

## Primer parcial - 27/09/2024

Nombre y apellido: Javier Vera

(20) 1. (20 pts.) Sean  $H, K$  y  $L$  subgrupos de un grupo  $G$  y supongamos que  $K \subseteq L$ . Probar que  $(HK) \cap L = (H \cap L)K$ .

(10) 2. (30 pts.) Sean  $G$  un grupo y sea  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ . Supongamos que  $a \in G$  es el único elemento de orden  $n$ . Probar que  $n = 2$  y  $a \in Z(G)$ .

3. (30 pts.) Determinar las clases de conjugación en  $S_7$  y en  $A_7$ . ¿Posee  $A_7$  elementos de orden 12?

(3) 4. (20 pts.) Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar en cada caso la respuesta.

3 (a) Los grupos  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  y  $\mathbb{Z}_4$  son isomorfos.

0 (b) Sean  $G_1, G_2$  grupos y sean  $H_1 \trianglelefteq G_1$ ,  $H_2 \trianglelefteq G_2$ . Si  $H_1 \cong H_2$  y  $G_1/H_1 \cong G_2/H_2$ , entonces  $G_1 \cong G_2$ .

1 (c)  $H = \{\text{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$  es un subgrupo normal de  $S_4$ .

0 (d) Sea  $f: G \rightarrow H$  un homomorfismo de grupos. Si  $G$  y  $H$  son finitos tales que  $(|G|, |H|) = 1$ , entonces  $f$  es el homomorfismo trivial.

$$2) a) \quad n = |a| = |a^{-1}|$$

$$\Rightarrow a = a^{-1}$$

$$\Rightarrow a^2 = e \quad \Rightarrow |a| = 2$$

b) sabemos por a)  $a^2 = e$   
único

$$(g a g^{-1})^2 = g a^2 g^{-1} \stackrel{(a)}{=} g g^{-1} = e$$

$$\Rightarrow g a g^{-1} = a \quad (a)$$

$$g a = a g \quad \Rightarrow a \in Z(G)$$

3)  $a \in G$   $C_a = \{g \in G \mid g a g^{-1} = a\}$  (Clase de conj)

$a \sim b \Leftrightarrow C_a = C_b \Leftrightarrow a$  y  $b$  son  
conj

$$\Leftrightarrow a = g b g^{-1}$$

$$C_{Id} = \{Id\}$$

$$C_{(12)} = \{(12)(13)(14)(15)(16)(17)(21)(23) \\ \text{y el resto de los b\u00edciclos}\}$$

$$C_{(123)} = \{(123)(134), \dots\}$$

;

$$C_{(1234567)} = \{\dots\}$$

$$C_{(12)(34)} = \{(12)(34), (34)(56), \dots\}$$

$$C_{(123)(45)}$$

;

$$C_{(12345)(67)}$$

.) son 12 formas de partir un conj  
de 7 elementos  
(recordar ciclos disj comutan)

$$4) c) S_4 = \langle (12)(23)(34) \rangle$$

y des pues a norma ver que es normal

$$b) \text{ Falso } \mathbb{Z}_4 / 2\mathbb{Z}_4 \cong \mathbb{Z}_2$$

$$d) G / \text{Ker } f \cong \text{Im } f \leq H \quad (\text{teo iso})$$

$$\Rightarrow |G / \text{Ker } f| \mid |H|$$

$$[G : \text{Ker } f] \mid |H|$$

$$\text{Ademas } [G : \text{Ker } f] \mid |G| \quad (\text{Lagrange})$$

$$\Rightarrow [G : \text{Ker } f] = 1$$

$$\Rightarrow G / \text{Ker } f = \{e\}$$

Solo hay un cosete

$$G = \bigcup_{g \in G / \text{Ker } f} g = \bar{e} = e \text{Ker } f \Rightarrow G = \text{Ker } f$$



