Cálculo Avanzado

Primer cuatrimestre de 2020

Cardinalidad 2

Advertencia: estas son notas extraídas de una clase virtual. Algunas justificaciones pueden aparecer incompletas en el texto porque parte de la explicación se hizo oralmente en el video.

Definición

Sean X e Y dos conjuntos. Decimos que son coordinables (o equipotentes, o que tienen el mismo cardinal) si existe $f : X \to Y$ biyectiva. [Notación: $X \sim Y$.]

Definición

Sean X e Y dos conjuntos. Decimos que son coordinables (o equipotentes, o que tienen el mismo cardinal) si existe $f : X \to Y$ biyectiva. [Notación: $X \sim Y$.]

Ejemplo

$\mathbb{N} \sim \{\text{números pares}\} \sim \mathbb{Z} \sim \mathbb{Q}$

Definición

Sean X e Y dos conjuntos. Decimos que son coordinables (o equipotentes, o que tienen el mismo cardinal) si existe $f : X \to Y$ biyectiva. [Notación: $X \sim Y$.]

Ejemplo

$\mathbb{N} \sim \{\text{números pares}\} \sim \mathbb{Z} \sim \mathbb{Q}$

- $\aleph_0 = \#\mathbb{N}$;
- $c = \#\mathbb{R}$;
- $n = \#\mathbb{I}_n$. $= \{1, 2, \dots, n\}$.

Orden entre cardinales

Definición

Decimos que $\#X \leq \#Y$ si existe $f : X \to Y$ inyectiva.

Orden entre cardinales

Definición
Decimos que $\#X \leq \#Y$ si existe $f : X \to Y$ inyectiva.

Definición
Decimos que $\#X < \#Y$ si $\#X \leq \#Y$ pero $X \not\sim Y$.

Orden entre cardinales

Definición
Decimos que $\#X \leq \#Y$ si existe $f : X \to Y$ inyectiva.

Definición
Decimos que $\#X < \#Y$ si $\#X \leq \#Y$ pero $X \not\sim Y$.

Hay que tener cuidado con estas definiciones: $\#X$ y $\#Y$ son clases de equivalencias, mientras que X y Y son representantes de las clases.

Orden entre cardinales

Definición
Decimos que $\#X \leq \#Y$ si existe $f : X \to Y$ inyectiva.

Definición
Decimos que $\#X < \#Y$ si $\#X \leq \#Y$ pero $X \not\sim Y$.

Hay que tener cuidado con estas definiciones: $\#X$ y $\#Y$ son clases de equivalencias, mientras que X y Y son representantes de las clases.

Entonces, veamos la buena definición, por ejemplo, de $\leq$:

Orden entre cardinales

Definición
Decimos que $\#X \leq \#Y$ si existe $f : X \to Y$ inyectiva.

Definición
Decimos que $\#X < \#Y$ si $\#X \leq \#Y$ pero $X \not\sim Y$.

Hay que tener cuidado con estas definiciones: $\#X$ y $\#Y$ son clases de equivalencias, mientras que X y Y son representantes de las clases.

Entonces, veamos la buena definición, por ejemplo, de $\leq$:

Supongamos que $X \sim X'$, $Y \sim Y'$ y que existe $f : X \to Y$ inyectiva. Tenemos que ver que existe una función $f' : X' \to Y'$ inyectiva.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \arrow[d, "h"] \\ X' & Y' \end{tikzcd}$$

$h \circ f \circ g^{-1} : X' \to Y$

INY.

¿Hay cardinales infinitos estrictamente más grandes que otros?

En particular, ¿hay conjuntos no numerables?

¿Hay cardinales infinitos estrictamente más grandes que otros?

En particular, ¿hay conjuntos no numerables?

¿Existe un cardinal que sea el más grande de todos?

¿Hay cardinales infinitos estrictamente más grandes que otros?

En particular, ¿hay conjuntos no numerables?

¿Existe un cardinal que sea el más grande de todos?

Ya vimos que *agrandar* un conjunto no agranda cardinales:

¿Hay cardinales infinitos estrictamente más grandes que otros?

En particular, ¿hay conjuntos no numerables?

¿Existe un cardinal que sea el más grande de todos?

Ya vimos que *agrandar* un conjunto no agranda cardinales:

si a $\mathbb{N}$ le agregamos un montón de números para obtener $\mathbb{Q}$, el cardinal ni se entera.

Definición

Dado un conjunto X, el conjunto de *partes de X* es $\mathcal{P}(X) = \{A \ : \ A \subset X\}$.

Definición

Dado un conjunto X, el conjunto de *partes de X* es $\mathcal{P}(X) = \{A \ : \ A \subset X\}$.

Teorema (Cantor)

Sean X un conjunto. Entonces, $\#X < \#\mathcal{P}(X)$.

$\# \mathbb{N} < \# \mathcal{P}(\mathbb{N})$

$\mathcal{P}(\mathbb{N})$ NO es numerable.

$$f : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$$
$$x \longmapsto \{x\}$$

INYECTIVA.

$\#X \leq \#\mathcal{P}(X)$

$$f : X \to \mathcal{P}(X)$$
$$x \longmapsto X \setminus \{x\}$$

Teorema (Cantor)
Sean X un conjunto. Entonces, $\#X < \#\mathcal{P}(X)$.

$\nexists\, g : X \to \mathcal{P}(X)$ BIYECTIVA

Sea $\boxed{g : X \to \mathcal{P}(X),}$ obs: $x \in X$, $g(x) \subseteq X$

puede pasar que $x \in g(x)$ ó $x \notin g(x)$

$\boxed{B = \{x \in X \,/\, x \notin g(x)\}} \in \mathcal{P}(X)$ $\boxed{B \notin \mathrm{Img}}$

sup $\exists\, y \,/\, B = g(y)$.

Si $y \in B \Rightarrow y \in g(y) \Rightarrow y \notin B = g(y)$ Abs

Si $y \notin B \Rightarrow y \notin g(y) \Rightarrow y \in B$ Abs

$\therefore \nexists\, y \in X \,/\, g(y) = B$

Teorema (Cantor)
Sean X un conjunto. Entonces, $\#X < \#\mathcal{P}(X)$.

Observación

Si X es numerable si y sólo si X se puede escribir como una sucesión de elementos distintos: $X = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $x_n \neq x_m$ si $n \neq m$.

$\Rightarrow)$ X numerable $\Rightarrow \exists f : \mathbb{N} \to X$ biy.

Definimos $x_n = f(n)$. $(n \in \mathbb{N})$

$X = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, o $y \in \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$,

$y = x_{n_0}$ p/ algún n_0 $\Rightarrow y = f(n_0) \in X$

o $x \in X \Rightarrow x = \underset{x_n}{\underset{\parallel}{f(n)}}$ p/ algún n (f SURY)

$x \in \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

f INY: $n \neq m \Rightarrow x_n \neq x_m$.

$\Leftarrow)$ EJERCICIO

Teorema
Sea X infinito. Entonces existe $Y \subset X$ numerable.

Teorema

Sea X infinito. Entonces existe $Y \subset X$ numerable.

Esto es el Teorema 4.2.1 del libro de J. P. Pinasco. En su demostración se usa explícitamente el axioma de elección. Nosotros la vamos a hacer disimulando un poco el uso de este axioma.

Teorema

Sea X infinito. Entonces existe $Y \subset X$ numerable.

Esto es el Teorema 4.2.1 del libro de J. P. Pinasco. En su demostración se usa explícitamente el axioma de elección. Nosotros la vamos a hacer disimulando un poco el uso de este axioma.

Observación

Vale la vuelta del teorema: si X tiene un subconjunto numerable, entonces X es infinito. ¿Por qué?

Teorema

Sea X infinito. Entonces existe $Y \subset X$ numerable.

$\mathbb{N}$

Esto es el Teorema 4.2.1 del libro de J. P. Pinasco. En su demostración se usa explícitamente el axioma de elección. Nosotros la vamos a hacer disimulando un poco el uso de este axioma.

Observación

Vale la vuelta del teorema: si X tiene un subconjunto numerable, entonces X es infinito. ¿Por qué?

Observación

Decir que X tiene un subconjunto numerable es lo mismo que decir que existe una función inyectiva de $\mathbb{N}$ en X. Entonces, el teorema dice que $\aleph_0 \leq \#X$ para todo X infinito.

$f : \mathbb{N} \to X$

Teorema
Sea X infinito. Entonces existe $Y \subset X$ numerable.

X infinito $\Rightarrow$ X no vacío $\Rightarrow \exists\, x_1 \in X$

$X \setminus \{x_1\} \neq \emptyset \Rightarrow \exists\, x_2 \in X \setminus \{x_1\}$ $\quad x_2 \neq x_1$

$X \setminus \{x_1, x_2\} \neq \emptyset \Rightarrow \exists\, x_3 \in X \setminus \{x_1, x_2\}$ $\quad x_3 \neq x_1$, $x_3 \neq x_2$

$\vdots$

Inductivamente, si tenemos $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$

$X \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \neq \emptyset \Rightarrow \exists\, x_{n+1} \in X \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$

Armamos una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos distintos. $Y = \{x_n\}_n$ es NUMERABLE

$f: \mathbb{N} \to X$, $f(n) = x_n$ INY. $f: \mathbb{N} \to Y$ biy.

Ya vimos que hay conjuntos que son coordinables con subconjuntos propios.

$\{pares\} \sim \mathbb{N} \sim \underline{\mathbb{Z}} \sim \underline{\mathbb{Q}}$

$$\underline{\mathbb{R}} \sim \underline{(0, +\infty)}$$
$$x \longmapsto e^x$$

$$(-\pi/2, \pi/2) \sim \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto tg(x)$$

$$\mathbb{R} \sim (-1, 1)$$
$$x \longmapsto \frac{x}{1+x^2}$$

Teorema

Sea X un conjunto. Entonces, X es infinito si y sólo si es coordinable con un subconjunto propio.

$\Rightarrow$) X infinito $\rightarrow$ X contiene a un Y NUMERABLE. $Y = \{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. $Y_2 = \{y_2, y_4, y_6, y_8, \ldots\}$

$$X = (X \setminus Y) \cup \underset{\substack{\wr \\ Y_2}}{Y} \sim \underbrace{(X \setminus Y) \cup Y_2}_{\subsetneq X}$$

$g : Y \rightarrow Y_2$

$g(y_n) = y_{2n}$

$f : X \rightarrow (X \setminus Y) \cup Y_2$

$$f(x) = \begin{cases} x & x \notin Y \\ g(x) & x \in Y \end{cases}$$

biy.

$\Leftarrow$) EJERCICIO (LEMA)

Los resultados previos permiten caracterizar a los conjuntos infinitos.

Teorema

Sea X un conjunto. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

- X es infinito.
- Existe una función inyectiva de $\mathbb{N}$ a X (o X tiene un subconjunto numerable).
- X es coordinable a un subconjunto propio.
- X es coordinable a $X \setminus \{x_0\}$, para cualquier $x_0 \in X$.

Supongamos que $\#X \leq \#Y$ y que $\#Y \leq \#X$.

¿Es cierto que $\#X = \#Y$?

Supongamos que $\#X \leq \#Y$ y que $\#Y \leq \#X$.

¿Es cierto que $\#X = \#Y$?

Teorema de Schröder-Bernstein o de Cantor-Bernstein o de Cantor–Schröder–Bernstein

Si existen $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ inyectivas, entonces existe $h : X \to Y$ biyectiva.

Supongamos que $\#X \leq \#Y$ y que $\#Y \leq \#X$.

¿Es cierto que $\#X = \#Y$?

Teorema de Schröder-Bernstein o de Cantor-Bernstein o de Cantor–Schröder–Bernstein
Si existen $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ inyectivas, entonces existe $h : X \to Y$ biyectiva.

El teorema anterior aparece como el Teorema 3.2.3 del libro.
Veamos algunas consecuencias.

Supongamos que $\#X \leq \#Y$ y que $\#Y \leq \#X$.

¿Es cierto que $\#X = \#Y$?

Teorema de Schröder-Bernstein o de Cantor-Bernstein o de Cantor–Schröder–Bernstein

Si existen $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ inyectivas, entonces existe $h : X \to Y$ biyectiva.

El teorema anterior aparece como el Teorema 3.2.3 del libro. Veamos algunas consecuencias.

Corolario

La relación $\leq$ entre cardinales es una relación de orden.

$\#X \leq \#X$

$\#X \leq \#Y \quad \#Y \leq \#Z$

Supongamos que $\#X \leq \#Y$ y que $\#Y \leq \#X$.

¿Es cierto que $\#X = \#Y$?

Teorema de Schröder-Bernstein o de Cantor-Bernstein o de Cantor–Schröder–Bernstein

Si existen $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ inyectivas, entonces existe $h : X \to Y$ biyectiva.

El teorema anterior aparece como el Teorema 3.2.3 del libro. Veamos algunas consecuencias.

Corolario

La relación $\leq$ entre cardinales es una relación de orden.

Ejemplo

$\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$

$X \rightleftarrows Y$

Ejemplo

$\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ INY.

$f(n) = n$

$g : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ iny / $x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$, $\exists !\ p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ /

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ 2^p 3^q & x > 0 \\ 5^{|p|} 7^q & x < 0 \end{cases}$$

$x = p/q$

$x = p/q$

$(p, q) = 1$

INYECTIVA.

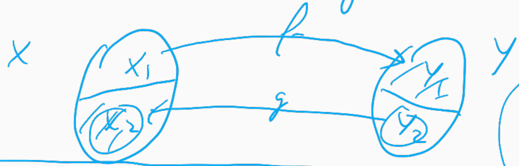
$\boxed{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}}$

$\Rightarrow \mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$.

Teorema de Schröder-Bernstein o de Cantor-Bernstein o de Cantor–Schröder–Bernstein

Si existen $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ inyectivas, entonces existe $h : X \to Y$ biyectiva.

$f : X \to Y$ INY, $g : Y \to X$ INY.



$f : X_1 \to Y_1$ BIY

$g : Y_2 \to X_2$ BIY

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in X_1 \\ g^{-1}(x) & x \in X_2 \end{cases} \quad \text{BIY.}$$

Para que funcione, X_1 tiene que cumplir:

$$g(Y - f(X_1)) = X \setminus X_1$$

$\phi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$

$$X_2 = X \setminus g(Y - f(X_1)) \to \phi(A) = X \setminus g(Y - f(A))$$