UBA - exactas
Departamento de Matemática

Cálculo Avanzado - Funciones continuas 2

Primer cuatrimestre de 2020

Daniel Carando

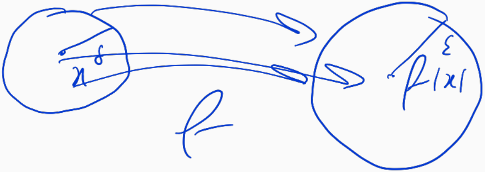
Dto. de Matemática - FCEN - UBA

Continuidad uniforme

Varios resultados de esta clase están en la Sección 6.2 del apunte.

Continuidad uniforme

Una función $f : E \to E'$ es continua en un punto x si, dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $f(B(x,\delta)) \subset B(f(x),\varepsilon)$.



$\underline{\delta}$ dep de $\underline{\varepsilon}$

Continuidad uniforme

Una función $f : E \to E'$ es continua en un punto x si, dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \varepsilon)$.

Decimos simplemente que es continua si es continua en cada $x \in E$.

Continuidad uniforme

Una función $f : E \to E'$ es continua en un punto x si, dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $f(B(x,\delta)) \subset B(f(x),\varepsilon)$.

Decimos simplemente que es continua si es continua en cada $x \in E$.

Observación $\underbrace{\forall x \in E}$, $\left[\text{dado } \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0 / \ f(B(x,\delta)) \subset B(f(x), \varepsilon)\right]$.

δ depende de ε y de x.

Puede pasar (o no) que haya un $\underline{\delta}$ que le sirva a $\underline{\text{todo } x \in E}$

Definición

Una función $f : E \to E'$ se dice uniformemente continua si dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$f(B(x,\delta) \subset B(f(x),\varepsilon)$$

para todo $x \in E$.

que depende de ε

(δ sirve $\forall x$).

Definición

Una función $f : E \to E'$ se dice uniformemente continua si dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$f(B(x,\delta) \subset B(f(x),\varepsilon)$$

para todo $x \in E$.

Definición equivalente

Una función $f : E \to E'$ se dice uniformemente continua si para todo $\varepsilon > 0$ existe δ tal que si $d(x,y) < \delta$ entonces $d'(f(x),f(y)) < \varepsilon$.

depende sólo de ε.

f NO es unif cont:

$\exists\, \varepsilon > 0$ para el cual NO hay ningún δ posible.

Definición

Una función $f : E \to E'$ se dice uniformemente continua si dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$f(B(x,\delta) \subset B(f(x),\varepsilon)$$

para todo $x \in E$.

Definición equivalente

Una función $f : E \to E'$ se dice uniformemente continua si para todo $\varepsilon > 0$ existe δ tal que si $d(x,y) < \delta$ entonces $d'(f(x),f(y)) < \varepsilon$.

Ejercicio

Sea $f : E \to E'$. Entonces, f NO es uniformemente continua si y sólo si existen sucesiones $(x_n)_n$ y $(y_n)_n$ tales que $\subset E$.

$$d(x_n,y_n) \to 0 \quad \text{pero} \quad \cancel{d'(x_n,y_n) \not\to 0}.$$

$d'(f(x_n), f(y_n)) \not\to 0$

Ejemplo TALLER: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ cont $\Rightarrow$ es unif cont.

- $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=x^2$. $\quad$ NO ES U.C.

$\rightarrow$ $x_n = n \qquad y_n = n + 1/n$

$|x_n - y_n| = 1/n \to 0$ pero $|f(x_n) - f(y_n)| =$

$= |n^2 - (n+\frac{1}{n})^2| = |\cancel{n^2} - \cancel{n^2} - 2 - \frac{2}{n^2}| \to 2 \neq 0$

- $f:(0,1]\to\mathbb{R}$, $\quad f(x) = 1/x$.

$\rightarrow$ $x_n = \frac{1}{n+1} \qquad y_n = \frac{1}{n+2} \qquad |x_n - y_n| \to 0$

pero $|f(x_n) - f(y_n)| \not\to 0$

Teorema
Sea $f : E \to E'$. Si existe $C > 0$ tal que

$$d'(f(x), f(y)) \le C d(x, y),$$

entonces f es uniformemente continua.

f es LIPSCHITZ CON CTE C.

DEM: dado $\varepsilon > 0$, queremos δ /

si $d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$

$$d'(f(x), f(y)) \le C d(x, y) < C \cdot \delta$$

$d(x, y) < \delta$

Tomando $\delta = \varepsilon / C$

si $d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < C \cdot \varepsilon / C = \varepsilon$.

Ejemplo

Consideremos en $C([0,1])$ la distancia d_∞.

Sea $F : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ la función dada por

$x \in C[0,1]$

$$F(x) = \int_0^1 x(t)dt.$$

$x, y \in C[0,1]$,

$$|F(x) - F(y)| = \left| \int_0^1 x(t)\,dt - \int_0^1 y(t)\,dt \right| =$$

$$= \left| \int_0^1 (x(t) - y(t))\,dt \right| \leq \int_0^1 \underbrace{|x(t) - y(t)|}_{\leq \sup_s |x(s)-y(s)|}\,dt$$

$$\leq \int_0^1 d_\infty(x,y)\,dt = d_\infty(x,y) \cdot 1 = d_\infty(x,y)$$

$\times$ TEO, F ES UNIF. CONT.

Ejemplo

Consideremos en $C([0,1])$ la distancia d_∞. $\mathbb{R}^3$ con d_2

Sea $F : C([0,1]) \to \mathbb{R}^3$ la función dada por

$$F(x) = (x(0), x(1/2), x(1)).$$

$$d_2(F(x), F(y)) = d_2\big((x(0), x(1/2), x(1)), (y(0), y(1/2), y(1))\big)$$

$$= \sqrt{\underbrace{(x(0)-y(0))^2}_{\leq d_\infty(x,y)^2} + \underbrace{(x(1/2)-y(1/2))^2}_{\leq d_\infty(x,y)^2} + \underbrace{(x(1)-y(1))^2}_{\leq d_\infty(x,y)^2}}$$

$$\leq \sqrt{3\, d_\infty(x,y)^2} = \sqrt{3}\, d_\infty(x,y)$$

$\therefore$ F es unif cont.

Definición

Sea (E, d) un espacio métrico. Un subconjunto $D \subset E$ se dice **denso** (en E) si $\overline{D} = E$.

Definición
Sea (E, d) un espacio métrico. Un subconjunto $D \subset E$ se dice denso (en E) si $\overline{D} = E$.

Observación

$\overline{\mathbb{Q}} = \underline{\mathbb{R}}$ $\quad$ $\underline{\mathbb{Q}}$ es denso en $\mathbb{R}$

$\overline{(0,1)} = [0,1]$ $\quad$ $(0,1)$ es denso en $[0,1]$.

- $f, g : E \to E'$ cont., D denso en E.

EJ GUÍA: si $f|_D = g|_D \Rightarrow f = g$ en E.

- Sea $\underline{f : D \to E'}$ continua $\quad$ $\boxed{\text{UNIF CONT}}$

D denso en E. ¿$\exists\, \hat{f} : E \to E'$ cont / $\hat{f}|_D = f$?

$f : (0,1) \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = 1/x$ CONT

NO SE EXTIENDE A $[0,1]$.

Definición

- Una función $f : E \to E'$ se llama homeomorfismo si es biyectiva, continua y su inversa f^{-1} es continua.
- Dos espacios métricos (E, d) y (E', d') se dicen homeomorfos si existe un homeomorfismo $f : E \to E'$.

Definición

- Una función $f : E \to E'$ se llama homeomorfismo si es biyectiva, continua y su inversa f^{-1} es continua.
- Dos espacios métricos (E, d) y (E', d') se dicen homeomorfos si existe un homeomorfismo $f : E \to E'$.

Observación

Si E y E' son espacios métricos homeomorfos, entonces hay una correspondencia entre los abiertos de E y E':

Si $f: E \to E'$ homeomorfismo.

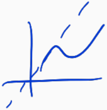
A ab en E, $f(A) = \underbrace{(f^{-1})^{-1}}_{\text{cont}}(A)$ ab. en E'

Si $f(A)$ es ab $\Rightarrow A = f^{-1}(\underbrace{f(A)}_{\text{ab}})$ es ab. en E

$\therefore A$ ab $\overset{\text{en } E}{\Longleftrightarrow} f(A)$ es ab. en E'

Observación

Dada f biyectiva, ¿es posible que f sea continua pero que su inversa no lo sea?



$\rightarrow$ $id : (\mathbb{R}, \delta) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$

es cont (toda FUNCIÓN es CONT. para un e. m. con mét discreta)

$id^{-1} : (\mathbb{R}, |\cdot|) \rightarrow (\mathbb{R}, \delta)$

NO es CONT.

EJERC.

$\forall x, y \in E$

Definición

Si $f : E \to E'$ es biyectiva y $d(x, y) = d'(f(x), f(y))$, diremos que f es una isometría.

Definición

Si $f : E \to E'$ es biyectiva y $d(x,y) = d'(f(x), f(y))$, diremos que f es una isometría.

Observación

Si $f : E \to E'$ es una isometría, entonces tanto f como $\cancel{f'}$ f^{-1} son uniformemente continuas.

En part., f es homeomorfismo.

$$d(x,y) = d'(f(x), f(y)) \quad \forall\, x,y \in E$$

$w, z \in E'$

$$d'(w,z) = d'(f(f^{-1}(w)), f(f^{-1}(z))) =$$

$$= d(f^{-1}(w), f^{-1}(z))$$