Ejercicio 1. Ver si las siguientes funciones son distancias.

- $d_1(x,y) = (x-y)^2$ No es distancia.

  Proof. $d_1(-1,1) = 4 > 1+1 = d_1(-1,0) + d_1(0,1)$ □

- $d_2(x,y) = \sqrt{|x-y|}$ es una distancia
  1. $d_2(x,y) = 0 \iff \sqrt{|x-y|} = 0 \iff |x-y| = 0 \iff x = y$
  2. $d_2(x,y) = d_2(y,x)$ es trivial
  3. $d_2(x,y)^2 = |x-y| < |x-z| + |z-y| \leq |x-z| + |z-y| + 2\sqrt{|x-z||z-y|} = (\sqrt{|x-z|} + \sqrt{|z-y|})^2 = (d_2(x,z) + d_2(z,y))^2$
     Luego $d_2(x,y)^2 \leq (d_2(x,z) + d_2(z,y))^2$
     Y es tirivial ver que entonces $d_2(x,y) \leq d_2(x,z) + d_2(z,y)$

- $d_3(x,y) = |x^2 - y^2|$ Es facil ver que no es distancia $d_3(-2,2) = 0$

- $d_4(x,y) = |x - 2y|$ Es trivial devuelta $d_4(2,1) = 0$

- $d_5(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$. Tomemos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = \frac{t}{1+xt}$. Viendo que su derivada es siempre mayor que 0 podemos notar que esta función es estrictamente creciente
  Además $f(a)+f(b)-f(a+b) = \frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} - \frac{a+b}{1+a+b} = \frac{a((1+b)(1+a+b))+b((1+a)(1+a+b))-(a+b)((1+a)(1+b))}{(1+a)(1+b)(1+a+b)}$
  $= \frac{(a+ab)(1+a+b)+(b+ab)(1+b+a)-(a+b)(1+a+b+ab)}{(1+a)(1+b)(1+a+b)} = \frac{a+2ab+a^2+a^2b+ab^2+b+2ab+b^2+ab^2+ba^2-(a+b+a^2+ba+ab+b^2+a^2b+ab^2)}{(1+a)(1+b)(1+a+b)}$
  $\frac{a+4ab+a^2+2a^2b+2ab^2+b+b^2-(a+b+a^2+ba+ab+b^2+a^2b+ab^2)}{(1+a)(1+b)(1+a+b)} = \frac{2ab+ab^2+a^2b}{(1+a)(1+b)(1+a+b)} \geq 0$

  Por lo tanto $f(a+b) \leq f(a) + f(b)$

  Entonces $d(x,y) = f(|x-y|) \leq f(|x-z|+|z-y|) \leq f(|x-z|) + f(|z-y|) = d(x,z) + d(z,y)$

  La primera desigualdad vale por que f es creciente y usando la desigualdad de módulos de siempre, la segunda vale por lo probado arriba

Ejercicio 2. Es una clásica demostración de taller de cálculo.

Ejercicio 3. Sean X un conjunto y $\delta : X \times X \to \mathbb{R}$ definida por

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y \\ 0 & \text{si } x = y \end{cases}$$

Verificar que δ es una métrica y hallar los abiertos de (X, δ)
Nota: δ se llama metrica discreta y (X,δ) espacio métrico discreto

Proof.
1. $\delta(x,y) = 0 \iff x = y$
2. Supongamos $x \neq y \Rightarrow \delta(x,y) = 1 = \delta(y,x)$
3. Supongamos devuelta $x \neq y$ si no es obvio que vale , $\delta(x,y) = 1 \leq \delta(x,z) + \delta(z,y)$ esto vale seguro , por que no puede suceder $\delta(x,z) = \delta(z,y) = 0$ por que esto implicaría $x = z = y$ absurdo

□

Ejercicio 4. Sea $N : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ la funcion definida por

$$N(x) = \begin{cases} 2^{-n} & \text{si } a \neq 0, \quad p^n | a \quad \text{y} \quad p^{n+1} \nmid a \\ 0 & \text{si } a = 0 \end{cases}$$

donde p es un primo fijo, y sea $d : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ dada por $d(a, b) = N(a - b)$. Probar que $(\mathbb{Z}, d)$ es un espacio métrico

Proof. Primero definamos para cada entero no nulo $\phi_p(a)$ que es el mayor $n \in \mathbb{N}$ tal que $p^n | a$

Es simple ver $\phi_p(a) = \phi_p(-a)$ tambien $\phi_p(a + b) \geq \min\{\phi_p(a), \phi_p(b)\}$

Ahora podemos reescribir

$$d(a, b) = \begin{cases} 2^{-\phi_p(a-b)} & \text{si } a \neq b \\ 0 & \text{si } a = b \end{cases}$$

1. Sea $d(a, b) = 0$ entonces $a = b$ por definición , por que $2^n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$
2. Asumiendo $a \neq b$ tenemos $d(a, b) = 2^{-\phi_p(a-b)} = 2^{-\phi_p(-(a-b))} = 2^{-\phi_p(-a+b)} = d(b, a)$
3. Ahora consideremos que $\phi_p(a - b) = \phi_p((a - c) + (c - b)) \geq \min\{\phi_p(a - c), \phi_p(c - b)\}$

   Tambien supongo por comodidad $a \neq b \neq c$ por comodidad, si alguno fuera igual la demostración es trivial

   $d(a, b) = 2^{-\phi_p(a-b)} \leq 2^{-\min\{\phi_p(a-c), \phi_p(c-b)\}} = \min\{2^{\phi_p(a-c)}, 2^{\phi_p(c-b)}\} \leq 2^{\phi_p(a-c)} + 2^{\phi_p(c-b)}$

   Finalmente $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$

   Entonces d es una métrica y por lo tanto $(\mathbb{Z}, d)$ es un pár conjunto, métrica o lo que es lo mismo , un espacio métrico

$\square$

Ejercicio 5. Sea $\ell_\infty = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} : (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ es acotada}\}$. Se considera $d : \ell_\infty \times \ell_\infty \to \mathbb{R}$ definida por $d(a_n, b_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n - b_n|$. Probar que (ℓ_∞, d) es un espacio métrico.

Proof.

1. $d(a_n, b_n) = 0 \iff \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n - b_n| = 0 \iff 0 \leq |a_n - b_n| \leq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

   $\iff |a_n - b_n| = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \iff a_n = b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
2. $d(a_n, b_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n - b_n| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |b_n - a_n| = d(b_n, a_n)$
3. Sabemos que $|a_n - b_n| \leq |a_n + c_n| + |c_n - b_n|$

   $\sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n - b_n| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}}(|a_n + c_n| + |c_n - b_n|) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n + c_n| + \sup_{n \in \mathbb{N}} |c_n - b_n|$

   $d(a_n, b_n) \leq d(a_n, c_n) + d(c_n, b_n)$

$\square$

Ejercicio 6. Dados $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, se define $\mathcal{C}[a, b] = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} : f \text{ es continua}\}$. Probar que son espacios métricos.

i. $(\mathcal{C}[a, b], d_1)$ con $d_1(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$

ii. $(\mathcal{C}[a, b], d_\infty)$, con $d_\infty(f, g) = \sup_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$

Proof. Son demostraciones de taller. De todas maneras las desigualdades salen usando $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - f(y)|$

□

Ejercicio 7. Sea (X, d) un espacio métrico. Se define $d'(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$

i) d' es una métrica en X, que satisface $0 \leq d'(x,y) \leq 1 \quad \forall x, y \in X$

Proof. Veamos que es métrica , las dos primeras propiedades son triviales, veamos la desigualdad, usando la misma funcione que habíamos usado antes $f(t) = \frac{t}{1+t}$ tenemos que $d'(x,y) = f(d(x,y)) \leq f(d(x,z) + d(z,y)) \leq f(d(x,z)) + f(d(z,y)) = d'(x,z) + d'(z,y)$

Esto vale por que f es creciente y por que d es métrica

Por otro lado es trivial que $0 \leq d'(x,y)$

Supongamos que $d'(x,y) > 1 \Rightarrow d(x,y) > 1 + d(x,y)$ lo que es absurdo , entonces $d'(x,y) \leq 1$ □

ii) $A \subseteq X$ es abierto para la métrica d si y sólo si lo es para la métrica d'

Proof. Tomemos cualquier bola abierta en d , $B_d(x,r)$

Ahora dado $y \in B_d(x,r)$ sabemos que $d(x,y) < r \Rightarrow d'(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} < d(x,y) < r$

Por lo tanto $y \in B_{d'}(x,r)$ entonces $B_d(x,r) \subseteq B_{d'}(x,r)$

$\Leftarrow$) Entonces si tenemos un abierto con d' en $A \subseteq X$ tenemos que dado $x \in X$ existe $B_{d'}(x,r) \subseteq A$ luego $B_d(x,r) \subseteq B_{d'}(x,r) \subseteq A$ por lo tanto tambien es abierto en d

$\Rightarrow$) Ahora tomemos nuevamente un abierto en A con respecto a d. Dado $x \in A$ tenemos $B_d(x,r) \subseteq A$.

Ahora si consideramos $r' = \frac{r}{r+1}$ podemos afirmar que $B_{d'}(x,r') \subseteq B_d(x,r) \subseteq A$

Probémoslo, sea $y \in B_{d'}(x,r')$ entonces $d'(x,y) < r' = \frac{r}{r+1}$, luego $\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} < \frac{r}{r+1}$

Entonces $d(x,y) < \frac{r}{r+1}(1 + d(x,y)) \leq \frac{r}{r+1}(1+r) = r$

Finalmente $d(x,y) < r$ entonces $y \in B_d(x,r)$

Entonces A es abierto con respecto a d' □

iii) Deducir que $(x_n)_n$ converge a x con respecto en la métrica d si y sólo si converge a x con respecto a la métrica d'

Proof. $\Rightarrow$) Converge en d entonces $\forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, x_n) \leq \epsilon \quad \forall n \geq n_0$

Como $d'(x, x_n) < d(x, x_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Tenemos que:

$\forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 \ d'(x, x_n) < d(x, x_n) \leq \epsilon \quad \forall n \geq n_0$

Por lo tanto $x_n \to x$ con la métrica d'

$\Leftarrow$) Supongamos que x_n converge a x con d'. Ahora dado un $\epsilon > 0$ sabemos que $\exists r > 0$ tal que $B_{d'}(x,r) \subseteq B_d(x,\epsilon)$ y por convergencia de x_n tenemos que $\exists n_0$ tal que $x_n \in B_{d'}(x,r) \subseteq B_d(x,\epsilon) \quad \forall n \geq n_0$ entonces dado un ϵ conseguimos un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B_d(x,\epsilon) \quad \forall n \geq n_0$ y esto lo podemos hacer para cualquier $\epsilon > 0$

Entonces x_n converge a x con la métrica d □

Ejercicio 8. Sean (X_1, d_1) y $(X_2.d_2)$ espacios métricos. Consideremos el conjunto $X_1 \times X_2$ y la aplicación $d : (X_1 \times X_2) \times (X_1 \times X_2) \to \mathbb{R}$ dada por

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$$

(a) Probar que d define una métrica en $X_1 \times X_2$

Proof. i. Por comodida tomemos $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ $d(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$ como ambas d_1, d_2 son distancias entonces son mayores a 0 entonces $d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \geq 0$

ii. $d(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2) = d_1(y_1, x_1) + d_2(y_2, x_2) = d(y, x)$

iii. $d(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2) \leq d_1(x_1, z_1) + d_1(z_1, y_1) + d_2(x_2, z_2) + d_2(z_2, y_2) = d(x, z) + d(z, y)$

□

(b) $\Rightarrow$) Sea $(a_n, b_n)_n$ convergente a (a, b) entonces $d_1(a_n, a) + d_2(b_n, b) = d((a_n, b_n), (a, b)) \to 0$ entonces $d_1(a_n, a) + d_2(b_n, b) \to 0$ dado que son distancias son ambas mayores o iguales que 0 , por lo tanto ambas convergen a 0 , si no el sumando no convergería.

$\Leftarrow$) $a_b \to a$ y $b_n \to b$ entonces $d_2((a_n, b_n), (a, b)) = d_1(a_n, a) + d_2(b_n, b) \to 0$

Ejercicio 9. Sea $(X_n, d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de espacios métricos, y consideramos el producto cartesiano $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$. El objetivo del ejercicios es construír una métrica para X en la cual la convergencia de una sucesión equivalga a la convergencia en cada coordenada, como en el ejercicios anteriór.

1. Supongamos primero que todos los X_n tienen diámetro menor o igual que 1, es decir $d_n(x, y) \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x, y \in X_n$. Dados dos elementos $x = (x_n)_n$ e $y = (y_n)_n$ en X, definimos

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n}$$

Probar que d es una métrica

Proof. Las primeras dos propiedades son triviales considerando que cada d_n es métrica

Ahora veamos la desigualdad

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d_n(x_n, y_n)}{2^n} = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2) + \cdots \leq d_1(x_1, z_1) + d_1(z_1, y_1) + \cdots$$

$$= \sum d_n(x_n, z_n) + d_n(z_n, y_n) = d(x, z) + d(z, y)$$

Entonces es una métrica □

2. Sea $x^1, x^2, x^3, ..$ una sucesión de puntos de X, es decir, cada x^k es una sucesión $(x_1^k, x_2^k, \cdots)$, en la cual $x_n^k \in X_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Sea $x = (x_n)_n$ un elemento de X. Probar que, con la métrica d definida en el ítem anteriór, $x^k \to x$ en X si y sólo para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $x_n^k \to x_n$ en X_n

Proof. Tenemos que $d(x^k, x) \to 0$ o lo que es equivalente dado $\epsilon > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $d(x^k, x) \leq \epsilon \quad \forall k \geq k_0$.

Entonces $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n(x_n^k, x_n)}{2^n} \leq \epsilon$

Luego $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n(x_n^k, x_n)}{2^n} \leq 2^n \epsilon$

Ahora dado cualquier $n \in \mathbb{N}$ tenemos que $d_n(x_n^k, x_n) \leq C\epsilon \quad \forall k \geq k_0$ (Donde $C = 2^n$ es una constante)

O lo que es lo mismo $x_n^k \to x_n$. Y esto vale para cualquier $n \in \mathbb{N}$ que tomemos □

Ejercicio 10. Sea (X, d) un espacio métrico y sean $A, B \subseteq X$

1. Probar las siguientes propiedades del interiór de un conjunto:

   (a)
   $$A^{\mathrm{o}} = \bigcup_{G \text{ abierto}, \, G \subseteq A} G$$

   Proof. $\subseteq$) Sea $x \in A^{\mathrm{o}}$ entonces existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq A$ y este es un abierto contenido en A entonces $x \in B(x, r) \subseteq \bigcup G$
   $\supseteq$) Sea $x \in \bigcup G$ entonces $x \in G$ para algún G de la unión
   Como G es abierto existe $B(x, r) \subseteq G$ y por otro lado $G \subseteq A$
   Entonces existe $B(x, r) \subseteq A$ entonces $x \in A^{\mathrm{o}}$ □

   (b) $\emptyset^{\mathrm{o}} = \emptyset$

   Proof. Supongamos $\emptyset^{\mathrm{o}} \neq \emptyset$ entonces $\exists x \in X$ tal que $x \in \emptyset^{\mathrm{o}}$
   Luego tiene que existir $B(x, r) \subseteq \emptyset$ que es absurdo □

   (c) $X^{\mathrm{o}} = X$

   Proof. $\subseteq$) Vale siempre
   $\supseteq$) Sea $x \in X$ supongamos que $x \notin X^{\mathrm{o}}$ entonces $\forall r > 0 \quad B(x, r) \nsubseteq X$ entonces $\exists y \in B(x, r)$ tal que $y \notin X$
   Absurdo por que X es todo no pueden existir cosas que no esten en X □

   (d) $A \subseteq B \Rightarrow A^{\mathrm{o}} \subseteq B^{\mathrm{o}}$

   Proof. Sea $x \in A^{\mathrm{o}}$ entonces existe $B(x, r) \subseteq A \subseteq B$ luego $x \in B^{\mathrm{o}}$ □

   (e) $(A \cap B)^{\mathrm{o}} = A^{\mathrm{o}} \cap B^{\mathrm{o}}$. ¿Se puede generalizar a una intersección infinita?

   Proof. $\subseteq$) Sea $x \in (A \cap B)^{\mathrm{o}}$ entonces existe $B(x, r) \subseteq A \cap B$
   Pero entonces $B(x, r) \subseteq A$ por lo que $x \in A^{\mathrm{o}}$
   Tambien $B(x, r) \subseteq B$ por lo que $x \in B^{\mathrm{o}}$
   Luego $x \in A^{\mathrm{o}} \cap B^{\mathrm{o}}$
   Esta se puede generalizar a infinito
   $\supseteq$) Sea $x \in A^{\mathrm{o}} \cap B^{\mathrm{o}}$ entonces $x \in A^{\mathrm{o}}$ y $x \in B^{\mathrm{o}}$
   Entonces existe $B(x, r_1) \subseteq A$ y también $B(x, r_2) \subseteq B$

Si tomamos $r = \min\{r_1, r_2\}$ tenemos que $B(x,r) \subseteq A$ y tambien $B(x,r) \subseteq B$
Entonces $B(x,r) \subseteq A \cap B$ finalmente $x \in (A \cap B)^{\mathrm{o}}$
Esta no se puede generalizar , por que ahora no necesariamente tenemos mínimo , y tenemos un conjunto de radios que si bien está acotado inferiormente por 0, nada nos asegura que el infimo no sea el mismo 0 que no nos serviría como radio.
Ejemplo $\bigcap B(x, \frac{1}{n}) = \bigcap (B(x, \frac{1}{n}))^{\circ}$ esto es porque las bolas son abiertas por ende iguales a su interiór
$x \in \bigcap (B(x, \frac{1}{n}))^{\circ}$ sin embargo $x \notin (\bigcap B(x, \frac{1}{n}))^{\circ} = \{x\}^{\circ} = \emptyset$ □

(f) $(A \cup B)^{\mathrm{o}} \supseteq A^{\mathrm{o}} \cup B^{\mathrm{o}}$ ¿Vale la igualdad?

Proof. $x \in A^{\mathrm{o}} \cup B^{\mathrm{o}}$ entonces x esta en alguno de los dos o los dos interiores
Supongamos $x \in A^{\mathrm{o}}$ entonces existe $B(x,r) \subseteq A \subseteq A \cup B$
Entonces $x \in (A \cup B)^{\mathrm{o}}$
Si esta en ambos , en particular esta en una , asi que usamos lo de arriba nuevamente
No vale la igualdad por ejemplo $A = [1,2]$ y $B = [2,3]$
$A^{\mathrm{o}} \cup B^{\mathrm{o}} = (1,2) \cup (2,3) \neq (1,3) = ([1,3])^{\mathrm{o}} = (A \cup B)^{\mathrm{o}}$ □

2. Probar las siguiente propiedades de la clausura de un conjunto

(a)
$$\overline{A} = \bigcap_{F \text{ cerrado, } A \subseteq F} F$$

Proof. $\subseteq$) Sea $x \in \overline{A}$ entonces $\forall r > 0, B(x,r) \cap A \neq \emptyset$ ahora supongamos $x \notin F$ para algún F
Como $F = \overline{F}$ por ser cerrado, entonces $x \notin \overline{F}$ para algún F en la intersección
Entonces $\exists r' > 0$ tal que $B(x,r') \cap F = \emptyset$
Pero esto es absurdo dado que $A \subseteq F$ tenemos $\emptyset \neq B(x,r') \cap A \subseteq B(x,r') \cap F = \emptyset$
Provino de suponer que $x \notin F$ por lo tanto $x \in F$
Y esto vale para cualquier F cerrado tal que $A \subseteq F$
Entonces x esta en todos estos F y por ende en la intersección
$\supseteq$) Supongamos que $x \in \bigcap F$ pero $x \notin \overline{A}$ entonces tiene que existir un $r > 0$ tal que $B(x,r) \cap A = \emptyset$ luego tenemos que $A \subseteq X \setminus B(x,r)$ que ademas es cerrado por que es el complemento de $B(x,r)$ que es abierto
Pero entonces $X \setminus B(x,r)$ es un cerrado que contiene a A por ende es uno de los F en la intersección
Entonces $x \in X \setminus B(x,r)$ lo cual es absurdo
Provino de suponer que existia un $r > 0$ tal que $B(x,r) \cap A = \emptyset$
Entonces $\forall r > 0 \quad B(x,r) \cap A \neq \emptyset$ por lo tanto $x \in \overline{A}$ □

(b) $\overline{\emptyset} = \emptyset$

Proof. Supongamos que son diferentes entonces $\exists x \in X$ tal que $x \in \overline{\emptyset}$
entonces $\forall r > 0 \quad B(x,r) \cap \emptyset \neq \emptyset$ lo cual es absurdo □

(c) $\overline{X} = X$

Proof. $\supseteq$) Sea $x \in X$ entonces $\forall r > 0$ tenemos que $B(x,r) \cap X \neq \emptyset$ por que $x \in B(x,r)$ y $x \in X \quad \forall r > 0$
Entonces $x \in \overline{X}$
$\subseteq$) Sea $x \in \overline{X}$ entonces $B(x,r) \cap X \neq \emptyset \quad \forall r > 0$
Tomemos radios $\frac{1}{n}$, entonces $B(x, \frac{1}{n}) \cap X \neq \emptyset \quad \forall n \in \mathbb{N}$
Ahora $\emptyset \neq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B(x, \frac{1}{n}) \cap X = (\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B(x, \frac{1}{n})) \cap X = \{x\} \cap X$
Entonces $\{x\} \cap X \neq \emptyset$ por lo tanto $x \in X$ □

(d) $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$

Proof. Sea $x \in \overline{A}$ entonces $\forall r > 0 \quad B(x,r) \cap A \neq \emptyset$
Tambien sabemos que $A \subseteq B$ entonces $B(x,r) \cap A \subseteq B(x,r) \cap B$
Entonces $\forall r > 0 \quad B(x,r) \cap B \neq \emptyset$ luego $x \in \overline{B}$ □

(e) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ ¿ Se puede generalizar a unión infinita?

Proof. $\subseteq$) Sea $x \in \overline{A \cup B}$ luego $\forall r > 0 \quad B(x,r) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$
Supongamos $x \notin \overline{A} \cup \overline{B}$ entonces $x \notin \overline{A}$ y $x \notin \overline{B}$
Entonces $B(x, r_1) \cap A = \emptyset$ y por otro lado $B(x, r_2) \cap B = \emptyset$
Luego sea $r = \min\{r_1, r_2\}$ tenemos que

$$B(x,r) \cap (A \cup B) = (B(x,r) \cap A) \cup (B(x,r) \cap B) \subseteq (B(x,r_1) \cap A) \cup (B(x,r_2) \cap B) = \emptyset$$

Absurdo entonces no puede ser que $x \notin \overline{A}$ y $x \notin \overline{B}$
Por lo tanto $x \in \overline{A}$ o $x \in \overline{B}$ luego $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$
Creo que no vale la generalización
Por ejemplo consideremos los conjuntos $A_n = (\frac{1}{n}, 2]$. Luego $0 \in \overline{\bigcup_n A_n}$
Vale por que podemos construír una sucesión $x_j \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ tal que $x_j \to 0$
La podemos armar por ejemplo dando $x_1 = 2$ y despues $x_j \in A_j \setminus A_{j-1} \neq \emptyset$
Pero por otro lado $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \notin \overline{A}_n$ por lo tanto $0 \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A}_n$
$\supseteq$) Sea $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$ supongamos $x \in \overline{A}$ luego $\forall r > 0 \quad B(x,r) \cap A \neq \emptyset$
Entonces dado que $B(x,r) \cap A \subseteq B(x,r) \cap (A \cup B)$
Tenemos $B(x,r) \cap (A \cup B) \neq \emptyset$ por lo que $x \in \overline{A \cup B}$
Esta se puede generalizar facilmente a infinitos □

(f) $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$

Proof. Sea $x \in \overline{A \cap B}$ entonces $\forall r > 0 \quad B(x,r) \cap (A \cap B) \neq \emptyset$
Entonces por asociatividad $(B(x,r) \cap A) \cap B \neq \emptyset$
Entonces tenemos $\forall r > 0 \quad B(x,r) \cap A \neq \emptyset$ por lo que $x \in \overline{A}$
Lo mismo podemos hacer con B. Entonces $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$
No vale la vuelta:
Sea $A = \mathbb{Q}$ y $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad \overline{A \cap B} = \overline{\emptyset} = \emptyset \neq \mathbb{R} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \overline{\mathbb{Q}} \cap \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \overline{A} \cap \overline{B}$ □

(g) $x \in \overline{A} \iff$ existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $x_n \longrightarrow x$

Proof. $\Rightarrow$) Sea $x \in \overline{A}$ entonces $\forall n \in \mathbb{N} \quad B(x, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$
Entonces $\forall n \in \mathbb{N}$ existe $a_n \in A \cap B(x, \frac{1}{n})$ entonces $a_n \in A$ y $a_n \in B(x, \frac{1}{n})$
Que es lo mismo que decir $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists a_n \in A$ tal que $d(x, a_n) \leq \frac{1}{n}$
Ademas podemos ver que $d(x, a_n) \leq d(x, a_{n_0})$ si $n \geq n_0$.
Esto vale por que $B(x, \frac{1}{n}) \subseteq B(x, \frac{1}{n_0})$
Ahora dado cualquier ϵ sabemos que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} \leq \epsilon$
Por lo tanto $\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0$ tal que $\forall n \geq n_0 \quad d(x, a_n) \leq d(x, a_{n_0}) \leq \frac{1}{n_0} \leq \epsilon$
Juntando todo $\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, a_n) \leq \epsilon \quad \forall n \geq n_0$
Entonces $a_n \to x$
$\Leftarrow$) Sea $a_n \in A \quad \forall n \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \to x$
Entonces $\forall \epsilon > 0 \quad \exists a_n \in A$ tal que $d(x, a_n) \leq \epsilon$
Luego $\forall \epsilon > 0$ tenemos $a_n \in B(x, \epsilon)$ con $a_n \in A$
Por lo que $B(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$
Entonces $x \in \overline{A}$ □

3. Probar las siguientes propiedades que relacionan interiór y clausura:

   (a) $(X \setminus A)^{\circ} = X \setminus \overline{A}$

   Proof. $\subseteq$) Sea $x \in (X \setminus A)^{\circ}$ entonces existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq (X \setminus A)$
   Entonces $B(x, r) \cap A = \emptyset$ luego $x \notin \overline{A}$ y sabemos que $x \in X$
   Entonces $x \in X \setminus \overline{A}$
   $\supseteq$) Sea $x \in X \setminus \overline{A}$ entonces $x \notin \overline{A}$
   Entonces $\exists r > 0 \quad B(x, r) \cap A = \emptyset$
   Por lo tanto $B(x, r) \subseteq X \setminus A$ luego $x \in (X \setminus A)^{\circ}$ □

   (b) $\overline{X \setminus A} = X \setminus A^{\circ}$

   Proof. Sea $x \in X \setminus A^{\circ} \iff x \notin A^{\circ} \iff \forall r > 0 \quad B(x, r) \not\subseteq A$
   $\iff \forall r > 0 \quad B(x, r) \cap (X \setminus A) \neq \emptyset \iff x \in \overline{X \setminus A}$ □

   (c) ¿Es cierto que vale $\overline{A} = \overline{A^{\circ}}$?

   Proof. Si $A \subseteq \mathbb{R}$ con $A = \{1\}$ entonces $\overline{A} = \{1\} \neq \emptyset = \overline{\emptyset} = \overline{A^{\circ}}$ □

   (d) ¿Es cierto que vale $A^{\circ} = (\overline{A})^{\circ}$?
   $\mathbb{Q}^{\circ} = \emptyset \neq \mathbb{R} = \mathbb{R}^{\circ} = (\overline{\mathbb{Q}})^{\circ}$

4. Probar las siguientes propiedades de la frontera de un conjunto

   (a) $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$

   Proof. $\subseteq$) $x \in \partial A \iff \forall r > 0 \quad B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ y $B(x, r) \cap A^c \neq \emptyset$
   $\iff x \in \overline{A}$ y $x \in \overline{A^c} = \overline{X \setminus A} \iff x \in \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$ □

   (b) ∂A es cerrado

Proof. Esto es equivalente a ver que $\partial A = \overline{\partial A}$ una de las inclusiones es trivial
Veamos que $\overline{\partial A} \subseteq \partial A$. Sea $x \in \overline{\partial A}$ entonces $\forall r > 0 \quad B(x,r) \cap \partial A \neq \emptyset$
Luego $\forall r > 0 \quad B(x,r)$ tenemos un $y \in \partial A$ tal que $y \in B(x,r)$
Como $y \in B(x,r)$ que es abierto $\exists r'$ tal que $B(y,r') \subseteq B(x,r)$
Como $y \in \partial A$ entonces $\forall r$ tenemos $B(y,r) \cap A \neq \emptyset$ y $B(y,r) \cap A^c \neq \emptyset$
En particular vale para r', entonces $B(y,r') \cap A \neq \emptyset$ y $B(y,r') \cap A^c \neq \emptyset$
Entonces $\emptyset \neq B(y,r') \cap A \subseteq B(x,r) \cap A$ y tambien sucede con A^c
Entones $x \in \partial A$
Otra opción es usar el ejercicio de arriba, como $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$ que es una intersección de dos cerrados entonces es cerrado □

(c) $\partial A = \partial(X \setminus A)$

Proof. Esto sale por definición usando que $A^c = X \setminus A$ y que $A = (X \setminus A)^c$ □

Ejercicio 11. Sea (X,d) un espacio métrico y sea $A \subseteq X$ un conjunto numerable. Probar que $\#\overline{A} \leq \mathfrak{c}$

Proof. Sea $B = \{(a_n)_n \subseteq A : a_n \text{ converge}\}$. Tenemos una sobreyección $f : B \to \overline{A}$ donde $f(a_n) = a$ (con $a_n \to a$)

Es evidentemente sobreyectiva, por que para cualquier $x \in \overline{A}$ tenemos un sucesión contenida en A que converge a x

Esta sucesión está en B por ser una sucesión convergente contenida en A

Luego x tiene preimagen

Luego $\#\overline{A} \leq \#B \leq \#A^{\mathbb{N}} \leq \#\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \mathfrak{c}$ □

Ejercicio 12. Sea (X,d) un espacio métrico y sean $G \subseteq X$ abierto y $F \subseteq X$ cerrado. Probar que $F \setminus G$ es cerrado y $G \setminus F$ es abierto

Proof. Primero voy a probar que complemento de un abierto es cerrado. Sea A abierto , supongamos que A^c es abierto.

Supongo A^c no es cerrado, entonces existe algún punto de acumulación x de A^c tal que $x \notin A^c$ luego $x \in A$

Pero como $x \in A$ que es abierto entonces existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \subseteq A$, contradiciendo que x era punto de acumulación de A^c

Por lo tanto, A^c contiene todos sus puntos de acumulación entonces $A^c = \overline{A}$ por lo que es cerrado.

Que complemento de un cerrado A es abierto, sale de forma similar , suponiendo que el A^c no es abierto , entonces tenemos algún punto $x \in A^c$ que no es interiór

Por lo tanto para todo radio la bola de centro x no está contenida enteramente en el complemento, luego podemos armar una sucesion de A que converga a x y como A es cerrado el límite de la sucesión tiene que estar en A lo que es absurdo

Sabemos que $G \setminus F = G \cap F^c$ como F cerrado entonces F^c es abierto , por lo tanto tenemos una intersección de dos abiertos que sabemos que es abierta

Sabemos que $F \setminus A = F \cap G^c$ como G es abierto entonces G^c es cerrado, por lo tanto tenemos una intersección de dos cerrados que sabemos que es cerrada

□

Ejercicio 13. Sea (X, d) un espacio métrico. Dados $a \in X$ y $r \in \mathbb{R}_{>0}$, llamamos bola cerrada de centro a y radio r al conjunto $\overline{B}(a, r) = \{x \in X : d(x, a) \leq r\}$

1. Probar que $\overline{B}(a, r)$ es un conjunto cerrado y que $\overline{B(a, r)} \subseteq \overline{B}(a, r)$

   Proof. Sea $y \in X \setminus \overline{B}(x, r)$, entonces $d(x, y) > r$ por lo tanto $\epsilon = d(x, y) - r > 0$

   Ahora sea $z \in B(y, \epsilon)$ entonces $d(z, x) + d(z, y) \geq d(x, y)$

   Luego $d(z, x) \geq d(x, y) - d(z, y) > d(x, y) - \epsilon = r$

   Entonces $z \in X \setminus \overline{B}(x, r) \quad \forall z \in B(y, \epsilon)$

   Por lo que $\forall y \in X \setminus \overline{B}(x, r) \quad \exists B(y, \epsilon)$ tal que $B(y, \epsilon) \subseteq X \setminus \overline{B}(x, r)$

   Finalmente $X \setminus \overline{B}(x, r)$ es abierto entonces $\overline{B}(x, r)$ es cerrado

   Como sabemos que $B(x, r) \subseteq \overline{B}(x, r)$ y ahora sabiendo que $\overline{B}(x, r)$ cerrado

   Entonces $\overline{B(x, r)} \subseteq \overline{B}(x, r)$ □

2. Dar un ejemplo de un espacio métrico y una bola abierta $B(a, r)$ cuya clausura no sea $\overline{B}(a, r)$

   Esto es dar un ejemeplo donde $\overline{B(x, r)} \not\supseteq \overline{B}(x, r)$

   Consideremos el espacio métrico $(\mathbb{Z}, \delta)$ donde δ es la distancia discreta

   Para cualquier $x \in \mathbb{Z}$ tenemos $\overline{B(x, 1)} = \overline{\{x\}} = \{x\} \not\supseteq \mathbb{Z} = \overline{B}(x, 1)$

Ejercicio 14. Sean (X, d) un espacio métrico, p un punto de X y a, b números reales tales que $0 < a < b$. Probar que:

i. $\{x \in X / a < d(x, p) < b\}$ es abierto

   Proof. Primero sea $A_1 = \{x \in X : d(x, p) < b\}$ entonces $A_1 = B(x, b)$ que ya demostramos que es abierta

   Y luego consideremos $A_2 = \{x \in X : a < d(x, p)\}$

   Ahora si miramos $A_2^c = \{x \in X : d(x, p) \leq a)\} = \overline{B}(x, a)$ la bola cerrada que ya demostramos que es cerrada

   Entonces A_2 tiene que ser abierto

   Pero $A = A_1 \cap A_2$ entonces por ser intersección de abiertos es abierto □

ii. $\{x \in X / a \leq d(x, p) \leq b\}$ es cerrado. Sale igual que el i.

Ejercicio 15. Sean (X, d_1) e (Y, d_2) espacios métricos. Se considera el espacio métrico $(X \times Y, d)$, donde la d es la métrica definida en el Ejercicio 12. Probar que para $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$ valen:

1. $(A \times B)^{\circ} = A^{\circ} \times B^{\circ}$

   Proof.

   Lema 1. Sean U y V abiertos de X e Y respectivamente entonces $U \times V$ es abierto de $X \times Y$.

Proof. Sea $(x, y) \in U \times V$. como $x \in U$ que es abierto existe $B(x, r_1) \subseteq U$

Y lo mismo con y existe $B(y, r_2) \subseteq V$

Ahora si tomamos $r = \min\{r_1, r_2\}$.

Tenemos $B((x, y), r)$, veamos que está contenida en $U \times V$ por que entonces habiendo tomado cualquier $(x, y) \in U \times V$ estaríamos encontrando $B((x, y), r) \subseteq U \times V$. Probando que $U \times V$ es abierto

Sea $(x', y') \in B((x, y), r)$ luego $r > d((x, y), (x', y')) = d_1(x, x') + d_2(y, y')$. Ambos sumandos son positivos por ser distancias. Luego ambos sumandos tienen que ser menores que r

Entonces $d_1(x, x') < r \leq r_1$ entonces $x' \in B(x, r_1) \subseteq U$

Y también $d_2(y, y') < r \leq r_2$ entonces $y' \in B(y, r_2) \subseteq V$

Entonces $(x', y') \in U \times V$ luego $B_r(x, y) \subseteq U \times V$

Entonces para cualquier $(x, y) \in U \times V$ encontramos $B_r(x, y) \subseteq U \times V$

Luego $U \times V$ es abierto. $\square$

Continua el ejercicio:

Luego como A^{o} y B^{o} abierto entonces $A^{\text{o}} \times B^{\text{o}}$ abierto por lema

Luego dado que $A^{\text{o}} \times B^{\text{o}} \subseteq A \times B$ y $A^{\text{o}} \times B^{\text{o}}$ es abierto. Entonces $A^{\text{o}} \times B^{\text{o}} \subseteq (A \times B)^{\text{o}}$

Veamos $A^{\text{o}} \times B^{\text{o}} \supseteq (A \times B)^{\text{o}}$

Sea $(x, y) \in (A \times B)^{\text{o}}$ entonces existe $r > 0 \quad B_r(x, y) \subseteq (A \times B)$

Entonces si $x' \in B(x, \frac{r}{2})$ e $y' \in B(y, \frac{r}{2})$

Luego $d((x', y')(x, y)) = d_1(x', x) + d_2(y', y) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$

entonces $(x', y') \in B_r(x, y) \subseteq A \times B$

Luego $x' \in A$ y tambien $y' \in B$

Por lo tanto $B(x, \frac{r}{2}) \subseteq A$ y por otro lado $B(y, \frac{r}{2}) \subseteq B$

Entonces $x \in A^{\text{o}}$ e $y \in B^{\text{o}}$ luego $(x, y) \in A^{\text{o}} \times B^{\text{o}}$ $\square$

2. $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$

Proof. Siguiendo las ideas anteriores probemos que F y G cerrados entonces $F \times G$ es cerrado

Sea F e G cerrados entoncse $X \setminus F$ y $Y \setminus G$ son abiertos

Ahora como sabemos que X e Y son abiertos (y cerrados, pero no nos importa)

Luego $X \setminus F \times Y$ es abierto por ser producto de dos abiertos $X \setminus F$ e Y.

Pero $X \setminus F \times Y = X \times Y \setminus (F \times Y)$ y esto es el complemento de $F \times Y$

Entonces el complemento de $F \times Y$ es abierto , por lo que $F \times Y$ es cerrado

De la misma manera $X \times Y \setminus G = X \times Y \setminus X \times G$ abierto entonces $X \times G$ es cerrado

Luego $(X \times G) \cap (F \times Y) = F \times G$ es intersección de cerrado

Entonces $F \times G$ es cerrado

Luego usando esto tenemos que $\overline{A}$ y $\overline{B}$ son cerrados por lo que $\overline{A} \times \overline{B}$ es cerrado

Luego $A \times B \subseteq \overline{A} \times \overline{B}$ entonces $\overline{A \times B} \subseteq \overline{\overline{A} \times \overline{B}} = \overline{A} \times \overline{B}$

Veamos la otra inclusión. Tenemos $(x, y) \in \overline{A} \times \overline{B}$ queremos ver $(x, y) \in \overline{A \times B}$

Dado cualquier $r > 0$ queremos que $B(r, (x, y)) \cap A \times B \neq \emptyset$

Pero sabemos que $\forall r' > 0$ en particular para $\frac{r}{2}$ se da $B(x, \frac{r}{2}) \cap A \neq \emptyset$ y también $B(y, \frac{r}{2}) \cap B \neq \emptyset$

Recordemos $((A \times B) \cap (C \times D) = A \cap C \times B \cap D)$

Entonces $\emptyset \neq B(x, \frac{r}{2}) \cap A \times B(y, \frac{r}{2} \cap B) = (B(x, \frac{r}{2}) \times B(y, \frac{r}{2})) \cap (A \times B)$

Veamos que $B(x, \frac{r}{2}) \times B(y, \frac{r}{2}) \subseteq B((x, y), r)$

Sea $(x', y') \in B(x, \frac{r}{2}) \times B(y, \frac{r}{2})$ entonces $x' \in B(x, \frac{r}{2})$ e $y' \in B(y, \frac{r}{2})$

$d(x', x) < \frac{r}{2}$ y también $d(y, y') < r$

Entonces $d((x', y')(x, y)) = d(x', x) + d(y', y) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$

Por lo tanto $(x', y') \in B((x, r), r)$ luego $B(x, \frac{r}{2}) \times B(y, \frac{r}{2}) \subseteq B((x, y), r)$

Finalmente juntando todo lo que teníamos llegamos a

$$\emptyset \neq B(x, \frac{r}{2}) \times B(y, \frac{r}{2}) \cap (A \times B) \subseteq B((x, y), r) \cap A \times B$$

Esto lo podemos hace para cualquie radio, por lo tanto $(x, y) \in \overline{A \times B}$

□

Ejercicio 16. Sea (X, d) un espacio métrico y sean A, B subconjunto de X.

1. Probar las siguientes propiedades del derivado de un conjunt:

   (a) A' es cerrado.

   Proof. Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A'$ convergente tal que $a_n \to a$, queremos ver que $a \in A'$ esto nos diría que $A' = \overline{A'}$

   Como $a_n \to a$ dado un $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que $\forall n > n_0 \quad d(a, a_n) \leq \epsilon$

   Equivalentemente para cualquier $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que $\forall n \geq n_0$ $a_n \in B(a, \epsilon)$. Pero tomemos solo un a_n llamemoslo a_j tal que $a_j \in B(a, \epsilon)$

   Como $a_j \in B(a, \epsilon)$ es abierto entonces existe r' tal que $B(a_j, r') \subseteq B(a, r)$

   Tambien sabemos que $a_j \in A'$ entonces existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $x_n \to a_j$

   Sea $\epsilon = r'$ tenemos que exsite n_1 tal que $\forall n \geq n_1$ $d(x_n, a_j) \leq r'$

   Entonces $\forall n \geq n_1$ $x_n \in B(a_j, r')$

   Por lo tanto hay numerables $x_n \in A$ tal que $x_n \in B(a_j, r') \subseteq B(a, r)$

   Entonces hay numerables $x_n \in A$ tal que $x_n \in B(a, r)$

   Por lo tanto $B(a, r) \cap A$ es numerable.

   Entonces a es un punto de acumulación, $a \in A'$

   Luego $A' = \overline{A'}$ entonces A' es cerrado

   Otra forma:

   Sabemos que $A' \subseteq \overline{A'}$ veamos que $\overline{A'} \subseteq A'$

   Tomemos $p \in \overline{A'}$ queremos ver que es punto de acumulación de A entonces $p \in A'$

   Como $p \in \overline{A'}$ entonces $B(p, r) \cap A' \neq \emptyset \quad \forall r > 0$

Una opción es que $p \in A'$ y ya estaríamos. La otra opción es que $p \notin A'$
Entonces existe un $p_1 \in A'$ tal que $d(p_1, p) < \frac{r}{2}$ con $p_1 \neq p$
Además $p_1 \in A'$ luego $(B(p_1, \frac{r}{2}) \setminus \{p_1\}) \cap A \neq \emptyset$
Entonces $\exists a \in A$ tal que $d(a, p_1) < \frac{r}{2}$
Ahora $d(a, p) \leq d(a, p_1) + d(p_1, p) = \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$
Entonces $a \in B(p, r)$ además $a \in A$ y $a \neq p$ por lo tanto $(B(p, r) \setminus \{p\}) \cap A \neq \emptyset$
Y esto lo podemos hacer para cualquier r.
Finalmente p es punto de acumulación de A o lo que es lo mismo $p \in A'$ □

(b) $A \subseteq B \Longrightarrow A' \subseteq B'$

Proof. Sea $x \in A'$ entonces existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $x_n \to x$
Como $A \subseteq B$ la misma sucesión $(x_n)_n \subseteq B$ entonces $x \in B'$
Esto se aprovecha de algo que se prueba en este mismo ejercicio asi que voy a dar otra solución sin usarlo.
Sea $a \in A'$ entonces $\emptyset \neq (B(a, r) \setminus \{a\}) \cap A \subseteq (B(a, r) \setminus \{a\}) \cap B \quad \forall r > 0$
Entonces $a \in B'$ □

(c) $(A \cup B)' = A' \cup B'$

Proof. $\subseteq$) Sea $x \in (A \cup B)'$ entonces existe $(x_n)_n \subseteq A \cup B$ tal que $x_n \to x$
Entonces $x_n \in A$ o $x_n \in B$ para infinitos términos , si no tendría infinitos términos fuera de A y fuera de B lo que es absurdo. Quizas para los dos , pero no importa.
Spd $x_n \in A$ para infinitos términos entonces me quedo con todos los términos de x_n tal que $x_n \in A$ esto es una subsucesión de x_n entonces converge a x por lo tanto tengo una sucesión contenida en A que converge a x luego $x \in A'$
Entonces $x \in A' \cup B'$
$\supseteq$) Sea $x \in A' \cup B'$ spd $x \in A'$ luego existe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $a_n \to a$
Sin usar sucesiones:
$\subseteq$) Sea $x \in (A \cup B)'$. Entonces:

$$\emptyset \neq (B(x, r) \setminus \{x\}) \cap (A \cup B) = ((B(x, r) \setminus \{x\}) \cap A) \cup ((B(x, r) \setminus \{x\}) \cap B)$$

Entonces para cada radio r sucede $B(x, r) \setminus \{x\} \cap A \neq \emptyset$ o $B(x, r) \setminus \{x\} \cap B \neq \emptyset$
Supongamos que $x \notin A' \cup B'$ entonces $x \notin A'$ y $x \notin B'$
Luego $\exists r_1 > 0$ tal que $(B(x, r_1) \setminus \{x\}) \cap A = \emptyset$
También $\exists r_2 > 0$ tal que $(B(x, r_2) \setminus \{x\}) \cap B = \emptyset$
Tomamos $r = min\{r_1, r_2\}$
Entonces $(B(x, r) \setminus \{x\} \cap A = \emptyset)$ y también $(B(x, r) \setminus \{x\} \cap B = \emptyset)$
Lo que es absurdo, por lo tanto $x \in A' \cup B'$
$\supseteq$) Sea $x \in A' \cup B'$ entonces spd $x \in A'$ por lo tanto $B(x, r) \setminus \{x\} \cap A \neq \emptyset \quad \forall r > 0$
Pero entonces $B(x, r) \setminus \{x\} \cap (A \cup B) \neq \emptyset \quad \forall r > 0$ por lo tanto $x \in (A \cup B)'$ □

(d) $\overline{A} = A \cup A'$

Proof. Primero notemos que si $x \in A'$ entonces $\forall r > 0 \quad B(x,r) \cap A$ es infinita
Por lo tanto diferente del vacio entonces $x \in \overline{A}$ entonces $A' \subseteq \overline{A}$
Otra forma de verlo es $\emptyset \neq B(x,r) \setminus \{x\} \cap A \subseteq B(x,r) \cap A \quad \forall r > 0$
Luego $x \in \overline{A}$ entonces $A' \subseteq \overline{A}$
$\supseteq$) $A \cup A' \subseteq \overline{A} \cup A' \subseteq \overline{A} \cup \overline{A} = \overline{A}$
$\subseteq$) Sea $x \in \overline{A}$ entonces $\forall r > 0 \quad B(x,r) \cap A \neq \emptyset$
Si $x \in B(x,r) \cap A \quad \forall r > 0$ entonces $x \in A$ luego $x \in A \cup A'$
Si $x \notin B(x,r) \cap A \quad \forall r > 0$ entonces $\emptyset \neq B(x,r) \cap A = (B(x,r) \setminus \{x\}) \cap A$
Por lo tanto $x \in A'$ luego $x \in A \cup A'$ □

(e) $(\overline{A})' = A'$

Proof. $\supseteq$) Usando el b) tenemos que como $A \subseteq \overline{A} \Rightarrow A' \subseteq (\overline{A})'$
$\subseteq$) Sea $x \in (\overline{A})'$ entonces existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{A} \setminus \{x\} = (A \cup A') \setminus \{x\}$ tal que $x_n \to x$
Luego x_n tiene infinitos términos en A o en A' o en las dos
Si tiene infinitos en A podemos armar una subsucesión $(x_{n_j})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ como es subsucesión $x_{n_j} \to x$ entonces $x \in A'$
Si tiene infinitos en A' similarmente llegamos a que $x \in (A')' \subseteq A'$
Si tiene infinitos en las dos , podemos usar cualquiera de los dos argumentos

Observación. $(A')' \subseteq A'$

Proof. A' es cerrado por lo tanto para cualquier $(x_n)_n \subseteq A'$ tal que $x_n \to x$ sucede que $x \in A'$. Si no , no sería cerrado
Luego A' contiene a todos sus puntos de acumulación por lo tanto $(A')' \subseteq A'$ □

Sin usar sucesiones:
$\subseteq$) Sea $x \in (\overline{A})'$ entonces $x \in (A \cup A')'$ por d)
Además $(A \cup A')' = A' \cup (A')' = A' \cup A' = A'$ por c) y por observación
$\supseteq$) Trivial

Observación. $(A')' \subseteq A'$.

Proof. Sea $x \in (A')'$
Entonces $\emptyset \neq (B(x,r) \setminus \{x\}) \cap A' \subseteq B(x,r) \cap A' \quad \forall r > 0$
Por lo tanto $x \in \overline{A'}$ pero como sabemos que A' es cerrado entonces $\overline{A'} = A'$
Luego $x \in A'$ □

□

2. Probar que $x \in X$ es un punto de acumulación de $A \subseteq X$ si y solo si existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $x_n \to x$ y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no es casi constante.

Proof. $\Rightarrow$) Sabemos que si $x \in A'$ entonces $\forall r > 0 \quad B(x,r) \cap A$ es infinito entonces $(B(x,r) \setminus \{x\}) \cap A$ es también infinta.

Luego definamos x_n tal que $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \setminus \{x\} \cap A$ para cada $n \in \mathbb{N}$

Ahora afirmo $x_n \to x$ veamosló

Sea $\epsilon > 0$ sabemos por arquimedianidad que exsite n_0 tal que $\frac{1}{n_0} \leq \epsilon$

Luego por como construí x_n tengo que $x_n \in B(x, \frac{1}{n_0}) \quad \forall n \geq n_0$

Entonces dado cualquier $\epsilon > 0$ tenemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x) \leq \epsilon \quad \forall n \geq n_0$

Por lo tanto $\forall \epsilon > 0$ tenemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, x_n) \leq \epsilon \quad \forall n \geq n_0$

Entonces $x_n \to x$. Además x_n no puede ser casi constante, si lo fuera existiría un n_0 tal que $x_n = x \quad \forall n \geq n_0$ pero esto es absurdo por que sabemos que $x_n \neq x \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Si en cambio existiera un n_0 tal que $x_n = a \neq x \quad \forall n \geq n_0$ luego a_n no convergería a x

□

Ejercicio 17. Hallar interiór, clausura, conjunto derivado y frontera de cada uno de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}$. Determinar cuales son abiertos o cerrado

$$[0,1] \quad ; \quad (0,1) \quad ; \quad \mathbb{Q} \quad ; \quad \mathbb{Q} \cap [0,1] \quad ; \quad \mathbb{Z} \quad ; \quad [0,1) \cup \{2\}$$

Proof. 1. $[0,1]$ Es facil ver que el interiór es $(0,1)$ viendo que cada punto es interión tomando un punto y usando como radio el minimo de las distancias hacia 0 y hacia 1

La clausura es también simple por que todo punto en $[0,1]$ cumple trivialmente que la intersección con $[0,1]$ es diferente de vacía

Todos los puntos en $[0,1]$ son de acumlación usando la sucesión constante

La frontera es el conjunto $\{0,1\}$ es facíl ver que son de la frontera y es facil ver que cualquier otro no cumple ser de la frontera

Usando esto es facil ver que $[0,1]$ es cerrado

Para $(0,1)$ el análisis es similar

$\mathbb{Q}$ por densidad de $\mathbb{I}$ es facil ver que dado un $x \in \mathbb{Q} \quad \forall r > 0 \quad B(x,r) \cap \mathbb{I} \neq \emptyset$

Por ende ninguna bola puede estar contenida en $\mathbb{Q}$ y entonces su interiór es vacío

Esta claro que todo $x \in \mathbb{Q}$ es de acumulación , usando la sucesión constante, pero además todo $x \in \mathbb{I}$ es de acumulación de $\mathbb{Q}$ por densidad de racionales es facil de probar

Sabiendo que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$ tenemos que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$

$\partial \mathbb{Q} = \overline{\mathbb{Q}} \setminus \mathbb{Q}^o = \mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}$

Un análisis muy similar podemos hacer con $\mathbb{Q} \cap [0,1]$

$\mathbb{Z}$ devuelta su interiór es vacío (con respecto a $\mathbb{R}$), es facíl ver que todos sus puntos son aislados, entonces no pueden ser de acumulación

Luego $\mathbb{Z}' = \emptyset$ entonces tambien tenemos que $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cup \mathbb{Z}' = \mathbb{Z}$

$\partial \mathbb{Z} = \overline{\mathbb{Z}} \setminus \mathbb{Z}^o = \overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$

$A = [0,1) \cup \{2\}$ tenemos que 2 no puede ser interiór usando $\forall r > 0 \quad B(2,r) \not\subseteq A$

Lo mismo con 0 para cualquier $B(x,r)$ sabemos que existe un $x < 0$ tal que $x \in B(0,r)$ por ende $B(0,r) \not\subseteq A$ el $1 \notin A$ por lo tanto $1 \notin A^o$

Para el resto de los puntos y es facil encontrar un radio usando el mínimo entre $d(y,1)$ y $d(y,0)$

Finalmente tenemos $A^o = (0,1)$

Es fácil ver que 0 son puntos de acumulación usando una sucesión por derecha

Luego usando una sucesión de numeros menores que 1 vemos que 1 es de acumulación

Entonces $A' = [0, 1]$

Luego $\overline{A} = A \cup A' = [0, 1] \cup \{2\}$

$\partial A = \overline{A} \setminus A^{o} = \{0, 1, 2\}$

□

Ejercicio 18. Caracterizar los abiertos y los cerrados de $\mathbb{Z}$ considerado como espacio métrico con la métrica inducida por la usual de $\mathbb{R}$. Generalizar a un subespacio discreto de un espacio métrico X.

Proof. Todos los conjuntos son abiertos, dado un subconjunto A tomamos cualquier elemento $y \in A$ y sabemos que $B(x, \frac{1}{2}) = \{x\} \subseteq A$ entonces x es interiór, por lo tanto todos los puntos de A son interiores luego A es abierto.

Todos los conjuntos son cerrados también, supongamos que tenemos un subconjunto B que no es cerrado.

Luego $\exists x \notin B$ tal que $x \in B'$ entonces $\exists (x_n)_n \subseteq B$ tal que $x_n \to x$, pero las únicas sucesiones convergentes son las que en algún momento son constantes. Y dado que todo término de la sucesion está en B en algún momento van a ser constantemente algo en B entonces $x \in B$ lo cual es absurdo. □

Ejercicio 19. Sea (X, d) un espacio métrico y sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en X.

1. Si $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ y $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, probar que $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(x, y)$

   Proof. Sabemos que $d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n)$

   Entonces tenemos que $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \leq \lim_{n\to\infty} (d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n))$

   Como todos los límites del lado derecho exiten los puedo separar

   Entonces quedaría $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \leq 0 + d(x, y) + 0 = d(x, y)$

   Con la misma idea $d(x, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y) \leq d(x, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y)$

   entonces $-d(x_n, y_n) \leq d(x, x_n) - d(x, y) + d(y_n, y)$

   $\lim_{n\to\infty} -d(x_n, y_n) \leq \lim(d(x, x_n) - d(x, y) + d(y_n, y))$

   Todos los límites existen entonces separando $-\lim d(x_n, y_n) \leq -d(x, y)$

   Finalmente $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \geq d(x, y)$

   Entonces $d(x_n, y_n) = d(x, y)$ □

2. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son de sucesiones de Cauchy de X, probar que la sucesión real $(d(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente

   Proof. Sabemos que ambas sucesiones son de cauchy entonces

   Dado un $\epsilon > 0$ tenemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, x_m) \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n, m \geq n_0$

   Y con ese mismo dado $\epsilon > 0$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $d(y_k, y_j) \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \forall k, j \geq n_1$

   Ahora si tomamos $n_2 = \max\{n_1, n_0\}$

   Tenemos ambas $d(x_n, x_m) \leq \frac{\epsilon}{2}$ y $d(y_k, y_j) \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n, m, j, k \geq n_2$

Teniendo esto $d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x_s) + d(x_s, y_n) \leq d(x_n, x_s) + d(x_s, y_s) + d(y_s, y_n)$

Entonces dado $\epsilon > 0$ usando el n_2 tenemos $d(x_n, y_n) \leq \frac{\epsilon}{2} + d(x_s, y_s) + \frac{\epsilon}{2} \quad \forall n, s \geq n_2$

Por lo tanto $d(x_n, y_n) \leq d(x_s, y_s) + \epsilon$

Ahora hagamos el mismo proceso con $d(x_s, y_s)$

$d(x_s, y_s) \leq d(x_s, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y_s) = \epsilon + d(x_n, y_n)$

Entonces $d(x_s, y_s) - \epsilon \leq d(x_n, y_n) \quad \forall n, s \geq n_2$

Luego juntando estas dos ideas podemos notar que dado un $\epsilon > 0$ tenemos

$$\exists n_2 \in \mathbb{N} \text{ tal que } |d(x_n, y_n) - d(x_s, y_s)| \leq \epsilon \quad \forall n, s > n_2$$

Sabemos que para todo $\epsilon > 0$ podemos hacer el mismo proceso y encontrar un n_2

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_2 \in \mathbb{N} \text{ tal que } |d(x_n, y_n) - d(x_s, y_s)| \leq \epsilon \quad \forall n, s \geq n_2$$

Pero esto nos dice que $d(x_n, y_n)$ es de Cauchy y como $(d(x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y $\mathbb{R}$ es completo entonces $d(x_n, y_n)$ converge

□

Ejercicio 20. Sea (X, d) un espacio métrico. Dados $A \subseteq X$ no vacío y $x \in X$, se define la *distancia* de x a A como $d_A(x) = \inf \{d(x, a) : a \in A\}$. Probar:

i. $|d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x, y)$ para todo par de elementos $x, y \in X$

Proof. Tenemos que $d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a) \leq \inf_{a \in A} (d(x, y) + d(y, a)) \leq \inf_{a \in A} d(x, y) + \inf_{a \in A} d(y, a) = d(x, y) + d(y, A)$$

Observación. (Otra forma sin usar propiedades de infimos)

$d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$

Como $d(x, y) \leq d(x, y) + d(y, a) \quad \forall x, y, a \in X$ en particular vale $\forall a \in A \subseteq X$

Entonces $d(x, y) \leq d(x, y) + \inf_{a \in A} d(y, a)$

Por lo tanto $\inf_{a \in A} d(x, y) \leq d(x, y) + \inf_{a \in A} d(y, a))$

Entonces $d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$

haciendo lo mismo pero arrancando de $d(y, a) \leq d(y, x) + d(x, a)$

llegamos a $-d(x, y) \leq d(x, A) - d(y, A)$

Juntando todo

$$|d_A(x) - d_A(y)| \leq d(x, y)$$

□

ii. $x \in A \Rightarrow d_A(x) = 0$

Proof. Sea $D = \{d(x, a) : a \in A\}$ afirmo que $\inf D = 0$

- $0 \leq d \quad \forall d \in D$
  Si no fuera cierto existiria $d' \in D$ tal que $d' < 0$ entonces $d' = d(x,a) < 0$ para algún $a \in A$ lo que es absurdo
- Sea $l \leq d \quad \forall d \in D$ entonces $l \leq 0$ Supongo que no es cierto, entonces existe $l \leq d \quad \forall d \in D$ con $l > 0$, pero sabemos que $d(x,x) \in D$ y $d(x,x) = 0 < l$
  Luego $0 = \inf D$ por lo tanto $d_A(x) = \inf D = 0$

□

iii. $d_A(x) = 0 \iff x \in \overline{A}$

Proof. $\Rightarrow$) Sea $D^x = \{d(x,a) : a \in A\}$ luego $0 \inf D$

Entonces existe un sucesión $d_n \in D^x \quad \forall n \in \mathbb{N}$ tal que $d_n \to 0$

Luego para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $a \in A$ tal que $d_n = d(x,a)$ llamemosló a_n

Por lo tanto $d(x, a_n) = d_n \to 0$ tenemos $a_n \in A \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y además $a_n \to x$

Finalmente $x \in \overline{A}$

$\Leftarrow$) Sea $x \in \overline{A}$ entonces existe $(x_n)_n \subseteq A$ tal que $x_n \to x$

Entonces tenemos que $d(x_n, x) \to 0$ por lo tanto tenemos $(d_n)_n \subseteq D^x$ tal que $d_n \to 0$ pero además sabemos que 0 es cota inferiór entonces $0 = \inf D^x = d_A(x)$ □

iv. $B_A(r) = \{x \in X : d_A(x) < r\}$ es abierto para todo $r > 0$

Proof. Sea $x \in B_A(r)$, primero una pequeña afirmación,

Como $x \in B_A(r)$ entonces $r > d_A(x)$ luego existe ϵ tal que $r - \epsilon > d_A(x)$

Luego puedo tomar $r' = r - \epsilon - d(x, A)$ y seguro $r > 0$

Afirmo que $B(x, r') \subseteq B_A(r)$. Veamosló, sea $y \in B(x, r')$ entonces

$d(y, A) \leq d(y, x) + d(x, A) \leq r' + d(x, A) = r - \epsilon - d(x, A) + d(x, A) < r$

Luego $y \in B_A(r)$ entonces $B(x, r') \subseteq B_A(r)$

Finalmente $\forall x \in B_A(r) \quad \exists r' > 0$ tal que $B(x, r') \subseteq B_A(r)$

Y esto lo puedo hacer con cualquier r, por lo tanto $B_A(r)$ es abierto □

v. $\overline{B}_A(r) = \{x \in X : d_A(x) \leq r\}$ es cerrado para todo $r > 0$

Proof. Tomemos B^c el complemento de la bola $B_A(r)$

Entonces $B^c = \{x \in X : d_A(x) > r\}$ veamos que es abierto

Ahora sea $x \in B^c$ afirmo que $B(x, r') \subseteq A$ con $r' = d(x, A) - r > 0$, veamosló

Sea $y \in B(x, r')$ tenemos $d(x, A) - d(y, A) \leq |d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y) < d(x, A) - r$

Entonces $-d(y, A) < -r \Rightarrow d(y, A) > r$ por lo tanto $y \in B^c$ luego $B(x, r') \subseteq B^c$

Por lo tanto B^c es abierto, entonces $\overline{B}_A(r)$ es complemento de un abierto , finalmente es cerrado □

Ejercicio 21. Un subconjunto de A de un espacio métrico de X se dice G_δ (respectivamente F_σ) si es intersección de una sucesión de abiertos (respectivamente unión de una sucesión de cerrados) de X

1. Probar que el complemento de un G_δ es un F_σ

   Proof. Sea $G_\delta = \bigcap_{i\in I} G_i$ intersección de abiertos
   Luego $x \in (\bigcap_{i\in I} G_i)^c = G_\delta^c \iff x \notin \bigcap_{i\in I} G_i \iff$
   existe algún G_i tal que $x \notin G_i \iff$ existe algún G_i tal que $x \in G_i^c$
   $\iff x \in \bigcup_{i\in I} G_i^c \iff x \in F_\sigma$
   Este último sí y solo sí vale por que G_i es abierto, por lo tanto G_i^c es cerrado, luego $\bigcup G_i^c$ es unión de cerrados por lo tanto un F_σ □

2. Probar que el complemento de un F_σ es un G_δ

   Proof. Sea $F_\sigma = \bigcup_{i\in I} F_i$ unión de cerrados
   Luego $x \in F_\sigma^c = (\bigcup_{i\in I} F_i)^c \iff x \notin \bigcup_{i\in I} F_i$
   $\iff \forall i \in I\ x \notin F_i \iff x \in F_i^c \quad \forall i \in I \iff x \in \bigcap_{i\in I} F_i^c \iff x \in G_\delta$
   El último si y solo si vale por que F_i es cerrado luego F_i^c es abierto por lo tanto $\bigcap F_i^c$ es intersección de abiertos entonces es un G_δ

   □

3. Probar que todo cerrado es un G_δ. Deducir que todo abierto es un F_δ

   Proof. Sea F cerrado , definamos U_n

   $$U_n = \bigcup_{x\in F} B(x, \frac{1}{n})$$

   U_n es unión de abiertos por lo tanto abierto
   Ahora afirmo que $F = \bigcap U_n$ osea intersección de abiertos. entonces F es G_δ
   Veamosló. $x \in F$ entonces $x \in B(x, \frac{1}{n}) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ entonces $x \in U_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
   Entonces $x \in \bigcap U_n$
   Sea $y \in \bigcap U_n$ entonces $y \in U_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ sabemos que y pertenece a alguna de esas bolas.
   Otra forma de decirlo, para cada $n \in \mathbb{N}$ sucede que $y \in B(x_n, \frac{1}{n})$ para algún $x_n \in F$ pero entonces dado un $\epsilon > 0$ sabemos que existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n_0} \leq \epsilon$ pero ademas sabemos que para todo $n > n_0$ sucede $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} \leq \epsilon$ por ende $d(x_n, y) \leq \epsilon \quad \forall n \geq n_0$ (Otra forma de verlo es $y \in B(x_n, \frac{1}{n})$ entonces $x_n \in B(y, \frac{1}{n})$)
   (Otra forma, ver que $d(x_n, y)$ es decreciente y acotada inf por el 0 entonces tiende a 0)
   Pero entonces x_n converge a y y además $x_n \in F \quad \forall n \in \mathbb{N}$ y como F es cerrado tenemos que $y \in F$

Sea G abierto

$$U_n = \bigcup_{x \in X \setminus G} B(x, \frac{1}{n})$$

Luego tenemos $F_n = X \setminus U_n$ que es complemento de abierto por lo tanto cerrado.

Ahora afirmo que $G = \bigcup F_n$ que es unión de cerrados por lo tanto F_σ

Veamosló, sea $y \in G$ supongamos $y \notin \bigcup F_n$ entonces $y \notin F_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Entonces $y \in U_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ por lo tanto $y \in \bigcap U_n$

Como sabemos que $X \setminus G$ es cerrado, entonces $\bigcap U_n = X \setminus G$

Esto último vale por el mismo argumento que usamos para probar que cerrado es G_δ

Pero esto implica que $y \in X \setminus G$, lo que es absurdo. Luego $y \in \bigcup F_n$

Sea $y \in \bigcup F_n$ entonces $y \in F_n$ para algún $n_0 \in \mathbb{N}$ entonces $y \notin U_{n_0}$

Supongamos $y \notin G$ entonces $y \in X \setminus G$ pero entonces $y \in U_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$

Pero esto es absurdo por que $y \notin U_{n_0}$.

El absurdo provino de suponer que $y \in X \setminus G$ por lo tanto $y \in G$ □

4. (a) Exhibir una sucesión de abiertos de $\mathbb{R}$ cuya intersección sea $[0, 1)$. Idem con $[0, 1]$

   Proof. $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (-\frac{1}{n}, 1) = [0, 1)$. No voy a aclarar por que es trivial. □

   (b) Exhibir una sucesión de cerrados de $\mathbb{R}$ cuya unión sea $[0, 1)$

   (c) ¿Qué conclusión puede obtenerse de estos ejemplos?

Ejercicio 22. Sea (X, d) un espacio métrico. Dados $A, B \subseteq X$ no vacíos se define la distancia entre A y B por $d(A, B) = \inf \{d(a, b) : a \in A \quad b \in B\}$. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

i) $d(A, B) = d(A, \overline{B})$ es verdadero

Sea $L_1 = d(A, B) \quad L_2 = d(A, \overline{B})$ supongamos que son diferentes.

Entonces sucede que $L_1 < L_2$ o $L_2 < L_1$

Supongamos $L_1 < L_2$ entonces $\exists \epsilon > 0$ tal que $L_1 + \epsilon < L_2$

Como L_1 es un ínfimo existe $a \in A, b \in B$ tal que $L_1 \leq d(a, b) \leq L_1 + \epsilon < L_2$

Pero entonces existen $a \in A, b \in B$ tal que $d(a, b) < L_2 = \inf \{d(a, b) : a \in A \quad b \in \overline{B}\}$

Absurdo por que como $a \in A, b \in B \subseteq \overline{B}$ entonces $d(a, b) \in \{d(a, b) : a \in A \quad b \in \overline{B}\}$

Ahora en cambio si $L_1 > L_2$ entonces usando el mismo argumento

existe $a \in A \quad b' \in \overline{B}$ tal que $L_2 \leq d(a, b') \leq L_2 + \epsilon < L_1$

Entonces $d(a, b') < L_1$ entonces existe ϵ' tal que $d(a, b') + \epsilon' < L_1$

Ahora como $b' \in \overline{B}$ existe $(b_n)_n \subseteq B$ tal que $b_n \to b'$ Entonces $|d(a, b_n) - d(a, b')| \to 0$

Luego dado ϵ' existe n_0 tal que $d(a, b_n) \leq d(a, b') + \epsilon' < L_1 \quad \forall n \geq n_0$

En particular tenemos algún $n > n_0$ tal que $d(a, b_n) < L_1$ con $b_n \in B$

Esto absurdo dado que nuevamente $d(a, b_n) \in \{d(a, b) : a \in A \quad b \in B\}$ por ende $d(a, b_n)$ no puede ser menor que el infimo de un conjunto que lo contiene

Luego no sucede $L_1 < L_2$ y tampoco $L_2 < L_1$ entonces $L_1 = L_2$

ii) $d(A,B)=0 \iff A\cap B\neq\emptyset$ es falso

Proof. Sea $(\mathbb{R}^2,d)$.Con d la distancia euclídea.

Sean $A=\{(x,0):x\in\mathbb{N}\}\quad B=\{(x,\frac{1}{x}):x\in\mathbb{N}\}$

Sabemos que $A\cap B=\emptyset$, sin embargo es facil ver que $d(A,B)=0$.

Tomamos la sucesión $x_n=d((n,0),(n,\frac{1}{n}))=\sqrt{\frac{1}{n^2}}$.

$(x_n)_n\subseteq\{d(a,b):a\in A\quad b\in B\}$ y además $x_n\to 0$

Y además por ser distancias, 0 es cota inferiór del conjunto. Por lo tanto 0 es ínfimo

La vuelta vale, y es trivial demostrarlo.

Observación. Un ejemplo mucho mas trivial es $A=(0,1)$ y $B=(1,2)$

Si agarramos $a_n=d(1-\frac{1}{n},1+\frac{1}{n})$ tenemos que $(a_n)_n\subseteq d(A,B)$

Y es facil ver que $a_n\to d(1,1)=0$ entonces tenemos una sucesión en $d(A,B)$ que converge a 0.

Y además sabemos que cero es cota inferiór de este conjunto por que ningun distancia puede ser menor que 0.

Entonces 0 es infimo del conjunto , por lo tanto $d(A,B)=0$ sin embargo $A\cap B=\emptyset$

□

iii) $d(A,B)=0 \iff \overline{A}\cap\overline{B}\neq\emptyset$

Proof. Sirve el mismo ejemplo que arriba, por que $A=\overline{A}$ y $B=\overline{B}$

□

iv) $d(A,B)\leq d(A,C)+d(C,B)$

Proof. $d(A,B)\leq d(a,b)\leq d(a,c)+d(c,b)\quad\forall(a\in A\quad b\in B\quad c\in C)$

$d(A,B)\leq d(a,c)+d(c,b)\quad\forall(a\in A\quad b\in B\quad c\in C)$

Entonces $d(A,B)\leq\inf\{d(a,c)+d(c,b):a\in A\quad b\in B\}$

Que es igual a $\inf\{d(a,c):a\in A\quad c\in C\}+\inf\{d(c,b):c\in C\quad b\in B\}$

o lo mismo $d(A,C)+d(C,B)$. Luego $d(A,B)\leq d(A,C)+d(C,B)$

Otra forma sin usar propiedades de ínfimo:

$d(a,b)\leq d(a,c)+d(c,b)\quad\forall a,b,c\in X$ en particular para $a\in A,b\in B,c\in C$

pero entonces $\inf\{d(a,b):a\in A,b\in B\}\leq d(a,c)+d(c,b)$

Luego $\inf\{d(a,b):a\in A,b\in B\}\leq\inf\{d(a,c):a\in A,c\in C\}+d(c,b)$

De la misma forma:

$\inf\{d(a,b):a\in A,b\in B\}\leq\inf\{d(a,c):a\in A,c\in C\}+\inf\{d(c,b):c\in C,b\in B\}$

Entonces $d(A,B)\leq d(A,C)+d(C,B)$ □

v) Bonus: d es una distancia en $\mathcal{P}(X)\setminus\{\emptyset\}$ Es falso

Proof. Tomemos un $A \subset X$ con $A \neq \{\emptyset\}$ $B = A \cup \{x\}$ $\quad x \in X$ y $x \notin A$

Dado cualquier $x \in A$ sucede que $x \in B$ entonces tengo $d(x, x) = 0$

Por lo tanto $0 \in \{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$ y además 0 es cota inferiór

Finalmente $d(A, B) = 0$ sin embargo $A \neq B$ entonces no es una métrica □

Ejercicio 23. Probar que $\mathbb{R}^n$ (con la distancia euclídea) es separable

Proof. Sabemos que $\mathbb{Q}^n$ es numerable, veamos que es denso.
Tomemos una bola abierta cualquier en $\mathbb{R}^n$ $B(x, r)$ con $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$
Ahora consideremos $\delta = \sqrt{\frac{r}{n}}$ este δ está fijo , por que r y n lo están
Sabemos que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$ entonces para cada x_i existe un q_i tal que $d(x_i, q_i) < \delta$
Ahora notemos que $d(x, q) = \sqrt{(x_1 - q_1)^2 + (x_2 - q_2)^2 + \cdots + (x_n, q_n)^2} \leq n\delta^2 = r$
Por lo tanto $q \in B(x, r)$ entonces $B(x, r) \cap \mathbb{Q}^n \neq \emptyset$ entonces $\mathbb{Q}^n$ es denso en $\mathbb{R}^n$
Finalmente $\mathbb{R}^n$ es separable □

Ejercicio 24. Sea $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(a_n)_n \subseteq \mathbb{R} \ / \ \exists n_0 : a_n = 0 \quad \forall n \geq n_0\}$. Se considera la aplicación $d : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $d(a_n, b_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n - b_n|$
Probar que $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, d)$ es un espacio métrico separable

Proof. Primero probemos que la distancia dada es una métrica.
Las dos primera propiedades son triviales. Veamos la desigualdad.
Notemos que para cada $n \in \mathbb{N}$ vale $|a_n - b_n| \leq |a_n - c_n + c_n - b_n| \leq |a_n - c_n| + |c_n - b_n|$
Luego $\sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n - b_n| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}}(|a_n - c_n| + |c_n - b_n|) \leq \sup |a_n - c_n| + \sup |c_n - b_n|$
Por lo tanto $d(a_n, b_n) \leq d(a_n, c_n) + d(c_n, b_n)$

Observación. Se podría hacer por partes como vimos antes, sin usar esa propiedad de ínfimo

Entonces d es una métrica
Ahora tomemos $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ este es numerable lo probamos en la primera práctica, la idea era que como su límite es cero miramos un conjunto intermedio que es el de las sucesiones de racionales que a partir de un momento n son constantemente nulas, de esas podemos tener a lo sumo numerables , y despues unimos todas esas y es una unión numerable de numerables que nos da $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$
Veamos que es denso:
Sea $B(x_n, r)$ una bola cualquiera de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ahora para cada $x_n \in \mathbb{R}$ existe un $q_n \in \mathbb{Q}$ tal que $|x_n - q_n| \leq \frac{r}{2}$ por densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$. Y cuando $x_n = 0$ tambien lo es q_n
Entonces $(q_n)_n \subseteq \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ veamos que $q_n \in B(x_n, r)$
$d(x_n, q_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n, q_n| \leq \frac{r}{2} < r$ esto vale por como construimos q_n
Pero entonces $q_n \in B(x_n, r)$ por lo tanto $B(x_n, r) \cap \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \neq \emptyset$
Y esto vale para cualquier bola entonces $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ es denso en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ □

Ejercicio 25. Sea (X, d) un espacio métrico. Se dice que una familia $\mathcal{A} = (U_j)_{j\in J}$ de abiertos de X es una base de abiertos de X si verifica:

Para todo par de abiertos G de X y para todo $x \in G$ existe $j \in J$ tal que $x \in U_j \subseteq G$

Probar que $\mathcal{A}$ es una base de abiertos de X si y sólo si todo abierto de X se puede escribir como unión de miembros de $\mathcal{A}$

Proof. $\Rightarrow$)Sea B un abierto de X sabemos que para cada $x \in B$ tenemos un U_j tal que $x \in U_j \subseteq G$

Entonces $G = \bigcup U_j$, verifiquémoslo.

Sea $x \in G$ entonces exsite algún U_j tal que $x \in U_j$ por lo tanto $x \in \bigcup U_j$

Sea $x \in \bigcup U_j$ entonces $x \in U_j$ para alguno o muchos , pero seguro algún U_j como $U_j \subseteq G$ para cada U_j entonces $x \in G$

$\Leftarrow$) Sea $G \in X$ entonces podemos escribirlo como una unión de abiertos de $\mathcal{A}$.

Llamemos a estos abiertos U_j con $j \in J_G$.

Entonces $U_j \in \mathcal{A} \quad \forall j \in J_G$ y además $G = \bigcup_{j \in J_G} U_j$

Pero entonces dado $x \in G$ tenemos que $x \in \bigcup U_j$ por lo tanto seguro existe algun $j_0 \in J_G$ tal que $x \in U_{j_0}$ por otro lado $U_{j_0} \subseteq \bigcup_{j \in J_G} U_j = G$ entonces $U_{j_0} \subseteq G$

Juntando todo tenemos $x \in U_{j_0} \subseteq G$ y esto vale para cualquie $x \in G$.

Y todo lo expuesto arriba se puede hacer para cualquier G abierto de X

Entonces si llamamos

$$J = \bigcup_{G \subseteq X abierto} J_G$$

Tenemos que $\bigcup_{j \in J} U_j$ es una base de abiertos de X

Ahora es trivial que $\bigcup_{j \in J} U_j \subseteq \mathcal{A}$

Y esto alcanza para decir que $\mathcal{A}$ es una base de abiertos de X $\square$

Ejercicio 26. Sea (X, d) un espacio métrico. Probar que son equivalentes:

1. X es separable
2. X posee una base de contables abiertos.
3. Todo cubrimiento de abiertos de X tiene un subcubrimiento contable

Proof. $1 \Rightarrow 2$) Por 1 sabemos que tenemos un denso numerable (contable) A metido en X

Como A contable $A = \{a_1, a_2, \cdots\}$

Tomemos $\mathcal{B} = \{B(a_m, \frac{1}{n}) : n, m \in \mathbb{N}\}$. Ahora $\#\mathcal{B} = \#\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \aleph_0$

Veamos que es base. Tomemos $U \subseteq X$ abierto.

Ahora dado $y \in U$ tenemos que existe $B(y, r) \subseteq U$

Como A es denso en X existe un $a_m \in A$ tal que $d(a_m, y) \leq \frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \frac{r}{2}$

Entonces $y \in B(a_m, \frac{1}{n})$ y además $B(a_m, \frac{1}{n}) \in \mathcal{B}$

Tomemos un $x \in B(a_m, \frac{1}{n})$ tenemos que $d(x, y) < d(x, a_m) + d(a_m, y) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} < r$

Entonces $B(a_m, \frac{1}{n}) \subseteq B(y, r) \subseteq U$ y ya vimos que $y \in B(x_m, \frac{1}{n})$

Y esto vale para cualquier $y \in U$ y vale para cualquier U abierto.

Entonces $\mathcal{B}$ es base de X

$2 \Rightarrow 3$) Tenemos una base contable $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \cdots\}$

Tomemos un cubrimiento de abiertos $\mathcal{C} = \{A_i\}_{i \in I}$

Sea $\mathcal{B}' = \{B_{n_1}, B_{n_2}, \cdots\} \subseteq \mathcal{B}$ con $B_{n_j} \in \mathcal{B}$ tales que existe $i \in I$ tal que $B_{n_j} \subseteq A_i$

Ahora sea $J \subseteq I$ el conjunto formado por $j(k)$ donde $j(k)$ es alguno de los $i \in I$ tq $A_j \supseteq B_{n_k}$ con $B_{n_k} \in \mathcal{B}'$

Entonces tenemos que $\bigcup_{j \in J} A_j = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_{j(k)} \supseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_{n_k}$

Si probamos que $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} B_{n_k} = X$ entonces tendríamos que $\bigcup_{j \in J} A_j \supseteq X$ por lo tanto sería un subcubrimiento de X

Una contención es trivial por que X es el conjunto universo. Entonces sea $x \in X$

Tenemos que existe $i \in I$ tal que $x \in A_i$, como $\mathcal{B}$ es base, sabemos que existe un B_n tal que $x \in B_n \subseteq A_i$

Pero entonces por como definimos $\mathcal{B}'$ tenemos que $B_n \in \mathcal{B}'$ entonces x está en algún elemento de $\mathcal{B}'$ por lo tanto $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_{n_k}$

Probando finalmente que $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_{n_k}$

Entonces $\bigcup_{j\in J} A_j$ es cubrimiento de X y es subcubrimiento de $\mathcal{C}$

Pero además para cada $j \in J$ tenemos un elemento B_{n_k} de $\mathcal{B}'$ y en este conjunto hay menos elementos que en $\mathcal{B}$ que era contable, por lo tanto J es contable

$3 \Rightarrow 1$) Sea (X, d) un espacio métrico.

Considermos los cubrimientos de la pinta $A_n = \{B(x, \frac{1}{n}) : x \in X)\}$

Por hipótesis cada uno de ellos tiene que tener subcubrimiento numerable

Entonces tenemos $A_n^s = \{B(x_j, \frac{1}{n}) : j \in \mathbb{N}\}$ que es numerable.

Ahora cada A_n^s tiene numerables x_j y tenemos numerables A_n^s

Por lo tanto el conjunto $\mathcal{C} = \{x_j^n : j, n \in \mathbb{N}\}$ es unión de numerables entonces numerable

Veamos que es denso en X

Tomemos $x \in X$ y un radio $r > 0$. Sabemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, en particular para algún $n_0 \in \mathbb{N}$ tenemos un subcubrimiento de X (de los que habíamos armado), tal que $\frac{1}{n_0} < r$ por ende tenemos el cubrimiento $A_{n_0}^s$ en el cual está x (si no no sería cubrimientos)

Por lo tanto tenemos algun $j \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B(x_j, \frac{1}{n_0})$ con $x_j \in \mathcal{C}$

Pero entonces $x_j \in B(x, \frac{1}{n}) \subseteq B(x, r)$. Por lo tanto $B(x, r) \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$

Por lo tanto $x \in \overline{\mathcal{C}}$ entonces $X \subseteq \overline{\mathcal{C}}$ y ya sabíamos que $\mathcal{C} \subseteq X$

Entonces $\overline{\mathcal{C}} = X$. Probando que $\mathcal{C}$ es denso en X

Podríamos haber hecho lo mismo y decir dado cualquier abierto de x su intersección con $\mathcal{C}$ es no vacía, por ende $\mathcal{C}$ es denso en X

Finalmente, tenemos $\mathcal{C}$ un subconjunto denso y numerable de X , por lo tanto X es separable □

Ejercicio 27. Probar que todo subespacio métrico de un espacio métrico separable es separable

Proof. Sea (X, d) separable y (Y, d) sub espacio métrico. Como A es separable existe $\mathcal{B}$ una base contable de X.

Ahora consideremos $\mathcal{B}' = \{A \cap Y : A \in \mathcal{B}\}$ y estos por como estan armados son todos abiertos relativos a Y

Además dado $x \in Y \subseteq X$ como $x \in X$ tenemos un $A \in \mathcal{B}$ tal que $x \in A \subseteq X$ por lo tanto $x \in A \cap Y$

Entonces $x \in A \cap Y \subseteq Y$, la última inclusión es trivial. Y además como $A \in \mathcal{B}$ sabemos $A \cap Y \in \mathcal{B}'$

Entonces $\mathcal{B}'$ es una base de abiertos Y

□

Ejercicio 28. Sea (X, d) un espacio métrico separable. Probar que toda familia de subconjuntos de X no vacíos, abiertos y disjuntos dos a dos es contable. Deducir que el conjunto de puntos aislados de X es contable.

Proof. Como X es separable existe base contable $\mathcal{B}$. Ahora para cada subconjunto en cuestión tenemos una unión de abiertos de la base que me lo cubre, entonces no puede haber mas subconjuntos disjuntos que abiertos en la base, por lo tanto el cardinal de los conjuntos disjuntos contable.

Sea $x \in X$ punto aislado entonces $\exists \epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \cap X = \{x\}$

Ahora para cada aislado hay una de esas bolas que son abiertas y son disjuntas dos a dos, por lo tanto solo puede haber contables bolas y por lo tanto contables puntos aislados

Otra forma. Mirar a estos conjuntos A_i disjuntos como subespacio métrico Y. Ahora mirar el cubrimiento dado por todos eso conjuntos $\bigcup_{i\in J} A_i$, eso cubre Y. Sin embargo, como son disjuntos, no tiene subcubrimiento, cualquier A_i que saque, dejaría de cubrirlo. Entonces Y no es separable, y dado que $Y \subseteq X$ entonces X no es separable $\square$

Ejercicio 29. ¿Es $\ell^\infty = \{(a_n) \subseteq \mathbb{R} : a_n \text{ es acotada}\}$ separable ?

Proof. Consideremos el conjunto $\ell_\mathbb{N} = \{(a_n) \subseteq \mathbb{N} : a_n \text{ es acotada }\}$

Este conjunto tiene cardinal $\mathfrak{c}$ por que es una unión numerable de cosas de carindal $\mathfrak{c}$

Veámoslo. sea $p_n = \{f : \mathbb{N} \to A : \#a = n\}$ dado cualquier $n \in \mathbb{N}$ está claro que estas son funciones acotadas , por que solo tienen n posible valores en la imagen. Además $\#p_n = n^\mathbb{N}$ entonces salvo para p_1, p_2 todas tienen cardinal mas grande o igual que $2^{\aleph_0}$ y mas chico que $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ por que la imagen es siempre finita. Entonces estos conjuntos tienen cardinal $\mathfrak{c}$

Ahora $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} p_n$ es una unión numerable de $\mathfrak{c}$ cosas (y además p_1, p_2, pero sacar esos elementos a algo numerable me lo deja numerable asi que no hay problema) por ende

$$\mathfrak{c} = \# \bigcup_{n\in\mathbb{N}} p_n = \#\ell_\mathbb{N}$$

Por otro lado $\ell_\mathbb{N} \subseteq \ell^\infty$. Ahora consideremos para cualquier $x_n \in \ell_\mathbb{N}$

Si prestamos atención notamos que la bola $B(x_n, \frac{1}{2}) = x_n$.

Veásmoslo , supongamos que existe $x_n \neq y_n \in \ell_\mathbb{N}$ tal que $y_n \in B(x_n, \frac{1}{2})$ entonces $d_\infty(x_n, y_n) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n| \leq \frac{1}{2}$.

Pero para cualquier $n \in \mathbb{N}$ sabemos que $x_n, y_n \in \mathbb{N}$ entonces si $d(x_n, y_n) \leq \frac{1}{2}$ tiene que ser que $x_n = y_n$, pero esto es absurdo.

Por lo tanto $B(x_n, \frac{1}{2}) = x_n$ mostrando que x_n es aislado, y esto vale para cualquier $x_n \in \ell_\mathbb{N}$ y sabemos que tenemos $\mathfrak{c}$ sucesiones en dicho conjunto, por lo tanto tenemos $\mathfrak{c}$ puntos aislados, mostrando que $\ell_\mathbb{N}$ no es separable, y por lo tanto ℓ^∞ tampoco lo és $\square$

Ejercicio 30. Sean d_∞ y d_2 las métricas en R^n definidas en el ejercicio 7. Mostrar que d_∞ y d_2 son topológicamente equivalentes.

Proof. Por un lado tenemos que $d_\infty(x, y) \leq d_1(x, y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

Entonces si x_k converge con d_1 entonces seguro converge con d_∞

Ahora por otro lado supongamos x_k converge con d_∞

x_k converge con d_∞ entonces dado $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que $d_\infty(x_k, x) \leq \epsilon \quad \forall k \geq n_0$

Entonces dado $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que

$$d_1(x_k, x) = \sum_{j=1}^{n} |(x_k)_j - x_j| \leq n \sup_{1\leq j\leq n} |(x_k)_j - x_j| = n d_\infty(x_k, x) \leq n\epsilon \quad \forall k \geq n_0$$

Aclaración j es el indice de componente, y n es un número fijo, que sirve para cualquier ϵ y está dado por la dimensión de $\mathbb{R}^n$

Luego x_k converge en d_1. Entonces ambas distancias generan las mismas sucesiones convergentes, por lo tanto son equivalentes $\square$