Práctico 6

1. Sea U un abierto de $\mathbb{R}^2$, sea $f : U \to \mathbb{R}$ una función, y sea S la superficie definida por su gráfico.

   (a) Mostrar que

   $$N(x, y, f(x, y)) = \frac{1}{\sqrt{1+f_x(x,y)^2+f_y(x,y)^2}} \left(-f_x(x, y), -f_y(x, y), 1\right)$$

   es normal a S en $(x, y, f(x, y))$.

   (b) Para cada una de las siguientes funciones, definidas en su dominio, sea S la superficie definida por su gráfico. Hallar en cada caso las direcciones principales, las curvaturas principales y las direcciones asintóticas (si existen) en el punto $p = (0, 0, 0)$. Decir qué tipo de punto es p.

   i) $f(x, y) = axy$ ii) $f(x, y) = (x + y)^2$ iii) $f(x, y) = x^4 + y^4$

   (c) Calcular en cada caso la curvatura gaussiana y la curvatura media en el punto $(0, 0, 0)$.

2. Considerar el helicoide parametrizado por $\varphi(u, v) = (u \cos v, u \operatorname{sen} v, bv)$, con $b \neq 0$. Calcular:

   (a) La primera y segunda formas fundamentales.

   (b) Su curvatura media y su curvatura gaussiana.

   (c) Las curvas asintóticas y las líneas de curvatura.

3. Mostrar que en un punto hiperbólico, las direcciones principales son bisectrices de las direcciones asintóticas.

4. Mostrar que la suma de las curvaturas normales para cada par de direcciones ortogonales, en un punto de una superficie, es constante.

5. Hallar la curvatura gaussiana de la superficie de revolución con curva generatriz $\gamma(t) = (r(t), h(t))$, para los casos particulares en que γ es de rapidez unitaria o $h(t) = t$ para todo t.

6. Sea $C \subset S$ una curva regular en una superficie S con curvatura gaussiana $K > 0$. Mostrar que la curvatura κ de C en p satisface

   $$\kappa \geq \min(|k_1|, |k_2|),$$

   donde k_1 y k_2 son las curvaturas principales de S en p.

7. Mostrar que si la curvatura media es 0 en un punto no planar, entonces este punto tiene dos direcciones ortogonales asintóticas.

8. Dar un ejemplo de una superficie con un punto parabólico aislado.
9. Mostrar que toda superficie compacta (cerrada y acotada) tiene un punto elíptico.
10. ¿Es verdad que si para un punto p de una superficie existe un entorno que contiene puntos de S a ambos lados del plano tangente T_pS, entonces p es hiperbólico?

Ejercicios extras

11. Sea M la superficie de Enneper, parametrizada por:

$$\varphi(u,v) = \big(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2\big).$$

Probar que:

(a) Los coeficientes de la primera forma fundamental son: $E = G = (1+u^2+v^2)^2$ y $F = 0$.

(b) Los coeficientes del operador de forma (segunda forma fundamental) son $e = 2$, $g = -2$ y $f = 0$.

(c) Las curvaturas principales son $k_1 = \frac{2}{(1+u^2+v^2)^2}$ y $k_2 = \frac{-2}{(1+u^2+v^2)^2}$.

(d) Las lineas de curvatura son las rectas coordenadas.

(e) Las curvas asintóticas son $u + v = \text{cte}$ y $u - v = \text{cte}$.

12. Mostrar que si una superficie es tangente a un plano a lo largo de una curva, entonces los puntos de la curva son parabólicos o planares.
13. Hallar una superficie con curvatura gaussiana constante igual a -1.