

Definición 0.1. Una función $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ es continua en el punto $x \in \mathbb{E}$ si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $y \in \mathbb{E}$ que cumple $d(x, y) \leq \delta$, entonces $d'(f(x), f(y)) \leq \epsilon$

Equivalentemente

$$f(B(x, \delta)) \subseteq B(f(x), \epsilon)$$

Observación. δ depende de ϵ y de x

Observación. Una función $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ es continua en el punto $x \in \mathbb{E}$ si y sólo si para cada entorno V de $f(x)$ en \mathbb{E}' , existe un entorno U de x en \mathbb{E} tal que $f(U) \subseteq V$.

Proof. Sea V entorno de $f(x)$ entonces existe A abierto tal que $f(x) \in A \subseteq V$ entonces existe $r > 0$ tal que $B_\epsilon(f(x)) \subseteq A$ luego $f(x) \in B_\epsilon(f(x)) \subseteq A \subseteq V$

Por continuidad existe $\delta > 0$ tal que $f(B_\delta(x)) \subseteq B_\epsilon(f(x)) \subseteq V$

Además $U = B_\delta(x)$ es entorno de x dado que por ser abierto y dado $x \in U$ existe r tal que $x \in B_r(x) \subseteq U$

□

Observación. Decir $f(U) \subseteq V$ es decir que $U \subseteq f^{-1}(V)$

O lo mismo V entorno de $f(x) \iff f^{-1}(V)$ es entorno de x

Observación. \mathbb{E} espacio métrico, x_0 pto aislado de \mathbb{E} entonces toda función def en \mathbb{E} es continua en x_0 .

Proof. Si vale para cualquier función, en particular vale para la función $f(x_0) = 1$ y $f(x) = 0$ si $x \neq x_0$

Entonces ahora esta tiene que ser continua en todos lados en particular en x_0 , entonces $f(B(x_0, \frac{1}{2})) \subseteq B(f(x_0), \frac{1}{2}) = B(1, \frac{1}{2}) = \{1\}$ entonces $B(x_0, \frac{1}{2}) = \{x_0\}$

□

Lema 1. \mathbb{E} discreto entonces toda funciones definida sobre \mathbb{E} es continua en todo punto

Ejercicio 1. \mathbb{E} metrico $x_0 \in \mathbb{E}$. Si toda $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en x_0 entonces x_0 es aislado

Proof. Si vale para cualquier función vale para $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = x_0 \\ 2 & x \neq x_0 \end{cases}$$

Ahora supongamos que x_0 no es aislado, entonces es un punto de acumulación por lo tanto tenemos una sucesión $(x_n)_n \subseteq \mathbb{E}$ con $x_n \rightarrow x_0$ tal que $x_n \neq x_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ entonces como f tiene que ser continua $f(x_n) \rightarrow f(x)$, pero $f(x_n) = 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y $f(x) = 1$ entonces no puede ser que $f(x_n) \rightarrow f(x)$ pero esto es absurdo, contradice la continuidad, este absurdo provino de suponer que x_0 no era aislado, entonces x_0 tiene que ser aislado para que cualquier función sea continua en x_0

□

Teorema 2. Una función $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ es continua si y sólo si transforma cualquier sucesión convergente a x en una sucesión convergente $f(x)$

Proof. \Rightarrow) Sea $x_n \in \mathbb{E} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ convergente, y f continua.

Dado $\epsilon > 0$ sabemos que $\exists \delta > 0$ tal que $f(B(x, \delta)) \subseteq B(f(x), \epsilon)$

Luego como x_n convergente $\exists n_0$ tal que $x_n \in B(x, \delta) \quad \forall n \geq n_0$

Entonces $f(x_n) \subseteq f(B(x, \delta)) \subseteq B(f(x), \epsilon)$

Entonces $\forall \epsilon > 0$ existe n_0 tal que $f(x_n) \in B(f(x), \epsilon) \quad \forall n \geq n_0$

Luego $f(x_n) \rightarrow f(x)$

\Leftarrow) Supongamos f no es continua en x .

Luego $\exists \epsilon > 0$ tal que $\forall \delta > 0 \quad \exists y_\delta \in B(x, \delta)$ pero $f(y_\delta) \notin B(f(x), \epsilon)$

Si tomamos $\delta = \frac{1}{n}$ y $x_n = y_{1/n}$ entonces $x_n \in B(x, \frac{1}{n})$

Por lo tanto $d(x_n, x) = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ pero $f(x_n) = f(y_{1/n}) \notin B(f(x), \epsilon)$

Entonces $d(f(x_n), f(x)) \geq \epsilon$ por lo tanto $f(x_n)$ no converge a $f(x)$ lo que es absurdo \square

Definición 0.2. Una función $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ es continua en \mathbb{E} si es continua en todo punto $x \in \mathbb{E}$

Observación. Sea δ la métrica discreta toda función definida sobre (\mathbb{E}, δ) es continua

Teorema 3. Una función $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ es continua si y sólo si la preimagen de todo abierto de \mathbb{E}' es abierto de \mathbb{E}

Proof. \Leftarrow) Sea $x \in \mathbb{E} \quad \epsilon > 0 \quad V = B(f(x), \epsilon)$ abierto entonces $f^{-1}(V)$ tiene que ser abierto

Entonces $\exists \delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subseteq f^{-1}(V)$

Luego $f(B(x, \delta)) \subseteq V = B(f(x), \epsilon)$ entonces f continua en x

\Rightarrow) Sea $V \subseteq \mathbb{E}'$ abierto.

$x \in f^{-1}(V) = \{y \in \mathbb{E} / f(y) \in V\}$ luego $f(x) \in V$ abierto

Entonces $\exists \epsilon > 0$ tal que $B(f(x), \epsilon) \subseteq V$

Ahora como f continua $\exists \delta > 0$ tal que $f(B(x, \delta)) \subseteq B(f(x), \epsilon) \subseteq V$

Entonces $f(B(x, \delta)) \subseteq V$ entonces $B(x, \delta) \subseteq f^{-1}(V)$

Luego $f^{-1}(V)$ es abierto \square

Ejercicio 2. Ver que vale lo mismo cambiando abiertos por cerrados (con función continua preimagen de cerrado es cerrada)

Proof. Usar el resultado anterior. Sea F un cerrado entonces $X \setminus F$ es abierto

Luego $f^{-1}(X \setminus F)$ es abierto. Entonces $(f^{-1}(X \setminus F))^c = f^{-1}(F)$ cerrado.

Veamos esta última igualdad.

Sea $x \in (f^{-1}(X \setminus F))^c \iff x \notin f^{-1}(X \setminus F)$

$\iff f(x) \notin X \setminus F \iff f(x) \in F \iff x \in f^{-1}(F)$ \square

Observación. Probar que $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + e^{zx} \leq 4\}$ es abierto

Proof. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = x^2 + e^{yz}$ sabemos que es continua .

Entonces $V = f^{-1}((-\infty, 4])$ es abierto por que $(-\infty, 4]$ es abierto \square

Teorema 4. Una función $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ es continua si y sólo si para todo $A \subseteq \mathbb{E}$

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$$

Proof. Sea $x \in \overline{A}$ entonces existe una sucesión x_n tal que $x_n \rightarrow x$

Por continuidad $f(x_n) \rightarrow f(x)$. Y sabemos $f(x_n) \subseteq f(A)$ entonces $f(x) \in \overline{f(A)}$

Luego $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$

¿Vale la vuelta?

□

Definición 0.3. Una función $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ se dice uniformemente continua si dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$f(B(x, \delta)) \subseteq B(f(x), \epsilon)$$

para todo $x \in \mathbb{E}$

Definición 0.4 (definición equivalente). Una función $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ se dice uniformemente continua si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $d(x, y) < \delta$ entonces $d'(f(x), f(y)) < \epsilon$ para todo $x, y \in \mathbb{E}$

Observación. δ depende solamente de ϵ

Observación. La gran diferencia entre las definiciones de continuidad y de continuidad uniforme es que la primera depende de x y de epsilon, para dar el delta, la segunda solo depende de epsilon

Ejercicio 3. Sea $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$. Entonces f NO es uniformemente continua si y sólo si existen sucesiones $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ tales que

$$d(x_n, y_n) \rightarrow 0 \text{ pero } d'(f(x_n), f(y_n)) \not\rightarrow 0$$

Proof. \Rightarrow) Si f no es uniformemente, negado la definición y dado un ϵ tomando $\delta = \frac{1}{n}$ es facil armar dos sucesiones que se acerquen pero su imagen no.

\Leftarrow) Hecho en la práctica

□

Ejemplo 1. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua entonces también uniformemente continua

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^2 \text{ si tomamos } x_n = n \quad y_n = n + \frac{1}{n}$$

$$\text{Luego } |x_n - y_n| = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \text{ pero } |f(x_n) - f(y_n)| \rightarrow 2 \neq 0$$

Teorema 5. Sea $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$. Si existe $C > 0$ tal que

$$d'(f(x), f(y)) \leq C d(x, y)$$

Entonces f es uniformemente continua

(f Lipschitz entonces f uniformemente continua)

Proof. Dado $\epsilon > 0$ si tomamos $\delta = \frac{\epsilon}{C}$ tenemos $d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < C \delta = \epsilon$

□

Ejemplo 2. Consideremos en $C([0, 1])$ la distancia d_∞ dada por

Sea $F : C([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por

$$F(x) = \int_0^1 x(t) dt \quad x \in C([0, 1])$$

$$\text{Sean } x, y \in C([0, 1]), |F(x) - F(y)| = \left| \int (x(t) - y(t)) dt \right| \leq \int |x(t) - y(t)| dt$$

$$\leq \int \sup_{0 \leq s \leq 1} |x(s) - y(s)| \leq \int_0^1 d_\infty(x, y) dt = d_\infty(x, y) \cdot 1 = d_\infty(x, y)$$

Luego F es uniformemente continua, o Lipschitz con constante 1

Ejemplo 3. Consideremos $F : (C([0, 1]), d_\infty) \rightarrow (\mathbb{R}^3, d_2)$ dada por $F(x) = (x(0), x(\frac{1}{2}), x(1))$
 $d_2(F(x), F(y)) = d_2((x(0), x(\frac{1}{2}), x(1)), (y(0), y(\frac{1}{2}), y(1))) = \text{la raíz de la diferencia de los cuadrados} \leq \sqrt{d_\infty^2 + d_\infty^2 + d_\infty^2} = \sqrt{3}d(x, y)$

Entonces F es lipschitz con constante $\sqrt{3}$ entonces es uniformemente continua

Observación. A veces las funciones con las que trabajemos no van a ser Lipschitz pero si uniformemente continuas , ahí va a ser un poco mas difícil y va a haber que arremangarse

Separabilidad

Definición 0.5. Sea (\mathbb{E}, d) un espacio métrico. Un subconjunto $D \subseteq \mathbb{E}$ se dice denso (en \mathbb{E}) si $\overline{D} = \mathbb{E}$

Ejemplo 4. $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ Entonces \mathbb{Q} es denso en \mathbb{R} $\overline{(0, 1)} = [0, 1]$ entonces $(0, 1)$ es denso en $[0, 1]$

Observación. D denso en \mathbb{E} y tenemos $f : D \rightarrow \mathbb{E}'$ continua no necesariamente existe $f' : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ continua

Lo que significa que tener una función continua en un denso de B no necesariamente podemos extenderla a B y seguir teniendo continuidad.

Contraejemplo $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{x}$

Pero si en cambio tenemos una función uniformemente continua SI podemos

Definición 0.6. Una función $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ se llama homomorfismo si es biyectiva, continua y su inversa es continua

Dos espacios (\mathbb{E}, d) y (\mathbb{E}', d') se dicen homomorfos si existe un homeomorfismo $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ homomorfismo

Observación. Si \mathbb{E} y \mathbb{E}' son espacios homomorfos, entonces hay una correspondencia entre los abiertos de \mathbb{E} y los de \mathbb{E}' entonces topológicamente son lo mismo

Sea A abierto de \mathbb{E} , $f(A) = (f^{-1})^{-1}(A)$ que es abierto en \mathbb{E}' esto vale por que f^{-1} es continua, por que f es homomorfismo y preimagen de abierto es abierto

Y por otro lado si $f(A)$ abierto entonces $A = f^{-1}(f(A))$ es abierto de E

Entonces

$$A \text{ abierto de } \mathbb{E} \iff f(A) \text{ es abierto de } \mathbb{E}'$$

Observación. Dada f biyectiva, puede suceder que f sea continua pero su inversa no lo sea

$id : (\mathbb{R}, \delta) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$ es continua pero su inversa $id^{-1} : (\mathbb{R}, |\cdot|) \rightarrow (\mathbb{R}, \delta)$ no es continua

Es mas si la identidad entre dos espacios es un homomorfismo entonces sus métricas son equivalentes

Definición 0.7. Si $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ es biyectiva y $d(x, y) = d'(f(x), f(y))$, diremos que f es una isomemtría.

Observación. Si $f : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ una isomemtría, entonces tanto f como f^{-1} son uniformemente continuas. En particular f es homomorfismo

Proof. Como f isomorfismo $d(x, y) = d'(f(x), f(y)) \quad x, y \in \mathbb{E}$

$w, z \in \mathbb{E}' \quad d'(w, z) = d'(f(f^{-1}(w)), f(f^{-1}(z))) = d(f^{-1}(w), f^{-1}(z))$

Entonces dado ϵ tomamos $\delta = \epsilon$ y nos sirve para todo el dominio □

Definición 0.8 (Una definicion equivalente de densidad).

$$D \text{ denso en } \mathbb{E} \iff \forall x \in \mathbb{E}, \quad \forall r > 0, \quad B(x, r) \cap D \neq \emptyset$$

Observación. \mathbb{E} es denso en \mathbb{E}

Sea (\mathbb{E}, d) , $\overline{A} = A \quad \forall A \subseteq \mathbb{E}$ entonces D denso en $\mathbb{E} \iff D = \mathbb{E}$

Observación (Ejemplos mas interesantes).

$$\ell^1 = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} / \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty\} \quad d_1(a, b) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|$$

$$\ell^\infty = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} / \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| < \infty\} \quad d_\infty(a, b) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n - b_n|$$

Sea $D = \{(a_n)_n / \exists m \text{ tal que } a_n = 0 \quad \forall n \geq m\}$ entonces D es denso en ℓ^1

Sea $a \in \ell^1, r > 0$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq \infty \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} / \sum_{n \geq n_0} |a_n| \leq r$

Sea $b = (a_1, a_2, \dots, a_{n_0}, 0, 0, \dots)$ entonces $b \in D$. Luego $d_1(a, b) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n|$

Cada uno de estos módulos es 0 o a_n entonces $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n - b_n| = \sum_{n \geq n_0} |a_n| \leq r$

Finalmente $d_1(a, b) \leq r$

Entonces para cada $a \in \ell^1$ y para cada $\epsilon > 0$ existe $b \in D$ tal que $d(a, b) \leq \epsilon$

O lo equivalente dado un $a \in A \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists b \in D$ tal que $b \in B(a, \epsilon) \cap D$

Por lo que $B(a, \epsilon) \cap D \neq \emptyset$ entonces D es denso en ℓ^1

Ejercicio para el lector probar que no es denso en ℓ^∞

Definición 0.9. Un espacio métrico \mathbb{E} se llama separable si contiene un subconjunto D numerable y denso

Observación. \mathbb{R} y \mathbb{R}^n son separables

(\mathbb{E}, δ) es el único denso es \mathbb{E} entonces

$$\mathbb{E} \text{ separable} \iff \mathbb{E} \text{ es a lo sumo numerable}$$

Ejemplo 5. ℓ^1 es separable, el D que usamos arriba no nos sirve, por que NO es numerable a pesar de ser denso

Pero sea $A_{\mathbb{Q}} = \{(a_n)_n \subseteq \mathbb{Q} : \exists m \in \mathbb{N} / a_n = 0 \quad \forall n \geq m\}$

Probar que es denso en ℓ^1 y que es numerable

Definición 0.10. Sea (\mathbb{E}, d) un espacio métrico. Una familia \mathcal{B} de abiertos se dice una base de abiertos de \mathbb{E} si todo abierto de \mathbb{E} se escribe como unión de conjuntos de la familia \mathcal{B}

Observación. La familia

$$\mathcal{B}_0 = \{B(x, r) : x \in \mathbb{E}, r > 0\}$$

es un base de abiertos de \mathbb{E}

Proof. G abierto de \mathbb{E} , dado $x \in G$, $\exists r_x > 0$ tal que $x \in B(x, r_x) \subseteq G$

Ahora afirmo $G \subseteq \bigcup_{x \in G} B(x, r_x) \subseteq G$

Entonces $G = \bigcup_{x \in G} B(x, r_x)$

En particular los intervalos abiertos forman una base de abiertos de \mathbb{R} □

Teorema 6. Sea (\mathbb{E}, d) un espacio métrico. Una familia (de abiertos) \mathcal{B} es una base de abiertos de \mathbb{E} si y sólo si para todo abierto $U \subseteq \mathbb{E}$ y todo $x \in U$, existe $A \in \mathcal{B}$ tal que $x \in A \subseteq U$

Proof. \Rightarrow) U abierto, $x \in U$, tenemos que $U = \bigcup_{i \in I} A_i$ con $A_i \in \mathcal{B}$

$x \in U$ entonces $\exists i_0$ tal que $x \in A_{i_0} \subseteq U$ y además $A_{i_0} \in \mathcal{B}$

\Leftarrow) G abierto de \mathbb{E} , $\forall x \in G$, $\exists A_x \in \mathcal{B}$ tal que $x \in A_x \subseteq G$

Entonces $G = \bigcup_{x \in G} A_x$. Entonces dado un abierto lo escribimos como unión de abiertos de la base \square

Ejemplo 6. Probar que \mathcal{B} es una base de abiertos si y sólo si para todo $x \in \mathbb{E}$ y todo entorno V de x existe $A \in \mathcal{B}$ tal que $x \in A \subseteq V$.

Proof. \Rightarrow) Sea \mathcal{B} una base de abiertos y V un entorno de x

Como V entorno existe U abierto tal que $x \in U \subseteq V$

Dado que U abierto $x \in U = \bigcup_{i \in I} A_i$ con $A_i \in \mathcal{B}$

Pero entonces $x \in A_i \subseteq V$ para algún $i \in I$

\Leftarrow) Sea $x \in \mathbb{E}$ sabemos que existe un $A \in \mathcal{B}$ base tal que $x \in A$

Pero entonces $\mathbb{E} = \bigcup A_i$ con $A_i \in \mathcal{B}$ \square

Observación. Si $\mathbb{E} = \mathbb{R}^n$ con la métrica euclídea, entonces la familia

$$\mathcal{B}_1 = \{B(x, q) : x \in \mathbb{Q}^n, q \in \mathbb{Q}, q > 0\}$$

es una base de abiertos, y es numerable

en particular los intervalos de extremos racionales forman una base de abiertos de \mathbb{R}

Observación. \mathbb{R}^n es separable, tiene base numerable de abiertos, cumple Lindelof

Teorema 7. Sea (\mathbb{E}, d) un espacio métrico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. (\mathbb{E}, d) es separable.
2. \mathbb{E} tiene una base numerable de conjuntos abiertos
3. \mathbb{E} tiene la propiedad de Lindelof: todo cubrimiento por abiertos contiene un subcubrimiento (a lo sumo) numerable

Proof. $i) \Rightarrow ii)$ Sea D denso numerable y $\mathcal{B} = \{B(a, q) : a \in D, q \in \mathbb{Q}, q > 0\}$

$\mathcal{B} \sim D \times \mathbb{Q} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ entonces \mathcal{B} es numerable

Veamos que \mathcal{B} es base: $G \subseteq \mathbb{E}$ abierto, $x \in G$ existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq G$

Como D es denso $B(x, \frac{r}{2}) \cap D \neq \emptyset$ entonces $\exists a \in B(x, \frac{r}{2}) \cap D$ Luego $d(a, x) < \frac{r}{2}$.

Sea $q \in \mathbb{Q}$ tal que $d(x, a) < q < \frac{r}{2}$, Ahora tenemos $d(x, a) < q$ entonces $x \in B(a, q)$

Ahora sea $y \in B(a, q)$ entonces $d(y, x) \leq d(y, a) + d(a, x) < q + \frac{r}{2} < r$

Entonces $y \in B(x, r)$ entonces $B(a, q) \subseteq B(x, r) \subseteq G$

Juntando todo tenemos que para cualquier $x \in G$ encontramos $B(a, q) \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B(a, q) \subseteq G$ con $B(a, q) \in \mathcal{B}$ y esto vale para cualquier G abierto.

Entonces \mathcal{B} es base y es numerable

$ii) \Rightarrow iii)$ Sea \mathcal{C} cubrimiento por abiertos de $S \subseteq \mathbb{E}$ y sea \mathcal{B} base numerable de \mathbb{E}

Definamos $\mathcal{B}_{\mathcal{C}} = \{A \in \mathcal{B} : \exists G \in \mathcal{C} \text{ tal que } A \subseteq G\}$

$\mathcal{B}_{\mathcal{C}}$ es a lo sumo numerable por ser un subconjunto de \mathcal{B}

Dado $A \in \mathcal{B}_{\mathcal{C}}$ existe algún $G \in \mathcal{C}$ (llamémoslo G_A) tal que $A \subseteq G_A$

Y definamos $\mathcal{C}_0 = \{G_A : A \in \mathcal{B}_\mathcal{C}\}$ este es a lo sumo numerable por que su cardinal es menor o igual que el de $\mathcal{B}_\mathcal{C}$ (podría ser que un mismo G_A contenga mas de un A)

Ahora

$$\bigcup_{A \in \mathcal{B}_\mathcal{C}} A \subseteq \bigcup_{G \in \mathcal{C}_0} G \subseteq \bigcup_{G \in \mathcal{C}} G$$

Veamos que

$$\bigcup_{G \in \mathcal{C}} G \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{B}_\mathcal{C}} G$$

Sea $x \in \bigcup_{G \in \mathcal{C}} G$ entonces $x \in G$ para algún $G \in \mathcal{C}$ entonces como \mathcal{B} es base sabemos existe $A \in \mathcal{B}$ tal que $x \in A \subseteq G$ ($A \in \mathcal{B}_\mathcal{C}$ pues $A \subseteq G$)

Demostrado esto y usando las inclusiones de arriba tenemos

$$\bigcup_{G \in \mathcal{C}_0} G = \bigcup_{G \in \mathcal{C}} G$$

Entonces $\bigcup_{G \in \mathcal{C}_0} G$ es subcubrimiento y además sabemos que es numerable por que \mathcal{C}_0 es numerable

iii) \Rightarrow i) Dado $n \in \mathbb{N}$ tenemos $\mathbb{E} \subseteq \bigcup_{x \in \mathbb{E}} B(x, \frac{1}{n})$ (esto en realidad es una igualdad pero la inclusión deja más claro que son cubrimientos). Por Lindeloff existe subcubrimiento a lo sumo numerable

Ahora las bolas son de radio fijo, entonces podemos quedarnos con numerables $x \in \mathbb{E}$

Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ $\exists (x_k^n)_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $\mathbb{E} \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B(x_k^n, \frac{1}{n})$ (Una vez fijado el $n \in \mathbb{N}$ nos armamos la sucesión de $x \in \mathbb{E}$ que nos dado el cubrimiento con las bolas de esos centros y radio $\frac{1}{n}$ esta notación representa todo eso con cualquier $n \in \mathbb{N}$)

$D = \{x_k^n : n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}\}$ Esto es a lo sumo numerable

$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim D$ con $f(x, k) = x_k^n$ que es sobreyectiva

Densidad, sea $x \in \mathbb{E}$, dado $r > 0$ tomamos n_0 tal que $\frac{1}{n_0} < r$ entonces $\mathbb{E} \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B(x_k^{n_0}, \frac{1}{n_0})$

Como $x \in \mathbb{E}$ entonces $\exists k_0$ tal que $x \in B(x_{k_0}^{n_0}, \frac{1}{n_0})$ entonces $d(x, x_{k_0}^{n_0}) < \frac{1}{n_0} < r$

$x_{k_0}^{n_0} \in B(x, r)$ y además $x_{k_0}^{n_0} \in D$ por lo tanto $B(x, r) \cap D \neq \emptyset$

Encontramos D es denso y numerable de \mathbb{E} por lo tanto \mathbb{E} es separable

□

Definición 0.11. Sea (\mathbb{E}, d) un espacio métrico y $x \subseteq \mathbb{E}$ un subespacio métrico. Es decir, consideramos en X la métrica d_X inducida: dados $x, y \in X$

$$d_X(x, y) = d(x, y)$$

Entonces, para $x \in X$ u $r > 0$, la bola en X o relativa a X de centro x y radio r es

$$B_X(x, r) = \{y \in X : d_X(x, y) < r\} = B(x, r) \cap X$$

Definición 0.12. Sea X subespacio métrico de \mathbb{E} . Decimos que $A \subseteq X$ es abierto relativo de X o abierto en X si para todo $x \in A$ existe $r > 0$ tal que $B_X(x, r) \subseteq A$

Proposición 1. Sea X subespacio métrico de \mathbb{E} y $A \subseteq X$. Son equivalentes:

1. A es abierto relativo de X
2. Existe $U \subseteq \mathbb{E}$ abierto (en \mathbb{E}) tal que $A = U \cap X$

Proof. $i) \Rightarrow ii)$ Sea $x \in A$ entonces $x \in U$ entonces $\exists r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq U$

Entonces $B(x, r) \cap X \subseteq U \cap X = A$ por lo tanto $B_X(x, r) \subseteq A$

$i) \Rightarrow ii)$ para cada $x \in A$ existe $r_x > 0$ tal que $B_X(x, r_x) \subseteq A$

Entonces $A = \bigcup_{x \in A} B_X(x, r_x)$ pero entonces tomemos $U = \bigcup_{x \in A} B(x, r_x)$ que es abierto por ser unión de abiertos.

Y ahora tenemos $A = U \cap X$ con U abierto □

Definición 0.13. Sea X subespacio métrico de \mathbb{E} . Decimos que $B \subseteq X$ es cerrado relativo de X o cerrado en X si $X \setminus B$ es abierto relativo de X

Proposición 2. Sea X subespacio métrico de \mathbb{E} y $B \subseteq X$. Son equivalentes:

1. B es cerrado relativo de X
2. Existe $F \subseteq \mathbb{E}$ cerrado (en \mathbb{E}) tal que $B = F \cap X$

Proof. □

Ejercicio 4. Para pensar: dar una definición de clausura relativa a X a partir de bolas y ver cómo se relaciona con la definición de cerrado relativo.

Proof. □

Compleitud

Definición 0.14. Una sucesión $(x_n)_n$ se dice de Cauchy si para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (que depende de ϵ) tal que si $n, m \geq n_0$ entonces $d(x_n, x_m) \leq \epsilon$

Teorema 8. Sea (\mathbb{E}, d) un e.m y $(x_n)_n \subseteq \mathbb{E}$

1. Si $(x_n)_n$ es de Cauchy, entonces el conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado.
2. Si $(x_n)_n$ es de Cauchy y contiene alguna subsucesión convergente entonces x_n es convergente
3. Si $(x_n)_n$ es convergente, entonces es de Cauchy

Proof. Ya probamos la 1) y la 3) 2) Sea $(x_{n_k})_k$ subsucesión convergente a $x \in \mathbb{E}$.

Sea $\epsilon > 0 \quad \exists k_1/d(x_{n_k}, x) < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall k \geq k_1$

x_n es de Cauchy, entonces $\exists n_1/d(x_n, x_m) < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n, m \geq n_0$

Ahora tomemos $n \geq n_0$ y sea $k \geq k_1/n_k \geq n_0$

Con esto tenemos $d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, x) < \epsilon$ □

Definición 0.15. Un espacio métrico (\mathbb{E}, d) se dice completo si toda sucesión de Cauchy es convergente a un punto $x \in \mathbb{E}$

Ejemplo 7. \mathbb{R} es completo y también \mathbb{R}^n se vio en taller

Idea: Si x_n es una sucesión de Cauchy, entonces por el teorema de arriba es acotada. Ahora sabemos que una sucesión acotada tiene una subsucesión convergente, entonces usando nuevamente el teorema, x_n tiene que converger. Luego \mathbb{R} es completo por que toda sucesión de Cauchy converge en \mathbb{R}

Ejercicio 5. Sea \mathbb{E} un conjunto no vacío con la métrica discreta, es (\mathbb{E}, δ) completo ?

Ejemplo 8. El espacio $C([0, 1])$ es completo con $d_\infty(x, y) = \max_{t \in [0, 1]} |x(t) - y(t)|$

Proof. Tomemos una sucesión de Cauchy $(x_n)_n \subseteq C([0, 1])$ y $x_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

Ahora dado $\epsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \max_{t \in [0, 1]} |x_n(t) - x_m(t)| < \epsilon \quad \forall n, m \geq n_0$

Ahora si fijo t tenemos que $(x_n(t))_n \subseteq \mathbb{R}$ es una sucesión de Cauchy de \mathbb{R} entonces como \mathbb{R} es completo $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = x(t)$

Ahora sabemos dado que x_n es de Cauchy, usando la definición podemos afirmar que si el máximo para cualquier $t \in [0, 1]$ es menor que ϵ entonces

$|x_n(t) - x_m(t)| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n, m \geq n_0 \quad \forall t \in [0, 1]$

Ahora si hacemos que $m \rightarrow \infty$ llegamos a $|x_n(t) - x(t)| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall t \in [0, 1]$

Entonces $\max_{t \in [0, 1]} |x_n(t) - x(t)| < \epsilon \quad \forall n \geq n_0$

Luego x_n converge uniformemente a x en $[0, 1]$

Sabemos que entonces x es continua entonces $x \in C([0, 1])$

Pero además $d_\infty(x_n, x) \rightarrow 0$ entonces x_n converge □

Ejemplo 9. El espacio $C([0, 2])$ no es completo con

$$d_1(x, y) = \int_0^2 |x(t) - y(t)| dt$$

Proof. Miremos

$$x_n(t) = \begin{cases} t^n & 0 \leq t < 1 \\ 1 & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

Ahora x_n converge a x dada por

$$x(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < 1 \\ 1 & 1 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

Pero esta función NO es continua, entonces no está en el espacio, pero entonces x_n no converge, por que no se puede converger a algo que no está en el espacio \square

Definición 0.16. Dado $A \subseteq \mathbb{E}$, con $A \neq \emptyset$, se define su diámetro

$$\delta(A) = \sup\{d(x, y) : x \in A, y \in A\}$$

Observación. El diámetro no necesariamente es el doble del radio, por ejemplo sea (\mathbb{E}, δ) la bola $B(0, \frac{1}{2}) = \{0\}$

Entonces $\delta(B(0, \frac{1}{2})) = 0$

Ejercicio 6. $\delta(A) = \delta(\overline{A})$

Proof. Una inclusión es fácil, la vuelta un poco mas difícil \square

Teorema 9 (Principio de encaje de Cantor). Sea (\mathbb{E}, d) un e.m completo y una sucesión decreciente de conjuntos no vacíos $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$, tales que $\delta(A_j) \rightarrow 0$ cuando $j \rightarrow \infty$, entonces existe un único $x \in \bigcap_n \overline{A_n}$

Proof. $A_n \neq \emptyset \forall n \in \mathbb{N}$ entonces $\exists a_n \in A_n$

Además $\delta(A_n) \rightarrow 0$ entonces dado $\epsilon > 0 \exists n_0 / \delta(A_n) < \epsilon \quad \forall n \geq n_0$

Ahora sean $n, m \geq n_0$ entonces $a_n \in A_n \subseteq A_{n_0}$ y $a_m \in A_m \subseteq A_{n_0}$

Por lo tanto $d(a_n, a_m) < \epsilon \quad \forall n, m \geq n_0$. Entonces $(a_n)_n$ es de Cauchy.

Como \mathbb{E} es completo a_n es convergente a un $x \in \mathbb{E}$. Mostremos que $x \in \bigcap \overline{A_n}$

Sea $k \in \mathbb{N}$. Si $n \geq k$ sucede $a_n \in A_n \subseteq A_k$ entonces $(a_n)_{n \geq k} \subseteq A_k$

Ahora esto es una subsucesión de $(a_n)_n$ por lo tanto converge a x también luego tengo una sucesión contenida A_k que converge a x por lo tanto $x \in A_k$ y este $k \in \mathbb{N}$ era arbitrario entonces puedo hacerlo $\forall k \in \mathbb{N}$

Entonces $x \in \bigcap_k \overline{A_k}$

Supongamos que tenemos $x, x' \in \bigcap_n \overline{A_n}$ entonces para cada $n \in \mathbb{N} \quad x, x' \in \overline{A_n}$ entonces $d(x, x') \leq \delta(\overline{A_n}) = \delta(A_n) \rightarrow 0$ entonces $d(x, x') \rightarrow 0$ luego $x = x'$

Entonces x es el único en la intersección \square

Observación. No vale si \mathbb{E} no es completo, por ejemplo $\mathbb{E} = (0, 1)$ y $A_n = (0, \frac{1}{n}) \quad \overline{A_n} = (0, \frac{1}{n}]$

Entonces $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots$ y también $\delta(A_j) \rightarrow 0$ sin embargo $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \overline{A_n} = \emptyset$

Pensar $\mathbb{E} = (C([0, 1]), d_1)$ no es completo.

Sea $A_n = \{x \in C[0, 1] / x(0) = 1 \quad \int_0^1 |x(t)| dt \leq \frac{1}{n}\}$

Pensar si este ejemplo sirve. Observación tiene que ser no vacía la intersección y además tener un único elemento

Proposición 3. Sean \mathbb{E}, \mathbb{E}' espacios métricos, \mathbb{E}' completo, y $D \subseteq \mathbb{E}$ un subconjunto denso. Si $f : D \rightarrow \mathbb{E}'$ es uniformemente continua, entonces existe una única $F : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ uniformemente continua tal que $F|_D = f$

Teorema 10. Sea (\mathbb{E}, d) un e.m completo y $X \subseteq \mathbb{E}$ un subespacio. Entonces, X es completo si y sólo si X es cerrado (como subconjunto de \mathbb{E})

Proof. \Rightarrow) Sea $x \in \overline{X} \subseteq \mathbb{E}$ entonces $\exists (x_n)_n \subseteq X / x_n \rightarrow x$ esta sucesión converge en \mathbb{E} pero no sabemos si converge en X

Ahora como x_n converge en \mathbb{E} entonces es de Cauchy en \mathbb{E} . Ahora como $d_X(x_n, x_m) = d_{\mathbb{E}}(x_n, x_m)$

Ahora dado que la distancia en X es la inducida por la distancia en \mathbb{E} entonces esta sucesión también es de Cauchy en X , pero como X es completo entonces esta sucesión converge en X .

Entonces $\exists y \in X / x_n \rightarrow y$ y esto vale para ambas distancias $d_x, d_{\mathbb{E}}$

Pero entonces $y = x$ luego $x \in X$. Luego dada una sucesión convergente en X entonces converge en X por lo tanto X es cerrado

\Leftarrow) Sea $(x_n)_n \subseteq X$ de Cauchy. Como $d_X(x_n, x_m) = d_{\mathbb{E}}(x_n, x_m)$ entonces $(x_n)_n$ es de Cauchy en \mathbb{E} como \mathbb{E} es completo existe $a \in \mathbb{E} / x_n \rightarrow a$

Ahora $(x_n)_n \subseteq X$ y $x_n \rightarrow a$ entonces $a \in \overline{X} = X$ por ser X cerrado

Entonces $x_n \rightarrow a$ con $d_{\mathbb{E}}$ y sabemos $(x_n)_n \subseteq X$ y también $a \in X$

Entonces $x_n \rightarrow a$ con d_X (esto sucede por que la distancia en X es la inducida por \mathbb{E}) por lo tanto $(x_n)_n$ es convergente en X

Esto lo podemos hacer para cualquier sucesión de Cauchy en X por lo tanto X es completo \square

Observación. $d : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ continua, no necesariamente manda sucesiones de Cauchy en sucesiones de Cauchy, pero si es uniformemente continua si

Métricas equivalentes no necesariamente respetan completitud, algo es que es completo en una métrica puede no ser completo en otra métrica equivalente.

Intuición si dos métricas d, d' son equivalentes entonces $id : (E, d) \rightarrow (E, d')$ es homeomorfismo, ahora como continuidad no necesariamente respeta sucesiones de Cauchy, entonces puede que esto nos mande sucesiones de Cauchy en sucesiones que no son de Cauchy

Ahora si en cambio son fuertemente equivalentes (uniformemente equivalentes) entonces si respetan completitud. Vale por que la identidad esta vez es uniformemente equivalente por lo tanto manda Cauchy en Cauchy

Es más, veremos mas adelante que si tenemos un homomorfismo uniforme entre dos espacios métricos cualquiera entonces uno va a ser completo si y sólo si el otro es completo

Observación. Si $\mathbb{E} = \mathbb{Q}$ su completación podría ser \mathbb{R}

Si $\mathbb{E} = (0, 1)$ su completación sería $[0, 1]$ (aunque $[-1, 2]$ o \mathbb{R} también sean completos que lo contienen)

Si $\mathbb{E} \subseteq M$ con M completo, ¿la completación de \mathbb{E} sería M ?. No necesariamente, mejor tomar $\overline{\mathbb{E}}$

Definición 0.17. Sean $(\mathbb{E}, d), (\mathbb{E}', d')$ espacios métricos. Una función $T : \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ se dice inmersión isométrica o función isométrica si $d'(T(x), T(y)) = d(x, y) \quad \forall x, y \in \mathbb{E}$ (La diferencia con una isometría es que esta es inyectiva)

Definición 0.18. Sea (\mathbb{E}, d) un espacio métrico. Decimos que el espacio métrico $(\hat{\mathbb{E}}, \rho)$ es una completación de \mathbb{E} si existe una inmersión isométrica $T : \mathbb{E} \rightarrow \hat{\mathbb{E}}$ tal que $T(\mathbb{E})$ es denso en $\hat{\mathbb{E}}$.

Observación. Cuando uno tiene una inmersión isométrica podemos decir que el espacio en imagen es casi lo mismo que el espacio en el dominio.

Si quisieramos ser mas rigurosos en realidad la completación es el par $((\hat{\mathbb{E}}, \rho), T)$.

Teorema 11. Todo espacio métrico de \mathbb{E} tiene una completación (puede ser completado). La completación es única salvo isometrías.

Proof. Para que la completación es única debemos ver que dadas dos completaciones $((\hat{\mathbb{E}}, d_1), T)$ y $((\hat{\mathbb{E}}_2, d_2), T_2)$

Tenemos que ver que existe una isometría biyectiva $F : \hat{\mathbb{E}} \rightarrow \hat{\mathbb{E}}_2$ lo que nos diría que $\hat{\mathbb{E}}$ y $\hat{\mathbb{E}}_2$ son esencialmente el mismo espacio.

Pero además nos asegura que $F \circ T = T_2$

□