Práctico 7 – Campos Vectoriales

1. Graficar los siguientes campos vectoriales:
(a) $F(x,y) = (1,x)$, con $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
(b) $F(x,y) = (-x,y)$, con $x^2+y^2 \leq 4$.
(c) $F(x,y) = (y,x)$, con $x^2+y^2 \leq 4$.
(d) $F(x,y) = \left(\frac{1}{x^2+y^2}, \frac{1}{x^2+y^2}\right)$, con $x^2+y^2 \leq 4$.

2. Encontrar la longitud de las siguientes curvas:
(a) $\gamma(t) = (t, \ln(\cos(t)))$, con $0 \leq t \leq 1$.
(b) $y = x^{3/2}$, con $0 \leq x \leq 5$.
(c) $x^2+y^2 = r^2$, con $0 < r < \infty$.

3. Calcular las siguientes integrales de línea:
(a) $\displaystyle\int_\gamma (x+y)dx + dy$, donde $\gamma(t) = (t,t^2)$, con $0 \leq t \leq 1$.
(b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{dx+dy}{x^2+y^2}$, donde $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$, con $0 \leq t \leq 2\pi$.
(c) $\displaystyle\int_\gamma F \cdot \mathrm{d}\,\mathbf{x}$, donde $F(x,y,z,w) = (x,x,y,xw)$ y $\gamma(t) = (t,1,t,t)$, con $0 \leq t \leq 2$.

4. Determine si F es un campo conservativo o no. En caso de serlo, encuentre una función f tal que $F = \nabla f$.
(a) $F(x,y) = (x^2-4y)\mathbf{i} + (2y-3x)\mathbf{j}$.
(b) $F(x,y) = (e^{2x} + x\operatorname{sen} y, x^2\cos y)$.
(c) $F(x,y,z) = z\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} + (x+y^2)\mathbf{k}$.
(d) $F(x,y,z) = (\cos y, \operatorname{sen} x, \tan z)$.
(e) $F(x,y,z) = (y,x,xyz)$.

5. (a) Calcular las siguientes integrales de línea:
(i) $\displaystyle\int_\gamma xydx + (y^2-x^2)dy$, donde γ consiste en dos arcos de parábola: $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$, con $0 \leq x \leq 1$.
(ii) $\displaystyle\int_\gamma xy(ydy - xdx)$, donde γ es la frontera del semidisco $x^2+y^2 \leq R^2$, $x \geq 0$.
(b) Usar Green para verificar el resultado hallado en (a).

6. (a) Sea D una región simple que es el interior de una curva cerrada y suave a trozos γ, orientada en sentido anti-horario. Si $A(D)$ unidades cuadradas es el área de D, demostrar que

$$A(D) = \frac{1}{2}\int_\gamma -ydx + xdy.$$

(b) Usar (a) para calcular el área de la región limitada por la hipocicloide de cuatro puntas (llamada *astroide*) cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$x = a\cos^3(t), \qquad y = a\operatorname{sen}^3(t),$$

donde $a > 0$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

7. Mostrar que las siguientes integrales son nulas cualquiera sea la curva cerrada γ.
(a) $\displaystyle\int_\gamma (\operatorname{sen} x + 4xy)dx + (2x^2 - \cos y)dy$, (b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2}$ donde γ no rodea al origen.

8. Evaluar las siguientes integrales de línea usando el método que parezca más sencillo.

(a) $\displaystyle\int_\gamma e^x \cos y dx + e^x \operatorname{sen} y dy$, γ es el triángulo de vértices $(0,0), (1,0), (1,\pi/2)$, recorrido en sentido anti-horario.

(b) $\displaystyle\int_\gamma (x^2 - y^2)dx + (x^2 + y^2)dy$, γ es el círculo de radio 1 y centro $(0,0)$, recorrido en sentido horario.

9. Demostrar que las siguientes identidades valen para cualquier campo vectorial F o campo escalar f, ambos de clase $\mathcal{C}^2$ sobre un abierto D de $\mathbb{R}^3$.

(a) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = 0$. (b) $\operatorname{rot}(\nabla f) = \mathbf{0}$.

10. (a) Demostrar que si $f(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$ entonces $\operatorname{div}(\nabla f)(x,y,z) = 0$, para todo $(x,y,z) \neq (0,0,0)$.

(b) Demostrar mediante un ejemplo que es posible que $\operatorname{div}(\nabla f) \neq 0$, para algún campo escalar f de clase $\mathcal{C}^2$.

11. (a) Encontrar el área de la rampa espiral dada por $g(u,v) = (u\cos v, u \operatorname{sen} v, v)$, $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 3\pi$. [R=$3\pi/2\left(\sqrt{2} + \log\left(1 + \sqrt{2}\right)\right)$]

(b) Supongamos que la superficie de la parte (a) tiene densidad, por unidad de área, en cada punto igual a la distancia de cada punto al eje central de la superficie. Encontrar la masa total de la superficie.

12. Verificar el Teorema de Stokes para el campo

$$F(x,y,z) = (y^2 + z^2, x^2 + z^2, x^2 + y^2),$$

y la superficie S con borde C.

$$S: \quad \begin{array}{ccc} z = \sqrt{1-x^2}, & -1 \leq x \leq 1, & -2 \leq y \leq 2, \\ y = 2, & 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2}, & -1 \leq x \leq 1, \\ y = -2, & 0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2}, & -1 \leq x \leq 1. \end{array}$$

$$C: \quad \begin{array}{cc} z = 0, & \\ x = \pm 1, & -2 \leq y \leq 2, \\ y = \pm 2, & -1 \leq x \leq 1. \end{array}$$

13. Sean $\phi(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$, $F = \nabla\phi$, y V la región dada por $1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4$. Si $1 < a < 2$, y C es el círculo $z = 0$, $x^2 + y^2 = a^2$, mostrar que $\oint_C F \cdot \mathrm{d}\,\mathbf{x} = 0$.

(a) Por cálculo directo.

(b) Aplicando el Teorema de Stokes con S el hemisferio $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 \leq a^2$.

14. Verificar el Teorema de la divergencia para el cubo con centro en el origen y cuyas caras son los planos $x = \pm 1$, $y = \pm 1$, $z = \pm 1$, y para los siguientes campos:

(a) $F(x,y,z) = (2,3,4)$, (b) $F(x,y,z) = (x-y, y-z, x-y)$.

15. Usar el Teorema de Gauss para calcular $\int_S F \cdot \mathrm{d}\,S$, sobre la esfera de radio 1 y centro en el origen de $\mathbb{R}^3$ con normal hacia afuera, si F es

(a) $F(x,y,z) = (x^2, y^2, z^2)$, (b) $F(x,y,z) = (xz^2, 0, z^3)$.

16. Demostrar que si R es una región para cual el Teorema de Gauss es válido, entonces el volumen de R es

$$V(R) = \frac{1}{3}\int_{\partial R} xdydz + ydzdx + zdxdy.$$

Práctico 7 – Campos Vectoriales

Ejercicios de repaso. Los ejercicios marcados con $\star$ son de mayor dificultad.

17. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una función definida para $a \leq t \leq b$. Si las funciones coordenadas de f son $f_1, \ldots, f_n$, podemos definir la integral de f sobre $[a, b]$ como

$$\int_a^b f(t)\, dt = \left(\int_a^b f_1(t)\, dt, \ldots, \int_a^b f_n(t)\, dt \right).$$

(a) Si $f(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t))$, para $0 \leq t \leq 2\pi$, calcular $\int_0^{2\pi} f(t)\, dt$.
(b) Si $f(t) = (t, t^2, t^3)$, para $0 \leq t \leq 1$, calcular $\int_0^1 f(t)\, dt$.

18. $\star$ Sea γ una curva continuamente diferenciable con puntos extremos $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$. Pruebe que $l(\gamma) \geq \|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|$, y por lo tanto probar que la curva más corta que une dos puntos es el segmento.

19. Supongamos que la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ satisface la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

sobre una región simple D que es el interior de una curva cerrada y suave a trozos γ, orientada en sentido anti-horario. Demostrar que $\displaystyle\int_\gamma \frac{\partial f}{\partial y} dx - \frac{\partial f}{\partial x} dy = 0.$

20. Sean $h(x, y, z) = x + y + z$, y S la porción del plano $z = 2x + 3y$ para la cual $x \geq 0, y \geq 0$ y $x + y \leq 2$.

(a) Calcular $\displaystyle\int_S h\, d\sigma$, proyectando σ dentro del plano xy. Dibujar la proyección.
(b) Calcular $\displaystyle\int_S h\, d\sigma$, proyectando σ en el plano yz. Dibujar la proyección y sus bordes.

21. Verificar el Teorema de Stokes para el campo $F(x, y, z) = (y^2 + z^2, x^2 + z^2, x^2 + y^2)$, y las siguientes superficies S con borde C.

(a) S es la superficie de la parte superior del cubo con un vértice en $(1, 1, 1)$, centro en el origen y lados paralelos a los ejes, y C la curva intersección de S con el plano xy.
(b) La superficie S es como en (a), con un agujero en la cara de arriba de forma circular cuyas coordenadas cilíndricas satisfacen: $z = 1,\ 0 \leq r \leq \cos\theta,\ -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$.

22. Comparar ambas integrales

$$\int_R \operatorname{div} F\, dV \quad \text{y} \quad \int_S F \cdot \mathrm{d}\, S,$$

siendo $F(x, y, z) = (x + y, y + z, z + x)$, y donde S acota la región R dada por
(a) $0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2, \quad 0 \leq x^2 + y^2 \leq 4$.
(b) $-4 + x^2 + y^2 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2, \quad 0 \leq x^2 + y^2 \leq 4$.
(c) $0 \leq x^2 + y^2 \leq 9, \quad 0 \leq z \leq 5$.
(d) $0 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$.

23. $\star$ **Paradoja de la Pintura.** Consideremos la superficie de revolución S_ϵ, que resulta de hacer girar alrededor del eje de las z la curva en el plano zy, $z = -\frac{1}{y}$, para $0 < \epsilon \leq y \leq 1$.

(a) Calcular, usando coordenadas cilíndricas, el volumen encerrado por S_ϵ.
(b) Calcular el área de S_ϵ. (Si no sale la integral propiamente dejarla indicada).
(c) Para los resultados obtenidos en (a) y (b), hacer tender ϵ a cero. Notemos con lo obtenido que este sería un recipiente que se lo podría llenar de pintura pero no se lo podría pintar.

24. $\star$ Encuentre el trabajo realizado al mover una partícula a lo largo de la curva $\gamma(t) = (t, t, t^2)$, con $0 \leq t \leq 2$, bajo la influencia del campo $F(x, y, z) = (x + y, y, y)$.

25. $\star$ Encontrar la masa total de cable $(x, y, z) = (6t^2, \sqrt{32}t^3, 3t^4)$, con $0 \leq t \leq 1$:
(a) si la densidad en el punto correspondiente a t es t^2,
(b) si la densidad a s unidades del origen medida a lo largo de la curva es $s + 1$,
(c) si la densidad en cualquier punto es su distancia al origen de $\mathbb{R}^3$.

26. $\star$ Sea $f(t) = (t, t^2, t^3)$, para $0 \leq t \leq 1$.
(a) Hacer un esquema de la curva que describe f, y la recta tangente en $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$.
(b) Encuentre $\|f'(t)\|$.
(c) Si consideramos a f definida en todos los reales, calcular todos los t para los cuales la recta tangente a la curva en $f(t)$ es paralela al vector $(4, 4, 3)$. ¿ Hay algún punto t para el cual la recta tangente a la curva en $f(t)$ es perpendicular al vector $(4, 4, 3)$?

27. $\star$ Supongamos que la temperatura de cada (x, y, z) de una región R esta dada por una función continuamente diferenciable $T(x, y, z)$. El campo vectorial ∇T, llamado el **gradiente de temperatura**, bajo ciertas condiciones físicas es proporcional a la dirección y a la tasa del flujo de la temperatura por unidad de área en (x, y, z).
(a) Si $T(x, y, z) = x^2 + y^2$ para $x^2 + y^2 \leq 4$, encontrar la tasa del flujo de la temperatura a lo largo de la superficie cilíndrica $x^2 + y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$.
(b) Dar un ejemplo de un campo vectorial continuamente diferenciable que no sea un gradiente de temperatura.