Práctico 6

Variables continuas - Distribución Conjunta

1. Sea (X, Y) un vector aleatorio con densidad

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} c(x+1)y & \textbf{si } 0 < y < 1, \ -y < x < y \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   a) Hallar c.

   b) Calcular $P(Y \leq 2X)$.

   c) Hallar $f_X(x)$ y $f_Y(y)$

   d) ¿Son X e Y independientes?

2. Se elige aleatoriamente un punto del cuadrado unidad

$$U = \{(x,y)/\, 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}.$$

   Sean X e Y las coordenadas del punto elegido.

   a) Hallar y graficar la densidad conjunta de X e Y.

   b) Hallar y graficar la distribución conjunta de X e Y.

3. Sean X e Y variables aleatorias con densidad conjunta

$$f(x,y) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda y} & \text{si } 0 \leq x \leq y \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

   con $\lambda > 0$.

   a) Halle las densidades marginales de X e Y.

   b) Halle la distribución conjunta de (X, Y).

4. Sean X e Y variables aleatorias continuas con función de densidad conjunta f. Hallar la función de distribución y función de densidad conjuntas de $W = a + bX$ y $Z = c + dY$, con $b > 0$ y $d > 0$. Probar que si X e Y son independientes, entonces W y Z son independientes.

5. Sean X e Y variables aleatorias continuas con función de distribución conjunta F y función densidad conjunta f. Hallar la función de distribución y función de densidad conjuntas de $W = X^2$ y $Z = Y^2$. Probar que si X e Y son independientes, entonces W y Z son independientes.

6. Hallar la densidad de $Z = |Y - X|$ cuando:

   a) X e Y son independientes y uniformemente distribuídas en $(0, 1)$.

   b) X e Y son independientes y uniformemente distribuídas en (a, b).

7. Sean X e Y dos variables aleatorias con función de densidad conjunta dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} 24xy & \text{si} \quad 0 < x < 1,\ 0 < y < 1,\ 0 < x+y < 1 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

   a) Muestre que f es una función de densidad conjunta.

   b) Encuentre las densidades marginales de X e Y.

   c) Encuentre la función de densidad de $X+Y$.

   d) Calcule $P(2X+Y < 3/2)$.

8. Sean X e Y variables aleatorias independientes con densidad conjunta f. Hallar una fórmula para la densidad de $Z = XY$.

9. Supongamos que el tiempo que un estudiante tarda en resolver un problema tiene distribución exponencial de parámetro $\lambda > 0$. Si tenemos dos estudiantes, sean X e Y sus respectivos tiempos de demora. Podemos suponer que X e Y son independientes. Halle la probabilidad de que el primer estudiante demore al menos el doble que el segundo en resolver el problema.

10. Sean X e Y v. a. continuas tales que $Y \sim \Gamma(2,\lambda)$, $X|Y=y \sim \mathcal{U}(0,y)$.

   a) Hallar f_{XY} (la densidad conjunta) y f_X.

   b) Calcular $P(Y \geq 2 | X \leq 1)$ si $\lambda = 1$.

11. Sean X e Y v. a. tales que $Y \sim \mathcal{U}[2,3]$, y $X|Y=y$ es una v. a. discreta que satisfsface

$$p_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{3-y}{2} & \text{si } x = -1 \\ y-2 & \text{si } x = 0 \\ \frac{3-y}{2} & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

   a) Hallar p_X.

   b) Calcular la función de distribución $F_{Y|X=x}(y)$ y $P(\frac{3}{2} \leq Y \leq \frac{9}{4} | X = x)$.

12. El vector aleatorio (X,Y) tiene distribución Normal Bivariada si su densidad tiene la forma

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)\right]}$$

   Mostrar que $X|Y=y$ es Normal con parámetros $\mu_x + \rho\dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-\mu_y)$ y $\sigma_x^2(1-\rho^2)$.

13. Una empresa que fabrica concreto sabe que la distribución (por lotes) de la porosidad (X, en %) y el peso unitario (Y, en lb/pie^3) del concreto que produce es normal bivariada con parámetros $\mu_X = 20{,}2$, $\sigma_X = 5{,}4$, $\mu_Y = 109{,}2$, $\sigma_Y = 6$ y $\rho = -0{,}9$.

   a) Determinar la proporción de lotes de más de 25 % de porosidad.

   b) Sabiendo que el peso unitario de un lote es 111 lb/pie^3, hallar la probabilidad de que la porosidad sea de menos de 19,5 %.

14. Hallar la distribución de $Z = XY$ cuando $X \sim \chi^2(p)$ e $Y|X=x \sim \Gamma(n, \lambda x)$.

15. Sean X e Y variables aleatorias independientes, $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ e $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$. Sean $U = \frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ y $V = \frac{X-Y}{\sqrt{2}}$. Pruebe que U y V son variables aleatorias independientes $\mathcal{N}(0,1)$.

16. Sean X e Y variables aleatorias independientes con distribución uniforme en el intervalo $(0,1)$. Sean $R = \sqrt{2\ln\left(\frac{1}{1-X}\right)}$ y $\Theta = \pi(2Y-1)$.

    a) Pruebe que $\Theta \sim \mathcal{U}(-\pi,\pi)$ y que R tiene densidad Rayleigh, esto es

    $$f_R(r) = \begin{cases} re^{\frac{-r^2}{2}} & \text{si } r > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

    b) Sean $Z = R\cos(\Theta)$, $W = R\,\mathrm{sen}(\Theta)$. Pruebe que Z y W son variables aleatorias independientes con distribución $\mathcal{N}(0,1)$.

17. Sean X_1, X_2 y X_3 variables aleatorias independientes con distribución Uniforme en $[0,1]$.

    a) Calcule $P(X_1 < X_2 < X_3)$.

    b) Calcule $P(X_1 < X_2 < X_3 \,|\, X_3 < 0{,}5)$.

18. Sean X_1, X_2, X_3 las componentes de la velocidad de una molécula de gas. Supongamos que X_1, X_2 y X_3 son independientes y cada una tiene densidad $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$. En Física, la magnitud de velocidad $Y = \sqrt{(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2)}$ se dice que tiene distribución de Maxwell. Encuentre f_Y.

19. Sean X_1, X_2, X_3 variables aleatorias independientes uniformemente distribuídas en $(0,1)$. Hallar la densidad de la variable aleatoria $Y = X_1 + X_2 + X_3$. Hallar $P(X_1 + X_2 + X_3 \leq 2)$.

20. Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes, $X_i \sim \varepsilon(\lambda_i)$, $1 \leq i \leq n$. Muestre que $Y = \min\,(X_1, \ldots, X_n) \sim \varepsilon(\lambda)$, con $\lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$.