

1) Probar las siguientes igualdades

i.

$$B \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{I}} A_i = \bigcap_{i \in \mathbb{I}} (B \setminus A_i)$$

Proof. \subseteq) Sabemos $x \in B$ y $x \notin \bigcup_{i \in \mathbb{I}} A_i$

Luego $x \in B$ y $x \notin A_i \quad \forall i \in \mathbb{I}$

Entonces $x \in B \setminus A_i \quad \forall i \in \mathbb{I}$

$\Rightarrow x \in \bigcap_{i \in \mathbb{I}} (B \setminus A_i)$

\supseteq) Sabemos $x \in B \setminus A_i \quad \forall i \in \mathbb{I}$

Luego para cada $i \in \mathbb{I}$ sabemos $x \in B$ y $x \notin A_i$

$\Rightarrow x \in B \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{I}} A_i$

□

ii.

$$B \setminus \bigcap_{i \in \mathbb{I}} A_i = \bigcup_{i \in \mathbb{I}} (B \setminus A_i)$$

Proof. \subseteq) Sabemos $x \in B$ y $x \notin \bigcap_{i \in \mathbb{I}} A_i$

Luego existe algún $i \in \mathbb{I}$ tal que $x \notin A_i$ (quizas para todos los $i \in I$ sucede que $x \notin A_i$ pero con uno alcanza)

Entonces existe algún $i \in \mathbb{I}$ tal que $x \in B$ y $x \notin A_i \Rightarrow B \setminus A_i$

$\Rightarrow x \in \bigcup_{i \in \mathbb{I}} (B \setminus A_i)$

\supseteq) Tenemos $x \in B \setminus A_i$ para algún $i \in \mathbb{I}$

Luego $x \in B$ y $x \notin A_i$ para algún $i \in \mathbb{I}$

Entonces $x \in B$ y $x \notin \bigcap_{i \in \mathbb{I}} A_i$

$\Rightarrow x \in B \setminus \bigcap_{i \in \mathbb{I}} A_i$

□

iii.

$$\bigcup_{i \in \mathbb{I}} (A_i \cap B) = B \cap \left(\bigcup_{i \in \mathbb{I}} A_i \right)$$

Proof. \subseteq) Tenemos $x \in A_i \cap B$ para algún $i \in \mathbb{I}$

Luego $x \in B$ y $x \in A_i$ para algún $i \in \mathbb{I} \Rightarrow x \in \bigcup_{i \in \mathbb{I}} A_i$

Entonces $x \in B$ y $x \in \bigcup_{i \in \mathbb{I}} A_i$

$\Rightarrow x \in B \cap \left(\bigcup_{i \in \mathbb{I}} A_i \right)$

□

3) Sea $f : X \rightarrow Y$ una función, A, B subconjuntos de X

i. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

Proof. \subseteq) Sea $y \in f(A \cup B)$ entonces $\exists x \in A \cup B / f(x) = y$

Luego $x \in A$ y $x \in B$

Entonces $y = f(x) \in f(A)$ y por otro lado $y = f(x) \in f(B)$

Finalmente $y = f(x) \in f(A) \cup f(B)$

\supseteq) Sea $y \in f(A) \cup f(B)$ luego $y \in f(A)$ e $y \in f(B)$

Entonces $\exists x \in A$ tal que $f(x) = y$ luego $x \in A \cup B$

Luego $y = f(x) \in f(A \cup B)$

□

ii. $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

Proof. Sea $y \in f(A \cap B)$ luego $\exists x \in A \cap B$ tal que $f(x) = y$

Luego $x \in A$ y $x \in B$ luego $y = f(x) \in f(A)$ e $y = f(x) \in f(B)$

Finalmente $y = f(x) \in f(A) \cap f(B)$

□

iii. Sea $A_{i \in \mathbb{N}}$ una familia de infinitos conjuntos, entonces

(a) $f(\bigcup A_i) = \bigcup f(A_i)$

Proof. \subseteq) Sea $y \in f(\bigcup A_i)$ luego $\exists x \in \bigcup A_i$ tal que $f(x) = y$

Entonces $\exists A_j$ tal que $x \in A_j$ por lo que $y = f(x) \in f(A_j) \subseteq \bigcup f(A_i)$

\supseteq) Sea $y \in \bigcup f(A_i)$ luego $\exists j \in \mathbb{N}$ tal que $y \in f(A_j)$

Luego $\exists x \in A_j$ tal que $y = f(x)$ luego $x \in \bigcup A_i$

Finalmente $y = f(x) \in f(\bigcup A_i)$

□

(b) $f(\bigcap A_i) \subseteq \bigcap f(A_i)$

Proof. Sea $y \in f(\bigcap A_i)$ luego $\exists x \in \bigcap A_i$

Entonces $x \in A_i \quad \forall i \in \mathbb{N}$

Luego $y = f(x) \in f(A_i) \quad \forall i \in \mathbb{N}$

Finalmente $y \in \bigcap f(A_i)$

□

(c) La última inclusión puede ser estricta.

Proof. Sea $f(x) = 3 \quad \forall x \in X$ y $A = 1, B = 2$

Luego $3 = f(A) \cap f(B) = 3 = \{3\}$ que es distinto a $f(A \cap B) = f(\{\emptyset\}) = \emptyset$

□

4) Sean $f : X \rightarrow Y$ una función, $A \subseteq X$ y $B, B_1, B_2 \subseteq Y$. Luego vale:

i. $A \subseteq f^{-1}(f(A))$

Proof. Sea $x \in A$ luego $f(x) \in f(A)$ por lo tanto, como $x \in f^{-1}(f(x)) \subseteq f^{-1}(f(A))$

Entonces $x \in f^{-1}(f(A))$

□

ii. $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$

Proof. Sea $y \in f(f^{-1}(B))$ entonces $\exists x \in f^{-1}(B) / f(x) = y$

Pero entonces $f(x) \in B \Rightarrow y \in B$

□

iii. $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$

Proof. \subseteq) Sea $x \in f^{-1}(Y \setminus B)$ luego $f(x) \in Y \setminus B$

Entonces $f(x) \notin B$ entonces $x = f^{-1}(f(x)) \notin f^{-1}(B)$

Por otro lado $f(x) \in Y$ entonces $x \in f^{-1}(Y)$

Juntando todo $x \in f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(B)$

O lo que es lo mismo $X \setminus f^{-1}(B)$

\supseteq) Sea $x \in X \setminus f^{-1}(B)$

Entonces $x \in X$ entonces $f(x) \in f(X) = Y$

Tambien $x \notin f^{-1}(B)$ por lo que $f(x) \notin B$

Luego $f(x) \in Y \setminus B$

Finalmente $x = f^{-1}(f(x)) \in f^{-1}(Y \setminus B)$

□

iv. $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

Proof. \subseteq) Sea $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$ luego $f(x) \in B_1 \cup B_2$

Luego $f(x) \in B_1$ por lo que $x \in f^{-1}(B_1)$

Finalmente $x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

\supseteq) Sea $x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

Luego $x \in f^{-1}(B_1)$ entonces $f(x) \in B_1$

Por tanto $f(x) \in B_1 \cup B_2$

Finalmente $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$

□

v. $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

Proof. \subseteq) Sea $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2)$ entonces $f(x) \in B_1 \cap B_2$

Por lo que $f(x) \in B_1$ esto implica $x \in f^{-1}(B_1)$

Tambien $f(x) \in B_2$ que implica $f(x) \in f^{-1}(B_2)$

Finalmente $f(x) \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

\supseteq) Sea $x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

Luego $x \in f^{-1}(B_1)$ por lo que $f(x) \in B_1$ y con el mismo argumento $f(x) \in B_2$

Entonces tenemos $f(x) \in B_1 \cap B_2$

Finalmente $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2)$ □

4)b) Sean $f : X \rightarrow Y$ una función y B_i Una familia infinita de subconjuntos de Y vale:

i. $f^{-1}(\bigcup B_i) = \bigcup f^{-1}(B_i)$

Proof. \subseteq) Sea $x \in f^{-1}(\bigcup B_i)$ entonces $f(x) \in \bigcup B_i$

Luego $f(x) \in B_j$ para algún B_j

Por ende $x \in f^{-1}(B_j) \subseteq \bigcup f^{-1}(B_i)$

Finalmente $x \in \bigcup f^{-1}(B_i)$

\supseteq) Por hipótesis sabemos $\exists j \in \mathbb{N}$ tal que $x \in f^{-1}(B_j)$

Por lo que $f(x) \in B_j$ y entonces $f(x) \in \bigcup B_j$

Luego $x \in f^{-1}(\bigcup B_j)$ □

ii. $f^{-1}(\bigcap B_i) = \bigcap f^{-1}(B_i)$

\subseteq) Sea $x \in f^{-1}(\bigcap B_i)$ luego $f(x) \in \bigcap B_i$

Entonces $f(x) \in B_i \quad \forall i \in \mathbb{N}$ luego $x \in f^{-1}(B_i) \quad \forall i \in \mathbb{N}$

Finalmente $x \in \bigcap f^{-1}(B_i)$

La otra inclusión sale de la misma forma que todos los ejercicios arriba , queda como ejercicio para alguien con muchas ganas

5) Sea $f : X \rightarrow Y$ una función. Probar que $f(f^{-1}(B)) = B$ para cada $B \subseteq Y$ si y sólo si f es suryectiva

Proof. \Leftarrow) Por ejercicio anterior sabemos que $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ probemos la otra inclusión.

Sea $y \in B$ luego $y \in Y$ como f suryectiva $\exists x \in X$ tal que $f(x) = y$ equivalentemente $x = f^{-1}(y)$

Luego $y = f(x) = f(f^{-1}(y)) \in f(f^{-1}(B))$

Entonces $y \in f(f^{-1}(B)) \quad \forall y \in B$ y por ende $B \subseteq f(f^{-1}(B))$

Finalmente $B = f(f^{-1}(B))$ para cualquier $B \subseteq Y$

\Rightarrow) Tenemos la igualdad para cada $B \subseteq Y$ en particular vale para Y

Luego $f(f^{-1}(Y)) = Y$ por lo tanto f es suryectiva

Si no fuera suryectiva tiene que existir algún $y \in Y$ tal que $f^{-1}(y) = \emptyset$

Por lo que $f^{-1}(y) \notin f^{-1}(Y)$ entonces $y \notin f(f^{-1}(Y))$

Finalmente $Y \neq f(f^{-1}(Y))$ □

6) Sea $f : X \rightarrow Y$ una función. Luego las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. f es inyectiva
2. $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ para todo $A, B \subseteq X$
3. $f^{-1}(f(A)) = A$ para todo $A \subseteq X$
4. $f(A) \cap f(B) = \emptyset$ para todo par de subconjuntos A, B tales que $A \cap B = \emptyset$
5. $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$ para todo $B \subseteq A \subseteq X$

Proof. 1) \Rightarrow 2) Sabemos que $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ probemos la otra inclusión

Sea $y \in f(A) \cap f(B)$ luego $y \in f(A)$ y $y \in f(B)$

Por esto sabemos que $\exists x \in A$ tal que $f(x) = y$ y también que $\exists x' \in B$ tal que $f(x') = y$

Luego $f(x) = y = f(x')$ y como f es inyectiva tenemos que $x = x'$

Luego ambos x, x' (que son el mismo) están en A y ambos están en B

Resumiendo $x \in A \cap B$ y por ende $y = f(x) \in f(A \cap B)$

Luego $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

2 \Rightarrow 3) Por ej anterior sabemos que $A \cap B \subseteq f^{-1}(f(A \cap B))$. Probemos la otra inclusión

Sea $x \in f^{-1}(f(A \cap B))$ entonces $f(x) \in f(A \cap B)$

Y como $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ tenemos $f(x) \in f(A) \cap f(B)$

Entonces $f(x) \in f(A)$ luego $x \in A$ por otro lado $f(x) \in f(B)$ luego $x \in B$

Finalmente $x \in A \cap B$

3 \Rightarrow 4) Supongamos que $f(A) \cap f(B) \neq \emptyset$ luego $\exists y \in f(A) \cap f(B)$

Luego tenemos $y \in f(A)$ entonces $\exists x \in A$ tal que $f(x) = y$

Y también $y \in f(B)$ entonces $\exists x' \in B$ tal que $f(x') = y$

Entonces tenemos $x' = f^{-1}(f(x')) = f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x$

Luego $x = x'$ por lo que $x \in A \cap B$ lo que es absurdo

Provino de suponer $f(A) \cap f(B) \neq \emptyset$

Entonces $f(A) \cap f(B) = \emptyset$

4 \Rightarrow 5) Primero asumamos $A \neq B$ si fueran iguales es trivial

\supseteq) Sea $y \in f(A) \setminus f(B)$

Luego $y \in f(A)$ entonces $\exists x \in A$ tal que $f(x) = y$

Por otro lado $y \notin f(B)$ entonces $\nexists x \in B$ tal que $f(x) = y$

Luego $x \in A \setminus B$ por lo que $f(x) \in f(A \setminus B)$

\subseteq) Sea $y \in f(A \setminus B)$ luego $\exists x \in A \setminus B$ tal que $f(x) = y$

Luego $x \in A$ por ende $f(x) \in f(A)$

Y tambien $x \notin B$ por ende $\{x\} \cap B = \emptyset$

Por hipótesis (4) sabemos $\{f(x)\} \cap f(B) = f(\{x\}) \cap f(B) = \emptyset$ entonces $f(x) \notin f(B)$

Finalmente $y = f(x) \in f(A) \setminus f(B)$

□

7) Para cada subconjunto S de un conjunto A dado , se define la función característicade S , $X_S : A \rightarrow 0, 1$, por

$$f(a) = \begin{cases} 1 & a \in S \\ 0 & a \notin S \end{cases}$$

i. $X_{S \cap T} = X_S \cap X_T$

Proof. Sea $a \in S \cap T$ entonces $X_{S \cap T}(a) = 1$

Ademas $a \in S$ y $a \in T$ luego $X_S(a).X_T(a) = 1$

Si $a \notin S \cap T$ luego $a \notin S$ y ademas $a \notin T$ con esto sale trivialmente

□

ii. $X_{A \setminus S} = 1 - X_S$

Proof. Sea $a \in A \setminus S$ tenemos $X_{A \setminus S}(a) = 1$

Además $a \in A$ y $a \notin S$ por lo tanto $1 - X_S(a) = 1$

Sea $a \notin A \setminus S$ luego $X_{A \setminus S}(a) = 0$

Por otro lado $a \in S$ entonces $1 - X_S(a) = 0$

□

iii. $X_S + X_T = X_{S \cup T} + X_{S \cap T}$

Caso I) $a \in S \setminus T$ luego $a \in S \cup T$ y por otro lado $a \notin S \cap T$ entonces $X_S(a)$

Luego $X_S(a) + X_T(a) = 1 + 0 = X_{S \cup T}(a) + X_{S \cap T}(a)$

Caso II) $a \in S$ y $a \in T$ entonces $a \in S \cup T$ sale de la misma forma

Caso III) $a \notin S$ y $a \in T$ es exactamente igual que el Caso i)

Caso IV) $a \notin S$ y además $a \notin T$ entonces $a \notin S \cup T$ y también $a \notin S \cap T$ es tambien trivial

9) Sea \sim una relación de equivalencia sobre un conjunto A . Para cada $a \in A$ se define el conjunto $S_a = \{b \in A : a \sim b\}$. Luego vale:

- i. Para todo par de elementos $a_1, a_2 \in A$ vale: $S_{a_1} = S_{a_2}$ o $S_{a_1} \cap S_{a_2} = \emptyset$

Proof. Es trivial ver que si se da alguno de los dos el otro no se da.

Veamos para completar que si uno no se da entonces el otro si se da.

$S_{a_1} \cap S_{a_2} \neq \emptyset$ tomamos el x que esta en la intersección

Luego $x \sim a_1$ y por otro lado $x \sim a_2$

Luego sea $y_1 \in S_{a_1}$ tenemos $y_1 \sim a_1 \sim x \sim a_2$ entonces $y_1 \in S_{a_2}$

Y sea $y_2 \in S_{a_2}$ tenemos $y_2 \sim a_2 \sim x \sim a_1$ entonces $y_2 \in S_{a_1}$

Finalmente es evidente que $S_{a_1} \neq S_{a_2}$ implica la intersección es vacía, si la intersección no fuera vacía tendríamos el argumento de arriba para ver que $S_{a_1} = S_{a_2}$ y esto sería absurdo \square

- ii. $A = \bigcup_{a \in A} S_a$

Esto es trivial, dada la definición del ejercicio, no veo que haya que resolver nada

10) Sea A tal que $\#A = n$ luego $\#\mathcal{P}(A) = 2^n$

Usaremos inducción

- $n = 1$, Luego $A = \{x\}$ tiene un elemento entonces $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, x\}$ esto cumple el caso base.

- $n \Rightarrow n + 1$ Sea A tal que $\#A = n$. Entonces $\exists x \in A$ Luego tomemos $B = A \setminus \{x\}$

Por un lado sabemos, por hipótesis, que $\#B \setminus \{x\} = n$ entonces tenemos $g : B \setminus \{x\} \rightarrow \mathbb{I}_n$ biyectiva. Además es evidente que $\#\{x\} = 1$

Luego existe tenemos $f : A \rightarrow \mathbb{I}_{n+1}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & x \in B \setminus \{x\} \\ n + 1 & x \in \{x\} \end{cases}$$

Sabemos que f biyectiva por como fue construida

Luego $\#A = \#\mathbb{I}_{n+1} = n + 1$

11) Sea A un conjunto. Probar que son equivalentes:

1. A es infinito
2. $\forall x \in A$, existe una función $f_x : A \rightarrow A \setminus \{x\}$ biyectiva
3. para todo $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset A$, existe una función $f_{\{x_1, x_2, \dots, x_n\}} : A \rightarrow A \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ biyectiva

Proof. $1 \Rightarrow 2$) Como A es numerable $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

Sea $x \in A$ luego $x = x_j$ para algún $j \in \mathbb{N}$.

Luego tenemos una función $g_x : A \rightarrow A_{reordenado} = A$ biyectiva

$$g_x(x_n) = \begin{cases} x_1 & n = j \\ x_j & n = 1 \\ x_n & n \neq j, n \neq 1 \end{cases}$$

Luego sea $f : A \rightarrow X \setminus \{x_1\}$ dada por $f(x_n) = x_{n+1}$ es biyectiva

Finalmente tenemos $f \circ g_x : A \rightarrow A \setminus \{x\}$ que es biyectiva por composición

□

$2 \Rightarrow 3$) Para cada x_n Tengo $f_{x_n} : A \rightarrow A \setminus \{x_n\}$ biyectiva.

Componiendo todas estas funciones tengo una $f : A \rightarrow A \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ biyectiva

$3 \Rightarrow 1$) Suponemos que A es finito, pero entonces tenemos $A \setminus \{x\} \subseteq A$ y además tenemos $f : A \rightarrow A \setminus \{x\}$ inyectiva. Luego por lema probado en teórica $A = A \setminus \{x\}$ lo que es absurdo
Ej 12) Sea A un conjunto numerable y B un conjunto. Supongamos que existe un $f : A \rightarrow B$ sobreyectiva. Entonces B es a lo sumo numerable

Proof. Sabemos que A numerable luego $A \sim \mathbb{N}$

Juntando todo $\mathbb{N} \sim A \twoheadrightarrow B$ donde la doble flecha indica sobreyectividad

Entonces existe $g : \mathbb{N} \rightarrow B$ sobreyectiva

Luego para cada $b \in B$ existe un único conjunto (si no g no estaría bien definida) tal que

$S(b) = \{i \in \mathbb{N} : g(i) = b\}$ que sabemos no es vacío por que g es sobreyectiva o sea que todo $b \in B$ tiene preimagen. También sabemos que cada $S(b)$ tiene mínimo por que es un subconjunto de los naturales.

Ahora considero $\mathbb{N}' = \bigcup_{b \in B} \min(S(b))$ esta unión es trivialmente disjunta y vemos que $\mathbb{N}' \subseteq \mathbb{N}$

Y ahora podemos construir una función $g' : B \rightarrow \mathbb{N}'$ dado por $g'(b) = \min(S(b))$

Esta es evidentemente sobreyectiva, por que para cada $x \in \mathbb{N}'$ sabemos que x es mínimo de un único conjunto dado por $b \in B$

g' es inyectiva. Sea $b, b' \in B$ tal que $g'(b) = g'(b')$ luego $\min(S(b)) = \min(S(b'))$ como los mínimos son únicos y cada $S(b)$ es disjunto con cualquier otro entonces $b = b'$

Luego g' es biyectiva entonces $B \sim \mathbb{N}' \subseteq \mathbb{N}$

Por ende $\#B \leq \#\mathbb{N}$

□

Ej 13)

- $\mathbb{Z}_{\leq -1}$: Consideremos la función $f : \mathbb{Z}_{\leq -1} \rightarrow \mathbb{N}$ dada por $f(x) = |x|$ que es trivialmente biyectiva
- $\mathbb{Z}_{\geq -3}$: Sea $f : \mathbb{Z}_{\geq -3} \rightarrow \mathbb{N}$ dada por $-1 \mapsto 1, -2 \mapsto 2, -3 \mapsto 3, 0 \mapsto 4$ y después $x \mapsto x + 4 \quad \forall x \geq 1$. f es biyectiva
- $3\mathbb{N}$: Tenemos la función $f : 3\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dada por $f(x) = \frac{x}{3}$ trivialmente biyectiva

- \mathbb{Z} : Tenemos $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ biyectiva

$$f(x) = \begin{cases} -2x & x < 0 \\ 2x + 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

- $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$: Sea $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dada por $f(n, m) = 2^n 3^m$ es inyectiva por unicidad de factorización en primos. Luego sabemos que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es a lo sumo numerable como además sabemos que es infinito , entonces es numerable
- Sea la función $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} 2^y 3^{-2x} & x < 0 \\ 2^y 3^{2x+1} & x \geq 0 \end{cases}$$

Es trivialmente inyectiva devuelta por unicidad de descomposicion en primos y como $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ es evidentemente infinito entonces es numerable

- \mathbb{Q} : Usando una función casi igual que la de arriba podemos ver que $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ es numerable.

Consideremos $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ dada por $f(x, y) = \frac{x}{y}$ sobreyectiva por que cualquier racional se escribe como division de enteros. Entonces \mathbb{Q} es a lo sumo numerable y ademas es infinito , entonces es numerable

- \mathbb{N}^n : To mamos $f : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ dada por $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_n^{a_n}$ con p_n primos distintos dos a dos. f es inyectiva. Luego usando el mismo argumento que antes tenemos que \mathbb{N}^n con $n \in \mathbb{N}$ es numerable

Ej 14)

- Sean A y B conjuntos contables entonces $A \cup B$ es contable.

Proof. Aquí voy a asumir siempre que A y B son disjuntos , si no lo fueran simplemente se podría usar un $A' = A \setminus B$ para que la intersección no moleste y probaríamos todo para $A' = A \setminus B$ sabiendo que $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$ y por lo tanto tienen el mismo cardinal

Si ambos son finitos es evidente que su union es finita.

Si por ejemplo A es finito y B numerable. Sea $\#A = n$. Luego tenemos $g : A \rightarrow \mathbb{I}_n$ biyectiva

Por otro lado como B es numerable tenemos $h : B \rightarrow \mathbb{N}$ biyectiva

$f : A \cup B \rightarrow \mathbb{N}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & x \in A \\ h(x) + n & x \in B \end{cases}$$

que es sobreyectiva, principalmente por ser composición de sobreyectivas

Si ambos son numerables devuelta aprovechando $f : A \rightarrow \mathbb{N}$ sobreyectiva y $g : B \rightarrow \mathbb{N}$ sobreyectiva.

Luego $h : A \cup B \rightarrow \mathbb{N}$

$$f(x) = \begin{cases} 2g(x) & x \in A \\ 2f(x) + 1 & x \in B \end{cases}$$

Es evidentemente inyectiva, mas considerando que A es disjunto con B entonces podemos usar sus funciones ya biyectivas para verlo facilmente, también saldría tambien si no lo fueran!

Doy un ejemplo, sean $a, a' \in A$ tal que $f(a) = f(a')$ entonces $2g(x) = 2g(x') \Rightarrow g(x) = g(x')$ como g biyectiva $x = x'$

Biyectiva, se pueden ver casos pares e impares, si $x \in \mathbb{N}$ es par seguro existe un $x' \in \mathbb{N}$ tal que $2x' = x$ y luego como x' es natural seguro tiene preimagen dada por g considerando que g es biyectiva

□

- ii. Sea $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una familia de conjuntos contables entonces $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ es contable

Devuelta vamos a considerar que son disjuntos dos a dos.

Unión de numerables finitos disjuntos es trivialmente numerable

Veamos unión numerable de numerables disjuntos (insisto si no lo fueran se reescriben convenientemente sacando las intersecciones, si alguna intersección fuese algun conjunto entero entonces no aportaba nada unirlo de todas maneras)

Sea A_n numerable existe $f_n : \mathbb{N} \rightarrow A_n$ sobreyectiva

Usando esto tenemos $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ dada por $g(n, m) = f_n(m)$

Esta es inyectiva, si fijas un n entonces tenes f_n que es inyectiva entonces

Sean $m, m' \in \mathbb{N}$ sabemos $f_n(m) = f_n(m') \iff m = m'$

Si los n son distintos $f_{n'}(m) \subseteq A_{n'} \neq A_n \supseteq f_n(m)$ entonces $f_{n'}(m) \neq f_n(m) \quad \forall m \in \mathbb{N}$

Sea $y \in \bigcup A_n$ luego $y \in A_i$ para algún $i \in \mathbb{N}$ entonces tenemos $(i, f_i^{-1}(y)) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ que es claramente preimagen de y

Luego $\bigcup A_n$ es numerable

- iii. Sea A un conjunto finito y $S = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} A^m$ entonces $\#S = \aleph_0$

Como A es finito sabemos que A^m es finito para cualquier $m \in \mathbb{N}$ además es evidente que son disjuntos para distintos m . Luego por ii) tenemos que S es numerable ($\#S = \aleph_0$)

Notemos que dado cualquier alfabeto hay mas números reales que palabras para nombrarlos. Esto vale por que dado un conjunto A de todos los caracteres posibles si hacemos $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} A^m$ eso seria todas las palabras posibles de todas las longitudes posibles y por parte ii) esto es numerable

Ej 15) Sean A y B conjuntos disjuntos, A infinito y B numerable entonces:

(a) Existe una biyección entre $A \cup B$ y A

Proof. Simple sabemos que como A es infinito existe $Y \subseteq A$ tal que Y es numerable
Luego tenemos que

$$A \cup B = [(A \setminus Y) \cup Y] \cup B = (A \setminus Y) \cup (Y \cup B)$$

Luego como unión de numerables es numerable $Y \cup B \sim Y$

Juntando todo tenemos

$$A \cup B = [(A \setminus Y) \cup Y] \cup B = (A \setminus Y) \cup (Y \cup B) \sim (A \setminus Y) \cup Y = A$$

□

(b) Si A no numerable y $B \subseteq A$ numerable, existe una biyección entre $A \setminus B$ y A

Proof. Sabemos que B es numerable luego podemos escribirlo como $B = \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$
De este modo es facil ver que existe $f : B \rightarrow \mathbb{N}_{pares}$ dada por $f(b_n) = b_{2n}$ biyectiva
Luego podemos armar $g : X \rightarrow (X \setminus B) \cup B_{pares}$

$$g(x) = \begin{cases} x & x \in X \setminus B \\ f(x) & x \in B \end{cases}$$

Biyectiva. Entonces $X \sim (X \setminus B) \cup B_{pares} \subseteq X$

□

(c) Observación. Como \mathbb{R} es no numerable y \mathbb{Q} es numerable $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \sim \mathbb{R}$ entonces $\mathbb{R} \sim \mathbb{I}$

16) El conjunto de todos los polinomios de coeficientes racionales es numerable.

Proof. Por un lado tenemos una $f : \mathbb{Q}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Q}[X]_{\leq n}$ dada por

$$f(q_0, q_1, \dots, q_n) = \sum_{j=0}^n q_j X^j$$

que es trivialmente biyectiva.

Por otro lado sabemos $\mathbb{Q}^{n+1} \sim \mathbb{N}$. Luego $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}^{n+1} \sim \mathbb{Q}[X]_{\leq n}$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$ fijo
Entonces el conjunto de polinomios de algún grado fijo es numerable.

Finalmente

$$\mathbb{Q}[X] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}[X]_{\leq n}$$

Como es una unión numerable de numerables, $\mathbb{Q}[X]$ es numerable

□

17) Se dice que un número complejo z es *algebraico* si existen enteros a_0, \dots, a_n no todos nulos, tales que

$$a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n = 0$$

1. El conjunto de todos los números algebraicos es numerable

Proof. Por la definición sabemos que los números algebraicos son raíces complejas de algún polinomio de coeficientes enteros

Ahora sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ no nulo, el conjunto de las raíces complejas de ese polinomio $S(f) = \{z \in \mathbb{C} : f(z) = 0\}$

Es finito, a lo sumo $\text{gr}(f)$ (puede ser 0 inclusive)

Luego

$$\mathcal{A} = \bigcup_{f \in \mathbb{Q}[X] \setminus \{0\}} S(f)$$

Donde \mathcal{A} es el conjunto de los números algebraicos

Y como \mathcal{A} es unión de numerables conjuntos contables y disjuntos es a lo sumo numerable

Pero además es fácil ver que por ejemplo los racionales son todos algebraicos (ejercicio para el lector)

Luego hay infinitos números algebraicos, entonces \mathcal{A} es numerable

□

2. Existen números reales que no son algebraicos (Estos se llaman *trascendentes*)

Por inciso anterior sabemos que hay numerables *algebraicos* sin embargo hay más que numerables *reales* por ende debe haber reales que no son algebraicos

18) Sea $X \subseteq \mathbb{R}_{>0}$ un conjunto de números reales positivos. Supongamos que existe una constante positiva C tal que para cualquier subconjunto finito $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq X$ vale $\sum_{i=1}^n x_i \leq C$ entonces X es contable

Proof. Sea $S = \{p : p = \sum_{i=1}^n x_i \leq C \quad x_i \in X\}$ luego C es supremo de S pero entonces tenemos una sucesión a_n que converge a C de la forma

$a_1 = p = x_1 + \dots + x_n$ suma finita de elementos de X tal que la suma es menor que C □

19) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función monótona entonces $\#(\{x \in \mathbb{R} : f \text{ no es continua}\}) \leq \aleph_0$