Práctica 1

1. Sea $n \in \mathbb{N}$ y sea $G_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$.

   (a) Probar que $(G_n\,, \cdot)$ es un grupo abeliano y hallar z^{-1} para cada $z \in G_n$.

   (b) Probar que G_n es cíclico, es decir, que existe $w \in G_n$ que satisface: $\forall\, z \in G_n\ \exists\, k \in \mathbb{Z}$ tal que $z = w^k$.

2. Sea $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

   (a) Probar que $(S^1, \cdot)$ es un grupo abeliano y hallar z^{-1} para cada $z \in S^1$.

   (b) Determinar si S^1 es cíclico.

3. En cada uno de los siguientes casos determinar si $(G, *)$ es un grupo y, en caso afirmativo, determinar si es abeliano:

   (a) $G = \mathbb{Q}_{>0} \qquad a * b = a \cdot b$.

   (b) $G = M_3(\mathbb{Z}) \qquad a * b = a \cdot b$.

   (c) $G = M_n(\mathbb{R}) \qquad a * b = a + b$.

   (d) $G = SL_n(\mathbb{R}) = \{a \in M_n(\mathbb{R}) \mid det\ a = 1\} \qquad a * b = a \cdot b$.

   (e) $G = End_K(V)$, con V un K-espacio vectorial $\qquad f * g = f \circ g$.

   (f) $G = \{f \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \mid d(f(x), f(y)) = d(x, y)\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n\}$
   $f * g = f \circ g$.

   (g) $G = \mathbb{S}(X) = \{f : X \longrightarrow X \mid f \text{ es biyectiva}\}$, donde X es un conjunto no vacío y $f * g = f \circ g$.
   Notación: Cuando $X = \{1, \ldots, n\}$, $\mathbb{S}(X)$ será notado $\mathbb{S}_n$.

   (h) $G = \mathbb{S}(\mathbb{Z}) \qquad f * g = f \circ g^{-1}$.

4. Probar que todos los grupos de 4 elementos son abelianos.

   (Sugerencia: hacer todas las posibles tablas de operaciones).

5. Dado $n \in \mathbb{N}$, sea,

   $$\mathcal{U}_n := \{k \in \mathbb{N} : k \leq n, (k : n) = 1\}.$$

   Probar que $\mathcal{U}_n$, considerado con el producto de número enteros módulo n como operación, es un grupo.

6. Sea G un grupo. Sea $(G^{\text{op}}, \cdot)$ tal que $G^{\text{op}} = G$ como conjunto, y el producto está dado por $g \cdot h = hg$. Mostrar que G^{op} es un grupo. Llamamos a G^{op} el *grupo opuesto de* G.

7. Sean G y H dos grupos. Consideremos la operación $\cdot$ sobre el conjunto $K = G \times H$ dada por $(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1 g_2, h_1 h_2)$. Mostrar que K es un grupo. Llamamos a K el *producto directo de* G *y* H y lo notamos $G \times H$.

8. (a) Sea $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ un grupo abeliano finito. Probar que

   $$\sum_{i=1}^{n} g_i = \sum_{g \in G:\ 2g = 0} g.$$

   (b) Calcular $\displaystyle\sum_{a \in \mathbb{Z}_n} a$.

(c) Calcular $\prod_{w \in G_n} w$.

9. Sea $(G, *)$ un grupo finito y sea $S \subset G$ un subconjunto no vacío. Probar que S es un subgrupo si y sólo si $xy \in S, \forall x, y \in S$.

10. Sea G un grupo y sean H_1 y H_2 dos subgrupos de G.
    (a) Probar que $H_1 \cap H_2$ es un subgrupo.
    (b) Probar que $H_1 \cup H_2$ es un subgrupo si y sólo si $H_1 \subset H_2$ o $H_2 \subset H_1$.
    (c) ¿Es cierto que si $H_1 \cup H_2 \cup H_3$ es un subgrupo de G, entonces $\exists i, j$ con $i \neq j$ tal que $H_i \subset H_j$?

11. Hallar todos los subgrupos cíclicos de: $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_5$, $\mathbb{Z}_6$, $\mathbb{S}_3$, $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ y $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$.

12. Probar que
$$\mathcal{H} = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\}$$
es un subgrupo de $GL_2(\mathbb{C})$.

13. Sean G un grupo y $a \in G$. Probar que $C_G(a) = \{x \in G;\ xa = ax\}$ es un subgrupo de G.

14. Probar que si H es un subgrupo de $\mathbb{Z}$ entonces existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $H = n \cdot \mathbb{Z}$.

15. Probar que si H es un subgrupo finito de $\mathbb{C}^\times$ entonces existe $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $H = G_n$.

16. Dado $n \in \mathbb{N}$, sean $r \in GL_2(\mathbb{R})$ la matriz que representa la rotación en sentido antihorario de ángulo $2\pi/n$ y s la simetría alrededor del eje x. Llamamos *n-grupo Diedral* al subgrupo de $GL_2(\mathbb{R})$ que generan r y s y lo denotamos con $\mathbb{D}_n$. Calcular el orden de $\mathbb{D}_n$.

17. Hallar $ord(x)$ en los casos:
    (a) $G = \mathbb{S}_8$ $\quad x = (1\,2)(5\,6\,7)$ $\quad ; \quad$ $x = (1\,2\,3\,5)(1\,3\,7\,8)$.
    (b) $G = \mathbb{Z}_{12}$ $\quad x = 2$ $\quad ; \quad$ $x = 3$ $\quad ; \quad$ $x = 4$.
    (c) $G = \mathcal{H}$ $\quad x = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.
    (d) $G = S^1$ $\quad x = \cos(\frac{2\pi}{n}) + i \operatorname{sen}(\frac{2\pi}{n})$.
    (e) $G = \mathbb{D}_4$ $\quad x = r^2 s$ $\quad ; \quad$ $x = r^3$.
    (f) G un grupo cualquiera y $x = a^d$, donde $a \in G$ es un elemento de orden n y d es un número natural.

18. Sea $x \in \mathbb{Z}_n$. Probar que $ord(x) = n$ si y sólo si $(x, n) = 1$.

19. (a) Calcular el orden de todos los elementos de $\mathbb{S}_3$.
    (b) Sea $\sigma = (1\,3\,2)$, encontrar el subgrupo $C_{\mathbb{S}_3}(\sigma) = \{r \in \mathbb{S}_3 \mid r\sigma = \sigma r\}$.
    (c) Hallar, si existe, un $\sigma \in \mathbb{S}_3$ tal que el subgrupo $C_{\mathbb{S}_3}(\sigma)$ tenga orden 1, 2, 3, 6.

20. Probar que si G_1 y G_2 son grupos y $g_1 \in G_1, g_2 \in G_2$ son elementos de orden finito, entonces el orden de (g_1, g_2) en $G_1 \times G_2$ es el mínimo común múltiplo entre los órdenes de g_1 y g_2.

21. Sea p un número primo, $m \in \mathbb{N}$ y sea G un grupo de orden p^m. Probar que existe un elemento de orden p en G.

22. Sean $(G, \cdot)$ un grupo y $a, b \in G$
    (a) Probar que las siguientes aplicaciones de G en G son biyectivas y encontrar sus inversas

i. $x \mapsto a \cdot x$ iii. $x \mapsto a \cdot x \cdot a^{-1}$ v. $x \mapsto a \cdot x^{-1} \cdot a^{-1}$
ii. $x \mapsto a \cdot x \cdot b$ iv. $x \mapsto x^{-1}$

(b) Determinar cuáles de estas aplicaciones son morfismos.

(c) Idem en el caso en que G sea abeliano.

23. Dados los grupos:

$$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \qquad \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \qquad \mathbb{Z}_2 \oplus G_4 \qquad \mathbb{Z}_8$$

$$\mathbb{D}_4 \qquad G_8 \qquad \mathcal{H} \qquad \mathcal{K}$$

donde $\mathcal{K} = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$, $|\mathcal{K}| = 8$, $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = k = -j \cdot i$ y $(-1)x = -x, \quad x \in \{-1, i, j, k\}$.
Decidir cuáles son abelianos, cuáles son cíclicos y cuáles son isomorfos entre sí.

Definición : Notamos con $\mathbb{A}_n$ al subgrupo de $\mathbb{S}_n$ formado por las permutaciones pares (es decir, con signo 1).

24. Determinar si G y K son isomorfos en los casos:
(a) $G = \mathbb{Z}_4 \qquad K = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.
(b) $G = \mathbb{Z}_n \qquad K = G_n$.
(c) $G = \mathbb{Z}_{10} \qquad K = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_5$.
(d) $G = \mathbb{Q} \qquad K = \mathbb{R}$.
(e) $G = \mathcal{U}_{16} \qquad K = \mathcal{H}$.
(f) $G = \mathcal{U}_{16} \qquad K = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$.
(g) $G = \mathbb{S}_3 \qquad K = \mathbb{D}_3$.
(h) $G = \mathbb{A}_4 \qquad K = \mathbb{D}_6$.

25. Sea $f : G \longrightarrow G$ un morfismo de grupos. Probar que $ord(f(x))$ divide a $ord(x)$ si $ord(x)$ es finito.

26. Sea $f : G \longrightarrow L$ un epimorfismo. Decidir para cuáles P_i vale:
"G verifica $P_i \Rightarrow L$ verifica P_i"

(P_1) tener n elementos.
(P_2) ser finito.
(P_3) ser conmutativo.
(P_4) ser no conmutativo.
(P_5) ser cíclico.
(P_6) todo elemento tiene orden finito.
(P_7) todo elemento tiene orden infinito.

27. Sea $f : G \longrightarrow L$ un monomorfismo. Decidir para cuáles P_i del ejercicio anterior vale: "L verifica $P_i \Rightarrow G$ verifica P_i".

28. (a) Probar que $Aut(\mathbb{Z}) \simeq G_2$.
(b) Hallar $Hom(G_n\,,\, \mathbb{Z})$.
(c) Hallar $Hom(G\,,\, \mathbb{Z})$ para G un grupo de orden finito.

29. Sea $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \;/\; a, b \in \mathbb{Z}_7, \text{ con } a \neq 0 \right\}$.
(a) Hallar el orden de G.
(b) Para cada primo p que divide al orden de G hallar todos los elementos de G que tengan orden p.

30. Sea p un número primo mayor que 2. Se considera el conjunto

$$G = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix} \right) : \; a, b, c \in \mathbb{Z}_p \right\}$$

Probar que G es un grupo no abeliano tal que todo elemento distinto de la identidad tiene orden p. ¿Qué pasa si $p = 2$?

31. (a) Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Probar que $\{a, b\}$ es un sistema de generadores de $\mathbb{Z}$ si y sólo si $(a, b) = 1$.
    (b) Probar que $\mathbb{Z}$ tiene sistemas de generadores minimales de n elementos $\forall n \in \mathbb{N}$.

32. Sea $G = M_2(\mathbb{Z}_2)$. Hallar $|G|$ y encontrar subgrupos de G de orden 2, 4, 8.

33. (a) Probar que son equivalentes:
    i. G es abeliano.
    ii. La aplicación $f : G \longrightarrow G$ definida por $f(x) = x^{-1}$ es un morfismo de grupos.
    iii. La aplicación $f : G \longrightarrow G$ definida por $f(x) = x^2$ es un morfismo de grupos.
    (b) Probar que si $x^2 = 1$ para todo $x \in G$ entonces G es abeliano.

34. Probar que
    (a) $Hom(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_n) \neq 0$.
    (b) $Hom(\mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_7) = 0$.
    (c) $Hom(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) = 0$.
    (d) No existe un epimorfismo de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

35. Hallar dos grupos G y K no isomorfos tales que $Aut(G) \simeq Aut(K)$.

36. Sea $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \; / \; a, b \in \mathbb{Z}_4, \text{ con } (a, 4) = 1 \right\}$. Probar que G es un grupo no abeliano de orden 8. ¿Es $G \simeq \mathcal{H}$? ¿Es $G \simeq \mathbb{D}_4$?