1) Probar las siguientes igualdades

i.
$$B \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{I}} A_i = \bigcap_{i \in \mathbb{I}} (B \setminus A_i)$$

Proof. $\subseteq$) Sabemos $x \in B$ y $x \notin \bigcup_{i \in \mathbb{I}} A_i$

Luego $x \in B$ y $x \notin \bigcup A_i \quad \forall i \in \mathbb{I}$

Entonces $x \in B \setminus A_i \quad \forall i \in \mathbb{I}$

$\Rightarrow x \in \bigcap B \setminus A_i$

$\supseteq$) Sabemos $x \in B \setminus A_i \quad \forall i \in \mathbb{I}$

Luego para cada $i \in \mathbb{I}$ sabemos $x \in B$ y $x \notin A_i$

$\Rightarrow x \in B \setminus \bigcup A_i$

□

ii.
$$B \setminus \bigcap_{i \in \mathbb{I}} A_i = \bigcup_{i \in \mathbb{I}} (B \setminus A_i)$$

Proof. $\subseteq$) Sabemos $x \in B$ y $x \notin \bigcap A_i$

Luego existe algún $i \in \mathbb{I}$ tal que $x \notin A_i$ (quizas para todos los $i \in I$ sucede que $x \notin A_i$ pero con uno alcanza)

Entonces existe algún $i \in \mathbb{I}$ tal que $x \in B$ y $x \notin A_i \Rightarrow B \setminus A_i$

$\Rightarrow x \in \bigcup (B \setminus A_i)$

$\supseteq$) Tenemos $x \in B \setminus A_i$ para algún $i \in \mathbb{I}$

Luego $x \in B$ y $x \notin A_i$ para algún $i \in \mathbb{I}$

Entonces $x \in B$ y $x \notin \bigcap A_i \quad \forall i \in \mathbb{I}$

$\Rightarrow x \in B \setminus \bigcap A_i$

□

iii.
$$\bigcup_{i \in \mathbb{I}} (A_i \cap B) = B \cap (\bigcup_{i \in \mathbb{I}} A_i)$$

Proof. $\subseteq$) Tenemos $x \in A_i \cap B$ para algún $i \in \mathbb{I}$

Luego $x \in B$ y $x \in A_i$ para algún $i \in \mathbb{I} \Rightarrow x \in \bigcup A_i$

Entonces $x \in B$ y $x \in \bigcup A_i$

$\Rightarrow x \in B \cap (\bigcup A_i)$ □

3) Sea $f : X \to Y$ una función, A, B subconjuntos de X

i. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

Proof. $\subseteq$) Sea $y \in f(A \cup B)$ entonces $\exists x \in A \cup B / f(x) = y$
Luego $x \in A$ y $x \in B$
Entonces $y = f(x) \in f(A)$ y por otro lado $y = f(x) \in B$
Finalmente $y = f(x) \in f(A) \cup f(B)$
$\supseteq$) Sea $y \in f(A) \cup f(B)$ luego $y \in f(A)$ e $y \in f(B)$
Entonces $\exists x \in A$ tal que $f(x) = y$ luego $x \in A \cup B$
Luego $y = f(x) \in f(A \cup B)$

$\square$

ii. $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

Proof. Sea $y \in f(A \cap B)$ luego $\exists x \in A \cap B$ tal que $f(x) = y$
Luego $x \in A$ y $x \in B$ luego $y = f(x) \in f(A)$ e $y = f(x) \in f(B)$
Finalmente $y = f(x) \in f(A) \cap f(B)$

$\square$

iii. Sea $A_{i \in \mathbb{N}}$ una familia de infinitos conjuntos, entonces

(a) $f(\bigcup A_i) = \bigcup f(A_i)$

Proof. $\subseteq$) Sea $y \in f(\bigcup A_i)$ luego $\exists x \in \bigcup A_i$ tal que $f(x) = y$
Entonces $\exists A_j$ tal que $x \in A_j$ por lo que $y = f(x) \in f(A_j) \subseteq \bigcup f(A_i)$
$\supseteq$) Sea $y \in \bigcup f(A_i)$ luego $\exists j \in \mathbb{N}$ tal que $y \in f(A_j)$
Luego $\exists x \in A_j$ tal que $y = f(x)$ luego $x \in \bigcup A_i$
Finalmente $y = f(x) \in f(\bigcup A_i)$

$\square$

(b) $f(\bigcap A_i) \subseteq \bigcap f(A_i)$

Proof. Sea $y \in f(\bigcap A_i)$ luego $\exists x \in \bigcap A_i$
Entonces $x \in A_i \quad \forall i \in \mathbb{N}$
Luego $y = f(x) \in f(A_i) \quad \forall i \in \mathbb{N}$
Finalmente $y \in \bigcap f(A_i)$

$\square$

(c) La última inclusión puede ser estricta.

Proof. Sea $f(x) = 3 \quad \forall x \in X$ y $A = 1, B = 2$
Luego $3 = f(A) \cap f(B) = 3 = \{3\}$ que es distinto a $f(A \cap B) = f(\{\emptyset\}) = \emptyset$ $\square$

4) Sean $f : X \to Y$ una función, $A \subseteq X$ y $B, B_1, B_2 \subseteq Y$. Luego vale:

i. $A \subseteq f^{-1}(f(A))$

Proof. Sea $x \in A$ luego $f(x) \in f(A)$ por lo tanto, como $x \in f^{-1}(f(x)) \subseteq f^{-1}(f(A))$
Entonces $x \in f^{-1}(f(A))$ $\square$

ii. $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$

Proof. Sea $y \in f(f^{-1}(B))$ entonces $\exists x \in f^{-1}(B)/f(x) = y$
Pero entonces $f(x) \in B \Rightarrow y \in B$ $\square$

iii. $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$

Proof. $\subseteq$) Sea $x \in f^{-1}(Y \setminus B)$ luego $f(x) \in Y \setminus B$
Entonces $f(x) \notin B$ entonces $x = f^{-1}(f(x)) \notin f^{-1}(B)$
Por otro lado $f(x) \in Y$ entonces $x \in f^{-1}(Y)$
Juntando todo $x \in f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(B)$
O lo que és lo mismo $X \setminus f^{-1}(B)$
$\supseteq$) Sea $x \in X \setminus f^{-1}(B)$
Entonces $x \in X$ entonces $f(x) \in f(X) = Y$
Tambien $x \notin f^{-1}(B)$ por lo que $f(x) \notin B$
Luego $f(x) \in Y \setminus B$
Finalmente $x = f^{-1}(f(x)) \in f^{-1}(Y \setminus B)$ $\square$

iv. $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

Proof. $\subseteq$) Sea $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$ luego $f(x) \in B_1 \cup B_2$
Luego $f(x) \in B_1$ por lo que $x \in f^{-1}(B_1)$
Finalmente $x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
$\supseteq$) Sea $x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{1}(B_2)$
Luego $x \in f^{-1}(B_1)$ entonces $f(x) \in B_1$
Por tanto $f(x) \in B_1 \cup B_2$
Finalmente $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$ $\square$

v. $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

Proof. $\subseteq$) Sea $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2)$ entonces $f(x) \in B_1 \cap B_2$
Por lo que $f(x) \in B_1$ esto implica $x \in f^{-1}(B_1)$
Tambien $f(x) \in B_2$ que implica $f(x) \in f^{-1}(B_2)$
Finalmente $f(x) \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
$\supseteq$) Sea $x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
Luego $x \in f^{-1}(B_1)$ por lo que $f(x) \in B_1$ y con el mismo argumento $f(x) \in B_2$
Entonces tenemos $f(x) \in B_1 \cap B_2$
Finalmente $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2)$ $\square$

4)b) Sean $f : X \to Y$ una función y B_i Una familia infinita de subconjuntos de Y vale:

i. $f^{-1}(\bigcup B_i) = \bigcup f^{-1}(B_i)$

Proof. $\subseteq$) Sea $x \in f^{-1}(\bigcup B_i)$ entonces $f(x) \in \bigcup B_i$
Luego $f(x) \in B_j$ para algún B_j
Por ende $x \in f^{-1}(B_j) \subseteq \bigcup f^{-1}(B_i)$
Finalmente $x \in \bigcup f^{-1}(B_i)$
$\supseteq$) Por hipótesis sabemos $\exists j \in \mathbb{N}$ tal que $x \in f^{-1}(B_j)$
Por lo que $f(x) \in B_j$ y entonces $f(x) \in \bigcup B_j$
Luego $x \in f^{-1}(\bigcup B_j)$ $\square$

ii. $f^{-1}(\bigcap B_i) = \bigcap f^{-1}(B_i)$
$\subseteq$) Sea $x \in f^{-1}(\bigcap B_i)$ luego $f(x) \in \bigcap B_i$
Entonces $f(x) \in B_i \quad \forall i \in \mathbb{N}$ luego $x \in f^{-1}(B_i) \quad \forall i \in \mathbb{N}$
Finalmente $x \in \bigcap f^{-1}(B_i)$
La otra inclusión sale de la misma forma que todos los ejercicios arriba , queda como ejercicio para alguién con muchas ganas

5) Sea $f : X \to Y$ una función. Probar que $f(f^{-1}(B)) = B$ para cada $B \subseteq Y$ si y sólo si f es suryectiva

Proof. $\Leftarrow$) Por ejercicio anteriór sabemos que $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$ probemos la otra inclusión.
Sea $y \in B$ luego $y \in Y$ como f suryectiva $\exists x \in X$ tal que $f(x) = y$ equivalentemente $x = f^{-1}(y)$
Luego $y = f(x) = f(f^{-1}(y)) \in f(f^{-1}(B))$
Entonces $y \in f(f{-}1(B)) \quad \forall y \in B$ y por ende $B \subseteq f(f^{-1}(B))$
Finalmente $B = f(f^{-1}(B))$ para cualquier $B \subseteq Y$
$\Rightarrow$) Tenemos la igualdad para cada $B \subseteq Y$ en particular vale para Y
Luego $f(f^{-1}(Y)) = Y$ por lo tanto f es suryectiva
Si no fuera suryectiva tiene que existir algún $y \in Y$ tal que $f^{-1}(y) = \emptyset$
Por lo que $f^{-1}(y) \notin f^{-1}(Y)$ entonces $y \notin f(f^{-1}(Y))$
Finalmente $Y \neq f(f^{-1}(Y))$ $\square$

6) Sea $f : X \to Y$ una función. Luego las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. f es inyectiva
2. $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ para todo $A, B \subseteq X$
3. $f^{-1}(f(A)) = A$ para todo $A \subseteq X$
4. $f(A) \cap f(B) = \emptyset$ para todo par de subconjuntos A, B tales que $A \cap B = \emptyset$
5. $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$ para todo $B \subseteq A \subseteq X$

Proof. 1) $\Rightarrow$ 2) Sabemos que $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ probemos la otra inclusión
Sea $y \in f(A) \cap f(B)$ luego $y \in f(A)$ y $y \in f(B)$
Por esto sabemos que $\exists x \in A$ tal que $f(x) = y$ y tambien que $\exists x' \in B$ tal que $f(x') = y$
Luego $f(x) = y = f(x')$ y como f es inyectiva tenemos que $x = x'$
Luego ambos x, x' (que son el mismo) estan en A y ambos están en B
Resumiendo $x \in A \cap B$ y por ende $y = f(x) \in f(A \cap B)$
Luego $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
2 $\Rightarrow$ 3) Por ej anteriór sabemos que $A \cap B \subseteq f^{-1}(f(A \cap B))$. Probemos la otra inclusión
Sea $x \in f^{-1}(f(A \cap B))$ entonces $f(x) \in f(A \cap B)$
Y como $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ tenemos $f(x) \in f(A) \cap f(B)$
Entonces $f(x) \in f(A)$ luego $x \in A$ por otro lado $f(x) \in f(B)$ luego $x \in B$
Finalmente $x \in A \cap B$
3 $\Rightarrow$ 4) Supongamos que $f(A) \cap f(B) \neq \emptyset$ luego $\exists y \in f(A) \cap f(B)$
Luego tenemos $y \in f(A)$ entonces $\exists x \in A$ tal que $f(x) = y$
Y también $y \in f(B)$ entonces $\exists x' \in B$ tal que $f(x') = y$
Entonces tenemos $x' = f^{-1}(f(x')) = f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x$
Luego $x = x'$ por lo que $x \in A \cap B$ lo que es absurdo
Provino de suponer $f(A) \cap f(B) \neq \emptyset$
Entonces $f(A) \cap f(B) = \emptyset$
4 $\Rightarrow$ 5) Primero asumamos $A \neq B$ si fueran iguales es trivial
$\supseteq$) Sea $y \in f(A) \setminus f(B)$
Luego $y \in f(A)$ entonces $\exists x \in A$ tal que $f(x) = y$
Por otro lado $y \notin f(B)$ entonces $\nexists x \in B$ tal que $f(x) = y$
Luego $x \in A \setminus B$ por lo que $f(x) \in f(A \setminus B)$
$\subseteq$) Sea $y \in f(A \setminus B)$ luego $\exists x \in A \setminus B$ tal que $f(x) = y$
Luego $x \in A$ por ende $f(x) \in f(A)$

Y tambien $x \notin B$ por ende $\{x\} \cap B = \emptyset$

Por hipótesis (4) sabemos $\{f(x)\} \cap f(B) = f(\{x\}) \cap f(B) = \emptyset$ entonces $f(x) \notin f(B)$

Finalmente $y = f(x) \in f(A) \setminus f(B)$

$\square$

7) Para cada subconjunto S de un conjunto A dado , se define la función característicade S, $X_S : A \to 0, 1$, por

$$f(a) = \begin{cases} 1 & a \in S \\ 0 & a \notin S \end{cases}$$

i. $X_{S\cap T} = X_S \cap X_T$

Proof. Sea $a \in S \cap T$ entonces $X_{S\cap T}(a) = 1$

Ademas $a \in S$ y $a \in T$ luego $X_S(a).X_T(a) = 1$

Si $a \notin S \cap T$ luego $a \notin S$ y ademas $a \notin T$ con esto sale trivialmente $\square$

ii. $X_{A\setminus S} = 1 - X_S$

Proof. Sea $a \in A \setminus S$ tenemos $X_{A\setminus S}(a) = 1$

Además $a \in A$ y $a \notin S$ por lo tanto $1 - X_S(a) = 1$

Sea $a \notin A \setminus S$ luego $X_{A\setminus S}(a) = 0$

Por otro lado $a \in S$ entonces $1 - X_S(a) = 0$ $\square$

iii. $X_S + X_T = X_{S\cup T} + X_{S\cap T}$

Caso I) $a \in S \setminus T$ luego $a \in S \cup T$ y por otro lado $A \notin S \cap T$ entonces $X_S(a)$

Luego $X_s(a) + X_T(a) = 1 + 0 = X_{S\cup T}(a) + X_{S\cap T}(a)$

Caso II) $a \in S$ y $a \in T$ entonces $a \in S \cup T$ sale de la misma forma

Caso III) $a \notin S$ y $a \in T$ es exactamente igual que el Caso i)

Caso IV) $a \notin S$ y además $a \notin T$ entonces $a \notin S \cup T$ y también $a \notin S \cap T$ es tambien trivial

9) Sea $\sim$ una relación de equivalencia sobre un conjunto A. Para cada $a \in A$ se define el conjunto $S_a = \{b \in A : a \sim b\}$. Luego vale:

i. Para todo par de elementos $a_1, a_2 \in A$ vale: $S_{a_1} = S_{a_2} \quad \text{o} \quad S_{a_1} \cap S_{a_2} = \emptyset$

Proof. Es trivial ver que si se da alguno de los dos el otro no se da.

Veamos para completar que si uno no se da entonces el otro si se da.

$S_{a_1} \cap S_{a_2} \neq$ tomamos el x que esta en la intersección

Luego $x \sim a_1$ y por otro lado $x \sim a_2$

Luego sea $y_1 \in S_{a_1}$ tenemos $y_1 \sim a_1 \sim x \sim a_2$ entonces $y_1 \in S_{a_2}$

Y sea $y_2 \in S_{a_2}$ tenemos $y_2 \sim a_2 \sim x \sim a_1$ entonces $y_2 \in S_{a_1}$

Finalmente es evidente que $S_{a_1} \neq S_{a_2}$ implica la intersección es vacía , si la intersección no fuera vacia tendriamos el argumento de arriba para ver que $S_{a_1} = S_{a_2}$ y esto sería absurdo □

ii. $A = \bigcup_{a \in A} S_a$

Esto es trivial, dada la definición del ejercicio , no veo que haya que resolver nada

10) Sea A tal que $\#A = n$ luego $\#\mathcal{P}(A) = 2^n$
Usaremos inducción

- $n = 1$, Luego $A = \{x\}$ tiene un elemento entonces $P(A) = \{\emptyset, x\}$ esto cumple el caso base.
- $n \Rightarrow n+1$ Sea A tal que $\#A = n$. Entonces $\exists x \in A$ Luego tomemos $B = A \setminus \{x\}$

  Por un lado sabemos ,por hipótesis, que $\#B \setminus \{x\} = n$ entonces tenemos $g : B \setminus \{x\} \to \mathbb{I}_n$ biyectiva. Además es evidente que $\#\{x\} = 1$

  Luego existe tenemos $f : A \to \mathbb{I}_{n+1}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & x \in B \setminus \{x\} \\ n+1 & x \in \{x\} \end{cases}$$

  Sabemos que f biyectiva por como fue construida

  Luego $\#A = \#\mathbb{I}_{n+1} = n+1$

11) Sea A un conjunto. Probar que son equivalentes:

1. A es infinito
2. $\forall x \in A$, existe una función $f_x : A \to A \setminus \{x\}$ biyectiva
3. para todo $\{x_1, x_2 \dots x_n\} \subset A$, existe una función $f_{\{x_1, x_2, \dots, x_n\}} : A \to A \setminus \{x_1, x_2 \dots x_n\}$ biyectiva

Proof. $1 \Rightarrow 2$) Como A es numerable $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

Sea $x \in A$ luego $x = x_j$ para algún $j \in \mathbb{N}$.

Luego tenemos una función $g_x : A \to A_{reordenado} = A$ biyectiva

$$g_x(x_n) = \begin{cases} x_1 & n = j \\ x_j & n = 1 \\ x_n & n \neq j, n \neq 1 \end{cases}$$

Luego sea $f : A \to X \setminus \{x_1\}$ dada por $f(x_n) = x_{n+1}$ es biyectiva

Finalmente tenemos $f \circ g_x : A \to A \setminus \{x\}$ que es biyectiva por composición

□

$2 \Rightarrow 3$) Para cada x_n Tengo $f_{x_n} : A \to A \setminus \{x_n\}$ biyectiva.

Componiendo todas estas funciones tengo una $f : A \to A \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ biyectiva

$3 \Rightarrow 1$) Suponemos que A es finito , pero entonces tenemos $A \setminus \{x\} \subseteq A$ y ademas tenemos $f : A \to A \setminus \{x\}$ inyectiva. Luego por lema probado en teórica $A = A \setminus \{x\}$ lo que es absurdo
Ej 12) Sea A un conjunto numerable y B un conjunto. Supongamos que existe un $f : A \to B$ sobreyectiva. Entonces B es a lo sumo numerable

Proof. Sabemos que A numerable luego $A \sim \mathbb{N}$

Juntando todo $\mathbb{N} \sim A \twoheadrightarrow B$ donde la doble flecha indica sobreyectividad

Entonces existe $g : \mathbb{N} \to B$ sobreyectiva

Luego para cada $b \in B$ existe un único conjunto (si no g no estaría bien definida) tal que

$S(b) = \{i \in \mathbb{N} : g(i) = b\}$ que sabemos no es vacío por que g es sobreyectiva osea que todo $b \in B$ tiene preimagen. También sabemos que cada $S(b)$ tiene mínimo por que es un subconjunto de los naturales.

Ahora considero $\mathbb{N}' = \bigcup_{b \in B} min(S(b))$ esta unión es trivialmente disjunta y vemos que $\mathbb{N}' \subseteq \mathbb{N}$

Y ahora podemos construir una función $g' : B \to \mathbb{N}'$ dado por $g'(b) = min(S(b))$

Esta es evidentemente sobreyectiva , por que para cada $x \in \mathbb{N}'$ sabemos que x es mínimo de un único conjunto dado por $b \in B$

g' es inyectvia. Sea $b, b' \in B$ tal que $g'(b) = g'(b')$ luego $min(S(b)) = min(S(b'))$ como los mínimos son únicos y cada $S(b)$ es disjunto con cualquier otro entonces $b = b'$

Luego g' es biyectiva entonces $B \sim \mathbb{N}' \subseteq \mathbb{N}$

Por ende $\#B \leq \#\mathbb{N}$

□

Ej 13)

- $\mathbb{Z}_{\leq -1}$: Consideremos la funcion $f : \mathbb{Z}_{n \leq -1} \to \mathbb{N}$ dada por $f(x) = |x|$ que es trivialmente biyectiva

- $\mathbb{Z}_{\geq -3}$: Sea $f : \mathbb{Z}_{\geq -3} \to \mathbb{N}$ dada por $-1 \mapsto 1$, $-2 \mapsto 2$, $-3 \mapsto 3$, $0 \mapsto 4$ y despues $x \mapsto x + 4 \quad \forall x \geq 1$. f es biyectiva

- $3\mathbb{N}$: Tenemos la funcion $f : 3\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $f(x) = \frac{x}{3}$ trivialmente biyectiva

- $\mathbb{Z}$: Tenemos $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ biyectiva

$$f(x) = \begin{cases} -2x & x < 0 \\ 2x+1 & x \geq 0 \end{cases}$$

- $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$: Sea $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $f(n,m) = 2^n 3^m$ es inyectiva por unicidad de factorización en primos. Luego sabemos que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es a lo sumo numerable como además sabemos que es infinito , entonces es numerable

- Sea la función $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 2^y 3^{-2x} & x < 0 \\ 2^y 3^{2x+1} & x \geq 0 \end{cases}$$

  Es trivialmente inyectiva devuelta por unicidad de descomposicion en primos y como $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ es evidentemente infinito entonces es numerable

- $\mathbb{Q}$: Usando una función casi igual que la de arriba podemos ver que $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ es numerable.

  Consideremos $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ dada por $f(x,y) = \frac{x}{y}$ sobreyectiva por que cualquier racional se escribe como division de enteros. Entonces $\mathbb{Q}$ es a lo sumo numerable y ademas es infinito , entonces es numerable

- $\mathbb{N}^n$: To mamos $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ dada por $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \ldots p_n^{a_n}$ con p_n primos distintos dos a dos. f es inyectiva. Luego usando el mismo argumento que antes tenemos que $\mathbb{N}^n$ con $n \in \mathbb{N}$ es numerable

Ej 14)

i. Sean A y B conjuntos contables entonces $A \cup B$ es contable.

Proof. Aquí voy a asumir siempre que A y B son disjuntos , si no lo fueran simplemente se podría usar un $A' = A \setminus B$ para que la intersección no moleste y probariamos todo para $A' = A \setminus B$ sabiendo que $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$ y por lo tanto tienen el mismo cardinal

Si ambos son finitos es evidente que su union es finita.

Si por ejemplo A es finito y B numerable. Sea $\#A = n$. Luego tenemos $g : A \to \mathbb{I}_n$ biyectiva

Por otro lado como B es numerable tenemos $h : B \to \mathbb{N}$ biyectiva

$f : A \cup B \to \mathbb{N}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & x \in A \\ h(x) + n & x \in B \end{cases}$$

que es sobreyectiva , principalmente por ser composicion de sobreyectivas

Si ambos son numerables devuelta aprovechando $f : A \to \mathbb{N}$ sobreyectiva y $g : B \to \mathbb{N}$ sobreyectiva.

Luego $h : A \cup B \to \mathbb{N}$

$$f(x) = \begin{cases} 2g(x) & x \in A \\ 2f(x) + 1 & x \in B \end{cases}$$

Es evidentemente inyectiva, mas considerando que A es disjunto con B entonces podemos usar sus funciones ya biyectivas para verlo facilmente, también saldría tambien si no lo fueran!

Doy un ejemplo, sean $a, a' \in A$ tal que $f(a) = f(a')$ entonces $2g(x) = 2g(x') \Rightarrow g(x) = g(x')$ como g biyectiva $x = x'$

Biyectiva , se pueden ver casos pares e impares , si $x \in \mathbb{N}$ es par seguro existe un $x' \in$ tal que $2x' = x$ y luego como x' es natural seguro tiene preimagen dada por g considerando que g es biyectiva

$\square$

ii. Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de conjuntos contables entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ es contable

Devuelta vamos a considerar que son disjuntos dos a dos.

Unión de numerables finitos disjuntos es trivialmente numerable

Veamos unión numerable de numerables disjuntos (insisto si no lo fueran se reescriben convenientemente sacando las intersecciones, si alguna intersección fuese algun conjunto entero entonces no aportaba nada unirlo de todas maneras)

Sea A_n numerable existe $f_n : \mathbb{N} \to A_n$ sobreyectiva

Usando esto tenemos $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ dada por $g(n, m) = f_n(m)$

Esta es inyectiva, si fijas un n entonces tenes f_n que es inyectiva entonces

Sean $m, m' \in \mathbb{N}$ sabemos $f_n(m) = f_n(m') \iff m = m'$

Si los n son distintos $f_{n'}(m) \subseteq A_{n'} \neq A_n \supseteq f_n(m)$ entonces $f_{n'}(m) \neq f_n(m) \quad \forall m \in \mathbb{N}$

Sea $y \in \bigcup A_n$ luego $y \in A_i$ para algún $i \in \mathbb{N}$ entonces tenemos $(i, f_i^{-1}(y)) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ que es claramente preimagen de y

Luego $\bigcup A_n$ es numerable

iii. Sea A un conjunto finito y $S = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} A^m$ entonces $\#S = \aleph_0$

Como A es finito sabemos que A^m es finito para cualquier $m \in \mathbb{N}$ además es evidente que son disjuntos para distntos m. Luego por ii) tenemos que S es numerable ($\#S = \aleph_0$)

Notemos que dado cualquier alfabeto hay mas números reales que palabras para nombrarlos. Esto vale por que dado un conjunto A de todos los carácteres posibles si hacemos $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} A^m$ eso seria todas las palabras posibles de todas las longitudes posibles y por parte ii) esto es numerable

Ej 15) Sean A y B conjuntos disjuntos, A infinito y B numerable entonces:

(a) Existe una biyeccion entre $A \cup B$ y A

Proof. Simple sabemos que como A es infinito existe $Y \subseteq A$ tal que Y es numerable Luego tenemos que

$$A \cup B = [(A \setminus Y) \cup Y] \cup B = (A \setminus Y) \cup (Y \cup B)$$

Luego como unión de numerables es numerable $Y \cup B \sim Y$
Juntando todo tenemos

$$A \cup B = [(A \setminus Y) \cup Y] \cup B = (A \setminus Y) \cup (Y \cup B) \sim (A \setminus Y) \cup Y = A$$

□

(b) Si A no numerable y $B \subseteq A$ numerable, existe una biyección entre $A \setminus B$ y A

Proof. Sabemos que B es numerable luego podemos escribirlo como $B = \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$
De este modo es facil ver que existe $f : B \to \mathbb{N}_{pares}$ dada por $f(b_n) = b_{2n}$ biyectiva
Luego podemos armar $g : X \to (X \setminus B) \cup B_{pares}$

$$g(x) = \begin{cases} x & x \in x \notin B \\ f(x) & x \in B \end{cases}$$

Biyectiva. Entonces $X \sim (X \setminus B) \cup B_{pares} \subseteq X$ □

(c) Observación. Como $\mathbb{R}$ es no numerable y $\mathbb{Q}$ es numerable $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \sim \mathbb{R}$ entonces $\mathbb{R} \sim \mathbb{I}$

16) El conjunto de todos los polinomios de coeficientes racionales es numerable.

Proof. Por un lado tenemos una $f : \mathbb{Q}^{n+1} \to \mathbb{Q}[X]_{\leq n}$ dada por

$$f(q_0, q_1, \ldots, q_n) = \sum_{j=0}^{n} q_j X^j$$

que es trivialmente biyectiva.
Por otro lado sabemos $\mathbb{Q}^{n+1} \sim \mathbb{N}$. Luego $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}^{n+1} \sim \mathbb{Q}[X]_{\leq n}$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$ fijo
Entonces el conjunto de polinomios de algún grado fijo es numerable.
Finalmente

$$\mathbb{Q}[X] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Q}[X]_{\leq n}$$

Como es una unión numerable de numerables, $\mathbb{Q}[X]$ es numerable

□

17) Se dice que un numero complejo z es *albegraico* si existen enteros $a_0, \ldots, a_n$ no todos nulos, tales que

$$a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n = 0$$

1. El conjunto de todos los numeros algebráicos es numerable

   Proof. Por la definición sabemos que los números algebráicos son raices complejas de algun polinómios de coeficientes enteros

   Ahora sea $f \in \mathbb{Q}[X]$ no nulo, el conjunto de las raices complejas de ese polinómio $S(f) = \{z \in C : f(z) = 0\}$

   Es finito, a lo sumo $gr(f)$ (puede ser 0 inclusive)

   Luego

   $$\mathcal{A} = \bigcup_{f \in \mathbb{Q}[X] \setminus \{0\}} S(f)$$

   Donde $\mathcal{A}$ es el conjunto de los números algebráicos

   Y como $\mathcal{A}$ es unión de numerables conjuntos contables y disjuntos es a lo sumo nuerable

   Pero además es facil ver que por ejemplo los racionales son todos algebraicos (ejercicio para el lector)

   Luego hay infinitos numeros algebráicos, entonces $\mathcal{A}$ es numerable

   □

2. Existen numeros reales que no son algebraicos (Estos se llaman *trascendentes*)

   Por insciso anteriór sabemos que hay numerables *algebraicos* sin embargo hay más que numerables *reales* por ende debe haber reales que no son algebráicos

18) Sea $X \subseteq \mathbb{R}_{>0}$ un conjunto de números reales positivos. Supongamos que existe una constante positiva C tal que para cualquier subconjuntos finito $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq X$ vale $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq C$ entonces X es contable

Proof. Sea $S = \{p : p = \sum_{i=1}^{n} x_i \leq C \quad x_i \in X\}$ luego C es supremo de S pero entonces tenemos una sucesion de S , $p_n \in S \quad \forall n \in \mathbb{N}$ que converge a C de la forma

$p_1 = x_1 + \cdots + x_n$ suma finita de elmentos de X tal que la suma es menor que C
$p_2 = r_1 + \cdots + r_n$ devuelta suma finita de elementos de X
$\ldots$
$p_n = z_1 + \cdots + z_n$ lo mismo que antes

Ahora afirmamos que las $x, r, \ldots, z$ cubrieron todo $x \in X$, si no fuera cierto tendria un $p \in X$ que no está en alguna suma. Pero entonces podemos armar otra sucesión:
$a_1 = p_1 + p$
$a_2 = p_2 + p$
$\ldots$
$a_n = p_n + p$

Y sabemos que cada termino de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S$ por que al fin y al cabo siguen siendo sumas finitas de elementos de X por lo que su resultado tiene que ser menor que C

Pero por otro lado $a_n \to C + p > C$ lo que es absurdo por que C es supremo.

Luego , no existía dicho p por ende en esas sumas contemplamos todos los elementos de X pero entonces tenemos numerables elementos (términos de la sucesión) de finitos elementos (sumas de cada término de la sucesión) eso es una unión numerable de finitos

$\Rightarrow X$ es a lo sumo numerable

$\square$

19) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función monótona entonces

$$\#(\{x \in \mathbb{R} : f \text{ no es continua }\}) \leq \aleph_0$$

Proof. Sin perdida de generalidades tomamos f monótona creciente y consideramos $D(f)$ el conjunto de discontinuidades de f

Tomemos un $x \in \mathbb{R}$ luego podemos definir dos conjuntos no vacíos

$$L_x = \{f(y) : y \in \mathbb{R}, y < x\} \qquad R_x = \{f(z) : z \in \mathbb{R}, z > x\}$$

L_x está acotado superiormente por $f(x)$ y R_x está acotado inferiormente por $f(x)$

Entonces existen y podemos tomar $l_x = \sup(L_x)$ y tambien $r_x = \inf(R_x)$

Ahora vamos a probar que

$$(1) \quad l_x = r_x \Rightarrow f \text{ continua en x}$$

(2) Por un lado sabemos que $l_x \leq f(x) \leq r_x$

Ahora supongamos que $r_x = l_x$ luego $f(x) = r_x = l_x$

Sea $\epsilon > 0$, como $f(x) = \sup(L_x) \Rightarrow \exists y \in \mathbb{R}, \quad y < x$ tal que $f(x) - \epsilon \leq f(y) \leq f(x)$

Misma idea como $f(x) = \inf(R_x) \Rightarrow \exists z \in \mathbb{R}, \quad z > x$ tal que $f(x) \leq f(z) \leq f(x) + \epsilon$

Ahora tomemos $\delta = \min\{x - y, z - x\}$ y consideremos $t \in (x - \delta, x + \delta), \quad t \neq x$

Supongamos primero $t \in (x - \delta, x)$ luego $y = x - (x - y) \leq x - \delta < t < x$

Entonces $y < t < x$ como f es creciente$f(x) - \epsilon < f(y) \leq f(t) \leq f(x)$

Repitiendo esta idea pero usando con $t \in (x, x+\delta)$ tenemos $z = x+(z-x) \geq x+\delta > t > x$

Nuevamente como f creciente $f(x) + \epsilon > f(z) \geq f(t) \geq f(x)$

Luego $f(x) - \epsilon < f(t) < f(x) + \epsilon \quad \forall t \in (x - \delta, x + \delta)$

O lo que es lo mismo $f(B_\delta(x)) \subseteq B_\epsilon(f(x))$ equivalentemente f es continua

Ahora usando esto tenemos que si

$$f \text{ discontinua en } x \Rightarrow l_x \neq r_x$$

Y por (2) tenemos

$$f \text{ discontinua en } x \Rightarrow l_x < r_x$$

Entonces ahora sabemos que para cada discontinuidad o lo mismo para cada $x \in D(f)$

Tenemos un intervalo abierto $I_x = (l_x, r_x)$

Sabiendo esto vamos a ver que

$$x, y \in D(f) \Rightarrow I_x \cap I_y = \emptyset$$

Sin pérdida de generalidades sea $x < y$. Para ver que $I_x \cap I_y = \emptyset$ basta ver que $r_x \leq l_y$

Supongamos que no, luego $r_x > l_y$ ahora tomemos z promedio de x e y, $z = \frac{1}{2}(x - y)$

Tenemos $x < z < y$ como f es creciente $r_x \leq f(z) \leq l_y < r_x$ lo que es absurdo

Luego para cada discontinuidad tenemos un ÚNICO intervalo que es disjunto con cualquier otro o lo que es lo mismo tenemos una función biyectiva entre cada discontinuidad y un intervalo abierto de $\mathbb{R}$

Finalmente como sabemos que tenemos a lo sumo numerables intervalos abiertos en $\mathbb{R}$ entonces tenemos a lo sumo numerables discontinuidades

Esto último es trivial, y queda como ejericio para el lector. Pero para dar una idea, si tenemos conjutnos disjuntos de $\mathbb{R}$ por densidad sabemos que en cada uno de ellos hay seguro un racinal y este racional no se repite en otro , si no no serían disjuntos. Luego sabemos que para cada conjunto podemos tomar un racional y como hay numerables racionales , la cantidad de conjuntos es a lo sumo numerable $\square$

20) Sea A un conjunto numerable, el conjunto de las partes finitas de A (es decir, el subconjunto de $\mathcal{P}(A)$ formado por los subconjuntos finitos de A) es numerable

Proof. Primero veamos cuantos subconjuntos de cardinal $n \in \mathbb{N}$ tenemos.

Para eso tomemos la funcion $\phi : \mathcal{P}_n(A) \to A^n$ dada por $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \mapsto (a_1, \ldots, a_n)$ donde $\mathcal{P}_n(A)$ es subconjuntos de $\mathcal{P}(A)$ donde solo hay conjutnos de cardinal n. La función es claramente inyectiva , por que mover mover elementos de un conjunto da el mismo conjunto y cambiar elementos da diferentes n-uplas. Y sabemos que $\#A^n = \aleph_0$ por que A es numerable, luego $\#\mathcal{P}_n(A) \leq \aleph_0$ Entonces

$$\mathcal{P}_{finitas}(A) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_n(A)$$

Que es unión numerable de numerables entonces es numerable. Acá faltaría agregar el conjunto $\{\emptyset\}$ pero sigue valiendo obviamente (ejericicio para el lector si no le parece obvio) $\square$