Práctica 2

Sea G un grupo y sean X, Y subconjuntos no vacíos de G. Se define

$X \cdot Y = XY = \{x \cdot y : x \in X, y \in Y\}$.

Si $x \in G$ escribimos $xH = \{x\}H$.

1. Sea G un grupo y H, K subgrupos de G.
   (a) Probar que si H ó K es normal, entonces HK es un subgrupo.
   (b) Si H y K son normales, entonces HK es un subgrupo normal.
   (c) Dar un ejemplo de un grupo G y dos subgrupos H y K tales que HK no sea un subgrupo.

2. Decidir cuáles de los siguientes subgrupos son normales
   (a) $G = \mathbb{D}_4$, $H = \{1, r, r^2, r^3\}$.
   (b) $G = GL_2(\mathbb{C})$, $H = \mathcal{H}$.
   (c) $G = GL_n(\mathbb{R})$, $H = SL_n(\mathbb{R})$.

3. Sea G es un grupo abeliano. Probar que todo subgrupo es normal.
   Probar que el grupo $\mathcal{H}$ es un contraejemplo para la recíproca de esta afirmación.

4. Dados los siguientes subgrupos de $\mathbb{S}_4$

$$H = \{id, (1\,2)(3\,4)\} \quad K = \{id, (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\}$$
$$U = \langle (1\,2\,3\,4) \rangle$$

   (a) Probar que $H \lhd K$, $K \lhd \mathbb{A}_4$ y $K \lhd \mathbb{S}_4$.
   (b) Probar que H no es normal en $\mathbb{A}_4$ ni en $\mathbb{S}_4$.
   (c) Determinar si $U \lhd \mathbb{S}_4$.

5. Encontrar todos los subgrupos normales de G.
   (a) $G = \mathbb{D}_n$, donde n es impar.
   (b) $G = \mathbb{D}_n$, donde n es par.

6. Sean G y G' grupos y sea $f : G \to G'$ un morfismo.
   (a) Probar que $\ker(f) \lhd G$
   (b) ¿Es $\mathrm{im}(f) \lhd G'$?
   (c) Probar que si H es un subgrupo normal de G, entonces existe un grupo G' y un epimorfismo $f : G \longrightarrow G'$ tal que $\ker(f) = H$.

7. Sea G un grupo y H un subgrupo tal que $|G : H| = 2$. Probar que $H \lhd G$.

8. Hallar un sistema de representantes de G módulo S en los siguientes casos y determinar $|G : S|$
   (a) $G = \mathbb{R}$, $S = \mathbb{Z}$
   (b) $G = \mathbb{D}_n$, $S = \langle r \rangle$
   (c) $G = GL_n(K)$, $S = SL_n(K)$, donde K es un cuerpo.
   (d) $G = \mathbb{C}^\times$, $S = S^1$

9. Calcular todos los cocientes por subgrupos normales de $\mathbb{S}_3$, $\mathbb{D}_4$ y $\mathcal{H}$. Es decir, caracterizar todos los grupos que pueden obtenerse como cocientes de los grupos mencionados.

10. Probar que

    (a) $\dfrac{\mathbb{C}^\times}{\mathbb{R}_{>0}} \simeq S^1$
    (b) $\dfrac{\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}_m$
    (c) $\dfrac{\mathbb{Q}^\times}{\mathbb{Q}_{>0}} \simeq G_2$
    (d) $\dfrac{S^1}{G_n} \simeq S^1$
    (e) $\dfrac{G_n}{G_m} \simeq G_{\frac{n}{m}}$ para $m \mid n$

11. Verificar que $H \triangleleft G$ y calcular G/H

    (a) $G = \mathbb{S}_4, \quad H = \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$.
    (b) $G = \mathbb{D}_6, \quad H = \{1, r^3\}$.

12. (a) Sea $f : G \longrightarrow G'$ un epimorfismo y sea $H \triangleleft G$. Si $H' = f(H)$, probar que
        i. $H' \triangleleft G'$
        ii. Si f es un isomorfismo, $G/H \simeq G'/H'$
    (b) Si $G \simeq G'$, $H \simeq H'$, $H \triangleleft G$ y $H' \triangleleft G'$, ¿ es $G/H \simeq G'/H'$?

13. Sea G un grupo y sean H, K subgrupos normales de G. Sean π_H y π_K las proyecciones de G en H y K respectivamente. Probar que la aplicación

    $$f : G/(H \cap K) \to G/H \times G/K$$

    definida por $f(\overline{x}) = (\pi_H(x), \pi_K(x))$ es un monomorfismo.

14. Sea G un grupo. Sea $a \in G$ y sea $I_a : G \longrightarrow G$ definida por $I_a(g) = a.g.a^{-1}$.

    (a) Probar que I_a es un automorfismo de G (se denomina automorfismo interior de G).
    (b) Probar que la aplicación $I : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(G)$, definida por $I(a) = I_a$, es un morfismo de grupos y verificar que

    $$\ker(I) = \{a \in G \, : \, ag = ga, \forall g \in G\}.$$

    Este subgrupo se llama el *centro de* G y lo notamos $\mathcal{Z}(G)$.
    (c) Probar que $\mathrm{im}(I)$ es un subgrupo normal de $\mathrm{Aut}(G)$. A este grupo lo notaremos $\mathrm{Int}(G)$.
    (d) Deducir que $G/\mathcal{Z}(G) \simeq \mathrm{Int}(G)$.

15. Hallar $\mathcal{Z}(G)$ (el centro de G) en cada uno de los siguientes casos:

    (a) $G = \mathbb{D}_n$
    (b) $G = \mathbb{S}_4$
    (c) $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \, : \, a, b, c \in \mathbb{Z}_3 \right\}$
    (d) $G = \mathcal{H}$
    (e) $GL_n(\mathbb{R})$
    (f) $SL_n(\mathbb{R})$

16. Sea G un grupo. Definimos $[G, G]$, el *conmutador de* G, como el subgrupo de G generado por todos los elementos de la forma $[x, y] = ghg^{-1}h^{-1}$, $g, h \in G$.

(a) Probar que $[G,G]$ es un subgrupo normal de G.

(b) Probar que $G/[G,G]$ es un grupo abeliano.

(c) Sea $f: G \to K$ un morfismo donde K es un grupo abeliano. Probar que f se factoriza unívocamente por $G/[G,G]$, esto es, existe un único morfismo $\overline{f}: G/[G,G] \to K$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & K \\ G/[G,G] \arrow[ur, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

(d) Sea $H \subset G$ un subgrupo. Probar que

$$[G,G] \subseteq H \Leftrightarrow H \lhd G \text{ y } G/H \text{ es abeliano.}$$

17. Hallar $[G,G]$ en cada uno de los siguientes casos

 (a) $G = \mathbb{D}_n$

 (b) $G = \mathcal{H}$

 (c) $G = \mathbb{S}_4$

 (d) $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \ a, b, c \in \mathbb{Z}_2 \right\}$

18. Probar que los únicos grupos no abelianos de orden 8 son $\mathcal{H}$ y $\mathbb{D}_4$.

19. Sea p un primo mayor o igual que 3. Si $|G| = 2p$ entonces G es abeliano o $G \simeq \mathbb{D}_p$.

20. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas.

 (a) Si $|G : H| = 2$ y H es abeliano entonces $H \subset \mathcal{Z}(G)$.

 (b) Si $|G| = n$ y k divide a n, entonces G tiene un elemento de orden k.

 (c) Si $|G| = n$ y k divide a n, entonces G tiene un subgrupo de orden k.

 (d) Si $\forall x \in G$, se tiene que $ord(x) < \infty \Rightarrow |G| < \infty$.

 (e) Si $p/|G|$, entonces existe H subgrupo tal que $|G : H| = p$.

 (f) Los elementos de orden finito de un grupo G forman un subgrupo.