Práctica 5: Baire y Compacidad

"Cuanto más sólido, bien definido y espléndido es el edificio erigido por el entendimiento, más imperioso es el deseo de la vida por escapar de él hacia la libertad."
Hegel.

A. Baire

Ejercicio 1. Probar que $\mathbb{R}^n$ no puede escribirse como unión numerable de subespacios vectoriales propios.

Ejercicio 2. Sean (X, d) un espacio métrico completo sin puntos aislados y sea D un subconjunto denso y numerable de X. Probar que D no es un G_δ.

Ejercicio 3. Demostrar que no existe ninguna función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que sea continua sólo en los racionales.
Sugerencia: Para cada $n \in \mathbb{N}$ considerar

$$U_n = \Big\{x \in \mathbb{R} : \exists\, U \subseteq \mathbb{R} \text{ abierto con } x \in U \text{ y } \operatorname{diam}(f(U)) < \frac{1}{n}\Big\}.$$

Ejercicio 4. Sea $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de intervalos de $[0, 1]$ con extremos racionales y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$E_n = \{f \in C[0, 1] : f \text{ es monótona en } I_n\}.$$

i) Probar que para cada $n \in \mathbb{N}$, E_n es cerrado y nunca denso en $(C[0, 1], d_\infty)$.

ii) Deducir que existen funciones continuas en el intervalo $[0, 1]$ que no son monótonas en ningún subintervalo.

Ejercicio 5. Sea (X, d) espacio métrico.

1. Probar que si A es nunca denso, entonces $X \setminus A$ es denso. ¿Vale el recíproco?
2. Probar que si A es abierto y denso, entonces $X \setminus A$ es nunca denso.

Ejercicio 6. Sea (X, d) espacio métrico y $A \subseteq X$. Probar que son equivalentes:

1. A es nunca denso;
2. toda bola B abierta contiene otra $B_1 \subseteq B$ abierta tal que $B_1 \cap A = \emptyset$;
3. A no es denso en ninguna bola abierta.

Ejercicio 7. Sea $Lip[a, b] = \{f \in C[a, b] : \exists k > 0,\ |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|\}$. Probar que $Lip[a, b]^\circ = \emptyset$ en $C[a, b]$.

Ejercicio 8. Probar que, si A es el conjunto de funciones continuas que tienen algún intervalo de monotonía, entonces A tiene interior vacío en $C[a, b]$.

B. Compacidad

Ejercicio 9.

i) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Probar que el conjunto $\{0\} \cup \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$ es compacto.

ii) Mostrar que el intervalo $(0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ no es compacto.

iii) Sea $S = (a, b) \cap \mathbb{Q}$ con $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Probar que S es un subconjunto cerrado y acotado pero no compacto de $(\mathbb{Q}, d)$, donde d es la métrica euclídea de $\mathbb{R}$.

Ejercicio 10. Probar que todo espacio métrico compacto es separable.

Ejercicio 11. Sea $A = \{a^{(n)} \in \ell^\infty : n \in \mathbb{N}\}$, donde cada sucesión $a^{(n)} = (a_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}$ está definida por

$$a_k^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n, \\ 1 & \text{si } k = n. \end{cases}$$

Probar que A es discreto, cerrado y acotado, pero no compacto.

Ejercicio 12. Dado un cubrimiento por abiertos $(U_i)_{i\in I}$ de un espacio métrico (X, d), un número $\varepsilon > 0$ se llama **número de Lebesgue** de $(U_i)_{i\in I}$ si para todo $x \in X$ existe $j \in I$ tal que $B(x, \varepsilon) \subseteq U_j$. Probar que todo cubrimiento por abiertos de un espacio métrico compacto tiene un número de Lebesgue.

Ejercicio 13. Sea (X, d) un espacio métrico. Probar que:

i) Toda unión finita y toda intersección (finita o infinita) de subconjuntos compactos de X es compacta.

ii) Si (X, d) es compacto, todo subconjunto cerrado de X es compacto.

iii) Un subconjunto $F \subseteq X$ es cerrado si y sólo si $F \cap K$ es cerrado para todo compacto $K \subseteq X$.

Ejercicio 14. Sea $c_0 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} : \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0\}$. Se define en c_0 la métrica

$$d(x,y) = \sup\{|x_n - y_n| : n \in \mathbb{N}\}.$$

i) Demostrar que la bola cerrada $\overline{B}(x,1) = \{y \in C_0 : d(x,y) \leq 1\}$ no es compacta.

ii) Probar que (c_0, d) es separable.

Ejercicio 15. Sean (X,d) e (Y,d') espacios métricos. Se considera $(X \times Y, d_\infty)$, donde

$$d_\infty((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \text{máx}\{d(x_1,x_2), d'(y_1,y_2)\}.$$

Probar que $(X \times Y, d_\infty)$ es compacto si y sólo si (X,d) e (Y,d') son compactos.

Ejercicio 16. Sea (X,d) un espacio métrico.

i) Sean $K \subseteq X$ un compacto y sea $x \in X \setminus K$. Probar que existe $y \in K$ tal que $d(x,K) = d(x,y)$; es decir, la distancia entre x y K se realiza.

ii) Sean F, $K \subseteq X$ dos subconjuntos disjuntos de X tales que F es cerrado y K es compacto. Probar que la distancia $d(F,K)$ entre F y K es positiva.

iii) Sean $K_1, K_2 \subseteq X$ dos subconjuntos compactos de X tales que $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Probar que existen $x_1 \in K_1$ y $x_2 \in K_2$ tales que $d(K_1,K_2) = d(x_1,x_2)$; es decir, la distancia entre K_1 y K_2 «se realiza».

Ejercicio 17. Sea (X,d) un espacio métrico completo. Se define

$$\mathcal{K}(X) = \{K \subseteq X : K \text{ es compacto y no vacío}\}.$$

i) Sea $\tilde{d}(A,B) = \sup\limits_{a\in A}\{d(a,B)\}$. Verificar que $\tilde{d}$ no es una métrica en $\mathcal{K}(X)$.

ii) Se define $\delta : \mathcal{K}(X) \times \mathcal{K}(X) \to \mathbb{R}$ como $\delta(A,B) = \text{máx}\{\tilde{d}(A,B), \tilde{d}(B,A)\}$. Probar que para todo $\varepsilon > 0$ vale

$$\delta(A,B) < \varepsilon \iff A \subseteq N(B,\varepsilon) \text{ y } B \subseteq N(A,\varepsilon),$$

donde $N(C,\varepsilon) = \{x \in X : d(x,C) < \varepsilon\}$ para cada $C \subseteq X$.

iii) Probar que δ es una métrica en $\mathcal{K}(X)$.

Ejercicio 18. Sean (X,d) e (Y,d') espacios métricos y $f : X \longrightarrow Y$ continua. Probar que:

i) Si (X,d) es compacto, entonces $f(X)$ también lo es.

ii) Si además f es biyectiva, entonces f resulta un homeomorfismo.

Ejercicio 19. Sea (X,d) un espacio métrico compacto. Probar que para cada espacio métrico (Y,d'), la proyección $\pi : X \times Y \to Y$ definida por $\pi(x,y) = y$ es cerrada.

Ejercicio 20. Sean (X,d) e (Y,d') espacios métricos, y sea $f : X \longrightarrow Y$ una función. Probar que si Y es compacto y el gráfico de f es cerrado en $X \times Y$, entonces f es continua.

Ejercicio 21.

i) Sea $f : \mathbb{R}_{\geq a} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que es uniformemente continua en $[a, b]$ y también en $[b, +\infty)$. Probar que f es uniformemente continua en $\mathbb{R}_{\geq a}$.

ii) Deducir que $\sqrt{x}$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

iii) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y tal que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Probar que f es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 22. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $A \subseteq X$ compacto. Probar que si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua y $f(x) > 0$ para todo $x \in A$, entonces existe $K > 0$ tal que $f(x) \geq K$ para todo $x \in A$.

Ejercicio 23. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y abierta.

i) Probar que f no tiene extremos locales; es decir, no existen $x_0 \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ tales que $f(x_0) \leq f(x)$ (resp. $f(x_0) \geq f(x)$) para todo $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

ii) Comprobar que existen $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ tales que $f(\mathbb{R}) = (a, b)$.

iii) Mostrar que $f : \mathbb{R} \longrightarrow (a, b)$ es un homeomorfismo y que ella y su inversa son funciones monótonas.

Ejercicio 24. Sea (X, d) un espacio métrico compacto y sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función semicontinua superiormente. Probar que f está acotada superiormente en X y que f alcanza máximo en X.