Def Sea $\alpha: I \to S$ dif $w_0 \in T_{\alpha(t_0)} S$
Sea W un único campo vectorial a lo largo de α talque $W(t_0) = w_0$
El vector $W(t_1)$ $t_1 \in I$ es llamado transporte paralelo a lo largo de α, de w_0 en el punto t_1

Lema Si α es regular $(\alpha'(t) \neq 0)$ el transporte paralelo es independiente de la parametrización de $\alpha(I)$

demo $\alpha: I \to S$ y $\beta: I \to S$ reparam

$$\beta(s) = \alpha(t(s))$$

$\Rightarrow$) Sea $W(t)$ campo a lo largo de α
considero $\tilde{w}(s) = W(t(s))$ luego

$$\frac{D\tilde{w}}{ds} = \frac{Dw}{dt} \frac{Dt}{ds}^{\neq 0}$$

luego $\frac{D\tilde{w}}{ds} = 0 \iff \frac{Dw}{dt} = 0$

<u>Corolario</u> Sea $\alpha : [0,1] \to S$ dif
$\alpha(0) = p$ $\alpha(1) = q$. Si $P_\alpha : T_pS \to T_qS$
es el transporte paralelo de p a q
a lo largo de α.

$\Rightarrow P_\alpha$ es ortogonal

<u>Dem</u> Veamos que P_α preserva el $\langle , \rangle$
es decir dados $v, w \in T_pS$ qvq

$$\langle P_\alpha(v), P_\alpha(w) \rangle = \langle v, w \rangle$$

Sean V, W campos vectoriales paralelos
a lo largo de α tales que

$$V(0) = v \qquad W(0) = w$$

Por definición

$$P_\alpha(v) = V(1) \qquad P_\alpha(w) = V(1)$$

$$\Rightarrow \langle P_\alpha(v), P_\alpha(w) \rangle = \langle V(1), W(1) \rangle$$
(Lema clase misma) $= \langle V(0), V(0))$

$= \langle v, w \rangle$

Para ver la linealidad observar que

·) $\frac{D(V+W)}{dt} = \overset{=0}{\frac{DV}{dt}} + \overset{=0}{\frac{DW}{dt}}$

$\Rightarrow$ $V+W$ es paralelo

y $(V+W)($

·) $\frac{D(cV)}{dt} = c\frac{dV}{dt}$

luego $P_\alpha(v+cw) = P_\alpha(v) + c P_\alpha(w)$

Usar unicidad de campo paralelo

curva

Geodésicas

def $\gamma: I \to S$ dif no constante se dice geodésica si $\frac{D\gamma'(t)}{dt} = 0 \ \forall t \in I$

(γ' campo paralelo a lo largo de γ)
(si el campo γ' a lo largo de γ es paralelo)

obs como γ' es campo paralelo $\|\gamma'\| = cte \neq 0$
$\Rightarrow \gamma$ regular

obs γ geodésica $\Leftrightarrow \gamma''(t) \perp T_{\gamma(t)} S \ \forall t \in I$

ej 1) las geodésicas en un plano son rectas de rapidez

Si α geodésica en $P \Rightarrow \alpha'$ y α'' están en $P \Rightarrow \alpha''$ es paralelo a P
$\Rightarrow \alpha''(s) = 0$ pq si no
$\alpha'' \not\perp T_\alpha P$

2) los círculos máx en S^2 recorridos

con rapidez unitaria son geodésicas

Ecuación diferencial para las coordenadas geodésicas

$\gamma : I \to S$ curva dif y $\varphi : U \to S$ sist de coordenadas

Supongamos $\gamma(I) \subseteq \varphi(U)$

$\gamma(t) = \varphi(u(t), v(t)) \qquad t \in I$

$\gamma'(t) = u'(t)\varphi_u + v'(t)\varphi_v$

γ geodésica $\Leftrightarrow \dfrac{D\gamma'(t)}{dt} = 0 \quad \forall t \in I$

Recordamos fórmula de $\dfrac{D\gamma'}{dt}$ y usamos $u'(t)$ y $v'(t)$ en vez de $a(t)$ y $b(t)$

γ geodésica $\Leftrightarrow$ $u'' + \Gamma_{11}^{1}(u')^{1} + 2\Gamma_{12}^{1}(u')(v') + \Gamma_{22}^{1}(v')^2 = 0$

$v'' + \Gamma_{11}^{2}(v')^2 + 2\Gamma_{12}^{2}(u')(v') + \Gamma_{22}^{2}(v')^2 = 0$

ecuaciones de euler

Corolario (existencia y unicidad de geodésicas)

Dado $p \in S$ y $0 \neq v \in T_pS$ existe una única geodésica

$\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ tal que $\alpha(0) = p$
$\alpha'(0) = v$

Dem Usar unicidad y existencia de soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales

Corolario Si $\gamma : I \to S_1$ es geodésica y $f : S_1 \to S_2$ es isometría local

$\Rightarrow f \circ \gamma$ es geodésica