Objetivos

- Aprender los conceptos de número primo, coprimos, máximo común divisor y mínimo común múltiplo, y sus propiedades.
- Aprender a calcular MCD y MCM.
- Aprender el Teorema Fundamental de la Aritmética y su utilidad en cálculo de divisores, MCD y MCM.

Ejercicios

1) Para cada uno de los siguientes pares de números calcular el máximo común divisor y expresarlo como combinación lineal de los números dados. Indicar en qué casos los números son coprimos entre sí.

(a) 8 y 23 (b) -11 y -15 (c) 606 y -108. (d) -108 y 66.

2) Probar que si $(a,4)=2$ y $(b,4)=2$ entonces $(a+b,4)=4$.

3) Probar que todo número entero es coprimo con su consecutivo.

4) Probar que si $(a,b)=1$ entonces $(7a-2b,3a-b)=1$.

5) Demostrar que $(a,b)=(a+qb,b)$ para todo $a,b,q\in\mathbb{Z}$

6) Sean a, b y c enteros tales que $(a,b)=1$. Probar que:

(a) Si $a \mid b\cdot c$, entonces $a\mid c$.
(b) Si $a\mid c$ y $b\mid c$, entonces $a\cdot b\mid c$.
(c) Si $c\mid a$, entonces $(c,b)=1$.

7) Probar las siguientes afirmaciones.

(a) Sean $p,n\in\mathbb{N}$ con p primo. $(p,n)=1$ si y sólo si p no divide a n.
(b) Si p es primo, entonces $(p,(p-1)!)=1$.
(c) Si $n\in\mathbb{N}$, $n>2$, existe un número primo p tal que $n<p<n!$

Observacion. *Las propiedades* **5)***,* **6)**(a) *y* **7)**(a) *son muy importantes y serán de utilidad en algunos de los ejercicios que siguen.*

8) Determinar los enteros positivos n tales que

(a) $n+7$ es divisible por $3n-1$. (b) $n(n+5)$ es divisible por $2n+1$.

9) Dar el conjunto de divisores de 4032 usando el T.F.A.

10) Describir los siguientes conjuntos de números enteros usando el T.F.A. y calcular su cardinal.

(a) $\{n\in\mathbb{Z}\mid \quad n\,|\,4032 \quad \text{y} \quad n\,|\,11^8\cdot 7^5\cdot 3^2\cdot 2\}$.
(b) $\{n\in\mathbb{Z}\mid \quad 4032\,|\,n \quad \text{y} \quad 11^8\cdot 7^5\cdot 3^2\cdot 2\,|\,n\}$.
(c) $\{n\in\mathbb{Z}\mid \quad 4032\,|\,n \quad \text{y} \quad n\,|\,11^8\cdot 7^5\cdot 3^2\cdot 2\}$.
(d) $\{n\in\mathbb{Z}\mid \quad 4032\,|\,n \quad \text{y} \quad n\,|\,11^8\cdot 7^5\cdot 3^2\cdot 2^{10}\}$.

(e) $\{n \in \mathbb{Z} \mid \quad (4032, n) = 1 \quad \text{y} \quad n \mid 11^8 \cdot 7^5 \cdot 3^2 \cdot 2\}$.
(f) $\{n \in \mathbb{Z} \mid \quad 4032 \mid n \quad \text{y} \quad (n, 11^8 \cdot 7^5 \cdot 3^2 \cdot 2) = 1\}$.

11) Hallar el menor múltiplo de 168 que es un cuadrado.

12) Demostrar que no existen enteros no nulos m y n tales que $m^3 = 47n^3$.

13) ¿En cuántos ceros termina el desarrollo decimal de 100!?

14) Calcular el mínimo común múltiplo de los siguientes pares de números:

(a) 12 y 15.
(b) 11 y 13.
(c) 140 y 150.
(d) $3^2 \cdot 5^2$ y $2^2 \cdot 11$.
(e) $2^2 \cdot 3 \cdot 5$ y $2 \cdot 5 \cdot 7$.

15) Sea $n \in \mathbb{N}$. Probar que $n \geq 100$ si $n \in \mathbb{N}$ es tal que $28|n$ y $45|n$.

16) Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ coprimos. Probar las siguientes afirmaciones.
(a) $(a + b, ab) = 1$.
(b) $(a + b, a - b) = 1$ ó 2. Dar ejemplos de a y b donde se obtenga cada posible resultado.

17) Sea n un entero no negativo. Probar que:
(a) $(7^n + 2^n, 7^n - 2^n) = 1$.
(b) $(2^n + 5^{n+1}, 2^{n+1} + 5^n) = 3$ ó 9. Dar ejemplos de n donde se obtenga cada posible resultado.

18) Sea $a \in \mathbb{Z}$. Calcular los posibles valores de $(2a^2 + 6a - 4, 2a^2 + 4a - 3)$.

19) Determinar los $a, b \in \mathbb{Z}$ coprimos tales que $\dfrac{9a}{b} + \dfrac{7a^2}{b^2} \in \mathbb{Z}$.

20) Sea $d = (a, b)$, $a, b \in \mathbb{Z}$, y sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \mid a$ y $n \mid b$. Usando la definición de máximo común divisor, probar que $\left(\dfrac{a}{n}, \dfrac{b}{n}\right) = \dfrac{d}{n}$.

21) Completar y demostrar:
(a) Si $a \in \mathbb{Z}$ no nulo, entonces $[a, a] = \dots$
(b) Si a, $b \in \mathbb{Z}$ no nulos, entonces $[a, b] = b$ si y sólo si ...
(c) Si a, $b \in \mathbb{Z}$ no nulos, entonces $(a, b) = [a, b]$ si y sólo si ...

22) Expresar 1810 en base 2.

23) Expresar en base 10 el entero $(1111)_3$.

24) Calcular la suma $(2234)_5 + (2310)_5$ expresándola en la misma base.

Más ejercicios...

Si ya hiciste los ejercicios anteriores continuá con la siguiente guía. Los ejercicios que siguen son similares y te pueden servir para practicar antes de los exámenes.

25) Probar que $(5a+8, 7a+3) = 1$ ó 41. Dar ejemplos de a donde se obtenga cada posible resultado.

26) Sea $a \in \mathbb{Z}$, $a > 1$ y sean $n, m \in \mathbb{N}$. Probar que $(a^n - 1,\, a^m - 1) = a^{(n,m)} - 1$.

27) Sean a y b números naturales y coprimos. Probar que $a \cdot b$ es un cuadrado si y solo si a y b son cuadrados.

28) Probar que si $a, b \in \mathbb{Z}$ son no nulos, entonces $(a+b, [a,b]) = (a,b)$.

29) Sea $a \in \mathbb{Z}$. Calcular los posibles valores de:

(a) $(2a^2 + 3a - 1, 5a + 6)$. (b) $(a^2 + 2, a^3 + 1)$.

30) Probar que si $n \in \mathbb{Z}$, entonces los números $2n+1$ y $\dfrac{n(n+1)}{2}$ son coprimos.

31) Si $(a,b) = p$ con p un número primo, hallar los posibles valores para

(a) (a^2, b) (b) (a^3, b) (c) (a^2, b^3)

32) Calcular la máxima potencia de 3 que divide a 100!