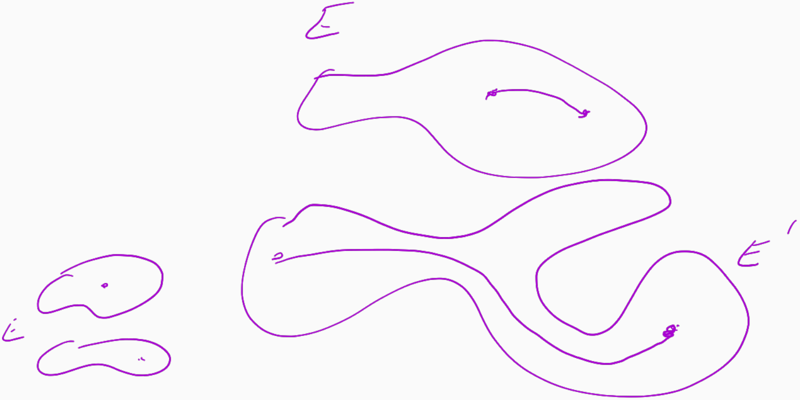
Cálculo Avanzado - Conjuntos conexos 3

Primer cuatrimestre de 2020

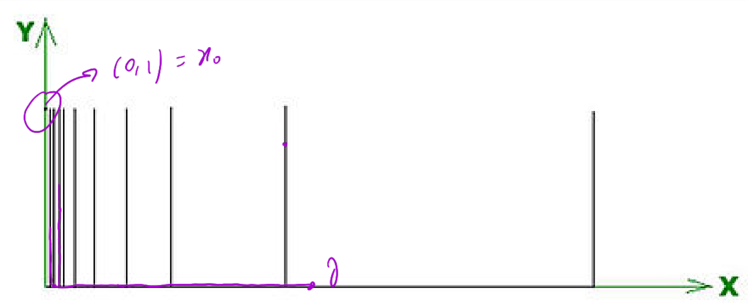
Daniel Carando

Dto. de Matemática - FCEN - UBA

Seguimos con temas del capítulo 10 del apunte.



Ya vimos el ejemplo del peine:

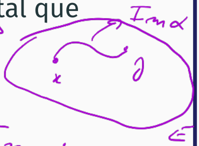


Ya vimos el ejemplo del peine:

Definición

Un espacio métrico E se dice arcoconexo si para todo par $x, y \in E$ existe un función continua $\alpha : [0, 1] \to E$ tal que

$$\alpha(0) = x \quad \text{y} \quad \alpha(1) = y.$$



$\alpha \longrightarrow$ CAMINO DE x A y. $\longleftarrow$ Im α

Obs: un camino siempre es conexo

(Im $\alpha = \underbrace{\alpha}_{\text{CONT}} ([0,1]) \longrightarrow$ CONEXO)

Teorema
Un espacio E arcoconexo es conexo.

Teorema

Un espacio E arcoconexo es conexo.

¡No vale la vuelta! EL PEINE ES CONTRAEJEMPLO.

DEM: 1ª FORMA: Supongamos que no:

$\exists\, U, V$ ab. no vacíos $/ \; E = U \cup V, \; U \cap V = \emptyset$.

Sea $\boxed{x \in U}$, $y \in V \Rightarrow \exists\, \alpha : [0,1] \to E$ cont $/$

E arcoconexo

$\boxed{\alpha(0) = x}$, $\alpha(1) = y$

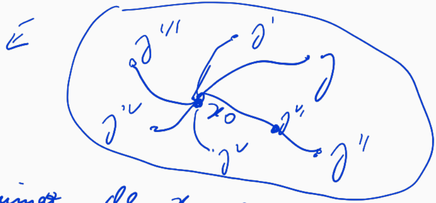
$\Rightarrow \boxed{\operatorname{Im} \alpha} \subset U \cup V, \; U, V$ ab;

$\underline{x \in \operatorname{Im}\alpha \cap U} \neq \emptyset \quad \underline{y \in \operatorname{Im}\alpha} \cap V \neq \emptyset$

$\operatorname{Im}\alpha \cap \underbrace{U \cap V}_{=\,\emptyset} = \emptyset \Rightarrow \operatorname{Im}\alpha$ NO CONEXO

ABS! $\therefore E$ CONEXO.

OTRA FORMA:



Sea $x_0 \in E$.

Dado $y \in E$, $\exists$ α_y camino de x_0 a y

$\alpha_y : [0,1] \to E$ cont, $\alpha_y(0) = x_0$, $\alpha_y(1) = y$.

[$x_0, y \in \mathrm{Im}\,\alpha_y$]

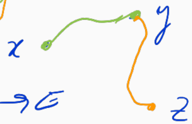
$$E = \bigcup_{y \in E} \underbrace{\mathrm{Im}\,\alpha_y}_{\text{CONEXO } \forall y} \qquad x_0 \in \bigcap_{y \in E} \mathrm{Im}\,\alpha_y \neq \emptyset.$$

POR TEO, E conexo.

Observación

α camino de x a y

$\Rightarrow \exists\, \tilde{\alpha}$ camino de y a x:



$$\tilde{\alpha}(t) = \alpha(1-t) \qquad \tilde{\alpha} : [0,1] \to E \text{ cont} \qquad \tilde{\alpha}(0) = y, \quad \tilde{\alpha}(1) = x.$$

Si hay otro camino β de y a z

$$\beta : [0,1] \to E \qquad \beta(0) = y, \quad \beta(1) = z$$

$$\alpha \vee \beta : [0,1] \to E$$

$$\alpha \vee \beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \leq t \leq 1/2 \\ \beta(2t-1) & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \exists$ camino de x a z.

Teorema

Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Entonces, A es arcoconexo si y sólo si A es conexo.

DEM: $\Rightarrow)$ ✓ $\quad \Leftarrow)$ $x_0 \in A$. Si probamos que todo $x \in A$ se une a x_0 por un camino (en A), listo (POR OBS ANTERIOR)

$U = \{x \in A \,/\, \text{existe un camino (en A) de } x_0 \text{ a } x\}$. $\quad$ $\boxed{\text{q v q } \boxed{U = A}}$

$V = \{y \in A \,/\, \text{NO existe un camino (en A) de } x_0 \text{ a } y\}$

$A = U \cup V \qquad U \cap V = \emptyset$, $\quad x_0 \in U$ (x_0 se une a x_0 con $\alpha \equiv x_0$)

$U \neq \emptyset$

Veamos que U es ab. en A:

Sea $x \in U \Rightarrow x \in A \Rightarrow \exists\, r > 0 \,/\, B(x,r) \subset A$. Veamos que $B(x,r) \subset U$.

Si $z \in B(x,r) \Rightarrow$. existe un camino (en A) de x a z (VER)

. $x \in A \Rightarrow$ existe un camino de x_0 a x $\Big] \Rightarrow \exists$ camino en A

de x_0 a z (x OBS) $\Rightarrow z \in U \Rightarrow$ $\boxed{B(x,r) \subset U}$ $\quad \therefore U$ ab (en A)

Veamos que V es ab. (en A)

$\boxed{y \in V} \Rightarrow y \in A$ $\quad \exists\, r>0 \,/\, B(y,r) \subset A$

Sea $z \in B(y,r)$. Si $z \notin V$, existiría un camino en A de x_0 a z. $\Rightarrow$ habría camino de x_0 a z y de z a y

$\Rightarrow$ habría camino de x_0 a y

Abs ($y \in V$).

$\therefore z \in V \Rightarrow \boxed{B(y,r) \subset V}$. $\quad \therefore V$ ab. (en A)

$A = U \cup V$ $\quad U, V$ ab, $\quad U \cap V = \emptyset \Rightarrow$ alguno tiene que ser vacío. Pero $x_0 \in U \Rightarrow V = \emptyset$

$\Rightarrow A = U \Rightarrow \forall x \in A\ \exists$ camino de x_0 a x (camino en A)

$\xRightarrow{\text{Obs}}$ $\forall x, y \in A\ \exists$ camino de x a y

Proposición

(i) Sea $f : E \to E'$ continua. Si $A \subset E$ es arcoconexo, entonces $f(A)$ es arcoconexo en E'.

(ii) Si $\{A_i\}_{i \in I}$ es una familia de conjuntos arcoconexos con intersección no vacía, entonces $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ es arcoconexo.

DEM: (i) A arcoconexo.

Sean $\boxed{y_1, y_2 \in f(A)} \Rightarrow \exists\, x_1, x_2 \in A \,/\, y_1 = f(x_1),\ y_2 = f(x_2)$

$\Rightarrow$ (A arcoc.) $\exists\, \alpha : [0,1] \to A$ cont $/\ \alpha(0) = x_1,\ \alpha(1) = x_2$.

$\beta = f \circ \alpha : [0,1] \to f(A)$ es cont.

$\beta(0) = f(\alpha(0)) = f(x_1) = y_1$

$\beta(1) = f(\alpha(1)) = f(x_2) = y_2$

$\boxed{\exists \text{ camino en } f(A) \text{ que une } y_1 \text{ e } y_2}$

$\therefore f(A)$ arcocon.

$A = \bigcup_{i \in I} A_i$ $\quad A_i$ arcoc. $\forall i \in I$, $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$.

Sea $x_0 \in \bigcap_{i \in I} A_i$. $\quad$ Sean $\underline{x, y} \in A = \bigcup_{i \in I} A_i$.

$\exists\, i_1, i_2 \in I \,/\, x \in A_{i_1},\ y \in A_{i_2}$.

$\underbrace{x_0 \in A_{i_1},\ x \in A_{i_1}}$ $\Rightarrow \exists\, \alpha_1$ camino en $\overbrace{A_{i_1}}^{\subset A}$ que une x con x_0

$x_0 \in A_{i_2},\ y \in A_{i_2} \Rightarrow \exists\, \alpha_2$ camino en $\overbrace{A_{i_2}}^{\subset A}$ que une x_0 con y.

α_1 y α_2 son caminos en A

α_1: une x con x_0

α_2: x_0 con y

$\xRightarrow{\text{OBS}}$ $\exists$ camino en A que une x con y

$\therefore A$ es arcoconexo.