Ejercicio 1. Ver si las siguientes funciones son distancias.

- $d_1(x,y) = (x-y)^2$ No es distancia.

  Proof. $d_1(-1,1) = 4 > 1+1 = d_1(-1,0) + d_1(0,1)$ □

- $d_2(x,y) = \sqrt{|x-y|}$ es una distancia

  1. $d_2(x,y) = 0 \iff \sqrt{|x-y|} = 0 \iff |x-y| = 0 \iff x = y$
  2. $d_2(x,y) = d_2(y,x)$ es trivial
  3. $d_2(x,y)^2 = |x-y| < |x-z| + |z-y| \leq |x-z| + |z-y| + 2\sqrt{|x-z||z-y|} = (\sqrt{|x-z|} + \sqrt{|z-y|})^2 = (d_2(x,z) + d_2(z,y))^2$
     Luego $d_2(x,y)^2 \leq (d_2(x,z) + d_2(z,y))^2$
     Y es tirivial ver que entonces $d_2(x,y) \leq d_2(x,z) + d_2(z,y)$

- $d_3(x,y) = |x^2 - y^2|$ Es facil ver que no es distancia $d_3(-2,2) = 0$

- $d_4(x,y) = |x - 2y|$ Es trivial devuelta $d_4(2,1) = 0$

- $d_5(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$. Tomemos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = \frac{t}{1+xt}$. Viendo que su derivada es siempre mayor que 0 podemos notar que esta función es estrictamente creciente

  Además $f(a)+f(b)-f(a+b) = \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} - \frac{a+b}{1+a+b} = \frac{a((1+b)(1+a+b))+b((1+a)(1+a+b))-(a+b)((1+a)(1+b))}{(1+a)(1+b)(1+a+b)}$
  $= \frac{(a+ab)(1+a+b)+(b+ab)(1+b+a)-(a+b)(1+a+b+ab)}{(1+a)(1+b)(1+a+b)} = \frac{a+2ab+a^2+a^2b+ab^2+b+2ab+b^2+ab^2+ba^2-(a+b+a^2+ba+ab+b^2+a^2b+ab^2)}{(1+a)(1+b)(1+a+b)}$
  $\frac{a+4ab+a^2+2a^2b+2ab^2+b+b^2-(a+b+a^2+ba+ab+b^2+a^2b+ab^2)}{(1+a)(1+b)(1+a+b)} = \frac{2ab+ab^2+a^2b}{(1+a)(1+b)(1+a+b)} \geq 0$

  Por lo tanto $f(a+b) \leq f(a) + f(b)$

  Entonces $d(x,y) = f(|x-y|) \leq f(|x-z| + |z-y|) \leq f(|x-z|) + f(|z-y|) = d(x,z) + d(z,y)$

  La primera desigualdad vale por que f es creciente y usando la desigualdad de módulos de siempre, la segunda vale por lo probado arriba

Ejercicio 2. Es una clásica demostración de taller de cálculo.

Ejercicio 3. Sean X un conjunto y $\delta : X \times X \to \mathbb{R}$ definida por

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

Verificar que δ es una métrica y hallar los abiertos de (X, δ)
Nota: δ se llama metrica discreta y (X,δ) espacio métrico discreto

Proof.
1. $\delta(x,y) = 0 \iff x = y$
2. Supongamos $x \neq y \Rightarrow \delta(x,y) = 1 = \delta(y,x)$

3. Supongamos devuelta $x \neq y$ si no es obvio que vale , $\delta(x,y) = 1 \leq \delta(x,z)+\delta(z,y)$ esto vale seguro , por que no puede suceder $\delta(x,z) = \delta(z,y) = 0$ por que esto implicaría $x = z = y$ absurdo

$\square$

Ejercicio 4. Sea $N : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ la funcion definida por

$$N(x) = \begin{cases} 2^{-n} & \text{si } a \neq 0, \quad p^n | a \quad \text{y} \quad p^{n+1} \nmid a \\ 0 & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

donde p es un primo fijo, y sea $d : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ dada por $d(a,b) = N(a-b)$. Probar que $(\mathbb{Z}, d)$ es un espacio métrico

Proof. Primero definamos para cada entero no nulo $\phi_p(a)$ que es el mayor $n \in \mathbb{N}$ tal que $p^n | a$
Es simple ver $\phi_p(a) = \phi_p(-a)$ tambien $\phi_p(a+b) \geq \min\{\phi_p(a), \phi_p(b)\}$
Ahora podemos reescribir

$$d(a,b) = \begin{cases} 2^{-\phi_p(a-b)} & \text{si } a \neq b \\ 0 & \text{si } a = b \end{cases}$$

1. Sea $d(a,b) = 0$ entonces $a = b$ por definición , por que $2^n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$
2. Asumiendo $a \neq b$ tenemos $d(a,b) = 2^{-\phi_p(a-b)} = 2^{-\phi_p(-(a-b))} = 2^{-\phi_p(-a+b)} = d(b,a)$
3. Ahora consideremos que $\phi_p(a-b) = \phi_p((a-c)+(c-b)) \geq \min\{\phi_p(a-c), \phi_p(c-b)\}$

   Tambien supongo por comodidad $a \neq b \neq c$ por comodidad, si alguno fuera igual la demostración es trivial

   $d(a,b) = 2^{-\phi_p(a-b)} \leq 2^{-\min\{\phi_p(a-c), \phi_p(c-b)\}} = \min\{2^{\phi_p(a-c)}, 2^{\phi_p(c-b)}\} \leq 2^{\phi_p(a-c)} + 2^{\phi_p(c-b)}$

   Finalmente $d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b)$

   Entonces d es una métrica y por lo tanto $(\mathbb{Z}, d)$ es un pár conjunto, métrica o lo que es lo mismo , un espacio métrico

$\square$

Ejercicio 5. Sea $\ell_\infty = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} : (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ es acotada}\}$. Se considera $d : \ell_\infty \times \ell_\infty \to \mathbb{R}$ definida por $d(a_n, b_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n - b_n|$. Probar que (ℓ_∞, d) es un espacio métrico.

Proof. 1. $d(a_n, b_n) = 0 \iff \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n - b_n| = 0 \iff 0 \leq |a_n - b_n| \leq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
$\iff |a_n - b_n| = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \iff a_n = b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2. $d(a_n, b_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n - b_n| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |b_n - a_n| = d(b_n, a_n)$
3. Sabemos que $|a_n - b_n| \leq |a_n + c_n| + |c_n - b_n|$

   $\sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n - b_n| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}}(|a_n + c_n| + |c_n - b_n|) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n + c_n| + \sup_{n\in\mathbb{N}} |c_n - b_n|$

   $d(a_n, b_n) \leq d(a_n, c_n) + d(c_n, b_n)$

$\square$

Ejercicio 6. Dados $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, se define $\mathcal{C}[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} : f \text{ es continua}\}$. Probar que son espacios métricos.

i. $(\mathcal{C}[a,b], d_1)$ con $d_1(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$

ii. $(\mathcal{C}[a,b], d_\infty)$, con $d_\infty(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$

Proof. Son demostraciones de taller. De todas maneras las desigualdades salen usando $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - f(y)|$

□

Ejercicio 7. Sea (X, d) un espacio métrico. Se define $d'(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$

i) d' es una métrica en X, que satisface $0 \leq d'(x,y) \leq 1 \quad \forall x, y \in X$

Proof. Veamos que es métrica , las dos primeras propiedades son triviales, veamos la desigualdad, usando la misma funcione que habíamos usado antes $f(t) = \frac{t}{1+t}$ tenemos que $d'(x,y) = f(d(x,y)) \leq f(d(x,z) + d(z,y)) \leq f(d(x,z)) + f(d(z,y)) = d'(x,z) + d'(z,y)$

Esto vale por que f es creciente y por que d es métrica

Por otro lado es trivial que $0 \leq d'(x,y)$

Supongamos que $d'(x,y) > 1 \Rightarrow d(x,y) > 1 + d(x,y)$ lo que es absurdo , entonces $d'(x,y) \leq 1$ □

ii) $A \subseteq X$ es abierto para la métrica d si y sólo si lo es para la métrica d'

Proof. Tomemos cualquier bola abierta en d , $B_d(x,r)$

Ahora dado $y \in B_d(x,r)$ sabemos que $d(x,y) < r \Rightarrow d'(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} < d(x,y) < r$

Por lo tanto $y \in B_{d'}(x,r)$ entonces $B_d(x,r) \subseteq B_{d'}(x,r)$

$\Leftarrow$) Entonces si tenemos un abierto con d' en $A \subseteq X$ tenemos que dado $x \in X$ existe $B_{d'}(x,r) \subseteq A$ luego $B_d(x,r) \subseteq B_{d'}(x,r) \subseteq A$ por lo tanto tambien es abierto en d

$\Rightarrow$) Ahora tomemos nuevamente un abierto en A con respecto a d. Dado $x \in A$ tenemos $B_d(x,r) \subseteq A$.

Ahora si consideramos $r' = \frac{r}{r+1}$ podemos afirmar que $B_{d'}(x,r') \subseteq B_d(x,r) \subseteq A$

Probémoslo, sea $y \in B_{d'}(x,r')$ entonces $d'(x,y) < r' = \frac{r}{r+1}$, luego $\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} < \frac{r}{r+1}$

Entonces $d(x,y) < \frac{r}{r+1}(1 + d(x,y)) \leq \frac{r}{r+1}(1+r) = r$

Finalmente $d(x,y) < r$ entonces $y \in B_d(x,r)$

Entonces A es abierto con respecto a d' □

iii) Deducir que $(x_n)_n$ converge a x con respecto en la métrica d si y sólo si converge a x con respecto a la métrica d'

Proof. $\Rightarrow$) Converge en d entonces $\forall \epsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, x_n) \leq \epsilon \quad \forall n \geq n_0$

Como $d'(x, x_n) < d(x, x_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Tenemos que:

$\forall \epsilon > 0\ \exists n_0\ d'(x, x_n) < d(x, x_n) \leq \epsilon \quad \forall n \geq n_0$

Por lo tanto $x_n \to x$ con la métrica d'

$\Leftarrow$) Supongamos que x_n converge a x con d'. Ahora dado un $\epsilon > 0$ sabemos que $\exists r > 0$ tal que $B_{d'}(x, r) \subseteq B_d(x, \epsilon)$ y por convergencia de x_n tenemos que $\exists n_0$ tal que $x_n \in B_{d'}(x, r) \subseteq B_d(x, \epsilon) \quad \forall n \geq n_0$ entonces dado un ϵ conseguimos un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B_d(x, \epsilon) \quad \forall n \geq n_0$ y esto lo podemos hacer para cualquier $\epsilon > 0$

Entonces x_n converge a x con la métrica d □

Ejercicio 8. Sean (X_1, d_1) y $(X_2.d_2)$ espacios métricos. Consideremos el conjunto $X_1 \times X_2$ y la aplicación $d : (X_1 \times X_2) \times (X_1 \times X_2) \to \mathbb{R}$ dada por

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$$

(a) Probar que d define una métrica en $X_1 \times X_2$

Proof. i. Por comodida tomemos $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ $d(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$ como ambas d_1, d_2 son distancias entonces son mayores a 0 entonces $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \geq 0$

ii. $d(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2) = d_1(y_1, x_1) + d_2(y_2, x_2) = d(y, x)$

iii. $d(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2) \leq d_1(x_1, z_1) + d_1(z_1, y_1) + d_2(x_2, z_2) + d_2(z_2, y_2) = d(x, z) + d(z, y)$

□

(b) $\Rightarrow$) Sea $(a_n, b_n)_n$ convergente a (a, b) entonces $d_1(a_n, a) + d_2(b_n, b) = d((a_n, b_n), (a, b)) \to 0$ entonces $d_1(a_n, a) + d_2(b_n, b) \to 0$ dado que son distancias son ambas mayores o iguales que 0 , por lo tanto ambas convergen a 0 , si no el sumando no convergería.

$\Leftarrow$) $a_b \to a$ y $b_n \to b$ entonces $d_2((a_n, b_n), (a, b)) = d_1(a_n, a) + d_2(b_n, b) \to 0$

Ejercicio 9. Sea $(X_n, d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de espacios métricos, y consideramos el producto cartesiano $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$. El objetivo del ejercicios es construír una métrica para X en la cual la convergencia de una sucesión equivalga a la convergencia en cada coordenada, como en el ejercicios anteriór.

1. Supongamos primero que todos los X_n tienen diámetro menor o igual que 1, es decir $d_n(x, y) \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x, y \in X_n$. Dados dos elementos $x = (x_n)_n$ e $y = (y_n)_n$ en X, definimos

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n}$$

Probar que d es una métrica

Proof. Las primeras dos propiedades son triviales considerando que cada d_n es métrica
Ahora veamos la desigualdad

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n} = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2) + \cdots \leq d_1(x_1, z_1) + d_1(z_1, y_1) + \cdots$$

$$= \sum d_n(x_n, z_n) + d_n(z_n, y_n) = d(x,z) + d(z,y)$$

Entonces es una métrica $\square$

2. Sea $x^1, x^2, x^3, ..$ una sucesión de puntos de X, es decir, cada x^k es una sucesión $(x_1^k, x_2^k, \cdots)$, en la cual $x_n^k \in X_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $x = (x_n)_n$ un elemento de X. Probar que, con la métrica d definida en el ítem anteriór, $x^k \to x$ en X si y sólo para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $x_n^k \to x_n$ en X_n

Ejercicio 10. Sea (X, d) un espacio métrico y sean $A, B \subseteq X$

1. Probar las siguientes propiedades del interiór de un conjunto:

   (a)
   $$A^{\text{o}} = \bigcup_{G \text{ abierto},\ G \subseteq A} G$$

   Proof. $\subseteq$) Sea $x \in A^{\text{o}}$ entonces existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \subseteq A$ y este es un abierto contenido en A entonces $x \in B(x,r) \subseteq \bigcup G$
   $\supseteq$) Sea $x \in \bigcup G$ entonces $x \in G$ para algún G de la unión
   Como G es abierto existe $B(x,r) \subseteq G$ y por otro lado $G \subseteq A$
   Entonces existe $B(x,r) \subseteq A$ entonces $x \in A^{\text{o}}$ $\square$

   (b) $\emptyset^{\text{o}} = \emptyset$

   Proof. Supongamos $\emptyset^{\text{o}} \neq \emptyset$ entonces $\exists x \in X$ tal que $x \in \emptyset^{\text{o}}$
   Luego tiene que existir $B(x,r) \subseteq \emptyset$ que es absurdo $\square$

   (c) $X^{\text{o}} = X$

   Proof. $\subseteq$) Vale siempre
   $\supseteq$) Sea $x \in X$ supongamos que $x \notin X^{\text{o}}$ entonces $\forall r > 0 \quad B(x,r) \nsubseteq X$ entonces $\exists y \in B(x,r)$ tal que $y \notin X$
   Absurdo por que X es todo no pueden existir cosas que no esten en X $\square$

(d) $A \subseteq B \Rightarrow A^{\mathrm{o}} \subseteq B^{\mathrm{o}}$

Proof. Sea $x \in A^{\mathrm{o}}$ entonces existe $B(x,r) \subseteq A \subseteq B$ luego $x \in B^{\mathrm{o}}$ □

(e) $(A \cap B)^{\mathrm{o}} = A^{\mathrm{o}} \cap B^{\mathrm{o}}$. ¿Se puede generalizar a una intersección infinita?

Proof. $\subseteq$) Sea $x \in (A \cap B)^{\mathrm{o}}$ entonces existe $B(x,r) \subseteq A \cap B$
Pero entonces $B(x,r) \subseteq A$ por lo que $x \in A^{\mathrm{o}}$
Tambien $B(x,r) \subseteq B$ por lo que $x \in B^{\mathrm{o}}$
Luego $x \in A^{\mathrm{o}} \cap B^{\mathrm{o}}$
$\supseteq$) Sea $x \in A^{\mathrm{o}} \cap B^{\mathrm{o}}$ entonces $x \in A^{\mathrm{o}}$ y $x \in B^{\mathrm{o}}$
Entonces existe $B(x,r_1) \subseteq A$ y también $B(x,r_2) \subseteq B$
Si tomamos $r = \min\{r_1, r_2\}$ tenemos que $B(x,r) \subseteq A$ y tambien $B(x,r) \subseteq B$
Entonces $B(x,r) \subseteq A \cap B$ finalmente $x \in (A \cap B)^{\mathrm{o}}$ □

(f) $(A \cup B)^{\mathrm{o}} \supseteq A^{\mathrm{o}} \cup B^{\mathrm{o}}$ ¿Vale la igualdad?

Proof. $x \in A^{\mathrm{o}} \cup B^{\mathrm{o}}$ entonces x esta en alguno de los dos o los dos interiores
Supongamos $x \in A^{\mathrm{o}}$ entonces existe $B(x,r) \subseteq A \subseteq A \cup B$
Entonces $x \in (A \cup B)^{\mathrm{o}}$
Si esta en ambos , en particular esta en una , asi que usamos lo de arriba nuevamente
No vale la igualdad por ejemplo $A = [1,2]$ y $B = [2,3]$
$A^{\mathrm{o}} \cup B^{\mathrm{o}} = (1,2) \cup (2,3) \neq (1,3) = ([1,3])^{\mathrm{o}} = (A \cup B)^{\mathrm{o}}$ □

2. Probar las siguiente propiedades de la clausura de un conjunto

(a)
$$\overline{A} = \bigcap_{F \text{ cerrado, } A \subseteq F} F$$

Proof. Sea $x \in \overline{A}$ entonces $\forall r > 0, B(x,r) \cap A \neq \emptyset$ ahora supongamos $x \notin F$
Como $F = \overline{F}$ por ser cerrado, entonces $x \notin \overline{F}$ para algún F en la intersección
Entonces $\exists r' > 0$ tal que $B(x,r') \cap F = \emptyset$
Pero esto es absurdo dado que $A \subseteq F$ tenemos $\emptyset \neq B(x,r') \cap A \subseteq B(x,r') \cap F = \emptyset$
Entonces $x \in \overline{F} = F$
Y esto vale para cualquier F cerrado tal que $A \subseteq F$
Entonces x esta en todos estos F y por ende en la intersección
$\supseteq$) Sea $x \in \bigcap F$ entonces $x \in F$ para todo $F = \overline{F}$ por que es cerrado por lo tanto $x \in \overline{F}$
Supongamos que $x \in \bigcap F$ pero $x \notin \overline{A}$ entonces tiene que existir un $r > 0$ tal que $B(x,r) \cap A = \emptyset$ luego tenemos que $A \subseteq X \setminus B(x,r)$ que ademas es cerrado por que es el complemento de $B(x,r)$ que es abierto

Pero entonces $X \setminus B(x,r)$ es un cerrado que contiene a A por ende es uno de los F en la intersección
Entonces $x \in X \setminus B(x,r)$ lo cual es absurdo
Provino de suponer que existia un $r > 0$ tal que $B(x,r) \cap A = \emptyset$
Entonces $\forall r > 0 \quad B(x,r) \cap A \neq \emptyset$ por lo tanto $x \in \overline{A}$ □

(b) $\overline{\emptyset} = \emptyset$

Proof. Supongamos que son diferentes entonces $\exists x \in X$ tal que $x \in \overline{\emptyset}$
entonces $\forall r > 0 \quad B(x,r) \cap \emptyset \neq \emptyset$ lo cual es absurdo □

(c) $\overline{X} = X$

Proof. $\supseteq$) Ya está demostrada
$\subseteq$) Sea $x \in \overline{X}$ seguro tambien $x \in X$ por que no existe tal que $x \notin X$
Notemos que X es el conjunto universal □

(d) $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$

Proof. Sea $x \in \overline{A}$ entonces $\forall r > 0 \quad B(x,r) \cap A \neq \emptyset$
Tambien sabemos que $A \subseteq B$ entonces $B(x,r) \cap A \subseteq B(x,r) \cap B$
Entonces $\forall r > 0 \quad B(x,r) \cap B \neq \emptyset$ luego $x \in \overline{B}$ □

(e) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ ¿ Se puede generalizar a unión infinita?

Proof. $\subseteq$) Sea $x \in \overline{A \cup B}$ luego $\forall r > 0 \quad B(x,r) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$
Supongamos $x \notin \overline{A} \cup \overline{B}$ entonces $x \notin \overline{A}$ y $x \notin \overline{B}$
Entonces $B(x, r_1) \cap A = \emptyset$ y por otro lado $B(x, r_2) \cap B = \emptyset$
Luego sea $r = \min\{r_1, r_2\}$ tenemos que

$$B(x,r)\cap(A\cup B) \subseteq (B(x,r)\cap A)\cup(B(x,r)\cap B) \subseteq (B(x,r_1)\cap A)\cup(B(x,r_2)\cap B) = \emptyset$$

Absurdo entonces no puede ser que $x \notin \overline{A}$ y $x \notin \overline{B}$
$\supseteq$) Sea $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$ supongamos $x \in \overline{A}$ luego $\forall r > 0 \quad B(x,r) \cap A \neq \emptyset$
Entonces dado que $B(x,r) \cap A \subseteq B(x,r) \cap (A \cup B)$
Tenemos $B(x,r) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$ por lo que $x \in \overline{A \cup B}$ □

(f) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$

Proof. Sea $x \in \overline{A \cap B}$ entonces $\forall r > 0 \quad B(x,r) \cap (A \cap B) \neq \emptyset$
Entonces tenemos $\forall r > 0 \quad B(x,r) \cap A \neq \emptyset$ por lo que $x \in \overline{A}$
Y tambien $\forall r > 0 \quad B(x,r) \cap B \neq \emptyset$ por lo que $x \in \overline{B}$
Entonces $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$
Sea $A = \mathbb{Q}$ y $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad \overline{A \cap B} = \overline{\emptyset} = \emptyset \neq \mathbb{R} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \overline{\mathbb{Q}} \cap \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \overline{A} \cap \overline{B}$ □

(g) $x \in \overline{A} \iff$ existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $x_n \longrightarrow x$

Proof. $\Rightarrow$) Sea $x \in \overline{A}$ entonces $\forall n \in \mathbb{N} \quad B(x, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$
Entonces $\forall n \in \mathbb{N}$ existe $a_n \in A \cap B(x, \frac{1}{n})$ entonces $a_n \in A$ y $a_n \in B(x, \frac{1}{n})$
Que es lo mismo que decir $\forall \epsilon > 0 \quad \exists a_n \in A$ tal que $d(x, a_n) \leq \epsilon$
Por lo tanto $\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0$ tal que $\forall n \geq n_0 \quad d(x, a_n) \leq \epsilon$
$\Leftarrow$) Sea $a_n \in A \quad \forall n \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \to x$
Entonces $\forall \epsilon > 0 \quad \exists a_n \in A$ tal que $d(x, a_n) \leq \epsilon$
Luego $\forall \epsilon > 0$ tenemos $a_n \in B(x, \epsilon)$ con $a_n \in A$
Por lo que $B(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$
Entonces $x \in \overline{A}$ □

3. Probar las siguientes propiedades que relacionan interiór y clausura:

(a) $(X \setminus A)^{\circ} = X \setminus \overline{A}$

Proof. $\subseteq$) Sea $x \in (X \setminus A)^{\circ}$ entonces existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq (X \setminus A)$
Entonces $B(x, r) \cap A = \emptyset$ luego $x \notin \overline{A}$ y sabemos que $x \in X$
Entonces $x \in X \setminus \overline{A}$
$\supseteq$) Sea $x \in X \setminus \overline{A}$ entonces $x \notin \overline{A}$
Entonces $\exists r > 0 \quad B(x, r) \cap A = \emptyset$
Por lo tanto $B(x, r) \subseteq X \setminus A$ luego $x \in (X \setminus A)^{\circ}$ □

(b) $\overline{X \setminus A} = X \setminus A^{\circ}$

Proof. $\supseteq$) Sea $x \in X \setminus A^{\circ} \iff x \notin A^{\circ} \iff \forall r > 0 \quad B(x, r) \not\subseteq A$
$\iff \forall r > 0 \quad B(x, r) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset \iff x \in \overline{X \setminus A}$ □

(c) ¿Es cierto que vale $\overline{A} = \overline{A^{\circ}}$?

Proof. Si $A \subseteq \mathbb{R}$ con $A = \{1\}$ entonces $\overline{A} = \{1\} \neq \emptyset = \overline{\emptyset} = \overline{A^{\circ}}$ □

(d) ¿Es cierto que vale $A^{\circ} = (\overline{A})^{\circ}$?
$\mathbb{Q}^{\circ} = \emptyset \neq \mathbb{R} = \mathbb{R}^{\circ} = (\overline{\mathbb{Q}})^{\circ}$

4. Probar las siguientes propiedades de la frontera de un conjunto

(a) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$

Proof. $\subseteq$) $x \in \partial A \iff \forall r > 0 \quad B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ y $B(x, r) \cap A^c \neq \emptyset$
$\iff x \in \overline{A}$ y $x \in \overline{A^c} = \overline{X \setminus A} \iff x \in \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$ □

(b) ∂A es cerrado

Proof. Esto es equivalente a ver que $\partial A = \overline{\partial A}$ una de las inclusiones es trivial
Veamos que $\overline{\partial A} \subseteq \partial A$. Sea $x \in \overline{\partial A}$ entonces $\forall r > 0 \quad B(x,r) \cap \partial A \neq \emptyset$
Luego $\forall r > 0 \quad B(x,r)$ tenemos un $y \in \partial A$ tal que $y \in B(x,r)$
Como $y \in B(x,r)$ que es abierto $\exists r'$ tal que $B(y,r') \subseteq B(x,r)$
Como $y \in \partial A$ entonces $\forall r$ tenemos $B(y,r) \cap A \neq \emptyset$ y $B(y,r) \cap A^c \neq \emptyset$
En particular vale para r', entonces $B(y,r') \cap A \neq \emptyset$ y $B(y,r') \cap A^c \neq \emptyset$
Entonces $\emptyset \neq B(y,r') \cap A \subseteq B(x,r) \cap A$ y tambien sucede con A^c
Entones $x \in \partial A$
Otra opción es usar el ejercicio de arriba, como $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$ que es una intersección de dos cerrados entonces es cerrado $\square$

(c) $\partial A = \partial(X \setminus A)$

Proof. Esto sale por definición usando que $A^c = X \setminus A$ y que $A = (X \setminus A)^c$ $\square$

Ejercicio 11. Sea (X,d) un espacio métrico y sean $G \subseteq X$ abierto y $F \subseteq X$ cerrado. Probar que $F \setminus G$ es cerrado y $G \setminus F$ es abierto

Proof. $\square$

Ejercicio 12. Sea (X,d) un espacio métrico. Dados $a \in X$ y $r \in \mathbb{R}_{>0}$, llamamos bola cerrada de centro a y radio r al conjunto $\overline{B}(a,r) = \{x \in X : d(x,a) \leq r\}$

1. Probar que $\overline{B}(a,r)$ es un conjunto cerrado y que $\overline{B(a,r)} \subseteq \overline{B}(a,r)$

   Proof. Sea $y \in X \setminus \overline{B}(x,r)$, entonces $d(x,y) > r$ por lo tanto $\epsilon = d(x,y) - r > 0$
   Ahora sea $z \in B(y,\epsilon)$ entonces $d(z,x) + d(z,y) \geq d(x,y)$
   Luego $d(z,x) \geq d(x,y) - d(z,y) > d(x,y) - \epsilon = r$
   Entonces $z \in X \setminus \overline{B}(x,r) \quad \forall z \in B(y,\epsilon)$
   Por lo que $\forall y \in X \setminus \overline{B}(x,r) \quad \exists B(y,\epsilon)$ tal que $B(y,\epsilon) \subseteq X \setminus \overline{B}(x,r)$
   Finalmente $X \setminus \overline{B}(x,r)$ es abierto entonces $\overline{B}(x,r)$ es cerrado
   Como sabemos que $B(x,r) \subseteq \overline{B}(x,r)$ y ahora sabiendo que $\overline{B}(x,r)$ cerrado
   Entonces $\overline{B(x,r)} \subseteq \overline{B}(x,r)$ $\square$

2. Dar un ejemplo de un espacio métrico y una bola abierta $B(a,r)$ cuya clausura no sea $\overline{B}(a,r)$
   Esto es dar un ejemeplo donde $\overline{B(x,r)} \not\supseteq \overline{B}(x,r)$
   Consideremos el espacio métrico $(\mathbb{Z},\delta)$ donde δ es la distancia discreta
   Para cualquier $x \in \mathbb{Z}$ tenemos $\overline{B(x,1)} = \overline{\{x\}} = \{x\} \not\supseteq \mathbb{Z} = \overline{B}(x,1)$

Ejercicio 13. Sean (X, d_1) e (Y, d_2) espacios métricos. Se considera el espacio métrico $(X \times Y, d)$, donde la d es la métrica definida en el Ejercicio 12. Probar que para $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$ valen:

1. $(A \times B)^{\text{o}} = A^{\text{o}} \times B^{\text{o}}$

   Proof. Veamos primero que dados U y V abiertos de X e Y respectivamente entonces $U \times V$ es abierto de $X \times Y$.

   Sea $(x, y) \in U \times V$. como $x \in U$ que es abierto existe $B(x, r_1) \subseteq U$

   Y lo mismo con y existe $B(y, r_2) \subseteq V$

   Ahora si tomamos $r = \min\{r_1, r_2\}$

   Sea $x \in (A \times B)^{\text{o}}$ entonces $\exists r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq A \times B$

   Si $(x', y') \in B_r(x, y) \quad r > d((x, y), (x', y')) = d_1(x, x') + d_2(y, y')$. Ambos sumandos son positivos por ser distancias. Luego ambos sumandos tienen que ser menores que r

   Entonces $d_1(x, x') < r \leq r_1$ entonces $x' \in B(x, r_1) \subseteq U$

   Y también $d_2(y, y') < r \leq r_2$ entonces $y' \in B(y, r_2) \subseteq V$

   Entonces $(x', y') \in U \times V$ luego $B_r(x, y) \subseteq U \times V$

   Entonces para cualquier $(x, y) \in U \times V$ encontramos $B_r(x, y) \subseteq U \times V$

   Luego $U \times V$ es abierto.

   Luego como A^{o} y B^{o} abierto entonces $A^{\text{o}} \times B^{\text{o}}$ abierto

   Luego dado que $A^{\text{o}} \times B^{\text{o}} \subseteq A \times B$ y $A^{\text{o}} \times B^{\text{o}}$ es abierto. Entonces $A^{\text{o}} \times B^{\text{o}} \subseteq (A \times B)^{\text{o}}$

   Veamos $A^{\text{o}} \times B^{\text{o}} \supseteq (A \times B)^{\text{o}}$

   Sea $(x, y) \in (A \times B)^{\text{o}}$ entonces existe $r > 0 \quad B_r(x, y) \subseteq (A \times B)$

   Entonces si $x' \in B(x, \frac{r}{2})$ e $y' \in B(y, \frac{r}{2})$

   Luego $d((x', y')(x, y)) = d_1(x', x) + d_2(y', y) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$

   entonces $(x', y') \in B_r(x, y) \subset A \times B$

   Luego $x' \in A$ y tambien $y' \in B$

   $B(x, \frac{r}{2}) \subseteq A$ y por otro lado $B(y, \frac{r}{2}) \subseteq B$

   Entonces $x \in A^{\text{o}}$ e $y \in B^{\text{o}}$ luego $(x, y) \in A^{\text{o}} \times B^{\text{o}}$ $\square$

2. $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$

   Proof. Siguiendo las ideas anteriores probemos que F y G cerrados entonces $F \times G$ es cerrado

   Sea F e G cerrados entoncse $X \setminus F$ y $X \setminus G$ son abiertos

   Luego $X \setminus F \times Y$ es abierto por lo que $F \times X$ es cerrado

   De la misma manera $X \times Y \setminus G$ abierto entonces $X \times G$ es cerrado

Luego $(X \times G) \cap (F \times Y) = F \times G$ es intersección de cerrado

Entonces $F \times G$ es cerrado

Luego usando esto tenemos que $\overline{A}$ y $\overline{B}$ son cerrados por lo que $\overline{A} \times \overline{B}$ es cerrado

Luego $A \times B \subseteq \overline{A} \times \overline{B}$ entonces $\overline{A \times B} \subseteq \overline{A} \times \overline{B}$

Veamos $\overline{A \times B} \supseteq \overline{A} \times \overline{B}$ □

Ejercicio 14. Sea (X, d) un espacio métrico y sean A, B subconjunto de X.

1. Probar las siguientes propiedades del derivado de un conjunt:

   (a) A' es cerrado.

   Proof. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A'$ convergente tal que $a_n \to a$, queremos ver que $a \in A'$ esto nos diría que $A' = \overline{A'}$

   Como $a_n \to a$ dado un $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que $\forall n > n_0 \quad d(a, a_n) \leq \epsilon$

   Equivalentemente para cualquier $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que $\forall n \geq n_0$ $a_n \in B(a, \epsilon)$. Pero tomemos solo un a_n llamemoslo a_j tal que $a_j \in B(a, \epsilon)$

   Como $a_j \in B(a, \epsilon)$ es abierto entonces existe r' tal que $B(a_j, r') \subseteq B(a, r)$

   Tambien sabemos que $a_j \in A'$ entonces existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $x_n \to a_j$

   Sea $\epsilon = r'$ tenemos que exsite n_1 tal que $\forall n \geq n_1$ $d(x_n, a_j) \leq r'$

   Entonces $\forall n \geq n_1$ $x_n \in B(a_j, r')$

   Por lo tanto hay numerables $x_n \in A$ tal que $x_n \in B(a_j, r') \subseteq B(a, r)$

   Entonces hay numerables $x_n \in A$ tal que $x_n \in B(a, r)$

   Por lo tanto $B(a, r) \cap A$ es numerable.

   Entonces a es un punto de acumulación, $a \in A'$

   Luego $A' = \overline{A'}$ entonces A' es cerrado □

   (b) $A \subseteq B \Longrightarrow A' \subseteq B'$

   Proof. Sea $x \in A'$ entonces existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $x_n \to x$

   Como $A \subseteq B$ la misma sucesión $(x_n)_n \subseteq B$ entonces $x \in B'$ □

   (c) $(A \cup B)' = A' \cup B'$

   Proof. $\subseteq$) Sea $x \in (A \cup B)'$ entonces existe $(x_n)_n \subseteq A \cup B$ tal que $x_n \to x$

   Entonces $x_n \in A$ o $x_n \in B$ para infinitos términos , si no tendría infinitos términos fuera de A y fuera de B lo que es absurdo. Quizas para los dos , pero no importa.

   Spd $x_n \in A$ para infinitos términos entonces me quedo con todos los términos de x_n tal que $x_n \in A$ esto es una subsucesión de x_n entonces converge a x por lo tanto tengo una sucesión contenida en A que converge a x luego $x \in A'$

   Entonces $x \in A' \cup B'$

$\supseteq$) Sea $x \in A' \cup B'$ spd $x \in A'$ luego existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $a_n \to a$
Pero entonces $(a_n)_n \subseteq A \cup B$ por lo tanto $a \in (A \cup B)'$ $\square$

(d) $\overline{A} = A \cup A'$

Proof. Primero notemos que si $x \in A'$ entonces $\forall r > 0 \quad B(x,r) \cap A$ es infinita
Por lo tanto diferente del vacio entonces $x \in \overline{A}$ entonces $A' \subseteq \overline{A}$
$\supseteq$) Luego $A \subseteq \overline{A}$ entonces $A \cup A' \subseteq \overline{A} \cup A' = \overline{A}$
$\subseteq$) Sea $x \in \overline{A}$ entonces $\forall r > 0 \quad B(x,r) \cap A \neq \emptyset$
Supongamos que $x \notin A$, pero entonces usando la bola $B(x, \frac{1}{n})$ y sabiendo que $B(x, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset \quad \forall n \in \mathbb{N}$ Armamos una sucesión $(x_n)_n \subseteq A$ tal que $x_n \to x$
Luego $x \in A'$
Ahora supongamos que $x \notin A'$ entonces existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \cap A$ es finito
Pero entonces tiene que exisitir algún $r' < r$ tal que $\#(B(x,r') \cap A) = 1$
Esto sucede por que para cada elemento en la intersección sabemos que está en la bola y entonces tiene una distancia a x pero entonces si tomamos un radio mas pequenio ese elemento no estaría en la bola y por lo tanto no estaría en la intersección y esto lo podemos hacer con todos los elementos , salvo uno, por que si no quedara ninguno existiria un 4_2 tal que $B(x, r_2) \cap A = \emptyset$ que es absurdo por que $x \in \overline{A}$
Pero entonces existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \cap A = \{x\}$, si fuese otro eleménto y el único , usaríamos $r' = \frac{d(x,y)}{2}$ y entonces $y \notin B(x,r')$
Entonces $x \in A$
Entonces siempre que $x \in \overline{A} \Rightarrow x \in A$ o $x \in A'$ por lo tanto $x \in A \cup A'$ $\square$

(e) $(\overline{A})' = A'$

Proof. $\supseteq$) Usando el b) tenemos que como $A \subseteq \overline{A} \Rightarrow A' \subseteq (\overline{A})'$
$\subseteq$) Sea $x \in (\overline{A})'$ entonces existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{A} \setminus \{x\} = (A \cup A') \setminus \{x\}$ tal que $x_n \to x$
Luego x_n tiene infinitos términos en A o en A' o en las dos
Si tiene infinitos en A podemos armar una subsucesión $(x_{n_j})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ como es subsucesión $x_{n_j} \to x$ entonces $x \in A'$
Si tiene infinitos en A' similarmente llegamos a que $x \in (A')' \subseteq A'$
Si tiene infinitos en las dos , podemos usar cualquiera de los dos argumentos

Observación. $(A')' \subseteq A'$

Proof. A' es cerrado por lo tanto para cualquier $(x_n)_n \subseteq A'$ tal que $x_n \to x$ sucede que $x \in A'$. Si no , no sería cerrado
Luego A' contiene a todos sus puntos de acumulación por lo tanto $(A')' \subseteq A'$ $\square$

$\square$

2. Probar que $x \in X$ es un punto de acumulación de $A \subseteq X$ si y solo si existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $x_n \to x$ y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es casi constante.

   Proof. $\Rightarrow$) Sabemos que si $x \in A'$ entonces $\forall r > 0 \quad B(x,r) \cap A$ es infinito entonces $(B(x,r) \setminus \{x\}) \cap A$ es también infinta.

   Luego definamos x_n tal que $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \setminus \{x\} \cap A$ para cada $n \in \mathbb{N}$

   Ahora afirmo $x_n \to x$ veamosló

   Sea $\epsilon > 0$ sabemos por arquimedianidad que exsite n_0 tal que $\frac{1}{n_0} \leq \epsilon$

   Luego por como construí x_n tengo que $x_n \in B(x, \frac{1}{n_0}) \quad \forall n \geq n_0$

   Entonces dado cualquier $\epsilon > 0$ tenemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x) \leq \epsilon \quad \forall n \geq n_0$

   Por lo tanto $\forall \epsilon > 0$ tenemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, x_n) \leq \epsilon \quad \forall n \geq n_0$

   Entonces $x_n \to x$. Además x_n no puede ser casi constante, si lo fuera existiría un n_0 tal que $x_n = x \quad \forall n \geq n_0$ pero esto es absurdo por que sabemos que $x_n \neq x \quad \forall n \in \mathbb{N}$

   Si en cambio existiera un n_0 tal que $x_n = a \neq x \quad \forall n \geq n_0$ luego a_n no convergería a x

   □

Ejercicio 15. Hallar interiór, clausura, conjunto derivado y frontera de cada uno de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$. Determinar cuales son abiertos o cerrado

$$[0,1] \quad ; \quad (0,1) \quad ; \quad \mathbb{Q} \quad ; \quad \mathbb{Q} \cap [0,1] \quad ; \quad \mathbb{Z} \quad ; \quad [0,1) \cup \{2\}$$

Proof. 1. $[0,1]$ Es facil ver que el interiór es $(0,1)$ viendo que cada punto es interión tomando un punto y usando como radio el minimo de las distancias hacia 0 y hacia 1

La clausura es también simple por que todo punto en $[0,1]$ cumple trivialmente que la intersección con $[0,1]$ es diferente de vacía

Todos los puntos en $[0,1]$ son de acumlación usando la sucesión constante

La frontera es el conunto $\{0,1\}$ es facíl ver que son de la frontera y es facil ver que cualquier otro no cumple ser de la frontera

Usando esto es facil ver que $[0,1]$ es cerrado

Para $(0,1)$ el análisis es similar

$\mathbb{Q}$ por densidad de $\mathbb{I}$ es facil ver que dado un $x \in \mathbb{Q} \quad \forall r > 0 \quad B(x,r) \cap \mathbb{I} \neq \emptyset$

Por ende ninguna bola puede estar contenida en $\mathbb{Q}$ y entonces su interiór es vacío

Esta claro que todos $x \in \mathbb{Q}$ es de acumulación , usando la sucesión constante, pero además todo $x \in \mathbb{I}$ es de acumulación de $\mathbb{Q}$ por densidad de racionales es facil de probar

Sabiendo que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$ tenemos que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$

$\partial\mathbb{Q} = \overline{\mathbb{Q}} \setminus \mathbb{Q}^o = \mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}$

Un análisis muy similar podemos hacer con $\mathbb{Q} \cap [0,1]$

$\mathbb{Z}$ devuelta su interiór es vacío, es facíl ver que todos sus puntos son aislados, entonces no pueden ser de acumulación

Luego $\mathbb{Z}' = \emptyset$ entonces tambien tenemos que $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cup \mathbb{Z}' = \mathbb{Z}$

$\partial\mathbb{Z} = \overline{\mathbb{Z}} \setminus \mathbb{Z}^o = \overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$

$A = [0,1) \cup \{2\}$ tenemos que 2 no puede ser interiór usando $\forall r > 0 \quad B(2,r) \not\subseteq A$

Lo mismo con 0 para cualquier $B(x,r)$ sabemos que existe un $x < 0$ tal que $x \in B(0,r)$ por ende $B(0,r) \not\subseteq A$ el $1 \notin A$ por lo tanto $1 \notin A^o$

Para el resto de los puntos y es facil encontrar un radio usando $d(y,1)$ o $d(y,0)$

Finalmente tenemos $A^o = (0,1)$

Es fácil ver que 0 son puntos de acumulación usando una sucesión por derecha

Luego usando una sucesión de numeros menores que 1 vemos que 1 es de acumulación

Entonces $A' = [0,1]$

Luego $\overline{A} = A \cup A' = [0,1] \cup \{2\}$

$\partial A = \overline{A} \setminus A^o = \{0,1,2\}$

□

Ejercicio 16. Caracterizar los abiertos y los cerrados de $\mathbb{Z}$ considerado como espacio métrico con la métrica inducida por la usual de $\mathbb{R}$. Generalizar a un subespacio discreto de un espacio métrico X.

Proof. □

Ejercicio 17. Sea (X,d) un espacio métrico y sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en X.

1. Si $\lim x_n = x$ y $\lim y_n = y$, probar que $\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n) = d(x,y)$

   Proof. Sabemos que $d(x_n,y_n) \le d(x_n,x) + d(x,y_n) \le d(x_n,x) + d(x,y) + d(y,y_n)$

   Entonces tenemos que $\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n) \le \lim_{n\to\infty} (d(x_n,x) + d(x,y) + d(y,y_n))$

   Como todos los límites del lado derecho exiten los puedo separar $\lim d(x_n,y_n) \le d(x,y)$

   Con la misma idea $d(x,y) \le d(x,x_n) + d(x_n,y) \le d(x,x_n) + d(x_n,y_n) + d(y_n,y)$

   entonces $-d(x_n,y_n) \le d(x,x_n) - d(x,y) + d(y_n,y)$

   $\lim -d(x_n,y_n) \le \lim(d(x,x_n) - d(x,y) + d(y_n,y))$

   Todos los límites existen entonces separando $-\lim d(x_n,y_n) \le -d(x,y)$

   Finalmente $\lim d(x_n,y_n) \ge d(x,y)$

   Entonces $d(x_n,y_n) = d(x,y)$ □

2. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son de sucesiones de Cauchy de X, probar que la sucesión real $(d(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente

Proof. Sabemos que ambas sucesiones son de cauchy entonces

Dado un $\epsilon > 0$ tenemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n, m \geq n_0$

Y con ese mismo dado $\epsilon > 0$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $d(y_k, y_j) \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \forall k, j \geq n_1$

Ahora si tomamos $n_2 = \max\{n_1, n_0\}$

Tenemos ambas $d(x_n, x_m) \leq \frac{\epsilon}{2}$ y $d(y_k, y_j) \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n, m, j, k \geq n_2$

Teniendo esto $d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x_s) + d(x_s, y_n) \leq d(x_n, x_s) + d(x_s, y_s) + d(y_s, y_n)$

Entonces dado $\epsilon > 0$ usando el n_2 tenemos $d(x_n, y_n) \leq \frac{\epsilon}{2} + d(x_s, y_s) + \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n, s \geq n_2$

Entonces dado el $\epsilon > 0$ tenemos $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, y_n) \leq d(x_s, y_s) + \epsilon \quad \forall n, s \geq n_2$

Hacieno el mismo proceso con $d(x_s, y_s)$ llegamos a que $d(x_s, y_s) - \epsilon \leq d(x_n, y_n)$

Luego juntando estas dos ideas podemos notar que dado un $\epsilon > 0$ tenemos

$$\exists n_2 \in \mathbb{N} \text{ tal que } |d(x_n, y_n) - d(x_s, y_s)| \leq \epsilon \quad \forall n, s > n_2$$

Sabemos que para todo $\epsilon > 0$ podemos hacer el mismo proceso y encontrar un n_2

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_2 \in \mathbb{N} \text{ tal que } |d(x_n, y_n) - d(x_s, y_s)| \leq \epsilon \quad \forall n, s \geq n_2$$

Pero esto nos dice que $d(x_n, y_n)$ es de Cauchy y como $d(x_n.y_n) \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y $\mathbb{R}$ es completo entonces $d(x_n, y_n)$ converge

□

Ejercicio 18. Un subconjunto de A de un espacio métrico de X se dice G_δ (respectivamente F_σ) si es intersección de una sucesión de abiertos (respectivamente unión de una sucesión de cerrados) de X

1. Probar que el complemento de un G_δ es un F_σ

Proof. Sea $G_\delta = \bigcap_{i\in I} G_i$ intersección de abiertos

Luego $x \in (\bigcap_{i\in I} G_i)^c = G_\delta^c \iff x \notin \bigcap_{i\in I} G_i \iff$

existe algún G_i tal que $x \notin G_i \iff$ existe algún G_i tal que $x \in G_i^c$

$\iff x \in \bigcup_{i\in I} G_i^c \iff x \in F_\sigma$

Este último sí y solo sí vale por que G_i es abierto, por lo tanto G_i^c es cerrado, luego $\bigcup G_i^c$ es unión de cerrados por lo tanto un F_σ □

2. Probar que el complemento de un F_σ es un G_δ

Proof. Sea $F_\sigma = \bigcup_{i\in I} F_i$ unión de cerrados

Luego $x \in F_\sigma^c = (\bigcup_{i\in I} F_i)^c \iff x \notin \bigcup_{i\in I} F_i$

$\iff \forall i \in I\ x \notin F_i \iff x \in F_i^c \quad \forall i \in I \iff x \in \bigcap_{i\in I} F_i^c \iff x \in G_\delta$

El último si y solo si vale por que F_i es cerrado luego F_i^c es abierto por lo tanto $\bigcap F_i^c$ es intersección de abiertos entonces es un G_δ

□

3. Probar que todo cerrado es un G_δ. Deducir que todo abierto es un F_δ

Proof. Sea F cerrado , definamos U_n

$$U_n = \bigcup_{x\in F} B(x, \frac{1}{n})$$

U_n es unión de abiertos por lo tanto abierto

Ahora firmo que $F = \bigcap U_n$ osea intersección de abiertos. entonces F es G_δ

Veamosló. $x \in F$ entonces $x \in B(x, \frac{1}{n}) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ entonces $x \in U_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Entonces $y \in \bigcap U_n$

Sea $y \in \bigcap U_n$ entonces $y \in U_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ sabemos que y pertenece a alguna de esas bolas, otra forma de decirlo $y \in B(x_n, \frac{1}{n})$ para algún $x_n \in F$ pero entonces dado un $\epsilon > 0$ sabemos que existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} \leq \epsilon$ pero ademas sabemos que para todo $n > n_0$ sucede $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} \leq \epsilon$ por ende $d(x_n, y) \leq \epsilon \quad \forall n \geq n_0$

Pero entonces x_n converge a y y además $x_n \in F \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y como F es cerrado tenemos que $y \in F$

Forma B. Sea G abierto

$$U_n = \bigcup_{x\in X\setminus G} B(x, \frac{1}{n})$$

Luego tenemos $F_n = X \setminus U_n$ que es complemento de abierto por lo tanto cerrado.

Ahora afirmo que $G = \bigcup F_n$ que es unión de cerrados por lo tanto F_σ

Veamosló, sea $y \in G$ supongamos $y \notin \bigcup F_n$ entonces $y \notin F_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Entonces $y \in U_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ por lo tanto $y \in \bigcap U_n$ por el mismo argumento que antes esto implica que $y \in X \setminus G$, lo que es absurdo. Luego $y \in \bigcup F_n$

Sea $y \in \bigcup F_n$ entonces $y \in F_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ entonces $y \notin U_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Supongamos $y \notin G$ entonces $y \in X \setminus G$ pero entonces $y \in U_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$ seguro

Lo que es absurdo , entonces $y \in G$

□

4. (a) Exhibir una sucesión de abiertos de $\mathbb{R}$ cuya intersección sea $[0, 1)$. Idem con $[0, 1]$
   (b) Exhibir una sucesión de cerrados de $\mathbb{R}$ cuya unión sea $[0, 1)$
   (c) ¿Qué conclusión puede obtenerse de estos ejemplos?

Ejercicio 19. a

1. Sea (X, d) un espacio métrico. Se define $d'(x, y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$. Probar que d' es una métrica en X topológicamente equivalente a d (o sea, ambas dan a lugar a una misma noción de conjunto abierto). Observar que $0 \leq d'(x, y) \leq 1$ para todo $x, y \in X$

   Proof. Consideremos $f = \frac{x}{1+x}$ entonces podemos reescribir $d'(x, y) = f \circ d$

   También sabemos que f es creciente dado que su derivada es mayor a $0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

   Y $f(0) = 0$. Estas dos cosas nos dicen que $f \circ d$ es distancia , por lo tanto d' es distancia

   Veamos que $d' = f \circ d$ y d son topológicamente equivalentes

   Sea $y \in B_{d'}(x, \epsilon)$ seguro existe un $r > 0$ tal que $\epsilon < \frac{r}{r+1}$ entonces $d'(y, x) \leq \epsilon \leq \frac{r}{r+1}$

   $d'(x, y) = \frac{d(y,x)}{1+d(y,x)} \leq \frac{r}{r+1} \iff \frac{r+1}{r} \leq \frac{1+d(y,x)}{d(y,x)} \iff 1 + \frac{1}{r} \leq \frac{1}{d(y,x)} + 1 \iff d(y, x) \leq r$

   Entonces $y \in B_d(x, r)$ por lo tanto $B_{d'}(x, \epsilon) \subseteq B_d(x, r)$

   Ahora sea $y \in B_d(x, \epsilon)$ entonces $d(x, y) \leq \epsilon$ y seguro existe un $r \geq \epsilon$

   Entonces $d(x, y) \leq \epsilon \leq r$ usando la misma idea llegamos a que entonces $d'(x, y) \leq \frac{r}{r+1}$

   Luego $y \in B_{d'}(x, \frac{r}{r+1})$ luego $B_d(x, r) \subseteq B_{d'}(x, \frac{r}{r+1})$

   □

2. Sea $(X_n, d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de espacios métricos tales que para cada $n \in \mathbb{N}$ vale $0 \leq d_n(x, y) \leq 1$ para todo par de elementos $x, y \in X_n$.

   Para cada $x = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definimos:

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n}$$

3. Sea (X, d) un espacio métrico. Llamamos $X^{\mathbb{N}}$ al conjunto de las sucesiones de X. Mostrar que aplicando i) y ii) se le puede dar una métrica a $X^{\mathbb{N}}$.

Ejercicio 20. Sean d_∞ y d_2 las métricas en R^n definidas en el ejercicio 7. Mostrar que d_∞ y d_2 son topológicamente equivalentes.

Proof. Por un lado tenemos que $d_\infty(x, y) \leq d_1(x, y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

Entonces si x_k converge con d_1 entonces seguro converge con d_∞

Ahora por otro lado supongamos x_k converge con d_∞

x_k converge con d_∞ entonces dado $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que $d_\infty(x_k, x) \leq \epsilon \quad \forall k \geq n_0$

Entonces dado $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que

$$d_1(x_k, x) = \sum_{j=1}^{n} |(x_k)_j - x_j| \leq n \sup_{1\leq j\leq n} |(x_k)_j - x_j| = nd_\infty(x_k, x) \leq n\epsilon \quad \forall k \geq n_0$$

Aclaración j es el indice de componente, y n es un número fijo, que sirve para cualquier ϵ y está dado por la dimensión de $\mathbb{R}^n$

Luego x_k converge en d_1. Entonces ambas distancias generan las mismas sucesiones convergentes, por lo tanto son equivalentes □

Ejercicio 21. Sea (X, d) un espacio métrico. Dados $A \subseteq X$ no vacío y $x \in X$, se define la *distancia* de x a A como $d_A(x) = \inf \{d(x, a) : a \in A\}$. Probar:

i. $|d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x, y)$ para todo par de elementos $x, y \in X$

Proof. Tenemos que $d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$

$d(x, A) = \inf d(x, a) \leq \inf(d(x, y) + d(y, a)) = \inf d(x, y) + \inf d(y, a) = d(x, y) + d(y, A)$

Entonces $d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$

haciendo lo mismo pero arrancando de $d(y, a) \leq d(y, x) + d(x, a)$

llegamos a $-d(x, y) \leq d(x, A) - d(y, A)$

Juntando todo

$$|d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x, y)$$

□

ii. $x \in A \Rightarrow d_A(x) = 0$

Proof. Sea $D = \{d(x, a) : a \in A\}$ afirmo que $\inf D = 0$

- $0 \leq d \quad \forall d \in D$
  Si no fuera cierto existiria $d' \in D$ tal que $d' < 0$ entonces $d' = d(x, a) < 0$ para algún $a \in A$ lo que es absurdo
- Sea $l \leq d \quad \forall d \in D$ entonces $l \leq 0$ Supongo que no es cierto, entonces existe $l \leq d \quad \forall d \in D$ con $l > 0$, pero sabemos que $d(x, x) \in D$ y $d(x, x) = 0 < l$
  Luego $0 = \inf D$ por lo tanto $d_A(x) = \inf D = 0$

□

iii. $d_A(x) = 0 \iff x \in \overline{A}$

Proof. $\Rightarrow$) Sea $D = \{d(x,a) : A \in A\}$ luego $0 \inf D \iff$

Entonces existe un sucesión $d_n \in D \quad \forall n \in \mathbb{N}$ tal que $d_n \to 0$

$\iff$ para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $a \in A$ tal que $d_n = d(x,a)$ llamemosló a_n

Luego $d(x,a_n) = d_n \to 0 \iff$ tenemos $a_n \in A \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y además $a_n \to x$

$\iff x \in \overline{A}$ □

iv. $B_A(r) = \{x \in X : d_A(x) < r\}$ es abierto para todo $r > 0$

Proof. Sea $x \in B_A(r)$, primero una pequeña afirmación,

Como $x \in B_A(r)$ entonces $r > d_A(x)$ luego existe ϵ tal que $r - \epsilon > d_A(x)$

Luego puedo tomar $r' = r - \epsilon - d(x,A)$ y seguro $r > 0$

Afirmo que $B(x,r') \subseteq B_A(r)$. Veamosló, sea $y \in B(x,r')$ entonces

$d(y,A) \leq d(y,x) + d(x,A) \leq r' + d(x,A) = r - \epsilon - d(x,A) + d(x,A) < r$

Luego $y \in B_A(r)$ entonces $B(x,r') \subseteq B_A(r)$

Finalmente $\forall x \in X \quad \exists r' > 0$ tal que $B(x,r') \subseteq B_A(r)$

$B_A(r)$ es abierto □

v. $\overline{B}_A(r) = \{x \in X : d_A(x) \leq r\}$ es cerrado para todo $r > 0$

Proof. Tomemos el complemento de la bola, $A = \{x \in X : d_A(x) > r\}$ veamos que es abierto

Ahora sea $x \in A$ afirmo que $B(x,r') \subseteq A$ con $r' = d(x,A) - r > 0$, veamosló

Sea $y \in B(x,r')$ tenemos $d(x,A) - d(y,A) \leq |d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y) < d(x,A) - r$

Entonces $-d(y,A) < -r \Rightarrow d(y,A) > r$ por lo tanto $y \in A$ luego $B(x,r') \subseteq A$

Luego $\overline{B}_A(r)$ es complemento de un abierto , por lo tanto es cerrado □

Ejercicio 22. Sea (X,d) un espacio métrico. Dados $A, B \subseteq X$ no vacíos se define la distancia entre A y B por $d(A,B) = \inf\{d(a,b) : a \in A \quad b \in B\}$. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

1. d es una distancia en $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ Es falso

Proof. Tomemos un $A \subseteq X$ con $A \neq \{\emptyset\}$ $B = A \cup \{x\} \quad x \in X$

Entonces $d(A,B) = 0$ pero $A \neq B$ entonces no es una métrica □

2. $d(A,B) = d(A,\overline{B})$ es verdadero

   Sea $L_1 = d(A,B) \quad L_2 = d(A,\overline{B})$ supongamos que son diferentes

   $L_1 < L_2$ entonces $\exists \epsilon > 0$ tal que $L_1 + \epsilon < L_2$

   Como L_1 es un ínfimo existe $a \in A, b \in B$ tal que $L_1 \leq d(a,b) \leq L_1 + \epsilon < L_2$

   Pero entonces existen $a \in A, b \in B$ tal que $d(a,b) < L_2 = \inf\{d(a,b) : a \in A \quad b \in \overline{B}\}$

   Absurdo por que como $a \in A, b \in B$ entonces $d(a,b) \in \{d(a,b) : a \in A \quad b \in \overline{B}\}$

   Ahora en cambio si $L_1 > L_2$ entonces usando el mismo argumento

   existe $a \in A \quad b' \in \overline{B}$ tal que $L_2 \leq d(a,b') \leq L_2 + \epsilon < L_1$

   Entonces $d(a,b') < L_1$ entonces existe ϵ' tal que $d(a,b') + \epsilon' < L_1$

   Ahora como $b' \in \overline{B}$ existe $(b_n)_n \subseteq B$ tal que $b_n \to b$ Entonces $|d(a,b_n) - d(a,b')| \to 0$

   Luego dado ϵ' existe n_0 tal que $d(a,b_n) \leq d(a,b') + \epsilon' \quad \forall n \geq n_0$

   Por lo tanto $\forall n \geq n_0$ tenemos $d(a,b_n) < L_1$ pero con un $b_n \in B$ nos alcanza para decir que es absurdo dado que nuevamente $d(a,b_n) \in \{d(a,b) : a \in A \quad b \in B\}$ por ende $d(a,b_n)$ no puede ser menor que el infimo de un conjunto que lo contiene

   Luego no sucede $L_1 < L_2$ y tampoco $L_2 < L_1$ entonces $L_1 = L_2$

3. $d(A,B) = 0 \iff A \cap B \neq \emptyset$ es falso

   Proof. Sea $(\mathbb{R}^2, d)$.Con d la distancia euclídea.

   Sean $A = \{(x,0) : x \in \mathbb{N}\} \quad B = \{(x, \frac{1}{x}) : x \in \mathbb{N}\}$

   Sabemos que $A \cap B = \emptyset$, sin embargo es facil ver que $d(A,B) = 0$.

   Tomamos la sucesión $x_n = d((n,0),(n + \frac{1}{n})) = \sqrt{\frac{1}{n^2}}$.

   $(x_n)_n \subseteq \{d(a,b) : a \in A \quad b \in B\}$ y además $x_n \to 0$

   Por lo tanto 0 es ínfimo

   □

4. $d(A,B) = 0 \iff \overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$

   Proof. Sirve el mismo ejemplo que arriba, por que $A = \overline{A}$ y $B = \overline{B}$ □

5. $d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$

   Proof. $d(A,B) \leq d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b) \quad \forall (a \in A \quad b \in B \quad c \in C)$

   $d(A,B) \leq d(a,c) + d(c,b) \quad \forall (a \in A \quad b \in B \quad c \in C)$

   Entonces $d(A,B) \leq \inf\{d(a,c) + d(c,b) : a \in A \quad b \in B\}$

   Que es igual a $\inf\{d(a,c) : a \in A \quad c \in C\} + \inf\{d(c,b) : c \in C \quad b \in B\}$

   o lo mismo $d(A,C) + d(C,B)$. Luego $d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$ □