Teorema $W \subseteq V$ ev p i, $v \in V$

(i) $w \in W$ es mejor aprox de v (en W)

$\iff v - w \perp W$

(ii) Si $\exists w$ mejor aprox entonces es único

iii) $\dim W < \infty$, $\{w_1 \dots w_n\}$ base ortogonal de W

$$\Rightarrow w = \sum_{i=1}^{n} \frac{(v \mid w_i)\, w_i}{\|w_i\|^2}$$ w mejor aprox

demo (i) ($\Rightarrow$) clase pasada

($\Leftarrow$) Asumimos que $v - w \perp W$ para cierta $\tilde{w} \in W$

$$\|v - \tilde{w}\|^2 = \|v - w\|^2 + 2\operatorname{Re}(v - w, \underbrace{w - \tilde{w}}_{\in W}) + \|w - \tilde{w}\|^2$$

$\| = \|v - w + w - \tilde{w}\|$

$= 0$ $v - w \perp W$

$\geq \|v - w\|^2$

* Si existiera $\tilde{w}$ mejor aprox que w

(iii)

Supongo $w = \sum$ es mejor aprox

$$(v - w | w_i) = (v | w_i) - \sum_{j=1}^{n} \frac{(v | w_j)}{\|w_j\|^2} (w_j | w_i)$$

$$= (v | w_i) - \frac{(v | w_i) \cancel{(w_i | w_i)}}{\cancel{\|w_i\|^2}} = 0$$

$\Rightarrow$ es mejor aprox por (i) $\square$

<u>def</u> Asumimos $W \subseteq V$ subesp de dim finita la mejor aprox de $v \in V$ por W se denomina proyección ortogonal de v

La función $E : V \to V$, $v \mapsto$ su proy ortogonal se denomina proy orto a W

$$E(v) = \sum^{k} \frac{(v | w_i)}{\|w_i\|^2} w_i \quad \text{si } \{w_1 \dots w_k\} \text{ es bog de } W$$

Recordar: El complemento ortogonal de W es $W^\perp = \{ v \in V : v \perp W \}$

$= \{ v \in V : (v | w) = 0 \ \forall w \in W \}$

•) $V = W \oplus W^\perp$

Propiedades de E (ej)

(i) $\operatorname{Im} E = W$, $E(w) = w \quad \forall w \in W$

$\operatorname{Nu}(E) = W^{\perp}$

(ii) $E^2 = E \Rightarrow I - E$ es proyección

cuyo $\operatorname{Nu} = \operatorname{Im} E$

$\operatorname{Im} = \operatorname{Nu} E$

$\therefore I - E$ es proy ortogonal

Recordar $\{v_1, \dots, v_n\}$ base $\{f_1, \dots, f_n\}$ base dual

$v = \sum f_i(v) v_i \qquad f = \sum f(v_i) f_i$

<u>Prop</u> V ev p.i. $\dim V < \infty$ $f \in V^*$

$\Rightarrow \exists!\, v \in V \mid f(z) \overset{\circledast}{=} (z|v)$

$\forall z \in V$

<u>demo</u> Sea $B = \{v_1 \dots v_n\}$ b.o.n. tomemos

$v = \sum_{i=1}^{n} \overline{f(v_i)}\, v_i$ candidato a v. veamos

que satisface $\circledast$:

$$(z|v) = \sum_{i=1}^{n} (z | \overline{f(v_i)}\, v_i) = \sum_{i=1}^{n} f(v_i)\,(z|v_i)$$

f es lineal
$f \in V^*$

$$= f\Big(\sum_{i=1}^{n} \underbrace{(z|v_i)\, v_i}_{\text{Coord de } z \text{ en } B \text{ bon}}\Big) = f(z) \quad \forall z \in V$$

Para unicidad
Si $\exists \tilde{v} / f(z) = (z|\tilde{v})$
$\forall z \in V$

$$\rightsquigarrow \underset{\overset{\shortparallel}{(z|v)}}{f(z)} = \underset{\overset{\shortparallel}{(z|\tilde{v})}}{f(z)} \quad \forall z \in V$$

$$\Rightarrow (z | v - \tilde{v}) = 0 \quad \forall z \in V$$

tomando $z = v - \tilde{v} \Rightarrow \|v - \tilde{v}\|^2 = 0$

$\therefore v = \tilde{v}$ $\square$

Def: V evpi, $T: V \to V$ Tl un adjunto de T es una Tl $T^*: V \to V$ tal que $(T(v)|w) = (v|T^*(w))$ $\forall v, w \in V$

Teorema V $\mathbb{K}$-evpi, $\dim V < \infty$, $T: V \to V$ Tl
$\Rightarrow \exists!$ adjunto de T (T^*)

demo fijemos $w \in V$ $f_w: V \to \mathbb{K}$
$f_w(v) = (T(v)|w)$ Notar que $f_w \in V^*$

por la proposición

$\exists! w^* \in V \mid t_w(z) = (z \mid w^*) \quad \forall z \in V$

$\cdot$) Definimos una función

$$T^*: V \to V, \quad T^*(w) = w^*$$

T^* es único elemento de V^* tal que

$$(T(z) \mid w) = t_w(z) = (z \mid T^*(w)) \quad \forall z \in V$$

$\cdot$) Resta ver que T^* es lineal (ya vimos unicidad)

dados $w, \tilde{w} \in V$, $c \in \mathbb{K}$

$$\forall z \in V \quad (z \mid T^*(w + c\tilde{w})) \overset{\text{def } T^*}{=} (T(z) \mid w + c\tilde{w})$$

$$= (T(z) \mid w) + \bar{c}\,(T(z) \mid \tilde{w})$$

$$\overset{\text{def}}{=} (z \mid T^*(w)) + \bar{c}\,(z \mid T^*(\tilde{w}))$$

$$= (z \mid T^*(w) + c\,T^*(\tilde{w}))$$

$$\therefore \; T^*(w + c\tilde{w}) = T^*(w) + c\,T^*(\tilde{w})$$

ejemplo $\dim V < \infty$ $\quad W \subseteq V$ subesp

$E: V \to V$ proy ortogonal en W

$I - E: V \to V$ " " " $W^\perp$

$$(E(v)|v') = \Big(\overbrace{E(v)}^{\in W} \,\Big|\, \underbrace{E(v') + \overbrace{(I-E)(v')}^{\text{ya que } (I-E)(v') \in W^{\perp}}}_{W \oplus W^{\perp}}\Big)$$

$$= (E(v) \,|\, E(v')) + \cancel{(\underbrace{E(v)}_{\in W} \,|\, \underbrace{(I-E)(v')}_{\in W^{\perp}})}$$

$$= (E(v) + \underbrace{(I-E)(v)}_{\text{ya que } I-E(v) \in W^{\perp}} \,|\, E(v'))$$

$$= (v \,|\, E(v')) \quad \forall v, v' \in V$$

$$\therefore E^* = E$$

<u>ejemplo</u> $T: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2 \quad [T]_c = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$\rightsquigarrow [T^*]_c = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$1 = (e_1, e_1) = (Te_1, e_1) = (e_1 | T^* e_1)$$
$$= (e_1 | ae_1 + ce_2) = \bar{a}$$
$$\Rightarrow \boxed{a = 1}$$

$$0 = (e_1, e_2) = (Te_1, e_2) = (e_1, T^* e_2)$$
$$= (e_1, be_1 + de_2) = \bar{b}$$
$$\Rightarrow \boxed{b = 0}$$

$$i = (ie_1 + 2e_2, e_1) = (Te_2 | e_1) = (e_2 | T^* e_1)$$

$$= (e_2 \mid a e_1 + c e_2)$$

$$= \bar{c}$$

$$\Rightarrow \boxed{c = -i}$$

$$2 = (T e_2 \mid e_2) = (e_2 \mid T^* e_2) = (e_2 \mid b e_1 + d e_2)$$

$$= \bar{d} \Rightarrow \boxed{d = 2}$$

$$\therefore [T^*]_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -i & 2 \end{pmatrix} = \overline{[T]_C}^T$$

<u>teorema</u> V evpi dim finita, $T: V \to V$ tl

$B = \{v_1 \dots v_n\}$ bon

$\Rightarrow [T^*]_B = \overline{[T]}_B^T$ (se le dice $[T]_B^*$)

<u>demo</u> $[T]_B = (a_{ij})$ $\quad [T^*]_B = (b_{ij})$

coordenadas

$$\to \quad T(v_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} v_i \qquad T^*(v_k) = \sum_{i=1}^n b_{ik} v_i$$

$$(T(v_j) \mid v_k) = \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} v_i \mid v_k \right)$$

$$= \sum_{i=1}^n a_{ij} \overbrace{(v_i \mid v_k)}^{\delta_{ij}} = a_{kj}$$

$$\left(v_j \mid T^*(v_k)\right) = \left(v_j \,\Big|\, \sum_{i=1}^{n} b_{ik} v_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \overline{b_{ik}} \left(v_j \mid v_i\right) = \overline{b_{jk}} \quad \square$$

$$\therefore\ a_{kj} = \overline{b_{jk}} \qquad \left(\overline{a_{kj}}^{\,t} = b_{kj}\right) \quad \forall\ 1 \le k \le n,\ 1 \le j \le n$$

$$\therefore\ \overline{[T]}_B = [T^*]_B^T \Rightarrow \overline{[T]}_B^T = [T^*]_B$$

<u>def</u> $T: V \to V$ se dice autoadjunta si $T^* = T$

<u>ejemplo</u> todas las proy ortogonal

<u>Corolario</u> $T: V \to V$ autoadjunta

$\Leftrightarrow$ su matriz en una bon es autoadjunta $\left([A]_B \in \mathbb{K}^{n \times n} \,/\, \overline{[A]}_B^{\,t} = [A]_B\right)$

$\Leftrightarrow$ su matriz en cualquier bon es autoadjunta

Props de tl autoadjuntas (ejercicio)

$\forall\ T, U : V \to V$ tl's $\forall c \in \mathbb{K}$

(i) $(T+U)^* = T^* + U^*$

(ii) $(cT)^* = \bar{c}\, T^*$

(iii) $(TU)^* = U^* T^*$

(iv) $(T^*)^* = T$

dem

Sea B b.o.n

(i) $[T+U]^*_B = \overline{[T+U]}^t_B = \overline{[T]}^t_B + \overline{[U]}^t_B$

$= [T]^*_B + [U]^*_B$

$\Rightarrow (T+U)^* = T^* + U^*$

otra $((T+U)v \mid u) = (Tv \mid u) + (Uv \mid u)$

$= (v \mid T^* u) + (v \mid U^* u)$

$= (v \mid T^* u + U^* u) = (v \mid (T^* + U^*) u)$

(ii) $(([cT]_B))^* = \overline{[cT]}^t_B = \bar{c}\, \overline{[T]}^t_B$

$\Rightarrow (cT)^* = \bar{c}\, T^*$

(iii) $[TU]^*_B = \overline{[TU]}^t_B = (\overline{[T]_B [U]_B})^t = \overline{[U]}^t_B\, \overline{[T]}^t_B = [U]^*_B [T]^*_B$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) = \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$x_1 + 2x_2 = 0$$
$$3x_1 + 4x_2 = 0$$