

PRÁCTICA 7: ESPACIOS NORMADOS

Ejercicio 1. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado (sobre $k = \mathbb{R}$ ó \mathbb{C}). Probar que se verifican:

- i) Las operaciones $+: E \times E \rightarrow E$ y $\times: k \times E \rightarrow E$ son continuas.
- ii) $\overline{B(x, r)} = \overline{B}(x, r)$ (es decir, la clausura de la bola abierta es la bola cerrada).
- iii) $\text{diam}(B(x, r)) = 2r$.

Ejercicio 2. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado y sea $C \subset E$. Decimos que C es *convexo* si $\forall x, y \in C$ y $\forall t \in [0, 1]$ se tiene que $tx + (1 - t)y \in C$.

- i) Probar que $B_r(x)$ es convexo.
- ii) Probar que si $(C_i)_{i \in I}$ son convexos, entonces $\bigcap_{i \in I} C_i$ lo es.
- iii) Probar que si C es convexo, entonces C° lo es.
- iv) Probar que si C es convexo, entonces \overline{C} lo es.

Ejercicio 3. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $S \subset E$ un subespacio (vectorial). Probar que:

- i) \overline{S} también es un subespacio.
- ii) Si $S \neq E$, entonces $S^\circ = \emptyset$.
- iii) Si $\dim(S) < \infty$, entonces S es cerrado.
- iv) Si S es un hiperplano (o sea: $\exists x \neq 0$ tal que $S \oplus \langle x \rangle = E$), entonces S es o bien denso o bien cerrado en E .

Ejercicio 4. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $(x_n) \subset E$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge.

Ejercicio 5. Para cada uno de los siguientes ejemplos de subespacios decidir si son cerrados, si son densos y si son hiperplanos.

- i) $c = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n\} \subseteq \ell^\infty$.
- ii) $c_0 = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n \rightarrow 0\} \subseteq c$.
- iii) $\{x \in \ell^1 : \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0\} \subseteq \ell^1$.
- iv) $\{x \in \ell^2 : \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0\} \subseteq \ell^2$.
- v) $\mathbb{R}[X] \subseteq C[0, 1]$.
- vi) $C^1[a, b] \subseteq C[a, b]$.

Ejercicio 6. Sean E y F espacios normados. Sea $T : E \rightarrow F$ un operador lineal. Probar que son equivalentes:

- i) T es continuo en 0;
- ii) existe $x_0 \in E$ tal que T es continuo en x_0 ;
- iii) T es continuo;
- iv) T es uniformemente continuo;
- v) $\exists M > 0$ tal que $\forall x \in E : \|Tx\| \leq M\|x\|$ (T es acotada);
- vi) $\forall A \subset E$ acotado, $T(A)$ es acotado.

Ejercicio 7. Sean $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$ espacios normados. Sea $L(E, F)$ el conjunto de operadores $T : E \rightarrow F$ lineales y continuos. Para para cada $T \in L(E, F)$ definimos

$$\|T\| = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|T(x)\|_F.$$

Probar que:

- i) $(L(E, F), \|\cdot\|)$ es un espacio normado.
- ii) Si F es de Banach entonces $L(E, F)$ también lo es.

Ejercicio 8. Sean E y F espacios normados y sea $T : E \rightarrow F$ un operador lineal y continuo. Verificar las siguientes fórmulas:

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \inf\{M : \|Tx\| \leq M\|x\|\}.$$

Ejercicio 9. Sea $k : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y sea $K : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ dada por

$$Kf(x) = \int_0^1 k(x, y)f(y) dy.$$

Probar que K es lineal y continua. Acotar su norma.

Ejercicio 10. En $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} = \{(a_n)_{n \geq 1} / \exists n_0, a_n = 0 \forall n \geq n_0\}$ ponemos la norma infinito. Probar que la función $f : \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f((a_n)_{n \geq 1}) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n,$$

es lineal pero no continua.

Ejercicio 11.

i) Sea $\phi \in C[0, 1]$ y sea $T_\phi : C[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$T_\phi f = \int_0^1 f(x)\phi(x)dx.$$

Probar que T_ϕ es un funcional lineal continuo y que $\|T_\phi\| = \int_0^1 |\phi(x)|dx$.

ii) Sea $T: c \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $T(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Probar que T es lineal y continuo y hallar $\|T\|$.

iii) Sea $1 \leq p \leq \infty$, $p' = \frac{p}{p-1}$ el conjugado de p y sea $b \in \ell^{p'}$. Definimos $T_b : \ell^p \rightarrow \mathbb{R}$ según

$$T_b(a) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n a_n.$$

Probar que T_b es lineal, continuo y hallar $\|T_b\|$.

Ejercicio 12. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $H \subset E$ un subespacio. Probar que H es un hiperplano si y sólo existe $\gamma : E \rightarrow \mathbb{R} (o \mathbb{C})$ lineal, $\gamma \neq 0$ tal que $H = Nu(\gamma)$. Probar que H es cerrado si y sólo si γ es continua.

Ejercicio 13. Sean E un espacio de Banach y S, T subespacios cerrados, con $\dim T < \infty$. Probar que $S + T$ es cerrado.

Ejercicio 14. (Lema de Riesz) Sean E un espacio normado, $S \subset E$ un subespacio vectorial cerrado propio, y $0 < \alpha < 1$. Probar que existe $x_\alpha \in E - S$ tal que $\|x_\alpha\| = 1$ y $\|s - x_\alpha\| > \alpha \forall s \in S$. *Sugerencia:* considerar $x \notin S$, $r = d(x, S)$ y $x_\alpha = \frac{(x-b)}{\|x-b\|}$ con $b \in S$ adecuado.

Ejercicio 15. Sean E un espacio normado de dimensión infinita. Probar que existe $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E$ tal que $\|\omega_n\| = 1$ y $d(\omega_n, \omega_m) > 1/2$, $n \neq m$. Deducir que $\overline{B(0, 1)}$ no es compacta. *Sugerencia:* aplicar el lema de Riesz a una sucesión creciente de subespacios de dimensión finita.

Ejercicio 16. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial de dimensión finita. Probar que toda norma en E es equivalente a $\|\cdot\|$. Deducir que $\overline{B}(x, r)$ es compacto cualquiera sean $x \in E$, $r > 0$.

Sugerencia: Sea $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base de E . Probar que la aplicación $\|\cdot\|_1 : \sum_{i=1}^n x_i v_i \in E \mapsto \sum_{i=1}^n |x_i| \in \mathbb{R}$ es una norma en E equivalente a $\|\cdot\|$.

Ejercicio 17. Sea E un espacio de Banach de dimensión infinita. Probar que no puede tener una base algebraica numerable.

Sugerencia: si la tuviera se escribiría como unión numerable de subespacios de dimensión finita. Usar el teorema de Baire.