UBA - exactas
Departamento de Matemática

Cálculo Avanzado - Completitud y Teorema de Baire

Primer cuatrimestre de 2020

Daniel Carando

Dto. de Matemática - FCEN - UBA

En esta clase veremos algunas cosas que quedaron de completitud y veremos el Teorema de Baire (que también tiene que ver con completitud).

Definición

Sea (E, d) un espacio métrico. Decimos que un espacio métrico *completo* $(\widehat{E}, \rho)$ es una completación de E si existe una inmersión isométrica $T : E \to \widehat{E}$ tal que $T(E)$ es denso en $\widehat{E}$.

Definición

Sea (E, d) un espacio métrico. Decimos que un espacio métrico *completo* $(\widehat{E}, \rho)$ es una completación de E si existe una inmersión isométrica $T : E \to \widehat{E}$ tal que $T(E)$ es denso en $\widehat{E}$.

Teorema

Todo espacio métrico E tiene una completación (puede ser completado). La completación es única salvo isometrías.

$T : E \to \hat{E}$ INM. ISOM, $\hat{E}$ COMPLETO, $\overline{T(E)} = \hat{E}$.

$T_2 : E \to E_2$ " " E_2 " " $\overline{T_2(E)} = E_2$

QUEREMOS $F : \hat{E} \to E_2$ (BIYECTIVA) ISOMETRÍA

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "T_2"'] & \hat{E} \arrow[d, dotted, "F = ?"] \\ & E_2 \end{tikzcd}$$

$T : E \to T(E)$ BIYECTIVA

$T^{-1} : T(E) \to E$

queremos $F : \hat{E} \to E_2$

$\hat{E} \supseteq T(E)$ denso.

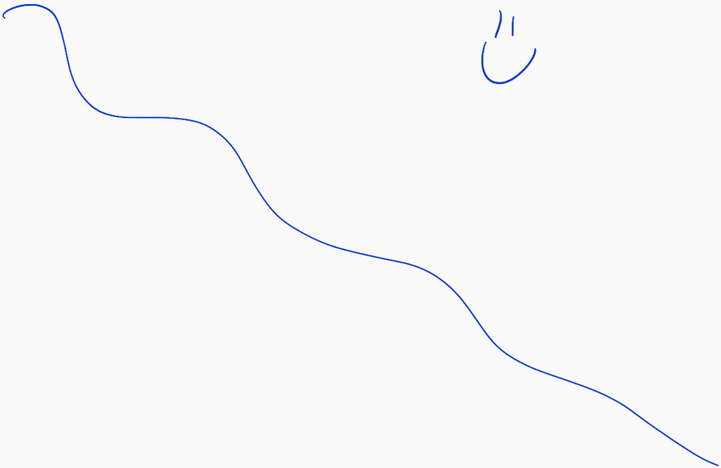
$$f : T(E) \to E_2 .$$

$$\underbrace{y \in T(E)}, \quad f(y) = T_2(\underbrace{T^{-1}(y)}_{\in E}) \in E_2$$

obs: $f(Tx) = T_2(x)$

VER

- f FUNC. ISOM.
- f se extiende a $F : \hat{E} \to \underline{E_2}$ (USAR EJER).
- F SIRVE.



Teorema de Baire

Sabemos que, por cuestiones de cardinalidad, $\mathbb{R}$ no es unión numerable de puntos. $x_n \in \mathbb{R}$ p/c/$n \in \mathbb{N}$.

$$\underbrace{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x_n\}}_{\text{NUM}} \neq \underbrace{\mathbb{R}}_{\text{NO NUM.}}.$$

Teorema de Baire

Sabemos que, por cuestiones de cardinalidad, $\mathbb{R}$ no es unión numerable de puntos.
¿Hay alguna razón topológica por la cual $\mathbb{R}$ no puede ser unión numerable de puntos?

Teorema de Baire

Sabemos que, por cuestiones de cardinalidad, $\mathbb{R}$ no es unión numerable de puntos.
¿Hay alguna razón topológica por la cual $\mathbb{R}$ no puede ser unión numerable de puntos?

Pregunta (probablemente más interesante):
¿Podemos escribir a $\mathbb{R}^2$ como unión numerable de rectas?

Teorema de Baire

Sabemos que, por cuestiones de cardinalidad, $\mathbb{R}$ no es unión numerable de puntos.
¿Hay alguna razón topológica por la cual $\mathbb{R}$ no puede ser unión numerable de puntos?

Pregunta (probablemente más interesante):
¿Podemos escribir a $\mathbb{R}^2$ como unión numerable de rectas?
¿Y a $\mathbb{R}^3$ como unión numerable de planos (y rectas)?

Teorema de Baire

Sabemos que, por cuestiones de cardinalidad, $\mathbb{R}$ no es unión numerable de puntos.
¿Hay alguna razón topológica por la cual $\mathbb{R}$ no puede ser unión numerable de puntos?

Pregunta (probablemente más interesante):
¿Podemos escribir a $\mathbb{R}^2$ como unión numerable de rectas?
¿Y a $\mathbb{R}^3$ como unión numerable de planos (y rectas)?
Para estas preguntas, la cardinalidad ya no nos ayuda.

Teorema de Baire

Sabemos que, por cuestiones de cardinalidad, $\mathbb{R}$ no es unión numerable de puntos.
¿Hay alguna razón topológica por la cual $\mathbb{R}$ no puede ser unión numerable de puntos?

Pregunta (probablemente más interesante):
¿Podemos escribir a $\mathbb{R}^2$ como unión numerable de rectas?
¿Y a $\mathbb{R}^3$ como unión numerable de planos (y rectas)?
Para estas preguntas, la cardinalidad ya no nos ayuda.

Intuitivamente, parece imposible escribir a $\mathbb{R}^2$ como unión numerable de rectas.

Teorema de Baire

Sabemos que, por cuestiones de cardinalidad, $\mathbb{R}$ no es unión numerable de puntos.
¿Hay alguna razón topológica por la cual $\mathbb{R}$ no puede ser unión numerable de puntos?

Pregunta (probablemente más interesante):
¿Podemos escribir a $\mathbb{R}^2$ como unión numerable de rectas?
¿Y a $\mathbb{R}^3$ como unión numerable de planos (y rectas)?
Para estas preguntas, la cardinalidad ya no nos ayuda.

Intuitivamente, parece imposible escribir a $\mathbb{R}^2$ como unión numerable de rectas. En este caso, la intuición es correcta: no podemos.

Teorema de Baire

Sabemos que, por cuestiones de cardinalidad, $\mathbb{R}$ no es unión numerable de puntos.
¿Hay alguna razón topológica por la cual $\mathbb{R}$ no puede ser unión numerable de puntos?

Pregunta (probablemente más interesante):
¿Podemos escribir a $\mathbb{R}^2$ como unión numerable de rectas?
¿Y a $\mathbb{R}^3$ como unión numerable de planos (y rectas)?
Para estas preguntas, la cardinalidad ya no nos ayuda.

Intuitivamente, parece imposible escribir a $\mathbb{R}^2$ como unión numerable de rectas. En este caso, la intuición es correcta: no podemos. Pregunta: ¿por qué?

Teorema de Baire

Teorema de Baire 1

En un espacio métrico completo, la unión numerable de conjuntos cerrados con interior vacío tiene interior vacío.

O sea: E completo, p/c/n, $F_n \subset E$, $\overline{F_n} = F_n$, $F_n^\circ = \emptyset$

$$F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \Rightarrow F^\circ = \emptyset$$

Obs: E completo, $E \neq \emptyset$. $E^\circ = E \neq \emptyset \Rightarrow E$ NO puede ser la unión numerable de cerrados con int vacío.

$\therefore$ $\mathbb{R}$ NO es unión numerable de "puntos" (por si no lo sabíamos...)

Las rectas en $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, o los planos en $\mathbb{R}^3$ son cerrados con int vacío $\Rightarrow \mathbb{R}^2$ NO es unión num. de rectas, $\mathbb{R}^3$ no es ....

E completo, $F_n \subset E$ $F_n = \overline{F_n}$, $F_n^\circ = \phi$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

$F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$. Q. v. q. $F^\circ = \phi$.

Veremos: $\forall x \in E$, $\forall r > 0$, $B(x,r) \cap F^c \neq \phi$.

[si $\exists x \in F^\circ$, $\exists r \,/\, \underbrace{B(x,r) \subset F}$ y: $B(x,r) \cap F^c = \phi$]

Fijamos $x \in E$, $r > 0$. Como $F_1^\circ = \phi$, $B(x,r) \cap F_1^c \neq \phi$

$\exists \underline{y_1} \in \underbrace{B(x,r)}_{ab} \cap \underbrace{F_1^c}_{ab\ (F_1 \text{ es cerrado})}$. $\Rightarrow \exists \tilde{r}_1 > 0 \,/\, B(y_1, \tilde{r}_1) \subset B(x,r) \cap F_1^c$

si $r_1 < \min\{\tilde{r}_1, 1\} \Rightarrow r_1 < 1$, $\overline{B}(y_1, r_1) \subset B(x,r) \cap F_1^c$

$F_2^\circ = \phi \Rightarrow B(y_1, r_1) \cap F_2^c \neq \phi \Rightarrow \exists y_2 \in \underbrace{\underbrace{B(y_1,r_1)}_{Ab} \cap \underbrace{F_2^c}_{Ab}}_{Ab}$

$\Rightarrow \exists \tilde{r}_2 > 0 \,/\, B(y_2, \tilde{r}_2) \subset B(y_1, r_1) \cap F_2^c$

$r_2 < \min\{\tilde{r}_2, 1/2\}$, $r_2 < 1/2$, $\overline{B}(y_2, r_2) \subset B(y_1, r_1) \cap F_2^c$

INDUCTIVAMENTE: y_{n-1}, $r_{n-1} < 1/_{n-1}$.

$F_n^\circ = \phi$, $B(y_{n-1}, r_{n-1}) \cap F_n^c \Rightarrow \exists\, y_n \in \underbrace{B(y_{n-1}, r_{n-1}) \cap F_n^c}_{\text{ab}}$

$\ldots \boxed{\exists\, r_n < 1/_n}$ / $\boxed{\overline{B}(y_n, r_n) \subset B(y_{n-1}, r_{n-1}) \cap F_n^c}$

$$B(x, r) \supset \overline{B}(y_1, r_1) \supset \overline{B}(y_2, r_2) \supset \overline{B}(y_3, r_3) \supset \ldots$$

$$\text{diam}\,(\overline{B}(y_n, r_n)) \leq 2 r_n < \frac{2}{n}$$

$\Rightarrow$ teo ENCAJES DE CANTOR

$$\underbrace{\exists!\; y_0 \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{B}(y_n, r_n)}$$

$$y_0 \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{B}(y_n, r_n)$$

$\therefore$ $y_0 \in \overline{B}(y_1, r_1) \subset B(x, r)$.

$\therefore$ $y_0 \in \overline{B}(y_n, r_n) \subset F_n^c \Rightarrow y_0 \notin F_n$ p/ ningún n.

$\Rightarrow y_0 \notin F = \bigcup_n F_n \Rightarrow y_0 \in F^c$

$\therefore$ $y_0 \in B(x, r) \cap F^c$ y $B(x,r) \cap F^c \neq \emptyset$

Como $x \in F$, y $r > 0$ eran arbitrarios, esto dice que $F^\circ = \emptyset$.

Otras versiones del Teorema de Baire

Otras versiones del Teorema de Baire

Definición

Un conjunto $A \subset E$ se dice nunca denso si $(\overline{A})^\circ = \emptyset$

Otras versiones del Teorema de Baire

Definición

Un conjunto $A \subset E$ se dice nunca denso si $(\overline{A})^\circ = \emptyset$

Teorema de Baire 2

En un espacio métrico completo, la unión de numerables conjuntos nunca densos tiene interior vacío.

DEM: $A_n \subset E$, $(\overline{A_n})^\circ = \emptyset$ $\forall n$.

$$\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big)^\circ \subset \Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\overline{A_n}}_{\text{cerrados con INT. vacío}}\Big)^\circ = \emptyset \quad \text{(Baire 1)}$$

Teorema de Baire 3

Si (E, d) es un espacio métrico completo, toda intersección numerable de conjuntos que son abiertos y densos, es densa en E.

O SEA: $\forall n$ G_n ab y $\overline{G_n} = E$

$\Rightarrow \overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n} = E$

USAR: $X \subset E$

$(X^c)^\circ = (\overline{X})^c$

$\overline{X^c} = (X^\circ)^c$

(EJ 15 guía 2)

$F_n = G_n^c \rightarrow$ cerrados

$$F_n^\circ = (G_n^c)^\circ = (\overline{G_n})^c = E^c = \phi.$$

$\xRightarrow{\text{Baire 1}}$ $\left(\bigcup F_n\right)^\circ = \phi.$

$$\phi = \left(\bigcup F_n\right)^\circ \Leftrightarrow \boxed{E = \left[\left(\bigcup_n F_n\right)^\circ\right]^c =}$$

$$= \overline{\left(\bigcup_n F_n\right)^c} = \overline{\bigcap_n F_n^c} = \boxed{\overline{\bigcap_n G_n}}$$

$\therefore \bigcap_n G_n$ es denso.