UBA - exactas
Departamento de Matemática

Cálculo Avanzado - Compacidad ~~1~~ 2

Primer cuatrimestre de 2020

Daniel Carando

Dto. de Matemática - FCEN - UBA

En esta clase seguimos con resultados relacionados con el capítulo 9 del apunte.

La vez pasada enunciamos

Teorema

Sea E un espacio métrico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(a) E es compacto

(b) Todo subconjunto infinito de E tiene un punto de acumulación (en E).

(c) Toda sucesión en E tiene subsucesión convergente (en E).

(d) E es completo y totalmente acotado.

en $\mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^n$ cerrado $\iff$ A completo

$\mathbb{N}$ con $\delta \to$ met discreta

es acotado. $\mathbb{N} = B(3, 2)$

$(d(n, 3) \leq 1 < 2)$.

Pero si queremos escribir $\mathbb{N}$ como unión de bolitas de radio $1/2$, NECESITAMOS INFINITAS

el $[0,1] \subset (\mathbb{R}, |\cdot|)$, dado ε,

podemos cubrir $[0,1]$ con FINITAS bolitas de radio ε.

$(0,1)$ TAMBIÉN

Recordemos:

Dado $A \subset E$, con $A \neq \emptyset$, decimos que es acotado si

$$\delta(A) < \infty.$$

Recordemos:

Dado $A \subset E$, con $A \neq \emptyset$, decimos que es acotado si

$$\delta(A) < \infty.$$

Equivalentemente, A es acotado si y sólo si A está contenido en una bola.

Definición

Un conjunto $A \subset E$ se dice totalmente acotado (tt.a.) si para cada $\varepsilon > 0$ es posible escribir A como una unión finita de conjuntos de diámetro menor que ε:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A_j, \text{ con } \delta(A_j) < \varepsilon, 1 \leq j \leq m, \text{ tales que } \quad A = \cup_{j=1}^{m} A_j, \quad .$$

Definición

Un conjunto $A \subset E$ se dice totalmente acotado (tt.a.) si para cada $\varepsilon > 0$ es posible escribir A como una unión finita de conjuntos de diámetro menor que ε:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A_j, \text{ con } \delta(A_j) < \varepsilon, 1 \leq j \leq m, \text{ tales que } \quad A = \cup_{j=1}^{m} A_j, \quad .$$

Definición

Un conjunto $A \subset E$ se dice totalmente acotado (tt.a.) si para cada $\varepsilon > 0$ es posible escribir A como una unión finita de conjuntos de diámetro menor que ε:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A_j, \text{ con } \delta(A_j) < \varepsilon, 1 \leq j \leq m, \text{ tales que } \quad A = \cup_{j=1}^{m} A_j, \quad .$$

Ejercicio

Es equivalente decir que podemos cubrir A con un número finito de bolas de radio ε.

$\forall \varepsilon > 0, \exists x_1, \ldots, x_m \in E$ /

$A \subset \bigcup_{\ell=1}^{m} B(x_\ell, \varepsilon).$

Definición

Un conjunto $A \subset E$ se dice totalmente acotado (tt.a.) si para cada $\varepsilon > 0$ es posible escribir A como una unión finita de conjuntos de diámetro menor que ε:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A_j, \text{ con } \delta(A_j) < \varepsilon, \ 1 \leq j \leq m, \text{ tales que } \quad A = \cup_{j=1}^{m} A_j, \quad .$$

Ejercicio

Es equivalente decir que podemos cubrir A con un número finito de bolas de radio ε.

Ejercicio

Si A es cerrado y tt.a., podemos escribirlo como unión de un número finito de conjuntos cerrados con diámetro menor que ε.

Teorema 8.2.11

Sean $A, B \subset E$. Entonces:

(1) A es tt.a. y $B \subset A$, entonces B es tt.a.

Teorema 8.2.11

Sean $A, B \subset E$. Entonces:

(1) A es tt.a. y $B \subset A$, entonces B es tt.a.

(2) A es tt.a. si y sólo si $\bar{A}$ es tt.a.

Teorema 8.2.11

Sean $A, B \subset E$. Entonces:

(1) A es tt.a. y $B \subset A$, entonces B es tt.a.

(2) A es tt.a. si y sólo si $\bar{A}$ es tt.a.

(3) A, B son tt.a., entonces $A \cup B$ es tt.a.

Teorema 8.2.11

Sean $A, B \subset E$. Entonces:

(1) A es tt.a. y $B \subset A$, entonces B es tt.a.

(2) A es tt.a. si y sólo si $\bar{A}$ es tt.a.

(3) A, B son tt.a., entonces $A \cup B$ es tt.a.

(4) A es tt.a., entonces A es acotado.

Teorema

Sea E un espacio métrico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(a) E es compacto

(b) Todo subconjunto infinito de E tiene un punto de acumulación (en E).

(c) Toda sucesión en E tiene subsucesión convergente. (en E)

(d) E es completo y totalmente acotado.

(a) $\Rightarrow$ (b) Sea $A \subset E$. Si A no tiene puntos de acumulación en E $\Longrightarrow$ A finito. $\therefore$ vale (b).

OBS
USE PASADA
E COMPACTO.

(b) $\Rightarrow$ (c) $(x_n)_n \subset E$. $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Si A es finito $\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$, n_j $(j \in \mathbb{N})$ / $x_{n_j} = x_{n_0}$

$\Rightarrow (x_{n_j})_j$ SUBSUC. y $x_{n_j} \longrightarrow x_{n_0}$ ✓ $\forall j \in \mathbb{N}$.

$A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ Si A es infinito $\exists x_0 \in E$ pto de ac. de $A \Rightarrow B(x_0, 1) \cap A \neq \emptyset$ (es infinita).

$\exists x_{n_1} \in B(x_0, 1)$.

$B(x_0, 1/2) \cap A$ es infinito $\Rightarrow \exists n_2 > n_1 / x_{n_2} \in B(x_0, 1/2)$

$\ldots \exists n_3 > n_2 / \quad x_{n_3} \in \underbrace{B(x_0, 1/3)}, \ldots$

Definimos $(x_{n_k})_k$ SUBSUCESIÓN / $d(x_{n_k}, x_0) < 1/k$

$\Rightarrow (x_{n_k})_k$ converge.

$(c) \Rightarrow (d)$ E completo: Sea $(x_n)_n \subset E$ de Cauchy

Por (c), $(x_n)_n$ tiene subsuc. convergente. $(x_n)_n$ es de Cauchy $\Big\} \Rightarrow$ $(x_n)_n$ es conv.

$\therefore E$ completo

E es tt. ∴: Sea $\varepsilon > 0$ y supongamos que E NO se escribe como unión de FINITAS bolitas de radio ε. Sea $x_1 \in E$. $E \neq B(x_1, \varepsilon)$, $\Rightarrow$

$\exists\, x_2 \in E \setminus B(x_1, \varepsilon)$. $E = B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon) \Rightarrow$

$\exists\, x_3 \in E \setminus \left(B(x_1, \varepsilon) \cup B(x_2, \varepsilon)\right)$

$d(x_1, x_2) > \varepsilon$

$d(x_3, x_2) > \varepsilon$

$d(x_3, x_1) > \varepsilon$.

$\vdots$

$E \neq \bigcup_{j=1}^{k} B(x_j, \varepsilon) \Rightarrow$

$\exists\, x_{k+1} \in E \setminus \bigcup_{j=1}^{k} B(x_j, \varepsilon) \Rightarrow d(x_{k+1}, x_j) > \varepsilon$

$j = 1, \ldots, k$.

$(x_k)_k \,/\, d(x_k, x_l) > \varepsilon \quad \forall k \neq l$.

EJERCICIO $(x_k)_k$ NO puede tener subsuc. conv. ABS

d) ⇒ a) Sup E NO es compacto.

Sea $(G_i)_{i \in I}$ cubrimiento de E x abiertos sin subcub. finito.

E es cerrado y t.t.a. ⇒ E se escribe como unión de finitos cerrados de diám < 1.

[E es unión de finitos cerrados de diám < 1
E NO se cubre con finitos G_i]

⇒ alguno de cerrados NO se cubre con finitos G_i

¿POR QUÉ? Llamemos X_1 a ese cerrado (diám $X_1 < 1$)

X_1 es t.t.a. y cerrado ⇒ es unión de finitos cerrados de diám $< 1/2$. Alguno de estos cerrados NO se cubre con finitos G_i. Lo llamamos X_2. $X_2 \subset X_1$

diám $X_2 < 1/2$

Hacemos lo mismo con $X_2 \leadsto X_3$ NO se cubre con finitos G_i, $X_3 \subset X_2$, $\operatorname{diam}(X_3) < 1/3$.

$E \supset X_1 \supset X_2 \supset X_3 \supset \ldots$

$X_k \subset X_{k-1}$

$\operatorname{diam} X_k < 1/k$.

ningún X_k se cubre con finitos G_i (*)

Por CANTOR, $\exists\, x_0 \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} X_k$

$x_0 \in E = \bigcup_{i \in I} G_i \Rightarrow \exists\, i_0 / x_0 \in G_{i_0}$

$\Rightarrow \exists\, r > 0 / B(x_0, r) \subset G_{i_0}$.

G_{i_0} ab.

$\exists k_0 \in \mathbb{N}$

$x_0 \in X_k \; \forall k$, $\operatorname{diam} X_k < 1/k < r \;\; \forall k \geq k_0$

$\left.\begin{array}{l} \operatorname{diam} X_{k_0} < r \\ x_0 \in X_{k_0} \end{array}\right] \Rightarrow X_{k_0} \subset B(x_0, r) \subset G_{i_0}$ ABS

por (*): X_{k_0} NO se cubre con finitos G_i

$\therefore$ TODO CUBR. x ABS TIENE SUBC. FINITO. ✓