

Ejercicio 1. Ver si las siguientes funciones son distancias.

- $d_1(x, y) = (x - y)^2$ No es distancia.

Proof. $d_1(-1, 1) = 4 > 1 + 1 = d_1(-1, 0) + d_1(0, 1)$ □

- $d_2(x, y) = \sqrt{|x - y|}$ es una distancia

1. $d_2(x, y) = 0 \iff \sqrt{|x - y|} = 0 \iff |x - y| = 0 \iff x = y$

2. $d_2(x, y) = d_2(y, x)$ es trivial

3. $d_2(x, y)^2 = |x - y| \leq |x - z| + |z - y| \leq |x - z| + |z - y| + 2\sqrt{|x - z||z - y|} = (\sqrt{|x - z|} + \sqrt{|z - y|})^2 = (d_2(x, z) + d_2(z, y))^2$

Luego $d_2(x, y)^2 \leq (d_2(x, z) + d_2(z, y))^2$

Y es trivial ver que entonces $d_2(x, y) \leq d_2(x, z) + d_2(z, y)$

- $d_3(x, y) = |x^2 - y^2|$ Es facil ver que no es distancia $d_3(-2, 2) = 0$

- $d_4(x, y) = |x - 2y|$ Es trivial devuelta $d_4(2, 1) = 0$

- $d_5(x, y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$. Tomemos la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(t) = \frac{t}{1+t}$. Viendo que su derivada es siempre mayor que 0 podemos notar que esta función es estrictamente creciente

$$\begin{aligned} \text{Además } f(a) + f(b) - f(a+b) &= \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} - \frac{a+b}{1+a+b} = \frac{a((1+b)(1+a+b)) + b((1+a)(1+a+b)) - (a+b)((1+a)(1+b))}{(1+a)(1+b)(1+a+b)} \\ &= \frac{(a+ab)(1+a+b) + (b+ab)(1+b+a) - (a+b)(1+a+b+ab)}{(1+a)(1+b)(1+a+b)} = \frac{a+2ab+a^2+a^2b+ab^2+b+2ab+b^2+ab^2+ba^2 - (a+b+a^2+ba+ab+b^2+a^2b+ab^2)}{(1+a)(1+b)(1+a+b)} \\ &= \frac{2ab+ab^2+a^2b}{(1+a)(1+b)(1+a+b)} \geq 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto $f(a+b) \leq f(a) + f(b)$

Entonces $d(x, y) = f(|x - y|) \leq f(|x - z| + |z - y|) \leq f(|x - z|) + f(|z - y|) = d(x, z) + d(z, y)$

La primera desigualdad vale por que f es creciente y usando la desigualdad de módulos de siempre, la segunda vale por lo probado arriba

Ejercicio 2. Es una clásica demostración de taller de cálculo.

Ejercicio 3. Sean X un conjunto y $\delta : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

Verificar que δ es una métrica y hallar los abiertos de (X, δ)

Nota: δ se llama metrica discreta y (X, δ) espacio métrico discreto

Proof. 1. $\delta(x, y) = 0 \iff x = y$

2. Supongamos $x \neq y \Rightarrow \delta(x, y) = 1 = \delta(y, x)$

3. Supongamos devuelta $x \neq y$ si no es obvio que vale , $\delta(x, y) = 1 \leq \delta(x, z) + \delta(z, y)$ esto vale seguro , por que no puede suceder $\delta(x, z) = \delta(z, y) = 0$ por que esto implicaría $x = z = y$ absurdo

□

Ejercicio 4. Sea $N : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ la funcion definida por

$$N(x) = \begin{cases} 2^{-n} & \text{si } a \neq 0, \quad p^n | a \quad \text{y} \quad p^{n+1} \nmid a \\ 0 & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

donde p es un primo fijo, y sea $d : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $d(a, b) = N(a - b)$. Probar que (\mathbb{Z}, d) es un espacio métrico

Proof. Primero definamos para cada entero no nulo $\phi_p(a)$ que es el mayor $n \in \mathbb{N}$ tal que $p^n | a$. Es simple ver $\phi_p(a) = \phi_p(-a)$ tambien $\phi_p(a + b) \geq \min \{\phi_p(a), \phi_p(b)\}$. Ahora podemos reescribir

$$d(a, b) = \begin{cases} 2^{-\phi_p(a-b)} & \text{si } a \neq b \\ 0 & \text{si } a = b \end{cases}$$

1. Sea $d(a, b) = 0$ entonces $a = b$ por definición , por que $2^n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$
2. Asumiendo $a \neq b$ tenemos $d(a, b) = 2^{-\phi_p(a-b)} = 2^{-\phi_p(-(a-b))} = 2^{-\phi_p(-a+b)} = d(b, a)$
3. Ahora consideremos que $\phi_p(a - b) = \phi_p((a - c) + (c - b)) \geq \min \{\phi_p(a - c), \phi_p(c - b)\}$. Tambien supongo por comodidad $a \neq b \neq c$ por comodidad, si alguno fuera igual la demostración es trivial

$$d(a, b) = 2^{-\phi_p(a-b)} \leq 2^{-\min \{\phi_p(a-c), \phi_p(c-b)\}} = \min \{2^{\phi_p(a-c)}, 2^{\phi_p(c-b)}\} \leq 2^{\phi_p(a-c)} + 2^{\phi_p(c-b)}$$

$$\text{Finalmente } d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$$

Entonces d es una métrica y por lo tanto (\mathbb{Z}, d) es un pár conjunto, métrica o lo que es lo mismo , un espacio métrico

□

Ejercicio 5. Sea $\ell_\infty = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} : (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ es acotada}\}$. Se considera $d : \ell_\infty \times \ell_\infty \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $d(a_n, b_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n - b_n|$. Probar que (ℓ_∞, d) es un espacio métrico.

Proof. 1. $d(a_n, b_n) = 0 \iff \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n - b_n| = 0 \iff 0 \leq |a_n - b_n| \leq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\iff |a_n - b_n| = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \iff a_n = b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$2. d(a_n, b_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n - b_n| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |b_n - a_n| = d(b_n, a_n)$$

$$3. \text{Sabemos que } |a_n - b_n| \leq |a_n + c_n| + |c_n - b_n|$$

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n - b_n| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} (|a_n + c_n| + |c_n - b_n|) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n + c_n| + \sup_{n \in \mathbb{N}} |c_n - b_n|$$

$$d(a_n, b_n) \leq d(a_n, c_n) + d(c_n, b_n)$$

□

Ejercicio 6. Dados $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, se define $\mathcal{C}[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es continua}\}$. Probar que son espacios métricos.

- i. $(\mathcal{C}[a, b], d_1)$ con $d_1(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$
- ii. $(\mathcal{C}[a, b], d_\infty)$, con $d_\infty(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|$

Proof. Son demostraciones de taller. De todas maneras las desigualdades salen usando $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - f(y)|$

□

Ejercicio 7. Sea (X, d) un espacio métrico. Se define $d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$

- i) d' es una métrica en X , que satisface $0 \leq d'(x, y) \leq 1 \quad \forall x, y \in X$

Proof. Veamos que es métrica, las dos primeras propiedades son triviales, veamos la desigualdad, usando la misma funcione que habíamos usado antes $f(t) = \frac{t}{1+t}$ tenemos que $d'(x, y) = f(d(x, y)) \leq f(d(x, z) + d(z, y)) \leq f(d(x, z)) + f(d(z, y)) = d'(x, z) + d'(z, y)$

Esto vale por que f es creciente y por que d es métrica

Por otro lado es trivial que $0 \leq d'(x, y)$

Supongamos que $d'(x, y) > 1 \Rightarrow d(x, y) > 1 + d(x, y)$ lo que es absurdo, entonces $d'(x, y) \leq 1$ □

- ii) $A \subseteq X$ es abierto para la métrica d si y sólo si lo es para la métrica d'

Proof. Tomemos cualquier bola abierta en d , $B_d(x, r)$

Ahora dado $y \in B_d(x, r)$ sabemos que $d(x, y) < r \Rightarrow d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} < d(x, y) < r$

Por lo tanto $y \in B_{d'}(x, r)$ entonces $B_d(x, r) \subseteq B_{d'}(x, r)$

\Leftarrow) Entonces si tenemos un abierto con d' en $A \subseteq X$ tenemos que dado $x \in X$ existe $B_{d'}(x, r) \subseteq A$ luego $B_d(x, r) \subseteq B_{d'}(x, r) \subseteq A$ por lo tanto tambien es abierto en d

\Rightarrow) Ahora tomemos nuevamente un abierto en A con respecto a d . Dado $x \in A$ tenemos $B_d(x, r) \subseteq A$.

Ahora si consideramos $r' = \frac{r}{r+1}$ podemos afirmar que $B_{d'}(x, r') \subseteq B_d(x, r) \subseteq A$

Probémoslo, sea $y \in B_{d'}(x, r')$ entonces $d'(x, y) < r' = \frac{r}{r+1}$, luego $\frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} < \frac{r}{r+1}$

Entonces $d(x, y) < \frac{r}{r+1}(1 + d(x, y)) \leq \frac{r}{r+1}(1 + r) = r$

Finalmente $d(x, y) < r$ entonces $y \in B_d(x, r)$

Entonces A es abierto con respecto a d' □

- iii) Deducir que $(x_n)_n$ converge a x con respecto en la métrica d si y sólo si converge a x con respecto a la métrica d'

Proof. \Rightarrow) Converge en d entonces $\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, x_n) \leq \epsilon \quad \forall n \geq n_0$

Como $d'(x, x_n) < d(x, x_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Tenemos que:

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_0 \quad d'(x, x_n) < d(x, x_n) \leq \epsilon \quad \forall n \geq n_0$$

Por lo tanto $x_n \rightarrow x$ con la métrica d'

\Leftarrow) Supongamos que x_n converge a x con d' . Ahora dado un $\epsilon > 0$ sabemos que $\exists r > 0$ tal que $B_{d'}(x, r) \subseteq B_d(x, \epsilon)$ y por convergencia de x_n tenemos que $\exists n_0$ tal que $x_n \in B_{d'}(x, r) \subseteq B_d(x, \epsilon) \quad \forall n \geq n_0$ entonces dado un ϵ conseguimos un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B_d(x, \epsilon) \quad \forall n \geq n_0$ y esto lo podemos hacer para cualquier $\epsilon > 0$

Entonces x_n converge a x con la métrica d □

Ejercicio 8. Sean (X_1, d_1) y (X_2, d_2) espacios métricos. Consideremos el conjunto $X_1 \times X_2$ y la aplicación $d : (X_1 \times X_2) \times (X_1 \times X_2) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$$

(a) Probar que d define una métrica en $X_1 \times X_2$

Proof. i. Por comodida tomemos $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ $d(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$ como ambas d_1, d_2 son distancias entonces son mayores a 0 entonces $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \geq 0$

$$\text{ii. } d(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2) = d_1(y_1, x_1) + d_2(y_2, x_2) = d(y, x)$$

$$\text{iii. } d(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2) \leq d_1(x_1, z_1) + d_1(z_1, y_1) + d_2(x_2, z_2) + d_2(z_2, y_2) = d(x, z) + d(z, y)$$

□

(b) \Rightarrow) Sea $(a_n, b_n)_n$ convergente a (a, b) entonces $d((a_n, b_n), (a, b)) \rightarrow 0$ entonces $d_1(a_n, a) + d_2(b_n, b) \rightarrow 0$

Ejercicio 9. Sea (X, d) un espacio métrico y sean $A, B \subseteq X$

1. Probar las siguientes propiedades del interior de un conjunto:

(a)

$$A^\circ = \bigcup_{G \text{ abierto, } G \subseteq A} G$$

Proof. \subseteq) Trivial dado que A° es abierto mas grande contenido en A

\supseteq) Sea $x \in \bigcup G$ entonces $x \in G$ para algún G de la unión

Como G es abierto existe $B(x, r) \subseteq G$ y por otro lado $G \subseteq A$

Entonces existe $B(x, r) \subseteq A$ entonces $x \in A^\circ$ □

(b) $\emptyset^\circ = \emptyset$

Proof. Supongamos $\emptyset^\circ \neq \emptyset$ entonces $\exists x \in X$ tal que $x \in \emptyset^\circ$

Luego tiene que existir $B(x, r) \subseteq \emptyset$ que es absurdo

□

(c) $X^\circ = X$

Proof. \subseteq) Vale siempre

\supseteq) Sea $x \in X$ supongamos que $x \notin X^\circ$ entonces $\forall r > 0 \quad B(x, r) \not\subseteq X$ entonces $\exists y \in B(x, r)$ tal que $y \notin X$

Absurdo por que X es todo no pueden existir cosas que no esten en X

□

(d) $A \subseteq B \Rightarrow A^\circ \subseteq B^\circ$

Proof. Sea $x \in A^\circ$ entonces existe $B(x, r) \subseteq A \subseteq B$ luego $x \in B^\circ$ \square

(e) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$. ¿Se puede generalizar a una intersección infinita?

Proof. \subseteq) Sea $x \in (A \cap B)^\circ$ entonces existe $B(x, r) \subseteq A \cap B$

Pero entonces $B(x, r) \subseteq A$ por lo que $x \in A^\circ$

Tambien $B(x, r) \subseteq B$ por lo que $x \in B^\circ$

Luego $x \in A^\circ \cap B^\circ$

\supseteq) Sea $x \in A^\circ \cap B^\circ$ entonces $x \in A^\circ$ y $x \in B^\circ$

Entonces existe $B(x, r_1) \subseteq A$ y también $B(x, r_2) \subseteq B$

Si tomamos $r = \min \{r_1, r_2\}$ tenemos que $B(x, r) \subseteq A$ y tambien $B(x, r) \subseteq B$

Entonces $B(x, r) \subseteq A \cap B$ finalmente $x \in (A \cap B)^\circ$ \square

(f) $(A \cup B)^\circ \supseteq A^\circ \cup B^\circ$ ¿Vale la igualdad?

Proof. $x \in A^\circ \cup B^\circ$ entonces x esta en alguno de los dos o los dos interiores

Supongamos $x \in A^\circ$ entonces existe $B(x, r) \subseteq A \subseteq A \cup B$

Entonces $x \in (A \cup B)^\circ$

Si esta en ambos , en particular esta en una , asi que usamos lo de arriba nuevamente

No vale la igualdad por ejemplo $A = [1, 2]$ y $B = [2, 3]$

$A^\circ \cup B^\circ = (1, 2) \cup (2, 3) \neq (1, 3) = ([1, 3])^\circ = (A \cup B)^\circ$ \square

2. Probar las siguiente propiedades de la clausura de un conjunto

(a)

$$\overline{A} = \bigcap_{F \text{ cerrado}, A \subseteq F} F$$

Proof. Sea $x \in \overline{A}$ entonces $\forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ ahora supongamos $x \notin F$

Como $F = \overline{F}$ por ser cerrado, entonces $x \notin \overline{F}$ para algún F en la intersección

Entonces $\exists r' > 0$ tal que $B(x, r') \cap F = \emptyset$

Pero esto es absurdo dado que $A \subseteq F$ tenemos $\emptyset \neq B(x, r') \cap A \subseteq B(x, r') \cap F = \emptyset$

Entonces $x \in \overline{F} = F$

Y esto vale para cualquier F cerrado tal que $A \subseteq F$

Entonces x esta en todos estos F y por ende en la intersección

\supseteq) Sea $x \in \bigcap F$ entonces $x \in F$ para todo $F = \overline{F}$ por que es cerrado por lo tanto $x \in \overline{F}$

Supongamos que $x \in \bigcap F$ pero $x \notin \overline{A}$ entonces tiene que existir un $r > 0$ tal que $B(x, r) \cap A = \emptyset$ luego tenemos que $A \subseteq X \setminus B(x, r)$ que ademas es cerrado por que es el complemento de $B(x, r)$ que es abierto

Pero entonces $X \setminus B(x, r)$ es un cerrado que contiene a A por ende es uno de los F en la intersección

Entonces $x \in X \setminus B(x, r)$ lo cual es absurdo

Provino de suponer que existia un $r > 0$ tal que $B(x, r) \cap A = \emptyset$

Entonces $\forall r > 0 \quad B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ por lo tanto $x \in \overline{A}$ □

(b) $\overline{\emptyset} = \emptyset$

Proof. Supongamos que son diferentes entonces $\exists x \in X$ tal que $x \in \overline{\emptyset}$

entonces $\forall r > 0 \quad B(x, r) \cap \emptyset \neq \emptyset$ lo cual es absurdo □

(c) $\overline{X} = X$

Proof. \supseteq) Ya está demostrada

\subseteq) Sea $x \in \overline{X}$ seguro tambien $x \in X$ por que no existe tal que $x \notin X$

Notemos que X es el conjunto universal □

(d) $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$

Proof. Sea $x \in \overline{A}$ entonces $\forall r > 0 \quad B(x, r) \cap A \neq \emptyset$

Tambien sabemos que $A \subseteq B$ entonces $B(x, r) \cap A \subseteq B(x, r) \cap B$

Entonces $\forall r > 0 \quad B(x, r) \cap B \neq \emptyset$ luego $x \in \overline{B}$ □

(e) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ ¿ Se puede generalizar a unión infinita?

Proof. \subseteq) Sea $x \in \overline{A \cup B}$ luego $\forall r > 0 \quad B(x, r) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$

Supongamos $x \notin \overline{A} \cup \overline{B}$ entonces $x \notin \overline{A}$ y $x \notin \overline{B}$

Entonces $B(x, r_1) \cap A = \emptyset$ y por otro lado $B(x, r_2) \cap B = \emptyset$

Luego sea $r = \min \{r_1, r_2\}$ tenemos que

$$B(x, r) \cap (A \cup B) \subseteq (B(x, r) \cap A) \cup (B(x, r) \cap B) \subseteq (B(x, r_1) \cap A) \cup (B(x, r_2) \cap B) = \emptyset$$

Absurdo entonces no puede ser que $x \notin \overline{A}$ y $x \notin \overline{B}$

\supseteq) Sea $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$ supongamos $x \in \overline{A}$ luego $\forall r > 0 \quad B(x, r) \cap A \neq \emptyset$

Entonces dado que $B(x, r) \cap A \subseteq B(x, r) \cap (A \cup B)$

Tenemos $B(x, r) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$ por lo que $x \in \overline{A \cup B}$ □

(f) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$

Proof. Sea $x \in \overline{A \cap B}$ entonces $\forall r > 0 \quad B(x, r) \cap (A \cap B) \neq \emptyset$

Entonces tenemos $\forall r > 0 \quad B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ por lo que $x \in \overline{A}$

Y tambien $\forall r > 0 \quad B(x, r) \cap B \neq \emptyset$ por lo que $x \in \overline{B}$

Entonces $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$

Sea $A = \mathbb{Q}$ y $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ $\overline{A \cap B} = \overline{\emptyset} = \emptyset \neq \mathbb{R} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \overline{\mathbb{Q}} \cap \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \overline{A} \cap \overline{B}$ □

(g) $x \in \overline{A} \iff$ existe una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $x_n \rightarrow x$

Proof. \Rightarrow) Sea $x \in \overline{A}$ entonces $\forall n \in \mathbb{N} \quad B(x, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$

Entonces $\forall n \in \mathbb{N}$ existe $a_n \in A \cap B(x, \frac{1}{n})$ entonces $a_n \in A$ y $a_n \in B(x, \frac{1}{n})$

Que es lo mismo que decir $\forall \epsilon > 0 \quad \exists a_n \in A$ tal que $d(x, a_n) \leq \epsilon$

Por lo tanto $\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0$ tal que $\forall n \geq n_0 \quad d(x, a_n) \leq \epsilon$

\Leftarrow) Sea $a_n \in A \quad \forall n \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \rightarrow x$

Entonces $\forall \epsilon > 0 \quad \exists a_n \in A$ tal que $d(x, a_n) \leq \epsilon$

Luego $\forall \epsilon > 0$ tenemos $a_n \in B(x, \epsilon)$ con $a_n \in A$

Por lo que $B(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$

Entonces $x \in \overline{A}$ □

3. Probar las siguientes propiedades que relacionan interior y clausura:

(a) $(X \setminus A)^\circ = X \setminus \overline{A}$

Proof. \subseteq) Sea $x \in (X \setminus A)^\circ$ entonces existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq (X \setminus A)$

Entonces $B(x, r) \cap A = \emptyset$ luego $x \notin \overline{A}$ y sabemos que $x \in X$

Entonces $x \in X \setminus \overline{A}$

\supseteq) Sea $x \in X \setminus \overline{A}$ entonces $x \notin \overline{A}$

Entonces $\exists r > 0 \quad B(x, r) \cap A = \emptyset$

Por lo tanto $B(x, r) \subseteq X \setminus A$ luego $x \in (X \setminus A)^\circ$ □

(b) $\overline{X \setminus A} = X \setminus A^\circ$

Proof. \supseteq) Sea $x \in X \setminus A^\circ \iff x \notin A^\circ \iff \forall r > 0 \quad B(x, r) \not\subseteq A$

$\iff \forall r > 0 \quad B(x, r) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset \iff x \in \overline{X \setminus A}$ □

(c) ¿Es cierto que vale $\overline{A} = \overline{A^\circ}$?

Proof. Si $A \subseteq \mathbb{R}$ con $A = \{1\}$ entonces $\overline{A} = \{1\} \neq \emptyset = \overline{\emptyset} = \overline{A^\circ}$ □

(d) ¿Es cierto que vale $A^\circ = (\overline{A})^\circ$?

$\mathbb{Q}^\circ = \emptyset \neq \mathbb{R} = \mathbb{R}^\circ = (\overline{\mathbb{Q}})^\circ$

4. Probar las siguientes propiedades de la frontera de un conjunto

(a) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$

Proof. \subseteq) $x \in \partial A \iff \forall r > 0 \quad B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ y $B(x, r) \cap A^c \neq \emptyset$

$\iff x \in \overline{A}$ y $x \in \overline{A^c} = \overline{X \setminus A} \iff x \in \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$ □

(b) ∂A es cerrado

Proof. Esto es equivalente a ver que $\partial A = \overline{\partial A}$ una de las inclusiones es trivial

Veamos que $\overline{\partial A} \subseteq \partial A$. Sea $x \in \overline{\partial A}$ entonces $\forall r > 0 \quad B(x, r) \cap \partial A \neq \emptyset$

Luego $\forall r > 0 \quad B(x, r)$ tenemos un $y \in \partial A$ tal que $y \in B(x, r)$

Como $y \in B(x, r)$ que es abierto $\exists r'$ tal que $B(y, r') \subseteq B(x, r)$

Como $y \in \partial A$ entonces $\forall r$ tenemos $B(y, r) \cap A \neq \emptyset$ y $B(y, r) \cap A^c \neq \emptyset$

En particular vale para r' , entonces $B(y, r') \cap A \neq \emptyset$ y $B(y, r') \cap A^c \neq \emptyset$

Entonces $\emptyset \neq B(y, r') \cap A \subseteq B(x, r) \cap A$ y también sucede con A^c

Entonces $x \in \partial A$

Otra opción es usar el ejercicio de arriba, como $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$ que es una intersección de dos cerrados entonces es cerrado \square

(c) $\partial A = \partial(X \setminus A)$

Proof. Esto sale por definición usando que $A^c = X \setminus A$ y que $A = (X \setminus A)^c$ \square

Ejercicio 10. Sea (X, d) un espacio métrico y sean $G \subseteq X$ abierto y $F \subseteq X$ cerrado. Probar que $F \setminus G$ es cerrado y $G \setminus F$ es abierto

Proof. \square

Ejercicio 11. Sea (X, d) un espacio métrico. Dados $a \in X$ y $r \in \mathbb{R}_{>0}$, llamamos bola cerrada de centro a y radio r al conjunto $\overline{B}(a, r) = \{x \in X : d(x, a) \leq r\}$

1. Probar que $\overline{B}(a, r)$ es un conjunto cerrado y que $\overline{\overline{B}(a, r)} \subseteq \overline{B}(a, r)$

Proof. Sea $y \in X \setminus \overline{B}(a, r)$, entonces $d(x, y) > r$ por lo tanto $\epsilon = d(x, y) - r > 0$

Ahora sea $z \in B(y, \epsilon)$ entonces $d(z, x) + d(z, y) \geq d(x, y)$

Luego $d(z, x) \geq d(x, y) - d(z, y) > d(x, y) - \epsilon = r$

Entonces $z \in X \setminus \overline{B}(a, r) \quad \forall z \in B(y, \epsilon)$

Por lo que $\forall y \in X \setminus \overline{B}(a, r) \quad \exists B(y, \epsilon)$ tal que $B(y, \epsilon) \subseteq X \setminus \overline{B}(a, r)$

Finalmente $X \setminus \overline{B}(a, r)$ es abierto entonces $\overline{B}(a, r)$ es cerrado

Como sabemos que $B(a, r) \subseteq \overline{B}(a, r)$ y ahora sabiendo que $\overline{B}(a, r)$ cerrado

Entonces $\overline{B(a, r)} \subseteq \overline{B}(a, r)$ \square

2. Dar un ejemplo de un espacio métrico y una bola abierta $B(a, r)$ cuya clausura no sea $\overline{B}(a, r)$

Esto es dar un ejemplo donde $\overline{B(a, r)} \not\subseteq \overline{B}(a, r)$

Consideremos el espacio métrico (\mathbb{Z}, δ) donde δ es la distancia discreta

Para cualquier $x \in \mathbb{Z}$ tenemos $\overline{B(x, 1)} = \{x\} = \{x\} \not\subseteq \mathbb{Z} = \overline{B}(x, 1)$

Ejercicio 12. Sean (X, d_1) e (Y, d_2) espacios métricos. Se considera el espacio métrico $(X \times Y, d)$, donde la d es la métrica definida en el Ejercicio 12. Probar que para $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$ valen:

$$1. (A \times B)^\circ = A^\circ \times B^\circ$$

Proof. Veamos primero que dados U y V abiertos de X e Y respectivamente entonces $U \times V$ es abierto de $X \times Y$.

Sea $(x, y) \in U \times V$. como $x \in U$ que es abierto existe $B(x, r_1) \subseteq U$

Y lo mismo con y existe $B(y, r_2) \subseteq V$

Ahora si tomamos $r = \min \{r_1, r_2\}$

Sea $x \in (A \times B)^\circ$ entonces $\exists r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq A \times B$

Si $(x', y') \in B_r(x, y)$ $r > d((x, y), (x', y')) = d_1(x, x') + d_2(y, y')$. Ambos sumandos son positivos por ser distancias. Luego ambos sumandos tienen que ser menores que r

Entonces $d_1(x, x') < r \leq r_1$ entonces $x' \in B(x, r_1) \subseteq U$

Y también $d_2(y, y') < r \leq r_2$ entonces $y' \in B(y, r_2) \subseteq V$

Entonces $(x', y') \in U \times V$ luego $B_r(x, y) \subseteq U \times V$

Entonces para cualquier $(x, y) \in U \times V$ encontramos $B_r(x, y) \subseteq U \times V$

Luego $U \times V$ es abierto.

Luego como A° y B° abierto entonces $A^\circ \times B^\circ$ abierto

Luego dado que $A^\circ \times B^\circ \subseteq A \times B$ y $A^\circ \times B^\circ$ es abierto. Entonces $A^\circ \times B^\circ \subseteq (A \times B)^\circ$

Veamos $A^\circ \times B^\circ \supseteq (A \times B)^\circ$

Sea $(x, y) \in (A \times B)^\circ$ entonces existe $r > 0$ $B_r(x, y) \subseteq (A \times B)$

Entonces si $x' \in B(x, \frac{r}{2})$ e $y' \in B(y, \frac{r}{2})$

Luego $d((x', y'), (x, y)) = d_1(x', x) + d_2(y', y) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$

entonces $(x', y') \in B_r(x, y) \subseteq A \times B$

Luego $x' \in A$ y también $y' \in B$

$B(x, \frac{r}{2}) \subseteq A$ y por otro lado $B(y, \frac{r}{2}) \subseteq B$

Entonces $x \in A^\circ$ e $y \in B^\circ$ luego $(x, y) \in A^\circ \times B^\circ$ □

$$2. \overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$$

Proof. Siguiendo las ideas anteriores probemos que F y G cerrados entonces $F \times G$ es cerrado

Sea F e G cerrados entonces $X \setminus F$ y $X \setminus G$ son abiertos

Luego $X \setminus F \times Y$ es abierto por lo que $F \times X$ es cerrado

De la misma manera $X \times Y \setminus G$ abierto entonces $X \times G$ es cerrado

Luego $(X \times G) \cap (F \times Y) = F \times G$ es intersección de cerrado

Entonces $F \times G$ es cerrado

Luego usando esto tenemos que \overline{A} y \overline{B} son cerrados por lo que $\overline{A} \times \overline{B}$ es cerrado

Luego $A \times B \subseteq \overline{A} \times \overline{B}$ entonces $\overline{A \times B} \subseteq \overline{A} \times \overline{B}$

Veamos $\overline{A \times B} \supseteq \overline{A} \times \overline{B}$

□

Ejercicio 13. Sea (X, d) un espacio métrico y sean A, B subconjunto de X .

1. Probar las siguientes propiedades del derivado de un conjunt:

(a) A' es cerrado.

Proof. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A'$ convergente tal que $a_n \rightarrow a$, queremos ver que $a \in A'$ esto nos diría que $A' = \overline{A'}$

Como $a_n \rightarrow a$ dado un $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que $\forall n > n_0 \quad d(a, a_n) \leq \epsilon$

Equivalentemente para cualquier $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que $\forall n \geq n_0 \quad a_n \in B(a, \epsilon)$.

Pero tomemos solo un a_n llamemoslo a_j tal que $a_j \in B(a, \epsilon)$

Como $a_j \in B(a, \epsilon)$ es abierto entonces existe r' tal que $B(a_j, r') \subseteq B(a, \epsilon)$

Tambien sabemos que $a_j \in A'$ entonces existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $x_n \rightarrow a_j$

Sea $\epsilon = r'$ tenemos que existe n_1 tal que $\forall n \geq n_1 \quad d(x_n, a_j) \leq r'$

Entonces $\forall n \geq n_1 \quad x_n \in B(a_j, r')$

Por lo tanto hay numerables $x_n \in A$ tal que $x_n \in B(a_j, r') \subseteq B(a, r)$

Entonces hay numerables $x_n \in A$ tal que $x_n \in B(a, r)$

Por lo tanto $B(a, r) \cap A$ es numerable.

Entonces a es un punto de acumulación, $a \in A'$

Luego $A' = \overline{A'}$ entonces A' es cerrado

□

(b) $A \subseteq B \implies A' \subseteq B'$

Proof. Sea $x \in A'$ entonces existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $x_n \rightarrow x$

Como $A \subseteq B$ la misma sucesión $(x_n)_n \subseteq B$ entonces $x \in B'$

□

(c) $(A \cup B)' = A' \cup B'$

Proof. \subseteq Sea $x \in (A \cup B)'$ entonces existe $(x_n)_n \subseteq A \cup B$ tal que $x_n \rightarrow x$

Entonces $x_n \in A$ o $x_n \in B$ para infinitos términos, si no tendría infinitos términos fuera de A y fuera de B lo que es absurdo. Quizas para los dos, pero no importa.

Spd $x_n \in A$ para infinitos términos entonces me quedo con todos los términos de x_n tal que $x_n \in A$ esto es una subsucesión de x_n entonces converge a x por lo tanto tengo una sucesión contenida en A que converge a x luego $x \in A'$

Entonces $x \in A' \cup B'$

\supseteq) Sea $x \in A' \cup B'$ sea $x \in A'$ luego existe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $a_n \rightarrow x$
 Pero entonces $(a_n)_n \subseteq A \cup B$ por lo tanto $x \in (A \cup B)'$ \square

(d) $\overline{A} = A \cup A'$

Proof. Primero notemos que si $x \in A'$ entonces $\forall r > 0 \quad B(x, r) \cap A$ es infinita
 Por lo tanto diferente del vacío entonces $x \in \overline{A}$ entonces $A' \subseteq \overline{A}$

\supseteq) Luego $A \subseteq \overline{A}$ entonces $A \cup A' \subseteq \overline{A} \cup A' = \overline{A}$

\subseteq) Sea $x \in \overline{A}$ entonces $\forall r > 0 \quad B(x, r) \cap A \neq \emptyset$

Supongamos que $x \notin A$, pero entonces usando la bola $B(x, \frac{1}{n})$ y sabiendo que $B(x, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset \quad \forall n \in \mathbb{N}$ Armamos una sucesión $(x_n)_n \subseteq A$ tal que $x_n \rightarrow x$

Luego $x \in A'$

Ahora supongamos que $x \notin A'$ entonces existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \cap A$ es finito

Pero entonces tiene que existir algún $r' < r$ tal que $\#(B(x, r') \cap A) = 1$

Esto sucede por que para cada elemento en la intersección sabemos que está en la bola y entonces tiene una distancia a x pero entonces si tomamos un radio mas pequeño ese elemento no estaría en la bola y por lo tanto no estaría en la intersección y esto lo podemos hacer con todos los elementos, salvo uno, por que si no quedara ninguno existiría un x_2 tal que $B(x, r_2) \cap A = \emptyset$ que es absurdo por que $x \in \overline{A}$

Pero entonces existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \cap A = \{x\}$, si fuese otro elemento y el único, usaríamos $r' = \frac{d(x, y)}{2}$ y entonces $y \notin B(x, r')$

Entonces $x \in A$

Entonces siempre que $x \in \overline{A} \Rightarrow x \in A$ o $x \in A'$ por lo tanto $x \in A \cup A'$ \square

(e) $(\overline{A})' = A'$

Proof. \supseteq) Usando el b) tenemos que como $A \subseteq \overline{A} \Rightarrow A' \subseteq (\overline{A})'$

\subseteq) Sea $x \in (\overline{A})'$ entonces existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \overline{A} \setminus \{x\} = (A \cup A') \setminus \{x\}$ tal que $x_n \rightarrow x$

Luego x_n tiene infinitos términos en A o en A' o en las dos

Si tiene infinitos en A podemos armar una subsucesión $(x_{n_j})_{j \in \mathbb{N}} \subseteq A$ como es subsucesión $x_{n_j} \rightarrow x$ entonces $x \in A'$

Si tiene infinitos en A' similarmente llegamos a que $x \in (A')' \subseteq A'$

Si tiene infinitos en las dos, podemos usar cualquiera de los dos argumentos

Observación. $(A')' \subseteq A'$

Proof. A' es cerrado por lo tanto para cualquier $(x_n)_n \subseteq A'$ tal que $x_n \rightarrow x$ sucede que $x \in A'$. Si no, no sería cerrado

Luego A' contiene a todos sus puntos de acumulación por lo tanto $(A')' \subseteq A'$ \square

\square

2. Probar que $x \in X$ es un punto de acumulación de $A \subseteq X$ si y solo si existe una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $x_n \rightarrow x$ y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no es casi constante.

Proof. \Rightarrow) Sabemos que si $x \in A'$ entonces $\forall r > 0$ $B(x, r) \cap A$ es infinito entonces $(B(x, r) \setminus \{x\}) \cap A$ es también infinita.

Luego definamos x_n tal que $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \setminus \{x\} \cap A$ para cada $n \in \mathbb{N}$

Ahora afirmo $x_n \rightarrow x$ veámoslo

Sea $\epsilon > 0$ sabemos por arquimedianidad que existe n_0 tal que $\frac{1}{n_0} \leq \epsilon$

Luego por como construí x_n tengo que $x_n \in B(x, \frac{1}{n_0}) \quad \forall n \geq n_0$

Entonces dado cualquier $\epsilon > 0$ tenemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x) \leq \epsilon \quad \forall n \geq n_0$

Por lo tanto $\forall \epsilon > 0$ tenemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, x_n) \leq \epsilon \quad \forall n \geq n_0$

Entonces $x_n \rightarrow x$. Además x_n no puede ser casi constante, si lo fuera existiría un n_0 tal que $x_n = x \quad \forall n \geq n_0$ pero esto es absurdo por que sabemos que $x_n \neq x \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Si en cambio existiera un n_0 tal que $x_n = a \neq x \quad \forall n \geq n_0$ luego a_n no convergería a x

□

Ejercicio 14. Hallar interior, clausura, conjunto derivado y frontera de cada uno de los siguientes subconjuntos de \mathbb{R} . Determinar cuales son abiertos o cerrado

$$[0, 1] \quad ; \quad (0, 1) \quad ; \quad \mathbb{Q} \quad ; \quad \mathbb{Q} \cap [0, 1] \quad ; \quad \mathbb{Z} \quad ; \quad [0, 1] \cup \{2\}$$

Proof. 1. $[0, 1]$ Es facil ver que el interior es $(0, 1)$ viendo que cada punto es interior tomando un punto y usando como radio el minimo de las distancias hacia 0 y hacia 1

La clausura es también simple por que todo punto en $[0, 1]$ cumple trivialmente que la intersección con $[0, 1]$ es diferente de vacía

Todos los puntos en $[0, 1]$ son de acumulación usando la sucesión constante

La frontera es el conjunto $\{0, 1\}$ es fácil ver que son de la frontera y es facil ver que cualquier otro no cumple ser de la frontera

Usando esto es facil ver que $[0, 1]$ es cerrado

Para $(0, 1)$ el análisis es similar

\mathbb{Q} por densidad de \mathbb{I} es facil ver que dado un $x \in \mathbb{Q} \quad \forall r > 0 \quad B(x, r) \cap \mathbb{I} \neq \emptyset$

Por ende ninguna bola puede estar contenida en \mathbb{Q} y entonces su interior es vacío

Esta claro que todos $x \in \mathbb{Q}$ es de acumulación, usando la sucesión constante, pero además todo $x \in \mathbb{I}$ es de acumulación de \mathbb{Q} por densidad de racionales es facil de probar

Sabiendo que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$ tenemos que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$

$$\partial \mathbb{Q} = \overline{\mathbb{Q}} \setminus \mathbb{Q}^\circ = \mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}$$

Un análisis muy similar podemos hacer con $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$

\mathbb{Z} devuelta su interior es vacío, es fácil ver que todos sus puntos son aislados, entonces no pueden ser de acumulación

Luego $\mathbb{Z}' = \emptyset$ entonces tambien tenemos que $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cup \mathbb{Z}' = \mathbb{Z}$

$$\partial\mathbb{Z} = \overline{\mathbb{Z}} \setminus \mathbb{Z}^\circ = \overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$$

$A = [0, 1) \cup \{2\}$ tenemos que 2 no puede ser interior usando $\forall r > 0 \quad B(2, r) \not\subseteq A$

Lo mismo con 0 para cualquier $B(x, r)$ sabemos que existe un $x < 0$ tal que $x \in B(0, r)$ por ende $B(0, r) \not\subseteq A$ el 1 $\notin A$ por lo tanto $1 \notin A^\circ$

Para el resto de los puntos y es facil encontrar un radio usando $d(y, 1)$ o $d(y, 0)$

Finalmente tenemos $A^\circ = (0, 1)$

Es fácil ver que 0 son puntos de acumulación usando una sucesión por derecha

Luego usando una sucesión de numeros menores que 1 vemos que 1 es de acumulación

Entonces $A' = [0, 1]$

Luego $\overline{A} = A \cup A' = [0, 1] \cup \{2\}$

$$\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ = \{0, 1, 2\}$$

□

Ejercicio 15. Caracterizar los abiertos y los cerrados de \mathbb{Z} considerado como espacio métrico con la métrica inducida por la usual de \mathbb{R} . Generalizar a un subespacio discreto de un espacio métrico X .

Proof.

□

Ejercicio 16. Sea (X, d) un espacio métrico y sean $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesiones en X .

1. Si $\lim x_n = x$ y $\lim y_n = y$, probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$

Proof. Sabemos que $d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n)$

Entonces tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n))$

Como todos los límites del lado derecho existen los puedo separar $\lim d(x_n, y_n) \leq d(x, y)$

Con la misma idea $d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y)$

entonces $-d(x_n, y_n) \leq d(x, x_n) - d(x, y) + d(y_n, y)$

$\lim -d(x_n, y_n) \leq \lim (d(x, x_n) - d(x, y) + d(y_n, y))$

Todos los límites existen entonces separando $-\lim d(x_n, y_n) \leq -d(x, y)$

Finalmente $\lim d(x_n, y_n) \geq d(x, y)$

Entonces $d(x_n, y_n) = d(x, y)$

□

2. Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ son de sucesiones de Cauchy de X , probar que la sucesión real $(d(x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ es convergente

Proof. Sabemos que ambas sucesiones son de cauchy entonces

Dado un $\epsilon > 0$ tenemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n, m \geq n_0$

Y con ese mismo dado $\epsilon > 0$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $d(y_k, y_j) \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \forall k, j \geq n_1$

Ahora si tomamos $n_2 = \max\{n_1, n_0\}$

Tenemos ambas $d(x_n, x_m) \leq \frac{\epsilon}{2}$ y $d(y_k, y_j) \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n, m, j, k \geq n_2$

Teniendo esto $d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x_s) + d(x_s, y_n) \leq d(x_n, x_s) + d(x_s, y_s) + d(y_s, y_n)$

Entonces dado $\epsilon > 0$ usando el n_2 tenemos $d(x_n, y_n) \leq \frac{\epsilon}{2} + d(x_s, y_s) + \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n, s \geq n_2$

Entonces dado el $\epsilon > 0$ tenemos $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, y_n) \leq d(x_s, y_s) + \epsilon \quad \forall n, s \geq n_2$

Hacieno el mismo proceso con $d(x_s, y_s)$ llegamos a que $d(x_s, y_s) - \epsilon \leq d(x_n, y_n)$

Luego juntando estas dos ideas podemos notar que dado un $\epsilon > 0$ tenemos

$$\exists n_2 \in \mathbb{N} \text{ tal que } |d(x_n, y_n) - d(x_s, y_s)| \leq \epsilon \quad \forall n, s > n_2$$

Sabemos que para todo $\epsilon > 0$ podemos hacer el mismo proceso y encontrar un n_2

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_2 \in \mathbb{N} \text{ tal que } |d(x_n, y_n) - d(x_s, y_s)| \leq \epsilon \quad \forall n, s \geq n_2$$

Pero esto nos dice que $d(x_n, y_n)$ es de Cauchy y como $d(x_n, y_n) \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y \mathbb{R} es completo entonces $d(x_n, y_n)$ converge

□

Ejercicio 17. Un subconjunto de A de un espacio métrico de X se dice G_δ (respectivamente F_σ) si es intersección de una sucesión de abiertos (respectivamente unión de una sucesión de cerrados) de X

1. Probar que el complemento de un G_δ es un F_σ

Proof. Sea $G_\delta = \bigcap_{i \in I} G_i$ intersección de abiertos

Luego $x \in (\bigcap_{i \in I} G_i)^c = G_\delta^c \iff x \notin \bigcap_{i \in I} G_i \iff$

existe algún G_i tal que $x \notin G_i \iff$ existe algún G_i tal que $x \in G_i^c$

$$\iff x \in \bigcup_{i \in I} G_i^c \iff x \in F_\sigma$$

Este último sí y solo sí vale por que G_i es abierto, por lo tanto G_i^c es cerrado, luego $\bigcup G_i^c$ es unión de cerrados por lo tanto un F_σ

□

2. Probar que el complemento de un F_σ es un G_δ

Proof. Sea $F_\sigma = \bigcup_{i \in I} F_i$ unión de cerrados

Luego $x \in F_\sigma^c = (\bigcup_{i \in I} F_i)^c \iff x \notin \bigcup_{i \in I} F_i$

$\iff \forall i \in I \ x \notin F_i \iff x \in F_i^c \ \forall i \in I \iff x \in \bigcap_{i \in I} F_i^c \iff x \in G_\delta$

El último si y solo si vale por que F_i es cerrado luego F_i^c es abierto por lo tanto $\bigcap F_i^c$ es intersección de abiertos entonces es un G_δ

□

3. Probar que todo cerrado es un G_δ . Deducir que todo abierto es un F_δ

Proof. Sea F cerrado , definamos U_n

$$U_n = \bigcup_{x \in F} B(x, \frac{1}{n})$$

U_n es unión de abiertos por lo tanto abierto

Ahora firmo que $F = \bigcap U_n$ osea intersección de abiertos. entonces F es G_δ

Veámoslo. $x \in F$ entonces $x \in B(x, \frac{1}{n}) \ \forall n \in \mathbb{N}$ entonces $x \in U_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

Entonces $y \in \bigcap U_n$

Sea $y \in \bigcap U_n$ entonces $y \in U_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ sabemos que y pertenece a alguna de esas bolas, otra forma de decirlo $y \in B(x_n, \frac{1}{n})$ para algún $x_n \in F$ pero entonces dado un $\epsilon > 0$ sabemos que existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} \leq \epsilon$ pero además sabemos que para todo $n > n_0$ sucede $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} \leq \epsilon$ por ende $d(x_n, y) \leq \epsilon \ \forall n \geq n_0$

Pero entonces x_n converge a y y además $x_n \in F \ \forall n \in \mathbb{N}$ y como F es cerrado tenemos que $y \in F$

Forma B. Sea G abierto

$$U_n = \bigcup_{x \in X \setminus G} B(x, \frac{1}{n})$$

Luego tenemos $F_n = X \setminus U_n$ que es complemento de abierto por lo tanto cerrado.

Ahora afirmo que $G = \bigcup F_n$ que es unión de cerrados por lo tanto F_σ

Veámoslo, sea $y \in G$ supongamos $y \notin \bigcup F_n$ entonces $y \notin F_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

Entonces $y \in U_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ por lo tanto $y \in \bigcap U_n$ por el mismo argumento que antes esto implica que $y \in X \setminus G$, lo que es absurdo. Luego $y \in \bigcup F_n$

Sea $y \in \bigcup F_n$ entonces $y \in F_n \ \forall n \in \mathbb{N}$ entonces $y \notin U_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

Supongamos $y \notin G$ entonces $y \in X \setminus G$ pero entonces $y \in U_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$ seguro

Lo que es absurdo , entonces $y \in G$

□

4. (a) Exhibir una sucesión de abiertos de \mathbb{R} cuya intersección sea $[0, 1]$. Idem con $[0, 1]$
- (b) Exhibir una sucesión de cerrados de \mathbb{R} cuya unión sea $[0, 1]$
- (c) ¿Qué conclusión puede obtenerse de estos ejemplos?

Ejercicio 18. a

1. Sea (X, d) un espacio métrico. Se define $d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1+d(x, y)}$. Probar que d' es una métrica en X topológicamente equivalente a d (o sea, ambas dan a lugar a una misma noción de conjunto abierto). Observar que $0 \leq d'(x, y) \leq 1$ para todo $x, y \in X$

Proof. Consideremos $f = \frac{x}{1+x}$ entonces podemos reescribir $d'(x, y) = f \circ d$

También sabemos que f es creciente dado que su derivada es mayor a 0 $\forall x \in \mathbb{R}$

Y $f(0) = 0$. Estas dos cosas nos dicen que $f \circ d$ es distancia, por lo tanto d' es distancia

Veamos que $d' = f \circ d$ y d son topológicamente equivalentes

Sea $y \in B_{d'}(x, \epsilon)$ seguro existe un $r > 0$ tal que $\epsilon < \frac{r}{r+1}$ entonces $d'(y, x) \leq \epsilon \leq \frac{r}{r+1}$

$$d'(x, y) = \frac{d(y, x)}{1+d(y, x)} \leq \frac{r}{r+1} \iff \frac{r+1}{r} \leq \frac{1+d(y, x)}{d(y, x)} \iff 1 + \frac{1}{r} \leq \frac{1}{d(y, x)} + 1 \iff d(y, x) \leq r$$

Entonces $y \in B_d(x, r)$ por lo tanto $B_{d'}(x, \epsilon) \subseteq B_d(x, r)$

Ahora sea $y \in B_d(x, \epsilon)$ entonces $d(x, y) \leq \epsilon$ y seguro existe un $r \geq \epsilon$

Entonces $d(x, y) \leq \epsilon \leq r$ usando la misma idea llegamos a que entonces $d'(x, y) \leq \frac{r}{r+1}$

Luego $y \in B_{d'}(x, \frac{r}{r+1})$ luego $B_d(x, r) \subseteq B_{d'}(x, \frac{r}{r+1})$

□

2. Sea $(X_n, d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de espacios métricos tales que para cada $n \in \mathbb{N}$ vale $0 \leq d_n(x, y) \leq 1$ para todo par de elementos $x, y \in X_n$.

Para cada $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definimos:

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n}$$

3. Sea (X, d) un espacio métrico. Llamamos $X^{\mathbb{N}}$ al conjunto de las sucesiones de X . Mostrar que aplicando i) y ii) se le puede dar una métrica a $X^{\mathbb{N}}$.

Ejercicio 19. Sean d_∞ y d_2 las métricas en \mathbb{R}^n definidas en el ejercicio 7. Mostrar que d_∞ y d_2 son topológicamente equivalentes.

Proof. Por un lado tenemos que $d_\infty(x, y) \leq d_1(x, y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

Entonces si x_k converge con d_1 entonces seguro converge con d_∞

Ahora por otro lado supongamos x_k converge con d_∞

x_k converge con d_∞ entonces dado $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que $d_\infty(x_k, x) \leq \epsilon \quad \forall k \geq n_0$

Entonces dado $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que

$$d_1(x_k, x) = \sum_{j=1}^n |(x_k)_j - x_j| \leq n \sup_{1 \leq j \leq n} |(x_k)_j - x_j| = n d_\infty(x_k, x) \leq n\epsilon \quad \forall k \geq n_0$$

Aclaración j es el índice de componente, y n es un número fijo, que sirve para cualquier ϵ y está dado por la dimensión de \mathbb{R}^n

Luego x_k converge en d_1 . Entonces ambas distancias generan las mismas sucesiones convergentes, por lo tanto son equivalentes \square

Ejercicio 20. Sea (X, d) un espacio métrico. Dados $A \subseteq X$ no vacío y $x \in X$, se define la *distancia* de x a A como $d_A(x) = \inf \{d(x, a) : a \in A\}$. Probar:

- i. $|d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x, y)$ para todo par de elementos $x, y \in X$

Proof. Tenemos que $d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$

$$d(x, A) = \inf d(x, a) \leq \inf (d(x, y) + d(y, a)) = \inf d(x, y) + \inf d(y, a) = d(x, y) + d(y, A)$$

$$\text{Entonces } d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$$

$$\text{haciendo lo mismo pero arrancando de } d(y, a) \leq d(y, x) + d(x, a)$$

$$\text{llegamos a } -d(x, y) \leq d(x, A) - d(y, A)$$

Juntando todo

$$|d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x, y)$$

\square

- ii. $x \in A \Rightarrow d_A(x) = 0$

Proof. Sea $D = \{d(x, a) : a \in A\}$ afirmo que $\inf D = 0$

- $0 \leq d \quad \forall d \in D$

Si no fuera cierto existiría $d' \in D$ tal que $d' < 0$ entonces $d' = d(x, a) < 0$ para algún $a \in A$ lo que es absurdo

- Sea $l \leq d \quad \forall d \in D$ entonces $l \leq 0$ Supongo que no es cierto, entonces existe $l \leq d \quad \forall d \in D$ con $l > 0$, pero sabemos que $d(x, x) \in D$ y $d(x, x) = 0 < l$

Luego $0 = \inf D$ por lo tanto $d_A(x) = \inf D = 0$

\square

iii. $d_A(x) = 0 \iff x \in \overline{A}$

Proof. \Rightarrow) Sea $D = \{d(x, a) : A \in A\}$ luego $0 \inf D \iff$

Entonces existe un sucesión $d_n \in D \quad \forall n \in \mathbb{N}$ tal que $d_n \rightarrow 0$

\iff para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $a \in A$ tal que $d_n = d(x, a)$ llamemosló a_n

Luego $d(x, a_n) = d_n \rightarrow 0 \iff$ tenemos $a_n \in A \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y además $a_n \rightarrow x$

$\iff x \in \overline{A}$

□

iv. $B_A(r) = \{x \in X : d_A(x) < r\}$ es abierto para todo $r > 0$

Proof. Sea $x \in B_A(r)$, primero una pequeña afirmación,

Como $x \in B_A(r)$ entonces $r > d_A(x)$ luego existe ϵ tal que $r - \epsilon > d_A(x)$

Luego puedo tomar $r' = r - \epsilon - d(x, A)$ y seguro $r' > 0$

Afirmo que $B(x, r') \subseteq B_A(r)$. Veamosló, sea $y \in B(x, r')$ entonces

$d(y, A) \leq d(y, x) + d(x, A) \leq r' + d(x, A) = r - \epsilon - d(x, A) + d(x, A) < r$

Luego $y \in B_A(r)$ entonces $B(x, r') \subseteq B_A(r)$

Finalmente $\forall x \in X \quad \exists r' > 0$ tal que $B(x, r') \subseteq B_A(r)$

$B_A(r)$ es abierto

□

v. $\overline{B}_A(r) = \{x \in X : d_A(x) \leq r\}$ es cerrado para todo $r > 0$

Proof. Tomemos el complemento de la bola, $A = \{x \in X : d_A(x) > r\}$ veamos que es abierto

Ahora sea $x \in A$ afirmo que $B(x, r') \subseteq A$ con $r' = d(x, A) - r > 0$, veamosló

Sea $y \in B(x, r')$ tenemos $d(x, A) - d(y, A) \leq |d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y) < d(x, A) - r$

Entonces $-d(y, A) < -r \Rightarrow d(y, A) > r$ por lo tanto $y \in A$ luego $B(x, r') \subseteq A$

Luego $\overline{B}_A(r)$ es complemento de un abierto, por lo tanto es cerrado

□

Ejercicio 21. Sea (X, d) un espacio métrico. Dados $A, B \subseteq X$ no vacíos se define la distancia entre A y B por $d(A, B) = \inf \{d(a, b) : a \in A \quad b \in B\}$. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

1. d es una distancia en $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ Es falso

Proof. Tomemos un $A \subseteq X$ con $A \neq \{\emptyset\}$ $B = A \cup \{x\} \quad x \in X$

Entonces $d(A, B) = 0$ pero $A \neq B$ entonces no es una métrica

□

2. $d(A, B) = d(A, \overline{B})$ es verdadero

Sea $L_1 = d(A, B)$ $L_2 = d(A, \overline{B})$ supongamos que son diferentes

$L_1 < L_2$ entonces $\exists \epsilon > 0$ tal que $L_1 + \epsilon < L_2$

Como L_1 es un ínfimo existe $a \in A, b \in B$ tal que $L_1 \leq d(a, b) \leq L_1 + \epsilon < L_2$

Pero entonces existen $a \in A, b \in B$ tal que $d(a, b) < L_2 = \inf \{d(a, b) : a \in A \quad b \in \overline{B}\}$

Absurdo por que como $a \in A, b \in B$ entonces $d(a, b) \in \{d(a, b) : a \in A \quad b \in \overline{B}\}$

Ahora en cambio si $L_1 > L_2$ entonces usando el mismo argumento

existe $a \in A \quad b' \in \overline{B}$ tal que $L_2 \leq d(a, b') \leq L_2 + \epsilon < L_1$

Entonces $d(a, b') < L_1$ entonces existe ϵ' tal que $d(a, b') + \epsilon' < L_1$

Ahora como $b' \in \overline{B}$ existe $(b_n)_n \subseteq B$ tal que $b_n \rightarrow b'$ Entonces $|d(a, b_n) - d(a, b')| \rightarrow 0$

Luego dado ϵ' existe n_0 tal que $d(a, b_n) \leq d(a, b') + \epsilon' \quad \forall n \geq n_0$

Por lo tanto $\forall n \geq n_0$ tenemos $d(a, b_n) < L_1$ pero con un $b_n \in B$ nos alcanza para decir que es absurdo dado que nuevamente $d(a, b_n) \in \{d(a, b) : a \in A \quad b \in B\}$ por ende $d(a, b_n)$ no puede ser menor que el ínfimo de un conjunto que lo contiene

Luego no sucede $L_1 < L_2$ y tampoco $L_2 < L_1$ entonces $L_1 = L_2$

3. $d(A, B) = 0 \iff A \cap B \neq \emptyset$ es falso

Proof. Sea (\mathbb{R}^2, d) . Con d la distancia euclídea.

Sean $A = \{(x, 0) : x \in \mathbb{N}\}$ $B = \{(x, \frac{1}{x}) : x \in \mathbb{N}\}$

Sabemos que $A \cap B = \emptyset$, sin embargo es facil ver que $d(A, B) = 0$.

Tomamos la sucesión $x_n = d((n, 0), (n + \frac{1}{n})) = \sqrt{\frac{1}{n^2}}$.

$(x_n)_n \subseteq \{d(a, b) : a \in A \quad b \in B\}$ y además $x_n \rightarrow 0$

Por lo tanto 0 es ínfimo

□

4. $d(A, B) = 0 \iff \overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$

Proof. Sirve el mismo ejemplo que arriba, por que $A = \overline{A}$ y $B = \overline{B}$

□

5. $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$

Proof. $d(A, B) \leq d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b) \quad \forall (a \in A \quad b \in B \quad c \in C)$

$d(A, B) \leq d(a, c) + d(c, b) \quad \forall (a \in A \quad b \in B \quad c \in C)$

Entonces $d(A, B) \leq \inf \{d(a, c) + d(c, b) : a \in A \quad b \in B\}$

Que es igual a $\inf \{d(a, c) : a \in A \quad c \in C\} + \inf \{d(c, b) : c \in C \quad b \in B\}$

o lo mismo $d(A, C) + d(C, B)$. Luego $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$

□