UBA - exactas
Departamento de Matemática

Cálculo Avanzado - Teorema de Baire

Primer cuatrimestre de 2020

Daniel Carando

Dto. de Matemática - FCEN - UBA

En esta clase veremos algunas consecuencias del Teorema de Baire.

Teorema de Baire

Teorema de Baire 1

En un espacio métrico completo, la unión numerable de conjuntos cerrados con interior vacío tiene interior vacío.

Teorema de Baire

Teorema de Baire 1

En un espacio métrico completo, la unión numerable de conjuntos cerrados con interior vacío tiene interior vacío.

Definición

Un conjunto $A \subset E$ se dice nunca denso si $(\overline{A})^\circ = \emptyset$

Teorema de Baire

Teorema de Baire 1

En un espacio métrico completo, la unión numerable de conjuntos cerrados con interior vacío tiene interior vacío.

Definición

Un conjunto $A \subset E$ se dice nunca denso si $(\overline{A})^\circ = \emptyset$

Teorema de Baire 2

En un espacio métrico completo, la unión de numerables conjuntos nunca densos tiene interior vacío.

Teorema de Baire

Teorema de Baire 1

En un espacio métrico completo, la unión numerable de conjuntos cerrados con interior vacío tiene interior vacío.

Definición

Un conjunto $A \subset E$ se dice nunca denso si $(\overline{A})^\circ = \emptyset$

Teorema de Baire 2

En un espacio métrico completo, la unión de numerables conjuntos nunca densos tiene interior vacío.

Definición

Un subconjunto A de un e.m. completo E se dice magro (o de primera categoría) si es una unión numerable de conjuntos nunca densos.

Definición

Un subconjunto A de un e.m. completo E se dice magro (o de primera categoría) si es una unión numerable de conjuntos nunca densos.

Definición

Un subconjunto A de un e.m. completo E se dice magro (o de primera categoría) si es una unión numerable de conjuntos nunca densos.

Ejercicio

La unión de numerables conjuntos magros es un conjunto magro.

Definición

Un subconjunto A de un e.m. completo E se dice magro (o de primera categoría) si es una unión numerable de conjuntos nunca densos.

Ejercicio

La unión de numerables conjuntos magros es un conjunto magro.

Teorema de Baire 3 (teo. 11.2.9 del apunte)

Si (E, d) es un espacio métrico completo, toda intersección numerable de conjuntos que son abiertos y densos, es densa en E.

MAGRO → "chico o flaco"

G_δ denso → "grande"

$\boxed{\text{en } E \text{ completo}}$

$A \subset E$ residual o genérico si A contiene un G_δ denso

Definición

Un subconjunto A de un e.m. completo E se dice magro (o de primera categoría) si es una unión numerable de conjuntos nunca densos.

Ejercicio

La unión de numerables conjuntos magros es un conjunto magro.

Teorema de Baire 3 (teo. 11.2.9 del apunte)

Si (E, d) es un espacio métrico completo, toda intersección numerable de conjuntos que son abiertos y densos, es densa en E.

Ejercicio

- $\mathbb{Q}$ es magro (pero no es nunca denso). ¿Es un G_δ?

$\mathbb{I}$ es un G_δ denso. ¿Es magro?.

¿Puede un conjunto ser tanto magro como G_δ denso? en E completo

Observación

Si (E, d) es un espacio métrico completo sin puntos aislados, entonces el cardinal de E mayor (estricto) que $\aleph_0$.

Sup E a lo sumo numerable

$$\underbrace{E = \{x_n\}_n}_{} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\{x_n\}}_{\text{cerrados}} \qquad E^\circ \neq \emptyset$$

~~(∃ finito)~~

$\Longrightarrow$ $\exists\, n_0 \,/\, \{x_{n_0}\}^\circ \neq \emptyset$

BAIRE !

$\Downarrow$ → PENSAR

x_{n_0} es pto aislado.

EJERCICIO: MEJORAR EL ENUNCIADO (permitir puntos aislados!).

Observación

Si (E, d) es un espacio métrico completo sin puntos aislados, entonces el cardinal de E mayor (estricto) que $\aleph_0$.

Ejercicio

Si (E, d) es un espacio métrico completo, y $\boxed{E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n}$ con F_n cerrado para cada n. Entonces $G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n^\circ$ es un abierto denso en E.

abierto ✓

denso: sup. que no $\Rightarrow \exists\, y \in E,\ \tilde{r} > 0 /$

$B(y, \tilde{r}) \cap G = \phi$

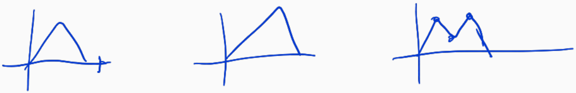
$\Rightarrow \boxed{\bar{B}(y, r) \cap G = \phi} \leftarrow$

Resultados que se prueban con el Teo. de Baire

Ejemplo

En $C([0,1])$, el conjunto de funciones que no son derivables en ningún punto ~~es~~ un G_δ denso.

contiene



IDEA: $A_n = \left\{ f \in C[0,1] \,/\, \forall x \in [0,1],\ \exists h > 0 : \left| \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} \right| > n \right\}$.

- A_n abierto (CUENTAS)
- A_n denso (" ")
- $\bigcap_n A_n \subseteq$ { funciones no deriv en ningún pto }

(CUENTA FÁCIL)

Ejemplo

Una base (algebraica) de $C([0,1])$ tiene cardinal mayor que $\aleph_0$.

$C[0,1]$ es un espacio vectorial.

$\Rightarrow$ Tiene una base.

CON AC LEMA DE ZORN

Con Baire (y cosas que veremos más adelante) se ve que la base es más que numerable.

Ejemplo

Una base (algebraica) de $C([0,1])$ tiene cardinal mayor que $\aleph_0$.

Ejemplo

Sean (E,d) es un espacio métrico completo, y $f_n : E \to E'$, continuas en E, que convergen puntualmente a $f : E \to E'$. Entonces el conjunto de discontinuidades de f es un conjunto magro.

NO LO VEMOS

Ejemplo

Una base (algebraica) de $C([0,1])$ tiene cardinal mayor que $\aleph_0$.

Ejemplo

Sean (E,d) es un espacio métrico completo, y $f_n : E \to E'$, continuas en E, que convergen puntualmente a $f : E \to E'$. Entonces el conjunto de discontinuidades de f es un conjunto magro.

Ejemplo

No hay ninguna función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sea discontinua exactamente en $\mathbb{Q}$.

EJ DE LA PRÁCTICA