Cálculo Avanzado

Primer cuatrimestre de 2020

Axioma de elección y lema de Zorn

Axioma de elección (enunciado informal)

Sea $\mathcal{A}$ es familia de conjuntos *no vacíos*,

$$\mathcal{A} = \{A_i \ : \ i \in I\}.$$

Entonces, podemos elegir un elemento de cada A_i.

Axioma de elección (enunciado informal)
Sea $\mathcal{A}$ es familia de conjuntos *no vacíos*,

$$\mathcal{A} = \{A_i \ : \ i \in I\}.$$

Entonces, podemos elegir un elemento de cada A_i.

Axioma de elección
Para todo conjunto X, existe una función

$$e : \mathcal{P}(X) \setminus \emptyset \to X,$$

tal que $e(A) \in A$ para todo $A \in \mathcal{P}(X) \setminus \emptyset$.

El Axioma de elección es intuitivamente cierto.

El Axioma de elección es intuitivamente cierto.

Es equivalente al **Principio de Buena ordenación:** "**Todo conjunto puede ser bien ordenado**", es decir, en todo conjunto podemos definir un orden tal que subconjunto no vacío tenga mínimo.

El Axioma de elección es intuitivamente cierto.

Es equivalente al **Principio de Buena ordenación:** "**Todo conjunto puede ser bien ordenado**", es decir, en todo conjunto podemos definir un orden tal que subconjunto no vacío tenga mínimo.

Este hecho es intuitivamente falso (busquen un buen orden en $\mathbb{R}$).

El Axioma de elección es intuitivamente cierto.

Es equivalente al **Principio de Buena ordenación:** "**Todo conjunto puede ser bien ordenado**", es decir, en todo conjunto podemos definir un orden tal que subconjunto no vacío tenga mínimo.

Este hecho es intuitivamente falso (busquen un buen orden en $\mathbb{R}$).

Otra equivalencia es el **Lema de Zorn,** que vamos a enunciar después, y que es intuitivamente

El Axioma de elección es intuitivamente cierto.

Es equivalente al **Principio de Buena ordenación:** “**Todo conjunto puede ser bien ordenado**”, es decir, en todo conjunto podemos definir un orden tal que subconjunto no vacío tenga mínimo.

Este hecho es intuitivamente falso (busquen un buen orden en $\mathbb{R}$).

Otra equivalencia es el **Lema de Zorn,** que vamos a enunciar después, y que es intuitivamente ¿inentendible?

El Axioma de elección es intuitivamente cierto.

Es equivalente al **Principio de Buena ordenación:** "**Todo conjunto puede ser bien ordenado**", es decir, en todo conjunto podemos definir un orden tal que subconjunto no vacío tenga mínimo.

Este hecho es intuitivamente falso (busquen un buen orden en $\mathbb{R}$).

Otra equivalencia es el **Lema de Zorn,** que vamos a enunciar después, y que es intuitivamente ¿inentendible?

Definición

- Un orden $\leq$ en un conjunto X es *total* si para todo $x, y \in X$ se cumple $x \leq y$ ó $y \leq x$.

El Axioma de elección es intuitivamente cierto.

Es equivalente al **Principio de Buena ordenación:** "**Todo conjunto puede ser bien ordenado**", es decir, en todo conjunto podemos definir un orden tal que subconjunto no vacío tenga mínimo.

Este hecho es intuitivamente falso (busquen un buen orden en $\mathbb{R}$).

Otra equivalencia es el **Lema de Zorn,** que vamos a enunciar después, y que es intuitivamente ¿inentendible?

Definición

- Un orden $\leq$ en un conjunto X es *total* si para todo $x, y \in X$ se cumple $x \leq y$ ó $y \leq x$.
- Un conjunto X con un orden total $\leq$ es *bien ordenado* si todo subconjunto $A \subset X$ no vacío tiene mínimo: existe $a_0 \in A$ tal que $a_0 \leq a$ para todo $a \in A$.

El Axioma de elección es intuitivamente cierto.

Es equivalente al **Principio de Buena ordenación:** “**Todo conjunto puede ser bien ordenado**”, es decir, en todo conjunto podemos definir un orden tal que subconjunto no vacío tenga mínimo.

Este hecho es intuitivamente falso (busquen un buen orden en $\mathbb{R}$).

Otra equivalencia es el **Lema de Zorn,** que vamos a enunciar después, y que es intuitivamente ¿inentendible?

Definición

- Un orden $\leq$ en un conjunto X es *total* si para todo $x, y \in X$ se cumple $x \leq y$ ó $y \leq x$.
- Un conjunto X con un orden total $\leq$ es *bien ordenado* si todo subconjunto $A \subset X$ no vacío tiene mínimo: existe $a_0 \in A$ tal que $a_0 \leq a$ para todo $a \in A$.

Principio de buena ordenación (de Zermelo)

En todo conjunto se puede definir un buen orden.

Principio de buena ordenación
En todo conjunto se puede definir un buen orden.

Principio de buena ordenación
En todo conjunto se puede definir un buen orden.

Es fácil ver que el Principio de buena ordenación implica el Axioma de elección. Si X es un conjunto bien ordenado, podemos definir

$$e : \mathcal{P}(X) \setminus \emptyset \to X,$$

como

$$e(A) = \min A.$$

Principio de buena ordenación
En todo conjunto se puede definir un buen orden.

Es fácil ver que el Principio de buena ordenación implica el Axioma de elección. Si X es un conjunto bien ordenado, podemos definir

$$e : \mathcal{P}(X) \setminus \emptyset \to X,$$

como

$$e(A) = \min A.$$

La vuelta no la vemos.

Definición

Sea X un conjunto con un orden parcial $\leq$. Una *cadena* en X es un subconjunto totalmente ordenado de X.

Definición

Sea X un conjunto con un orden parcial $\leq$. Una *cadena* en X es un subconjunto totalmente ordenado de X.

Esto significa que $A \subset X$ es una cadena si dados $a_1, a_2 \in A$, se tiene $a_1 \leq a_2$ ó $a_2 \leq a_1$.

Definición

Sea X un conjunto con un orden parcial $\leq$. Una *cadena* en X es un subconjunto totalmente ordenado de X.

Esto significa que $A \subset X$ es una cadena si dados $a_1, a_2 \in A$, se tiene $a_1 \leq a_2$ ó $a_2 \leq a_1$. En otras palabras, el conjunto A con el orden inducido por X resulta un conjunto totalmente ordenado.

Definición

Sea X un conjunto con un orden parcial $\leq$. Una *cadena* en X es un subconjunto totalmente ordenado de X.

Esto significa que $A \subset X$ es una cadena si dados $a_1, a_2 \in A$, se tiene $a_1 \leq a_2$ ó $a_2 \leq a_1$. En otras palabras, el conjunto A con el orden inducido por X resulta un conjunto totalmente ordenado.

Definición

Sea X un conjunto con un orden parcial $\leq$. Un elemento $x_0 \in X$ es *maximal* si $x_0 \leq x$ implica $x = x_0$.

Definición

Sea X un conjunto con un orden parcial $\leq$. Una *cadena* en X es un subconjunto totalmente ordenado de X.

Esto significa que $A \subset X$ es una cadena si dados $a_1, a_2 \in A$, se tiene $a_1 \leq a_2$ ó $a_2 \leq a_1$. En otras palabras, el conjunto A con el orden inducido por X resulta un conjunto totalmente ordenado.

Definición

Sea X un conjunto con un orden parcial $\leq$. Un elemento $x_0 \in X$ es *maximal* si $x_0 \leq x$ implica $x = x_0$.

Es decir, x_0 es maximal si, dado cualquier $x \in X$, o bien $x \leq x_0$ o bien x y x_0 son incomparables. O sea, x_0 le gana a todos los x con los que se puede comparar.

Definición

Sea X un conjunto con un orden parcial $\leq$. Un elemento $x_0 \in X$ es *maximal* si $x_0 \leq x$ implica $x = x_0$.

Definición

Sea X un conjunto con un orden parcial $\leq$. Un elemento $x_0 \in X$ es *maximal* si $x_0 \leq x$ implica $x = x_0$.

Ejemplo

- Sea $X = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ con el orden $x \leq y$ si x divide a y.
  Entonces, X tiene un montón de elementos maximales (todo $x > 50$ es maximal).

Definición

Sea X un conjunto con un orden parcial $\leq$. Un elemento $x_0 \in X$ es *maximal* si $x_0 \leq x$ implica $x = x_0$.

Ejemplo

- Sea $X = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ con el orden $x \leq y$ si x divide a y.
  Entonces, X tiene un montón de elementos maximales (todo $x > 50$ es maximal).
- Sea M un conjunto y X el conjunto de subconjuntos propios de M con el orden dado por la inclusión.

Definición

Sea X un conjunto con un orden parcial $\leq$. Un elemento $x_0 \in X$ es *maximal* si $x_0 \leq x$ implica $x = x_0$.

Ejemplo

- Sea $X = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ con el orden $x \leq y$ si x divide a y.
  Entonces, X tiene un montón de elementos maximales (todo $x > 50$ es maximal).
- Sea M un conjunto y X el conjunto de subconjuntos propios de M con el orden dado por la inclusión.
  Los elementos maximales de X son los de la forma $M \setminus \{m\}$, con $m \in M$.

Definición

Sea X un conjunto con un orden parcial $\leq$. Un elemento $x_0 \in X$ es *maximal* si $x_0 \leq x$ implica $x = x_0$.

Ejemplo

- Sea $X = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ con el orden $x \leq y$ si x divide a y.
  Entonces, X tiene un montón de elementos maximales (todo $x > 50$ es maximal).
- Sea M un conjunto y X el conjunto de subconjuntos propios de M con el orden dado por la inclusión.
  Los elementos maximales de X son los de la forma $M \setminus \{m\}$, con $m \in M$.
- Sea X el conjunto de conjuntos linealmente independientes de $\mathbb{R}^3$ con el orden dado por la inclusión. ¿Cuáles son los elementos maximales?

Lema de Zorn

Si toda cadena de un conjunto parcialmente ordenado X admite una cota superior, entonces X tiene elementos maximales.

Lema de Zorn
Si toda cadena de un conjunto parcialmente ordenado X admite una cota superior, entonces X tiene elementos maximales.

Lema de Zorn 2
Si toda cadena de un conjunto parcialmente ordenado X admite una cota superior, entonces todo elemento precede a un elemento maximal.

Lema de Zorn
Si toda cadena de un conjunto parcialmente ordenado X admite una cota superior, entonces X tiene elementos maximales.

Lema de Zorn 2
Si toda cadena de un conjunto parcialmente ordenado X admite una cota superior, entonces todo elemento precede a un elemento maximal.

Este segundo enunciado dice que no sólo hay elementos maximales, sino que dado cualquier $x \in X$ existe $m \in X$ maximal tal que $x \leq m$.

Lema de Zorn
Si toda cadena de un conjunto parcialmente ordenado X admite una cota superior, entonces X tiene elementos maximales.

Lema de Zorn 2
Si toda cadena de un conjunto parcialmente ordenado X admite una cota superior, entonces todo elemento precede a un elemento maximal.

Este segundo enunciado dice que no sólo hay elementos maximales, sino que dado cualquier $x \in X$ existe $m \in X$ maximal tal que $x \leq m$.

En la práctica tenemos ejemplos de cómo se usa el Lema de Zorn.

Usamos el axioma de elección (o alguna variante) para probar las siguientes afirmaciones.

Usamos el axioma de elección (o alguna variante) para probar las siguientes afirmaciones.

- Unión de numerables conjuntos numerables es numerable.

Usamos el axioma de elección (o alguna variante) para probar las siguientes afirmaciones.

- Unión de numerables conjuntos numerables es numerable.
- Dados dos conjuntos X e Y, o bien $\#X \leq \#Y$, o bien $\#Y \leq \#X$. De esto y Cantor-Bernstein se deduce la prop. de tricotomía para los cardinales.

Usamos el axioma de elección (o alguna variante) para probar las siguientes afirmaciones.

- Unión de numerables conjuntos numerables es numerable.
- Dados dos conjuntos X e Y, o bien $\#X \leq \#Y$, o bien $\#Y \leq \#X$. De esto y Cantor-Bernstein se deduce la prop. de tricotomía para los cardinales.
- Todo espacio vectorial no nulo tiene base. Es más, todo conjunto l.i. se extiende a una base y de todo conjunto de generadores se puede extraer una base.

Usamos el axioma de elección (o alguna variante) para probar las siguientes afirmaciones.

- Unión de numerables conjuntos numerables es numerable.
- Dados dos conjuntos X e Y, o bien $\#X \leq \#Y$, o bien $\#Y \leq \#X$. De esto y Cantor-Bernstein se deduce la prop. de tricotomía para los cardinales.
- Todo espacio vectorial no nulo tiene base. Es más, todo conjunto l.i. se extiende a una base y de todo conjunto de generadores se puede extraer una base. Hay resultados similares para otras estructuras algebraicas.

Usamos el axioma de elección (o alguna variante) para probar las siguientes afirmaciones.

- Unión de numerables conjuntos numerables es numerable.
- Dados dos conjuntos X e Y, o bien $\#X \leq \#Y$, o bien $\#Y \leq \#X$. De esto y Cantor-Bernstein se deduce la prop. de tricotomía para los cardinales.
- Todo espacio vectorial no nulo tiene base. Es más, todo conjunto l.i. se extiende a una base y de todo conjunto de generadores se puede extraer una base. Hay resultados similares para otras estructuras algebraicas.
- Resultados fundamentales en casi todas las materias de la carrera.

Entonces, aceptamos el axioma de elección. Y, como consecuencia, aceptamos algunas cosas raras...

Entonces, aceptamos el axioma de elección. Y, como consecuencia, aceptamos algunas cosas raras...

El principio de buena ordenación de Zermelo.

Entonces, aceptamos el axioma de elección. Y, como consecuencia, aceptamos algunas cosas raras...

El principio de buena ordenación de Zermelo.

La paradoja de Banach-Tarski

Entonces, aceptamos el axioma de elección. Y, como consecuencia, aceptamos algunas cosas raras...

El principio de buena ordenación de Zermelo.

La paradoja de Banach-Tarski

Dada una bola tridimensional (las de toda la vida), existe una descomposición de la bola en un número finito subconjuntos disjuntos, que pueden reacomodarse (sin deformarse)

Entonces, aceptamos el axioma de elección. Y, como consecuencia, aceptamos algunas cosas raras...

El principio de buena ordenación de Zermelo.

La paradoja de Banach-Tarski

Dada una bola tridimensional (las de toda la vida), existe una descomposición de la bola en un número finito subconjuntos disjuntos, que pueden reacomodarse (sin deformarse) para construir dos copias idénticas de la bola original.