1) a) $\|f\|_\infty = \sup\{f(x) : x \in [0,1]\}$

$\Rightarrow \|f_n\| = 1$

en $L^1[0,1]$

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f| = \int_0^1 x^n = \left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

b) si fueran eq $\exists\, c, c' \in \mathbb{F}$ tq

$$c\|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_\infty \leq c'\|\cdot\|_1$$

pero usando $f_n = x^n$

$$c\|x^n\|_1 \leq \|x^n\|_\infty \leq c'\|x^n\|_1$$

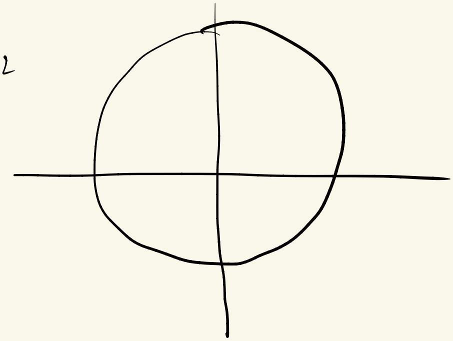
$$\frac{c}{n+1} \leq 1 \leq \frac{c'}{n+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{c}{n+1} \leq 1 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{c'}{n+1}$$

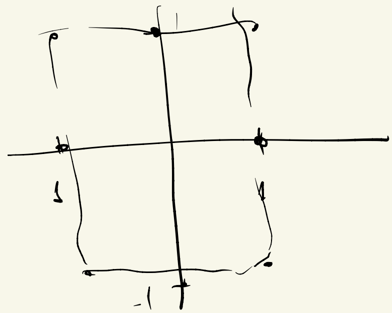
$0 \le 1 \le 0$ abs?

2.7

$\|\cdot\|_2$



$\|\cdot\| = |x| + |y|$



2.8 hipótesis (el a) es igual)

b)

$d(x_n, x_m) = \|x_n - x_m\| \le K \|x_n - x_m\|_1 = K d(x_n, x_m)$

Si x_n de cauchy en (X, d_1)

$\Rightarrow$ todo $\varepsilon > 0$ $d(x_n, x_m) \le \varepsilon$

$\forall n, m \ge n_0$

$\Rightarrow$ $d(x_n, x_m) \le \varepsilon$ $\forall n, m \ge n_0$

$\Rightarrow$ x_n de cauchy en (X, d)

2.10 Sea $x^n = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{}, --- \frac{1}{n}, 0, --)$

Afirmo

$x^n \to x_k = \frac{1}{k}$

Si fuera cierto $x \notin S$

$\Rightarrow S$ no es cerrado

Veamos $\|x^n - x\| \to 0$

dado $\varepsilon > 0$ como $\sum^{\infty} x_k^2 < \infty$

$\exists N_0 \,/\, \sum_{n=N_0+1}^{\infty} x_k^2 < \varepsilon$

$\|x^n - x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |x_k^n - x_k|^2 = \sum_{n=N_0+1}^{\infty} |x_k|^2$

$= \sum_{n=N_0+1}^{\infty} x_k^2 < \varepsilon$

$\Rightarrow \|x^n - x\| \to 0 \qquad x^n \xrightarrow{n \to \infty} x$

(2 iii) a) $\left\| \frac{n x}{2\|x\|} \right\| = \frac{n}{2} \frac{\cancel{\|x\|}}{\cancel{\|x\|}} < n$

$\Rightarrow \frac{n x}{2\|x\|} \in \{ y \in X \,/\, \|y\| < n \} \subset Y$

b) Sea $x \in X$. Sea

$\Rightarrow \frac{n x}{2\|x\|} \in Y$ (a)

$\Rightarrow \underbrace{\frac{\cancel{2\|x\|}}{\cancel{n}}}_{\in \mathbb{F}} \cdot \frac{\cancel{n} x}{\cancel{2\|x\|}} \in Y$ (subesp)

$\Rightarrow X = Y$ ($Y \subseteq X$ siempre)

c) 2.12 $\{x_n\} \subseteq T$ $\quad T = \{x \in X / \|x\| \leq 1\}$

tq $\tilde{x}_n \to \tilde{x}$

$$\Rightarrow \|\tilde{x} - x\| = \lim_{k\to\infty} \|\tilde{x}_n - x\| \leq \lim 1 = 1$$

b) $\|x_n - x\| = \|(1 - \frac{1}{n})x - x\|$

$$= \|-\frac{1}{n}x\|$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to 0} \|x_n - x\| = 0 \qquad x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$$

Sea $x \in T$ $\Rightarrow$ $x_n = (1 - \frac{1}{n})x$

cumple $x_n \to x$

y $\|x_n\| = \|x - \frac{x}{n}\| = (1 - \frac{1}{n})\|x\|$

$$< \|x\|$$

$\Rightarrow \{x_n\} \subset S$

$\Rightarrow x \in \overline{S}$ $\quad \Rightarrow T \subseteq \overline{S}$

i) Como $\overline{T}$ cerrado $\overline{T} \subseteq \overline{S}$

- $S \subseteq T \Rightarrow S \subseteq \overline{T} \to$ cerrado

$\Rightarrow \overline{S} \subseteq \overline{T}$
y cerrado

$\therefore \overline{S} = \overline{T}$

2) a) ($\Rightarrow$) Supongo $p \neq \infty$ que no es de Banach (contrarecíproco) para $C([0,1])$ lo pienso adentro de $L^p_{\mathcal{B}}[0,1]$ si $C[0,1]$ completo es cerrado

$$f_n = x^n \quad x_n \longrightarrow \tilde{x}(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

$$\|x_n - \tilde{x}\|_p^p = \int_0^1 |x_n - \tilde{x}|^p$$

$$= \int_0^1 |x_n|^p = \int_0^1 |x^n|^p$$

$$= \int_0^1 x^{np}$$

$$= \left.\frac{x^{np+1}}{np+1}\right|_0^1$$

$$= \frac{1}{np+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \|X_n - \tilde{X}\|_p^p = 0$$

$$\|X_n - \tilde{X}\|_p \to 0$$

y $\tilde{X} \notin C[0,1]$ $(\tilde{X} \in L^p_m[0,1])$

$(\Leftarrow)$ $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ qvq es banach

Sea $\{X_n\} \subset C[0,1]$ / $f_n \to f$

qvq f continua - todo $\varepsilon > 0$

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| \quad (*)$$

notar $\|f_n - f\|_\infty = \max_{x\in[a,b]}\{|f_n(x) - f(x)|\} < \frac{\varepsilon}{3}$

$\forall n \geq n_0$ pq $\|f_n - f\|_\infty \to 0$

$\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ $\forall n \geq n_0$ $\forall x$

(*) $\frac{\varepsilon}{3} + |f_n(x) - f_n(y)| + \frac{\varepsilon}{3}$ término

Como f_n continua $\exists\, \delta > 0$ $|x-y| < \delta_n$

$\Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$

(*) $\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$ ε

$\Rightarrow (C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ es

b) i) $C_b = \{f \in C(\mathbb{R}) : f$ acotada$\}$

está metido en $\mathcal{L}^\infty_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$

pq $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} \{f(x)\} < \infty$

pq f acotada

$\Rightarrow$ resta ver C_b cerrado

$f_n \to f \qquad \{f_n\} \subseteq C_b$ (esto vale en métricos)

$$\|f\|_\infty \leq \|f - f_n\|_\infty + \|f_n\|_\infty$$

$$\leq \underbrace{\varepsilon}_{\text{convergencia}} + \underbrace{M}_{f_n \text{ acotada}}$$

$\Rightarrow f \in C_b$

ii) misma idea $\quad f_n \to f$

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)|$$

$$\leq \underbrace{\frac{\varepsilon}{2}}_{\forall n \geq n_0} + \underbrace{\frac{\varepsilon}{2}}_{\forall x \,/\, |x| > n_1}$$

$\leq \varepsilon$ si $|x| > n_1$

$$\Rightarrow \quad f(x) \xrightarrow{x \to \pm\infty} 0$$

$$\Rightarrow \quad f \in C_0$$

(iii) Como f es periódico y continua

$\Rightarrow$ acotada

3)

$$L_x(f) + L_y(g)$$

$$f(z-x) + g(z-y)$$

$$L_{x+y}(f+g) = (f+g)(z-x-y)$$

$$= f(z-x-y) + g(z-x-y)$$

$$= g((z-x)-y) + f((z-y)-x)$$

$$= L_y(g) + L_x(f)$$

4) Ver que φ es $\mathbb{Q}$-lineal usando que es homo

a) $\forall q$ $\quad \frac{n}{m}\varphi(x) = \varphi\left(\frac{n}{m}x\right)$

b) Ver que si φ continua

$$\Rightarrow \varphi(x) = a x$$

$x \in \mathbb{R} \quad q_n \to x \quad q_n \in \mathbb{Q}$

$$\varphi(q_n) = \varphi(1\, q_n) \underset{(a)}{=} q_n\, \varphi(1) = a\, q_n \xrightarrow{n\to\infty} a x$$

$$\varphi(q_n) \xrightarrow{n\to\infty} \varphi(x)$$

↳ por continuidad

c) tomar base de $\mathbb{R}$ como $\mathbb{Q}$-ev

sigue cumpliendo homomorfismo

y ver que no cumple lo del b)

sol $\quad \varphi(b_1) = b_2 \quad$ {y el resto neutro base a base}

$\varphi(b_2) = b_1$

5) a) Por hip $(x, u-v) = 0 \quad \forall x \in X$

$(u-v, u-v) = 0$

(pi $\Rightarrow$ normado) $\Rightarrow \|u-v\|^2 = 0$

$\|u-v\| = 0$

$\therefore u-v = 0 \Rightarrow u = v$

b) $\langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow \overline{(y, x)} = 0$

$\Rightarrow (y, x) = 0$

$\|x+\alpha y\|^2 = (x+\alpha y, x+\alpha y)$

$= \|x\|^2 + \alpha(y, x) + \bar{\alpha}(x, y) + \|\alpha y\|^2$

$\|x-\alpha y\|^2 = (x-\alpha y, x-\alpha y)$

$= \|x\|^2 - \bar{\alpha}(x, y) - \alpha(y, x) + \|\alpha y\|^2$

$\Rightarrow \|x+\alpha y\| = \|x-\alpha y\| \Leftrightarrow (x, y) = 0$

$$\left\| \sum (x, e_n) e_n \right\|^2$$

$$\left(\sum (x, e_n) e_n , \sum (x, e_n) e_n \right)$$

$$= \sum \left((x, e_n) e_n , (x, e_n) \cdot e_n \right)$$

$$\left[(x, e_n) \overline{(x, e_n)} \right] (e_n, e_n)$$

$$\sum |$$

(6) Sea S subespacio vectorial del espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.

(a) S es denso si y sólo si $S^\perp = 0$.

(b) $\overline{S} = S^{\perp\perp}$.

(c) Si S es un subconjunto no vacío de $\mathcal{H}$ y $\langle S\rangle$ es el espacio generado por S, entonces $\overline{\langle S\rangle} = S^{\perp\perp}$

a) ($\Rightarrow$) Sea $a \in S^\perp$. como S denso y $a \in \mathcal{H}$ $\Rightarrow \exists\, s_n \to a$, $(s_n) \subseteq S$ → acá uso normado ⇒ métrico ⇒ tengo bolas para armar la sucesión

$\Rightarrow (s_n, a) = 0$

$\Rightarrow \lim (s_n, a) = 0$

$(\lim s_n, a) = 0$

$(a, a) = 0 \Rightarrow a = 0$

$\Rightarrow S^\perp = \{0\}$

($\Leftarrow$) $\overline{S} = S^{\perp\perp} = 0^\perp = \mathcal{H}$

$\Rightarrow S$ denso en $\mathcal{H}$

b) Veamos que $S \subseteq S^{\perp\perp}$

Sea $x \in S \Rightarrow (x, y) = 0 \quad \forall y \in S^\perp$

$\Rightarrow x \in (S^\perp)^\perp$

como $S^{\perp\perp}$ es cerrado $\Rightarrow \overline{S} \subseteq S^{\perp\perp}$

c) Usamos $\overline{S}$ subesp cerrado

$\Rightarrow \overline{S} = S^{\perp\perp}$

por lo tanto en este ej

$\overline{S} = S^{\perp\perp}$

$S \subseteq \bar{S} \Rightarrow S^{\perp} \supseteq \bar{S}^{\perp}$

$\Rightarrow S^{\perp\perp} \subseteq \bar{S}^{\perp\perp} = \bar{S}$ teo

$\square$

c) $(\subseteq)$ el generado por S es subesp vectorial

$\Rightarrow$ por b) $\overline{\langle S \rangle} = \langle S \rangle^{\perp\perp}$

pero $x \in \langle S \rangle \Rightarrow x = \sum \lambda_i x_i \quad x_i \in S$

$\Rightarrow (x, s) = \sum \lambda_i (x_i, s) =$

$\forall s \in S^{\perp}$

pq $x_i \in S$

$\Rightarrow x \in S^{\perp\perp}$

$\Rightarrow \overline{\langle S \rangle} \subseteq S^{\perp\perp}$

$(\supseteq)$ Misma idea S subesp vect de H cerrado

$\Rightarrow S = S^{\perp\perp}$

$\Rightarrow \overline{\langle S \rangle} = \overline{\langle S \rangle}^{\perp\perp}$

$$S \subseteq \langle S \rangle \subseteq \langle \overline{S} \rangle \Rightarrow S^{\perp} \supseteq \langle \overline{S} \rangle^{\perp}$$

$$\Rightarrow S^{\perp\perp} \subseteq \langle \overline{S} \rangle^{\perp\perp}$$

$$= \langle \overline{S} \rangle$$

(7) Sea $\mathcal{P}$ un pre-Hilbert. Si $S \subset \mathcal{P}$ no vacío, entonces

(a) $S \subset (S^{\perp})^{\perp} \doteq S^{\perp\perp}$.

(b) $S^{\perp\perp\perp} = S^{\perp} = (\overline{S})^{\perp}$.

(c) $S \cap S^{\perp} \subset \{0\}$.

a) $x \in S \quad (x, y) = 0 \quad \forall y \in S^{\perp}$

$\Rightarrow x \in (S^{\perp})^{\perp}$

b) I (2) $S \subset S^{\perp\perp} \Rightarrow S^{\perp} \supseteq S^{\perp\perp\perp}$

$(\subseteq)$ Sea $A = S^{\perp\perp}$, $x \in S^{\perp\perp\perp} = A^{\perp}$

$\Rightarrow (x, y) = 0 \quad \forall y \in A$

$B = S^{\perp} \qquad \Rightarrow (x, y) = 0 \quad \forall y \in (B)^{\perp}$

$\Rightarrow x \in B = S^{\perp}$

$\Rightarrow S^{\perp\perp\perp} \subseteq S^{\perp}$

(II) ($\supseteq$) $S \subseteq \bar{S} \Rightarrow S^{\perp} \supseteq \bar{S}^{\perp}$

($\subseteq$) $x \in S^{\perp} \Rightarrow (x, y) = 0 \quad \forall y \in S$

Sea $\bar{y} \in \bar{S} \Rightarrow \{x_n\} \subseteq S \ / \ x_n \longrightarrow \bar{y}$

$(x_n, x) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow (\bar{y}, x) = 0 \quad (\forall \bar{y} \in \bar{S})$

$\Rightarrow x \in \bar{S}^{\perp}$

c) $x \in S \cap S^{\perp} \Rightarrow x \in S$

$\Rightarrow (x, y) = 0 \quad \forall y \in S^{\perp}$

pero $x \in S^{\perp} \Rightarrow (x, x) = 0$

$\Rightarrow x = 0$

(8) Sea A un subconjunto de un EV X. Probar que $2A \neq A + A$ pero que la igualdad vale si A es convexo.

$A = \{0,1\} \cup [2,3]$ $\quad X = \mathbb{R}$ $\quad$ como $\mathbb{R}$ ev

$6 \in 2A$ pq $6 = 2.3$

$6 \notin A + A$ $\quad 6 \neq a + a' \quad \forall a, a' \in A$

$\cdot)$ $2A \subseteq A + A$ siempre pq $x \in 2A$

$\Rightarrow x = 2a = a + a$

$(\supseteq)$ $a \in A + A \Rightarrow a = \underset{\in A}{x} + \underset{\in A}{y}$

como A convexo $(1-t)x + ty \in A \quad \forall t \in [0,1]$

$$\frac{x+y}{2} \in A \quad \text{(usando } t = \tfrac{1}{2}$$

$$x + y = 2\underbrace{\left(\frac{x+y}{2}\right)}_{\in A} \in 2A$$

⑨

(1) $\|f\|_\infty < 1 \Rightarrow f \notin S$

Sea $\|f\|_\infty < 1 \Rightarrow |f(x)| < 1 \quad (-1 < f(x) < 1)$

$$\cdot) \; -\frac{1}{2} < \int_0^{1/2} f \leq \frac{1}{2}$$

$$\cdot) \; -\frac{1}{2} < \int_{1/2}^{1} f < \frac{1}{2}$$

$$-1 < \int_0^{1/2} f - \int_{1/2}^{1} f < 0 \Rightarrow f \notin S$$

Luego si $f \in S$ $\|f\|_\infty \geq 1$

(2) $\|f\|_\infty = 1 \Rightarrow \|f\|_\infty > 1$

$\Rightarrow$ Si $f \in S$ $\|f\|_\infty > 1$

$\Rightarrow 1$ no es mínimo

Construyo $f_r \in S$ / $\|f_r\|_\infty = 1 + \delta$

$\Rightarrow 1$ es ínfimo

$A = \{\|f\|_\infty : f \in S\}$ que $1 = \inf A$

(11) (a) Sea $\mathcal{N}$ normado. Probar que la bola unidad (abierta o cerrada) es convexa.

(b) Consideremos $L^p(\mathbb{R}^n)$ con la medida de Lebesgue. Probar que, para $1 < p < \infty$ la bola unidad es estrictamente convexa.

a) Sean $a, b \in B(0,1) \Rightarrow \|a\| < 1 \wedge \|b\| < 1$

$\|(t-1)a + tb\| \leq (t-1)\|a\| + t\|b\|$

$* < 1(t-1) + 1t = 2t - 1 \quad t \in [0,1]$

para la bola cerrada $\leq$

≤ 1

$\Rightarrow \|\operatorname{Im} \varphi\| \leq 1$

$\operatorname{Im} \varphi \subseteq B(0,1) \Rightarrow$ convexa

b) $\|(t-1)a - tb\| = (t-1)\int_{\mathbb{R}^n} a - t\int_{\mathbb{R}^n} b$

$=$