Análisis Funcional I – 2024
Práctico 2

Espacios de Banach. Espacios de Hilbert. Convexidad

(1) Hacer los siguientes ejercicios de capítulo 2 del libro Linear Functional Analysis de Rynne y Youngson:
   (a) ejercicio 2.3 (página 38),
   (b) ejercicios 2.6, 2.7 y 2.8 (páginas 44 y 45),
   (c) ejercicios 2.10, 2.11 y 2.12[1] (página 50).

(2) Espacios de funciones continuas
   (a) Probar que $(C([a,b]), \|\cdot\|_p)$ es de Banach si y sólo si $p = \infty$
   (b) Probar que
      (i) $C_b := \{f \in C(\mathbb{R}) \mid \ f \text{ es acotada } \}$,
      (ii) $C_0 := \{f \in C(\mathbb{R}) \mid \ \lim_{x\to\infty} f(x) = 0\}$ y
      (iii) $C_p := \{f \in C(\mathbb{R}) \mid \ f(x) = f(x + 2\pi)\ \forall x \in \mathbb{R}\}$
   son espacios de Banach con $\|\cdot\|_\infty$
   (c) Probar que $(C_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ no es de Banach, aquí:
      (i) $C_c(\mathbb{R}) := \{f \in C(\mathbb{R}) \mid \ \overline{\mathrm{sop}(f)} \text{ es acotado}\}$.

(3) Dado $x \in \mathbb{R}$, definimos el operador de traslación por x:

$$L_x : L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow L^1(\mathbb{R}) \qquad L_x(f)(y) := f(y - x).$$

   (a) Probar que la aplicación

$$\mathbb{R} \times L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow L^1(\mathbb{R}) \qquad (x, f) \longmapsto L_x(f)$$

   define una acción del grupo $(\mathbb{R}, +)$ sobre $L^1(\mathbb{R})$.
   (b) Dada $g \in L^1(\mathbb{R})$, probar que el operador

$$T : L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow L^1(\mathbb{R}) \qquad T(f) := f * g$$

   es invariante por traslaciones, es decir, $L_x(T(f)) = T(L_x(f))$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y toda $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Observación: Esto nos dice que T es un operador que entrelaza la acción L_x consigo misma, actuando en el espacio de Banach $L^1(\mathbb{R})$.

(4) Decimos que una función $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un homomorfismo de $\mathbb{R}$ si cumple que $\varphi(x+y) = \varphi(x)+\varphi(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.
   (a) ¿Cuáles son los homomorfismos de $\mathbb{R}$ con repecto de la operación suma? Dar una descripción no explícita.
   (b) ¿Cuáles son los homomorfismos continuos de $\mathbb{R}$ respecto de la operación suma?

[1] En 2.12(b), $z_n = x + (1 - \frac{1}{n})(z - x)$.

(c) ¿Todos los homomorfismos de $\mathbb{R}$ son continuos?

(5) Hacer los siguientes ejercicios de capítulo 3 del libro Linear Functional Analysis de Rynne y Youngson:
  (a) ejercicio 3.1 (página 59),
  (b) ejercicios 3.8, 3.10 y 3.11 (páginas 64 y 65),
  (c) ejercicios 3.14, 3.15, 3.16 y 3.17 (página 72).

(6) Sea S subespacio vectorial del espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.
  (a) S es denso si y sólo si $S^\perp = 0$.
  (b) $\overline{S} = S^{\perp\perp}$.
  (c) Si S es un subconjunto no vacío de $\mathcal{H}$ y $\langle S\rangle$ es el espacio generado por S, entonces $\overline{\langle S\rangle} = S^{\perp\perp}$.

(7) Sea $\mathcal{P}$ un pre-Hilbert. Si $S \subset \mathcal{P}$ no vacío, entonces
  (a) $S \subset (S^\perp)^\perp \doteq S^{\perp\perp}$.
  (b) $S^{\perp\perp\perp} = S^\perp = (\overline{S})^\perp$.
  (c) $S \cap S^\perp \subset \{0\}$.

(8) Sea A un subconjunto de un EV X. Probar que $2A \neq A + A$ pero que la igualdad vale si A es convexo.

(9) Consideremos el espacio $C[0,1]$, con la norma $||\cdot||_\infty$. Sea $S = \left\{ f \in C[0,1] : \int_0^{\frac{1}{2}} f - \int_{\frac{1}{2}}^1 f = 1 \right\}$. Probar que S es convexo y cerrado y que no existe una f en S con distancia mínima al cero.

(10) Consideremos $C[0,1]$ con la $||\cdot||_1$. Sea $S = \left\{ f \in L^1 : \int_0^1 f = 1 \right\}$. Probar que S es convexo y cerrado y que existen infinitas f con distancia mínima al cero.

(11) (a) Sea $\mathcal{N}$ normado. Probar que la bola unidad (abierta o cerrada) es convexa.
  (b) Consideremos $L^p(\mathbb{R}^n)$ con la medida de Lebesgue. Probar que, para $1 < p < \infty$ la bola unidad es estrictamente convexa.

Ejercicios adicionales

(12) `Definición`: *Sea G un abierto en $\mathbb{C}$, denotamos por $L^2_a(G)$ el conjunto de todas las funciones analíticas en G tal que*

$$\int\int_G |f(x+iy)|^2 dxdy < \infty.$$

$L^2_a(G)$ *Se llama el espacio de Bergman para* G. Observar que $L^2_a(G) \subset L^2(\mu)$ donde μ es la medida de lebesgue restringida a G. Esto implica que $L^2_a(G)$ tiene un producto interno (y norma) natural heredado de $L^2(\mu)$.

(a) Si f es analítica en un entorno de $\overline{B}(a,r)$ entonces

$$f(a) = \frac{1}{\pi r^2} \int \int_{B(a,r)} f.$$

(b) Si $f \in L^2_a(G)$, $a \in G$ y $0 < r < \mathrm{dist}(a, \partial G)$, entonces

$$|f(a)| \leq \frac{1}{r\sqrt{\pi}} ||f||_2$$

(c) Probar que $L^2_a(G)$ es un espacio de Hilbert.