Forma de Jordan

$N: V \to V$ Tl de dim $V < \infty$ nilpotente
$\exists r \geq 0 \ / \ N^r = 0 \rightsquigarrow X^n$ anula a N

$m_N = X^s \quad s = \min\{r : N^r = 0\}$

Usando teo descomp cíclica

$$V = \underbrace{Z(v_1, N)}_{m_N = X^{s_1}} \oplus \cdots \oplus \underbrace{Z(v_k, N)}_{m_{N_k, N} = X^{s_k}}$$

$$s = s_1 \ldots \geq s_k$$

$B = \{v_1, N(v_1), \ldots, N^{s_1-1}(v_1), \ldots \quad v_k, N(v_k), \ldots, N^{s_k-1}(v_k)\}$

$$[N]_B = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix} \quad A_i = \left.\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}\right\} s_i$$

$T: V \to V$ $\dim V < \infty$, $c \in K$ / $\mu_T = p_T = (x-c)^n$

redefinimos $T - cI = N$. Ahora $\mu_N = x^n$
$(N^n = (T-cI)^n = 0)$

Ahora usamos T.d.ciclica, N tiene un vector v_1 ciclico $\rightsquigarrow$ $B = \{v_1, N(v_1), \ldots, N^{n-1}(v_1)\}$

$$[N]_B = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow [T]_B = [N + cI]_B = \underbrace{\begin{pmatrix} c & & & 0 \\ 1 & c & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & c \end{pmatrix}}_{\circledast}$$

$$T(v_i) = \begin{cases} c v_i + v_{i+1} & i < n \\ c v_n & i = n \end{cases}$$

$\circledast$ Bloque elemental de jordan de tamaño n y autovalor c
autoespacio de c tiene dim 1

$\mu_T \neq p_T$

$T: V \to V$ $\dim V < \infty$, $c \in K$ / $\mu_T = (x-c)^s$

$\rightsquigarrow N = T - cI$ nilpotente $\mu_N = x^s$

T.d.c en N $\rightsquigarrow$ B base t.q.

$$[N]_B \quad \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & & \\ 1 & 0 & \\ & 1 & 0 \end{bmatrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{bmatrix} 0 & & \\ 1 & \ddots & \\ & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{pmatrix} \begin{matrix} \}\, s_1 = s \\ \\ \}\, s_k \end{matrix}$$

$\circledast$ autovectores Base!! ejercicio

2) $$[T]_B = \begin{pmatrix} \begin{matrix} c & & & \\ 1 & c & & \\ & & \ddots & \\ & & 1 & c \end{matrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{matrix} c & & \\ 1 & \ddots & \\ 0 & 1 & c \end{matrix} \end{pmatrix} \begin{matrix} \}\ s_1 = s \\ \\ \\ \}\ s_k \end{matrix}$$

Bloque de jordan de aval c

Base de avecs de aval c

$T : V \to V$ $\dim V < \infty$ / $m_T = (X - c_1)^{d_1} \cdots (X - c_k)^{d_k}$

$c_i \neq c_j$ si $i \neq j$

Por T des prima $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$ como subesp invariantes

$T_i = T|_{V_i} : V_i \to V_i$ $\quad m_{T_i} = (X - c_i)^{d_i}$

V_i se llama autoespacio generalizado

$V_i = \ker (T - c_i)^{d_i} = \{ v \in V : \exists k \in \mathbb{N} / (T - c_i)^k = 0 \}$

Aplicando lo anterior a cada T_i, $\exists B_i$ bases tales que $[T_i]_{B_i}$ es un bloque de jordan con aval c_i. Tomo $B = B_1 \cup \cdots \cup B_k$

$$[T]_B = \begin{pmatrix} [T_1]_{B_1} & & \\ & \ddots & \\ & & [T_k]_{B_k} \end{pmatrix}$$

forma de jordan de T

Teorema $T: V \to V$ Tl $\dim V < \infty$ tal que $m_T = (X-c_1)^{d_1} \dots (X-c_k)^{d_k}$ $c_i \neq c_j$ $i \neq j$

$\exists B$ base de B tal que $[T]_B$ es una forma de jordan. Más aún la forma es única a menos de permutación de bloques asociados a distintos autovalores

Corolario Lo anterior vale si K es alg cerrado (ejemplo $\mathbb{C}$)

Demo Teo Ya vimos como construirla veamos unicidad. Supongamos $\exists$ otra base $\tilde{B} = \tilde{B}_1 \cup \dots \cup \tilde{B}_{\tilde{k}}$ tal que

$$[T]_{\tilde{B}} = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_{\tilde{k}} \end{pmatrix}$$ donde A_i es bloque de jordan de aval $\tilde{c}_i$
$\tilde{c}_i \neq \tilde{c}_j$ $i \neq j$

$\Rightarrow P_{A_i} = (X - \tilde{c}_i)^{n_i}$ con n_i = tamaño bloque A_i

$$\Rightarrow P_T = \prod_{i=1}^{\tilde{k}} P_{A_i} = \prod (X - \tilde{c}_i)^{n_i} \underset{\circledast}{=} \prod_{i=1}^{k} (X - c_i)^{n_i}$$
usando

$\Rightarrow k = \tilde{k}$ y $\tilde{c}_i = c_{\sigma(i)}$ σ permutación

$n_i = m_{\sigma(i)}$

Tomemos $\tilde{c}_1 = c_{\sigma(1)}$

$$[T - \tilde{c}_1 I]_{\tilde{B}} = \begin{pmatrix} \underbrace{A_1 - \tilde{c}_1 I}_{W_1} & & \\ & \underbrace{A_2 - \tilde{c}_1 I}_{W_2} & \\ & & \underbrace{\ddots}_{W_k} \end{pmatrix}$$

$V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$ cada W_i T-invar

$T_i = T|_{W_i}$

$$\mathrm{Ker}\overbrace{(T - \tilde{c}_1)}^{W_i\text{-invar}}{}^{n_1} = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}(T_i - \tilde{c}_1)^{n_1} = W_1$$

ejercicio

ya que $(T - \tilde{c}_1)^{d_1}|_{W_i}$ $(i \neq 1)$ es inyectiva porque su matriz es triangular inferior con $c_i - \tilde{c}_1 \neq 0$ en la diagonal

De lo anterior, $W_1 \supseteq V_{\sigma(1)}$ $\quad V_{\sigma(1)} = \mathrm{Ker}(T - c_{\sigma(1)})^{d_{\sigma(1)}}$

$d_{\sigma(1)} \leq n_1$

Si $v \in \mathrm{Ker}(T - \tilde{c}_1)^{n_1} \Rightarrow m_{v,T} \mid (x - \tilde{c}_1)^{n_1}$

$\Rightarrow m_{v,T} = (x - \tilde{c}_1)^s$ p/ algún $s \leq d_{\sigma(1)}$

De lo anterior $W_1 \subseteq V_{\sigma(1)}$ y también tiene $V_{\sigma(1)} \subseteq W_1$ porque $d_{\sigma(1)} = n_1$

Sabemos entonces generalizando lo hecho recien, que los sumandos directos de cada bloque de jordan (asociados a un aval fijo) son únicos.

Y la unicidad de bloques de cada autovalor lo tenemos por T. d. cíclica aplicada a $T - c_i\big|_{V_i}$ $\boxed{\text{B}}$