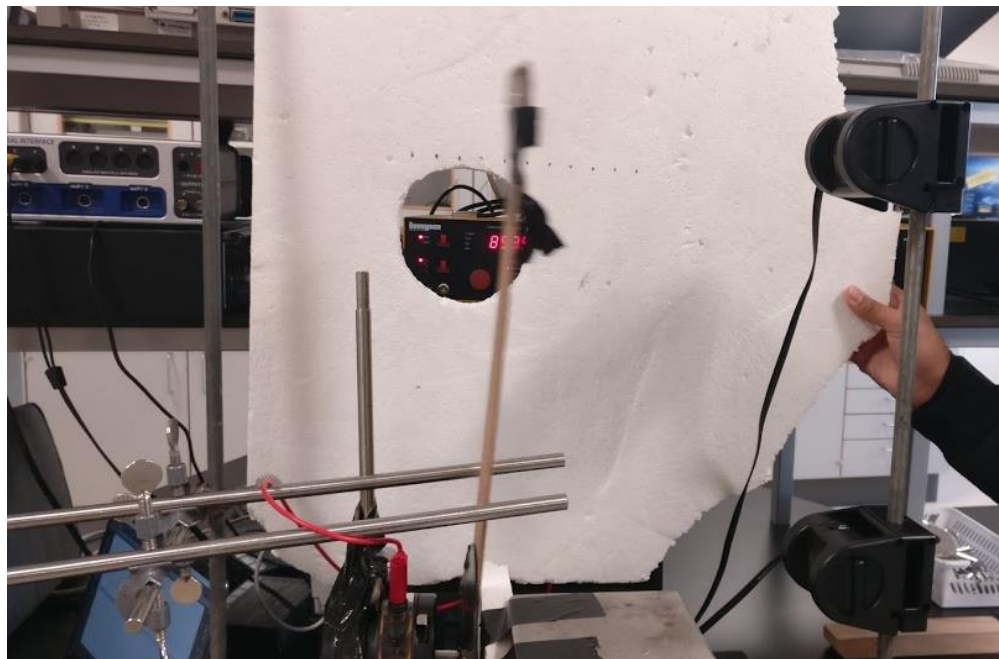
For at sikre præcise og brugbare målinger af disse svingninger fra bygningen blev 2 sensorer monteret ved bunden af stangen og ved toppen, for at måle  $\delta(t)$  og  $x(t)$ . Vibratoren var forbundet til en funktionsgenerator, som dermed kunne tilføre systemet en given frekvens. På grund af, at vibratoren dog tilførte en frekvens igennem 1 rund metalpind, som set ovenfor, medførte det, at stangen havde en tendens til at svaje til højre og venstre ud af z koordinatet, hvilket ikke var ideelt. Dette problem blev løst ved at placere 2 metalstange på hver side af bjælken, resulterende i at den blev holdt fast. Det blev mistænkt, at dette ville tilføje en fejkilde omhandlende friktion i bjælkens bevægelse, men under måleserien heraf kunne det observeres, at friktionen var minimal. En selvtaget video, der fremhæver forsøgets bevægelse og hermed den minimale friktion er vedhæftet<sup>45</sup>. Endvidere ses et billede af hele forsøgets opstilling, hvoraf massen er placeret ved toppen af stangen i form af 2 magneter, en på hver side. Denne masse inklusiv tape blev målt til 181 gram.

---

<sup>45</sup> <https://youtu.be/70DTLzkO3Ug>



Med forsøget stillet op blev bevægelsen til tiden  $t$  målt i toppen og bunden af modellen i programmet PASCO Capstone, hvorefter grafer af disse målinger blev lavet. Forsøget blev lavet ved 3 forskellige frekvenser, hvoraf en af frekvenserne var ved modellens egenfrekvens. Sidst blev et forsøg lavet omhandlende forholdet mellem bjælkens højde og egenfrekvens.

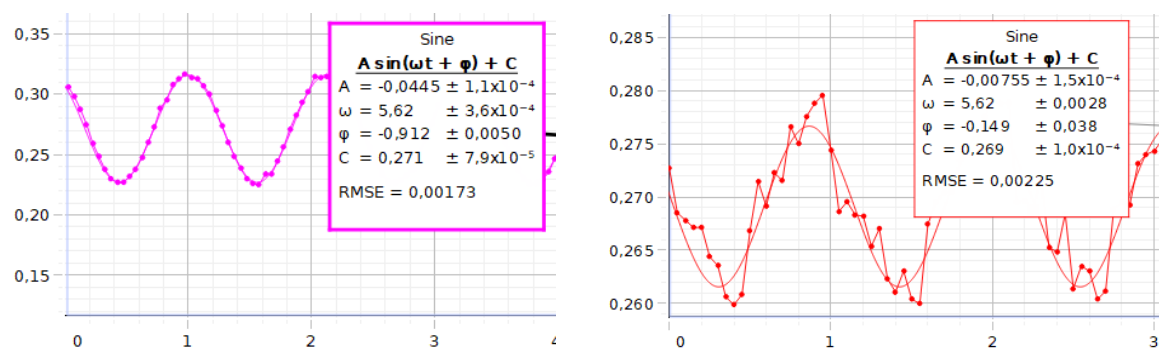


*Figur 10: Billede er taget af Peter Weakley d. 08/12/2017*

Desuden blev en eksperimentel undersøgelse lavet omhandlende forholdet imellem modellens egenfrekvens og højde. Ved at fastspænde en bjælke kunne frekvensen til toppens største udsving måles, ved forskellige højder. Dette forsøg blev lavet for at få en endnu større synsvinkel på den eksperimentelle del af opgaven, og dermed danne et bredere diskussionsgrundlag.

## 6. Diskussion:

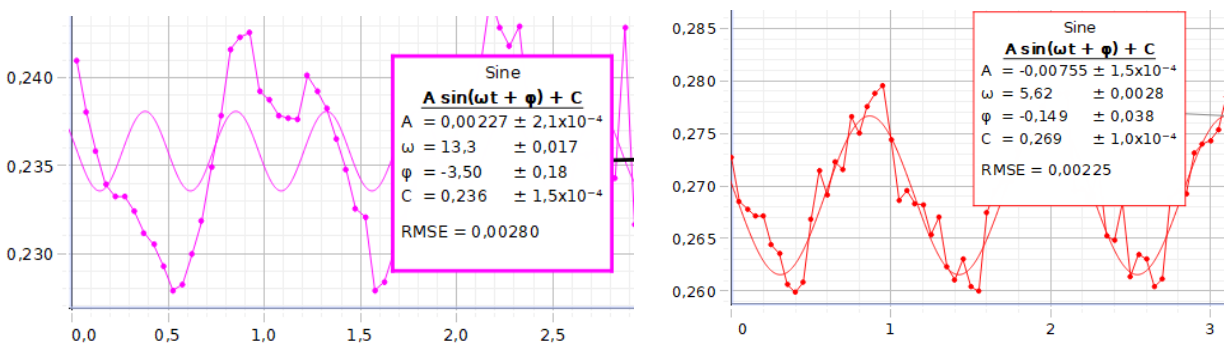
Ved at kigge på figur 11 og 12 på næste side vil det hurtigt kunne observeres, at bundens svingning, under begge forsøg, ser entydig ud. Alligevel repræsenterer måleseriernes punkter fra bundene ikke en elegant kurve, som grafen over toppens svingninger på figur 9 til venstre ellers gør. Dette kan observeres på trods af, at det faktisk er en konsekvent frekvens med en konstant amplitude. Det kan antages, at årsagen bag dette er, at amplitudegeneratoren bevæger sig på en meget mekanisk og uharmonisk måde. Den omtalte bevægelse fra amplitudegeneratoren kan ses ved 2. sekund i videoen over forsøget<sup>46</sup>. Dog må det alligevel konstateres, at regressionerne lavet på bundens svingninger passer tilstrækkeligt med regressionerne.



Figur 11: Venstre graf viser toppens udsving i meter per sekund ved den egenfrekvens (0,893 Hz). Til venstre ses en graf over bundens bevægelse i meter per sekund.

Desuden kan anden relevant teori fra tidligere bringes op i denne kontekst. I afsnittet, omhandlende overfladebølgerne er der redegjort for, at love-bølger bevæger sig på x og y akser, hvor rayleigh-bølger bevæger sig af x, y og z akser. På baggrund af dette kan det altså formodes, at tilførslen af denne bevægelse i forsøget ikke giver en perfekt repræsentation af de bølger, der påvirker bygningerne i den virkelige verden. På trods af at dette forsøg altså ikke repræsenterer en typisk overfladebølge, så giver det en vinkel på, hvordan udfaldet kan se ud på et simplificeret plan. Desuden vil det være svært at måle på et eksperimentelt opstillet forsøg, hvor modellen af højhuset påvirkes med en kraft i 2 eller endda 3 retninger. Derudover ville matematikdelen ikke længere være gældende.

<sup>46</sup> <https://youtu.be/70DTLzkO3Ug>



Figur 12: Den venstre graf viser bevægelse (2,2 Hz) ved stangens top. Den højre graf viser bevægelsen ved stangens bund. Enheder er meter op af y-aksen, og sekunder hen af x-aksen.

Ved at kigge på graferne for bevægelse kan det desuden ses, at de omtalte regressioner er afsat. Disse regressioner er baseret på den fuldstændige løsning:

$$y = \frac{\delta_0}{1 - \frac{m_e \cdot \omega_s^2}{k}} \cdot \sin(\omega_s \cdot t) + \frac{\sqrt{m_e \cdot k} \cdot \delta_0}{k - m_e \cdot \omega_s} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m_e}} \cdot t\right)$$

Af denne løsning kan det konstateres, at udsvingene i toppen samt bunden kan beskrives ved en sinuskurve. Med dette kendskab kan en sådan regression indføres på graferne resulterende i mere anvendelig information. Ved at kigge på regressionen lavet på grafen for toppen af stangens udsving ved dens egenfrekvens (figur 11) kan det bemærkes, at regressionen følger udsvingets målinger i høj grad. Hvis der herefter kigges på amplitudeforholdet mellem udsvinget i toppen og bunden af stangen, vil det kunne konstateres, at udsvinget i toppen er 4,45cm, hvor bundens er 0,75cm. Heraf er toppens udsving

$$\frac{4,45\text{cm}}{0,75\text{cm}} \cdot 100 = 593.34\%$$

større end bundens. Hvis dette sammenlignes med den fuldstændige løsnings bevægelse fra afsnittet omhandlende den numeriske løsning, kan en stor lighed observeres. Det bemærkes dog, at forsøgets amplitude ved resonans ikke stiger uendeligt som det gør ifølge grafen for den numeriske løsning.

Herefter kan regressionen sammenlignes med den for stangens udsving ved en anden frekvens end dens egenfrekvens. Her bemærkes det, at regressionen dels slet ikke følger målingernes punkter, og at målingerne desuden ikke er ensartede. Herefter observeres det, at amplituden her er væsentlig lavere. For eksempel ses det, at amplituden ved bunden af stangen ved begge forsøg er omtrent 0,74cm. Amplituden ved toppen for grafen ved anden frekvens er 0,227cm. Heraf kan det ses, at amplituden ved toppen er væsentligt lavere end ved bunden. Faktisk udgør toppens amplitude

$$\frac{0,227cm}{0,74cm} \cdot 100 = 30,67\%$$

af bundens. Hvis dette sammenlignes med den numeriske graf for den fuldstændige løsnings bevægelse, ved en anden frekvens end dens egenfrekvens, kan det ses, at det her også er tilfældet, at amplituden er væsentlig lavere.

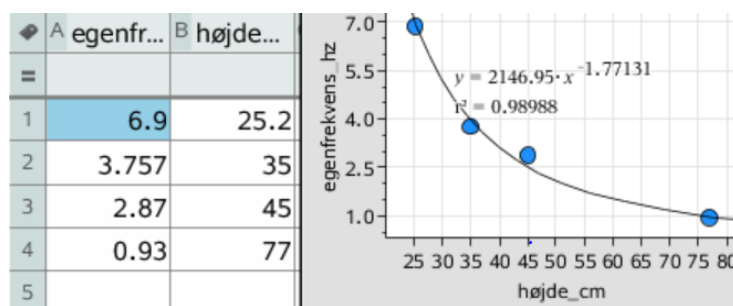
Det skal huskes, at denne sammenligning ikke er helt nøjagtig, da regressionen ved det ene forsøg ikke er en præcis repræsentativ regression for målingerne. Alligevel kan det dog tydeligt bemærkes, at der er tale om en stor forskel her, som i bund og grund bekræfter den behandlede teori omhandlende resonans, og hvad det kan medføre. Desuden skal det huskes, at denne mangfoldige ændring i amplitude af udsvingene er forårsaget af en frekvensændring fra funktionsgeneratoren på  $2,2\text{Hz} - 0,893\text{Hz} = 1,307\text{Hz}$ . Hvis det formodes, at samme forhold gælder i den virkelige verden, er en antageligvis lav ændring i frekvens af stor betydning. Det kan herfra konstateres, at bestemmelsen af en bygnings frekvens er af yderst vigtig betydning.

I den tidligere udledte formel for bygningers egenfrekvens ses det, at bygningens masse er proportional med dens egenfrekvens, og desuden har en afgørende betydning for hvor høj bygningens egenfrekvens er. Desuden observeres det, at en høj bjælkestivhed vil resultere i en højere egenfrekvens, end hvis bygningens bjælkestivhed er lav.

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m_e}}$$

Som tommelfingerregel siges det, at lave bygninger har en egenfrekvens på over 1 Hz, at mellemstore bygninger har en egenfrekvens omkring 1 Hz, og at skyskrabere resonerer ved omkring 0,2 Hz<sup>47</sup>. Af dette må det konstateres, at det er en meget generaliserende regel som ikke altid vil være gældende. Hvis det dog antages at bygningens højde bestemmer dens masse, så passer denne tommelfingerregel i overensstemmelse med den udledte formel for egenfrekvens af en bygning.

Hvis dette desuden sammenlignes med forsøget omhandlende forholdet mellem en bygnings højde og tilsvarende egenfrekvens, som ses i figur 13, kan det bemærkes, at teorien er i overensstemmelse med forsøget.



Figur 13: Data fra forsøg omhandlende højde og frekvens af model.

I eksperimentet er bjælkestivheden konstant, og det kan bemærkes, at højden og dermed massen påvirker frekvensen ved en potensfunktion. For eksempel ses det af forsøget, at en 178,57% stigning i højden, har et korresponderende fald i egenfrekvensen på 58%. For endvidere at sammenligne teorien med formlen kan værdierne indsættes som set i følgende:

$$\frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{44 \text{ _N/_m}}{0,1 \text{ _kg}}} = 3,34 \text{ Hz}$$

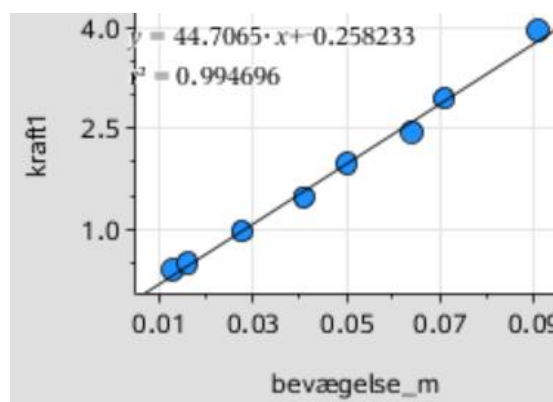
I regnestykket er k målt i Newton per meter, hvor massen er målt i kg. Massen af stangen blev målt til 100 gram med længden 35cm.

<sup>47</sup>

[https://www.iris.edu/hq/inclass/animation/building\\_resonance\\_the\\_resonant\\_frequency\\_of\\_different\\_seismic\\_waves](https://www.iris.edu/hq/inclass/animation/building_resonance_the_resonant_frequency_of_different_seismic_waves)

Heraf kan det konstateres, at der er en frekvensafvigelse på  $3,78\text{Hz} - 3,34\text{Hz} = 0,442\text{Hz}$ . Det formenes, at denne afvigelse kan skyldes bjælkestivheden  $k$ , der er undersøgt til 44 newton per meter. Som omtalt tidligere, er bjælkestivheden fundet ud fra Hookes lov hvis formål er at finde stivheden af en fjeder med masse i toppen. Da bjælken i vores forsøg vejer lidt i forhold til punktmassen, kan det antages, at bjælken med massen i toppen er en god tilnærmelse af det ideelle.

Grafen for forsøget omhandlende bjælkestivheden  $k$ , der blev foretaget på baggrund af formelen:  $F = -k \cdot x$ , ses nedenfor.



Figur 14: Tabel og graf over forsøg for bjælkestivheden  $k$ .

Med forholdet mellem teorien og eksperimentet under kontrol er det for at få en nuanceret vinkel på hele emnet dog nødvendigt at sammenligne med den virkelige verden.

## 7. Den virkelige verden:

Ved at kigge på jordskælv, der forekom i New Mexico i 1985, kan en bedre forståelse for realistiske jordskælvs forhold opnås. Jordskælv påvirker byen i omtrent 3-4 minutter<sup>48</sup> med en frekvens på 0,5 hertz<sup>49</sup>. Hvis denne viden sammenlignes med de opnåede resultater, kan det antages, at mange bygninger med omtrent samme højde og bestemt stivhed ville blive ramt af resonans, hvor bygninger med anden højde slet ikke burde resonere. Dette er til dels hvad det skete. Dog blev det observeret, at samme type bygning i dele af byen med grundfjeld under sig ikke tog skade<sup>50</sup>.

Denne forekomst påviser, at undergrundens materiale desuden påvirker frekvensen på de seismiske bølger, der passerer ved jordskælv<sup>51</sup>. Heraf må det konstateres, at frekvensen ved materialer af høj densitet har en tendens til at være højere end frekvensen ved materialer af lavere densitet<sup>52</sup>. På baggrund af den viden må det antages, at det er sikrest at bygge skyskrabere på grundfjeld og andre tætte materialer, hvor lave bygninger såsom huse, kan bygges på sandet undergrund. Men var folk ikke klar over dette i 1985, siden der var bygget høje bygninger på sand, og hvordan kan man ellers modvirke et jordskælv? Hvis der kigges tilbage på figuren for den numeriske løsning kan det ses, at der sker en konstant amplitudestigning, når jordskælvs frekvens passer til bygningens. Hvorfor ses dette ikke i grafen for højhusmodellen ved egenfrekvens?

Det må antages, at en form for modvirkende kraft begynde at udligne bjælkens tilført energi ved en bestemt amplitude. Det konstateres, at denne kraft må være luftmodstanden. Denne antagelse laves på baggrund af, at bjælken i forsøget har et meget stort overfladeareal i forhold til dens masse.

---

<sup>48</sup> [https://en.wikipedia.org/wiki/1985\\_Mexico\\_City\\_earthquake](https://en.wikipedia.org/wiki/1985_Mexico_City_earthquake)

<sup>49</sup>

[https://www.iris.edu/hq/inclass/animation/building\\_resonance\\_the\\_resonant\\_frequency\\_of\\_different\\_seismic\\_waves](https://www.iris.edu/hq/inclass/animation/building_resonance_the_resonant_frequency_of_different_seismic_waves)

<sup>50</sup>

[https://www.iris.edu/hq/inclass/animation/building\\_resonance\\_the\\_resonant\\_frequency\\_of\\_different\\_seismic\\_waves](https://www.iris.edu/hq/inclass/animation/building_resonance_the_resonant_frequency_of_different_seismic_waves)

<sup>51</sup>

[https://www.iris.edu/hq/inclass/animation/building\\_resonance\\_the\\_resonant\\_frequency\\_of\\_different\\_seismic\\_waves](https://www.iris.edu/hq/inclass/animation/building_resonance_the_resonant_frequency_of_different_seismic_waves)

<sup>52</sup>[https://www.iris.edu/hq/inclass/animation/building\\_resonance\\_the\\_resonant\\_frequency\\_of\\_different\\_seismic\\_waves](https://www.iris.edu/hq/inclass/animation/building_resonance_the_resonant_frequency_of_different_seismic_waves)

I den virkelige verden er der formentligt andre kræfter der vil påvirke bygningen mere end luftmodstand. Et af disse kunne være en bygnings dæmpningseffekt<sup>53</sup>. For at forstå denne dæmpende effekt kan der tænkes på en fastspændt stol. Hvis den skubbes, vil den vibrere med en frekvens, men den stopper meget hurtigt. Årsagen til, at den stopper, er, at vibrationerne fra den bliver absorberet i stolen<sup>54</sup>. Forsøget og teorien danner altså ikke et repræsentativt grundlag for bygningers evne til at dæmpe energien fra svingningerne i den virkelige verden.

Det antages dog at bygningen sandsynligvis er styrtet sammen, eller jordskælvet er overstået, inden den modvirkende kraft fra dæmpningen er stor nok til at udligne kraften der tilføres bygningen. Derfor konkluderes det, at den ikke er nødvendig at inddrage i teorien, hvis formål er at forstå forholdet imellem frekvenserne. Desuden må det konstateres, at mange bygninger under jordskælvet i New Mexico i 1985 ikke havde en tilstrækkelig dæmpning, der kunne absorbere energien fra vibrationerne. Derfor er nye former for jordskælvssikring blevet opfundet, som i større omfang kan modvirke disse vibrationer og stoppe denne resonanseffekt.

## 7.1 Moderne jordskælvssikring:

En hyppigt anvendt metode for jordskælvssikring er base isolation<sup>55</sup>. Det bygger på fysikken omhandlende inertie. Ved base isolation isoleres bygningen fra fundamentet med glidebaner, der sikrer, at bygningen ikke påvirkes af jordskælvsbølgerne i samme grad, som de ellers ville<sup>56</sup>. Dette demonstreres i følgende video<sup>57</sup>. Af eksperimentet og den fuldstændige løsning viste det sig, at når frekvensen fra jordskælvet er i overensstemmelse med bygningens egenfrekvens, vil der være en stor og farlig amplitudestigning i toppen af bygningen. Derfor må det konkluderes, at denne metode kommer uden om problemet med bygningens egenfrekvens, som ellers kan være svær at manipulere med.

---

<sup>53</sup> <https://sites.google.com/site/slosh tanks12/what-is-dampening>

<sup>54</sup> <https://sites.google.com/site/slosh tanks12/what-is-dampening>

<sup>55</sup> [https://en.wikipedia.org/wiki/Base\\_isolation](https://en.wikipedia.org/wiki/Base_isolation)

<sup>56</sup> [https://en.wikipedia.org/wiki/Base\\_isolation](https://en.wikipedia.org/wiki/Base_isolation)

<sup>57</sup> <https://www.sciencelearn.org.nz/videos/558-shaken-not-stirred>



Men i stedet for at isolere bygningens fundament med vibrationerne fra resten af bygningen, anvender Taipei, en 439 meter høje skyskraber i Taiwan, en anden populær metode for at sikre sig imod resonans<sup>58</sup>. I toppen af den høje bygning er en meget tung kugle med en masse på 728 ton, forbundet med hydrauliske støddæmpere<sup>59</sup>. Disse støddæmpere tvinger, ved sammenpresning en stor mængde olie igennem et lille hul. Dette resulterer i en omformning af bevægelsesenergi til varmeenergi.

Som klargjort under det eksperimentelle forsøg vil en høj mængde bevægelsesenergi påvirke bygningen til at begynde at svinge. Når bygningen svinger vil den hængende kugle i Taipei naturligvis også svinge, resulterende i at de hydrauliske støddæmpere bliver presset sammen. Dette resulterer i en konvertering af mekanisk kinetisk energi til varmeenergi<sup>60</sup>. Sammenhængen kan beskrives ved Newtons 2. lov<sup>61</sup>:  $F = m \cdot a$ . Heraf ses det, at den meget tunge masse bevirke en meget høj energikonvertering på trods af at accelerationen af kuglen formentlig er lav, Dette omskift i energi vil medføre, at bygningens top ikke svajer så meget som den ellers ville.

Da både den fuldstændige løsning samt eksperimentet viste, at udsvinget kan blive meget dramatisk ved toppen af modellen, kan det konstateres, at det er smart at placere en sådan masse-dæmper her. Desuden må det formodes at en 728 ton stigning i en bygnings masse må påvirke egenfrekvensen meget. Hvis der kigges på den udledte formel for egenfrekvensen:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

kan det konstateres at en massestigning medfører at en bygnings egenfrekvens bliver mindre.

---

<sup>58</sup> [https://en.wikipedia.org/wiki/Tuned\\_mass\\_damper](https://en.wikipedia.org/wiki/Tuned_mass_damper)

<sup>59</sup> [https://en.wikipedia.org/wiki/Tuned\\_mass\\_damper](https://en.wikipedia.org/wiki/Tuned_mass_damper)

<sup>60</sup> [https://en.wikipedia.org/wiki/Tuned\\_mass\\_damper](https://en.wikipedia.org/wiki/Tuned_mass_damper)

<sup>61</sup> <http://www.physicsclassroom.com/class/newtlaws/Lesson-3/Newton-s-Second-Law>

## 8. Konklusion:

På baggrund af jordskælvets effekt i New Mexico i 1985 kan det konkluderes, at man i mange år ikke modvirkede sammenstyrtningen af bygninger ved jordskælv. Siden 1985 er man dog kommet langt med jordskælvssikring, og der er flere metoder i nutiden, som kan modkæmpe effekten af jordskælv. Problemet der forårsager bygningernes sammenstyrt skyldes resonans. Ved at opstille en teoretisk samt eksperimentel model af et højhus der tilføres en given frekvens, kan egenskaberne ved resonans undersøges. Af den teoretiske model er en matematisk ligning udledt. Dens løsning beskriver det væsentlige forhold imellem en bygnings egenfrekvens og et simuleret jordskælvs frekvens. Dette forhold er af afgørende betydning for, om der opstår resonanssvingninger i en bygning eller ej. Den teoretiske model ledte desuden til en formel, der udgiver, at en bygnings egenfrekvens afhænger af dens bjælkestivhed og masse. Udover at bekræfte resonansforholdet ovenfor, så viste eksperimentet, at kræfter i den virkelige verden stopper bygninger fra at opnå en uendeligt høj amplitude. Disse kræfter, herunder dæmpning og luftmodstand, kan dog ikke umiddelbart stoppe bygningerne fra at styrte sammen.

Uanset om man ved jordskælvssikring anvender en kompleks metode eller ej, kan det konkluderes, at sammenstyrtninger på grund af jordskælv kan formindskes og potentielt undgås, hvis en bygnings egenfrekvens defineres på baggrund af dens masse og stivhed, så at den ikke er i nærheden af frekvensen på jordskælvsbølgerne, der passerer jordunderlaget under bygningen.

## 9. Litteraturliste:

### Bøger:

Nielsen, Knud Erik og Esper Fogh, *Vejen til matematik A2, HAX, 2011*

Hebsgaard, Thomas og Hans Sloth, *Matematik for 1-årigt A-niveau*, Trip, 1999

### Artikler:

Mckie, Robin: "Upsurge in big earthquakes predicted for 2018 as Earth rotation shows" i: theguardian.com, 18. november 2017, afsnit 1, sidst besøgt d. 16/12/2017

### Hjemmesider:

Brown, George E.:

[http://peer.berkeley.edu/education/files/worksheets\\_friendship/Natural%20Frequency%20Worksheet.pdf](http://peer.berkeley.edu/education/files/worksheets_friendship/Natural%20Frequency%20Worksheet.pdf), sidst besøgt d. 9/12/2017

Damkilde, Lars:

<http://homes.civil.aau.dk/lda/Notes/DYNAMIK.pdf>, sidst besøgt d. 6/12/2017

Dansk Teknisk Universitet:

<http://www2.mat.dtu.dk/education/gymnasieopgaver/opgaver/jordskaelv.pdf>, sidst besøgt d. 16/2017

Henderson, Tom:

<http://www.physicsclassroom.com/class/newtlaws/Lesson-3/Newton-s-Second-Law>, sidst besøgt d. 16/12/2017

Henderson, Tom:

<http://www.physicsclassroom.com/class/sound/Lesson-4/Natural-Frequency>, sidst besøgt d. 7/12/2017

Larsen, Tine B.: [http://geus.net/e-learning/njs/njs\\_iff\\_03\\_07.html](http://geus.net/e-learning/njs/njs_iff_03_07.html), sidst besøgt d. 12/12/2017

Michail, Marinos:

<https://sites.google.com/site/sloshtanks12/what-is-dampening>, sidst besøgt d. 15/12/2017

Schipper, Angela: <https://www.sciencelearn.org.nz/videos/558-shaken-not-stirred>, sidst besøgt d. 17/12/2017

Sumy, Danielle:

[https://www.iris.edu/hq/inclass/animation/building\\_resonance\\_the\\_resonant\\_frequency\\_of\\_different\\_seismic\\_waves](https://www.iris.edu/hq/inclass/animation/building_resonance_the_resonant_frequency_of_different_seismic_waves), sidst besøgt d. 13/12/2017

Weakley, Peter Nikolaj: "*Model af højhus*" på: <https://youtu.be/70DTLzk03Ug> , sidst besøgt d. 16/12/2017

Ukendt forfatter: <https://en.wikipedia.org/wiki/Epicenter> , sidst besøgt d. 16/12/2017

Ukendt forfatter: [https://en.wikipedia.org/wiki/Hooke%27s\\_law](https://en.wikipedia.org/wiki/Hooke%27s_law) , sidst besøgt d. 16/12/2017

Ukendt forfatter: [https://da.wikipedia.org/wiki/Newtons\\_anden\\_lov](https://da.wikipedia.org/wiki/Newtons_anden_lov) , sidst besøgt d. 8/12/2017

Ukendt forfatter: <https://en.wikipedia.org/wiki/Radian> , sidst besøgt d. 8/12/2017

Ukendt forfatter: [https://en.wikipedia.org/wiki/1985\\_Mexico\\_City\\_earthquake](https://en.wikipedia.org/wiki/1985_Mexico_City_earthquake) , sidst besøgt d. 16/12/2017

Ukendt forfatter: [https://en.wikipedia.org/wiki/Base\\_isolation](https://en.wikipedia.org/wiki/Base_isolation) , sidst besøgt d. 14/12/2017

Ukendt forfatter: [https://en.wikipedia.org/wiki/Tuned\\_mass\\_damper](https://en.wikipedia.org/wiki/Tuned_mass_damper) , sidst besøgt d. 14/12/2017

Ukendt forfatter: <https://da.wikipedia.org/wiki/Egenfrekvens> , sidst besøgt d. 7/12/2017

Ukendt forfatter:  
[http://classconnection.s3.amazonaws.com/934/flashcards/2198934/jpg/surface\\_waves\\_1351638656348.jpg](http://classconnection.s3.amazonaws.com/934/flashcards/2198934/jpg/surface_waves_1351638656348.jpg) , sidst besøgt d. 13/12/2017

Ukendt forfatter:  
<http://www.webmatematik.dk/lektioner/sarligt-for-htx/trigonometri/svingninger-og-periodiske-funktioner> , sidst besøgt d. 17/12/2017

Ukendt forfatter: <http://www.webmatematik.dk/lektioner/matematika/differentialligninger/inhomogene-lineare-forsteordens-differentialligninger> , sidst besøgt d. 19/12/2017

Ukendt forfatter:  
<http://www.webmatematik.dk/lektioner/sarligt-for-htx/trigonometri/svingninger-og-periodiske-funktioner> , sidst besøgt d. 19/12/2017

Ukendt forfatter:  
<https://www.thetimes.co.uk/imageserver/image/methode%2Ftimes%2Fprod%2Fweb%2Fbin%2F5b804590-c9ff-11e7-b529-5e3fc05f40f.jpg?crop=6016%2C4011%2C0%2C0> , sidst besøgt d. 17/12/2017

Ukendt forfatter:

<https://en.wikipedia.org/wiki/Determinant> , sidst set d. 19/12/2017

## 10. Bilag:

### Fodnote 3, e-mail fra seismolog, d. 18/12/2017

Hi Peter,

Sure thing! The body waves (P- and S-waves) are too short lived to generate resonance in buildings, as compared to their surface wave counterparts.

Thanks,  
Danielle

---

Danielle Sumy, PhD  
Seismologist

Project Associate  
Instrumentation Services  
Education and Public Outreach  
The IRIS Consortium

[1200 New York Ave. NW](#)  
[Washington, DC 20005](#)  
Phone: [202-407-7015](#)  
Fax: [202-682-0633](#)  
Email: [danielle.sumy@iris.edu](mailto:danielle.sumy@iris.edu)  
[www.iris.edu](http://www.iris.edu)

### Fodnote 4, e-mail fra seismolog (Danielle Sumy), d. 8/12/2017:

This is a great question, particularly in response to the type of surface wave that could cause resonance motion, and for long duration, like during the 1985 Mexico City earthquake shown in this animation. Sticking to generalizations, the Love wave stays within the horizontal directions (x and y directions), while Rayleigh waves have this retrograde elliptical motion that's in all three directions (x, y, and z directions). This is why seismologists generally transform from E-N-Z directions to transverse-radial-vertical motion, so we can tease out these two waves. The transference of the coordinate system helps us immensely!

All of that said, I would say that both can cause resonance in buildings, it just depends on what the building responds to, like what Bob Butler shows in the BOSS model. Rayleigh waves tend to have higher amplitude, and therefore larger motion, than Love waves, but if it's not shaking at resonance (or near resonance) then it depends on the type of building. I think therefore it depends on the amplitude of motion (Rayleigh waves greater usually than Love waves), direction of motion, duration of motion, and the resonance period of the building itself. I remember Nate and I were in our three story apartment building during the M5.1 La Habra earthquake in CA, and I definitely felt the Rayleigh wave motion!!

I would answer something like this: 'That's a great question! Both can create resonance, but Rayleigh waves tend to be higher amplitude, longer duration, and can travel farther distances than Love waves, encircling the globe several times in fact! However, if you are close to the earthquake, and the Love waves are moving in the resonance period, then you could feel those too at resonance. Thanks for your question!'

## Fodnote 42 omhandler følgende pdf fil:

SRP/Jordskælvsikring

Peter Weakley

PK/8. december 2017

### Dimensionsløs form

Differentialligningen:  $m \cdot \ddot{x}(t) + k \cdot x(t) = k \cdot \delta_0 \cdot \sin(\omega_s \cdot t)$  kan omskrives til følgende form:

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 \cdot x(t) = \omega_0^2 \cdot \delta \cdot \sin(\omega_s \cdot t), \text{ hvor systemets cykliske egenfrekvens er givet ved: } \omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

Da størrelsen  $\frac{1}{\omega_s}$  har enheden 'tid':  $\left[ \frac{1}{\omega_s} \right] = s$ , kan man definere en naturlig tidsenhed  $\tau = \frac{1}{\omega_s}$ , og

dermed indføre en dimensionsløs tid  $\bar{t}$  ved ligningen:  $\bar{t} = \frac{t}{\tau}$

Herefter kan differentialligningen omskrives til en differentialligning i den dimensionsløse tidsvariabel  $\bar{t}$

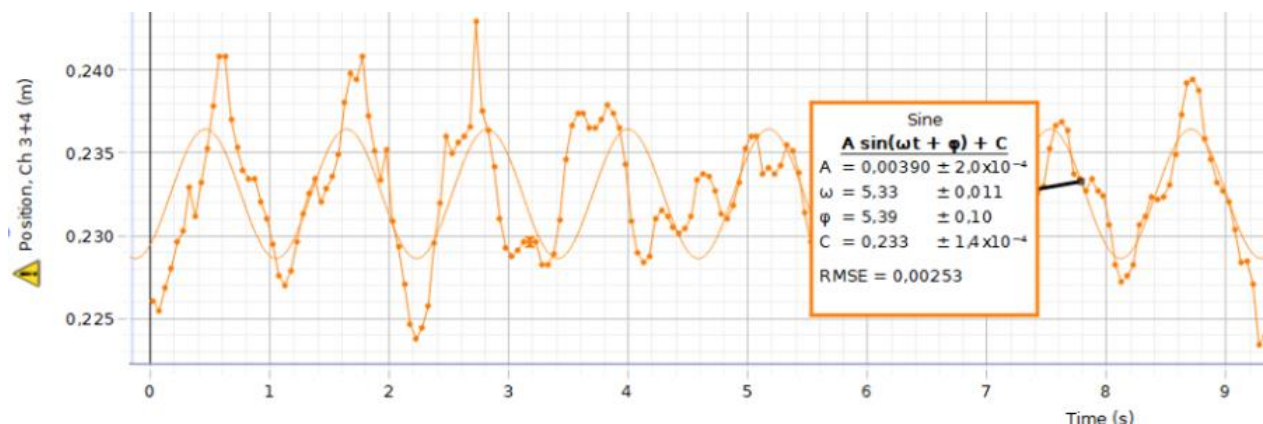
samt en dimensionsløs x-variabel,  $\bar{x}$  givet ved:  $\bar{x} = \frac{x}{\delta_0}$ :

$$\ddot{\bar{x}}(\bar{t}) + H \cdot \bar{x}(\bar{t}) = H \cdot \sin(\bar{t}), \text{ hvor } H = \left( \frac{\omega_0}{\omega_s} \right)^2$$

### Tabel for data i forsøg omhandlende bjælkestivheden k:

	A delta...	B kraft1	C masse...	D bjælke...	E bevæ...
=		=masse_k		=kraft1/(l=deltalæn	
1	1.3	0.41244	0.042	-31.7262	0.013
2	1.6	0.493946	0.0503	-30.8716	0.016
3	2.8	0.982	0.1	-35.0714	0.028
4	4.1	1.473	0.15	-35.9268	0.041
5	5.	1.964	0.2	-39.28	0.05
6	6.4	2.455	0.25	-38.3594	0.064
7	7.1	2.946	0.3	-41.493	0.071
8	9.1	3.928	0.4	-43.1648	0.091

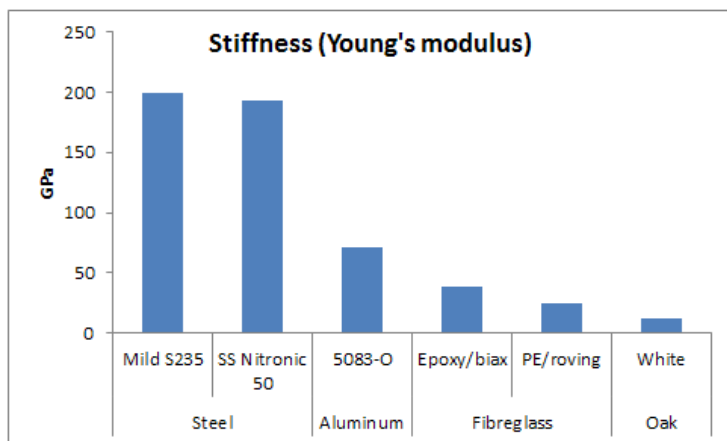
### Graf for toppens udsving ved højhusmodel for det tredje forsøg ved 2,7 Hz. (ikke egenfrekvens)



### Træs stivhed i modsætning til metaller.

Grafen er taget fra følgende hjemmeside: <https://www.morganscloud.com/2013/06/22/structural-efficiency-why-the-best-boatbuilding-material-debate-never-ends/>

We can rank our materials by stiffness, yielding the next graph.



On raw material properties, the steels once again take the crown. Steel—any grade, any alloy—is really stiff stuff. By comparison, aluminum is pretty floppy, and everything else is downright limp.