1	2	3	4	5	6	7	8	9

Calif.

APELLIDO Y NOMBRE:

Condición:

Libre

Regular

Algebra II - Final 2 de marzo de 2020

Justificar todas las respuestas. No se permite el uso de dispositivos electrónicos. Todos los resultados teóricos utilizados deben ser enunciados apropiadamente; en caso de utilizar resultados teóricos no dados en clase, los mismos deben demostrarse. Para aprobar se debe tener como mínimo 15 pts. en la parte teórica y 30 pts. en la parte práctica.

Parte Teórica (30 pts.)

1. (10 pts) Sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, y $b \in M_{m \times 1}(\mathbb{R})$. Denotemos por S al conjunto de soluciones del sistema no homogéneo:

$$S = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b \right\}.$$

Probar que si $S \neq \emptyset$ los elementos de S se pueden escribir como una solución fija más un vector que es solución del sistema homogéneo asociado.

- 2. Sea \mathbbm{k} un cuerpo y V, W dos \mathbbm{k} -espacios vectoriales de dimensión finita. Sean B_1 y B_2 bases de V y W respectivamente, y $f: V \to W$ una transformación lineal.
 - (2 pts) Definir la matriz de f en la bases B_1 , B_2 (denotada $[f]_{B_1,B_2}$).
 - (8 pts) Probar que para todo $v \in V$ vale que $[f(v)]_{B_2} = [f]_{B_1,B_2}[v]_{B_1}$.
- 3. (10 pts) Sea \mathbbm{k} un cuerpo y V un \mathbbm{k} -espacio vectorial. Sea $f:V\to V$ una transformación lineal. Probar que si v y w son dos autovectores de f correspondientes a autovalores distintos, entonces el conjunto $\{v,w\}$ es linealmente independiente.
- 4. Determinar si cada una de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando en cada caso la respuesta dada.
 - (a) (3 pts) En \mathbb{R}^2 consideremos la siguiente función $\Phi: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por

$$\Phi((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1 x_2 - 2x_1 y_2 - 2x_2 y_1 + y_1 y_2.$$

La función Φ define un producto interno en \mathbb{R}^2 .

(b) (3 pts) Sea \mathbbm{k} un cuerpo y V un \mathbbm{k} -espacio vectorial de dimensión 3. Si $W \subset V$ es un subespacio de dimensión 2 entonces W admite un único complemento, o sea existe un único $U \subset V$ subespacio tal que $U \oplus W = V$.

Parte Práctica (70 pts.)

5. (15 pts) Sea
$$A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$$
 la matriz dada por
$$\begin{pmatrix} t & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & t & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & t & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & t + a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Probar que $\det(A) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_1t + a_0$.

- 6. (15 pts) Sean a, b, c tres números reales distintos. Para cada uno de ellos definimos una transformación lineal $e_a : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$ (respectivamente e_b y e_c) dada por $e_a(P) = P(a)$ (o sea evaluar el polinomio en el elemento a). Probar que $B = \{e_a, e_b, e_c\}$ es una base de $(\mathbb{R}_2[x])^*$.
- 7. (15 pts) Sea $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ una matriz cualquiera. Probar que existe un número real λ tal que la matriz $A \lambda$ id es invertible.
- 8. Sea V un \mathbb{R} -espacio vectorial de dimensión finita, y sean $f,g:V\to V$ transformaciones lineales tales que $f\circ g=g\circ f=0$ (la transformación lineal nula) y $f+g=\mathrm{id}$.
 - (a) (10 pts) Probar que $V = Nu(f) \oplus Nu(g)$.
 - (b) (10 pts) Sea $T: V \to V$ una transformación lineal tal que $T^2 = \text{id}$. Probar que si λ es autovalor de T entonces $\lambda = \pm 1$. Utilizando el ítem anterior deducir que T es diagonalizable.
- 9. Sea Π el subespacio de \mathbb{R}^3 (con el producto interno canónico) generado por $\{(1,1,1),(1,-1,0)\}$.
 - (a) (5 pts) Calcular el espacio ortogonal de Π .
 - (b) (15 pts) Calcular el punto de Π cuya distancia a (1,0,0) sea la menor posible. Justificar por qué el punto elegido es el de menor distancia (Sugerencia: usar Pitágoras).

EJERCICIO PARA LIBRES El puntaje entre paréntesis es lo que se le resta al puntaje de la parte práctica en caso de no ser resuelto correctamente

Consideremos la transformación lineal $T: \mathbb{R}[x]_3 \to \mathbb{R}[x]_3$ dada por T(P(x)) = P''(x) - 3P(x).

- \bullet (-9 pts) Calcular bases del núcleo y de la imagen de T.
- $\bullet\,$ (-6 pts) Decidir siTes diagonalizable.

Justificar debidamente todas las respuestas