Clase práctica de Cálculo Avanzado - 16/6

Recuerdo. Sea X un espacio métrico completo. Entonces

- Unión numerable de conjuntos nunca densos tiene interior vacío.
- Intersección numerable de abiertos densos es denso.

Ejercicio 1. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de homeomorfismos de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ y sea $F \subseteq \mathbb{R}$ cerrado tal que $F \cap \mathbb{Q}$ es finito. Probar que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x \notin f_n(F)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Solución. Debemos probar que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f_n(F) \neq \mathbb{R}$. Una forma de ver esto es probar que dicha unión tiene interior vacío. Por el lema de Baire, eso sucede si $f_n(F)$ es nunca denso para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como cada f_n es un homeomorfismo y F es cerrado, $f_n(F)$ es cerrado para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego debemos ver que $f_n(F)^\circ = \emptyset$. Supongamos que $f_n(F)$ contiene un abierto U. Entonces $f_n^{-1}(U)$ es abierto y está contenido en F. Pero esto es absurdo, porque cualquier abierto en $\mathbb{R}$ contiene infinitos racionales. Por lo tanto $f_n(F)^\circ = \emptyset$.

Ejercicio 2. Sea $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ una función continua. Supongamos que $\lim_{n\to\infty} f(nx) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}_{\geq}0$. Probar que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Solución. Sea $\epsilon > 0$, y sean $K_n = \{x : |f(mx)| \leq \epsilon \ \forall m \geq n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Es fácil ver que los K_n son cerrados. Además, por nuestra hipótesis $\mathbb{R}_{\geq 0} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Entonces por el lema de Baire, existe un K_n con interior no vacío. Es decir que existe un intervalo $[a, b] \subseteq K_n$ con $a < b$. Esto nos dice que $f(x) \leq \epsilon$ para todo x en el siguiente conjunto:

$$[na, nb] \cup [(n+1)a, (n+1)b] \cup [(n+2)a, (n+2)b] \cup ... = \bigcup_{m\geq n} [ma, mb].$$

Veamos que este conjunto contiene un intervalo de la forma $[M; +\infty)$. Como $a < b$, existe un $m_0 > n$ tal que $m_0 b > (m_0 + 1)a$. A partir de este m_0, los intervalos se solapan. Luego $[m_0 a, \infty) \subseteq \bigcup_{m\geq n}[ma, mb]$. En consecuencia, $f(x) \leq \epsilon \ \forall x \geq m_0 a$. Como ϵ era arbitrario, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

Ejercicio 3. Sea $f \in C^{\infty}[0,1]$. Supongamos que para cada $x \in [0,1]$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^{(n)}(x) = 0$. Probar que f es un polinomio.

Solución. Supongamos que f no es un polinomio. Consideramos los siguientes conjuntos: $S_n = \{x \mid f^{(n)}(x) = 0\}$. También consideramos

$$X = \{x \mid \forall (a,b) \ni x, f|_{(a,b)} \text{ no es un polinomio}\}.$$

Como f no es un polinomio, X es no vacío. Además es claro que X es cerrado y sin puntos aislados. Por hipótesis, $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un cubrimiento de $[0,1]$. Entonces $\{X \cap S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un cubrimiento de X. Luego podemos aplicar el lema de Baire al espacio X y a dicho cubrimiento. Esto nos dice que existe un intervalo (a,b) tal que $(a,b) \cap X \neq \emptyset$ y $X \cap (a,b) \subseteq S_n$ para algún n.

Como X no tiene puntos aislados, todo $x \in (a,b) \cap X$ es un punto de acumulación de $(a,b) \cap X$. Entonces como $f^{(n)}(x) = 0$ para todo x en $(a,b) \cap X$, $f^{(m)}(x) = 0$ para todo $m > n$ y $x \in (a,b) \cap X$.

Ahora consideramos un intervalo maximal $(c,d) \subseteq (a,b) \setminus X$. Por definición de X, eso significa que f es un polinomio de un cierto grado k en (c,d). Luego $f^{(k)} = cte \neq 0$ en $[c,d]$. Esto nos dice que $k < n$, pues c o d están en X.

Como esto último vale para cualquier intervalo maximal, concluimos que $f^{(n)}(x) = 0$ $\forall x \in (a,b)$. Entonces f es un polinomio en (a,b). Esto contradice el hecho de que $(a,b) \cap X \neq \emptyset$.