Cálculo Avanzado

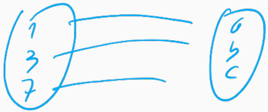
Primer cuatrimestre de 2020

Cardinalidad I

IDEA: $\#A = \#B$ si $\exists\, f: A \to B$ biyec-

tiva.

$$\#\{1,3,7\} = \#\{a,b,c\}$$



$$\mathbb{N} \longrightarrow \{\text{pares}\}.$$

$$\begin{aligned}
1 &\longrightarrow 2\\
2 &\longrightarrow 4\\
3 &\longrightarrow 6\\
4 &\longrightarrow 8\\
5 &\longrightarrow 10\\
6 &\longrightarrow 12
\end{aligned}$$

$$f(x) = 2x.$$

$$\#\mathbb{N} = \#\{\text{pares}\}.$$

Definición

Sean X e Y dos conjuntos. Decimos que son coordinables (o equipotentes, o que tienen el mismo cardinal) si existe $f : X \to Y$ biyectiva. [Notación: $X \sim Y$.]

Definición

Sean X e Y dos conjuntos. Decimos que son coordinables (o equipotentes, o que tienen el mismo cardinal) si existe $f : X \to Y$ biyectiva. [Notación: $X \sim Y$.]

Proposición

La relación $\sim$ es una relación de equivalencia.

- $X \sim X$ $\qquad$ $id : X \to X$
- $X \sim Y \Rightarrow Y \sim X$ $\qquad$ $f : X \to Y$ biy $\Rightarrow f^{-1} : Y \to X$ es biy.
- $X \overset{f}{\sim} Y \quad Y \overset{g}{\sim} Z \Rightarrow X \overset{g \circ f}{\sim} Z$

Ejemplo

$\mathbb{N} \sim \{\text{números pares}\}$

Ejemplo

$\mathbb{N} \sim \{\text{números pares}\}$

$$f : \mathbb{N} \to \{\text{pares}\}$$
$$k \mapsto 2k$$

Ejemplo
$\mathbb{N} \sim \{\text{números pares}\}$

$$f : \mathbb{N} \to \{\text{pares}\}$$
$$k \mapsto 2k$$

Ejemplo
$\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$

$$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$$

$$f(z) = \begin{cases} 2z & z \geq 1 \\ -2z+1 & z \leq 0. \end{cases}$$

Ejemplo

$\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$

IDEA:

$\mathbb{Q} \sim \mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$

1	2	3	4	5	6	7 ...
1/2	~~2/2~~	3/2	~~4/2~~	5/2	~~6/2~~	...
1/3	2/3	~~3/3~~	4/3	5/3	~~6/3~~	
1/4	~~2/4~~	3/4	~~4/4~~	5/4	...	
⋮						

1
2
3
4
5
6
7
8
9

Definición

Definimos el cardinal de un conjunto X como la clase de equivalencia de los conjuntos coordinables con X:

$$\#X = Card(X) = \{Y \ : \ X \sim Y\}.$$

Definición

Definimos el cardinal de un conjunto X como la clase de equivalencia de los conjuntos coordinables con X:

$$\#X = Card(X) = \{Y \ : \ X \sim Y\}.$$

A algunos cardinales le ponemos nombres:

- $\aleph_0 = \#\mathbb{N}$; $= \#\mathbb{Q} = \#\mathbb{Z} = \#\{\text{pares}\}.$

Definición

Definimos el cardinal de un conjunto X como la clase de equivalencia de los conjuntos coordinables con X:

$$\#X = Card(X) = \{Y \ : \ X \sim Y\}.$$

A algunos cardinales le ponemos nombres:

- $\aleph_0 = \#\mathbb{N}$;
- $c = \#\mathbb{R}$;

Definición

Definimos el cardinal de un conjunto X como la clase de equivalencia de los conjuntos coordinables con X:

$$\#X = Card(X) = \{Y \ : \ X \sim Y\}.$$

A algunos cardinales le ponemos nombres:

- $\aleph_0 = \#\mathbb{N}$;
- $c = \#\mathbb{R}$;
- $n = \#\{1, 2, \ldots, n\}$

Definición

Definimos el cardinal de un conjunto X como la clase de equivalencia de los conjuntos coordinables con X:

$$\#X = Card(X) = \{Y \ : \ X \sim Y\}.$$

A algunos cardinales le ponemos nombres:

- $\aleph_0 = \#\mathbb{N}$;
- $c = \#\mathbb{R}$;
- $n = \#\{1, 2, \ldots, n\}$ ¿esto está bien?

Definición

Definimos el cardinal de un conjunto X como la clase de equivalencia de los conjuntos coordinables con X:

$$\#X = Card(X) = \{Y \ : \ X \sim Y\}.$$

A algunos cardinales le ponemos nombres:

- $\aleph_0 = \#\mathbb{N}$;
- $c = \#\mathbb{R}$;
- $n = \#\{1, 2, \dots, n\}$ ¿esto está bien? nuestra definición de cardinal hablaba de funciones biyectivas, no de número de elementos...

Definición

Definimos el cardinal de un conjunto X como la clase de equivalencia de los conjuntos coordinables con X:

$$\#X = Card(X) = \{Y \ : \ X \sim Y\}.$$

A algunos cardinales le ponemos nombres:

- $\aleph_0 = \#\mathbb{N}$;
- $c = \#\mathbb{R}$;
- $n = \#\{1, 2, \ldots, n\}$ ¿esto está bien? nuestra definición de cardinal hablaba de funciones biyectivas, no de número de elementos...

Definición

Llamemos $\mathbb{I}_n = \{1, 2, \cdots, n\}$, el intervalo inicial del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales.

Definición

Definimos el cardinal de un conjunto X como la clase de equivalencia de los conjuntos coordinables con X:

$$\#X = Card(X) = \{Y \ : \ X \sim Y\}.$$

A algunos cardinales le ponemos nombres:

- $\aleph_0 = \#\mathbb{N}$;
- $c = \#\mathbb{R}$;
- $n = \#\{1, 2, \ldots, n\}$ ¿esto está bien? nuestra definición de cardinal hablaba de funciones biyectivas, no de número de elementos...

Definición

Llamemos $\mathbb{I}_n = \{1, 2, \cdots, n\}$, el intervalo inicial del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales.

Para poder llamar n a $\#\mathbb{I}_n$, necesitamos que para $n \neq m$, ~~$\mathbb{I}_n$ y $\mathbb{I}_m$~~ $\mathbb{I}_n$; $\mathbb{I}_m$ estén en distintas clases de equivalencias según $\sim$.

Teorema

Sean $n, m \in \mathbb{N}$. Entonces, $\mathbb{I}_n \sim \mathbb{I}_m$ si y sólo si $n = m$.

Teorema

Sean $n, m \in \mathbb{N}$. Entonces, $\mathbb{I}_n \sim \mathbb{I}_m$ si y sólo si $n = m$.

Este resultado es el Teorema 3.1.5 del apunte. Veamos otra demostración, usando el siguiente Lema.

Teorema

Sean $n, m \in \mathbb{N}$. Entonces, $\mathbb{I}_n \sim \mathbb{I}_m$ si y sólo si $n = m$.

Este resultado es el Teorema 3.1.5 del apunte. Veamos otra demostración, usando el siguiente Lema.

Lema

Sea $A \subset \mathbb{I}_n$. Si existe $f : \mathbb{I}_n \to A$ inyectiva, entonces $A = \mathbb{I}_n$.

LEMA $\Rightarrow$ Teo:

$\mathbb{I}_n \sim \mathbb{I}_m$ pero $n \neq m$.

Podemos suponer $m < n$. $\Rightarrow$ $\mathbb{I}_m \subseteq \mathbb{I}_n$

$\to \exists\, f : \mathbb{I}_n \to \underbrace{\mathbb{I}_m}_{A \subset \mathbb{I}_n}$ biy. $\Big\}$ $\xRightarrow{\text{LEMA}}$ $A = \mathbb{I}_n$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \parallel$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \mathbb{I}_m$

Abs

Lema
Sea $A \subset \mathbb{I}_n$. Si existe $f : \mathbb{I}_n \to A$ inyectiva, entonces $A = \mathbb{I}_n$.

DEM x INDUCCIÓN.

$n = 1$ ✓

Sup. que vale para n.

Sea $A \subseteq \mathbb{I}_{n+1}$, $f : \mathbb{I}_{n+1} \to A$ INYECTIVA.

Sup que $A \subsetneq \mathbb{I}_{n+1}$

CASO I: $n+1 \notin A \Rightarrow \boxed{A \subset \mathbb{I}_n}$ $b = f(n+1) \in A$

$f|_{\mathbb{I}_n} : \mathbb{I}_n \longrightarrow A - \{b\}$. INY.

$\Rightarrow$ H.I $\mathbb{I}_n = A - \{b\} \subsetneq A \subseteq \mathbb{I}_n$ Abs

CASO II: $n+1 \in A$ Sea $p \in I_{n+1} \setminus A$

$$g: I_{n+1} \to I_{n+1}$$
$$n+1 \mapsto p$$
$$p \mapsto n+1$$
$$x \mapsto x \quad x \neq p,\ x \neq n+1$$

- g es biy.
- $g(A) \subset I_n$

$g \circ f : I_{n+1} \to g(f(A)) = g(A) \subset I_n$

$\quad \hookrightarrow$ INY

$$\underset{I_{n+1}}{\overset{\shortparallel}{g(A)}}$$

$\propto$ CASO I, esto es Abs

$f: I_{n+1} \to A$ INY

Ahora sí, podemos llamar n al cardinal de $\mathbb{I}_n$.

Ahora sí, podemos llamar n al cardinal de $\mathbb{I}_n$. Algunas definiciones más.

Ahora sí, podemos llamar n al cardinal de $\mathbb{I}_n$. Algunas definiciones más.

Definición
Un conjunto A es finito si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \sim \mathbb{I}_n$.

Ahora sí, podemos llamar n al cardinal de $\mathbb{I}_n$. Algunas definiciones más.

Definición

Un conjunto A es finito si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \sim \mathbb{I}_n$.

Definición

Un conjunto A es infinito...

Ahora sí, podemos llamar n al cardinal de $\mathbb{I}_n$. Algunas definiciones más.

Definición
Un conjunto A es finito si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \sim \mathbb{I}_n$.

Definición
Un conjunto A es infinito... si no es finito.

Ahora sí, podemos llamar n al cardinal de $\mathbb{I}_n$. Algunas definiciones más.

Definición
Un conjunto A es finito si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $A \sim \mathbb{I}_n$.

Definición
Un conjunto A es infinito... si no es finito.

Definición
Un conjunto A es numerable si $A \sim \mathbb{N}$. Equivalentemente, si $\#A = \aleph_0$.

CONTABLE $\iff$ FINITO O NUMERABLE

Preguntas para pensar antes de ver la continuación

Si A es un conjunto finito, ¿es cierto que todo subconjunto de A es finito?

Preguntas para pensar antes de ver la continuación

Si A es un conjunto finito, ¿es cierto que todo subconjunto de A es finito?

Si A es un conjunto finito, ¿puede ser coordinable a un subconjunto propio?

Preguntas para pensar antes de ver la continuación

Si A es un conjunto finito, ¿es cierto que todo subconjunto de A es finito?

Si A es un conjunto finito, ¿puede ser coordinable a un subconjunto propio?

Definamos $\#A \leq \#B$ si existe $f : A \to B$ inyectiva y $\#B \geq \#A$ si existe $g : B \to A$ suryectiva.

¿Es cierto que $\#A \leq \#B$ si y sólo si $\#B \geq \#A$?

Preguntas para pensar antes de ver la continuación

Si A es un conjunto finito, ¿es cierto que todo subconjunto de A es finito?

Si A es un conjunto finito, ¿puede ser coordinable a un subconjunto propio?

Definamos $\#A \leq \#B$ si existe $f : A \to B$ inyectiva y $\#B \geq \#A$ si existe $g : B \to A$ suryectiva.

¿Es cierto que $\#A \leq \#B$ si y sólo si $\#B \geq \#A$?

Supongamos que $\underbrace{\#A \leq \#B}$ y que $\underbrace{\#B \leq \#A}$.

Preguntas para pensar antes de ver la continuación

Si A es un conjunto finito, ¿es cierto que todo subconjunto de A es finito?

Si A es un conjunto finito, ¿puede ser coordinable a un subconjunto propio?

Definamos $\#A \leq \#B$ si existe $f : A \to B$ inyectiva y $\#B \geq \#A$ si existe $g : B \to A$ suryectiva.

¿Es cierto que $\#A \leq \#B$ si y sólo si $\#B \geq \#A$?

Supongamos que $\#A \leq \#B$ y que $\#B \leq \#A$.

¿Es cierto que $\#A = \#B$?

Preguntas para pensar antes de ver la continuación

Si A es un conjunto finito, ¿es cierto que todo subconjunto de A es finito?

Si A es un conjunto finito, ¿puede ser coordinable a un subconjunto propio?

Definamos $\#A \leq \#B$ si existe $f : A \to B$ inyectiva y $\#B \geq \#A$ si existe $g : B \to A$ suryectiva.

¿Es cierto que $\#A \leq \#B$ si y sólo si $\#B \geq \#A$?

Supongamos que $\#A \leq \#B$ y que $\#B \leq \#A$.

¿Es cierto que $\#A = \#B$?

Esto no es un ejercicio, es un teorema que vamos a ver la próxima.