LaTeX
Calculo Avanzado
Espacios Normados:
Javier Vera

1) Sea E un espacio normado

i. Las funciones:

$$+ : \mathbb{E} \times \mathbb{E} \mapsto \mathbb{E} \qquad \times : \mathbb{K} \times \mathbb{E} \mapsto \mathbb{E}$$

son continuas

Sean

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{E}\ /x_n \to x \qquad (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{E}\ /y_n \to y$

$\|(x_n + y_n) - (x + y)\| \leq \|x_n - x\| - \|y_n - y\| \to 0$ luego $(x_n + y_n) \to (x + y)$

$+(x_n, y_n) = x_n + y_n \to x + y = +(x, y)$

$\Rightarrow +(x_n, y_n) \to +(x, y)$

Sea $\lambda \in \mathbb{K} \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{E} \quad x_n \to x$

Entonces por ser sucesión $\lambda x_n \to \lambda x$

Luego $\times(\lambda, x_n) = \lambda x_n \to \lambda x = \times(\lambda, x)$

ii. $\overline{B_r(x)} = \overline{B}_r(x)$ (La clausura de una bola abierta de E es la bola cerrada correspondiente)

$\overline{B}(r, x)$ es cerrado y $B(r, x) \subseteq \overline{B}(r, x)$

y $\overline{B(r, x)}$ es el cerrado mas pequeño que contiene a $B(r, x)$

$\Rightarrow \overline{B(r, x)} \subseteq \overline{B}(r, x)$

Sea $y \in \overline{B}(r, x)$ Tomo $y_n = x + (1 - \frac{1}{n})(y - x) \Rightarrow y_n \to y$

$\|y_n - x\| = \|(1 - \frac{1}{n})(y - x)\| = |(1 - \frac{1}{n})|\|y - x\| \leq \|y - x\| < r$

$y_n \in B(x, r) \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow y \in \overline{B(r, x)}$

$\Rightarrow \overline{B}(r, x) = \overline{B(r, x)}$

iii. Si $\mathbb{E}$ tiene dimension positiva, entonces para todo $r < 0$ y todo $x \in \mathbb{E}$ es $diam(B_r(x)) = 2r$

Sean $z, y \in B(r, x) \quad \|z - x\| \leq r \quad \|x - y\| \leq r$

$\Rightarrow \|z - y\| \leq \|z - x\| + \|x - y\| \leq 2r$

Con la distancia dada por la norma sabemos $d(z, y) \leq 2r \quad \forall x, y \in B(r, x)$ por lo que $2r$ es cota superior de las distancias

Resta ver que es la menor de las cotas, supongamos que no lo es:

$\Rightarrow \exists \delta \in \mathbb{R}$ con $\delta \leq r \Rightarrow 2\delta \leq 2r \quad / \quad d(x, y) \leq 2\delta$

Considerando $\delta \leq l \leq r$ Sea $z \in \mathbb{E} \times \mathbb{E}/ \quad z = x + l\frac{x}{\|x\|}$ y $z' = x - l\frac{x}{\|x\|}$

Sin embargo $\|z - z'\| = 2r$ por lo que $d(z, z') > 2\delta$ abs!

Efectivamente 2r era cota superior y menor de las cotas superiores

$\Rightarrow sup(d(x, y)) = 2r \quad \forall x, y \in B(r, x)$

$\Rightarrow diam(B(r, x)) = 2r$

2) Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado y sea $C \subset E$ Decimos que $C$ es *convexo* si $\forall x, y \in C$ y $\forall t \in [0,1]$ se tiene que $tx + (1-t)y \in C$

i) Probar que $B(r,x)$ es convexo

- Sean $z, y \in B(r,x)$
- $\|tz + (1-t)y - x\| \leq \|tz - tx + tx + y - ty - x\| \leq t\|(z-x)\| + (1-t)\|(y-x)\| \leq tr + (1-t)r = r$
- $\|tz + (1-t)y - x\| = r$

$\Rightarrow tz + (1-t)y \in B(r,x) \quad \forall x, y \in B(r,x) \quad \forall t \in [0,1]$

ii) Probar que si $(C_i)_{i \in I}$ son convexos entonces $\bigcap_{i \in I} C_i$ lo es

Sean $z, y \in \bigcap_{i \in I} C_i$

$z, y \in C_i \quad \text{convexo} \quad \forall i \in I$

$tz + (1-t)y \in C_i \quad \forall i \in I \quad \forall t \in [0,1]$

$\Rightarrow tz + (1-t)y \in \bigcap_{i \in I} C_i \quad \forall z, y \in \bigcup_{i \in I} C_i \quad \forall t \in [0,1]$

iii) Probar que si $C$ es convexo entonces $C^o$ lo es

- Sean $x, y \in C^o \subseteq C \Rightarrow \exists B(r_1, x) \subseteq C \quad B(r_2, y) \subseteq C$
- Como C es convexo se que $tx + (1-t)y \in C$
- Ahora afirmo que ademas $tx + (1-t)y \in C^0$
- Sea $t = 0$ o $t = 1$ Esto es evidente
- Si no, tomo un $l \in tx + (1-t)y$ y considero $B(r_3, l)$ con $r_3 \leq \inf\{r_1, r_2\}$
- Ahora afirmo que $B(r_3, l) \subseteq C$
- Dado un $l' \in B(r_3, l)$ se que $v = l' - l$ y $v \in B(r_3, 0)$
- $v + x \subseteq B(r_3, 0) + x = B(r_3, x) \subseteq B(r_1, x)$ análogo con $y$
- Por lo tanto si tomo $x' = x + v \in B(r_1, x) \subseteq C$ e $y' = y + v \in B(r_2, y) \subseteq C$
  $\Rightarrow x', y' \in C$ además puedo afirmar que $l' \in tx' + (1-t)y'$ dado que esta recta es un desplazamiento dado por $v$ de la anteriór recta, como la anteriór tenía a $l$ esta va a tener a $l + v$ y sabemos $l + v = l'$
- Y sabemos que C es convexo por lo que $tx' + (1-t)y' \in C \Rightarrow l' \in C$
- Luego $B(r_3, l) \subseteq C$ entonces $l \in C^o$
- $tx + (1-t)y \in C^o \quad \forall x, y \in C^o \quad \forall t \in [0,1]$
  $\Rightarrow C^o$ es convexo

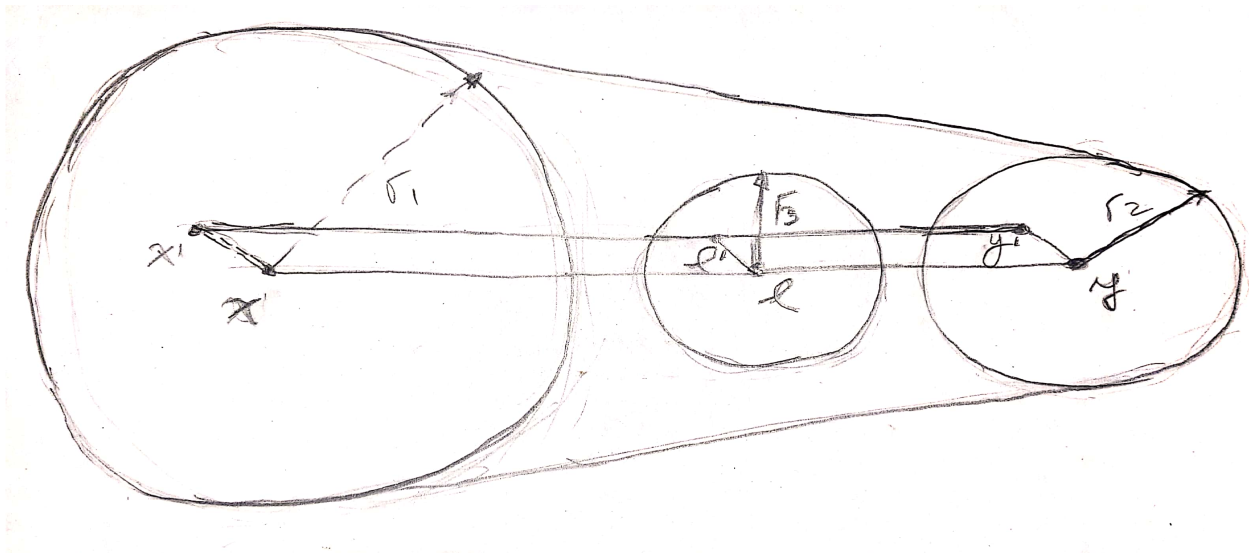


Figure 1: Ilustración

iv) Probar que si $C$ es convexo entonces $\overline{C}$ lo es

- Sean $x, y \in \overline{C}$ se que $\exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C$ tq $x_n \to x$ y $\exists (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C$ tq $y_n \to y$
- Luego se que $\|tx + (1-t)y - (tx_n + (1-t)y_n)\| = \|(x - x_n) + (1-t)(x - y_n)\| \leq t\|(x - x_n)\| + (1-t)\|(y - y_n)\| \leq t\epsilon + (1-t)\epsilon = \epsilon \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall t \in [0,1]$
- Ademas sabemos que $tx_n + (1-t)y_n \in C \quad \forall n \in \mathbb{N}$ por que $C$ es convexo
- Entonces $tx + (1-t)y \in \overline{C} \quad \forall x, y \in \overline{C} \quad \forall t \in [0,1]$
  $\Rightarrow \overline{C}$ es convexo

3) Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio normado y $S \subset E$ un subespacio (vectorial). Probar que:

i. $\overline{S}$ tambien lo és

- Sean $x, y \in \overline{S} \quad \exists (x_n)_n \in S, (y_n)_n \in S$ con $x_n \to x \quad y_n \to y$
- Dado que la suma y multiplicacion por escalares son continuas por ser $S$ espacio normado $x_n + y_n \to x + y$ y como $S$ subespacio vectorial $(x_n + y_n)_n \subseteq S$
  $\Rightarrow x + y \in \overline{S}$
- De la misma forma veo que $\lambda x \in \overline{S}$
  $\Rightarrow \overline{S}$ es subespacio

ii. $S \neq E$ entonces $S^{\circ} = \emptyset$

Supongo $S^{\circ} \neq \emptyset$ entonces $\exists x \in S^{\circ}$

Luego $\exists B(r, x) \subseteq S$

Considero el conjunto $R = \{y - x : y \in B(r, x)\}$ se que $R \subseteq S$ y se que $S = B(r, 0)$

Ahora sea $z \in E \setminus \{0\}$ Se que $\frac{r}{2}\frac{z}{\|z\|} \in B(r,0) \subseteq S$

Luego $z = \frac{2\|z\|}{r}.\frac{r}{2}\frac{z}{\|z\|}$ y como $\frac{2\|z\|}{r}$ es un escalar y $\frac{r}{2}\frac{z}{\|z\|} \in S$

Entonces $z \in S$ y sabemos que $0 \in S$ por que S es subespacio y $S \subseteq E$

$\Rightarrow S = E$

iii. Si $dim(S) \leq \infty$ entonces $S$ es cerrado

Supongamos $dim(S) = n$ y consideremos en $S$ la norma inducida por $E$

Considero el isomorfismo dado por tomar coordenadas $T : S \to R^n$ (que se que es continuo)

Ahora si definimos $\|x\|_{R^n} = \|T^{-1}(x)\|_{\mathbb{E}}$ entonces es fácil ver que T es en realidad una isometría

Luego sabemos que $R^n$ es completo para cualquier norma dado que todas sus normas son equivalentes

$T : S \to R^n$ es una isometria y ademas tiene inversa por ser un isomorfismo entonces es facil probar que su inversa es tambien una isometria.

Ahora sabemos que isometrías preservan sucesiones de Cauchy

Luego dada una sucesion de Cauchy $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S$ se que $T(a_n)$ tambien es de cauchy

Entonces $T(a_n)$ converge por estar en $R^n$ por lo que $S$ es completo

Otra forma es sabiendo que tener $T$ y $T^{-1}$ ambas isometrías implica que son uniformemente continuas,entonces tenemos un homeomorfismo uniforme , y este preserva completos.

Por último como $T$ es continua preimagen de convergente es convergente por lo que $T^{-1}(T(a_n))$ es convergente

$\Rightarrow S$ es un completo en $\mathbb{E}$ entonces es cerrado en $\mathbb{E}$

iv. Si $S$ es un hiperplano (osea: $\exists x \neq 0$ tal que $S \oplus < x >= E$) entonces $S$ es o bien denso o bien cerrado en $E$

- Supongo $S$ no es cerrado entonces $\exists x \in \overline{S} \setminus S$
- Luego como $S$ hiperplano $\mathbb{E} = S \oplus < x > \subseteq \overline{S} \subseteq \mathbb{E}$
- $\Rightarrow \mathbb{E} = \overline{S}$ por lo que $S$ es denso
- Ahora supongamos que $S$ es cerrado luego $S = \overline{S}$
- Luego como sabemos que $S \oplus < x >= \overline{S} \oplus < x >= E$ sabemos que $\exists x \in \mathbb{E} \setminus \overline{S}$
  $\Rightarrow S$ no es denso en $\mathbb{E}$

4) Sea $(\mathbb{E}, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{E}$. Si $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$

- Como $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|$ entonces dado $\epsilon > 0$

- $\exists n_0 \ / \ \sum_{n>n_0}^{\infty} \|x_n\| \leq \epsilon$
- Sea $S_n$ la sucesión de sumas parciales de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$
- Sea $m > n_0$

$$\|S_n - S_m\| = \|\sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{m} x_k\| = \|\sum_{m+1}^{n} x_k\| = \sum_{m+1}^{n} \|x_k\| \leq \epsilon$$

- Luego la sucesión de sumas parciales de la series es de Cauchy, como sabemos que $\mathbb{E}$ es de Banach (completo) y toda sucesión de Cauchy en un completo converge
- $S_n$ es de Cauchy y $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{E}$ entonces $S_n$ converge

  $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x_n$ converge

5) Para cada uno de los siguiente ejemplos decidir si son cerrados si son densos y si son hiperplanos:

i. $c = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : \exists \lim_{n\to+\infty} x_n\} \subseteq \ell_\infty$

   - Voy a ver que $c$ es cerrado.
   - Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c$ con $x_n \to x_0$
   - $x_n^r \to x_0^r$ y $\|x_n^r - x_m^r\| = \sup_{r\in\mathbb{N}} |x_n^r - x_m^r|$
   - Como $x_n \to x_0$ sabemos que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ con $\|x_n^r - x_0^r\| \leq \frac{\epsilon}{3} \quad \forall n > n_0$
   - Por otro lado como $x_n^r$ es convergente sabemos que es de cauchy
   - Luego sabemos $x_n^r$ es una sucesion de sucesiones de $c$ por ende cada una de estas sucesiones converge luego es de cauchy
   - Entonces fijado un n sabemos que $\exists N \in \mathbb{N} \ / \ \|x_n^r - x_n^p\| \leq \frac{\epsilon}{3} \quad \forall r, p > N$
   - Finalmente $\|x_0^r - x_0^p\| = \|x_0^r - x_n^r\| + \|x_n^r - x_n^p\| + \|x_n^p - x_0^p\| \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$
   - Luego $x_0^r$ es de cauchy y como $\mathbb{R}$ es completo converge

ii. $c_0 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \to 0\} \subseteq c$

   Usando el mismo argumento que en el i) vemos que es cerrado

   Consideremos $L : c \to \mathbb{R}$ tal que $L((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \lim_{n\to\infty} a_n$

   Esta es una función lineal, continua y no nula y por ende $c_0 = \ker(L)$

   Luego $c_0$ es un hiperplano

   falta ver cerrado

iii. $A = \{x_n \in \ell^1 \ : \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0\} \subseteq \ell^1$

   Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A$ luego $\sum_{n>0} |x_n|$ es convergente

   Defino $f : \ell^1 \to \mathbb{R}$ como $x_n \to \sum_{n>0} |x_n|$

Esta función es no nula, y ademas vemos que es continua

$|f(x_n)| \leq |\sum_{n>0} x_n| \leq \sum_{n>0} |x_n| = \|x_n\|$

Luego $\ker f = A$ entonces $A$ es hiperplano de $\ell^1$

Falta ver crrado

iv. $B = \{x_n \in \ell^2 \ : \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0\} \subseteq \ell^2$

v. $\mathbb{R}[X] \subseteq C[0,1]$

Por Weierstrauss-Stone sabemos que $\mathbb{R}[X]$ es denso en $C[0,1]$

Sabemos que hay funciones continuas en el $[0,1]$ que no son polinomios

Entonces sabemos que no es cerrado, si lo fuera seria $\mathbb{R}[X] = \overline{\mathbb{R}[X]} = C[0,1]$

No es hiperplano , por ejemplo las funciones *sen* y *coseno*

vi. $C^1[a,b] \subseteq C[a,b]$

falta hacer , consultar

6) Si $T : \mathbb{E} \to F$ es una función lineal entre espacios normados, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i. La función $T$ es continua en 0

ii. Existe $x_0 \in \mathbb{E}$ tal que la función $T$ es continua en $x_0$

iii. La función $T$ es continua

iv. La función $T$ es uniformemente continua

v. Existe un número $M > 0$ tal que para todo $x \in \mathbb{E}$ es $\|T(x)\| \leq M\|x\|$

vi. Para todo subconjunto acotado $A$ de $\mathbb{E}$ el conjunto $T(A)$ es acotado