



# Cálculo Avanzado - Separabilidad y completitud 4

Primer cuatrimestre de 2020

**Daniel Carando** 

Dto. de Matemática - FCEN - UBA

En esta clase veremos que todo espacio métrico se puede completar.

Un espacio métrico (E, d) se dice completo si toda sucesión de Cauchy es convergente a un punto  $x \in E$ .

Un espacio métrico (E, d) se dice completo si toda sucesión de Cauchy es convergente a un punto  $x \in E$ .

El siguiente resultado es un ejercicio de la práctica.

Un espacio métrico (E, d) se dice completo si toda sucesión de Cauchy es convergente a un punto  $x \in E$ .

El siguiente resultado es un ejercicio de la práctica.

**Proposición (Ejercicio 19, guía** A**)** Sean E, E' espacios métricos, E' completo, y  $D \subset E$  un subconjunto denso. Si  $f: D \to E'$  es uniformemente continua, entonces existe una única  $F: E \to E'$  tal que  $F|_D = f$ .

19EA: querens delin F(n) p/xeE

NEE = D, 3 (Nn/m CD / Xm -> X)

. res que (f(xn)/m es de Ceurdy e E' J: 3 lim flan,

F(N) - lim p(xn) -> buene de F. ou F, F cample todo.

Cálculo Avanzado Daniel Carando DM-FCEN-UBA 1

Idea:			

Idea:

• Si  $E=\mathbb{Q}$ , su completación podría (o debería) ser  $\mathbb{R}$ .

#### Idea:

- Si  $E=\mathbb{Q}$ , su completación podría (o debería) ser  $\mathbb{R}$ .
- Si E = (0,1), su completación sería [0,1] (aunque [-1,2] o  $\mathbb R$  también sean completo).

#### Idea:

- Si  $E = \mathbb{Q}$ , su completación podría (o debería) ser  $\mathbb{R}$ .
- Si E = (0,1), su completación sería [0,1] (aunque [-1,2] o  $\mathbb R$  también sean completo).
- Si E ⊂ M con M completo, la completación de E ¿sería M?

#### Idea:

- Si  $E = \mathbb{Q}$ , su completación podría (o debería) ser  $\mathbb{R}$ .
- Si E = (0,1), su completación sería [0,1] (aunque [-1,2] o  $\mathbb R$  también sean completo).
- Si E ⊂ M con M completo, la completación de E ¿sería M?
   No necesariamente: mejor tomar Ē, que es completo (es cerrado dentro de un completo).

#### Idea:

- Si  $E = \mathbb{Q}$ , su completación podría (o debería) ser  $\mathbb{R}$ .
- Si E = (0,1), su completación sería [0,1] (aunque [-1,2] o ℝ también sean completo).
- Si E ⊂ M con M completo, la completación de E ¿sería M?
   No necesariamente: mejor tomar Ē, que es completo (es cerrado dentro de un completo).

   Coincide con M cuando F es denso en M.

Cálculo Avanzado Daniel Carando DM-FCEN-UBA

#### Idea:

- Si  $E = \mathbb{Q}$ , su completación podría (o debería) ser  $\mathbb{R}$ .
- Si E = (0,1), su completación sería [0,1] (aunque [-1,2] o ℝ también sean completo).
- Si E ⊂ M con M completo, la completación de E ¿sería M?
   No necesariamente: mejor tomar Ē, que es completo (es cerrado dentro de un completo).

   Coincide con M cuando F es denso en M.

## **Definición**

Sean (E,d), (E',d') espacios métricos. Una función  $T: E \to \widehat{E}'$  se dice inmersión isométrica o función isométrica si d'(T(x),T(y))=d(x,y) para todo  $x,y\in E$ .

T & INTECTIVA, NO NECES. SURYETTIVA.

Cálculo Avanzado Daniel Carando DM-FCEN-UBA

Sea (E,d) un espacio métrico. Decimos que el espacio métrico  $(\widehat{E},\rho)$  es una completación de E si existe una inmersión isométrica  $T:E\to\widehat{E}$  tal que T(E) es denso en  $\widehat{E}$ .

$$E \longrightarrow E$$

$$E \longrightarrow T(E) \subseteq E$$

$$I: (0,1) \longrightarrow [0,1] \quad \text{i inclusion}$$

$$[0,1] = [0,1] \quad \text{la completation} \quad \text{es}$$

$$i: W \rightarrow 1/2 \quad \text{left} \quad [(E,e),T).$$

Cálculo Avanzado Daniel Carando

Sea (E, d) un espacio métrico. Decimos que el espacio métrico  $(\widehat{E}, \rho)$  es una completación de E si existe una inmersión isométrica  $T: E \to \widehat{E}$  tal que T(E) es denso en  $\widehat{E}$ .

#### Teorema

Todo espacio métrico E tiene una completación (puede ser completado). La completación es única salvo isometrías.

(
$$(\vec{E}, e/, T)$$
,  $((\vec{E}_{2}, e_{2}), T_{2})$  completacione  
 $\vec{E}$  =  $\vec{E}$  | Sometria bly ectiva  
FOT =  $\vec{E}$  | USAR 67  
ETERCIAN (Intended Intended In

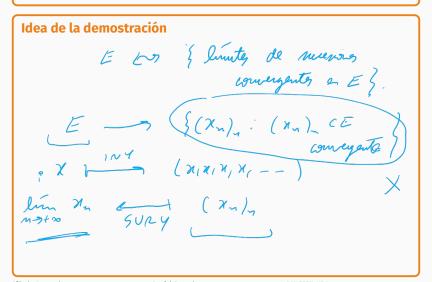
Daniel Carando DM-FCEN-UBA

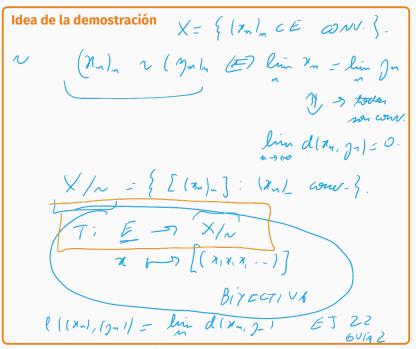
#### **Teorema**

Todo espacio métrico *E* tiene una completación (puede ser completado). La completación es única salvo isometrías.

#### Teorema

Todo espacio métrico *E* tiene una completación (puede ser completado). La completación es única salvo isometrías.





Cálculo Avanzado Daniel Carando DM-FCEN-UBA 5

#### **Teorema**

Todo espacio métrico *E* tiene una completación (puede ser completado). La completación es única salvo isometrías.

#### **Teorema**

Todo espacio métrico *E* tiene una completación (puede ser completado). La completación es única salvo isometrías.

Demostración (CANTOR) M = { ( Mm )m CE / ( Mm In as al Bandy } defining V: (n-1-~ (John (=) lin d/ m, 24/ -0 N & rel de equivalenca (ETERCICIO) 1 - I lin x ej. 22 (x) gma 2 E = { clases de equivalencies } = { [(n\_n)\_n]: (My) CE de Cant

, Z = [(xm)] playma (Na) CE de Cauly. w= [(Jn)] p/algune (Jn/m CE 11111 P(2, W: - lim d(x, Jn/) 17 por ej 22/in/ gruin 4 ETEMINO ? les distanció. EJ: | l eta bien af 2 = (x1) = [(xi)] W= [()~)] = [()~)] VER: lim d(xy Jn) = lim d(x, Jn) 2 6- [ ( 21 x x x --)] - [ ( 2 m) ] com=n Vm. E JER Cis umersion isometrica. TIEI = E y E COMPLETO FALTA:

Cálculo Avanzado

Daniel Carando

DM-FCEN-UBA

7

T(E) = E: 26 E, 2 = [(xm/m] (xm/m do T( xm/ = [( xm, xm, xm, xm, xm, --Z = [(x1, N2, N7, X4, --)] Neama que T(xm) => 2 - (3): 26 T(E). Dado 270, 7 No/ d(11, xm) / 8/2 P(T(Mm), 2) = lim d(Nm, Mm) = 8/2 LE Than 1, 6 - m-1+20 28/2 (7 (1/2m)) = 7m t m? no : T( Mm) -> = 7 = T(E)

Cálculo Avanzado

l Carando

DM-FCEN-UBA

É es completo: (ZN/N mu-de Camb en E) Como T(E) = E, P(C/N, ) XNGE/ ((T/NN), 2") 21 (B(2", 1/N) n 7/5/7 p) VEAMOS: (a) ( 7m) m li al Coundry on E (h) (2" -) [(Mm), ]e& : É e compleTO. (c)  $d(x_m, x_m) = \ell(Tx_m, Tx_m) \leq \ell(Tx_m, Z^m) + \ell(Z^m, Z^m) + \ell(Z^m,$ e(z~,[(n,)]) & (b) Z~ -> [(2)]: € ((z<sup>N</sup>, T(N))) + ((T(N)), ((N))) = 0 LIN NATE O COMO ANTES Cálculo Avanzado