Cálculo Avanzado

Primer cuatrimestre de 2020

Cardinalidad 3

Advertencia: estas son notas extraídas de una clase virtual. Algunas justificaciones pueden aparecer incompletas en el texto porque parte de la explicación se hizo oralmente en el video.

Proposición

Sea X numerable, $Y \subset X$. Entonces, Y es finito o numerable (o sea, Y es contable).

DEM: supongamos que Y NO es finito.

X num. $\to$ $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ x_n distintos

$n_1 = \min \{n \in \mathbb{N} \,/\, x_n \in Y\}$

$n_2 = \min \{n > n_1 \,/\, x_n \in Y\}$

$\vdots$

$\to$ $n_k = \min \{n > n_{k-1} \,/\, x_n \in Y\}$. $\leftarrow \exists$ (Y INF.)

PNQ $Y = \{x_{n_k} \,/\, k \in \mathbb{N}\}$ (n.e. de elem distintos $\to$ Y NUM)

$\supseteq$) ✓ $\subseteq$) $y \in Y$, $Y \subset X$, $y = x_m$ p/algún m

sea k / $n_k \leq m < n_{k+1} = \min \{n > n_k \,/\, x_n \in Y\}$.

$m = n_k \Rightarrow y = x_m = x_{n_k}$]

Proposición

Sea X numerable, $Y \subset X$. Entonces, Y es finito o numerable (o sea, Y es contable).

Ejercicio

Sea X numerable.

- Si existe $f : Y \to X$ inyectiva, entonces Y es contable
- Si existe $f : X \to Y$ suryectiva, entonces Y es contable (probar esto sin usar el axioma de elección).

$A \to B$ $\Longleftrightarrow$ $B \to A$

SURY INY

Proposición

Si X es infinito, existe $Y \subset X$, Y numerable, tal que $X \sim X \setminus Y$.

DEM: $\exists\, A \subset X$ numerable, $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

$A_1 = \{a_{2n-1} : n \in \mathbb{N}\}$ $\quad A_2 = \{a_{2n} : n \in \mathbb{N}\}$.

$a_n \neq a_m \quad (n \neq m)$

$f : A \to A_2$ biy

$a_n \mapsto a_{2n}$

$Y = A_1$

$h : X \to X \setminus Y$

$$h(x) = \begin{cases} x & x \in X - A \\ f(x) & x \in A \end{cases}$$

$Y = A_1$ NUM

Proposición

Si X es infinito, existe $Y \subset X$, Y numerable, tal que $X \sim X \setminus Y$.

Observación

Si $X \sim Y$, $X' \sim Y'$ y $X \cap X' = \emptyset = Y \cap Y'$,
entonces,

$$X \cup X' \sim Y \cup Y'.$$

$f : X \to Y$ biy

$g : X' \to Y'$ biy

$h : X \cup X' \to Y \cup Y'$

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in X \\ g(x) & x \in X' \end{cases}$$

Proposición
Sea X infinito y X' numerable. Entonces, $X \cup X' \sim X$.

$X' \cap X = \emptyset$

$Y \subset X$ numerable / $X \setminus Y \sim X$

$$X \cup X' = [(X \setminus Y) \cup Y] \cup X' =$$
$$= (X \setminus Y) \cup (Y \cup X')$$
$$\sim X \setminus Y \cup Y$$
$$= X$$

$X \cap X' \neq \emptyset$ $\quad Y' = X' \setminus X \to$ contable.

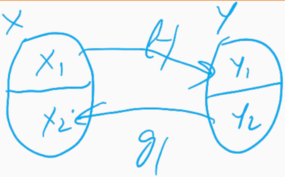
si es NUM $\quad$ si es FINITO EJERCICIO.

$\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ $\qquad \# \mathbb{I} \cup \mathbb{Q} = \# \mathbb{I}$

$\boxed{\# \mathbb{I} = \# \mathbb{R}}$

Teorema de Schröder-Bernstein o de Cantor-Bernstein o de Cantor–Schröder–Bernstein

Si existen $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ inyectivas, entonces existe $h : X \to Y$ biyectiva.



$f|_{X_1} : X_1 \to Y_1$ biy

$g|_{Y_2} : Y_2 \to X_2$ biy

$\Rightarrow h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in X_1 \\ g^{-1}(x) & x \in Y_2 \end{cases}$

h biyectiva

NECESITAMOS: $X_1 = X \setminus g(Y \setminus f(X_1))$

$X_2 = X \setminus X_1$ $\quad$ $Y_1 = f(X_1)$ $\quad$ $Y_2 = Y \setminus Y_2 = f(X_2)$

$\phi : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ $\qquad \phi(A) = X \setminus g(Y \setminus f(A))$

(queremos X_1 / $\phi(X_1) = X_1$

$\subseteq$

$A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B) \Rightarrow Y \setminus f(A) \supseteq Y \setminus f(B) \Rightarrow$

$g(Y \setminus f(A)) \supseteq g(Y \setminus f(B)) \Rightarrow X \setminus g(Y \setminus f(A)) \subset X \setminus g(Y - f(B))$

$\Rightarrow \phi(A) \subset \phi(B)$

$\to \mathcal{C} = \{ C \subset X \,/\, \phi(C) \subset C \}$ $\qquad X_1 = \bigcap_{C \in \mathcal{C}} C$

$X_1 \subset C \quad \forall C \in \mathcal{C} \Rightarrow \phi(X_1) \subset \phi(C) \subset C \quad \forall C \in \mathcal{C}.$

$\Rightarrow \phi(X_1) \subset X_1.$ $\qquad \phi(\phi(X_1)) \subset \phi(X_1) \Rightarrow \phi(X_1) \in \mathcal{C}$

$\Rightarrow X_1 \subset \phi(X_1) \Rightarrow X_1 = \phi(X_1)$.

EJ. VER QUE ANDA

Teorema

El conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable.

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$
$$n \mapsto (n, 1)$$

INY.

$$g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$(m, n) \mapsto 2^m 3^n$$

INY.

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$$

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad \checkmark$$

$$\mathbb{N}^2 \sim \mathbb{N}.$$

Teorema

El conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es numerable.

Corolario

Para $n \in \mathbb{N}$, sea X_n un conjunto numerable. Entonces, $X = \cup_n X_n$ es numerable.

X_n numerable $\to \exists\, f_n : \mathbb{N} \xrightarrow[\text{biy}]{} X_n$

$g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to X = \bigcup_n X_n \leftarrow$ CONT INF

$g(m,n) = f_n(m)$ SURY.

EN PRÁCTICA "UNIÓN CONTABLE DE CONTABLES ES CONTABLE"

Consideremos el conjunto $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ de sucesiones formadas sólo por ceros y unos,

DEF:
$$\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \ : \ a_n \in \{0,1\}\}.$$

$$A^3 = A\times A\times A = \{(a_1,a_2,a_3) : a_i \in A\}.$$

$$A^{\mathbb{N}} = \{\underbrace{(a_1,a_2,a_3,\dots)} : a_i \in A\}$$

$$\| $$

$$\{F : \mathbb{N} \to A\}.$$

Consideremos el conjunto $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ de sucesiones formadas sólo por ceros y unos,

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \ : \ a_n \in \{0,1\}\}.$$

Existe una biyección entre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ y $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

$$f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$$

$$f(A) = a = (a_n)_n \qquad a_n = \begin{cases} 1 & \underline{n \in A} \\ 0 & \underline{n \notin A} \end{cases}$$

EJERCICIO f BIYECTIVA

Consideremos el conjunto $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ de sucesiones formadas sólo por ceros y unos,

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \ : \ a_n \in \{0,1\}\}.$$

Existe una biyección entre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ y $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

En particular, tenemos que $\#\{0,1\}^{\mathbb{N}} > \aleph_0$.

Consideremos el subconjunto $\mathcal{A}_0 \subset \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ de sucesiones formadas por ceros y unos que, a partir de algún lugar, sólo tienen ceros:

$$\mathcal{A}_0 = \{(a_n)_{n\geq 1} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : \text{ existe } m \text{ tal que } a_n = 0 \text{ si } n \geq m\}.$$

Consideremos el subconjunto $\mathcal{A}_0 \subset \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ de sucesiones formadas por ceros y unos que, a partir de algún lugar, sólo tienen ceros:

$$\mathcal{A}_0 = \{(a_n)_{n\geq 1} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : \text{ existe } m \text{ tal que } a_n = 0 \text{ si } n \geq m\}.$$

Si llamamos $B_m = \{(a_n)_{n\geq 1} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : a_n = 0 \text{ si } n \geq m\}$,

Consideremos el subconjunto $\mathcal{A}_0 \subset \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ de sucesiones formadas por ceros y unos que, a partir de algún lugar, sólo tienen ceros:

$$\mathcal{A}_0 = \{(a_n)_{n\geq 1} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : \text{ existe } m \text{ tal que } a_n = 0 \text{ si } n \geq m\}.$$

Si llamamos $B_m = \{(a_n)_{n\geq 1} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : a_n = 0 \text{ si } n \geq m\}$, entonces

$$\mathcal{A}_0 = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m.$$

Consideremos el subconjunto $\mathcal{A}_0 \subset \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ de sucesiones formadas por ceros y unos que, a partir de algún lugar, sólo tienen ceros:

$$\mathcal{A}_0 = \{(a_n)_{n\geq 1} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : \text{ existe } m \text{ tal que } a_n = 0 \text{ si } n \geq m\}.$$

Si llamamos $B_m = \{(a_n)_{n\geq 1} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : a_n = 0 \text{ si } n \geq m\}$, entonces

$$\mathcal{A}_0 = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m.$$

Como cada B_m es finito, concluimos que $\mathcal{A}_0$ es numerable, por ser unión numerable de finitos.

$b \in B_m$,

$$\boxed{\# B_m = 2^{m-1}}$$

$b = (\_\ \_\ \_\ \_\ \_\ 0,\ 0\ 0\ 0\ 0$

2 2 2 2 2 m

Consideremos el subconjunto $\mathcal{A}_0 \subset \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ de sucesiones formadas por ceros y unos que, a partir de algún lugar, sólo tienen ceros:

$$\mathcal{A}_0 = \{(a_n)_{n\geq 1} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : \text{ existe } m \text{ tal que } a_n = 0 \text{ si } n \geq m\}.$$

Si llamamos $B_m = \{(a_n)_{n\geq 1} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : a_n = 0 \text{ si } n \geq m\}$, entonces

$$\mathcal{A}_0 = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m.$$

Como cada B_m es finito, concluimos que $\mathcal{A}_0$ es numerable, por ser unión numerable de finitos.

Otra forma:

$$f : \underline{\mathcal{A}_0} \to \underline{\mathbb{N}} \quad \text{INY}$$

$$\underline{a} \mapsto \prod_{n / a_n = 1} p_n$$

$p_1, p_2, p_3, p_4 \ldots$
primos

$$\mathcal{A}_0 = \{(a_n)_{n\geq 1} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : \text{ existe } m \text{ tal que } a_n = 0 \text{ si } n \geq m\}.$$

$$\mathcal{A}_0 = \{(a_n)_{n\geq 1} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \ : \ \text{existe } m \text{ tal que } a_n = 0 \text{ si } n \geq m\}.$$

Notemos que $\mathcal{A}_0$ es el conjunto de sucesiones que tienen *un número finito* de unos.

$$\mathcal{A}_0 = \{(a_n)_{n\geq 1} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \,:\, \text{existe } m \text{ tal que } a_n = 0 \text{ si } n \geq m\}.$$

Notemos que $\mathcal{A}_0$ es el conjunto de sucesiones que tienen *un número finito* de unos.

Entonces, si definimos

$$\mathcal{X} = \{(a_n)_{n\geq 1} \,:\, a_n \in \{0,1\}, \text{ y } \underline{a_n = 1 \text{ para infinitos valores de } n}\},$$

$$\mathcal{A}_0 = \{(a_n)_{n\geq 1} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} : \text{ existe } m \text{ tal que } a_n = 0 \text{ si } n \geq m\}.$$

Notemos que $\mathcal{A}_0$ es el conjunto de sucesiones que tienen *un número finito* de unos.

Entonces, si definimos

$$\mathcal{X} = \{(a_n)_{n\geq 1} : a_n \in \{0,1\}, \text{ y } a_n = 1 \text{ para infinitos valores de } n\},$$

tenemos que

$$\mathcal{X} = \{0,1\}^{\mathbb{N}} \setminus \mathcal{A}_0.$$

$$\mathcal{A}_0 = \{(a_n)_{n\geq 1} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \ : \ \text{existe } m \text{ tal que } a_n = 0 \text{ si } n \geq m\}.$$

Notemos que $\mathcal{A}_0$ es el conjunto de sucesiones que tienen *un número finito* de unos.

Entonces, si definimos

$$\mathcal{X} = \{(a_n)_{n\geq 1} \ : \ a_n \in \{0,1\}, \ \text{ y } \ a_n = 1 \ \text{ para infinitos valores de } n\},$$

tenemos que

$$\mathcal{X} = \{0,1\}^{\mathbb{N}} \setminus \mathcal{A}_0.$$

$$\overbrace{\mathcal{X} \cup \mathcal{A}_0}^{\mathcal{X}} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$$

Por los resultados anteriores,

$$\#\mathcal{X} = \#\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \#\mathcal{P}(\mathbb{N}).$$

Por fin vamos a demostrar que $\mathbb{R}$ no es numerable, algo que probó originalmente Cantor.

Ejemplo

El cardinal de los reales es distinto del cardinal de los naturales. Más precisamente, $\#\mathbb{R} = \#\mathcal{P}(\mathbb{N}) > \#\mathbb{N}$.

$\# \mathcal{P}(\mathbb{N}) = \# \mathcal{X}$

$f : \mathcal{X} \to [0,1]$

$f(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$ biyectiva

$(x \in [0,1) \Rightarrow \exists !$ desarrollo en base 2 con ∞ unos$)$.

$\# [0,1] \sim \# \mathbb{R}$.

$\mathbb{R} \to (-1,1)$

$x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$

$(-1,1) \sim (a,b)$

Operaciones con cardinales.

Dados dos cardinales α, β, sean X e Y *disjuntos* tales que $\alpha = \#X$, $\beta = \#Y$.

Operaciones con cardinales.

Dados dos cardinales α, β, sean X e Y *disjuntos* tales que $\alpha = \#X$, $\beta = \#Y$.

Podemos definir las siguientes operaciones:

Suma: $\alpha + \beta = \#(X \cup Y)$

Operaciones con cardinales.

Dados dos cardinales α, β, sean X e Y *disjuntos* tales que $\alpha = \#X$, $\beta = \#Y$.

Podemos definir las siguientes operaciones:

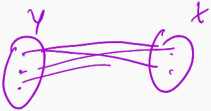
Suma:	$\alpha + \beta = \#(X \cup Y)$
Producto	$\alpha \cdot \beta = \#(X \times Y)$

Dados dos cardinales α, β, sean X e Y *disjuntos* tales que $\alpha = \#X$, $\beta = \#Y$.

Podemos definir las siguientes operaciones:

Suma:	$\alpha + \beta = \#(X \cup Y)$
Producto	$\alpha \cdot \beta = \#(X \times Y)$
Potencia	$\alpha^{\beta} = \#\{F : Y \to X\} = \#(X^{Y})$

$\alpha + \beta$ ✓



2^3

$X \sim X'$ $\quad Y \sim Y'$ $\quad$ disjuntos

$\Rightarrow X \cup Y \sim X' \cup Y'$ ✓

Operaciones con cardinales.

Dados dos cardinales α, β, sean X e Y *disjuntos* tales que $\alpha = \#X$, $\beta = \#Y$.

Podemos definir las siguientes operaciones:

Suma:	$\alpha + \beta = \#(X \cup Y)$
Producto	$\alpha \cdot \beta = \#(X \times Y)$
Potencia	$\alpha^\beta = \#\{F : Y \to X\} = \#(X^Y)$

$\{F' : Y' \to X'\}$

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "F"] \arrow[d, phantom, "\wr"] & X \arrow[d, phantom, "\wr"] \\ Y' \arrow[r, "F'"'] & X' \end{tikzcd}$$

Ejemplo

Recordemos que $\aleph_0 = \#\mathbb{N}$ y $c = \#\mathbb{R}$.

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0, \qquad c + c = c, \qquad c + \aleph_0 = c.$$

$\{\text{pares}\} \uplus \{\text{impares}\} = \mathbb{N}$

$[0,1) \cup [1,2) = [0,2)$

$\wr \; \mathbb{R} \qquad \wr \; \mathbb{R} \qquad \wr \; \mathbb{R}$

$c \leq c + \aleph_0 \leq c + c$

$\shortparallel$

c

$\boxed{\alpha \text{ INFINITO: } \quad \alpha + \aleph_0 = \alpha.}$

Vimos que $\#R = \#\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

Vimos que $\#R = \#\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

Esto se puede reescribir como $c = 2^{\aleph_0}$

$\#\{0,1\} = 2 \quad \#\mathbb{N} = \aleph_0$

Vimos que $\#R = \#\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

Esto se puede reescribir como $c = 2^{\aleph_0}$.

Ejemplo

Veamos que

$$\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0, \qquad c \cdot c = c, \qquad c \cdot \aleph_0 = c.$$

$\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$

EJ. PR

VER

$$c \cdot c \overset{\text{VER}}{=} c^2 = (2^{x_0})^2 \overset{?}{=} 2^{x_0 \cdot 2} =$$

$$= 2^{x_0 + x_0} = 2^{x_0} = c$$

VER

Observación

Vimos que

$$c \cdot c = c.$$

Observación

Vimos que

$$c \cdot c = c.$$

Esto dice, en particuar, que

$$\mathbb{R} \sim \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2.$$

Observación

Vimos que

$$c \cdot c = c.$$

Esto dice, en particular, que

$$\mathbb{R} \sim \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2.$$

De la misma manera, podemos probar que

$$\mathbb{R} \sim \mathbb{R}^N$$

para todo $N \in \mathbb{N}$.

Observación

Vimos que

$$c \cdot c = c.$$

Esto dice, en particuar, que

$$\mathbb{R} \sim \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2.$$

De la misma manera, podemos probar que

$$\mathbb{R} \sim \mathbb{R}^N$$

para todo $N \in \mathbb{N}$.

Como cualquier intervalo (no vacío) tiene cardinal c, concluimos que para cualquier $\varepsilon > 0$ y cualquier $N \in \mathbb{N}$, tenemos

$$(0, \varepsilon) \sim \mathbb{R}^N.$$