La urna de polya

Caja con r bolas, b blancas
sacamos una y metemos c
de ese mismo color
y repetimos N veces

a) Probabilidad de que salga rojo en la i-ésima repetición $1 \leq i \leq N$

b) Probabilidad de que salga roja en la lera extracción sabiendo que salió roja en la segunda

$R_i :=$ salio en el i-ésima cuargo

a) $P(R_i)$
b) $P(R_1 | R_2)$

$$P(R_1) = \frac{r}{r+b}$$ teorema probabilidad

$$P(R_2) = P(R_2|R_1) \cdot P(R_1) + P(R_2|B_1) P(B_1)$$

$$= \frac{r+c}{r+b+c}\frac{r}{r+b} + \frac{r}{r+b+c}\frac{b}{r+b}$$

$$\frac{r(r+b+c)}{(r+b+c)(r+b)} = \frac{r}{r+b}$$

$$HI = P(R_{i-1}) = \frac{r}{r+b} \quad \text{pdq} \quad P(R_i) = \frac{r}{r+b}$$

tea proba

$$P(R_i) = P(R_i \mid R_{i-1})\,P(R_{i-1}) + P(R_i \mid B_{i-1})\,P(B_{i-1})$$

notación $\quad r_{i-1}$:= # de bolitas rojas antes de la extracción $i-1$

b_{i-1} : lo mismo con blancas

$$P(R_i) = \frac{r_{i-1}+c}{r_{i-1}+b_{i-1}+c} \cdot \frac{r_{i-1}}{r_{i-1}+b_{i-1}}$$

$$+ \frac{r_{i-1}}{r_{i-1}+b_{i-1}+c}\,\frac{b_{i-1}}{r_{i-1}+b_{i-1}}$$

$$= \frac{r_{i-1}\,(r_{i-1}+\cancel{b}_{i-1}+c)}{(r_{i+1}+b_{\cancel{i-1}}+c)\,(r_{i-1}+b_{i-1})}$$

$$= \frac{r_{i-1}}{r_{i-1}+b_{i-1}} = P(R_{i-1}) = \frac{r}{r+b}$$

def prob condicional

b) $$P(R_1 \mid R_2) = \frac{P(R_1 \cap R_2)}{P(R_2)}$$

$$= \frac{P(R_2 \mid R_1)\cdot P(R_1)}{P(R_2)}$$

$$= \frac{\dfrac{r+c}{r+b+c}\cdot\dfrac{r}{r+b}}{\dfrac{r}{r+b}} = \frac{r+c}{r+b+c}$$

Proposición $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ep

$A_1, \dots A_n \in \mathcal{A}$ tal que

$P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$ entonces

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$
$$\cdot P(A_{n-1} | A_1 \cap \dots \cap A_{n-2}$$
$$\vdots$$
$$P(A_2 | A_1) \cdot P(A_1)$$

Base

$n = 2$ $\quad P(A_1 \cap A_2) = \dfrac{\overset{>0}{P(A_1 \cap A_2)}}{P(A_1)} P(A_1)$

$$\| $$

$$= P(A_2 | A_1) P(A_1) \checkmark$$

HI $\quad P(A_1 \cap \dots A_{n-1}) = P(A_{n-1} | A_1 \cap \dots A_{n-2})$
$$\dots\dots P(A_2 | A_1) P(A_1)$$

$$P(A_1 \cap \dots A_{n-1} \cap A_n) = \frac{P((A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \cap A_n) \cdot P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})}{\underbrace{P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})}_{>0 \text{ hipotesis}}}$$

$$= P(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \cdot P(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

$$\overset{HI}{=} P(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \, P(A_{n-1} | A_1 \cap \dots \cap A_{n-2}) \cdots \cdot P(A_2 | A_1) \, P(A_1)$$

$\square$

Independencia de eventos

def $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ep. Dos eventos se dicen independientes si

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Si A y B son independientes con $P(A) > 0$ entonces "la ocurrencia de A no afecta la prob de ocurrencia de B"

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\cancel{P(A)} P(B)}{\cancel{P(A)}} = P(B)$$

Proposición

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ep y sea A, B eventos con $P(A) > 0$ entonces A y B son independientes

$$\Leftrightarrow \quad P(B|A) = P(B)$$

$(\Rightarrow)$ $$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\cancel{P(A)}P(B)}{\cancel{P(A)}} = P(B)$$

$(\Leftarrow)$ $$P(B) = P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$\Rightarrow \quad P(A)P(B) = P(A \cap B)$$

$\therefore$ A y B son indep $\square$

Def Tengo ep $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$
$n \geq 2$

Decimos que $A_1, \dots A_n$ son mutuamente independientes cuando

$$P(A_{i_1} \cap \dots A_{i_j}) = \prod_{k=1}^{j} P(A_{i_k})$$

$2 \leq j \leq n \qquad 1 \leq i_1 < i_2 < \dots \; i_j \leq n$

Corolario 1 $(n=2)$

A, B indptes $\Leftrightarrow$ son mutuamente indptes

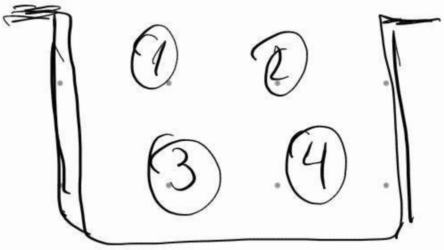
$(P(A \cap B) = P(A)P(B))$

Sin embargo con $n \geq 3$

$A_1, \dots A_n$ mutuamente indptes $\Longrightarrow$ $A_1, \dots A_n$ indeptes

$\not\Leftarrow$

ejemplo



elijo una ficha al azar y anoto el nº que salió

$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ con $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = P(\{3\}) = P(\{4\}) = \frac{1}{4}$$

Sea $A = \{1, 2\}$ $\quad B = \{1, 3\}$ $\quad C = \{1, 4\}$

$\Rightarrow$ A y B son indptes pues

$$P(A \cap B) = P(\{1\}) = \frac{1}{4}$$

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

análogo A y C y B y C son indptes

pero A, B, C no son mutuamente independientes

$P(A \cap B \cap C) = P(\{1\}) = \frac{1}{4}$

$P(A)\,P(B)\,P(C) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$