UBA - exactas
Departamento de Matemática

# Cálculo Avanzado - Funciones continuas 1

## Primer cuatrimestre de 2020

Daniel Carando

Dto. de Matemática - FCEN - UBA

# Funciones continuas

Casi todo los resultados de esta clase están en la Sección 6.2 del apunte. Los ejemplos no son del apunte.

$(E, d)$ , $(E', d')$

$$\boxed{f : E \to E'}$$

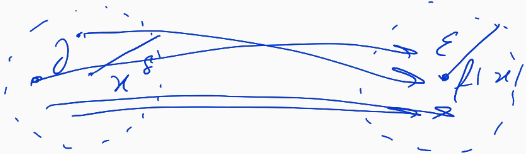
TALLER: $\underbrace{E}$ $\subset \underline{\mathbb{R}^n}$ $E' \subset \mathbb{R}^m$.

con dist EUCLÍDEA

# Funciones continuas

**Definición**

Una función $f : E \to E'$ es continua en el punto $x \in E$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $y \in E$, $d(x, y) < \delta$, entonces $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$.



# Funciones continuas

**Definición**

Una función $f : E \to E'$ es continua en el punto $x \in E$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que
si $y \in E$, $d(x, y) < \delta$, entonces $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Esta condición equivale a: para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f(y) \in B(f(x), \varepsilon)$ para todo $y \in B(x, \delta)$.

# Funciones continuas

**Definición**

Una función $f : E \to E'$ es continua en el punto $x \in E$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $y \in E$, $d(x, y) < \delta$, entonces $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Esta condición equivale a: para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f(y) \in B(f(x), \varepsilon)$ para todo $y \in B(x, \delta)$.

Es decir, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\boxed{f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \varepsilon).}$$

## Funciones continuas

**Definición**

Una función $f : E \to E'$ es continua en el punto $x \in E$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $y \in E$, $d(x,y) < \delta$, entonces $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Esta condición equivale a: para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f(y) \in B(f(x), \varepsilon)$ para todo $y \in B(x, \delta)$.

Es decir, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$f(B(x,\delta)) \subset B(f(x), \varepsilon).$$

**Observación**

Una función $f : E \to E'$ es continua en el punto $x \in E$ si y sólo si para cada entorno $V$ de $f(x)$ en $E'$, existe un entorno $U$ de $x$ en $E$ tal que $f(U) \subset V$.

(EJERCICIO)

**Observación**

Una función $f : E \to E'$ es continua en el punto $x \in E$ si y sólo si para cada entorno $V$ de $f(x)$ en $E'$, existe un entorno $U$ de $x$ en $E$ tal que $f(U) \subset V$.

**Observación**

Una función $f : E \to E'$ es continua en el punto $x \in E$ si y sólo si para cada entorno $V$ de $f(x)$ en $E'$, existe un entorno $U$ de $x$ en $E$ tal que $f(U) \subset V$.

Decir que $f(U) \subset V$ es equivalente a decir que $U \subset f^{-1}(V)$, con lo cual podemos afirmar que para cada entorno $V$ de $f(x)$, la imagen inversa $f^{-1}$ es un entorno de $x$.

$$\longrightarrow \quad f^{-1}(V) = \{ y \in E \; / \; f(y) \in V \}.$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{V \text{ ent de } f(x) \Rightarrow f^{-1}(V) \text{ ent de } x}$$

$$\Updownarrow$$

$f$ cont en $x$.

**Observación**

Una función $f : E \to E'$ es continua en el punto $x \in E$ si y sólo si para cada entorno $V$ de $f(x)$ en $E'$, existe un entorno $U$ de $x$ en $E$ tal que $f(U) \subset V$.

Decir que $f(U) \subset V$ es equivalente a decir que $U \subset f^{-1}(V)$, con lo cual podemos afirmar que para cada entorno $V$ de $f(x)$, la imagen inversa $f^{-1}$ es un entorno de $x$.

**Ejemplo**

$E \subset \mathbb{R}^n$ , $E' \subset \mathbb{R}^m$

con dist. EUCLÍDEA

$f : E \to E'$ ,

CONTINUIDAD $\to$ la de taller,

An. I, etc...

## Ejemplo

$E$ esp. mét, $x_0$ pto aislado de $E$

$\Rightarrow$ Toda función def en $E$ es cont en $x_0$.

$\boxed{x_0 \text{ pto aislado de } E}$: $\exists\, r>0 \,/\, B(x_0,r)=\{x_0\}$.

Dado $\varepsilon>0$, queremos $\delta>0 \,/\, f(B(x_0,\delta)) \subset B(f(x_0),\varepsilon)$

$\delta = r$ (de antes)

$$f(B(x_0,\delta)) = f(\{x_0\}) = \{f(x_0)\} \subseteq B(f(x_0),\varepsilon)$$

$E$ mét, $x_0 \in E$

Toda $f: E \to \mathbb{R}$ es cont en $x_0$

$\Rightarrow$ $x_0$ es aislado.

$E$ discreto $\Rightarrow$ TODA FUNC. EN $E$ es cont en todo punto

$E = \mathbb{Z}$

**Teorema**

Una función $f : E \to E'$ es continua en $x$ si y sólo si transforma cualquier sucesión convergente a $x$ en una sucesión convergente a $f(x)$.

**Teorema**

Una función $f : E \to E'$ es continua en $x$ si y sólo si transforma cualquier sucesión convergente a $x$ en una sucesión convergente a $f(x)$.

En otras palabras, $f$ es continua en $x$ si y sólo si cumple:

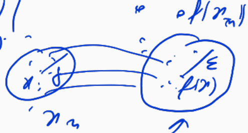
- para toda sucesión $(x_n)_n \subset E$ convergente a $x$, se tiene que la sucesión $(f(x_n))_n \subset E'$ converge a $f(x)$.

$\Rightarrow)$ $(x_n)_n \subset E$ conv a $x$ — qvq $f(x_n) \to f(x)$

Sea $\varepsilon > 0$ — qvq $\exists n_0 /\ f(x_n) \in B(f(x), \varepsilon)\ \forall n \geq n_0$

$\exists \delta > 0 /\ f(B(x,\delta)) \subset B(f(x), \varepsilon)$

$x_n \to x$, $\exists n_0 /\ x_n \in B(x,\delta)\ \forall n \geq n_0$.




$\Rightarrow f(x_n) \in B(f(x), \varepsilon)\ \forall n \geq n_0$ $\Rightarrow f(x_n) \to f(x)$

**Teorema**

Una función $f$ es continua en $x$ si y sólo si transforma cualquier sucesión convergente a $x$ en una sucesión convergente a $f(x)$.

$\Leftarrow$) Sup $f$ NO cont en $x$.

$\exists\, \varepsilon > 0$ para el cual ningún $\delta > 0$ SIRVE

$\to \exists\, \varepsilon > 0 \,/\, \forall\, \delta > 0,\ \exists\, y_\delta \in B(x, \delta)$ pero $f(y_\delta) \notin B(f(x), \varepsilon)$

$\delta = 1/n, \quad x_n = y_{1/n}.$

$x_n \in B(x, 1/n) \Rightarrow d(x_n, x) < 1/n \to 0$

$x_n \to x$

$f(x_n) = f(y_{1/n}) \notin B(f(x), \varepsilon)$

$\Rightarrow d(f(x_n), f(x)) \geq \varepsilon \Rightarrow f(x_n) \not\to f(x)$

Abs

**Definición**

Una función $f : E \to E'$ es continua en $E$ si es continua en todo punto $x \in E$.

$\boxed{E \to \text{mét discreta}}$ ó $\boxed{E = \emptyset}$

TODA FUNCIÓN DEF. EN E es cont en $E$.

**Definición**

Una función $f : E \to E'$ es continua en $E$ si es continua en todo punto $x \in E$.

**Teorema**

Una función $f : E \to E'$ es continua si y sólo si la preimagen de *todo* abierto de $E'$ es abierto en $E$.

$\Leftarrow)$ Sea $x \in E$, $\varepsilon > 0$ $\boxed{\text{q.v.q. } \exists \delta > 0 \,/\, f(B(x,\delta)) \subset B(f(x),\varepsilon)}$

$V = B(f(x), \varepsilon) \to AB \Rightarrow x \in f^{-1}(V)$ es ab

$\Rightarrow \exists \delta > 0 \,/\, B(x,\delta) \subset f^{-1}(V)$

$f(B(x,\delta)) \subset V = B(f(x),\varepsilon)$

$f$ CONT en $x$ $(\forall x \in E)$

**Teorema**

Una función $f : E \to E'$ es continua si y sólo si la preimagen de *todo* abierto de $E'$ es abierto en $E$.

$\Rightarrow)$ Sea $V \subset E'$ abierto. $\boxed{\text{q vq } f^{-1}(V) \text{ es ab}}$

$\boxed{x \in f^{-1}(V)} = \{y \in E \,/\, f(y) \in V\}$.

$\hookrightarrow f(x) \in V$ ab $\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0 \,/\, B(f(x), \varepsilon) \subset V$

$\exists\, \delta > 0 \,/\, f(B(x, \delta)) \subset B(f(x), \varepsilon) \subset V$

$\Rightarrow B(x, \delta) \subset f^{-1}(V)$

$f^{-1}(V)$ es abierto.

**Teorema**

Una función $f : E \to E'$ es continua si y sólo si la preimagen de *todo* abierto de $E'$ es abierto en $E$.

**Ejercicio**

Ver que lo mismo vale cambiando abiertos por cerrados.

[ $f$ cont $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(A)$ es cerrado $\forall A \subset E'$ cerrado ]

## Ejemplo

$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \underbrace{x^2 + e^{yz}} < 4\}$ Ab.

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\quad f(x,y,z) = x^2 + e^{yz}$ cont (VER).

$V = f^{-1}((-\infty, 4))$ ab. ✓

---

$\boxed{E = C[0,1] \text{ con } d_\infty}$ $\quad A = \{x \in C[0,1] / x(1/2) > 0\}$

$f : C[0,1] \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x(1/2)$

• $f$ CONT (EJERCICIO: $x_n \to x$ en $d_\infty$

$\Rightarrow \underbrace{x_n(1/2)}_{f(x_n)} \to \underbrace{x(1/2)}_{f(x)}$

$A = f^{-1}(\underbrace{(0, +\infty)}_{ab})$. ab

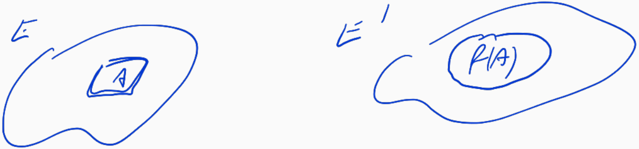
EJ: A NO ab en $(C[0,1], d_1)$

**Teorema**

Una función $f : E \to E'$ es continua $\cancel{\Leftrightarrow}$ $\Rightarrow$ para todo $A \subset E$,

$$f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}.$$

¿VALE LA VUELTA?




$x \in \bar{A} \Rightarrow \exists\, (x_n)_n \subset A \;/\; x_n \to x.$

$\underset{f \text{ cont}}{\Longrightarrow}$ $\underbrace{f(x_n)}_{\substack{\cap \\ f(A)}} \to f(x)$

$(f(x_n))_n \subset f(A)$

$f(x_n) \to f(x)$

$\Rightarrow f(x) \in \overline{f(A)}$

$\therefore\; f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$

**Teorema**

Una función $f : E \to E'$ es continua si para todo $A \subset E$,

$$f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}.$$

Es la vuelta de lo que probamos en la página anterior.

(EJERCICIO ¡probarlo!)