Ej 1.3) Sean e y e' dos elementos neutros de un grupo G. Luego sea $x \in G$

Sabemos $xe = ex = x = e'x = xe'$ por lo que $ex = e'x$

Sabiendo que existe inverso tenemos $exx^{-1} = e'xx^{-1}$

Y suponiendo que $xx^{-1} = e$ luego $ee = e'e$

iFnalmente considerando que $e, e' \in G$ y que un elemento de $g \in G$ operado con un elemento neutro da el mismo elemento g tenemos $e = e'$

Ej 1.8) Sale por inducción primero probas $a^{n+1} = a^n a^1$ y despues salen los otros dos

Ej 1.9)

Veamos que L_g es biyectiva.

Inyectividad: Sean $x, x' \in G$ tal que $gx = f(x) = f(x') = gx'$

Luego como $g \in G$ existe elemento inverso y elemento neutro

Luego $g^{-1}gx = g^{-1}gx' \Rightarrow ex = ex'$ entonces $x = x'$

Suryectividad: Sea $r \in G$ ahora queremos ver si $r = gx$ con $g \in G$ tiene solución.

Por ejericio 1.4) sabemos que tiene y que es única además $g^{-1}r = x$ y como $g^{-1} \in G$ y $g \in G$ y la operación de G es cerrada luego $x \in G$

Luego r tiene pre imagen $\forall r \in G$

Ambos procesos son se usan de forma análoga para probar la otra biyección

Ej 1.23)

- Sabemos que $e \in Z(G)$ por que $ex = x = xe$ luego $ex = xe \quad \forall x \in G$
- Sea $r \in Z(G)$ sabemos que $rh = hr \quad \forall h \in G$

  Luego como $r \in G$ tiene inverso, usémoslo para multiplicar ambos lados varias veces con el inverso r^{-1}

  $r^{-1}rh = r^{-1}hr \Rightarrow r^{-1}rhr^{-1} = r^{-1}hrr^{-1} \Rightarrow hr^{-1} = r^{-1}h \quad \forall h \in G$

  Finalmente $r^{-1} \in Z(G)$
- Sea $r \in Z(G) \quad r_1 \in Z(G)$ entonces tenemos $rh = hr$ y $r_1h = hr_1 \quad \forall h \in G$

  Luego multiplicando convenientemente sabiendo que existe inverso

  $h = r^{-1}hr$ y tambié $r_1hr_1^{-1} = h$ por lo tanto $r^{-1}hr = r_1hr_1^{-1} \quad \forall h \in G$

  Devuelta multiplicando $hr = rr_1hr_1^{-1} \Rightarrow hrr_1 = rr_1h \quad \forall h \in G$

  Luego $rr_1 \in Z(G)$

Ej 1.24)

- Sabemos que $e \in C_G(g) \quad \forall g \in G$ por que $ge = eg$
- Sea $r \in C_G(g)$ entonces $gr = rg$

  Luego como $r \in G$ tiene inverso

  Por lo tanto $g = rgr^{-1} \Rightarrow r^{-1}g = gr^{-1} \Rightarrow gr^{-1} = r^{-1}g$

  Entonces $r^{-1} \in C_G(g)$

- Sean $r, r_1 \in C_G(g)$ luego $gr = rg$ y tambien $gr_1 = r_1 g$ ahora multiplicando estratégicamente por inversos llegamos a $r^{-1}gr = g$ y por otro lado $g = r_1 g r_1^{-1}$

  Entonces tenemos $r^{-1}gr = r_1 g r_1^{-1} \Rightarrow gr = rr_1 g r_1^{-1} \Rightarrow grr_1 = rr_1 g$

  Luego $rr_1 \in C_G(g)$