Subespacio cíclico

$T: V \to V$ T.L $v \in V$

$Z(v,T) = \{ f(T)(v) : f \in K[X] \} = \{ T^k(v) : k \geq 0 \}$
$= \langle v, T(v), \dots, T^k(v) \rangle$

·) Subespacio cíclico generado por v con respec a T

Ideal T-anulador de v $\{ f \in K[X] : f(T)(v) = 0 \} = I_{v,T}$

T-anulador de v generador mónico de $I_{v,T}$
que es $m_{v,T}$

obs $\dim V < \infty \rightsquigarrow m_{v,T} \neq 0$. $v \neq 0 \Rightarrow gr(m_{v,T}) \geq 1$

·) $gr(m_{v,T}) = \dim Z(v,T)$ $\quad m_{v,T} = a_0 + a_1 X + \quad + X^n$

$0 = a_0 v + \dots + T^n(v) \Rightarrow T^n(v) = -a_0 v - a_1 T(v) - \dots - a_{n-1} T^{n-1}(v)$

·) $Z(v,T)$ es T-invar y $[T|_{Z(v,T)}]_B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & & -a_0 \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$

matriz asociada a $m_{v,T}$

·) $m_{v,T} | m_T$

·) Si $[U]_B = \begin{pmatrix} 0 & & & -b_0 \\ 1 & 0 & & \vdots \\ & 1 & & \vdots \\ & & & \\ & & 1 & -b_{n-1} \\ & & 0 & b_0 \end{pmatrix} \Rightarrow m_U = \chi_U = X^n + b_{n-1} X^{n-1} + \dots + b_0$

def $T: V \to V$ t.l. Un elemento $v \in V$ es un vector cíclico sii $V = Z(v, T)$

Prop $T: V \to V$ $\dim V < \infty$ $\exists v$ cíclico sii $\exists B$ base tq $[T]_B$ es la asociada a un polinomio (minimal = característico)

$f = x^n + a_{n-1}x^{n-1} \cdots + a_0 \Rightarrow$ Matriz asoc a f es

$$M_f = \begin{pmatrix} 0 & & & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \begin{matrix}0\\1\end{matrix} & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in K^{n \times n} \quad n = gr(f)$$

$X_{M_f} = m_{M_f} = f$
ejercicio

$(x-1)^{n-1}(x-120)$

$\Leftarrow \exists B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$

$\Rightarrow Tv_1 = v_2 \quad T(Tv_1) = Tv_2 = v_3 \Rightarrow v_k = T^{k-1}v_1$

$\Rightarrow B = \{v_1, Tv_1, \ldots T^{n-1}v_1\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & & -a_1 \\ & & -a_2 \\ 0 & \ddots & \\ & 1 & -a_{n-1} \\ & 0 & -a_0 \end{pmatrix}$$

Descomposiciones cíclicas

$W \subseteq V$ subesp T-invar $\tilde{W}$ es complemento

$\leadsto B = B_W \cup B_{\tilde{W}}$

$$[T]_B = \left(\begin{array}{c|c} [T|_W]_{B_W} & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right)$$

Si $\tilde{W}$ es T-invar

$$[T]_B = \left(\begin{array}{c|c} [T|_W]_{B_W} & 0 \\ \hline 0 & [T|_{\tilde{W}}]_{B_{\tilde{W}}} \end{array}\right)$$

·) pero no siempre existe dicho $\tilde{W}$

$\exists \tilde{W}$ (complemento) pero no siempre T-invar

Si $\exists\, \tilde{W}$ complemento T-invar, $v \in V \rightsquigarrow v = \underset{\in W}{w} + \underset{\in \tilde{W}}{\tilde{w}}$

$f \in K[x]: f(T)(v) = \underbrace{f(T)(w)}_{\in W} + \underbrace{f(T)(\tilde{w})}_{\in \tilde{W}}$ pq W y $\tilde{W}$ son T-invar

$$f(T)(v) \in W \iff f(T)(\tilde{w}) = 0$$
$$\iff f(T)(v) = f(T)(w)$$

<u>def</u> $T: V \to V$ TL $W \subseteq V$ subesp, se dice T-admisible sii

(i) W es T-invar ⊛

(ii) si $f(T)(v) \in W$ para $v \in V$, $f \in K[x]$

$$\Rightarrow \exists\, w \in W \,/\, f(T)(v) = f(T)(w)$$

<u>ejemplo</u> $W = 0$ $W = V$ son T-admisibles

⊛ Si su complemento fuera invar vale siempre