ANÁLISIS NUMÉRICO II — Práctico N°6 - 2023
Métodos iterativos para sistemas lineales

1. Sea el siguiente sistema lineal:

$$\begin{aligned} 10x + y &= 3 \\ 4x + 6y &= 9 \end{aligned}$$

Realizar 2 iteraciones (en `Python`) de Jacobi con su formulación matricial, comenzando con el vector $x_0 = [1, 1]$. Graficar los puntos de las iteraciones x_0, x_1, x_2 y la solución exacta del sistema como puntos en el plano.

2. **Implemente** dos funciones, `sol_jacobi` y `sol_gseidel`, para resolver sistemas lineales usando el método de Jacobi y Gauss-Seidel, respectivamente. La entrada de cada uno debe ser A, b, x^0, tolerancia de error ϵ y máximo de iteraciones m. La salida debe ser x aproximación de la solución.

3. Para $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica definida positiva, $\|x\|_A = \sqrt{x^T Ax}$ y $x^* = A^{-1}b$, sean

$$f_1(x) = \tfrac{1}{2}\|x - x^*\|_A^2, \qquad f_2(x) = \tfrac{1}{2}\|Ax - b\|_{A^{-1}}^2, \qquad f_3(x) = \tfrac{1}{2}x^T Ax - x^T b.$$

Calcule el gradiente de cada función. Concluya que estas funciones difieren en a lo sumo una constante.

4. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica definida positiva $\{x^k\}$ generada por el método de Gastinel a partir de un x^0. Demuestre que

$$\|x^{k+1} - x^*\|_A \le \left(1 - \frac{1}{n\kappa_2(A)}\right)^{1/2} \|x^k - x^*\|_A,$$

donde $Ax^* = b$. En particular $x^k \to x^*$.

5. **Implemente** los métodos de Cauchy y de Gastinel, con la estructura de entrada/salida del ejercicio 2, en las funciones `sol_cauchy` y `sol_gastinel`.

6. Para resolver $Ax = b$ con $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica definida positiva, considere el siguiente método iterativo: dado x^k defina $x^{k+1} = x^k + d^k$ donde d_i^k es solución de

$$\underset{d\in\mathbb{R}}{\text{minimizar}} \;\; f(x^k + de^i),$$

con $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x$ y e^i el i-ésimo vector canónico. Demuestre que la sucesión generada $\{x^k\}$ coincide con la generada por el método de Jacobi.

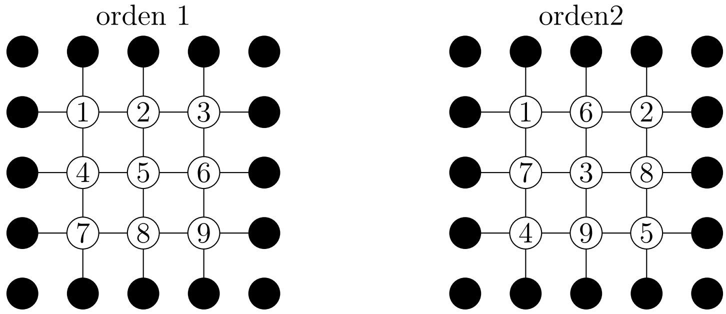
7. Sea A simétrica definida positiva. Demuestre que las direcciones A-conjugadas (o A-ortogonales) son linealmente independientes.

8. **Implemente** una función, llamada `sol_gradcon`, que ejecute el método del gradiente conjugado con la estructura de entrada/salida del ejercicio 2.

9. Se desea determinar la temperatura en $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ sabiendo que la temperatura en la frontera es dada por una función g. Tomando una grilla cuadrada de n nodos equiespaciados, el problema se reduce a encontrar $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ de elementos u_{ij} que cumplan

$$\begin{aligned} -\frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2} - \frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{h^2} &= 0 \quad \text{para} \quad i, j = 2, \dots, n-1, \\ u_{1j} = g(0, \xi_j) \text{ y } u_{nj} = g(1, \xi_j) &\quad \text{para} \quad j = 1, \dots, n, \\ u_{i1} = g(\xi_i, 0) \text{ y } u_{in} = g(\xi_i, 1) &\quad \text{para} \quad i = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

con $h = 1/(n-1)$ y $\xi_j = (j-1)h$. Este problema es equivalente a resolver un sistema lineal $Ax = b$ donde $A \in \mathbb{R}^{(n-2)^2\times(n-2)^2}$ y $x, b \in \mathbb{R}^{(n-2)^2}$. Note que existen $(n-2)^2!$ formas de ordenar las incógnitas $\{u_{ij}\}_{i,j=2}^{n-1,n-1}$ en las componentes de x. Por ejemplo:



Cuadro 1: Grafo de $U \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ con orden por filas (1) y tablero de damas (2)

Escriba una función llamada `calor` con entrada n y salidas A y b para el orden 1. Para la frontera utilice g que vale 100 en el borde izquierdo y 0 en los otros bordes. Construya la matriz utilizando `scipy.sparse.csr_matrix`.

Resuelva el sistema y compare los tiempos de ejecución de todos los métodos de los ejercicios 2, 5 y 8 al resolver $Ax = b$ dadas por el ejercicio 9 para $n = 50$ y $n = 100$.

10. Para $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con $Ax^* = b$, sean

$$g_1(x) = \tfrac{1}{2}\|x - x^*\|^2_{A^TA}, \qquad g_2(x) = \tfrac{1}{2}\|Ax - b\|_2^2, \qquad g_3(x) = \tfrac{1}{2}x^TA^TAx - x^TA^Tb.$$

Calcule el gradiente de cada función. Concluya que estas funciones difieren en a lo sumo una constante.

11. **Implemente** el método del residuo mínimo, con la estructura de entrada/salida del ejercicio 2, en la función `sol_resmin`. Verifique su funcionamiento utilizando el ejercicio 9.

12. **Implemente** el método de Arnoldi en una función llamada `arnoldi`, con entradas A, v y m (cantidad de vectores de la base), y salidas $\bar{H} \in \mathbb{R}^{(d+1)\times d}$ y $V \in \mathbb{R}^{d\times d}$ con $d \leq m$.

13. **Implemente** una función, llamada `sol_gmres`, que ejecute el método GMRES con la estructura de entrada/salida del ejercicio 2. Utilice las funciones `arnoldi` (ej. 12) y `sol_cuadmin` (ej. 7 práctico 4). Verifique su funcionamiento utilizando el ejercicio 9.