Práctica 4

Ejercicio 1. Sea (X, d) un espacio métrico. Se dice que un conjunto $A \subset X$ es *nunca denso* si $\overline{A}^{\circ} = \emptyset$. Probar que A es nunca denso si y sólo si para todo abierto no vacío $U \subset X$ existe otro abierto no vacío $V \subset U$ tal que $V \cap A = \emptyset$.

Ejercicio 2. Probar que $\mathbb{R}^n$ no puede escribirse como unión numerable de subespacios vectoriales propios.

Ejercicio 3. Sean (X, d) un espacio métrico completo sin puntos aislados y sea D un subconjunto denso y numerable de X. Probar que D no es un G_δ.

Ejercicio 4. Demostrar que no existe ninguna función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que sea continua sólo en los racionales.
Sugerencia: Para cada $n \in \mathbb{N}$ considerar

$$U_n = \left\{ x \in \mathbb{R} \ / \ \exists\, U \subseteq \mathbb{R} \text{ abierto con } x \in U \text{ y } \operatorname{diam}(f(U)) < \frac{1}{n} \right\}$$

Ejercicio 5. Sea $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión de intervalos de $[0, 1]$ con extremos racionales y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea

$$E_n = \{ f \in C[0, 1] \ / \ f \text{ es monótona en } I_n \}.$$

i) Probar que para cada $n \in \mathbb{N}$, E_n es un cerrado de interior vacío en $(C[0, 1], d_\infty)$.

ii) Deducir que existen funciones continuas en el intervalo $[0, 1]$ que no son monótonas en ningún subintervalo.

Ejercicio 6.

i) Mostrar que el intervalo $(0, 1] \subset \mathbb{R}$ no es compacto.

ii) Sea $S = (a, b) \cap \mathbb{Q}$ con $a, b \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Probar que S es un subconjunto cerrado y acotado pero no compacto de $(\mathbb{Q}, d)$, donde d es la métrica usual de $\mathbb{R}$.

Ejercicio 7. Sea $E = \{ e^{(n)} \in \ell^\infty \ / \ n \in \mathbb{N} \}$, donde cada sucesión $e^{(n)} = (e_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}$ está definida por

$$e_k^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ 1 & \text{si } k = n \end{cases}$$

Probar que E es discreto, cerrado y acotado, pero no compacto.

Ejercicio 8. Sea $c_0 = \{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} \ / \ \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \}$. Se define en c_0 la métrica

$$d(x, y) = \sup\{ |x_n - y_n| \ / \ n \in \mathbb{N} \}.$$

Demostrar que la bola cerrada $\overline{B}(x,1) = \{y \in c_0 \ / \ d(x,y) \leq 1\}$ no es compacta.

Ejercicio 9. Sea X un espacio métrico y sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in X$. Probar que el conjunto $K = \{a_n \ / \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\} \subset X$ es compacto.

Ejercicio 10. Probar que todo espacio métrico compacto es separable.

Ejercicio 11. Sea (X,d) un espacio métrico. Probar que:

i) Si (X,d) es compacto, todo subconjunto cerrado de X es compacto.

ii) Toda unión finita y toda intersección (finita o infinita) de subconjuntos compactos de X es compacta.

iii) Un subconjunto $F \subset X$ es cerrado si y sólo si $F \cap K$ es cerrado para todo compacto $K \subset X$.

Ejercicio 12. Sean (X,d) e (Y,d') espacios métricos. Se considera $(X \times Y, d_\infty)$, donde

$$d_\infty((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \max\{d(x_1,x_2), d'(y_1,y_2)\}.$$

Probar que $(X \times Y, d_\infty)$ es compacto si y sólo si (X,d) e (Y,d') son compactos.

Ejercicio 13. Sea X un espacio métrico compacto y sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x) > 0$ para todo $x \in X$. Probar que existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) \geq \varepsilon$ para todo $x \in X$.

Ejercicio 14. Sea (X,d) un espacio métrico.

i) Sean $F \subset X$ un cerrado y $x \in X - F$. Probar que no es cierto en general que exista un punto $y \in F$ tal que $d(x,y) = d(x,F)$. Es decir, la distancia entre un punto y un cerrado puede no realizarse.

ii) Sean $K \subset X$ un compacto y $x \in X - K$. Probar que existe $y \in K$ tal que $d(x,K) = d(x,y)$. Es decir, la distancia entre un punto y un compacto siempre se realiza.

iii) Probar que si X tiene la propiedad de que toda bola cerrada es compacta (por ejemplo, si $X = \mathbb{R}^n$) entonces sí vale que la distancia entre un punto y un cerrado siempre se realiza.

iv) Sean F, $K \subset X$ dos subconjuntos disjuntos de X tales que F es cerrado y K es compacto. Probar que la distancia $d(F,K)$ entre F y K es positiva, pero puede no realizarse.

v) Sean $K_1, K_2 \subset X$ dos subconjuntos compactos de X tales que $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. Probar que existen $x_1 \in K_1$ y $x_2 \in K_2$ tales que $d(K_1,K_2) = d(x_1,x_2)$. Es decir, la distancia entre dos compactos siempre se realiza.

Ejercicio 15. Sea (X,d) un espacio métrico completo. Se define

$$\mathcal{K}(X) = \{K \subset X \ / \ K \text{ es compacto y no vacío}\}.$$

i) Sea $\tilde{d}(A,B) = \sup_{a\in A}\{d(a,B)\}$. Verificar que, en general, $\tilde{d}$ **no** es una métrica en $\mathcal{K}(X)$.

ii) Se define $d : \mathcal{K}(X)\times\mathcal{K}(X) \to \mathbb{R}$ como $d(A,B) = \max\{\tilde{d}(A,B), \tilde{d}(B,A)\}$. Probar que para todo $\varepsilon > 0$ vale

$$d(A,B) < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad A \subset B(B,\varepsilon) \quad \text{y} \quad B \subset B(A,\varepsilon),$$

donde $B(C,\varepsilon) = \{x \in X \ / \ d(x,C) < \varepsilon\}$ para cada $C \subset X$.

iii) Probar que d es una métrica en $\mathcal{K}(X)$.

Ejercicio 16. Dado un cubrimiento por abiertos $(U_i)_{i\in I}$ de un espacio métrico (X,d), un número $\varepsilon > 0$ se llama *número de Lebesgue* de $(U_i)_{i\in I}$ si para todo $x \in X$ existe $j \in I$ tal que $B(x,\varepsilon) \subset U_j$. Probar que todo cubrimiento por abiertos de un espacio métrico compacto tiene un número de Lebesgue.

Ejercicio 17. Sea (X,d) un espacio métrico. Se dice que una familia $(F_i)_{i\in I}$ de subconjuntos de X tiene la *propiedad de intersección finita* (P.I.F.) si cualquier subfamilia finita de $(F_i)_{i\in I}$ tiene intersección no vacía.
Probar que los siguientes enunciados son equivalentes:

i) X es compacto.

ii) Toda familia $(F_i)_{i\in I}$ de subconjuntos cerrados de X con la P.I.F. tiene intersección no vacía.

iii) Todo subconjunto infinito de X tiene un punto de acumulación en X.

iv) Toda sucesión en X tiene una subsucesión convergente.

v) X es completo y totalmente acotado.

Ejercicio 18. Sean (X,d) e (Y,d') espacios métricos y $f : X \longrightarrow Y$ continua y biyectiva. Probar que si (X,d) es compacto, entonces f es un homeomorfismo.

Ejercicio 19. Sea (X,d) un espacio métrico compacto. Probar que para cada espacio métrico (Y,d'), la proyección $\pi : X\times Y \to Y$ definida por $\pi(x,y) = y$ es cerrada.

Ejercicio 20. Sean (X,d) e (Y,d') espacios métricos, y sea $f : X \longrightarrow Y$ una función. Probar que si Y es compacto y el gráfico de f es cerrado en $(X\times Y, d_\infty)$, entonces f es continua. Comparar con el ejercicio 15 de la prctica 3.

Ejercicio 21.

i) Sea $f : \mathbb{R}_{\geq a} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función que es uniformemente continua en $[a,b]$ y también en $[b,+\infty)$. Probar que f es uniformemente continua en $\mathbb{R}_{\geq a}$.

ii) Deducir que $\sqrt{x}$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

iii) Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y tal que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Probar que f es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 22. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y abierta.

i) Probar que f no tiene extremos locales; es decir, no existen $x_0 \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$ tales que $f(x_0) \leq f(x)$ (resp. $f(x_0) \geq f(x)$) para todo $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$.

ii) Comprobar que existen $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ tales que $f(\mathbb{R}) = (a, b)$.

iii) Mostrar que $f : \mathbb{R} \longrightarrow (a, b)$ es un homeomorfismo y que ella y su inversa son funciones monótonas.

Ejercicio 23. Sea (X, d) un espacio métrico compacto y sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función semicontinua superiormente. Probar que f está acotada superiormente en X y que f alcanza máximo en X.