Las paradojas del Infinito

§ 1

Ciertamente no todas, como dice Kästner, pero sin duda alguna sí la mayoría de las afirmaciones paradójicas que surgen en el ámbito de las matemáticas, tienen que ver con el concepto de *infinito* ya sea que lo mencionen directamente o involucrándolo de manera indirecta en su demostración. Es igualmente indiscutible el hecho de que precisamente tales paradojas matemáticas, que merecen toda nuestra atención, porque de la refutación satisfactoria de su aparente contradicción depende la determinación de cuestiones fundamentales para ciencias tan importantes como la física y la metafísica, pertenecen también a esta especie.

Es esta la razón por la que el objeto de estudio de este tratado lo constituye la consideración exclusiva de las paradojas del infinito. Pero es evidente que el reconocimiento adecuado de una aparente contradicción —es decir, de aquello que sólo *en apariencia* es una contradicción— no puede ser posible, si no existe antes claridad sobre la idea misma que aquí está en cuestión: el infinito. Sera éste, en consecuencia, el primer problema que ocupe nuestra atención en lo que sigue.

§ 2

Lo infinito se contrapone a lo finito, como la palabra misma lo indica. El hecho de que derivemos la primera designación a partir de la segunda nos indica que también pensamos el concepto de infinito como algo que se obtiene a partir del concepto de finitud cuando se añade a éste una componente nueva (como lo es, por ejemplo, el concepto de *negación*). Además, es innegable que, en última instancia, ambas ideas se aplican a conjuntos, más precisamente a *multiplicidades* (es decir, a conjuntos de unidades) y, por lo tanto, a *cantidades*. Es natural, entonces que sean las matemáticas, en tanto que teoría o doctrina general de las cantidades, donde se hable con mayor frecuencia del infinito. Es en este ámbito donde han de ser objeto de estudio y cómputo tanto las cantidades finitas como las infinitas, sean éstas infinitamente grandes o infinitamente pequeñas.

Ahora bien, independientemente de que estas ideas (finitud e infinitud) puedan aplicarse solamente a objetos que de alguna manera exhiban cantidad y multiplicidad, cabe esperar que una investigación rigurosa del problema de las condiciones en que puede atribuirse a un conjunto uno de los dos predicados 'finito' e 'infinito' arroje, igualmente, luz sobre la naturaleza misma del infinito.

§ 3

Para ello, sin embargo, es necesario remitirse a uno de los conceptos básicos de nuestro entendimiento, con el objeto de que haya claridad en relación al término que queremos utilizar para designarlo: la conjunción *y*. Esta noción ha de ponerse de relieve tan claramente como lo exigen en innumerables casos los fines de las matemáticas y la filosofía. En mi opinión, puede darse expresión a la idea aquí subyacente con las palabras: *un agregado de objetos bien definidos (ein Inbegriff gewisser Dinge)*; o bien como *un todo cuyas partes se encuentran bien definidas (ein aus gewissen Teilen bestehendes Ganze)*.

Queremos servirnos de estas expresiones en un sentido amplio, de tal manera que, siempre que en una proposición se utilice la conjunción *y*, como, por ejemplo, en

(i) *El Sol, la Tierra y la Luna se encuentran en interacción recíproca*,

(ii) *La rosa y el concepto de rosa son cosas distintas,*
(iii) El nombre '*Socrates*' y la expresión '*hijo de Sofronisco*' designan a la misma persona,

pueda afirmarse que el sujeto es un *agregado de objetos bien definidos* o un *todo cuyas partes están bien definidas.*

En el primer caso, el todo en cuestión se encuentra constituido por el Sol, la Tierra y la Luna, afirmándose de él que sus partes se encuentran en interacción recíproca. En el segundo ejemplo, se trata del agregado que conforman los objetos *rosa* y *el concepto de rosa*, del que se afirma que son dos cosas muy distintas, etc.

Esto debía bastar para la comprensión del concepto a que hemos estado aludiendo, aunque, en rigor, habría que añadir todavía que un objeto cualquiera *A* puede entrar a formar parte de un agregado con otros objetos arbitrarios *B,C,D,*....O, más exactamente: que por sí mismo constituye ya un agregado, en relación al cual es posible establecer algunas afirmaciones importantes. Todo esto naturalmente con tal de que cada una de las nociones *A,B,C,D,*... represente efectivamente un objeto distinto, o con la condición de que ninguna de las proposiciones

"A es idéntico a B"; "A es idéntico a C"; "B es idéntico a C" etc., sea verdadera. Porque si, por ejemplo, A es idéntico a B, resulta claramente inapropiado hablar de un agregado que comprenda a ambos.

§ 4

Existen agregados que, a pesar de contener los mismos elementos *A,B,C,D,*... se presentan como algo distinto (algo *esencialmente* distinto, en nuestra terminología), de acuerdo con el criterio (concepto) a partir del cual son considerados precisamente como agregados. Un vaso entero y un vaso roto en pedazos, por ejemplo, tomados ambos como un recipiente utilizado para beber. Llamamos *tipo de relación* (*Art der Verbindung*) o *de ordenación* de sus elementos a aquello que constituye el fundamento por el que estos agregados son diferentes. Llamamos *conjunto* a un agregado que depende de un concepto respecto al cual el orden de sus elementos es indiferente (relación en la que, por lo tanto, no hay una modificación esencial para nosotros cuando el orden se modifica). Una multiplicidad de A es un conjunto cuyos elementos pueden ser considerados como objetos de un cierto tipo A; es decir, como objetos que dependen y se encuentran sujetos a un concepto A.

§ 5

Como se sabe, hay agregados cuyos elementos son complejos, esto es, a su vez son también agregados. Entre éstos existen igualmente algunos que consideramos desde un punto de vista que nos asegura que nada esencial en ellos se altera cuando tomamos los elementos de los elementos como elementos del todo mismo. A los agregados de este tipo los llamaré sumas, sirviéndome de una palabra acuñada por los matemáticos. El concepto de suma garantiza, en efecto, que $A + (B + C) = A + B + C$

§ 6

Un objeto es una *cantidad (Grösse) si para él, la siguiente propiedad resulta válida: O bien M y N son iguales, o bien uno de ellos puede representarse como una suma que contiene una parte propia que es igual al otro. Es decir, o bien M=N, o bien* $M=N + \nu$, o bien $N=M + \mu$, donde para ν y μ vale algo análogo. Esto es, o bien son iguales, o bien uno de ellos está contenido en el otro como parte propia.

§ 7

Un agregado $\ldots,A,B,C,D,E,F,\ldots,L,M,N,\ldots$ es una *serie* si tiene la propiedad de que, para cualquier elemento M, puede demostrarse la existencia de un único elemento N tal que, de acuerdo con una ley válida para todos los elementos del agregado, o bien *N* puede determinarse por su relación con *M*, o bien *M* puede determinarse por su relación con *N*.

A los elementos de una serie los llamo ***términos*** y la ley según la cual *N* o *M* pueden determinarse a partir de su relación con el otro es la *ley de formación de la serie*.

El término *M* de la serie se llamará (sin pretender con ello designar el concepto de una secuencia temporal o espacial real) el ***antecesor o predecesor***; el otro será llamado el ***sucesor***.

A un término *M* para el que exista tanto un predecesor como un sucesor; es decir, a un término que no sólo sea derivable él mismo a partir de otro, sino que permita igualmente, con base en la ley de formación de la serie, la derivación de otro, lo llamaré ***miembro interno de la serie***.

De todo ello resulta claro a qué términos llamo (si es que existen) ***términos extremos***, ***primero*** y ***último*** de la serie*.

§ 8

Pensemos en una serie cuyo primer término es un elemento del tipo *A*, en la que todo sucesor se deriva de su predecesor, de tal manera que, tomando un objeto igual a él lo relacionamos con otro elemento del tipo *A* en una suma. Es entonces evidente que todos los términos que aparecen en esta serie —con excepción del primero que es únicamente un elemento del tipo *A*— serán multiplicidades a las que llamaré ***finitas*** o ***numerables*** o, de manera algo audaz: ***números*** y, más específicamente, ***números enteros*** (que incluirían el primer término).

§ 9

Las variaciones en la naturaleza del concepto denotado por *A* determinan que el conjunto de objetos del tipo *A* que ese

* Una explicación más detallada de estos conceptos, lo mismo que de otros considerados en parágrafos anteriores podrá encontrarse en mi ***Wissenschaftslehre***.

concepto comprende sea numeroso o que no lo sea tanto, por lo que el concepto puede dar lugar, en algunas ocasiones, a un conjunto numeroso y, en otras, a un conjunto no tan numeroso de términos en la serie.

En particular, puede haber tantos términos que si la serie ha de agotar (incluir a) todos los elementos, no puede tener un ***último término***, como habremos de demostrar con todo detalle más adelante.

Suponiendo esto por el momento, llamaré ***infinita*** a una multiplicidad si todo conjunto finito es tan sólo una parte de ella.

§ 10

Espero que se me conceda que la definición que he presentado aquí de los conceptos de multiplicidad ***finita*** y multiplicidad ***infinita*** establece las diferencias entre ambos a satisfacción de quienes se han servido de estas expresiones. Habrá de concederse también que no hay en estas definiciones ningún círculo vicioso oculto. Lo único que aquí está en cuestión es si la sola definición de lo que es una multiplicidad infinita basta para determinar lo que es en sí mismo el infinito.

Este sería efectivamente el caso si pudiera mostrarse que, en rigor, el concepto de infinito, en su significado real, solamente puede aplicarse a ***multiplicidades***, es decir, si pudiera mostrarse que la infinitud es una propiedad exclusiva de las multiplicidades, o bien que todo aquello de lo que puede decirse que es infinito resulta ser tal en virtud de y en la medida en que se encuentre en ella una propiedad que pueda considerarse precisamente como la de ser una multiplicidad infinita.

Es exactamente esto lo que, en mi opinión, ocurre. Es evidente que los matemáticos no utilizan nunca esa expresión en ningún otro sentido, pues, en general, es la determinación de cantidades lo que ocupa su atención de manera casi exclusiva, tomando para ello un cierto objeto del mismo tipo como ***unidad*** y sirviéndose de la idea misma de número.

Si un matemático encuentra una cantidad mayor que cualquier número finito de las unidades que ha elegido, la llamará

infinitamente grande; si encuentra una cantidad que es tan pequeña que cualquier multiplicación finita es menor que la unidad tomada, la llamará ***infinitamente pequeña***.

Aparte de estos dos tipos de infinitud y de los tipos de cantidades infinitamente grandes e infinitamente pequeñas de orden superior que se basan en esta idea, no existe para las matemáticas ningún otro tipo de infinitud.

§ 11

Es este, precisamente, el infinito con el que los matemáticos están familiarizados. Ahora bien, a algunos filósofos —especialmente a filósofos de la modernidad, como Hegel y sus seguidores— no les basta. El infinito al que nos hemos estado refiriendo es llamado por ellos, con desdén, "el mal infinito", pretendiendo conocer otro tipo de infinito, inmensamente superior y verdadero y que habría de hallarse en Dios, en particular, y en lo Absoluto, en general.

Estoy completamente de acuerdo con Hegel, Erdmann y otros en su crítica del infinito concebido solamente como una cantidad *variable* para cuyo crecimiento no existen límites (esta es una explicación del concepto que, como veremos, ha sido ofrecida por muchos matemáticos); es decir, coincido con ellos si lo que se critica es el concepto de una *cantidad* que se incrementa incesantemente hacia el infinito, aunque sin llegar nunca a éste.

Una cantidad *verdaderamente infinita* (por ejemplo, la longitud de una recta no acotada en ninguna de sus dos direcciones; o sea, la magnitud del objeto espacial que contiene todos los puntos determinados exclusivamente por su relación conceptual concebible con dos puntos dados), no es necesariamente variable, como ilustra claramente el ejemplo aducido. Por otra parte, una cantidad que solamente puede ser considerada como algo que es siempre mayor que cualquier cantidad (finita) dada, es capaz de conservar su carácter de cantidad finita, tal y como ocurre con las cantidades numéricas *1,2,3,4,*....

Lo único que no me parece aceptable es la pretensión filosófica de conocer un objeto al que justificadamente puede adscribirse el predicado de ser infinito, sin que se haya demostrado previamente, en relación al mismo, la existencia de una multiplicidad con esa propiedad.

Si soy capaz de mostrar que en relación a Dios mismo (esto es, al Ser que consideramos como la Unidad Perfecta) existen aspectos que ponen de manifiesto la presencia de una magnitud infinita y que precisamente estos aspectos constituyen la razón fundamental por la que le atribuímos un carácter infinito, no será necesario ya probar en todos los demás casos que lo que se encuentra en la base de un uso correcto del concepto de infinito no es sino una serie de consideraciones análogas a las que acabamos de hacer. Afirmo ahora que llamamos a Dios infinito porque reconocemos en El fuerzas de más de un tipo que poseen una magnitud infinita.

Esto significa que estamos obligados a atribuirle una capacidad de conocimiento infinita, una verdadera omnisciencia y, en consecuencia, un conjunto infinito de verdades, a saber, todas las verdades, etc.

Pero, entonces ¿cuál sería el concepto de infinito verdadero que se nos presentaría aquí y que habría de reemplazar al que hemos estado discutiendo anteriormente? ¿Sería tal vez el de un universo omnicomprensivo, el de un universo absoluto fuera del cual nada existe?

De acuerdo con esta descripción se trataría en realidad, de un infinito que, juzgado con base en nuestra definición, incluiría una multiplicidad infinita. Sería un agregado que comprendería no solamente a todas las cosas reales, sino igualmente a todo aquello que no posee ninguna realidad, a las proposiciones y las verdades absolutas. De esta manera —y haciendo caso omiso de todos los demás errores que se han deslizado en esta doctrina del universo— podría muy bien no haber ninguna razón para abandonar nuestra idea del infinito y aceptar otras.

§ 12

Algunos matemáticos han ofrecido otras explicaciones del infinito, pretendiendo con ello elucidar partes constitutivas de un concepto unívoco. Pero estoy obligado a rechazarlas, pues todas ellas son erróneas.

1. Algunos matemáticos, entre ellos el mismo Cauchy (por ejemplo, en su *Cours d'Analyse*), lo mismo que el autor del artículo "El Infinito" en el *Diccionario* de Klügel, han creido ofrecer una explicación del infinito al describir a éste como una cantidad *variable*; cuyo valor se incrementa sin límite y puede sobrepasar cualquier cantidad dada, independientemente de la magnitud de ésta. El *límite* de este crecimiento ilimitado sería una *cantidad de magnitud infinita (die unendlich grosse Grösse)*.

De esta manera, por ejemplo, la tangente del ángulo recto sería considerada como una cantidad continua, ilimitada, sin fin; esto es, en sentido estricto, como una cantidad infinita.

Lo equivocado de esta concepción se pone ya de manifiesto en el hecho de que lo que los matemáticos llaman una cantidad variable no es, realmente, una cantidad, sino tan sólo el concepto, la idea de una cantidad, una noción de ésta. Pero una idea de este tipo comprende no solamente una cantidad dada, sino igualmente un conjunto infinito de cantidades diversas entre sí en cuanto a valor; es decir, diferentes en cuanto a magnitud.

Lo que estos matemáticos llaman infinito no es, sin embargo, alguno de los distintos valores que toma, por ejemplo, la expresión $tan(\varphi)$ para distintos valores de φ, sino más bien aquel valor individual singular que imaginan (en este caso, sin razón) $tan(\varphi)$ que esa expresión tiene para $\varphi = \pi/2$.

De igual modo, resulta ciertamente una contradicción hablar tanto del límite de un crecimiento ilimitado como, en relación a la definición de lo infinitamente pequeño, del límite de una disminución ilimitada. Ahora bien, si ha de tomarse al primero como lo infinitamente grande, debería también, en aras de la analogía, considerarse al segundo —es decir al cero (nada)— como lo infinitamente pequeño. Pero esto es sin lugar a dudas incorrecto y ni Cauchy ni Grunert se atreven a confirmarlo.

2. Si la definición que hemos considerado es demasiado amplia, la que nos ofrecen Spinoza y otros filósofos y matemáticos es demasiado estrecha. Según ellos, sólo es infinito aquello que no es ya susceptible de un incremento adicional o aquello a lo que no se puede añadir (adicionar) nada más.

Los matemáticos consideran natural añadir una cantidad a cualquier otra. Pero la cantidad añadida no tiene que ser necesariamente finita. Lo añadido pueden ser cantidades infinitas, se puede multiplicar una cantidad infinita infinitas veces, etc.

Sin embargo, algunos matemáticos ponen en duda la legitimidad de este procedimiento. Pero, ¿qué matemático que no rechace sin más todo lo que tenga que ver con el infinito *no* aceptará que la longitud de una recta acotada solamente en una dirección, pero que se extiende al infinito en la otra, es infinitamente grande y, no obstante, al mismo tiempo, que puede prolongarse y hacerse más grande extendiéndola en el sentido de la primera dirección?

3. La explicación de quienes se remiten a la composición misma de la palabra y afirman que es infinito lo que no tiene un fin, no es mucho más satisfactoria. Pues, en efecto, si con ello se piensa en un fin en el tiempo, en una suspensión, entonces solamente las cosas que se encuentran en el tiempo pueden ser finitas o infinitas. Pero es claro que nuestra investigación incluye también cosas que no pueden considerarse, en forma alguna, como algo temporal, por ejemplo, líneas y cantidades abstractas, en relación a las cuales nos preguntamos también si son finitas o infinitas.

Por otra parte, si tomamos la palabra en un sentido más amplio, *v.gr.*, como equivalente a *límite* en cuanto tal, habría que recordar lo siguiente:

En primer lugar, que existen muchos objeto que nadie consideraría infinitos y en relación a los cuales no puede realmente demostrarse que tengan un límite sin atribuir al mismo tiempo a esta palabra un significado sumamente indeterminado e impreciso. Una parte simple del tiempo o del espacio (un punto en el tiempo o en el espacio), por ejemplo, no tiene un límite, siendo considerado comúnmente como el límite de un intervalo temporal o de una línea, definiéndosele, en general, precisamente de esa manera, como si esto constituyera realmente su esencia. Pero nadie (con la posible excepción de Hegel) ha creído descubrir la infinitud en un mero punto. Y tampoco es el caso, digamos, que el matemático vea un límite en la periferia de un círculo, ni en alguna otra de las múltiples líneas y superficies cerradas, considerándolas simplemente como algo finito (a no ser que esté obligado a hablar del conjunto infinito de los puntos contenidos en ellas, en cuyo caso debe reconocer también algo infinito en cualquier segmento linear acotado)

En segundo lugar, es necesario observar, que existen muchos objetos que se encuentran, sin duda alguna, acotados y que, no obstante, se cuentan normalmente entre las cantidades infinitas. Este es el caso no solamente de la recta que se extiende al infinito solamente en una dirección, sino también del espacio que se localiza entre un par de paralelas de longitud infinita, lo mismo que de los brazos de un ángulo plano y, en general, de muchas otras cosas.

También en la psicología racional llamamos infinita a una capacidad cognoscitiva si existe un conjunto de verdades infinito (por ejemplo el que contiene a las que enuncian la serie infinita de los dígitos de la representación decimal de la cantidad $\sqrt{2}$), independientemente de que se alcance o no la omnisciencia.

4. La actitud más generalizada consiste en decir que lo infinitamente grande es aquello que es más grande que cualquier cantidad dada o asignada. Lo que aquí se requiere es, en primer lugar, una determinación precisa del pensamiento que las palabras 'asignada' o 'asignable' sugieren. ¿Significan únicamente que algo es *posible*, que *puede* tener realidad o que no es contradictorio?

En el primer caso, el concepto de finitud se limita exclusivamente a aquellos objetos que pertenecen al ámbito de lo real, que son algo real en todo tiempo, o que en cierto momento lo han sido o lo serán o que, por lo menos, *podrían* alcanzar ese carácter.

Fries parece tomar el concepto precisamente en este sentido cuando habla (*Filosofía Natural*, *§ 47*) del infinito como de lo ***no completable***. El uso lingüístico aplica, sin embargo, ambas nociones (la de finitud y la de infinitud) tanto a objetos a los que corresponde una realidad (particularmente a Dios) como a otros, en relación a los cuales no se puede hablar en forma alguna de existencia, por ejemplo: las proposiciones y las verdades absolutas y sus partes componentes, lo mismo que las representaciones absolutas. De todas ellas consideramos tanto conjuntos finitos como conjuntos infinitos.

Si, por otra parte, se entiende por ***asignable*** sencillamente todo aquello que no resulta contradictorio, entonces en la definición misma del concepto se sugiere que el infinito no existe, pues una cantidad que ha de ser mayor que cualquiera que no se contradiga debería ser mayor que sí misma, lo que resulta claramente absurdo.

Hay todavía un tercer significado que puede darse a la palabra 'asignable', a saber: simplemente aquello que, de alguna manera, se presenta *ante nosotros*; es decir, aquello que puede convertirse en un objeto de *nuestra experiencia*.

Pero en este punto ha de plantearse la cuestión de si las palabras 'finito' e 'infinito' no han sido utilizadas siempre en un sentido que hace referencia a una propiedad *interna determinada* de los objetos (y no a una relación entre ellos y nuestra *capacidad cognoscitiva* y menos aún a una relación entre ellos y nuestra *sensibilidad*; y esto, independientemente de que podamos o no tener *experiencia* de ellos), y la de si dichas nociones no deben de tomarse necesariamente en ese sentido, si es que su uso ha de resultar de algún provecho para la ciencia.

En consecuencia, el problema de si un objeto dado es o no infinito no puede, ciertamente, depender de si su cantidad es algo que podamos o no percibir, de si somos o no capaces de tener una visión global de ella.

§ 13

Una vez que nos hemos puesto de acuerdo en cuanto al concepto que queremos asociar con la palabras *infinito* y tras haber distinguido claramente sus partes constitutivas, se plantea como siguiente problema la cuestión de su objetividad, la pregunta de si tiene o no una existencia objetiva. Es decir, ¿hay objetos a los que el concepto puede aplicarse, existen conjuntos a los que podemos llamar infinitos en el sentido apenas elucidado del término?

Me atrevo a decir que la respuesta es definitivamente *afirmativa*. En efecto, aun en la esfera de los objetos que no reclaman realidad y ni siquiera posibilidad de ninguna índole es indudable que existen conjuntos infinitos. *El conjunto de las proposiciones* y de las verdades en sí es claramente infinito. Porque cuando consideramos una verdad cualquiera *A* (por ejemplo, la proposición "existen verdades" o cualquier otra) descubrimos que la proposición expresada por la frase "*A* es verdadera" y es algo distinto a la proposición *A* misma, pues, obviamente, el sujeto de ambas es diferente: el sujeto de la primera es la proposición *A*, que no puede ser el sujeto de ella misma. De manera análoga a como derivamos a partir de *A* una proposición distinta *B* podemos, a partir de ésta, obtener otra proposición *C*, diferente tanto de *A* como de *B* y así sucesivamente en un proceso sin fin.

El agregado que contiene todas estas proposiciones (de las cuales, cualquiera que sea posterior en la secuencia generativa a otra se encuentra relacionada con ésta de la manera dicha) contiene un conjunto de partes o elementos (proposiciones) que excede cualquier conjunto finito.

El lector atento habrá observado ya (sin que yo necesite recordárselo) la analogía existente entre la serie de estas proposiciones, obtenida de acuerdo con la ley de construcción enunciada, y la serie de los números que hemos considerado en el parágrafo 8. Esta analogía consiste, en realidad, en que para cada elemento de la serie de los números existe un elemento correspondiente en la serie de las proposiciones descrita; y por lo tanto, en que para cualquier número entero —sin que importe su magnitud— existe un número igual de proposiciones distintas entre sí. Por último, en que podemos continuar indefinidamente el proceso de construcción de proposiciones, siendo posible siempre generar nuevas proposiciones. O mejor dicho: en que esas proposiciones existen por sí mismas, independientemente de que las construyamos o no. De todo ello se sigue que el agregado de todas las proposiciones mencionadas posee una multiplicidad que supera cualquier número; es decir, que la multiplicidad de ese agregado es infinita.

§ 14

Hay muchas personas agudas e instruidas que, no obstante la sencillez y la claridad de la demostración que hemos presentado, afirman que la tesis misma no sólo es paradójica, sino claramente falsa. La existencia de un infinito es algo que ellos no aceptan. De acuerdo con sus concepciones, no existe, ni entre las cosas reales ni entre las que no lo son, ni entre los objetos individuales ni entre los agregados de éstos, algo que en algún sentido pueda justificar el que se hable de un conjunto infinito de elementos.

Más adelante estudiaremos los argumentos que se esgrimen en contra de la idea de un infinito en la esfera de lo real, pues será entonces que expongamos nuestros argumentos en favor de su existencia.

Por ahora, nos limitaremos a examinar los argumentos que se aducen como demostración de que *no* existe un infinito en ningún ámbito de objetos, ni siquiera entre aquellos que no reclaman en forma alguna realidad.

1. Se afirma que: "un conjunto infinito no puede existir en ninguna parte, por la sencilla razón de que no es posible abarcar nunca con el pensamiento, como un todo unitario, un conjunto de esa índole".

Esto es algo que hay que señalar claramente como un error, como un error provocado por la equivacada opinión de que para poder pensar un todo con objetos $a,b,c,d,\ldots$, es necesaria la formación previa de representaciones mentales individuales de cada uno de esos objetos. Pero esto es falso. Puedo pensar, por ejemplo, el conjunto, el agregado o, si se quiere, el todo de los habitantes de Praga o de Beijing sin necesidad de tener una representación particular de cada uno de ellos. En realidad, es precisamente esto lo que estoy haciendo en este momento al hablar de ese conjunto y hacer afirmaciones sobre él (como, *v.gr.*, la de que su número oscila entre 100,000 y 120,000). Lo que ocurre es, más bien, que tan pronto como tenemos una representación mental A que se refiere a cada uno de los objetos $a,b,c,d,\ldots$, resulta muy fácil pasar a otra representación, cuyo objeto es el agregado mismo al que todos estos objetos tomados conjuntamente dan lugar. Para ello no se requiere otra cosa que combinar el concepto designado por la palabra *agregado* y la representación misma, de la manera sugerida por la expresión *el agregado de todos los A*.

Esta simple observación —cuya corrección será evidente para todos— disipa cualquier tipo de objeciones que pudieran hacerse al concepto de un conjunto que contiene un número infinito de elementos: *con tal* de que exista un concepto genérico que comprenda *exclusivamente* a cada uno de estos elementos (como sucede con el concepto *el conjunto de todas las proposiciones y verdades absolutas*, en relación al cual el concepto genérico no es otro que el de *una proposición o una verdad absoluta* que allí aparece).

No es posible pasar por alto, sin embargo, un segundo error que la objeción mencionada pone de manifiesto. Se trata de la opinión de que "un conjunto no existiría si no existe antes alguien que lo piense".

Quien sostenga esta tesis debe mantener, en aras de la consecuencia, no sólo que no hay conjuntos infinitos de proposiciones ni de verdades absolutas, sino igualmente que no existen, *en general*, ni las proposiciones ni las verdades absolutas. Pues, en efecto, cuando tenemos una idea clara del concepto de "proposición" y de "verdad absoluta" y no dudamos más de su objetividad, difícilmente haremos afirmaciones como la que hemos citado, y si las hacemos, es poco probable que nos aferremos a ellas.

Para demostrar esta última aseveración de la manera más convincente posible, me permito plantear la cuestión de si en los polos de la Tierra no existen también cuerpos, tanto fluidos como sólidos —aire, agua, piedras, etc.— y la de si estos cuerpos no se influyen recíprocamente de acuerdo con ciertas leyes (por ejemplo, la de que las velocidades que llevan al producirse una colisión se comportan de manera inversamente proporcional a sus masas, etc.), y si esto no ocurre aun cuando no se encuentre presente ningún ser humano ni ningún otro ser pensante que lo observe.

Si la respuesta a estas cuestiones es afirmativa (¿y quién, en efecto, podría dudar de ello?), entonces las proposiciones y las verdades absolutas que expresan estos procesos también existen, independientemente de que alguien las piense o las conozca.

Por lo demás, en estas proposiciones se habla con frecuencia de totalidades y de conjuntos, pues todo cuerpo es una totalidad, un todo, y produce muchos de sus efectos exclusivamente a través del conjunto de elementos que lo conforman. Así, los conjuntos y las totalidades existen, aun cuando no haya un ser que los piense. Porque si éste no fuera el caso y los conjuntos mismos no tuvieran existencia autónoma ¿cómo podrían ser verdaderos los juicios que hacemos sobre ellos? En otras palabras ¿cuál tendría que ser el sentido de estos juicios si para que sean verdaderos se requiere de alguien que *perciba* esos procesos? Cuando hago una afirmación como: "Este bloque se desprendió ante mis ojos de aquellas rocas y cortando el aire se precipitó", esta frase debería tener aproximadamente el siguiente sentido: Como resultado de que yo haya pensado ciertas substancias en combinación, surge una entidad compuesta a la que llamo 'bloque'. Dicha entidad compleja se separó de otras entidades que, al ser pensadas en combinación, se unieron en un todo al que llamo 'rocas', etc.

2. Alguien podría pensar lo siguiente: "La cuestión de si pensamos o no ciertos objetos en combinación, esto es, como un agregado, es una operación que *nosotros* efectuamos, una operación que es, en realidad, en la mayoría de los casos, algo muy arbitrario. Y solamente cuando esto ocurre es que se da una relación entre esas partes. El átomo medio en el botón de esta chaqueta y el átomo medio en el botón de la torre frente a mí no tienen qué ver entre sí en absoluto, no se encuentran en ninguna relación. Es únicamente mi pensamiento de ellos en combinación lo que hace surgir la conexión entre los mismos".

También a esto debo oponerme. Ambos átomos ya ejercían (*v.gr.* por medio de la fuerza de atracción) una influencia recíproca entre sí, *antes* de que un ser pensante los reuniera en una representación mental. Y, a no ser que ese ser pensante, como resultado de sus pensamientos, emprenda acciones que provoquen una modificación en las relaciones entre esos átomos, es completamente falso que sea el pensamiento de los mismos como un conjunto lo que hace que surjan relaciones entre ellos que de otro modo no existirían. Si el juicio que emito en relación a que un cierto átomo se encuentra más abajo que otro y éste más arriba que aquél y, por lo tanto, que el primero es atraído hacia lo alto por el segundo ha de ser verdadero, etc., todo esto debe tener lugar *aunque yo no lo haya pensado*.

3. Sin embargo, otros argumentarían como sigue: "Un agregado no requiere ser pensado *efectivamente* para poder existir, pero sí es necesario para que esto ocurra que sea por lo menos

en potencia contenido en un pensamiento. Ahora bien, no es posible que exista un ser con la capacidad de representarse mentalmente, por separado, cada uno de los objetos de un conjunto infinito, combinando después estas representaciones en un todo. Por lo tanto, es imposible que exista un agregado que consista de un conjunto infinito de objetos".

Ya hemos visto, al examinar la primera objeción, lo equivocado que resulta suponer que para pensar un agregado es necesario pensar cada uno de sus elementos (es decir, el pensamiento individual por medio de una representación separada de cada objeto), que aquí se presenta nuevamente.

Tampoco es necesario apelar a un ser omnisciente, capaz de abarcar sin dificultad un conjunto infinito de objetos, cada uno por separado. Y tampoco debemos aceptar la primera suposición; esto es, la de que ser potencialmente objeto del pensamiento es una condición necesaria de la existencia de un agregado. Porque el fundamento de la posibilidad de un objeto no puede ser nunca derivado de su *capacidad de ser objeto del pensamiento*. Más bien ocurre lo opuesto: La posibilidad de un objeto constituye precisamente el fundamento, la base para que un ser racional (con tal de que no se equivoque) *considere* al objeto como algo posible o, como un poco impropiamente se dice, para que sea *pensable*, para que ese objeto pueda ser pensado.

Uno se convence todavía más de lo correcto de estas afirmaciones y de lo insostenible del punto de vista —por lo demás muy extendido— aquí considerado, cuando se trata de aclarar los elementos que constituyen el fundamental concepto de *posibilidad*.

Decir que es posible aquello que *puede ser* no constituye, evidentemente, un análisis de ese concepto, pues la palabra 'poder' presupone el concepto mismo de posibilidad en toda su magnitud.

Pero es todavía más equivocado argumentar que lo posible es precisamente aquello que puede ser pensado. 'Pensar', en el sentido real de esta palabra, se refiere a la mera representación e incluye igualmente lo imposible, pues inclusive esto puede ser objeto del pensamiento. Es precisamente esto lo que hacemos cada vez que emitimos juicios al respecto, diciendo, por ejemplo, que algo es imposible (como ocurre, digamos, cuando se afirma que no existe ni puede existir una cantidad representable por 0 o por $\sqrt{-1}$)

Sin embargo, aunque por 'pensar' se entienda no una simple representación, sino *tener por verdadero*, es falso que todo lo que podamos tener por verdadero sea también *posible*. En ocasiones, en efecto, consideramos aun a lo imposible *como si fuera* verdadero (por ejemplo, cuando creemos haber descubierto la cuadratura del círculo). Tendría entonces que decirse (como ya había supuesto más arriba) que *posible* es "aquello acerca de lo cual un ser pensante juzga que puede *existir*; es decir, que es posible, en concordancia con la verdad". Pero obviamente esta definición es circular, por lo que, si realmente queremos definir lo que es *posibilidad*, resulta necesario prescindir de cualquier tipo de referencia a un ser pensante y buscar otro tipo de características definitorias.

Con frecuencia se dice también que posible es "lo que no es contradictorio". Por supuesto, dar lugar a una contradicción es una condición suficiente para que algo sea imposible (por ejemplo, si se dice que una esfera no es una esfera). Sin embargo, no todo lo que es imposible contiene una contradicción entre las partes con las cuales hemos compuesto su representación. Es imposible, *v.gr.*, tener un poliedro de siete caras congruentes entre sí, pero la contradicción no es evidente en las palabras mismas. Esto significa que es necesario extender nuestra definición.

Por otra parte, si decimos: "Es imposible lo que se encuentra en contradicción con alguna verdad", tendríamos que afirmar también que todo lo que no es el caso es, por ello mismo, imposible, puesto que la proposición de que ocurre contradice la verdad de que no es así. Pero entonces desaparece la distinción normal entre lo que es posible, lo que es real y lo que es necesario.

De esta manera, la esfera de las verdades contradichas por lo imposible debe restringirse a una cierta categoría de las mismas, y cuál sea ésta es algo que difícilmente puede pasarnos desapercibido: se trata de las *verdades conceptuales puras*.

Todo lo que se encuentre en contradicción con una verdad conceptual pura ha de ser tenido por *imposible*. En consecuencia, será *posible* todo aquello que no contradiga ninguna verdad conceptual pura. A nadie que se hubiera percatado de que es ésta la noción adecuada de posibilidad se le ocurriría afirmar que algo es posible solamente si puede ser pensado; es decir, si es considerado como posible por un ser pensante que no yerre en su juicio al respecto. Porque, en realidad, esto sería equivalente a decir: "una proposición no contradice ninguna verdad conceptual pura, únicamente si no contradice ninguna verdad conceptual pura que afirme que existe un ser pensante que, en concordancia con la verdad, juzgue que, efectivamente, esta proposición no contradice ninguna verdad conceptual pura".

Pero es obvio que la referencia aquí a un ser pensante es totalmente impropia. Y si uno ha determinado ya que el pensamiento no es necesario para poder hablar de la posibilidad ¿qué otras razones pueden todavía aducirse para afirmar, con base en la circunstancia de que un conjunto infinito de cosas no puede ser concebido en el pensamiento como un todo; que ese conjunto no existe?

§ 15

Considero suficiente la exposición y defensa que aquí se ha hecho de que existen los conjuntos infinitos; por lo menos los de los objetos que no tienen realidad; en particular, el conjunto de todas las verdades absolutas es infinito.

De manera análoga a la presentada en § 13, podemos aceptar que el conjunto de *todos los números* (de los llamados números naturales o enteros, definidos en § 8) es también infinito. Pero esta afirmación se presenta igualmente a nosotros como algo *paradójico*, pudiendo, en realidad, ser considerada como la primera paradoja que se presenta en la esfera de las matemáticas, pues la que hemos analizado un poco antes pertenece más bien a una ciencia con mayor generalidad que la doctrina de las cantidades.

Pero quizá podría argumentarse como sigue:

"Si cualquier número es, simplemente por definición, un conjunto finito ¿cómo es posible que el conjunto de *todos* los números sea infinito? Si consideramos, en efecto, la serie de los números naturales:

1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

nos percataremos de que el conjunto de los números contenidos en la serie que va del primero (o sea, la unidad) a cualquier otro, es enumerado siempre por este último (por ejemplo, la que va del 1 al 6). En consecuencia, el conjunto de *todos* los números debe ser exactamente enumerado por el último de ellos, por lo que no podría ser infinito".

Lo falaz de este argumento se pone de manifiesto tan pronto se recuerda que en la serie de los números naturales no existe un último elemento, por lo que la noción de un último número (maximal) carece de referencia puesto que encierra una contradicción. El principio de construcción de la serie (expuesto en § 8) garantiza que cada elemento posee un sucesor. Esta observación basta para resolver esta paradoja.

§ 16

Si el conjunto de los *números* (esto es, de los llamados números naturales) es infinito, con mayor razón lo es el conjunto de las cantidades (de acuerdo con la explicación ofrecida en § 6 y en § 87 de mi *Wissenschaftslehre).*

Según la definición citada no sólo son todos los números al mismo tiempo cantidades, sino que existen más cantidades que números: porque las fracciones $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, ... , lo mismo que las llamadas expresiones *irracionales* $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$, π, e,... denotan cantidades. Y, según esta explicación, no representa, en realidad, ninguna contradicción hablar de cantidades *infinitamente grandes*, ni tampoco de cantidades *infinitamente pequeñas, a condición* de que, en primer lugar, se entienda por una "cantidad infinitamente grande" tan sólo una cantidad que se presenta como un todo en relación a la unidad base; un todo del que cualquier conjunto finito de unidades básicas sea solamente una parte; y, en segundo, que por una "cantidad infinitamente pequeña" se entienda una cantidad en relación a la cual la unidad base misma aparezca como un todo del que cualquier multiplicidad finita de esta cantidad sea tan sólo una parte.

El conjunto de todos los números se presenta de inmediato como un ejemplo irrecusable de una *cantidad* infinitamente grande. Nótese que hablo aquí de un ejemplo de una *cantidad* y no de un *número* infinitamente grande. Porque, en realidad, no puede llamarse un número a esta multiplicidad infinitamente grande, como ya hemos observado en el apartado anterior. Si, por el contrario, convertimos a la cantidad que en relación con la unidad base anterior aparece como infinitamente grande en una nueva unidad base, comparándola con la unidad base previa, ésta aparecerá ante ella como algo ***infinitamente pequeño***.

§ 17

El *tiempo* y el *espacio* representan una categoría extremadamente importante de cantidades que, a pesar de no pertenecer a la esfera de lo real, sí constituyen *determinaciones* de la misma.

En efecto, ni el tiempo ni el espacio poseen realidad, pues no son ni substancias, ni propiedades de las substancias, presentándose únicamente como determinaciones de toda substancia incompleta (esto es, limitada, finita o, equivalentemente, dependiente o creada). De hecho, cada una de estas substancias debe ocupar siempre una posición en el espacio y en el tiempo.

Ahora bien, no sólo el conjunto de los puntos simples de los que consisten el tiempo, por una parte, y el espacio, por la otra, es infinito: el conjunto de los puntos en el tiempo que se encuentran entre dos puntos temporales dados cualesquiera (esto es, independientemente de su proximidad) ya lo es. Y, análogamente, el conjunto de los puntos espaciales que se encuentran entre dos puntos dados arbitrarios (independiente-mente de su proximidad) es también infinito.

No es necesario, entonces, embarcarse en una defensa de estas afirmaciones, puesto que difícilmente habrá algún matemático que las rechace, aceptando al mismo tiempo de alguna manera la idea de infinito.

Pero quienes se oponen a la existencia de cualquier tipo de infinito recurren todavía al siguiente argumento para no verse obligados a aceptar el infinito que aquí se presenta de manera tan clara: "Por supuesto, podemos siempre pensar en más puntos en el tiempo y en el espacio de los que ya hemos pensado, pero el conjunto de los puntos realmente existentes permanece invariablemente en la esfera de lo finito".

A esto habría que responder que ni el tiempo ni el espacio y, por lo tanto, ni los puntos del espacio ni los del tiempo, son algo que tenga realidad. Resulta, en consecuencia, absurdo hablar de un conjunto finito de ellos que sí la tienen. Pero todavía más absurda es la pretensión de que estos puntos la adquieren *gracias a* que los pensamos. De ello se seguiría que tanto las propiedades del tiempo como las del espacio dependen de nuestro pensamiento y de nuestros juicios. Si así fuera, la razón del diámetro de un círculo con su circunferencia habría sido algo racional mientras la tuvimos (erróneamente) como tal. Igualmente el espacio iría adquiriendo paulatinamente las propiedades que vayamos descubriendo en el futuro. Pero aun en el caso de que nuestros adversarios reformulen su idea, afirmando que el único pensamiento capaz de determinar las propiedades reales del tiempo y del espacio es precisamente el pensamiento que concuerda con la verdad, a lo que aquí se da expresión no es a otra cosa que a una tautología, a saber: lo que es verdadero es verdadero. Es claro, sin embargo, que a partir de ello no puede inferirse nada que se encuentre en oposición a la idea de la infinitud del tiempo o del espacio que aquí hemos estado sosteniendo. Como sea, es claramente equivocado afirmar que el tiempo y el espacio contienen exclusivamente los puntos que podemos pensar.

§ 18

Si bien toda cantidad y, en general, todo objeto que por alguna razón se presente a nosotros como algo infinito ha de poder considerarse a ese respecto como un todo que consta de un conjunto infinito de objetos, no es cierto, conversamente, que cualquier cantidad que pueda ser considerada como la suma de un conjunto infinito de cantidades finitas deba ser infinita.

Así, se acepta comúnmente que las cantidades irracionales (como $\sqrt{2}$) son finitas en relación a la unidad base, a pesar de que puedan verse como una composición de un conjunto infinito de fracciones de la forma

$$\frac{10}{14} + \frac{1}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{2}{10000} + \cdots,$$

con numerador y denominador enteros. De manera análoga, se reconoce generalmente que la suma de la serie infinita de sumandos de la forma

$$a + ae + ae^2 + \ldots \textit{ in inf.} = \frac{a}{1-e}$$

es igual a la cantidad finita

$$\frac{a}{1-e},$$

siempre que $e < 1$*.

---

* Me permito esbozar aquí una demostración de esta proposición, en virtud de que la que se ofrece usualmente carece de rigor.

Sea $a = 1$ y consideremos, sin pérdida de generalidad, que e es positivo. Escribamos, además, la ecuación simbólica

$$S = 1 + e + e^2 + \ldots \textit{ in inf.} \tag{1}$$

Sabemos entonces que S designa una cantidad positiva, independientemente de que sea finita o infinita. Ahora bien, para un valor entero arbitrario de n, tenemos

$$S = 1 + e + e^2 + \ldots + e^{n-1} + e^n + e^{n+1} + \ldots \textit{in inf.}$$

y también

$$S = \frac{1-e^n}{1-e} + e^n + e^{n+1} + \ldots \textit{ in inf.} \tag{2}$$

en lugar de la cual podemos escribir

$$S = \frac{1-e^n}{1-e} + P' \tag{3}$$

donde P' designa el valor de la serie infinita

$$e^n + e^{n+1} \ldots \textit{ in inf,}$$

y sabemos de cierto que P' es una cantidad positiva que depende de e y de n, independientemente de que resulte conmensurable o no. Pero la serie también puede ser representada como sigue:

Podemos concluir, entonces, que no hay nada de contradictorio en la afirmación de que la suma de un número infinito de cantidades finitas puede tener como resultado una cantidad finita. De no ser éste el caso, no sería posible ofrecer una prueba de esta proposición.

La aparente paradoja aquí tiene su origen en el hecho de que se olvida que los sumandos se hacen cada vez más pequeños. Porque una suma cuyos términos tienen, por ejemplo, la propiedad de que el sucesor de cada uno de ellos es la mitad de su antecesor, no puede nunca exceder el doble del primero de ellos. Y esto no puede sorprender a nadie, pues, en realidad, no importa

---

$$e^n + e^{n+1} + \ldots inf\ inf. = e^n\,(1 + e + \ldots\ in\ inf.),$$

En esta igualdad, la suma entre paréntesis a la derecha consta de un número infinito de sumandos y tiene, por lo tanto, la misma forma de la serie que habíamos identificado con S en la ecuación simbólica (1). Pero no son iguales, pues si bien es cierto que el conjunto de los sumandos tanto en esta serie como en (1) es infinito, aquélla tiene, sin duda, menos términos que ésta. En consecuencia, tenemos la certeza de que puede escribirse

$$(1 + e + e^2 + \ldots\ in\ inf.) = S - P''$$

siendo siempre P'' una cantidad positiva dependiente de n.
Se obtiene así

$$S = \frac{1-e^n}{1-e} + e^n\,(S - P'') \tag{4}$$

o bien

$$S\,(1-e^n) = \frac{1-e^n}{1-e} - e^n P''$$

y, finalmente,

$$S = \frac{1}{1-e} - \frac{e^n}{1-e^n} P'' \tag{5}$$

De (3) y (5) tenemos entonces

$$\frac{-e^n}{1-e} + P' = \frac{-e^n}{1-e^n} P''$$

o también

$$P' + \frac{e^n}{1-e^n} P'' = + \frac{e^n}{1-e},$$

qué término de la serie consideremos, la suma es siempre menor que aquél doble exactamente en la cantidad representada por ese último término.

§ 19

Los ejemplos que hasta ahora se han aducido muestran ya claramente que no todos los conjuntos infinitos han de considerarse iguales ***en relación a la multiplicidad de sus elementos***. Algunos de ellos son mayores (o menores) que otros; es decir, algunos contienen a otros como una parte (o, por el contrario, se encuentran contenidos como parte en otros). Sin embargo, muchos piensan que esta afirmación es paradójica. Y es evidente que quienes definen el infinito como lo que no es susceptible de un incremento encontrarán no sólo paradójica, sino abiertamente contradictoria la afirmación de que un infinito puede ser mayor que otro. Por lo demás, ya hemos visto que esta concepción descansa en una idea del infinito que no coincide en forma alguna con el uso que el lenguaje hace de esta palabra.

---

a partir de lo cual puede concluirse que si se toma a n arbitrariamente grande, el valor de

$$\frac{e^n}{1-e^n}$$

será menor que cualquier cantidad

$$\frac{1}{\mathcal{N}}$$

que se elija (sin importar su magnitud), debiendo disminuir también las cantidades

$$P' \text{ y } \frac{e^n}{1-e^n}P''$$

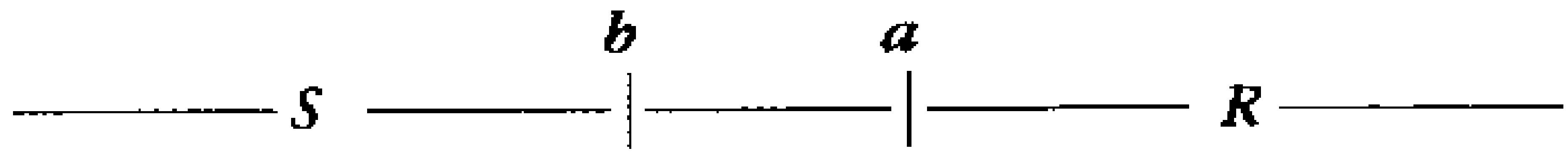
más allá de cualquier valor dado. Pero si es esto lo que ocurre, las ecuaciones (3) y (5) indican que

$$S = \frac{1}{1-e}$$

puesto que S depende de e y no de n.

Hay que hacer notar aquí que nuestra definición concuerda no solamente con el uso del lenguaje, sino también con los propósitos de la ciencia y, en consecuencia, la idea de que de dos conjuntos infinitos uno puede ser mayor que otro no puede resultarle a nadie contradictoria y ni siquiera sorprendente.

¿A quién, por ejemplo, no le resultará evidente que la longitud de una línea recta no acotada que parte del punto *a* en la dirección de *R* es infinita?



Pero, de igual manera, ¿quién pondrá en duda que la recta no acotada que va en la misma dirección *R* que la anterior, pero que parte del punto *b*, es mayor que la recta anterior, precisamente en el segmento *ab*, así como que la recta no acotada en ninguna de las direcciones *R* y *S* es mayor todavía, infinitamente mayor, que las anteriores?

§ 20

Pasemos ahora al análisis de una de las características más notables de los conjuntos *infinitos*, presente con frecuencia —en realidad siempre— que se los hace objeto de estudio, pero que en general pasa desapercibida, en detrimento de muchas e importantes verdades en la metafísica, la física y las matemáticas. De hecho, ocurre aún hoy que su sola mención resulta en extremo paradójica, por lo que se hace indispensable su consideración minuciosa.

Afirmo lo siguiente:

Dos conjuntos pueden estar relacionados entre sí de tal manera que resulte posible

(1) que cada uno de los elementos de cualquiera de ellos se encuentre asociado con un elemento del otro, no existiendo ningún objeto en ninguno de los dos conjuntos que entre en esa relación con más de un elemento del otro; y

(2) que uno de esos conjuntos incluya al otro como una parte propia, por lo que las multiplicidades que ambos conjuntos representan pueden encontrarse en las relaciones más variadas entre sí cuando se consideran todos los elementos de los mismos como objetos individuales intercambiables.

Ofreceré aquí la prueba de esta afirmación por medio de dos ejemplos en los que la situación que aquí he descrito se presenta claramente.

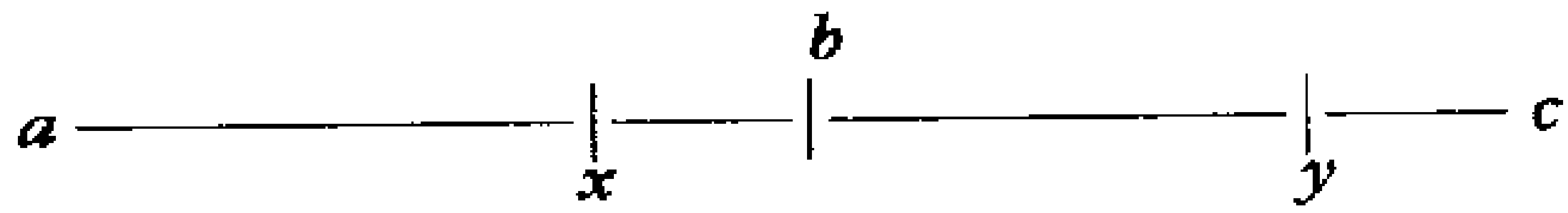
Ejemplo 1. Tomemos dos cantidades abstractas arbitrarias, *v. gr.* 5 y 12. Claramente, el conjunto de las cantidades que están entre 0 y 5 (que son menores que 5) es infinito, y lo mismo es válido para el conjunto de las cantidades que son menores que 12. Por supuesto, el segundo conjunto es mayor que el primero; en realidad, éste es tan sólo una parte de aquél. Ahora bien, cuando en lugar de 5 y de 12 se ponen otras cantidades cualesquiera, se hace evidente que los dos conjuntos mencionados no siempre conservan entre sí la misma relación: Entre ellos se da, más bien, una gran diversidad de relaciones.

No es menos cierto, sin embargo, que si x es una cantidad cualquiera entre 0 y 5, y determinamos la relación entre x y y por medio de la ecuación "$5y = 12x$", y es también una cantidad entre 0 y 12. Inversamente: siempre que y se encuentre entre 0 y 12, x ha de localizarse entre 0 y 5.

De la ecuación se sigue igualmente que a todo valor de x corresponde un único valor de y y viceversa. Y es también claro que a toda cantidad x en el conjunto entre 0 y 5 corresponde una cantidad en el conjunto entre 0 y 12, de tal manera que ninguno de los objetos en alguno de estos dos conjuntos queda sin ser relacionado, y ninguno de ellos lo está con más de un solo objeto del otro conjunto.

Ejemplo 2. Nuestro segundo ejemplo tiene que ver con un objeto espacial. Quien tenga ya conocimiento de que las propiedades del espacio se basan en las del tiempo y que éstas se fundan en las de los números y las cantidades abstractas no tendrá necesidad de un ejemplo para percatarse de que los conjuntos infinitos existen en el tiempo y el espacio, de manera análoga a como dichos conjuntos existen también en relación a las cantidades. Es necesario, sin embargo, en aras de un uso correcto de esta proposición, considerar con todo detalle por lo menos un caso en el que tales conjuntos se presenten ante nosotros.

Sean entonces a, b, c tres puntos cualesquiera en una recta y considérese que la razón $ab : ac$ es del todo arbitraria, excepto en que ac es mayor que ab.



En tal caso, tanto el conjunto de los puntos en ab como en ac es infinito, pero el conjunto de los puntos de ac sobrepasa al de los que están en ab, puesto que en él se encuentran, además de los puntos en ab, todos los puntos que están en bc (y que no aparecen, por supuesto, en ab).

Pero entonces es también claro que si se modifica arbitrariamente la razón $ab : ac$, también se alteran significativamente las relaciones entre estos dos conjuntos. La relación de correspondencia anteriormente mencionada entre el conjunto de cantidades del 0 al 5 y el de las que están entre el 0 y el 12 es válida análogamente para los conjuntos que ahora se discuten, como a continuación veremos.

Sea, en efecto, x un punto cualquiera en ab. Tenemos entonces, considerando como dada ax y especificando y por medio de la proporción

$$ab : ac = ax : ay,$$

que y es también un punto en ac.

Por otra parte, cuando y es un punto en ac, x será un punto en ab, con tal de que ax se determine a partir de ay, de acuerdo con la misma ecuación. De igual manera, cualquier otro x determinará un y y viceversa. De estas observaciones se sigue, de nuevo, que a cada punto de ab le corresponde un punto de ac y también que todo punto de ac se encuentra asociado con un punto de ab. Considerando los pares de puntos asociados, resulta entonces que no existe ningún elemento en el conjunto de los puntos de ab ni en el de los puntos de ac que no aparezca en algún par, y tampoco habrá ningún elemento de esos conjuntos que se presente en más de un par.

§ 21

Como hemos visto, no es lícito inferir la igualdad con respecto a la multiplicidad de sus elementos —esto es, haciendo abstracción de las diferencias individuales entre ellos— de dos conjuntos infinitos A y B a partir del simple hecho de que ambos se encuentran entre sí en una relación con la propiedad de que para cada elemento a de A es posible hallar, de acuerdo con una regla precisa, un elemento b de B tal que la totalidad de los pares $(a + b)$ así generados contiene cualquier objeto en A o en B, encontrándose, además, cualquier objeto en una sola de esas parejas.

Puede ocurrir, en efecto, que, a pesar de mantenerse simétricamente dicha relación, los conjuntos difieran respecto a la multiplicidad y que, por ejemplo, uno de ellos no sea sino un todo del que el otro constituya tan sólo una parte.

La igualdad de tales multiplicidades no puede concluirse sino hasta que se supone adicionalmente que ambos conjuntos poseen un *modo de especificación* (*Bestimmungsgrund*) idéntico, por ejemplo, el mismo *modo de generación* (*Entstehungsweise*).

§ 22

El carácter indiscutiblemente paradójico de estas afirmaciones tiene su origen exclusivamente en el hecho de que la relación que se establece entre dos conjuntos (y que consiste en que los elementos de los mismos pueden componerse en pares) representa, en el caso de conjuntos *finitos*, una condición suficiente para su identificación en cuanto a la diversidad de sus elementos. Es decir, cuando dos conjuntos finitos A y B tienen la propiedad de que a cada objeto de uno corresponde uno del otro, de tal manera que en los pares así formados aparecen todos los objetos que pertenecen a cualquiera de esos conjuntos y que ningún objeto de ellos aparece en más de un par, sus multiplicidades son iguales. Pero con esto surge igualmente la ilusión de que éste debe también ser el caso cuando los conjuntos A y B son *infinitos*.

Se trata, sin embargo, de una mera ilusión, pues un análisis detenido muestra que no es en forma alguna necesario que esto ocurra. En efecto, la razón de que esto suceda cuando los conjuntos son finitos es precisamente su finitud, obviamente ausente en el caso de los conjuntos infinitos.

Si A yB son conjuntos finitos o si A lo es y hacemos caso omiso de las diferencias entre los elementos y nos concentramos en sus multiplicidades, es necesario que se presente la siguiente situación: Si consideramos un objeto cualquiera en A y lo designamos con *1*, tomando después *otro* al que llamamos *2*, etc., dando siempre a cada uno de los objetos que consideramos el número de los objetos que hasta ese momento hemos examinado (incluyendo al objeto mismo en consideración), llegaremos tarde o temprano a un *último* objeto en A. Por supuesto, esto es una consecuencia directa del concepto de una multiplicidad finita o contable. Si este último elemento en A es designado con el numeral (*Zahl*) 'n', el número (*Anzahl*) de objetos en A es n.

Ahora bien, como a todo objeto en A corresponde uno en B, es necesario, si se denota cada uno de los objetos de B precisamente con el numeral que tiene el objeto de A asociado a él, que utilicemos n objetos de B. Resulta entonces claro que el número de objetos en B no puede ser menor que n, puesto que el último objeto en este conjunto era designado por el numeral 'n'. Pero tampoco puede ser mayor que n, porque si hubiera un objeto sobrante en B, aparte de los n ya utilizados, no podría haber ningún objeto en A con el que estuviera asociado, lo que contradice nuestra suposición al respecto. Por lo tanto, el número de objetos en B es igual a n y, en consecuencia, la multiplicidad de A y B es la misma.

Pero esta conclusión no es válida si el conjunto A es infinito. Porque, en ese caso, no llegaremos nunca a un último elemento de A, pues precisamente por ser éste un conjunto infinito no existe un objeto al que podamos caracterizar de esa manera. En otras palabras: no importa cuántos elementos de A se hayan señalado asignándoles numerales, siempre quedarán otros *por señalar*.

Pero entonces desaparece también el fundamento de la conclusión de que la multiplicidad de los dos conjuntos es una y la misma, a pesar de que en *B* queden siempre objetos que puedan ser asociados con los objetos restantes de *A*.

§ 23

Lo anterior muestra que la relación citada implica la igualdad de las multiplicidades de dos conjuntos finitos, aunque esta implicación no es válida si los conjuntos son infinitos. Sin embargo esto no nos explica todavía cómo y por qué puede ocurrir que esos conjuntos difieran en cuanto a su multiplicidad. Se requiere, por lo tanto, un análisis detallado de los ejemplos que hemos presentado.

Esos ejemplos nos muestran, en efecto, que dos elementos *a* y *b*, de *A* y *B* respectivamente, asociados en un par $(a+b)$ *no aparecen de la misma manera en sus respectivos conjuntos*. Porque si con los elementos *a*' y *b*' formamos otro par y examinamos las relaciones que se dan entre *a* y *a*' en el conjunto *A* y entre *b* y *b*' en el conjunto *B*, descubriremos rápidamente que son diversas.

Tomemos (en el primero de nuestro ejemplos) dos elementos arbitrarios del conjunto de las cantidades que se encuentren entre 0 y 5, digamos 3 y 4. Los elementos en *B* asociados a ellos son

$$\frac{12}{5} \times 3 \text{ y } \frac{12}{5} \times 4\text{; esto es, } 7\,\tfrac{1}{5} \text{ y } 9\,\tfrac{3}{5}\text{, respectivamente.}$$

Si por "relación entre dos objetos" se entiende ahora el agregado de *todas* las propiedades evidenciadas en su composición, no es necesario ver unilateralmente en las relaciones que se dan entre los elementos 3 y 4 en un conjunto, y 7 ⅕ y 9 ⅗ en el otro únicamente lo que se conoce como una relación geométrica: Debe observarse asimismo todo lo que aquí resulta atingente; por ejemplo, que la diferencia aritmética entre las cantidades 3 y 4 es completamente diferente a la que existe entre 7 ⅕ y 9 ⅗, pues mientras que en el primer caso es 1, en el segundo es 2 ⅖.

Así, aunque toda cantidad en A o en B puede ser compuesta en un par con una única cantidad en B o en A, el conjunto de las cantidades en B es distinto (mayor) que en A, puesto que también la *distancia* que existe entre dos cantidades en B es otra (mayor) que la *distancia* que separa a las dos cantidades asociadas con ellas en A. Una consecuencia natural de todo esto es que, para cualesquiera dos cantidades en B que consideremos, existe un conjunto mayor de cantidades entre ellas que el de las cantidades entre las cantidades asociadas a las primeras en A.

Ocurre algo completamente análogo en relación al segundo ejemplo, por lo que no será necesario añadir aquí nada excepto que los puntos en *ab* asociados en pares con los puntos en *ac* se encuentran *uniformemente* más cerca entre sí que los puntos correspondientes en *ac*, porque la distancia entre los primeros se encuentra en la razón *ab*:*ac* a la distancia entre los segundos.

§ 24

Si consideramos el teorema enunciado en § 20 como algo suficientemente demostrado y claro, podemos obtener, como una de sus consecuencias inmediatas, que *dos cantidades representables como sumas infinitas de cantidades que son iguales par a par no son necesariamente iguales*. Esto ocurre solamente cuando podemos convencernos previamente de que también la multiplicidad infinita de estas cantidades es la misma en ambas sumas.

Ahora bien, que los sumandos determinan una suma y, por lo tanto, que los mismos sumandos determinan la misma suma se encuentra fuera de toda discusión y resulta válido independientemente de que el conjunto de los sumandos sea finito o infinito. Pero si es este último el caso, es necesario demostrar también que el conjunto infinito de los sumandos es igual en las dos sumas, habida cuenta de que existen distintos tipos de conjuntos infinitos.

Sin embargo, nuestro teorema nos indica que el hecho de que pueda asociarse con cada uno de los términos en una de estas sumas un término idéntico en la otra, no basta para inferir legítimamente la igualdad de las mismas. Solamente cuando ambos conjuntos poseen el mismo *modo de determinación* (*Bestimmungsgrund*) puede tenerse la garantía de tal igualdad. A continuación nos ocuparemos de examinar, sirviéndonos de varios ejemplos, algunos de los sinsentidos que resultan de efectuar operaciones con el infinito haciendo caso omiso de esta observación.

§ 25

Paso ahora a la afirmación de que ***el infinito existe no sólo entre las cosas que no poseen realidad, sino igualmente entre las que sí la tienen.***

Quien haya llegado (sea por una serie de inferencias a partir de verdades conceptuales puras o por algún otro procedimiento) a la importante conclusión de que *Dios existe* —esto es, de que existe un Ser cuyo fundamento ontológico lo constituye Él mismo, siendo tal Ser, en consecuencia, perfecto, *i.e.* resumiendo en sí en grado superlativo todas las capacidades y perfecciones compatibles entre sí— supone también, por ese simple hecho, la existencia de un ente que es en más de un respecto infinito: por su conocimiento, por su voluntad, por sus efectos externos (por su poder), porque su saber es infinito (la totalidad de las verdades); porque su volición es infinita (quiere la suma de todos los bienes posibles); porque todo lo que quiere lo hace realidad, gracias a su poder, etc.

De esta última característica divina puede inferirse que, además de Dios, existen seres creados que, por contraposición a Él, llamamos seres finitos, siendo posible demostrar a partir de ellos la existencia de *algún* tipo de infinito. Porque, en realidad, el conjunto mismo de estos seres debe ser infinito, lo mismo que el conjunto de las *condiciones* que experimenta cada uno de ellos inclusive en el más pequeño de los intervalos de tiempo (que contiene ya un infinito de instantes), etc. Podemos concluir, entonces, que también en la esfera de la realidad es posible constatar la existencia de un infinito.

§ 26

Ahora bien, algunos estudiosos de estas cuestiones, no obstante aceptar la idea de un infinito en relación a objetos que carecen de realidad, como las proposiciones y las verdades absolutas, rechazan la tesis que acabo de exponer. En su opinión, aceptar la existencia de un infinito en la esfera de la realidad contradice el viejo ***principio de la determinación universal de lo real.***

En el Vol. 1, § 45 de mi *Wissenschaftslehre* he demostrado ya que este principio es válido para lo no real exactamente en el mismo sentido en que lo es para lo real. En otras palabras: el principio es válido siempre en cuanto que, dadas dos propiedades contradictorias entre sí y un objeto cualquiera (un algo arbitrario), es necesario que una de ellas pueda atribuirse a éste y que la otra pueda denegarse de él.

De acuerdo con esto, si fuera efectivamente cierto que la suposición de un infinito en relación a objetos que poseen realidad es incompatible con el principio arriba mencionado, tampoco sería posible hablar de un infinito en relación a objetos no reales de nuestro entendimiento y, por lo tanto, no podríamos ni siquiera hablar lícitamente de un conjunto infinito de verdades absolutas o de números abstractos. Pero es completamente erróneo decir que la postulación de un objeto infinito contradice el principio fundamental enunciado. Lo único que en realidad se afirma aquí es que es posible exhibir, en algún sentido, en relación a ese objeto, una multiplicidad de partes o elementos mayor que cualquier número, mostrando también, en consecuencia, que no es posible determinar esa multiplicidad por medio de ningún número abstracto. Pero de allí no se sigue en absoluto que esa multiplicidad no pueda ser determinada en forma alguna, ni tampoco que exista un par de propiedades contradictorias, ***b*** y no ***b***, que pudieran predicarse al mismo tiempo de una misma cosa.

Por supuesto, algo (*v.gr.* una proposición) que no posee un color o que no es susceptible de emitir un sonido, no puede especificarse por su color o su sonido, etc. Pero esto no significa que un objeto así sea indeterminable y la postulación de su existencia no constituye, por lo tanto, una excepción al principio dicho que señala que uno solo de los predicados *b* y no *b* (azul y no azul, eufónico y no eufónico, etc.) puede aplicarse a un objeto, con tal de que estos predicados se interpreten correctamente y conserven, en todo caso, su carácter contradictorio.

De manera exactamente análoga a como "no azul" e "inodoro" constituyen una determinación (lejana por cierto) del Teorema de Pitágoras, el enunciado "el conjunto de los puntos entre *m* y *n* es infinito" es una de las determinaciones posibles del conjunto en cuestión. Ocurre además con frecuencia que ni siquiera es necesario utilizar muchos enunciados para determinar *completamente* un conjunto infinito; es decir, para determinarlo de tal manera que *todas* sus propiedades puedan deducirse de las que han sido utilizadas para su caracterización. De este modo, el conjunto infinito de puntos entre *m* y *n*, digamos, se encuentra determinado completamente una vez que los puntos *m* y *n* han sido determinados (por ejemplo, por intuición), bastando, estas pocas palabras para decidir si un punto cualquiera pertenece o no a este conjunto.

§ 27

Si en los apartados anteriores me he ocupado fundamentalmente de analizar ciertas críticas injustas a la suposición de un infinito, es necesario reconocer ahora con la misma determinación que numerosos estudiosos —en particular, matemáticos— han ido definitivamente demasiado lejos en la dirección opuesta, al aceptar ora algo infinitamente grande, ora algo infinitamente pequeño, en casos en los que no existe nada de esa índole.

1. No tengo ninguna objeción que hacer a la suposición de un *intervalo infinito de tiempo*, con tal de que por ello se entienda un intervalo que no tiene principio o que no tiene fin o ya sea que se trate de la totalidad del tiempo (del agregado de todos los instantes). Sin embargo, considero imprescindible pensar la razón cuantitativa que existe entre dos intervalos de tiempo, cada uno de los cuales se encuentra entre dos instantes terminales, simplemente como una razón cuantitativa finita y enteramente determinable por medio de conceptos puros. No me parece en absoluto aceptable, en consecuencia, la hipótesis de un intervalo de tiempo entre instantes terminales infinitamente más grande o más pequeño que otro intervalo de la misma especie.

Pero es precisamente esto lo que, como se sabe, aceptan muchos matemáticos cuando hablan no sólo de intervalos infinitamente grandes de tiempo con instantes terminales a ambos lados, sino también cuando se refieren a ***intervalos de tiempo infinitamente pequeños***, en comparación con los cuales todo intervalo de tiempo finito (por ejemplo, un segundo) debe ser considerado, por ello mismo, como algo infinitamente grande.

2. Lo mismo ocurre con ***las distancias entre dos puntos en el espacio*** que se encuentran siempre, en mi opinión, en una razón puramente finita entre sí y enteramente determinable por medio de conceptos puros. No obstante, entre matemáticos resulta de lo más normal hablar de ***distancias infinitamente grandes***, lo mismo que de ***distancias infinitamente pequeñas***.

3. Es esta también, por último, la situación que se presenta en relación a las fuerzas que la física y la metafísica presuponen en el universo. No es necesario suponer que alguna de ellas es infinitamente mayor o menor que alguna otra, pero cualquiera de esas fuerzas debe suponerse (aunque con frecuencia no lo hacemos) en una relación enteramente determinable por medio de conceptos puros con cualquiera otra.

No me será posible sin embargo, aclarar del todo las razones de estas afirmaciones a quienes no se encuentren familiarizados con el significado que doy a expresiones como ***intuición***, ***concepto***, ***derivabilidad de una proposición a partir de otras proposiciones***, ***implicación objetiva de una verdad a partir de otras verdades***, etc. y con las definiciones de ***tiempo*** y ***espacio*** que utilizo. Pero quien por lo menos conozca mis dos escritos: ***Versuch einer objektiven Begründung der Lehre von der Zusammensetzung der Kräfte (Una fundamentación objetiva de la doctrina de la composición de las fuerzas)***[*] y ***Versuch einer objektiven***

---

[*] Praga, 1842. Por comisión en Kronberg y Rziwnas.

Begründung der Lehre von drei Dimensionen des Raumes (*Una fundamentación objetiva de la doctrina de las tres dimensiones del espacio*)* podrá sin duda etender sin demasiadas dificultades la prueba que a continuación presento.

Una consecuencia inmediata de las definiciones de tiempo y espacio es que todas las substancias *dependientes* (es decir, creadas) se influyen entre sí. De las mismas premisas se sigue también que, dados dos instantes cualesquiera α y β, es posible considerar el estado del mundo en el instante anterior α como *causa*, y β al estado del mundo en el instante posterior como *efecto* (por lo menos mediato), con tal de que tomemos en cuenta, como parte de la causa, las influencias inmediatas que Dios haya podido ejercer en el intervalo α.

De lo anterior puede inferirse igualmente que, dados dos instantes α y β, todas las *fuerzas* que las substancias creadas poseen en el instante α, la *posición* en la que cada una de ellas se encuentra y, finalmente, las influencias divinas presentes durante $\alpha\beta$, tanto las *fuerzas* que las substancias poseen en el momento β, como las *posiciones* que se les asignan, son deducibles a la manera en la que un *efecto* debe ser deducible mediata o inmediatamente de su causa completa. Pero esto exige a su vez que todas las propiedades del efecto puedan deducirse de las propiedades de su causa por medio de una premisa mayor en la que intervengan únicamente conceptos puros y que sea de la forma: 'Toda causa con las propiedades u,u',u'',... tiene un efecto con las propiedades w,w',w'',...,

Un corolario de lo anterior, necesario para nuestros fines, es que: cualquier particularidad de la cuasa que no sea indiferente para el efecto (es decir, cuya variación —cualquiera que ésta sea— lo altere) debe poder ser determinada completamente a partir de conceptos puros tomados exclusivamente de los que son necesarios para la determinación del efecto.

Una vez que hemos formulado estas consideraciones preliminares resulta fácil establecer las afirmaciones que hemos hecho anteriormente:

---

* Praga, 1843. *Ibid.*

1. Supongamos, en efecto, que tenemos dos instantes α y β cuya distancia es infinitamente más grande o infinitamente más pequeña que la distancia entre otros dos instantes γ y δ. De aquí se sigue el absurdo de que es absolutamente imposible determinar el estado del universo en β a partir del estado que éste guardaba en α, junto con las influencias divinas y la longitud del intervalo de tiempo αβ. Para la determinación del estado en el que los seres creados se encuentran en un momento α —y aun para la determinación de las magnitudes de sus fuerzas en ese momento— es imprescindible la determinación de una unidad de tiempo, puesto que en realidad, esas magnitudes no son sino ***fuerzas de cambio***, por lo que resulta imposible juzgar su magnitud de otra manera que no sea considerando un cierto intervalo de tiempo dentro del cual producen un efecto dado.

Tomemos ahora —como seguramente podemos hacerlo— el intervalo γδ como unidad de tiempo. Tenemos entonces que inclusive en el más favorable de los casos (*i.e.* cuando resulta posible determinar con precisión con esta unidad de tiempo todas las fuerzas de las substancias creadas tal y como éstas se presentan en el momento α, y cuando es también posible determinar de manera exacta todo aquello que es atinente a la causa completa del estado del mundo que se presenta en el momento β) la distancia a la que este instante se encuentra de α no puede ser determinada por la unidad de tiempo elegida al tratarse de algo infinitamente grande o infinitamente pequeño.

Por otra parte, si resultara posible considerar, bajo las condiciones mencionadas, un estado arbitrario del universo como causa de cualquier otro estado sucesivo, no podrían existir dos instantes α y β cuya distancia entre sí fuera infinitamente grande o infinitamente pequeña en comparación con la que existe entre otros dos instantes γ y δ.

2. Supongamos que hay dos puntos ***a*** y ***b*** en el espacio y que la distancia entre ellos es infinitamente grande o infinitamente pequeña en comparación con la que existe entre dos puntos *c* y ***d***. La determinación del estado del universo en un instante α requiere entonces, entre otras cosas, de una especificación de la magnitud de la fuerza de atracción o de repulsión que la substancia A, que se encuentra en ese instante en *a*, ejerce sobre la substancia B, que está en *b*.

Pero consideremos —como, sin lugar a dudas, es lícito— la distancia *cd* como unidad de longitud. Tenemos entonces que aun en el más favorable de los casos (cuando ya lo hubieramos hecho con todas las fuerzas restantes) sería imposible lograrlo con esta fuerza particular. Porque si la fuerza de atracción, o de repulsión, que la substancia A ejerce, en la distancia aceptada como unidad de longitud *cd*, sobre la substancia B (o sobre otra enteramente similar a ella), tuviera también una magnitud bien definida (y precisamente por esta razón), la magnitud de la atracción o de la repulsión que ejerce A sobre B sería indeterminable si la razón de las distancias *ab*:*cd* —de las que en todo caso depende— fuera infinita y, en consecuencia, no determinada.

3. Supongamos, por último, que hubiera una fuerza única *k* que, en comparación con otra fuerza *l*, se presentara como algo infinitamente grande o como algo infinitamente pequeño. Considérese, además, que esta comparación tiene lugar en el instante α. Tenemos entonces, inclusive en el más favorable de los casos (cuando todas las fuerzas restantes son finitas, de acuerdo con las unidades de tiempo y espacio elegidas, siendo *l* también finita) la cantidad *k* sería infinitamente grande o infinitamente pequeña y, en consecuencia, indeterminado. Pero de aquí se seguiría que el estado del universo se presenta en α como algo también indeterminado, por lo que sería imposible hacer aparecer un estado posterior del universo como un efecto producido por él.

§ 28

En los apartados anteriores creo haber establecido las reglas básicas a partir de las cuales es posible juzgar cualquiera de las teorías (extrañas en apariencia) que quiero exponer a continuación. Las reglas que han de servir de criterios para decidir si éstas han de desecharse como errores o conservarse como proposiciones verdaderas a pesar de su carácter aparentemente contradictorio. Podemos adoptar aquí, entonces, como orden de exposición, la pertenencia de estas paradojas a una u otra esfera de la ciencia, lo mismo que la importancia que cada una de ellas pueda tener.

La primera y más comprensiva de las disciplinas científicas en la que las paradojas hacen su aparición es la *teoría general de la cantidad*, como ya hemos mostrado con numerosos ejemplos. Por lo demás, presentándose tales paradojas en abundancia en la doctrina misma del número, parecería conveniente ocuparse en primer lugar de las que se presentan en esta esfera del saber. Es necesario admitir que la idea misma de *calcular con el infinito*, de efectuar operaciones con él, parece ser contradictoria. Calcular algo significa intentar una *determinación* de ello *por medio de números*. Pero entonces, ¿qué sentido tiene intentar la determinación con números del infinito, puesto que, de acuerdo con nuestra propia definición, éste ha de ser algo que podamos considerar constantemente como un conjunto que contiene una infinidad de elementos; es decir, como un conjunto mayor que cualquier número y, en consecuencia, como algo que no es posible determinar por medio de un simple número?

Sin embargo, estas reservas desaparecen cuando se reflexiona en que calcular correctamente con el infinito no es una determinación numérica de algo que no es numéricamente determinable (es decir, no se trata de una determinación numérica de la multiplicidad infinita misma), sino que tiene como único propósito la determinación de las relaciones entre infinitos distintos. Pero esto es algo que, como a continuación veremos por medio de algunos ejemplos, podemos llevar a cabo de manera lícita.

§ 29

Quien acepte la existencia de multiplicidades infinitas y, por lo tanto, de cantidades que también lo son, se encuentra igualmente obligado a admitir la existencia de cantidades infinitas que se distinguen entre sí de diversas maneras, de acuerdo con su magnitud o tamaño.

Si, por ejemplo, escribimos la serie de los números naturales como

$$1, 2, 3, 4, \ldots, n, n+1, \ldots \textit{ in inf.},$$

el símbolo

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n + (n+1) + \ldots \textit{ in inf.}$$

representará la *suma* de los números naturales, mientras que el símbolo

$$1^0 + 2^0 + 3^0 + 4^0 + \ldots + n^0 + (n+1)^0 + \ldots \textit{ in inf.},$$

en el que los sumandos son en su totalidad simples unidades, no representará otra cosa que el *conjunto* de todos los números naturales. Si en lugar de este conjunto escribimos ahora $\mathcal{N}_0$ y construimos la ecuación simbólica simple

$$1^0 + 2^0 + 3^0 + \ldots + n^0 + (n+1)^0 + \ldots \textit{ in inf.} = \mathcal{N}_0 \qquad (1)$$

denotando al mismo tiempo el conjunto de todos los números naturales a partir de $(n + 1)$ con $\mathcal{N}_n$ y construyendo de manera análoga la ecuación

$$(n+1)^0 + (n+2)^0 + (n+3)^0 + \ldots \textit{ in inf.} = \mathcal{N}_n, \qquad (2)$$

obtenemos al restar la ecuación

$$1^0 + 2^0 + 3^0 + \ldots + n^0 = n = \mathcal{N}_0 - \mathcal{N}_n \qquad (3)$$

que es ciertamente intachable. Por lo demás, a partir de (3) tenemos que la diferencia entre dos cantidades infinitamente grandes $\mathcal{N}_0$ y $\mathcal{N}_n$ puede ser una cantidad finita determinada.

Si, por otra parte, usamos S_0 para designar la cantidad que representa la suma de todos los números naturales o si escribimos la ecuación simbólica simple

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n + (n+1) + \ldots \textit{ in inf.} = S_0, \qquad (4)$$

notaremos de inmediato que S_0 debe ser mucho mayor que $\mathcal{N}_0$. Pero la determinación precisa de la diferencia entre estas dos cantidades infinitas o la de la razón geométrica existente entre ellas dista de ser algo fácil.

En efecto, si establecemos (como es práctica común) la ecuación

$$S_0 = \frac{\mathcal{N}_0 \, (\mathcal{N}_0 + 1)}{2},$$

difícilmente podríamos aducir para justificarla un argumento distinto al de que la ecuación

$$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n = \frac{n\,(n + 1)}{2}$$

es válida para todo conjunto finito de términos. A partir de esto, parece seguirse que cuando pasamos a *todo* el conjunto infinito, lo único que ocurre es que se da una transición de n a $\mathcal{N}_0$. Pero esto es completamente falso, pues resulta absurdo hablar, en relación a una serie infinita, de un último término de la misma que tomaría el valor $\mathcal{N}_0$. Habiéndose establecido mientras tanto la ecuación (4), será de cualquier modo lícito derivar, multiplicando sucesivamente ambas partes de la ecuación por $\mathcal{N}_0$, las siguientes dos ecuaciones

$$1^0 \mathcal{N}_0 + 2^0 \mathcal{N}_0 + 3^0 \mathcal{N}_0 + \ldots \textit{ in inf.} = \mathcal{N}_0^2,$$

$$1^0 \mathcal{N}_0^2 + 2^0 \mathcal{N}_0^2 + 3^0 \mathcal{N}_0^2 + \ldots \textit{ in inf.} = \mathcal{N}_0^3,$$

etc., con lo que queda claro que existen también cantidades infinitas de los llamados *órdenes superiores*, entre las que una de ellas puede ser mayor infinitas veces que otra. Pero la existencia de cantidades infinitamente grandes que se encuentren en cualquier razón pretedeterminada, racional o irracional, $\alpha:\beta$, se sigue ya del hecho de que si $\mathcal{N}_0$ es una cantidad infinita invariable, tanto $\alpha \mathcal{N}_0$ como $\beta \mathcal{N}_0$ son también cantidades infinitas que conservan entre sí la razón $\alpha:\beta$.

Igualmente claro resultará el hecho de que todo el conjunto o multiplicidad de cantidades que se encuentran entre dos cantidades dadas, digamos 7 y 8, depende únicamente de la distancia 8–7 y debe ser el mismo siempre que esta distancia no se modifique, a pesar de que el conjunto en cuestión sea *infinito* y, por lo tanto, independientemente de que se trate de algo que no puede determinarse por medio de un número, no importa qué tan grande sea éste.

Una vez que esto ha sido aceptado, y denotando el conjunto de todas las cantidades que se encuentran entre *a* y *b* por medio de

$$\text{mult}(b\text{-}a),$$

habrá innumerables ecuaciones de la forma

$$\text{mult}(8\text{-}7)=\text{mult}(13\text{-}12),$$

lo mismo que de la forma:

$$\text{mult}(b\text{-}a):\text{mult}(d\text{-}c)=(b\text{-}a):(d\text{-}c),$$

cuya validez es inobjetable.

§ 30

Los ejemplos anteriores muestran claramente que es posible efectuar cálculos con lo *infinitamente grande*, lo mismo que con lo *infinitamente pequeño*. En efecto, si $\mathcal{N}_0$ es infinitamente grande, es necesario que

$$\frac{1}{\mathcal{N}_0}$$

represente una cantidad infinitamente pequeña, resultando, en consecuencia, infundado (por lo menos en relación a la doctrina *general* de la cantidad) considerar la idea del infinito como algo totalmente carente de referencia.

Porque —para dar solo un ejemplo— si se pregunta cuál es la probabilidad de que alguien dispare una bala al azar y de que el punto medio del proyectil pase exactamente por el punto medio de la manzana que cuelga de este árbol, es necesario admitir que el conjunto de todos los casos posibles, con sus distintos grados de probabilidad, es infinito. Pero de esto se sigue que el grado de probabilidad en cuestión es igual o menor que $\frac{1}{\infty}$.

Con ello queda igualmente demostrado que existe una infinidad de cantidades infinitamente pequeñas y que, si tomamos arbitrariamente dos de ellas, puede darse entre las mismas una relación predeterminada cualquiera. En particular, cualquiera de ellas puede ser infinitamente más grande que la otra. Por lo tanto, entre las cantidades infinitamente grandes, lo mismo que entre las infinitamente pequeñas, existe un número infinito de órdenes. De esta manera, es posible, con tal de que se observen ciertas reglas, encontrar muchas ecuaciones correctas entre cantidades de esta especie.

Supongamos ahora que se sabe, por ejemplo, que el valor de una cantidad variable y depende del de otra cantidad x, de tal manera que entre ambas se dé constantemente la relación expresada por la ecuación

$$y = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$$

y que la circunstancia de que éstas puedan adquirir valores infinitamente pequeños sea compatible con la naturaleza de la clase especial de cantidades a la que pertenecen tanto x como y (las que, por lo tanto, son susceptibles de incrementos infinitamente pequeños). Tenemos entonces que si x se incrementa en la cantidad infinitamente pequeña dx y denotamos la modificación correspondiente de y con dy, obtendremos necesariamente que

$$y + dy = (x + dx)^4 + a\,(x + dx)^3 + b\,(x + dx)^2 + c\,(x + dx) + d,$$

lo que a su vez implica

$$\frac{dy}{dx} = (4x^3+3\,ax^2+2bx+c) + (6x^2+3ax+b)dx + (4x+a)dx^2 + dx^3,$$

Esta última ecuación representa la relación de las dos cantidades infinitamente pequeñas como algo que depende no sólo de a, b, c y x, sino igualmente del valor de la variable dx.

§ 31

Esta no es, sin embargo, la manera en la que procede la mayoría de los matemáticos cuando se aventuran a calcular con el infinito; un número considerable de ellos han ido mucho más allá de lo que los principios básicos que aquí se han establecido permiten, admitiendo, sin mayores reservas, no sólo la existencia de lo infinitamente grande o de lo infinitamente pequeño en relación a cantidades que, de acuerdo con su naturaleza, no tendrían esta propiedad, sino afirmando igualmente de manera categórica que cantidades que resultan de la suma de series infinitas son iguales entre sí o que una de ellas es menor (o mayor) que la otra. La única justificación aducida en favor de todo esto es que, se dice, los términos de dos series son iguales dos a dos o desiguales dos a dos, a pesar del hecho evidente de que son desiguales cuando se las considera como conjuntos.

Algunos se atreven, inclusive, a afirmar que no sólo toda cantidad infinitamente pequeña desaparece como un cero ordinario al sumarse a otra finita, y que no sólo toda cantidad de orden *superior* desaparece al lado de cualquiera de un orden *inferior*, sino que, igualmente, toda cantidad infinitamente grande de orden inferior desaparece si se le suma a otra de un orden superior.

Para justificar de alguna manera este método de calcular se recurre a la proposición que dice que es también lícito considerar al cero como divisor y que el cociente

$$\frac{1}{0}$$

no es, en realidad, otra cosa que una *cantidad infinitamente grande*, mientras que el cociente

$$\frac{0}{0}$$

denota una cantidad *completamente indeterminada*.

Es necesario entonces mostrar lo equivocado de estas concepciones, habida cuenta de la frecuencia con que en nuestros días se las encuentra.

§ 32

En 1830, en los *Annales de Mathématique* (V. 20, No. 12), un autor que firmaba con las iniciales M.R.S. intentó dar una prueba de que la conocida serie infinita

$$a - a + a - a + \ldots \textit{ in inf.}$$

tiene el valor $\frac{a}{2}$. M.R.S. escribe este valor como x y cree poder inferir del hecho de que

$$x = a - a + a - a + \ldots \textit{ in inf} = a - (a - a + a - a + \ldots \textit{ in inf.}).$$

Como la expresión entre paréntesis es igual a x, obtendríamos que

$$x = a - x,$$

de lo que resultaría que

$$x = \frac{a}{2}$$

La falacia en la que se incurre aquí no tiene nada de profundo. Es evidente, en efecto, que la serie denotada por x y la serie entre paréntesis no tienen el mismo conjunto de términos: en la última falta el primer término de la primera, a, por lo que si ha de tener un valor, éste ha de escribirse como $x - a$.

Pero de esto se obtiene claramente la identidad

$$x = a + x - a.$$

Pero tal vez alguien argumentara como sigue: "hay algo paradójico en el hecho de que esta serie, que ciertamente no es infinitamente grande, no tenga un valor exactamente determinable y mesurable, sobre todo porque se genera a partir de una división continuada al infinito de a por 2 (en la forma 1 + 1), y esto es algo que habla totalmente a favor de lo correcto del supuesto de que su verdadero valor es $\frac{a}{2}$."

Es necesario recordar en este lugar que la existencia de *expresiones cuantitativas* que denotan *cantidades reales* no es en sí misma imposible. El ejemplo más conspicuo de este hecho lo constituye el cero. En particular, si queremos considerar una serie solamente como una cantidad; es decir, como la ***suma*** de sus términos, entonces, en virtud de la ***definición*** de suma (que la haría pertenecer a la categoría de los conjuntos; esto es, de los agregados que no permiten que se haga abstracción del orden de sus términos), debe tener la propiedad de que su valor permanece inalterado no importa cómo se modifique la secuencia de sus términos. En otras palabras, entre cantidades debe ocurrir siempre que

$$(A + B) + C = A + (B + C) = (A + C) + B$$

Esta propiedad nos proporciona una demostración fehaciente de que la expresión

$$a - a + a - a + a - a + \ldots \textit{ in inf.},$$

que aquí se discute, no denota una cantidad real. Porque, en efecto, si éste fuera el caso, no se alteraría nada en la cantidad representada modificando su expresión de la siguiente manera:

$$(a - a) + (a - a) + (a - a) + \ldots \textit{in inf.}, \qquad (1)$$

puesto que no se ha hecho otra cosa que asociar dos términos consecutivos en una suma parcial —algo que tiene que ser posible debido a que la serie no tiene, en realidad, un ***último*** término. Sin embargo como resultado obtenemos

$$0 + 0 + 0 + \ldots \textit{ in inf.},$$

que es igual a cero.

La cantidad que esa expresión denota —si es que denota alguna— debe conservarse también cuando se reformula como sigue:

$$a + (-a + a) + (-a + a) + (-a + a) + \ldots \textit{ in inf.}, \qquad (2)$$

donde escribimos aparte el primer término de la serie, asociando dos a dos, en una suma parcial, los términos restantes.

Pero también puede transformarse en

$$-a + (a - a) + (a - a) + \dots \textit{ in inf.}, \tag{3}$$

que resulta de (1) cuando los términos se asocian dos a dos y se procede como antes se hizo para obtener (1) y (2).

Si la expresión cuantitativa obtenida de este modo no carece de toda ***referencia objetiva***, las expresiones (1), (2) y (3) tienen que describir, todas ellas, la misma cantidad, pues es claro que la representación de la suma de uno y el mismo conjunto de cantidades no puede representar diferentes cantidades (como ocurre, *v.gr.*, con representaciones como $\sqrt{+1}$, arc $sen\left(\frac{1}{2}\right)$ y muchas otras).

Una y la misma representación cuantitativa,

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \textit{ in inf.},$$

tendría que ser igual —en caso de tener una referencia objetiva— a cero (al que impropiamente se le llama una cantidad), $+a$ y también $-a$, lo que es completamente absurdo y justifica la conclusión de que la representación carece de cualquier referencia objetiva.

Es verdad que la serie que estamos considerando se presenta como el cociente en una división de a por 2 (en la forma 1 + 1). Pero ninguna de las series que se generan de esta manera puede darnos el verdadero valor del cociente (en nuestro caso $\frac{a}{2}$), a menos que el residuo que se obtiene al dividir adicionalmente sea menor que cualquier cantidad que se elija, sin que importe qué tan pequeña sea ésta, pues como es claro, la división tiene siempre un residuo (en nuestro ejemplo, $-a$ y $+a$ alternadamente). Esta es una condición que la serie considerada en § 18, $1 - e$, que se genera dividiendo a por $1 - e$, con $e<1$, también satisface.

Pero si —como ocurre en este caso— $e=1$, y todavía con mayor razón si $e>1$; esto es, si los resíduos se incrementan cada vez que se avanza en el proceso de división, es fácil entender que el valor de la serie no puede ser igual al cociente

$$\frac{a}{1-e}.$$

¿Cómo podría ponerse, por ejemplo, que la serie con términos alternados

$$1 - 10 + 100 - 1000 + 10000 - 100000 + \dots \textit{ in inf.},$$

que se genera dividiendo 1 por 1+10, es igual a $\frac{1}{11}$? Y ¿quién pretendería que el valor de la serie de términos positivos

$$1 + 10 + 100 + 1000 + 10000 + \dots \textit{ in inf.}$$

es igual a $\frac{-1}{9}$ sólo porque el desarrollo de la fracción $\frac{1}{1-10}$ conduce a esta serie?

A pesar de ello, M.R.S. defiende este tipo de sumas y quiere demostrar la ecuación

$$1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + 64 - 128 + \dots \textit{ in inf.} = \frac{1}{3}$$

apoyándose solamente en que, según cree,

$$x = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + 64 - \dots.$$
$$= 1 - 2\,(1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + \dots) = 1 - 2x;$$

Lo que aquí ocurre, sin embargo, es que se hace nuevamente caso omiso del hecho de que la serie entre paréntesis no es igual a la serie original, escrita arriba, puesto que no consta del mismo conjunto de términos que ésta. Es claro que esta expresión cuantitativa carece de toda referencia objetiva, pues, al igual que la expresión que hemos considerado anteriormente, conduce a contradicciones. Lo que en realidad obtendríamos sería, por una parte:

$$1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 + 64 - \dots$$
$$= 1 + (-2 + 4) + (-8 + 16) + (-32 + 64) + \dots$$
$$= 1 + 2 + 8 + 32 + 64 + \dots,$$

mientras que, por la otra, llegaríamos a que

$$= (1 - 2) + (4 - 8) + (16 - 32) + (64 - 128) + \ldots$$
$$= -1 -4 -16 -64 -\ldots$$

Es decir: por medio de dos procesos igualmente válidos obtenemos un valor positivo infinitamente grande (primer caso) y también (segundo caso) un valor negativo infinitamente grande para la misma expresión.

§ 33

Si no queremos extraviarnos en nuestros cálculos con el infinito, no debemos considerar nunca como iguales (o a una como mayor o menor que la otra) a dos cantidades infinitamente grandes que resultan de sumar los términos de dos series infinitas basándonos únicamente en el hecho de que cada término en una de ellas es igual (o mayor, o menor) que el término correspondiente de la otra.

Pero tampoco debemos considerar a la primera suma como la mayor únicamente porque consta no sólo de todos los términos de la otra, sino también de muchos otros (que pueden aparecer en ella inclusive en un número infinito), todos ellos positivos, que en la otra no aparecerían.

A pesar de ello, es posible que la primera suma sea realmente menor (incluso infinitamente menor) que la segunda. Un ejemplo de esta situación nos la ofrece la conocida suma de los *cuadrados* de todos los números naturales, por una parte; y la suma de las potencias de estos números, por lo otra. Nadie pondrá en duda que cada término de la serie de todos los cuadrados

$$\left.\begin{array}{l} 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^{2+} 6^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 10^2 + \ldots \textit{ in inf.} = \\ 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81 + 100 + \ldots \textit{ in inf.} = \end{array}\right\} S_2$$

siendo un número natural, es también un término de la serie de las primeras potencias de todos los números naturales

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 \ldots \textit{in inf.} = S_1.$$

Es igualmente claro que en S_1 aparecen, además de todos los términos de la serie S_2, muchos otros (en realidad en número infinito) que no están en S_2 por no ser cuadrados de ningún número. A pesar de ello, S_2, la suma de los números cuadrados, no sólo no es menor que S_1 (la suma de todas las primeras potencias de los números), sino indiscutiblemente mayor que ella. Porque, no obstante las apariencias de lo contrario, *el conjunto de los términos* (no considerado todavía como suma y, por lo tanto, no considerado como algo analizable en subconjuntos arbitrarios de elementos) es exactamente el mismo en ambas series.

Elevando cada número de la serie S_1 al cuadrado en la serie S_1 modificamos únicamente las propiedades y la cantidad de estos términos, *no* su multiplicidad. Pero si el conjunto de los términos en S_1 y S_2 es el mismo, es evidente que S_2 debe ser mucho mayor que S_1, pues, con la excepción del primer término de esa serie, cada uno de sus términos es mayor que el término correspondiente en S_1. Esto ocurre, además, de tal modo que S_2, considerada como una cantidad, incluye al todo de S_1 tan sólo como una parte, pues consta de una parte adicional que por sí misma constituye una serie infinita con el mismo número de términos que S_1, a saber:

$$0, 2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, \ldots, n\,(n-1), \ldots \textit{in inf.}.$$

Con la excepción de los *dos* primeros, todos los términos en esta serie son mayores que los términos correspondientes en S_1, por lo que es claro que la suma de *toda* la serie es mayor que S_1. Si ahora restamos por segunda ocasión la serie S_1 de este resultado, obtenemos como *segundo* resíduo una serie que consta únicamente de un conjunto igualmente numeroso de términos

$$-1, 0, 3, 8, 15, 24, 35, 48, \ldots, n\,(n-2), \ldots \textit{in inf.},$$

en la que, con la sola excepción de los *tres* primeros, tenemos nuevamente que todos los términos son mayores que los términos correspondientes de S_1, por lo que también este *tercer* residuo (*sic*) puede ser juzgado, sin temor a incurrir en contradicciones, como mayor que S_1.

Este tipo de argumentación puede continuarse de manera indefinida, por lo que resulta evidente que la suma S_2 es infinitamente mayor que la suma S_1. En efecto, tenemos, en general, que

$$S_2 - mS_1 = (1^2 - m) + (2^2 - 2m) + (3^2 - 3m) + (4^2 - 4m) +$$

$$\ldots + (m^2 - m^2) + \ldots + n(n - m) + \ldots \textit{ in inf.},$$

esto es, una serie en la que solo un conjunto infinito de términos (los primeros $m - 1$) son negativos, el *m-ésimo* término es igual a cero, pero el resto está formado por positivos que se incrementan al infinito.

§ 34

Con el objeto de aclarar convenientemente lo que es erróneo en las otras afirmaciones mencionadas en § 31, debemos definir el concepto de *cero*, esforzándonos por alcanzar una mayor precisión que la normalmente se estila en el caso*.

Sin lugar a dudas, todos los matemáticos desean asignar al símbolo '0' un concepto que permita escribir las dos ecuaciones

$$\text{I.}\quad A - A = 0 \qquad \text{y} \qquad \text{II.}\quad A \pm 0 = A,$$

independientemente de qué expresión cuantitativa sea A y de que a ella corresponda una cantidad real o que carezca de toda referencia objetiva.

Ahora bien, es evidente que esto sólo ocurre si se considera al símbolo '0' no como la representación de una cantidad real, sino como la mera ausencia de cantidad y a la expresión "$A \pm 0$" como la instrucción de que a una cantidad cualquiera denotada

---

* Quiero dar testimonio en este lugar de que el mérito de haber sido el primero en llamar la atención del mundo matemático en relación a la problemática en torno a la idea del cero corresponde a M. Ohm, en su valioso ***Versuch eines vollkommen consequenten Systems der Mathematik*** (2a. Edición, Berlín, 1928)

por 'A' no hay que añadirle ni sustraerle nada. Pero sería equivocado suponer que la simple aclaración de que "el cero es una expresión cuantitativa carente de referencia" objetiva basta para una determinación completa del concepto que los matemáticos asocian con ese símbolo.

En las matemáticas existen ciertamente otras expresiones cuantitativas de uso común —por ejemplo el símbolo $\sqrt{-1}$ el cual ha adquirido gran importancia en el análisis— que carecen *igualmente* de toda referencia objetiva y que, a pesar de ello, no es lícito considerar, de ninguna manera, como equivalentes a 0.

Sin embargo, si definimos el significado de 0 de manera más precisa y exigimos que las ecuaciones I y II tengan validez general, habremos establecido un concepto que, por una parte, tiene la amplitud requerida por el uso que hasta ahora se ha hecho de él en la ciencia y satisface los intereses de ésta; y, por la otra, se encuentra suficientemente restringido para evitar cualquier abuso del mismo.

Por lo demás, un examen cuidadoso de lo anterior revela que no sólo el concepto de cero es objeto de una determinación propia, gracias a la validez general de las ecuaciones I y II; también los conceptos de *adición* y *sustracción* (que intervienen aquí como algo subyacente a los signos '+' y '-') son objeto de una extensión peculiar, muy provechosa para la ciencia. Pero el provecho mismo de la ciencia reclama adicionalmente que el concepto de *multiplicación* se tome en un sentido tan amplio que, sin importar el valor de A (una cantidad finita o infinitamente grande o pequeña, o bien una simple representación numérica sin referencia, como $\sqrt{-1}$), pueda siempre escribirse también la ecuación

$$\text{III.} \quad 0 \times A = A \times 0 = 0.$$

Por último, también en interés de la ciencia, debemos exigir que el concepto de la *división* se tome de la manera más general posible, para no entrar en contradicción con alguna de las tres ecuaciones previamente establecidas, asignando, en consecuencia, al símbolo B en la ecuación

$$\text{IV.} \quad B \times \left(\frac{A}{B}\right) = \left(\frac{A}{B}\right) \times B = A.$$

la mayor amplitud de rango compatible con esas ecuaciones y la validez general adscrita a ellas.

Ahora bien, aunque la ecuación IV permite que B denote una cantidad real finita o infinitamente grande o infinitamente pequeña, e inclusive la cantidad imaginaria $\sqrt{-1}$, no permite en forma alguna que B sea igual a 0; es decir, que se haga uso del *cero* o de una expresión equivalente como ***divisor***. Por III, en efecto, se requiere $0 \times A = 0$, cualquiera que sea A y si se tiene que $B = 0$ en la ecuación IV se tendría que

$$B\left(\frac{A}{B}\right) = 0,$$

lo cual coincidiría con lo que la ecuación V pide que $B\left(\frac{B}{A}\right) = A$ en el caso de que $A = 0$.

Se sigue de ello que, si no queremos incurrir en contradicciones, debemos establecer la regla de que ***no es lícito utilizar el cero, ni ninguna otra expresión equivalente a él, como divisor en una ecuación que sea algo más que la simple identidad*** como

$$\frac{A}{0} = \frac{A}{0}.$$

Lo que acabamos de decir, junto con numerosos absurdos que resultan a partir de premisas absolutamente correctas cuando se efectúan divisiones por cero, ilustra la necesidad de la observación de la regla apenas citada.

Sea a una cantidad real arbitraria. Si se permite dividir por una expresión equivalente a cero (por ejemplo, 1-1), se obtiene, por el conocido, y sin duda alguna correcto método de la división, la ecuación siguiente

$$\frac{a}{1-1} = a + a + \ldots\ldots + a + \frac{a}{1-1},$$

donde puede aparecer cualquier número de sumandos que se desee de la forma a. Si ahora restamos a ambos lados de esta igualdad la expresión cuantitativa $\frac{a}{1-1}$, se obtiene la igualdad

$$a + a + \ldots + a = 0;$$

esto es, un absurdo.

Si a y b son cantidades distintas, las identidades

$$a - b = a - b$$

y

$$b - a = b - a$$

son válidas. Sumando, llegaríamos a que

$$a - a = b - b,$$

o, equivalentemente, a

$$a\,(1 - 1) = b\,(1 - 1).$$

Si la división por un factor equivalente a cero de ambos lados de la ecuación fuera permitida, se obtendría el absurdo resultado de que

$$a = b,$$

para a y b arbitrarios. Es algo generalmente admitido que es muy fácil llegar a un resultado incorrecto cuando se efectúan cálculos mayores y se suprime un factor común de ambos lado de una ecuación, sin investigar primero si no es equivalente a cero.

§ 35

Resulta ahora muy fácil demostrar lo incorrecto de la opinión —sustentada por muchas personas— acerca de que en el proceso de *adición* o *sustracción*, tanto de una cantidad infinitamente pequeña de orden superior y una de orden inferior, como en el de una cantidad finita y otra infinitamente grande o, en general, en el de una cantidad infinitamente grande de orden superior cualquiera y otra de un orden superior mayor, las primeras *desaparecen como si se tratara de un cero*.

Si esto ha de entenderse en el sentido de que si M es infinitamente mayor que m, puede prescindirse por completo de esta última cantidad en la expresión compuesta $M \pm m$, aunque al continuar el cálculo pueda ocurrir que M misma desaparezca (por ejemplo, cuando se resta una cantidad igual a ella), entonces no es necesario ofrecer aquí una prueba de la incorrección de esta regla. Por lo demás, en las exposiciones normales en las que el fraseo es algo menos cuidadoso que el que he tratado de utilizar aquí ,no se hace advertencia alguna en relación a tal malentendido.

Pero sin duda alguna se argüirá que no es exactamente esto lo que se quiere decir, argumentándose que cuando se habla de que las cantidades M y $M \pm m$ son iguales no se pretende afirmar que ambas garantizan el mismo resultado al entrar en nuevas sumas y sustracciones, sino más bien que su igualdad consiste exclusivamente en que al llevar a cabo un proceso de medida en términos de una cantidad N de rango igual al de M y $M \pm m$ que se encuentra en una relación finita (y, por lo tanto, completamente determinable) con una de esas cantidad —*v.gr.* con M— se representa el mismo resultado.

Esto sería, en realidad, lo menos que cabe esperar de una defínción de la *igualdad de magnitud* de dos cantidades. Pero veamos si efectivamente M y $M \pm m$ satisfacen este requerimiento.

Si una de estas cantidades, digamos M, se encuentra en una razón irracional con la masa de N, puede ocurrir ciertamente (como en el caso del tipo más común de medición) que, para un número entero arbitrario q, pueda encontrarse otro, p, con la propiedad de que

$$\frac{p}{q} < \frac{M}{N} < \frac{p+1}{p}$$

e igualmente la de que $\frac{M \pm m}{N}$ se encuentre constantemente en los mismos límites. En otras palabras, que tengamos también que

$$\frac{p}{q} < \frac{M \pm m}{N} < \frac{p+1}{q}.$$

Sin embargo, si la razón $M : N$ es racional, existe una q tal que

$$\frac{M}{N} = \frac{p}{q},$$

y, además,

$$\frac{M \pm m}{N} < \frac{p}{q}, \quad \text{o bien} \quad \frac{M \pm m}{N} > \frac{p}{q};$$

poniéndose de manifiesto una diferencia entre estas dos cantidades, inclusive en comparación con los *números* abstractos (las cantidades finitas). Pero, entonces ¿con qué derecho podemos decir que son iguales?

§ 36

Para evitar incurrir en contradicciones como las anteriores, muchos matemáticos, siguiendo los pasos de Euler, recurren a la aclaración de que las cantidades infinitamente pequeñas no son, en realidad, sino *simples ceros*, mientras que las cantidades infinitamente grandes serían los cocientes que resultarían de la división de una cantidad finita por cero. Es claro que con esto, la desaparición u omisión de una cantidad infinitamente pequeña, como el sumando de la adición a una cantidad finita, se justifica plenamente. Pero ello solamente aumenta la dificultad de hacer inteligible tanto la existencia de cantidades infinitamente grandes como la posibilidad de la obtención de una cantidad finita, al dividir dos cantidades infinitamente pequeñas o bien infinitamente grandes; lo mismo ocurre con la existencia de cantidades infinitamente pequeñas e infinitamente grandes de orden superior. Porque las cantidades infinitamente grandes hacen su aparición, de acuerdo con esta concepción, cuando se divide por cero o por una expresión cuantitativa equivalente a cero (que, en realidad, no sería sino una representación carente de referencia) y, por lo tanto, de una manera no permitida por las leyes que rigen nuestros cálculos. En todas las cantidades finitas o infinitas que supuestamente resultan de la división de una cantidad infinita por otra que también lo es persiste, sin embargo, la mácula de un múltiple nacimiento ilegítimo.

El argumento más plausible en favor de la corrección de este cálculo con ceros parece ser el que se refiere al método con el que ha de determinarse el valor de una cantidad y, dependiente de la variable x por medio de la ecuación

$$y = \frac{F(x)}{\Phi(x)}$$

en los casos particulares en los que un cierto valor $x = a$ convierte en cero únicamente al numerador de la fracción, o bien tanto al numerador como al denominador de la misma.

En el primer caso, cuando $\Phi(x) = 0$ y $F(x)$ sigue siendo una cantidad finita, se acostumbra deducir que y es ***infinitamente grande***. Por el contrario, en el segundo caso, cuando tanto $\Phi(x) = 0$ como $F(x) = 0$, lo que se infiere es que las dos expresiones $\Phi(x)$ y $F(x)$ contienen (una o más veces) un factor de la forma $(x - a)$ y, por lo tanto, que deben ser de la forma

$$\Phi(x) = (x - a)^{m} \varphi(x),\ F(x) = (x - a)^{n} f(x),$$

donde es posible que denoten una constante.

Ahora bien, si $m > n$, se quiere deducir que inclusive después de haber eliminado los factores comunes en el numerador y el denominador —esto es, sin haber modificado el valor de la fracción $\frac{Fx}{\Phi x}$— el denominador continúa siendo cero para $x = a$ y se sigue sosteniendo que $x = a$ tiene como resultado una y infinitamente grande. Sin embargo, si $m = n$, se pretende ver que la cantidad finita $\frac{f(a)}{\varphi(a)}$ expresa, puesto que $\frac{F(x)}{\Phi(x)} = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$, el verdadero valor de y. Finalmente, en el caso de que $m < n$, se quiere inferir, puesto que ahora

$$\frac{F(x)}{\Phi(x)} = \frac{(x - a)^{n-m} f(x)}{\varphi(x)}$$

se convierte en cero para $x = a$, que, dando a x el valor de a, y tendría que ser cero.

La opinión que todo este procedimiento me merece es la siguiente: el valor de y cuando $x = a$ se considera en los casos mencionados como ∞ grande. Pero es evidente que esto sólo puede ocurrir si la cantidad y es *susceptible* de ser infinitamente grande; y aun en ese caso, tan sólo por accidente. Pero este resultado no se obtiene a partir de la expresión dada, que requiere aquí de una división por cero. De la simple circunstancia de que se diga que el valor de y es el que resulta de la expresión $\frac{F(x)}{\Phi(x)}$, pueden deducirse las propiedades de la cantidad y para todos los valores de x que representan una cantidad real, pero no para aquellos que hacen de esta expresión algo *carente de referencia objetiva*. Ésta es precisamente la situación que se presenta cuando su numerador o su denominador, o ambos, son cero.

Puede decirse en realidad que, en el primer caso, cuando solamente $\Phi(x)$, la cantidad y se convierte en algo *mayor* que cualquier cantidad dada. En el segundo, cuando únicamente $F(x)$ es igual a cero, y es *menor* que cualquier cantidad dada. Y, finalmente, en el tercer caso, cuando $\frac{F(x)}{\Phi(x)}$ contiene en el numerador y el denominador el mismo número de factores de la forma $(x - a)$, *y se aproxima* al valor $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ tanto como se quiera, acercando a voluntad x al valor a.

Sin embargo, a partir de todo esto *no* se sigue absolutamente nada en relación a las propiedades de este valor cuando la expresión $\frac{F(x)}{\Phi(x)}$ *carece de referencia objetiva* (es decir, cuando no representa en realidad ningún valor). Porque en tal caso la expresión misma toma o bien la forma 0, o bien la forma $\frac{c}{0}$ o la forma $\frac{0}{0}$.

Porque, en efecto, el teorema de la igualdad de los valores de dos fracciones que se distinguen entre sí únicamente porque en uno de ellos se cancelan los factores comunes en el numerador y el denominador, es válido en todos aquellos casos en los que el factor en cuestión *no* es un cero. De otra manera, ocurriría que así como podríamos afirmar que

$$\frac{2 \times 0}{3 \times 0} = \frac{2}{3},$$

también podría aseverarse que cualquier cantidad, por ejemplo,

$$1000 = \frac{2}{3},$$

pues ciertamente $3000 \times 0 = 0$ lo mismo que $2 \times 0 = 0$.

Por lo tanto, si podemos escribir que $\frac{2 \times 0}{3 \times 0} = \frac{2}{3}$, también podemos tener que

$$\frac{2 \times (3000 \cdot 0)}{3 \times (2 \times 0)} = \frac{(2 \times 3000) \times 0}{(3 \times 2) \times 0} = \frac{2 \times 3000}{3 \times 2} = 1000.$$

La falacia que aquí se evidencia resulta menos notoria en el caso anterior por la sencilla razón de que se divide de manera embozada por un factor $(x - a)$ equivalente a cero. Y, siendo legítimo efectuar este paso en cualquier otra circunstancia, se toma también aquí como algo lícito, pues, además, el valor resultante de y es exactamente el que pensabamos que era justificado esperar, a saber: si es *finito* precisamente el que la ley de la continuidad exige; cero, si los valores en la vecindad tienden a cero; e infinitamente grande, si esos valores se incrementan al infinito.

Se olvida en todo ello, sin embargo, que la ley de la continuidad no es observada, ni mucho menos, por todas las cantidades variables e, igualmente, que una cantidad que puede ser arbitrariamente pequeña aproximando tanto como se quiera x al valor de a no tiene por esa sola razón que convertirse en cero cuando $x = a$. Por otra parte, olvidamos también que una cantidad que se incrementa al infinito mientras x se aproxima a a tampoco tiene por qué ser realmente infinita cuando $x = a$. Existen en la geometría numerosos ejemplos de cantidades que no obedecen la ley de la continuidad; las magnitudes de las líneas y ángulos que determinan los perímetros y las superficies de polígonos y poliedros son algunos ejemplos de ello.

§ 37

Las exposiciones que hasta ahora se han hecho de la *teoría del infinito* adolecen de muchos defectos importantes que justificadamente han sido objeto de muchas críticas. Pero es comunmente aceptado que la observación cuidadosa de las reglas generales para calcular con el infinito no permite normalmente sino la obtención de resultados correctos. Esos resultados no hubieran podido obtenerse nunca si no existiera una manera irreprochable de concebir y utilizar este método para calcular. Quiero creer que es precisamente este núcleo esencialmente correcto lo único que en el fondo tenían en mente los descubridores de ese método, aunque es también cierto que no lograron expresar sus pensamientos con toda la claridad que hubiera sido deseable una tarea que en casos complicados como el que nos ocupa sólo es posible realizar cuando se ha llevado a cabo ya una serie de intentos preliminares.

Permítaseme entonces bosquejar aquí brevemente la manera en la que creo que debe concebirse el método para que su utilización al efectuar cálculos con el infinito pueda estar plenamente justificada. Bastará para ello referirnos al procedimiento utilizado en el llamado *cálculo diferencial e integral*, puesto que el método para efectuar cálculos con cantidades infinitas se obtiene fácilmente por simple oposición principalmente después de todos los descubrimientos de Cauchy en ese terreno.

No necesito aquí, entonces, de la restrictiva suposición —normalmente considerada imprescindible— de que las cantidades con las que ha de calcularse pueden ser *infinitamente pequeñas*. Su aceptación significaría que estamos excluyendo de antemano del ámbito de validez de ese método a todas las magnitudes temporales y espaciales acotadas, al igual que a todas las fuerzas de substancias limitadas; es decir, en el fondo, a todas las cantidades cuya determinación es precisamente lo que más nos interesa.

En realidad, lo único que pretendo es que estas cantidades tengan una *derivada* (lo que Lagrange llama *une fonction derivée*) en caso de que sean *variables* —aunque no independientes, sino dependientes de otra u otras cantidades— si no para todo valor de su variable, sí, por lo menos, para todos aquellos valores a los que tenga que aplicarse legítimamente el procedimiento.

En otras palabras: si x es una variable independiente y $y = f(x)$ designa una variable dependiente de ella, debe ocurrir (si nuestro cálculo es correcto para todos los valores de x entre $x = a$ y $x = b$) que y dependa de x de manera tal que, para todos los valores de x entre a y b, el cociente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

(que surge al dividir el incremento de y por el incremento de x) puede aproximarse arbitrariamente a alguna constante o a alguna cantidad $f'(x)$ dependiente exclusivamente de x, con tal de que a Δx se le dé un valor suficientemente pequeño y permaneciendo en esa vecindad o aproximándose todavía más cuando Δx es menor*.

Una vez que se tiene una ecuación entre x y y resulta muy fácil y es algo conocido encontrar la derivada de y. Por ejemplo, si

$$y^3 = ax^2 + a^3, \tag{1}$$

se tiene para cada Δx distinto de cero

$$(y + \Delta y)^3 = a(x + \Delta x)^2 + a^3; \tag{2}$$

de donde resulta, aplicando las reglas conocidas

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2ax + a\,\Delta x}{3y^2 + 3y\,\Delta y + \Delta y^2} = \frac{2\,ax}{3y^2} + \frac{3ay^2\Delta x - 6axy\Delta y - 2ax\Delta y^2}{9y^4 + 9y^3\Delta y + 3y^2\,\Delta y^2}, \tag{3}$$

siendo la *función derivada* de y (y' en la notación de Lagrange)

$$\frac{2\,ax}{3\,y^2},$$

* Puede mostrarse que todas las *cantidades variables dependientes*, cuando son de alguna manera *determinables* deben sujetarse a esta ley, de tal suerte que las excepciones a ella, aunque ocurran en un número infinito, pueden presentarse tan sólo con *valores aislados* de la *variable independiente*.

que es una función que se obtiene a partir de la expresión

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

desarrollándola de manera adecuada; es decir, en una fracción en cuyo denominador y numerador los términos que multiplican a Δx y Δy se encuentren separados de los que no lo hacen. Es decir, por lo tanto, poniendo en la expresión

$$\frac{2\,ax + a\,\Delta x}{3y^2 + 3y\,\Delta y + \Delta y^2}$$

tanto a Δx como a Δy igual a cero.

No es necesario que yo hable aquí de las múltiples ventajas que van aparejadas al descubrimiento de esta ***derivada***, ni de la manera en la que puede calcularse un incremento finito de y correspondiente a un incremento finito de x por medio de ella. Tampoco es necesario explicar cómo puede determinarse la función original $f(x)$ (excepto por una constante aditiva) cuando únicamente se da la derivada $f'(x)$.

Sin embargo, en vista de que la función derivada de una cantidad dependiente y con respecto a su variable x se obtiene, según se ha dicho, desarrollando en primer lugar

$$\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

de tal manera que ni Δx ni Δy aparezcan como divisores e igualando a cero después Δx y Δy, no parece ser inapropiado representar la derivada como

$$\frac{dy}{dx},$$

con tal de que se estipule lo siguiente:

i) Todas las Δx y Δy (o todas las dx y dy escritas en su lugar) que aparecen en el desarrollo $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ han de considerarse *como ceros*.

ii) El símbolo $dy : dx$ ha de considerarse *no* como un cociente de *dx en dy*, sino tan sólo como una representación de la derivada de y con respecto a x.
Resulta entonces claro que a un procedimiento de este tipo no puede criticársele que suponga relaciones entre cantidades inexistentes (de cero a cero), pues lo único que se pretende es que ese símbolo sea interpretado precisamente como un *mero símbolo*.

Es igualmente irreprochable la utilización de

$$\frac{d^2y}{dx^2}$$

para denotar la *segunda* función derivada de y con respecto a x, entendiendo ésta como la cantidad dependiente de x (o tal vez constante) a la que el cociente

$$\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$$

se aproxima tanto como se quiera, con tal de que Δx pueda tomarse arbitrariamente pequeño y esto se interprete de la manera siguiente:

(i) Las cantidades Δx y $\Delta^2 y$ que aparecen en el desarrollo de $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$ deben considerarse y manejarse como *simples ceros*.

(ii) En el símbolo $\frac{d^2y}{dx^2}\ldots$ ha de verse no una división de cero por cero, sino tan sólo el *símbolo* de la función que el desarrollo de $\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$ tiene como resultado cuando se ha modificado en la manera dicha. Una vez que estos significados de los símbolos $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2},\ldots$ han sido supuestos, puede demostrarse con todo rigor que cualquier variable

$$y = f(x)$$

que dependa de una manera determinable de otra variable independiente x, debe satisfacer la ecuación

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta x \frac{df(x)}{dx} + \frac{\Delta x^2}{1 \cdot 2} + \cdot \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \frac{\Delta x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{d^3 f(x)}{dx^3} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\Delta x^n}{1 \cdot 2 \ldots n} \frac{d^n f(x + \mu \Delta x)}{d x^n},$$

donde $\mu<1$, con la excepción (a lo más) de ciertos valores aislados de x y Δx.*

Es de sobra conocido que muchas e importantes verdades en la *teoría general de la cantidad* (en particular, en el llamado análisis superior) pueden ser establecidas con base en esta sola ecuación. Pero esta igualdad también abre paso a la solución de algunos de los más difíciles problemas que surgen en la aplicación de la teoría de la cantidad en la teoría del espacio o geometría, en la teoría de las fuerzas (estática y mecánica), etc. Ejemplos de ello son la rectificación de curvas, la complanación de superficies, la curvatura de sólidos, sin que haya necesidad de suponer lo infinitesimal, que constituye en este contexto una contradicción, ni ningún otro principio arquimediano o de otro tipo.

Ahora bien, si resulta legítimo formular ecuaciones del tipo de la ecuación para la rectificación de curvas en un sistema de coordenadas rectangulares:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}$$

en el sentido descrito anteriormente, será igualmente posible (sin que se corra el peligro de incurrir en errores) escribir ecuaciones como

---

* El autor ha demostrado hace tiempo la validez de este teorema para *toda* forma de dependencia de y con respecto a x, sea o no susceptible de representación por medio de los símbolos utilizados hasta ahora. Es posible que esa prueba sea publicada en un futuro próximo [N. del editor Prihonsky].

$$d\,(a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots) = bdx + 2\,cxdx + dx^2\,dx + \ldots(sic)$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

o, si r denota el radio de curvatura de una curva plana,

$$r = -\frac{ds^3}{d^2y \cdot dx},$$

etc., y donde nunca consideramos a los símbolos dx, dy, dz, ds, d^2y, etc. como símbolos de cantidades reales, sino como algo equivalente a cero, ni vemos a la ecuación misma como algo distinto a un símbolo compuesto tal que i) ***si efectuamos solamente las modificaciones que el álgebra permite con respecto a los símbolos de cantidades reales*** (en nuestro caso divisiones por dx o similares); y ii) ***si logramos finalmente que los símbolos 'dx', 'dy', etc. desaparezcan de ambas partes de la ecuación, entonces nunca llegaremos a un resultado incorrecto.***

Que es efectivamente esto lo que ocurre y que no puede ser de otra manera se comprende fácilmente, pues si, por ejemplo, la ecuación

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

es irreprochable, es necesario que lo mismo ocurra con la ecuación

$$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

porque de ésta puede derivarse aquélla, de acuerdo con el procedimiento que hemos mencionado.

Es fácil ver, por último, que no puede conducirnos a error el hecho de prescindir, en una ecuación arbitraria que contiene los símbolos Δx, Δy ,..., desde el principio (y con el objeto de abreviar el procedimiento), de todos los sumandos de los que sepamos de antemano con seguridad que desaparecerán al final de nuestro cálculo por ser equivalentes a cero. De esta manera, por ejemplo, cuando al efectuar algún cálculo lleguemos, partiendo de (1) y (2), a la ecuación

$$3y^2\,\Delta y + 3\,y\,\Delta\,y^2 + \Delta y^3 = 2\,a\,x\,\Delta x + a\,\Delta x^2,$$

que puede transformarse al pasar a símbolos equivalentes a cero en

$$3y^2\,dy + 3ydy^2 + dy^2 = 2axdx + adx^2,$$

nos percatamos de inmediato que los sumandos que contienen las potencias superiores dy^2, dy^3, dx^2 desaparecen de todas maneras al final, por lo que podemos escribir directamente

$$3y^2\,dy = 2axdx,$$

de donde se obtiene de inmediato la derivada de y con respecto a x que buscabamos,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2ax}{3y^2}.$$

En resumen: todo este procedimiento descansa en principios completamente similares a los principios que subyacen a nuestros cálculos con las llamadas *cantidades imaginarias* (que, al igual que nuestras dx, dy,... no son sino simples símbolos), lo mismo que al recién inventado método abreviado de división, así como a otras formas abreviadas de calcular. Para legitimar el procedimiento en cualquiera de esos casos es suficiente demostrar que estamos dando a los símbolos introducidos,

$$dx\,,\ \frac{dy}{dx}\,,\ \frac{d^2y}{dx^2}\,,\ldots \sqrt{-1}\ ,(\sqrt{-1}\,)^3\,,\ \frac{\sqrt{-1}}{-\sqrt{-1}}\ldots,\text{etc},$$

un significado tal que cuando los símbolos sin referencia objetiva den lugar a otras cantidades reales, ambas partes de la ecuación resulten verdaderamente iguales, asegurándonos al mismo tiempo que dichos símbolos estén sujetos únicamente a modificaciones que preserven esta característica.

§ 38

Si volvemos ahora nuestra mirada hacia las aplicaciones de la doctrina de la cantidad, nos encontraremos con las primeras paradojas en la *teoría del tiempo*, en la noción misma de *tiempo*, particularmente en la medida en la que éste tendría que ser una *extensión continua*. Las contradicciones que parecen surgir en relación a la idea misma de una extensión continua son conocidas desde la antigüedad y plantean dificultades similares con respecto a los continuos temporales, los espaciales e inclusive los materiales. Por esta razón, será conveniente ocuparse de todos ellos simultáneamente.

Se acepta generalmente que toda extensión debe estar compuesta de sus partes y también que su existencia como un todo no se puede explicar de manera no circular a partir de la composición de partes que tienen, ellas mismas, la propiedad de ser extensas. Sin embargo, se ha querido encontrar algo contradictorio en la suposición de que una extensión tiene su origen en partes que no son extensas, sino simples, como puntos en el tiempo, en el espacio y, en la esfera de lo real, átomos (substancias simples).

Si se hubiera preguntado por las objeciones que pueden hacerse a esta hipótesis, se habrían dado diversas respuestas: que una propiedad que no se aplica a ninguna de las partes tampoco puede atribuirse al todo; que entre dos puntos en el espacio, en el tiempo, o dos substancias cualesquiera, se mantiene siempre una distancia, por lo que resulta imposible que se constituyan en un *continuo;* etc.

Pero no es necesario reflexionar mucho para percatarse de lo absurdo de estas objeciones. Una propiedad que no está presente en ninguna de las partes —se dice— tampoco puede ser atribuida al todo de ellas. Pero ocurre precisamente lo contrario: un todo posee por necesidad propiedades de las que las partes carecen. Un autómata, por ejemplo, tiene la propiedad de imitar de manera casi engañosa ciertos movimientos característicos del ser humano, pero sus partes individuales, los resortes, los engranajes, etc., carecen de ese atributo.

Es cierto que dos momentos cualesquiera se encuentran separados entre sí por un conjunto infinito de otros momentos y también que algo análogo ocurre con dos puntos arbitrarios en el espacio —esto es, entre ellos existe un conjunto infinito de puntos— y éste es también el caso en la esfera de lo real: entre dos substancias cualesquiera hay un conjunto infinito de otras substancias. Pero debemos también preguntarnos si esta suposición nos conduce necesariamente a contradicciones.

En realidad, la única consecuencia que puede extraerse de aquí es que con dos puntos solamente, o con tres o cuatro, o con cualquier conjunto *finito* de tales entidades, *no* puede generarse una extensión. Pero esta situación es completamente aceptable. Más aún: un conjunto infinito de puntos no basta siempre para generar un continuo (ni siquiera el de una línea de longitud arbitrariamente pequeña), a no ser que esos puntos posean también el *orden requerido*.

Si intentamos entonces formarnos una idea clara de lo que llamamos una *extensión continua* o un *continuo*, no podemos evitar la aclaración de que un continuo existe allí y solamente allí donde hay un agregado de objetos simples (puntos en el tiempo o en el espacio, o bien substancias), cada uno de los cuales tiene la propiedad de que, dada una distancia arbitrariamente pequeña, existe siempre otro objeto del mismo ágregado que se encuentra en su vecindad. Si no es éste el caso; es decir, si, por ejemplo, en un cierto agregado de puntos hay por lo menos un elemento que no se encuentra densamente rodeado de puntos (o sea, cuando no ocurre que para cualquier distancia arbitrariamente pequeña exista un elemento de ese agregado en su vecindad), llamamos a ese punto un *punto aislado* y decimos que el agregado en cuestión no constituye un continuo.

Por el contrario, si en un agregado de puntos no existen puntos aislados, no hay nada que nos impida llamar legítimamente a este agregado un continuo. Pues, en verdad ¿qué más puede razonablemente pedirse?

"Puede pedirse además", se dice, "que todo punto tenga un vecino con el que se encuentre en inmediato contacto". Pero es imposible satisfacer esta exigencia. Pues, ¿cuándo podría decirse que dos puntos se tocan o se encuentran en contacto inmediato? ¿Tal vez cuando los límites de uno (digamos, su lado derecho) coincide con los límites del otro (con el lado izquierdo de éste)? Pero un punto es una parte *simple* del espacio, por lo que carecen de límites, tanto del lado derecho como del izquierdo. Si un punto tuviera una parte en común con otro, tendría que ser igual a él;

si dos puntos son diferentes, deben estar completamente separados y, por lo tanto, debe existir espacio para un tercer punto intermedio. En realidad, debe existir espacio para un conjunto infinito de puntos, puesto que el argumento apenas esgrimido puede aplicarse igualmente al punto intermedio en relación con los otros dos, etc.

Algunas personas, sin embargo, encuentran ininteligible lo que acabamos de decir. Por supuesto que no es algo que pueda entenderse sirviéndose del tacto o, en general, que pueda ser objeto de una percepción sensorial; pero se trata de algo que ciertamente el entendimiento reconoce y que reconoce, además, como algo necesario, por lo que se obtiene una contradicción cuando incorrectamente lo pensamos de manera diversa.

Se replica a esto, no obstante, que: "la idea de una línea como acumulación de un número infinito de punto e inclusive la de un conjunto infinito de tales acumulaciones (ambas concepciones pertenecientes a la doctrina tradicional) son ininteligibles, pues aun la más pequeña de las líneas debe ser susceptible de dividirse en un conjunto infinito de otras líneas al dividirla a la mitad, dividiendo después las mitades en mitades y repitiendo indefinidamente este procedimiento".

En realidad no encuentro nada erróneo o sorprendente en este argumento, a no ser la expresión 'la más pequeña de las líneas', que se desliza por falta de atención en el discurso de muchas personas. No existe ni puede existir nada de esta índole por el simple hecho de que precisamente la línea de la que aquí se habla y que se describe como "la más pequeña" puede ser todavía dividida en partes. Todo conjunto infinito (y no solamente el de los puntos en una línea) es susceptible de ser dividido en subconjuntos -inclusive en un número infinito de subconjuntos- que sean también, a su vez, conjuntos infinitos. En efecto, si ∞ es un conjunto infinito, también

$$\frac{\infty}{2}, \frac{\infty}{4}, \frac{\infty}{8} \cdots$$

son *conjuntos infinitos*. Se trata, entonces, de una característica inherente a la idea misma de infinito.

"Pero —podría preguntarse, por último, en el caso de que las explicaciones que hasta ahora se han ofrecido fueran admitidas como satisfactorias después de reflexionar sobre ellas— ¿cómo ha de entenderse la afirmación de aquellos matemáticos que pretenden que una acumulación de puntos, no importa qué tan grande sea, no puede generar una extensión, ni tampoco, conversamente, dividir una extensión en un conjunto arbitrariamente grande de partes puede resolverse nunca en un punto simple?"

En un sentido estricto se tendría que decir, ***por una parte***, que, por supuesto, un conjunto finito de puntos no genera en ningún caso una extensión y que ésta resulta solamente de un conjunto infinito cuando se satisface la condición de que en cualquier distancia suficientemente pequeña y para todo punto en un conjunto, debe existir un punto también perteneciente a éste en su vecindad. ***Por la otra***, sin embargo, habría que admitir que ***no toda*** división de un objeto espacial en partes se resuelve en partes simples. Esto no ocurre nunca, por ejemplo, cuando un objeto espacial se divide en un número finito de subconjuntos y, como hemos visto, ni siquiera pasa siempre que se tenga una división que pueda reiterarse al infinito (tomando mitades, digamos). Pero es necesario insistir siempre en que, en última instancia, un continuo cualquiera no puede tener en su origen otra cosa que puntos. Cuando ambas cosas se comprenden cabalmente su compatibilidad no representa ningún problema

§39

Podemos pensar, en realidad, que era previsible que se hicieran objeciones en relación a la extensión continua que llamamos tiempo. De hecho, la teoría del tiempo parecía estar destinada a convertirse en un campo de acción fértil para aquellos filósofos (como los escépticos) que tienen más interés en la confusión y en encontrar supuestas contradicciones que en elucidar las ideas humanas. Aquí nos ocuparemos solamente de lo más importante, considerando que no todo lo que se ha expuesto tiene que ver directamente con la noción de infinito.

Se ha planteado la cuestión de si el tiempo es algo real y, de ser éste el caso, la de si se trata de una substancia o de un accidente, preguntándose además, de ocurrir lo primero, si esa substancia ha sido creada o no.

"Si se trata de una substancia creada", se dice, "debe haber tenido un principio y presumiblemente deberá tener un fin. En consecuencia, está sujeta al cambio, requiriendo de un tiempo para que esa transformación pueda llevarse a cabo. Más absurdo todavía es *identificar* a esa substancia con Dios o sostener que se trata de un accidente presente en Él. Como normalmente se contrapone el tiempo a la eternidad, puede preguntarse: ¿qué es ésta con precisión? ¿cómo es posible que un conjunto infinito cuyos elementos son no sólo momentos (instantes), sino inclusive intervalos completos de tiempo, se encuentre contenido en el más breve instante posible, por ejemplo, en una sola mirada [Alemán: *Blick*] con el ojo [Alemán: *Auge*], de la que cada parte temporal simple recibe precisamente el nombre de 'momento' [Alemán: *Augenblick*]?". *Se concluye que "en realidad, el tiempo no existe*, el tiempo pasado es, precisamente por tener esta condición, algo evidentemente no presente, mientras que el tiempo futuro, refiriéndose al porvenir, no es todavía algo presente. El *presente* no es sino un mero instante o momento en el sentido más estricto de estas palabras, por lo que no tiene ninguna *duración* y, por ende, tampoco ningún derecho a ser *llamado* tiempo".

En mi opinión, el tiempo no es, en el sentido estricto de la palabra, algo *real*. En ese sentido se atribuye realidad únicamente a las *substancias* y a las *fuerzas* a ellas inherentes. No creo, por lo tanto, que el tiempo pueda ser identificado con Dios y no pienso tampoco que haya de considerársele como una substancia creada ni como un *accidente* divino o de alguna substancia creada o de algún agregado de substancias creadas. Es precisamente por estas razones que el tiempo no puede ser algo *sujeto a cambios*. El tiempo es, más bien, aquello *en lo que* todo cambio tiene lugar. Cuando se dice lo contrario, por ejemplo en el proverbio "los tiempos cambian", se está entendiendo por *tiempo* (como ya se ha dicho) solamente las cosas que se encuentran *en el* tiempo junto con sus estados y condiciones.

Ofrezco ahora mi propia definición: el tiempo es aquella *determinación* de toda substancia variable (o, equivalentemente, de cualquier substancia dependiente) cuya representación debemos añadir a la de la substancia misma, a fin de poder atribuir a ésta una y solo una de cada dos propiedades contradictorias ***b*** y ***no-b***, negándole al mismo tiempo la otra. Más precisamente: la ***determinación*** aquí mencionada es una ***partícula temporal simple***, un momento o instante en el que debemos tener una representación de la substancia *x* a la que queremos asignar con certeza sólo una de cada par de atributos contradictorios ***b*** y ***no-b***. En consecuencia, la definición debe leerse, todavía con mayor precisión, como sigue: la substancia ***x*** tiene en el momento ***t*** una y solamente una de las propiedades ***b*** y ***no-b***.

Si se concede el carácter esencialmente correcto de esta definición, puedo explicar también claramente lo que es el tiempo y lo que es la ***eternidad*** o ***tiempo total***: precisamente aquel todo que tiene como elementos a todos los instantes. Defino, además, cualquier ***tiempo finito***; esto es, cualquier ***duración o intervalo de tiempo*** entre dos momentos determinados, como el agregado de todos los momentos que se encuentran entre esos dos momentos o instantes terminales.

Tenemos entonces que, de acuerdo con estas definiciones, no existe ninguna diferencia entre ***tiempo*** y ***eternidad***, con tal de que el primero no se entienda —como con frecuencia ocurre— como un tiempo finito, sino como la ***totalidad*** del tiempo en ambas direcciones.

Sin embargo, existe una diferencia fundamental en relación a la manera en la que Dios, por una parte, y los seres mutables o creados, por la otra, se encuentran en el tiempo: éstos se encuentran en el tiempo al cambiar ***en él***, mientras que Dios es siempre, en todo momento, absoluta e invariablemente Él mismo. Esta es la razón por la que solamente a Dios se da el atributo de eternidad, hablándose de todos los demás seres, de los seres creados por Él, como de ***seres temporales***.

Posiblemente resulte difícil para nosotros pensar en imágenes sensoriales el más breve lapso de tiempo (como un abrir y cerrar de ojos) como un conjunto infinito de intervalos de tiempo. Pero es suficiente que el ***entendimiento*** lo aprehenda y reconozca a la vez que no puede ocurrir de otra manera. El fundamento objetivo de esta circunstancia puede reconocerse, en realidad, en la idea de tiempo que hemos sugerido, pero su discusión aquí nos llevaría demasiado lejos. Lo único absurdo sería afirmar que en el lapso breve de tiempo existe el mismo número de instantes que en un lapso mayor, o que cualquiera del infinito número de intervalos de tiempo en los que aquel lapso puede dividirse es de la misma longitud que una duración mayor de tiempo.

Resulta ahora del todo clara la falacia que se comete al pretender privar a la idea de tiempo de toda realidad, por lo que no será necesario adentrarse en los detalles de su refutación. El tiempo no es, en absoluto, algo que tenga existencia, y lo mismo puede afirmarse tanto del tiempo pasado como del tiempo futuro, puesto que ni siquiera el presente es algo que exista. Pero, entonces ¿cómo puede inferirse de esto que el tiempo es una no-entidad? ¿No podría decirse también que las proposiciones y las verdades absolutas son *algo*, aunque nadie pretenda con ello que son algo existente, a no ser que se las confunda con su aprehensión por parte de la conciencia de un ser pensante; esto es, con *pensamiento* o *juicios*?

§40

Volvamos ahora nuestra atención a las paradojas de la *teoría del espacio*. Es bien sabido que todavía no se ha logrado explicar lo que es el espacio, habiéndosele considerado, en ocasiones, como algo existente, confundiéndolo en otras con las substancias que se encuentran en él e incluso identificándolo con Dios o, por lo menos, con un atributo de la divinidad. *Newton* mismo concebía que el espacio era un *sensorium* divino. Se ha pensado también que no sólo las substancias que se encuentran en el espacio, sino inclusive el espacio mismo *se mueve*; es decir, se desplaza de un lugar a otro. Desde *Descartes* se pretende haber descubierto que *no todas* las substancia, sino exclusivamente las *substancias materiales* son las que tienen su lugar en el espacio. *Kant*, por su parte, tuvo la idea — todavía sostenida por muchos en nuestros días— de que el espacio, al igual que el tiempo, no es algo objetivo, sino que es una mera *forma subjetiva de nuestra sensibilidad*. Desde entonces se plantea el problema de la existencia de seres cuyo espacio sea diverso al nuestro, por ejemplo, que tenga dos, tres o cuatro dimensiones. *Herbart*, por último, ha presentado un espacio *doble*: un espacio *rígido* y a la vez *continuo*, lo mismo que un tiempo con estas características. En otro lugar he expuesto ya con detalle mis ideas en relación a estas concepciones, que poseen sobre todo un interés histórico.

El espacio —y lo mismo es válido para el tiempo— *no es un atributo* de las substancias, sino tan sólo una *determinación* de ellas, una determinación que tiene lugar de acuerdo con lo siguiente:

Llamo "lugares ocupados" a aquellas determinaciones de las substancias creadas que proporcionan el fundamento por el cual, al encontrarse tales substancias en posesión de ciertos atributos en un momento dado, interactúan entre sí, produciéndose ciertas modificaciones en ellas. Defino entonces el *espacio*, el todo del espacio, como el agregado de todos los lugares ocupados.

Esta definición me ha permitido derivar objetivamente los resultados de la teoría del espacio a partir de las de la teoría del tiempo; mostrar, por ejemplo, que el espacio posee tres dimensiones, exhibiendo a la vez las razones por las que esto tiene que ser así, etc.

De esta manera, podemos considerar que no es necesaria una discusión adicional y que pueden tenerse por aclaradas las aparentes contradicciones que parecen surgir con la idea misma del espacio, en relación a esa *objetividad* que ha de adscribírsele (a pesar de no ser algo real); esto es válido también para las paradojas relativas al conjunto infinito de sus partículas, así como para las que tienen que ver con el todo continuo que éstas constituyen cuando se las toma conjuntamente (no obstante que no existe ni siquiera un par de estas partículas o puntos que se encuentre en contacto inmediato entre sí).

Lo primero que requiere una consideración más detallada es posiblemente la idea misma de una "magnitud de una extensión espacial". Se encuentra fuera de toda duda que a toda extensión corresponde una magnitud y que, tanto en la dimensión temporal individual como en las tres dimensiones espaciales, las magnitudes involucradas sólo pueden ser determinadas por su relación con una magnitud particular arbitrariamente elegida como unidad de medida. Se acepta también comúnmente que esta unidad de medida debe ser del mismo tipo que aquello a lo que ha de aplicarse: una línea para líneas, una superficie para superficies, un cuerpo para cuerpos.*

Sin embargo, si nos preguntamos en qué consiste realmente lo que hemos llamado magnitud de una extensión espacial, estaríamos inclinados a concluir que es precisamente este conjunto de puntos aquello en lo que pensamos al hablar de la magnitud de un objeto espacial, puesto que una extensión de este tipo no puede consistir en otra cosa que en puntos ordenados de acuerdo con una regla precisa, mientras que en relación a una cantidad nunca debe atenderse al orden, sino tan sólo al conjunto de sus elementos. El *nombre* mismo que utilizamos para referirnos a la magnitud de una superficie o de un cuerpo; o sea, su *contenido* (como se dice con frecuencia), parece confirmar lo anterior. Sin embargo, un examen cuidadoso de la cuestión revela que esto no es así. Porque, en efecto ¿cómo podríamos suponer (como lo hacemos) generalmente y sin ningún asomo de duda, si esto fuera verdad, que el volumen de un objeto espacial —por ejemplo de un cubo— no se modifica en lo absoluto por la inclusión o exclusión de la superficie delimitante (*Umgränzung desselben*), que, después de todo, posee también ella misma una magnitud?

Es esto precisamente lo que hacemos con plena seguridad cuando decimos, por ejemplo, que un cubo de lado 2 tiene ocho veces el volumen de un cubo de lado 1, a pesar de que cuando

---

* A algunos les agradará encontrar aquí una definición de estos tres tipos de extensión espacial. Supóngase ahora que la definición de una *extensión como tal*, ofrecida en § 38, es correcta (y no hay que olvidar a este respecto que tiene el mérito de que con una pequeña modificación resulta también aplicable a lo que la *teoría general de la cantidad* llama *variables continuas*). Doy entonces las siguientes definiciones. Una extensión espacial es *simplemente* extendida (o bien una línea), si todo punto tiene, para cada distancia suficientemente pequeña, uno o más, pero *no* tantos puntos en su vecindad que el agregado de éstos constituya por sí mismo una extensión. Una extensión espacial es *doblemente* extendida (o bien una superficie) cuando para cualquier punto y para cada distancia suficientemente pequeña existe una línea completa de puntos vecinos. Finalmente, una extensión espacial es *triplemente* extendida (o bien un cuerpo) si para todo punto y para cada distancia suficientemente pequeña existe una superficie completa de puntos vecinos.

ocho de esos cubos pequeños se componen para formar un solo cubo mayor, la yuxtaposición en pares de los veinticuatro cuadrados interiores hace que el cubo grande tenga doce unidades menos de área de superficie delimitante que los ocho cuadrados pequeños tomados por separado.

Consecuencia de todo ello es que lo que entendemos por la magnitud de una extensión espacial, ya sea que se trate de una línea o de una superficie o sólido, no es otra cosa que una cantidad, derivada de tal manera de una extensión del mismo tipo que lo que ha de medirse (y que se ha tomado como unidad), que cuando las cantidades m y n resultan respectivamente de los fragmentos M y N, de acuerdo con el esquema elegido, podemos obtener, a partir de la extensión producida por la yuxtaposición de M y N y procediendo según ese mismo esquema, la cantidad $m + n$, independientemente de que los límites de M, de N y de $M + N$ hayan sido considerados o no. En el trabajo mencionado en §37 se ofrece una demostración de que las fórmulas más generales que la teoría del espacio utiliza para la rectificación, cuadraturas y curbaturas pueden derivarse, de hecho, de la definición anterior, sin que para ello resulte necesario hacer otro tipo de suposiciones; en particular, sin que se tenga que recurrir a los llamados principios arquimedianos.

§41

Con base en las explicaciones ofrecidas hasta aquí podemos ahora, sin temor a incurrir en contradicciones de ninguna índole, hacer las siguientes aseveraciones que tal vez tengan un carácter paradójico ante las formas normales de representación y pensamiento.

1. El agregado de todos los puntos que se encuentran entre a y b representa una extensión unidimensional o línea. La longitud de esta recta es exactamente la misma, ya sea que los puntos a y b se incluyan o no; es decir, independientemente de que esa recta se encuentre o no *acotada*. Cualquier línea no limitada de este tipo carece, en la dirección en que se está acotada (y precisamente por esta razón) de un punto *extremo*, existiendo siem-

pre, para cualquier punto que se considere, otro más alejado, aunque su distancia sea siempre finita.

2. El perímetro de un triángulo *abc* puede analizarse en: (i) la línea recta *ab*, acotada en ambas direcciones; (ii) la línea *ac*, acotada en *c*, pero no en *a*; y (iii) la línea recta no acotada *bc*. Su perímetro, sin embargo, es igual a la suma de las tres longitudes *ab*, *bc* y *ca*.

3. Supóngase ahora que la línea recta *az es bisectada en el punto b*, y que el segmento *bz* se bisecta en *c*, el segmento *cz se bisecta en el punto d*, y que este procedimiento de bisección puede continuarse indefinidamente. Supóngase también que se forma un primer agregado de todos los puntos que restan, una vez que se ha separado a z y a todos los infinitos puntos de bisección *b, c, d*,... Este primer agregado merece aún el nombre de *línea*, manteniendo la misma magnitud que antes. Sin embargo, si a este primer agregado se añade ahora *z*, la totalidad que se obtiene no es ya una extensión continua: el punto *z* se encuentra aislado, puesto que de ninguna distancia (no importa que tan pequeña se tome) puede decirse que para ella y para cualquier otra distancia menor que ella existe en el segundo agregado un elemento que se encuentre en la vecindad de *z*, pues todas las distancias del tipo $\frac{az}{2^n}$ carecen de un vecino para *z*.

4. Supóngase que la distancia entre los puntos *a* y *b* es igual a la que existe entre los puntos α y β. Es necesario, entonces, que el conjunto de los puntos entre *a* y *b* y el conjunto de los puntos entre α y β sean también iguales.

5. Las extensiones (las figuras extendidas) que tienen el mismo conjunto de puntos son también iguales en cuanto a magnitud. Sin embargo, la conversa de esta afirmación no es verdadera: las extensiones que coinciden en magnitud no siempre tienen el mismo conjunto de puntos.

6. Si dos objetos espaciales son completamente semejantes entre sí (en un sentido geométrico), los conjuntos de sus puntos deben comportarse de manera exactamente análoga a como lo hacen sus magnitudes.

7. Si dos objetos espaciales perfectamente semejantes poseen magnitudes tales que la razón entre ellas es irracional, la razón

entre el conjunto de sus puntos también lo es. En consecuencia, existen *conjuntos* (a saber: los conjuntos infinitos y sólo ellos) cuya razón es, *en cualquier sentido posible*, irracional.

§42

De todas estas proposiciones (que claramente pueden multiplicarse sin dificultad), la única que hasta donde sé ha merecido alguna atención por parte de los matemáticos es la sexta. Sin embargo, esto ocurrió en el sentido de contraponerla a la proposición acerca de que *líneas semejantes deben tener el mismo conjunto de puntos, independientemente de sus diferencias en cuanto a magnitud*. Es esto lo que afirma J.K Fischer en su *Grundriss der Gesamten höheren Mathematik*, (Leipzig, 1809, Vol. II, nota a §51) en relación a arcos semejantes y concéntricos. El argumento que allí se presenta es que, para cada punto en uno de ellos, es posible trazar un radio que corresponde a un punto en el otro.

Es bien conocido que Aristóteles se ocupó ya de esta paradoja. La argumentación de Fischer pone de manifiesto la suposición de que dos conjuntos infinitos deben ser iguales si pueden formarse pares de elementos de uno y otro de tal manera que cada elemento de cada uno de ellos se encuentre asociado con un solo elemento del otro, y viceversa. Pero, una vez que se ha hecho ver el error que subyace a esta concepción, resulta innecesario abundar en la refutación de la misma. Por lo demás, no resulta en forma alguna claro —en caso de ser correcta— por qué tendría que restringirse a arcos circulares semejantes y concéntricos o, en general, a arcos circulares, puesto que el mismo argumento sería igualmente válido para *toda línea recta*, para la totalidad de las curvas, y no solamente para las curvas semejantes.

§43

Difícilmente existirá en la ciencia del espacio una verdad contra la que se haya atentado tan frecuentemente como la de que *toda distancia entre dos puntos en el espacio y, por lo tanto, toda recta acotada a ambos lados es necesariamente finita*; esto es, mantiene con cualquier otra una razón exactamente determinable por medio de conceptos puros.

Sería raro, en efecto, encontrar a un geómetra que no haya hablado, en algún momento, de *distancias infinitamente grandes* o que no se haya planteado la cuestión de si una línea que tiene puntos terminales en ambas direcciones podría, a pesar de ello, ser *infinitamente grande*. Baste citar aquí como ejemplo el par de líneas que se llaman (en un sentido geométrico de los términos) *tangente* y *secante* de un ángulo o de un arco. De acuerdo con su definición expresa, éstas serían un par de líneas rectas limitadas en ambas direcciones. Pero es digno de mención el hecho de que muy pocos matemáticos son lo suficientemente cuidadosos como para enseñar que, para el ángulo recto, tanto la tangente como la secante resultan *infinitamente grandes. Y, no obstante, esta equivocada concepción nos enfrenta de inmediato a la dificultad de determinar si estas dos cantidades infinitamente grandes han de considerarse como positivas* o *negativas*. Las razones para optar por lo uno o lo otro tienen por supuesto, la misma fuerza, pues es de sobra conocido que una paralela que pasa por el centro de un círculo y llega a una de sus tangentes se encuentra en una relación de entera simetría con ésta, por lo que no puede cortarla ni de uno ni de otro lado. Y tampoco en la expresión cuantitativa

$$\frac{1}{0},$$

es posible descubrir el menor indicio que nos permita determinar que esta cantidad, supuestamente infinita, es positiva o negativa, puesto que el cero no puede verse ni como positivo ni como negativo. Resulta, en consecuencia, no solamente paradójico, sino del todo falso hablar de la existencia de una tangente infinitamente grande del ángulo recto, lo mismo que, en general, de una tangente de todos los ángulos de la forma

$$\pm n\,\pi \pm \frac{\pi}{2}.$$

Es también conveniente recordar que, en sentido estricto, ni el seno ni la tangente existen tampoco para un ángulo cero o para un ángulo $\pm n\pi$. La diferencia entre estos dos casos es que, en el primero, nada falso resulta de ignorar enteramente los productos en los que estas expresiones cuantitativas aparecen como productos, mientras que en el segundo, cuando aparecen como divisores, puede concluirse que las fórmulas demandan algo ilícito.

§44

Un procedimiento igualmente injustificado, que por fortuna ha encontrado muy pocos seguidores, es el que ha introducido Johann Schulz, que pretende *calcular la magnitud de todo el espacio infinito*. Su argumento es el siguiente. i) A partir de cualquier punto a pueden trazarse líneas hacia el infinito en todas las direcciones posibles. Por otra parte, ii) cualquier punto m del espacio universal en el que podamos pensar debe encontrarse en una y sólo una de estas líneas.

Con base en i) y ii) Schulz pretende concluir que la totalidad del espacio infinito puede verse como una *esfera* que tiene a a como centro y cuyo radio sería ∞. De esto se deduce inmediatamente que la magnitud total del espacio infinito se encuentra dada por la fórmula

$$\frac{4}{3}\pi\infty^3.$$

Esta conclusión tendría que constituir indudablemente, en el caso de poder ser justificada de manera satisfactoria, uno de los teoremas fundamentales de la teoría o ciencia del espacio. Difícilmente puede objetarse algo en contra de las dos premisas del argumento de Schulz (que no he podido reproducir aquí de manera literal por no haber tenido acceso directo a él). Supongamos, sin embargo, que alguien dice: la segunda premisa debe ser falsa, por el hecho mismo de que de ella se sigue que la distribución de los puntos en el espacio tendría que ser muy desigual esto es, su concentración tendría que ser mucho más densa alrededor del punto a elegido, que después de todo es arbitrario. Quien sostenga estas afirmaciones evidenciaría, empero, que todavía no ha superado el prejuicio que hemos refutado suficientemente en §21.

El único (y evidente) error que Schulz comete consiste en suponer que las rectas que han de trazarse en todas las direcciones posibles hacia el infinito a partir del punto *a* son radios (y, por lo tanto, líneas con puntos terminales en ambas direcciones), si es que todo punto del espacio ha de localizarse en una de ellas. Pues, en efecto, sólo a partir de esta suposición es posible deducir la forma de esfera del espacio infinito y calcular su magnitud como

$$\frac{4}{3}\pi\,\infty^3.$$

Este error abre también la puerta a otro tipo de absurdos. Así, puesto que para cada esfera debe existir un cilindro, un cubo y muchos otros objetos espaciales —por ejemplo, un número infinito de esferas tangentes de igual diámetro— que la circunscriban, resulta que el supuesto espacio *total* no es, en realidad, total, sino tan sólo una parte del espacio, existiendo una infinidad de espacios además de él.

La mayoría de las paradojas que Boscowich ha expuesto en su *Dissertatio de Transformatione Locorum Geometricorum* (publicada en Roma en 1754 como apéndice al Vol.III de sus *Elementa Universae Matheseos*) desaparecen cuando se las confronta con la observación de que una línea trazada al infinito (aunque sea en una sola dirección) no puede, precisamente por esa razón, estar acotada en esa dirección, por lo que no tendría más sentido hablar de un punto terminal en relación a ella que del vértice de una esfera, de la curvatura de una recta o de un punto individual, o de la intersección de dos paralelas.

§45

La suposición de distancias y líneas infinitamente pequeñas en el espacio ha sido casi tan frecuente como la de distancias y líneas de longitud infinita. La apelación a este recurso se ha presentado particularmente cuando parecía necesario tratar como rectas (o planos) a aquellas líneas (o superficies) de las que ninguna parte extensa mantiene ya esas propiedades. Este expediente ha servido, por ejemplo, para facilitar la determinación de la longitud de arco o la magnitud de la curvatura de esas líneas (o superficies) o la de ciertas de sus propiedades de interés para la mecánica. En tales casos, muchos se permitieron inclusive inventar distancias ficticias, que requieren para su medida de cantidades infinitamente pequeñas de segundo o tercer orden o aun de órdenes superiores.

La circunstancia mencionada en §37 —es decir, el hecho de que las cantidades variables que se refieren a extensiones espaciales *determinables* deban tener a una primera y una segunda *derivadas*, además de *todas* las derivadas subsecuentes, excepto en ciertos valores individuales aislados— es la causa de que la utilización de este procedimiento conduzca muy esporádicamente (en especial en la geometría) a resultados incorrectos. Porque, ciertamente, si tales derivadas existen, la afirmación acerca de las llamadas líneas, superficies y volúmenes infinitamente pequeños puede extenderse, en general, a todas las líneas y superficies y a todos los cuerpos que, manteniendo siempre su carácter finito puedan, no obstante, tomarse tan pequeños como se quiera; o, expresado en nuestros términos: que puedan decrecer al infinito.

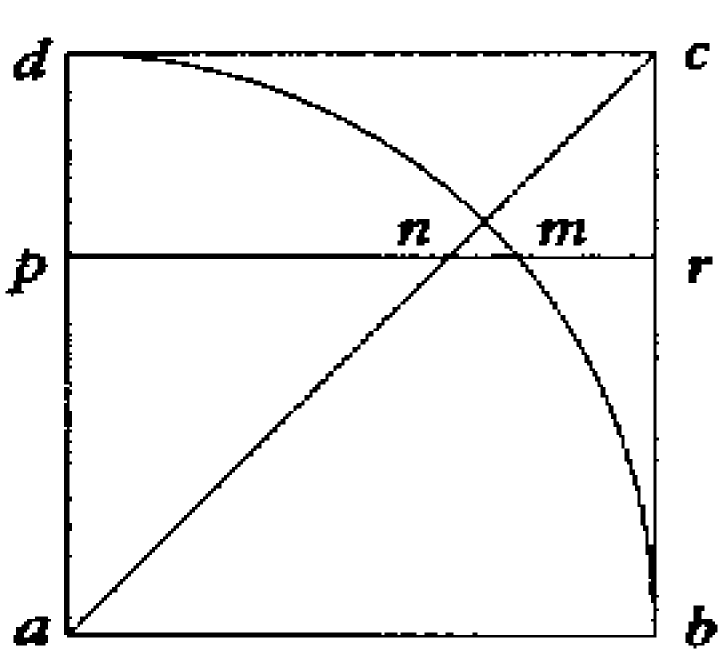
Es precisamente de estas cantidades variables, en realidad, que resulta verdadero lo que antes se ha afirmado de manera equivocada acerca de las distancias infinitamente pequeñas.

Resulta entonces del todo comprensible que una descripción así haya producido y en apariencia establecido muchas cosas paradójicas e inclusive equivocadas. Qué extraño nos suena, por ejemplo, la afirmación de que toda curva y toda superficie no son otra cosa que una composición de una infinidad de líneas rectas y superficies planas, de las que sólo habría que suponer que tienen que ser suficientemente pequeñas, añadiéndose también la suposición de líneas y superficies infinitamente pequeñas que se identifican con curvas. Y qué extraño resulta entonces decir que una curva que no posee curvatura alguna en ninguno de sus puntos (esto es, en un punto de inflexión) tiene una curvatura infinitamente pequeña en ese punto y que, en consecuencia, su radio de curvatura es infinitamente grande; o describir un pico como un punto en el que la curvatura es infinitamente grande y el radio de curvatura infinitamente pequeño, etc., etc.

§46

Un ejemplo a la vez notable y sencillo del tipo de absurdos al que puede conducir la suposición de distancias infinitamente pequeñas es el siguiente, expuesto ya, de acuerdo con Kästner (*Elementos de Análisis Superior*, Vol. II, Prefacio), por Galileo en sus *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche*, sin duda con el ánimo de estimular la reflexión. La proposición es la siguiente: *la circunferencia y el centro de un círculo tienen la misma magnitud*.

Para formarse una idea de la manera en la que se ha pretendido llevar a cabo la demostración de este enunciado, el lector debe pensar en un cuadrado *abcd* y un cuadrante *bd* con *a* como centro y *ab* como radio. Considérese también una línea recta *pr* paralela a *ab* que corta a *ad* en *p*, a la diagonal *ac* en *n*, al cuadrante *db* en *m* y a *bc* en *r*; en suma, la conocida figura con la que normalmente se demuestra que el área de un círculo de radio *pn* es igual al área de un anillo que queda entre los círculos de radio *pm* y *pr* respectivamente; o bien,



$$\pi \cdot pn^2 = \pi \cdot pr^2 - \pi \cdot pm^2$$

Mientras más se aproxime *pr* a *ab*, más pequeño será el círculo de radio *pn* y más angosto será el anillo entre los círculos de radio *pm* y *pr*. Por lo tanto, aquellos geómetras que no encuentran nada extraño en la suposición de distancias infinitamente pequeñas extienden también esta relación al caso en el que la aproximación de *pr* a *ab* es infinitamente pequeña, por lo que la distancia *ap* se hace igual a *dx*, ocurriendo igualmente que

$$\pi \cdot dx^2 = \pi \cdot a^2 - \pi\,(a^2 - dx^2)$$

que se justifica por el hecho mismo de ser una mera identidad.

En ese caso, sin embargo, el círculo que tiene a *pn* como radio se ha pensado como algo infinitamente pequeño y perteneciente al segundo orden, mientras que el anillo entre los círculos de radio *pm* y *pr* tendría ahora una anchura

$$-mr = \frac{1}{2}\frac{dx^2}{a} - \frac{1}{2\cdot 4}\cdot\frac{dx^4}{a^3} - \ldots,$$

que constituye ya algo infinitamente pequeño y que pertenecería al segundo orden.

Ahora bien, cuando se da también por supuesto que *pr* se transforma por completo en *ab*, el círculo infinitamente pequeño de radio *pn* se reduce al punto *a*, mientras que el anillo infinitamente angosto de ancho *mr* se convierte en la sola periferia del círculo de radio *ab*. A partir de esto parecería justificada la conclusión de que el punto central *a* de cualquier círculo de radio *ab* es de la misma magnitud que la circunferencia de ese círculo.

La falacia en este argumento se debe principalmente a la introducción de lo infinitamente pequeño. A causa de ello, el lector se ve conducido a una línea de argumentación que le hace pasar por alto, sin muchas dificultades, los absurdos que subyacen a afirmaciones como la de que, cuando nuestra atención se dirige de *p* a *a* y ya no existe un radio *pn*, el punto *a persiste* aún como centro del último círculo de radio *pn*. O bien la de que al cancelar el círculo de radio más pequeño *pm* del círculo con el radio mayor *pr*, el anillo resultante "en última instancia" —cuando ambos círculos se hacen iguales— se convierte en la circunferencia del círculo que antes habíamos identificado como el más grande.

Lo que ocurre aquí es, por supuesto, que cuando se habla de cantidades infinitamente pequeñas, se está acostumbrado a considerar a dos cualesquiera de ellas ora como iguales, ora como difiriendo entre sí en una cantidad infinitamente pequeña de orden superior, ora a identificarlas con el cero. Pero si es nuestra intención proceder de conformidad con la lógica, lo único que podemos inferir a partir de la ecuación

$$\pi\cdot pn^2 = \pi\cdot pr^2 - \pi\cdot pm^2$$

que simplemente compara las áreas de superficie de los círculos en cuestión y ha sido obtenida de manera irreprochable, es que si *pr* y *pm* son iguales, el círculo de radio *pn* no posee ninguna magnitud, por lo que no puede, en forma alguna, considerarse que exista.

Naturalmente, es verdad (y yo mismo he establecido en §41 las premisas que conducen a esta conclusión) que existen círculos que incluyen su propia periferia y otros que la excluyen, pero esto no produce modificación alguna en la magnitud de los mismos, que es algo que depende exclusivamente de la magnitud de su radio.

Y aquí podría ocurrir también que alguien considerara, apoyándose en todo esto, la posibilidad de ofrecer una prueba de la proposición de Galileo partiendo de la exigencia, a todas luces lícita, de que el círculo de radio *pm* deba excluir su periferia, mientras que el círculo de radio *pr* deba incluirla. En tal caso, la cancelación del círculo de radio *pm* del círculo de radio *pr* cuando se pasa de *pr* a *ab* haría que, en realidad, nos quedáramos únicamente con la circunferencia del cuadrante. Pero aun así, no se podría hablar de ningún círculo con centro en *a* que se hubiera reducido a un solo punto, ni mucho menos podría apelarse a la ecuación arriba citada para concluir que el punto *a* y la circunferencia mencionada son iguales: la ecuación se refiere exclusivamente a las magnitudes de los tres círculos, independientemente de que sus periferias sean incluidas o no.

§47

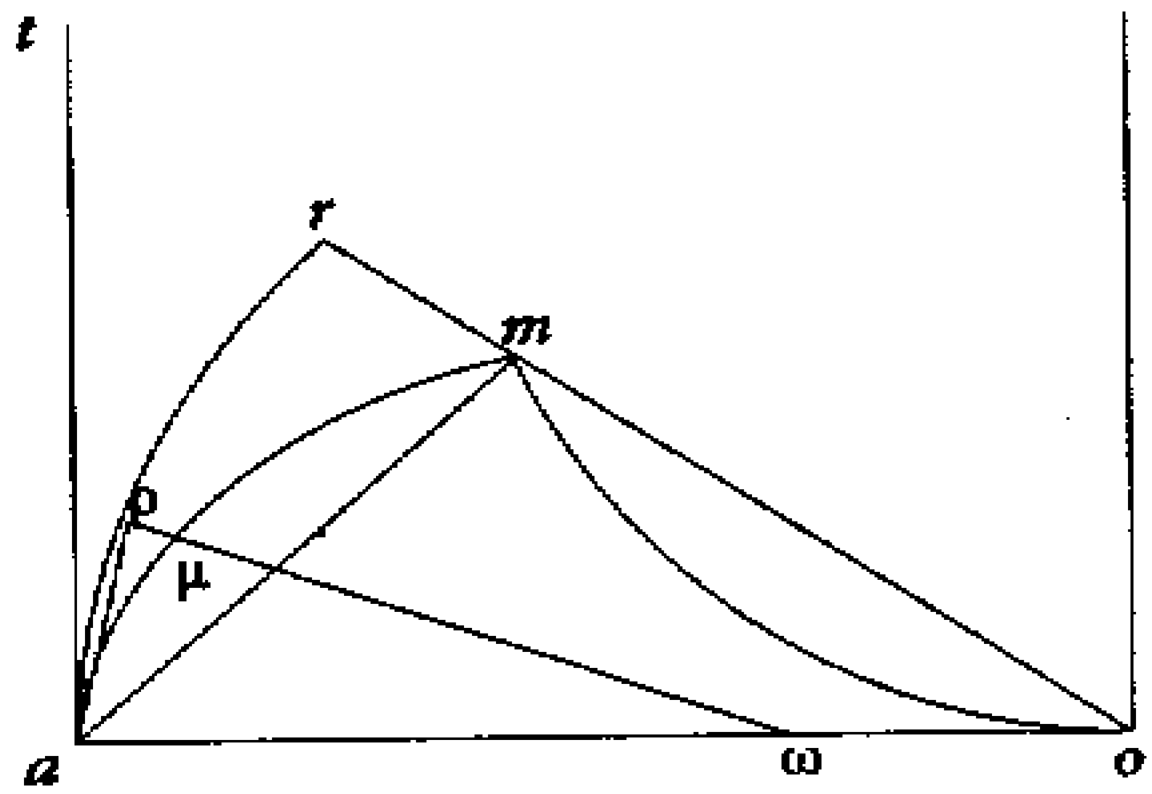
Como ya se dijo, el ejemplo anterior no fue expuesto por su inventor como una verdad para ser admirada. Lo que en cambio sí se presenta con el formato de teorema es que el cicloide común posee, en el punto en el que alcanza a su línea base, una curvatura infinitamente grande o, equivalentemente, un radio de curvatura infinitamente pequeño, encontrándose aquí en una dirección perpendicular a esa línea. Esto es enteramente cierto si se entiende en el sentido de que el radio de curvatura decrece al infinito, mientras que el arco cicloidal se aproxima infinitamente a la línea base y su dirección es perpendicular al punto mismo de entrada.

Lo que se ha dicho acerca del radio de curvatura infinitamente pequeño o que tiende a cero es, expresado de manera correcta, sólo esto: la curva que, como es bien sabido, se extiende sobre su base hacia el infinito en ambas direccciones (y que, por lo tanto, carece de puntos terminales) tienen también en este punto dos porciones de arco que se encuentran. Esto ocurre, además, de tal manera que siendo, las dos perpendiculares a la base forman una *punta* en la que ambas mantienen la misma dirección. O expresado en términos más usuales, aunque no del todo correctos: en la que forman un *ángulo* cero entre sí.

Por otra parte, es posible convencerse, gracias a nuestros cálculos, que todo esto tiene lugar exactamente de la manera que hemos dicho, sin que se comprenda cabalmente cómo es que ello ocurre ni, en general, cómo puede ser posible. Para entender mejor la situación que aquí se nos presenta —y ésta es, en efecto, la única manera en la que la paradoja puede resolverse— es necesario conocer las razones por las cuales la dirección en la que asciende el cicloide común debe ser perpendicular a la línea de la base.

La cicloide se construye entonces como sigue: en un punto cualquiera *o* de la base trácese un círculo de radio igual al del círculo generador y tangente a la base. Separando ahora del mismo un arco *om* de longitud igual a la distancia de *o* al origen *a*, obténgase *m* como un punto de la cicloide. De aquí se sigue de inmediato que el ángulo *mao* se aproxima a un ángulo recto en la medida en la que el punto *o* se aproxime a *a*. La razón es que el ángulo *moa*, medido por la mitad del arco *om*, decrece continuamente, mientras que en el triángulo *moa*, los lados *oa* y *om* se aproximan cada vez más a una relación de igualdad, por lo que los ángulos adyacentes al tercer lado *am* se diferencian cada vez menos de un ángulo recto. Esto se pone muy claramente de manifiesto cuando realmente se efectúa el cálculo.

Otras consecuencias de lo anterior son las siguientes: el arco cicloidal *am* se encuentra completamente del mismo lado que la cuerda *am*; esto es, entre ésta y la perpendicular *at* eregida en *a*. Por lo tanto, esta perpendicular señala la dirección de la curva en el punto *a*. Si describimos ahora un arco circular, con *o* como centro y *a* como punto de partida, resultará evidente que este



arco corta la cuerda *om* externamente en un punto *r* de su prolongación, puesto que *or* = *oa* > *om*. Si μ es un punto cualquiera de la curva más cercano a *a*, existe otro punto *w* todavía más cercano a *a* que *o* en *ao*, de tal manera que para la cuerda ω μ es válido lo que se había afirmado de la cuerda *om*, a saber: que un arco circular con ω como centro y ω*a* como radio corta ωμ en algún punto ρ. Como ω*a*<*oa*, el arco circular *a*ρ se encuentra dentro del arco circular *ar* y, por lo tanto, entre el arco cicloidal *a*μ y el arco circular *ar*.

Vemos así que no importa qué tan pequeño sea el radio *oa* de un arco circular *ar* que toque el cicloide *am* en *a*, existe siempre otro arco circular *a*ρ que se aproxima más a éste en la vecindad dicha. En otras palabras: no existe un círculo, no importa qué tan pequeño se tome, que pueda considerarse como medida de la curvatura (si es que hay, en absoluto, alguna curvatura) que se presenta en *a*. En realidad, no puede hablarse aquí de ninguna curvatura: lo que ocurre es que la curva —que no termina en este punto— tiene, como ya sabíamos, una punta.

§48

Con frecuencia se ha tenido también por paradójico: i) que muchas extensiones espaciales que se *expanden en el espacio infinito* (esto es, que incluyen puntos cuya separación entre sí excede cualquier distancia dada) tienen, no obstante, una magnitud finita; ii) que otras que *se limitan a un espacio completamente finito* (esto es, cuyos puntos se encuentran dispuestos de tal manera que la distancia entre dos de ellos no excede una cierta cantidad) poseen, sin embargo, una magnitud infinita; iii) que muchas extensiones espaciales conservan una magnitud finita a pesar de ***girar un número infinito de veces en torno a un punto fijo***.

1. Es necesario distinguir aquí si la extensión espacial de la que hemos estado hablando ha de ser un todo que consiste de ***partes separadas*** (como una hipérbola provista de cuatro ramas [sic]), o bien un ***todo completamente conectado*** (un todo extendido que no contiene ninguna parte extendida en relación a la cual no exista por lo menos ***un punto*** que, sumado a las partes restantes, no dé lugar a otra extensión espacial).

Nadie que piense que una serie infinita de cantidades geométricamente decrecientes representa simplemente una suma finita verá con sorpresa el hecho de que una extensión conformada por partes separadas pueda expanderse en un espacio infinito, sin que esto signifique que deba tener una magnitud infinita. Por supuesto, en este sentido, también una línea puede extenderse al infinito manteniendo al mismo tiempo su carácter finito —como ocurre, por ejemplo, cuando, a partir de un punto a y una dirección aR dados, marcamos un segmento rectilíneo ab, procediendo después a marcar, en intervalos de longitud constante, una secuencia infinita de segmentos rectilíneos, cada uno de los cuales tiene la mitad de la longitud del segmento anterior y que da inicio con cd (la mitad de ab).

Sin embargo, si hablamos ***exclusivamente*** (como haremos con frecuencia en lo que sigue) de aquellas extensiones espaciales que se presentan ante nosotros como un ***todo conectado***, es claro que entre las ***extensiones del tipo inferior***; es decir, entre las líneas, no podrá encontrarse una sola que se extienda al infinito y no tenga, al mismo tiempo, una ***magnitud*** (***i.e.*** una ***longitud***) ***infinita***.

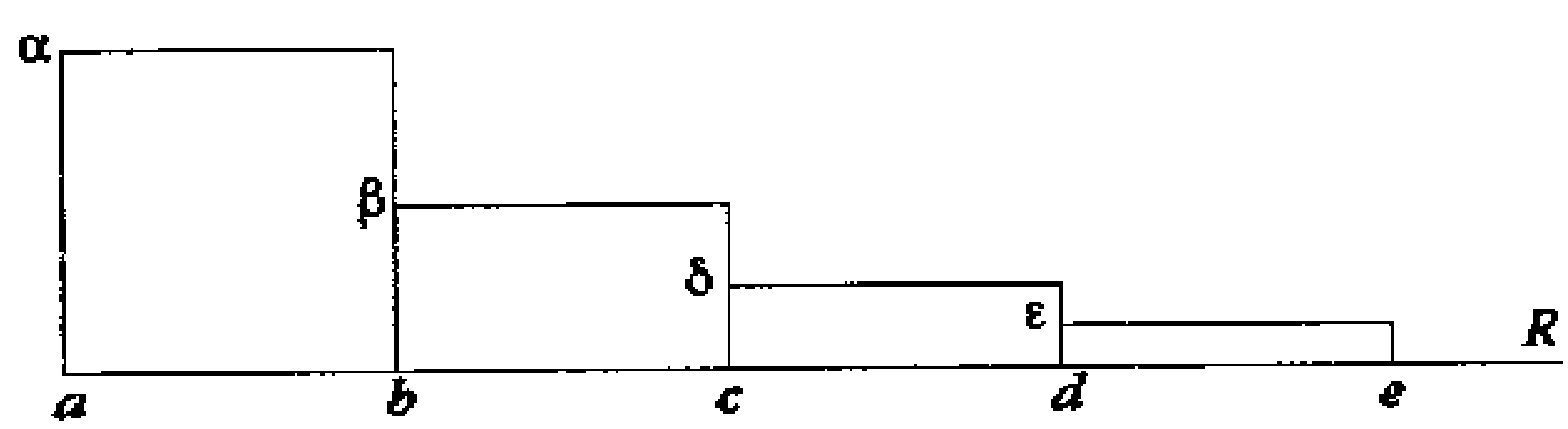
Esto es una consecuencia necesaria de la conocida verdad de que la más corta de las líneas completamente conectadas que puede unir a dos puntos es precisamente la recta entre ellos*.

* En virtud de su brevedad, me permito intercalar en este lugar la demostración de esta verdad. Si la línea $amonb$ no es recta, debe existir en ella un punto o externo a la recta ab. Si trazamos ahora la perpendicular $o\omega$ de o hacia ab, las desigualdades

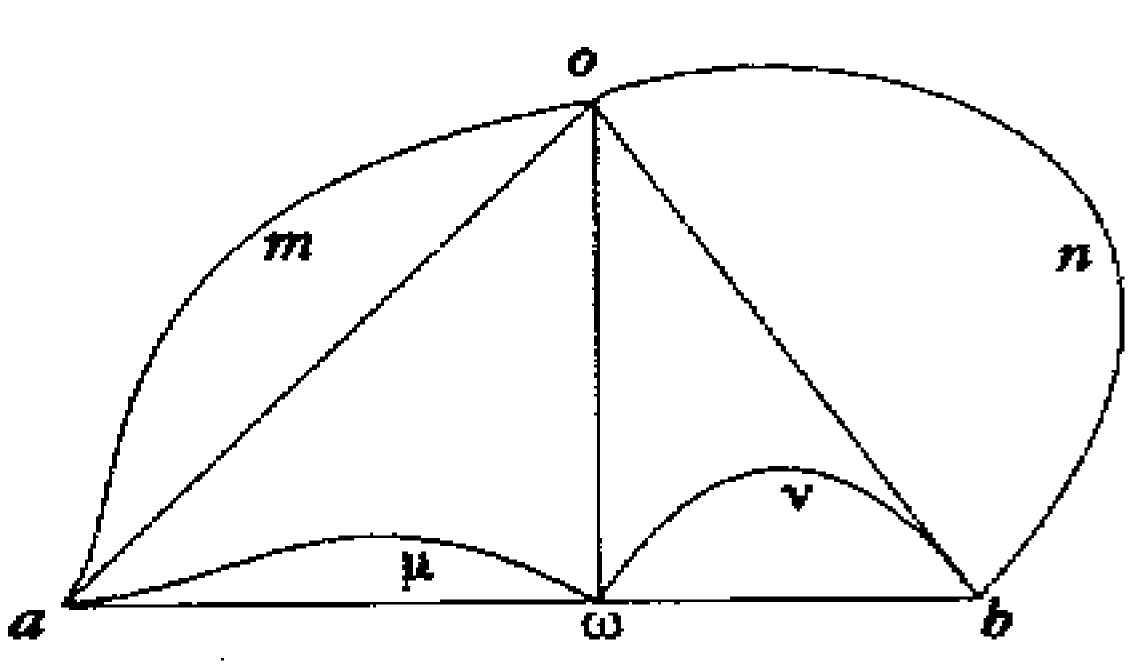
$$a\omega < ao, \quad b\omega < bo$$

El comportamiento de las *superficies* y los *cuerpos* es a este respecto enteramente distinto al de las líneas. En una superficie, el área puede reducirse arbitrariamente, manteniendo constante la longitud y disminuyendo el ancho. En el caso de los cuerpos o superficies espaciales, el volumen puede reducirse tanto como se quiera, a pesar de conservarse constantes tanto longitud como ancho, al reducirse la altura. Se entiende entonces por qué la magnitud de algunas superficies que poseen una longitud infinita, y la de algunos cuerpos cuya longitud y anchura tienen esta característica puede ser, no obstante, finita.

Un ejemplo que le resultará claro aun al más inexperto de nuestros lectores es el siguiente. Tomemos una línea recta que va del punto *a* hacia el infinito en la dirección *a*R. Señálense ahora en esta línea los segmentos: $ab = bc = cd = de =$ etc., al infinito; todos ellos de longitud 1.



deben resultar válidas. Sin embargo, como todos los sistemas de dos puntos dan lugar a figuras similares, hay, entre los puntos *a* y ω, una curva $a\mu\omega$ similar a la porción *amo* de la curva original *amonb*. Análogamente, los puntos ω y *b* se encuentran unidos por una curva $\omega\nu b$ similar a la porción *onb* de la curva original. Pero esta semejanza requiere también que la razón de la longitud de la recta $a\omega$ y la longitud $a\mu\omega$ sea igual a la razón de la longitud de la cuerda *ao* y la longitud de la curva *amo*. Asimismo, que la razón de la longitud de la cuerda ωb y la curva ωnb sea igual a la de la longitud de la cuerda *ab* y la de la curva *onb*. Como, además, $a\omega < ao$, obtenemos también que $a\mu\omega < amo$. Por otra parte, tenemos igualmente que $b\nu\omega < bno$, puesto que $b\omega < bo$. De ello se sigue que el todo $a\mu\omega\nu b$ es menor que el todo *amonb*. En consecuencia, la curva *amonb* no es la más corta entre *a* y *b*: $a\mu\omega\nu b$ es aún más corta.



Constrúyanse después: sobre el primer segmento *ab* el cuadrado *bα*; sobre el segundo segmento *bc*, el rectángulo *cβ*, que solamente tiene la mitad de la altura *bc*, etc.. Esta construcción puede continuarse indefinidamente sobre cada rectángulo, añadiendo rectángulos que tienen, en cada caso, la mitad de la altura del rectángulo predecesor.

No es muy difícil percatarse de que la superficie conectada que toma forma ante los ojos del lector no excede 2 en área. Y resulta igualmente fácil imaginar un cubo con lado igual a 1, subordinándolo mentalmente a un segundo cuerpo cuya área base es un cuadrado de lado 2; es decir, un cuadrado cuatro veces mayor que la superficie del área base del cubo original, pero cuya altura alcanza apenas $\frac{1}{8}$ de éste. Subordinemos ahora, análogamente, a este cuerpo un tercero cuya área base sea nuevamente un cuadrado cuatro veces mayor que el anterior, pero cuya altura resulte tan sólo un octavo del cuerpo predecesor. Este procedimiento puede ser claramente continuado al infinito. Es fácil ver que la longitud y la anchura de los cuerpos de esta secuencia se incrementa al infinito, mientras que su volumen decrece constantemente a la mitad, por lo que, a pesar de su base infinita, el volumen de este todo piramidal no excede 2.

2. Entre el primero y el segundo de nuestros tres casos existe una cierta contraposición. El primero de estos casos, el de una extensión infinita en cuanto a magnitud, puede presentarse en relación a *superficies* y a *regiones espaciales*, pero nunca en relación a curvas. Por su parte, el segundo, el de una extensión infinita en magnitud pero limitada a un espacio finito, puede ocurrir en relación a *curvas* y *superficies*, pero nunca en relación a regiones espaciales.

Una región espacial en la que no hay puntos cuyas distancias excedan cualquier magnitud dada no puede ciertamente tener un volumen infinito. Esta es la conclusión que puede extraerse de la conocida verdad de que una esfera de diámetro *E* es precisamente el mayor en el conjunto de los cuerpos con puntos que no exceden una cierta distancia fija *E*. La esfera contiene todos los puntos en cuestión posibles y tiene un volumen igual a $\frac{\pi}{6} \cdot E^3$.

Por el contrario, la cantidad de *líneas* que pueden estar contenidas en el espacio de una superficie arbitrariamente pequeña (por ejemplo, en un pie cuadrado) es infinita. Es posible, en efecto, asignar a cada una de ellas una cierta cantidad finita (digamos la longitud de *un pie*), pudiéndose después unir para formar una línea conectada total cuya longitud será, de cierto, infinita.

Exactamente lo mismo puede decirse de un *volumen* arbitrariamente pequeño (por ejemplo, de un pie cúbico): es posible trazar una cantidad infinita de superficies en él, cada una de las cuales tendría —si es esto lo que se desea— un pie cuadrado. Se obtiene entonces, al unir sus orillas, una superficie compuesta total cuya área es, ciertamente, infinita.

Nadie que tenga presente que la unidad de medida para líneas, áreas y volúmenes es, en cada uno de estos tres casos, distinta, y que tampoco haya olvidado que, aunque el conjunto de los puntos en una línea arbitraria es infinito, en una superficie es infinitamente mayor, siendo infinitamente más grande aún en un sólido que en una superficie, encontrará algo sorprendente en las afirmaciones anteriores.

3. La tercera de las paradojas mencionadas al principio de este apartado nos dice que existen extensiones que giran en torno de un cierto punto, conservando, no obstante, una magnitud finita.

De acuerdo con lo formulado en 1, una extensión de este tipo es de *una dimensión* (o *lineal*), si se encuentra en su totalidad en una región espacial limitada. Una vez que esta condición ha sido satisfecha desaparece lo enigmático en la circunstancia de que la extensión conserve su carácter finito, a pesar de girar infinitamente en torno de un punto fijo dado, con tal de que esas circunvoluciones sean de índole finita al inicio y decrezcan apropiadamente al infinito.

Esta última exigencia puede ser satisfecha debido a la circunstancia de que tales circunvoluciones tienen lugar precisamente alrededor de un punto. Esto hace posible que las distancias que existen entre los puntos individuales de las circunvoluciones y el centro, y, por lo tanto, entre los puntos entre sí, decrezca indefinidamente. (El círculo mismo nos muestra que la longitud de una circunvolución puede también disminuir al infinito).

La *espiral logarítimica* o mejor: un arco de ella que procede de un punto fijo hacia el centro (polo), aunque sin caer nunca en él, es un ejemplo claro de una línea del tipo que aquí se ha estado discutiendo.

Sin embargo, si la extensión espacial que gira al infinito en torno de un punto fijo es una *superficie* o un *volumen* — y no una línea— es posible prescindir por completo de la restricción a una región espacial finita. El sencillo ejemplo que a continuacióin ofrezco aclarará al lector lo que quiero decir.

Piénsese en la espiral mencionada como en una especie de eje de abcisas, de cada uno de cuyos puntos salen ordenadas perpendiculares al plano de la espiral. Entonces, evidentemente, el agregado de todas estas ordenadas constituye una superficie de tipo cilíndrico que se aproxima al centro en la dirección interna (centrípeta), pero sin alcanzarlo jamás, alejándose al infinito en su dirección externa (centrífuga). El tamaño de esta superficie depende de la ley según la cual las ordenadas se incrementan o decrecen. Ahora bien, la porción que se dirige hacia el centro será, en todo momento, finita, si no permitimos que las ordenadas en esta dirección (es decir, sobre la rama del eje de las abcisas) se incrementen al infinito —puesto que toda superficie en la que ni la abcisa ni las ordenadas se incrementan al infinito es siempre finita. Pero la porción de la superficie que se encuentra sobre la rama que se expande mantendrá también el carácter finito de su área si ocurre que el decremento de las ordenadas es mayor que el incremento de las abcisas (o sea, que la longitud de arco de la espiral).

Elíjase entonces (en aras de la determinación), como eje de abcisas, la *espiral natural*, donde la rama centrípeta medida desde el final del vector de radio 1 tendrá longitud $\sqrt{2}$. Para delimitar la superficie tomemos, además, el arco adaptado de una hipérbola de tipo superior con la ecuación $yx^2 = a^3$.

Antes de adaptarlo, observamos que el área que se encuentra entre esta hipérbola y el eje de las x es igual a a^2 para aquella porción en la que $x \geq a$, pero que se incrementa al infinito cuando x decrece hacia cero.

Consideremos ahora una a particular, $a > \sqrt{2}$ y coloquemos el punto final de la abcisa $x = a, y = 0$ en el punto de la espiral que tienen radio 1. Tenemos entonces que su centro coincide con el punto terminal de la abcisa $x = a - \sqrt{2}$, teniendo, en consecuencia, una ordenada finita. Por lo tanto, el área cuasi-cilíndrica que se encuentra sobre la rama centrípeta de la espiral no es mayor que

$$a^3\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{x}\right)=a^2-\frac{a^3}{a-\sqrt{2}}=-\left(\frac{a^3}{a-\sqrt{2}}-a^2\right),$$

y el área que cubre ambos lados de la espiral (y para la obtención de la cual debemos sumar ambas cantidades) es igual a

$$=a^2+\left(\frac{a^3}{a-\sqrt{2}}-a^2\right)=\frac{a^3}{a-\sqrt{2}};$$

Esto es, cuando a tiene, *v.gr.* el valor particular 2, la superficie total tiene un área de solamente $4\,(2+\sqrt{2})$.

La situación es similar para las extensiones sólidas. En este caso, tan sólo es necesario cuidar que la porción del sólido que se dirige hacia el centro penetre —si se quiere que su extensión se incremente en lo ancho y en lo denso— en el espacio de sus propias circunvoluciones límites (a la derecha y a la izquierda). Si deseamos evitar esto y tener un sólido cuyas partes se encuentren en su totalidad separadas; esto es, un sólido libre de autopenetración, una manera de lograrlo es añadir a una superficie del tipo de la que se acaba de considerar (una superficie que al aproximarse al centro aumenta constantemente su anchura) una tercera dimensión: una densidad. Ésta debe ser tal que se mantenga constantemente menor a la mitad de la distancia existente entre dos circunvoluciones vecinas de la espiral.

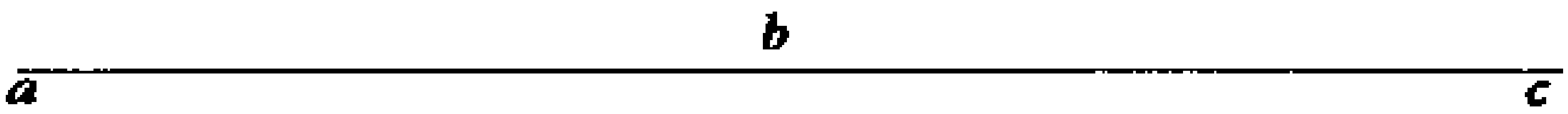
§49

Las extensiones espaciales de magnitud infinita mantienen entre sí, precisamente en lo que respecta a la magnitud, relaciones tan variadas, y con frecuencia tan paradójicas, que resulta necesario examinar con detenimiento por lo menos algunas de ellas.

Nuestras reflexiones anteriores nos permiten considerar como suficientemente aclaradas cuestiones como la de que un objeto espacial que contiene un conjunto infinito de puntos no es necesariamente un continuo; que la determinación de la magnitud de una extensión continua no es lo mismo que la determinación de su conjunto de puntos; que podemos considerar como iguales en cuanto a magnitud a dos extensiones de las cuales una contiene un conjunto infinito más de puntos que la otra; que una superficie o sólido puede contener un número infinito mayor de líneas o superficies que otra superficie o sólido, siendo ambos, no obstante, iguales en cuanto a magnitud.

1. La primera cosa hacia la que queremos llamar la atención del lector es la siguiente: el conjunto de los puntos que contiene una sola recta arbitrariamente pequeña *az* es un conjunto que ha de considerarse infinitamente mayor que el conjunto de puntos obtenidos del primero al tomar, en primer término, el punto terminal *a*, y tomando después, a una distancia adecuada en la dirección de *z*, el punto *b*; siguiendo después, a una distancia todavía más pequeña, con *c*, etc., haciendo esto de manera tal que la suma infinita de las distancias *ab, bc, cd*,... en la que *az* puede analizarse, ha de resultar menor o igual a *az*. Ahora bien, con cada una de las infinitas líneas *ab, bc, cd*,... puede procederse análogamente demostrando que en cada una de ellas se encuentra contenido un conjunto infinito de puntos que también se encuentran en *az*. En consecuencia, en *az* debe estar contenido infinitas veces un conjunto infinito de puntos.

2. Cualesquiera dos rectas iguales y, en general, cualesquiera dos extensiones espaciales similares e iguales (es decir, coincidiendo en todas sus características *expresables conceptualmente*, por comparación, con una distancia fija dada) deben tener el mismo conjunto de puntos, con tal de que se considere que el tipo de *acotación* en ambos es el mismo —por ejemplo, que en ambas líneas se incluya o se excluya a los puntos terminales. En realidad, lo opuesto podría ocurrir solamente si hubiera, distancias que siendo iguales, tuvieran, no obstante, conjuntos distintos de puntos entre los dos puntos cuya distancia representan. Pero esto contradice la idea que de inmediato se asocia con la expresión "geométricamente igual", pues decimos que dos distancias



ac y *ab* son distintas, que $ac > ab$, únicamente si, en el caso de que *b* y *c* se encuentren en la misma dirección, el punto *b* se localiza entre *a* y *c*, por lo que todos los puntos entre *a* y *b* se encuentran también entre *a* y *c*, sin que, no obstante, ocurra que, conversamente, todos los puntos entre *a* y *c* estén entre *a* y *b*.

3. Sea E el conjunto de los puntos entre *a* y *b* más los puntos *a* y *b* mismos. Considérese que la línea recta *ab* es una unidad de medida con base en la cual el conjunto de los puntos en la recta *ac* tiene como longitud el entero n. Entonces, el conjunto de los puntos en *ac* que incluye a los puntos terminales *a* y *c* será igual a $nE - (n - 1)$.

4. El conjunto de los puntos en la superficie de un *cuadrado* de lado igual a 1 (la unidad de área usual) es igual a E^2, si se incluye su periferia.

5. El conjunto de los puntos en la superficie de un *rectángulo* de lados de longitud m y n es igual a

$$m\, n\, E^2 - [n\,(m-1) + m\,(n-1)]\, E + (m-1)\,(n-1),$$

si se incluye su periferia.

6. El conjunto de los puntos en el volumen de un cubo de lado 1 (la unidad de volumen usual) que incluye a los puntos de la periferia es igual a E^3.

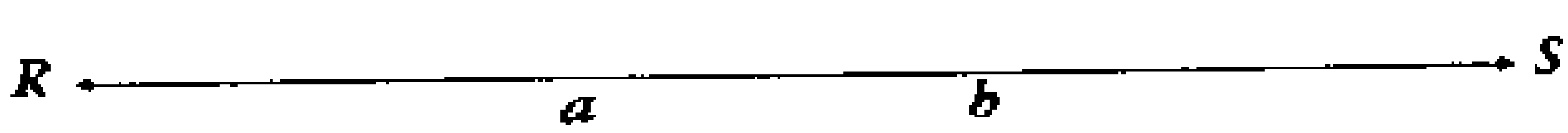
7. El conjunto de los puntos en un paralelepípedo de lados m, n y r que incluye a la periferia es

$$\begin{gathered} m\, n\, r\, E^3 - [n\, r\,(m-1) + m\, r\,(n-1) + m\, n\,(r-1)]\, E^2 \\ + [m\,(n-1)\,(r-1) + n\,(m-1)\,(r-1) \\ + r\,(m-1)\,(n-1)]\, E - (m-1)\,(n-1)\,(r-1). \end{gathered}$$

8. A una línea recta infinita en ambas direcciones debemos atribuirle una longitud infinita y un conjunto de puntos infinitamente mayor que el conjunto de los puntos en la recta E tomada como unidad de medida. Además, tenemos que atribuir a todas las líneas rectas de este tipo la misma longitud y el *mismo*

conjunto de puntos: La razón para ello es que, al encontrarse determinadas por dos pares de puntos equidistantes, dos líneas rectas de ese tipo que especifican pares de puntos representan no sólo dos figuras similares, sino también dos figuras geométricamente iguales.

9. La *posición* de cualquier punto en una recta de ese tipo es exactamente similar a ambas partes de ella, representando únicamente las mismas propiedades expresables conceptualmente que las que ofrecería la posición de cualquier otro punto de esta índole. No se puede afirmar, sin embargo, que un punto así divida la línea en dos porciones de la misma longitud. Pues en efecto, si fuera posible decir eso de un cierto punto a, se podría justificar también, con un argumento similar, que lo mismo ocurra con otro punto b, lo que es imposible, pues si $aR = aS$, como $bR = ba + aR$ y $bS = aS - ab$, tendríamos también que $bR \neq bS$.



Más bien, lo que tenemos que afirmar es que una recta no limitada en ninguna de sus direcciones no posee un *punto medio* en absoluto; esto es, no tiene un punto determinable solamente por su relación conceptual expresable con esta línea.

10. Debemos atribuir a la superficie plana comprendida entre dos líneas paralelas no limitadas (esto es, al agregado de todos los puntos contenidos en perpendiculares trazadas de una paralela a otra) un área *infinitamente* grande y un conjunto de puntos infinitamente más grande que el conjunto de puntos en la unidad de área E^2. Por lo demás, debemos asignar la misma área y el mismo conjunto de puntos a todas las bandas paralelas que tengan el mismo ancho (o longitud perpendicular). Porque también en este caso podemos disponer de elementos de determinación que no sólo son similares entre sí, sino también geométricamente iguales. Por ejemplo, dos triángulos isósceles con ángulos rectos, iguales en uno de los catetos y la hipotenusa, en relación a los cuales estipulamos que una de esas paralelas ha de pasar a lo largo de uno de los lados y la otra por el vértice.

11. La posición de una interperpendicular cualquiera en una banda paralela del tipo anterior es exactamente similar con respecto a ambas partes de la superficie, no ofreciendo tampoco ninguna otra propiedad expresable conceptualmente que la posición de alguna otra perpendicular no pueda también expresar.

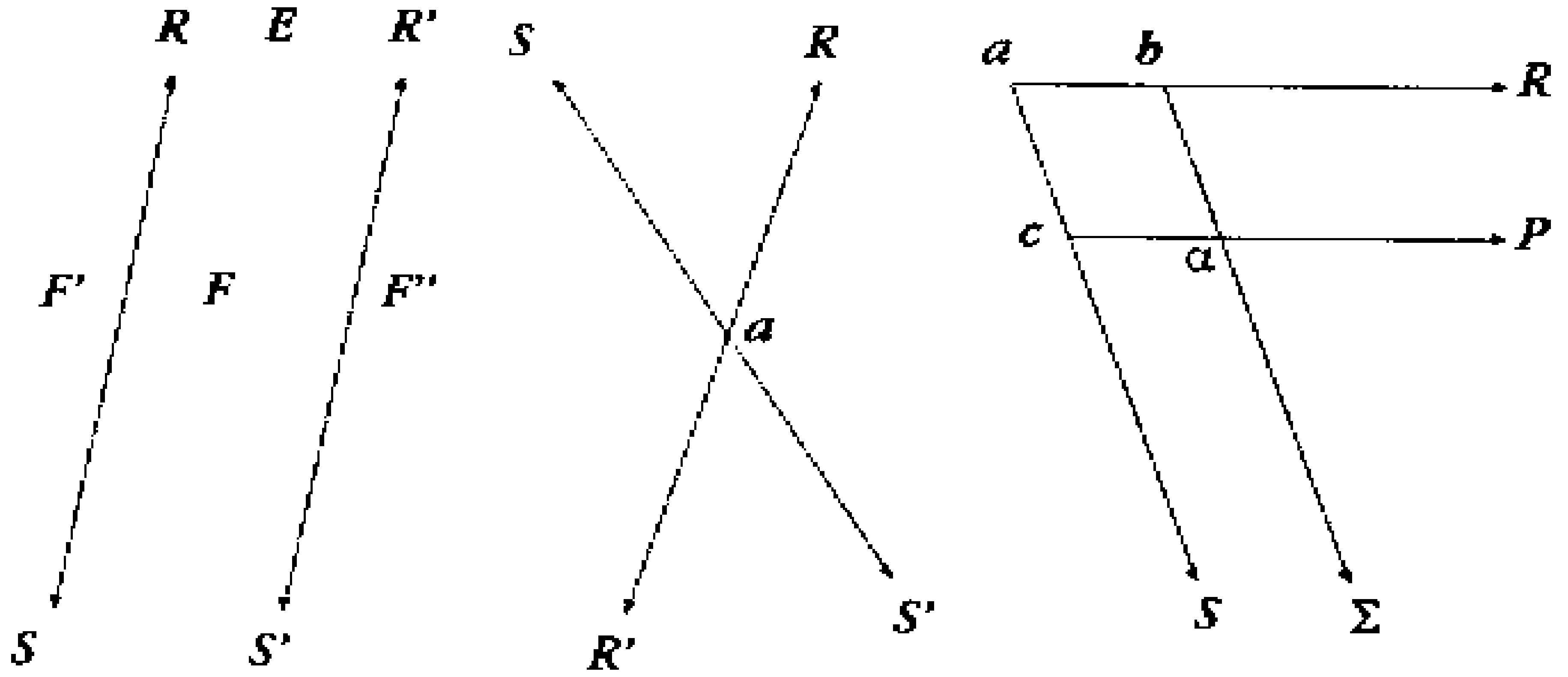
No puede afirmarse, sin embargo, que la interperpendicular divida la superficie en *dos porciones geométricamente iguales*. Una suposición de este género nos conduciría a contradicciones similares a las que ya hemos encontrado en el punto 9, siendo, por lo tanto, falsa.

12. A un plano que se extiende en todas las direcciones hacia el infinito debemos atribuirle un área infinitamente grande, lo mismo que un conjunto de puntos que es infinitamente mayor que el conjunto de puntos que se encuentra en una banda paralela. Pero así como a todas las bandas paralelas del mismo ancho les hemos asignado el mismo conjunto de puntos, debemos atribuir igualmente el mismo conjunto de puntos a todos los planos no limitados. Porque también para ellos es válida la afirmación de que pueden ser determinados por figuras no sólo similares, sino geométricamente iguales (por ejemplo, cuando determinamos cada uno de ellos por medio de tres puntos que forman un triángulo de una cierta forma y un cierto tamaño).

13. La posición, en un plano no acotado de este tipo, de una línea recta no limitada cualquiera es exactamente similar a ambos lados del plano, presentando, por lo demás, las mismas características conceptualmente expresables que la de la posición de cualquier otra línea del mismo tipo.

Sin embargo, no es lícito decir que una línea recta de este género divide el plano en dos porciones *geométricamente iguales*. Porque si puede afirmarse esto de una cierta línea recta *RS*, debemos poder admitirlo también en relación a cualquiera otra *R'S'*, algo que evidentemente nos conduce a un absurdo tan pronto consideramos dos líneas paralelas entre sí.

14. Dos líneas rectas no acotadas que se encuentran en el mismo plano y no son paralelas, que, en consecuencia, se intersectan formando cuatro ángulos, iguales dos a dos, dividen toda el área del plano no limitado en cuatro partes, de las que dos tienen el mismo ángulo que las otras dos: RaS=R'aS', RaS'=R'aS,



siendo asimismo similares. Cada uno de estos cuatro *espacios angulares* contiene un conjunto infinito de ***bandas paralelas***, como las mencionadas en el punto 11, que se extiende en una de las direcciones hasta el infinito teniendo todas ellas una sola, pero arbitraria, anchura. Una vez que hemos prescindido mentalmente de cualquier número finito de estas bandas, queda un espacio angular contenido en el *mismo ángulo*, tal y como ocurría al principio.

Ahora bien, así como en los puntos 9 y 11 la identificación de los brazos de estos ángulos o la de las bandas paralelas —que demostramos que eran parte de su superficie— no resultaba algo que pudiera justificarse, tampoco lo es ahora, por razones análogas a las ofrecidas entonces, la identificación de estos espacios angulares infinitos, ni siquiera cuando sus ángulos verticales son iguales. Es obvio, que de las dos superficies angulares infinitas RaS y $P\alpha\Sigma$ la primera es la mayor, aunque para $\beta\Sigma$, paralela a aS y cP paralela a R sus ángulos sean iguales.

15. Debemos considerar como infinitamente grande al espacio sólido incluido entre dos planos paralelos no acotados (es decir, al agregado de todos aquellos puntos que se encuentran contenidos en las perpendiculares trazadas de un plano paralelo a otro), independientemente de la densidad (o longitud de la interperpendicular) de eso que podría llamarse también *capa sólida*. Dadas dos de estas capas con igual densidad, debemos considerar sus magnitudes, al igual que los conjuntos de puntos contenidos en ellas, como iguales. El argumento que justificaría esto es el mismo que ya se ha presentado en repetidas ocasiones en lo que antecede (*cfr.* los puntos 8, 10, 12).

16. La posición de toda banda perpendicular paralela que también sea plana y que no se encuentre dentro de una *capa sólida* no acotada está localizada de manera exactamente similar en relación a las partes de la capa a ambos lados de sí misma, siendo también ésta la localización de cualquier otra banda paralela en relación a esta capa o a cualquier otra capa similar. No podemos decir, sin embargo, que las dos porciones en las que la banda paralela divide la capa son necesariamente de la misma magnitud.

17. Dos planos no acotados que se *intersectan* recíprocamente dividen el espacio infinito en cuatro grandes regiones, de las cuales las partes opuestas son indudablemente *similares*, pero que no deben considerarse, por esa sola razón como *iguales en cuanto a magnitud*.

18. Lo mismo puede decirse de los espacios sólidos incluidos por dos ángulos similares (o, como se acostumbra decir, iguales) entre sus lados planos prolongados al infinito y que se consideran con frecuencia como iguales en cuanto a magnitud.

19. Las dos partes en las que un solo plano infinito divide la totalidad del espacio son similares, pero *no geométricamente idénticas* (es decir, iguales en cuanto a magnitud), y mucho menos ha de considerarse que el conjunto de los puntos en el que cada uno de ellas consiste sea el mismo en ambos casos.

§50

Nos resta discutir brevemente todavía aquellas paradojas surgidas en el ámbito de la física y de la metafísica.

En relación a estas disciplinas sostengo lo siguiente:

1) No existen en el universo dos objetos exactamente iguales. Por lo tanto, tampoco existen en él dos átomos ni dos substancias simples completamente idénticas.

2) La suposición de substancias simples resulta, sin embargo, necesaria a partir de la suposición de cuerpos compuestos en el mundo.

3) Todas las substancias simples están sujetas al cambio y éste se da permanentemente en ellas.

En mi opinión, las tesis anteriores son susceptibles de una demostración tan estricta y clara como cualquier proposición matemática. Pero temo que la mayoría de los físicos moverá la cabeza al escucharlas, pretendiendo que las verdades que ellos establecen no pueden tener una base que no sea *empírica*. La experiencia no muestra, sin embargo, según ellos, que existan diferencias de algún tipo entre las partículas corpóreas más pequeñas, particularmente cuando los cuerpos en cuestión son homogéneos, por ejemplo, que haya alguna diferencia entre las partículas de oro de una u otra mina. Lo que, en su opinión, sí enseñaría la experiencia es que todo cuerpo es compuesto, aunque nadie haya percibido todavía sus átomos, que serían algo simple y, por lo tanto, carente de toda extensión. La experiencia mostraría, por último, que los distintos tipos de materia (*v.gr.* oxígeno, hidrógeno, etc.) se combinan de diferentes modos entre sí, mostrando, en consecuencia, efectos diversos. La idea de que esos tipos de materia se transforman, lo mismo que la de que, por ejemplo, el oxígeno se convierte gradualmente en otra substancia material se considera como una mera ficción.

1. En mi opinión, es equivocado creer que la experiencia enseña lo anterior. Lo único que la experiencia, la experiencia pura e inmediata o percepción (sin vínculos de ninguna índole con verdades conceptuales), nos muestra es que "tenemos" ésta o aquélla intuición o representación mental, sin decirnos nada acerca del origen de tales representaciones, sin decirnos si son causadas por un objeto distinto de nosotros. No nos informa tampoco si tienen una única causa, ni absolutamente nada acerca de las propiedades de ésta. Todo esto es tan sólo el resultado de inferencias que hacemos a partir de verdades conceptuales puras, algo que la razón añade a la experiencia. Esas inferencias tienen lugar, por lo demás, de acuerdo exclusivamente con una simple regla de la probabilidad; por ejemplo, que lo rojo que vemos en este momento se debe a un estado mórbido de nuestro ojo, pero que aquella fragancia se debe a la proximidad de una flor.

Por el contrario, para percatarse de que entre dos objetos debe existir una diferencia no es necesario inferir nada a partir de la experiencia. Una breve reflexión nos permite tener una seguridad completa al respecto. Sean, en efecto, *A* y *B dos* objetos.

Esto quiere decir que *A* y *B* son diferentes y esto presupone que existen dos representaciones mentales *A* y *B*, de la que una nos proporciona una representación de *A*, pero no de *B*, mientras que la otra nos ofrece una representación de *B*, pero no de *A*. Y ya en esta circunstancia se presenta una diferencia, una diferencia interna ciertamente, entre los objetos *A* y *B*. Puede afirmarse, entonces, que entre dos objetos cualesquiera existen necesariamente ciertas diferencias. Pero, en tal caso ¿cómo podemos pensar que se justifica dudar en relación a una diferencia de este tipo solamente porque en ocasiones no la percibimos —siendo que para que una percepción tenga lugar se precisa de una cierta agudeza sensorial, además de muchas otras circunstancias?

2. Hay algo de verdad en la afirmación de que es sólo la experiencia la que nos enseña que existen ciertos objetos que nos afectan, en especial aquellos que son *compuestos* y que fungen como transmisores de nuestras intuiciones. Pero la experiencia nos enseña esto únicamente después de haber supuesto ciertas verdades conceptuales, por ejemplo, que dos efectos distintos sólo pueden haber sido producidos por dos causas diferentes, etc. Pero no son menos ciertas las verdades conceptuales que nos dicen que toda causa debe ser algo real; que todo lo que es real debe ser una substancia o un agregado de varias substancias o propiedades de una o varias substancias; que las propiedades reales presuponen la existencia de una substancia a la que pertenecen y que los agregados de substancias no existen si no existen también substancias simples que puedan ser sus elementos.

De todo ello se sigue, con base en la lógica más estricta, la existencia de substancias simples, por lo que resulta completamente ridículo no aceptar su existencia porque no se las ve. Y se cae en un absurdo todavía mayor, por así decirlo, cuando se piensa que todo cuerpo susceptible de ser objeto de una percepción sensorial de nuestra parte debe ser algo compuesto y, más precisamente, en realidad, algo compuesto de un conjunto infinito de partes simples.

3. La falacia de pasar de la no percepción a la no existencia se repite cuando no se quiere aceptar que todas las substancias finitas se encuentran sujetas a un *cambio* permanente. Podemos, en verdad, reconocer en nuestra propia *alma* la gran diversidad

de sus estados, de sus representaciones, de sus disposiciones y de sus fuerzas. La analogía sugiere algo similar en relación a las almas de los animales y las plantas. Pero el hecho de que todas las substancias cambien, aun aquellas que lo hacen en lapsos de tiempo demasiado largos para que logremos percibir la modificación, es algo que únicamente la razón es capaz de justificar.

Quienes se opongan a esta concepción, aunque sea en la forma mínima de ponerla en duda en relación a la llamada *materia inerte* y a sus *partes simples* o *átomos*, se ven obligados a sostener que todos los cambios que se nos presentan en esta esfera de la creación —por ejemplo, cuando un trozo de hielo que era sólido hace un momento se ha derretido, evaporándose poco tiempo después— no representan, en realidad, otra cosa que simples modificaciones en la ubicación de las partículas más grandes (o más pequeñas) de estos cuerpos, no experimentando *internamente* las partículas ningún tipo de alteración.

Es sorprendente, sin embargo, que no se haya visto que esta explicación nos conduce a contradicciones. Porque, ciertamente, si en lo interno no hay modificación alguna en las substancias simples, ¿cómo es que pueden producirse cambios en su ubicación relativa (es decir, en relación a las otras substancias)? ¿Qué consecuencias podrían tener estos cambios *puramente externos*? ¿A qué propósito tendrían que servir? ¿Cómo es que podrían reconocerse como tales?

Una respuesta satisfactoria a todas estas cuestiones sólo puede ofrecerse si en estas substancias simples (específicamente en aquellas que no son perfectas) se supone una capacidad de *modificación* o *cambio* como producto de su interacción recíproca, considerando la ubicación de cada una de ellas, además, como aquella determinación que constituye el fundamento de que, teniendo precisamente tal y cual grado de fuerza en un momento determinado, provoquen al interactuar una mayor o menor modificación entre sí.

Esta hipótesis, tan clara para el sano sentido común, resulta necesaria si es que las contradicciones han de evitarse en la doctrina del universo. Su aceptación es natural cuando uno ha sido capaz de elevarse sobre algunas *tesis escolares*, por lo demás casi completamente superadas.

§51

1. La primera de estas tesis escolares que debemos abandonar es la de aquellos pioneros de la física que imaginaron que las partes simples (si existen) de la materia ***muerta*** o sencillamente ***inerte*** son siempre iguales entre sí y eternamente inmutables, no teniendo, además, ninguna fuerza propia, con la posible excepción de la inercia. Lo que es real (***wirklich***) debe ciertamente "tener efectos" (***wirken***) y, por lo tanto, deben existir ciertas ***fuerzas*** inherentes a ello para que tales efectos sean posibles.

Por supuesto, una substancia ***limitada***, sujeta, por esto mismo, al cambio, no puede poseer ninguna fuerza que no sea susceptible de alteraciones en el modo en el que sus efectos tienen lugar; en particular, no puede poseer ninguna fuerza de creación. En realidad, no puede tener otro tipo de fuerzas que las de modificación, que, por lo demás, son inmanentes, como la fuerza o capacidad de sentir (***Empfinden***), o transiente, como la fuerza o capacidad de movimiento (***Bewegkraft***).

Con el objeto de juzgar con suficiente exactitud el resultado de combinar ciertos cuerpos, permítasenos en lo que sigue proceder como antes , representando el caso de manera mucho más sencilla. Supóngase entonces un conjunto reducido de fuerzas en lugar del conjunto infinito de ellas que, de hecho, se encuentran presentes. Más aún: con el objeto de determinar el efecto que producirían, permítasenos pensar en cuerpos no-existentes, así como en propiedades ficticias de las mismos. No debemos, sin embargo, perder de vista que debemos examinar cuidadosamente si los resultados en estos casos hipotéticos obtenidos coinciden también, hasta un cierto punto, con los casos reales. La omisión de estas precauciones ha sido, como enseguida veremos, una de las causas principales de la aparición de algunas de las más célebres paradojas.

§ 52

2. Otro de estos prejuicios escolares es el de que ninguna suposición relativa a una acción inmediata de una substancia

sobre otra resulta científicamente aceptable. Lo único verdadero aquí es que no podemos suponer nunca, sin haberlo demostrado previamente, que la acción de una substancia sobre otra ocurre de manera inmediata. En realidad, la pretensión de explicar cualquier fenómeno con base en una "producción inmediata" del mismo significaría el fin de toda actividad científica. Pero, evidentemente, sería ir demasiado lejos e incurrir en otro craso error afirmar que toda acción de una substancia sobre otra ha de explicarse como algo mediato, excluyendo por completo cualquier tipo de acción directa. Pues, en efecto ¿cómo podría haber una acción mediata si no existen las acciones inmediatas?

Todo esto es bastante claro, por lo que no parece necesario detenernos más en estas consideraciones. Baste hacer notar que inclusive un pensador tan agudo y meticuloso como Leibniz se vio obligado a introducir la desafortunada hipótesis de una armonía preestablecida —deformando con ello por completo su sistema cosmológico, por lo demás estéticamente tan perfecto— por la sola razón de haber sido incapaz de descubir la manera en la que las substancias simples actúan sobre otras de la misma especie.

§ 53

3. Estrechamente ligado al anterior —y, por lo tanto, refutado al mismo tiempo que éste— se encuentra el viejo prejuicio de que no es posible que una substancia actúe (en particular, que actúe de manera inmediata) sobre otra que se encuentre alejada de ella.

En completa oposición a esta idea, afirmo más bien que toda acción de una substancia (localizada espacialmente; es decir, limitada) sobre otra es *actio in distans*, por la sencilla razón de que, dadas dos substanbcias distintas, cada una de ellas debe ocupar en todo momento un cierto lugar, por lo que es necesario que entre ellas exista siempre una distancia.

Ya he discutido anteriormente la aparente incompatibilidad entre esta afirmación y nuestra tesis de que el espacio ha de llenarse continuamente.

§ 54

4. Con ello, por supuesto, hemos entrado en conflicto con otro prejuicio de las escuelas actuales, que pretenden que toda combinación química involucra necesariamente una interpenetración de las substancias.

Por mi parte, niego categóricamente la posibilidad de tal interpenetración. Hasta donde mi entendimiento alcanza, en efecto, en el concepto mismo de un lugar (o punto) simple está contenida la idea de que se trata de un lugar en el que solamente puede encontrarse una sola substancia (simple). Siempre que existan dos átomos, existen también dos lugares. Se sigue entonces de inmediato, a partir de la definición que hemos dado de espacio, que es únicamente la distancia entre dos átomos que interactúan entre sí lo que determina la magnitud de la modificación recíproca que esos átomos experimentan en un cierto lapso de tiempo. Si dos o más substancias pudieran encontrarse en un mismo lugar en cualquier intervalo de tiempo, la magnitud de su interacción recíproca sería absolutamente indeterminable en ese lapso. Éste sería igualmente el caso aun tratándose de un solo instante: sería imposible determinar la condición de esas substancias en él.

§ 55

5. Desde la época de Descartes surge en las escuelas un nuevo prejuicio. A pesar de haber hecho énfasis incansablemente (y con la mejor de las intenciones) en la diferencia entre substancia pensante y substancia no-pensante, Descartes hace una afirmación del todo sorprendente para el sentido común, impensable para éste: que un ser espiritual no puede considerarse no sólo como algo extenso (es decir, como algo que consta de partes), sino que ni siquiera puede considerarse como algo que se localiza en el espacio, como un ente que llene con su presencia un punto singular del espacio. Más tarde, Kant afirmaria audazmente que el espacio (lo mismo que el tiempo) son meras formas de nuestra sensibilidad a las que no corresponde una cosa en sí misma. Se

opone así el mundo inteligible de lo espiritual, por una parte, con el mundo de los sentidos, por la otra. No debe entonces ser causa de admiración que el prejuicio del carácter no espacial de los seres espirituales arraigara en Alemania tan profundamente que hasta el día de hoy resulta común en las escuelas de pensamiento.

En mi Teoría de la Ciencia (*Wissenschaftslehre*) y en mi *Athanasia* he expuesto ya las razones que me obligan a combatir este prejuicio. La posición que defiendo afirma que todas las substancias deben, por una razón común, estar tanto en el tiempo como en el espacio y que toda diferencia entre ellas no es sino una diferencia de grado. En su favor puede aducirse la sencillez, que es mayor en ella que en cualquier otra opinión al respecto.

§ 56

6. Si la tesis que sostengo es aceptada, desaparece automáticamente la gran paradoja que hasta ahora ha surgido siempre que se habla de la relación entre las substancias espirituales y las substancias materiales. Ciertamente, es opinión común hasta nuestros días que la cuestión de cómo es que la materia influye en el espíritu y viceversa, siendo ambas de índole tan diversa, es uno de los secretos inescrutables a los que la investigación se enfrenta.

Nuestras concepciones nos muestran que la interacción mutua entre esos dos tipos de substancias debe ser, por lo menos parcialmente, inmediata y, en esa medida, que en realidad no son algo secreto e inaccesible para nuestra razón. Con ello no pretendo afirmar, sin embargo, que no haya muchos aspectos de esa interacción que sean dignos de conocimiento e investigación adicionales, en especial en los casos en la que son organismos los que llevan a cabo la mediación.

§ 57

7. Mientras que algunos de nuestros predecesores se imaginaban substancias carentes de todo tipo de fuerza, en nuestros

días se pretende, por el contrario, construir el universo exclusivamente con base en fuerzas carentes de substancia.

Sin lugar a dudas, ha sido el hecho de que toda substancia nos manifiesta su existencia únicamente por medio de sus efectos — y, en consecuencia, por su capacidad para producir éstos— lo que ha dado lugar a la equivocada concepción de una substancia como un simple agregado de fuerzas.

Por otra parte, la grosera imagen material a la que remite la etimología misma de las palabras substancia, substrato, sujeto, portador (de propiedades), etc. refieren, parecería demostrar claramente que la concepción dominante —según la cual la existencia de una substancia requiere, después de todo, un algo especial entre cuyas propiedades se encuentran precisamente esas fuerzas— no es otra cosa que un espejismo. La cuestión aquí es si debemos darnos por satisfechos con esta interpretación. Un algo cualquiera, aun la idea misma de nada, debe considerarse como un objeto al que corresponde no solamente una propiedad, sino un agregado completo e infinito de propiedades. Pero, entonces, ¿pensamos en un algo arbitrario como en un portador (*Träger*) en sentido estricto? Ciertamente no. Sin embargo, cuando pensamos en un algo en relación al cual se establece la restricción de que debe tratarse de un algo real, que no sea a su vez propiedad de ninguna otra cosa real, estamos subsumiendo ese algo en la noción general de substancia, apegándonos al mismo tiempo a la definición correcta de esta noción. Además, aparte de la substancia no-creada única, existe un conjunto infinito de substancias creadas.

Ahora bien, siguiendo la práctica lingüística común, llamamos fuerzas a todos los atributos de estas substancias que deben presuponerse como causa próxima o inmediata de otra cosa, independientemente de que esta otra cosa se encuentre o no dentro de la substancia activa.

Una fuerza que no se encuentra en ninguna substancia como atributo de la misma no sería una mera fuerza pues, precisamente, en tanto causa debe ser algo real, pero algo real no inherente a ninguna otra cosa real. En realidad, habría que reconocer en ella una substancia existente por derecho propio.

días se pretende, por el contrario, construir el universo exclusivamente con base en fuerzas carentes de substancia.

Sin lugar a dudas, ha sido el hecho de que toda substancia nos manifiesta su existencia únicamente por medio de sus efectos — y, en consecuencia, por su capacidad para producir éstos— lo que ha dado lugar a la equivocada concepción de una substancia como un simple agregado de fuerzas.

Por otra parte, la grosera imagen material a la que remite la etimología misma de las palabras substancia, substrato, sujeto, portador (de propiedades), etc. refieren, parecería demostrar claramente que la concepción dominante —según la cual la existencia de una substancia requiere, después de todo, un algo especial entre cuyas propiedades se encuentran precisamente esas fuerzas— no es otra cosa que un espejismo. La cuestión aquí es si debemos darnos por satisfechos con esta interpretación. Un algo cualquiera, aun la idea misma de nada, debe considerarse como un objeto al que corresponde no solamente una propiedad, sino un agregado completo e infinito de propiedades. Pero, entonces, ¿pensamos en un algo arbitrario como en un portador (*Träger*) en sentido estricto? Ciertamente no. Sin embargo, cuando pensamos en un algo en relación al cual se establece la restricción de que debe tratarse de un algo real, que no sea a su vez propiedad de ninguna otra cosa real, estamos subsumiendo ese algo en la noción general de substancia, apegándonos al mismo tiempo a la definición correcta de esta noción. Además, aparte de la substancia no-creada única, existe un conjunto infinito de substancias creadas.

Ahora bien, siguiendo la práctica lingüística común, llamamos fuerzas a todos los atributos de estas substancias que deben presuponerse como causa próxima o inmediata de otra cosa, independientemente de que esta otra cosa se encuentre o no dentro de la substancia activa.

Una fuerza que no se encuentra en ninguna substancia como atributo de la misma no sería una mera fuerza pues, precisamente, en tanto causa debe ser algo real, pero algo real no inherente a ninguna otra cosa real. En realidad, habría que reconocer en ella una substancia existente por derecho propio.

§ 58

El hecho de que no exista en la Creación Divina un grado supremo ni un grado ínfimo del ser; el hecho de que en cualquier grado (no importa qué tan elevado) y en cualquier tiempo han existido criaturas que han alcanzado ese nivel gracias a su rápido progreso; el hecho de que también, por otra parte, habrá siempre, en cualquier grado (no importa qué tan inferior sea éste), y en cualquier tiempo futuro, criaturas que, a pesar de su progreso continuo, se encuentren en ese nivel —todas estas son paradojas que no requieren de mayor justificación que la que ya hemos ofrecido al hablar (en el §38 y ss.) acerca de una situación similar respecto al espacio y al tiempo..

§ 59

Hay otra paradoja que resulta todavía más sorprendente y a la que uno se resiste en mayor medida. Sostengo lo siguiente: "Aunque el espacio infinito total del universo se encuentra lleno de substancias en todo lugar y en todo tiempo, no existiendo, ni siquiera por un solo momento, un solo punto no ocupado por alguna substancia y no existiendo tampoco un punto ocupado por dos o más substancias, puede ciertamente existir un conjunto infinito de grados diversos de densidad con el que las diferentes partes del espacio se llenarían en distintos tiempos. Este conjunto de substancias que, por ejemplo, llena este instante un pie cúbico, es capaz, en otro momento, de *expandirse* en un espacio millones de veces más grande, sin que esto signifique que haya puntos del espacio vacios; tiene igualmente la capacidad de *contraerse* en un espacio mil veces más pequeño, sin que resulte necesario que dos o más puntos coincidan".

Soy perfectamente consciente de que la mayoría de los físicos considera absurdo lo que acabo de afirmar. Creen que existe una incompatibilidad escencial entre la *densidad desigual de los cuerpos* y la hipótesis de un espacio lleno de manera continua. Todo esto los lleva, además, a las suposición de una especie de *porosidad* como propiedad general de los cuerpos —inclusive aquellos, como los gases y el éter, en relación a los cuales no hay indicio alguno de la misma. En esos poros, que en su mayor parte estarían llenos de gases; es decir, en sentido estricto, en esos poros nunca vistos de fluídos, los físicos suponen hasta el día de hoy un cierto *vacuum dispertitum*; esto es, ciertos espacios vacíos de tal números y extensión que la billonésima parte de un espacio lleno solamente de éter difícilmente podría contener materia genuina.

Como sea, tengo la esperanza de que cualquier persona que considere seriamente lo que se ha dicho en §20 y en los parágrafos siguientes le resulte claro que no es en forma alguna imposible que un conjunto (infinito) de átomos se expanda o distribuya en ciertas ocasiones en un espacio más grande (sin que esto signifique que hay un solo punto aislado en el espacio), mientras que, en otras, ese mismo conjunto se contraiga en otra región espacial más pequeña, sin que por esto tenga que haber un punto que absorba dos o más átomos.

§ 60

Y entonces no resultará demasiado sorprendente la tesis (expuesta ya en la vieja metafísica, en la teoría *de nexu cosmico*) de que toda substancia en el universo se encuentra en interacción constante con cualquier otra substancia, donde, además, la modificación que una de ellas produce en otra es inversamente proporcional a su distancia y, al mismo tiempo, el resultado total de *la influencia de todas las substancias en una substancia individual* es un cambio que —aparte de la intervención divina— tiene lugar de acuerdo con la *ley de la continuidad*. Una desviación de esta ley exigirá, en efecto, una fuerza *infinitamente grande* en comparación con cualquiera requerida por la continuidad.

§ 61

Aunque la *teoría de las substancias dominantes*, expuesta en la primera edición de mi *Athanasia* en 1829, puede derivarse con facilidad a partir de conceptos puros, muchos la encontrarán paradójica, por lo que es conveniente dedicar algunas líneas a su discusión.

En esta discusión parto de la conocida idea de que entre dos substancias cualesquiera en el universo debe existir una diferencia finita, por lo que deben existir igualmente, en todo tiempo, substancias cuyas fuerzas han alcanzado un grados de desarrollo que les permite ejercer un *dominio* sobre todas las demás, por lo menos en su vecindad inmediata.

Sería un error, que nos haría sospechar que esta suposición es contradictoria, pensar que la substancia dominante posee fuerzas que sobrepasan infinitamente las de las substancias dominadas. No es este, en forma alguna, el caso.

Supongamos, en efecto, que en un espacio de magnitud finita (por ejemplo, el interior de una esfera) se encuentra una substancia cuyas fuerzas sobrepasan *finitamente* las de las demás (en la esfera) como ocurriría si, digamos, cada una de éstas tuviera tan sólo la mitad de la fuerza de la primera. Ahora bien, aunque no puede en forma alguna dudarse que el *efecto total* de la infinidad de substancias más débiles *supere infinitamente* al de la substancia más fuerte cuando su acción converge (algo que, por ejemplo, ocurre en relación a su tendencia a aproximarse a un cuerpo central), pueden y deben existir otros casos en los que esas fuerzas más débiles no converjan. En particular, si consideramos solamente la influencia que ejerce cada una de las substancias en el espacio sobre cada una de las otras y la que, inversamente, cada una de éstas recibe de cada una de aquéllas, puede afirmarse que esta influencia recíproca es, en general, dominante en favor de la más fuerte en la misma proporción en la que su fuerza es mayor (en nuestro ejemplo, la substancia que tiene por lo menos el doble de fuerza que cualquiera de su vecindad inmediata ejercerá sobre ellas por lo menos el doble de la influencia que la que recibe de las mismas. Y, en realidad, es precisamente esto lo que pensamos cuando decimos que esa substancia *domina* a las demás).

§ 62

Sin embargo, alguien podría argumentar que si esa fuera la situación, tendría que existir una substancia dominante no sólo en ciertas regiones del espacio, sino, en general, en *toda* región del espacio —no importa qué tan pequeña sea. Más aún: en relación a un agregado cualquiera de átomos, debe existir uno que resulte dominante con respecto a los demás.

Lo anterior es válido —como espero que sea claro a mis lectores— *a lo más* para conjuntos finitos, pues en los casos en que el conjunto es infinito puede ocurrir que para todo elemento exista otro mayor (o menor), sin que, no obstante, ninguno de ellos sea mayor (o menor) que una cierta cantidad dada.

§ 63

De acuerdo con su definición, son precisamente estas substancias dominantes, que pueden aparecer en cualquier región finita del espacio solamente en un número finito y que se encuentran rodeadas sin excepción de una cubierta (*Hülle*) de substancias auxiliares, ora grande, ora pequeña, las que dan lugar, cuando se reunen en montones (*Haufen*) finitos a lo que conocemos como multitud de cuerpos del universo (gases, líquidos, sólidos, orgánicos, etc.)

En contraposición a ello, llamo éter al resto de la materia del universo que, sin tener átomos distinguidos, llena todas las regiones espaciales independientemente de su localización, poniendo en contacto, en consecuencia, a todos los cuerpos del universo.

No podemos detenernos aquí a exponer las ventajas de mi hipótesis, que permite explicar con gran facilidad algunos fenómenos hasta ahora no explicados en absoluto o aclarados tan sólo de manera insuficiente. Es conveniente, sin embargo, hacer un par de observaciones concordantes con los propósitos de este escrito, con el objeto de echar algo de luz sobre las aparentes contradicciones a las que aquí nos enfrentamos.

Si todas las substancias creadas se diferencian entre sí únicamente en virtud del grado de sus fuerzas, si, en consecuencia, debemos atribuir a cada una de ellas algún grado de sensibilidad (no importa qué tan reducido sea éste) y si todas ellas influyen en todas las demás, es evidente que para un par arbitrario de substancias de un tipo cualquiera —y, sobre todo, para un par de substancias distinguidas o dominantes— no toda distancia será igualmente aceptable a ellas. Porque la magnitud de la influencia que ejercen o padecen depende, en realidad, de la magnitud de la distancia a la que se encuentran. Si ésta es mayor de lo que a una de ellas resulta aceptable, se presentará en ésta una tendencia a hacer menor esa distancia; esto es, una atracción. En el caso opuesto, tendrá lugar una repulsión. Ni una ni otra debe ser pensada como algo necesariamente recíproco, ni mucho menos como algo que va siempre acompañado de un desplazamiento. Pero lo que sí podemos suponer con certeza es que, para cada dos substancias cualesquiera en el universo, existe: a) una distancia lo suficientemente grande tal que ella, y para todas las que sean mayores que ella, se dé una atracción recíproca; y también b) una distancia lo suficientemente pequeña tal que para ella y para todas las que sean menores que ella, se presente una repulsión recíproca.

No importa qué tan grandes sean estas dos distancias límite para la atracción y la repulsión de dos substancias, y qué tanto puedan modificarse con el tiempo, de acuerdo con la naturaleza misma no sólo de esas substancias, sino de todas las substancias en su vecindad lo que sí es indudable, con tal de que todas las demás condiciones sean similares, es que el incremento de su distancia determina una disminución de la influencia recíproca entre ellas, de no ser por otra razón que por la de que el número de las que pueden tener cabida a la misma distancia y, por lo tanto, el de las que podría pensarse que tienen la misma influencia aumenta en proporción al cuadrado de la distancia.

Como, por lo demás, la preponderancia que tiene una substancia dominante sobre una substancia auxiliar es siempre una magnitud finita, mientras que el conjunto de las substancias auxiliares supera siempre infinitamente, en un espacio dado, al de las substancias dominantes, es de suyo comprensible que la magnitud de la atracción que todas las substancias que se encuentran en un espacio dado ejercen sobre un átomo externo a ese espacio, cuando la distancia es suficientemente grande, sea aproximadamente la misma que la que se tendría si ese espacio no tuviera ninguna substancia distinguida, conteniendo solamente el mismo número de átomos comúnes.

De esto último y lo anterior se sigue la importante conclusión de que, una vez que la distancia entre dos cuerpos es adecuada en cuanto a magnitud, la fuerza de atracción entre ellos es directamente proporcional a la suma [sic] de sus masas (al número de sus átomos) e inversamente proporcional al cuadrado de sus distancias.

La validez de esta ley es aceptada en nuestros días por físicos y astrónomos por igual. Pero han sido muy pocos hasta ahora los que se han percatado de la dificultad de conciliarla con la opinión común acerca de la naturaleza de las partículas elementales de los cuerpos.

Si realmente ocurriera tan sólo lo que nos dice la representación común; esto es, si los 55 o más elementos que los químicos han descubierto en la Tierra, si la totalidad de los cuerpos que existen en ella no es otra cosa que un agregado de átomos de uno o de la combinación de varios de tales elementos —no siendo el oro, por ejemplo, sino un simple agregado de átomos simples de oro; el sulfuro uno de átomos simples de sulfuro, etc.— entonces yo pediría que se me explicara cómo es que objetos materiales, que difieren en cuanto a sus fuerzas y, en particular, en cuanto al grado recíproco de atracción que ejercen, pueden, no obstante, tener exactamente el mismo peso; o, dicho en otras palabras: cómo es posible que sus pesos sean proporcionales a sus masas.

Que esto es efectivamente así se demuestra de manera inmediata por el conocido experimento en el que esferas de una substancia química cualquiera que tienen el mismo peso se comportan de la misma manera en la que tendrían que hacerlo cuerpos de masa idéntica (produciendo, por ejemplo, reposo mutuo cuando sus velocidades son las mismas y el factor de elasticidad se ha eliminado o no ha sido tomado en cuenta).

Pero supongamos que los cuerpos consisten únicamente, en su totalidad, de un conjunto infinito de átomos de éter en el que (en comparación con el conjunto mismo) se encuentra un número insignificante de átomos distinguidos cuyas fuerzas superan finitamente las de un átomo de éter. Se comprende entonces que este reducido número de átomos distinguidos no pueda elevar, en ningún caso, de manera significativa, la fuerza de atracción que la Tierra ejerce sobre esos cuerpos y que, en consecuencia, su peso deba ser proporcional al de su masa total.

Sin embargo, no falta entre los físicos quien considere la materia calorífica (*Wärmestoff*), algo que es, en esencia, idéntico a lo que llamo éter, como un fluido presente en todos los cuerpos e ínsito a ellos. Si no hubieran mantenido la desafortunada concepción de que la materia calorífica es imponderable y se hubieran percatado de que el conjunto de los átomos que es propio (*ihm beiwohnt*) a todo cuerpo y coexiste con la materia calorífica es insignificante, les hubiera resultado de inmediato claro que es precisamente la materia calorífica de los cuerpos la que determina el peso de éstos. Sorprende, por lo demás, lo cerca que se encontraban de esta concepción por ejemplo, cuando postulaban la necesidad de que los átomos no caloríficos fueran pensados manteniendo entre sí una distancia infinita en comparación con sus diámetros.

§ 64

Es fácil ver que la dominación que ejerce una substancia distinguida en su vecindad inmediata consiste por lo menos (si no en otra cosa) en una cierta y fuerte atracción de los átomos en su vecindad. Consecuencia de ello es que éstos se acumulan con mayor densidad en torno de esa substancia, aproximándose también entre sí en la misma medida. Es precisamente por esta razón que se presenta en ellos una tendencia a alejarse un poco, tanto entre sí como del punto de atracción; es decir, una tendencia mutua a repelerse.

Son muchas las observaciones que nos indican esto. Sin embargo, innecesariamente se ha supuesto la existencia de una fuerza de repulsión primitiva entre las partículas de éter.

§ 65

De lo anterior resulta una demostración bastante sencilla (ya presentada en mi *Athanasia*) de la proposición acerca de que ninguna substancia distinguida experimenta en su cubierta una modificación tan grande como para no conservar un fragmento, aunque sea muy pequeño, de su vecindad original.

Por supuesto, nadie temerá que a una substancia distinguida *a* se le prive de sus átomos de éter en su vecindad inmediata, mientras que ninguna de las otras substancias distinguidas *b*, *c*, *d*, *e*,... en su entorno inmediato modifica su distancia respecto a *a*. No obstante, una preocupación del género estaría justificada si algunas o todas ellas se alejaran. Pero aun si esto ocurre, es solamente una parte de las partículas de éter en torno de *a* la que puede seguir a las substancias fugadas *b*, *c*, *d*, *e*,..., no debiendo modificarse nunca el sitio en el que se encuentra otra parte de ellas, precisamente la de aquellas más inmediatas a *a*. Al mismo tiempo, debemos no sólo admitir, sino, de hecho, afirmar como algo necesario, que esa parte se expandirá en un espacio más amplio.

Ahora bien, en ciertas circunstancias, los átomos de éter podrían fluir de regiones alejadas, acumulándose en aquellos espacios que, a causa de la gran dispersión de las substancias *b*, *c*, *d*, *e*,..., se han llenado con un éter relativamente más flexible (*locker*). No existe, sin embargo, ninguna razón para que este éter que viene de lejos expulse y reemplace al éter en el entorno inmediato de la substancia *a*. Lo que el éter debe hacer no es desplazar por completo al que se encuentra en torno de *a*, sino, más bien, impedir una dispersión adicional del mismo, comprimiéndolo hasta que su densidad logre alcanzar el equilibrio de las fuerzas de atracción de todos los átomos.

§ 66

En estrecha relación con lo anterior se encuentran muchos problemas cuya solución resultaría paradójica si no se tuviera en cuenta la información precedente. De este tipo es la cuestión acerca de los límites de los cuerpos: ¿dónde, en efecto termina un cuerpo y dónde comienza otro?

Por límite de un cuerpo o superficie limítrofe de un cuerpo entiendo el agregado de todos aquellos átomos de éter extremos que pertenecen al cuerpo; esto es, que son atraídos con mayor fuerza por los átomos distinguidos del mismo que por otros átomos dominantes que se encuentren en la vecindad. Esto ocurre de tal manera que cuando el cuerpo modifica su posición relativa con la vecindad (por ejemplo, alejándose de ella), los átomos se alejan con él, aunque tal vez no con la misma velocidad, pero sin que tenga lugar una separación o una interferencia de algún otro átomo ajeno.

Una vez que se ha supuesto esta definición de superficie limítrofe es evidente que el límite de un cuerpo es algo muy inestable, cambiando constantemente cada vez que se presenta una alteración, ya sea en el cuerpo mismo o en los cuerpos de su vecindad. Porque es claro que todo cambio de este tipo puede producir un cambio tanto en la magnitud como en la dirección de la atracción experimentada no sólo por los átomos auxiliares, sino inclusive por los átomos dominantes de un cuerpo. Así, por ejemplo, un momento antes, ciertas partículas de este pliegue cilíndrico (*Kiele*) eran objeto de una atracción más fuerte por parte de su masa restante que por el aire de su vecindad, formando parte, en consecuencia, todavía de él. A pesar de ello, la atracción que mis dedos ejercen en este momento sobre ellos es mucho mayor que la masa de los pliegues cilíndricos, lo que hace posible que se separen.

Una consideración más detenida muestra que muchos cuerpos carecen por completo de átomos limítrofes (*Grenzatome*) en algunas de sus partes: ninguno de sus átomos puede ser considerado como extremo entre aquellos que todavía pertenecen al cuerpo y lo acompañan cuando modifica su posición. En realidad, siempre que se tengan dos cuerpos vecinos y un lugar en el que uno de ellos pose un átomo extremo y acompañante, el otro cuerpo no puede tener, precisamente por eso, ningún átomo extremo, porque todos los átomos que se encuentran atrás del átomo extremo (o de éter) pertenecen ya al otro cuerpo.

§ 67

Con ello se soluciona al mismo tiempo el problema de si los cuerpos se encuentran en contacto inmediato entre sí y en qué condiciones, o si están separados por un espacio intermedio.

Supongamos que procedo aquí de la manera que me parece más conveniente y que defino el contacto entre dos cuerpos como algo que se presenta cuando los átomos extremos de uno de ellos (mismos que, como quedó dicho en el parágrafo anterior, son parte de él) dan lugar, en combinación con ciertos átomos del otro, a una extensión continua. Resulta entonces claro que existen muchos cuerpos que — con tal de que se prescinda (por ejemplo, ejerciendo presión) del aire que en condiciones terrestres normales se adhiere a ellos— están en contacto entre sí, no sólo cuando uno de ellos es un fluido o ambos lo son, sino igualmente cuando los dos son sólidos.

Por otra parte, si dos cuerpos no están en contacto entre sí, entonces, puesto que es imposible que exista el espacio absolutamente vacío, debe existir algún otro cuerpo o, por lo menos, éter puro entre ellos. Por lo tanto, puede afirmarse que, en sentido estricto, todo cuerpo está en contacto, por cualquiera de sus lados, con algún otro cuerpo o —de no ser éste el caso— con el éter puro.

§ 68

Puede pensarse, en relación a los distintos tipos de movimiento que tienen lugar en el universo, que la circunstancia de que ninguna parte del espacio se encuentre vacía hace que resulte imposible la existencia de otra clase de movimiento que aquel en el que la masa entera que se pone simultáneamente en actividad constituye una extensión volcada en sí misma, con la propiedad de que cada parte de ella sólo puede ocupar lugares que han sido ocupados inmediatamente antes por otra parte de esa misma masa.

Sin embargo, quien tenga presente lo que se ha afirmado en §59, acerca de los distintos grados de densidad con los que puede llenarse el espacio, no dudará en aceptar que muchas otras clases de movimiento pueden y deben tener igualmente lugar. En particular, el movimiento oscilatorio es algo que debe ocurrir incesantemente no sólo en relación a todos los átomos de éter, sino también en relación a todos los átomos distinguidos. Y siendo la razón de todo esto tan evidente, no es necesario ni siquiera mencionarla.

Después del oscilatorio, y particularmente en relación a los cuerpos sólidos, es el movimiento rotatorio el más común. En mi opinión, el eje de rotación debe ser siempre una línea material. Pero el problema de cómo ha de concebirse el movimiento rotatorio y el de cómo es que tras una media rotación (o revolución) los átomos llegan sin desprenderse de un lado al otro del eje, resultará confuso únicamente para aquellos que olvidan que, tanto fuera como dentro de un continuo, todo átomo se encuentra a una cierta distancia de cualquier otro, pudiendo, en consecuencia, rotar en torno de él, sin que esto signifique que él mismo tenga que desprenderse o que involucrar a otro en su rotación.

Cuando se trata de una entidad espacial simple, el segundo de estos casos; es decir, la rotación en torno de sí mismo, resulta contradictoria.

§ 69

No pretendo afirmar ni por un momento la mera existencia siquiera de un solo átomo dominante o común en el universo que describa un sendero (*Bahn*) absolutamente recto o absolutamente circular, pues se trata de algo que sería del todo improbable, en vista del conjunto infinito de perturbaciones que todo átomo experimenta de parte de todos los demás. Pero tampoco puede afirmarse que los movimientos de esta índole sean en sí mismos algo imposible.

Lo que sí podemos afirmar es que, por ejemplo, la descripción de una línea fragmentada (*gebrochen*) solamente puede presentarse cuando disminuye gradualmente la velocidad del átomo hasta alcanzar cero en el punto *b*, incrementándose después a partir de allí (en cada momento posterior al de la llegada al punto *b*), con la sola excepción del caso en el que ha de intercalarse un período de reposo finito en *b*.

Ocurre algo diferente con otras líneas; en particular con la espiral logarítmica. Aun haciendo caso omiso de todas las perturbaciones externas, resulta contradictorio que un átomo comience en un punto dado de esa espiral y atraviese la rama centrípeta en un tiempo finito; pero es todavía más contradictorio, por así decirlo, la exigencia de que el átomo en movimiento debe llegar, en última instancia, al centro de la espiral (polo).

Demostraremos aquí solamente el caso en el que el átomo se mueve en su sendero u órbita con una velocidad uniforme. Supongamos en primer lugar que, con la excepción de ese átomo, todo se encuentra en reposo. Su movimiento espiral puede entonces verse como algo que se encuentra constituido de dos componentes: una a lo largo del radio vector y de velocidad constante hacia el polo; la otra una velocidad angular que se incrementa de manera constante en torno del centro de la espiral y que debe sobrepasar cualquier cantidad finita que se tome, si es que el átomo ha de aproximarse arbitrariamente al polo.

Por supuesto que no existe en la naturaleza ninguna fuerza capaz de proporcionarle esta velocidad, y mucho menos una que pudiera transmitírsela a una masa completa tridimensional de átomos —algo que se hace necesario si es que todo átomo en ella ha de transportarse en un tiempo finito hasta el polo a través de la totalidad infinita de las circunvoluciones de la espiral.

Pero, aunque éste fuera el caso ¿podría afirmarse que se ha alcanzado el centro de la espiral? En mi opinión, no. Porque a pesar de que pueda decirse que este centro forma un continuo con los puntos que pertenecen con certeza a la espiral (pues para cualquiera de ellos y para una distancia arbitrariamente reducida es posible encontrar un punto vecino), la expansión lineal no cumple con una característica esencial al sendero de un átomo, a saber: tener, en cada uno de sus puntos, una o varias direcciones definidas. Pero no es esto, como sabemos, lo que sucede con el centro de una espiral logarítmica.

Es este también, por último, el contexto en el que ha de plantearse la complicada cuestión acerca de si el carácter infinito del universo resulta compatible con la noción de un movimiento de traslación, en una dirección definida del universo en su totalidad, o con el de un movimiento de rotación en torno de un eje o centro fijos.

Sin embargo, el hecho de que no para todo átomo haya lugares hacia los que puede desplazarse no nos permite afirmar que uno u otro tipo de movimiento es imposible. Más bien, la razón de esta imposibilidad es que no hay causas (fuerzas) que los produzcan: no puede pensarse, en efecto, ni en un fundamento físico (o sea, en algo incondicionalmente necesario, en una consecuencia de verdades conceptuales absolutas), ni en un fundamento moral (o sea, en algo condicionalmente necesario, algo que encontremos en el mundo solamente pòrque Dios propicia todo acontecimiento que contribuya al bienestar de sus criaturas), a partir de lo cual tuviera que darse un movimiento de ese tipo.

§ 70

Finalizamos ahora nuestras reflexiones acerca de las paradojas del infinito examinando dos importantes ejemplos debidos a Euler.

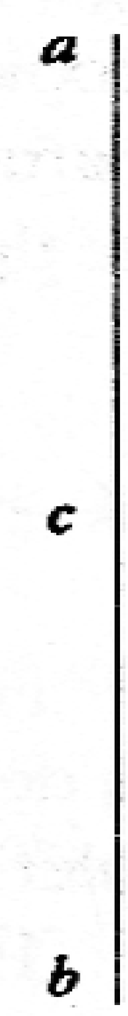
1. La respuesta a la cuestión de cómo ha de comportarse un átomo *a* cuando es atraído en proporción inversa al cuadrado de la distancia por una fuerza localizada en *c* tiene, como ya había observado Boscowich, diferentes respuestas.

Una de ellas se obtiene cuando se proyecta el átomo de *a* y se busca el límite del movimiento elíptico resultante cuando la velocidad de proyección tiende a cero.

La respuesta es distinta, sin embargo, si no empezamos con esa proyección, consideramos directamente el problema: si al átomo se le ha impartido (por proyección o de alguna otra manera) una velocidad perpendicular *ac* y hacemos abstracción de toda resistencia en el entorno, tendría que describir una elipse con un foco en *c*. Ahora bien, si la velocidad lateral de la proyección decrece infinitamente, también lo hace el eje menor de esa elipse. A partir de esto, Euler concluye que, cuando el átomo tiene velocidad cero en el punto *a*, debe obtenerse una oscilación del mismo entre los puntos ***a*** y *c*, siendo éste, precisamente, el único tipo de movimiento en el que puede transformarse el movimiento elíptico sin violar la ley de la continuidad.

Otros, particularmente Busse, piensan que es absurdo que el curso de un átomo cuya velocidad en la dirección *ac* tendría que incrementarse al infinito al aproximarse al punto *c*, fuera impedido y lanzado en la dirección opuesta. Se afirma entonces que lo que sucede es más bien que el átomo debe continuar su movimiento en la dirección *ac* más allá de *c*, pero con velocidad decreciente hasta llegar al fin del segmento ***cb* = *ca***, regresando después de ***b*** a ***a*** y repitiendo este proceso indefinidamente.

En mi opinión, apelar aquí a la ley de la continuidad —como hace Euler— no resuelve nada, pues realmente no puede considerarse que el fenómeno que aquí investigamos transgreda algún tipo de continuidad gobernando los cambios en el universo (el crecimiento o la disminución de las fuerzas de las substancias particulares), ni cuando la oscilación tiene lugar entre las cotas ***a*** y ***b***, ni cuando ocurre entre ***a*** y *c*.



Se viola ya ostensible e injustificablemente esa ley cuando se supone la existencia de una fuerza de atracción que se incrementa al infinito. Pero entonces no debe sorprendernos el surgimiento de conclusiones contradictorias, puesto que las premisas ya lo eran.

Por lo demás, a partir de esto puede verse que no sólo la solución del problema que ofrece Euler es incorrecta; también lo es la de Busse, puesto que supone algo imposible, a saber: una velocidad infinita en *c*. Si se corrige este error, si se supone que la velocidad con la que el átomo se desplaza cambia de acuerdo con una ley que la mantiene siempre finita, si se recuerda, además, que no puede hablarse nunca del movimiento de un átomo individual sin hablar también de un medio en el que ese movimiento tenga lugar y sin suponer un número mayor o menor de átomos que se muevan con él, entonces lo que se obtiene es una solución muy distinta, de cuya descripción no es necesario que nos ocupemos aquí.

2. La segunda de las paradojas de Euler que queremos exponer brevemente en este lugar tiene que ver con el movimiento

pendular. Como se sabe, la mitad del período de un péndulo simple de longitud *r*, de amplitud infinitamente pequeña, se calcula como $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}$, mientras que el tiempo de caída sobre la cuerda de este arco, considerado normalmente de la misma longitud, es igual a $\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{r}{g}}$.

La razón fundamental por la que Euler cree ver aquí una paradoja reside simple y sencillamente en su errónea concepción de lo infinitamente pequeño, que él considera como algo igual a cero. De hecho, los arcos infinitamente pequeños son algo tan inexistente como las cuerdas infinitamente pequeñas. Todas las proposiciones que los matemáticos han establecido acerca de los llamados "arcos y cuerdas infinitamente pequeños" han sido demostradas, en realidad, para arcos y cuerdas que tienen una magnitud arbitrariamente pequeña. El significado correcto de las dos ecuaciones anteriores no puede ser otro que: i) la mitad del período de un péndulo puede aproximarse arbitrariamente a la cantidad $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{r}{g}}$, con tal de que el arco de oscilación sea suficientemente pequeño; y ii) bajo estas mismas circunstancias, el tiempo de caída se aproxima tanto como se quiera a

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{\frac{r}{g}}.$$

El hecho de que estas dos cantidades sean distintas y que el arco y la cuerda —sin que importe qué tan pequeños se tomen— difieran con respecto al tiempo de caída, no es más sorprendente que muchas otras diferencias existentes entre ellos y que nadie espera que desaparezcan (por ejemplo, que el arco tenga una curvatura igual a $\frac{1}{r}$, mientras que la cuerda es recta, no exhibiendo, en consecuencia, ningún tipo de curvatura.

Las paradojas del Infinito de Bernard Bolzano.
Se terminó de imprimir el día 16 de mayo de
1991 en los talleres de Impresos Serigráficos
de México S.A. a cargo de Fenian S.A. de C.V.
Se utilizaron los tipos Garamond 18/24,
12/14, 10/12 y 8/9. El tiraje constó
de mil ejemplares.