Algoritmos y Estructuras de Datos I
Primer Cuatrimestre 2021

Guía Práctica 3
Especificación de problemas

Departamento de Computación
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Ejercicio 1. ★ Las siguientes especificaciones no son correctas. Indicar por qué, y corregirlas para que describan correctamente el problema.

a) `buscar:` Dada una secuencia y un elemento de ésta, devuelve en *result* alguna posición de la secuencia en la cual se encuentre el elemento.

`proc buscar` (in l: $seq\langle\mathbb{R}\rangle$, in elem: $\mathbb{R}$, out result: $\mathbb{Z}$) {
`Pre` $\{elem \in l\}$
`Post` $\{l[result] = elem\}$
}

b) `progresionGeometricaFactor2:` Indica si la secuencia l representa una progresión geométrica factor 2. Es decir, si cada elemento de la secuencia es el doble del elemento anterior.

`proc progresionGeometricaFactor2` (in l: $seq\langle\mathbb{Z}\rangle$, out result: Bool) {
`Pre` $\{True\}$
`Post` $\{result = True \leftrightarrow ((\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |l| \rightarrow_L l[i] = 2 * l[i-1]))\}$
}

c) `minimo:` Devuelve en *result* el menor elemento de l.

`proc minimo` (in l: $seq\langle\mathbb{Z}\rangle$, out result: $\mathbb{Z}$) {
`Pre` $\{True\}$
`Post` $\{(\forall y : \mathbb{Z})((y \in l \wedge y \neq x) \rightarrow y > result)\}$
}

Ejercicio 2. La siguiente no es una especificación válida, ya que para ciertos valores de entrada que cumplen la precondición, no existe una salida que cumpla con la postcondición.

`proc elementosQueSumen` (in l: $seq\langle\mathbb{Z}\rangle$, in suma:$\mathbb{Z}$, out result: $seq\langle\mathbb{Z}\rangle$) {
`Pre` $\{True\}$
`Post` {
/* La secuencia result está incluída en la secuencia l*/
$(\forall x : \mathbb{Z})(x \in result \rightarrow \#apariciones(x, result) \leq \#apariciones(x, l))$
/* La suma de la result coincide con el valor suma */
$\wedge\ suma = \sum_{i=0}^{|result|-1} result[i]$
}
}

a) Mostrar valores para l y *suma* que hagan verdadera la precondición, pero tales que no exista *result* que cumpla la postcondición.

b) Supongamos que agregamos a la especificación la siguiente cláusula:

Pre : $min\_suma(l) \leq suma \leq max\_suma(l)$
fun $min\_suma(l) : \mathbb{Z} = \sum_{i=0}^{|l|-1}$ if $l[i] < 0$ then $l[i]$ else 0 fi
fun $max\_suma(l) : \mathbb{Z} = \sum_{i=0}^{|l|-1}$ if $l[i] > 0$ then $l[i]$ else 0 fi

¿Ahora es una especificación válida? Si no lo es, justificarlo con un ejemplo como en el punto anterior.

c) Dar una precondición que haga correcta la especificación.

Ejercicio 3. ★ Para los siguientes problemas, dar todas las soluciones posibles a las entradas dadas.

a) `proc raizCuadrada` (in x:$\mathbb{R}$, out result:$\mathbb{R}$) {

`Pre` $\{x \geq 0\}$

`Post` $\{result^2 = x\}$

}

i) $x = 0$

ii) $x = 1$

iii) $x = 27$

b) ★

`proc indiceDelMaximo` (in l: $seq\langle\mathbb{R}\rangle$, out result:$\mathbb{Z}$) {

`Pre` $\{|l| > 0\}$

`Post` {
$0 \leq result < |l|$
$\wedge_L ((\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |l| \rightarrow_L l[i] \leq l[result])$
}

}

i) $l = \langle 1, 2, 3, 4\rangle$

ii) $l = \langle 15.5, -18, 4.215, 15.5, -1\rangle$

iii) $l = \langle 0, 0, 0, 0, 0, 0\rangle$

c) ★

`proc indiceDelPrimerMaximo` (l:$seq\langle\mathbb{R}\rangle$, result:$\mathbb{Z}$) {

`Pre` $\{|l| > 0\}$

`Post` {
$0 \leq result < |l|$
$\wedge ((\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |l| \rightarrow_L (l[i] < l[result] \vee (l[i] = l[result] \wedge i \geq result))))$
}

}

i) $l = \langle 1, 2, 3, 4\rangle$

ii) $l = \langle 15.5, -18, 4.215, 15.5, -1\rangle$

iii) $l = \langle 0, 0, 0, 0, 0, 0\rangle$

d) ¿Para qué valores de entrada indiceDelPrimerMaximo y indiceDelMaximo tienen necesariamente la misma salida?

Ejercicio 4. ★ Sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$$f(a, b) = \begin{cases} 2b & \text{si } a < 0 \\ b - 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

¿Cuáles de las siguientes especificaciones son correctas para el problema de calcular $f(x, y)$?
Para las que no lo son, indicar por qué.

a) `proc f` (in a, b: $\mathbb{R}$,out result:$\mathbb{R}$) {

`Pre` $\{True\}$

`Post` {
$(a < 0 \land result = 2 * b)$
$\land$
$(a \geq 0 \land result = b - 1)$
}

}

b) `proc f` (in a, b: $\mathbb{R}$, out result:$\mathbb{R}$) {

`Pre` $\{True\}$

`Post` $\{(a < 0 \land result = 2 * b) \lor (a > 0 \land result = b - 1)\}$

}

c) `proc f` (in a, b: $\mathbb{R}$, out result:$\mathbb{R}$) {

`Pre` $\{True\}$

`Post` $\{(a < 0 \land result = 2 * b) \lor (a \geq 0 \land result = b - 1)\}$

}

d) `proc f` (in a, b: $\mathbb{R}$, out result:$\mathbb{R}$) {

`Pre` $\{True\}$

`Post` {
$(a < 0 \rightarrow result = 2 * b)$
$\land$
$(a \geq 0 \rightarrow result = b - 1)$
}

}

e) `proc f` (in a, b: $\mathbb{R}$, out result:$\mathbb{R}$) {

`Pre` $\{True\}$

`Post` $\{(a < 0 \rightarrow result = 2 * b) \lor (a \geq 0 \rightarrow result = b - 1)\}$

}

f) `proc f` (in a, b: $\mathbb{R}$, out result: $\mathbb{R}$) {

`Pre` $\{True\}$

`Post` $\{result = (\text{if } a < 0 \text{ then } 2 * b \text{ else } b - 1 \text{ fi})\}$

}

Ejercicio 5. ★ Considerar la siguiente especificación, junto con un algoritmo que dado x devuelve x^2.

`proc unoMasGrande` (in x: $\mathbb{R}$, out result:$\mathbb{R}$) {
`Pre` $\{True\}$
`Post` $\{result > x\}$
}

a) ¿Qué devuelve el algoritmo si recibe $x = 3$? ¿El resultado hace verdadera la postcondición de unoMasGrande?

b) ¿Qué sucede para las entradas x = 0.5, x = 1, x = -0.2 y x = -7?

c) Teniendo en cuenta lo respondido en los puntos anteriores, escribir una precondición para unoMasGrande, de manera tal que el algoritmo sea una implementación correcta.

Ejercicio 6. ★ Sean x y r variables de tipo $\mathbb{R}$. Considerar los siguientes predicados:

P1: $\{x \leq 0\}$ Q1: $\{r \geq x^2\}$
P2: $\{x \leq 10\}$ Q2: $\{r \geq 0\}$
P3: $\{x \leq -10\}$ Q3: $\{r = x^2\}$

a) Indicar la relación de fuerza entre P1, P2 y P3.

b) Indicar la relación de fuerza enrte Q1, Q2 y Q3.

c) Sea E1 la siguiente especificación. Escribir 2 programas que cumplan con E1.

```
proc hagoAlgo (in x: ℝ, out r:ℝ) {
    Pre {x ≤ 0}
    Post {r ≥ x²}
}
```

d) Sea A un algoritmo que cumple con E1. Decidir si necesariamente cumple las siguientes especificaciones:

a) Pre: $\{x \leq -10\}$, Post: $\{r \geq x^2\}$
b) Pre: $\{x \leq 10\}$, Post: $\{r \geq x^2\}$
c) Pre: $\{x \leq 0\}$, Post: $\{r \geq 0\}$
d) Pre: $\{x \leq 0\}$, Post: $\{r = x^2\}$
e) Pre: $\{x \leq -10\}$, Post: $\{r \geq 0\}$
f) Pre: $\{x \leq 10\}$, Post: $\{r \geq 0\}$
g) Pre: $\{x \leq -10\}$, Post: $\{r = x^2\}$
h) Pre: $\{x \leq 10\}$, Post: $\{r = x^2\}$

e) ¿Qué conclusión pueden sacar? ¿Qué debe cumplirse con respecto a las precondiciones y postcondiciones para que sea seguro reemplazar la especificación?

Ejercicio 7. ★ Considerar las siguientes dos especificaciones, junto con un algoritmo a que satisface la especificación de p2.

```
proc p1 (in x: ℝ, in n: ℤ, out result:ℤ) {
    Pre {x ≠ 0}
    Post {x^n − 1 < result ≤ x^n}
}

proc p2 (in x: ℝ, in n: ℤ, out result:ℤ) {
    Pre {n ≤ 0 → x ≠ 0}
    Post {result = ⌊x^n⌋}
}
```

a) Dados valores de x y n que hacen verdadera la precondición de p1, demostrar que hacen también verdadera la precondición de $p2$.

b) Ahora, dados estos valores de x y n, supongamos que se ejecuta a: llegamos a un valor de res que hace verdadera la postcondición de p2. ¿Será también verdadera la postcondición de p1?

c) ¿Podemos concluir que a satisface la especificación de p1?

Ejercicio 8. Considerar las siguientes especificaciones:

```
proc n-esimo1 (in l: seq⟨ℤ⟩, in n: ℤ, out result: ℤ) {
    Pre {
    /*Los elementos están ordenados*/
    (∀i : ℤ)(0 ≤ i < |l| − 1 →_L l[i] < l[i + 1])
    ∧ 0 ≤ n < |l|
    }
```

Post $\{result = l[n]\}$
}

proc n-esimo2 (in l: $seq\langle\mathbb{Z}\rangle$, in n: $\mathbb{Z}$, out result:$\mathbb{Z}$) {
Pre {
/*Los elementos son distintos entre sí*/
$(\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |l| \rightarrow_L ((\forall j : \mathbb{Z})(0 \leq j < |l| \wedge i \neq j) \rightarrow_L l[i] \neq l[j]))$
$\wedge$
$0 \leq n < |l|$
}
Post {
$result \in l$
$\wedge$
$n = \sum_{i=0}^{|l|-1}$ (if $l[i] < result$ then 1 else 0 fi)
}
}

¿Es cierto que todo algoritmo que cumple con n-esimo1 cumple también con n-esimo2? ¿Y al revés?
Sugerencia: Razonar de manera análoga a la del ejercicio anterior.

Ejercicio 9. ★ Especificar los siguientes problemas:

a) Dado un número entero, decidir si es par.

b) Dado un entero n y uno m, decidir si n es un múltiplo de m.

c) Dado un número real, devolver su inverso multiplicativo.

d) Dada una secuencia de caracteres, obtener de ella sólo los que son numéricos (con todas sus apariciones sin importar el orden de aparición).

e) Dada una secuencia de reales, devolver la secuencia que resulta de duplicar sus valores en las posiciones impares

f) Dado un número entero, listar todos sus divisores positivos (sin duplicados).

Ejercicio 10. Considerar el problema de decidir, dados n y m enteros, si n es múltiplo de m, y la siguiente especificación.

proc esMultiplo (in n, m: $\mathbb{Z}$, out result:Bool) {
Pre $\{m \neq 0\}$
Post $\{result = (n \mod m = 0)\}$
}

a) Según la definición matemática de múltiplo, ¿tiene sentido preguntarse si 4 es múltiplo de 0? ¿Cúal es la respuesta?

b) ¿Debería ser $n = 4$, $m = 0$ una entrada válida para el problema? ¿Lo es en esta especificación?

c) Corregir la especificación de manera tal que $n = 4$, $m = 0$ satisfaga la precondición (¡cuidado con las indefiniciones!).

d) ¿Qué relación de fuerza hay entre la precondición nueva y la original?

Ejercicio 11. Considerar el problema de, dada una secuencia de números reales, devolver la que resulta de duplicar sus valores en las posiciones impares.

a) Para la secuencia $\langle 1, 2, 3, 4\rangle$, ¿es $\langle 0, 4, 0, 8\rangle$ un resultado correcto?

b) Sea la siguiente especificación:

proc duplicarEnImpares (in l: $seq\langle\mathbb{R}\rangle$, out result: $seq\langle\mathbb{R}\rangle$) {
Pre $\{True\}$
Post $\{|result| = |l| \wedge (\forall i : \mathbb{Z})((0 \leq i < |result| \wedge i \mod 2 = 1) \rightarrow_L result[i] = 2 * l[i])\}$
}

Si $l = \langle 1, 2, 3, 4\rangle$, ¿$result = \langle 0, 4, 0, 8\rangle$ satisface la postcondición?

c) Si es necesario, corregir la especificación para que describa correctamente el resultado esperado.

d) ¿Qué relación de fuerza hay entre la nueva postcondición y la original?

Ejercicio 12. ★ Especificar el problema de dado un entero positivo retornar una secuencia de 0s y 1s que represente ese número en base 2 (es decir, en binario).

Ejercicio 13. Con lo visto en los ejercicios 9 a 12, ¿Encuentra casos de sub y sobreespecificación en las especificaciones del ejercicio 8?

Ejercicio 14. Especificar los siguientes problemas:

a) ★ Dado un número entero positivo, obtener la suma de sus factores primos.

b) Dado un número entero positivo, decidir si es perfecto. Se dice que un número es perfecto cuando es igual a la suma de sus divisores (excluyéndose a sí mismo).

c) Dado un número entero positivo n, obtener el menor entero positivo $m > 1$ tal que m sea coprimo con n.

d) ★ Dado un entero positivo, obtener su descomposición en factores primos. Devolver una secuencia de tuplas (p, e), donde p es un factor primo y e es su exponente, ordenada en forma creciente con respecto a p.

e) Dada una secuencia de números reales, obtener la diferencia máxima entre dos de sus elementos.

f) ★ Dada una secuencia de números enteros, devolver aquel que divida a más elementos de dicha secuencia. El elemento tiene que pertenecer a la secuencia original. Si existe más de un elemento que cumple esta propiedad, devolver alguno de ellos.

Ejercicio 15. Especificar los siguientes problemas sobre secuencias:

a) proc nEsimaAparicion(in $l : seq\langle\mathbb{R}\rangle$, in $e : \mathbb{R}$, in $n : \mathbb{Z}$, out $result : \mathbb{Z}$), que devuelve el índice de la n-ésima aparición de e en l.

b) Dadas dos secuencias s y t, decidir si s es una subcadena de t.

c) ★ Dadas dos secuencias s y t, decidir si s está *incluida* en t, es decir, si todos los elementos de s aparecen en t en igual o mayor cantidad.

d) proc mezclarOrdenado(in $s, t : seq\langle\mathbb{Z}\rangle$, out $result : seq\langle\mathbb{Z}\rangle$), que recibe dos secuencias ordenadas y devuelve el resultado de intercalar sus elementos de manera ordenada.

e) Dadas dos secuencias s y t especificar el procedimiento *intersecciónSinRepetidos* que retorna una secuencia que contiene únicamente los elementos que aparecen en ambas secuencias.

f) ★ Dadas dos secuencias s y t, devolver su *intersección*, es decir, una secuencia con todos los elementos que aparecen en ambas. Si un mismo elemento tiene repetidos, la secuencia retornada debe contener la cantidad mínima de apariciones en de s y de t.

Ejercicio 16. Especificar los siguientes problemas:

a) proc cantApariciones(in $l : seq\langle\mathsf{Char}\rangle$, out $result : seq\langle\mathsf{Char} \times \mathbb{Z}\rangle$) que devuelve la secuencia con todos los elementos de l, sin duplicados, con su cantidad de apariciones(en un orden cualquiera). Ejemplos:

- $cantApariciones(\langle 'a'\rangle) = \langle\langle 'a', 1\rangle\rangle$
- $cantApariciones(\langle 'a', 'b', 'c'\rangle) = \langle\langle 'a', 1\rangle, \langle 'c', 1\rangle, \langle 'b', 1\rangle\rangle$
- $cantApariciones(\langle 'a', 'b', 'c', 'b', 'd', 'b'\rangle) = \langle\langle 'a', 1\rangle, \langle 'b', 3\rangle, \langle 'd', 1\rangle, \langle 'c', 1\rangle\rangle$
- $cantApariciones(\langle\rangle) = \langle\rangle$

b) Dada una secuencia, devolver una secuencia de secuencias que contenga todos sus prefijos, en orden creciente de longitud.

c) ★ Dada una secuencia de secuencias de enteros l, devolver una secuencia de l que contenga el máximo valor. Por ejemplo, si $l = \langle\langle 2, 3, 5\rangle, \langle 8, 1\rangle, \langle 2, 8, 4, 3\rangle\rangle$, devolver $\langle 8, 1\rangle$ o $\langle 2, 8, 4, 3\rangle$.

d) proc interseccionMultiple(in $ls : seq\langle seq\langle\mathbb{R}\rangle\rangle$, out $l : seq\langle\mathbb{R}\rangle$) que devuelve en l el resultado de la intersección de todas las secuencias de ls.

e) ★ Dada una secuencia l con todos sus elementos distintos, devolver la secuencia de *partes*, es decir, la secuencia de todas las secuencias incluidas en l, cada una con sus elementos en el mismo orden en que aparecen en l.

Especificación de problemas usando **inout**

Ejercicio 17. ★ Dados dos enteros a y b, se necesita calcular su suma, y retornarla en un entero c. ¿Cúales de las siguientes especificaciones son correctas para este problema? Para las que no lo son, indicar por qué.

a) `proc sumar` (inout a, b, c: $\mathbb{Z}$) {
   `Pre` $\{True\}$
   `Post` $\{a + b = c\}$
}

b) `proc sumar` (in a, b: $\mathbb{Z}$, in c: $\mathbb{Z}$) {
   `Pre` $\{True\}$
   `Post` $\{c = a + b\}$
}

c) `proc sumar` (in a, b: $\mathbb{Z}$, out c: $\mathbb{Z}$) {
   `Pre` $\{True\}$
   `Post` $\{c = a + b\}$
}

d) `proc sumar` (inout a, b: $\mathbb{Z}$, out c: $\mathbb{Z}$) {
   `Pre` $\{a = A_0 \land b = B_0\}$
   `Post` $\{a = A_0 \land b = B_0 \land c = a + b\}$
}

Ejercicio 18. ★ Dada una secuencia l, se desea sacar su primer elemento y devolverlo. Decidir cúales de estas especificaciones son correctas. Para las que no lo son, indicar por qué y justificar con ejemplos.

a) `proc tomarPrimero` (inout l: $seq\langle\mathbb{R}\rangle$, out result:$\mathbb{R}$) {
   `Pre` $\{|l| > 0\}$
   `Post` $\{result = \mathsf{head}(l)\}$
}

b) `proc tomarPrimero` (inout l: $seq\langle\mathbb{R}\rangle$, out result: $\mathbb{R}$) {
   `Pre` $\{|l| > 0 \land l = L_0\}$
   `Post` $\{result = \mathsf{head}(L_0)\}$
}

c) `proc tomarPrimero` (inout l: $seq\langle\mathbb{R}\rangle$, out result:$\mathbb{R}$) {
   `Pre` $\{|l| > 0\}$
   `Post` $\{result = \mathsf{head}(L_0) \land |l| = |L_0| - 1\}$
}

d) `proc tomarPrimero` (inout l: $seq\langle\mathbb{R}\rangle$, out result:$\mathbb{R}$) {
   `Pre` $\{|l| > 0 \land l = L_0\}$
   `Post` $\{result = \mathsf{head}(L_0) \land l = \mathsf{tail}(L_0)\}$
}

e) `proc tomarPrimero` (inout l: $seq\langle\mathbb{R}\rangle$, out result:$\mathbb{R}$) {

`Pre` $\{|l| > 0 \land l = L_0\}$

`Post` {
$result = \mathsf{head}(L_0)$
$\land\ |l| = |L_0| - 1$
$\land_L\ ((\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |l| \rightarrow_L l[i] = L_0[i+1]))$
}

}

Ejercicio 19. Considerar la siguiente especificación:

`proc intercambiar` (inout l: $seq\langle\mathbb{R}\rangle$, in i, j: $\mathbb{Z}$) {
`Pre` $\{0 \leq i < |l| \land 0 \leq j < |l| \land l = L_0\}$
`Post` {
/*Las secuencias tienen la misma longitud*/
$|l| = |L_0|$
$\land$
/*Intercambia i*/
$l[i] = L_0[j]$
$\land$
/*Intercambia j*/
$l[j] = L_0[i]$
}
}

a) ¿Esta especificación es válida? Si lo es, ¿qué problema describe?

b) Mostrar con un ejemplo que la postcondición está sub-especificada (es decir, que hay valores que la hacen verdadera aunque no son deseables como solución).

c) Corregir la especificación agregando una o más cláusulas a la postcondición.

Ejercicio 20. Explicar coloquialmente la siguiente especificación:

`proc copiarPrimero` (inout l:$seq\langle\mathbb{Z}\rangle$, inout i:$\mathbb{Z}$) {
`Pre` {
/*Valores iniciales*/
$l = L_0 \land i = I_0$
$\land$
/*Secuencia no vacía*/
$|l| > 0$
$\land$
/*Indice en rango*/
$0 \leq i < |l|$
}
`Post` {
$|l| = |L_0|$
$\land_L$
$l[I_0] = L_0[0]$
$\land$
$i = L_0[I_0]$
$\land$
$((\forall j : \mathbb{Z})((0 \leq j < |l| \land j \neq I_0) \rightarrow_L l[j] = L_0[I_0])$
}
}

Ejercicio 21. Dada una secuencia de enteros, se requiere multiplicar por 2 aquéllos valores que se encuentran en posiciones pares. Indicar por qué son incorrectas las siguientes especificaciones, y proponer una alternativa correcta.

a) `proc duplicarPares` (inout l: $seq\langle\mathbb{Z}\rangle$) {

`Pre` $\{l = L_0\}$

`Post` {
$|l| = |L_0|$
$\wedge$
$(\forall i : \mathbb{Z})(0 \leq i < |l| \wedge i \mod 2 = 0) \rightarrow_L l[i] = 2 * L_0[i]$
}

}

b) `proc duplicarPares` (inout l: $seq\langle\mathbb{Z}\rangle$) {

`Pre` $\{l = L_0\}$

`Post` $\{(\forall i : \mathbb{Z})((0 \leq i < |l| \wedge i \mod 2 \neq 0) \rightarrow_L l[i] = L_0[i])$
$\wedge$
$(\forall i : \mathbb{Z})((0 \leq i < |l| \wedge i \mod 2 = 0) \rightarrow_L l[i] = 2 * L_0[i])$
}

}

c) `proc duplicarPares` (inout l: $seq\langle\mathbb{Z}\rangle$, out result:$seq\langle\mathbb{Z}\rangle$) {

`Pre` $\{True\}$

`Post` $\{|l| = |result|$
$\wedge$
$(\forall i : \mathbb{Z})((0 \leq i < |l| \wedge i \mod 2 \neq 0) \rightarrow_L result[i] = l[i])$
$\wedge$
$(\forall i : \mathbb{Z})((0 \leq i < |l| \wedge i \mod 2 = 0) \rightarrow_L result[i] = 2 * l[i])$
}

}

Ejercicio 22. Especificar los siguientes problemas de modificación de secuencias:

a) ★ proc primosHermanos(inout $l : seq\langle\mathbb{Z}\rangle$), que dada una secuencia de enteros mayores a dos, reemplaza dichos valores por el número primo menor más cercano. Por ejemplo, si $l = \langle 6, 5, 9, 14\rangle$, luego de aplicar primosHermanos(l), $l = \langle 5, 3, 7, 13\rangle$

b) ★ proc reemplazar(inout $l : seq\langle\mathsf{Char}\rangle$, in $a, b : \mathsf{Char}$), que reemplaza todas las apariciones de a en l por b.

c) proc recortar(inout $l : seq\langle\mathbb{Z}\rangle$, in $a : \mathbb{Z}$), que saca de l todas las apariciones de a consecutivas que aparezcan al principio. Por ejemplo recortar($\langle 2, 2, 3, 2, 4\rangle, 2$) = $\langle 3, 2, 4\rangle$, mientras que recortar($\langle 2, 2, 3, 2, 4\rangle, 3$) = $\langle 2, 2, 3, 2, 4\rangle$.

d) proc intercambiarParesConImpares(inout $l : seq\langle\mathsf{Char}\rangle$), que toma una secuencia de longitud par y la modifica de modo tal que todas las posiciones de la forma $2k$ quedan intercambiadas con las posiciones $2k + 1$. Por ejemplo, intercambiarParesConImpares("*adinle*") modifica de la siguiente manera: "*daniel*".

e) ★proc limpiarDuplicados(inout $l : seq\langle\mathsf{Char}\rangle$, out $dup : seq\langle\mathsf{Char}\rangle$), que elimina los elementos duplicados de l dejando sólo su primera aparición (en el orden original). Devuelve además, *dup* una secuencia con todas las apariciones eliminadas (en cualquier orden).