Práctica 2: Espacios Métricos

"Mathematics is a part of physics.
Physics is an experimental science, a part of natural science.
Mathematics is the part of physics where experiments are cheap...."
V.I. Arnold.

A. $\mathbb{R}^n$ como Espacio Métrico

Ejercicio 1. Probar que toda colección de conjuntos abiertos disjuntos de $\mathbb{R}^n$ es a lo sumo numerable. Dar un ejemplo de colección de conjuntos cerrados disjuntos que no sea numerable.

Ejercicio 2. Sea G la colección de todas las bolas $B(q, r)$ de $\mathbb{R}^n$ con centro $q \in \mathbb{Q}^n$ y radio racional r. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $x \in S$. Probar que $\exists\ B \in G$ tal que $x \in B \subseteq S$.

Ejercicio 3. *Teorema de Lindelöf.* Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\mathcal{C} = \big(W_i\big)_{i \in I}$ un cubrimiento por abiertos de A. Probar que existe un subcubrimiento numerable de $\mathcal{C}$ que cubre a A.

Ejercicio 4. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ es un *punto de condensación* de S si toda bola B centrada en x tiene la propiedad de que $B \cap S$ es no numerable. Probar que si S es no numerable entonces existe un punto $x \in S$ de condensación de S.

Ejercicio 5. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$, probar que la colección de puntos aislados de S es numerable.

Ejercicio 6. Se definen las funciones $d_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $(1 \leq i \leq 5)$ por:

$$d_1(x, y) = (x - y)^2 \quad ; \quad d_2(x, y) = \sqrt{|x - y|} \quad ; \quad d_3(x, y) = |x^2 - y^2|;$$

$$d_4(x, y) = |x - 2y| \quad ; \quad d_5(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}.$$

Determinar cuáles de estas funciones son métricas en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 7.

i) Probar que las siguientes funciones son métricas en $\mathbb{R}^n$:

a) $d_1(x, y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$.

b) $d_2(x, y) = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right)^{1/2}$.

c) $d_\infty(x, y) = \displaystyle\sup_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$.

ii) Para $n = 2$, dibujar las tres bolas abiertas $B(0, 1)$ de centro $0 \in \mathbb{R}^2$ y radio 1.

B. Espacios Métricos

"Muchos resultados principales del Análisis no tienen nada que ver con la naturaleza algebraica de los números reales y sólo se apoyan en aquellas propiedadedes de los números que están relacionadas con el concepto de distancia. Así, llegamos al concepto de espacio métrico, uno de los más importantes de la matemática moderna."

KOLMOGOROV

Ejercicio 8. Sea $N : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$N(a) = \begin{cases} 2^{-n} & \text{si } a \neq 0, \quad p^n \mid a \quad \text{y} \quad p^{n+1} \nmid a \text{ ;} \\ 0 & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

donde p es un primo fijo, y sea $d : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $d(a, b) = N(a - b)$. Probar que $(\mathbb{Z}, d)$ es un espacio métrico.

Ejercicio 9. Sean X un conjunto y $\delta : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y, \\ 0 & \text{si } x = y. \end{cases}$$

Verificar que δ es una métrica y hallar los abiertos de (X, δ).

NOTA: δ se llama *métrica discreta* y (X, δ) *espacio métrico discreto.*

Ejercicio 10. Sea $\ell_\infty = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} : (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ es acotada}\}$. Se considera $d : \ell_\infty \times \ell_\infty \to \mathbb{R}$ definida por $d((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n - b_n|$. Probar que (ℓ_∞, d) es un espacio métrico.

Ejercicio 11. Dados $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, se define $C[a, b] = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} : f \text{ es continua } \}$. Probar que son espacios métricos:

i) $(C[a, b], d_1)$, con $d_1(f, g) = \displaystyle\int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$.

ii) $(C[a, b], d_\infty)$, con $d_\infty = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$.

Ejercicio 12. Sean (X_1, d_1) y (X_2, d_2) espacios métricos. Consideremos el conjunto $X_1 \times X_2$ y la aplicación $d : (X_1 \times X_2) \times (X_1 \times X_2) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$.

i) Probar que d define una métrica en $X_1 \times X_2$.

ii) Construir otras métricas en $X_1 \times X_2$.

C. Algunas Propiedades Topológicas

Ejercicio 13. Sea (X, d) un espacio métrico y sean $A, B \subseteq X$.

i) Probar las siguientes propiedades del *interior* de un conjunto:

a) $A^\circ = \bigcup_{\substack{G \text{ abierto} \\ G \subseteq A}} G$.

b) $\emptyset^\circ = \emptyset$ y $X^\circ = X$.

c) $A \subseteq B \Longrightarrow A^\circ \subseteq B^\circ$.

d) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$. ¿Se puede generalizar a una intersección infinita?

e) $(A \cup B)^\circ \supseteq A^\circ \cup B^\circ$. ¿Vale la igualdad?

ii) Probar las siguientes propiedades de la *clausura* de un conjunto:

a) $\overline{A} = \bigcap_{\substack{F \text{ cerrado} \\ A \subseteq F}} F$.

b) $\overline{\emptyset} = \emptyset$ y $\overline{X} = X$.

c) $A \subseteq B \Longrightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$.

d) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. ¿Se puede generalizar a una unión infinita?

e) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

f) $x \in \overline{A} \Longleftrightarrow$ existe una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $x_n \longrightarrow x$.

iii) Probar las siguientes propiedades que relacionan interior y clausura:

a) $(X \setminus A)^\circ = X \setminus \overline{A}$.
b) $\overline{X \setminus A} = X \setminus A^\circ$.
c) ¿Son ciertas las igualdades: $\overline{A} = \overline{A^\circ}$; $A^\circ = (\overline{A})^\circ$?

iv) Probar las siguientes propiedades de la *frontera* de un conjunto:

a) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$.
b) ∂A es cerrado.
c) $\partial A = \partial(X \setminus A)$.

Ejercicio 14. Sea (X, d) un espacio métrico y sean $G \subseteq X$ abierto y $F \subseteq X$ cerrado. Probar que $F \setminus G$ es cerrado y $G \setminus F$ es abierto.

Ejercicio 15. Sea (X, d) un espacio métrico. Dados $a \in X$ y $r \in \mathbb{R}_{>0}$, llamamos *bola cerrada de centro a y radio r* al conjunto $\overline{B}(a, r) = \{x \in X : d(x, a) \leq r\}$.

i) Probar que $\overline{B}(a, r)$ es un conjunto cerrado y que $\overline{B(a, r)} \subseteq \overline{B}(a, r)$.

ii) Dar un ejemplo de un espacio métrico y una bola abierta $B(a, r)$ cuya clausura no sea $\overline{B}(a, r)$.

Ejercicio 16. Sean (X, d_1) e (Y, d_2) espacios métricos. Se considera el espacio métrico $(X \times Y, d)$, donde d es la métrica definida en el Ejercicio 12. Probar que para $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$ valen:

i) $(A \times B)^\circ = A^\circ \times B^\circ$.

ii) $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.

Ejercicio 17. Sea (X, d) un espacio métrico y sean A, B subconjuntos de X.

i) Probar las siguientes propiedades del *derivado* de un conjunto:

a) A' es cerrado.
b) $A \subseteq B \Longrightarrow A' \subseteq B'$.
c) $(A \cup B)' = A' \cup B'$.
d) $\overline{A} = A \cup A'$.
e) $(\overline{A})' = A'$.

ii) Probar que $x \in X$ es un punto de acumulación de $A \subseteq X$ si y sólo si existe una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $x_n \longrightarrow x$ y $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ no es casi constante.

Ejercicio 18. Hallar interior, clausura, conjunto derivado y frontera de cada uno de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$. Determinar cuáles son abiertos o cerrados.

$$[0, 1] \quad ; \quad (0, 1) \quad ; \quad \mathbb{Q} \quad ; \quad \mathbb{Q} \cap [0, 1] \quad ; \quad \mathbb{Z} \quad ; \quad [0, 1) \cup \{2\}.$$

Ejercicio 19. Caracterizar los abiertos y los cerrados de $\mathbb{Z}$ considerado como espacio métrico con la métrica inducida por la usual de $\mathbb{R}$. Generalizar a un subespacio discreto de un espacio métrico X.

Ejercicio 20. Sea (X, d) un espacio métrico y sean $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sucesiones en X.

i) Si $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ y $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, probar que $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$.

ii) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son dos sucesiones de Cauchy en X, probar que la sucesión real $(d(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

Ejercicio 21. Un subconjunto A de un espacio métrico X se dice un G_δ (resp. un F_σ) si es intersección de una sucesión de abiertos (resp. unión de una sucesión de cerrados) de X.

i) Probar que el complemento de un G_δ es un F_σ.

ii) Probar que el complemento de un F_σ es un G_δ.

iii) Probar que todo cerrado es un G_δ. Deducir que todo abierto es un F_σ.

iv) *a*) Exhibir una sucesión de abiertos de $\mathbb{R}$ cuya intersección sea $[0, 1)$. Idem con $[0, 1]$.
   b) Exhibir una sucesión de cerrados de $\mathbb{R}$ cuya unión sea $[0, 1)$.
   c) ¿Qué conclusión puede obtenerse de estos ejemplos?

Ejercicio 22.

i) Sea (X, d) un espacio métrico. Se define $d'(x, y) = \dfrac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$. Probar que d' es una métrica en X topológicamente equivalente a d (o sea, ambas dan lugar a una misma noción de conjunto abierto). Observar que $0 \le d'(x, y) < 1$ para todo $x, y \in X$.

ii) Sea $(X_n, d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de espacios métricos tales que para cada $n \in \mathbb{N}$ vale $0 \le d_n(x, y) \le 1$ para todo par de elementos $x, y \in X_n$. Para cada $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definimos:
$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n}.$$
Probar que d es una métrica en el espacio producto $X = \prod\limits_{n=1}^{\infty} X_n$.

iii) Sea (X, d) un espacio métrico. Llamamos $X^{\mathbb{N}}$ al conjunto de las sucesiones de X. Mostrar que aplicando i) y ii) se le puede dar una métrica a $X^{\mathbb{N}}$.

Ejercicio 23. Sean d_∞ y d_2 las métricas en $\mathbb{R}^n$ definidas en el Ejercicio 7. Mostrar que d_∞ y d_2 son topológicamente equivalentes.

D. Distancias a conjuntos

Ejercicio 24. Sea (X, d) un espacio métrico. Dados $A \subseteq X$ no vacío y $x \in X$, se define la *distancia de x a A* como $d_A(x) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}$. Probar:

i) $\big|d_A(x) - d_A(y)\big| \le d(x, y)$ para todo par de elementos $x, y \in X$.

ii) $x \in A \implies d_A(x) = 0$.

iii) $d_A(x) = 0 \iff x \in \overline{A}$.

iv) $B_A(r) = \{x \in X : d_A(x) < r\}$ es abierto para todo $r > 0$.

v) $\overline{B}_A(r) = \{x \in X : d_A(x) \leq r\}$ es cerrado para todo $r > 0$.

Ejercicio 25. Sea (X, d) un espacio métrico. Dados $A, B \subseteq X$ no vacíos se define la *distancia entre A y B* por $d(A, B) = \text{ínf}\{d(a, b) : a \in A \ , \ b \in B\}$. Determinar si las siguientes afirmaciones son **verdaderas o falsas**:

i) d es una distancia en $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$.

ii) $d(A, B) = d(\overline{A}, B)$.

iii) $d(A, B) = 0 \iff A \cap B \neq \emptyset$.

iv) $d(A, B) = 0 \iff \overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$.

v) $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$.