1) Probar las siguientes igualdades

i.
$$B \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{I}} A_i = \bigcap_{i \in \mathbb{I}} (B \setminus A_i)$$

Proof. $\subseteq$) Sabemos $x \in B$ y $x \notin \bigcup_{i \in \mathbb{I}} A_i$

Luego $x \in B$ y $x \notin \bigcup A_i \quad \forall i \in \mathbb{I}$

Entonces $x \in B \setminus A_i \quad \forall i \in \mathbb{I}$

$\Rightarrow x \in \bigcap B \setminus A_i$

$\supseteq$) Sabemos $x \in B \setminus A_i \quad \forall i \in \mathbb{I}$

Luego para cada $i \in \mathbb{I}$ sabemos $x \in B$ y $x \notin A_i$

$\Rightarrow x \in B \setminus \bigcup A_i$

□

ii.
$$B \setminus \bigcap_{i \in \mathbb{I}} A_i = \bigcup_{i \in \mathbb{I}} (B \setminus A_i)$$

Proof. $\subseteq$) Sabemos $x \in B$ y $x \notin \bigcap A_i$

Luego existe algún $i \in \mathbb{I}$ tal que $x \notin A_i$ (quizas para todos los $i \in I$ sucede que $x \notin A_i$ pero con uno alcanza)

Entonces existe algún $i \in \mathbb{I}$ tal que $x \in B$ y $x \notin A_i \Rightarrow B \setminus A_i$

$\Rightarrow x \in \bigcup (B \setminus A_i)$

$\supseteq$) Tenemos $x \in B \setminus A_i$ para algún $i \in \mathbb{I}$

Luego $x \in B$ y $x \notin A_i$ para algún $i \in \mathbb{I}$

Entonces $x \in B$ y $x \notin \bigcap A_i \quad \forall i \in \mathbb{I}$

$\Rightarrow x \in B \setminus \bigcap A_i$

□

iii.
$$\bigcup_{i \in \mathbb{I}} (A_i \cap B) = B \cap (\bigcup_{i \in \mathbb{I}} A_i)$$

Proof. $\subseteq$) Tenemos $x \in A_i \cap B$ para algún $i \in \mathbb{I}$

Luego $x \in B$ y $x \in A_i$ para algún $i \in \mathbb{I} \Rightarrow x \in \bigcup A_i$

Entonces $x \in B$ y $x \in \bigcup A_i$

$\Rightarrow x \in B \cap (\bigcup A_i)$ □

3) Sea $f : X \to Y$ una función, A, B subconjuntos de X

i. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

Proof. $\subseteq$) Sea $y \in f(A \cup B)$ entonces $\exists x \in A \cup B / f(x) = y$
Luego $x \in A$ y $x \in B$
Entonces $y = f(x) \in f(A)$ y por otro lado $y = f(x) \in B$
Finalmente $y = f(x) \in f(A) \cup f(B)$
$\supseteq$) Sea $y \in f(A) \cup f(B)$ luego $y \in f(A)$ e $y \in f(B)$
Entonces $\exists x \in A$ tal que $f(x) = y$ luego $x \in A \cup B$
Luego $y = f(x) \in f(A \cup B)$

$\square$

ii. $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

Proof. Sea $y \in f(A \cap B)$ luego $\exists x \in A \cap B$ tal que $f(x) = y$
Luego $x \in A$ y $x \in B$ luego $y = f(x) \in f(A)$ e $y = f(x) \in f(B)$
Finalmente $y = f(x) \in f(A) \cap f(B)$

$\square$

iii. Sea $A_{i \in \mathbb{N}}$ una familia de infinitos conjuntos, entonces

(a) $f(\bigcup A_i) = \bigcup f(A_i)$

Proof. $\subseteq$) Sea $y \in f(\bigcup A_i)$ luego $\exists x \in \bigcup A_i$ tal que $f(x) = y$
Entonces $\exists A_j$ tal que $x \in A_j$ por lo que $y = f(x) \in f(A_j) \subseteq \bigcup f(A_i)$
$\supseteq$) Sea $y \in \bigcup f(A_i)$ luego $\exists j \in \mathbb{N}$ tal que $y \in f(A_j)$
Luego $\exists x \in A_j$ tal que $y = f(x)$ luego $x \in \bigcup A_i$
Finalmente $y = f(x) \in f(\bigcup A_i)$

$\square$

(b) $f(\bigcap A_i) \subseteq \bigcap f(A_i)$

Proof. Sea $y \in f(\bigcap A_i)$ luego $\exists x \in \bigcap A_i$
Entonces $x \in A_i \quad \forall i \in \mathbb{N}$
Luego $y = f(x) \in f(A_i) \quad \forall i \in \mathbb{N}$
Finalmente $y \in \bigcap f(A_i)$

$\square$

(c) La última inclusión puede ser estricta.

Proof. Sea $f(x) = 3 \quad \forall x \in X$ y $A = 1, B = 2$
Luego $3 = f(A) \cap f(B) = 3 = \{3\}$ que es distinto a $f(A \cap B) = f(\{\emptyset\}) = \emptyset$ $\square$

4) Sean $f : X \to Y$ una función, $A \subseteq X$ y $B, B_1, B_2 \subseteq Y$. Luego vale:

i. $A \subseteq f^{-1}(f(A))$

Proof. Sea $x \in f(A)$ luego $f(x) \in f(A)$ por lo tanto $f^{-1}(f(x)) \in f^{-1}(f(A))$
Entonces $x \in f^{-1}(f(A))$ $\square$

ii. $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$

Proof. Sea $y \in f(f^{-1}(B))$ entonces $\exists x \in f^{-1}(B)/f(x) = y$
Pero entonces $f(x) \in B \Rightarrow y \in B$ $\square$

iii. $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$

Proof. $\subseteq$) Sea $x \in f^{-1}(Y \setminus B)$ luego $f(x) \in Y \setminus B$
Entonces $f(x) \notin B$ entonces $x = f^{-1}(f(x)) \notin f^{-1}(B)$
Por otro lado $f(x) \in Y$ entonces $x \in f^{-1}(Y)$
Juntando todo $x \in f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(B)$
O lo que és lo mismo $X \setminus f^{-1}(B)$
$\supseteq$) Sea $x \in X \setminus f^{-1}(B)$
Entonces $x \in X$ entonces $f(x) \in f(X) = Y$
Tambien $x \notin f^{-1}(B)$ por lo que $f(x) \notin B$
Luego $f(x) \in Y \setminus B$
Finalmente $x = f^{-1}(f(x)) \in f^{-1}(Y \setminus B)$ $\square$

iv. $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

Proof. $\subseteq$) Sea $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$ luego $f(x) \in B_1 \cup B_2$
Luego $f(x) \in B_1$ por lo que $x \in f^{-1}(B_1)$
Finalmente $x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
$\supseteq$) Sea $x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{1}(B_2)$
Luego $x \in f^{-1}(B_1)$ entonces $f(x) \in B_1$
Por tanto $f(x) \in B_1 \cup B_2$
Finalmente $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$ $\square$

v. $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

Proof. $\subseteq$) Sea $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2)$ entonces $f(x) \in B_1 \cap B_2$
Por lo que $f(x) \in B_1$ esto implica $x \in f^{-1}(B_1)$
Tambien $f(x) \in B_2$ que implica $f(x) \in f^{-1}(B_2)$
Finalmente $f(x) \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
$\supseteq$) Sea $x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
Luego $x \in f^{-1}(B_1)$ por lo que $f(x) \in B_1$ y con el mismo argumento $f(x) \in B_2$
Entonces tenemos $f(x) \in B_1 \cap B_2$
Finalmente $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2)$ $\square$

4)b) Sean $f : X \to Y$ una función y B_i Una familia infinita de subconjuntos de Y vale:

i. $f^{-1}(\bigcup B_i) = \bigcup f^{-1}(B_i)$

Proof. $\subseteq$) Sea $x \in f^{-1}(\bigcup B_i)$ entonces $f(x) \in \bigcup B_i$
Luego $f(x) \in B_j$ para algún B_j
Por ende $x \in f^{-1}(B_j) \subseteq \bigcup f^{-1}(B_i)$
Finalmente $x \in \bigcup f^{-1}(B_i)$
$\supseteq$) Por hipótesis sabemos $\exists j \in \mathbb{N}$ tal que $x \in f^{-1}(B_j)$
Por lo que $f(x) \in B_j$ y entonces $f(x) \in \bigcup B_j$
Luego $x \in f^{-1}(\bigcup B_j)$ $\square$

ii. $f^{-1}(\bigcap B_i) = \bigcap f^{-1}(B_i)$
$\subseteq$) Sea $x \in f^{-1}(\bigcap B_i)$ luego $f(x) \in \bigcap B_i$
Entonces $f(x) \in B_i \quad \forall i \in \mathbb{N}$ luego $x \in f^{-1}(B_i) \quad \forall i \in \mathbb{N}$
Finalmente $x \in \bigcap f^{-1}(B_i)$
La otra inclusión sale de la misma forma que todos los ejercicios arriba , queda como ejercicio para alguién con muchas ganas

5) Sea $f : X \to Y$ una función. Probar que $f(f^{-1}(B)) = B$ para cada $B \subseteq Y$ si y sólo si f es suryectiva

Proof. $\Leftarrow$) Por ejercicio anteriór sabemos que $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ probemos la otra inclusión.
Sea $y \in B$ luego $y \in Y$ como f suryectiva $\exists x \in X$ tal que $f(x) = y$ equivalentemente $x = f^{-1}(y)$
Luego $y = f(x) = f(f^{-1}(y)) \in f(f^{-1}(B))$
Entonces $y \in f(f-1(B)) \quad \forall y \in B$ y por ende $B \subseteq f(f^{-1}(B))$
Finalmente $B = f(f^{-1}(B))$ para cualquier $B \subseteq Y$
$\Rightarrow$) Tenemos la igualdad para cada $B \subseteq Y$ en particular vale para Y
Luego $f(f^{-1}(Y)) = Y$ por lo tanto f es suryectiva
Si no fuera suryectiva tiene que existir algún $y \in Y$ tal que $f^{-1}(y) = \emptyset$
Por lo que $f^{-1}(y) \notin f^{-1}(Y)$ entonces $y \notin f(f^{-1}(Y))$
Finalmente $Y \neq f(f^{-1}(Y))$ $\square$