Práctico 2 - Límites y continuidad

1. Para todo $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, demostrar las siguientes desigualdades:
(a) $|x_i| \leq \|(x_1, \ldots, x_n)\| \;\; \forall\, i = 1, \ldots, n$,
(b) $\|(x_1, \ldots, x_n)\| \leq \sqrt{n}\; \text{máx}\{|x_i|, i = 1, \ldots, n\}$,
(c) $\|(x_1, \ldots, x_n)\| \leq |x_1| + \cdots + |x_n|$.

2. Determinar si tienen límite en $t = 0$ las siguientes curvas:

$$\text{(a) } \gamma(t) = \left(\sqrt{t+3}, \frac{t-1}{t^2-1}, \frac{\tan(t)}{t}\right), \qquad \text{(b) } \gamma(t) = \left(\frac{t-\cos(t)}{t}, t^3, e^{-1/t^2}\right).$$

3. Demostrar, usando la definición, que:

$$\text{(a) } \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0, \qquad \text{(b) } \lim_{(x,y)\to(1,2)} (x+y^2) = 5.$$

4. Demostrar que si $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son funciones tales que $f \geq 0$, $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = 0$ y $|g(\mathbf{x})| \leq f(\mathbf{x})$ para todo $0 < ||\mathbf{x} - \mathbf{a}|| < r$ para algún $r > 0$, entonces $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

5. Determinar si tienen límite en $(0,0)$ las siguientes funciones, y en caso de respuesta afirmativa, calcularlo:

$$\text{(a) } f(x,y) = \frac{y^2}{x^4+y^2}, \qquad \text{(b) } f(x,y) = \frac{x^2}{|x|+|y|}, \qquad \text{(c) } f(x,y) = \frac{x}{|x|+|y|},$$

$$\text{(d) } f(x,y) = \frac{x^2}{x+y}, \qquad \text{(e) } f(x,y) = \frac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, \qquad \text{(f) } f(x,y) = \frac{(y^2-x)^3}{y^4+x^2}.$$

Ahora en $(0,0,0)$, para las siguientes funciones:

$$\text{(g) } g(x,y,z) = \frac{xy + yz^2 + xz^2}{x^2+y^2+z^4}, \qquad \text{(h) } g(x,y,z) = \frac{x^2y^2z^2}{x^2+y^2+z^2}.$$

6. Describir el dominio y el conjunto de puntos en los cuales no tienen límite las siguientes funciones:

$$\text{(a) } f(x,y) = \frac{x^2}{x+y}, \qquad \text{(b) } f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{\operatorname{sen}(x)} + y & \text{si } x \neq 0 \\ 2+y & \text{si } x = 0 \end{cases},$$

$$\text{(c) } f(x,y) = (y + \tan(x), \ln(x+y)), \qquad \text{(d) } f(x,y) = \left(\frac{1}{y^2+1}, \frac{x}{y^2-1}\right).$$

7. Estudiar la continuidad en el origen de las siguientes funciones:

$$\text{(a) } f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$\text{(b) } f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$\text{(c) } f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{|x^3|+|y^3|} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

$$\text{(d) } f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{e^x-1} & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

$$\text{(e) } f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{3xyz}{x^2+y^2+z^2} & \text{si } (x,y,z) \neq (0,0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}$$

(f) $f(x,y) = \begin{cases} \operatorname{sgn}\{(y-x^2)(y-2x^2)\} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$
donde $\operatorname{sgn}(t) = 1$ si $t \geq 0$ y $\operatorname{sgn}(t) = -1$ si $t < 0$.

(g) $f(x,y) = \begin{cases} x^2/y & \text{si } y > 0 \ \wedge \ x^2 \leq y, \\ y/x^2 & \text{si } y > 0 \ \wedge \ x^2 > y, \\ f(x,-y) & \text{si } y < 0, \\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ ó } y = 0. \end{cases}$

8. Determine el dominio y el conjunto de puntos en los cuales son continuas las siguientes funciones:

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$, (b) $f(x,y) = \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y}$,

(c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^3}{2x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$, (d) $f(\mathbf{x}) = \dfrac{||\mathbf{x}||}{1 - ||\mathbf{x}||^2}$,

(e) $f(x,y) = \left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2}, x^2 + y^2 \right)$, (f) $f(u,v) = (v + \tan(u), u + \operatorname{sen}(v), v)$.

9. En cada caso, decidir si es posible definir f en $(0,0)$ de manera que f resulte continua en $(0,0)$:

(a) $f(x,y) = \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$, (b) $f(x,y) = \left(\dfrac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, \dfrac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2} \right)$.

Ejercicios de repaso. Los ejercicios marcados con $\star$ son de mayor dificultad.

10. En cada caso determine el límite, si existe, o demuestre que no existe:

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x+y}$, (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$, (c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{xy-y}{(x-1)^2+y^2}$,

(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2 \operatorname{sen}^2(x)}{x^4+2y^4}$, (e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2}, (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2) \right)$

11. Describir el dominio, el conjunto de puntos que tienen límite y el conjunto de puntos donde son continuas las siguientes funciones:

(a) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x+y}$, (b) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+xy+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$,

(c) $f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^2+2e^xy^4}$, (d) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x-1)^3\cos(y)}{(x-1)^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (1,0) \\ 1 & \text{si } (x,y) = (1,0) \end{cases}$,

(e) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^3}{2x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$, (f) $f(x,y) = \left(x^2e^x, \operatorname{sen}(y), \dfrac{xy}{1+e^{x-y}} \right)$.

12. Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que tienda a cero si (x,y) se aproxima al origen a lo largo de cualquier recta, pero que no exista el límite cuando $(x,y) \to (0,0)$.

13. Probar que la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

es continua respecto de cada de una de las variables (es decir, fijando $x=x_0$ entonces $f(x_0,y)$ es continua con respecto a y, y fijando $y=y_0$ entonces $f(x,y_0)$ es continua con respecto a x), pero que f no es continua.

14. Determinar para qué valores de $r\in\mathbb{R}$ la siguiente función es continua en $\mathbb{R}^3$:

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\frac{(x+y+z)^r}{x^2+y^2+z^2} & \text{si } (x,y,z)\neq(0,0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y,z)=(0,0,0).\end{cases}$$

15. $\star$ Determinar si la siguiente función tiene límite en $(0,0)$:

$$f(x,y)=\frac{\operatorname{sen}(xy)}{|x-y|}.$$