

PRÁCTICA 5

Ejercicio 1. Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos de \mathbb{R} (con la métrica usual) son conexos:

$$\mathbb{N}, \quad [0, 1), \quad \mathbb{Q}, \quad \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

Ejercicio 2. Analizar la validez de las siguientes afirmaciones en un espacio métrico arbitrario (X, d) . Pensar además si las que son falsas se vuelven verdaderas cuando el espacio es \mathbb{R}^n .

- i) Toda bola abierta $B(a, r)$ es conexa.
- ii) Para todo $a \in X$, existe $r > 0$ tal que la bola $B(a, r)$ es conexa.
- iii) Si $A, B \subset X$ son conexos entonces $A \cup B$ es conexo.
- iv) Si $A, B \subset X$ son conexos entonces $A \cap B$ es conexo.
- v) Si $A, B \subset X$ son conexos entonces $A - B$ es conexo.
- vi) Si $A \subset X$ es conexo y x es un punto de acumulación de A , entonces $A \cup \{x\}$ es conexo.
- vii) Si $A \subset X$ es conexo, entonces A° es conexo.
- viii) Si $A \subset X$ es conexo, entonces \overline{A} es conexo.

Ejercicio 3. Probar que el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \|(x, y)\| < 2\}$ es conexo.

Ejercicio 4. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $C \subset X$. Probar que son equivalentes:

- i) No existen U, V abiertos en C , no vacíos y disjuntos tales que $C = U \cup V$.
- ii) No existen \mathcal{U}, \mathcal{V} abiertos en X tales que $C \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$, $C \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$, $C \cap \mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$ y $C \subset \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$.
- iii) Si $A \subset C$ es no vacío y abierto y cerrado en C , entonces $A = C$.

Ejercicio 5. Sea (X, d) un espacio métrico y sea C un subconjunto de X que no es conexo. Probar que existen \mathcal{U}, \mathcal{V} abiertos en X **disjuntos** tales que $C \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$, $C \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ y $C \subset \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$.

Ejercicio 6. Sea (X, d) un espacio métrico y sea \mathcal{A} una familia de conjuntos conexos de X tal que para cada par de conjuntos $A, B \in \mathcal{A}$ existen $A_0, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ que satisfacen $A_0 = A$, $A_n = B$ y $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ para cada $i = 0, \dots, n-1$. Probar que $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ es conexo.

Ejercicio 7. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ continua. Probar que f es constante.

Ejercicio 8. Probar que un espacio métrico (X, d) es conexo si y sólo si toda función continua $f : X \rightarrow \{0, 1\}$ es constante.

Ejercicio 9. Probar que si $n \geq 2$ no existe un homeomorfismo entre \mathbb{R} y \mathbb{R}^n .

Ejercicio 10. Probar que los espacios métricos $(0, 1)$, $[0, 1)$ y $[0, 1]$ (con las métricas que heredan como subespacios de \mathbb{R}) son dos a dos no homeomorfos.

Ejercicio 11. Probar que si $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es continua, existe $x_0 \in [0, 1]$ tal que $f(x_0) = x_0$.

Ejercicio 12.

- i) Sea (X, d) un espacio métrico conexo y sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Sean $a, b \in f(X)$ tales que $a \leq b$. Probar que para todo $c \in [a, b]$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = c$.
- ii) Probar que si (X, d) es conexo, entonces $\#X = 1$ o $\#X \geq c$.

Ejercicio 13. Hallar las componentes conexas de los siguientes subconjuntos de \mathbb{R} y de \mathbb{R}^2 :

- i) $\arcsen([\frac{\sqrt{2}}{2}, 1])$
- iii) $B((-1, 0), 1) \cup B((1, 0), 1)$
- ii) \mathbb{Q}
- iv) $B((-1, 0), 1) \cup B((1, 0), 1) \cup \{(0, 0)\}$

Ejercicio 14. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $A_n = \{\frac{1}{n}\} \times [0, 1]$, y sea $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \cup \{(0, 0), (0, 1)\}$. Probar que:

- i) $\{(0, 0)\}$ y $\{(0, 1)\}$ son componentes conexas de X .
- ii) Si $B \subset X$ es abierto y cerrado en X , entonces $\{(0, 0), (0, 1)\} \subset B$ o $\{(0, 0), (0, 1)\} \cap B = \emptyset$.

Ejercicio 15. Sea (X, d) un espacio métrico. Probar que las componentes conexas de X son conjuntos cerrados, y que no necesariamente son abiertos.

Ejercicio 16. Probar que los siguientes conjuntos son totalmente desconexos¹:

- i) Un espacio métrico discreto con cardinal mayor o igual que 2.
- ii) Un espacio métrico numerable.

Ejercicio 17. Sea (X, d) un espacio métrico. Un conjunto $A \subset X$ se dice *arcoconexo* (o *conexo por arcos*) si para todo par de puntos $a, b \in A$ existe una función continua $f : [0, 1] \rightarrow X$ tal que $f(0) = a$ y $f(1) = b$.

- i) Probar que todo conjunto arcoconexo es conexo.
- ii) Exhibir un ejemplo de un conjunto conexo que no sea arcoconexo.

¹La RAE sólo admite la palabra *inconexo* en el diccionario, pero aquí somos rebeldes.

Ejercicio 18. Decidir cuáles de los siguientes conjuntos son arcoconexos:

- i) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = f(x, y)\}$ donde $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua.
- ii) $B(0, 1) \subset \mathbb{R}^n$,
- iii) $\mathbb{R}^n - B(0, 1)$
- iv) $\mathbb{R}^2 - \{(x, 0) / x \in \mathbb{R}\}$
- v) $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$

Ejercicio 19. Sean X e Y espacios métricos, con X arcoconexo, y $f : X \rightarrow Y$ una función continua. Probar que el conjunto $f(X)$ es arcoconexo.

Ejercicio 20. Sea $n \geq 2$ y sea $S \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto contable. Probar que $\mathbb{R}^n - S$ es arcoconexo.

Ejercicio 21. En el espacio $(C[0, 1], d_\infty)$ se considera el conjunto

$$U = \{f \in C[0, 1] : f(x) \neq 0 \text{ para todo } x \in [0, 1]\}.$$

Probar que U es abierto y hallar sus componentes conexas.

Ejercicio 22. Un espacio métrico (X, d) se dice *localmente conexo* (resp. *localmente arcoconexo*) si para todo $x \in X$ y para todo $U \subset X$ entorno de x , existe un entorno conexo (resp. arcoconexo) V de x tal que $x \in V \subset U$. Probar que:

- i) Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, entonces A es conexo $\iff A$ es arcoconexo
- ii) Un espacio métrico X es localmente (arco)conexo si y sólo si para todo U abierto de X , las componentes (arco)conexas de U son abiertas.
- iii) Todo espacio métrico conexo y localmente arcoconexo es arcoconexo.
- iv) En un espacio métrico localmente arcoconexo todo conjunto abierto y conexo es arcoconexo.
- v) Las componentes arcoconexas de un espacio localmente arcoconexo son abiertas.