Operadores criterios

<u>Def</u> V, W evpi's $T: V \to W$ $\forall u, v \in V$

se dice que T preserva productos internos si $(Tv \mid Tv')_W \overset{*}{=} (v \mid v')_V$. Un isomorfismo (entre evpi) es un isomorfismo lineal que preserva producto interno

$$\underset{\geq 0}{\|Tv\|^2} = (Tv \mid Tv) = (v, v) = \overset{\geq 0}{\|v\|^2} \Rightarrow \|Tv\| = \|v\|$$

<u>Ejemplo</u> $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $\quad T(x, y) = (x, y, 0)$

preserva prod interno pero no es iso

<u>Teorema</u> V, W evpi's $\dim V = \dim W < \infty$

$T: V \to W$ una $T\ell$ son equivalentes

(i) T preserva pi

(ii) T es un iso lineal que preserva

(iii) T lleva toda bon de V en bon W

(iv) T " una " de V " " W

<u>demo</u>

(i) $\Rightarrow$ (ii) Si T preserva pi $\Rightarrow \|Tv\| = \|v\|$ $\forall v \in V$

$\Rightarrow T$ es mono pq $Tv = 0$

$$\|v\| = \|Tv\| = \|0\| = 0 \Rightarrow v = 0$$

como $\dim V = \dim W < \infty$ mono (es) epi (es) iso

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Asumimos que T es isomorfismo

Sea B bon de V, $B = \{v_1 \dots v_n\}$ como T es iso lineal, $\{Tv_1 \dots Tv_n\}$ es una base de W. Además $(Tv_i | Tv_j) = (v_i | v_j) = \delta_{ij}$

$\therefore \{Tv_1, \dots Tv_n\}$ es bon

(Todo iso entre espi preserva por eso se llama morfismo)

(iii) $\Rightarrow$ (iv) ✓

(iv) $\Rightarrow$ (i) Sea $B = \{v_1 \dots v_n\}$ bon de V tq $B' = \{Tv_1 \dots Tv_n\}$ bon de W

$$v = \sum_{i=1}^{n} (v | v_i) v_i \qquad \tilde{v} = \sum_{j=1}^{n} (\tilde{v} | v_j) v_j$$

$$(Tv | T\tilde{v}) = \sum_{i,j=1}^{n} ((v|v_i) Tv_i | (\tilde{v}|v_j) Tv_j)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} (v|v_i) \overline{(\tilde{v}|v_j)} \underbrace{(Tv_i | Tv_j)}_{= \delta_{ij}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (v|v_i)(\tilde{v}|v_i) = (v|\tilde{v}) \quad \square$$

<u>ejemplo</u> $W = C[0,1]$ con pi canónico

$$(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$$

$$V = C[0,1] \text{ con pi } (f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)t^2\,dt$$

$\Rightarrow$ Construyo $T: V \to W$, $T(f)(x) = xf(x)$

$$Tf = t \cdot f$$

esta preserva pi pero no es iso

<u>teorema</u> V, W dos ev pi $T: V \to W$

entonces

T preserva pi $\Leftrightarrow$ T preserva normas

<u>dem</u> $(\Rightarrow)$ $\|Tv\|^2 = (Tv|Tv) = (v|v) = \|v\|^2 \Rightarrow \|Tv\| = \|v\|$

$(\Leftarrow)$ Sale de identidades de polariz

tenemos que $\|Tv\| = \|v\| \Rightarrow \|Tv\|^2 = \|v\|^2$

$$(Tv|Tw) = \frac{1}{4}(\|Tv+Tw\|^2 - \|Tv-Tw\|^2)$$
$$= \frac{1}{4}(\|T(v+w)\|^2 - \|T(v-w)\|^2)$$
$$= \frac{1}{4}(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2) = (v|w)$$

Def Una te $T: V \to V$ unitaria (V ev con pi) si es un isomorfismo

obs •) composición de unitaria es unitaria

•) inversa de unitaria es unitaria

dem T^{-1} es iso por def además

$$\|T^{-1} v\| \underset{\Downarrow}{=} \|T T^{-1} v\| = \|v\|$$

T unitaria $\Rightarrow T^{-1}$ preserva normas

teorema Sea U una te sobre V ev pi entonces

U unitaria $\Leftrightarrow \exists U^*$ (adjunto) y es tal que

$$UU^* = I = U^*U$$

dem ($\Rightarrow$) Asumimos U unitario $\therefore \exists U^{-1}$ y además $(Uv | U\tilde{v}) \overset{*}{=} (v | \tilde{v}) \quad \forall v, \tilde{v} \in V$

preserva pi

$$(Uv | w) = (Uv | UU^{-1} w)$$

$$\overset{*}{=} (v | U^{-1} w)$$

$\therefore U^{-1}$ es adjunta de U

($\Leftarrow$) Asumimos ahora que $\exists U^*$ adjunta

U tal que $UU^* = U^*U = I \rightsquigarrow U^* = U^{-1}$

y así U es isomorfismo lineal

Faltaba ver que preserva pi

$$(Uv \mid Uw) = (v \mid U^*(Uw)) = (v \mid w)$$

prop de $(\ )^*$

$\Rightarrow U$ preserva pi y era iso

$\rightsquigarrow U$ unitaria

<u>obs</u> Una tl entre dos evpi no necesariamente preserva pi (ni normas)

pero un iso entre dos evpi si preserva ambos

<u>def</u> Una matriz $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ($\mathbb{R}^{n\times n}$) se dice unitaria (ortogonal)

si $UU^* = U^*U = I$

<u>prop</u> V un $\mathbb{C}$-evpi de dim finita

$T: V \to V$ una tl entonces

T unitaria (ortogonal) $\Leftrightarrow \exists B$ bon $[T]_B$ es unitaria (ortogonal)

$\Leftrightarrow \forall B$ bon $[T]_B$ es unitaria (ortogonal)

Caracterización de unitaria $U = (c_1 | \cdots | c_n)$, $\{c_1, \dots c_n\}$ bon def Una matriz $U \in K^{n \times n}$ es ortogonal sii

$$UU^t = U^t U = I$$

obs U unitaria $\Rightarrow$ $1 = \det(UU^*) = \det U \det U^*$

$$= \det(U) \cdot \overline{\det(U)} = (z \cdot \bar{z})$$

$$= |\det(U)|^2$$

$$\Rightarrow |\det(U)| = 1$$

ejemplo caracterizo $U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ unitarias

$\det U = ad - bc = |1| e^{i\theta}$ para algun θ

$$U^{-1} = \frac{1}{\det U} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \underset{U^* = \bar{U}^t}{U^*} = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad a = \bar{d} \det U \quad \Rightarrow \quad \bar{a} = d\,\overline{\det U} = d e^{-i\theta}$$

$$d = \bar{a} \det U \quad \Rightarrow \quad \bar{d} = a e^{-i\theta}$$

$$\bar{c} = -e^{-i\theta} b$$

$$\rightarrow \quad U = \begin{pmatrix} a & b \\ -e^{i\theta} \bar{b} & e^{i\theta} \bar{a} \end{pmatrix}$$

$$|\det U|^2 = 1 \Rightarrow |\cancel{e^{i\theta}}(|a|^2 + |b|^2)| = 1$$

$$|a|^2 + |b|^2 = 1$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$$

<u>Teorema</u> Sea $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ inversible $\exists! M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ triangular superior con reales positivos en la diagonal / MB es unitaria

$\rightsquigarrow MB = U$ unitaria $\Rightarrow B = M^{-1} U$

triang sup con reales positivos en diag

Única $\rightsquigarrow$ descomp polar

<u>demo</u> <u>Existencia</u> $B = (v_1 | \dots | v_n)$ columnas

<u>G-S</u>

$$w_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(v_k | w_i)}{\|w_i\|^2} w_i = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} c_{ki} w_i$$

$$U = \left(\frac{w_1}{\|w_1\|} \middle| \dots \middle| \frac{w_n}{\|w_n\|} \right)$$ es unitaria

$$M = (M_{kj}) \text{ donde } M_{kj} = \begin{cases} 0 & j > k \\ \frac{1}{\|w_k\|} & j = k \\ -\frac{c_{kj}}{\|w_k\|} & j < k \end{cases}$$

Finales miercoles 5

27

10