Observación (Axioma de elección (enunciado formal))**.** Sea A familia de conjuntos no vacíos,

$$A = \{A_j : i \in \mathbb{I}\}$$

Entonces, podemos elegir un elemento de cada A_j

Observación (Axioma de eleccion como una función)**.** Para todo conjunto $X = \bigcup A_j$, existe una función

$$e : \mathcal{P}(X) \setminus \emptyset \to X$$

tal que $e(A) \in A$ para todo $A \in \mathcal{P}(X) \setminus \emptyset$

Cuestiones importantes. El axioma de elección es intuitivamente cierto. Pero lleva a ciertas paradojas

El axioma de elección es equivalente al Principio de Buena ordenación (Todo conjunto puede ser bien ordenado), pero cuando tratamos de encontrar buen orden por ejemplo en el conjunto de los numeros reales , parecería ser imposible

El axioma de elección es tambien equivalente al Lema de Zorn

Definición 0.1.

1. Una relación binaria $\leq$ en un conjunto X es de *orden total* si para todo $x, y \in X$ se cumple $x \leq y$ ó $y \leq x$

   Ejemplo de orden que no es total $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$

2. Un conjunto X con un *orden total* $\leq$ es bien ordenado si todo subconjunto $A \subset X$ no vacío tiene mínimo: Existe $a_0 \in A$ tal que $a_0 \leq a$ para todo $a \in A$

Definición 0.2 (Buena ordenacion de Zermelo)**.** En todo conjunto se puede definir un buen orden.(Puede ser bien ordenado)

Definición 0.3. Sea X un conjunto con un *orden parcial* $\leq$. Una cadena en X es un subconjunto *totalmente ordenado* de X Esto significa que $A \subset X$ es una cadena si dados $a_1, a_2 \in A$ se tiene que $a_1 \leq a_2$ o $a_2 \leq a_1$

Definición 0.4. Sea X un conjunto con un *orden parcial* $\leq$. Un elemento $x_0 \in X$ es maximal si $x_0 \leq x$ implica $x = x_0$

Algo es maximal si le gana a todo con lo que es comparable

Ejemplo sea $X = \{1, 2, 3 \ldots 100\}$ con el orden $x \leq y$ si x divide a y

Entonces todo $x > 50$ es maximal , dado que x tiene divisores , pero no divide a nadie mas que el mismo en X

Otro ejemplo interesante: Sea X el conjunto de conjuntos linealmente independientes de $\mathbb{R}^3$ con el orden dado por la inclusión. Luego las bases son los únicos maximales , por que cualquier conjunto de generados por menos generadores que los de la base , va a estar contenido el conjunto generado por la base

Definición 0.5 (Lema de Zorn)**.** Si toda cadena de un conjunto parcialmente ordenado X admite una cota superior, entonces X tiene elementos maximales

Definición 0.6 (Lema de Zorn 2)**.** Si toda cadena de un conjunto parcialmente ordenado X admite una cota superiór, entonces todo elemento precede a un elemento maximal.

Esto ademas nos está diciendo no solo que hay elementos maximales, si no que dado cualquier $x \in X$ existe $m \in X$ maximal tal que $x \leq m$

A lo largo de la carrera usamos el axioma de elección (o alguna variante)a veces sin saberlo, por ejemplo en:

- Union den umerables conjuntos numerables es numerable
- Dados dos conjuntos X e Y o bien $\#X \leq \#Y$ o bien $\#Y \leq \#X$. De esto y Cantor-Bernstein se deduce propiedad de tricotomía para los cardinales.
- Todo espacio vectorial no nulo tiene base. Es mas , todo conjunto l.i se extiende a una base y de todo conjunto de generadores se puede extraer una base. Hay resultados similares para otras estructuras algebráicas tambien.

Por último , el axioma de elección a pesar de necesario para muchas demostraciones, presenta ciertas paradoajas como por ejemplo la paradoja de Tarski-Banach