

## Transformaciones lineales. Núcleo e imagen

Martes 4 de octubre

**Ejercicio 1.** Decidir si las siguientes funciones de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^m$  son transformaciones lineales.

- |                                 |   |
|---------------------------------|---|
| (a) $T(x, y) = (1 + x, y)$      | (e) $T(x_1, \dots, x_n) = (x_1, -x_1, x_2, -x_2, \dots, x_n, -x_n)$                         |
| (b) $T(x, y) = (y, x, x - 2y)$  | (f) $T(x_1, \dots, x_n) = (x_1, 2x_2, \dots, nx_n)$   |
| (c) $T(x, y) = xy$              | (g) $T(x_1, \dots, x_n) = (x_1, x_1 + x_2, \dots, x_1 + x_2 + \dots + x_n)$                 |
| (d) $T(x, y, z) = 3x - 2y + 7z$ | (h) $T(x_1, \dots, x_n) = (x_1, x_1 \cdot x_2, \dots, x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n)$ |

**Ejercicio 2.** Para cada una de las siguientes transformaciones lineales, caracterizar mediante ecuaciones el núcleo y la imagen de  $T$ , dar una base de cada uno de estos subespacios. Verificar que en todos los casos la dimensión del núcleo más la de la imagen es igual a la dimensión del espacio de salida. Decidir además cuáles de los siguientes vectores están en el núcleo o la imagen:

$$(-1, 1, 1), \quad (1, 2, -1), \quad (3, 1, 1), \quad (1, 1, 2), \quad (1, 1, -3).$$

- (a)  $T_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^5$  dada por  $T_1(x, y, z) = (x - y + z, x + y + 2z, 2x + 3y - 5z, 2x - y + z, 4x + 3y - z)$ .  
 (b)  $T_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por:  $T_2(x, y, z) = (x - y + z, -2x + 2y - 2z)$ .  
 (c)  $T_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por:  $T_3(x, y, z) = (-x + 2y + z, 2x - 4y - 2z, -3x + 6y + 3z)$ .  
 (d)  $T_4 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por:  $T_4(x, y, z) = (3x - 2y - z, 7x - 5y - 3z, -x - z)$ .  
 (e)  $T_5 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por:  $T_5(x, y, z) = (x - y + 2z, 3x + y + 4z, 5x - y + 8z)$ .

**Ejercicio 3.** Para cada una de las siguientes funciones de  $\mathbb{C}$  en  $\mathbb{C}$  decidir si son  $\mathbb{R}$ -lineales o  $\mathbb{C}$ -lineales.

- (a)  $T(z) = iz$ , (b)  $R(z) = \bar{z}$ , (c)  $S(z) = \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z)$ .

**Ejercicio 4.** Dada  $g \in C^1[0, 1]$ , sea  $T_g : C^1[0, 1] \mapsto C[0, 1]$  la función dada por  $T_g(f) = (fg)'$ .

- (a) Probar que  $T_g$  es lineal y hallar el núcleo de  $T_g$ .  
 (b) Describir explícitamente el núcleo de  $T_g$  en los casos  $g(x) = e^x$  y  $g(x) = x$  y hallar su dimensión.

Martes 4 de octubre

**Ejercicio 5.** Para cada una de las siguientes transformaciones lineales, caracterizar mediante ecuaciones el núcleo y la imagen de  $T$ , dar una base de cada uno de estos subespacios. Verificar que en todos los casos la dimensión del núcleo más la de la imagen es igual a la dimensión del espacio de salida. Decidir además cuáles de los siguientes vectores están en el núcleo o la imagen:

$$(-1, 1, 1), \quad (1, 2, -1), \quad (3, 1, 1), \quad (1, 1, 2), \quad (1, 1, -3).$$

- (a)  $T_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^5$  dada por  $T_1(x, y, z) = (x - y + z, x + y + 2z, 2x + 3y - 5z, 2x - y + z, 4x + 3y - z)$ .  
 (b)  $T_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por:  $T_2(x, y, z) = (x - y + z, -2x + 2y - 2z)$ .  
 (c)  $T_3 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por:  $T_3(x, y, z) = (-x + 2y + z, 2x - 4y - 2z, -3x + 6y + 3z)$ .  
 (d)  $T_4 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por:  $T_4(x, y, z) = (3x - 2y - z, 7x - 5y - 3z, -x - z)$ .  
 (e)  $T_5 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por:  $T_5(x, y, z) = (x - y + 2z, 3x + y + 4z, 5x - y + 8z)$ .

**Ejercicio 6.** Para cada una de las siguientes transformaciones lineales, caracterizar el núcleo y la imagen de  $T$ , dar sus dimensión y una base de cada uno de ellos. Verificar en todos los casos que la dimensión del núcleo más la dimensión de la imagen es igual a la dimensión del espacio de salida.

- (a)  $T : P_2 \rightarrow C[0, 1]$ ,  $T(ax^2 + bx + c) = (b - a)e^x + (c - a)e^{2x} + (b - c)e^{3x}$ .
- (b)  $T : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow P_5$ ,  $T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a - b)x^5 + (c + d)x^4 + (a + b)x^3 + (c + d)x^2 + (2b + 3c)x + 7a - 8b$ .
- (c)  $T : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $T \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + 3y - 2z + w & 7x - 6y + 2z - w \\ -2x + 6y - 4z + 2w & -11x + 13y - 6z + 3w \end{pmatrix}$ .
- (d)  $T : P_4 \rightarrow P_4$ ,  $T(p(x)) = p'(x)$ .
- (e)  $T : \mathbb{K}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $T(A) = \text{tr}(A)$ .
- (f)  $T : P_3 \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ ,  $T(ax^2 + bx + c) = \begin{pmatrix} a & b + c \\ b + c & a \end{pmatrix}$ .
- (g)  $T : P_3 \rightarrow P_4$ ,  $T(p(x)) = (x + 1)p(x)$ .

**Ejercicio 7.** Sea  $T : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$  la transformación lineal tal que

$$T(1, 0, 0) = (1, 0, i), \quad T(0, 1, 0) = (0, 1, 1), \quad T(0, 0, 1) = (i, 1, 0).$$

Decidir si  $T$  es un isomorfismo.

Jueves 6 de octubre

**Ejercicio 8.** En cada caso decidir si es posible dar una transformación lineal  $T$  de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^m$  que satisfaga las condiciones exigidas. Si existe, estudiar la unicidad; si no existe explicar por qué.

- (a)  $T(0, 1) = (1, 2, 0, 0)$ ,  $T(1, 0) = (1, 1, 0, 0)$ .
- (b)  $T(1, 1, 1) = (0, 1, 3)$ ,  $T(1, 2, 1) = (1, 1, 3)$ ,  $T(2, 1, 1) = (3, 1, 0)$ .
- (c)  $T(1, 1, 1) = (3, 2)$ ,  $T(1, 0, 1) = (1, 1)$ ,  $T(0, 1, 0) = (1, 0)$
- (d)  $T(0, 1, 1) = (1, 2, 0, 0)$ ,  $T(1, 0, 0) = (1, 1, 0, 0)$ .

**Ejercicio 9.** En cada caso definir, cuando sea posible, una transformación lineal  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  que satisfaga las condiciones exigidas. Cuando no sea posible explicar por qué no es posible.

- (a)  $\dim \text{Im } T = 2$  y  $\dim \text{Nu } T = 2$ .
- (b)  $(1, 1, 0) \in \text{Im } T$  y  $(0, 1, 1) \in \text{Nu } T$ .
- (c)  $(1, 1, 0) \in \text{Im } T$ ,  $(0, 1, 1), (1, 2, 1) \in \text{Nu } T$ .
- (d)  $\text{Im } T \subseteq \text{Nu } T$ .
- (e)  $\text{Nu } T \subseteq \text{Im } T$ .

**Ejercicio 10.**

- (a) Dar una transformación lineal  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que su imagen sea al subespacio generado por  $(1, 0, -1)$  y  $(1, 2, 2)$ . Hallar  $T(x, y, z)$ .
- (b) Definir una transformación lineal  $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $T(1, -1, 1, 1) = (1, 0)$  y  $T(1, 1, 1, 1) = (0, 1)$  y hallar  $T(x, y, z, w)$ .

- (c) Definir una transformación lineal  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$  tal que  $\text{Nu}(T) = \{(x, y, z) : z = 2x = y\}$  e  $\text{Im}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid b = a - c, b - d = a + c \right\}$ . Hallar  $T(x, y, z)$ .
- (d) Probar que no existe una transformación lineal  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$  tal que  $\text{Nu}(T) = \{(x, y, z) : z = 2x = y\}$  e  $\text{Im}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid b - d = a + c \right\}$ .

**Ejercicio 11.** Sea  $V$  un espacio vectorial y sea  $T : V \rightarrow V$  una transformación lineal.

- (a) Probar que  $\text{Nu}(T) \subseteq \text{Nu}(T^2)$ .
- (b) Probar que  $\text{Nu}(T) = \text{Nu}(T^2)$  si y sólo si  $\text{Nu}(T) \cap \text{Im}(T) = \{0\}$ .

**Ejercicio 12.** Sea  $V$  un espacio vectorial de dimensión  $n$  y sea  $T : V \rightarrow V$  una transformación lineal.

- (a) Probar que si  $n$  es impar entonces  $\text{Nu } T \neq \text{Im } T$ .
- (b) Sea  $n$  par. Dar un ejemplo de una transformación lineal  $T : V \rightarrow V$  tal que  $\text{Nu } T = \text{Im } T$ .