# Cálculo Avanzado

Primer cuatrimestre de 2020

Espacios métricos 2

Casi todo los resultados de esta clase están en la Sección 5.2 del apunte.

Casi todo los resultados de esta clase están en la Sección 5.2 del apunte.

**Ejercicio:**

1. Sea $a \in E$. Entonces, $\{a\}$ es cerrado.
2. Sea $A \subset \mathbb{R}$ no vacío y acotado. Entonces, $\sup(A)$, $\inf(A) \in \bar{A}$.

$A$ cerrado $\Longleftrightarrow$ $\bar{A} = A$

$\Updownarrow$

$A^c$ ab.

**Definición**

Decimos que $x \in E$ es un $\boxed{\text{punto de acumulación}}$ de $A$ si para todo $r > 0$, el conjunto $\underbrace{A \cap B(x, r)}$ es infinito.

**Definición**
Decimos que $x \in E$ es un punto de acumulación de $A$ si para todo $r > 0$, el conjunto $A \cap B(x, r)$ es infinito.

$\Updownarrow$

Equivalentemente, $x \in E$ es punto de acumulación de $A$ si cada entorno de $x$ contiene un punto de $A$ distinto de $x$.

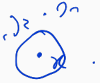
$\Downarrow$) $V$ ent de $x \Rightarrow x \in V^\circ \Rightarrow \exists\, r > 0 \,/\, B(x,r) \subset V$

$\underbrace{B(x,r) \cap A}_{\subseteq V \cap A}$ es inf $\Rightarrow V \cap A$ es inf $\Rightarrow \exists\, y \in V \cap A$, $y \neq x$.

$\Uparrow$) dado $r > 0$, $B(x,r) \cap A$ cont algún pto $\neq$ de $x$.

Sup $B(x,r) \cap A \subseteq \{y_1, \dots, y_n, x\}$ $\quad$ ($y_i \neq x$, $i = 1, \dots, n$.)

Sea $r_1 = \min\{d(y_i, x) : i = 1, 2, \dots, n\} > 0$ $\quad$ $r_1 < r$



$B(x, r_1) \cap A \subseteq \{y_1, \dots, y_i, x\}$ $\quad$ $y_i \notin B(x, r_1)$

$V$

$B(x, r_1) \cap A \subseteq \{x\}$. Abs

$V \cap A$ NO tiene ptos $\neq$ de $x$.

**Definición**

El conjunto de puntos de acumulación de $A \subset E$ se denomina conjunto derivado de $A$,

$$A' = \{x \in E : x \text{ es un punto de acumulación de } A\}.$$

**Definición**

El conjunto de puntos de acumulación de $A \subset E$ se denomina conjunto derivado de $A$,

$$A' = \{x \in E : x \text{ es un punto de acumulación de } A\}.$$

**Ejemplos:** $A = (a,b) \Rightarrow A' = [a,b]$.

PENSAR: $x \notin [a,b]$, $\exists r > 0 \,/\, (x-r, x+r) \cap [a,b] = \emptyset$

$r = \min\{|x-a|, |x-b|\}$

$x \in [a,b]$ $\quad (x-r, x+r) \cap [a,b] = \begin{cases} (c,d) \\ (c<d) \\ [a,d), \ (d,b] \end{cases}$

$A = \mathbb{Z}$: $\quad \mathbb{Z}' = \emptyset$.

$x \in \mathbb{R}$, $\quad B(x, 1/2) \cap \mathbb{Z}$ tiene a lo sumo un punto. $\Rightarrow x \notin \mathbb{Z}'$

$(E, \delta)$ $A \subset E$.

**Teorema**

Sea $A \subset E$. Entonces, $\bar{A} = A \cup A'$.

$\subseteq)$ $x \in \bar{A}$ =? q vq $\underbrace{x \in A \cup A'}$ $\Rightarrow$ $\underbrace{x \in A \text{ ó } x \in A'}$

Sup $x \notin A$. $x \in \bar{A} \Rightarrow \forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \emptyset$

pero $x \notin A \Rightarrow$ en $B(x,r) \cap A$ hay un pto $\neq$ de $x$.

(como cualquier entorno de $x$ cont. una bolita y la bolita $\cap A$ cont. un pto $\neq$ de $x$, $x \in A'$)

$\supseteq)$ $x \in A \Rightarrow x \in \bar{A}$

$x \in A' \Rightarrow \forall r > 0,\ B(x,r) \cap A$ es inf.

$\Rightarrow \underbrace{\forall r > 0,\ B(x,r) \cap A \neq \emptyset} \Rightarrow x \in \bar{A}$

$A \cup A' \subset \bar{A}$

**Teorema**

Sea $A \subset E$. Entonces, $\bar{A} = A \cup A'$.

**Corolario**

$A$ es cerrado si y sólo si $A' \subset A$.

$A$ cerrado $\Leftrightarrow A = \bar{A} \underset{\text{teo}}{\Leftrightarrow} A = \underbrace{A \cup A'} \Leftrightarrow A' \subset A$

**Teorema**
Sea $A \subset E$. Entonces, $\bar{A} = A \cup A'$.

**Corolario**
$A$ es cerrado si y sólo si $A' \subset A$.

**Ejercicio:**
Sea
$$\mathcal{F}(A) = \{F : F \subset A,\ F \text{ es finito}\}.$$
Demostrar que
$$A' = \bigcap_{F \in \mathcal{F}(A)} \overline{A - F}.$$

**Definición**

Un conjunto $A$ se dice perfecto si $A = A'$.

**Definición**

Un conjunto $A$ se dice perfecto si $A = A'$.

Un conjunto perfecto es cerrado, pero no vale la vuelta.

$\bar{A} = A \cup A' = A$

$\mathbb{Z}' = \emptyset$ $\quad$ $\{a\}' = \emptyset$

$[a,b]' = [a,b]$ , $C$ conj de Cantor

$C' = C$.

**Definición**

Un conjunto $A$ se dice perfecto si $A = A'$.

Un conjunto perfecto es cerrado, pero no vale la vuelta.

**Definición**

Dado $A \subset E$, decimos que $x$ es un punto de la frontera de $A$ si para todo $r > 0$, se cumple

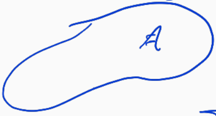
$$B(x,r) \cap A \neq \emptyset, \quad B(x,r) \cap A^c \neq \emptyset.$$

Al conjunto de puntos frontera lo llamamos $\partial A$.

EJERCICIO:

$$\underbrace{\partial A}_{} \overset{?}{=} \underbrace{\overline{A} \cap \overline{A^c}}_{}$$

$$\partial A \overset{?}{=} \partial A^c$$




$$\underbrace{\overline{A} \overset{?}{=} \mathring{A} \cup \partial A}_{}$$

**Definición**
Un conjunto $A$ se dice perfecto si $A = A'$.

Un conjunto perfecto es cerrado, pero no vale la vuelta.

**Definición**
Dado $A \subset E$, decimos que $x$ es un punto de la frontera de $A$ si para todo $r > 0$, se cumple

$$B(x, r) \cap A \neq \emptyset, \quad B(x, r) \cap A^c \neq \emptyset.$$

Al conjunto de puntos frontera lo llamamos $\partial A$.

**Para pensar:**
Ya vimos que $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$. Decidir si valen las siguientes desigualdades:

$$(A')' = A' \qquad \partial(\partial A) = \partial A$$

Vimos que $\bar{A} = A \cup A'$. ¿Qué pasa con la frontera?

**Proposición**

Sea $A \subset E$. Entonces $\bar{A} = A \cup \partial A$.

$\supseteq)$ $x \in A \Rightarrow x \in \bar{A}$

$x \in \partial A \Rightarrow \forall r > 0, \; B(x,r) \cap A \neq \emptyset$ $\partial \ldots$

$\Rightarrow x \in \bar{A}$

$\subseteq)$ $x \in \bar{A}$ $\quad$ Q.V.Q. $x \in A$ ó $\boxed{x \in \partial A}$ $\quad$ $x \in \bar{A}$

Sup $x \notin A$ : $\forall r > 0, \; B(x,r) \cap A \neq \emptyset$. $\quad$ $x \in \partial A$

$x \notin A$, $x \in B(x,r)$

$\Rightarrow x \in B(x,r) \cap A^c \Rightarrow B(x,r) \cap A^c \neq \emptyset$

$x \notin A$

$x \in A \cup \partial A$

Vimos que $\bar{A} = A \cup A'$. ¿Qué pasa con la frontera?

**Proposición**

Sea $A \subset E$. Entonces $\bar{A} = A \cup \partial A$.

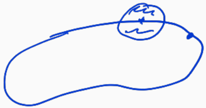
Entonces, ¿se parecen $A'$ y $\partial A$?

PENSAR:

$[a,b]' = [a,b]$ , $\partial [a,b] = \{a,b\}$

$\mathbb{Z}' = \emptyset$ $\quad$ $\partial \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$

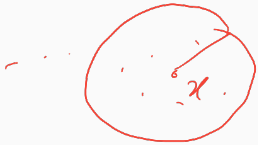
$\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$ $\quad$ $\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$



**Definición**

Decimos que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ converge a $x \in E$ si dado cualquier $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, x_n) < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$.

$x_n \in B(x, \varepsilon) \quad \forall\, n \geq n_0.$



**Definición**

Decimos que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ converge a $x \in E$ si dado cualquier $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, x_n) < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$.

Notaciones:

$$\lim_{x\to\infty} x_n = x$$

$$x \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$$

**Definición**

Decimos que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ converge a $x \in E$ si dado cualquier $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, x_n) < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$.

Notaciones:

$$\lim_{x\to\infty} x_n = x$$

$$x \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$$

Equivalentemente, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ converge a $x \in E$ dado cualquier entorno $V$ de $x$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in V$ para todo $n \geq n_0$.

**Definición**

Decimos que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ converge a $x \in E$ si dado cualquier $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, x_n) < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$.

Notaciones:

$$\lim_{x\to\infty} x_n = x$$

$$x \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$$

Equivalentemente, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ converge a $x \in E$ dado cualquier entorno $V$ de $x$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in V$ para todo $n \geq n_0$.

Lo mismo vale si cambiamos cualquier entorno $V$ de $x$ por cualquier abierto $V$ que contenga a $x$.

Consideremos $(E, \delta)$ con $E$ cualquier conjunto infinito y $\delta$ la distancia discreta.

$(x_n)_n \subset E \; / \; x_n \to x.$

dado $\varepsilon = 1/2$, $\exists n_0 /$ $\boxed{d(x_n, x) < 1/2 \;\; \forall n \geq n_0}$

$d(x_n, x) = \begin{cases} 0 & x_n = x \\ 1 & x_n \neq x \end{cases}$

$x_n = x \;\; \forall n \geq n_0.$

$\therefore \; x_n \to x \iff$

$\exists n_0 / \; x_n = x \; \forall n \geq n_0$

$E$ INFINITO, $\exists \; Y \subset E$ NUMERABLE

$\Rightarrow \; Y = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ $\; y_n \neq y_m \;\; \forall n \neq m.$

$(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\qquad d(y_n, y_1) \leq 1$ $\qquad (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada

$(y_n)_n$ NO tiene subsuc. convergente.

$y_{n_k} \to y \in E \Rightarrow \exists k_0 / \; y_{n_k} = y \;\; \forall k \geq k_0$ Abs

**Definición**

Sean $d, d'$ dos métricas sobre $E$. Decimos que son topológicamente equivalentes si los conjuntos abiertos de $(E, d)$ y de $(E, d')$ son los mismos.

EJ: $\mathbb{R}^n$ $\quad d_1, d_2, d_\infty \to$ equiv.

$d_2, \delta$ NO equiv.

$E = \mathbb{Z}$ $\quad \cdot\, d(x,y) = |x-y|$ $\quad \cdot\, \delta$ $\Big]$ son equiv.

**Definición**

Sean $d, d'$ dos métricas sobre $E$. Decimos que son topológicamente equivalentes si los conjuntos abiertos de $(E, d)$ y de $(E, d')$ son los mismos.

**Teorema**

Sean $d, d'$ dos métricas sobre $E$.
Las métricas son equivalentes si y sólo si para todo $x \in E$, y $r > 0$, existen $r_1$ y $r_2$ tales que

$$B_{d'}(x, r_1) \subset B_d(x, r) \quad \text{y} \quad B_d(x, r_2) \subset B_{d'}(x, r).$$

$\Rightarrow)$ sea $r > 0$, $x \in E$

$B_d(x,r)$ es ab. según $d$ $\to$ $B_d(x,r)$
es ab según $d'$. $\to$ $\exists\, r_1$ / $B_{d'}(x,r_1) \subset B_d(x,r)$
$B_{d'}(x,r)$ ab según $d'$ ....

$\Leftarrow$ | qvq $d$ y $d'$ dan los mismos ab.

Sea $A$ ab. de $(E,d)$. Sea $\underline{x \in A}$

$\boxed{\text{queremos: } \exists\, r_1 \,/\, B_{d'}(x, r_1) \subset A}$

Sabemos: $\exists\, r > 0 \,/\, B_d(x,r) \subseteq A$

$\Rightarrow$ $\exists\, r_1 \,/\, B_{d'}(x, r_1) \subset B_d(x,r) \subset A$
HIP

$\Rightarrow A$ ab en $(E,d')$

PENSAR: Si existen $c_1$ y $c_2$ /

$$\boxed{c_1\, d'(x,y) \leq d(x,y) \leq c_2\, d'(x,y)}$$

$\Rightarrow$ $d$ y $d'$ son equivalentes.