# Práctica 6: Compacidad

**Ejercicio 1.**

i) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Probar que el conjunto $\{0\}\cup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ es compacto.

ii) Mostrar que el intervalo $(0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ no es compacto.

iii) Sea $S = (a, b) \cap \mathbb{Q}$ con $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Probar que $S$ es un subconjunto cerrado y acotado pero no compacto de $(\mathbb{Q}, d)$, donde $d$ es la métrica euclídea de $\mathbb{R}$.

**Ejercicio 2.** Probar que todo espacio métrico compacto es separable.

**Ejercicio 3.** Sea $A = \{a^{(n)} \in \ell^\infty : n \in \mathbb{N}\}$, donde cada sucesión $a^{(n)} = (a_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}$ está definida por

$$a_k^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n, \\ 1 & \text{si } k = n. \end{cases}$$

Probar que $A$ es discreto, cerrado y acotado, pero no compacto.

**Ejercicio 4.** Dado un cubrimiento por abiertos $(U_i)_{i\in I}$ de un espacio métrico $(X, d)$, un número $\varepsilon > 0$ se llama **número de Lebesgue** de $(U_i)_{i\in I}$ si para todo $x \in X$ existe $j \in I$ tal que $B(x, \varepsilon) \subseteq U_j$. Probar que todo cubrimiento por abiertos de un espacio métrico compacto tiene un número de Lebesgue.

**Ejercicio 5.** Sea $(X, d)$ un espacio métrico. Probar que:

i) Toda unión finita y toda intersección (finita o infinita) de subconjuntos compactos de $X$ es compacta.

ii) Si $(X, d)$ es compacto, todo subconjunto cerrado de $X$ es compacto.

iii) Un subconjunto $F \subseteq X$ es cerrado si y sólo si $F \cap K$ es cerrado para todo compacto $K \subseteq X$.

**Ejercicio 6.** Sea $c_0 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0\}$. Se define en $c_0$ la métrica

$$d(x, y) = \sup\{|x_n - y_n| : n \in \mathbb{N}\}.$$

i) Demostrar que la bola cerrada $\overline{B}(x, 1) = \{y \in C_0 : d(x, y) \leq 1\}$ no es compacta.

ii) Probar que $(c_0, d)$ es separable.

**Ejercicio 7.** Sean $(X, d)$ e $(Y, d')$ espacios métricos. Se considera $(X \times Y, d_\infty)$, donde

$$d_\infty((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d(x_1, x_2), d'(y_1, y_2)\}.$$

Probar que $(X \times Y, d_\infty)$ es compacto si y sólo si $(X, d)$ e $(Y, d')$ son compactos.

**Ejercicio 8.** Sea $(X, d)$ un espacio métrico.

i) Sean $K \subseteq X$ un compacto y sea $x \in X \setminus K$. Probar que existe $y \in K$ tal que $d(x,K) = d(x,y)$; es decir, la distancia entre $x$ y $K$ se realiza.

ii) Sean $F$, $K \subseteq X$ dos subconjuntos disjuntos de $X$ tales que $F$ es cerrado y $K$ es compacto. Probar que la distancia $d(F,K)$ entre $F$ y $K$ es positiva.

iii) Sean $K_1, K_2 \subseteq X$ dos subconjuntos compactos de $X$. Probar que existen $x_1 \in K_1$ y $x_2 \in K_2$ tales que $d(K_1,K_2) = d(x_1,x_2)$; es decir, la distancia entre $K_1$ y $K_2$ «se realiza».

**Ejercicio 9.** Sea $(X,d)$ un espacio métrico. Se define

$$\mathcal{K}(X) = \{K \subseteq X : K \text{ es compacto y no vacío}\}.$$

i) Sea $\tilde{d}(A,B) = \sup\limits_{a\in A}\{d(a,B)\}$. Verificar que $\tilde{d}$ no es una métrica en $\mathcal{K}(X)$.

ii) Se define $\delta : \mathcal{K}(X) \times \mathcal{K}(X) \to \mathbb{R}$ como $\delta(A,B) = \text{máx}\{\tilde{d}(A,B), \tilde{d}(B,A)\}$. Probar que para todo $\varepsilon > 0$ vale

$$\delta(A,B) < \varepsilon \iff A \subseteq B_\varepsilon \text{ y } B \subseteq A_\varepsilon,$$

donde $C_\varepsilon = \{x \in X : d(x,C) < \varepsilon\}$ para cada $C \subseteq X$.

iii) Probar que dados $A, B \in \mathcal{K}(X)$, existen $a \in A$ y $b \in B$ tales que $\delta(A,B) = d(a,b)$.

iv) Probar que $\delta$ es una métrica en $\mathcal{K}(X)$, que llamamos *métrica de Hausdorff*.

**Ejercicio 10.** Llamamos $B_p$ la bola **cerrada** de centro 0 y radio 1 para la distancia $d_p((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = (|x_1-y_1|^p + |x_2-y_2|^p)^{\frac{1}{p}}$. Consideremos en $\mathbb{R}^2$ la distancia $d_2$. Probar que $\text{lím}_{n\to\infty} B_{2-\frac{1}{n}} = B_2$ en $(\mathcal{K}(\mathbb{R}^2),\delta)$, donde $\delta$ es la métrica de Hausdorff definida en el ejercicio anterior.

**Ejercicio 11.** Sean $(X,d)$ e $(Y,d')$ espacios métricos y $f : X \longrightarrow Y$ continua. Probar que:

i) Si $(X,d)$ es compacto, entonces $f(X)$ también lo es.

ii) Si además $f$ es biyectiva, entonces $f$ resulta un homeomorfismo.

**Ejercicio 12.** Sea $(X,d)$ un espacio métrico compacto. Probar que para cada espacio métrico $(Y,d')$, la proyección $\pi : X \times Y \to Y$ definida por $\pi(x,y) = y$ es cerrada.

**Ejercicio 13.** Sean $(X,d)$ e $(Y,d')$ espacios métricos, y sea $f : X \longrightarrow Y$ una función. Probar que si $Y$ es compacto y el gráfico de $f$ es cerrado en $X \times Y$, entonces $f$ es continua.

**Ejercicio 14.**

i) Sea $f : \mathbb{R}_{\geq a} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que es uniformemente continua en $[a, b]$ y también en $[b, +\infty)$. Probar que $f$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}_{\geq a}$.

ii) Deducir que $\sqrt{x}$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

iii) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y tal que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Probar que $f$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

**Ejercicio 15.** Sea $(X, d)$ un espacio métrico y sea $A \subseteq X$ compacto. Probar que si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y $f(x) > 0$ para todo $x \in A$, entonces existe $K > 0$ tal que $f(x) \geq K$ para todo $x \in A$.

**Ejercicio 16.** Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y abierta.

i) Probar que $f$ no tiene extremos locales; es decir, no existen $x_0 \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ tales que $f(x_0) \leq f(x)$ (resp. $f(x_0) \geq f(x)$) para todo $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

ii) Comprobar que existen $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ tales que $f(\mathbb{R}) = (a, b)$.

iii) Mostrar que $f : \mathbb{R} \longrightarrow (a, b)$ es un homeomorfismo y que ella y su inversa son funciones monótonas.

**Ejercicio 17.** Sea $(X, d)$ un espacio métrico compacto y sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función semicontinua superiormente. Probar que $f$ está acotada superiormente en $X$ y que $f$ alcanza máximo en $X$.