UBA - exactas
Departamento de Matemática

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Cálculo Avanzado - Espacios normados 2

Primer cuatrimestre de 2020

Daniel Carando

Dto. de Matemática - FCEN - UBA

Seguimos con temas del capítulo 12 del apunte.

E normado

$\| \ \|_1$ y $\| \ \|_2$ normas en E son equiv.

si $d_1(x,y) = \|x-y\|_1$ y $d_2(x,y) = \|x-y\|_2$

d_1 y d_2 son equiv.

VIMOS: $\| \ \|_1$ y $\| \ \|_2$ equiv $\Leftrightarrow$

$\exists\, c, \tilde{c} > 0 \,/\, \tilde{c}\| \ \|_2 \leq \| \ \|_1 \leq c\| \ \|_2.$

Teorema
En $\mathbb{R}^n$ todas las normas son equivalentes.

DEM: veamos que toda norma $\| \ \|$ es equiv. a $\| \ \|_1$ $\quad \|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

Buscamos $c, \tilde{c} > 0$ / $c\|x\|_1 \le \|x\| \le \tilde{c}\|x\|_1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$.

$e_k = (\overbrace{0, 0, 1, 0 \dots 0}^{n}) \in \mathbb{R}^n$ $\quad (e_k)_j = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ 1 & j = k \end{cases}$

$\uparrow$
k

$x \in \mathbb{R}^n, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$

$\|x\| \le \|x_1 e_1\| + \|x_2 e_2\| + \dots + \|x_n e_n\| =$

$\uparrow$
Des triang

$= |x_1| \underbrace{\|e_1\|}_{\le M} + |x_2| \underbrace{\|e_2\|}_{\le M} + \dots + |x_n| \underbrace{\|e_n\|}_{\le M}$

$\le M(|x_1| + |x_2| \dots + |x_n|) = M\|x\|_1$ $\quad \|x\| \le \underbrace{M}_{\tilde{c}} \|x\|_1$

$\le M = \max_{1 \le j \le n} \|e_j\|$

FALTA: $\exists\, c>0 \,/\, \|x\| \geq c\|x\|_1$

Sea $g: (\mathbb{R}^n, \|\ \|_1) \to \mathbb{R}$

$g(x) = \|x\|$

$$\underbrace{|g(x)-g(y)|}_{} = \big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x-y\| \leq \tilde{C}\|x-y\|_1 = \underbrace{\tilde{C}\, d_1(x,y)}_{}$$

$\hookrightarrow$ EJERC. (XTRIÁNG)

$\Rightarrow g$ es cont. $\Rightarrow$ alcanza máx y mín en $S = \{x\in\mathbb{R}^n : \|x\|_1 = 1\}$.

CERR Y ACOT EN $(\mathbb{R}^n, \|\ \|_1)$ (y $\therefore$ COMPACTO)

Sea $m = \min\limits_{x\in S} g(x) = \min\limits_{x\in S} \|x\|$.

$\boxed{m>0}$: si $m=0$, $\exists\, x_0 \in S \,/\, \|x_0\| = 0$

$\Rightarrow x_0 = 0 \Rightarrow x_0 \notin S$ $(\|0\|_1 = 0)$

Si $x\neq 0$, $\dfrac{x}{\|x\|_1} \in S \Rightarrow \left\|\dfrac{x}{\|x\|_1}\right\| \geq m \Rightarrow \boxed{\dfrac{1}{\|x\|_1}\|x\| \geq m \quad \forall x\neq 0}$

$\Rightarrow \underbrace{\|x\| \geq m\|x\|_1}_{m=c}$ $\forall x\neq 0$, pero para $x=0$ también.

Teorema

En $\mathbb{R}^n$ todas las normas son equivalentes.

Teorema

En $\mathbb{R}^n$ todas las normas son equivalentes.

Corolario

Si E es un espacio normado de dimensión $n \in \mathbb{N}$, entonces es uniformemente homeomorfo a $(\mathbb{R}^n, \| \|_2)$ con ~~una isometría~~ homeo unif. dad~~a~~o por un isomorfismo lineal.

Teorema

En $\mathbb{R}^n$ todas las normas son equivalentes.

Corolario

Si E es un espacio normado de dimensión $n \in \mathbb{N}$, entonces es uniformemente homeomorfo a $(\mathbb{R}^n, \| \|_2)$ con una isometría dada por un isomorfismo lineal.

Corolario

Todo espacio normado de dimensión finita es completo (es Banach).

Notación

E NORMADO

La bola unidad abierta de E es

$$B_E = \{x \in E \colon \|x\| < 1\}$$

Notación

La bola unidad abierta de E es

$$B_E = \{x \in E \colon \|x\| < 1\} = B(0,1).$$

$$B(x,r) = x + r \cdot B(0,1) = x + r\, B_E .$$

Notación

La bola unidad abierta de E es

$$B_E = \{x \in E \colon \|x\| < 1\} = B(0,1).$$

La bola unidad cerrada de E es

$$\overline{B}_E = \{x \in E \colon \|x\| \leq 1\}$$

Notación

La bola unidad abierta de E es

$$B_E = \{x \in E \colon \|x\| < 1\} = B(0,1).$$

La bola unidad cerrada de E es

EN NORMADOS

$$\overline{B}_E = \{x \in E \colon \|x\| \leq 1\} = \overline{B}(0,1). = \overline{B(0,1)}$$

$$\overline{B}(x,r) = x + r\,\overline{B}_E$$

E, F, $\underbrace{\|x\|_E}_{\text{norma de } E}$, $\underbrace{\|y\|_F}_{\text{norma de } F.}$

Notación

La bola unidad abierta de E es

$$B_E = \{x \in E \colon \|x\| < 1\} = B(0,1).$$

La bola unidad cerrada de E es

$$\overline{B}_E = \{x \in E \colon \|x\| \leq 1\} = \overline{B}(0,1).$$

Corolario

Si E es un espacio normado de dimensión finita, entonces $\overline{B}_E$ es un compacto.

Notación

La bola unidad abierta de E es

$$B_E = \{x \in E \colon \|x\| < 1\} = B(0,1).$$

La bola unidad cerrada de E es

$$\overline{B}_E = \{x \in E \colon \|x\| \leq 1\} = \overline{B}(0,1).$$

Corolario

Si E es un espacio normado de dimensión finita, entonces $\overline{B}_E$ es un compacto.

Más aún, todo cerrado y acotado es compacto.

PUES E ES UNIF HOMEOMORFO A $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_2)$

Observación

Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal.

Observación

Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal.

- Sabemos que T es una función continua si consideramos en ambos la norma euclídea.

Observación

Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal.

- Sabemos que T es una función continua si consideramos en ambos la norma euclídea.
- Entonces, T es continua para cualquier par de normas que pongamos en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$.

Observación

Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal.

- Sabemos que T es una función continua si consideramos en ambos la norma euclídea.
- Entonces, T es continua para cualquier par de normas que pongamos en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$.
- Y lo mismo pasa con una transformación lineal entre dos espacios normados de dimensión finita.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "T"] \arrow[d, "R"'] & F \arrow[d, "S"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "\tilde{T}"'] & \mathbb{R}^m \end{tikzcd}$$

$n = \dim E, \quad m = \dim F$

R, S $\underbrace{\text{isom. lineales, homeos unif.}}$

$\tilde{T} : S \circ T \circ R^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ LINEAL

$\therefore$ $\tilde{T}$ es cont. $\Rightarrow$ $T = \underbrace{S^{-1}}_{\text{HOMEO}} \circ \underbrace{\tilde{T}}_{\text{CONT}} \circ \underbrace{R}_{\text{HOMEO}}$ es cont.

Observación

Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal.

- Sabemos que T es una función continua si consideramos en ambos la norma euclídea.
- Entonces, T es continua para cualquier par de normas que pongamos en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$.
- Y lo mismo pasa con una transformación lineal entre dos espacios normados de dimensión finita.

En realidad, si E y F son normados y E es de dimensión finita, entonces toda $T : E \to F$ lineal es continua.

$T : E \to F$ $\quad \dim E < +\infty \Rightarrow \quad \dim \operatorname{Im} T < +\infty$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "T_0"] \arrow[rr, bend right, "T"'] & \operatorname{Im} T \arrow[r, "\text{incl}"] & F \end{tikzcd}$$

$x \mapsto Tx$

T_0 es cont

$(E, \operatorname{Im} T$ de dim finita$)$.

incl. CONT.

$\Rightarrow T$ cont.

Operadores continuos

Definición

Sean E, F dos espacios normados (sobre el mismo cuerpo de escalares). Una aplicación $T : E \to F$ es un operador lineal continuo si

Operadores continuos

Definición

Sean E, F dos espacios normados (sobre el mismo cuerpo de escalares). Una aplicación $T : E \to F$ es un operador lineal continuo si

- Es una transformación lineal (u operador lineal):
  - $T(x+y) = T(x) + T(y)$ para todo $x, y \in E$,
  - $T(\lambda x) = \lambda T(x)$ para todo escalar λ y todo $x \in E$.

Operadores continuos

Definición

Sean E, F dos espacios normados (sobre el mismo cuerpo de escalares). Una aplicación $T : E \to F$ es un operador lineal continuo si

- Es una transformación lineal (u operador lineal):
  - $T(x + y) = T(x) + T(y)$ para todo $x, y \in E$,
  - $T(\lambda x) = \lambda T(x)$ para todo escalar λ y todo $x \in E$.
- Es una función continua, con las métricas que definen las normas.

Operadores continuos

Definición

Sean E, F dos espacios normados (sobre el mismo cuerpo de escalares). Una aplicación $T : E \to F$ es un operador lineal continuo si

- Es una transformación lineal (u operador lineal):
  - $T(x + y) = T(x) + T(y)$ para todo $x, y \in E$,
  - $T(\lambda x) = \lambda T(x)$ para todo escalar λ y todo $x \in E$.
- Es una función continua, con las métricas que definen las normas.

Observación

de E

Como T es lineal, tenemos $T(0) = 0$. de F

Entonces, que T sea continua en 0 significa que para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$T(B(0, \delta)) \subset B(0, \varepsilon)$.

$\in E$ $\quad$ $T(0) \in F$

Si T cont en 0, $\Rightarrow$ $\boxed{\text{dado } \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \,/\, T(B(0,\delta)) \subset B(0,\varepsilon)}$

$x_0 \in E$, $x \in E \,/\, \|x - x_0\|_E < \delta \Rightarrow x - x_0 \in B(0,\delta)$.

$\Rightarrow T(x - x_0) \in B(0,\varepsilon) \Rightarrow \|T(x - x_0)\|_F < \varepsilon$

$\underset{\text{T LINEAL}}{\Rightarrow} \|Tx - Tx_0\|_F < \varepsilon$ $\rightsquigarrow$ T CONT EN x_0.

(el δ que le sirve a 0 le sirve a TODOS LOS x_0)

$\therefore$ T es unif CONT.

Si $\exists\, z_0 \in E \,/\,$ T cont. en z_0. $\boxed{\text{Dado } \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \,/}$

$T(B(z_0,\delta)) \subset B(Tz_0, \varepsilon)$. Si $x \in B(0,\delta) \Rightarrow z_0 + x \in B(z_0,\delta)$

$\Rightarrow T(z_0 + x) \in B(Tz_0, \varepsilon) \Rightarrow \|\underbrace{T(z_0 + x)}_{Tz_0 + Tx} - Tz_0\| < \varepsilon \Rightarrow$

$\|Tx\| < \varepsilon \Rightarrow \boxed{Tx \in B(0,\varepsilon)}$ $\therefore$ T es cont en 0.

Teorema

Sean E, F espacios normados, y $T : E \to F$ lineal. Son equivalentes:

Teorema

Sean E, F espacios normados, y $T : E \to F$ lineal. Son equivalentes:

(1) T es continua en el origen.

Teorema

Sean E, F espacios normados, y $T : E \to F$ lineal. Son equivalentes:

(1) T es continua en el origen.

(2) T es continua en algún punto.

Teorema

Sean E, F espacios normados, y $T : E \to F$ lineal. Son equivalentes:

(1) T es continua en el origen.

(2) T es continua en algún punto.

(3) T es continua.

Teorema

Sean E, F espacios normados, y $T : E \to F$ lineal. Son equivalentes:

(1) T es continua en el origen.

(2) T es continua en algún punto.

(3) T es continua.

(4) T es uniformemente continua.

$(1) \Rightarrow (2)$ ✓ $\quad (2) \Rightarrow (1)$ lo 2do de la pág anterior.

$(1) \Rightarrow (4)$ lo 1ro de la pág anterior.

$(4) \Rightarrow (3)$ ✓ $\quad (3) \Rightarrow (1), (2)$ ✓

Definición

Decimos que una transformación lineal $T : E \to F$ es acotada si existe $c > 0$ tal que

$$\|T(x)\|_F \leq c\|x\|_E \tag{1}$$

para todo $x \in E$.

OJO: NO ES UNA FUNCIÓN ACOTADA

Definición

Decimos que una transformación lineal $T : E \to F$ es acotada si existe $c > 0$ tal que

$$\|T(x)\|_F \leq c\|x\|_E \qquad (1)$$

para todo $x \in E$.

Equivalentemente, T es acotado si

$$\sup_{x \in B_E} \|T(x)\|_F < \infty. \qquad (2)$$

(1) ⇒ (2) : $x \in B_E \Rightarrow \|x\| \leq 1 \Rightarrow \|Tx\| \leq c \cdot 1$

$\Rightarrow \sup_{x \in B_E} \|Tx\|_F \leq c$.

(2) ⇒ (1) [VAMOS A PROBAR A C CO MÁS] : $M = \sup_{x \in B_E} \|Tx\|_F$

FIJAMOS $\varepsilon > 0$. SI $x \in E$, $x \neq 0$, $\frac{x}{(1+\varepsilon)\|x\|} \in B_E$.

$\Rightarrow \left\| T\left(\frac{x}{(1+\varepsilon)\|x\|} \right) \right\| \leq M$

$$\left\| T\left(\frac{x}{(1+\varepsilon)\|x\|}\right)\right\|_F \leq M. \underset{T \text{ LINEAL}}{\Rightarrow} \left\| \frac{1}{(1+\varepsilon)\|x\|} T(x)\right\|_F \leq M$$

$$\Rightarrow \|T(x)\|_F \leq M(1+\varepsilon)\|x\|_E \qquad (x \neq 0).$$

Como ε es arbitrario, $\boxed{\|T(x)\|_F \leq M\|x\|_E}$ ($\forall x \neq 0$ y para $x=0$ también)

$\Rightarrow (1)$

Obs: la cte de (1) se puede tomar como $\sup\limits_{x \in B_E} \|Tx\|_E$. $\rightsquigarrow$ EJERCICIO: esta es la menor cte que cumple (1).

Teorema
Un operador lineal $\underbrace{T : E \to F \text{ es continuo}}$ si y sólo $\underbrace{\text{es acotado}}$.

$\Rightarrow$) T es cont en 0 $\Rightarrow$ dado $\varepsilon = 1$, $\exists \delta > 0$ /

$T(B_E(0,\delta)) \subset \underbrace{B_F(0,1)}$.

$x \in E$, $x \neq 0$: $\dfrac{\delta}{2} \dfrac{x}{\|x\|_E} \in B(0,\delta)$ (tiene norma $\delta/2$)

$\Rightarrow \left\| T\left(\dfrac{\delta}{2} \dfrac{x}{\|x\|}\right) \right\| < 1 \Rightarrow \left\| \dfrac{\delta}{2} \dfrac{1}{\|x\|_E} T(x) \right\|_F < 1$

$\Rightarrow \boxed{\|Tx\|_F \leq \dfrac{2}{\delta} \|x\|_E} \Rightarrow T$ acotada.

$\Leftarrow)$ T acot $\Rightarrow \exists\, c > 0 /$ $\|Tx\|_F \leq c\|x\|_E$ (1) $\forall x$

$\Rightarrow$ $d_F(Tx, Ty) = \|Tx - Ty\|_F =$

$= \|T(x-y)\|_F \underset{(1)}{\leq} c\,\|x-y\|_E = c\, d(x,y)$

T LIN

$\Rightarrow$ T LIPSCHITZ y $\therefore$ es (UNIF) CONT.

T CONT $\Leftrightarrow$ T acot $\Leftrightarrow$ T LIPSCHITZ

$\Updownarrow$

T cont en 0 $\Leftrightarrow$ T cont en algún pto

$\Leftrightarrow$ T UNIF CONT.