Cálculo Avanzado - Compacidad 1

Primer cuatrimestre de 2020

Daniel Carando

Dto. de Matemática - FCEN - UBA

9

En esta clase veremos algunos resultados del capítulo de compacidad, pero en otro orden.

Vimos en Taller de C. A.:

Un subconjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ es compacto cuando cumple alguna de las siguientes condiciones equivalentes:

Compacidad en $\mathbb{R}^n$

Vimos en Taller de C. A.:

Un subconjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ es compacto cuando cumple alguna de las siguientes condiciones equivalentes:

- K es cerrado y acotado.

Compacidad en $\mathbb{R}^n$

Vimos en Taller de C. A.:

Un subconjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ es compacto cuando cumple alguna de las siguientes condiciones equivalentes:

- K es cerrado y acotado.
- Toda sucesión $(x_n)_n \subset K$ tiene subsucesión convergente a un elemento de K.

Compacidad en $\mathbb{R}^n$

Vimos en Taller de C. A.:

Un subconjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ es compacto cuando cumple alguna de las siguientes condiciones equivalentes:

- K es cerrado y acotado.
- Toda sucesión $(x_n)_n \subset K$ tiene subsucesión convergente a un elemento de K.
- La definición rara con cubrimientos de abiertos.

Compacidad en $\mathbb{R}^n$

Vimos en Taller de C. A.:

Un subconjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ es compacto cuando cumple alguna de las siguientes condiciones equivalentes:

- K es cerrado y acotado.
- Toda sucesión $(x_n)_n \subset K$ tiene subsucesión convergente a un elemento de K.
- La definición rara con cubrimientos de abiertos.

Propiedad importante

Si $K \subset \mathbb{R}^n$ es compacto y $f : K \to \mathbb{R}$ es continua, entonces f es acotada y alcanza máximo y mínimo.

Compacidad en $\mathbb{R}^n$

Vimos en Taller de C. A.:
Un subconjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ es compacto cuando cumple alguna de las siguientes condiciones equivalentes:

- K es cerrado y acotado.
- Toda sucesión $(x_n)_n \subset K$ tiene subsucesión convergente a un elemento de K.
- La definición rara con cubrimientos de abiertos.

Propiedad importante
Si $K \subset \mathbb{R}^n$ es compacto y $f : K \to \mathbb{R}$ es continua, entonces f es acotada y alcanza máximo y mínimo.

Es más, $f(K)$ es compacto.

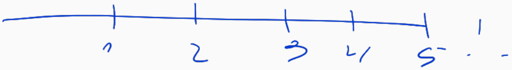
Ejemplo

"Cerrado y acotado" no sirve en espacios métricos.

$E = \mathbb{N}$ con mét. discreta.

$\mathbb{N}$ es cerrado y acot. $\Big]$ → cerrado ✓ ; $\mathbb{N} \subset B(1,2)$

Pero: $\underbrace{x_n = n}$ $\quad (x_n)_n$ NO tiene subsuc. conv.



$f : \mathbb{N} \to (\mathbb{R}, |\cdot|)$

$f(n) = n \Rightarrow f$ no acot

f no alcanza el máx.

$g(n) = 1/n$

NO alcanza el mín.

Compacidad en espacios métricos

$\ell^\infty = \{(a_n)_n \subset \mathbb{R} \, , \, (a_n)_n \text{ acot.}\}$

$e^N = (0, 0, \ldots, 0, \underset{\text{lugar } N}{1}, 0 \ldots)$, $d_\infty(a, b) = \sup_n |a_n - b_n|$.

$A = \underbrace{\{e^N : N \in \mathbb{N}\}}$ $\underline{\text{cerrado}}$ y acotado. $e^N \in \overline{B}(0,1)$ $\forall N$.

$\hookrightarrow$ VER.

$f : A \to \mathbb{R}$ $\quad f(e^N) = N \to$ NO acot

$g : A \to \mathbb{R}$ $\quad f(e^N) = 1/N \to$ NO alc. mínimo.

$(e^N)_{N \in \mathbb{N}} \to$ no tiene subsuc. conv.

Obs: $(C[0,1], d_\infty)$ $\quad \overline{B}(0,1)$ es cerrada y acot.

Tiene sucesiones sin subsuc. conv.

Compacidad en espacios métricos

Definición

Un espacio (E, d) se dice compacto si todo cubrimiento por abiertos de E contiene un subcubrimiento finito.

E compacto $\Leftrightarrow$ $\forall\, (V_i)_{i \in I}$ cubrim de E por ab, $\exists\, i_1, \dots, i_m \in I$ /

$$E = \bigcup_{j=1}^{m} V_{i_j}.$$

$(\mathbb{N}, \delta)$ NO es compacto:

$$\mathbb{N} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{B(n, 1/2)}_{=\{n\}} \rightarrow$$

NO TIENE SUBCUB. FINITO.

Compacidad en espacios métricos

Definición
Un espacio (E, d) se dice compacto si todo cubrimiento por abiertos de E contiene un subcubrimiento finito.

Definición
Si (E, d) es un espacio métrico, un subconjunto $K \subset E$ es compacto si K es compacto con la métrica inducida.

OTRA POSIBILIDAD:

$K \subset E$ es compacto si:

Todo cub. de K por ab. de E, tiene subcub. finito.

Si $K \subset \bigcup_{i \in I} W_i$ ($W_i \subset E$ ab.)

$\Rightarrow \exists\, i_1, \dots, i_m /$

$K \subset \bigcup_{j=1}^{m} W_{i_j}$.

Definición

Un espacio (E, d) se dice compacto si todo cubrimiento por abiertos de E contiene un subcubrimiento finito.

Definición

Si (E, d) es un espacio métrico, un subconjunto $K \subset E$ es compacto si K es compacto con la métrica inducida.

cubrim. de K con ab. de K

Proposición (ver Teorema 9.1.4)

Sea (E, d) un espacio métrico, un $K \subset E$ un subconjunto. Entonces K es compacto si y sólo si todo cubrimiento de K por abiertos de E tiene subcubrimiento finito.

DEM: EJERCICIO

V ab. de $K \iff \exists\, W \subset E$ ab $/$ $V = W \cap K$.

Proposición
Si $K \subset E$ es compacto, entonces es cerrado y acotado.

DEM: K acot: $x_0 \in E$ cualquiera.

$$K \subset \underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} B(x_0, n)}_{=E} \underset{K \text{ comp}}{\Longrightarrow} \exists\, n_1, \dots, n_m \,/\, K \subset \bigcup_{j=1}^{m} B(x_0, n_j)$$

$\Rightarrow K \subseteq B(x_0, n)$ con $n = \max_{1 \le j \le m} n_j$

$\Rightarrow K$ acot ✓

K cerrado: $x \in \overline{K}$ sup $x \notin K$

$$\Rightarrow \underbrace{K}\, \subset E \setminus \{x\} = \{y \in E \,/\, d(y,x) > 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\{y \in E \,/\, d(y,x) > 1/n\}}_{\left(\overline{B}(x, 1/n)\right)^c \text{ ab.}}$$

$$\underset{K \text{ comp}}{\Longrightarrow} \exists\, n_1, \dots, n_m \,/\, K \subset \underbrace{\bigcup_{j=1}^{m} \underbrace{\{y \in E \,/\, d(y,x) > 1/n_j\}}}_{= \{y \in E \,/\, d(y,x) > \delta\}}$$

$\delta = \min\{1/n_1, \dots, 1/n_m\}$

$\therefore K \subset \{y \in E \,/\, d(y,x) > \delta\}$

$\Rightarrow B(x, \delta) \cap K = \emptyset$ Abs ($x \in \overline{K}$)

$\therefore x \in K$ $\therefore K = \overline{K}$, K cerrado.

Proposición
Si E es compacto y $K \subset E$ es cerrado, entonces es K es compacto.

Sea $(V_i)_{i\in I}$ cubrimiento de K por ab. de E

$(K \subset \bigcup_{i\in I} V_i)$.

$E = K \cup (E \setminus K) = \big(\underbrace{\bigcup_{i\in I} V_i}_{\text{ab } \forall i}\big) \cup \underbrace{(E \setminus K)}_{\text{ab (K cerrado)}}$

$\subseteq, \supseteq$

E compacto $\Rightarrow \exists\, i_1, \ldots, i_m \,/\, E = \bigcup_{j=1}^{m} V_{i_j} \cup \underbrace{(E \setminus K)}_{\text{tal vez no es necesario.}}$

$K \subset E = \left(\bigcup_{j=1}^{m} V_{i_j}\right) \cap E \setminus K \Big] \Rightarrow K \subset \bigcup_{j=1}^{m} V_{i_j}$

$K \cap (E \setminus K) = \phi$ $\quad\therefore K$ comp.

Proposición
Si E es compacto y $K \subset E$ es cerrado, entonces es K es compacto. ✓

Corolario
La intersección de conjuntos compactos es un conjunto compacto.

DEM: K_i comp $\forall i \in I$, $K = \bigcap_{i \in I} K_i$.

- K cerrado (intersección de cerrados es cerrado).
- $K \subset K_{i_0}$ p/ algún $i_0 \in I$ (en realidad $\forall i_0 \in I$).

$\therefore$ K es subconj. cerrado de un compacto $\underset{\text{prop}}{\Longrightarrow}$ K compacto.

Definición

Una familia de conjuntos $(F_i)_{i\in I}$ tiene la Propiedad de Intersección Finita (PIF) si toda subfamilia finita tiene intersección no vacía.

$(F_i)_{i\in I}$ tiene PIF si $\forall i_1, \dots, i_m$, $\forall m \in \mathbb{N}$

$$\bigcap_{j=1}^{m} F_{i_j} \neq \emptyset$$

Obs: Si $\bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset \Rightarrow (F_i)_{i\in I}$ tiene PIF.

EJEMPLOS: $F_n = [n, +\infty)$

$\longrightarrow$ $F_n = (0, 1/n)$

- $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$
- $(F_n)_n$ tiene la PIF.

Definición

Una familia de conjuntos $(F_i)_{i\in I}$ tiene la Propiedad de Intersección Finita (PIF) si toda subfamilia finita tiene intersección no vacía.

Teorema (parte del Teo 9.1.6)

E es compacto si y sólo si toda familia de cerrados de E con la PIF tiene intersección no vacía.

DEM: $\Rightarrow$) Sea $(F_i)_{i\in I}$ con PIF. F_i cerrados

Sup $\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset \Rightarrow \bigcup_{i\in I} F_i^c = E$ (abiertos) $\Rightarrow$ E compacto

$\left(\bigcap_{i\in I} F_i\right)^c = \emptyset^c$ DE MORGAN

$\exists\, i_1, \dots, i_m \,/\, E = \bigcup_{j=1}^{m} F_{i_j}^c \underset{\text{COMPL + DE MORGAN}}{\Longrightarrow} \emptyset = \bigcap_{j=1}^{m} F_{i_j}$ (CONTRADICE PIF)

$\therefore \bigcap_{i\in I} F_i \neq \emptyset.$

$\Leftarrow)$ Sea $(V_i)_{i\in I}$ cub. de E por abiertos.

$$E = \bigcup_{i\in I} V_i \overset{\text{COMPL + DE MORGAN}}{\Longrightarrow} \phi = \bigcap_{i\in I} \underbrace{V_i^c}_{\text{cerrados}}.$$

$\Rightarrow \{V_i^c\}_{i\in I}$ NO PUEDE TENER PIF.

$$\Rightarrow \exists\, i_1, \dots, i_m \in I \,/\, \bigcap_{j=1}^{m} V_{i_j}^c = \phi$$

$$\overset{\text{COMPL + DE MORGAN}}{\Longrightarrow} \bigcup_{j=1}^{m} V_{i_j} = E$$

$\big((V_i)_{i\in I}$ tiene subcub. finito$\big)$

$\therefore K$ compacto.

EJERCICIO: DEDUCIR QUE "COMPACTO $\Rightarrow$ COMPLETO"

Observación

Si E es compacto y discreto, entonces E es finito.

DEM: E discreto $\Rightarrow$ dado $x \in E$, $\exists\, r_x \,/\, B(x, r_x) = \{x\}$.

$$\underbrace{E = \bigcup_{x \in E} B(x, r_x)}_{} \underset{E \text{ COMPACTO}}{\Rightarrow} \exists\, x_1, \dots, x_m \,/\, E = \bigcup_{j=1}^{m} \underbrace{B(x_j, r_{x_j})}_{=\{x_j\}}$$

$$\Rightarrow E = \{x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_m}\} \Rightarrow E \text{ FINITO}.$$

Observación
Si E es compacto y discreto, entonces E es finito.

Observación
Si E es compacto y $A \subset E$ no tiene puntos de acumulación en E, entonces A es finito.

($[0,1]$ compacto, $S \subset [0,1]$ no tiene ptos de ac (en $[0,1]$) $\Rightarrow$ S FINITO.

DEM: EJERCICIO

UNA IDEA
1) ver que A es cerrado ($\Rightarrow$ compacto) × PROP
2) ver que A es discreto
3) USAR OBS ANTERIOR.

Teorema

Sea E un espacio métrico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

(a) E es compacto

(b) Todo subconjunto infinito de E tiene un punto de acumulación (en E).

(c) Toda sucesión en E tiene subsucesión convergente.

(d) E es completo y totalmente acotado.

$\to$ la vez que viene.

IDEA: (a) $\Rightarrow$ (b) Obs anterior.

(b) $\Rightarrow$ (c) $(x_n)_n$: (1) $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ FINITO

$\vee$

(2) $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ INFINITO

En cada caso, buscamos subsuc. conv. (1) FÁCIL. (2) usamos (b)

(c) $\Rightarrow$ E completo

$(x_n) \subset E$ de Cauchy. Teo VIEJO.

Por (c), tiene subsuc. conv. $\Big\}$ $\Rightarrow$ $(x_n)_n$ conv

es de Cauchy