ÁLGEBRA III - 2023
Práctico 3

Autovalores y autovectores. Polinomios anuladores.

1. Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo y V un $\mathbb{F}$-espacio vectorial de dimensión n. ¿Cuál es el polinomio característico del operador identidad sobre V? ¿Cuál es el polinomio característico del operador cero sobre V? Dar los polinomios minimales de dichos operadores.

2. Sea T el operador lineal sobre $\mathbb{R}^3$ cuya matriz en la base canónica es

$$A := \begin{pmatrix} -9 & 4 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ -16 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

   Demostrar que T es diagonalizable dando una base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores de T.

3. Sea

$$B := \begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{pmatrix}.$$

   ¿Es B semejante sobre $\mathbb{R}$ a una matriz diagonal? ¿Es B semejante sobre $\mathbb{C}$ a una matriz diagonal?

4. Sean A y B matrices $n \times n$ sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Demostrar que si $I - AB$ es inversible, entonces $I - BA$ también es inversible y que $(I - BA)^{-1} = I + B(I - AB)^{-1}A$.

5. Sean A y B matrices $n \times n$ sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Demostrar que AB y BA tienen los mismos autovalores en $\mathbb{F}$.

6. Sea V el espacio vectorial de las funciones continuas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. Sea T el operador lineal sobre V definido por

$$(Tf)(x) := \int_0^x f(t)\, dt.$$

   Demostrar que T no tiene autovalores.

7. Un grafo viene dado por un conjunto de n vértices V y un conjunto de pares de vértices E llamadas aristas. A cada grafo se le asigna una matriz $n \times n, A$ que se llama de adyacencia y que tiene coeficientes

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } ij \in E \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

   Calcular los autovalores y autovectores de la matriz A que corresponde al grafo cuadrado, es decir, 4 vértices $V = \{1, 2, 3, 4\}$ con 4 aristas: $E = \{12, 23, 34, 41\}$.

8. Sean a, b, c elementos en un cuerpo $\mathbb{F}$ y $A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$. Demostrar que el polinomio característico de A es $x^3 - ax^2 - bx - c$ y que éste es también el polinomio minimal de A.

9. Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ la siguiente matriz
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Demostrar que el polinomio característico de A es $x^2(x-1)^2$ y que éste es también el polinomio minimal de A. ¿Es A semejante sobre el cuerpo de los números complejos a una matriz diagonal?

10. Sea V el $\mathbb{R}$-espacio vectorial formado por el polinomio cero y los polinomios sobre $\mathbb{R}$ de grado menor o igual a n. Sea D el operador derivación formal sobre V. Calcular el polinomio caracterśtico y el polinomio minimal de D.

11. Sean $\mathbb{F}$ un cuerpo y $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ fija. Sea L_A el operador sobre $\mathbb{F}^{n\times n}$ dado por $L_A(X) := AX$. Demostrar que el polinomio minimal de L_A es igual al polinomio minimal de A. Probar que lo mismo ocurre con el operador $R_A(X) := XA$.

12. * Sean A y B matrices $n \times n$ sobre $\mathbb{C}$. Por el Ejercicio 5 sabemos que AB y BA tienen los mismos autovalores. ¿Tienen también el mismo polinomio característico? ¿Tienen también el mismo polinomio minimal?