UBA - exactas
Departamento de Matemática

Cálculo Avanzado - Espacios métricos 3

Primer cuatrimestre de 2020

Daniel Carando

Dto. de Matemática - FCEN - UBA

Casi todo los resultados de esta clase están en las secciones 6.1 y 5.3 del apunte.

Definición

Dado $A \subset E$, un punto $x \in A$ se dice aislado si existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \cup A = \{x\}$.

Definición

Dado $A \subset E$, un punto $x \in A$ se dice aislado si existe $r > 0$ tal que $\cancel{B(x,r) \cup A = \{x\}}$. $B(x,r) \cap A = \{x\}$

Ejemplo

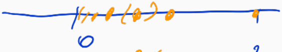
$E = \mathbb{R}$, $\underbrace{A = \mathbb{Z}}$ todo $x \in A$ es aislado

$x \in \mathbb{Z}$, $B(x, 1/2) \cap \mathbb{Z} = \{x\}$.

- E cualquiera con $\delta \to$ dist. discreta
  $A \subset E$, $x \in A$ es aislado.

- $E = \mathbb{R}$, $A = \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}$ ningún punto es aislado.

- $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$



todo $x \in A$ es aislado $\to$ PENSAR! r depende de x

Definición

Dado $A \subset E$, un punto $x \in A$ se dice aislado si existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \cup A = \{x\}$.

Definición

Dado $A \subset E$, un punto $x \in A$ se dice aislado si existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \cup A = \{x\}$.

Observación

Un punto aislado de A es un punto de A. Un punto de acumulación de A no tiene por qué estar en A (pero está en $\bar{A}$).

Definición

Dado $A \subset E$, un punto $x \in A$ se dice aislado si existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \cup A = \{x\}$.

Observación

Un punto aislado de A es un punto de A. Un punto de acumulación de A no tiene por qué estar en A (pero está en $\bar{A}$).

Observación

Un punto de A puede ser un punto de aculumación de A, puede ser un punto aislado de A y.... ¿hay otra posibilidad? ¿Puede un mismo punto ser aislado y de acumulación?

Definición

Dado $A \subset E$, un punto $x \in A$ se dice aislado si existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \cup A = \{x\}$.

Observación

Un punto aislado de A es un punto de A. Un punto de acumulación de A no tiene por qué estar en A (pero está en $\bar{A}$).

Observación

Un punto de A puede ser un punto de aculumación de A, puede ser un punto aislado de A y.... ¿hay otra posibilidad? ¿Puede un mismo punto ser aislado y de acumulación?

Observación

En $\bar{A}$ están todos los puntos de acumulación de A y todos los puntos aislados de A.

Definición

Dado $A \subset E$, un punto $x \in A$ se dice aislado si existe $r > 0$ tal que $\cancel{B(x,r) \cup A = \{x\}}$.

Observación

Un punto aislado de A es un punto de A. Un punto de acumulación de A no tiene por qué estar en A (pero está en $\bar{A}$).

Observación

Un punto de A puede ser un punto de aculumación de A, puede ser un punto aislado de A y.... ¿hay otra posibilidad? ¿Puede un mismo punto ser aislado y de acumulación?

Observación

En $\bar{A}$ están todos los puntos de acumulación de A y todos los puntos aislados de A. ¿Será cierto que $\bar{A}$ es la unión (disjunta) de los puntos de acumulación de A y los puntos aislados de A?

Definición

Decimos que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ converge a $x \in E$ si dado cualquier $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, x_n) < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$.

Definición

Decimos que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ converge a $x \in E$ si dado cualquier $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, x_n) < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$.

Ejercicio

Sea (E, d) un espacio métrico, $A \subset E$ y $x \in E$. Entonces:

(i) $x \in \bar{A}$ si y sólo si existe $(a_n)_n \subset A$ tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

(ii) $x \in A'$ si y sólo si existe una sucesión $(a_n)_n \subset A$ de elementos *distintos* tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Definición

Decimos que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ converge a $x \in E$ si dado cualquier $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, x_n) < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$.

Ejercicio

Sea (E, d) un espacio métrico, $A \subset E$ y $x \in E$. Entonces:

(i) $x \in \bar{A}$ si y sólo si existe $(a_n)_n \subset A$ tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

(ii) $x \in A'$ si y sólo si existe una sucesión $(a_n)_n \subset A$ de elementos *distintos* tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Ejercicio

Sean d, d' dos métricas sobre E. Decidir si hay implicaciones entre las siguientes afirmaciones.

- Las métricas son equivalentes
- Las sucesiones convergentes en (E, d) coinciden con las sucesiones convergentes en (E, d').

Sucesiones de Cauchy

Definición

Decimos que un conjunto $A \subset E$ es acotado si existen $x \in E$, $r > 0$ tal que $A \subset B(x, r)$.

Sucesiones de Cauchy

Definición

Decimos que un conjunto $A \subset E$ es acotado si existen $x \in E$, $r > 0$ tal que $A \subset B(x, r)$.

Definición

cE

Una sucesión $(x_n)_n$ se dice de Cauchy si para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (que depende de ε) tal que si $n, m \geq n_0$, entonces $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Sucesiones de Cauchy

Definición
Decimos que un conjunto $A \subset E$ es acotado si existen $x \in E$, $r > 0$ tal que $A \subset B(x, r)$.

Definición
Una sucesión $(x_n)_n$ se dice de Cauchy si para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (que depende de ε) tal que si $n, m \geq n_0$, entonces $d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Teorema 6.1.3
Sea (E, d) un e.m. y $(x_n)_n \subset E$.

(1) Si $(x_n)_n$ es de Cauchy, entonces el conjunto $\{x_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ es acotado.

(2) Si $(x_n)_n$ es de Cauchy y contiene alguna subsucesión convergente, entonces $(x_n)_n$ es convergente.

(3) Si $(x_n)_n$ es convergente, entonces es de Cauchy.

Teorema 6.1.3

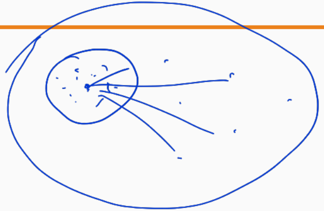
Sea (E, d) un e.m. y $(x_n)_n \subset E$.

(1) Si $(x_n)_n$ es de Cauchy, entonces el conjunto $\{x_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ es acotado.

(2) Si $(x_n)_n$ es de Cauchy y contiene alguna subsucesión convergente, entonces $(x_n)_n$ es convergente.

(3) Si $(x_n)_n$ es convergente, entonces es de Cauchy.

(1)



$\exists\, n_0 \,/\, \forall n, m \geq n_0,$

$d(x_n, x_m) < 1$

$x_n \in B(x_{n_0}, 1) \quad \forall n \geq n_0$

$d = \max\{ d(x_{n_0}, x_n) : 1 \leq n \leq n_0 - 1 \}$

$r > \max\{d, 1\}.$

$\forall n \in \mathbb{N}.\ x_n \in B(x_{n_0}, r)$ $\begin{cases} ¿\text{por qué?} \\ n \geq n_0, \quad d(x_n, x_{n_0}) < 1 < r \\ n \leq n_0 - 1, \quad d(x_n, x_{n_0}) \leq d < r \end{cases}$

$\boxed{\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset B(x_{n_0}, r)}$

Teorema 6.1.3

Sea (E, d) un e.m. y $(x_n)_n \subset E$.

(1) Si $(x_n)_n$ es de Cauchy, entonces el conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado.

(2) Si $(x_n)_n$ es de Cauchy y contiene alguna subsucesión convergente, entonces $(x_n)_n$ es convergente.

(3) Si $(x_n)_n$ es convergente, entonces es de Cauchy.

(3) dado $\varepsilon > 0$, [qvq $\exists\, n_0 \,/\, d(x_n, x_m) < \varepsilon$ $\forall\, n, m \geq n_0$]

Sea $x = \lim x_n$.

$\exists\, n_0 \,/\, \forall\, n \geq n_0,\ d(x_n, x) < \varepsilon/2$

Si $n, m \geq n_0$, $d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x) + d(x, x_m) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$

$\therefore$ $(x_n)_n$ es de Cauchy.

Ejemplo $E=\mathbb{R}$ $\quad (x_n)_n \subset \mathbb{R}$ es de Cauchy

$\iff (x_n)_n$ converge.

(TALLER)

E con δ mét discreta.

$(x_n)_n$ de Cauchy. Dado $\varepsilon = 1/2$, $\exists\, n_0$

tq $\underline{n, m \geq n_0}$, $\underline{d(x_n, x_m) < 1/2}$.

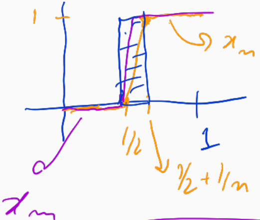
$$\Rightarrow \quad x_n = x_m \quad \forall\, n, m \geq n_0.$$

$$\Rightarrow \quad \underline{x_n = x_{n_0}} \quad \underline{\forall\, n \geq n_0} \Rightarrow x_n \to x_{n_0}$$

$\underline{E = \mathbb{Q}}$ $\quad x_n =$ "truncado con n decimales de $\sqrt{2}$"

Ejemplo (IDEA, SIN CUENTAS)

$\underbrace{E = C[0,1]}$, $\quad \underbrace{d_1(x,y)} = \int_0^1 |x(t)-y(t)|\,dt$



$$x_n(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t \le 1/2 \\ / & \frac{1}{2} \le t \le 1/2 + 1/n \\ 1 & \frac{1}{2}+\frac{1}{n} \le t \le 1 \end{cases}$$

$\underbrace{d(x_n, x_m)} <$ "área del rectáng de base $1/n$ y altura 1."

$\to$ $(x_n)_n$ es de Cauchy

$(x_n)_n$ NO converge Sup $x_n \to x \in C[0,1]$

SE PUEDE VER $\quad x(t) = \begin{cases} 0 & 0 \le t \le 1/2 \\ 1 & 1/2 \le t \le 1 \end{cases}$?

NO es cont.

Distancia entre conjuntos

Definición

Dados $x \in E$, $A \subset E$ no vacío, la distancia del punto x al conjunto A se define como

$$d(x,A) = \inf\{\underbrace{d(x,a)}_{\geq 0} \ : \ a \in A\}.$$

Distancia entre conjuntos

Definición

Dados $x \in E$, $A \subset E$ no vacío, la distancia del punto x al conjunto A se define como

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) \ : \ a \in A\}.$$

Teorema 5.3.1

Dado $A \subset E$, para todo $x, y \in E$ se tiene

$$|\underbrace{d(x, A)}_{f(x)} - \underbrace{d(y, A)}_{f(y)}| \leq d(x, y).$$

$\forall a \in A$

$d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$

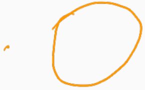
$\inf_{a \in A} d(x, a) \leq d(x, y) + \inf_{a \in A} d(y, a)$

$d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A) \Rightarrow \boxed{d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)}$

DEM: $d(y, A) - d(x, A) \leq d(x, y)$

Teorema 5.3.3

Se tiene $d(x, A) = 0$ si y sólo si $x \in \bar{A}$.



$A = (0,1]$

$d(0, A) = 0$

$\boxed{d(x,A)=0} \iff \inf\{d(x,a) ; a \in A\} = 0 \iff$

$\iff \big[\forall r > 0, \exists a_r \in A \,/\, 0 \le d(x, a_r) < r$

0 cota inf (ya se sabe). $\big]$

$\iff \forall r > 0, \exists a_r \in A \cap B(x, r)$

$\iff \forall r > 0, A \cap B(x,r) \neq \emptyset \iff \boxed{x \in \bar{A}}$

Teorema 5.3.3

Se tiene $d(x, A) = 0$ si y sólo si $x \in \bar{A}$.

Definición

Dados $A, B \subset E$, no vacíos, definimos la distancia entre ambos conjuntos como

$$d(A, B) = \inf\{d(x, y) \;:\; x \in A,\; y \in B\}.$$

Teorema 5.3.3

Se tiene $d(x, A) = 0$ si y sólo si $x \in \bar{A}$.

Definición

Dados A, $B \subset E$, no vacíos, definimos la distancia entre ambos conjuntos como

$$d(A, B) = \inf\{d(x, y) \ : \ x \in A, \ y \in B\}.$$

Observación

- La distancia entre dos conjuntos no vacíos es siempre finita.

Teorema 5.3.3

Se tiene $d(x, A) = 0$ si y sólo si $x \in \bar{A}$.

Definición

Dados A, $B \subset E$, no vacíos, definimos la distancia entre ambos conjuntos como

$$d(A, B) = \inf\{d(x, y) \ : \ x \in A, \ y \in B\}.$$

Observación

- La distancia entre dos conjuntos no vacíos es siempre finita.
- La distancia entre dos conjuntos puede ser cero aunque no se intersequen.

Teorema 5.3.3
Se tiene $d(x, A) = 0$ si y sólo si $x \in \bar{A}$.

Definición
Dados $A, B \subset E$, no vacíos, definimos la distancia entre ambos conjuntos como

$$d(A, B) = \inf\{d(x, y) \ : \ x \in A, \ y \in B\}.$$

Observación

- La distancia entre dos conjuntos no vacíos es siempre finita.
- La distancia entre dos conjuntos puede ser cero aunque no se intersequen.
- La distancia entre dos conjuntos puede ser cero aunque no se intersequen y ambos sean cerrados.

PENSAR