Ejercicio 1.

Ejercicio 2.

Ejercicio 3.

Ejercicio 4.

Ejercicio 5.

Ejercicio 6. a

1. Mostrar que el intervalo $(0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ no es compacto.

   Proof. Tenemos la sucesión de Cauchy $a_n = \frac{1}{n}$ que no converge , por lo tanto no es completo □

2. Sea $S = (a, b) \cap \mathbb{Q}$ con $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Probar que S es un subconjunto cerrado y acotado pero no compacto de $(\mathbb{Q}, d)$, donde d es la métrica usual de $\mathbb{R}$

   Proof. Acotado por a y b es evidente, que es cerrado es facil ver que es igual a su clausura

   No es completo por que tenemos la sucesion $a_n = a+\frac{1}{n}$ que es de Cauchy , pero no converge □

Ejercicio 7. Sea $E = \{e^{(n)} \in \ell^\infty \ / \ n \in \mathbb{N}\}$, donde cada sucesión $e^{(n)} = (e_k^{(n)})_k$ esta definida por $e_k^{(n)} = 0$ si $k \neq n$ y es 1 si $k = n$
Probar que E es discreto, cerrado y acotado

Proof. Es facil ver que cualquier subconjunto de E es abierto.

Sea $A \subset E$, sea $x \in A$ si tomamos $B(x, \frac{1}{2})$ sabemos que $B(x, \frac{1}{2}) = \{x\} \subseteq A$

Por lo tanto A es abierto. Para ver que cualquier sub es cerrado , tomamos $F \subset E$ y miramos su complemento F^c, que como es sub de E tiene que ser abierto por lo recién demostrado. Entonces F es cerrado

Por lo tanto todo subconjunto de E es abierto y cerrado, mostrando que E es discreto.

Cerrado: Tomemos una sucesión a_k de E convergente, como E es discreto las únicas sucesiones convergentes son las constantes y una sucesión que está contenida en E y que eventualmente es constante tiene que se constantemente algo en E.

Si no la sucesión tendría elementos fuera de E lo cual es absurdo por que es una sucesión de elementos de E

Acotado: Tomamos cualquier $e^n \in E$ y vemos $B(e^n, 2)$.

Ahora dado cualquier elemento $e^j \in E$ sabemos que $d(e_k^j, e_k^n) = \sup_{k\in\mathbb{N}} |e_k^j - e_k^n| \leq 1$

Entonces $e^j \in B(e^n, 2)$ y esto vale para cualquier $e^j \in E$ por lo tanto $E \subseteq B(e^n, 2)$.

Entonces E es acotado. Pero no es totalmente acotado.

Por que si tomamos $\epsilon = \frac{1}{2}$ y queremos cubrir E tomando bolas de radio ϵ , vamos a necesitar una bola para cada elemento de E.

Pero E tiene numerables elementos, entonces no podemos cubrir con finitas bolas de radio ϵ

Entonces E no es compacto. □

Ejercicio 8. Sea $c_0 = \{(x_n)_n \subset \mathbb{R} \ / \ \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$. Se define en c_0 la métrica

$$d(x, y) = \sup\{|x_n - y_n| \ / \ n \in \mathbb{N}\}$$

Demostrar que la bola cerrada $\overline{B}(x, 1) = \{y \in c_0 \ / \ d(x, y) \leq 1\}$ no es compacta.

Proof. Sabemos que c_0 es completo , entonces la bola cerrada es completa. Lo que tiene que fallar es totalmente acotada □

Ejercicio 9. Sea X un espacio métrico y sea $(x_n)_n \subset X$ tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in X$. Probar que el conjunto $K = \{a_n \ / \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\} \subset X$ es compacto

Proof. Dado un cubrimiento de abiertos de K. Sabemos que en alguno de esos abiertos A está a.

Ahora como A es abierto tenemos $B(a,r) \subset A$. Y dado que a_n converge a a.

$\exists n_0$ tal que $d(a_n, a) < r \quad \forall n \geq n_0$. Entonces $\{a_n : n \geq n_0\} \subseteq B(a,r) \subseteq A$

Ahora sea x_n con $n < n_0$ sabemos que hay algún abierto del cubrimiento para cada uno (si nó no sería cubrimiento)

Por ser finitos , tenemos finitos abiertos del cubrimiento. Y si a esos le agregamos A, tenemos un subcubrimiento finito de K.

Esto muestra que K es compacto

□

Ejercicio 10. Probar que todo espacio métrico compacto es separable

Proof. Dado un cubrimiento del espacio, tengo sub cubrimiento finito , por ser compacto, entonces tengo subcubrimiento contable. Por ende es separable □

Ejercicio 11. Sea (X,d) un espacio métrico. Probar que:

1. Si (X,d) es compacto, todo subconjunto cerrado de X es compacto.

   Proof. Sabemos que todo cerrado dentro de un completo es completo. Y todo conjunto dentro de un TTA es TTA

   Entonces cualquier subconjunto cerrado es completo y TTA por lo tanto compacto. □

2. Todas unión finita y toda intersección (finita o infinita) de subconjuntos compactos de X es compacta

   Proof. Unión finita de cerrados es cerrada , por lo tanto la unión es un cerrado dentro de un compacto y entonces completo.

   Por otro lado subconjunto de un TTA es TTA. Entonces esta unión finita por ser subconjunto de un TTA es TTA.

   Finalmente es compacto

   Lo mismo pasa con intersección de cerrados , es cerrado , por lo tanto completo, y sigue siendo un sub de un TTA entonces es TTA, por lo tanto compacto □

3. Un subconjunto $F \subset X$ es cerrado si y sólo si $F \cap K$ es cerrado para todo compacto $K \subset X$

   Proof. $\Rightarrow$) Si F es cerrado y K compacto, entonces intersecarlos es intersecar cerrados, por lo tanto es cerrado

   $\Leftarrow$) Sea $(x_n)_n \subseteq F$ convergente a x.

   Por ejercicio pasado sabemos que $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ es compacto

   $F \cap A$ es cerrado, por lo tanto $(x_n)_n \subset F \cap A$ es una sucesión convergente en un cerrado

Por lo tanto $x \in F \cap A$ por lo tanto $x \in F$.

Entonces F es cerrado $\square$

Ejercicio 12. Sean (Y, d) e (Y, d') espacios métricos. Se consiera $(X \times Y, d_\infty)$, donde

$$d_\infty((x_1, y_2), (x_2, y_2)) = max\{d(x_1, x_2), d'(y_1, y_2)\}$$

Probar que $(X \times Y, d_\infty)$ es compacto si y sólo si (X, d) e (Y, d') son compactos.

Proof. $\Rightarrow$) Sea $(x_n)_n \subset X$ e $(y_n)_n \subset Y$ entonces $(x_n, y_n)_n \subset X \times Y$
Por lo tanto existe un sub (x_{n_k}, y_{n_k}) convergente a (x, y)
entonces $d_\infty((x_{n_k}, y_{n_k}), (x, y)) < \epsilon \quad \forall n \geq n_0$
Por lo tanto $d(x_{n_k}, x) < \epsilon \quad \forall n \geq n_0$ y lo mismo pasa con y_{n_k}
Entonces dado x_n encontramos un sub convergente, por lo tanto X es compacto
Y lo mismo pasa con Y
$\Leftarrow$) Sea $(x_n, y_n)_n \subset X \times Y$.
Entonces $(x_n)_n \subset X$ e $(y_n)_n \subset Y$
Por ser X compacto, existe un sub x_{n_k} convergent a digamos $x \in X$
Ahora si vemos $y_{n_k} \subset Y$ y tenemos en cuenta que Y compacto
Existe $y_{n_{k_j}}$ convergente a digamos $y \in Y$
Ademas como x_{n_k} converge a x entonces $x_{n_{k_j}}$ también
Por lo tanto tenemo que $d_\infty((x_{n_{k_j}}, y_{n_{k_j}}), (x, y)) = max\{d(x_{n_{k_j}}, x), d'(y_{n_{k_j}}, y)\} < \epsilon \quad \forall n \geq n_0$
Por lo tanto encontramos una sub convergente entonces $X \times Y$ es compacto $\square$

Ejercicio 13. Sea X un espacio métrico compacto y sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función contínua tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in X$. Probar que existe $\epsilon > 0$ tal que $f(x) \geq \epsilon$ para todo $x \in X$

Proof. Supongamos que no es cierto entonces $\forall \epsilon > 0$ existe un $x \in X$ tal que $f(x) < \epsilon$
Ahora si tomamos $\epsilon = \frac{1}{n}$ vamos a tener una sucesión $(x_n)_n \subset X$ tal que $f(x_n) < \frac{1}{n}$
Ahora sabemos que existe un sub x_{n_k} que converge a $x \in X$ entonces $f(x_{n_k})$ converge a $f(x) \in \mathbb{R}$
Pero además $0 \leq f(x_{n_k}) < \frac{1}{n_k}$ por lo tanto $0 \leq \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) \leq \lim_{k\to\infty}$ entonces $0 \leq f(x) \leq 0$.
Finalmente $f(x) = 0$ lo que es absurdo $\square$

Ejercicio 14. Sea (X, d) un espacio métrico.

1. Sean $F \subset X$ un cerrado y $x \in X \setminus F$. Probar que no es cierto en general que exista un punto $y \in F$ tal que $d(x, y) = d(x, F)$. Es decir la distancia entre un punto y un cerrado puede no realizarse

   Proof. Tomemos como espacio $X = \{0\} \cup (1, 2)$

   Ahora el $(1, 2)$ es cerrado en X. Toda sucesión convergente de $(1, 2)$ converge dentro.

   A lo sumo uno podría pensar que converge a 1 o 2, pero esos no están en el espacio métrico, entonces la sucesiones que "tienden" a 1 o 2 no convergen.

   Sin embargo la distancia entre 0 y $(1, 2)$ no se realiza

   $\square$

2. Sean $K \subset X$ un compacto y $x \in X \setminus K$. Probar que existe $y \in K$ tal que $d(x, K) = d(x, y)$. Es decir, la distancia entre un punto y un compacto siempre se realiza.

Proof. Sabemos que $d(x, K)$ es un infirmo , entonces tenemos una sucesión $d(x, k_n)$ que converge al ínfimo, a $d(x, K)$.

Además por ser K compacto existe una k_{n_j} convergente a $k \in K$

Entonces tenemos $d(x, k_{n_k})$ una sub de $d(x, k_n)$ por ende converge a lo mismo.

Como k_{n_j} converge a k entonces $d(x, k_{n_j})$ converge a $d(x, k)$.

Esto vale por que $d(x, k)$ es contínua

Por lo tanto $d(x, k_{n_j})$ converge a $d(x, k)$ y también converge a $d(x, K)$

Por lo tanto $d(x, K) = d(x, k)$ con $k \in K$. Entonces ese ínfimo es un mínimo.

La distancia se realiza

□

3. Probar que si X tiene la propiedad de que toda bola cerrada es compacta (por ejemplo)

   Proof. Usando el iii) sería directo □

4. Sean $F, K \subset X$ dos subconjuntos disjuntos de X tales que F es cerrado y K es compacto.
   Probar que la distancia $d(F, K)$ entre F y K es positiva, pero puede no realizarse.

   Proof. En el ii) hay un ejemplo de un punto (compacto) y un cerrado , tal que su distancia no se realiza y es positiva □

5. Sean $K_1, K_2 \subset X$ dos subconjuntos compactos de X tales que $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Probar que existen $x_1 \in K_1$ y $x_2 \in K_2$ tales que $d(K_1, K_2) = d(x_1, x_2)$. Es decir, la distancia entre dos compactos siempre se realiza

   Proof. En principio $d(K_1, K_2)$ es un ínfimo entonces tenemos una sucesión $d(x_n, y_n)$ convergente a $d(K_1, K_2)$

   Ahora como K_1, K_2 son compactos entonces $K_1 \times K_2$ es compacto también

   Por lo tanto $(x_n, y_n)_n \subset K_1 \times K_2$ tiene sub sucesión (x_{n_k}, y_{n_k}) convergente a $(x, y) \in K_1 \times K_2$

   Dado que d es contínua $d(x_{n_k}, y_{n_k})$ converge a $d(x, y)$,

   Pero además $d(x_{n_k}, y_{n_k})$ converge a $d(K_1, K_2)$ por ser sub converge de $d(x_n, y_n)$

   Por lo tanto $d(K_1, K_2) = d(x, y)$ con $x \in K_1, y \in K_2$.

   Entonces la distancia se realiza □

Ejercicio 15. Sea (X, d) un espacio métrico completo. Se define

$$\mathcal{K}(X) = \{K \subset X \ / \ K \text{ es compacto y no vacío}\}$$

1. Sea $d'(A, B) = \sup_{a \in A}\{d(a, B)\}$. Verificar que, en general, d’ *no* es una métrica en $\mathcal{K}(X)$

   Proof. Sea $A = [0, 1]$ y $B = [1, 100]$

   $d(A, B) = \sup_{a \in A}\{d(a, B)\} = 0$ pero $d(B, A) = 99$ □

2. Se define $d : \mathcal{K} \times \mathcal{K}(X) \to \mathbb{R}$ como $d(A, B) = \max\{d'(A, B), d'(B, A))\}$. Proba que para todo $\epsilon > 0$ vale
$$d(A, B) < \epsilon \quad \iff \quad A \subset B(B, \epsilon) \quad y \quad B \subset B(A, \epsilon),$$
donde $B(C, \epsilon) = \{x \in X \ / \ d(x, C) < \epsilon\}$

Proof. $d(A, B) < \epsilon \iff d'(A, B) < \epsilon \ \ y \ \ d'(B, A) < \epsilon$
$\iff d(a, B) < \epsilon \quad \forall a \in A \ \ y \ \ d(b, A) < \epsilon \quad \forall b \in B$
$\iff a \in B(B, \epsilon) \quad \forall a \in A \ \ y \ \ b \in B(A, \epsilon) \quad \forall b \in B$
$\iff A \subset B(B, \epsilon) \ \ y \ \ B \subset B(A, \epsilon)$ □

3. Probar que d es una métrica en $\mathcal{K}(X)$

   (a) $d(A, A) = 0$ es trivial

   (b) $d(A, B) = \max\{d'(A, B), d'(B, A)\} = \max\{d'(B, A), d'(A, B)\} = d(B, A)$

   (c) Sin pérdida de generalidades supongamos $d(A, C) = d'(A, C) = \sup_{a \in A}\{d(a, C)\}$

$$d(a, c) < d(a, b) + d(b, c) \leq \iff \inf_{c \in C}\{d(a, c)\} \leq d(a, b) + d(b, c) \iff d(a, C) \leq d(a, b) + d(b, c)$$

$$d(a, C) \leq \inf_{b \in B}\{d(a, b)\} + d(b, c) \iff d(a, C) \leq d(a, B) + d(b, c)$$

$$d(a, C) \leq d(a, B) + \inf_{c \in C}\{d(b, c)\} \iff d(a, C) \leq d(a, B) + d(b, C)$$

Y haciendo lo mismo pero con supremos nos queda:

$$d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C)$$

Luego encadenando supremos llegamos a que $\sup_{a \in A} d(a, b) + d$
Si hubiese sido $d'(C, A)$ arrancabamos con $d(c, a)$ y concluíamos lo mismo

Ejercicio 16. Dado un cubrimiento por abiertos $(U_i)_{i \in I}$ de un espacio métrico (X, d) un número $\epsilon > 0$ se llama numero de Lebesgue de $(U_i)_{i \in I}$ si para todo $x \in X$ existe $j \in I$ tal que $B(x, \epsilon) \subset U_j$. Probar que todo cubrimiento por abiertos de un espacio métrico compacto tiene un número de Lebesgue.

Proof. Como $\bigcup_{i \in I} U_i$ es un cubrimiento por abiertos.
Entonces para cada $x \in X$ tenemos un $U_i^x \subseteq \bigcup U_i$ tal que $x \in U_i^x$
Como U_i^x es abierto tenemos $r(x) > 0$ tal que $B(x, 2r(x)) \subset U_i^x$
Ahora la unión de todas esas bolas es cubrimiento por abierto, y por ser X compacto tiene subcubrimiento finito
Por lo tanto tenemos un $\epsilon = \min\{r(x) : x \in X\}$.
$\epsilon > 0$ por que es el mínimo de cosas mayores que cero.
Dado $y \in X$ tenemos que existe algún $x \in X$ tal que $y \in B(x, r(x))$ por ser cubrimiento
Ahora sabemos que $B(y, \delta) \subset B(y, r(x)) \subseteq B(x, 2r(x)) \subseteq U_i^x$
Veamos la inclución del medio. Sea $z \in B(y, r(x))$.

$$d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) \leq r(x) + r(x) = 2r(x) \Rightarrow z \in B(x, 2r(x))$$

Finalmente dado encontramos $\delta > 0$ tal que dado cualquier $y \in X$ sucede $B(y,\delta) \subseteq U_i$ para algún abierto del cubrimiento

□

Ejercicio 17. Sea (X,d) un espacio métrico. Se dice que una familia $(F_i)_{i\in I}$ de subconjuntos de X tiene la propiedad de intersección finita (P.I.F) si cualquier subfamilia finita de $(F_i)_{i\in I}$ tiene intersección no vacía. Probar que los siguientes enunciados son equivalentes:

1. X es compacto.

   Proof. asd □

2. Toda familia $(F_i)_{i\in I}$ de subconjuntos cerrados de X con la P.I.F tiene intersección no vacía.

3. Todo subconjunto infinito de X tiene un punto de acumulación en X.

4. Toda sucesión en X tiene una subsucesión convergente.

5. X es completo y totalmente acotado.

Ejercicio 18. Sean (X,d) e (Y,d') espacios métricos y $f : X \to Y$ contínua y biyectiva. Probar que si (X,d) es compacto, entonces f es un homemorfismo

Proof. Podemos mirar f^{-1} por la biyectividad nos asegura que es una función bien definida.

Veamos que es contínua. Sea $(f(x_n))_n \subset Y$ convergente a $f(x_0)$

Ahora miramos $f^{-1}(f(x_n)) = (x_n)_n \subseteq X$.

Dada cualquier sub x_{n_k} por compacidad tenemos una subsub $x_{n_{k_j}}$ convergente a un x_1

Veamos que $x_1 = x_0$

Supongamos que son diferentes. Entonces $(f(x_{n_{k_j}}))_j$ converge a $f(x_1)$ que es diferente a $f(x_0)$ por inyectividad de f.

Pero esto es absurdo por que $(f(x_{n_{k_j}}))_k$ es un subsucesión de $(f(x_n))_n$ que convergía a $f(x_0)$

Entonces $x_1 = x_0$. Lo que muestra que $x_{n_{k_j}}$ converge a x_0

Y esto lo podemos hacer con cualquier subsucesión de x_n. Por lo tanto x_n converge a x_0

Entonces f^{-1} es contínua. Por lo tanto f es homeomorfismo

□

Ejercicio 19. Sea (X,d) un espacio métrico compacto. Probar que para cada espacio métrico (Y,d'), la proyección $\pi : X \times Y \to Y$ definida por $\pi(x,y) = y$ es cerrada.

Proof. Tomemos B un cerrado en Y , ahora tomemos cualquier otro cerrado A en X.

Entonces $A \times B \subseteq X \times Y$ tiene que ser cerrado

$f(A \times B) = f(B)$. Queremos ver entonces que $f(B)$ es cerrado.

Tomemos $(b_n)_n \subseteq f(B)$ un sucesión convergente a digamos un b, nos gustaría que $b \in f(B)$

Ahora si miramos $f^{-1}(b_n) = \{x \times b_n : x \in X,\ n \in \mathbb{N}\}$.

Luego si miramos $C = \{x\} \times b_n$ con cualquier $x \in A$ fijo sabemos que $C \subseteq f^{-1}(b_n)$

Además $C \subseteq A \times B$

Ahora esta es una sucesión convergente de $A \times B$ que converge a $\{x\} \times \{b\}$.

Entonces $b = f(\{x\} \times \{b\}) \in f(B)$

Mostrando que b_n converge dentro de $f(B)$. Por lo tanto $f(B)$ es cerrado □

Ejercicio 20. Sean (X, d) e (Y, d) espacios métricos y sea $f : X \to Y$ una función. Probar que si Y es compacto y el gráfico de f es cerrado en $(X \times Y, d_\infty)$, entonces f es contínua. Comparar con el ejercicio 15 de la práctica 3.

Proof. Tomemos x_n convergente a x. Ahora tenemos que $((x_n, f(x_n))_n \subseteq Gr(f)$

Como el gráfico es cerrado

□

Ejercicio 21. .

1. Sea $f : \mathbb{R}_{\geq a} \to \mathbb{R}$ una función que es uniformemente contínua en $[a, b]$ y también en $[b, +\infty)$. Probar que f es uniformemente contínua en $\mathbb{R}_{\geq a}$

   Proof. Dado $\frac{\epsilon}{2} > 0$ tenemos que existe δ_1 tal que $d(x, y) < \delta_1 \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon \quad \forall x, y \in [a, b]$

   Y tenemos un δ_2 que sirve para $x, y \in [b, +\infty]$

   Ahora si tomamos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ sabemos que nos sirve para los dos

   Veamos que pasa cuando tenemos un $x \in [a, b]$ y un $y \in [b, +\infty]$

   $$d(x, y) < d(x, b) + d(b, y) < \delta$$

   Luego tanto $d(x, b)$ como $d(b, y)$ seguro son menores que sus deltas

   Entonces tenemos por un lado $d(f(x), f(b)) < \frac{\epsilon}{2}$ y por otro $d(f(b), f(y)) < \frac{\epsilon}{2}$

   Entonces
   $$d(f(x), f(y)) < d(f(x), f(b)) + d(f(b), f(y)) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

   Mostrando que f es uniformemente contínua para cualquier par $x \in [a, b],\ y \in [b, +\infty)$

   Concluyendo que f es uniformemente contínua en $[a, +\infty) = \mathbb{R}_{\geq a}$ □

2. Deducir que $\sqrt{x}$ es uniformemente contínua en $\mathbb{R}_{\geq 0}$

   Proof. Dado ϵ tomamos $\delta = \epsilon^2$

   $$|\sqrt{x} - \sqrt{y}|^2 < |\sqrt{x} - \sqrt{y}|.|\sqrt{x} + \sqrt{y}| = |\sqrt{x}^2 - \sqrt{y}^2| = |x - y| < \delta = \epsilon^2$$

   Como la raíz cuadrada es una función estrictamente creciente

   $$|\sqrt{x} - \sqrt{y}| < \epsilon^2 \iff |\sqrt{x} - \sqrt{y}| < \epsilon$$

   Entonces:

   $$|x + y| < \delta \Rightarrow |\sqrt{x} + \sqrt{y}| < \epsilon$$

   □

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua y tal que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Probar que f es uniformemente contínua en $\mathbb{R}$

Proof. Dado ϵ sabemos que existe α_1 tal que

$$d(f(x),0) < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall x \in (-\infty, \alpha]$$

Entonces dados $x, y \in (-\infty, \alpha]$ tenemos $d(f(x), f(y)) < d(f(x), 0) + d(0, f(y)) = \epsilon$

Por lo tanto tomando cualquier δ tenemos:

$$d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \epsilon \quad \forall x, y \in (-\infty, \alpha]$$

Por lo tanto f es uniformemente contínua en $(-\infty, \alpha]$

Lo mismo pasa con un β y con $x, y \in [\beta, +\infty)$ y $d(f(x), f(y))$

Entonces f es uniformemente contínua en $[\beta, +\infty)$

Además f es unfiormemente contínua en $[\alpha, \beta]$ por ser un compacto y f contínua

Ahora usando $[\beta, +\infty)$ y $[\alpha, \beta]$ caémos en las hipótesis de la primera parte

Por lo tanto f es contínua en $[\alpha, +\infty)$ □

Ejercicio 22. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función contínua y abierta.

1. Probar que f no tiene extremos locales; es decir, no existen $x_0 \in \mathbb{R}$ y $\epsilon > 0$ tales que $f(x_0) \leq f(x)$ (resp. $f(x_0) \geq f(x)$) para todo $x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$

2. Comprobar que existen $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ tales que $f(\mathbb{R}) = (a, b)$

3. Mostrar que $f : \mathbb{R} \to (a, b)$ es un homeomorfismo y que ella y su inversa son funciones monótonas