PRODUCTO ESCALAR Y VECTORIAL

Definición 1. Sean $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ vectores en $\mathbb{R}^3$, con $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$. Se define el *producto vectorial entre* $\mathbf{x}$ *e* $\mathbf{y}$ por:

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \left(\det \begin{pmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{pmatrix}, -\det \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{pmatrix}, \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix}\right).$$

1. Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ y $\mathbf{z}$ vectores en $\mathbb{R}^3$ y $k \in \mathbb{R}$. Probar las siguientes propiedades:

(a) $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = -(\mathbf{y} \times \mathbf{x})$.

(b) $\mathbf{x} \times (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} \times \mathbf{y} + \mathbf{x} \times \mathbf{z}$.

(c) $k(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = k\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \mathbf{x} \times k\mathbf{y}$.

(d) $\mathbf{x} \times \mathbf{0} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{x} \times \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

(e) $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$.

Más aún, $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = \mathbf{y} \cdot (\mathbf{z} \times \mathbf{x}) = \mathbf{z} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y})$.

(f) $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = 0$, $\mathbf{y} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = 0$ (i.e. el vector $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ es perpendicular a $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$).

(g) $\mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{z})\, \mathbf{y} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})\, \mathbf{z}$.

(h) $||\mathbf{x} \times \mathbf{y}||^2 = ||\mathbf{x}||^2 ||\mathbf{y}||^2 - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2$.

(i) $||\mathbf{x} \times \mathbf{y}|| = ||\mathbf{x}||\, ||\mathbf{y}||\, \operatorname{sen}(\theta)$, donde θ es el ángulo entre $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ tal que $0 \leq \theta \leq \pi$. En otras palabras $||\mathbf{x} \times \mathbf{y}||$ mide el área del paralelogramo de lados $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

(j) Probar que el volumen del paralelepípedo de lados $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ está dado por $|\mathbf{z} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y})|$.

(k) $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \mathbf{0}$ si y sólo si $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ son paralelos.

2. Calcular.

(a) El área del triángulo de vértices $(1, 2)$, $(-1, 2)$, $(2, 4)$.

(b) El área del triángulo de vértices $(-2, 1, 3)$, $(1, 0, 3)$, $(5, 2, 3)$.

(c) El volumen del paralelepípedo de lados $\mathbf{x} = (2, 2, -1)$, $\mathbf{y} = (1, -2, 2)$, $\mathbf{z} = (1, -1, 1)$.

(d) El volumen del tetraedro de vértices $(1, 0, 0)$, $(5, -1, 2)$, $(-2, 3, 6)$ y $(3, 3, 4)$.

RECTAS Y PLANOS

Definición 2. Sea $n = 2$ ó 3 y sean $\mathbf{x_0}$, $\mathbf{x_1} \in \mathbb{R}^n$ fijos, con $\mathbf{x_1} \neq \mathbf{0}$. Definimos la recta que pasa por $\mathbf{x_0}$ y generada por el vector $\mathbf{x_1}$, al conjunto

$$L = \{\mathbf{z} = \mathbf{x_0} + t\mathbf{x_1} : t \in \mathbb{R}\} \qquad \text{(ecuación vectorial de la recta).}$$

Si $\mathbf{x_0} \neq \mathbf{0}$, ¿asegura esto que la recta L no pasa por el origen? Además, decimos que dos rectas son paralelas si sus generadores lo son, i.e. L es paralela a $L_1 = \{\mathbf{y_0} + t\mathbf{y_1} : t \in \mathbb{R}\}$ si $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{y_1}$ son vectores *colineales*.

3. Dar la ecuación vectorial de las siguientes rectas:

(a) Que pasa por $(-3, 0, 2)$ y es paralela a $(0, 3, -2)$.

(b) Que pasa por los puntos $(-1, 5, 4)$ y $(0, 3, -2)$.

(c) Definida por $x = 3t + 1$, $y = 5t - 2$, $z = 2t + 1$, con $t \in \mathbb{R}$.

(d) Que pasa por $(2, 0)$ y es ortogonal a $(1, 3)$.

(e) Que pasa por $(1, 3)$ y es paralela a la que pasa por $(-1, 4)$ y $(3, -2)$.

(f) Que pasa por $(2, 0, 0)$ y es ortogonal a $(1, 3, 0)$. ¿Es única?

Definición 3. Sean $\mathbf{x_0}$, $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2} \in \mathbb{R}^3$ tales que $\mathbf{x_1}$ y $\mathbf{x_2}$ no son colineales. Se llama plano que pasa por $\mathbf{x_0}$, generado por los vectores $\mathbf{x_1}$ y $\mathbf{x_2}$, al conjunto

$$P = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{y} = \mathbf{x_0} + t\mathbf{x_1} + s\mathbf{x_2} \text{ con } s, t \in \mathbb{R}\} \qquad \text{(ecuación vectorial del plano } P).$$

Para un plano P así definido, se dice que el plano P contiene al punto $\mathbf{x_0}$ y es paralelo a los vectores $\mathbf{x_1}$ y $\mathbf{x_2}$.

4. Dar la ecuación vectorial de los siguientes planos:
   (a) Generado por $(-1, 0, 4)$, $(2, 3, -10)$ que contiene al punto $(2, 3, -5)$.
   (b) Generado por $(-1, 0, 4)$, $(2, 3, -10)$ que pasa por $(3, -3, 6)$. ¿Pasa este plano por el origen?
   (c) Que pasa por $(1, -1, 0)$, $(1, 2, 1)$ y $(0, 1, 1)$.

5. Sea P el plano generado por $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2}$ y que pasa por $\mathbf{x_0}$, y sea $\mathbf{N} \neq \mathbf{0}$ un vector ortogonal a $\mathbf{x_1}$ y $\mathbf{x_2}$.
   (a) Probar que $\mathbf{x} \in P \iff (\mathbf{x} - \mathbf{x_0}) \cdot \mathbf{N} = 0$ (ecuación normal del plano).
   (b) Dar la ecuación normal del plano definido por
   $$P = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{y} = u(1, 2, 0) + v(2, 0, 1) + (1, 0, 0) \text{ con } u, v \in \mathbb{R}\}.$$
   (c) Dar la ecuación normal del plano que pasa por $(1, -1, 1)$, $(-2, 0, 1)$, y $(-1, 1, 1)$.

6. Sea P el plano definido implícitamente por la ecuación $ax + by + cz + d = 0$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ no simultáneamente nulos (ecuación general del plano).
   (a) Probar que $\mathbf{N} = (a, b, c)$ es un vector normal al plano.
   (b) ¿Qué condiciones debe cumplir d para que el plano P pase por el origen?
   (c) Dar la ecuación normal del plano definido por
   $$3x - y + 4z = 3.$$
   (d) Dar la ecuación general del plano que pasa por $(1, 1, 1)$ y es generado por $(0, -1, 2)$ y $(1, 0, 3)$.
   (e) Dar la ecuación vectorial del plano definido implícitamente por la ecuación $2x + 3y + z = 1$.

7. Sean P_1 y P_2 los planos definidos por las siguientes ecuaciones generales
$$x + 2y + 3z = 4, \qquad 3x + 2y + z = 0.$$
Describir paramétricamente a la intersección de P_1 y P_2.