UBA - exactas
Departamento de Matemática

Cálculo Avanzado - Separabilidad y completitud 4

Primer cuatrimestre de 2020

Daniel Carando

Dto. de Matemática - FCEN - UBA

En esta clase veremos que todo espacio métrico se puede *completar*.

Definición

Un espacio métrico (E, d) se dice completo si toda sucesión de Cauchy es convergente a un punto $x \in E$.

Definición

Un espacio métrico (E, d) se dice completo si toda sucesión de Cauchy es convergente a un punto $x \in E$.

El siguiente resultado es un ejercicio de la práctica.

Definición

Un espacio métrico (E, d) se dice completo si toda sucesión de Cauchy es convergente a un punto $x \in E$.

El siguiente resultado es un ejercicio de la práctica.

Proposición (Ejercicio 19, guía 4)

Sean E, E' espacios métricos, E' completo, y $D \subset E$ un subconjunto denso. Si $f : D \to E'$ es uniformemente continua, entonces existe una única $F : E \to E'$ tal que $F|_D = f$.

$\Rightarrow$ (UNIF) CONT

IDEA: queremos definir $F(x)$ p/ $x \in E$

$x \in E = \overline{D}$, $\exists (x_n)_n \subset D$ / $x_n \to x$.

- ver que $(f(x_n))_n$ es de Cauchy en E' $\Rightarrow$ $\therefore \exists \lim_{n \to +\infty} f(x_n)$
- $F(x) = \lim_{n \to +\infty} f(x_n) \to$ buena def. de F, F cumple todo.

Completación de un espacio métrico

Idea:

Completación de un espacio métrico

Idea:

- Si $E = \mathbb{Q}$, su *completación* podría (o debería) ser $\mathbb{R}$.

Completación de un espacio métrico

Idea:

- Si $E = \mathbb{Q}$, su *completación* podría (o debería) ser $\mathbb{R}$.
- Si $E = (0, 1)$, su completación sería $[0, 1]$
  (aunque [-1,2] o $\mathbb{R}$ también sean completo).

Completación de un espacio métrico

Idea:

- Si $E = \mathbb{Q}$, su *completación* podría (o debería) ser $\mathbb{R}$.
- Si $E = (0, 1)$, su completación sería $[0, 1]$
  (aunque [-1,2] o $\mathbb{R}$ también sean completo).
- Si $E \subset M$ con M completo, la completación de E ¿sería M?

Completación de un espacio métrico

Idea:

- Si $E = \mathbb{Q}$, su *completación* podría (o debería) ser $\mathbb{R}$.
- Si $E = (0, 1)$, su completación sería $[0, 1]$ (aunque [-1,2] o $\mathbb{R}$ también sean completo).
- Si $E \subset M$ con M completo, la completación de E ¿sería M? No necesariamente: mejor tomar $\overline{E}$, que es completo (es cerrado dentro de un completo).

Completación de un espacio métrico

Idea:

- Si $E = \mathbb{Q}$, su *completación* podría (o debería) ser $\mathbb{R}$.
- Si $E = (0, 1)$, su completación sería $[0, 1]$ (aunque [-1,2] o $\mathbb{R}$ también sean completo).
- Si $E \subset M$ con M completo, la completación de E ¿sería M?
  No necesariamente: mejor tomar $\overline{E}$, que es completo (es cerrado dentro de un completo).
  Coincide con M cuando E es denso en M.

Completación de un espacio métrico

Idea:

- Si $E = \mathbb{Q}$, su *completación* podría (o debería) ser $\mathbb{R}$.
- Si $E = (0, 1)$, su completación sería $[0, 1]$ (aunque [-1,2] o $\mathbb{R}$ también sean completo).
- Si $E \subset M$ con M completo, la completación de E ¿sería M? No necesariamente: mejor tomar $\overline{E}$, que es completo (es cerrado dentro de un completo). Coincide con M cuando E es denso en M.

Definición

Sean (E, d), (E', d') espacios métricos. Una función $T : E \to E'$ se dice *inmersión isométrica* o *función isométrica* si $d'(T(x), T(y)) = d(x, y)$ para todo $x, y \in E$.

T es INYECTIVA, NO NECES. SURYECTIVA.

Definición

Sea (E,d) un espacio métrico. Decimos que el espacio métrico $(\widehat{E},\rho)$ es una completación de E si existe una inmersión isométrica $T : E \to \widehat{E}$ tal que $\underline{T(E) \text{ es denso en } \widehat{E}}$.

$E \longrightarrow \hat{E}$

$E \rightsquigarrow \underline{T(E)} \subset \hat{E}$ $\qquad \overline{T(E)} = \hat{E}$

$i : (0,1) \longrightarrow [0,1]$ $\quad$ i inclusión.

$\overline{(0,1)} = [0,1]$.

$i : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$ ✓

La completación es el PAR $((\hat{E},\rho), T)$.

Definición

Sea (E,d) un espacio métrico. Decimos que el espacio métrico $(\widehat{E},\rho)$ es una completación de E si existe una inmersión isométrica $T : E \to \widehat{E}$ tal que $\underline{T(E)}$ es denso en $\underline{\widehat{E}}$.

Teorema

Todo espacio métrico E tiene una completación (puede ser completado). La completación es única salvo isometrías.

EJERCICIO.

$((\hat{E},\rho),T)$, $((\hat{E}_2,\rho_2),T_2)$ COMPLETACIONES DE E.

$\Rightarrow \exists \; F : \hat{E} \to \hat{E}_2$ ISOMETRÍA BIYECTIVA

$$\boxed{F \circ T = T_2}$$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "T_2"] \arrow[dr, "T"'] & \hat{E}_2 \\ & \hat{E} \arrow[u, "F"'] \end{tikzcd}$$

USAR EL EJERCICIO (extender de un denso).

Teorema

Todo espacio métrico E tiene una completación (puede ser completado). La completación es única salvo isometrías.

Teorema

Todo espacio métrico E tiene una completación (puede ser completado). La completación es única salvo isometrías.

Idea de la demostración

$E \hookrightarrow \{$ límites de sucesiones convergentes en $E \}$.

$$\underbrace{E}_{} \longrightarrow \{(x_n)_n : (x_n)_n \subset E \text{ convergente}\}$$

$$¿\; x \xmapsto{\text{INY}} (x, x, x, x, \ldots)$$

$$\lim_{n\to+\infty} x_n \xleftarrow[\text{SURY}]{} \underbrace{(x_n)_n}_{}$$

Idea de la demostración

$X = \{ (x_n)_n \subset E \text{ conv.} \}.$

$\sim \qquad \underbrace{(x_n)_n \sim (y_n)_n}_{} \iff \lim_n x_n = \lim_n y_n$

$\Updownarrow \to$ todas son conv.

$\lim_{n\to+\infty} d(x_n, y_n) = 0.$

$X/\sim \; = \{ [(x_n)_n] : (x_n)_n \text{ conv.} \}.$

$\boxed{T : \underline{E} \longrightarrow X/\sim}$

$x \longmapsto [(x, x, x, \dots)]$

BIYECTIVA

$\rho((x_n), (y_n)) = \lim_n d(x_n, y_n)$ EJ 22 GUÍA 2

Teorema

Todo espacio métrico E tiene una completación (puede ser completado). La completación es única salvo isometrías.

Teorema

Todo espacio métrico E tiene una completación (puede ser completado). La completación es única salvo isometrías.

EJERCICIO

Demostración (CANTOR)

$M = \{ (x_n)_n \subset E \; / \; (x_n)_n$ es de Cauchy $\}$

definimos $\sim$: $(x_n)_n \sim (y_n)_n \iff \lim_{n \to +\infty} d(x_n, y_n) = 0$

$\exists$ lim x ej. 22 (ii) guía 2.

$\sim$ es rel de equivalencia (EJERCICIO)

$\hat{E} = \{$ clases de equivalencia de M según $\sim \} = \{ [(x_n)_n] : (x_n)_n \subset E$ de Cauchy $\}$

$z \in \hat{E}$, $z = [(x_n)]$ p/ alguna $(x_n)_n \subset E$ de Cauchy;

$w \in \hat{E}$, $w = [(y_n)]$ p/ alguna $(y_n)_n \subset E$ '' '' '' ''

$$\boxed{\rho(z,w) := \lim_{n\to+\infty} d(x_n, y_n)}$$

[$\exists$ por ej. 22 (ii) guía 2]

EJERCICIO 2) ρ es distancia.

EJ: 1) ρ está bien def $z = [(x_n)] = [(x_n')]$

$w = [(y_n)] = [(y_n')]$

VER: $\underbrace{\lim d(x_n, y_n) = \lim d(x_n', y_n')}$

$$\boxed{\begin{aligned} T : E &\longrightarrow \hat{E} \\ x &\longmapsto [(x, x, x, \ldots)] = [(x_n)_n] \text{ con } x_n = x \ \forall n. \end{aligned}}$$

EJERCICIO T inmersión isométrica.

FALTA: $\overline{T(E)} = \hat{E}$ y $\hat{E}$ COMPLETO

$\overline{T(E)} = \hat{E}$: $z \in \hat{E}$, $z = [(x_n)_n]$ $(x_n)_n$ de Cauchy.

p/c/ m, $T(x_m) = [(\underline{x_m}, \underline{x_m}, \underline{x_m}, x_m, \dots)]$

$z = [(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots)]$

veamos que $\boxed{T(x_m) \xrightarrow[m \to +\infty]{} z}$. ($\text{q}$ $\therefore$ $z \in \overline{T(E)}$).

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, n_0$ / $d(x_n, x_m) < \varepsilon/2$ $\forall\, n, m \geq n_0$

Si $m \geq n_0$:

$$\rho(T(x_m), z) = \lim_{n \to +\infty} \underbrace{d(x_m, x_n)}_{\substack{< \varepsilon/2 \\ \forall\, n \geq n_0}} \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$$

$\hookrightarrow (T(x_m))_n = \overline{x_m}$

$\therefore T(x_m) \to z \implies z \in \overline{T(E)}$

$\hat{E}$ es completo: $(z^N)_N$ suc. de Cauchy en $\hat{E}$

Como $\overline{T(E)} = \hat{E}$, p/c/N, $\exists\ x_N \in E /\ \rho(T(x_N), z^N) < \frac{1}{N}$ $\quad (B(z^N, 1/N) \cap T(E) \neq \phi)$

VEAMOS: (a) $(x_n)_n$ es de Cauchy en E

(b) $z^N \to [(x_n)_n] \in \hat{E}$ $\quad \therefore\ \hat{E}$ es COMPLETO.

(a) $d(x_n, x_m) = \rho(Tx_n, Tx_m) \leq \underbrace{\rho(Tx_n, z^n)}_{<1/n<\varepsilon/3 \text{ si } n>3/\varepsilon} + \underbrace{\rho(z^n, z^m)}_{<\varepsilon/3 \text{ si } n,m\geq n_1} +$
$+ \underbrace{\rho(z^m, Tx_m)}_{1/m<\varepsilon/3 \text{ si } m>3/\varepsilon} < \varepsilon \quad \forall\, n, m \geq n_0$

$n_0 > \max(n_1, 3/\varepsilon)$

$\therefore\ (x_n)_n$ es de Cauchy.

(b) $z^N \to [(x_n)]$: $\quad \rho(z^N, [(x_n)]) \leq$

$\leq \underbrace{\rho(z^N, T(x_N))}_{<1/N} + \underbrace{\rho(T(x_N), [(x_n)])}_{\xrightarrow[N\to+\infty]{} 0} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$

COMO ANTES