Cálculo Avanzado - Sucesiones y series de funciones 3

Primer cuatrimestre de 2020

Daniel Carando

Dto. de Matemática - FCEN - UBA

Veremos algunos temas del Capítulo 13 del apunte.

Veremos algunos temas del Capítulo 13 del apunte.

La Sección 13.3 tiene un repaso de series numéricas.

Ya vimos que si X es un espacio métrico, los conjuntos $B(X)$ (funciones acotadas sobre X) o $C_b(X)$ (funciones continuas y acotadas sobre X), con la norma infinito, son espacios de Banach.

Ya vimos que si X es un espacio métrico, los conjuntos $B(X)$ (funciones acotadas sobre X) o $C_b(X)$ (funciones continuas y acotadas sobre X), con la norma infinito, son espacios de Banach.

Vimos, también, que la convergencia en estos espacios (con la norma infinito) conicide con la convergencia uniforme de funciones.

Ya vimos que si X es un espacio métrico, los conjuntos $B(X)$ (funciones acotadas sobre X) o $C_b(X)$ (funciones continuas y acotadas sobre X), con la norma infinito, son espacios de Banach.

Vimos, también, que la convergencia en estos espacios (con la norma infinito) conicide con la convergencia uniforme de funciones.

Esto permite pensar la convergencia uniforme de sucesiones y series de funciones en el marco de convergencia de sucesiones y series en espacios de Banach.

E es un espacio de Banach y $(x_n)_n \subset E$ una sucesión.

E es un espacio de Banach y $(x_n)_n \subset E$ una sucesión.

Definimos la N-ésima suma parcial de $(x_n)_n$ como

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} x_n$$

E es un espacio de Banach y $(x_n)_n \subset E$ una sucesión.

Definimos la N-ésima suma parcial de $(x_n)_n$ como

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} x_n$$

La sucesión $(S_N)_N$ es la sucesión de sumas parciales de $(x_n)_n$.

E es un espacio de Banach y $(x_n)_n \subset E$ una sucesión.

Definimos la N-ésima suma parcial de $(x_n)_n$ como

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} x_n$$

La sucesión $(S_N)_N$ es la sucesión de sumas parciales de $(x_n)_n$.

Definición

Decimos que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

converge cuando existe el límite

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} x_n.$$

E es un espacio de Banach y $(x_n)_n \subset E$ una sucesión.

Definimos la N-ésima suma parcial de $(x_n)_n$ como

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} x_n$$

La sucesión $(S_N)_N$ es la sucesión de sumas parciales de $(x_n)_n$.

Definición

Decimos que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n$$

converge cuando existe el límite

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} x_n.$$

A ese límite, que es un elemento de E, lo llamamos $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Observación

Sea E es un espacio de Banach, $(x_n)_n \subset E$ una sucesión y $(S_N)_N$ la sucesión de sus sumas parciales.

Observación

Sea E es un espacio de Banach, $(x_n)_n \subset E$ una sucesión y $(S_N)_N$ la sucesión de sus sumas parciales.

Por definición, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge si y sólo si la sucesión $(S_N)_N$ converge.

Observación

Sea E es un espacio de Banach, $(x_n)_n \subset E$ una sucesión y $(S_N)_N$ la sucesión de sus sumas parciales.

Por definición, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge si y sólo si la sucesión $(S_N)_N$ converge.

Como E es completo, esto sucede si y sólo si $(S_N)_N$ es de Cauchy.

Observación

Sea E es un espacio de Banach, $(x_n)_n \subset E$ una sucesión y $(S_N)_N$ la sucesión de sus sumas parciales.

Por definición, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge si y sólo si la sucesión $(S_N)_N$ converge.

Como E es completo, esto sucede si y sólo si $(S_N)_N$ es de Cauchy.

Al igual que vimos en Taller para series numéricas (ver Observación 13.3.4 del apunte), esto equivale a lo siguiente:

Observación

Sea E es un espacio de Banach, $(x_n)_n \subset E$ una sucesión y $(S_N)_N$ la sucesión de sus sumas parciales.

Por definición, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge si y sólo si la sucesión $(S_N)_N$ converge.

Como E es completo, esto sucede si y sólo si $(S_N)_N$ es de Cauchy.

Al igual que vimos en Taller para series numéricas (ver Observación 13.3.4 del apunte), esto equivale a lo siguiente:

Dado $\varepsilon > 0$, exite N_0 tal que

$$\Big\| \sum_{n=N+1}^{M} x_n \Big\| < \varepsilon$$

para todo $M \geq N \geq N_0$.

Definición

Decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge absolutamente en E si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty.$$

Definición

Decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge absolutamente en E si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty.$$

Al igual que para series numéricas (y, como veremos, con la misma demostración) vale que convergencia absoluta implica convergencia.

Definición

Decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge absolutamente en E si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty.$$

Al igual que para series numéricas (y, como veremos, con la misma demostración) vale que convergencia absoluta implica convergencia.

Proposición

Sea E es un espacio de Banach y $(x_n)_n \subset E$ una sucesión. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge absolutamente, entonces converge.

Series de funciones

Sea X un conjunto y consideremos para cada $n \in \mathbb{N}$ una función $f_n : X \to \mathbb{R}$.

Series de funciones

Sea X un conjunto y consideremos para cada $n \in \mathbb{N}$ una función $f_n : X \to \mathbb{R}$.

Para cada N, tenemos la función suma parcial

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$$

Series de funciones

Sea X un conjunto y consideremos para cada $n \in \mathbb{N}$ una función $f_n : X \to \mathbb{R}$.

Para cada N, tenemos la función suma parcial

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^{N} f_n(x)$$

Decimos que la serie de funciones $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge (puntual o uniformemente) en X si la sucesión de funciones $(S_N)_N$ converge (puntual o uniformemente) en X.

Criterio de Weierstrass

Supongamos dado n existe $c_n \geq 0$ tal que $|f_n(x)| \leq c_n$ para todo $x \in X$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converge, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge absoluta y uniformemente a una función (acotada) de X en $\mathbb{R}$.