

Palabras introductorias

Cálculo Avanzado  
Universidad de Buenos Aires

Teoría  
Cardinalidad

Javier Vera  
L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X

Cardinalidad es un tema que para el lector en este momento de su vida puede parecer ajeno y anti intuitivo, pero en un análisis más profundo y con suerte habiendo entendido los conceptos mas adelante expuestos, él podrá confirmar que en realidad parecería ser una manera mas orgánica de definir a los 'numeros' y algunas de sus operaciones

**Definición 0.1.** Sean  $X$  e  $Y$  dos conjuntos. Decimos que son coordinables (o equipotentes, o que tienen el mismo cardinal) si existe  $f : X \rightarrow Y$  biyectiva. [Notacion:  $X \sim Y$ ]

**Observación.** Esta relacion  $\sim$  es de equivalencia, la demostración es trivial y queda como ejercicio de repaso para el lector

Ejemplos para arrancar:

$$\mathbb{N} \sim \{ \text{ numeros pares } \}$$

$$\mathbb{Q} \sim \mathbb{N} \text{ (se ve usando un argumento de diagonales)}$$

**Observación.** Definimos el cardinal de un conjunto  $X$  como la clase de equivalencia de los conjuntos coordinables con  $X$ :

$$\#X = Card(X) = \{Y : X \sim Y\}$$

Algunos cardinales importantes tiene su símbolo unico

$$\#(\mathbb{N}) = \aleph_0$$

$$\#(\mathbb{R}) = \mathfrak{c}$$

$$\#\{1, 2, 3 \dots, n\} = n$$

$$\#\{a, b\} = 2$$

Atención no confundir este último ejemplo y otros parecidos con 'numeros' per se, son clases de equivalencia. Más adelante se verá que en algunos casos se comportan parecidos a los 'numeros' que conocemos y que muchas veces directamente se comportan igual que ellos

**Observación.** Llamemos  $\mathbb{I}_n = \{1, 2, 3 \dots, n\}$  el intervalo inicial del conjunto  $\mathbb{N}$  de los números naturales

Atención para poder llamar  $n$  a  $\#\mathbb{I}_n$  necesitamos que para  $n \neq m$ ,  $\mathbb{I}_n$  y  $\mathbb{I}_m$  esten en distintas clases de equivalencia según  $\sim$ . Demostrémoslo..

Pero antes un lema para facilitar el asunto

**Lema 1.** Sea  $A \subseteq \mathbb{I}_n$ . Si existe  $f : \mathbb{I}_n \rightarrow A$  inyectiva, entonces  $A = \mathbb{I}_n$

*Proof.* Induccion

( $n = 1$ ) para el lector

( $n \rightarrow n + 1$ ). Sea  $A \subseteq \mathbb{I}_{n+1}$ , luego tomemos  $f : \mathbb{I}_{n+1} \rightarrow A$  inyectiva

Supongamos  $A \neq \mathbb{I}_{n+1}$  (algo tiene que estar en  $\mathbb{I}_n$  y no en  $A$ ):

Caso I:

$$n + 1 \notin A \Rightarrow A \subset \mathbb{I}_n \quad b = f(n + 1)$$

$f \upharpoonright_{\mathbb{I}_n} : \mathbb{I}_n \rightarrow A - b \subset A$  inyectiva, o lo que es lo mismo  $f \upharpoonright_{\mathbb{I}_n} : \mathbb{I}_n \rightarrow A$  inyectiva

Por hipotesis inductiva  $\mathbb{I}_n = A - b \subset A \subset \mathbb{I}_n$  absurdo

Caso II:

$$n + 1 \in A. \text{ Sea } p \in \mathbb{I}_{n+1} \setminus A \text{ Luego } p \notin A$$

Sea  $g : \mathbb{I}_{n+1} \rightarrow \mathbb{I}_{n+1}$

$$n + 1 \mapsto p$$

$$p \mapsto n + 1$$

$$x \mapsto x \quad x \neq p \quad x \neq n + 1$$

$g$  es biyectiva y  $g(A) \subset \mathbb{I}_n$

Miremos

$$g \circ f : \mathbb{I}_{n+1} \rightarrow g(f(\mathbb{I}_{n+1})) = g(A)$$

$g \circ f$  es inyectiva por composición de inyectivas

Pero ademas como  $p \notin A$  luego  $n + 1 \notin g(A)$

Luego tenemos una función que va desde  $\mathbb{I}_{n+1}$  hacia un conjunto que no tiene al  $n + 1$  y está metido en  $\mathbb{I}_{n+1}$

Entonces tenemos las hipótesis del caso I , por lo tanto esto es absurdo

□

**Teorema 2.** Sean  $n, m \in \mathbb{N}$  Entonces,

$$\mathbb{I}_n \sim \mathbb{I}_m \iff n = m$$

*Proof.*  $\Rightarrow$ ) Sabemos que  $\mathbb{I}_n \subseteq \mathbb{I}_m$  o  $\mathbb{I}_n \supseteq \mathbb{I}_m$  y sabemos que hay una inyección entre ellos por que  $\mathbb{I}_n \sim \mathbb{I}_m$  luego por lema  $\mathbb{I}_n = \mathbb{I}_m \Rightarrow m = n$

$\Leftarrow$ ) Por absurdo supongamos  $n \neq m$  y sin perdida de generalidades  $n < m \Rightarrow \mathbb{I}_n \subset \mathbb{I}_m$

Entonces por hipótesis  $\mathbb{I}_n \sim \mathbb{I}_m$  sabemos  $\exists f : \mathbb{I}_n \rightarrow \mathbb{I}_m$  biyectiva

Pero entonces por lema  $\mathbb{I}_m = \mathbb{I}_n$  absurdo

$\Rightarrow n = m$

□

**Definición 0.2.** Un conjunto  $A$  es finito si existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $A \sim \mathbb{I}_n$

**Definición 0.3.** Un conjunto  $A$  es infinito si no es finito

**Observación.** Si uno puede definir conjuntos finitos sin usar los numeros naturales puede luego definir los numeros naturales a partir de los cardinales

**Definición 0.4.** Un conjunto  $A$  es numerable si  $A \sim \mathbb{N}$ . Equivalentemente si  $\#A = \aleph_0$

**Observación.** Decimos que  $\#X \leq \#Y$  si existe  $f : X \rightarrow Y$  inyectiva

**Observación.** Decimos que  $\#X < \#Y$  si  $\#X \leq \#Y$  pero  $X \not\sim Y$

**Observación.** Dado un conjunto  $X$  el conjunto de *partes* de  $X$  es  $\mathcal{P}(X) = \{A : A \subset X\}$

**Teorema 3** (Teorema de Cantor). Sea  $X$  un conjunto. Entonces  $\#X < \#\mathcal{P}(X)$

*Proof.*  $f : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$  definida como  $x \mapsto x$  esta es inyectiva luego  $\#X \leq \#\mathcal{P}(X)$

Sea  $g : X \rightarrow \mathcal{P}(X)$  (si  $x \in X \Rightarrow g(x) \subseteq X$ )

Ahora  $x \in g(x)$  o  $x \notin g(x)$ . Definamos  $B = \{x \in X : x \notin g(x)\}$

Supongamos que  $B \in \text{im}(g)$  luego  $\exists y / B = g(y)$

- Ahora si  $y \in B \Rightarrow y \notin g(y)$  por como esta definido  $B$  esto es absurdo
- Si  $y \notin B \Rightarrow y \in g(y)$  pero entonces  $y \in B$  absurdo

Luego  $\nexists y \in X / g(y) = B \Rightarrow B \notin \text{im}(g)$

Entonces  $B \notin \mathcal{P}(X)$

$\Rightarrow g$  no puede ser suryectiva

Observación Si  $B = \emptyset$  luego si definimos  $f(\emptyset) = \emptyset$  sabemos que  $\emptyset \notin \emptyset$  dado que este no es siquiera un conjunto pero entonces  $B = \{\emptyset\}$  pero entonces  $B$  no era vacío, lo que es absurdo

Luego tenemos que  $\nexists x / g(x) = B$  pero  $B \subset \mathcal{P}(X)$  luego  $g$  no puede ser suryectiva  $\square$

**Observación.**  $X$  es numerable si y solo si  $X$  se puede escribir como una sucesión de elementos distintos:  $X = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  con  $x_n \neq x_m$  si  $n \neq m$

*Proof.*  $\Rightarrow$ )  $X$  numerable, luego  $\exists f : \mathbb{N} \rightarrow X$  biyectiva

Definimos  $x_n = f(n)$  entonces  $X = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

La vuelta es trivial  $\square$

**Teorema 4.** Sea  $X$  infinito. Entonces existe  $Y \subset X$  numerable

*Proof.*  $X$  infinito  $\Rightarrow X$  no vacío  $\Rightarrow x_1 \in X$

$X \setminus x_1 \neq \emptyset \Rightarrow \exists x_2 \in X \setminus x_1$  con  $x_2 \neq x_1$

Repitiendo esto inductivamente tenemos un conjunto numerable  $Y$  subconjunto de  $X$   $\square$

**Teorema 5.** Sea  $X$  un conjunto. Entonces,  $X$  es infinito si y solo si es coordinable con un subconjunto propio

*Proof.*  $\Rightarrow$ )  $X$  infinito luego por Teorema 4

$X$  contiene algún  $Y$  numerable  $Y = \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$

Sea  $Y_2 = \{y_2, y_4, y_6 \dots\}$  luego  $Y \sim Y_2$

$g : Y \rightarrow Y_2$  dada por  $g(y_n) = y_{2n}$

Luego  $f : X \rightarrow (X \setminus Y) \cup Y_2$  dada por

$$f(a, b) = \begin{cases} x & x \notin Y \\ g(x) & x \in Y \end{cases}$$

es biyectiva

$\Leftarrow$ ) Supongamos que  $X$  es finito ahora sabemos por hipótesis  $\exists Y \subset X$  tal que  $X \sim Y$  Entonces  $\exists f : X \rightarrow Y$  biyectiva (en particular inyectiva)

Pero por lema 3 tenemos  $X = Y$  absurdo

Observación: El lema 3 sirve para  $A \subseteq \mathbb{I}_n$  osea para conjuntos finitos

Luego no existe dicha función, lo cual es absurdo tambien que provino de suponer  $X$  finito  $\square$

**Teorema 6.** Sea  $X$  un conjunto. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

- $X$  es infinito
- Existe una función inyectiva de  $\mathbb{N}$  a  $X$  (o  $X$  tiene un subconjunto numerable)
- $X$  es coordinable a un subconjunto propio
- $X$  es coordinable a  $X \setminus x_0$  para cualquier  $x_0 \in X$

**Teorema 7** (Teorema de Cantor-Schroeder-Bernstein). Si existen  $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow X$  inyectivas, entonces existe  $h : X \rightarrow Y$  biyectiva

*Proof.* Definamos  $\Phi : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ ,

$$\Phi(A) = X \setminus g(Y \setminus f(A))$$

Esta función es creciente, probemoslo.

$$A \subset B$$

$$f(A) \subset f(B)$$

$$Y \setminus f(A) \supset Y \setminus f(B)$$

$$g(Y \setminus f(A)) \supset g(Y \setminus f(B))$$

$$X \setminus g(Y \setminus f(A)) \subset X \setminus g(Y \setminus f(B))$$

$$\Phi(A) \subset \Phi(B)$$

Luego  $\Phi$  es creciente

Sea  $\Omega = \{C \subset X : \Phi(C) \subset C\}$  se puede verificar que  $\Omega$  no es vacío,  $X \in \Omega$ . Luego tiene sentido definirse

$$A = \bigcap_{C \in \Omega} C$$

Por como esta definido  $A$  sabemos  $A \in C \quad \forall C \in \Omega$  y ademas sabemos que  $\Phi$  es creciente y que para  $\forall C \in \Omega$  se da  $\Phi(C) \subset C$ . Luego juntando todo tenemos

$$\Phi(A) \subset \Phi(C) \subset C \quad \forall C \in \Omega$$

Luego

$$\Phi(A) \subset \bigcap_{C \in \Omega} C = A \Rightarrow \Phi(A) \subset A$$

Usando  $\Phi$  creciente

$$\Phi(\Phi(A)) \subset \Phi(A) \Rightarrow \Phi(A) \in \Omega$$

Pero devuelta como

$$A \subset C \quad \forall C \in \Omega \quad \text{y} \quad \Phi(A) \in \Omega \Rightarrow A \subset \Phi(A)$$

Finalmente  $A = \Phi(A) \Rightarrow A = X \setminus (g(Y \setminus f(A)))$

Ahora si definimos a partir de las  $f$  y  $g$  inyectivas que tenemos por hipótesis  $X_1 = A$ ,  $Y_1 = f(X_1)$ ,  $Y_2 = Y \setminus Y_1$ ,  $X \setminus X_1 = X_2$  podemos ver que

$$X_1 = X \setminus g(Y \setminus f(X_1)) \iff g(Y \setminus f(X_1)) = X \setminus X_1 \iff g(Y_2) = X \setminus X_1 = X_2$$

Estas nuevas  $f$ ,  $g$  son inyectivas, por que vienen de la  $f$  y  $g$  que por hipótesis eran inyectivas y son suryectivas por como estan construidas (ejemplo  $f(X_1)$  es exactamente igual a  $Y_2$  osea que todo elemento de  $Y_2$  tiene preimagen, si no  $f(X_1) \neq Y_2$ )

Luego tenemos nuevas  $f : X_1 \rightarrow Y_1$  y  $g : Y_2 \rightarrow X_2$  biyectivas

Con estas definimos  $h : X \rightarrow Y$

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in X_1 \\ g(x)^{-1} & x \in X_2 \end{cases}$$

que sabemos es biyectiva □

**Corolario 7.1.** El conjunto  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  es numerable

*Proof.* Por un lado  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  dada por  $f(n) = (n, 1)$  es inyectiva

Por otro lado  $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  dada por  $f(n, m) = 2^n 3^m$  tambien inyectiva

Por Schroeder Bernstein tenemos que existe biyección, luego  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$  □

**Corolario 7.2.** Para  $n \in \mathbb{N}$  sea  $X_n$  un conjunto numerable. Entonces,  $X = \bigcup_n X_n$  es numerable (Unión numerable de numerables es numerable)

*Proof.* Cada  $X_n$  es numerable  $\Rightarrow \exists f_n : \mathbb{N} \rightarrow X_n$  biyectiva

Luego  $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow X = \bigcup_n X_n$  dada por  $g(m, n) = f_n(m)$  suryectiva (no necesariamente inyectiva por que no necesariamente los  $X_n$  son disjuntos)

Pero con suryectividad sabemos que  $X$  tiene que ser contable ( $\#X \leq \#\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ) pero como es infinito luego  $X$  es numerable □

Notemos que de aqui es facil probar otro tipo de resultados por ejemplo que union de numerable de finitos (disjuntos) es numerable o que union numerable de finitos es contable

**Corolario 7.3.** La relación  $\leq$  entre cardinales es una relación de orden

**Observación.** Sea  $X$  numerable,  $Y \subset X$ . Entonces,  $Y$  es finito o numerable (o sea  $Y$  es contable)

*Proof.* Supongamos  $Y$  no es finito

Como  $X$  es numerable.  $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  con  $x_n$  distintos

$$n_1 = \min\{n \in \mathbb{N} / x_n \in Y\}$$

$$n_2 = \min\{n > n_1 / x_n \in Y\}$$

...

$$n_k = \min\{n > n_{k-1} / x_n \in Y\}$$

Sabemos que hay infinitos  $n_k$  dado que  $Y$  es infinito.

Luego  $Y = \{(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}\}$  probémoslo

$\supseteq$ ) es trivial

$\subseteq$ ) Sea  $y \in Y$  como  $y \in X$  sabemos  $\exists m \in \mathbb{N}/y = x_m$

Ahora como  $n_k$  es una sucesión  $k$  puede ser tan grande como uno quiera, por ende existen  $n_k \leq m < n_{k+1} = \min\{n > n_k/x_n \in Y\}$

Luego  $m = n_k$  si no llegaríamos a un absurdo entonces  $y = x_m = x_{m_k}$

□

**Observación.** Sea  $X$  numerable,

- Si existe  $f : X \rightarrow Y$  inyectiva, entonces  $Y$  es contable (a lo sumo numerable)
- Si existe  $f : X \rightarrow Y$  suryectiva, entonces  $Y$  es contable

**Proposición 1.** Si  $X$  es infinito, existe  $Y \subseteq X$ ,  $Y$  numerable, tal que  $X \sim X \setminus Y$

*Proof.* Como  $X$  es infinito  $\exists A \subseteq X$  numerable,  $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$

$Y = A_1 = \{a_{2n-1} : n \in \mathbb{N}\}$   $A_2 = \{a_{2n} : n \in \mathbb{N}\}$   $a_n \neq a_m$  ( $n \neq m$ )

$f : A \rightarrow A_2 = A \setminus A_1 = A \setminus Y$  dada por  $f(a_n) = a_{2n}$  biyectiva

Luego sea  $h(x) : X \rightarrow X \setminus Y$

$$h(x) = \begin{cases} x & x \in X \setminus A \\ f(x) & x \in A \end{cases}$$

□

**Observación.** Si  $X$  es infinito no numerable ademas sirve cualquier  $Y$  numerable. Esto va a ser obvio un par de demostraciones mas adelante.

**Lema 8.** Sea  $X \sim Y$  y  $X' \sim Y'$  además  $X \cap X' = \emptyset = Y \cap Y'$

$$X \cup X' \sim Y \cup Y'$$

*Proof.* Tenemos  $f : X \rightarrow Y$  y  $g : X' \rightarrow Y'$  ambas biyectivas.

Luego tenemos  $h : X \cup X' \rightarrow Y \cup Y'$  biyectiva dada por

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in X \\ g(x) & x \in X' \end{cases}$$

□

**Proposición 2.** Sea  $X$  infinito y  $X'$  numerable. Entonces  $X \cup X' \sim X$

Aclaración Tomo disjunta la unión por comodidad, pero no es necesario, por que se puede reescribir a  $X'$  como  $X'' = X' \setminus X$

Igualmente la gracia del ejercicio es cuando las cosas que estan en  $X'$  pero no en  $X$  son numerables, si no le estarías agregando finitas cosas a  $X$  y eso no es nada nuevo

*Proof.* Sea  $Y \subseteq X$  numerable tal que  $X \setminus Y \sim X$

Sabemos  $X' \cap X = \emptyset$

$$X \cup X' = [(X \setminus Y) \cup Y] \cup X' = (X \setminus Y) \cup (Y \cup X') \sim X \setminus Y \cup Y = X$$

Esto vale por que  $Y \cup X'$  es unión de numerables por ende vuelve a dar numerable y por ende es coordinable con  $Y$  numerable. Y la relacion  $\sim$  vale por el lema 8

□



**Observación.** Se puede probar con unión no disjunta, pero no es trivial, los que esten en ambos  $X, X'$  no cambian nada

Aquí podemos ver un ejemplo  $\#\mathbb{R} = \#\mathbb{I} \cup \mathbb{Q} = \#\mathbb{I}$

**Observación.** Sea  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} : a_n \in \{0, 1\}\}$  luego existe una biyección entre  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  y  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$

*Proof.* Sea  $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  dada por  $f(A) = (a_n)_n$

$$a_n = \begin{cases} 1 & n \in A \\ 0 & n \notin A \end{cases}$$

Probar que esta función es biyectiva queda como ejercicio para el lector

Dada esta demostración notemos que  $\#\{0, 1\}^{\mathbb{N}} = \#\mathcal{P}(\mathbb{N}) > \aleph_0$  □

**Proposición 3.** Sea  $A_0 = \{(a_n)_{n \geq 1} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} : \text{existe } m \text{ tal que } a_n = 0 \text{ si } n \geq m\}$  es numerable

Sea  $B_m = \{(a_n)_{n \geq 1} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} : a_n = 0 \text{ si } n \geq m\}$

Luego

$$A_0 = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m$$

Sabemos que cada  $B_m$  es finito luego union numerable de finitos es contable  $A_0$  es contable, pero además sabemos que  $A_0$  es infinito, por lo tanto es numerable

**Proposición 4.** Sea  $X = \{(a_n)_{n \geq 1} : a_n \in \{0, 1\} \text{ y } a_n = 1 \text{ para infinitos valores de } n\}$

Luego  $X = \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \setminus A_0$  y tenemos  $X \cup A_0 = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$

Pero recordemos  $X$  es infinito y  $A_0$  es numerable luego  $X \cup A_0 \sim X$

Luego  $X \sim X \cup A_0 \sim \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \Rightarrow \#X = \#\{0, 1\}^{\mathbb{N}} = \#\mathcal{P}(\mathbb{N})$

**Teorema 9.** Finalmente podemos probar  $\#\mathbb{R} = \#\mathcal{P}(\mathbb{N}) > \#\mathbb{N}$

*Proof.* Sabemos que  $\#\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \#X$

Definimos  $f : X \rightarrow [0, 1]$  como

$$f(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$$

que es biyectiva

Veamos que  $\#[0, 1] = \#\mathbb{R}$

Por un lado tenemos  $\mathbb{R} \sim (-1, 1)$  por medio de  $f : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$  dada por  $x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$  biyectiva

Por otro lado tenemos que  $(-1, 1) \sim (a, b)$  usando la recta que manada

$-1 \mapsto a$

$1 \mapsto b$

Ahora sabemos que  $(0, 1) \sim \mathbb{R}$  agregarle numerables puntos a algo infinito no cambia su cardinal, agregarle el 0 y el 1 tampoco

Luego  $[0, 1] \sim \mathbb{R}$

Juntando todo  $\#\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \#\mathbb{R}$  □

**Definición 0.5.** Dados dos cardinales,  $\alpha, \beta$  y  $X$  e  $Y$  disjuntos tales que  $\alpha = \#X, \beta = \#Y$  Podemos definir las siguientes operaciones:

$$\begin{aligned} \text{Suma:} & \quad \alpha + \beta = \#(X \cup Y) \\ \text{Producto:} & \quad \alpha \cdot \beta = \#(X \times Y) \\ \text{Potencia:} & \quad \alpha^\beta = \#\{F : Y \rightarrow X\} = \#(X^Y) \end{aligned}$$

Es importante que sean disjuntos para que todo esté bien definido

Veamos que la suma está correctamente definida:

Si tenemos  $X \sim X'$  e  $Y \sim Y'$  disjuntos  $\Rightarrow X \cup Y \sim X' \cup Y'$

Lo que acabamos de ver es que es lo mismo sumar  $X$  a  $Y$  que otros conjunto que sean coordinables (y por ende tengan el mismo cardinal) con alguno de ellos respectivamente

La multiplicación se ve de forma similar y el producto se ve aprovechando las funciones biyectivas que nos da la coordinabilidad y la  $F$  que nos da el producto

**Observación.** Teniendo esta aritmética de cardinales, podemos obtener ciertos resultados.

1.  $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$
2.  $\mathfrak{c} + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$
3.  $\mathfrak{c} + \aleph_0 = \mathfrak{c}$

*Proof.* Aquí nos vamos a apoyar en el hecho de que podemos usar cualquier par de conjuntos que tengan el cardinal que necesitamos para probarlo para todo conjunto

- 1)  $\{\text{pares}\} \cup \{\text{impares}\}$
- 2)  $[0, 1) \cup [1, 2) = [0, 2)$  cada uno de estos es coordinable con  $\mathbb{R}$
- 3) Lo mas directo es usando  $\mathfrak{c} \leq \mathfrak{c} + \aleph_0 \leq \mathfrak{c} + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$  esto usa Cantor-Bernstein por detras (tenemos dos funciones inyectivas entonces tenemos una biyectiva. Otra forma es notar que si a un conjunto infinito le agrego algo numerable no nos cambia el cardinal

□

**Definición 0.6.** ZZZZUsando la definicion del producto y sabiendo  $\#\{0, 1\} = 2$  y  $\#\mathbb{N} = \aleph_0$   
 $\#\mathbb{R} = \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$

Teniendo esto en cuenta veamos que:

1.  $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$
2.  $\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$
3.  $\mathfrak{c} \cdot \aleph_0 = \mathfrak{c}$

*Proof.* 1) sabemos que  $\aleph_0 \times \aleph_0 \sim \aleph_0$

$$2) \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}^2 = (2^{\aleph_0})^2 = 2^{\aleph_0 \cdot 2} = 2^{\aleph_0 + \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$$

□

**Observación.** Dado  $\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$  tenemos resultados interesantes. Primero

$$\mathbb{R} \sim \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$$

De la misma manera podemos probar

$$\mathbb{R} \sim \mathbb{R}^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como cualquier intervalo (no vacío) tiene cardinal  $\mathfrak{c}$ , concluimos que para cualquier  $\epsilon > 0$  y cualquier  $n \in \mathbb{N}$ , tenemos

$$(0, \epsilon) \sim \mathbb{R} \sim \mathbb{R}^n$$