PRÁCTICO 1

ESPACIO DE PROBABILIDAD

1. Dar un espacio muestral adecuado para cada uno de los siguientes experimentos y asignarle una medida de probabilidad.
   a) Una caja tiene 5 bolillas numeradas $1,2,3,4,5$. Se extrae una al azar.
   b) Una caja tiene 5 bolillas marcadas $1,2,3,4,5$. Se extrae una bolilla al azar, se la reemplaza y se hace una segunda extracción al azar.
   c) Una caja tiene 5 bolillas marcadas $1,2,3,4,5$. Se extrae una bolilla al azar, no se la reemplaza y se hace una segunda extracción al azar.
   d) Cinco cartas marcadas $1,2,3,4,5$ son mezcladas y puestas en fila.
   e) Una moneda es arrojada 5 veces y se registra la cantidad de caras.
   f) Un dado es arrojado 5 veces.
   g) Una moneda es arrojada hasta que aparece una cara y se registra la cantidad de cruces.
   h) Un dado es arrojado hasta que aparece un 1 y se registra el número de tiradas adicionales.
   i) Un dado es arrojado hasta que aparece un uno o un dos y se registra el número de tiradas adicionales.

2. Sean A, B y C eventos en un espacio de probabilidad discreto. Aparear cada ecuación expresada con la notación de conjuntos con la frase correspondiente en lenguaje de evento.

a) $A \cap B \cap C = A \cup B \cup C$	i) A y (B o C) son disjuntos
b) $A \cap B \cap C = A$	ii) Si no ocurre A entonces no ocurre (B o C)
c) $A \cup B \cup C = A$	iii) La ocurrencia de A implica la ocurrencia de (B y C)
d) $A \cup B \cup C - (B \cup C) = A$	iv) Los eventos A, B y C son idénticos

3. Si A, B y C son eventos en un espacio de probabilidad. Demostrar que:
   a) Si $A \subseteq B$ entonces $P(B-A) = P(B) - P(A)$.
   b) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.
   c) Enuncie una generalización del ítem b) para el caso de una unión de n eventos en un espacio de probabilidad.

4. Sean $A_1, A_2, \ldots$ eventos en un espacio de probabilidad. Probar que:
   a) $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.
   b) $P\left(\bigcap_{n=1}^{k} A_n\right) \geq 1 - \sum_{n=1}^{k} P(A_n^c)$.
   c) $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geq 1 - \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n^c)$.

5. Sean $A_1, A_2, \ldots$ eventos en un espacio de probabilidad. Probar que:
   a) Si $P(A_n) = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0$.
   b) Si $P(A_n) = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1$.
   c) Si $\{A_n\}$ es una sucesión decreciente de eventos ($A_{i+1} \subseteq A_i \ \forall i$), entonces $P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$.

6. Demostrar que si $A_1, A_2, \ldots$ y $B_1, B_2, \ldots$ son eventos en un mismo espacio de probabilidad tales que $P(A_n) \longrightarrow 1$ y $P(B_n) \longrightarrow p$ (con $p \in [0,1]$) cuando $n \longrightarrow \infty$, entonces $P(A_n \cap B_n) \longrightarrow p$.

7. Sean $A_1, A_2, \ldots$ eventos en un espacio de probabilidad. Probar que
$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$
Luego, se define:
$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \qquad \liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$
Si $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n = \liminf\limits_{n\to\infty} A_n$ y el $\lim_{n\to\infty} P(A_n)$ existe, llamamos $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$. Entonces, probar que
$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\lim_{n\to\infty} A_n).$$

8. Sea Ω un conjunto no vacío.
   a) Probar que si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son σ-álgebras de subconjuntos de Ω, entonces $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ es también una σ-álgebra de subconjuntos de Ω.
   b) Generalización de a): Si $\mathcal{A}_i$ con $i \in I$ son σ-álgebras de subconjuntos de Ω, entonces $\cap_{j\in I}\mathcal{A}_j$ es también una σ-álgebra de subconjuntos de Ω.
   c) Sea $\mathcal{C}$ una familia de subconjuntos de Ω. Muestre que existe por lo menos una σ-álgebra de subconjuntos de Ω que contiene a $\mathcal{C}$.
   d) Una vez pensados los ítems b) y c), ¿cómo definiría a la menor σ-álgebra de subconjuntos de Ω que contiene a $\mathcal{C}$?

9. Describir un espacio de probabilidad que sirva para modelar cada uno de los siguientes experimentos.
   a) De un mazo de 52 cartas se extraen cartas aleatoriamente, de a una por vez y con reposición, hasta obtener el primer rey. Se registra el número total de retiradas (sin contar el rey).
   b) Quince bolas son extraídas, aleatoriamente y con reposición, de una urna que contiene 5 bolas rojas, 9 bolas negras y una blanca. Se observa el número de veces que ocurre cada color.
   c) El experimento de b) es realizado sin reposición.

10. Se retiran 4 cartas, aleatoriamente, de un mazo de 52 cartas. Se registra el número de reyes en la muestra.
    a) Describir un espacio de probabilidad que sirva para modelar el experimento si:
       i) las extracciones son realizadas sin reposición.
       ii) las extracciones son realizadas con reposición.
    b) Determine en qué caso, (i) o (ii), es más probable obtener 4 reyes.

11. Suponga que A y B son eventos en un espacio de probabilidad.
    a) Si $P(A) = 3/4$ y $P(B) = 2/3$, ¿pueden ser A y B disjuntos?
    b) Sea $p \in (0,1)$ y $P(A) = P(B) = p$. Entonces, ¿puede ser $P(A \cap B) \leq p^2$?