Teorema fundamental de curvas en el espacio

Si $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo y $k, \tau : I \to \mathbb{R}$ funciones diferenciables con $k > 0$
$\Rightarrow \exists\, \alpha : I \to \mathbb{R}^3$ PLA tq τ es su torsión y k su curvatura

Además si existe otra $\tilde{\alpha}$ con misma $\tilde{\tau}$ y k entonces existe un movimiento rígido F de $\mathbb{R}^3$ tq $\alpha = F \circ \tilde{\alpha}$

↳ isometría que preserva la orientación
$F = T \circ C$, T traslación, C ortogonal con $\det C = 1$

demo Unicidad por mov rígido

Supongamos tenemos α y $\bar{\alpha}$ que satisfacen
$\tau_\alpha = \tau_{\bar{\alpha}}$ y $k_\alpha = k_{\bar{\alpha}}$

Sea $s_0 \in I$ y $\{t_0, n_0, b_0\}$ y $\{\bar{t}_0, \bar{n}_0, \bar{b}_0\}$

los triedros de α y $\bar{\alpha}$ en s_0 respectiv

Luego definimos F isometría de $\mathbb{R}^3$ tq

$$F(\bar{\alpha}(s_0)) = \alpha(s_0) \quad y \quad dF_{\bar{\alpha}(s_0)}(\bar{b}_0) = b_0$$

(*)

$$dF_{\bar{\alpha}(s_0)}(\bar{n}_0) = n_0 \qquad dF_{\bar{\alpha}(s_0)}(\bar{t}_0) = t_0$$

(derivo para evitar la cte)

$$\Rightarrow dF_{\bar{\alpha}(s_0)} = C \quad y \quad \det C = 1$$

(preserva orientación)

Sea $\tilde{\alpha}(s) = F(\bar{\alpha}(s))$ (*) queremos ver que $\tilde{\alpha}(s) = \alpha(s) \quad \forall s$

Si $\{\tilde{t}, \tilde{n}, \tilde{b}\}$ es triedro de $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{k}$, $\tilde{\tau}$ curvatura y torsión entonces:

•) $\tilde{\alpha}(s_0) = F(\bar{\alpha}(s_0)) = \alpha(s_0)$ (definición)

Teorema Clase pasada $\Rightarrow$ •) $\tilde{k} = \bar{k} = k$ •) $\tilde{\tau} = \underbrace{\det C}_{=1} \bar{\tau} = \bar{\tau} = \tau$

Sabemos que

$$\tilde{t}' = k\tilde{n} \qquad \underbrace{\tilde{t}(s_0) = t(s_0)}^{\text{son iguales en todos lados}}$$

$$\tilde{n}' = -k\tilde{t} - \tau\tilde{b} \qquad \tilde{n}(s_0) = n(s_0)$$

$$\underbrace{\tilde{b}' = \tau\tilde{n}}_{\text{por cuenta de arriba}} \qquad \tilde{b}(s_0) = b(s_0)$$

también por teorema

y def de $F(\alpha)$

y

$$t' = kn$$

$$n' = -kt - \tau b$$

$$b' = \tau n$$

Ahora $\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left\{\|\tilde{t}-t\|^2 + \|\tilde{n}-n\|^2 + \|\tilde{b}-b\|^2\right.$

$$= \langle \tilde{t}'-t', \tilde{t}-t\rangle + \langle \tilde{n}'-n', \tilde{n}-n\rangle + \langle \tilde{b}'-b', \tilde{b}-b\rangle$$

$$= \langle k\tilde{n} - kn, \tilde{t}-t\rangle + \langle -k\tilde{t} - \tau\tilde{b} + kt + \tau b, \tilde{n}-n\rangle$$

$$+ \langle \tau\tilde{n} - \tau n, \tilde{b}-b\rangle$$

todo es simétrico $\langle a,b\rangle = \langle a,b\rangle$

$$= \cancel{k\langle \tilde{n}-n, \tilde{t}-t\rangle} - \cancel{k\langle \tilde{t}-t, \tilde{n}-n\rangle} - \cancel{\tau\langle \tilde{b}-b, \tilde{n}-n\rangle}$$

$$+ \cancel{\tau\langle \tilde{n}-n, \tilde{b}-b\rangle} = 0$$

$\Rightarrow \|\tilde{t}-t\|^2+\|\tilde{n}-n\|^2+\|\tilde{b}-b\|^2$ es cte y vale 0 en $s_0 \Rightarrow$ vale 0 en todos lados, como cada sumando es mayor o igual que 0

$\Rightarrow$ cada sumando tiene que ser 0

$\therefore \tilde{t}-t=0 \Rightarrow \tilde{t}=t$

$\Rightarrow \tilde{\alpha}'=\alpha' \Rightarrow \tilde{\alpha}=\alpha+a$ a vector cte

pero $\tilde{\alpha}(s_0)=\alpha(s_0) \Rightarrow a=0$

$\therefore \tilde{\alpha}=\alpha$

$\Rightarrow F(\bar{\alpha}(s))=\alpha(s) \quad \forall s \in I$

Existencia

Def Un sistema de ecuaciones diferenciables ordinarias (ODE) de grado 1 está dado por

$$\begin{cases} x_1' = f_1(x_1, \dots x_n) \\ \vdots \\ x_n' = f_n(x_1, \dots x_n) \end{cases}$$

Con $x_i : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son las incógnitas
$f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son funciones diferenciables

Teorema ecuaciones diferenciables
(∃ y unicidad de soluciones)
Dado $s_0 \in I$ y $(a_1, \dots a_n) \in \mathbb{R}^n$
$\exists!$ solución $(x_1, \dots x_n)$ al sistema

definida en $J \subseteq I$ $s_0 \in J$ / $x_i(s_0) = a_i$
$i = 1, \dots n$

($J = I$ si f_i son pols)

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = f$$

Volviendo, las ecs de frenet definen un ODE si pensamos que

$t = (x_1, x_2, x_3) \quad n = (x_4, x_5, x_6)$

$b = (x_7, x_8, x_9)$

ODE → hipótesis

$$\begin{cases} \text{I} & t' = k\, n \\ \text{II} & n' = -k t - \tau b \\ \text{III} & b' = \tau\, n \end{cases}$$

$t' = (x_1', x_2', x_3')$

$n' = (x_4', x_5', x_6')$

$b' = (x_7', x_8', x_9')$

$$\boxed{\text{ejemplo usando II} \quad x_4' = -k x_1 - \tau x_7 = f_4(x_1, \dots x_n) \quad \text{derivando e igualando coordenadas}}$$

sol inicial

$t(s) = (x_1(s), x_2(s), x_3(s))$

$t_0 = t(s_0) = (x_1(s_0), x_2(s_0), x_3(s_0)) = (a_1, a_2, a_3)$

Luego si $s_0 \in I$ y $\{t_0, n_0, b_0\}$

$\left(t_0 = (a_1, a_2, a_3) \quad n_0 = (a_4, a_5, a_6) \quad b_0 = (a_7, a_8, a_9) \right)$

es una base ortonormal positivamente orientada

⇒ por teorema existe única sol

$$\{ (\underbrace{x_1, x_2, x_3}_{t(s)} \quad \underbrace{\quad}_{n(s)} \quad \underbrace{\quad x_n}_{b(s)}) \}$$

que cumple $t(s_0) = t_0 \quad n(s_0) = n_0 \quad b(s_0) = b_0$

y $t' = kn \quad n' = \dots \quad b' = \tau n$

y $\{t(s), n(s), b(s)\}$ es BON

Porque ¿?

a) $$\frac{d}{ds}\langle t,n\rangle = \langle t',n\rangle + \langle t,n'\rangle \overset{?}{=} 0$$

$$= k\langle n,n\rangle - k\langle t,t\rangle - \tau\langle t,b\rangle$$

$$\frac{d}{ds}\langle t,b\rangle = k\langle n,b\rangle + \tau\langle t,n\rangle \overset{?}{=} 0$$

$$\frac{d}{ds}\langle n,b\rangle = -k\langle t,b\rangle - \tau\langle b,b\rangle + \tau\langle n,n\rangle \overset{?}{=} 0$$

$$\frac{d}{ds}\langle t,t\rangle = 2k\langle t,n\rangle$$

$$\frac{d}{ds}\langle n,n\rangle = -2k\langle n,t\rangle - 2\tau\langle n,b\rangle$$

$$\frac{d}{ds}\langle b,b\rangle = 2\tau\langle b,n\rangle$$

es un ode con incognitas

$y_1 = \langle t,n\rangle \quad y_2 = \langle t,b_0\rangle$

Con condiciones iniciales $y_1(s_0) = 0$

$y_2(s_0) = 0 \quad y_3(s_0) = 0 \quad y_4(s_0) = 1$

$y_5(s_0) = 1 \quad y_6(s_0) = 1$

es fácil ver que $y_1 = 0 \quad y_2 = 0 \quad y_3 = 0$

$y_4 = y_5 = y_6 = 1$

luego $\{t(s), n(s), b(s)\}$ es BON $\forall s \in I$

pq $\underbrace{\langle t, n \rangle}_{= y_1} = 0 \wedge \underbrace{\langle n, b \rangle}_{= y_2} = 0 \quad \underbrace{\langle t, b \rangle}_{= y_3} = 0$

Definimos $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ por

$$\alpha(s) = \int_{s_0}^{s} t(r)\, dr$$

$\Rightarrow \alpha' = t(s) \Rightarrow \alpha$ es PLA

$(1 = y_4 = \langle t, t \rangle)$

$\Rightarrow \|t(s)\| = 1$

Además $\alpha''(s) = t'(s) = h(s) n(s)$

$\Rightarrow \|\alpha''(s)\| = \|h(s) n(s)\|$

$= h(s) \|n(s)\| = k_2(s)$

$h(s)$ es curvatura de α

Tambien $\alpha'''(s) = k'(s)n(s) + k(s)n'(s)$

$$= k'(s)n(s) - k^2(s)t(s) - k(s)\tau(s)b(s)$$

Luego la torsión de α es

$$= -\frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2} = -\frac{\langle t \times kn, k'n - k^2 t - k\tau b \rangle}{\|t \times kn\|^2}$$

$$= \frac{\langle t \times kn, k\tau b \rangle}{k^2}$$

$$= \frac{\cancel{k^2}\tau \overset{=1}{\langle t \times n, b \rangle}}{\cancel{k^2}} = \tau$$

$*$ Son ortogonales $t \times n \perp t$

$t \times n \perp n$

Teorema fundamental de curvas en $\mathbb{R}^2$

Si $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo y $K: I \to \mathbb{R}$ función diferenciable

$\Rightarrow \exists \alpha: I \to \mathbb{R}^2$ PLA cuya curvatura signada es K

Si $\alpha, \tilde{\alpha}$ son dos que cumplen $\Rightarrow \exists$ un mov rígido en $\mathbb{R}^2$ tq $\alpha = F \circ \tilde{\alpha}$

<u>dem</u>: Sean $s_0 \in I$ $(a_0, b_0) \in \mathbb{R}^2$ $\theta_0 \in \mathbb{R}$

Sean $\theta(s) = \int_{s_0}^{s} K(u)\, du + \theta_0$ y

$$\alpha(s) = \left(\int_{s_0}^{s} \cos\theta(t)\, dt + a_0 , \right.$$

$$\left. + \int_{s_0}^{s} \operatorname{sen}\theta(t)\, dt + b_0 \right)$$

$\Rightarrow \alpha(s_0) = (a_0, b_0)$

i) Veamos α diferenciable

$\alpha'(s) = (\cos\theta(s), \operatorname{sen}\theta(s))$ (dif) y $\|\alpha'(s)\| = 1$

c) $\alpha''(s) = \left(-\operatorname{sen}(\theta(s))\,\theta'(s),\ \cos(\theta(s))\,\theta'(s)\right)$

$= \theta'(s)\left(-\operatorname{sen}(\theta(s)),\ \cos(\theta(s))\right)$

$= K(s)\ \underset{\substack{\downarrow \\ \text{la rotación clase 4}}}{\tilde{I}}\left(\cos(\theta(s)),\ \operatorname{sen}(\theta(s))\right)$

$= K(s)\,N(s)$

obs $\alpha(s_0) = (x_0, y_0)$, $\alpha'(s) = (\cos(\theta_0), \operatorname{sen}(\theta_0))$

condiciones iniciales)

<u>Unicidad</u> Sea $\bar{\alpha}$ p|A / $K_{\bar{\alpha}} = K_\alpha$

Sea F el mov rígido de $\mathbb{R}^2$ tq

$F(\bar{\alpha}(s_0)) = \alpha(s_0)$ (A) y $dF_{\bar{\alpha}(s_0)}(\bar{\alpha}'(s_0)) = \alpha'(s_0)$

consideremos $\tilde{\alpha}(s) = F(\bar{\alpha}(s))$ qvq $\tilde{\alpha} = \alpha$

$\Rightarrow \tilde{K} = \bar{K} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{hipótesis}}}{=} K$, $\tilde{\alpha}(s_0) = \alpha(s_0)$ (A)

$\alpha'(s_0) = \alpha'(s)$

condiciones iniciales

Si $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ y $\tilde{\alpha}(s) = (\tilde{x}(s), \tilde{y}(s))$

$$\begin{cases} x''(s) = -k(s)\, y'(s) \\ y''(s) = k(s) \times x'(s) \end{cases} \qquad \begin{cases} \tilde{x}''(s) = -k(s)\, \tilde{y}'(s) \\ \tilde{y}''(s) = k(s) \times \tilde{x}'(s) \end{cases}$$

dos sistemas de orden 2

que son iguales

la solución es una tal que si derivo su primer componente dos veces me da $-k$ por su 2da componente derivada, lo mismo para

$\Rightarrow$ son el mismo sistema

por unicidad de solución

$\alpha = (x, y) = (\tilde{x}, \hat{y}) = \tilde{\alpha}$

$t' = kN$

$\alpha'' = kN$

$(x'', y'') = k(-y', x')$

N era rotar t