Práctico 7

1. (a) Sean S_1 y S_2 dos superficies regulares. Sea F una isometría de $\mathbb{R}^3$ y suponer que $F(S_1) \subset S_2$. Probar que $F|_{S_1} : S_1 \to S_2$ es una isometría local.

   (b) Sea S una superficie de revolución. Probar que las rotaciones alrededor de su eje son isometrías de S (asumir que su eje es el eje z).

2. Probar que existe una isometría local de un abierto del plano en el cono

$$C = \left\{(x, y, z) \mid z^2 = x^2 + y^2, z > 0\right\}.$$

   Sugerencia: Considerar el semiplano $M = \{(x, y, 0) \mid y > 0\}$ y tomar f que lleve rayos de M a rayos de C de la forma

$$f(t(\cos s, \operatorname{sen} s), 0) = \rho t(\cos(\lambda s), \operatorname{sen}(\lambda s), 1)$$

   $(0 \leq s \leq \pi, 0 < t)$ para ciertas constantes ρ y λ.

3. Probar que un difeomorfismo $F : S_1 \to S_2$ es una isometría si y sólo si la longitud de arco de cualquier curva regular γ en S es igual a la longitud de arco de la curva $F \circ \gamma$.

4. Hallar una superficie S y un difeomorfismo $F : S \to S$ que preserve curvatura gaussiana (es decir $K(F(p)) = K(p)$ para todo $p \in S$), pero que no sea una isometría.

5. Mostrar que una isometría local entre superficies no preserva necesariamente el módulo de la curvatura media.

6. Encontrar los puntos elípticos, hiperbólicos y parabólicos del toro de revolución.

7. Considerar la esfera de radio uno, el cilindro y la silla de montar. Justificar por qué estas superficies no son localmente isométricas entre sí.

8. Hallar todas las geodésicas del cilindro.

9. Calcular la curvatura geodésica de una curva de rapidez unitaria que parametrice el paralelo $z = \operatorname{sen} \alpha$ en la esfera de centro centro cero y radio uno.

10. Dado que sabemos que las geodésicas de la esfera son los círculos máximos, mostrar la existencia de triángulos geodésicos cuyos ángulos interiores suman más que π.

11. Sea $S = \{\phi(\theta, t) = (r(t) \cos \theta, r(t) \sin \theta, h(t))\}$ una superficie de revolución con curva generatriz de rapidez unitaria.

    (a) Probar que los meridianos son geodésicas.

    (b) Probar que un paralelo $\theta \mapsto \phi(\theta, t_0)$ es geodésica si y sólo si $r'(t_0) = 0$.

12. (a) Mostrar que si una geodésica no rectilínea es una curva plana, entonces es una línea de curvatura.
    (b) Dar un ejemplo de una curva plana que es línea de curvatura pero no geodésica.

13. Probar que el cilindro no es isométrico al plano $z = 0$, y que éste a su vez no es isométrico al disco $z = 0$, $x^2 + y^2 < 1$.

Ejercicios extras

14. Sea S la superficie de revolución llamada el *sombrero de Sherlock*, con curva generatriz dada por $(t, (1-t)^{\frac{1}{3}})$. Graficarla y decir de qué tipo es cada uno de sus puntos. ¿Se cumple que en los puntos parabólicos la superficie está localmente de un mismo lado del plano tangente?

15. Probar que no existe una carta ϕ de la esfera S de centro cero y radio r tal que para todo (u, v) en el dominio de ϕ la base $\{\phi_u(u, v), \phi_v(u, v)\}$ de $T_{\phi(u,v)}S$ sea ortonormal.

16. Calcular los símbolos de Christoffel del plano (en coordenadas cartesianas) y de la esfera (en coordenadas esféricas).

17. Considerar el toro de revolución obtenido al rotar el círculo $(x - a)^2 + z^2 = r^2$, $y = 0$ alrededor del eje z ($a > 1$). Los paralelos generados por los puntos $(a + r, 0)$, $(a - r, 0)$, (a, r) son llamados paralelo máximo, paralelo mínimo y paralelo superior, respectivamente. Verificar cuál de estos paralelos es una geodésica.

18. Sea γ una curva de rapidez unitaria en el plano $z = 0$ y sea $\kappa_g(s)$ la curvatura geodésica de γ en el instante s. Suponer que $\dot{\gamma}$ se puede escribir como $\dot{\gamma}(s) = (\cos\theta(s), \operatorname{sen}\theta(s), 0)$, donde θ es una función de clase C^1.

    (a) Mostrar que $\kappa_g(s) = \dot{\theta}(s)$.
    (b) Mostrar que si γ además es suavemente cerrada (es decir, γ está definida en el intervalo $[0, \ell]$, $\gamma(0) = (\ell)$ y $\dot{\gamma}(0) = \dot{\gamma}(\ell)$), entonces

    $$\frac{1}{2\pi} \int_0^\ell \kappa_g(s)\, ds$$

    es un número entero. ¿Qué mide este número?