

Ejercicio 1. Idea: A primera vista dado un a_1 parecería que a_2 puede valer dos cosas nada mas, $a_1 - 1$ o $a_1 + 1$. Esto valdría por que la sucesión es de numeros naturales y para cada natural solo hay 2 elementos a distancia 1. Pero eso no es cierto si $a_1 = 0$ si fuese así tendríamos solo una opción natural para a_2 que sería $a_2 = 1$ y esto también pasa para cualquier momento de las sucesiones que armemos si $a_n = 0$ entonces $a_{n+1} = 1$.

Entonces lo que vamos a ver es un subconjunto de A en donde las sucesiones arrancan en un numero fijo, despues pasan a ser ese numero fijo + 1 y despues elije entre sumar uno o restar uno y despues si o si suman uno y repiten periódicamente ese comportamiento, un turno elijen el otro suman. Despues vamos a ver que ese conjunto tiene cardinal \mathfrak{c}

Si logramos esto tendríamos un subconjunto de A que tiene cardinal \mathfrak{c} por lo tanto tiene cardinal mayor o igual que \mathfrak{c} y buscar una cota superior va a ser facil

Empezemos:

Sea

$$A_i = \{(a_n)_n \subset \mathbb{N} : |a_{n+1} - a_n| = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, a_1 = i \in \mathbb{N}_{>0} \text{ y } a_{2n} = a_{2n-1} + 1 \neq 0 \quad \forall n_0 > 1\}$$

Esto es justo lo que dijimos arriba, el primer elemento fijo y despues sumamos 1 obligado, despues tenemos opcion, despues sumamos 1 obligado y así sucesivamente

Estos son todos subconjuntos de A por lo tanto su unión también es subconjunto de A

Ahora cuando armamos sucesiones en un A_i para cada n impar podemos elegir entre dos opciones por lo tanto tenemos numerables (igual cantidad que numeros naturales pares) turnos en los que elegimos entre dos opciones. También tenemos numerables turnos donde no elegimos, pero eso no nos importa

Por lo tanto

$$\#A_i = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$$

Como sabemos que unión numerable de conjuntos de cardinal \mathfrak{c} tiene cardinal \mathfrak{c}

Tenemos :

$$\#\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = \mathfrak{c}$$

Como ya dijimos $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \subseteq A$ entonces $\#A \geq \mathfrak{c}$

Además A está contenido en el conjunto de las sucesiones naturales que sabemos que tienen cardinal \mathfrak{c} , por lo tanto $\#A \leq \mathfrak{c}$

Finalmente

$$\#A = \mathfrak{c}$$

Ejercicio 2. Sabemos que D es denso en X entonces podemos tomar una sucesión $(d_n)_n \subset D$ tal que d_n converge a x

Ahora por hipótesis $d(x_n, d_n)$ tiende a $d(x, d_n)$, pero esto último tiende a 0, por como tomamos d_n

Entonces $d(x_n, d_n)$ tiende a 0.

Ahora dado un $\epsilon > 0$ tenemos que existe $n_1 > 0$ tal que $d(x_n, d_n) < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq n_1$

Y por convergencia de d_n tenemos que existe $n_2 > 0$ tal que $d(d_n, x) < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n \geq n_2$

Entonces si tomamos $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ tendríamos

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, d_n) + d(d_n, x) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad \forall n \geq n_0$$

O lo que es lo mismo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$$

Ejercicio 3. Sea $(f_j)_j \subset X$ una sucesión de Cauchy en X . Tenemos que dado $\epsilon > 0$ existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$d(f_j, f_l) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(f_j, f_l)}{2^n} < \epsilon \quad \forall j, l \geq j_0$$

Entonces tenemos que $d_n(f_j, f_l) < \epsilon \cdot 2^n$ por lo tanto $\sup_{x \in [-n, n]} |f_j(x) - f_l(x)| < \epsilon \cdot 2^n$

Luego si fijamos un $x \in [-n, n]$ tenemos $|f_j(x) - f_k(x)| < \epsilon \cdot 2^n \quad \forall j, k \geq j_0$

Esto nos dice que $f_j(x)$ es una sucesión de Cauchy

Ahora $f_j(x)$ es una sucesión de la imagen de f que sabemos que es $[0, 1]$ que es compacto.

Por ser compacto es completo, entonces por ser sucesión de Cauchy en un completo $f_j(x)$ converge digamos a $f(x)$

Ahora tengo entonces un candidato a límite que es justamente f donde $f(x) = \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x)$

Estos límites existen (por lo expuesto arriba), y son únicos, no importa que agrandemos el n eso nos va a dar nuevos x a los que encontrare límite, pero no nos va a cambiar el límite de $f_j(x)$ para los x que habíamos visto antes.

Veamos que f es continua, tomemos una sucesión x_k de \mathbb{R} convergente a x

Nos gustaría ver $d(f(x_k), f(x))$ se achica infinitamente. Sabemos que:

Entonces sabiendo que $\sup_{x \in [-n, n]} |f_j(x) - f_l(x)| < \epsilon \cdot 2^n \quad \forall j, k \geq j_0$

Usamos límite de l tendiendo a infinito y conseguimos:

$$\sup_{x \in [-n, n]} |f_j(x) - f(x)| < \epsilon \cdot 2^n \quad \forall j \geq j_0$$

Sabemos $x \in [-n, n]$ para algún $n \in \mathbb{N}$, fijémoslo.

Por convergencia de x_k a partir de algún k_1 tenemos que $x_k \in [-n, n] \quad \forall k \geq k_1$

Ahora voy a fijar j_0 por comodidad

Como $x_0 \in [-n, n]$ tenemos:

$$|f_{j_0}(x_0) - f(x_0)| < \epsilon \cdot 2^n$$

Como $x_k \in [-n, n] \quad \forall k \geq k_1$

$$|f_{j_0}(x_k) - f(x_k)| < \epsilon \cdot 2^n \quad \forall k \geq k_1$$

Por continuidad de f_j tenemos un k_2 tal que dado un j_0

$$d(f_{j_0}(x_k), f_{j_0}(x_0)) < \epsilon \quad \forall k \geq k_2$$

Veamos que $d(f(x_k), f(x_0))$ se achica, tomemos $k_0 = \max\{k_1, k_2\}$

$$d(f(x_k), f(x)) \leq d(f(x_k), f_{j_0}(x_k)) + d(f_{j_0}(x_k), f_{j_0}(x_0)) + d(f_{j_0}(x_0), f(x)) < \epsilon \cdot 2^n + \epsilon + \epsilon \cdot 2^n \quad \forall k \geq k_0$$

Habría que corregir los ϵ para que se cancelen los 2^n que son constantes, pero queda claro que esta distancia se puede achicar tanto como querramos, por lo tanto $f(x_k)$ converge a $f(x)$ Veamos que es acotada:

Sabemos que si fijamos cualquier $x \in \mathbb{R}$ tenemos $0 \leq f_j(x) \leq 1 \quad \forall j \in \mathbb{N}$

Por lo tanto fijado un $x \in \mathbb{R}$ sabemos $0 \leq \lim_{j \rightarrow \infty} f_j(x) \leq 1$

Pero entonces $0 \leq f(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Lo cual nos dice que f es acotada

Por lo tanto $|f_j(x) - f(x)| \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall j \in \mathbb{N}$

Podemos concluir que $d_n(f_j, f) = \sup_{x \in [-n, n]} |f_j(x) - f(x)| \leq 1 \quad \forall j \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Finalmente tenemos que:

$$d(f_j, f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(f_j, f)}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sup_{x \in [-n, n]} |f_j(x) - f(x)|}{2^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

Esto me dice que tengo mas o menos controlada la sumatoria. Ahora dado $\epsilon > 0$

Considerando que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}$ es convergente sabemos que las colas de la sumatoria se van haciendo cada vez mas pequeñas existe algún $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{n_0}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \frac{\epsilon}{2}$

Y ademas como ya probamos que f_n converge a f podemos afirmar que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un $j(n)$ tal que $d_n(f_j, f) < \frac{\epsilon}{n_0} \quad \forall j \geq j(n)$

Y como tenemos finitos $n < n_0$ tenemos finitos $j(n)$ y tomemos el máximo de ellos llamemoslo j_0 . Este nos va a servir para d_n con $n < n_0$

Ahora tenemos que

$$d(f_j, f) \leq \sum_{n=1}^{n_0-1} \frac{d_n(f_j, f)}{2^n} + \sum_{n_0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \leq n_0 \frac{\epsilon}{2n_0} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad \forall j \geq j_0$$

Entonces mostramos que f_n converge a f y que $f \in X$. Por lo tanto X es completo

Ejercicio 4.