Cálculo Avanzado

Primer cuatrimestre de 2020

Espacios métricos 1b

Topología en espacios métricos

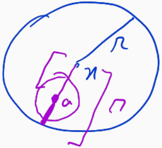
Definición
Sea $A \subset E$. Decimos que x es un punto interior de A si existe algún $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A$.

Definición
Sea $A \subset E$. El interior de A es el conjunto de todos los puntos interiores de A, y lo notamos A°.

Definición
Un conjunto $G \subset E$ se dice abierto si cada punto de G es un punto interior de G (análogamente, si $G = G^\circ$).

Observación
Un conjunto $G \subset E$ es abierto si y sólo si para todo $x \in G$ existe algún $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset G$.

E, $x \in E$, $r > 0 \Rightarrow B(x,r)$ es abierta.



$\underline{a} \in \overbrace{B(x,r)}^{A}$ q.v.q. $\exists\, r_0 > 0 /$

$B(a, r_0) \subset B(x,r)$

$r_0 = r - d(a,x)$

$\hookrightarrow$ VER QUE FUNCIONA

$y \in B(a,r_0) \underbrace{\Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow}_{\text{razonamiento.}} y \in B(x,r)$

$E = \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$, $r > 0$ $B(x,r) = (x-r, x+r)$

VER: $\mathbb{Q}^\circ = \phi$, $(\mathbb{R} - \mathbb{Q})^\circ = \phi$.

$x \in \underbrace{C[0,1]}$, $r > 0$, $\underbrace{B(x,r)}$

EJ: $\underline{A} = \{ x \in C[0,1] / x(1/2) > 0 \}$

$\underbrace{A \text{ es abierto.}}$

Lo siguiente es parte la Proposición 5.8.2 del apunte.

Proposición

Se tienen las siguientes propiedades:

(i) $A^\circ \subset A$.

(ii) $A_1 \subset A_2$, entonces $A_1^\circ \subset A_2^\circ$. ✓

(iv) A° es un conjunto abierto. ✓

(v) Si G es abierto, y $G \subset A$, entonces $G \subset A^\circ$.

A° es el mayor ab. contenido en A

DEM (v): $\underbrace{G \subset A}$ abierto.

Sea $x \in G$, G ab $\Rightarrow \exists\, r>0 \,/\, B(x,r) \subset G \subset A$

$\Rightarrow \exists\, r>0 \,/\, B(x,r) \subset A \Rightarrow x \in A^\circ$ ✓

$G \subset A^\circ$

Lo siguiente es parte la Proposición 5.8.2 del apunte.

Proposición

Se tienen las siguientes propiedades:

(i) $A^\circ \subset A$.

(ii) $A_1 \subset A_2$, entonces $A_1^\circ \subset A_2^\circ$.

(iv) A° es un conjunto abierto.

(v) Si G es abierto, y $G \subset A$, entonces $G \subset A^\circ$.

Teorema 5.2.10

La unión de cualquier familia o colección de conjuntos abiertos es abierta.

La intersección de finitos conjuntos abiertos es abierta.

Ejercicio

Decidir si son ciertas las siguientes afirmaciones:

$$(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ \qquad (A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$$

Ejercicio

Decidir si son ciertas las siguientes afirmaciones:

$$(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ \qquad (A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$$

Definición

Un conjunto $V \subset E$ se llama un entorno de x si existe un conjunto abierto G tal que $x \in G \subset V$.

Ejercicio

Decidir si son ciertas las siguientes afirmaciones:

$$(A \cup B)^\circ = A^\circ \cup B^\circ \qquad (A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$$

Definición

Un conjunto $V \subset E$ se llama un entorno de x si existe un conjunto abierto G tal que $x \in G \subset V$.

Observación

El conjunto V es un entorno de x si y sólo si $x \in V^o$.

Un conjunto G es abierto si y sólo si es un entorno de cada $x \in G$.

Definición

Decimos que x es un punto de adherencia del conjunto $A \subset E$ si para todo $r > 0$ existe $a \in A$, tal que $a \in B(x, r)$.

Definición

Decimos que x es un punto de adherencia del conjunto $A \subset E$ si para todo $r > 0$ existe $a \in A$, tal que $a \in B(x, r)$.

Es equivalente decir que para todo $r > 0, \quad A \cap B(x, r) \neq \emptyset$.

Definición

Decimos que x es un punto de adherencia del conjunto $A \subset E$ si para todo $r > 0$ existe $a \in A$, tal que $a \in B(x, r)$.

Es equivalente decir que para todo $r > 0, \quad A \cap B(x, r) \neq \emptyset$.

Definición

La clausura de $A \subset E$ es el conjunto $\bar{A}$ formado por todos los puntos (de E) de adherencia del conjunto A.

Definición
Decimos que x es un punto de adherencia del conjunto $A \subset E$ si para todo $r > 0$ existe $a \in A$, tal que $a \in B(x, r)$.

Es equivalente decir que para todo $r > 0$, $\quad A \cap B(x, r) \neq \emptyset$.

Definición
La clausura de $A \subset E$ es el conjunto $\bar{A}$ formado por todos los puntos (de E) de adherencia del conjunto A.

Proposición 5.2.19
Sean $A, B \subset E$.

(i) $A \subset \bar{A}$.

(ii) Si $A_1 \subset A_2$ entonces $\bar{A}_1 \subset \bar{A}_2$

(iii) $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$.

(iv) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Proposición 5.2.19

Sean $A, B \subset E$.

(i) $A \subset \bar{A}$.

(ii) Si $A_1 \subset A_2$ entonces $\bar{A}_1 \subset \bar{A}_2$

(iii) $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$.

(iv) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Proposición 5.2.19

Sean $A, B \subset E$.

(i) $A \subset \bar{A}$.

(ii) Si $A_1 \subset A_2$ entonces $\bar{A}_1 \subset \bar{A}_2$

(iii) $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$.

(iv) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

Ejercicio

Decidir si es cierta la siguiente afirmación:

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

Teorema 5.2.21
Sea $A \subset E$. Entonces,

$$(\bar{A})^c = (A^c)^\circ.$$

Teorema 5.2.21
Sea $A \subset E$. Entonces,

$$(\bar{A})^c = (A^c)^\circ.$$

Definición
Un conjunto se llama cerrado si $F = \bar{F}$.

Teorema 5.2.21
Sea $A \subset E$. Entonces,

$$(\bar{A})^c = (A^c)^\circ.$$

Definición
Un conjunto se llama cerrado si $F = \bar{F}$.

Recordemos que para verificar la igualdad es suficiente probar que

$$\bar{F} \subset F.$$

Teorema 5.2.21
Sea $A \subset E$. Entonces,

$$(\bar{A})^c = (A^c)^\circ.$$

Definición
Un conjunto se llama cerrado si $F = \bar{F}$.

Recordemos que para verificar la igualdad es suficiente probar que

$$\bar{F} \subset F.$$

Corolario
A es cerrado si y sólo si A^c es abierto.

Ejemplo

Consideremos el espacio métrico $\mathbb{Z}$ con la distancia dada por el módulo de la diferencia. Entonces, todo subconjunto de $\mathbb{Z}$ es abierto y cerrado.

Observación

La clausura de A es el menor cerrado que contiene a A:

(i) $\overline{A}$ es cerrado;

(ii) $A \subset \bar{A}$;

(iii) Si F es un cerrado y $A \subset F$, entonces $\bar{A} \subset \bar{F}$

Observación

La clausura de A es el menor cerrado que contiene a A:

(i) $\overline{A}$ es cerrado;

(ii) $A \subset \bar{A}$;

(iii) Si F es un cerrado y $A \subset F$, entonces $\bar{A} \subset \bar{F} \subset F$.

Observación

La clausura de A es el menor cerrado que contiene a A:

(i) $\overline{A}$ es cerrado;

(ii) $A \subset \bar{A}$;

(iii) Si F es un cerrado y $A \subset F$, entonces $\bar{A} \subset \bar{F} \subset F$.

Teorema 5.2.24

La intersección de cualquier familia o colección de conjuntos cerrados es cerrada.

La unión de finitos conjuntos cerrados es cerrada.