Cálculo Avanzado - Separabilidad y completitud 3

Primer cuatrimestre de 2020

Daniel Carando

Dto. de Matemática - FCEN - UBA

Esta clase corresponde al Capítulo 8.

Definición

Una sucesión $(x_n)_n$ se dice de Cauchy si para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (que depende de ε) tal que si $n, m \geq n_0$, entonces $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Definición

Una sucesión $(x_n)_n$ se dice de Cauchy si para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (que depende de ε) tal que si $n, m \geq n_0$, entonces $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Definición

Un espacio métrico (E, d) se dice completo si toda sucesión de Cauchy es convergente a un punto $x \in E$.

Definición

Dado $A \subset E$, con $A \neq \emptyset$, se define su diámetro

$$\delta(A) = \sup\{\underline{d(x,y)} \; : \; \underline{x \in A, y \in A}\}. \in [0,+\infty]$$

$\longrightarrow$ $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$

EJERCICIO . $\delta(A) = 1$

. el sup. NO se alcanza

$A = (0,1)$

Definición

Dado $A \subset E$, con $A \neq \emptyset$, se define su diámetro

$$\delta(A) = \sup\{d(x, y) \ : \ x \in A, y \in A\}.$$

Ejercicio

$$\delta(A) = \delta(\bar{A}).$$

IDEA $\cdot$ $A \subset \bar{A} \xrightarrow[\text{VER}]{} \delta(A) \leq \delta(\bar{A})$

$\cdot$ $x, y \in \bar{A}$, $\exists (x_n)_n \subset A$, $(y_n)_n \subset A$ /

$x_n \to x$. $y_n \to y$.

E 22 (i), qué 2 $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$.

Definición

Dado $A \subset E$, con $A \neq \emptyset$, se define su diámetro

$$\delta(A) = \sup\{d(x,y) \ : \ x \in A, y \in A\}.$$

Ejercicio

$$\delta(A) = \delta(\overline{A}).$$

Teorema 8.1.8 (Principio de encaje de Cantor)

Sea (E,d) un e.m. completo, y una sucesión decreciente de conjuntos no vacíos $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$, tales que $\delta(A_j) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Entonces, existe un único $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A}_n$.

Teorema 8.1.8 (Principio de encaje de Cantor)

Sea (E, d) un e.m. completo, y una sucesión decreciente de conjuntos no vacíos $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$, tales que $\delta(A_j) \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$.

Entonces, existe un único $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A}_n$.

E NO completo, NO VALE:

$\to$ $E = (0,1)$

$A_n = (0, 1/n)$, $\overline{A}_n = (0, 1/n]$

$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$, $\delta(A_j) \to 0$

$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A}_n = \emptyset$

$\to$ $E = (C[0,1], d_1)$: PENSAR:

$A_n = \left\{ x \in C[0,1] \,/\, \begin{array}{l} x(0) = 1 \\ \int_0^1 |x(t)|\,dt \leq 1/n \end{array} \right\}$

$\delta(A_i) \not\to 0$

$A_n = [n, +\infty)$

Teorema 8.1.8 (Principio de encaje de Cantor)

Sea (E, d) un e.m. completo, y una sucesión decreciente de conjuntos no vacíos $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$, tales que $\delta(A_j) \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$.

Entonces, existe un único $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A}_n$.

Ejercicio

Vale la vuelta: es el ejercicio 13 de la guía 4. Noten que el enunciado del ejercicio es un poco distinto.

IDEA P/ LA VUELTA:

$(x_k)_k \subset E$ de Cauchy.

QUE CONVERGE.

$A_n \rightsquigarrow$ "colas de la sucesión".

$A_n \neq \emptyset \quad \forall n \Rightarrow \underbrace{\exists\, a_n \in A_n}$.

$\delta(A_n) \to 0$, $\underbrace{\text{dado } \varepsilon > 0}$, $\underbrace{\exists\, n_0}$ / $\delta(A_n) < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$

$n, m \geq n_0$, $\quad a_n \in A_n \subset A_{n_0}$, $\quad a_m \in A_m \subset A_{n_0}$

$\Rightarrow \underbrace{d(a_n, a_m) < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0}$. $\quad \therefore (a_n)_n$ es de Cauchy. Como E es completo, $\underbrace{(a_n)_n \text{ converge}}$ $\underbrace{\text{a } x \in E}$.

$\bullet\ x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$: $\quad \boxed{k \in \mathbb{N}}$. Si $n \geq k$,

$\underbrace{a_n \in A_n} \subset A_k$. $\Rightarrow \underbrace{(a_n)_{n \geq k}} \subset A_k$

además, $\underbrace{(a_n)_{n \geq k} \text{ conv. a } x}$ $\Rightarrow x \in \overline{A_k}$ $\quad \boxed{\therefore x \in \bigcap_k \overline{A_k}}$

UNICIDAD: $\underbrace{x, x'}\in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}$

p/c/ $n \in \mathbb{N}$, $x, x' \in \overline{A_n} \Rightarrow \underbrace{d(x,x')}_{\substack{\vee\!/ \\ 0}} \leq \delta(\overline{A_n}) = \delta(A_n)$ $\downarrow 0$

$\Rightarrow d(x,x') = 0$ y $\therefore x' = x.$ $\boxtimes$

Teorema 8.1.12 y Teorema 8.1.13

Sea (E, d) un e.m. completo y $X \subset E$ un subespacio. Entonces, X es completo si y sólo si X es cerrado (como subconjunto de E)

$\Rightarrow)$ qvq X es cerrado en E.

Sea $x \in \overline{X} \subset E \Rightarrow \exists\ (x_n)_n \subset X \ / \ x_n \to x$ en (E, d)

$(x_n)_n$ conv. en $E \Rightarrow (x_n)_n$ es de Cauchy en E

$\Rightarrow$ $(x_n)_n$ es de Cauchy en X. $\xrightarrow{X \text{ completo}}$ $(x_n)_n$ es convergente en X

$d_X(x_n, x_m) = d(x_n, x_m)$

$\exists\, y \in X$ / $x_n \to y$ (en d_X y $\therefore$ en d)

$x_n \to x$ en d

$y = x$

$\Rightarrow x \in X$

$\Leftarrow$) Sabemos que X cerrado en E, E completo,

q v q X completo.

$\boxed{(x_n)_n \subset X \text{ de Cauchy}}$. Como $d_X(x_n, x_m) = d(x_n, x_m)$

$(x_n)_n$ es de Cauchy en E. $\underset{E \text{ completo}}{\Longrightarrow}$ $\exists\, a \in E \,/\, x_n \to a$.

$(x_n)_n \subset X$, $x_n \to a \Rightarrow a \in \overline{X} \underset{X \text{ cerrado}}{=} X$.

$\underset{X}{\underset{\Uparrow}{x_n}} \to \underset{\underline{X}}{\underset{\Uparrow}{\widehat{a}}}$ en d $\underset{d(x_n,a) = d_X(x_n,a)}{\Longrightarrow}$ $x_n \to a$ en (X, d_X)

$\therefore \boxed{(x_n)_n \text{ conv en } X}$

$\therefore X$ COMPLETO

Obs: . $f: E \to E'$ CONT, NO necesariamente manda suc. de Cauchy en suc. de Cauchy.

. $f: E \to E'$ unif CONT $\Rightarrow$ SÍ.

. EJ 17 GUÍA 4: "mét equivalentes no (necesariam.) respetan completitud" $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $(\mathbb{R}, d')$ d' equiv a $|\cdot|$

$(\mathbb{R}, d')$ NO completo.

d, d' MÉT EQUIV $\Longleftrightarrow$ $id: (E, d) \to (E, d')$ HOMEO

mét unif equiv $\Longleftrightarrow$ $id: (E, d) \to (E, d')$ HOMEO UNIF

EJ 18: HOMEO UNIF RESPETA COMPLETITUD.