## Definición

Un campo vectorial definido en $U$ (abierto en $S$) es una aplicación $W$ definida en $U$ tal que para cada $q \in U$, $W(q) \in T_q S$

$W$ se dice **diferenciable** en $U$, si $\forall q \in U$, $\exists$ una parametrización $\varphi: \tilde{U} \to S$, $\varphi(\tilde{U}) \subseteq U$ tal que si

$$W = a\varphi_u + b\varphi_v$$

entonces $a$ y $b$ son diferenciables en $\tilde{U}$

## Observación

La definición no depende de la carta

## Definición

Sea $W$ un campo vectorial diferenciable en un abierto $U$ de $S$

Dados $P \in U$, $v \in T_P S$, sea $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ cualquier curva diferenciable tal que $\alpha(0) = P$, $\alpha'(0) = v$.

Sea $w(t) = W(\alpha(t))$. Se define

$$\left(\frac{DW}{dt}\right)(0) = \text{Proyección ortogonal de } w'(0) \text{ sobre } T_P S$$

y se denomina **derivada covariante de $W$ en la dirección de $v$**

## Notación

$$D_v(W)(P) = \left(\frac{DW}{dt}\right)(0)$$

## Lema

$D_v W(P)$ sólo depende de $v$ (y no de $\alpha$)

## Demostración

Sea $\alpha:(-\varepsilon,\varepsilon)\to S$ tal que $\alpha(0)=P$, $\alpha'(0)=v$.

Dada $\varphi:\tilde{U}\to S$ parametrización, $\alpha(t)=\varphi(u(t),v(t))$, $\alpha((-\varepsilon,\varepsilon))\subseteq\varphi(\tilde{U})\subseteq U$

$$W(t)=\underbrace{a(u(t),v(t))}_{:=a}\,\varphi_u(u(t),v(t))+\underbrace{b(u(t),v(t))}_{:=b}\,\varphi_v(u(t),v(t))$$

$$=a\varphi_u+b\varphi_v$$

$$W'(t)=a'\varphi_u+a(\varphi_{uu}u'+\varphi_{uv}v')+b'\varphi_v+b(\varphi_{uv}u'+\varphi_{vv}v')$$

Recordar que

$$\varphi_{uu}=\Gamma^1_{11}\varphi_u+\Gamma^2_{11}\varphi_v+eN$$

componente en $N$

$$\varphi_{uv}=\Gamma^1_{12}\varphi_u+\Gamma^2_{12}\varphi_v+fN$$

$$\varphi_{vv}=\Gamma^1_{13}\varphi_u+\Gamma^2_{13}\varphi_v+gN$$

$$\frac{DW}{dt}(0)=\Big[\left(a'+au'\Gamma^1_{11}+v'\Gamma^1_{12}a+bu'\Gamma^1_{12}+bv'\Gamma^1_{12}\right)\varphi_u$$
$$+\left(au'\Gamma^2_{11}+av'\Gamma^2_{12}+b'+bu'\Gamma^2_{12}+bv'\Gamma^2_{22}\right)\varphi_v\Big]\Big|_{t=0}$$

y esta expresión depende de $P$ y $v$ $\blacksquare$

## Ejemplo

Sea $S$ el plano que pasa por $P_0$ y está generado por $\{v_1,v_2\}$ BO

$$\varphi(u,v)=P_0+uv_1+vv_2$$

$E=G=1$, $F=0$. Calculo $\Gamma^k_{ij}$

Pues aparecen las derivadas de $E$, $F$, o $G$

$$\begin{bmatrix}E & F\\ E & G\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=I \rightsquigarrow \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Gamma^1_{ij}\\ \Gamma^2_{ij}\end{bmatrix}=\overbrace{\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}}$$

Por lo tanto $\Gamma_{ij}^{k}=0 \quad \forall i,j,k$

$\dfrac{DW}{dt} = a'\varphi_u + b'\varphi_v = W'$ ∴ En este caso la derivada covariante coincide con la derivada usual

$\hookrightarrow \varphi_u = v_1$

$\varphi_v = v_2$

pues $W' = (a\varphi_u + b\varphi_v)'$

$= a'\varphi_u + a\underbrace{\varphi_u'}_{=0} + b'\varphi_v + b\underbrace{\varphi_v'}_{=0}$

**Definición**

Sea $\alpha : I \to S$ diferenciable en $S$. Un **Campo a lo largo de $\alpha$** es una correspondencia que asigna a cada $t \in I$, un vector $W(t) \in T_{\alpha(t)}S$.

Se dice diferenciable en $t_0$ si $\exists$ una parametrización $\varphi : U \to S$ de $\alpha(t_0)$ en $S$ tal que si $W(t) = a(t)\varphi_u + b(t)\varphi_v$ entonces $a$ y $b$ son diferenciable en $t_0$

**Definición**

La derivada covariante de $W$ campo a lo largo de $\alpha$, se define mediante la fórmula del lema

$$\frac{DW}{dt} = (a' + au'\Gamma_{11}^{1} + v'\Gamma_{12}^{1}a + bu'\Gamma_{12}^{1} + bv'\Gamma_{12}^{1})\varphi_u + (au'\Gamma_{11}^{2} + av'\Gamma_{12}^{2} + b' + bu'\Gamma_{12}^{2} + bv'\Gamma_{22}^{2})\varphi_v$$

**ejemplo**

$\alpha'(t)$ es un campo a lo largo de $\alpha$

$$\frac{D\alpha'(t)}{dt} = \text{Componente tangencial (a } S\text{) de } \alpha''(t)$$

**Definición**

Un campo $W$ a lo largo de $\alpha$ se dice paralelo si $\dfrac{DW}{dt} = 0 \quad (\forall t \in I)$

**Ejemplo**

Si $S$ es el plano, $\varphi(u,v) = P_0 + u v_1 + v v_2$

$$W(\alpha(t)) = a \varphi_u + b \varphi_v \text{ con } a \text{ y } b \text{ constantes}$$

$\Rightarrow W$ es paralelo a lo largo de cualquier curva $\alpha$ en el plano

**Proposición**

Si $V$ y $W$ son campos paralelos a lo largo de $\alpha: I \to S$ diferenciable, entonces $\langle V(t), W(t) \rangle_{\alpha(t)}$ es constante. En particular, $\|V(t)\|$, $\|W(t)\|$ y el ángulo que forman $V(t)$ y $W(t)$ son constante

**Demostración**

$W$ es paralelo a lo largo de $\alpha$

$$\Rightarrow W'(t) \perp T_{\alpha(t)} S, \ \forall t \in I$$

$$\Rightarrow \langle W'(t), V(t) \rangle = 0 \ \forall t \in I$$

Análogamente, $\langle W(t), V'(t) \rangle = 0, \ \forall t \in I$

$$\Rightarrow \langle V(t), W(t) \rangle' = \langle V'(t), W(t) \rangle + \langle V(t), W'(t) \rangle = 0$$

$\Rightarrow \langle V(t), W(t) \rangle$ es constante $\blacksquare$

**Ejemplo**

Si $\alpha$ es un círculo máximo en $S^2$ (PLA)

$$\Rightarrow \alpha''(t) \perp T_{\alpha(t)} S^2$$

$$\Rightarrow \frac{D\alpha'(t)}{dt} = 0$$

$\Rightarrow \alpha'$ es paralelo

## Proposición

Sea $\alpha : I \to S$, $w_0 \in T_{\alpha(t_0)}S \Rightarrow \exists!$ campo vectorial $W$ paralelo a lo largo de $\alpha$ tal que $W(t_0) = w_0$.

La proposición se demuestra aplicando un Teorema de Existencia y Unicidad de la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \dfrac{DW}{dt} = 0 \\ W(t_0) = w_0 \end{cases}$$