Forma de Smith

Ejemplos: 1) $M = \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_{12}$ está generado por

$m_1 = (1,0)$, $m_2 = (0,1)$ con relaciones

$4m_1 = 0$, $12m_2 = 0$.

Considero $\varphi : \mathbb{Z}^2 \to M$

$$(r,s) \mapsto rm_1 + sm_2$$

$\Rightarrow \ker\varphi = \{(r,s) \in \mathbb{Z}^2 : (r,s) = (4a, 12b); a,b \in \mathbb{Z}\}$

$\Rightarrow (4a, 12b) \in \ker\varphi$ se escribe como

$(4a, 12b) = a(4,0) + b(0,12)$.

La matriz para las relaciones es $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$.

2) Sea M el grupo abeliano generado por $\{m_1, m_2\}$

y supongamos que el submódulo de

relaciones K está generado por $\{(3,0), (0,6)\}$.

$\Rightarrow$ la matriz de relaciones es $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

y $K = \{(3a, 6b) \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$.

Además $K = \ker(\mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_6)$ donde

$\varphi(r,s) = (r + 3\mathbb{Z}, s + 6\mathbb{Z})$ y luego

$M \simeq \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_6$.

3) Sea M el grupo abeliano con generadores $\{m_1, m_2\}$ y relaciones: $2m_1 + 4m_2 = 0$, $-2m_1 + 6m_2 = 0$. El submódulo de relaciones contiene a $k_1 = (2,4)$, $k_2 = (-2,6)$

Si K estuviera generado por k_1, k_2

$\rightarrow$ la matriz sería $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$.

Como K también podría generarse con k_1, k_1+k_2 respecto a este conj. de generadores la matriz de relaciones sería

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

en general,

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2: C_2 - 2C_1} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_2: F_1+F_2]{} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

es la matriz de relaciones respecto de la base $\{m_1, 2m_1 + m_2\}$

esto nos dice que $M \cong \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{10}$

Esta matriz corresponde a $\{m_1, 2m_1 + m_2\}$ y $\{k_1, k_1 + k_2\}$

Generadores y relaciones:

R dominio principal; M R-módulo finitamente generado $\{m_1, \ldots, m_n\}$ conj. de generadores de M

$\Rightarrow \exists\ \varphi : R^n \to M$ epimorf. tq.

$\varphi(r_1, \ldots, r_n) = \sum_i r_i m_i$. Sea $K = \ker \varphi$

$\Rightarrow M \simeq R^n/K$.

Def: K es el <u>submódulo de relaciones de M</u>.

OBS: 1) si $(r_1, \ldots, r_n) \in K \Rightarrow \sum_i r_i m_i = 0$.

2) K es finitamente generado.

3) si $\{k_1, \ldots, k_m\} \subseteq R^n$ es un conj. de generadores para K, si $k_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$

$\Rightarrow (a_{ij})$ es la matriz de relaciones de M respecto del conj. de generadores $\{m_1, \ldots, m_n\}$ y $\{k_1, \ldots, k_m\}$.

Lema: M finitamente generado; $\{m_1, \ldots, m_n\}$ conj. de generadores (ordenado). Sup. que K está generado por $\{k_1, \ldots, k_p\}$ (ordenado)

Sea $A \in R^{p \times n}$ la matriz de relaciones entonces

1) si $P \in R^{p \times p}$ es inversible y $PA = \begin{pmatrix} l_1 \\ \hline l_2 \\ \hline \vdots \\ \hline l_p \end{pmatrix}$

$\to \{l_1, \dots, l_p\}$ genera K y

entonces PA es la matriz de relaciones respecto de $\{m_1, \dots, m_n\}$ y $\{l_1, \dots, l_p\}$;

2) si $Q = R^{n \times n}$ es inversible y $Q^{-1} = (q_{ij})$,

$m'_j = \sum_i q_{ij} m_i \to \{m'_1, \dots, m'_n\}$ es un conj. de generadores para M y las filas de AQ generan el correspondiente submódulo de relaciones : AQ es la matriz de relaciones respecto de $\{m'_1, \dots, m'_n\}$;

3) $P \in R^{p \times p}$; $Q \in R^{n \times n}$ inversibles. Si $B = PAQ \to B$ es la matriz de relaciones respecto de un cierto conj. de generadores de M y de un cierto submódulo de relaciones.

<u>dem</u>: 1) sup. $P = (\alpha_{ij}) \to$ las filas de PA son:

$$l_1 = \alpha_{11} k_1 + \cdots + \alpha_{1p} k_p$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$l_p = \alpha_{p1} k_1 + \cdots + \alpha_{pp} k_p$$

$\Rightarrow$ $l_j \in K$ $\forall j$ y $\{l_1, \ldots, l_p\}$ es un conj. de generadores de K pues P es inversible.
(es decir, $k_i = \beta_{i1} l_1 + \cdots + \beta_{ip} l_p$, donde $P^{-1} = (\beta_{ij})$)

2) $$A \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (AQ)Q^{-1} \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

y entonces:
$$(AQ) \begin{pmatrix} m_1' \\ \vdots \\ m_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix};$$

además, si $r = (r_1, \ldots, r_n) \in K'$ (= el submódulo de relaciones respecto de $\{m_1', \ldots, m_n'\}$)
$\Rightarrow$ $\sum r_i m_i' = 0$. Luego,

$$(r_1 \cdots r_n) Q^{-1} \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow (r_1, \ldots, r_n) Q^{-1} \in K$$

$$\Rightarrow (r_1, \ldots, r_n) Q^{-1} = \sum_i c_i k_i, \quad c_i \in R$$

$$\Rightarrow (r_1, \ldots, r_n) = \sum_i c_i (k_i Q).$$

3) fácil.

Consideremos 3 tipos de operaciones en las filas (columnas)

1) multiplicar la fila (columna) por un elemento de $\mathcal{U}(R)$;
2) intercambiar dos filas (columnas);
3) sumarle a una fila (columna) un múltiplo de otra.

Cada una de estas operaciones es inversible.
Si E es la matriz que se obtiene después de haberle aplicado operaciones de filas a la identidad $m \times n$ $\rightarrow$ EA es la matriz que se obtiene después de haberle aplicado esas operaciones a A.
Análogamente, si E' es la matriz que se obtiene después de aplicar operaciones en las columnas de la identidad $m \times m$, AE' es la que se obtiene después de aplicar esas operaciones en A.

OBS: 1) E y E' son inversibles.
2) si a la matriz A le aplicamos operaciones de filas/columnas, el resultado tendrá la

forma PAQ con P y Q inversibles.

<u>Proposición</u>: A matriz de relaciones para M

si $\exists\, P, Q$ inversibles tales que

$$PAQ = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n) \Rightarrow M \simeq R/(a_1) \oplus \cdots \oplus R/(a_n)$$

<u>dem</u>: PAQ es la matriz de rels. respecto de $\{m_1, \dots, m_n\}$ y del submódulo K de rels. generado por las filas de PAQ.

Sea $\varphi : R^n \to M$, $\varphi(r_1, \dots, r_n) = \sum r_i m_i$

$\Rightarrow K = \ker\varphi$ y $R^n/K \simeq M$. Además

$K = \ker\psi$ donde $\psi : R^n \to R/(a_1) \oplus \cdots \oplus R/(a_n)$

es el epimorf. canónico.

<u>Teorema</u>: $\exists\, P, Q$ inversibles tales que

$$PAQ = \left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & a_n & \\ \hline & & & 0 \end{array}\right) \quad \text{con } a_i \neq 0 \text{ y } a_i \mid a_{i+1}$$

forma de Smith

<u>dem</u>: hacemos el caso 2×2. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Sea $e = (a : c) \Rightarrow \exists\, x, y \in R$ tales que

$e = ax + by$. Como $e \mid a$, $\exists\, \alpha \in R : a = e\alpha$.

y $\exists\, \beta \in R$: $b = e\beta$. Además $1 = \alpha x + \beta y$.

observar que

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & -y \\ \beta & x \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} x & y \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & bx+dy \\ +\alpha c - a\beta & -b\beta + d\alpha \end{pmatrix}$$

Como $e \mid -a\beta + c\alpha$, puedo aplicar una operación de filas para obtener

$$\begin{pmatrix} e & u \\ 0 & v \end{pmatrix}$$

Hago algo similar pero por columnas y obtengo una matriz de la forma

$$\begin{pmatrix} e_1 & 0 \\ * & * \end{pmatrix} \quad \text{donde } e_1 = (e : u)$$

Iterando este proceso obtengo una sucesión $(e) \subseteq (e_1) \subseteq \dots$ que tiene que estabilizarse y entonces tengo

$$\begin{pmatrix} f & 0 \\ g & h \end{pmatrix} \text{ o } \begin{pmatrix} f & g \\ 0 & h \end{pmatrix}$$

con $f \mid g$. Una operación de fila (o columna) me da una matriz diagonal $\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$. Luego,

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ d_1 x & d_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ d_1 x + d_2 y & d_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ d & d_2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 0 & -d_2\alpha \\ d & d_2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -d_2\alpha \\ d & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & -d_2\alpha \end{pmatrix}$$

donde $d = (d_1 : d_2) = d_1 x + d_2 y$ y $a = d\alpha$, $b = d\beta$

<u>Corolario</u>: M finitamente generado

$\Rightarrow \exists\, a_1, \dots, a_m \in R$ tales que $a_i \mid a_{i+1}$

y $\exists\, t \in \mathbb{N}_0$ tal que

$M \simeq R/(a_1) \oplus \cdots \oplus R/(a_m) \oplus R^t$

<u>dem</u>: A es la matriz de relaciones y B

es su forma de Smith: $B = PAQ$.

Si $B = \left(\begin{array}{ccc|c} a_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & a_m & \\ \hline & & & 0 \end{array}\right) \Rightarrow M \simeq R/(a_1) \oplus \cdots \oplus R/(a_m) \oplus R^t$

donde $R^t = \underbrace{R/(0) \oplus \cdots \oplus R/(0)}_{t \text{ veces}}$

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 22 & 0 \\ -2 & 2 & -6 & -4 \\ 2 & 2 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

Tengo un módulo M libre con base x_1, x_2, x_3, x_4 y el submódulo K generado por u_1, u_2, u_3 con $u_1 = 22x_3$, $u_2 = -2x_1 + 2x_2 - 6x_3 - 4x_4$, $u_3 = 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 8x_4$.

- Cambio filas 1 y 3 $(F_1 \leftrightarrow F_3)$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 & 8 \\ -2 & 2 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & 22 & 0 \end{pmatrix}$$

- $F_2 \leftarrow F_1 + F_2$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 & 8 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 22 & 0 \end{pmatrix}$$

- $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$
- $C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1$
- $C_4 \leftarrow C_4 - 4C_1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 22 & 0 \end{pmatrix}$$

$C_4 \leftarrow C_4 - C_2 \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 22 & 0 \end{pmatrix}$

y ahora, como $4 \nmid 22$ hago así:

$$\xrightarrow{F_2 : F_2 + F_3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 22 & 0 \\ 0 & 0 & 22 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[C_3 : -5C_2 + C_3]{} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & +2 & 0 \\ 0 & 0 & 22 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[C_3 \leftarrow C_2]{} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +2 & 4 & 0 \\ 0 & 22 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 : -11F_2 + F_3} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -44 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 44 & 0 \end{pmatrix}$$

luego, la nueva base es y_1, y_2, y_3, y_4 y las relaciones:

$v_1 = 2y_1$
$v_2 = 2y_2$
$v_3 = 44y_3$

Ejemplo: A grupo abeliano con generadores m_1, m_2, m_3 con relaciones

$$\begin{cases} 8m_1 + 4m_2 + 8m_3 = 0 \\ 4m_1 + 8m_2 + 4m_3 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

$A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 8 \\ 4 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ se corresponde con los generadores m_1, m_2, m_3 y las relaciones $(*)$

Hagamos operaciones:

$F_1 \leftarrow 2F_2 - F_1$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 12 & 0 \\ 4 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

los generadores: m_1, m_2, m_3 y ahora las relaciones son $12m_2 = 0$

$4m_1 + 8m_2 + 4m_3 = 0$

$C_2 \leftarrow 2C_1 - C_2$

$C_3 \leftarrow C_3 - C_1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 12 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

los generadores son: $m_1 + 2m_2 + m_3$, m_2

y las relaciones

$12m_2 = 0$

$4(m_1 + 2m_2 + m_3) = 0$

y luego,

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \end{pmatrix}$$

generadores: $-m_2$, $m_1 + 2m_2 + m_3$

relaciones: $4(m_1 + 2m_2 + m_3) = 0$

$12m_2 = 0$

$\Rightarrow A \simeq \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_{12}$.

Ejercicio: Calcule la cantidad de grupos abelianos no isomorfos de orden 450.

$450 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$

$\rightarrow \quad G \simeq \mathbb{Z}_{450}, \quad G \simeq \mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{30}$

$G \simeq \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{90}, \quad G \simeq \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{150}$

Teorema de estructura de grupos abelianos finitamente generados.

Teorema: G grupo abeliano finitamente generado y $T(G) = \{g \in G : \exists\, n \in \mathbb{N} : ng = 0\}$ el subgrupo de torsión. Entonces

(1) $\exists\, t \in \mathbb{N}_0$ (rango de G) y $L < G$, $L \simeq \mathbb{Z}^t$ tal que $G = T(G) \oplus L$.

(2) $\exists!\, t \geq 0$, $d_1 \geq 2, \ldots, d_s \geq 0$ con $d_i \mid d_{i+1}$ tales que $G \simeq \mathbb{Z}_{d_1} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{d_s} \times \mathbb{Z}^t$

(3) (descomposición primaria) $\exists!\, t \geq 0$, $p_1 \leq \cdots \leq p_u$ primos, $v_1 \geq 1, \ldots, v_u \geq 1$, tales que $G \simeq \mathbb{Z}_{p_1^{v_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p_u^{v_u}} \times \mathbb{Z}^t$

Ejemplos: 1) hay 3 grupos abelianos de orden p^3:

$\mathbb{Z}_{p^3}$, $\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$.

2) $|G| = 360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$, G abeliano

Las posibilidades son:

2^3: 2^3, $2\cdot 2^2$, $2\cdot 2\cdot 2$

3^2: 3^2, $3\cdot 3$

5: 5

Tenemos: $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_6\times\mathbb{Z}_{30}$, $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_{90}$, $\mathbb{Z}_6\times\mathbb{Z}_{60}$,

$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_{180}$, $\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_{120}$, $\mathbb{Z}_{360}$.

3) Encontrar la descomposición primaria y los factores invariantes del grupo $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_{12}\times\mathbb{Z}_{18}$

$$\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_{12}\times\mathbb{Z}_{18} = \mathbb{Z}_4\times(\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_3)\times(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_9)$$

(pues si $(n:m)=1 \Rightarrow \mathbb{Z}_n\times\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}_{nm}$)

luego, la descomposición primaria es $\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_9$

Busquemos ahora los factores invariantes

2	4	4
	3	9
2	12	36

$$\Rightarrow \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_9 \simeq \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_{12}\times\mathbb{Z}_{36}$$

Ejemplo: sea G abeliano con $|G| = 1350$

sabemos que las componentes de G son de la forma $\mathbb{Z}_{a_i}$ con $a_i | a_{i+1}$ $\forall i$

$\Rightarrow a_1 \cdots a_r = 1350 = 2\,3^3 5^2$

Las posibilidades son:

(1) $a_1 = 2^1 3^3 5^2 \Rightarrow G \simeq \mathbb{Z}_{1350}$

(2) $a_1 = 2^0 3^0 5^1 = 5$, $a_2 = 2^1 3^3 5^1 = 270$

$\Rightarrow G \simeq \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{270}$

(3) $a_1 = 2^0 3^1 5^0 = 3$, $a_2 = 2^1 3^2 \cdot 5^2 = 450$

$\Rightarrow G \simeq \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{450}$

(4) $a_1 = 2^0 3^1 5^1 = 15$, $a_2 = 2^1 3^2 5^1 = 90 \Rightarrow G \simeq \mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{90}$

(5) $a_1 = 2^0 3^1 5^0 = 3$, $a_2 = 2^0 3^1 5^0 = 3$, $a_3 = 2^1 3^1 5^2 = 150$

$\Rightarrow G \simeq \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{150}$

(6) $a_1 = 2^0 3^1 5^0 = 3$, $a_2 = 2^0 3^1 5^1$, $a_3 = 2^1 3^1 5^1 = 30$

$\Rightarrow G \simeq \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_{30}$

Ejercicios: 1) clasificar los grupos abelianos de orden 441 y 40.

2) Sean M, N, P grupos abelianos. Probar que

$M \oplus N \simeq M \oplus P \not\Rightarrow N \simeq P$

3) en el problema anterior, probar que $N \simeq P$ si M, N, P son finitamente generados.

Ejercicio: Sea G un grupo abeliano de orden 24 tal que todo elemento de G tiene orden ≤ 12. Encontrar las posibles descomposiciones primarias de G.

$24 = 2^3 \cdot 3 \Rightarrow$ los grupos abelianos de orden 24 son $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_8$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$.

si $(a,b,c) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3 \Rightarrow 12(a,b,c) = (0,0,0)$

$\Rightarrow$ en $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3$ todo elemento tiene orden ≤ 12.

Lo mismo pasa en $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$, pero en $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_8$, $12(1,1) = (0,4) \neq (0,0)$, de hecho, $(1,1)$ tiene orden 24.

---

solución del ejercicio 2): tomar $M = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}$, $N = \mathbb{Z}$, $P = 0$

la parte 3) sale por el teorema de estructura, si $N \not\simeq P$

$\Rightarrow$ las descomposiciones de N y P tienen $\neq$ factores invariantes

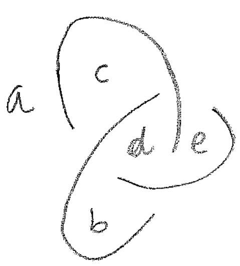
$\Rightarrow$ lo mismo pasaría con $M \oplus N$ y $M \oplus P$.

Ejemplo: El grupo de Alexander de un nudo.

Es un grupo abeliano que funciona como invariante del nudo.

Supongamos tener una proyección con n cruces, entonces, contando el exterior como una región, hay n vértices y n aristas $\to$ por el teorema de Euler hay $n+2$ caras ó regiones ($V+F-E=2$). El grupo de Alexander $A(K)$ del nudo K tiene $n+2$ generadores (uno por cada región) y las relaciones son: $a+b=c+d$, en el cruce:

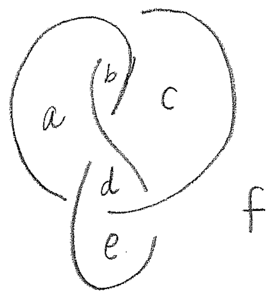
$$\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline c & d \end{array}$$

(1) 

$$A(K) = \langle a,b,c,d \mid a+c=b+d,\; c+d=a+e,\; d+e=a+b \rangle$$

$$\simeq \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}_3.$$

K



$$A(K) = \langle a,b,c,d,e,f \mid a+b=c+f,\ a+d=b+c,\ a+f=d+e,\ c+d=e+f \rangle$$

$$\to\ A(K) \simeq \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_5$$