Práctica 7: Conexión y Arcoconexión

*"It is not enough to be in the right place at the right time.
You should also have an open mind at the right time."*
Paul Erdös.

Ejercicio 1. Decidir cuáles de los siguientes subconjuntos son conexos:

i) $\{x \in \mathbb{R}^2 : 0 < |x| < 2\}$,

ii) $\mathbb{N}$,

iii) $[0, 1)$,

iv) $\mathbb{Q}$,

v) $\left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$,

vi) $B_\varepsilon(a)$, para un espacio métrico cualquiera.

Ejercicio 2.

i) Dar ejemplos de conjuntos conexos $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ tales que $A \cup B$ no sea conexo. Idem para $A \cap B$ y $A \setminus B$.

ii) Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ conexo y sea x un punto de acumulación de C. Probar que $C \cup \{x\}$ es conexo.

iii) Determinar la validez de las siguientes afirmaciones:

a) Si C es conexo, entonces C° es conexo.

b) Si C es conexo, entonces $\overline{C}$ es conexo.

Ejercicio 3. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $C \subseteq X$. Probar que son equivalentes:

1. No existen U, V abiertos en C, no vacíos y disjuntos tales que $C = U \cup V$.
2. No existen $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ abiertos en X y disjuntos, de modo que $C \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$, $C \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ y $C \subseteq \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$.
3. Si $A \subseteq C$ es no vacío y abierto y cerrado en C, entonces $A = C$.

Ejercicio 4. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $\mathcal{A}$ una familia de conjuntos conexos de X tal que para cada par de conjuntos $A, B \in \mathcal{A}$ existen $A_0, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ que satisfacen $A_0 = A$, $A_n = B$ y $A_i \cap A_{i+1} \neq \emptyset$ para cada $i = 0, \ldots, n-1$. Probar que $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ es conexo.

Ejercicio 5. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z}$ continua. Probar que f es constante.

Ejercicio 6. Probar que un espacio métrico (X, d) es conexo si y sólo si toda función continua $f : X \longrightarrow \{0, 1\}$ es constante.

Ejercicio 7. Probar que si $n \geq 2$ no existe un homeomorfismo entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio 8.

i) Probar que si $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ es continua y suryectiva, existe $x_0 \in [0,1]$ tal que $f(x_0) = x_0$.

ii) Sea (X, d) un espacio métrico conexo y sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Sean $a, b \in f(X)$ tales que $a \leq b$. Probar que para todo $c \in [a, b]$ existe $x \in X$ tal que $f(x) = c$. ¿Vale la recíproca?

iii) Probar que si (X, d) es conexo, entonces $\sharp X = 1$ o $\sharp X \geq c$.

Ejercicio 9. Hallar las componentes conexas de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$ y de $\mathbb{R}^2$

i) $\operatorname{arcsen}([\frac{\sqrt{2}}{2}, 1])$.

ii) $\mathbb{Q}$.

iii) $B((-1,0),1) \cup B((1,0),1)$.

iv) $B((-1,0),1) \cup B((1,0),1) \cup \{(0,0)\}$.

Ejercicio 10. Sean A y B dos conjuntos conexos, probar que $A \times B$ es conexo con la métrica d_∞.

Ejercicio 11. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $A_n = \{\frac{1}{n}\} \times [0,1]$, y sea $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \cup \{(0,0),(0,1)\}$. Probar que:

i) $\{(0,0)\}$ y $\{(0,1)\}$ son componentes conexas de X.

ii) Probar que si $U, V \subset X$ son dos abiertos disjuntos tales que $U \cup V = X$, entonces $\{(0,0),(0,1)\} \subseteq U$ o $\{(0,0),(0,1)\} \subset V$ (es decir, $(0,0)$ y $(0,1)$ pertenecen a componentes conexas distintas pero no se los puede desconectar).

Ejercicio 12. Sea (X, d) un espacio métrico. Probar que las componentes conexas de X son conjuntos cerrados. ¿Son abiertos?

Ejercicio 13. Dado un espacio métrico (X, d), un conjunto $A \subset X$ se dice *totalmente disconexo* si para cada $a \in A$ la componente conexa de a es $\{a\}$. Probar que los siguientes conjuntos son totalmente disconexos:

i) Un espacio métrico discreto con cardinal mayor o igual que 2.

ii) $\mathbb{Q}$.

iii) El conjunto de Cantor.

iv) $[(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \times \mathbb{Q}] \cup [\mathbb{Q} \times (\mathbb{R} - \mathbb{Q})]$.

Ejercicio 14. Sea (X, d) un espacio métrico. Un conjunto $A \subseteq X$ se dice *arcoconexo* si para todo par de puntos $a, b \in A$ existe una función continua $f : [0,1] \to X$ tal que $f(0) = a$ y $f(1) = b$.

i) Probar que todo conjunto arcoconexo es conexo.

ii) Exhibir un ejemplo de un conjunto conexo que no sea arcoconexo.

Ejercicio 15. Decidir cuáles de los siguientes conjuntos son arcoconexos:

i) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y)\}$ donde $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua.

ii) $B(0, 1) \subseteq \mathbb{R}^n$.

iii) $\mathbb{R}^n - B(0, 1)$.

iv) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$.

v) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Ejercicio 16. Sean (X, d) un espacio métrico arcoconexo, (Y, d') un espacio métrico y $f : X \longrightarrow Y$ una función continua. Probar que el conjunto $f(X)$ es arcoconexo.

Ejercicio 17. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y conexo. Probar que es arcoconexo.

Ejercicio 18. Un espacio métrico (X, d) se dice *localmente conexo* (resp. *localmente arcoconexo*) si para todo $x \in X$ y para todo $U \subseteq X$ entorno de x, existe un entorno conexo (resp. arcoconexo) V de x tal que $x \in V \subseteq U$. Probar que:

i) Si $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es abierto, entonces A es conexo $\iff$ A es arcoconexo.

ii) Un espacio métrico es localmente conexo si y sólo si las componentes conexas de los abiertos son abiertas.

iii) Todo espacio métrico conexo y localmente arcoconexo es arcoconexo.

iv) En un espacio métrico localmente arcoconexo todo conjunto abierto y conexo es arcoconexo.

v) Las componentes arcoconexas de un espacio localmente arcoconexo son abiertas.

Ejercicio 19. En el espacio $(C[0, 1], d_\infty)$ se considera el conjunto

$$U = \{f \in C[0, 1] : f(x) \neq 0 \; \forall \, x \in [0, 1]\}.$$

Probar que U es abierto y hallar sus componentes conexas.

Ejercicio 20. Calcular las componentes conexas y arcoconexas de:

$$\{0 \times [-1, 1]\} \cup \left\{ \left(x, \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right) : x \neq 0 \right\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Ejercicio 21. Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto numerable. Probar que $\mathbb{R}^n - C$ es arcoconexo.