Cálculo Avanzado - Sucesiones y series de funciones 2

Primer cuatrimestre de 2020

Daniel Carando

Dto. de Matemática - FCEN - UBA

$f_n : X \to \mathbb{R}$ condic. que aseguren que

↳ e.m. compacto

$(f_n)_n$ tiene subsuc. unif. conv.

$\Updownarrow$

conv. en $\underline{(C(X), \| \, \|_\infty)}$

$\underbrace{(f_n)_n \subset A \text{ compacto } \checkmark}_{(f_n)_n \subset A}$

Si A no es compacto pero $\bar{A}$ sí.

TAMBIÉN $(f_n)_n$ tiene subsuc. unif conv.

<u>VEREMOS:</u> $A \subset \underbrace{C(X)}_{\text{COMPLETO}}$, $\bar{A}$ compacto

$\Updownarrow$

A T. a.

Queremos entender los conj. tt. a. de $C(X)$
(X compacto)

"$A \subset C(X)$ $\underbrace{\text{tt. a.}}$ $\Leftrightarrow$ A ....."

Teorema

$= \{f : X \to \mathbb{R} \text{ cont}\}$.

Sea X un espacio métrico compacto y $A \subset C(X)$ tt.a. Entonces

(1) Existe M tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $f \in A$ y todo $x \in K$.

(2) Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $d(x, y) < \delta$, entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ para toda $f \in A$. $\hookrightarrow x, y \in X$

Obs (1) $\leftrightarrow$ $A \subset B(0, M)$ (A e acot) $\to$ ejer de la guía.

(2) $\leftrightarrow$ "UNIF. EQUICONT"

DEM TEO: (1) Dado $\varepsilon = 1 \to \exists\, f_1, \dots, f_n \in A$ /

$A \subset \bigcup_{j=1}^{n} B(f_j, 1)$ $\boxed{(\text{si } f \in A \to \exists\, j_0 / \|f - f_{j_0}\|_\infty < \varepsilon)}$

$\underbrace{M_0 = \max_{1 \leq j \leq n} \|f_j\|_\infty}$ $\|f\|_\infty \leq \|f_{j_0} + f - f_{j_0}\| \leq \|f_{j_0}\| + \|f - f_{j_0}\|$

$< M_0 + 1 \quad \forall f \in A$

$\to |f(x)| \leq \overbrace{M_0 + 1}^{M} \quad \forall x \in X, \ \forall f \in A.$ ✓

(2) dado $\varepsilon > 0$, queremos δ que cumpla lo del enunc.

Dado $\varepsilon > 0$, sean $f_1, \dots, f_N$ / $A \subset \underbrace{\bigcup_{j=1}^{N} B(f_j, \varepsilon/3)}$.

Cada f_j es unif cont (es cont. en un compacto).

$\Rightarrow \exists\, \delta_j > 0$ / $d_X(x,y) < \delta_j \Rightarrow |f_j(x) - f_j(y)| < \varepsilon/3$

$\underline{\delta = \min\{\delta_j : j = 1, \dots, N\}}$;

Si $\underline{d(x,y) < \delta}$ y $\underline{f \in A}$, sea f_{j_0} / $\|f - f_{j_0}\|_\infty < \varepsilon/3$

$$\underbrace{|f(x) - f(y)|} \leq \underbrace{|f(x) - f_{j_0}(x)|}_{\substack{\leq \|f - f_{j_0}\|_\infty \\ < \varepsilon/3}} + \underbrace{|f_{j_0}(x) - f_{j_0}(y)|}_{< \varepsilon/3 \ (d(x,y) < \delta \leq \delta_{j_0})} + \underbrace{|f_{j_0}(y) - f(y)|}_{\substack{\wedge \\ \|f - f_{j_0}\| < \varepsilon/3}}$$

$$\underline{< \varepsilon}.$$

Equicontinuidad

Definición

Una familia $\mathcal{F}$ de funciones de X en $\mathbb{R}$ se dice (uniformemente) equiacotada si existe $M > 0$ tal que para toda $f \in \mathcal{F}$ se tiene

$$\sup_{x \in X} |f(x)| \leq M.$$

$\mathcal{F} \subset$ "FUNCIONES"

$\Updownarrow$ $\Rightarrow$ $|f(x)| \leq M$ $\forall x \in X$ $\forall f \in \mathcal{F}$.

$\Updownarrow$ $\Rightarrow$ $\mathcal{F} \subset C(X)$ X comp.

$\|f\|_\infty \leq M$ $\forall f \in \mathcal{F}$.

Equicontinuidad

Definición

Una familia $\mathcal{F}$ de funciones de X en $\mathbb{R}$ se dice (uniformemente) equiacotada si existe $M > 0$ tal que para toda $f \in \mathcal{F}$ se tiene

$$\sup_{x \in X} |f(x)| \leq M.$$

Definición

Sean X e Y espacios métricos. Una familia $\mathcal{F}$ de funciones de X en Y es equicontinua en $x_0 \in X$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d_X(x, x_0) < \delta \implies \forall f \in \mathcal{F},\ d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

. El mismo δ les sirve a todas las $f \in \mathcal{F}$.

. (PUNTUALMENTE) EQUICONT $\Leftrightarrow$ EQUICONT EN CADA x_0:

Dado $x_0 \in X$, dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ /

$d_X(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \quad \forall f \in \mathcal{F}$.

Equicontinuidad

Definición

Una familia $\mathcal{F}$ de funciones de X en $\mathbb{R}$ se dice (uniformemente) equiacotada si existe $M > 0$ tal que para toda $f \in \mathcal{F}$ se tiene

$$\sup_{x \in X} |f(x)| \leq M.$$

Definición

Sean X e Y espacios métricos. Una familia $\mathcal{F}$ de funciones de X en Y es equicontinua en $x_0 \in X$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d_X(x, x_0) < \delta \implies \forall f \in \mathcal{F},\ d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

Definición

Sean X e Y espacios métricos. Una familia $\mathcal{F}$ de funciones de X en Y es uniformemente equicontinua si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$d_X(x, y) < \delta \implies \forall f \in \mathcal{F},\ d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Observación

Una familia finita de funciones continuas en un punto $x_0 \in X$ es equicontinua en x_0.

Observación

Una familia finita de funciones continuas en un punto $x_0 \in X$ es equicontinua en x_0.

Proposición

Si X es compacto, entonces toda famila equicontinua de funciones de X a Y es uniformemente equicontinua.

EJERCICIO DE LA GUÍA

(IDEA SIMILAR A "cont en un comp. es unif. cont"!

Ejemplo

$\mathcal{F} \subset C[0,1]$,

UNIF EQUICONT

$\mathcal{F} = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R}$
$f \in C^1 /$
$|f'(t)| \leq 4$
$\forall t \in [0,1] \}$.

Dado $\varepsilon > 0$,

$$|f(s) - f(t)| \underset{\uparrow}{=} |f'(c_{s,t})| \, |s-t| \leq$$

POR LAGRANGE , $\exists \, c_{s,t}$ entre s y t /
$f(s) - f(t) = f'(c_{st})(s-t)$

$\leq 4|s-t| < \varepsilon$ tomando $\delta = \varepsilon/4$:
$(|s-t| < \delta = \varepsilon/4)$

$\forall s,t \, / \, |s-t| < \delta$
$\forall f \in \mathcal{F}$.

Teorema de Arzelà-Ascoli

Definición

Un conjunto $A \subset E$ es relativamente compacto si su clausura es compacta.

Definición

Un conjunto $A \subset E$ es relativamente compacto si su clausura es compacta.

Ejercicio

Un conjunto $A \subset E$ es relativamente compacto si y sólo si toda sucesión en A tiene subsucesión convergente (con límite no necesariamente en A).

$\Rightarrow)$ FÁCIL. $\underbrace{(f_n)_n}_{} \subset A \subset \underbrace{\bar{A}}_{}$

$\Leftarrow)$ $(g_n)_n \subset \bar{A}$ P/C/ n, $\exists f_n \in A$:

$\|f_n - g_n\| < 1/n$ $\left(B(g_n, 1/n) \cap A \neq \emptyset \right)$.

SIGAN - - -

Definición

Un conjunto $A \subset E$ es relativamente compacto si su clausura es compacta.

Ejercicio

Un conjunto $A \subset E$ es relativamente compacto si y sólo si toda sucesión en A tiene subsucesión convergente (con límite no necesariamente en A).

Ejercicio

Si E es completo, un conjunto $A \subset E$ es relativamente compacto si y sólo si es totalmente acotado.

USAR "COMPACTO $\Leftrightarrow$ COMPLETO + T.T.-A."

Teorema de Arzelà-Ascoli

Teorema de Arzelà-Ascoli

Cesare Arzelà

Giulio Ascoli

Teorema de Arzelà-Ascoli

Cesare Arzelà

Giulio Ascoli

Maurice Fréchet

Teorema de Arzelà-Ascoli

Sea X un espacio métrico compacto y $\mathcal{F} \subset C(X)$. Entonces, $\mathcal{F}$ es relativamente compacto si y sólo si $\mathcal{F}$ es equicontinua y equiacotada.

↳ UNIFORMEMENTE.

$\Rightarrow)$ $\mathcal{F}$ rel comp $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}$ tot. a. $\rightarrow$ 1º Teo de Leg

$\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ es unif equicont y equiacot

$\Leftarrow)$ MÁS ADELANTE

Teorema de Arzelà-Ascoli

Sea X un espacio métrico compacto y $\mathcal{F} \subset C(X)$. Entonces, $\mathcal{F}$ es relativamente compacto si y sólo si $\mathcal{F}$ es equicontinua y equiacotada.

Corolario

Si X es compacto y $(f_n)_n \subset C(X)$ es equicontinua y equiacotada, entonces tiene subsucesión uniformemente convergente.

$\mathcal{F} = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$. $\xrightarrow[AA]{}$ $\mathcal{F}$ es rel. comp.

$\Rightarrow$ $(f_n)_n \subset \mathcal{F}$ tiene subsuc. conv en $C(X)$

$\Rightarrow$ tiene subsuc. UNIF. CONV.

Teorema de Stone-Weierstrass

Teorema de Stone-Weierstrass

Teorema de Stone-Weierstrass

Marshal Stone

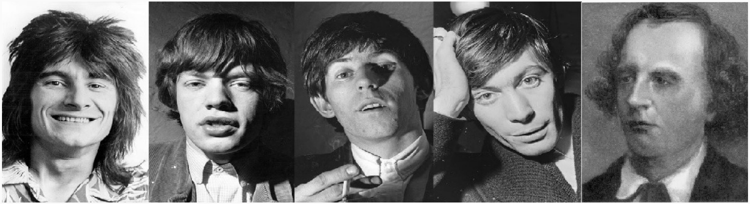
Karl Weierstrass

Teorema de Stone-Weierstrass

Marshal Stone

Karl Weierstrass

El Stone Weierstrass



Teorema de Stone-Weierstrass

Teorema de Stone-Weierstrass
Los polinomios son densos en las continuas.

Teorema de Stone-Weierstrass

Los polinomios son densos en las continuas.

Dada $f \in C([a,b])$, existe una sucesión $(p_n)_n$ de polinomios tal que

$$\sup_{t\in[a,b]} |f(t) - p_n(t)| \longrightarrow 0.$$

$\|f - p_n\|_\infty \to 0$

Obs: en $C[0,1]$, $\overline{[\{1, t, t^2, t^3, t^4, \ldots\}]} = C[0,1]$

$P = [\{1, t, t^2, t^3, \ldots\}]$ = "POLS" = comb. lin FINITAS de $1, t, t^2, t^3, \ldots$

$\overline{P}$ = lím de comb. lin fin de $\{1, t, t^2 \ldots\}$ = lím de POLS.

Pero $\overline{P} \neq$ "series de potencias"