1	2	3	4	5	6	7	8

Calif.

Apellido y Nombre:

Condición: Libre Regular

Algebra III - Final

28 de julio de 2022

Justificar todas las respuestas. No se permite el uso de dispositivos electrónicos.
Todos los resultados teóricos utilizados deben ser enunciados apropiadamente; en caso de utilizar resultados teóricos no dados en clase, los mismos deben demostrarse. Para aprobar se debe tener como mínimo 15 pts. en la parte teórica y 30 pts. en la parte práctica.

Parte Teórica (30 pts.)

1. (14 pts) Enunciar y demostrar el Teorema de Descomposición Prima.

2. (12 pts) Enunciar con precisión y demostrar el teorema que garantiza la existencia de transformaciones lineales adjuntas en espacios vectoriales producto interno.

3. Determinar si cada una de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando en cada caso la respuesta dada.

   (a) (3 pts) Para cada transformación lineal $T : V \to V$, donde $\dim V < \infty$, y cada subespacio T-invariante $W \subseteq V$, el polinomio minimal de $T_{|W}$ divide al polinomio minimal de T.

   (b) (3 pts) Si una transformación lineal $T : V \to V$, donde $\dim V < \infty$, es tal que T^2 tiene un vector cíclico, entonces T también tiene un vector cíclico.

   (c) (3 pts) Sean V un espacio vectorial de dimensión finita, $T : V \to V$ una transformación lineal. Todo subespacio T-invariante tiene un subespacio complementario T-invariante.

Parte Práctica (70 pts.)

4. (15 pts) Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n\times n}$, donde $a_{ij} = \begin{cases} 1 & i \geq j, \\ 0 & i < j. \end{cases}$. Hallar la forma de Jordan de A y una base en la que tiene dicha forma.

5. (15 pts) Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión 4, $T : V \to V$ una transformación lineal tal que $m_T = x^2 + 1$. Hallar la dimensión del subespacio de transformaciones lineales $S : V \to V$ que conmutan con T.

6. Sean V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita con producto interno y $T : V \to V$ una transformación lineal.

   (a) (8 pts) Probar que T es auto-adjunto si y sólo si T es normal y todo autovalor de T es real.

   (b) (7 pts) Si T es autoadjunto y $k \in \mathbb{N}$, probar que existe una transformación lineal autoadjunta $S : T \to T$ tal que $S^k = T$ (es decir, una raíz k-ésima).

7. Sea $\mathrm{tr} : \mathbb{k}^{n\times n} \to \mathbb{k}$ la función traza de una matriz. Para cada $A \in \mathbb{k}^{n\times n}$, sea $\varphi_A : \mathbb{k}^{n\times n} \to \mathbb{k}$ la función dada por $\varphi_A(B) = \mathrm{tr}(AB)$, $b \in \mathbb{k}^{n\times n}$

   (a) (5 pts) Probar que $\varphi_A \in (\mathbb{k}^{n\times n})^*$ para todo A.

   (b) (6 pts) Probar que $\varphi_A = 0$ si y sólo si $A = 0$.

   (c) (9 pts) Sea $\Phi : \mathbb{k}^{n\times n} \to (\mathbb{k}^{n\times n})^*$ la función dada por $\Phi(A) = \varphi_A$. Probar que Φ es un isomorfismo.

8. Sea p un número primo. Para cada $a \in \mathbb{Z}$, sea $\overline{a}$ la clase de a en $\mathbb{Z}_p$ (el cuerpo de p elementos)

   (a) (5 pts) Probar que $\overline{a}$ es una raíz de $x^{p-1} - 1 \in \mathbb{Z}_p[x]$ para todo $a = 1, 2, \ldots, p-1$ (Sugerencia: recordar el Pequeño Teorema de Fermat).

   (b) (5 pts) Hallar la descomposición de $x^{p-1} - 1 \in \mathbb{Z}_p[x]$ en factores primos.

   (c) (5 pts) Sean V un $\mathbb{Z}_p$-espacio vectorial de dimensión finita, $T : V \to V$ una transformación lineal tal que $T^{p-1} = \mathrm{Id}$. Probar que T es diagonalizable.