Cálculo Avanzado - Sucesiones y series de funciones

Primer cuatrimestre de 2020

Daniel Carando

Dto. de Matemática - FCEN - UBA

Empezamos con temas del capítulo 13 del apunte.

$B(A) = \{f : A \to \underline{\mathbb{R}} \mid f \text{ acotada}\}.$

A MÉTRICO $\quad C_b(A) = \{f : A \to \mathbb{R} \mid f \text{ cont y acot}\}.$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in A} |f(x)| \qquad d_\infty(f,g) = \underbrace{\sup_{x \in A} |f(x) - g(x)|}_{\|f-g\|_\infty}.$$

$f_n \to f$ en d_∞ (o en $\| \|_\infty$)

dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 \mid \underbrace{\|f_n - f\|_\infty}_{\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)|} < \varepsilon \quad \forall\, n \geq n_0.$

$f_n \to f$ en $d_\infty \Rightarrow$ dado $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 / |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$
$\forall n \geq n_0, \underline{\forall x \in A}$

VALE LA VUELTA (EJERCICIO).

Obs: $\underbrace{f_n \to f \text{ en } \| \|_\infty}$ $\Rightarrow$ $f_n(x) \to f(x)$
$\forall x \in A$

(o sea, p/c/ $x \in A$, "evaluar en x"
es una funcional lineal continua).

$e_x : \underbrace{B(A)} \to \mathbb{R}, \quad e_x(f) = f(x).$

En lo que sigue, A es un conjunto y X, Y son espacios métricos.

En lo que sigue, A es un conjunto y X, Y son espacios métricos.

Definición

La sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones de A en Y converge puntualmente a $f : A \to Y$ si para todo $x \in A$,

$f_n : A \to Y$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).}$$

Obs: $f_n \to f$ PUNTUALMENTE si:

para cada $x \in A$, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, n_0$ (depende de ε y de x) tal que $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$ $\forall\, n \geq n_0$.

(Si $Y = \mathbb{R}$, $d(f_n(x), f(x)) = |f_n(x) - f(x)|$.)

En lo que sigue, A es un conjunto y X, Y son espacios métricos.

Definición
La sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones de A en Y converge puntualmente a $f : A \to Y$ si para todo $x \in A$,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

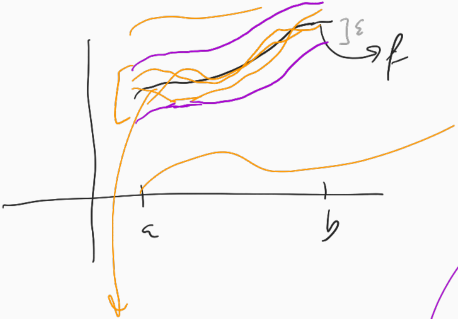
Definición
La sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones de A en Y converge uniformemente a $f : A \to Y$ si dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ se tiene

$$d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

para todo $x \in A$.

↳ depende sólo de ε

NOTACIÓN $\boxed{f_n \rightrightarrows f}$ $f_n \xrightarrow{u} f$.



$f_n, f : [a,b] \to \mathbb{R}$

$f_n \rightrightarrows f \to$ dado $\varepsilon > 0$

$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

$\forall\, n \geq n_0$

$\forall\, x \in [a,b]$

$f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$

$\forall\, f_n$

$\forall\, n \geq n_0$

$f_n \rightrightarrows f \to f_n \to f$ puntualmente

$\Updownarrow$

$f_n \to f$ en $(B([a,b]), d_\infty)$

$f_n(t) = t^n$

$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$

f_n conv. punt.

pero NO unif.

Observación

La completitud de $C_b(X)$ o $B(X)$ está relacionada con las afirmaciones

1 • límite uniforme de funciones continuas es una función continua;

2 • límite uniforme de funciones acotadas es acotada;

3 • una sucesión uniformemente de Cauchy converge uniformemente.

$(f_n)_n$ es UNIF. DE CAUCHY si dado $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ / $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ $\forall n, m \geq n_0$.

VALEN 1 y 2 para $C_b(X, Y)$ o $B(X, Y)$ con Y métrico y 3 con Y COMPLETO

$B(X, Y) = \{f : X \to Y$, acot.$\}$. ($f(X)$ acot en Y)

Proposición
Sea $f_n \rightrightarrows f$, con $f_n, f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuas. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt.$$

$$\| \quad \int_a^b \lim f_n(t)\, dt$$

NO VALE SI $f_n \to f$ PUNT

OBS: LA PROP ES EQUIV. A:

$\gamma : C[a,b] \to \mathbb{R}$, $\gamma(f) = \int_a^b f(t)\,dt \Rightarrow \gamma$ es una func. lin CONT

↳ con $\| \ \|_\infty$.

DEM: dado $\varepsilon > 0$, $\exists n_0 \,/\, |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon / \boxed{2(b-a)}$ $\forall n \geq n_0$ $\forall t \in [a,b]$

$$\left| \int_a^b f_n(t)\,dt - \int_a^b f(t)\,dt \right| \leq \int_a^b \underbrace{|f_n(t) - f(t)|}_{<\varepsilon}\, dt \leq$$

$$\leq \varepsilon / \boxed{2(b-a)}\, (b-a) < \varepsilon. \Rightarrow \int_a^b f_n(t)\,dt \to \int_a^b f(t)\,dt$$

OBS: $\cdot\ \gamma$ LINEAL, γ cont $\Leftrightarrow$ γ cont en 0.

$\Leftrightarrow$ Ker γ CERRADO

Proposición

Sean f_n de clase C^1 en $[a,b]$, $f_n \to f$ puntualmente en $[a,b]$, y $f_n' \rightrightarrows g$. Entonces, f es derivable y $f' = g$. ($\exists$ ∴ $f_n' \rightrightarrows f'$)

$f_n' \rightrightarrows g$, x PROP ANTERIOR, $\int_a^x f_n'(t)\,dt \to \int_a^x g(t)\,dt$

$\forall x \in [a,b]$.

BARROW → $\parallel$

$f_n(x) - f_n(a)$ $\qquad$ $G(x)$

p/c/ x,

G es C^1 y

$G' = g$.

$f_n(x) - f_n(a) \to G(x)$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$f(x) \qquad f(a)$

$\Rightarrow \boxed{f(x) = f(a) + G(x)}$ (TFC).

$\hookrightarrow C^1$

$\Rightarrow \boxed{f \text{ es } C^1 \text{ y } f' = G' = g}$

Teorema de Dini

Teorema de Dini

Teorema de Dini

Teorema de Dini

Sea (X, d) un e.m. compacto, y sean $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ continuas, tales que $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $x \in X$ y, además,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{para todo } x \in X. \quad \text{(LÍM PUNTUAL)}$$

Entonces, $f_n \rightrightarrows f$.

$$f_n(x) \geq f_{n+1}(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in X.$$

Obs: $f_n(x) = x^n$ en $[0,1]$, $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ $\forall x \in [0,1]$

$$f_n(x) \to f(x) = \begin{cases} 1 & x = 1 \\ 0 & 0 \leq x < 1 \end{cases}$$ PERO NO UNIF.

EJERCICIO: VER QUÉ PASA SI

$$f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$f_n, f : X \to \mathbb{R}$ CONT, $f_n \to f$ PUNT, $\underbrace{f_n(x) \geq f_{n+1}(x) \; \forall n, \forall x \in X}$.

X COMPACTO.

QVQ $f_n \rightrightarrows f$ UNIF..

Sea $\varepsilon > 0$.

Sea $g_n = f_n - f$

- g_n cont $\forall n$
- $g_n \geq 0$ $\forall n$; $f(x) = \underbrace{\lim_n \overbrace{f_n(x)}^{\text{decrece}}}_{= \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)}$

$\Rightarrow \underbrace{f_n(x) \geq f(x)}$ $\forall n, \forall x$;

$g_n(x) \geq 0$ $\forall n$.

abierto $(g_n^{-1}(-\infty, \varepsilon))$

$U_n = \{x \in X \,/\, g_n(x) < \varepsilon\} = \{x \in X \,/\, |g_n(x)| < \varepsilon\}$

$= \underbrace{\{x \in X \,/\, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\}} = \{x \in X \,/\, f_n(x) - f(x) < \varepsilon\}$

$U_m \subset U_{m+1}$: si $x \in U_m \rightarrow \underline{f_m(x) - f(x) < \varepsilon} \Rightarrow$

$\underline{f_{m+1}}(x) - f(x) \leq f_m(x) - f(x) < \varepsilon \rightarrow \underbrace{x \in U_{m+1}}$

$f_n \rightarrow f$ punt. $\Rightarrow \underbrace{\forall x}, \exists m_x \,/\, |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon$

$\forall m \geq m_x$

$\Rightarrow \exists m_x \,/\, x \in U_m \quad \forall m \geq m_x$.

$\therefore X = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} U_m$ (cada x está en algún U_{m_x}) $\rightarrow \{U_m\}$ es cubrim de X por abs.

X comp $\Rightarrow \exists M \,/\, X = \bigcup_{m=1}^{M_0} U_m = \overbrace{U_{M_0} \subseteq U_n} \quad \forall n \geq M_0$

$U_m \subset U_{m+1} \ \forall m \qquad \supseteq X$

$\Rightarrow X = U_n \quad \forall n \geq M_0$.

$\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0, \ \forall x \in X$

$\Rightarrow f_n \rightrightarrows f$