ÁLGEBRA III - 2022
Práctico 7

Funcionales lineales y espacios con producto interno.

1. Sea $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ la base de $\mathbb{R}^3$ dada por $\alpha_1 = (1, 0, 1)$, $\alpha_2 = (0, 1, -2)$ y $\alpha_3 = (-1, -1, 0)$.
   (a) Hallar la base dual $\mathcal{B}^* = \{\alpha_1^*, \alpha_2^*, \alpha_3^*\}$.
   (b) Sea f un funcional lineal tal que $f(\alpha_1) = 1$, $f(\alpha_2) = -1$ y $f(\alpha_3) = 3$. Hallar $f(\alpha)$ para un vector genérico $\alpha = (a, b, c)$.
   (c) Sea f cualquier funcional lineal no nulo tal que $f(\alpha_1) = f(\alpha_2) = 0$. Si $\alpha = (2, 3, -1)$, demostrar que $f(\alpha) \neq 0$.

2. Sea V el espacio vectorial real de todos los polinomios $f \in \mathbb{R}[x]$ de grado menor o igual a 2. Se definen tres funcionales lineales f_1, f_2, f_3 sobre V por
$$f_1(p) = \int_0^1 p(x)dx, \quad f_2(p) = \int_0^2 p(x)dx, \quad f_3(p) = \int_0^{-1} p(x)dx.$$
   Demostrar que $\{f_1, f_2, f_3\}$ es una base de V^* presentando una base de V de la cual esta es dual.

3. Sea F un cuerpo y $\mathrm{tr} : F^{n\times n} \to F$ la función traza.
   (a) Mostrar que tr es un funcional lineal.
   (b) Mostrar que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ para todo $A, B \in F^{n\times n}$.
   (c) Mostrar que si $f : F^{n\times n} \to F$ es un funcional lineal tal que $f(AB) = f(BA)$ para todo $A, B \in F^{n\times n}$, entonces existe $c \in F$ tal que $f = c\,\mathrm{tr}$.

4. Sean W el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por los vectores $(1, 0, -1, 2)$ y $(2, 3, 1, 1)$. Describir el anulador W^0 y dar una base.

5. Sean W_1 y W_2 subespacios de un espacio vectorial de dimensión finita.
   (a) Demostrar que $(W_1 + W_2)^0 = W_1^0 \cap W_2^0$.
   (b) Demostrar que $(W_1 \cap W_2)^0 = W_1^0 + W_2^0$.

6. Sea W un subespacio de un espacio vectorial de dimensión finita. Sean $f_1, \dots, f_k$ generadores de W^0 y sea N_{f_i} el hiperespacio definido por f_i. Mostrar que $W = N_{f_1} \cap N_{f_2} \cap \cdots \cap N_{f_k}$.

7. Sea F un cuerpo y sea f el funcional lineal en F^2 definido por $f(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$. Para cada uno de los siguientes operadores T, hágase $g = T^t f$ y calcule $g(x_1, x_2)$.
   (a) $T(x_1, x_2) = (x_0, 0)$;
   (b) $T(x_1, x_2) = -(x_2, x_1)$;
   (c) $T(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2)$.

8. Sea V el espacio vectorial de los polinomios con coeficientes reales. Sean a y b dos números reales y f el funcional
$$f(p) = \int_a^b p(x)dx.$$
   Si $D : V \to V$ es el operador derivación, ¿Qué es $D^t f$?

9. Sea V un espacio vectorial con producto interno $(\,,)$. Probar que:
   (a) $(0, \beta) = 0$ para todo $\beta \in V$.
   (b) Si $(\alpha, \beta) = 0$ para todo $\beta \in V$, entonces $\alpha = 0$.

10. Sea $(\ ,\ )$ el producto interno canónico en $\mathbb{R}^2$ y sean $\alpha = (1,2)$ y $\beta = (-1,1) \in \mathbb{R}^2$. Encontrar $\gamma \in \mathbb{R}^2$ tal que $(\alpha, \gamma) = -1$ y $(\beta, \gamma) = 3$.

11. Sea $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Para $X, Y \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ sea
$$(X|Y)_A := Y^t A X.$$
Probar que $(\quad|\quad)_A$ es un producto interno si y sólo si $A = A^t$, $a_{11}, a_{22} > 0$ y $\det A > 0$.

12. Sea $(\ ,\ )$ el producto interno canónico en $\mathbb{R}^2$ y sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ el operador lineal dado por $T(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$. Mostrar que T es la "rotación en 90°" y que tiene la propiedad que $(\alpha, T(\alpha)) = 0$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}^2$. Hallar todos los productos internos $\langle\ ,\ \rangle$ en $\mathbb{R}^2$ tales que $\langle\, \alpha, T(\alpha)\,\rangle = 0$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}^2$.

13. Sea V un espacio con producto interno. Mostrar que la forma cuadrática asociada al producto interno satisface la *regla del paralelogramo*:
$$||\alpha + \beta||^2 + ||\alpha - \beta||^2 = 2||\alpha||^2 + 2||\beta||^2.$$

14. Sea V un espacio vectorial con producto interno $\langle\,,\rangle$. Se define la distancia entre dos vectores α, $\beta \in V$ como $d(\alpha, \beta) = ||\alpha - \beta||$. Mostrar que d satisface:
   (a) $d(\alpha, \beta) \geq 0$ para todo $\alpha, \beta \in V$.
   (b) $d(\alpha, \beta) = 0$ si y sólo si $\alpha = \beta$.
   (c) $d(\alpha, \beta) = d(\beta, \alpha)$ para todo $\alpha, \beta \in V$.
   (d) $d(\alpha, \beta) \leq d(\alpha, \gamma) + d(\gamma, \beta)$ para todo $\alpha, \beta, \gamma \in V$.

15. Sea $\mathcal{C}[0,1]$ el espacio de funciones continuas en $[0,1]$ con valores en $\mathbb{R}$.
   (a) Mostrar que
   $$(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$$
   con $f, g \in \mathcal{C}[0,1]$ define un producto interno en $\mathcal{C}[0,1]$.
   (b) Restringir este producto interno al subespacio $\mathcal{P}$ de funciones polinomiales y dar una fórmula para el mismo en términos de los coeficientes de cada par de polinomios.
   (c) Dado $n \in \mathbb{N}$, restringir este producto interno al subespacio $\mathcal{P}^n$ de funciones polinomiales de grado menor o igual a n y dar la matriz del producto interno relativa a la base $\{1, x, \ldots, x^n\}$.

16. Sea V un espacio producto interno de dimensión finita y sea $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ una base ortonormal de V.
   (a) Probar que para todo par de vectores α y β en V:
   $$(\alpha|\beta) = \sum_{k=1}^{n} (\alpha|\alpha_k)\overline{(\beta|\alpha_k)}.$$
   (b) Sea T un operador lineal en V y A la matriz de T en la base $\mathcal{B}$. Probar que
   $$A_{ij} = (T\alpha_j|\alpha_i).$$

17. Sea $\mathbb{R}^4$ con el producto interno usual. Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^4$ formado por los vectores que son ortogonales a $\alpha = (1, 0, -1, 1)$ y a $\beta = (2, 3, -1, -2)$. Hallar una base de W.

18. Aplicar el *proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt* para resolver los siguientes puntos.

    (a) Encontrar una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ con el producto interno estándar a partir de la base $\mathcal{B} = \{(1, 0, 1), (1, 0, -1), (0, 3, 4)\}$.

    (b) Sea $\mathbb{C}^3$ con el producto interno canónico. Encontrar una base ortonormal del subespacio generado por $\beta_1 = (1, 0, i)$ y $\beta_2 = (2, 1, 1 + i)$.

19. Sea $\mathcal{P}^3 \subset \mathbb{R}[x]$ el espacio de polinomios de grado a lo sumo 3, con el producto interno dado por

$$(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt.$$

    (a) Hallar el complemento ortogonal del subespacio de los polinomios escalares.

    (b) Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $\{1, x, x^2, x^3\}$.

20. Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^2$ generado por $(3, 4)$. Sea E la proyección ortogonal sobre W.

    (a) Hallar $W^{\perp}$.

    (b) Hallar una fórmula para $E(x, y)$ y la matriz de E en la base canónica.

    (c) Dar una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ en la cual la matriz de E sea $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

21. Sea S un subconjunto de un espacio producto interno V. Probar que $\left(S^{\perp}\right)^{\perp}$ contiene al subespacio generado por S. Si V es de dimensión finita probar que $\left(S^{\perp}\right)^{\perp} = \langle S \rangle$.

22. Sea V el espacio producto interno real de las funciones continuas a valores reales definidas en $[-1, 1]$ con el producto interno

$$(f|g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t)\,dt.$$

    Sea W el espacio de funciones impares (i.e. cumplen $f(-t) = -f(t)$). Encontrar el complemento ortogonal de W.

23. Consideremos $\mathbb{C}^2$ con el producto interno usual. Sea T el operador lineal dado por $Te_1 = (1, 2)$ y $Te_2 = (i, -1)$. Encontrar $T^*\alpha$ para $\alpha = (x_1, x_2)$.

24. Sea T el operador lineal en $\mathbb{C}^2$ definido por $Te_1 = (1 + i, 2)$ y $Te_2 = (i, i)$. Usando el producto interno usual encontrar la matriz de T^* en la base ordenada canónica. ¿Conmuta T con T^*?

25. Sea V un espacio producto interno de dimensión finita y T un operador lineal sobre V. Demostrar que $\mathrm{Im}(T^*) = \ker(T)^{\perp}$.

26. Sea V un espacio producto interno de dimensión finita y T un operador lineal sobre V. Si T es inversible, probar que T^* es inversible y $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

27. Probar que el producto de dos operadores autoadjuntos es autoadjunto si y sólo si los dos operadores conmutan.

28. Sea V el espacio vectorial de los polinomios sobre $\mathbb{R}$ de grado menor o igual que 3 con el producto interno $(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$.

    (a) Si $t \in \mathbb{R}$, hallar el polinomio g_t de V tal que $(f|g_t) = f(t)$ para todo f de V.

(b) Hallar D^*, donde D es el operador derivación sobre V.

29. Sea V un espacio producto interno de dimensión finita y sea E un operador lineal idempotente sobre V; es decir, $E^2 = E$. Demostrar que E es autoadjunto si y sólo si $EE^* = E^*E$.

30. Sea V un espacio producto interno complejo de dimensión finita, y sea T un operador en V. Probar que T es autoadjunto si y sólo si $(T\alpha|\alpha) \in \mathbb{R}$, para todo α en V.