# Formas bilineales

**Def** $V$ $\mathbb{K}$-ev. Una forma bilineal es una función $f: V \times V \to \mathbb{K}$ tal que

∘) $f(cv_1 + v_2, w) = cf(v_1, w) + f(v_2, w)$
$\forall c \in \mathbb{K}$ $v_1, v_2, w \in V$

∘) $f(v, cw_1 + w_2) = cf(v, w_1) + f(v, w_2)$

$\forall c \in \mathbb{K}$ $v, w_1, w_2 \in V$

Ejemplos ∘) Todo prod interno sobre $\mathbb{R}$-ev (no sobre $\mathbb{C}$)

∘) $\det: \mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}$

∘) $\varphi, \psi \in V^*$ ~ $f(v, w) = \varphi(v)\psi(w)$

∘) $f_X: \mathbb{K}^{m \times n} \times \mathbb{K}^{m \times n} \to \mathbb{K}$
$X \in \mathbb{K}^{m \times n}$ fijo

$f_X(A, B) = Tr(A^t X B)$

obs $\mathcal{L}(V) = \{ f,\ f \text{ es forma bilineal} \}$ es un $\mathbb{K}$-ev

$$(f+g)(v,w) = f(v,w) + g(v,w)$$
$$(cf)(v,w) = c\, f(v,w)$$

$$\forall f,g \in \mathcal{L}(V) \quad v,w \in V$$

$\dim \mathcal{L}(V)$ ?! Base ??

Fijemos por un momento $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ base de $V \rightsquigarrow a_{ij} = f(v_i, v_j)$

$[f]_B = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ matriz de $f$ en base $B$

$$f(v,w) = f\left(\sum x_i v_i, \sum y_j v_j\right)$$

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \qquad w = \sum_{j=1}^{n} y_j v_j$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \, f(v_i, v_j)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \, a_{ij}$$

$$= (x_1, \ldots, x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= (v)_B^t [A]_B [w]_B$$

∴) De la fórmula anterior $A = [f]_B$ determina completamente la forma bilineal, recíproca dado $A \in K^{n \times n}$ la función

$$f(v, w) = (v)_B \, A \, (w)_B$$

es una forma bilineal tq $A = [f]_B$

**Teorema** $V$ $K$-ev $\dim V = n < \infty$
$B = \{v_1, \ldots v_n\}$ una base la función
$\Phi : L(V) \to K^{n \times n}$ $\Phi(f) = [f]_B$ es monomorfismo de espacios vectoriales (isomorfismo)

**Demo** ejercicio

**Corolario** $\dim L(V) = n^2 = \dim K^{n \times n}$

¿Base de $L(V)$? Sea $\{E_{ij}\}$ base $\mathbb{K}^{n\times n}$

$f_{ij}(v_k, v_\ell) = \delta_{ik}\,\delta_{j\ell}$

$\parallel$

$\Phi^{-1}(E_{ij})$ es decir $[f_{ij}]_B = E_{ij}$

<u>Teorema</u> $F: V^* \times V^* \to L(V)$

$F(\varphi,\psi)(v,w) = \varphi(v)\psi(w)$ es una biyección

<u>Idea de prueba</u> tomo $B^* = \{f_1, \dots, f_n\}$ base del dual de $B$: $f_i(v_j) = \delta_{ij}$

Si $f_{ij} = F(f_i, f_j)$ eso nos daría suryección

---

Fijemos $f$ forma bilineal

$L_f: V \to V^*$ $\qquad L_f(v) = f(v, -)$

$R_f: V \to V^*$ $\qquad R_f(v) = f(-, v)$

$(L_f(v))(w) = f(v,w)$

$(R_f(v))(w) = f(w,v)$ $\qquad \forall\, v,w \in V$

$L_f$ y $R_f$ son transformaciones lineales

Lema $rg(L_f) = rg(R_f)$

idea de prueba: corresponde a rg fila y rango columna de la matriz de $f$ fijada en una base

Def Se dice que una forma bilineal sobre $V$ es no degenerada si $rg(L_f) = rg(R_f) = \dim V < \infty$

$\therefore L_f$ y $R_f$ son isomorfismos

$\Leftrightarrow \forall v \in V \neq 0, \exists w \in V / f(v,w) \neq 0$
($L_f$ inyectiva)
$\Leftrightarrow \forall v \in V \neq 0 \ \exists w \in V / f(w,v) \neq 0$
($R_f$ inyectiva)

---

Forma bilineal simétrica y antisimétrica

Def Una forma bilineal $f: V \times V \to \mathbb{K}$ se dice

·) Simétrica si $f(v,w) = f(w,v)$

·) Antisimétrica si $f(v,w) = - f(w,v)$

ejemplo ) Prod interno en $\mathbb{R}$
$\Rightarrow$ forma simétrica

) $\det : K^2 \times K^2 \to K$ es antisimétrico

) $f$ forma bilineal

simétrica $\rightsquigarrow$ $f_1(v,w) = f(v,w) + f(w,v)$

antisimétrica $\rightsquigarrow$ $f_2(v,w) = f(v,w) - f(w,v)$

obs $f$ es simétrica
$\Leftrightarrow$ $[f]_B$ simétrica para alguna base $B$
$\Leftrightarrow$ $[f]_B$ simétrica $\forall B$ base

análogo con antisimétrica

Teorema

$S(V) = \{$formas bilineales simétricas de $V\}$

$A(V) = \{$formas bilineales antisimétricas de $V\}$

$S(V)$ y $A(V)$ son subesp de $L(V)$

$(\text{car } \mathbb{K} \neq 2)$

Más aún $\quad L(V) = S(V) \oplus A(V)$

$$\begin{array}{cccc} \Phi \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \mathbb{K}^{n\times n} & \{\text{matrices simétricas}\} & \{\text{matrices antis}\} \end{array}$$

obs antisimetrica $\Leftarrow f(v,v) = 0 \ \forall v \in V$

dem $0 = f(v+w, v+w) = \cancel{f(v,v)} + f(v,w) + f(w,v) + \cancel{f(w,w)}$

$\Rightarrow \quad -f(w,v) = f(v,w)$

<u>Teorema</u>: car $\mathbb{K} = 0$ $f$ una forma bilineal simétrica sobre $V$ dim $V < \infty$

$\Rightarrow \exists B$ base de $V$ / $(f)_B$ diagonal

<u>idea de prueba</u> $\mathbb{K} = \mathbb{R} \sim A = (f)_{\bar{B}}$ es simétrica y ya lo sabemos porque da lugar a una tl autoadjunta sobre $\mathbb{R}^n$ con prod canónico. Si $\mathbb{K} \neq \mathbb{R}$

Fijo $B = \{v_1 \ldots v_n\}$ en el teorema ($f$ simétrica)

$$(f)_B = \begin{pmatrix} c_1 & & \\ & \ddots & \\ & & c_n \end{pmatrix} \quad \text{car } \mathbb{K} = 0$$

$$f(v_j, v_i) = c_i \delta_{ij}$$ recordemos $c_1, \dots c_k \neq 0$

y $c_{k+1} = \dots = c_n = 0$

$$k = rg(L_f) = rg(R_f)$$

<u>$\mathbb{K} = \mathbb{C}$</u>: $\tilde{v}_i = \begin{cases} \frac{v}{\sqrt{c_i}} & i \leq k \\ v_i & i > k \end{cases}$ $\tilde{B} = \{\tilde{v}_1, \dots \tilde{v}_n\}$

$$\Rightarrow (f)_{\tilde{B}} = \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ podemos asumir $c_1, \dots c_l > 0$

$c_{l+1} \dots c_k < 0$

$c_{k+1} = \dots c_n = 0$

$$\tilde{v}_i = \begin{cases} \frac{v_i}{\sqrt{c_i}} & i \leq l \\ \frac{v_i}{v_i / \sqrt{c_i}} & l < i \leq k \\ v_i & i > k \end{cases}$$

$$\Rightarrow (f)_{\tilde{B}} = \left(\begin{array}{c|c|c} I_l & & \\ \hline & -I_{k-l} & \\ \hline & & 0 \end{array}\right)$$