def $f: S_1 \to S_2$ diferenciable se dice difeomorfismo local en un punto $p \in S_1$, si existe un entorno abierto $V \subseteq S_1$ de p tq $f(V)$ es abierto en S_2 y $f: V \to f(V)$ es difeo

Prop S_1 y S_2 sup regulares y $f: S_1 \to S_2$ un mapa diferenciable tal que df_p es isomorfismo en un $p \in S_1$. Entonces f es difeo local en p

dem ejercicio usando $\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$ y usar teo func inversa en $\mathbb{R}^3$

Vector normal: dado $p \in S$ hay dos vectores unitarios normales al plano T_pS y una única recta normales que pasa por p

Se define el ángulo entre superficies que pasan por p como el ángulo entre sus planos tangentes (o rectas normales)

Dada $\varphi: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ (con $\varphi(U) \subseteq S$) una parametrización podemos definir $N: \varphi(U) \to \mathbb{R}^3$, $\varphi(U) \subseteq S$, $p \in \varphi(U)$ por

$$N(p) = \frac{\varphi_u(\varphi^{-1}(p)) \times \varphi_v(\varphi^{-1}(p))}{\|\varphi_u(\varphi^{-1}(p)) \times \varphi_v(\varphi^{-1}(p))\|}$$

$N(p)$ es normal unitario a S en p $\forall p \in \varphi(U)$

$\Rightarrow N: \varphi(U) \subseteq S \to \mathbb{R}^3$ es una función dif (pues $N \circ \varphi$ es dif) $N \circ \varphi(u,v) = \frac{\varphi_u(\varphi^{-1}(\varphi(u,v))) \times \varphi_v(\quad)}{\|\quad\|} = \frac{\varphi_u(u,v) \times \varphi_v(u,v)}{\|\quad\|}$ es dif

y $N(\varphi(U)) \subseteq S^2$ la esfera de radio 1 centrada en 0 (pues todos los vectores tienen norma 1) por ¿¿ está normalizado obs Podría no existir una función $N: S \to \mathbb{R}^3$ diferenciable que cumpla que $N(p) \perp T_pS$ $\|N(p)\| = 1$ $\forall p \in S$

Primera forma fundamental

Sea S una superficie regular y $p \in S$ el producto interno de $\mathbb{R}^3$ induce un producto interno en T_pS denotado $\langle , \rangle_p$, es decir, si $v, w \in T_pS \subseteq \mathbb{R}^3$ $\langle v, w \rangle_p = \langle v, w \rangle$ en $\mathbb{R}^3$
$\langle , \rangle_p$ es bilineal simétrica y def positiva en T_pS

Forma cuadrática asociada a $\langle , \rangle_p$

Def La forma cuadrática $I_p : T_pS \to \mathbb{R}$

$$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p = \|w\|^2_p \geq 0$$
$$w \in T_pS$$

es llamada primera forma fundamental de S en p

<u>obs</u> si se la forma cuadrática (norma) de todos los vectores puedo recuperar el prod interno

$$\langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x,y\rangle$$

$$\langle x,y\rangle = \frac{\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2}$$

Expresión I_p en coordenadas

Sea $\varphi: U \to S$ param, para cada $p \in \varphi(U)$ tomamos $w \in T_pS$ $(p = \varphi(q))$ $w = \alpha'(0)$ donde $\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$ $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ y $\alpha(0) = p = \varphi(q) = \varphi(u_0, v_0)$

$$w = u'(0)\varphi_u(q) + v'(0)\varphi_v(q) \quad \text{(regla cadena)}$$

$$\alpha'(t) = \varphi_u(u(t), v(t))u'(t) + \varphi_v(u(t), v(t))v'(t)$$

$$I_p(w) = \langle w,w\rangle_p = \langle w,w\rangle$$

$$= \langle u'(0)\varphi_u(q) + v'(0)\varphi_v(q), u'(0)\varphi_u(q) + v'(0)\varphi_v(q)\rangle$$

$$= u'(0)^2 \underbrace{\overbrace{\langle \varphi_u(q), \varphi_u(q)\rangle}^{=\|\varphi_u(q)\|^2}}_{E(q)} + 2u'(0)v'(0)\underbrace{\langle \varphi_u(q), \varphi_v(q)\rangle}_{F(q)}$$

$$+ v'(0)^2 \underbrace{\langle \varphi_v(q), \varphi_v(q) \rangle}_{G(q)}$$

$E, F, G : U \to \mathbb{R}$ son diferenciables y son los coeficientes de la primer forma fundamental

De ahora en adelante siempre que no haya confusión omitiremos el subíndice p en $\langle , \rangle_p$ o I_p

Ej 1- Si $p_0, w_1, w_2 \in \mathbb{R}^3$ y $\{w_1, w_2\}$ base ortonormal. El plano generado por w_1, w_2 que pasa por p_0 tiene param

$$\varphi(u,v) = p_0 + u w_1 + v w_2$$

$$\to \varphi_u(u,v) = w_1 \qquad \varphi_v(u,v) = w_2$$

$$E(u,v) = 1 \qquad F(u,v) = 0 \qquad G(u,v) = 1$$

$$\therefore W = a\,\varphi_u(q) + b\,\varphi_v(q) \to \|W\| = a^2 + b^2$$

supongo $u'(0) := a$ $\quad v'(0) := b$

$$p = \varphi(u_0, v_0) = \varphi(q) = I_p(w) = \|w\|^2 = a^2 + b^2$$

2 - En $C=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x^2+y^2=1\}$ consideremos

$U=(0,2\pi)\times\mathbb{R}$ y $\varphi: U\to C$

$\varphi(u,v)=(\cos u, \operatorname{sen} u, v)$

$\Rightarrow \varphi_u(u,v)=(-\operatorname{sen} u, \cos u, 0)$

$\varphi_v(u,v)=(0,0,1)$

$\Rightarrow E(u,v)=1$

$F(u,v)=0$

$G(u,v)=1$

3 - la esfera con para $\varphi: U\to S$

$U=(0,\pi)\times(0,2\pi)$

$\varphi(u,v)=(\operatorname{sen} u\cos v, \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \cos u)$

$\varphi_u(u,v)=(\cos u\cos v, \cos u \operatorname{sen} v, -\operatorname{sen} u)$

$\varphi_v(u,v)=(-\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v, \operatorname{sen} u\cos v, 0)$

$E(u,v)=1 \quad F(u,v)=0 \quad G(u,v)=\operatorname{sen}^2 u$

Si $p = \varphi(u_0, v_0) = \varphi(q)$

y $w = a\,\varphi_u(q) + b\,\varphi_v(q)$

$I_p(w) = \langle w, w \rangle_p$

$\Rightarrow \|w\|^2 = a^2 + b^2 \operatorname{sen}^2 u_0$

Dada $\varphi: U \to S$ sist de coord. Sea

$\alpha: J \to S$ regular tq $\alpha(J) \subseteq \varphi(U)$

la long de α entre t_0 y t 1era forma fundamental

$$S(t) = \int_{t_0}^{t} \|\alpha'(r)\|\, dr = \int_{t_0}^{t} \sqrt{I(\alpha'(r))}\, dr$$

(observar que esto vale para cualquier α no necesariamente contenida en $\alpha(U)$ φ ¡!

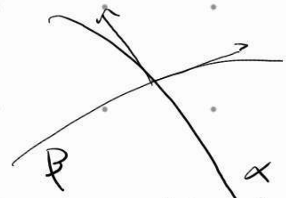
cuando $\alpha(J) \subseteq \varphi(U)$ tenemos que

$\alpha(r) = \varphi(u(r), v(r))$

$\alpha'(r) = u'(r)\,\varphi_u(u(r), v(r)) + v'(r)\,\varphi_v(u(r), v(r))$

$$\Rightarrow S(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{(u')^2 E + 2(u')(v') F + (v')^2 G}\, dr$$

·) Sean $\alpha: I \to S$ y $\beta: J \to S$ curvas tales que $\alpha(t_0) = \beta(s_0)$



entonces el ángulo entre $\alpha'(t_0)$ y $\beta'(s_0)$

$$\cos\theta = \frac{\langle \alpha'(t_0), \beta'(\overset{s}{\cancel{t}}_0) \rangle}{\|\alpha'(t_0)\| \|\beta'(\underset{s}{\cancel{t}}_0)\|}$$

en particular, si consideramos $\varphi: U \to S$ sist de coordenadas y

$$\left.\begin{array}{l} \alpha(u) = \varphi(u, v_0) \\ \beta(v) = \varphi(u_0, v) \end{array}\right\} \text{las curvas coordenadas}$$

$$\alpha(u_0) = \beta(v_0)$$

$$\alpha'(u) = \varphi_u(u, v_0) \qquad \beta'(v) = \varphi_v(u_0, v)$$

El ángulo θ entre las curvas coordenadas de la param $\varphi(u,v)$ es

$$\cos\theta = \frac{\langle \varphi_u(u_0,v_0), \varphi_v(u_0,v_0) \rangle}{\|\varphi_u(u_0,v_0)\| \|\varphi_v(u_0,v_0)\|}$$

$$= \frac{F(u_0,v_0)}{\sqrt{E(u_0,v_0)}\sqrt{G(u_0,v_0)}}$$

$\therefore$ las curvas coordenadas de una param son ortogonales sii $F(u,v)=0 \ \forall u,v$

tales param son llamadas param ortogonales

a) El área del paralelogramo generado por $\varphi_u(q)$, $\varphi_v(q)$ pq puedo evaluar en q !?

$$\|\varphi_u(q) \times \varphi_v(q)\|^2 = \|\varphi_u(q)\|^2 \|\varphi_v(q)\|^2 \operatorname{sen}^2\theta$$

$$= \quad '' \quad (1-\cos^2\theta)$$

$$= \|\varphi_u(q)\|^2 \|\varphi_v(q)\|^2 - \|\varphi_u(q)\|^2 \|\varphi_v(q)\|^2 \cos^2\theta$$

$$= E(q)G(q) - \cancel{E(q)}\cancel{G(q)} \frac{F^2(q)}{|\cancel{E(q)}||\cancel{G(q)}|}$$

$$>0$$

$$= E(q)G(q) - F^2(q)$$

$$\Rightarrow \|\varphi_u(q) \times \varphi_v(q)\| = \sqrt{E(q)G(q) - F^2(q)}$$

I

Áreas en superficies

Sea S superficie regular, una región $R \subseteq S$ es: Un abierto conexo, junto a su borde el cual es imagen de una circunferencia por un homeomorfismo diferenciable con derivada no nula salvo en una cantidad finita de puntos

Consideremos regiones acotadas contenidas en $\varphi(U)$ para alguna parametrización

$\varphi : U \to S$ $\quad R = \varphi(Q)$. Q región acotada en U

Def Dado $R \subseteq S$ región acotada contenida en $\varphi(U)$ para cierta carta $\varphi : U \to S$

Se define área de R por

$$A(R) = \iint_{Q = \varphi^{-1}(R)} \| \varphi_u \times \varphi_v \| \, du \, dv$$

(la suma de las áreas de los infinitamente pequeños paralelogramos)

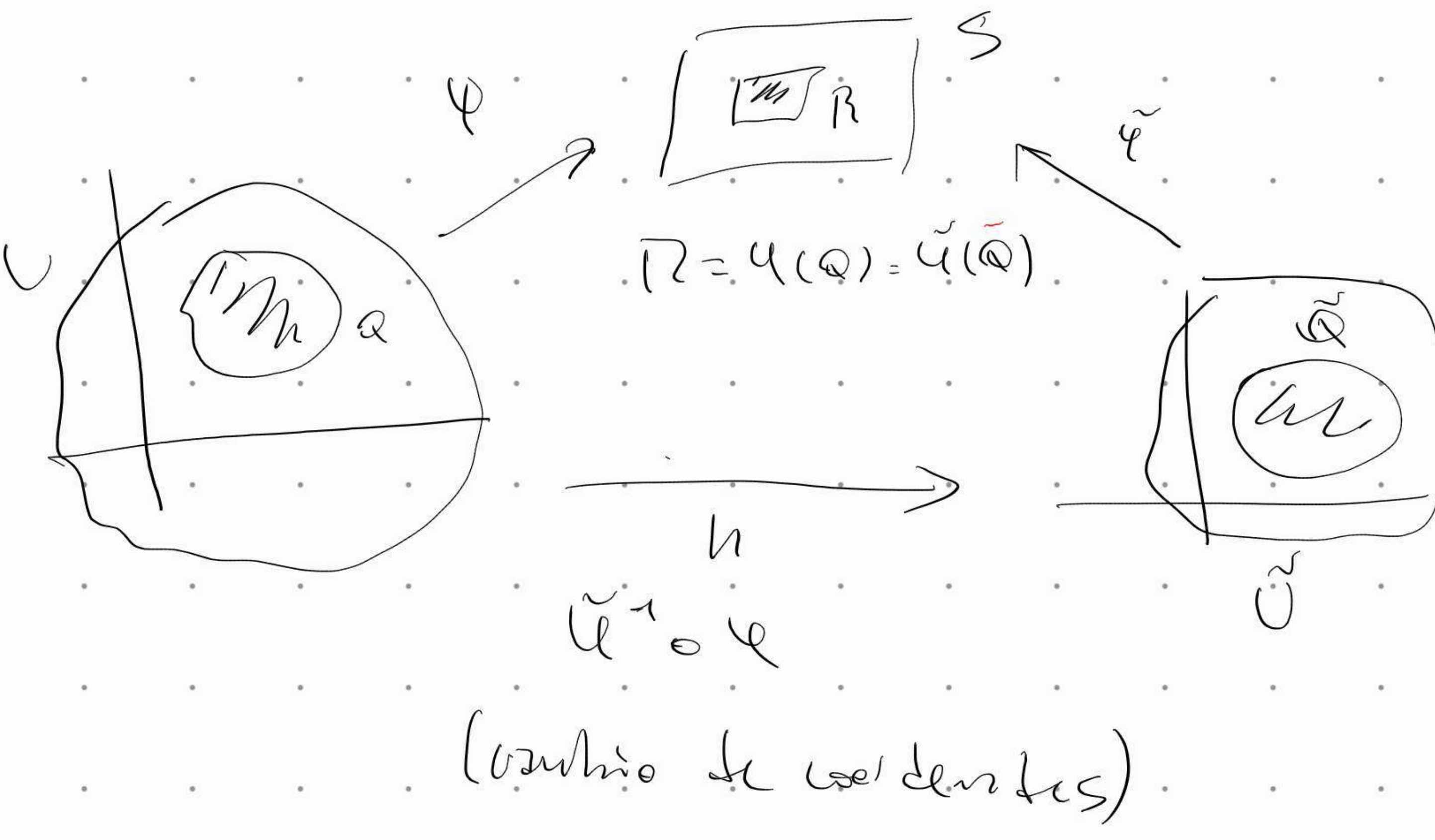
Prop $A(R)$ no depende del sistema de coordenadas elegido

antes de la prueba recordemos de Análisis III

Sea U un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $h: U \to \mathbb{R}^n$ dif tq $\det(dh_q) \neq 0$ $\forall q \in U$ y $h(U) \subseteq V$ abierto de $\mathbb{R}^n$

Sea A un conjunto cerrado y acotado de U con $h(A) = B$ y sea $f: V \to \mathbb{R}$ dif

$$\Rightarrow \int_A f \circ h \, |\det dh| = \int_{B = h(A)} f$$



$$A(B) = \iint_Q \|\varphi_u \times \varphi_v\|\, du\, dv$$

$$A(B) = \iint_{\tilde{Q}} \|\tilde{\varphi}_{\tilde{u}} \times \tilde{\varphi}_{\tilde{v}}\|\, d\tilde{u}\, d\tilde{v}$$

que são iguales

consideremos $h = \tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi = (h_1, h_2)$

$h(u,v) = \tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi(u,v) = (h_1(u,v), h_2(u,v))$

$\Rightarrow h(Q) = \tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi(Q) = \tilde{\varphi}^{-1}(B) = \tilde{Q}$

$\tilde{\varphi} \circ h = \varphi$ $\quad (\tilde{\varphi} \circ h(u,v) = \varphi(u,v))$

$$d\varphi = d_h\tilde{\varphi} \cdot dh = \left[\tilde{\varphi}_{\tilde{u}}(h), \tilde{\varphi}_{\tilde{v}}(h)\right] \begin{pmatrix} (h_1)_u & (h_1)_v \\ (h_2)_u & (h_2)_v \end{pmatrix}$$

otra form de verlo $\varphi' = \left(\tilde{\varphi}(x(u,v), y(u,v))\right)'$

$d\varphi_u = \frac{d\tilde{\varphi}(x,y)}{dx}\frac{dx}{du} + \frac{d\tilde{\varphi}(x,y)}{dy}\frac{dy}{du}$

con $x(u,v) = h_1(u,v)$

$\frac{\partial\varphi}{\partial h_1}(h_1,h_2) \cdot \frac{\partial h_1}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial h_2}\frac{\partial h_2}{\partial u}$

$$\varphi_u = \tilde{\varphi}_{\tilde{u}}(h)(h_1)_u + \tilde{\varphi}_{\tilde{v}}(h)(h_2)_u$$

Será $\tilde{u} = h_1$?!

$$\varphi_v = \varphi_{\tilde{u}}(h)(h_1)_v + \tilde{\varphi}_{\tilde{v}}(h)(h_2)_v$$

$$\Rightarrow \|\varphi_u \times \varphi_v\| = \|\tilde{\varphi}_{\tilde{u}}(h)(h_1)_u + \tilde{\varphi}_{\tilde{v}}(h)(h_2)_u \times \tilde{\varphi}_{\tilde{u}}(h)(h_1)_v + \tilde{\varphi}_{\tilde{v}}(h)(h_2)_v\|$$

$\circledast$

$$= |(h_1)_u(h_2)_v - (h_2)_u(h_1)_v|\, \|\tilde{\varphi}_{\tilde{u}}(h) \times \tilde{\varphi}_{\tilde{v}}(h)\|$$

$$= |\det(dh)|\, \|\tilde{\varphi}_{\tilde{u}}(h) \times \tilde{\varphi}_{\tilde{v}}(h)\|$$

$$A(R) = \iint_Q \|\varphi_u \times \varphi_v\| \, du \, dv$$

$$= \iint_Q |\det Dh| \, \|(\tilde{\varphi}_{\tilde{u}} \times \tilde{\varphi}_{\tilde{v}})(h)\| \, du \, dv$$

teorema anali III

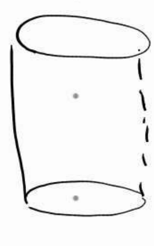
$$\overset{\Downarrow}{=} \iint_{h(Q)=\tilde{Q}} \|\tilde{\varphi}_{\tilde{u}} \times \tilde{\varphi}_{\tilde{v}}\| \, d\tilde{u} \, d\tilde{v}$$

$\Rightarrow$ No depende de param

Ejemplo: Calcular area cilindro

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2+y^2 = 1 \wedge 0 \le z \le 2\}$$

$$\varphi(u,v) = (\cos u, \operatorname{sen} u, v)$$
$$U = (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$$



dado $\varepsilon > 0$ consideremos

$\nearrow$ tomamos esto por la def de Área con $\varphi(B_\varepsilon)$ y pq φ no tiene

$$B_\varepsilon = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \varepsilon \le u \le 2\pi - \varepsilon, \; 0 \le v \le 2\}$$

Por eso no puedo tomar $B = \{ \dots \; 0 \le u \le 2\pi, \; 0 \le v \le 2\}$

$$\text{Area}(\varphi(B_\varepsilon)) = \iint_{B_\varepsilon} \|\varphi_u \times \varphi_v\| \, du \, dv$$

B no es área en una superficie

lo hicimos arriba

I

$$= \iint_{B_\varepsilon} \sqrt{\underset{1\cdot 1}{EG} - \underset{0}{F}^2}\, du\, dv$$

$$= \iint_{B_\varepsilon} 1 \, du\, dv = \text{Área}(B_\varepsilon)$$

$$= 2(2\pi - 2\varepsilon)$$

Cuando $\varepsilon \to 0$ tenemos

$$\text{Área}(C) = \lim_{\varepsilon\to 0} \text{Área}(\varphi(B)) = \lim_{\varepsilon \to 0} 2(2\pi - 2\varepsilon)$$

$$= 4\pi$$