UBA - exactas
Departamento de Matemática

Cálculo Avanzado - CONJ. CONEXOS 2

Primer cuatrimestre de 2020

Daniel Carando

Dto. de Matemática - FCEN - UBA

Seguimos con temas del capítulo 10 del apunte.

Definición

Un espacio métrico (E, d) es conexo cuando los únicos subconjuntos de E que son a la vez abiertos y cerrados son E y $\emptyset$.

Definición

Un espacio métrico (E, d) es conexo cuando los únicos subconjuntos de E que son a la vez abiertos y cerrados son E y $\emptyset$.

Observación

E es conexo si y sólo si no existen U y V abiertos no vacíos tales que $E = U \cup V$ y que $U \cap V = \emptyset$.

Definición

Un espacio métrico (E, d) es conexo cuando los únicos subconjuntos de E que son a la vez abiertos y cerrados son E y $\emptyset$.

Observación

E es conexo si y sólo si no existen U y V abiertos no vacíos tales que $E = U \cup V$ y que $U \cap V = \emptyset$.

Definición

Un subconjunto $A \subset E$ es conexo si es conexo cuando lo pensamos como espacio métrico con la métrica inducida.

Definición

Un espacio métrico (E, d) es conexo cuando los únicos subconjuntos de E que son a la vez abiertos y cerrados son E y $\emptyset$.

Observación

E es conexo si y sólo si no existen U y V abiertos no vacíos tales que $E = U \cup V$ y que $U \cap V = \emptyset$.

Definición

Un subconjunto $A \subset E$ es conexo si es conexo cuando lo pensamos como espacio métrico con la métrica inducida.

Ejercicio

Un subconjunto $A \subset E$ es conexo si y sólo si no existen U y V abiertos de E tales que $A \cap U \neq \emptyset$, $A \cap V \neq \emptyset$, $A \subset U \cup V$ y $A \cap U \cap V = \emptyset$.

Ejercicio

Hallar todos los subconjuntos conexos de $\mathbb{Q}$.

Ejercicio

Hallar todos los subconjuntos conexos de $\mathbb{Q}$.

10.1.11

Teorema $A \subset E$

Si A es conexo, y $A \subseteq B \subseteq \bar{A}$, entonces B es conexo.

EN PART, $\bar{A}$ CONEXO

¿ A CONEXO $\Rightarrow A^\circ$ CONEXO ?

DEM: Sup B NO CONEXO

$\Rightarrow \exists\ U, V$ ab. de E / $B \subset U \cup V$, $B \cap U \neq \phi$, $B \cap V \neq \phi$, $U \cap V \cap B = \phi$.

~~$A \subset B \subset \bar{A} \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{B} \subset \bar{A} \Rightarrow \boxed{\bar{B} = \bar{A}}$~~

Si $b_1 \in B \cap U \Rightarrow b_1 \in \bar{A} \cap U \Rightarrow \bar{A} \cap U \neq \phi \overset{\text{VER}}{\Rightarrow} \boxed{A \cap U \neq \phi}$

Sea $b_2 \in B \cap V \Rightarrow b_2 \in \bar{A} \cap V \Rightarrow \bar{A} \cap V \neq \phi \overset{\text{VER}}{\Rightarrow} \boxed{A \cap V \neq \phi}$

$A \subset B \subset U \cup V$, $\underbrace{U \cap V \cap A \subset U \cap V \cap B = \phi}_{\Downarrow}$

$\Downarrow$

$A \subset U \cup V$ $\qquad U \cap V \cap A = \phi$

A NO CONEXO

Teorema 10.1.12

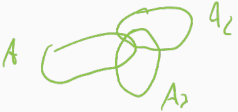
Si $\{A_i\}_{i\in I}$ es una familia de conjuntos conexos con intersección no vacía, entonces $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ es conexo.

$\bigcap_{i\in I} A_i \neq \phi$

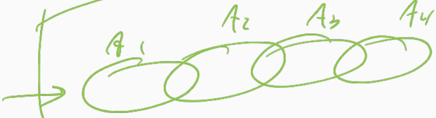
$A_1 \cap A_2 = \phi$

$A_1 \cup A_2$ no es conexo.

$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \neq \phi$



$A_1 \cup A_2 \cup A_3$ conexo



NO ENTRA EN EL TEO

Dem: A_i conexo $\forall i$. $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \phi$ $\quad A=\bigcup_{i\in I} A_i$

Sup A no conexo $\Rightarrow \exists\, U, V$ ab en E / $A\cap U\neq\emptyset$, $A\cap V\neq\emptyset$

$A\subset U\cup V$, $\quad A\cap U\cap V=\phi$.

Sea $x\in\bigcap_{i\in I} A_i \subset A\subset U\cup V$ $\quad$ Sup $x\in U$ (si está en V, es igual)

Como $V\cap A\neq\phi$, $\exists\, i_0\in I$ / $\boxed{V\cap A_{i_0}\neq\phi.}$

$A_{i_0}\cap V\neq\phi$.

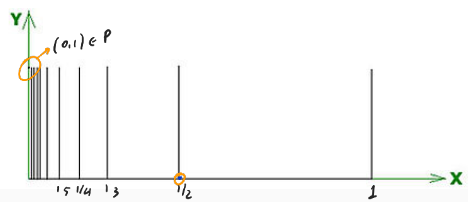
$x\in\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)\cap U \subset A_{i_0}\cap U \Rightarrow \boxed{A_{i_0}\cap U\neq\phi}$

$A_{i_0}\subset A\subset U\cup V$ $\quad A_{i_0}\cap U\cap V\subset A\cap U\cap V=\phi$

$\Rightarrow A_{i_0}$ NO ES CONEXO ABS!

Peine

P

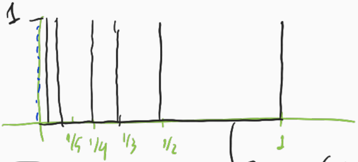


$A \subset P \subset \bar{A}$

A es conexo

$\Rightarrow P$ conexo.

A :



$I_n = \{(1/n, t) : t \in [0,1]\}$

$J = \{(s,0) : s \in [0,1]\}$.

$A = J \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n\right)$

. Cada segmento es conexo (es la imagen de un intervalo por una función continua)

conexo

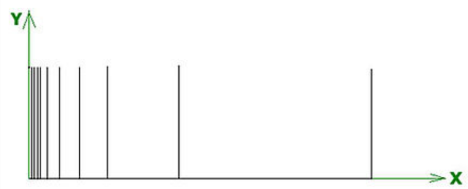
p/c n

. $J \cup I_n$ conexo (J, I_n conexos y $J \cap I_n \neq \emptyset$ $\quad (1/n, 0) \in J \cap I_n$)

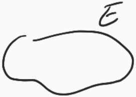
. $A = \bigcup_n (J \cup I_n)$ es unión de conexos con $\cap$ no vacía $\Rightarrow$ conexo

$\bar{A} = A \cup \{(0,t) : t \in [0,1]\}$

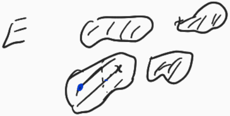
Peine



Idea



conexo



$x \in E$

"la comp conexa de x es el mayor conexo que cont. a x"

Si $x \in A_i \to A_i$ conexo $\forall i \in I$.

$\bigcup A_i$ es conexo pues $x \in \bigcap A_i \Rightarrow \bigcap A_i \neq \emptyset$

Componentes conexas

Definición

Para cada $x \in E$, la componente conexa de x,

$$C(x) = \bigcup_{\substack{A \text{ conexo} \\ x \in A}} A$$

Componentes conexas

Definición

Para cada $x \in E$, la componente conexa de x,

$$C(x) = \bigcup_{\substack{A \text{ conexo} \\ x \in A}} A \to \text{CONEXO}$$

(X TEO).

Observación $C(x)$ es el mayor subconj conexo de E que contiene a x.

. Sup $C(x) \cap C(y) \neq \emptyset$ $(\Rightarrow \exists\, z \in C(x) \cap C(y))$

$\Rightarrow$ $\underbrace{C(x) \cup C(y)}$ es conexo y contiene a x y a y.

Teo $C(x)$ es el mayor conexo que cont. a x.

$\Rightarrow C(x) = C(x) \cup C(y) \Rightarrow C(y) \subset C(x)$

$C(y)$ es el mayor conexo que cont a $y \Rightarrow C(y) \subset C(x)$

$\Big] \; C(x) = C(y) = C(z)$

Entonces, dos componenes conexas distintas son disjuntas.

EJEMPLOS: $E = \mathbb{R}$, $C(x) = \mathbb{R}$.

$E = \mathbb{Z}$, $C(x) = \{x\}$. $\forall x$.

Entonces, dos componenes conexas distintas son disjuntas.

Observación

Si $z \in C(x)$ y $z \in C(y)$, entonces $C(x) = C(y)$

Entonces, dos componenes conexas distintas son disjuntas.

Observación

Si $z \in C(x)$ y $z \in C(y)$, entonces $C(x) = C(y) = C(z)$.

Entonces, dos componenes conexas distintas son disjuntas.

Observación

Si $z \in C(x)$ y $z \in C(y)$, entonces $C(x) = C(y) = C(z)$.

Definición

Definimos la siguiente relación en E:

$$x \sim y \Leftrightarrow C(x) = C(y).$$

Entonces, dos componenes conexas distintas son disjuntas.

Observación
Si $z \in C(x)$ y $z \in C(y)$, entonces $C(x) = C(y) = C(z)$.

Definición
Definimos la siguiente relación en E:

$$x \sim y \Leftrightarrow C(x) = C(y).$$

Ejercicio
Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia.

Teorema
Para todo $x \in E$, $C(x)$ es cerrado.

DEM: dado $x \in E$, $C(x)$ es conexo

$\underset{\text{TEO}}{\Longrightarrow}$ $\overline{C(x)}$ conexo. Pero $C(x)$ es el mayor conexo que contiene a x $\Rightarrow$ $\underbrace{\overline{C(x)}}_{\text{conexo}} \subset \underbrace{C(x)}_{\text{mayor conexo}} \subset \overline{C(x)}$

$\therefore C(x) = \overline{C(x)}$ $\therefore$ $\boxed{C(x) \text{ cerrado}}$

"LAS COMPONENTES CONEXAS SON CERRADAS"

Teorema

Para todo $x \in E$, $C(x)$ es cerrado.

Pregunta

¿Son necesariamente abiertas? (las comp. conexas)

$\Rightarrow$ • Si E tiene FINITAS componentes conexas

• Si E " INFINITAS " "

$E = \mathbb{Z}$, $E = \mathbb{Q}$

Teorema

Para todo $x \in E$, $C(x)$ es cerrado.

Pregunta

¿Son necesariamente abiertas?

Observación

Las funciones continuas mandan conexos en conexos.

Teorema

Para todo $x \in E$, $C(x)$ es cerrado.

Pregunta

¿Son necesariamente abiertas?

Observación

Las funciones continuas mandan conexos en conexos.

En particular, mandan componentes conexas en conexos.

$f : E \to \mathbb{Z}$ CONTINUA.

La los únicos conexos son los puntos.

Si $C \subset E$ es una comp conexa, $f(C)$ es un conj formado x un punto

$\therefore$ f es constante en cada componente conexa.

Más definiciones...

Más definiciones...

Definición

Un espacio se dice totalmente disconexo si los únicos conexos son los conjuntos formados por un punto.

Más definiciones...

Definición

Un espacio se dice totalmente disconexo si los únicos conexos son los conjuntos formados por un punto.

Equivalentemente, si $C(x) = \{x\}$ para todo $x \in E$.

Más definiciones...

Definición

Un espacio se dice totalmente disconexo si los únicos conexos son los conjuntos formados por un punto.
Equivalentemente, si $C(x) = \{x\}$ para todo $x \in E$.

Definición

Un espacio E se dice localmente conexo si para todo $x \in E$, y para todo entorno V de x, existe U **abierto conexo** tal que $x \in U \subset V$.

Más definiciones...

Definición

Un espacio se dice totalmente disconexo si los únicos conexos son los conjuntos formados por un punto.

Equivalentemente, si $C(x) = \{x\}$ para todo $x \in E$.

Definición

Un espacio E se dice localmente conexo si para todo $x \in E$, y para todo entorno V de x, existe U **abierto conexo** tal que $x \in U \subset V$.

Más definiciones...

Definición

Un espacio se dice totalmente disconexo si los únicos conexos son los conjuntos formados por un punto.
Equivalentemente, si $C(x) = \{x\}$ para todo $x \in E$.

Definición

Un espacio E se dice localmente conexo si para todo $x \in E$, y para todo entorno V de x, existe U **abierto conexo** tal que $x \in U \subset V$.

Más definiciones...

Definición

Un espacio se dice totalmente disconexo si los únicos conexos son los conjuntos formados por un punto.
Equivalentemente, si $C(x) = \{x\}$ para todo $x \in E$.

Definición

Un espacio E se dice localmente conexo si para todo $x \in E$, y para todo entorno V de x, existe U **abierto conexo** tal que $x \in U \subset V$.

Más definiciones...

Definición

Un espacio se dice totalmente disconexo si los únicos conexos son los conjuntos formados por un punto.

Equivalentemente, si $C(x) = \{x\}$ para todo $x \in E$.

Definición

Un espacio E se dice localmente conexo si para todo $x \in E$, y para todo entorno V de x, existe U **abierto conexo** tal que $x \in U \subset V$.

Observación

E es localmente conexo si y sólo si tiene una base de abiertos formado por conjuntos conexos.

Teorema 10.1.20

Un espacio E es localmente conexo si y sólo si para todo $A \subset E$ abierto, las componentes conexas de A son abiertas en E.

la en E

$\Rightarrow$) $A \subset E$ ab., C comp. conexa de A.

Sea $x \in C$. Como $x \in A$ ab.

$\exists\ U$ ab conexo / $x \in U \subset A$

E loc. conexo.

SUBC. CONEXO DE A

$U \subset C$.

$\Rightarrow$ C el mayor

C es el mayor subconj conexo de A que contiene a x

$x \in U \subset C$.

$x \in C^\circ$

$\Rightarrow$ $C = C^\circ$ es ab.

$\Leftarrow$) $\boxed{\text{Sea } V \text{ entorno de } x}$ (qvq $\exists\, U$ ab. con de E / $x \in U \subset V$.)

$\rightarrow x \in V^\circ$. Pensamos $A = V^\circ$ como subesp. mét. abierto

Sea $C_A(x)$ la comp. conexa de x en A.

Por hip, $C_A(x)$ es ab., y es conexo (por ser una comp. conexa.)

$\underbrace{C_A(x)}_{\textstyle U}$ es ab. conexo.

$$x \in U = C_A(x) \subset A = V^\circ \subset V$$

$\hookrightarrow$ es ab. conexo

$\therefore E$ loc. conexo.