**Ejercicio 1.** Sea $A = \{g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : g \text{ es inyectiva}\}$

$$\#A = \mathfrak{c}$$

*Proof.* Vamos a ver que $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} \leq \#A \leq \aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{c} \Rightarrow \#A = \mathfrak{c}$

Primero tenemos que $A \subseteq \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$

Por ende $\#A \leq \#\{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\} = \#(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}) = \aleph_0^{\aleph_0} \leq \mathfrak{c}^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0\aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$

Por un lado sabemos que $(a^b)^c = a^{bc}$ con $a, b, c$ cardinales , eso se prueba en las guías.

Y por otro lado sabemos que $\aleph_0\aleph_0 = \#(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \#\mathbb{N} = \aleph_0$

Para la otra desigualdad quiero encontrar una $h$ funcion inyectiva

$$h : \{f : \mathbb{N} \to \{2, 3\}\} \to \{g : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : \ g \text{ inyectiva}\}$$

Y esto me diría que $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} = \#\{2, 3\}^{\mathbb{N}} = \{f : \mathbb{N} \to \{2, 3\}\} \leq \#A$

Afirmo que dicha función es $h(f)(x) = (f(x))^x$

Primero voy a ver que $h$ está bien definida

Por como está definida (valga la rebundancia) $h$ es trivial ver que para toda $f : \mathbb{N} \to \{2, 3\}$ $h(f)$ es una función bien definida que va de naturales en naturales , basicamente podemos evaluar en cualquier $x \in \mathbb{N}$ a la función $h(f)$ y esto nos va a caer en $2^x$ o en $3^x$ que es un natural.

Tambien tenemos que ver que estas imagenes de $h$ son efectivamente funciones inyectivas

$$h(f)(x) = h(f)(x') \iff f(x)^x = f(x')^{x'}$$

Sabemos que $f(z) = 2$ o $3 \quad \forall z \in \mathbb{N}$ y que $x, x' \neq 0$

Por unicidad de primos si $a, b$ primos y $x, x' > 0$ entonces $a^x = b^{x'} \iff a = b$ y $x = x'$

$$\text{Entonces } f(x)^x = f(x')^{x'} \iff f(x) = f(x') \text{ y } x = x'$$

Juntando esto último tenemos

$$h(f)(x) = h(f)(x') \iff x = x'$$

Por ende $h(f)$ es una función inyectiva y además $h(f) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ entonces $h$ está bien definida

Resta ver que además es $h$ inyectiva, pero esto es directo usando su definición.

Sean $f_1, f_2 \in \{f : \mathbb{N} \to \{2, 3\}\}$

$$h(f_1) = f(f_2) \iff h(f_1)(x) = h(f_2)(x) \quad \forall x \in \mathbb{N} \iff (f_1(x))^x = (f_2(x))^x$$

$$\text{Como } x \in \mathbb{N} \quad x \neq 0 \quad (f_1(x))^x = (f_2(x))^x \iff f_1(x) = f_2(x) \quad \forall x \in \mathbb{N} \iff f_1 = f_2$$

Juntando todo

$$h(f_1) = h(f_2) \iff f_1 = f_2$$

Entonces $h$ es inyectiva

Juntando todo lo arriba expuesto , queda demostrado el ejercicio

□