Análisis Funcional I – 2024
Práctico 3

Bases ortonormales. Fourier

(1) Hacer los siguientes ejercicios de capítulo 3 del libro Linear Functional Analysis de Rynne y Youngson:
- ejercicios 3.21, 3.22, 3.23 y 3.24 (página 81),
- ejercicio 3.26 (página 82),
- ejercicio 3.27 (página 85) - Repasar el Teorema de Stone-Weiestrass (Teorema 1.40 del libro.)
- ejercicio 3.28[1] (página 85)

(2) Sea $\chi_{[0,1]}$ la función característica del intervalo $[0,1]$. Probar que

$$\left\{\chi_{[0,1]}(x-n)\ e^{2\pi imx}\right\}_{n,m\in\mathbb{Z}}$$

es base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$ (llamada *base de Gabor*). Deducir que $L^2(\mathbb{R})$ es separable.

(3) Sea $f \in C^k(\mathbb{S}^1)$. Probar que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\langle f^{(k)}, e^{inx}\rangle = (in)^k\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\langle f, e^{inx}\rangle\right)$$

donde $\langle g,h\rangle := \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\overline{h(x)}\ dx$.

(4) Probar que si $f\in L^1([-\pi,\pi])$ entonces existen sus coeficientes de Fourier

$$a_n(f) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\ dx$$

y se cumple que $(a_n(f))_n \in c_0$.

(5) (a) Calcular los coeficientes de Fourier de $f(t) = -\chi_{[-\pi,0]}(t) + \chi_{[0,\pi]}(t)$.
(b) Calcular $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.
(c) Deducir usando (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

(6) Sean f y g funciones pertenecientes al $L^2((-\pi,\pi])$. Extenderlas a funciones sobre $\mathbb{R}$ de manera tal que resulten periódicas de período 2π. Mostrar que la convolución

$$(f*g)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)\ dy$$

está en $L^1((-\pi,\pi))$ y se satisface

$$\langle f*g, e^{inx}\rangle = \langle f, e^{inx}\rangle\langle g, e^{inx}\rangle.$$

[1]En (d) falta un factor $\frac{1}{2^n n!}$ en la def. de e_n.

(7) Sea f una función par en $L^2([-\pi,\pi])$. Probar que $a_n(f) = a_{-n}(f)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

(8) Sea $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$, periódica de período 2π. Dado $\varepsilon > 0$, probar que existe un polinomio trigonométrico $\varphi(x) = a_0 + \sum_{n=0}^{N} (a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx))$, tal que $|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon \ \forall x$.

(9) Sea $\mathcal{P}$ pre-Hilbert con BON, probar que $\mathcal{P}$ separable si y sólo si existe $\{\varphi_i\}$ base numerable.

(10) Si $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert de dimensión infinita entonces toda base algebraica es no numerable.

(11) En $L^2(\mathbb{T})$ definimos los subespacios $\mathcal{H}_1$ y $\mathcal{H}_2$ como

$$\mathcal{H}_1 = \overline{\{f \in C(\mathbb{T}) : f \text{ es una función par}\}},$$

$$\mathcal{H}_2 = \overline{\{f \in C(\mathbb{T}) : f \text{ es una función impar}\}}$$

(a) Probar que $\mathcal{H}_1^{\perp} = \mathcal{H}_2$

(b) Probar que $\{\sqrt{2}\cos(nx)\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{1\}$ es base ortonormal de $\mathcal{H}_1$ y $\{\sqrt{2}\operatorname{sen}(nx)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es base ortonormal de $\mathcal{H}_2$.

(c) Toda función f en $L^2[0,\pi]$ se la puede escribir como

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_n \cos(nx) \quad \text{y} \quad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nx),$$

en el sentido de $L^2[0,\pi]$, donde

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx) \qquad \text{y} \qquad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx).$$

`Definición`: *Un álgebra de Banach $\mathcal{A}$, es espacio de Banach con un producto xy (de $\mathcal{A}\times\mathcal{A}\to\mathcal{A}$) tal que para todo x, y, z en $\mathcal{A}$ y α en el cuerpo $\mathbb{K}$ vale*

(a) $(xy)z = x(yz)$.

(b) $x(y+z) = xy + xz$ *y* $(x+y)z = xz + yz$.

(c) $(\alpha x)y = \alpha(xy) = x(\alpha y)$.

(d) $||xy|| \leq ||x||||y||$.

Observación: el inciso (4) implica la continuidad del producto. (Probarlo).

Una álgebra sobre $\mathbb{C}$ se dice $*$-álgebra si cuenta con una involución $* : \mathcal{A}\to\mathcal{A}$ tal que para todo x, y en $\mathcal{A}$ y α en $\mathbb{C}$ vale

(a) $(x+y)^* = x^* + y^*$.

(b) $(\alpha x)^* = \overline{\alpha}x^*$.

(c) $(xy)^* = y^*x^*$.

(d) $(x^*)^* = x$.

Una $*$-álgebra de Banach $\mathcal{A}$ es una $*$-álgebra que es álgebra de Banach.

`Definición:` *$A : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ es morfismo de álgebras de Banach si para todo $x,\ y \in \mathcal{A}_1$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, se tiene*

(a) $A(\alpha x + y) = \alpha A(x) + A(y)$

(b) $A(xy) = A(x)A(y)$

(c) $||A(x)|| \leq C||x||$.

Además si $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ son $*$-algebras de Banach el morfismo de álgebras de Banach A será un morfismo de $*$-algebras de Banach si $A(x^*) = A(x)^*$ para toda $x \in \mathcal{A}_1$.

Observación: Si $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$ tienen identidad para el producto entonces $A(e_{\mathcal{A}_1}) = e_{\mathcal{A}_2}$ y si existieran los inversos $A(x^{-1}) = A(x)^{-1}$. (Probarlo)

(12) (a) Probar que ℓ^∞ es un $*$-álgebra de Banach con la suma usual, el producto $x.y = \{x_i y_i\}_{i=1}^\infty$ y $\{x_i\}^* = \{\overline{x_i}\}$.

(b) Probar que $(\ell^\infty, .)$ tiene identidad.

(c) Probar que $L^1(\mathbb{T})$ es un $*$-álgebra de Banach con la suma usual de funciones, el producto dada por la convolución y $f^*(x) = \overline{f(-x)}$. Además $\|f^*\|_{L^1} = \|f\|_{L^1}$.

(d) Probar que $\widehat{\quad} : L^1(\mathbb{T}) \to \ell^\infty$ es morfismo de $*$-álgebras de Banach.

(e) Probar que $(L^1(\mathbb{T}), *)$ no tiene identidad.

(13) (a) Probar que que si $f \in C^k(\mathbb{T})$ entonces $\widehat{f^k}(n) = i^k n^k \widehat{f}(n)$.

(b) $\widehat{L_h f}(n) = \widehat{f}(n) e^{-inh}$.

(c) $\widehat{e^{ik\cdot} f}(n) = \widehat{f}(n-k)$.

Ejercicios adicionales

(14) Sea $w(x)$ una función positiva de soporte compacto. Probar que $\langle f, g\rangle_w := \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)w(x)dx$ define un produto interno en

$$L^2(w) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 w(x) < \infty\}.$$

Decimos que $\{P_n\}_{n=0}^\infty$ es una sucesión de polinomios ortogonales respecto de w si:

- $P_n(x)$ es un polinomio de grado n con coeficientes reales.
- $\langle P_n, P_m\rangle_w = h_n \delta_{n,m}$ con $h_n \neq 0$ para todo n.

Probar que existe una sucesión de polinomios ortogonales respecto de w, determinada salvo constante, y que el espacio generado por ellos es denso en $L^2(w)$. Es decir, $\{P_n\}$ es una BON de $L^2(w)$.