Práctico 6 – Integrales múltiples

1. Calcular las siguientes integrales iteradas.

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{0} dx \int_{1}^{2} (x^2y^2 + xy^3)\, dy.$

(b) $\displaystyle\int_{0}^{2} dy \int_{1}^{3} |x-2| \operatorname{sen} y\, dx.$

2. Calcular las siguientes integrales iteradas en los dos órdenes posibles.

(a) $\displaystyle\int_0^2 \int_1^{e^x} dydx.$ (b) $\displaystyle\int_{-2}^{1} \int_{x^2+4x}^{3x+2} dydx.$

3. Calcular $\displaystyle\int_0^2 \int_y^2 e^{x^2}\, dxdy.$ (Ayuda: grafique la región de integración).

4. Hacer un dibujo del conjunto B y calcular $\displaystyle\int_B f dA$, donde

(a) $f(x,y) = x^2 + 3y^2$, y B el disco $x^2 + y^2 \leq 1$. [R= π]

(b) $f(x,y) = \dfrac{1}{x+y}$, y B la región acotada por las rectas $y = x,\ x = 1,\ x = 2,$ $y = 0$. [R= $\log 2$]

(c) $f(x,y) = x \operatorname{sen} xy$, y B el rectángulo $0 \leq x \leq \pi,\ 0 \leq y \leq 1$. [R= π]

(d) $f(x,y) = x^2 - y^2$, y B consiste de todos los $(x,y):\ 0 \leq x \leq 1,\ x^2 - y^2 \geq 0$.

(e) $f(x,y) = x^2$, y B la región definida por $x > 0$, $x^2 + y^2 \leq 2$, $x^2 + y^2 \geq 1$, en los dos órdenes posibles.

5. Hallar el área del subconjunto de $\mathbb{R}^2$ acotado por

(a) $x^2 - 2x + 4y^2 - 8y + 1 = 0$. [R= 2π]

(b) $x = y^2,\ x = 2y - y^2$.

(c) $x = y - y^2,\ x + y = 0$.

6. Encontrar el volumen bajo el gráfico de f sobre la región B, donde

(a) $f(x,y) = x + y + 2$, y B la región acotada por las curvas $y^2 = x,\ x = 2$. [R= $\frac{128}{15}\sqrt{2}$]

(b) $f(x,y) = |x+y|$, y B el disco $x^2 + y^2 \leq 1$. [R= $\frac{4}{3}\sqrt{2}$]

7. Hallar el volumen del sólido cuya base es la región del plano xy acotada por la parábola $y = 4 - x^2$ y la recta $y = 3x$, y cuya tapa es el plano $z = x + 4$.

8. Calcular el volumen de la intersección entre los cilindros sólidos definidos por $x^2 + z^2 \leq 1$ y $y^2 + z^2 \leq 1$. [R= $\frac{16}{3}$]

9. Hallar el volumen del sólido cuya base es la región del plano xy acotada por el círculo $x^2 + y^2 = a^2$, y la tapa esta acotada por el paraboloide $az = x^2 + y^2$, con $a > 0$.

10. Hallar el volumen de los siguientes sólidos mediante una integral triple.

(a) El tetraedro acotado por el plano $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$, a, b, c positivos y los planos coordenados.

(b) La región en el primer octante limitada por el cilindro $x = 4 - y^2$ y los planos $z = y,\ x = 0,\ z = 0$.

(c) El elipsoide de semiejes a, b, c.

(d) El volumen común de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ y el cilindro $x^2 + y^2 = a^2$.

(e) El volumen acotado por la esfera $x^2+y^2+z^2=2$ y el paraboloide $z=x^2+y^2$.
(f) El volumen acotado por el cilindro $y=\cos x$ y los planos $z=y$, $x=0$, $x=\pi/2$, $z=0$.
(g) El volumen encerrado por las superficies $z=x^2+y^2$ y $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2+1)$.

11. Encontrar el área acotada por la lemniscata $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$, pasando a coordenadas polares. [R=a^2]

12. Hallar el volumen de la porción de esfera $r^2+z^2=a^2$ que está dentro del cilindro $r=a\operatorname{sen}\theta$ (r,θ,z son las coordenadas cilíndricas).

13. Hallar el volumen de los siguientes sólidos mediante coordenadas esféricas.
(a) El volumen que yace arriba del cono $z^2=x^2+y^2$ y debajo de la esfera $x^2+y^2+z^2=4z$.
(b) El volumen dentro de la esfera $x^2+y^2+z^2=2z$ y fuera del paraboloide $z=x^2+y^2$.

14. Sea $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definida por $(x,y)=T(u,v)=(u^2-v^2,2uv)$, y sea $R_{uv}=\{(u,v):u^2+v^2\leq 1,\ u,v\geq 0\}$.
(a) Graficar la región $R_{xy}=T(R_{uv})$.
(b) Calcular
$$\iint_{R_{xy}}\frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

15. Encontrar el volumen del sólido que es imagen de una bola de radio a bajo la aplicación lineal dada por la matriz
$$\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&2&5\\0&0&7\end{pmatrix}.$$

Ejercicios de repaso. Los ejercicios marcados con $\star$ son de mayor dificultad.

16. $\star$ Usando la definición de la integral doble como límite de sumas de Riemann, calcular $\int_B f(x,y)dxdy$, donde $f(x,y)=x+4y$ y $B=\{(x,y):0\leq x\leq 2,\ 0\leq y\leq 1\}$. [R= 6]

17. Hallar el volumen del sólido acotado por la esfera $x^2+y^2+z^2=4a^2$ y el paraboloide $az=x^2+y^2$, con $a>0$.

18. Calcular la integral de $f(x,y,z)=a$ sobre la semiesfera $x^2+y^2+z^2\leq 1$, $x\geq 0$. [R=$2/3\pi a$]

19. Calcular usando coordenadas cilíndricas $\displaystyle\iiint_{\substack{x^2+y^2\leq 1\\0\leq z\leq 1}} x^2\,dx\,dy\,dz.$

20. Utilizar una transformación lineal conveniente para calcular $\int_B f(x,y)dxdy$, donde $f(x,y)=\operatorname{sen}(x+2y)\cos(x-2y)$ y $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+2y=2\pi,\ x\geq 0,\ y\geq 0\}$.

21. Demuestre que la transformación $(x_1,\ldots,x_n)=T(u_1,\ldots,u_n)=(u_1,u_1+u_2,u_1+u_2+u_3,\ldots,u_1+\cdots+u_n)$ no cambia volúmenes.

22. Determinar si la integral está definida o no, y en caso afirmativo calcular su valor.
(a) $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\leq 1}\frac{dx\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

(b) $\displaystyle\iiint_{x^2+y^2+z^2\geq 1} \frac{dx\,dy\,dz}{xyz}$.

(c) $\displaystyle\iiint_C e^{-x-y-z}dx\,dy\,dz$, donde C es la columna infinita $\max(|x|,|y|) \leq 1,\ \ z \geq 0$.

23. Es sabido, aunque difícil de demostrar, que una primitiva de la función e^{-x^2} no puede expresarse en términos de las funciones elementales usuales. Esto dificulta el cálculo de $\displaystyle\int_a^b e^{-x^2}\,dx$. Sin embargo, el siguiente truco notable permite calcular de manera simple la integral impropia

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx.$$

(a) Observar que $I^2 = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$.

(b) Calcular la integral de (a) como límite de integrales en círculos utilizando coordenadas polares.

(c) Calcular $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-(x_1^2+\cdots+x_n^2)}dx_1\cdots dx_n$.

24. $\star$ Sea B la bola $\|\mathbf{x}\| \leq 1$ en $\mathbb{R}^n$. ¿Para qué valores de a existe $\displaystyle\int_B \frac{dV}{\|\mathbf{x}\|^a}$?

25. $\star$ (a) Sea B una bola de radio a con una densidad ρ en cada uno de sus puntos igual a la distancia del punto a un diámetro fijo. Encontrar la masa total de la bola. (Ayuda: calcular $\int_B \rho dV$ usando coordenadas esféricas).

(b) Sea B un cilindro de altura h y radio a con una densidad ρ en cada uno de sus puntos igual a la distancia del punto al eje del cilindro. Encontrar la masa total del cilindro.

26. $\star$ Se distribuye carga eléctrica en el disco unitario $x^2 + y^2 \leq 1$ de manera que la densidad de carga en (x, y) es $\sigma(x, y) = 1 + x^2 + y^2$. Encuentre la carga total del disco.

27. $\star$ Encuentre la masa y el centro de masa de la lámina que ocupa la región descrita D y que tiene la función densidad ρ indicada.

(a) D es la región triangular con vértices $(0, 0), (2, 1), (0, 3)$; $\rho(x, y) = x + y$.

(b) D es la región del primer cuadrante limitada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 1$; $\rho(x, y) = xy$.

28. $\star$ Hallar el centro de masa de la pirámide homogénea cuya base es el cuadrado delimitado por las rectas $x = 1,\ x = -1,\ y = 1,\ y = -1$, en el plano $z = 0$ y cuyo vértice está en el punto $(0, 0, 1)$.

29. $\star$ Una lámina ocupa la porción del disco $x^2 + y^2 \leq 1$ comprendida en el primer cuadrante. Encuentre su centro de masa si la densidad en cualquier punto es proporcional a su distancia al eje x.