$$F(X) = \{x_1^{\lambda_1} \cdots x_k^{\lambda_k} \mid \text{palabra reducida}\}$$

$$X \xhookrightarrow{i} F(X) \quad x \longmapsto x^1$$

inyectiva

·) Identificamos a X con el subconjunto $i(X) \subseteq F(X)$

·) recordar $\lambda_i = \pm 1$

·) Se define el siguiente producto

Sean $x_1^{\lambda_1} \cdots x_m^{\lambda_m}$, $y_1^{\varepsilon_1} \cdots y_n^{\varepsilon_n} \in F(X)$

no vacíos

·) si $m \leq n$ tomamos el mayor $k \in \mathbb{N}$ tq

$$x_{m-j}^{\lambda_{m-j}} = y_{j+1}^{\varepsilon_{j+1}} \quad \forall j = 0, \ldots, k-1$$

$$x_1^{\lambda_1} \cdots x_m^{\lambda_m} \cdot y_1^{\varepsilon_1} \cdots y_n^{\varepsilon_n} = \begin{cases} e \text{ (vacía)} & k = m = n \\ y_{k+1}^{\varepsilon_{k+1}} \cdots y_n^{\varepsilon_n} & k = m < n \\ x_1^{\lambda} \cdots x_{m-k}^{\lambda_{m-k}} y_{k+1}^{\varepsilon_{k+1}} \cdots y_m^{\varepsilon_m} & k < m \end{cases}$$

Análogamente se define el producto cuando $m \geq n$

Definimos $e\, y_1^{\varepsilon_1} \dots y_m^{\varepsilon_m} = y_1^{\varepsilon_1} \dots y_m^{\varepsilon_m}$

$= y_1^{\varepsilon_1} \dots y_m^{\varepsilon_m}\, e$

ejercicio el prod de palabras reducidas es de nuevo una palabra reducida

teorema Con el producto así definido $F(X)$ es un grupo. Este se llama grupo libre en el conjunto X y el par $(F(X), i: X \to F(X))$ tiene la siguiente propiedad universal que lo determina salvo un único isomorfismo

Dado cualquier grupo G y cualquier función $f: X \to G$ existe un único homo

$\tilde{f}: F(X) \to G$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & F(X) \arrow[d, dashed, "\exists! \tilde{f}"] \\ & G \end{tikzcd}$$

Nota: $F(X)$ es un "objeto libre" en la categoría de grupos demo la identidad es la palabra reducida vacía por def. El inverso de $x_1^{\lambda_1} \dots x_n^{\lambda_n}$ es $x_1^{-\lambda_1} \dots x_n^{-\lambda_n}$

) la parte no evidente es la asoc omitimos la prueba (Hungerford p.65)

veamos la prop universal. tenemos $f: X \to G$

definimos $\tilde{f}(x_1^{\lambda_1} \dots x_m^{\lambda_m}) = f(x_1)^{\lambda_1} \dots f(x_n)^{\lambda_n} \in G$

Se verifica que $\tilde{f}$ es homo y claramente $\tilde{f} \circ i = f$

Unicidad de $\tilde{f}$. si $g: F(X) \to G$ tq $g \circ i = f$, g homo

$$\Rightarrow g(x_1^{\lambda_1} \dots x_m^{\lambda_m}) = g(x_1)^{\lambda_1} \dots g(x_m)^{\lambda_m}$$

$$= f(x_1)^{\lambda_1} \dots f(x_m)^{\lambda_m}$$

$$= \tilde{f}(x_1^{\lambda_1} \dots x_m^{\lambda_m})$$

La propiedad caracteriza a $F(X)$:

•) si $j: X \to L$ es otro par con la misma prop dada por

$$X \xrightarrow{\ell} L$$

Por la prop universal de $F(X)$

$\exists!\, \theta: F(X) \to L$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "j"'] & F(X) \arrow[d, dashed, "\exists!\,\theta"] \\
& L \arrow[u, bend right=60, dashed, "\underbrace{\exists!\,\psi}_{\text{por la propiedad de } L}"']
\end{tikzcd}$$

$\theta i = j$

$\psi j = i$

$$\psi\theta: F(X) \longrightarrow F(X)$$

es tq $\psi\theta i = i \Rightarrow \psi\theta = Id_{F(X)}$

Análogamente $\theta\psi = Id_L$, θ iso, $\theta i = j$

???

prop Todo grupo es isomorfo al cociente de un grupo libre

dem Sea G un grupo. Sea $X \subseteq G$ $X \neq \phi$ un conjunto de generadores de G

Por la prop univ de $F(X)$ usando $f = Id$

$$X \subseteq G \quad f: X \to G \quad f(x) = x$$

$$\exists!\ \tilde{f}: F(X) \to G \ / \ \tilde{f}(\underbrace{x}_{i(x)}) = \underbrace{x}_{f(x)} \quad \forall x \in X$$

como $\langle X \rangle = G \Rightarrow \tilde{f}$ epimorfismo

pues $X \subseteq Im\, \tilde{f} \leq G$ $\to$ pq $Im\, \tilde{f}$ es grupo $\Rightarrow \langle X \rangle \subseteq Im\, \tilde{f} \leq G$ $\Rightarrow Im\, \tilde{f} = G$

por 1er tco isomorfismo $\tilde{f}$ induce un iso $F(X)/\ker \tilde{f} \cong G$ $\square$

Ejemplo $X = \{x\}$ $\quad F(X) \cong \mathbb{Z}$ $\quad$ 2.12

por la proposición anterior es epi

$$\begin{aligned} F(X) &\xrightarrow{\tilde{f}} \mathbb{Z} = \langle 1 \rangle \\ x &\longmapsto 1 \\ e &\longmapsto 0 \end{aligned}$$

($\tilde{f}$ definida en la prop universal)

Además $\tilde{f}$ inyectiva $\underbrace{x \dots x}_{n\text{-veces}}$ o $\underbrace{x^{-1} \dots x^{-1}}_{n\text{-veces}}$

$\therefore \ker \tilde{f} = \{e\}$

obs $F(X)$ no es abeliano si $|X| \geq 2$

$x \neq y \in X$ xy e yx son palabras reducidas distintas en $F(X)$

$$xy = (x, y, e, \dots) \quad yx = (y, x, e, \dots)$$

≥ 2

definición Sea $X \subseteq G$ subconjunto de un grupo G el subgrupo normal generado por X es:

$$N = \bigcap_{\substack{H \trianglelefteq G \\ X \subseteq H}} H$$

en particular $N \trianglelefteq G$ y $X \subseteq N$

definición Sea $X \neq \emptyset$ un conjunto y sea $Y \subseteq F(X)$. El grupo con generadores X y relaciones Y es

$$F(X|Y) := F(X)/N$$

N subgrupo de $F(X)$ normal generado por Y

En general una presentación de un grupo G por generadores y relaciones es

$$G \cong F(X \mid Y)$$

$Y :=$ "defining relations"

Ejemplo $\mathbb{Z}_m = F(\{x\} \mid \{x : x^m = e\})$

$\cdot)$ $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \cong F(a, b \mid aba^{-1}b^{-1})$

notación $F\left(a, b \,\middle|\, \begin{matrix} ab = ba \\ aba^{-1}b^{-1} = e \end{matrix}\right)$

$$\begin{aligned} F(a,b) &\xrightarrow{\vec{f}} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \\ a &\longmapsto (1,0) \\ b &\longmapsto (0,1) \end{aligned}$$

como $(1,0)$ y $(0,1)$ conmutan en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ este epi da lugar a un epimorfismo

$$F(a, b \mid aba^{-1}b^{-1}) \longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

podemos construir un inverso de $\tilde{f}$ usando

$\bar{a} \longmapsto (1,0)$ que $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ es coproducto
$\bar{b} \longmapsto (0,1)$ en la categoría de grupos abelianos

ejemplo Presentación de grupo dihedral

$D_n = \{ r^i \sigma^j : 0 \leq j \leq 1 \quad 0 \leq i < n \}$ $\quad |D_n| = 2n$

En D_n se cumplen $r^n = e \quad \sigma^2 = e$

$$\sigma r = r^{-1} \sigma$$

$\therefore$ epimorfismo

$$F(a,b \mid a^n, b^2, baba) \xrightarrow{\pi} D_n$$
$$a \longmapsto r$$
$$b \longmapsto \sigma$$

Afirmación π isomorfismo y $\therefore$ de lugar a una presentación en D_n por generadores y relaciones

demo denotemos por $\bar{\alpha} \in F(a,b \mid a^n, b^2, baba)$
a la clase de $\alpha \in F(a,b)$. la relación $baba$
implica que $\bar{b}\bar{a}\bar{b}\bar{a} = \bar{e}$ en el cociente

$$\Leftrightarrow \bar{b}\bar{a}\bar{a}^{-1}\bar{b}^{-1} = \bar{a}^{-1}\bar{b}^{-1}$$

$\Rightarrow$ en el cociente toda palabra está representada por $\bar{a}^m \bar{b}^k$ más
aún como $\bar{a}^n = \bar{e}$ y $\bar{b}^2 = e$ puedo restringir
al caso $0 \leq m < n$ $\quad 0 \leq k \leq 1$

$$\therefore \quad |F(a,b \mid a^n, b^2, baba)| \leq 2n$$

$\therefore$ π biyectiva y luego es un iso