1) Sean $p, q, r \in G_n$ entonces usando su notacion exponencial $(e^{\frac{2k\pi i}{n}}) \in G_n \quad \forall \in \mathbb{Z}$

i.
- $p(qr) = e^{\frac{2k\pi i}{n}}(e^{\frac{2k_1\pi i}{n}} e^{\frac{2k_2\pi i}{n}}) = (e^{\frac{2k\pi i}{n}} e^{\frac{2k_1\pi i}{n}})e^{\frac{2k_2\pi i}{n}}$
- Sabemos que $1 \in G_n$ y cumple $e^{\frac{2k\pi i}{n}} 1 = 1e^{\frac{2k\pi i}{n}} = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$
- Sea $p = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$ tomamos $p^{-1} = e^{\frac{-2k\pi i}{n}}$ luego $p^{-1} \in G_n$ y además $pp^{-1} = p^{-1}p = e^0 = 1$
- Usando las mismas ideas es facil verificar que $pq = e^{\frac{(2k+2k_1)\pi i}{n}} = qp$

ii. b) Sabemos que $G_n =< e^{\frac{2\pi i}{n}} >$

2) a) Sale trivialmente usando la notacion $e^{\alpha i}$ b) No lo és supongo

3) Probar si son grupo

(a) ($G = \mathbb{Q}_{>0}$ con $a * b = ab$) Es trivial ver que es grupo abeliano para todo $\frac{p}{q}$ el inverso es $\frac{q}{p}$ el neutro es el 1 ,es evidentemente asociativa y conmutativa

(b) ($G = GL_3(\mathbb{Z})$ con $a * b = a.b$) Sean $A, B, C \in GL_3$

i. Podemos pensar que estas son matices de transformaciones f, g, h respectivamente y sabemos $(f \circ g) \circ h(x) = (f \circ g)h(x) = f(g(h(x))) = f((g \circ h)(x)) = f \circ (g \circ h)(x)$ esto vale $\forall x \in \mathbb{Z}_3$

Entonces $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ por ende $(AB)C = A(BC)$

ii. La matriz identidad es el elemento neutro, sabemos que $AId = IdA = A$

iii. No necesariamente existe inverso, cualquier matriz con determinante diferente de 0 no es inversible

(c) ($G = GL_n(\mathbb{R})$ con $a * b = a + b$) Es evidentemente grupo abeliano , dado que podemos restringirnos a mirar una sola coordenada de la matriz y probar que todo sucede, es asociativa , tiene elemento neutro e inverso y da lo mismo el orden en el que sumemos dos matrices

(d) ($G = SL_n(\mathbb{R})$ con $a * b = ab$)

i. Sean $A, B, C \in G$ podemos pensar que estas son matices de transformaciones f, g, h respectivamente y sabemos $(f \circ g) \circ h(x) = (f \circ g)h(x) = f(g(h(x))) = f((g \circ h)(x)) = f \circ (g \circ h)(x)$ esto vale $\forall x \in \mathbb{Z}_3$

Entonces $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ por ende $(AB)C = A(BC)$

ii. La matriz identidad es el elemento neutro, sabemos que $AId = IdA = A$

iii. Sea $A \in G$ sabemos que $det(A) = 1$ entonces por tener determinante diferente de cero existe A^{-1} y por otro lado sabemos $det(A^{-1}) = det(A)^{-1} = 1^{-1} = 1$

Entonces $A^{-1} \in G$. Además sabemos que $AA^{-1} = A^{-1}A$

iv.

(e) ($G = End_K(V)$, V un $K - ev$ con $f * g = f \circ g$)

i. Sabemos que la composición de funciones es asociativa por definición
ii. Tenemos la funcion Id un enfomorfismo que cumple la propiedad de neutro $f \circ Id(x) = Id \circ f(x) = f(x) \quad \forall x \in V$ luego $f \circ Id = Id \circ f = f$
iii. Si pensamos a $A \in G$ como matriz sabemos que no necesariamente tienen inverso ya que puede tener determinante igual a 0

(f) ($G = \{f \in End_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) \mid d(f(x), f(y)) = d(x, y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n\}$ con $f * g = f \circ g$)

i. Una vez la composición de funciones es asociativa
ii. Sabemos que la funciona identidad es una isometría asi que está en G y cumple las propiedades de elemento neutro

(g) ($G = S(X) = \{f : X \to X \mid$ f es biyectiva $\}$ $X \neq \emptyset$ con $f * g = f \circ g$)

- Como siempre por ser función es asociativa
- La función identidad es el neutro
- Aqui si tenemos inverso , por ser f biyectiva y sabemos $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = Id$
-

(h) ($G = S(\mathbb{Z})$ con $f * g = f \circ g^{-1}$)

- Sean $f, g, h \in G$ tenemos que $(f \circ g) \circ h = (f \circ g^{-1}) \circ h$

6) Sea G un grupo Sea $(G^{op}, \cdot)$ como conjunto y el producto está dado por $a \cdot b = ba$. Entonces G^{op} es un grupo. (Llamamos G^{op} el *grupo opuesto* de G)

Acá asumo que cuando dice ba se refiere al producto en el grupo G.

- Sean $a, b, c \in G$ tenemos que $a * (b * c) = a * (cb) = cba = (ba) * c = (a * b) * c$
- El elemento neutro e del grupo G sirve. Sea $a \in G$ entonces $a * e = ea = a = ae = e * a$
- Sea $a \in G$ usemos el a^{-1} dado por el grupo G. $a * a{-}1 = a^{-1}a = e = aa^{-1} = a^{-1} * a$. Y sabemos que e es el mismo para ambos

Entonces si G es grupo $(G^{op}, j * h = h \cdot_G j)$ es grupo