Práctica 4: Separabilidad y Completitud

"Cuanto más sólido, bien definido y espléndido es el edificio erigido por el entendimiento, más imperioso es el deseo de la vida por escapar de él hacia la libertad."
Hegel.

A. Separabilidad

Ejercicio 1. Probar que $\mathbb{R}^n$ (con la distancia euclídea) es separable.

Ejercicio 2. Sea $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} : \exists\, n_0 : a_n = 0 \;\forall\, n \geq n_0\}$. Se considera la aplicación $d_\infty : \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \times \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $d_\infty((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n - b_n|$. Probar que $(\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}, d_\infty)$ es un espacio métrico separable.

Ejercicio 3. Sea (X, d) un espacio métrico. Se dice que una familia $\mathcal{A} = (U_j)_{j\in J}$ de abiertos de X es una *base de abiertos de* X si todo abierto de X se puede escribir como unión de miembros de $\mathcal{A}$. Probar que $\mathcal{A}$ es una base de abiertos de X si y sólo si verifica la siguiente condición: "Para todo abierto G de X y para todo $x \in G$ existe $j \in J$ tal que $x \in U_j \subseteq G$".

Ejercicio 4. Sea (X, d) un espacio métrico que verifica que cada cubrimiento abierto de X tiene un subcubrimiento numerable. Probar que X es separable.

Ejercicio 5. Probar que todo subespacio de un espacio métrico separable es separable.

Ejercicio 6. Sea (X, d) un espacio métrico separable. Probar que toda familia de subconjuntos de X no vacíos, abiertos y disjuntos dos a dos es a lo sumo numerable. Deducir que el conjunto de puntos aislados de X es a lo sumo numerable.

Ejercicio 7. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos. Probar que $(X \times Y, d_\infty)$ es separable si y sólo si (X, d) e (Y, d') son separables.

Ejercicio 8. ¿Es el espacio (ℓ_∞, d_∞) separable?

Ejercicio 9. Sean X, Y espacios métricos. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una función continua y suryectiva. Probar que si X es separable, entonces Y es separable.

B. Completitud

Ejercicio 10. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$. Probar que:

i) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ si y sólo si para toda subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$.

ii) Si existe $x \in X$ para el cual toda subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $(x_{n_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{j\to\infty} x_{n_{k_j}} = x$, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

iii) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. ¿Vale la recíproca?

iv) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, entonces es acotada.

v) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y tiene una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x \in X$, entonces $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Ejercicio 11. Probar que si toda bola cerrada de un espacio métrico X es un subespacio completo de X, entonces X es completo.

Ejercicio 12. Sea (X, d) un espacio métrico.

i) Probar que todo subespacio completo de (X, d) es un subconjunto cerrado de X.

ii) Probar que si X es completo, entonces todo subconjunto $F \subseteq X$ cerrado, es un subespacio completo de X.

Ejercicio 13. *(Teorema de Cantor)* Probar que un espacio métrico (X, d) es completo si y sólo si toda familia $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos de X cerrados, no vacíos tales que $F_{n+1} \subseteq F_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\operatorname{diam}(F_n) \longrightarrow 0$ tiene un único punto en la intersección.

Ejercicio 14. Sean (X, d) e (Y, d') espacios métricos. Probar que $(X \times Y, d_\infty)$ es completo si y sólo si (X, d) e (Y, d') son completos.

Ejercicio 15.

i) Sea X un espacio métrico y sea $B(X) = \{f : X \to \mathbb{R} : f \text{ es acotada }\}$. Probar que $(B(X), d_\infty)$ es un espacio métrico completo, donde $d_\infty(f, g) = \sup\limits_{x\in X} |f(x) - g(x)|$.

ii) Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Probar que $(C[a, b], d_\infty)$ es un espacio métrico completo, donde $d_\infty(f, g) = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$.

iii) Probar que $c_0 := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \mid a_n \to 0\}$ es un espacio métrico completo con la distancia $d_\infty((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sup\limits_{x\in\mathbb{N}} |a_n - b_n|$.

Ejercicio 16. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $D \subseteq X$ un subconjunto denso con la propiedad que toda sucesión de Cauchy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$ converge en X. Probar que X es completo.

Ejercicio 17. Consideramos en $\mathbb{R}$ la métrica

$$d'(x, y) = \left| \frac{x}{1 + |x|} - \frac{y}{1 + |y|} \right|.$$

Recodar que (práctica 3, ejercio 5) d' es topológicamente equivalente a la métrica usual $d(x, y) = |x-y|$. Probar que $(\mathbb{R}, d')$ no es completo.

Ejercicio 18. Sea $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$ un homeomorfismo uniforme (es decir, tanto f como f^{-1} son uniformemente continuas). Probar que (X, d) es completo si y sólo si (Y, d') es completo.
En particular, si un espacio métrico X es completo para una métrica lo es para cualquier otra métrica uniformemente equivalente.

Ejercicio 19. Sean X e Y espacios métricos, Y completo. Sea $D \subseteq X$ denso y sea $f : D \longrightarrow Y$ una función uniformemente continua. Probar que f tiene una única extensión continua a todo X, es decir, existe una única función $F : X \longrightarrow Y$ continua tal que $F|_D = f$. (Más aún, F es uniformemente continua).