Ejercicio 1. Sean (X,d) e (Y,d') espacios métricos y sea $f : X \to Y$. Probar que:

i. f es continua en $x_0 \in X$ si y sólo si para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ tal que $x_n \to x_0$, la sucesión $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ converge $f(x_0)$

ii. Son equivalentes:

(a) f es continua

(b) para todo $G \subseteq Y$ abierto, $f^{-1}(G)$ es abierto en X

(c) para todo $F \subseteq Y$ cerrado, $f^{-1}(F)$ es cerrado en X

Proof. $i) \Rightarrow)$ $\epsilon > 0$ por continuidad sabemos $\exists\delta > 0$ tal que $f(B(x_0,\delta)) \subseteq B(f(x_0),\epsilon)$
Luego por convergencia sabemos $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n,x_0) \leq \delta \quad \forall n \geq n_0$
Entonces $f(x_n) \in f(B(x_0,\delta)) \subseteq B(f(x_0),\epsilon) \quad \forall n \geq n_0$ por lo que $d(f(x_n),f(x_0)) \leq \epsilon$
Ahora esto lo podemos hacer con cualquier ϵ
Finalmente $\forall\epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(f(x_n),f(x_0)) \leq \epsilon \quad \forall n \geq n_0$
$\Leftarrow)$ Supongamos que f no es continua en x_0
Entonces $\exists\epsilon > 0$ tal que para cada $\delta > 0$ $\exists y_\delta$ y $d(y_\delta,x_0) \leq \delta$ pero $d(f(y_\delta),f(x_0)) > \epsilon$
Si miro $\delta = \frac{1}{n}$ tengo sucesión $x_n = y_\delta$ tal que $x_n \to x_0$. Pero $d(f(x_n),f(x_0)) > \epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$
Entonces $x_n \to x_0$ pero $f(x_n) \not\to f(x_0)$ lo que es absurdo
$ii)$ Está todo hecho en el apunte teórico □

Ejercicio 2. Decidir cuales de las siguientes funciones son continuas:

1. $f : (\mathbb{R}^2,d) \to (\mathbb{R},|\cdot|)$ dada por $f(x,y) = x^2+y^2$, donde d representa la métrica euclídea

2. $id_{\mathbb{R}^2} : (\mathbb{R}^2,\delta) \to (\mathbb{R}^2,d_\infty)$, la función identidad donde δ es la métrica discreta

3. $id_{\mathbb{R}^2} : (\mathbb{R}^2,d_\infty) \to (\mathbb{R}^2,\delta)$

4. $i : (\mathbb{E},d) \to (X,d)$ la inclusión, donde $\mathbb{E} \subseteq X$

Proof. 1) Sea $(x_n,y_n) \to (x,y)$ entonces $x_n \to x$ e $y_n \to y$ luego $x_n^2 \to x^2$ e $y_n^2 \to y^2$
Luego $f(x_n,y_n) = x_n^2 + y_n^2 \to x^2 + y^2 = f(x,y)$ entonces f es continua
2) Sea $(x_n,y_n) \to (x,y)$, por ser discreta la métrica $\exists n_0/(x_n,y_n) = (x,y) \quad \forall n \geq n_0$
Entonces $f(x_n,y_n) = (x,y) \quad \forall n \geq n_0$ por lo tanto $f(x_n,y_n) \to (x,y) = f(x,y)$
Observación esto hubiera funcionado con cualquier métrica en el espacio de llegada, por que las sucesiones que son eventualmente constantes siempre son convergentes
3) Sea $(x_n,y_n) = (\frac{1}{n},\frac{1}{n})$ sabemos que $(x_n,y_n) \to (0,0)$.
Sin embargo $f(x_n,y_n) = (x_n,y_n)$ que con la métrica discreta NO converge dado que $(x_n,y_n) \neq (x,y) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ entonces $d((x_n,y_n),(x,y)) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
4) Sea $x_n \to x$ es trivial ver que $f(x_n) = x_n \to x = f(x)$ □

Ejercicio 3. Sean $f, g, h : [0,1] \to \mathbb{R}$ definidas por:
$f(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$ $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$
$g(x) = xf(x)$
$h(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{Q}$, $h(x) = \frac{1}{n}$ si $x = \frac{m}{n}$ con $(m : n) = 1$, $h(x) = 1$ si $x = 0$
Probar que:

1. f es discontinua en todo punto
2. g sólo es continua en $x = 0$
3. h es continua en $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$

Proof. 1) Dado $x \in \mathbb{Q}$ Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{I}$ tal que $x_n \to x$. Entonces $f(x_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
Por lo tanto $f(x_n) \to 0 \neq 1 = f(x)$ entonces f no es continua en $x \in \mathbb{Q}$
Usando el mismo argumento vemos que no es continua en $\mathbb{I}$ tampoco, por lo tanto no es continua en ningún lado
2) Con sucesiones es facil ver que es continua en el 0.
Sea $x \neq 0$ con $x \in \mathbb{Q}$ entonces tomamos $(x_n)_n \subseteq \mathbb{I}$ tal que $x_n \to x$
$g(x_n) = x_n f(x_n) = x_n.0 = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ entonces $g(x_n) \to 0 \neq x = x.1 = xf(x) = g(x)$
Con un argumento análogo vemos que tampoco es continua en $x \neq 0 \quad x \in \mathbb{I}$
3) h restringida a $[0,1] \setminus \mathbb{Q}$ es una función constantemente 0. Asi que es trivialmente continua en todo punto □

Ejercicio 4. Probar que un espacio métrico de X es discreto si y sólo si toda función de X en un espacio métrico arbitrario es continua

Proof. $\Rightarrow$) Sea X discreto sabemos que toda sucesión $(x_n)_n \subseteq X$ convergente es eventualmente constante, por ende $f(x_n)$ es eventualmente constante y por ende convergente sin importar la métrica del espacio de llegada de f

$\Leftarrow$) Sea $id : X \to (\mathbb{E}, \delta)$ continua. Sea $a_n \to a$ entonces $f(a_n) \to f(a)$ pero como la imagen tiene la métrica discreta $\exists n \in \mathbb{N} \quad f(a_n) = f(a) \quad \forall n \geq n_0$. Ahora nuestra función es la identidad, esto nos dice que $a_n = a \quad \forall n \geq n_0$. O en otras palabras que todas sucesión convergente es a partir de algún momento constante, y esto sucede SOLO en espacios métricos discretos, por ende X es discreto □

Ejercicio 5. (Métricas topológicamente equivalentes)

1. Supongamos que existen constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>}0$ tales que
$$d_1(x,y) \leq c_1 d_2(x,y) \leq c_2 d_1(x,y)$$
para todo $x, y \in X$. Probar que d_1 y d_2 son topológicamente equivalentes.
2. Probar que dos métricas d_1 y d_2 son topológicamente equivalentes si y sólo si la función identidad $id_X : (X, d_1) \to (X, d_2)$ es homeomorfismo.
3. Probar que en $\mathbb{R}^n$ todas las métricas d_p con $1 \leq p \leq \infty$ son topológicamente equivalentes.

4. Consideremos en $\mathbb{R}$ la métrica

$$d'(x,y) = \left| \frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|} \right|$$

Probar que es topológicamente equivalente a la métrica usual $d(x,y) = |x-y|$

Proof. $i)$ Sea $y \in B_2(x,r)$ entonces $d_2(x,y) < r$ entonces $c_1 d_2(x,y) < c_1 r$

Pero entonces por hipótesis $d_1(x,y) \leq c_1 d_2(x,y) < c_1 r$

Por lo tanto $y \in B_1(x,r')$ con $r' = c_1 r$. Luego $B_2(x,r) \subseteq B_1(x,r')$

La otra inclusión es análoga

$ii)$ $\Rightarrow$) Sabemos que X tiene los mismos abiertos con ambas métricas.

Sea $A \subseteq (X,d_1)$ abierto entonces $id^{-1}(A) = A$ que es abierto en (X,d_2) entonces $id^{-1}(A)$ es abierto

Y esto pasa tambien con la función inversa id^{-1}. Por ende ambas son continuas.

$\Leftarrow$) Sean id continua entonces sea A abierto de (X,d_2) sabemos que $id^{-1}(A) = A$ tiene que ser abierto de (X,d_1) y lo mismo con la inversa, por ende cualquier abierto con una métrica lo es con la otra, entonces son topológicamente equivalentes

$iii)$ Veamos que d_p es equivalente a d_∞

Sabemos que $d_p(x,y)^p = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^p \leq n \sup |x_i - y_i|^p = n d_\infty(x,y)^p$

Luego $d_p(x,y) \leq \sqrt{n} d_\infty(x,y)$

Por otro lado $|x_i - y_i|^p \leq \sum_{i=0}^n |x_i - y_i|^p$ entonces $\sup |x_i - y_i|^p \leq \sum_{i=0}^n |x_i - y_i|^p$

Luego $d_\infty(x,y)^p \leq d_p(x,y)^p$ por lo tanto $d_\infty(x,y) \leq d_p(x,y)$

Juntando todo $d_\infty(x,y) \leq d_p(x,y) \leq \sqrt{n} d_\infty(x,y)$

Por lo tanto d_p es equivalente d_∞ y esta última es equivalente a d_1 $\square$

Ejercicio 6. Consierando $\mathbb{R}^n$ con la métrica euclídea, probar que:

i. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + ysen(e^x - 1) = -2\}$ es cerrado

ii. $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x^3 - 3y^4 + z - 2 \leq 3\}$ es cerrado

iii. $C = \{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \in \mathbb{R}^5 : 3 < x_1 - x_2\}$ es abierto

Mencione otras dos métricas para las cuales siguen valiendo estas afirmaciones

Proof. $i)$ Sea $f(x,y) = x^2 + ysen(e^x - 1)$ tenemos que f es continua por ser suma y mulitplicación de continuas

Entonces como $\{-1\}$ es cerrado con la métrica euclídea por lo tanto $f^{-1}(\{-1\}) = B$ tiene que ser cerrado

$ii)$ Lo mismo con preimagen del $[-1,3]$

$iii)$ $f((x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)) = x_1 - x_2$ es claramente continua

por lo tanto como $(3,+\infty)$ es abierto, entonces $f^{-1}((3,+\infty)) = C$ es abierto $\square$

Ejercicio 7. Consideremos las funciones $E, I : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$E(f) = f(0) \text{ e } I(f) = \int_0^1 f(x)dx$$

1. Demostrar que si utilizamos en $C([0,1])$ la distancia d_∞ ambas resultan continuas.

2. Demostrar que si en cambio utilizamos en $C([0,1])$ la distancia d_1, I es una función continua pero E no lo és

3. Analizar si es posible que una función $F : C([0,1]) \to \mathbb{R}$ sea continua para la distancia d_1 pero no para d_∞

Proof. 1) Sea $\epsilon > 0$ entonces $|E(f), E(g)| \leq |f(0) - g(0)| \leq \sup_{t\in[0,1]} |f(t) - g(t)| = d_\infty(f,g)$. Tomemos $\delta = \epsilon$ luego $d_\infty(f,g) < \delta$ implica $d(E(f), E(g)) = |E(f) - E(g)| < \delta = \epsilon$

$|I(f) - I(g)| = |\int f(x)dx - \int g(x)dx| \leq \int |f(x) - g(x)|dx \leq \int \sup |f(t) - g(t)|dx$

Además $\int \sup |f(t) - g(t)|dx = \int d_\infty(f,g) = d_\infty(f,g)$

Si tomamos $d_\infty(f,g) < \delta = \epsilon$ tenemos $d(I(f), I(g)) < \int d_\infty(f,g) = \int \epsilon = \epsilon.(1-0) = \epsilon$

2) De la misma forma que antes es facil ver que si $d_1(f,g) < \epsilon$ entonces $|I(f) - I(g)| < \epsilon$

Ahora para E sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(t) = (1-t)^n$ tenemos que $d_1(f_n, 0) = \int_0^1 (1-t)^n$

$\int (1-t)^n = \left. \frac{(t-\frac{t^2}{2})^{n+1}}{n+1} \right|_0^1 = \frac{\frac{1}{2}^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}} \to 0$ por ende f_n converge a 0 (la función 0)

Pero $E(f_n) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ por lo tanto $E(f_n) \to 1 \neq 0 = E(0)$

3) No es posible.

Sea F continua con d_1 entonces dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $F(B_1(f,\delta)) \subseteq B_\mathbb{R}(F(f), \epsilon)$.

Ahora tomemos la bola pero en distancia infinito. Sea $g \in B_\infty(f,\delta)$

Luego $d_1(f,g) = \int |f(x) - g(x)|dx \leq \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)| = d_\infty(f,g) < \delta$

Por lo tanto $g \in B_1(f,\delta)$ entonces $B_\infty(f,\delta) \subseteq B_1(f,\delta)$

Luego $F(B_\infty(f,\delta)) \subseteq F(B_1(f,\delta)) \subseteq B_\mathbb{R}(F(f), \epsilon)$

Entonces F es continua con d_∞ □

Ejercicio 8. Sean X, Y espacios métricos y sea $f : X \to Y$ una función continua. Probar que el gráfico de f, definido por

$$G(f) = \{(x, f(x)) \in X \times Y : x \in X\}$$

es cerrado en $X \times Y$ ¿Es cierta la afirmación recíproca?

Proof. Sea $(p_n)_n \subseteq G(f)$ tal que $p_n \to p$ queremos ver que $p \in G(f)$

Sabemos que $d_G((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = d_X(x_1,y_1) + d_Y(x_2,y_2)$

$p_n = (x_n, f(x_n)) \to p = (x,y)$.

Por lo tanto $d_X(x_n,x) \leq d_X(x_n,x) + d_Y(f(x_n),y) = d_G(p_n,p)$

También $d_Y(f(x_n),y) \leq d_Y(f(x_n),y) + d_X(x_n,x) = d_G(p_n,p)$

Usando limite en ambas desigualdades tenemos $d_X(x_n,x) \to 0$ y $d_Y(f(x_n),y) \to 0$

Pero entonces como f es continua y $x_n \to x$ tenemos que $f(x_n) \to f(x)$ por lo tanto $f(x) = y$

Finalmente $p = (x, f(x))$ por lo tanto $p \in G(f)$. Entonces toda sucesión convergente de $G(f)$ converge en $G(f)$

Por lo tanto $G(f)$ es cerrado

La recíproca no vale , por ejempl con $f(x) = \frac{1}{x}$ y $f(0) = 0$, esta tiene como grafico a $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ que es cerrado por ser producto de cerrados , pero sin embargo no es continua □

Ejercicio 9. Sea $f : (X, d) \to (Y, d')$ una función. Analizar la validez de las siguientes afirmaciones:

i. Si $X = \bigcup_{i \in I} U_i$, con cada U_i abierto y $f|_{U_i}$ continua para todo $i \in I$ entonces $f : X \to Y$ continua

ii. Si $X = \bigcup_{i \in I} F_i$, con cada F_i cerrado y $f|_{F_i}$ continua para todo $i \in I$ entonces $f : X \to Y$ continua

iii. Si $X = \bigcup_{i=1}^{m} F_i$, con cada F_i cerrado y $f|_{F_i}$ continua para cada $i = 1, \dots, m$ entonces $f : X \to Y$ continua

iv. Si $X = \bigcup_{i=1}^{m} X_i$, y $f|_{X_i}$ continua para cada $i = 1, \dots, m$ entonces $f : X \to Y$ continua

Proof. i) Sea V abierto de Y tenemos que:

$$f^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap X = f^{-1}(V) \cap \bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(V) \cap U_i = \bigcup_{i \in I} f|_{U_i}^{-1}(V)$$

Por continuidad de la función restringida, $f|_{U_i}^{-1}(V)$ es abierto de U_i para cada $i \in I$

Pero U_i es abierto de X para cada $i \in I$ entonces estos abiertos lo son de X también , luego unión de estos abiertos es abierto de X

Por lo tanto $f^{-1}(V)$ es abierto de X entonces f es continua

ii) Sea f cualquier discontinua, ahora dado $X = \bigcup_{x \in X} \{x\}$ es un cubrimiento de cerrados

Y además $f|_{\{x\}} : \{x\} \to Y$ es continua para cualquier $x \in X$ esto es facíl de ver dado que $\{x\}$ es abierto y cerrado en $\{x\}$ y $\{\emptyset\}$ también es abierto y cerrado en $\{x\}$ y estos dos son las únicas posibles preimagenes dadas por $f|_{\{x\}}$ de Y. Por lo tanto para cualquier abierto de Y su preimágen será abierta y lo mismo para cualquier cerrado de Y

Pero entonces f cumple las hipótesis , pero no es continua. Entonces la afirmación es falsa

iii) Siguiendo la idea del i). Sea V cerrado

$$f^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap X = f^{-1}(V) \cap \bigcup_{i=1}^{m} F_i = \bigcup_{i=1}^{m} f^{-1}(V) \cap F_i = \bigcup_{i=1}^{m} f|_{F_i}^{-1}(V)$$

Ahora cada uno de estos $f|_{F_i}^{-1}(V)$ es cerrado de F_i respectivamente , pero F_i es cerrado de X por lo tanto cada uno era entonces cerrado de X luego tengo $f^{-1}(V) = \bigcup_{i=1}^{m} f|_{F_i}^{-1}(V)$ únion finita de cerrados de X por lo tanto es cerrado. Entonces f es continua

iv) Si tomamos el siguiente cubrimiento $X = (-\infty, 0] \cup (0, +\infty)$

Sea $f : X \to Y$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

Esta es discontinua, pero si miro A abierto que no contiene al 0 entonces $f|_{(-\infty,0]}^{-1}(A) = \{\emptyset\}$ que es abierto. Si miro A abierto que contiene al cero $f|_{(-\infty,0]}^{-1}(A) = (-\infty, 0]$ que es abierto de $(-\infty, 0]$ por ende $f|_{(-\infty,0]}$ es continua. Y algo similar se puede ver para el otro intervalo.

Una mas facil es usar $f(x) = 0 \quad \forall x \in X$.

$\square$

Ejercicio 10. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $f : X \to \mathbb{R}$. Probar que f es continua si y sólo si para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, los conjuntos $A = \{x \in X : f(x) < \alpha\}$ y $B = \{x \in X : f(x) > \alpha\}$ son abiertos

Proof. $\Rightarrow$) Sea f continua, luego preimagen de abierto es abierto, entonces $A = f^{-1}((-\infty, \alpha))$ es abierto, lo mismo pasa con B

$\Leftarrow$) Cualquier abierto A en $\mathbb{R}$ lo podemos escribir como $A = (f(x) - \epsilon, f(x) + \epsilon)$. Luego tomando $\alpha = f(x) + \epsilon$ y otro $\alpha = f(x) - \epsilon$

$\{y \in X : f(y) < f(x) + \epsilon\} \cap \{y \in X : f(x) - \epsilon < f(y)\}$ por hipótesis es intersección de abiertos entonces es abierto , pero esta intersección es claramente la preimagen de A. Entonces para cualquier abierto A su preimagen por f es abierta, por lo tanto f es continua

$\square$

Ejercicio 11. Sea (X, d) un espácio métrico y sea A un subconjunto de X. Probar que la función $d_A : X \to \mathbb{R}$ definida por $d_A(x) = d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$ es (uniformemente) continua

Proof. Sabemos por práctica pasada $|f(x) - f(y)| = |d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x, y)$

Dado $\epsilon > 0$ puedo tomar $\delta = \epsilon$ y eso me implica $f(B(x, \delta)) \subseteq B(f(x), \epsilon) \quad \forall x \in X$

Por lo tanto $d_A(x)$ es uniformemente continua $\square$

Ejercicio 12. Teorema de Urysohn. Sea (X, d) un espacio métrico y sean A, B cerrados disjuntos de X

1. Probar que existe una función $f : X \to \mathbb{R}$ continua tal que:

$$f|_A \equiv 0 \qquad f|_B \equiv 1 \qquad y \qquad 0 \leq f(x) \leq 1 \quad \forall x \in X$$

   Sugerencia: Considerar la función $f(x) = \frac{d_A(x)}{d_A(x)+d_B(x)}$

2. Deducir que existen abiertos $U, V \subseteq X$ disjuntos tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$

Proof. 1) La sugerencia sirve , es continua por ser division y suma de continuas y el denominador nunca es 0 por que A y B son disjuntos y además son cerrados entonces la única forma de que $d_A(x) = 0 = d_B(x)$ es que $x \in A \cap B$

2) Sea $U = f^{-1}((-\infty, \frac{1}{2}))$ y $V = f^{-1}((\frac{1}{2}, +\infty))$ y $A \subseteq f^{-1}(0) \subseteq f^{-1}((-\infty, \frac{1}{2})) = U$

Lo mismo pasa con V $\square$

Ejercicio 13. Consideremos en $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ la métrica inducida por la usual de $\mathbb{R}$. Sea $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ una función.

1. Probar que f es continua. ¿ Sigue valiendo si f toma valores irracionales?

2. Suponiendo que f es biyectiva ¿puede ser un homemorfismo?

Proof. $i)$ En $\mathbb{Z}$ todo subconjunto es abierto y cerrado a la vez, considerando esto la preimagen de cualquier conjunto será un conjunto de $\mathbb{Z}$ por lo tanto preimagen de cualquier abierto será abierto (y cerrado)

Esto vale para cualquer espacio de llegada , dado que $\mathbb{Z}$ sigue teniendo las mismas características

$ii)$ La inversa de f es $f^{-1} : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ tiene como espacio de llegada un espacio discreto , por lo tanto todo en este espacio es abierto y cerrado , pero entonces necesito que toda preimagen sea abierta y cerrada para tener continuidad

Y esto sucede si el espacio de salida es discreto tambien, o si la preimagen de cualquier cosa es TODO el espacio de salida, o lo que es lo mismo si la función es constante. Ahora si fuera constante no sería una biyección, y $\mathbb{Q}$ no es discreto con la métrica usual , asi que no es posible tener un homemorfismo entre estos dos espacios con estas métricas □

Ejercicio 14. Sea (X, d) un espacio métrico, y sea $\Delta : X \to X \times X$ la aplicación diagonal definida por $\Delta(x) = (x, x)$. Probar que

1. Δ es un homemorfismo entre X y $\{(x, x) : x \in X\} \subseteq X \times X$

2. $\Delta(x)$ es cerrado en $X \times X$

Proof. $i)$ Si usamos la distancia orgánica en $X \times X$ dada por $d((x, x), (y, y)) = d(x, y) + d(x, y)$ Luego dado $\epsilon > 0$

Tomamos $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ entonces $d((x, x), (y, y)) = 2d(x, y) < 2\delta = \epsilon$. Entonces la aplicación es uniformemente continua haciendo algo muy similar vemos que la inversa también es uniformemente continua (solo hay que pasar dividiendo el 2 y tomar $\delta = 2\epsilon$)

$ii)$ Sea $(x_n, x_n) \to (x, x)$ tal que $(x_n, x_n)_n \subseteq X \times X$ Supongamos que $(x, x) \notin X \times X$

Pero entonces tengo $(x_n)_n \subseteq X$ con $x_n \to x$ y $x \notin X$ lo que es absurdo, porque X es todo el espacio métrico , si algo converge tiene que converger en X

Otra forma de verlo es que $\Delta(X)$ es el grafico de la función $id : X \to X$ y los gráficos son cerrados □

Ejercicio 15. Sean (X, d) e (Y, d') espacio métrico. Una aplicación $f : X \to Y$ se dice *abierta* si $f(A)$ es abierto para todo abierto $A \subseteq X$ y se dice *cerrada* si $f(F)$ es cerrado para todo cerrado $F \subseteq X$

i. Suponiendo que f es biyectiva, probar que f es abierta (cerrada) si y sólo si f^{-1} es continua.

ii. Dar un ejemplo de una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ continua que no sea abierta

iii. Dar un ejemplo de una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ continua que no sea cerrada

iv. Mostrar con un ejemplo que una función puede ser biyectiva, abierta y cerrada , pero no continua

Proof. $i)$ $\Rightarrow)$ Llamemos $g = f^{-1}$ con $g : Y \to X$ por comodida. Supongamos que g no es continua, entonces existe un abierto en $A \subseteq X$ tal que $g^{-1}(A) \subseteq Y$ no es abierto.

Pero $g^{-1} = (f^{-1})^{-1} = f$ entonces $g^{-1}(A) = f(A)$ por lo tanto tenemos un abierto $A \subseteq X$ tal que $f(A)$ no es abierto , esto es absurdo

$\Leftarrow$) Como g es continua, para todo $A \subseteq X$ abierto $g^{-1}(A) = f(A) \subseteq Y$ abierto

Esto nos dice que $A \subseteq X$ abierto entonces $f(A)$ es abierto

Acá se usó biyectividad para asegurar que existia f^{-1}

Observación interesante, toda función de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ biyectiva, con la métrica usual tiene inversa continua, por ende toda función biyectiva de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ es abierta (y cerrada)

ii) $f : (\mathbb{R}, d_1) \to (\mathbb{R}, d_1)$ tal que $f(x) = 1$ (o cualquier constante) luego $f(\mathbb{R}) = \{1\}$, entonces $\mathbb{R}$ es abierto de $\mathbb{R}$ pero $f(\mathbb{R}) = \{1\}$ no es abierto de $\mathbb{R}$. Por ende f no es abierta (cerrada)

iii) $f(t) = e^t$ es continua , $\mathbb{R}$ es cerrado pero $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$ no es cerrado

iv) Sea $id : (\mathbb{R}, d_1) \to (\mathbb{R}, \delta)$ donde δ es la distancia discreta, esta función NO continua, es biyectiva, su inversa es continua, (el dominio de su inversa es discreto) entonces por *i*) es abierta (cerrada). □

Ejercicio 16. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos y sea $f : X \to Y$ una función.

1. Probar que f es continua si y sólo si $f(\overline{E}) \subseteq \overline{f(E)}$ para todo subconjunto $E \subseteq X$

   Mostrar con un ejemplo que la inclusión puede ser estricta.

2. Probar que f es continua y cerrada si y sólo si $f(\overline{E}) = \overline{f(E)}$ para todo subconjunto $E \subseteq X$

Proof. 1) $\Rightarrow$) Sea $y \in f(\overline{E})$ entonces $\exists x \in \overline{E}$ tal que $f(x) = y$

Como $x \in \overline{E}$ existe $(x_n)_n \subseteq E$ con $x_n \neq x$ tal que $x_n \to x$

Entonces $(f(x_n))_n \subseteq f(E)$ con $f(x_n) \neq f(x)$

Por continuidad de f tenemos $f(x_n) \to f(x) = y$. Por lo tanto $y \in \overline{f(E)}$

Si tomamos $id : (\mathbb{R}, \delta) \to (\mathbb{R}, d_1)$ sabemos que es continua y $id(\overline{\mathbb{Q}}) = id(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ que esta contenido estrictamente en $\overline{id(\mathbb{Q})} = \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

$\Leftarrow$)

2) $\Rightarrow$) Sabemos por el 1) que $f(\overline{E}) \subseteq \overline{f(E)}$ por otro lado sabemos $f(E) \subseteq f(\overline{E})$

Pero $f(\overline{E})$ es cerrado y como la clausura de $f(E)$ es el menor cerrado que contiene a $f(E)$ entonces $\overline{f(E)} \subseteq f(\overline{E})$. Luego $f(\overline{E}) = \overline{f(E)}$

Observación $f(E)$ seguro está contenido en $f(\overline{E})$ para que esto no se cumpla necesitamos que $f(E) = f(\overline{E})$ que esto es lo que usamos en el contra ejemplo de arriba. $id(\mathbb{Q}) = id(\overline{\mathbb{Q}})$ □

Ejercicio 17. Un subconjunto D de un espacio métrico X se dice denso si $\overline{D} = X$

1. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos y sea $D \subseteq X$ denso. Sean $f, g : X \to Y$ funciones continuas. Probar que si $f|_D = g|_D$, entonces $f = g$

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x+y) = f(x)+f(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{Q}$. Probar que existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \alpha x$ para todo $x \in \mathbb{R}$

Proof. 1) Sea $x \in X$ como D es denso en X entonces existe $(x_n)_n \subseteq D$ tal que $x_n \to x$

Por continuidad sabemos que $f(x_n) \to f(x)$ y $g(x_n) \to g(x)$. Luego por hipótesis sabemos que $f|_D = g|_D$ entonces $f(x_n) = g(x_n)$, pero entonces $f(x_n)$ y $g(x_n)$ tienden a lo mismo por lo tanto $f(x) = g(x)$

2) Proponemos $\alpha = f(1)$ ahora mostremos que $f(n) = \alpha n$

Por inducción $(n=1)$ vale por que $f(1)=f(1).1=\alpha.1$
$(n \Rightarrow n+1)$ Por hipótesis del ejercicio $f(n+1)=f(n)+f(1)$
Por hipótesis inductiva $f(n)+f(1)=\alpha n+\alpha=\alpha(n+1)$ entonces $f(n+1)=\alpha(n+1)$
Esto vale para todo $n \in \mathbb{N}$
Ahora tomemos $n>m$ entonces $f(m)=f(n+(m-n))=f(n)+f(m-n)$
Pero entonces $f(m-n)=f(m)-f(n)=\alpha m-\alpha n=\alpha(m-n)$
Ahora como a cualquier $z \in \mathbb{Z}$ tal que $z \neq 0$ lo podemos escribir como una resta de $m, n \in \mathbb{N}$ tal que $m \neq n$ tenemos que vale para cualquier $z \in \mathbb{Z}$
$f(1)=f(1+0)=f(1)+f(0)$ entonces $0=f(0)$
Ahora fijemos $z \in \mathbb{Z}$ y mostremos que $f(\frac{z}{2^m})=\alpha \frac{z}{2^m} \quad \forall m \in \mathbb{N}_0$
Por inducción, el caso $n=0$ sabemos que se cumple por que $f(\frac{z}{2^0})=f(z)=\alpha z$
$(n \Rightarrow n+1)$ Tenemos $f(\frac{z}{2^n})=f(\frac{z}{2^{n+1}}+\frac{z}{2^{n+1}})=f(\frac{z}{2^{n+1}})+f(\frac{z}{2^{n+1}})=2f(\frac{z}{2^{n+1}})$
Entonces $f(\frac{z}{2^{n+1}})=f(\frac{z}{2^n}).\frac{1}{2}=\alpha\frac{z}{2^n}.\frac{1}{2}=\alpha\frac{z}{2^{n+1}}$
Luego consideramos $D=\{\frac{z}{2^n}: z \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ y $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x)=\alpha x$
Sabemos que estas funciones coninciden en D que es denso en $\mathbb{R}$
Entonces $f(x)=g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ □

Ejercicio 18. Sean (X,d) e (Y,d') espacios métricos. Consideramos en $X \times Y$ la métrica d_∞

1. Probar que las proyecciones $\pi_1: X \times Y \rightarrow X$ y $\pi_2: X \times Y \rightarrow Y$ son continuas y abiertas.

   Mostrar con un ejemplo que pueden no ser cerradas

2. Sea (E,δ) un espacio métrico y sea $f: E \rightarrow X \times Y$ una aplicación. Probar que f es continua si y sólo si $f_1=\pi_1 \circ f$ y $f_2=\pi_2 \circ f$ lo son

Proof. Probemos la uniformidad continua:
$d_X(\pi_1((x_1,y_1)),\pi_2((x_2,y_2)))=d_X(x_1,x_2) \leq \sup\{d_X(x_1,x_2),d_Y(y_1,y_2)\}=d_\infty((x_1,y_1),(x_2,y_2))$ entonces π_1 es uniformemente continua.
Un razonamiento similar nos lleva a probar que π_2 es uniformemente continua también
Veamos que f es abierta
Sea $U \subseteq X \times Y$ abierto queremos ver que $\pi_1(U)$ es abierto. Ahora tomemos un $(x,y) \in U$
Sabemos que existe $\epsilon>0$ tal que $B_\epsilon(x,y) \subseteq U$ entonces $\pi_1(B_\epsilon(x,y)) \subseteq \pi_1(U)$
Sea $x' \in B_\epsilon(x) \subseteq X$ entonces $d_\infty((x',y),(x,y))=\sup\{d(x',x),d(y,y)\}=d(x',x)<\epsilon$
Pero entonces $(x',y) \in B_\epsilon(x,y)$ por lo tanto $x'=\pi_1(x',y) \in \pi_1(B_\epsilon(x,y)) \subseteq \pi_1(U)$
Por lo tanto $\forall x' \in B_\epsilon(x)$ se da que $x' \in \pi_1(U)$
Entonces $B_\epsilon(x) \subseteq \pi_1(U)$ y esto vale para cualquier $(x,y) \in U$ entonces vale para cualquier $x \in \pi_1(U)$ luego $\pi_1(U)$ es abierto
Finalmente dado U abierto tenemos que $\pi_1(U)$ es abierto
$Contraejemplo$: Tomemos $F=\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}: xy=1\}$ es cerrado , el único punto que podría ser de acumulación pero que no esté en F es el $(0,0)$ pero es facil ver que no puede existir una sucesión en F que converga al $(0,0)$ pero $\pi_1(F)$ no es cerrado por que es $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
2) $\Rightarrow$) supongamos f_1 no es continua , pero como π_1 es continua , y f_1 es composición de esta con f entonces para que f_1 no sea continua f no tiene que ser continua, absurdo, de la misma forma vemos que f_2 es continua.

$\Leftarrow$) Tenemos que $\pi_1 \circ f$ y $\pi_2 \circ f$ son continuas
Entonces dado $\epsilon > 0$ existe δ_1 tal que $f_1(B_{\delta_1}(x,y)) \subseteq B_{\frac{\epsilon}{2}}(f_1(x,y))$
Y existe $\delta_2 > 0$ tal que $f_2(B_{\delta_2}(x,y)) \subseteq B_{\frac{\epsilon}{2}}(f_2(x,y))$
Equivalentemente $\pi_1(f(B_{\delta_1}(x,y))) \subseteq B_{\frac{\epsilon}{2}}(\pi_1(f(x,y)))$ también $\pi_2(f(B_{\delta_2}(x,y))) \subseteq B_{\frac{\epsilon}{2}}(\pi_2(f(x,y)))$
Tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ tendriamos ambas inclusiones entonces
Dado $(x', y') \in B_\delta(x,y)$ entonces $\pi_i(f(x',y')) \in \pi_i(f(B_\delta(x,y))) \subseteq B_{\frac{\epsilon}{2}}(\pi_i(f(x,y)))$
Luego tenemos $\pi_1(f(x',y')) \in B_{\frac{\epsilon}{2}}(\pi_1(f(x,y)))$ también $\pi_2(f(x',y')) \in B_{\frac{\epsilon}{2}}(\pi_2(f(x,y)))$
Luego tenemos $d(\pi_1(f(x',y')), \pi_1(f(x,y))) < \frac{\epsilon}{2}$ también $d(\pi_2(f(x',y')), \pi_2(f(x,y))) < \frac{\epsilon}{2}$
Juntando esto último dado $(x',y') \in B_\delta(x,y)$ entonces $f(x',y') \in f(B_\delta(x,y))$
Luego $d_\infty(f(x,y), f(x',y')) = \sup\{d_X(f_1(x',y'), f_1(x,y)), d_Y(f_2(x',y'), f_2(x,y))\}$
Y esto último es menor o igual que si sumaramos $d_X(f_1(x',y'), f_1(x,y)) + d_Y(f_2(x',y'), f_2(x,y))$
Que es igual a $d_X(\pi_1(f(x',y')), \pi_1(f(x,y))) + d_Y(\pi_2(f(x',y')), \pi_2(f(x,y))) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$
Entonces para cualquier $(x',y') \in B_\delta(x,y)$ sucede que $f(x',y') \in B_\epsilon(f(x,y))$
Finalmente $f(B_\delta(x,y)) \subseteq B_\epsilon(f(x,y))$ por lo tanto f es continua
O si nó , $\forall (x',y')$ tal que $d((x',y'),(x,y)) \leq \delta$ tenemos $d(f(x',y'), f(x,y)) \leq \epsilon$ $\square$

Ejercicio 19. Sea (X,d) un espacio métrico y sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que f es *semicontinua inferiormente* (respectivamente *superiormente*) en $x_0 \in X$ si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x,x_0) < \delta \Rightarrow f(x_0) - \epsilon < f(x) \quad \text{(respectivamente. } f(x_0) + \epsilon > f(x)).$$

i. f es continua en x_0 si y sólo si f es semicontinua inferiormente y superiormente en x_0

ii. f es semicontinua inferiormente si y sólo si $f^{-1}(\alpha, +\infty)$ es abierto para todo $\alpha \in \mathbb{R}$

iii. f es semicontinua superiormente si y sólo si $f^{-1}(-\infty, \alpha)$ es abierto para todo $\alpha \in \mathbb{R}$

iv. si $A \subseteq X$ y $X_A : X \to \mathbb{R}$ es su función característica, entonces X_A es semicontinua inferiormente (resp. superiormente) si y sólo si A es abierto (resp. cerrado)

i) f es continua en $x_0 \iff$ ($\forall \epsilon$ existe $\delta > 0$ tal que $\forall x \in X$ que cumple $d(x,x_0) < \delta \implies f(x_0) - \epsilon < f(x)$ y $f(x_0) + \epsilon > f(x)$ que es lo mismo a $|f(x_0) - f(x)| < \epsilon$ o lo mismo $d(f(x), f(x_0)) < \epsilon$)
Observación para la vuelta tenemos dos deltas y usamos el mínimo de ambos.
ii) $\Rightarrow$) Sea $x \in f^{-1}(\alpha, +\infty)$ entonces $f(x) > \alpha$ por lo tanto $f(x) - \alpha > 0$
Dado $\epsilon = f(x) - \alpha$ y dado que f es semicontinua, sabemos que existe $\delta > 0$ tal que si $y \in B_\delta(x)$ entonces $f(x) - \epsilon < f(y)$ pero entonces $f(y) > \alpha$ por lo tanto $y \in f^{-1}(\alpha, +\infty)$
Entonces para cualquier $x \in f^{-1}(\alpha, +\infty)$ tenemos que $B_\delta(x) \subseteq f^{-1}(\alpha, +\infty)$ por lo tanto este úlitmo es abierto
$\Leftarrow$) Sea $\alpha = f(x) - \epsilon$ Sabemos que $f^{-1}(f(x) - \epsilon, +\infty)$ es abierto entonces existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \subseteq f^{-1}(f(x) - \epsilon, +\infty)$
Tomemos $y \in X$ tal que $d(x,y) < \delta$ tenemos que $y \in B_\delta(x)$ por lo tanto $f(y) \in f(B_\delta(x))$
Por lo tanto $f(y) \in f(f^{-1}(f(x) - \epsilon, +\infty)) = (f(x) - \epsilon, +\infty)$
Entonces para todo $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $d(y,x) < \delta$ entonces $f(x) - \epsilon < f(y)$
Y esto vale para cualquier $x \in X$ que tomemos, luego f es semicontinua inferiormente
iv) $\Rightarrow$) Sea $f = X_A$ ahora

$$f^{-1}(\alpha,+\infty)=\begin{cases}\mathbb{R} & \alpha<0\\ A & 0\leq\alpha<1\\ \emptyset & 1\leq\alpha\end{cases}$$

Ahora para que f sea semicontinua inferiormente necesitamos que $f^{-1}(\alpha,+\infty)$ sea abierto para todo $\alpha\in\mathbb{R}$. Sabemos que $\mathbb{R}$ y $\emptyset$ son abiertos entonces

f es semicontinua inferiormente $\iff$ A es abierto

Para semicontinua superiormente usamos

$$f^{-1}(-\infty,\alpha)=\begin{cases}\emptyset & \alpha\leq 0\\ \mathbb{R}\setminus A & 0<\alpha\leq 1\\ \mathbb{R} & 1<\alpha\end{cases}$$

Tiene que ser abierto. Entonces $\mathbb{R}\setminus A$ tiene que ser abierto y es abierto $\iff$ A es cerrado

Ejercicio 20. Sean (X,d) e (Y,d') espacios métricos y sea $f:X\to Y$ una función que satisface:

$$d'(f(x_1),f(x_2))\leq cd(x_1,x_2)$$

para todo $x_1,x_2\in X$, donde $c\geq 0$. Probar que f es uniformemente continua.

Proof. Sea $\epsilon>0$ puedo tomar $\delta=\frac{\epsilon}{c}$
Entonces $\forall x_1,x_2\in X$ tq $d(x_1,x_2)<\delta$ tenemos $d'(f(x_1),f(x_2))\leq cd(x_1,x_2)<c\frac{\epsilon}{c}=\epsilon$ □

Ejercicio 21. a

1. Sean (X,d) e (Y,d') espacios métricos, $A\subseteq X$ y $f:X\to Y$ una función. Probar que si existe $\alpha>0$, $\quad (x_n)_n,(y_n)_n\subseteq A$ sucesiones y $n_0\in\mathbb{N}$ tales que
   (a) $d(x_n,y_n)\to 0$ para $n\to\infty$
   (b) $d'(f(x_n),f(y_n))\geq\alpha$ para todo $n\geq n_0$
   entonces f no es uniformemente continua en A
2. Verificar que la función $f(x)=x^2$ no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$ ¿Y en $\mathbb{R}_{\leq -\pi}$?
3. Verificar que la función $f(x)=sen(\frac{1}{x})$ no es uniformemente continua en $(0,1)$

Proof. 1) La negación de continuidad uniforme es que existe algún ϵ tal que $\forall\delta>0$ existe $x,y\in X$ que cumple que $d(x,y)<\delta$ pero $d(f(x),f(y))>\epsilon$

Por hipótesis dado $\delta>0$ sabemos que existe $n_{1_\delta}\in\mathbb{N}$ tal que $d(x_n,y_n)<\delta\quad\forall n\geq n_{1_\delta}$
Por la otra hipótesis tenemos que existe $n_{2_\delta}\in\mathbb{N}$ tal que $d(f(x_n),f(y_n))\geq\alpha\quad\forall n\geq n_{2_\delta}$
Entonces si tomamos $n_{0_\delta}=\max\{n_{1_\delta},n_{2_\delta}\}$
Tenemos que $d(x_n,y_n)<\delta$ pero $d(f(x_n),f(y_n))\geq\alpha\quad\forall n\geq n_{0_\delta}$
Y para cualquier $\delta>0$ podemos encontrar dicho n_{0_δ}
Entonces si tomamos $\epsilon<\alpha$ sucede que $\forall\delta$ existen $(x_n)_n,(y_n)_n\in X$
Que cumplen que $d(x_n,y_n)<\delta$ pero $d(f(x_n),f(y_n))\geq\alpha>\epsilon\quad\forall n\geq n_{0_\delta}$
En particular para cada δ tenemos $d(x_{n_{0_\delta}},y_{n_{0_\delta}})<\delta$ pero $d(f(x_{n_{0_\delta}}),f(y_{n_{0_\delta}}))\geq\alpha>\epsilon$

Por lo tanto f no es uniformemente continua
2) Sea $x_n = n + \frac{1}{n}$ $y_n = n$ tenemos que $d(x_n, y_n) = |n + \frac{1}{n} - n| = \frac{1}{n} \to 0$
Sin embargo $d(f(x_n), f(y_n)) = d(n^2 + 2 + \frac{1}{n} - n^2) = d(2 + \frac{1}{n}) = |2 + \frac{1}{n}| \to 2$
Entonces x^2 no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$ □

Ejercicio 22. Sea $f : (X, d) \to (Y, d')$ una función uniformemente continua y sea $(x_n)_n$ una sucesión de Cauchy en X. Probar que $(f(x_n))_n$ es una sucesión de Cauchy en Y

Proof. Como f unif continua
Dado $\epsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tal que todo $x, y \in X$ que cumple $d(x, y) \leq \delta$ implica $d(f(x), f(y)) < \epsilon$
Sea a_n una sucesión de Cauchy , tomando el δ de la uniformidad
Tenemos que $\exists n_0$ tal que $d(x_n, x_m) < \delta \quad \forall n, m \geq n_0$
Pero entonces $d(f(x_n), f(x_m)) < \epsilon \quad \forall n, m \geq n_0$
Y esto lo podemos hacer con cualquier $\epsilon > 0$, por que cualquier $\epsilon > 0$ nos va a dar un δ por uniformidad y este δ nos va a dar un n_0 por Cauchy. Luego este n_0 nos va a asegurar la cercania en la imagen
Por lo tanto $f(x_n)$ es de Cauchy.
□

Ejercicio 23. Resolver

i. Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ acotada y continua pero no uniformemente continua

ii. Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no acotada y uniformemente continua

Proof. a □

Ejercicio 24. Sea $f : (X, d) \to (Y, d')$ una función uniformente continua, y sean $A, B \subseteq X$ conjuntos no vacíos tales que $d(A, B) = 0$. Probar que $d'(f(A), f(B)) = 0$

Proof. Tengo $d(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\} = 0$ entonces existe una sucesión de distancias que tienden a cero. $d(x_n, y_n) \to 0$

Ahora supongamos que $d'(f(A), f(B)) \neq 0$ entonces $d'(f(A), f(B)) = \alpha > 0$ (No puede ser menor que 0 por que son distancias , toda son mayores o iguales que 0).

Entonces para cualquier par $x_n, y_n \in X$ $d(f(x_n), f(y_n))) \geq \alpha$ si para algun par la distancia fuera menor , entonces el conjunto de distancias tendría una distancia menor que α por lo tanto el ínfimo del conjunto sería menor que α luego $d'(f(A), f(B)) < \alpha$

Pero entonces seguro $d(f(x_n), f(y_n)) \geq \alpha \quad \forall n \in \mathbb{N}$ equivalentemente $d(f(x_n), f(y_n)) \not\to 0$ y esto nos dice que f no es uniformemente continua. Lo cual es absurdo, provino de suponer que $d'(f(A), f(B)) \neq 0$ □