

1) Probar las siguientes igualdades

i.

$$B \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{I}} A_i = \bigcap_{i \in \mathbb{I}} (B \setminus A_i)$$

*Proof.*  $\subseteq$ ) Sabemos  $x \in B$  y  $x \notin \bigcup_{i \in \mathbb{I}} A_i$

Luego  $x \in B$  y  $x \notin A_i \quad \forall i \in \mathbb{I}$

Entonces  $x \in B \setminus A_i \quad \forall i \in \mathbb{I}$

$\Rightarrow x \in \bigcap_{i \in \mathbb{I}} (B \setminus A_i)$

$\supseteq$ ) Sabemos  $x \in B \setminus A_i \quad \forall i \in \mathbb{I}$

Luego para cada  $i \in \mathbb{I}$  sabemos  $x \in B$  y  $x \notin A_i$

$\Rightarrow x \in B \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{I}} A_i$

□

ii.

$$B \setminus \bigcap_{i \in \mathbb{I}} A_i = \bigcup_{i \in \mathbb{I}} (B \setminus A_i)$$

*Proof.*  $\subseteq$ ) Sabemos  $x \in B$  y  $x \notin \bigcap_{i \in \mathbb{I}} A_i$

Luego existe algún  $i \in \mathbb{I}$  tal que  $x \notin A_i$  (quizas para todos los  $i \in I$  sucede que  $x \notin A_i$  pero con uno alcanza)

Entonces existe algún  $i \in \mathbb{I}$  tal que  $x \in B$  y  $x \notin A_i \Rightarrow B \setminus A_i$

$\Rightarrow x \in \bigcup_{i \in \mathbb{I}} (B \setminus A_i)$

$\supseteq$ ) Tenemos  $x \in B \setminus A_i$  para algún  $i \in \mathbb{I}$

Luego  $x \in B$  y  $x \notin A_i$  para algún  $i \in \mathbb{I}$

Entonces  $x \in B$  y  $x \notin \bigcap_{i \in \mathbb{I}} A_i$

$\Rightarrow x \in B \setminus \bigcap_{i \in \mathbb{I}} A_i$

□

iii.

$$\bigcup_{i \in \mathbb{I}} (A_i \cap B) = B \cap \left( \bigcup_{i \in \mathbb{I}} A_i \right)$$

*Proof.*  $\subseteq$ ) Tenemos  $x \in A_i \cap B$  para algún  $i \in \mathbb{I}$

Luego  $x \in B$  y  $x \in A_i$  para algún  $i \in \mathbb{I} \Rightarrow x \in \bigcup_{i \in \mathbb{I}} A_i$

Entonces  $x \in B$  y  $x \in \bigcup_{i \in \mathbb{I}} A_i$

$\Rightarrow x \in B \cap \left( \bigcup_{i \in \mathbb{I}} A_i \right)$

□

3) Sea  $f : X \rightarrow Y$  una función,  $A, B$  subconjuntos de  $X$

i.  $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

*Proof.*  $\subseteq$ ) Sea  $y \in f(A \cup B)$  entonces  $\exists x \in A \cup B / f(x) = y$

Luego  $x \in A$  y  $x \in B$

Entonces  $y = f(x) \in f(A)$  y por otro lado  $y = f(x) \in f(B)$

Finalmente  $y = f(x) \in f(A) \cup f(B)$

$\supseteq$ ) Sea  $y \in f(A) \cup f(B)$  luego  $y \in f(A)$  e  $y \in f(B)$

Entonces  $\exists x \in A$  tal que  $f(x) = y$  luego  $x \in A \cup B$

Luego  $y = f(x) \in f(A \cup B)$

□

ii.  $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

*Proof.* Sea  $y \in f(A \cap B)$  luego  $\exists x \in A \cap B$  tal que  $f(x) = y$

Luego  $x \in A$  y  $x \in B$  luego  $y = f(x) \in f(A)$  e  $y = f(x) \in f(B)$

Finalmente  $y = f(x) \in f(A) \cap f(B)$

□

iii. Sea  $A_{i \in \mathbb{N}}$  una familia de infinitos conjuntos, entonces

(a)  $f(\bigcup A_i) = \bigcup f(A_i)$

*Proof.*  $\subseteq$ ) Sea  $y \in f(\bigcup A_i)$  luego  $\exists x \in \bigcup A_i$  tal que  $f(x) = y$

Entonces  $\exists A_j$  tal que  $x \in A_j$  por lo que  $y = f(x) \in f(A_j) \subseteq \bigcup f(A_i)$

$\supseteq$ ) Sea  $y \in \bigcup f(A_i)$  luego  $\exists j \in \mathbb{N}$  tal que  $y \in f(A_j)$

Luego  $\exists x \in A_j$  tal que  $y = f(x)$  luego  $x \in \bigcup A_i$

Finalmente  $y = f(x) \in f(\bigcup A_i)$

□

(b)  $f(\bigcap A_i) \subseteq \bigcap f(A_i)$

*Proof.* Sea  $y \in f(\bigcap A_i)$  luego  $\exists x \in \bigcap A_i$

Entonces  $x \in A_i \quad \forall i \in \mathbb{N}$

Luego  $y = f(x) \in f(A_i) \quad \forall i \in \mathbb{N}$

Finalmente  $y \in \bigcap f(A_i)$

□

(c) La última inclusión puede ser estricta.

*Proof.* Sea  $f(x) = 3 \quad \forall x \in X$  y  $A = 1, B = 2$

Luego  $3 = f(A) \cap f(B) = 3 = \{3\}$  que es distinto a  $f(A \cap B) = f(\{\emptyset\}) = \emptyset$

□

4) Sean  $f : X \rightarrow Y$  una función,  $A \subseteq X$  y  $B, B_1, B_2 \subseteq Y$ . Luego vale:

i.  $A \subseteq f^{-1}(f(A))$

*Proof.* Sea  $x \in A$  luego  $f(x) \in f(A)$  por lo tanto, como  $x \in f^{-1}(f(x)) \subseteq f^{-1}(f(A))$

Entonces  $x \in f^{-1}(f(A))$

□

ii.  $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$

*Proof.* Sea  $y \in f(f^{-1}(B))$  entonces  $\exists x \in f^{-1}(B) / f(x) = y$

Pero entonces  $f(x) \in B \Rightarrow y \in B$

□

iii.  $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$

*Proof.*  $\subseteq$ ) Sea  $x \in f^{-1}(Y \setminus B)$  luego  $f(x) \in Y \setminus B$

Entonces  $f(x) \notin B$  entonces  $x = f^{-1}(f(x)) \notin f^{-1}(B)$

Por otro lado  $f(x) \in Y$  entonces  $x \in f^{-1}(Y)$

Juntando todo  $x \in f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(B)$

O lo que es lo mismo  $X \setminus f^{-1}(B)$

$\supseteq$ ) Sea  $x \in X \setminus f^{-1}(B)$

Entonces  $x \in X$  entonces  $f(x) \in f(X) = Y$

Tambien  $x \notin f^{-1}(B)$  por lo que  $f(x) \notin B$

Luego  $f(x) \in Y \setminus B$

Finalmente  $x = f^{-1}(f(x)) \in f^{-1}(Y \setminus B)$

□

iv.  $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

*Proof.*  $\subseteq$ ) Sea  $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$  luego  $f(x) \in B_1 \cup B_2$

Luego  $f(x) \in B_1$  por lo que  $x \in f^{-1}(B_1)$

Finalmente  $x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

$\supseteq$ ) Sea  $x \in f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$

Luego  $x \in f^{-1}(B_1)$  entonces  $f(x) \in B_1$

Por tanto  $f(x) \in B_1 \cup B_2$

Finalmente  $x \in f^{-1}(B_1 \cup B_2)$

□

v.  $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

*Proof.*  $\subseteq$ ) Sea  $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2)$  entonces  $f(x) \in B_1 \cap B_2$

Por lo que  $f(x) \in B_1$  esto implica  $x \in f^{-1}(B_1)$

Tambien  $f(x) \in B_2$  que implica  $f(x) \in f^{-1}(B_2)$

Finalmente  $f(x) \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

$\supseteq$ ) Sea  $x \in f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

Luego  $x \in f^{-1}(B_1)$  por lo que  $f(x) \in B_1$  y con el mismo argumento  $f(x) \in B_2$

Entonces tenemos  $f(x) \in B_1 \cap B_2$

Finalmente  $x \in f^{-1}(B_1 \cap B_2)$  □

4)b) Sean  $f : X \rightarrow Y$  una función y  $B_i$  Una familia infinita de subconjuntos de  $Y$  vale:

i.  $f^{-1}(\bigcup B_i) = \bigcup f^{-1}(B_i)$

*Proof.*  $\subseteq$ ) Sea  $x \in f^{-1}(\bigcup B_i)$  entonces  $f(x) \in \bigcup B_i$

Luego  $f(x) \in B_j$  para algún  $B_j$

Por ende  $x \in f^{-1}(B_j) \subseteq \bigcup f^{-1}(B_i)$

Finalmente  $x \in \bigcup f^{-1}(B_i)$

$\supseteq$ ) Por hipótesis sabemos  $\exists j \in \mathbb{N}$  tal que  $x \in f^{-1}(B_j)$

Por lo que  $f(x) \in B_j$  y entonces  $f(x) \in \bigcup B_j$

Luego  $x \in f^{-1}(\bigcup B_j)$  □

ii.  $f^{-1}(\bigcap B_i) = \bigcap f^{-1}(B_i)$

$\subseteq$ ) Sea  $x \in f^{-1}(\bigcap B_i)$  luego  $f(x) \in \bigcap B_i$

Entonces  $f(x) \in B_i \quad \forall i \in \mathbb{N}$  luego  $x \in f^{-1}(B_i) \quad \forall i \in \mathbb{N}$

Finalmente  $x \in \bigcap f^{-1}(B_i)$

La otra inclusión sale de la misma forma que todos los ejercicios arriba , queda como ejercicio para alguien con muchas ganas

5) Sea  $f : X \rightarrow Y$  una función. Probar que  $f(f^{-1}(B)) = B$  para cada  $B \subseteq Y$  si y sólo si  $f$  es suryectiva

*Proof.*  $\Leftarrow$ ) Por ejercicio anterior sabemos que  $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$  probemos la otra inclusión.

Sea  $y \in B$  luego  $y \in Y$  como  $f$  suryectiva  $\exists x \in X$  tal que  $f(x) = y$  equivalentemente  $x = f^{-1}(y)$

Luego  $y = f(x) = f(f^{-1}(y)) \in f(f^{-1}(B))$

Entonces  $y \in f(f^{-1}(B)) \quad \forall y \in B$  y por ende  $B \subseteq f(f^{-1}(B))$

Finalmente  $B = f(f^{-1}(B))$  para cualquier  $B \subseteq Y$

$\Rightarrow$ ) Tenemos la igualdad para cada  $B \subseteq Y$  en particular vale para  $Y$

Luego  $f(f^{-1}(Y)) = Y$  por lo tanto  $f$  es suryectiva

Si no fuera suryectiva tiene que existir algún  $y \in Y$  tal que  $f^{-1}(y) = \emptyset$

Por lo que  $f^{-1}(y) \notin f^{-1}(Y)$  entonces  $y \notin f(f^{-1}(Y))$

Finalmente  $Y \neq f(f^{-1}(Y))$  □

6) Sea  $f : X \rightarrow Y$  una función. Luego las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1.  $f$  es inyectiva
2.  $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$  para todo  $A, B \subseteq X$
3.  $f^{-1}(f(A)) = A$  para todo  $A \subseteq X$
4.  $f(A) \cap f(B) = \emptyset$  para todo par de subconjuntos  $A, B$  tales que  $A \cap B = \emptyset$
5.  $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$  para todo  $B \subseteq A \subseteq X$

*Proof.* 1)  $\Rightarrow$  2) Sabemos que  $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$  probemos la otra inclusión

Sea  $y \in f(A) \cap f(B)$  luego  $y \in f(A)$  y  $y \in f(B)$

Por esto sabemos que  $\exists x \in A$  tal que  $f(x) = y$  y también que  $\exists x' \in B$  tal que  $f(x') = y$

Luego  $f(x) = y = f(x')$  y como  $f$  es inyectiva tenemos que  $x = x'$

Luego ambos  $x, x'$  (que son el mismo) están en  $A$  y ambos están en  $B$

Resumiendo  $x \in A \cap B$  y por ende  $y = f(x) \in f(A \cap B)$

Luego  $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

2  $\Rightarrow$  3) Por ej anterior sabemos que  $A \cap B \subseteq f^{-1}(f(A \cap B))$ . Probemos la otra inclusión

Sea  $x \in f^{-1}(f(A \cap B))$  entonces  $f(x) \in f(A \cap B)$

Y como  $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$  tenemos  $f(x) \in f(A) \cap f(B)$

Entonces  $f(x) \in f(A)$  luego  $x \in A$  por otro lado  $f(x) \in f(B)$  luego  $x \in B$

Finalmente  $x \in A \cap B$

3  $\Rightarrow$  4) Supongamos que  $f(A) \cap f(B) \neq \emptyset$  luego  $\exists y \in f(A) \cap f(B)$

Luego tenemos  $y \in f(A)$  entonces  $\exists x \in A$  tal que  $f(x) = y$

Y también  $y \in f(B)$  entonces  $\exists x' \in B$  tal que  $f(x') = y$

Entonces tenemos  $x' = f^{-1}(f(x')) = f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x$

Luego  $x = x'$  por lo que  $x \in A \cap B$  lo que es absurdo

Provino de suponer  $f(A) \cap f(B) \neq \emptyset$

Entonces  $f(A) \cap f(B) = \emptyset$

4  $\Rightarrow$  5) Primero asumamos  $A \neq B$  si fueran iguales es trivial

$\supseteq$ ) Sea  $y \in f(A) \setminus f(B)$

Luego  $y \in f(A)$  entonces  $\exists x \in A$  tal que  $f(x) = y$

Por otro lado  $y \notin f(B)$  entonces  $\nexists x \in B$  tal que  $f(x) = y$

Luego  $x \in A \setminus B$  por lo que  $f(x) \in f(A \setminus B)$

$\subseteq$ ) Sea  $y \in f(A \setminus B)$  luego  $\exists x \in A \setminus B$  tal que  $f(x) = y$

Luego  $x \in A$  por ende  $f(x) \in f(A)$

Y tambien  $x \notin B$  por ende  $\{x\} \cap B = \emptyset$

Por hipótesis (4) sabemos  $\{f(x)\} \cap f(B) = f(\{x\}) \cap f(B) = \emptyset$  entonces  $f(x) \notin f(B)$

Finalmente  $y = f(x) \in f(A) \setminus f(B)$

□

7) Para cada subconjunto  $S$  de un conjunto  $A$  dado , se define la función característicade  $S$ ,  $X_S : A \rightarrow 0, 1$ , por

$$f(a) = \begin{cases} 1 & a \in S \\ 0 & a \notin S \end{cases}$$

i.  $X_{S \cap T} = X_S \cap X_T$

*Proof.* Sea  $a \in S \cap T$  entonces  $X_{S \cap T}(a) = 1$

Ademas  $a \in S$  y  $a \in T$  luego  $X_S(a) \cdot X_T(a) = 1$

Si  $a \notin S \cap T$  luego  $a \notin S$  y ademas  $a \notin T$  con esto sale trivialmente

□

ii.  $X_{A \setminus S} = 1 - X_S$

*Proof.* Sea  $a \in A \setminus S$  tenemos  $X_{A \setminus S}(a) = 1$

Además  $a \in A$  y  $a \notin S$  por lo tanto  $1 - X_S(a) = 1$

Sea  $a \notin A \setminus S$  luego  $X_{A \setminus S}(a) = 0$

Por otro lado  $a \in S$  entonces  $1 - X_S(a) = 0$

□

iii.  $X_S + X_T = X_{S \cup T} + X_{S \cap T}$

Caso I)  $a \in S \setminus T$  luego  $a \in S \cup T$  y por otro lado  $a \notin S \cap T$  entonces  $X_S(a)$

Luego  $X_S(a) + X_T(a) = 1 + 0 = X_{S \cup T}(a) + X_{S \cap T}(a)$

Caso II)  $a \in S$  y  $a \in T$  entonces  $a \in S \cup T$  sale de la misma forma

Caso III)  $a \notin S$  y  $a \in T$  es exactamente igual que el Caso i)

Caso IV)  $a \notin S$  y además  $a \notin T$  entonces  $a \notin S \cup T$  y también  $a \notin S \cap T$  es tambien trivial

9) Sea  $\sim$  una relación de equivalencia sobre un conjunto  $A$ . Para cada  $a \in A$  se define el conjunto  $S_a = \{b \in A : a \sim b\}$ . Luego vale:

- i. Para todo par de elementos  $a_1, a_2 \in A$  vale:  $S_{a_1} = S_{a_2}$  o  $S_{a_1} \cap S_{a_2} = \emptyset$

*Proof.* Es trivial ver que si se da alguno de los dos el otro no se da.

Veamos para completar que si uno no se da entonces el otro si se da.

$S_{a_1} \cap S_{a_2} \neq \emptyset$  tomamos el  $x$  que esta en la intersección

Luego  $x \sim a_1$  y por otro lado  $x \sim a_2$

Luego sea  $y_1 \in S_{a_1}$  tenemos  $y_1 \sim a_1 \sim x \sim a_2$  entonces  $y_1 \in S_{a_2}$

Y sea  $y_2 \in S_{a_2}$  tenemos  $y_2 \sim a_2 \sim x \sim a_1$  entonces  $y_2 \in S_{a_1}$

Finalmente es evidente que  $S_{a_1} \neq S_{a_2}$  implica la intersección es vacía, si la intersección no fuera vacía tendríamos el argumento de arriba para ver que  $S_{a_1} = S_{a_2}$  y esto sería absurdo  $\square$

- ii.  $A = \bigcup_{a \in A} S_a$

Esto es trivial, dada la definición del ejercicio, no veo que haya que resolver nada

10) Sea  $A$  tal que  $\#A = n$  luego  $\#\mathcal{P}(A) = 2^n$

Usaremos inducción

- $n = 1$ , Luego  $A = \{x\}$  tiene un elemento entonces  $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, x\}$  esto cumple el caso base.

- $n \Rightarrow n + 1$  Sea  $A$  tal que  $\#A = n$ . Entonces  $\exists x \in A$  Luego tomemos  $B = A \setminus \{x\}$

Por un lado sabemos, por hipótesis, que  $\#B \setminus \{x\} = n$  entonces tenemos  $g : B \setminus \{x\} \rightarrow \mathbb{I}_n$  biyectiva. Además es evidente que  $\#\{x\} = 1$

Luego existe tenemos  $f : A \rightarrow \mathbb{I}_{n+1}$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & x \in B \setminus \{x\} \\ n + 1 & x \in \{x\} \end{cases}$$

Sabemos que  $f$  biyectiva por como fue construida

Luego  $\#A = \#\mathbb{I}_{n+1} = n + 1$

11) Sea  $A$  un conjunto. Probar que son equivalentes:

1.  $A$  es infinito
2.  $\forall x \in A$ , existe una función  $f_x : A \rightarrow A \setminus \{x\}$  biyectiva
3. para todo  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset A$ , existe una función  $f_{\{x_1, x_2, \dots, x_n\}} : A \rightarrow A \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  biyectiva

*Proof.*  $1 \Rightarrow 2$ ) Como  $A$  es numerable  $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

Sea  $x \in A$  luego  $x = x_j$  para algún  $j \in \mathbb{N}$ .

Luego tenemos una función  $g_x : A \rightarrow A_{reordenado} = A$  biyectiva

$$g_x(x_n) = \begin{cases} x_1 & n = j \\ x_j & n = 1 \\ x_n & n \neq j, n \neq 1 \end{cases}$$

Luego sea  $f : A \rightarrow X \setminus \{x_1\}$  dada por  $f(x_n) = x_{n+1}$  es biyectiva

Finalmente tenemos  $f \circ g_x : A \rightarrow A \setminus \{x\}$  que es biyectiva por composición

□

$2 \Rightarrow 3$ ) Para cada  $x_n$  Tengo  $f_{x_n} : A \rightarrow A \setminus \{x_n\}$  biyectiva.

Componiendo todas estas funciones tengo una  $f : A \rightarrow A \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  biyectiva

$3 \Rightarrow 1$ ) Suponemos que  $A$  es finito, pero entonces tenemos  $A \setminus \{x\} \subseteq A$  y además tenemos  $f : A \rightarrow A \setminus \{x\}$  inyectiva. Luego por lema probado en teórica  $A = A \setminus \{x\}$  lo que es absurdo  
Ej 12) Sea  $A$  un conjunto numerable y  $B$  un conjunto. Supongamos que existe un  $f : A \rightarrow B$  sobreyectiva. Entonces  $B$  es a lo sumo numerable

*Proof.* Sabemos que  $A$  numerable luego  $A \sim \mathbb{N}$

Juntando todo  $\mathbb{N} \sim A \twoheadrightarrow B$  donde la doble flecha indica sobreyectividad

Entonces existe  $g : \mathbb{N} \rightarrow B$  sobreyectiva

Luego para cada  $b \in B$  existe un único conjunto (si no  $g$  no estaría bien definida) tal que

$S(b) = \{i \in \mathbb{N} : g(i) = b\}$  que sabemos no es vacío por que  $g$  es sobreyectiva o sea que todo  $b \in B$  tiene preimagen. También sabemos que cada  $S(b)$  tiene mínimo por que es un subconjunto de los naturales.

Ahora considero  $\mathbb{N}' = \bigcup_{b \in B} \min(S(b))$  esta unión es trivialmente disjunta y vemos que  $\mathbb{N}' \subseteq \mathbb{N}$

Y ahora podemos construir una función  $g' : B \rightarrow \mathbb{N}'$  dado por  $g'(b) = \min(S(b))$

Esta es evidentemente sobreyectiva, por que para cada  $x \in \mathbb{N}'$  sabemos que  $x$  es mínimo de un único conjunto dado por  $b \in B$

$g'$  es inyectiva. Sea  $b, b' \in B$  tal que  $g'(b) = g'(b')$  luego  $\min(S(b)) = \min(S(b'))$  como los mínimos son únicos y cada  $S(b)$  es disjunta con cualquier otro entonces  $b = b'$

Luego  $g'$  es biyectiva entonces  $B \sim \mathbb{N}' \subseteq \mathbb{N}$

Por ende  $\#B \leq \#\mathbb{N}$

□

Ej 13)

- $\mathbb{Z}_{\leq -1}$  : Consideremos la función  $f : \mathbb{Z}_{\leq -1} \rightarrow \mathbb{N}$  dada por  $f(x) = |x|$  que es trivialmente biyectiva
- $\mathbb{Z}_{\geq -3}$  : Sea  $f : \mathbb{Z}_{\geq -3} \rightarrow \mathbb{N}$  dada por  $-1 \mapsto 1, -2 \mapsto 2, -3 \mapsto 3, 0 \mapsto 4$  y después  $x \mapsto x + 4 \quad \forall x \geq 1$ .  $f$  es biyectiva
- $3\mathbb{N}$  : Tenemos la función  $f : 3\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  dada por  $f(x) = \frac{x}{3}$  trivialmente biyectiva



- $\mathbb{Z}$  : Tenemos  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$  biyectiva

$$f(x) = \begin{cases} -2x & x < 0 \\ 2x + 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

- $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  : Sea  $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  dada por  $f(n, m) = 2^n 3^m$  es inyectiva por unicidad de factorización en primos. Luego sabemos que  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  es a lo sumo numerable como además sabemos que es infinito , entonces es numerable
- Sea la función  $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} 2^y 3^{-2x} & x < 0 \\ 2^y 3^{2x+1} & x \geq 0 \end{cases}$$

Es trivialmente inyectiva devuelta por unicidad de descomposicion en primos y como  $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$  es evidentemente infinito entonces es numerable

- $\mathbb{Q}$  : Usando una función casi igual que la de arriba podemos ver que  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  es numerable.

Consideremos  $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$  dada por  $f(x, y) = \frac{x}{y}$  sobreyectiva por que cualquier racional se escribe como division de enteros. Entonces  $\mathbb{Q}$  es a lo sumo numerable y ademas es infinito , entonces es numerable

- $\mathbb{N}^n$  : To mamos  $f : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$  dada por  $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_n^{a_n}$  con  $p_n$  primos distintos dos a dos.  $f$  es inyectiva. Luego usando el mismo argumento que antes tenemos que  $\mathbb{N}^n$  con  $n \in \mathbb{N}$  es numerable

Ej 14)

- Sean  $A$  y  $B$  conjuntos contables entonces  $A \cup B$  es contable.

*Proof.* Aquí voy a asumir siempre que  $A$  y  $B$  son disjuntos , si no lo fueran simplemente se podría usar un  $A' = A \setminus B$  para que la intersección no moleste y probaríamos todo para  $A' = A \setminus B$  sabiendo que  $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$  y por lo tanto tienen el mismo cardinal

Si ambos son finitos es evidente que su union es finita.

Si por ejemplo  $A$  es finito y  $B$  numerable. Sea  $\#A = n$ . Luego tenemos  $g : A \rightarrow \mathbb{I}_n$  biyectiva

Por otro lado como  $B$  es numerable tenemos  $h : B \rightarrow \mathbb{N}$  biyectiva

$f : A \cup B \rightarrow \mathbb{N}$  dada por

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & x \in A \\ h(x) + n & x \in B \end{cases}$$

que es sobreyectiva, principalmente por ser composición de sobreyectivas

Si ambos son numerables devuelta aprovechando  $f : A \rightarrow \mathbb{N}$  sobreyectiva y  $g : B \rightarrow \mathbb{N}$  sobreyectiva.

Luego  $h : A \cup B \rightarrow \mathbb{N}$

$$f(x) = \begin{cases} 2g(x) & x \in A \\ 2f(x) + 1 & x \in B \end{cases}$$

Es evidentemente inyectiva, mas considerando que  $A$  es disjunto con  $B$  entonces podemos usar sus funciones ya biyectivas para verlo facilmente, también saldría tambien si no lo fueran!

Doy un ejemplo, sean  $a, a' \in A$  tal que  $f(a) = f(a')$  entonces  $2g(x) = 2g(x') \Rightarrow g(x) = g(x')$  como  $g$  biyectiva  $x = x'$

Biyectiva, se pueden ver casos pares e impares, si  $x \in \mathbb{N}$  es par seguro existe un  $x' \in \mathbb{N}$  tal que  $2x' = x$  y luego como  $x'$  es natural seguro tiene preimagen dada por  $g$  considerando que  $g$  es biyectiva

□

- ii. Sea  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una familia de conjuntos contables entonces  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  es contable

Devuelta vamos a considerar que son disjuntos dos a dos.

Unión de numerables finitos disjuntos es trivialmente numerable

Veamos unión numerable de numerables disjuntos (insisto si no lo fueran se reescriben convenientemente sacando las intersecciones, si alguna intersección fuese algun conjunto entero entonces no aportaba nada unirlos de todas maneras)

Sea  $A_n$  numerable existe  $f_n : \mathbb{N} \rightarrow A_n$  sobreyectiva

Usando esto tenemos  $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  dada por  $g(n, m) = f_n(m)$

Esta es inyectiva, si fijas un  $n$  entonces tienes  $f_n$  que es inyectiva entonces

Sean  $m, m' \in \mathbb{N}$  sabemos  $f_n(m) = f_n(m') \iff m = m'$

Si los  $n$  son distintos  $f_{n'}(m) \subseteq A_{n'} \neq A_n \supseteq f_n(m)$  entonces  $f_{n'}(m) \neq f_n(m) \quad \forall m \in \mathbb{N}$

Sea  $y \in \bigcup A_n$  luego  $y \in A_i$  para algún  $i \in \mathbb{N}$  entonces tenemos  $(i, f_i^{-1}(y)) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  que es claramente preimagen de  $y$

Luego  $\bigcup A_n$  es numerable

- iii. Sea  $A$  un conjunto finito y  $S = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} A^m$  entonces  $\#S = \aleph_0$

Como  $A$  es finito sabemos que  $A^m$  es finito para cualquier  $m \in \mathbb{N}$  además es evidente que son disjuntos para distintos  $m$ . Luego por ii) tenemos que  $S$  es numerable ( $\#S = \aleph_0$ )

Notemos que dado cualquier alfabeto hay mas números reales que palabras para nombrarlos. Esto vale por que dado un conjunto  $A$  de todos los caracteres posibles si hacemos  $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} A^m$  eso seria todas las palabras posibles de todas las longitudes posibles y por parte ii) esto es numerable

Ej 15) Sean  $A$  y  $B$  conjuntos disjuntos,  $A$  infinito y  $B$  numerable entonces:

(a) Existe una biyección entre  $A \cup B$  y  $A$

*Proof.* Simple sabemos que como  $A$  es infinito existe  $Y \subseteq A$  tal que  $Y$  es numerable  
Luego tenemos que

$$A \cup B = [(A \setminus Y) \cup Y] \cup B = (A \setminus Y) \cup (Y \cup B)$$

Luego como unión de numerables es numerable  $Y \cup B \sim Y$

Juntando todo tenemos

$$A \cup B = [(A \setminus Y) \cup Y] \cup B = (A \setminus Y) \cup (Y \cup B) \sim (A \setminus Y) \cup Y = A$$

□

(b) Si  $A$  no numerable y  $B \subseteq A$  numerable, existe una biyección entre  $A \setminus B$  y  $A$

*Proof.* Sabemos que  $B$  es numerable luego podemos escribirlo como  $B = \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$   
De este modo es facil ver que existe  $f : B \rightarrow \mathbb{N}_{pares}$  dada por  $f(b_n) = b_{2n}$  biyectiva  
Luego podemos armar  $g : X \rightarrow (X \setminus B) \cup B_{pares}$

$$g(x) = \begin{cases} x & x \in X \setminus B \\ f(x) & x \in B \end{cases}$$

Biyectiva. Entonces  $X \sim (X \setminus B) \cup B_{pares} \subseteq X$

□

(c) Observación. Como  $\mathbb{R}$  es no numerable y  $\mathbb{Q}$  es numerable  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \sim \mathbb{R}$  entonces  $\mathbb{R} \sim \mathbb{I}$

16) El conjunto de todos los polinomios de coeficientes racionales es numerable.

*Proof.* Por un lado tenemos una  $f : \mathbb{Q}^{n+1} \rightarrow \mathbb{Q}[X]_{\leq n}$  dada por

$$f(q_0, q_1, \dots, q_n) = \sum_{j=0}^n q_j X^j$$

que es trivialmente biyectiva.

Por otro lado sabemos  $\mathbb{Q}^{n+1} \sim \mathbb{N}$ . Luego  $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}^{n+1} \sim \mathbb{Q}[X]_{\leq n}$  para cualquier  $n \in \mathbb{N}$  fijo  
Entonces el conjunto de polinomios de algún grado fijo es numerable.

Finalmente

$$\mathbb{Q}[X] = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}[X]_{\leq n}$$

Como es una unión numerable de numerables,  $\mathbb{Q}[X]$  es numerable

□

17) Se dice que un número complejo  $z$  es *algebraico* si existen enteros  $a_0, \dots, a_n$  no todos nulos, tales que

$$a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n = 0$$

1. El conjunto de todos los números algebraicos es numerable

*Proof.* Por la definición sabemos que los números algebraicos son raíces complejas de algún polinomio de coeficientes enteros

Ahora sea  $f \in \mathbb{Q}[X]$  no nulo, el conjunto de las raíces complejas de ese polinomio  $S(f) = \{z \in \mathbb{C} : f(z) = 0\}$

Es finito, a lo sumo  $\text{gr}(f)$  (puede ser 0 inclusive)

Luego

$$\mathcal{A} = \bigcup_{f \in \mathbb{Q}[X] \setminus \{0\}} S(f)$$

Donde  $\mathcal{A}$  es el conjunto de los números algebraicos

Y como  $\mathcal{A}$  es unión de numerables conjuntos contables y disjuntos es a lo sumo numerable

Pero además es fácil ver que por ejemplo los racionales son todos algebraicos (ejercicio para el lector)

Luego hay infinitos números algebraicos, entonces  $\mathcal{A}$  es numerable

□

2. Existen números reales que no son algebraicos (Estos se llaman *trascendentes*)

Por inciso anterior sabemos que hay numerables *algebraicos* sin embargo hay más que numerables *reales* por ende debe haber reales que no son algebraicos

18) Sea  $X \subseteq \mathbb{R}_{>0}$  un conjunto de números reales positivos. Supongamos que existe una constante positiva  $C$  tal que para cualquier subconjunto finito  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq X$  vale  $\sum_{i=1}^n x_i \leq C$  entonces  $X$  es contable

*Proof.* Sea  $S = \{p : p = \sum_{i=1}^n x_i \leq C \quad x_i \in X\}$  luego  $C$  es supremo de  $S$  pero entonces tenemos una sucesión de  $S$ ,  $p_n \in S \quad \forall n \in \mathbb{N}$  que converge a  $C$  de la forma

$$p_1 = x_1 + \dots + x_n \text{ suma finita de elementos de } X \text{ tal que la suma es menor que } C$$

$$p_2 = r_1 + \dots + r_n \text{ devuelta suma finita de elementos de } X$$

...

$$p_n = z_1 + \dots + z_n \text{ lo mismo que antes}$$

Ahora afirmamos que las  $x, r, \dots, z$  cubrieron todo  $x \in X$ , si no fuera cierto tendría un  $p \in X$  que no está en alguna suma. Pero entonces podemos armar otra sucesión:

$$a_1 = p_1 + p$$

$$a_2 = p_2 + p$$

...

$$a_n = p_n + p$$

Y sabemos que cada termino de  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq S$  por que al fin y al cabo siguen siendo sumas finitas de elementos de  $X$  por lo que su resultado tiene que ser menor que  $C$

Pero por otro lado  $a_n \rightarrow C + p > C$  lo que es absurdo por que  $C$  es supremo.

Luego , no existía dicho  $p$  por ende en esas sumas contemplamos todos los elementos de  $X$  pero entonces tenemos numerables elementos (términos de la sucesión) de finitos elementos (sumas de cada término de la sucesión) eso es una unión numerable de finitos

$\Rightarrow X$  es a lo sumo numerable

□

19) Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función monótona entonces

$$\#(\{x \in \mathbb{R} : f \text{ no es continua } \}) \leq \aleph_0$$

*Proof.* Sin perdida de generalidades tomamos  $f$  monótona creciente y consideramos  $D(f)$  el conjunto de discontinuidades de  $f$

Tomemos un  $x \in \mathbb{R}$  luego podemos definir dos conjuntos no vacíos

$$L_x = \{f(y) : y \in \mathbb{R}, y < x\} \quad R_x = \{f(z) : z \in \mathbb{R}, z > x\}$$

$L_x$  está acotado superiormente por  $f(x)$  y  $R_x$  está acotado inferiormente por  $f(x)$

Entonces existen y podemos tomar  $l_x = \sup(L_x)$  y tambien  $r_x = \inf(R_x)$

Ahora vamos a probar que

$$(1) \quad l_x = r_x \Rightarrow f \text{ continua en } x$$

(2) Por un lado sabemos que  $l_x \leq f(x) \leq r_x$

Ahora supongamos que  $r_x = l_x$  luego  $f(x) = r_x = l_x$

Sea  $\epsilon > 0$ , como  $f(x) = \sup(L_x) \Rightarrow \exists y \in \mathbb{R}, \quad y < x$  tal que  $f(x) - \epsilon \leq f(y) \leq f(x)$

Misma idea como  $f(x) = \inf(R_x) \Rightarrow \exists z \in \mathbb{R}, \quad z > x$  tal que  $f(x) \leq f(z) \leq f(x) + \epsilon$

Ahora tomemos  $\delta = \min\{x - y, z - x\}$  y consideremos  $t \in (x - \delta, x + \delta)$ ,  $t \neq x$

Supongamos primero  $t \in (x - \delta, x)$  luego  $y = x - (x - y) \leq x - \delta < t < x$

Entonces  $y < t < x$  como  $f$  es creciente  $f(x) - \epsilon < f(y) \leq f(t) \leq f(x)$

Repitiendo esta idea pero usando con  $t \in (x, x + \delta)$  tenemos  $z = x + (z - x) \geq x + \delta > t > x$

Nuevamente como  $f$  creciente  $f(x) + \epsilon > f(z) \geq f(t) \geq f(x)$

Luego  $f(x) - \epsilon < f(t) < f(x) + \epsilon \quad \forall t \in (x - \delta, x + \delta)$

O lo que es lo mismo  $f(B_\delta(x)) \subseteq B_\epsilon(f(x))$  equivalentemente  $f$  es continua

Ahora usando esto tenemos que si

$$f \text{ discontinua en } x \Rightarrow l_x \neq r_x$$

Y por (2) tenemos

$$f \text{ discontinua en } x \Rightarrow l_x < r_x$$

Entonces ahora sabemos que para cada discontinuidad o lo mismo para cada  $x \in D(f)$

Tenemos un intervalo abierto  $I_x = (l_x, r_x)$

Sabiendo esto vamos a ver que

$$x, y \in D(f) \Rightarrow I_x \cap I_y = \emptyset$$

Sin pérdida de generalidades sea  $x < y$ . Para ver que  $I_x \cap I_y = \emptyset$  basta ver que  $r_x \leq l_y$

Supongamos que no, luego  $r_x > l_y$  ahora tomemos  $z$  promedio de  $x$  e  $y$ ,  $z = \frac{1}{2}(x + y)$

Tenemos  $x < z < y$  como  $f$  es creciente  $r_x \leq f(z) \leq l_y < r_x$  lo que es absurdo

Luego para cada discontinuidad tenemos un ÚNICO intervalo que es disjunto con cualquier otro o lo que es lo mismo tenemos una función biyectiva entre cada discontinuidad y un intervalo abierto de  $\mathbb{R}$

Finalmente como sabemos que tenemos a lo sumo numerables intervalos abiertos y disjuntos en  $\mathbb{R}$  entonces tenemos a lo sumo numerables discontinuidades

Esto último es trivial, y queda como ejercicio para el lector. Pero para dar una idea, si tenemos conjuntos disjuntos de  $\mathbb{R}$  por densidad sabemos que en cada uno de ellos hay seguro un racional y este racional no se repite en otro, si no no serían disjuntos. Luego sabemos que para cada conjunto podemos tomar un racional y como hay numerables racionales, la cantidad de conjuntos es a lo sumo numerable  $\square$

20) Sea  $A$  un conjunto numerable, el conjunto de las partes finitas de  $A$  (es decir, el subconjunto de  $\mathcal{P}(A)$  formado por los subconjuntos finitos de  $A$ ) es numerable

*Proof.* Primero veamos cuantos subconjuntos de cardinal  $n \in \mathbb{N}$  tenemos.

Para eso tomemos la función  $\phi : \mathcal{P}_n(A) \rightarrow A^n$  dada por  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \mapsto (a_1, \dots, a_n)$  donde  $\mathcal{P}_n(A)$  es subconjuntos de  $\mathcal{P}(A)$  donde solo hay conjuntos de cardinal  $n$ . La función es claramente inyectiva, por que mover mover elementos de un conjunto da el mismo conjunto y cambiar elementos da diferentes  $n$ -uplas. Y sabemos que  $\#A^n = \aleph_0^n$  por que  $A$  es numerable, luego  $\#\mathcal{P}_n(A) \leq \aleph_0^n$  Entonces

$$\mathcal{P}_{finitas}(A) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_n(A)$$

Que es unión numerable de numerables entonces es numerable. Acá faltaría agregar el conjunto  $\{\emptyset\}$ , que es un subconjunto finito de partes, pero sigue valiendo obviamente (ejercicio para el lector si no le parece obvio)  $\square$

21)

$$1. A_1 = \{(a_n) : a_n \in \mathbb{N} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$$

*Proof.* Sabemos que  $\#A_1 = \#\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \aleph_0^{\aleph_0}$

$$\text{Y sabemos } \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} \geq \aleph_0^{\aleph_0} \geq 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$$

$$\text{Entonces } \#A_1 = \mathfrak{c} \quad \square$$

$$2. A_2 = \{(a_n) \subseteq \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$$

*Proof.* Podemos definir  $f : A_1 \rightarrow A_2$  como la función que manda  $a_n$  en  $b_n$

Donde  $b_1 = a_1$  y  $b_n = b_{n-1} + a_n + 1$  es claramente biyectiva si se piensa un momento

$$\text{Por ende } \#A_2 = \#A_1 = \mathfrak{c} \quad \square$$

$$3. A_3 = \{(a_n) \subseteq \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$$

*Proof.*  $\square$

4.  $A_4 = \{(q_n) \subseteq \mathbb{Q} : \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = 0\}$

*Proof.* Primero tenemos que  $A_3 \subseteq \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  y  $\#\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \mathfrak{c}$  entonces  $\#A_3 \leq \mathfrak{c}$

Por otro lado tenemos  $\phi : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow A_3$  dada por  $f(a_n) = \frac{a_n}{n}$  que es inyectiva

Entonces  $\#A_3 \geq \#\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \geq \mathfrak{c}$

□

5.  $A_5 = \{(q_n) \subseteq \mathbb{Q} : (q_n) \text{ es periódica} \}$

*Proof.* Sabemos que toda sucesión en  $A_5$  se repite en algún momento. Sea  $P_k$  el conjunto de sucesiones que se repiten a partir del elemento  $k$ ,  $a_{n+k} = a_k$ .

Ahora consideremos  $f : P_k \rightarrow \mathbb{Q}^k$  dada por  $f(a_n) = (a_1, \dots, a_k)$  que es biyectiva

Entonces  $\#P_k = \#\mathbb{Q}^k = \#\mathbb{N}^k = \aleph_0$

Y luego tenemos que

$$A_5 = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} P_k$$

Luego  $A_5$  es unión numerable de numerable  $\#A_5 = \aleph_0$

□

6.  $A_6 = \{(a_n) \subseteq \mathbb{N} : 1 \leq a_n \leq m \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$

*Proof.* Sabemos que  $X_6 = \{1, \dots, m\}^{\mathbb{N}}$

Luego  $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} < m^{\aleph_0} = \#A_6 < \#\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$  resumiendo  $\#A_6 = \mathfrak{c}$

□

22)

i.  $A_1 = \{I : I \text{ es un intervalo de extremos racionales}\}$

*Proof.* Sea  $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}$  sabemos  $\#A = \aleph_0$

Por otro lado tenemos  $f : A \rightarrow A_1$  dada por  $f(a, b, c) = [a, a + \frac{b}{c}]$  es sobreyectiva

Entonces  $\#A_1 \leq \#\mathbb{Q} \times \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N} = \aleph_0$

Y por otro lado  $f : A_1 \rightarrow \mathbb{Q}$  dada por  $f([a, b]) = a$  que es sobreyectiva también

Luego  $\#A_1 \geq \#\mathbb{Q} = \aleph_0$

□

ii.  $A_2 = \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}$

*Proof.* Sabemos que  $\#\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \#\mathbb{R} = \mathfrak{c}$

Luego tomemos la función  $f : A_2 \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  dada por  $f([a, b]) = (a, b)$  que no es sobreyectiva, por que  $(a, b)$  es una tupla y la tupla  $(a, b) \neq (b, a)$ . Pero es inyectiva

Entonces tenemos que  $\#A_2 \leq \#(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) = \mathfrak{c}$

Por otro lado miramos  $f : A_2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f([a, b]) = a$  es claramente NO inyectiva, pero es trivialmente sobreyectiva entonces  $\#A_2 \geq \#\mathbb{R} = \mathfrak{c}$

□

iii.  $I$ , sabiendo que  $\{A_i\}_{i \in I} \subset \mathbb{R}$  es una familia de intervalos disjuntos

*Proof.* Esto está probado más arriba, igual no es difícil, la idea usando axioma de elección y densidad es que para conjunto  $A_i$  podemos elegir un  $q \in \mathbb{Q}$  y esté va a estar solo en este conjunto, si no no serían disjuntos, de ahí podemos armar una biyección con  $\mathbb{Q}$  y por ende este conjunto es numerable  $\square$

iv.  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 3x + 2y \geq 7\}$

*Proof.*  $\square$

v.  $\mathbb{R}_{>0}$

*Proof.* Tenemos la inyección  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  con  $f(t) = e^t$

Y por otro lado tenemos la inyección  $f^{-1} : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f^{-1}(s) = \ln(s)$

Entonces por Cantor-Bernstein tenemos una biyección.

Notar que en realidad es fácil probar que ambas funciones son una la inversa de la otra y son ambas biyectivas..  $\square$

23) Unión numerable de conjuntos de cardinal  $\mathfrak{c}$  tiene cardinal  $\mathfrak{c}$ .

*Proof.* Sea  $A_n$  un sucesión de conjuntos de cardinal  $\mathfrak{c}$  luego para cada  $n \in \mathbb{N}$  tenemos un conjunto de cardinal  $\mathfrak{c}$  por ende una biyección  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow A_n$  y esto pasa para cada  $n \in \mathbb{N}$  entonces tenemos varias biyecciones  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow A_n$

Teniendo esto en cuenta podemos armar otra función  $g : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$

Dada por  $f(n, m) = f_n(m)$  que es evidentemente sobreyectiva

Luego  $\#\bigcup A_n \leq \#\mathbb{N} \times \mathbb{R} \leq \#\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathfrak{c}$

Y por otro lado sabemos que cualquier  $A_j$  con  $j \in \mathbb{N}$  está metido en la unión, y  $\#A_j = \mathfrak{c}$

Por ende  $\#\bigcup A_n \geq \#A_j = \mathfrak{c}$

Finalmente

$$\#\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \mathfrak{c}$$

$\square$

Ej 23) Sean  $a, b, c$  cardinales

i.  $a.(b + c) = ab + ac$

*Proof.* En este caso y considerando el álgebra de cardinales, tendríamos que buscar una función biyectiva  $f : A \times (B \cup C) \rightarrow (A \times B) \cup (A \times C)$  con  $\#A = a, \#B = b, \#C = c$  etc

Pero en este caso  $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$  por ende la función identidad serviría  $\square$



ii.  $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$

*Proof.* Siguiendo la misma idea deberíamos encontrar  $F : A^{B+C} \rightarrow A^B \cdot A^C$

El dominio tiene funciones de la pinta  $h : (B \cup C) \rightarrow A$

La imagen serían tuplas de funciones de la pinta  $(\alpha : B \rightarrow A, \phi : C \rightarrow A)$

Teniendo todo esto en claro y dado  $h \in A^{B+C}$  definimos  $F(h) = (h|_B, h|_C)$

Veamos que es biyectiva

Supongamos  $h, g \in A^{B \cup C}$  tales que  $F(h|_B, h|_C) = F(h) = F(g) = (g|_B, g|_C)$

Viéndolo así es evidente que si  $x \in B$  entonces  $h(x) = h|_B(x) = g|_B(x) = g(x)$

Y si  $x \in C$  entonces pasa lo mismo  $f(x) = f|_C(x) = g|_C(x) = g(x)$

Entonces  $f = g$  por lo que es inyectiva

Sea  $(k, l) \in A^B \times A^C$  podemos dar una función  $f \in A^{B \cup C}$  tal que para cada  $x \in B \cup C$

$$f(x) = \begin{cases} k(x) & \text{si } x \in B \\ l(x) & \text{si } x \in C \end{cases}$$

Y es claro que  $F(f(x)) = (k(x), l(x))$  entonces para cada  $(k, l)$  en la imagen, puedo encontrar una  $f$  en el dominio. Por lo tanto es  $F$  es sobreyectiva

Uniendo todo encontramos  $F$  biyectiva □

iii.  $(a^b)^c = a^{bc}$

*Proof.* Este puede parecer confuso en un principio pero dejo aquí la idea correcta para que lo piensen.

Necesito una función biyectiva  $F : (A^B)^C \rightarrow A^{B \times C}$

Consideremos  $h \in (A^B)^C$  y  $(b, c) \in (B \times C)$

Podemos definir  $F(h)(b, c) = h(c)(b)$  esto significa 'el resultado de evaluar  $F$  en una función es otra función que puede ser evaluada en una tupla  $(b, c)$ '

Esto tiene sentido por que  $F$  recibe funciones y las manda a funciones que deben poder recibir tuplas.

Con estas dos ideas debería alcanzar para que el lector pueda entender la validez de la demostración

Ahora faltaría ver que es biyectiva. Veamos que es facil encontrar una inversa

Sea  $k \in A^{B \times C}$  y  $b \in B, c \in C$  tenemos  $F^{-1}(k)(c)(b) = k(b, c)$

Ahora veamos que es inversa.

$$F^{-1}(F(h))(c)(b) = F(h)(b, c) = h(c)(b) \Rightarrow F^{-1}(F(h)) = h \quad \forall h \in (A^B)^C$$

$$F(F^{-1}(k))(b, c) = F^{-1}(k)(c)(b) = k(b, c) \Rightarrow F(F^{-1}(k)) = k \quad \forall k \in A^{B \times C}$$

Efectivamente  $F$  es biyectiva □

iv.  $(ab)^c = a^c.b^c$

*Proof.* No voy a explicar mucho, por que para entender se puede pensar en una hoja usando las mismas ideas hasta ahora.

Tomemos una  $F : (A.B)^C \rightarrow (A^C.B^C)$

Dada por  $F(h) = (h_1, h_2)$

Con  $h_1, h_2$  son la primera y segunda coordenada (respectivamente) de la imagen de  $h$   $\square$

v. Si  $b \leq c$ , entonces  $a^b \leq a^c$  y  $b^a \leq c^a$

25)  $n^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$  con  $n \geq 2$

*Proof.* Primero veamos  $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$

Usemos álgebra de cardinales  $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$

Sirve recordar que  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$

Luego  $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} \leq \aleph_0^{\aleph_0} \leq \mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c} \Rightarrow \aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$

Tambien  $2^{\aleph_0} \leq n^{\aleph_0} \leq \aleph_0^{\aleph_0}$   $\square$

26)  $\mathbb{R}$  es unión disjunta de  $\mathfrak{c}$  conjuntos de cardinal a  $\mathfrak{c}$

Tenemos una union de conjuntos de cardinal  $\mathfrak{c}$  para cada uno de estos conjuntos  $A_j$  tenemos una funcion  $f_j : \mathbb{R} \rightarrow A_j$  con  $j \in \mathbb{R}$  biyectiva.

Ahora definimos una función  $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \bigcup_{j \in \mathbb{R}} A_j$

Dada por  $F(j, h) = f_j(h)$  que es biyectiva

Luego tenemos que

$$\bigcup_{i \in \mathbb{R}} A_j \sim \mathbb{R} \times \mathbb{R} \sim \mathbb{R}$$

Luego existe una biyección entre  $\mathbb{R}$  asi que como conjunto son 'lo mismo'

Ej 27) Sean

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}) = \{f | f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\} \quad \mathcal{F}(\mathbb{Q}) = \{f | \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) | f \text{ es continua} \} \quad \mathcal{C}(\mathbb{Q}) = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{Q}) | f \text{ es continua} \}$$

i.  $\#\mathcal{F}(\mathbb{R}) > \mathfrak{c}$

*Proof.* Sabemos que  $\#\mathcal{F}(\mathbb{R}) = \#\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}} \geq 2^{\mathfrak{c}} = \#\mathcal{P}(\mathbb{R}) > \#\mathbb{R} = \mathfrak{c}$   $\square$

ii.  $\#\mathcal{F}(\mathbb{Q}) = \mathfrak{c}$

*Proof.* Sabemos que  $\#\mathcal{F}(\mathbb{Q}) = \#\mathbb{R}^{\mathbb{Q}} = \mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$   $\square$

iii.  $\#\mathcal{C}(\mathbb{Q}) = \mathfrak{c}$

*Proof.* Por un lado tenemos que  $\#\mathcal{C}(\mathbb{Q}) \leq \#\mathcal{F}(\mathbb{Q}) = \mathfrak{c}$

Pero por otro lado sabemos que  $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$  contiene al conjunto  $A$  de funciones constantes  $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$  y sabemos que  $A$  tiene cardinal  $\mathfrak{c}$

Entonces  $\#\mathcal{C}(\mathbb{Q}) = \mathfrak{c}$  □

iv. La función  $\phi : \mathcal{C}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{Q})$  dada por  $\phi(f) = f|_{\mathbb{Q}}$  es inyectiva.

*Proof.* Sean  $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$  talque  $\phi(f) = \phi(g)$  entonces  $f|_{\mathbb{Q}}(x) = g|_{\mathbb{Q}}(x) \quad \forall x \in \mathbb{Q}$

Pero entonces  $f(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$  por lo que  $f = g$  entonces  $\phi$  es inyectiva

Esta es una demostración de taller por ende no la voy a hacer, la idea es suponer que restringiendo a  $\mathbb{Q}$  son iguales pero no lo son en  $\mathbb{R}$  y usando la propiedad de que continua manda sucesiones convergentes en convergentes llegas a un absurdo □

v.  $\#\mathcal{C}(\mathbb{R}) = \mathfrak{c}$

Teniendo el item anterior sabemos que  $\#\mathcal{C}(\mathbb{R}) \leq \#\mathcal{C}(\mathbb{Q}) = \mathfrak{c}$

Usando que el conjunto en cuestion contiene a las funciones constantes  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tenemos que  $\#\mathcal{C}(\mathbb{R}) \geq \mathfrak{c}$

Entonces  $\#\mathcal{C}(\mathbb{R}) = \mathfrak{c}$

Ej 28) El conjunto de partes numerables de  $\mathbb{R}$  (es decir, el subconjunto de  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  formado por todos los subconjuntos numerables de  $\mathbb{R}$ ) tiene cardinal  $\mathfrak{c}$

*Proof.* Consideremos la funcion  $f : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{P}_{numerable}(\mathbb{R})$  dada por  $f(a_1, a_2, \dots) = \{a_1, a_2, \dots\}$  Esta no es inyectiva, pero es claramente sobreyectiva

Luego  $\mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \leq \mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$

Por otro lado sabemos que partes numerables contiene a partes numerables y acotadas adentro llamemosla  $\mathcal{P}_{NumAc}(\mathbb{R})$  y ahora tenemos la función  $g : \mathcal{P}_{NumAc}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $g(A) = \inf(A)$  que es evidentemente sobreyectiva usando la inclusión tenemos que  $\#\mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \geq \mathfrak{c}$  □

Ej 29) Sean  $A, B \neq \emptyset$ . Luego o bien existe  $f : A \rightarrow B$  inyectiva o bien  $g : B \rightarrow A$  inyectiva. (Es decir  $\#A \leq \#B$  o  $\#B \leq \#A$ )

Supongamos que no existe  $f : A \rightarrow B$  inyectiva entonces  $\forall a \in A \quad \exists b \in B$  tal que  $f(a) = b$ . Y para algunos  $a \in A$  o quizas para todos existe más de un  $b \in B$

Por axioma de elección tenemos una función que elije elementos llamemosla  $h$

Ahora podemos armar una función  $g : B \rightarrow A$  dada por  $g(b) = h(f^{-1}(b))$