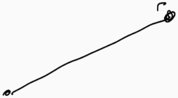
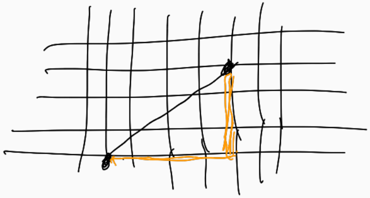
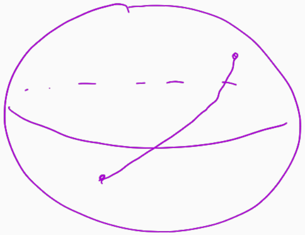
Cálculo Avanzado

Primer cuatrimestre de 2020

Espacios métricos 1 - Introducción







Todos tenemos una noción intuitiva de *distancia*.

Todos tenemos una noción intuitiva de *distancia*.
Cuando estudiamos espacios métricos, aprendemos que hay muchas maneras de medir distancias.

Todos tenemos una noción intuitiva de *distancia*.
Cuando estudiamos espacios métricos, aprendemos que hay muchas maneras de medir distancias.
Y, tal ves más importante, que los *espacios* donde medimos las distancias pueden ser muy distintos.

Todos tenemos una noción intuitiva de *distancia*.
Cuando estudiamos espacios métricos, aprendemos que hay muchas maneras de medir distancias.
Y, tal ves más importante, que los *espacios* donde medimos las distancias pueden ser muy distintos.

Los conceptos de límite, continuidad y convergencia de sucesiones están basados en la idea de distancia.

Todos tenemos una noción intuitiva de *distancia*.
Cuando estudiamos espacios métricos, aprendemos que hay muchas maneras de medir distancias.
Y, tal ves más importante, que los *espacios* donde medimos las distancias pueden ser muy distintos.

Los conceptos de límite, continuidad y convergencia de sucesiones están basados en la idea de distancia.
Si tenemos distancias en espacios abstractos, vamos a poder entender, por ejemplo, continuidad de funciones definidas espacios abstractos.

Definición (comparar con la Definición 5.1.1 del apunte)
Sea E un conjunto. Una función $d : E \times E \to \mathbb{R}$ se llama una *métrica* o una *distancia* sobre E si se cumple:

Definición (comparar con la Definición 5.1.1 del apunte)
Sea E un conjunto. Una función $d : E \times E \to \mathbb{R}$ se llama una *métrica* o una *distancia* sobre E si se cumple:

(i) $d(x, y) \geq 0$ para todo $x, y \in E$, y $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$;

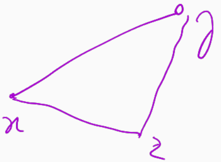
↳ separa puntos

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in E$;

simetría

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ para todo $x, y, z \in E$.

desig
Triang.



Definición (comparar con la Definición 5.1.1 del apunte)
Sea E un conjunto. Una función $d : E \times E \to \mathbb{R}$ se llama una *métrica* o una *distancia* sobre E si se cumple:

(i) $d(x, y) \geq 0$ para todo $x, y \in E$, y $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$;

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in E$;

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ para todo $x, y, z \in E$.

Al par (E, d) lo llamaremos un *espacio métrico*.

Definición (comparar con la Definición 5.1.1 del apunte)
Sea E un conjunto. Una función $d : E \times E \to \mathbb{R}$ se llama una *métrica* o una *distancia* sobre E si se cumple:

(i) $d(x, y) \geq 0$ para todo $x, y \in E$, y $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$;

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in E$;

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ para todo $x, y, z \in E$.

Al par (E, d) lo llamaremos un *espacio métrico*.

Notemos que para todo $x, y \in E$,

$$\underbrace{d(x, x)}_{=0} \leq d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y).$$

Definición (comparar con la Definición 5.1.1 del apunte)
Sea E un conjunto. Una función $d : E \times E \to \mathbb{R}$ se llama una *métrica* o una *distancia* sobre E si se cumple:

(i) $d(x, y) \geq 0$ para todo $x, y \in E$, y $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$;

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in E$;

(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ para todo $x, y, z \in E$.

Al par (E, d) lo llamaremos un *espacio métrico*.

Notemos que para todo $x, y \in E$,

$$d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y).$$

Entonces, si sólo supiéramos que $d(x, x) = 0$, podríamos deducir que $d(x, y) \geq 0$ para todo $x, y \in E$
En el apunte, la parte (i) de la definición está enunciada como
$d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$
y luego se demuestra que $d(x, y) \geq 0$ para todo $x, y \in E$.

$\mathbb{R}^n$ y sus distancias más naturales

Sean $x = (x_1, \cdots, x_n), y = (y_1, \cdots, y_n)$ elementos de $\mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$ y sus distancias más naturales

Sean $x = (x_1, \cdots, x_n), y = (y_1, \cdots, y_n)$ elementos de $\mathbb{R}^n$

Definimos la distancia eulcídea como

$$d_2(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2} = \|x - y\|_2.$$

$\mathbb{R}^n$ y sus distancias más naturales

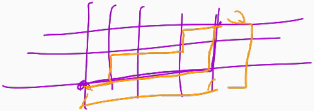
Sean $x = (x_1, \cdots, x_n), y = (y_1, \cdots, y_n)$ elementos de $\mathbb{R}^n$

Definimos la distancia eulcídea como

$$d_2(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right)^{1/2} = \|x - y\|_2.$$

La distancia 1 está dada por

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i| = \|x - y\|_1.$$



$\mathbb{R}^n$ y sus distancias más naturales

Sean $x = (x_1, \cdots, x_n), y = (y_1, \cdots, y_n)$ elementos de $\mathbb{R}^n$

Definimos la distancia eulcídea como

$$d_2(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2} = \|x - y\|_2.$$

La distancia 1 está dada por

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = \|x - y\|_1.$$

La distancia infinito está dada por

$$d_\infty(x, y) = \sup_{i=1,\dots,n} |x_i - y_i| = \|x - y\|_\infty.$$

$\mathbb{R}^n$ y sus distancias más naturales

En general, la distancia p está dada por

$$d_p(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p\right)^{1/p} = \|x-y\|_p.$$

$\mathbb{R}^n$ y sus distancias más naturales

En general, la distancia p está dada por

$$d_p(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p} = \|x-y\|_p.$$

Ejercicio:

$$d_p(x,y) \underset{p\to\infty}{\longrightarrow} d_\infty(x,y)$$

Funciones continuas

Dado un intervalo cerrado $[a, b] \subset \mathbb{R}$, llamaremos $C([a, b])$ al conjunto de todas las funciones $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuas.

Funciones continuas

Dado un intervalo cerrado $[a, b] \subset \mathbb{R}$, llamaremos $C([a, b])$ al conjunto de todas las funciones $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuas.

La métrica *natural* en este conjunto es:

$x, y : [a, b] \to \mathbb{R}$

$$d_\infty(x, y) = \sup_{a \le t \le b} |x(t) - y(t)|.$$

Funciones continuas

Dado un intervalo cerrado $[a,b] \subset \mathbb{R}$, llamaremos $C([a,b])$ al conjunto de todas las funciones $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuas.

La métrica *natural* en este conjunto es:

$$d_\infty(x,y) = \sup_{a \le t \le b} |x(t) - y(t)|.$$

Las dos primeras propiedades de una distancia son inmediatas. Veamos la desigualdad triangular:

$x, y, z \in C([a,b])$

$p/c/ t \in [a,b]$, $\quad |x(t) - y(t)| \le |x(t) - z(t)| + |z(t) - y(t)|$

$$\sup_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)| \le \sup_{t \in [a,b]} |x(t) - z(t)| + \sup_{t \in [a,b]} |z(t) - y(t)|$$

$d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$. ✓

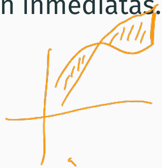
Funciones continuas

Dado un intervalo cerrado $[a,b] \subset \mathbb{R}$, llamaremos $C([a,b])$ al conjunto de todas las funciones $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuas.

La métrica *natural* en este conjunto es:

$$d_\infty(x,y) = \sup_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)|.$$

Las dos primeras propiedades de una distancia son inmediatas. Veamos la desigualdad triangular:



Otra métrica posible en $C([a,b])$ es la siguiente:

$$d_1(x,y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt.$$

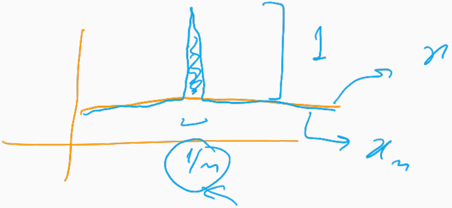
Funciones continuas

Si bien todas las distancias p en $\mathbb{R}^n$ son *equivalentes* (lo veremos más adelante), las dos distancias que definimos en $C([a,b])$ son muy distintas.

Si bien todas las distancias p en $\mathbb{R}^n$ son *equivalentes* (lo veremos más adelante), las dos distancias que definimos en $C([a,b])$ son muy distintas.

$$d_\infty(x,y) = \sup_{a \le t \le b} |x(t) - y(t)|$$

$$d_1(x,y) = \int_a^b |x(t) - y(t)|dt.$$



$d_1(x_n, x) \to 0$

$d_\infty(x_n, x) = 1$

Distancia discreta

Definición

Sea E un conjunto cualquiera. Definimos la distancia discreta en E como

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = y; \\ 1, & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

$$\delta(x,y) \leq \delta(x,z) + \delta(z,y)$$

$x \neq y$ $\quad 1 \quad 1$ ó $0 \quad 1$ ó 0

Topología en espacios métricos

De ahora en adelante, (E, d) es un espacio métrico.

Topología en espacios métricos

De ahora en adelante, (E, d) es un espacio métrico.

Definición

Dados $x \in E$ y $r > 0$, la bola abierta de centro x y radio $r > 0$ es el conjunto

$$B(x, r) = \{y \in E : d(x, y) < r\}.$$

Topología en espacios métricos

De ahora en adelante, (E, d) es un espacio métrico.

Definición

Dados $x \in E$ y $r > 0$, la bola abierta de centro x y radio $r > 0$ es el conjunto

$$B(x, r) = \{y \in E : d(x, y) < r\}.$$

Definición

Dados $x \in E$ y $r > 0$, la bola cerrada de centro x y radio $r > 0$ es el conjunto

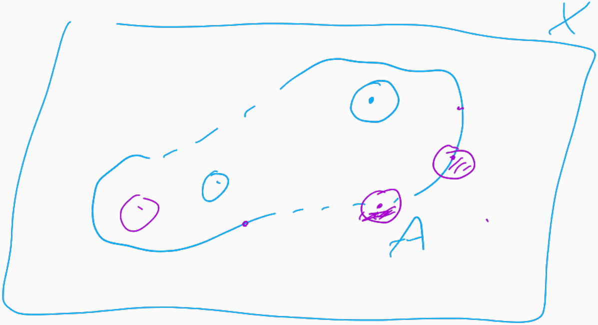
$$\overline{B}(x, r) = \{y \in E : d(x, y) \leq r\}.$$

$K(x, r)$

$B_r(x)$

Definición

Sea $A \subset E$. Decimos que x es un punto interior de A si existe algún $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A$.



$A^{\circ} \subset A$

Definición

Sea $A \subset E$. Decimos que x es un punto interior de A si existe algún $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A$.

Definición

Sea $A \subset E$. El interior de A es el conjunto de todos los puntos interiores de A, y lo notamos A°.

$A^\circ \subset A$

Definición

Sea $A \subset E$. Decimos que x es un punto interior de A si existe algún $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A$.

Definición

Sea $A \subset E$. El interior de A es el conjunto de todos los puntos interiores de A, y lo notamos A°.

Definición

Un conjunto $G \subset E$ se dice abierto si cada punto de G es un punto interior de G (análogamente, si $G = G^\circ$).

Definición
Sea $A \subset E$. Decimos que x es un punto interior de A si existe algún $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A$.

Definición
Sea $A \subset E$. El interior de A es el conjunto de todos los puntos interiores de A, y lo notamos A°.

Definición
Un conjunto $G \subset E$ se dice abierto si cada punto de G es un punto interior de G (análogamente, si $G = G^\circ$).

Observación
Un conjunto $G \subset E$ es abierto si y sólo si para todo $x \in G$ existe algún $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset G$.

Topología en espacios métricos

NO AB

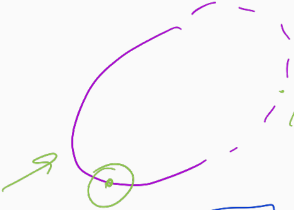
ABIERTO

$$A \subset B \;\Downarrow\; A^\circ \subset B^\circ$$

$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$

$\mathbb{N}$

$[0,1]$



NO AB.

Obs

(PROBARLO)

$$A^\circ = \bigcup_{\substack{G \subset A \\ G \text{ ab}}} G = \text{“el mayor abierto contenido en } A\text{”}$$

$A \subset E$

Observación

El conjunto E es abierto.

$B(x,r) = \{y \in E / d(y,x) < r\}$

Observación

El conjunto E es abierto.

Observación

El conjunto $\emptyset$...

Topología en espacios métricos

Observación
El conjunto E es abierto.

Observación
El conjunto $\emptyset$... es abierto.

$C[0,1]$

$B(x,r)$ con d_∞