UBA - exactas
Departamento de Matemática

Cálculo Avanzado - Compacidad 3 y conexión

Primer cuatrimestre de 2020

Daniel Carando

Dto. de Matemática - FCEN - UBA

En esta clase seguimos con resultados relacionados con el capítulo 9 del apunte y empezamos con el 10.

COMPACTO $\Leftrightarrow$ COMPLETO Y T.T. A.

en $\mathbb{R}^n$ $\Updownarrow$ en $\mathbb{R}^n$ $\Updownarrow$ en $\mathbb{R}^n$ (EJERCICIO)

COMPACTO $\Leftrightarrow$ CERRADO Y ACOT

E e.m., d d' mét equiv.

(E, d) comp $\Leftrightarrow$ (E, d') comp.

Pero: mét equiv no respetan: · COMPLETITUD

· T.T.A.

$\Rightarrow$ E comp $\Leftrightarrow$ toda suc. en E tiene subsuc. conv. en E

Continuidad y compacidad

Teorema

Sean (E,d), (E',d') e.m. y sea $f: E \to E'$ continua. Si $K \subset E$ es compacto, entonces $f(K)$ es compacto en E'.

DEM: (REPASAR IMAGEN / PREIMAGEN DE $\cup$, $\cap$ DE CONJ).

Tomemos un cub. de $f(K)$ por abiertos. $\underbrace{f(K) \subset \bigcup_{i \in I} V_i}_{(*)}$

V_i ab de E' $\forall i \in I$.

$(*) \Rightarrow K \subset \bigcup_{i\in I} \underbrace{f^{-1}(V_i)}_{\text{ab}\ (V_i \text{ ab},\ f \text{ cont})} \to \{f^{-1}(V_i)\}$ es cub. de K por ab.

¿POR QUÉ?

$\xrightarrow{K \text{ COMP}} \exists\, i_1, \dots, i_m \,/\, K \subset \bigcup_{j=1}^{m} f^{-1}(V_{i_j}) \leftarrow$

$\underset{\text{¿POR QUÉ?}}{\Longrightarrow} \underbrace{f(K) \subset}\ \bigcup_{j=1}^{m} f(f^{-1}(V_{i_j})) \subseteq \underbrace{\bigcup_{j=1}^{m} V_{i_j}}$. $\therefore$ Tiene subcub. finito.

$\therefore f(K)$ COMP.

Corolario

Sea E un espacio métrico compacto, $f : E \to \mathbb{R}$ continua. Entonces,

- f es acotada: existe $c > 0$ tal que $|f(x)| \leq c$ para todo $x \in E$.
- f alcanza su máximo y su mínimo.

DEM: $f(E)$ compacto de $\mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ $\underbrace{f(E) \text{ acot}}$ $\left(y \therefore \exists c \,/\, |f(x)| \leq c \quad \forall x \in E \right)$

. $\underbrace{f(E) \text{ tiene máx y mín}}$ (TALLER: O EJERC). tiene sup e inf y se alcanzan

$\exists\, x_1, x_2 \in E \,/$

$f(x_1) = \max\{f(x) : x \in E\}$

$f(x_2) = \min\{f(x) : x \in E\}$.

Teorema
Sean (E,d), (E',d') e.m., y sea $f: E \to E'$. Si f es continua y E es compacto, entonces f es uniformemente continua.

DEM: Sup que no: "$\exists\, \varepsilon > 0$ para el cual ningún δ sirve." $\exists\, \varepsilon > 0 \,/\, \forall\, \delta > 0$, $\exists\, x, y$ (que dependen de δ): $d(x,y) < \delta$ pero $d'(f(x), f(y)) \geq \varepsilon$.

Tomamos $\delta = 1/n$, $\exists\, x_n, y_n \in E \,/\, d(x_n, y_n) < 1/n$ pero $\boxed{d'(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon}$ $(*)$. Como E es compacto, $\exists\, (x_{n_k})$ subsuc. conv. a un $x_0 \in E$.

$$d(y_{n_k}, x_0) \leq \underbrace{d(y_{n_k}, x_{n_k})}_{\leq \frac{1}{n_k} \to 0} + \underbrace{d(x_{n_k}, x_0)}_{\to 0} \longrightarrow 0$$

$y_{n_k} \to x_0$.

$$(*) \Rightarrow \varepsilon \leq d'(\underbrace{f(x_{n_k})}_{\downarrow\, f(x_0)}, \underbrace{f(y_{n_k})}_{\downarrow\, f(x_0)}) \longrightarrow 0$$

ABS

$\therefore f$ UNIF. CONT.

OTRA FORMA: Sea $\varepsilon > 0$.

Como f es cont, p/c/ $z \in E$, $\exists\, \delta_z$ /

$$f(B(z, \delta_z)) \subset B(f(z), \varepsilon/2)$$

$$E = \bigcup_{z \in E} B(z, \delta_z/2) \qquad \{B(z, \delta_z/2) : z \in E\}$$

cub. y ab. de E.

EJERCICIO

USAR que el cub. tiene número de Lebesgue para terminar la dem.

Conexión

Conexión

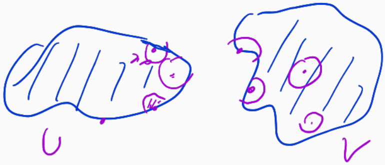
NO TIENE
NADA QUE
VER...

Conexión

$E \subseteq \mathbb{R}^2$

↑ No se puede

$E \subseteq \mathbb{R}^2$ (E e.m.)



$\boxed{E = U \cup V}$ $\quad U \neq \emptyset$

$U \cap V = \emptyset \quad V \neq \emptyset.$

U ab. V ab. de E
de E

Obs: $V = E \setminus U \qquad U = E \setminus \underline{V}$
↑ab

$\to V$ cerrado, U cerrado

U ab. y cerr., V ab. y cerr.

Conexión

Definición

Sea E un espacio métrico. Un par de conjuntos abiertos U y V desconecta a E si $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$, $E = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$.

Conexión

Definición

Sea E un espacio métrico. Un par de conjuntos abiertos U y V desconecta a E si $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$, $E = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$.

Idea

Los conjuntos conexos son los que no se pueden desconectar.

Conexión

Definición

Sea E un espacio métrico. Un par de conjuntos abiertos U y V desconecta a E si $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$, $E = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$.

Idea

Los conjuntos conexos son los que no se pueden desconectar.

E ∅ ∪ | V.

Definición

Un espacio métrico (E, d) es conexo cuando los únicos subconjuntos de E que son a la vez abiertos y cerrados son E y $\emptyset$.

Conexión

Definición

Sea E un espacio métrico. Un par de conjuntos abiertos U y V desconecta a E si $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$, $E = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$.

Idea

Los conjuntos conexos son los que no se pueden desconectar.

Definición

Un espacio métrico (E, d) es conexo cuando los únicos subconjuntos de E que son a la vez abiertos y cerrados son E y $\emptyset$.

Observación

E es conexo si y sólo si no existen U y V abiertos no vacíos tales que $E = U \cup V$ y que $U \cap V = \emptyset$. (EJERCICIO)

Ejemplo

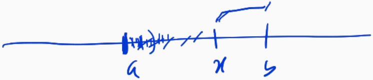
El conjunto $\mathbb{R}$ es conexo. Es más, cualquier intervalo de $\mathbb{R}$ es conexo.

ejercicio.

Sup que NO: $\exists\ U, V$ ab. no vacíos / $U \cap V = \phi$

y $\mathbb{R} = U \dot\cup V$.

Sea $a \in U$, $b \in V$. Sup $a < b$ (si no, sale con igual).



$A = \{t : a \leq t \leq b,\ t \in U\}$

$a \in A \qquad b \notin A$ ($b \in V$, $U \cap V = \phi$)

$x = \sup A$ como $x \in \mathbb{R} = U \cup V$, $x \in U$ o $x \in V$.

Si $x \in V$, $\exists\ r > 0$ / $(x-r, x+r) \subset V \underset{\text{ejer}}{\Longrightarrow}$ x NO puede ser sup A (no es la menor cota sup).

Si $x \in U$, $\exists\ r > 0$ / $(x-r, x+r) \subset U$.

$\underset{\text{ejer}}{\Longrightarrow}$ x NO puede ser sup A (x NO cota sup). Abs

Ejemplo

El conjunto $\mathbb{R}$ es conexo. Es más, cualquier intervalo de $\mathbb{R}$ es conexo.

Definición

Un subconjunto $A \subset E$ es conexo si es conexo cuando lo pensamos como espacio métrico con la métrica inducida.

Ejemplo

El conjunto $\mathbb{R}$ es conexo. Es más, cualquier intervalo de $\mathbb{R}$ es conexo.

Definición

Un subconjunto $A \subset E$ es conexo si es conexo cuando lo pensamos como espacio métrico con la métrica inducida.

Ejercicio

Un subconjunto $A \subset E$ es conexo si y sólo si no existen U y V abiertos de E tales que $A \cap U \neq \emptyset$, $A \cap V \neq \emptyset$, $A \subset U \cup V$ y $A \cap U \cap V = \emptyset$.

$$\underbrace{A \subset A \cap (U \cup V)}$$

Ejemplo

El conjunto $\mathbb{R}$ es conexo. Es más, cualquier intervalo de $\mathbb{R}$ es conexo.

Definición

Un subconjunto $A \subset E$ es conexo si es conexo cuando lo pensamos como espacio métrico con la métrica inducida.

Ejercicio

Un subconjunto $A \subset E$ es conexo si y sólo si no existen U y V abiertos de E tales que $A \cap U \neq \emptyset$, $A \cap V \neq \emptyset$, $A \subset U \cup V$ y $A \cap U \cap V = \emptyset$.

Ejercicio

Un subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ es conexo si y sólo si es un intervalo.

$I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo $\Longleftrightarrow$ $\forall\, x_1, x_2 \in I$, $\{t \,/\, x_1 \leq t \leq x_2\} \subset I$

• $\mathbb{Z}$ NO ES CONEXO:

$$\mathbb{Z} = \{7\} \cup \{x \in \mathbb{Z}, x \neq 7\}$$

$$= \{\text{pares}\} \cup \{\text{impares}\}.$$

$$= \underbrace{A}_{\text{ab}} \cup \underbrace{A^c}_{\text{ab}}. \qquad (A \neq \emptyset,\ A \neq \mathbb{Z})$$

Otra: $\{3\}$ es ab.
y ab.

• todo conj. discreto con $\underline{\text{más de un punto}}$ es disconexo.

• $\mathbb{Q}$ $\underline{\text{NO}}$ conexo: $\mathbb{Q} \subset \underbrace{(-\infty, \pi)}_{U} \cup \underbrace{(\pi, +\infty)}_{V}$

$$\underbrace{\mathbb{Q} \subset U \cup V}, \quad \underbrace{\mathbb{Q} \cap U \neq \emptyset}, \quad \underbrace{\mathbb{Q} \cap V \neq \emptyset}, \quad \underbrace{\mathbb{Q} \cap U \cap V = \emptyset}$$

Teorema

Sean (E, d) y (E', d') e.m. Sea $f : E \to E'$ continua. Si $A \subset E$ es conexo, entonces $f(A)$ es conexo en E'.

DEM: $\boxed{\text{Sup } f(A) \text{ NO conexo en } E'}$

$\exists\, U, V \subset E'$ ab / $\underbrace{f(A) \subset U \cap V}_{1}$, $\underbrace{f(A) \cap U \neq \emptyset}_{2}$, $\underbrace{f(A) \cap V \neq \emptyset}_{3}$, $\underbrace{f(A) \cap U \cap V = \emptyset}_{4}$.

1 $\underset{\text{VER}}{\Rightarrow}$ $A \subset f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$, 2, 3 $\underset{\text{VER}}{\Rightarrow}$ $A \cap f^{-1}(U) \neq \emptyset$, $A \cap f^{-1}(V) \neq \emptyset$

4 $\underset{\text{VER}}{\Rightarrow}$ $A \cap f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) = \emptyset$

$U' := f^{-1}(U)$ (ab)

$V' = f^{-1}(V)$ (ab)

$\Rightarrow U', V'$ desconectan a A $\Rightarrow$ $\boxed{A \text{ no conexo}}$.

Teorema

Sean (E, d) y (E', d') e.m. Sea $f : E \to E'$ continua. Si $A \subset E$ es conexo, entonces $f(A)$ es conexo en E'.

Teorema del valor medio (BOLZANO)

Sea $f : E \to \mathbb{R}$ continua con E conexo. Si existen $a, b \in E$ con $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, entonces existe $c \in E$ tal que $f(c) = 0$.

DEM: $f(E)$ es conexo (por teo anterior).

$\Rightarrow f(E)$ intervalo $\Rightarrow f(a), f(b) \in \underbrace{f(E)}_{\text{intervalo}} \Rightarrow$

$0 \in \{t \in \mathbb{R} / f(a) \leq t \leq f(b)\} \subset f(E)$.

$\Rightarrow \exists\, c / f(c) = 0$.