DIFERENCIABILIDAD DE FUNCIONES $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

1. Encontrar las derivadas parciales primeras de las siguientes funciones:

(a) $f(x,y) = x^2 + x\,\mathrm{sen}(x+y)$, (b) $f(x,y) = \mathrm{sen}(x)\cos(x+y)$,

(c) $f(x,y) = \arctan(y/x)$, (d) $f(x,y) = x^y$,

(e) $f(x,y) = \displaystyle\int_x^y h(t)\,dt$, h continua, (f) $f(x,y,z,w) = \dfrac{x^2-y^2}{z^2+w^2}$.

2. Calcular f_{xy}, f_{yx}, y verificar que coinciden, para las siguientes funciones:

(a) $f(x,y) = xy + x^2y^3$, (b) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$.

3. Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que sea continua en $\mathbf{x}_0$, pero que no sea diferenciable en dicho punto.

4. Considere la siguiente función:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \text{ o } y = 0, \\ 1 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Demostrar que f tiene matriz jacobiana en $(0,0)$, pero que no es diferenciable en ese punto. ¿Qué conclusión puede sacar?

5. ¿En qué puntos de $\mathbb{R}^2$ no son diferenciables las siguientes funciones? Justifique.

(a) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2}$, (b) $g(x,y) = \sqrt{x^2-y^2}$,

(c) $h(x,y) = |x+y|$.

Además, aproximar a cada una de las funciones por una función afín en $\mathbf{x}_0 = (1,2)$ para (a), en $\mathbf{x}_0 = (1,0)$ para (b), y en $\mathbf{x}_0 = (1,1)$ para (c).

Proposición: *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0)$ existe para todo $1 \le i \le n$. Entonces f es diferenciable en $\mathbf{x}_0$ si y sólo si*

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0\|} = 0.$$

6. Considere la siguiente función:

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 y\,\mathrm{sen}(1/x) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(a) Decidir en qué puntos la función f es continua.
(b) Determinar dónde existen las derivadas parciales primeras de f, y dónde resultan continuas.
(c) Decidir dónde f es diferenciable. ¿Qué conclusión puede sacar en relación al ítem (b)?

Proposición: *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $\mathbf{x}_0$, y $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ es una dirección unitaria dada, entonces existe la derivada direccional de f en $\mathbf{x}_0$ en la dirección $\mathbf{u}$, y se satisface:*

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{u}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} = \nabla f(\mathbf{x}_0)\cdot\mathbf{u}.$$

7. Para cada una de las siguientes funciones, encuentre la derivada direccional en el punto $\mathbf{x}_0$, en la dirección del vector unitario $\mathbf{u}$.

(a) $f(x,y) = x^2 - y^2$; $\quad \mathbf{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$; $\quad \mathbf{x}_0 = (1,1)$.

(b) $f(x,y) = e^x \operatorname{sen} y$; $\quad \mathbf{u} = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$; $\quad \mathbf{x}_0 = (1,0)$.

(c) $f(x,y,z) = xyz$; $\quad \mathbf{u} = (\cos\alpha \operatorname{sen}\beta, \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta, \cos\beta)$; $\quad \mathbf{x}_0 = (1,0,1)$.

8. Demuestre que la función f definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

tiene derivada direccional en todas las direcciones unitarias en el punto $(0,0)$, pero no es diferenciable en $(0,0)$.

9. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $\mathbf{x}_0$.

(a) Considere $\mathbf{x}_0 = (1,2)$. Si la derivada direccional de f en $\mathbf{x}_0$ en la dirección $\mathbf{u}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ es $2\sqrt{2}$, y en la dirección $\mathbf{u}_2 = (1,0)$ es -3, ¿cuál es la derivada direccional de f en $\mathbf{x}_0$ en la dirección $\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$?

(b) Ahora, si se conocen las derivadas direccionales de f en un $\mathbf{x}_0$ arbitrario en las direcciones unitarias $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$. ¿Se pueden calcular las derivadas direccionales de f en $\mathbf{x}_0$ en cualquier dirección? ¿Qué condición sobre $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ permite hacerlo?

10. Si la temperatura en cada punto (x,y,z) de la bola sólida de radio 3 centrada en $(0,0,0)$ es dada por $T(x,y,z) = yz + zx + xy$, encontrar la dirección en la cual T crece más rápidamente en $\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$, y en $(1,2,2)$.

Diferenciabilidad de funciones $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

11. Sea $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$. Hallar su derivada en los siguientes puntos: (a,b), $(1,0)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

12. Sea $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $P(x,y,z) = (x,y)$. Demuestre que P es diferenciable en todo $\mathbb{R}^3$ y encuentre la matriz de su diferencial en $(1,1,1)$.

13. Hallar la diferencial de cada una de las siguientes funciones en los puntos indicados:

(a) $f(x,y) = x^2 + y^2$ en $(1,1)$.

(b) $f(t) = (\operatorname{sen} t, \cos t)$ en $t = \pi/4$.

(c) $f(u,v) = (u\cos v, u \operatorname{sen} v, v)$ en $(u,v) = (1,\pi)$.

14. ¿En qué puntos de $\mathbb{R}^2$ no son diferenciables las siguientes funciones? ¿Por qué?

(a) $$f(x,y) = \begin{cases} \left(\sqrt{y^2-x^2}, \dfrac{xy}{e^x - 1}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ \left(\sqrt{y^2-x^2}, 0\right) & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(b) $$g(x,y) = \begin{cases} \left(x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), x^2+y^2\right) & \text{si } x \neq 0, \\ (0, x^2+y^2) & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Además, aproximar a $g(x,y)$ por una función afín en el punto $(1,0)$.

Regla de la cadena

15. Encontrar $\dfrac{df}{dt}$ para:

(a) $f(x,y) = x^2 + y^2, \quad x = t, \quad y = t^2.$

(b) $f(x,y) = x\,y, \quad x = 1 - \sqrt{t}, \quad y = 1 + \sqrt{t}.$

(c) $f(x,y) = x/y, \quad x = e^t, \quad y = e^{2t}.$

16. (a) Si $g(x,y) = e^{x+y}$ y $f'(0) = (1,2)$, calcular $F'(0)$, donde $F(t) = g(f(t))$ y $f(0) = (0,0)$.

(b) Si $f(x,y,z) = \operatorname{sen} x$, $F(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, encuentre $g'(\pi)$, donde $g(t) = f(F(t))$.

17. Si $w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ y

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\ \operatorname{sen}\theta \\ r \end{pmatrix},$$

hallar $\dfrac{\partial w}{\partial r}$ y $\dfrac{\partial w}{\partial \theta}$ usando la regla de la cadena. Comprobar el resultado por sustitución directa.

18. Sean $f(u,v) = e^{uv}\operatorname{sen}(u^2+v^2)$, $g(u,v,w) = \ln(u^2+v^2+w^2+1)$. Dadas

$$u(x,y) = x + y, \quad v(x,y) = xy, \quad w(x,y) = x - y + 1,$$

calcular las derivadas parciales primeras de las funciones

$$f(u(x,y), v(x,y)) \quad \text{y} \quad g(u(x,y), v(x,y), w(x,y)),$$

utilizando la regla de la cadena.

19. Considerar las funciones

$$f\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u+v \\ u-v \\ u^2-v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad F(x,y,z) = x^2+y^2+z^2 = w.$$

(a) Hallar la diferencial de $F \circ f$ en (a,b).

(b) Hallar $\dfrac{\partial w}{\partial u}$ y $\dfrac{\partial w}{\partial v}$.

20. Dadas

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+xy+1 \\ y^2+2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad g\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u+v \\ 2u \\ v^2 \end{pmatrix},$$

encontrar la matriz de la diferencial de $g \circ f$ en $\mathbf{x}_0 = (1,1)$.

Ejercicios de repaso. Los ejercicios marcados con $\star$ son de mayor dificultad.

21. $\star$ Sea $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^{-(n-2)}$. Demuestre que $f_{x_1x_1} + \cdots + f_{x_nx_n} = 0$.

22. $\star$ Considere la función

$$f(x,y) = \begin{cases} 2xy\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Calcule $f_{xy}(0,0)$ y $f_{yx}(0,0)$. ¿Qué deducimos del resultado?

23. Considere la siguiente función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^5 - x^3y^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Decidir en qué puntos la función f es continua.
(b) Determinar dónde existen las derivadas parciales primeras de f, y dónde resultan continuas.
(c) ¿Es f diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$?

24. Sea f dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2(y-x)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Probar que f admite derivadas direccionales en el origen en la dirección de cualquier vector unitario $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$, pero que sin embargo f no es diferenciable en el origen.

25. ⋆ Considere la siguiente función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2-y^2} & \text{si } x \neq \pm y, \\ 0 & \text{si } x = \pm y. \end{cases}$$

(a) Estudiar la existencia de las derivadas direccionales $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}}(0,0)$, para todo $\mathbf{u}$ unitario.
(b) Analizar la diferenciabilidad de f en el punto $(0,0)$.

26. Supongamos que la función $h(x,y) = 2e^{-x^2} + e^{-3y^3}$ representa la altura de una montaña en la posición (x,y). Estamos parados en un punto del espacio cuyas coordenadas respecto del plano xy son $(1,0)$. ¿En qué dirección deberíamos caminar para escalar más rápido?

27. Sean f y g funciones vectoriales definidas por

$$f\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u\cos v \\ u \operatorname{sen} v \end{pmatrix}, \text{ con } \begin{cases} u > 0, \\ -\pi/2 < v < \pi/2, \end{cases}$$

$$g\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2} \\ \arctan \frac{y}{x} \end{pmatrix}, \text{ con } x \neq 0.$$

(a) Encontrar la matriz jacobiana de $g \circ f$ en (u,v).
(b) Encontrar la matriz jacobiana de $f \circ g$ en (x,y).

28. Sea $f(x,y)$ una función a valores reales tal que

$$f_x(2,1) = 3, \quad f_y(2,1) = -2, \quad f_{xx}(2,1) = 0,$$
$$f_{xy}(2,1) = 1, \quad f_{yx}(2,1) = 1, \quad f_{yy}(2,1) = 2.$$

Sea $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$g(u,v) = (u+v, uv).$$

Hallar $\dfrac{\partial^2 (f \circ g)}{\partial u \partial v}$ en $(1,1)$.