10-5

Teorema descomposición cíclica

$T: V \to V$ t.l. $\dim V < \infty$,

·) W_0 subesp T-admisible $\exists v_1 \dots v_r \neq 0$

con T anuladores $p_1 \dots p_r$ tales que

$$\text{(i)}\quad V = W_0 \oplus Z(v_1, T) \dots \oplus Z(v_k, T)$$

$$\text{ii)}\quad p_\ell \mid p_{\ell-1} \quad \forall \ell = 1, \dots, r$$

Más aún r y la sucesión de pols $p_1, \dots, p_r$ están unívocamente determinados por (i) (ii) (y el hecho de que los v_i's $\neq 0$)

Paso 1

demo $\exists u_1 \dots u_r \neq 0$ / $V = W_0 + Z(u_1, T) + \dots + Z(u_r, T)$

de modo que si $W_K = W_0 + Z(u_1, T) + \dots + Z(u_k, T)$

$$\Rightarrow \quad p_K = s(u_K, W_{K-1}) \quad (s \text{ el } T\text{-conductor})$$

tiene grado máximo entre los T-conductores a W_{K-1}

(*) $gr(p_K) = \max\{ gr(s(u, W_{K-1})) : u \in V \} \leq \dim V$

·) Si $W_0 = V$ ya está

·) Si no tomo u_1 tq $p_1 = s(u_1, W_0)$

que realiza el máximo anterior $\rightsquigarrow W_1 = W_0 + Z(u_1, T)$

$T(W_0) \subseteq W_0$ $\quad T(v \in Z(u_1;T)) \in Z(u_1,T)$ $\Rightarrow W_1$ es T-invariante

$Z(u,T)$ es T-invar $\quad$ (suma de T-invar)

$u_1 \notin W_0$ si no $1 = s(u_1, W_0)$ que no puede ser pues implicaría que $1 = \max\{gr(s(u, W_{k-1})) : u \in V\}$ por lo tanto $\forall u \in V$ un pol escalar lo conduce a W_0 pero entonces u ya estaba en $W_0 \Rightarrow W_0 = V$ abs!

Si $W_1 \neq V$ elijo u_2 tal que $s(u_2, W_1) = p_2$ realice el máximo anterior, $\max\{gr(s(u, W_1)) : u \in V\} \ni p_1$

$\Rightarrow gr(p_2) \leq gr(p_1)$ etc $\therefore V = W_r = W_0 + Z(u_1,T) + \dots Z(u_r,T)$

<u>Paso 2</u> u_k's y p_k's como en paso 1: $v \in V$

$f = s(v, W_{k-1})$ $\quad k = 1, \dots r$ $\Rightarrow f(T)(v) \in W_{k-1}$

$$\Rightarrow \quad f(T)(v) = w_0 + \sum_{i=1}^{k-1} g_i(T)(u_i) \quad (*) \quad w_0 \in W_0 \quad g_i \in K[x]$$

$g_i(T)(u_i) \in Z(u_i, T)$

con $f | g_i$ y $w_0 = f(T)(v_0)$, $v_0 \in W_0$

Demo

Si $k = 1$ $\quad v \in V$ $\quad f = s(v, W_0) \rightsquigarrow f(T)(v) = f(T)(v_0)$ $\quad (\in W_0)$ para algún $v_0 \in W_0$ y esto se deduce porque W_0 es T-admisible

Tomemos $k > 1$ y fijemos $v \in V \rightsquigarrow f = s(v, W_{k-1})$ y miramos expansión como en $(*)$: Escribimos

$g_i = f q_i + r_i$ con $r_i = 0$ o $0 \leq gr(r_i) \leq gr(q_i)$

Sea $\tilde{v} = v - \sum_{i=1}^{k-1} q_i(T)(u_i)$ Notar que $v - \tilde{v} \in W_{k-1}$

porque $q_i(T)(u_i) \in Z(u_i, T)$

$\therefore s(\tilde{v}, W_{k-1}) = s(v, W_{k-1}) = f$

$Z(u_i, T)$ son T-invar

$$W_{k-1} \ni f(T)(\tilde{v}) = f(T)(v) - \sum^{k-1} f(T) q_i(T)(u_i)$$

$(*)$

$$\overset{\text{(A)}}{=} w_0 + \sum^{k-1} (g_i - t q_i)(T)(u_i) \overset{\text{(II)}}{=} w_0 + \sum_{i=1}^{k-1} r_i(T)(u_i)$$

$$= w_0 + \sum^{j} r_i(T)(u_i)$$

Supongo algún $r_i \neq 0$, sea j el mayor tq $r_j \neq 0$

$j \leq k-1$

Sea $p = s(\tilde{v}, W_{j-1})$: $t \mid p$ pues $W_{j-1} \subseteq W_{k-1}$

escribimos a $p = f \cdot g$: $W_{j-1} \ni p(T)(\tilde{v}) = g f(T)(\tilde{v})$ (III)

$$= g(T)(f(T)(\tilde{v})) \overset{\text{(II)}}{=} \boxed{\underbrace{g(T)(w_0)}_{\in W_0} + \sum^{j-1} \underbrace{g(T) r_i(T)(u_i)}_{\in Z(u_i,T)}}_{\in W_{j-1}}$$

$$+ g(T) r_j(T)(u_j) \qquad \in W_{j-1}$$

(III) $\in W_{j-1}$

$\therefore g(T) r_j(T)(u_j) \in W_{j-1}$

$\Rightarrow g r_j$ conduce u_j en W_{j-1}

Podría poner cualquier v ok?

$$\Rightarrow gr(g r_j) \geq gr(s(u_j, W_{j-1})) = gr(p_j) \geq gr\, s(\tilde{v}, W_{j-1})$$

(★)

$$= gr(p) = f \cdot g$$

$$\Rightarrow \cancel{gr(g)} + gr(r_j) \geq gr(f) + \cancel{gr(g)}$$

$$\Rightarrow gr(r_j) \geq gr(f) \quad \text{absurdo!}$$

$\Rightarrow r_i = 0 \ \forall i \Rightarrow f \mid g_i \ \forall i$

Paso 3 $\exists$ de v_i's como en (i) y (ii). Por el paso 1 podemos tomar $u_1, \dots, u_r$ tales que $V = W_0 + \sum Z(u_i, T)$ y los $p_k = s(u_k, W_{k-1})$ satisfacen (★).

W_0 T-admis

Definamos v_i's de modo recursivo

$p_1(T)(u_1) \in W_0 \rightsquigarrow p_1(T)(u_1) = p_1(T)(w_1)$ para algún $w_1 \in W_0$

$\rightsquigarrow v_1 = u_1 - w_1$

$s(v_1, W_0) \overset{*}{=} s(u_1, W_0) = p_1$

(*) $S(u_1, W_0) = S(v_1, W_0)$

sea $p \in S(u_1, W_0) \Leftrightarrow p(u_1) \in W_0$

$p(w_1) \in W_0$ pq $w_1 \in W_0$ T-invar

$\Leftrightarrow p(v_1) \in W_0$

$\Leftrightarrow p \in S(v_1, W_0)$

$p_1(T)(v_1) = p_1(T)(u_1) - p_1(T)(w_1) = 0$

Luego $p_1 = m_{v_1,T}$ (porque $m_{v_1,T}$ conduce) ($p_1 \mid m_{v_1,T}$ y de lo anterior $m_{v_1,T} \mid p_1$)

Base

Si $v \in W_0 \cap Z(v_1;T) \rightsquigarrow v = g(T)(v_1)$

$\Rightarrow v \in Z(v_1,T) \rightsquigarrow\ \rightarrow v - g(T)(v_1) = 0$

para algún $g \in \mathbb{K}[X]$

$$p_1(T)(v_1) = \underset{\in W_0}{v} - \overset{\in Z(v_1,T)}{g(T)(v_1)} \overset{\text{paso 2}}{\Longrightarrow} p_1 \mid g$$

$\overset{\shortparallel}{0}$

$p_1 = m_{v_1,T} \Rightarrow$

$p_1 = \mathcal{A}(v_1, W_0)$

$\Rightarrow g(T)(v_1) = 0 \Rightarrow v = 0$

(p_1 anula v_1 con respec T)

$\therefore W_0 + Z(v_1,T)$ es suma directa

Inducción

$$W_{k-1} \ni p_k(T)(u_k) \overset{\text{def } W_{k-1}}{=} y_0 + \sum_{i=1}^{k-1} g_i(T)(u_i) \quad (\exists g_i \in K[x])$$

$$\overset{\text{paso 2}}{=} \underset{\shortparallel f}{p_k}\overset{\in W_0}{(T)(w_0)} + \sum_{i=1}^{k-1} \underset{\shortparallel f}{p_k h_i}(T)(u_i)$$

Definimos $v_k = u_k - \underset{\in W_{k-1}}{\left(w_0 + \sum_{i=1}^{k-1} h_i(T)(u_i)\right)} \Rightarrow \mathcal{A}(v_k, W_{k-1}) = p_k$

Además

$$p_k(T)(v_k) = p_k(T)(u_k) - p_k(T)(w_0) - \sum p_i(T)h_i(T)(u_i) = 0$$

De lo anterior $p_k = m_{v_k,T}$. Sea $v \in \underbrace{Z(v_k,T)} \cap \underbrace{W_{k-1}}$

$\exists g, g_i \in K[X]\ \ w_0 \in W_0$

$$v = g(T)(v_k) = w_0 + \sum_{i=1}^{k-1} g_i(T)(v_i) \in W_{k-1}$$

$\Rightarrow p_k \mid g$ (pq p_k conduce y $g(T)(v_k) \in W_{k-1}$ conduce)

$\Rightarrow g$ anula (p_k anula)

$\therefore g(T)(v_k) = 0$ esto prueba (i)

Veamos (ii) $p_k(T)(v_k) = 0 = 0 + \sum_{i=1}^{k-1} p_i(T)(v_i)$

paso 2

$\Rightarrow p_k \mid p_i \quad \forall i < k$

<u>paso 4</u> Unicidad de V y las p_i's

<u>Lema</u> (a) $f(T)(Z(v,T)) = Z(f(v)(T),T)$

(b) $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$ cada v_i es T-invar

$\Rightarrow f(T)(V_1) \oplus \cdots \oplus f(T)(V_r) = f(T)(V)$

(c) $m_{v_1,T} = m_{\tilde{v},T} \Rightarrow m_{f(T)(v),T} = m_{f(T)(\tilde{v}),T}$

y $\dim Z(f(T)(v),T) = \dim Z(f(T)(\tilde{v}),T)$

<u>demo</u> (a) ($\subseteq$) $w \in f(T)(Z(v,T)) \rightsquigarrow \exists g \in K[X] / w = f(T)(g(T)(v))$

$\Rightarrow w = g(T)(f(T)(v)) \in Z(f(T)(v),T)$ ($\supseteq$) ejercicio

(b) $f(T)(V_1) + \cdots + f(T)(V_r) \subseteq f(T)(V)$

dado $v \in f(T)(V) \Rightarrow \exists \tilde{v} \in V / v = f(T)(\tilde{v})$ T-admisible ???

como $\tilde{v} \in V$ y $V = V_1 + \cdots + V_r \Rightarrow \exists v_1 \in V_1 \ldots v_r \in V_r / \tilde{v} = v_1 + \cdots + v_r$

$\therefore v = f(T)(\tilde{v}) = f(T)(v_1) + \cdots + f(T)(v_r)$

$\Rightarrow v \in f(T)(V_1) + \cdots + f(T)(V_r)$

de lo anterior $f(T)(V_1) + \cdots + f(T)(V_r) = f(T)(V)$

∘) para ver que la suma además es directa

$f(T)(V_k) \subseteq V_k$ (T-invar) $\quad f(T)(V_i) \cap \left(\sum_{j \neq i} f(T)(V_j)\right) \subseteq V_i \cap \sum_{j \neq i} V_j = 0$

$\therefore f(T)(V_i) \cap \sum_{j \neq i} f(T)(V_j) = 0 \quad \square$

(c) $m_{f(T)(v),T} = \dfrac{m_{v,T}}{(m_{v,T} : f)} \rightsquigarrow \underbrace{m_{f(T)(v),T}}_{q} \cdot \underbrace{(m_{v,T} : f)}_{g} = m_{v,T}$

Sea $g = (m_{f,T} : f) \rightsquigarrow m_{v,T} = g \cdot q \quad q \in K[X]$

$\Rightarrow g \mid m_{f,T} \wedge g \mid f$

Tenemos que probar que $q = m_{f(T)(v),T} \qquad f = g \cdot h \quad h \in K[X]$

$$q(T)(f(T)(v)) = q f (T)(v) = \overset{g \mid f}{q\, g}\, h\, (T)(v) = \underbrace{m_{v,T}}_{= 0} \cdot h\, (T)(v)$$

$\Rightarrow m_{f(T)(v),T} \mid q \qquad \Rightarrow q$ anula $f(T)(v)$ con respecto a T

$\Leftarrow$) Por def $m_{f(T)(v),T}(T)(f(T)(v)) = 0$

$= (m_{f(T)(v),T} \cdot f)(T)(v) \Rightarrow m_{f..} \cdot f$ anula a v con respecto a T

$\therefore g q = m_{v,T} \mid m_{f(T)(v),T} \cdot f = m_{f(T)(v),T}\, g h$

$\Rightarrow q \mid m_{f(T)(v),T} \cdot h$

como $(q : h) = 1 \quad \Rightarrow q \mid m_{f(T)(v),T}$ $\boxed{\text{falta ver que es mónico}}$

$\Rightarrow q = m_{f(T)(v),T}$

demo unicidad

Sean $w_1, \dots w_s \neq 0$ con anuladores $q_1, \dots q_s$ tales que $V = W_0 \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{s} Z(w_i, T) \right)$ y $q_i \mid q_{i-1}$ $\forall i$

$S(V, W_0) = \{ f \in \mathbb{K}[X] : f(T)(v) \subseteq W_0 \}$ es ideal

$$q_1(T)(v) = q_1(T)\left(W_0 + \sum^{s} Z(w_i, T)\right)$$

$$= q_1(T)(W_0) + \cancel{\sum^{s} q_1(T)(Z(w_i, T))} \subseteq W_0$$

$q_i \mid q_1$ q_i anula w_i

(I) Así $q_1 \in S(V, W_0)$. (W_0 conductor)

Recíprocamente si $f \in S(V, W_0)$ para cada $v \in V$

$$v = w_0 \oplus \sum^{s} g_i(T)(w_i)$$

$\in Z(w_1, T) \oplus \dots \oplus Z(w_s, T)$

$$\rightsquigarrow W_0 \ni f(T)(v) = \underbrace{f(T)(w_0)}_{\in W_0} \oplus \overbrace{\sum f(T) g_i(T)(w_i)}$$

por ser suma directa

$\therefore$ $f(T) g_i(T)(w_i) = 0$ $\forall i$ $\Rightarrow q_i \mid f g_i$

$\Rightarrow f g_i$ anula a w_i con respecto a T

(I)

Si $v = w_1$ $\Rightarrow g_1 = 1 \wedge g_j = 0$ si $j \neq 1$ $\Rightarrow q_1 \mid f$

y de lo anterior $q_1 \in S(V, W_0)$ $\Rightarrow$ $\boxed{q_1 \text{ es el generador mónico de } S(V, W_0)}$

Miro ahora $V = W_0 \oplus \left(\oplus Z(v_i, T) \right) \Rightarrow S(V, W_0) = (p_1)$

misma idea que arriba

$\Rightarrow p_1 = q_1$

I estamos asumiendo $s \geq r > k$

Veamos ahora el p. induc : asumimos $p_1 = q_1, \ldots, p_k = q_k$

$p_1, \ldots p_k$ con $v_1, \ldots v_k$ $\quad q_1, \ldots q_k$ con $w_1, \ldots w_k$

•) Si $k = \dim W$ $\quad W = W_0 \oplus \left(\bigoplus^r Z(v_i, T) \right) \wedge W = W_0 \oplus \bigoplus^s Z(w_i, T)$

$= s = r$??

$$\dim W_0 + \sum^r gr\, p_i = \dim V = \dim W_0 + \sum^s gr(q_i)$$

$$\Rightarrow \sum^r g_r(p_i) = \sum^s g_r(q_i)$$

I

•) Si $k < r \rightsquigarrow \dim W_0 + \sum^k gr(p_i) < \dim V$

No es W ??

$$\dim W_0 + \sum^k gr(q_i) \rightsquigarrow \exists p_{k+1} \text{ y } q_{k+1}$$

$$p_{k+1}(T)(v) \overset{(b)}{=} p_{k+1}(T)(W_0) \oplus \left(\bigoplus^r p_{k+1}(T)(Z(v_i, T)) \right)$$

$$\overset{(a)}{=} p_{k+1}(T)(W_0) \oplus \bigoplus^k Z(p_{k+1}(T)(v_i), T) \quad (1)$$

$p_n | p_{k+1}$ $\forall n \geq k+1$ anula cuando $r \geq k+1$

luego la misma cuenta $\Rightarrow p_{k+1}(T)(V) = p_{k+1}(T)(W_0) \oplus \bigoplus^s Z(p_{k+1}(T)(w_i), T)$ (2)

con $V = W_0 \oplus \bigoplus^s Z(w_i, T)$

p_{k+1} no anula w_i solo v_i

$$\therefore \sum^k \dim Z(p_{k+1}(T)(v_i), T) \overset{(1)=(2)}{=} \sum^s \dim Z(p_{k+1}(T)(w_i), T)$$

$$\text{de (c) y } 0 \overset{(*)}{=} \sum_{i=k+1}^s \dim Z(p_{k+1}(T)(w_i), T) \Rightarrow \text{cada dim es } 0$$

(*) $m_{v_\ell, T} = p_\ell = q_\ell = m_{w_\ell, T}$ $\quad \ell \leq k$

$\therefore p_{k+1}(T)(w_{k+1}) = 0 \Rightarrow q_{k+1} | p_{k+1}$

anula a w_{k+1}

intercambiando roles $p_{k+1} \mid q_{k+1} \rightsquigarrow p_{k+1} = q_{k+1}$ $\triangleright$