UBA - exactas
Departamento de Matemática

Cálculo Avanzado - Espacios normados 3

Primer cuatrimestre de 2020

Daniel Carando

Dto. de Matemática - FCEN - UBA

Seguimos con temas del capítulo 12 del apunte.

$T : E \to F$ t.l.

$T(x-y) = T(x) - T(y)$

$\|T(x) - T(y)\| = \|T(x-y)\|$

$\underbrace{x \text{ cerca de } y}$

$\Updownarrow$

$\underbrace{x-y}$ cerca de $\underline{0}$

Teorema

Sean E, F espacios normados, y $T : E \to F$ lineal. Son equivalentes:

Teorema

Sean E, F espacios normados, y $T : E \to F$ lineal. Son equivalentes:

(1) T es continua en el origen.

Teorema

Sean E, F espacios normados, y $T : E \to F$ lineal. Son equivalentes:

(1) T es continua en el origen.

(2) T es continua en algún punto.

Teorema

Sean E, F espacios normados, y $T : E \to F$ lineal. Son equivalentes:

(1) T es continua en el origen.

(2) T es continua en algún punto.

(3) T es continua.

Teorema

Sean E, F espacios normados, y $T : E \to F$ lineal. Son equivalentes:

(1) T es continua en el origen.

(2) T es continua en algún punto.

(3) T es continua.

(4) T es uniformemente continua.

Teorema

Sean E, F espacios normados, y $T : E \to F$ lineal. Son equivalentes:

(1) T es continua en el origen.

(2) T es continua en algún punto.

(3) T es continua.

(4) T es uniformemente continua.

(5) Existe $c > 0$ tal que

$$\underbrace{\|T(x)\|_F} \leq \underbrace{c\|x\|_E}$$

T acotada

para todo $x \in E$.

Teorema

Sean E, F espacios normados, y $T : E \to F$ lineal. Son equivalentes:

(1) T es continua en el origen.

(2) T es continua en algún punto.

(3) T es continua.

(4) T es uniformemente continua.

(5) Existe $c > 0$ tal que

$$\|T(x)\|_F \leq c\|x\|_E$$

para todo $x \in E$.

(6)

$$\sup_{x \in B_E} \|T(x)\|_F < \infty.$$

T acotada (acotada en la bola).

Teorema

Sean E, F espacios normados, y $T : E \to F$ lineal. Son equivalentes:

(1) T es continua en el origen.

(2) T es continua en algún punto.

(3) T es continua.

(4) T es uniformemente continua.

(5) Existe $c > 0$ tal que

$$\|T(x)\|_F \leq c\|x\|_E$$

para todo $x \in E$.

(6)

$$\sup_{x \in B_E} \|T(x)\|_F < \infty.$$

(7) T es Lipschitz.

Observación

Observación

(5) Existe $c > 0$ tal que

$$\|T(x)\|_F \leq c\|x\|_E \tag{1}$$

para todo $x \in E$.

Observación

(5) Existe c > 0 tal que

$$\underbrace{\|T(x)\|_F \leq c\|x\|_E}\qquad (1)$$

para todo $x \in E$.

(6)

$$\underbrace{\sup_{x \in B_E} \|T(x)\|_F < \infty.}\qquad (2)$$

VIMOS: Si C cumple (1) $\Rightarrow \underbrace{\sup_{x\in B_E} \|T(x)\|} \leq c$

$M = \sup_{x\in B_E} \|T(x)\|_F \Rightarrow \boxed{\|T(x)\|_F \leq M \|x\|}$

OTRA FORMA: Si $M = \sup_{x \in B_E} \|T(x)\|_F < +\infty$

$\Rightarrow T$ cont $\underset{EJ}{\Rightarrow} \sup_{x\in B_E} \|T(x)\| = \sup_{x\in \overline{B}_E} \|T(x)\|.$

$x \neq 0$, $\|T(x)\| = \left\| \|x\| \, T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| = \|x\| \left\|T\left(\overbrace{\frac{x}{\|x\|}}^{\in \overline{B}_E}\right)\right\| \leq \|x\| \cdot M.$

Definición

Sean E, F espacios normados, y $T : E \to F$ un operador lineal acotado. Definimos la norma de T como

$$\|T\| = \sup_{x \in B_E} \|T(x)\|_F = \sup_{x \in B_E} \|T(x)\|_F \tag{3}$$

Definición

Sean E, F espacios normados, y $T : E \to F$ un operador lineal acotado. Definimos la norma de T como

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup_{x \in B_E} \|T(x)\|_F \\ &= \inf\{c : \|T(x)\| \leq c\|x\| \text{ para todo } x \in E\} \end{aligned} \tag{3}$$

es un número.

$$\|T(x)\|_F \leq \|T\| \, \|x\|_E$$

Definición

Sean E, F espacios normados, y $T : E \to F$ un operador lineal acotado. Definimos la norma de T como

$$\begin{aligned} \underline{\|T\|} &= \sup_{x \in B_E} \|T(x)\|_F \qquad (3) \\ &= \inf\{c : \|T(x)\| \leq c\|x\|| \text{ para todo } x \in E\} \end{aligned}$$

Definición

Sean E, F espacios normados.

$$L(E,F) = \{T : E \to F,\ T \text{ es } \underline{\text{lineal}} \text{ y } \underline{\text{acotado}}\} \to \text{esp. VECTORIAL.}$$

$T_1, T_2 \in L(E,F) \Rightarrow (T_1 + T_2)(x) =$

$= T_1(x) + T_2(x)$

$T_1 + T_2 \in L(E,F)$

ÍDEM con $(\lambda T)(x) = \lambda \cdot T(x)$ $\quad \lambda T \in L(E,F)$

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall T \in L(E,F)$

Definición

Sean E, F espacios normados, y $T : E \to F$ un operador lineal acotado. Definimos la norma de T como

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup_{x \in B_E} \|T(x)\|_F \\ &= \inf\{c : \|T(x)\| \le c\|x\| \text{ para todo } x \in E\} \end{aligned} \tag{3}$$

Definición

Sean E, F espacios normados.

$$L(E, F) = \{T : E \to F,\ T \text{ es lineal y acotado}\}$$

Observación

Usando propiedades de supremos y la desigualdad triangular de la norma en F, se puede ver que (3) define una norma en $L(E, F)$.

Definición

Sean E, F espacios normados, y $T : E \to F$ un operador lineal acotado. Definimos la norma de T como

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup_{x \in B_E} \|T(x)\|_F \qquad (3) \\ &= \inf\{c : \|T(x)\| \leq c\|x\|\| \text{ para todo } x \in E\} \end{aligned}$$

$\|Tx\|_F \leq c\,\|x\|_E$

Definición

Sean E, F espacios normados.

$$L(E, F) = \{T : E \to F,\ T \text{ es lineal y acotado}\}$$

Observación

$\|T\|_{L(E,F)}$

Usando propiedades de supremos y la desigualdad triangular de la norma en F, se puede ver que (3) define una norma en $L(E, F)$. Entonces, $L(E, F)$ es un espacio normado.

Teorema

Sean E, F espacios normados. Si [redacted] F es Banach, entonces $L(E, F)$ es Banach.

Teorema

Sean E, F espacios normados. Si F es Banach, entonces $L(E, F)$ es Banach.

En particular, $L(E, \mathbb{R})$ es Banach para todo espacio normado E.

DEM: $(T_n)_n$ suc. de Cauchy en $L(E,F)$.

$\boxed{\text{En part, } (T_n)_n \text{ es acotada: } \exists K > 0 / \ \|T_n\| \leq K.}$

Para $x \in E$, $(x \neq 0)$, $(T_n(x))_n \subset F$. Veamos que es de Cauchy.

$$\|T_n(x) - T_m(x)\|_F = \|(T_n - T_m)(x)\| \leq \|T_n - T_m\|_{L(E,F)} \|x\|$$

"$\|Sx\| \leq \|S\| \|x\|$."

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 / \ \|T_n - T_m\| < \varepsilon / \|x\|$ $\forall n \geq n_0$.

$\|T_n(x) - T_m(x)\| < \frac{\varepsilon}{\|x\|} \|x\| = \varepsilon$ $\forall n \geq n_0$ $\therefore$ $(T_n x)_n$ es de Cauchy en F $\therefore$ $\exists \lim_{n \to +\infty} T_n(x)$ (p/ $x = 0$ TAMBIÉN)

F COMPLETO

. $T(x) := \lim_n T_n(x)$. USANDO: $+$, $\cdot$ son cont, se ve que T es lineal.

. $\|T_n(x)\|_F \leq \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)} \|x\|_E \leq K \|x\|_E \Rightarrow \boxed{\|Tx\| \leq K\|x\|}$

$\downarrow$

Tx

$\therefore$ $T \in \mathcal{L}(E,F)$

FALTA: $T_n \to T$ en $\| \ \|_{\mathcal{L}(E,F)}$.

DADO $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 / \|T_n - T_m\| < \varepsilon/2$ $\forall n \geq n_0$.

Si $x \in B_E$, $\|T_n x - T_m(x)\| = \|(T_n - T_m)(x)\| \leq \|T_n - T_m\| < \varepsilon/2$

$T_m(x) \xrightarrow{m \to +\infty} T(x)$

$\forall n, m \geq n_0$

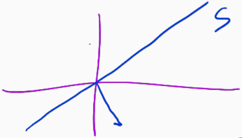
$\Rightarrow \|T_n x - T x\| \leq \varepsilon/2$ $\forall n \geq n_0$. $\forall x \in B_E$.

$\|T_n x - T x\| = \|(T_n - T)(x)\| \Rightarrow \|T_n - T\| = \sup_{x \in B_E} \|(T_n - T)(x)\| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$.

$T_n \to T$ en $\| \ \|_{\mathcal{L}(E,F)}$ $\forall n \geq n_0$

Lema de Riesz

Sea E un espacio normado y $S \subset E$ un subespacio cerrado propio. Dado $0 < \alpha < 1$, existe $x_\alpha \in E$ tal que $\|x_\alpha\| = 1$ y $\|x_\alpha - s\| > \alpha$ para todo $s \in S$.



$\inf\{\|x-s\| : s \in S\}$

$x \in E \setminus S$. $\boxed{r = d(x,S)} > 0$. como $0 < \alpha < 1$,

$\frac{r}{\alpha} > r \Rightarrow \exists\, b \in S \,/\, \boxed{\underbrace{d(x,b)}_{\|x-b\|} < \frac{r}{\alpha}}$ $\qquad \frac{1}{\|x-b\|} > \frac{\alpha}{r}$

$x_\alpha = \frac{x-b}{\|x-b\|}$ SIRVE: Sea $s \in S$: $\|x_\alpha - s\| = \left\| \frac{x-b}{\|x-b\|} - s \right\|$

$= \left\| \frac{1}{\|x-b\|}\left(x - b - s\|x-b\|\right) \right\| = \frac{1}{\|x-b\|} \cdot \left\| x - \underbrace{\left(\underbrace{b}_{\in S} + \underbrace{s}_{\in S}\,\underbrace{\|x-b\|}_{\in \mathbb{R}}\right)}_{\in S} \right\|$

$\geq \frac{1}{\|x-b\|} \cdot r > \frac{\alpha}{r} \cdot r = \alpha$

Corolario

Sea E un espacio normado. Entonces, E es de dimensión finita si y sólo si $\overline{B}_E$ es un compacto.

$\Rightarrow$) YA LA VIMOS

$\Leftarrow$) LEMA DE RIESZ: si E es de dim ∞

$\Rightarrow \exists\, (x_n)_n \subset \overline{B}_E$ sin subsuc conv.

ELEGIMOS: $x_1 \in E$, $\|x_1\| = 1$

- $S = [x_1]$, por LEMA RIESZ, $\exists\, x_2 \,/\, \|x_2 - s\| > 1/2$ $\forall s \in S$.

  $\alpha = 1/2$

  $S \neq E$ pues $\dim E = \infty$.

-

Ejercicio

Si E es un espacio de Banach de dimensión infinita, entonces no puede tener una base numerable.

algebraica

$\{v_i\}_{i\in I}$ base de E si $\forall x \in E$, $\exists \{\alpha_i : i \in I\}$ con $\alpha_i \neq 0$ solo para finitos valores de i /

$$\underbrace{x = \sum_{i\in I} \alpha_i v_i}.$$

E Banach, $\dim E = \infty$ $\Rightarrow$ I no numerable

Supongamos que no: $\exists \{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ / $\underbrace{[v_k]_k = E}$

Ejercicio
Si E es un espacio de Banach de dimensión infinita, entonces no puede tener una base numerable.

Ejercicio
Sea $\gamma : E \to \mathbb{R}$ una funcional lineal. Entonces, γ es continua si y sólo si Kerγ es un subespacio cerrado.

$\gamma \neq 0 \Rightarrow$ Ker γ es un hiperplano (H HIPERPLANO si $\exists\, v$ / $H \oplus [v] = E$)

Ker γ cerrado $\Leftrightarrow$ $\gamma^{-1}(0)$ cerrado.

EJERCICIO: H es cerrado o denso

$\Leftarrow$ hiperplano.