La Distribución Exponencial

Sea X v.a, $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ $(\lambda > 0)$.

Entonces

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

es función de densidad para X

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \, 1_{(0,+\infty)}(x)$$

Proposición

Sea $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$. Entonces $P(X > a+b / X > a) = P(X > b)$ $\forall a, b \geq 0$

Demostración: $P(X > a+b / X > a) = \dfrac{P(X > a+b, X > a)}{P(X > a)}$

$$P(X > a+b / X > a) = \frac{P(X > a+b, X > a)}{P(X > a)}$$

$$= \frac{P(X > a+b)}{P(X > a)} = *$$

Calculemos para un $x \in \mathbb{R}$ arbitrario, $P(X > x)$

$$P(X > x) = 1 - P(X \leq x)$$
$$= 1 - F_X(x)$$

$$= 1 - \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\,dt & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

si $x \geq 0$ $\quad P(X > x) = 1 + e^{-\lambda t}\Big|_0^x$

$$= 1 + e^{-\lambda x} - 1$$

$$= e^{-\lambda x}$$

Entonces

$$P(X > x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$P(X > a+b / X > a) = \frac{P(X > a+b)}{P(X > a)} = *$$

$a, b \geq 0 \quad \rightarrow \quad = \dfrac{e^{-\lambda(a+b)}}{e^{-\lambda a}}$

$$= e^{-\lambda b}$$

$b \geq 0 \quad \rightarrow \quad = P(X > b)$

es decir:

$$\boxed{P(X > a+b / X > a) = P(X > b) \quad \forall\, a, b \in [0, +\infty)}$$

Proposición (Caracterización de la Distribución exponencial)

Sea X v.a continua tal que $\forall\, a, b \geq 0$,

$$P(X > a+b) = P(X>a) \cdot P(X>b)$$

Entonces: $P(X>0) = 0$ ó $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ para algún $\lambda > 0$

Demostración:

Tenemos que $P(X>0) \geq 0$ si $P(X>0) = 0$ ya está. en caso contrario, $\boxed{P(X>0) > 0}$ 1

Sean a, b tal que $a = b = 0$:

$$\underbrace{P(X>0)} = P(X>0+0) = P(X>0) \cdot P(X>0) = \underbrace{[P(X>0)]^2}$$

entonces $P(X>0) = 0$ ó $P(X>0) = 1$; pero por 1 $P(X>0) > 0$. Luego $\boxed{P(X>0) = 1}$ 2

$$P(X \leq 0) = 0 = F_X(0) \Rightarrow \underbrace{F_X(x) = 0 \;\forall x \leq 0}.$$

Esta igualdad indica que X está concentrada en valores positivos

Queremos ver que existe $\lambda_0 > 0$ tal que $\forall x > 0$, $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda_0 x}$

Esto es, queremos probar que existe $\lambda_0 > 0$ tal que:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda_0 x} & \text{si } x > 0 \end{cases} \iff \exists\, \lambda_0 > 0 \text{ tq } X \sim \mathcal{E}(\lambda_0)$$

Sea $G:\mathbb{R}\to[0,1]$ dada por $G(x)=1-F_X(x)$

$G(x)=P(X>x)$ y G es continua por ser F_X continua, ya que X es v.a. continua. Además:

- $G(0)=P(X>0)=1$ por 2

- $\lim_{x\to\infty} G(x) = \lim_{x\to\infty} 1-F_X(x)=0$

- $\forall\, a,b\geq 0$, $G(a+b)=G(a).G(b)$, pues:

$$G(a+b)=P(X>a+b)$$

por hipótesis $\longrightarrow$ $$= P(X>a).P(X>b)$$

$$= G(a).G(b)$$

- G es no creciente pues F_X es no decreciente

- $\forall\, m,n\in\mathbb{N}$ y $c>0$, $\boxed{G(cn)=[G(c)]^n}$ ya que:

$$G(cn)=G(\underbrace{c+c+\cdots+c}_{n\text{ veces}})$$

$$=G[(\underbrace{c+c+\cdots+c}_{n-1\text{ veces}})+c]$$

$$=G(\underbrace{c+\cdots+c}_{n-1\text{ veces}}).G(c)$$

$\vdots$

$$= \underbrace{G(c)\cdot G(c)\cdot \ldots \cdot G(c)}_{n \text{ veces}}$$

$$= [G(c)]^n$$

- $\boxed{G(c) = \left[G\left(\frac{c}{m}\right)\right]^m}$ pues:

$$G(c) = G\left(\frac{c}{m}\cdot m\right) = G(c' m) = [G(c')]^m = \left[G\left(\frac{c}{m}\right)\right]^m$$

- $\boxed{G(1) \in (0,1)}$ ya que:

$$G(n) = G(\underbrace{1+\ldots+1}_{n \text{ veces}}) = [G(1)]^n$$

Si $G(1) = 1$ entonces $G(n) = 1$; luego

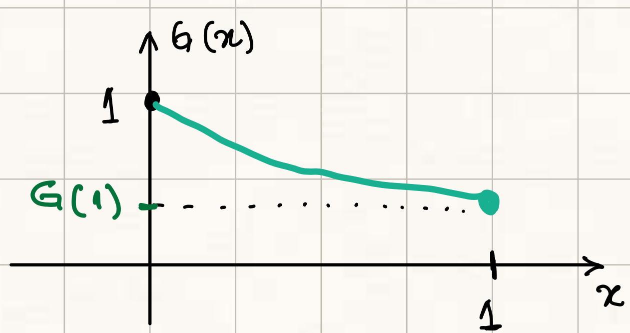
$\lim\limits_{n\to\infty} G(n) = 1$ absurdo! pues $\lim\limits_{n\to\infty} G(n) = 0$

Si $G(1) = 0$ entonces $0 = \left[G\left(\frac{1}{m}\right)\right]^m$; esto implica

que $\forall\, m \in \mathbb{N}$ $G\left(\frac{1}{m}\right) = 0$; entonces:

$$0 = \lim_{m\to\infty} G\left(\frac{1}{m}\right) = G(0); \text{ es decir } G(0) = 0 \text{ absurdo!}$$

ya que $G(0) = 1$ $\left(G(0) = P(X>0) = 1 - \underbrace{F_X(0)}_{=0} = 1\right)$



Entonces existe un $\lambda_0 > 0$ tal que $G(1) = e^{-\lambda_0}$

$$e^{-\lambda_0} = G(1) = \left[G\left(\frac{1}{m}\right)\right]^m \Rightarrow \boxed{e^{-\frac{\lambda_0}{m}} = G\left(\frac{1}{m}\right)} \ \forall m \in \mathbb{N}$$

Además: $\forall\ m, n \in \mathbb{N}$

$$G\left(\frac{n}{m}\right) = \left[G\left(\frac{1}{m}\right)\right]^n = \left[e^{-\frac{\lambda_0}{m}}\right]^n = e^{-\frac{n}{m}\lambda_0}$$

Entonces G tiene la siguiente propiedad

$$\boxed{\forall\ q \text{ nº racional positivo, } G(q) = e^{-q\lambda_0}}$$

Pero $\mathbb{Q}^+$ es denso en $\mathbb{R}^+$; es decir: $\forall\, x \in \mathbb{R}^+$ existe $\{q_n\}$ sucesión en $\mathbb{Q}^+$ tal que $x = \lim_{n\to\infty} q_n$

Ahora, $\forall\ x \in \mathbb{R}^+$:

G es función continua

$$G(x) = G\left(\lim_{n\to\infty} q_n\right) \overset{\downarrow}{=} \lim_{n\to\infty} G(q_n) = \lim_{n\to\infty} e^{-q_n\lambda_0} = e^{-x\lambda_0}$$

$$\forall x > 0,\ e^{-x\lambda_0} = G(x) = 1 - F_X(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall x \geq 0\ F_X(x) = 1 - e^{-x\lambda_0} \text{ con } \lambda_0 > 0$$

Es decir
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x\lambda_0} & \text{si } x > 0 \end{cases} \qquad (\lambda_0 > 0)$$

que es lo que queríamos probar.

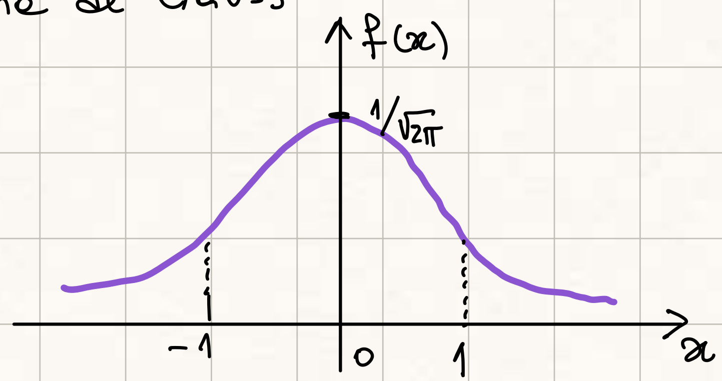
La Distribución Normal Estándar

Definición

X se dice variable aleatoria con distribución normal estándar, si X es v.a. absolutamente continua con función de densidad $f : \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$, dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

El gráfico de esta función se conoce con el nombre de Campana de Gauss



Probemos que f es efectivamente una densidad

- $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$
- queremos probar que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$, lo cual es equivalente a probar que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \sqrt{2\pi}$

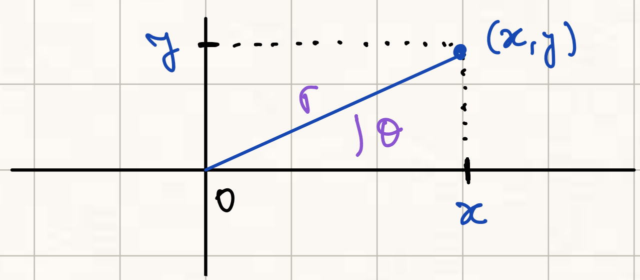
  o bien que $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\right)^2 = 2\pi$. Probaremos esto último.

Sea $c = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx$. Probaremos que $c^2 = 2\pi$

$$c^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \, dx \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} \, dy \right)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \, dx \, dy = *$$

Pasemos a coordenadas polares:



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2} \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \end{pmatrix}$$

$r^2 = x^2 + y^2$

$x = r\cos\theta$

$y = r \operatorname{sen}\theta$

$$* = \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} dr \, d\theta$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r \operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r \operatorname{sen}^2\theta = r$$

$$* = \int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} r e^{-\frac{r^2}{2}}\, dr\, d\theta = 2\pi \int_0^{+\infty} r e^{-\frac{r^2}{2}}\, dr$$

$$u = \frac{r^2}{2} \qquad \frac{du}{dr} = r \Rightarrow du = r\,dr$$

$$* = 2\pi \int_0^{+\infty} e^{-u}\, du = 2\pi \left(-e^{-u}\right)\Big|_0^{+\infty} = 2\pi$$

Luego $c^2 = 2\pi$ que es lo que necesitábamos probar

Notación: Si X tiene distribución normal estándar, escribimos $X \sim N(0,1)$. Una notación aún más utilizada es $Z \sim N(0,1)$

La Distribución Normal (Normal General)

Quedó como ejercicio una aplicación de la proposición del cambio de variable

Sea X v.a con densidad f_X

Sea $Y = aX + b = g(X)$ con $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

Entonces Y es v.a absolutamente continua y una función de densidad para Y está dada por:

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

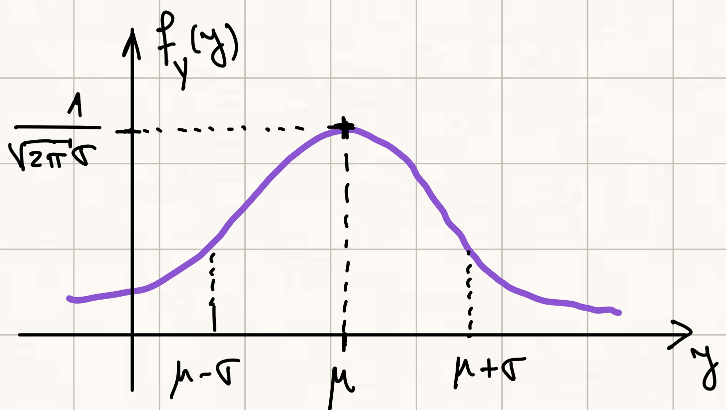
Supongamos $X \sim N(0,1)$, $\sigma > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ y definimos $Y = \sigma X + \mu$. Entonces por el ejercicio Y es v.a absolutamente continua con densidad

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sigma} f_X\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right) \quad \forall\, y \in \mathbb{R}$$

$$= \frac{1}{\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad \forall\, y \in \mathbb{R}$$

El gráfico de esta función es también acampanada simétrico, con eje de simetría en $y = \mu$



En este caso decimos que Y tiene distribución normal con parámetros μ y σ^2. Notación: $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$

La Función Gamma

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. Entonces se define le función gamma como:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} u^{\alpha-1} e^{-u} \, du$$

Puede verse que la integral está bien definida; es decir no es divergente

Propiedades de la función Gamma

1) $\boxed{\Gamma(\alpha+1) = \alpha \Gamma(\alpha) \quad \forall \alpha > 0}$ pues

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^{+\infty} u^{\alpha} e^{-u} \, du = ?$$

integremos por partes:

$$\left.\begin{array}{l} v(u) = u^{\alpha} \\ w(u) = e^{-u} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} v'(u) = \alpha u^{\alpha-1} \\ w'(u) = -e^{-u} \end{array}$$

Notemos que $u^{\alpha} e^{-u} = -v(u) w'(u)$

$$(v(u)\, w(u))' = v'(u)\, w(u) + \underbrace{v(u)\, w'(u)}$$ entonces:

$$v(u)\, w'(u) = (v(u)\, w(u))' - v'(u)\, w(u).$$ Por lo tanto:

$$\int v(u)\, w'(u)\, du = v(u)\, w(u) - \int v'(u)\, w(u)\, du.$$ Luego:

$$-\int_0^{+\infty} v(u)\, w'(u)\, du \overset{*}{=} -v(u)\, w(u)\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} v'(u)\, w(u)\, du$$

$$\Gamma(\alpha+1) = \int_0^{+\infty} \underbrace{u^\alpha}_{v(u)} \; \underbrace{e^{-u}}_{-w'(u)} \; du$$

$v(u) = u^\alpha$

$v'(u) = \alpha u^{\alpha-1}$

$w(u) = e^{-u}$

$w'(u) = -e^{-u}$

$$\overset{*}{=} \underbrace{-u^\alpha e^{-u}\Big|_0^{\infty}}_{=0} + \int_0^{+\infty} e^{-u} \alpha\, u^{\alpha-1}\, du$$

$$= \alpha \int_0^{+\infty} u^{\alpha-1} e^{-u}\, du$$

$$= \alpha\, \Gamma(\alpha)$$

2) $\boxed{\Gamma(1) = 1}$ ya que:

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} u^{1-1} e^{-u}\, du = \int_0^{+\infty} e^{-u}\, du$$

$$= -e^{-u}\Big|_0^{+\infty}$$

$$= 1$$

3) $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \Gamma(n+1) = n!}$

$$\Gamma(n+1) \overset{\text{por } 1)}{=} n\,\Gamma(n)$$

$$= n\,\Gamma((n-1)+1)$$

$$= n\,(n-1)\,\Gamma(n-1)$$

$$\vdots$$

$$= n\,(n-1)\dots 2\,\Gamma(2)$$

$$= n\,(n-1)\dots 2\cdot 1\,\Gamma(1)$$

por 2) $\longrightarrow$ $= n!$

4) Sea $n = 2k+1$ con $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (n impar positivo)

Entonces $$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}\,(n-1)!}{2^{n-1}\left(\frac{n-1}{2}\right)!}$$

En particular $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Demostremos esta propiedad.

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \Gamma\left[\left(\frac{n}{2}-1\right)+1\right]$$

por 1) con $\frac{n}{2}-1>0$ $\rightarrow$

$$= \left(\frac{n}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)$$

$$= \left(\frac{n-2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{n-2}{2}\right)\Gamma\left[\left(\frac{n-2}{2}-1\right)+1\right]$$

$$= \frac{n-2}{2}\left(\frac{n-2}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{2}-1\right)$$

$$= \frac{n-2}{2}\,\frac{n-4}{2}\,\Gamma\left(\frac{n-4}{2}\right)$$

$$\vdots$$

$$= \underbrace{\frac{n-2}{2}\,\frac{n-4}{2}\cdots\frac{n-2k}{2}}_{k \text{ factores}}\,\Gamma\left(\frac{n-2k}{2}\right)$$

$n=2k+1$ $\rightarrow$

$$= \frac{n-2}{2}\,\frac{n-4}{2}\cdots\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\cdots 1}{(n-1)(n-3)\cdots(n-(2k-1))\,2^k}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{(n-1)!}{\left(\frac{n-1}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}\right)\cdots\underbrace{\left(\frac{n-(2k-1)}{2}\right)}_{=1}\cdot 2^k\cdot 2^k}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{n-1}{2} = \frac{2k+\cancel{1}-\cancel{1}}{2} = k$$

$$\frac{n-3}{2} = \frac{2k+1-3}{2} = \frac{2k-2}{2} = k-1$$

$$\frac{n-5}{2} = \frac{2k+1-5}{2} = \frac{2k-4}{2} = k-2$$

$$\vdots$$

Luego,

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{(n-1)!}{k\,(k-1)\,(k-2)\cdots 1\cdot 2^{2k}}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{(n-1)!}{k!\;2^{2k}}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\left.\begin{array}{c} 2k = n-1 \\ \Uparrow \\ n = 2k+1 \\ \Downarrow \\ \frac{n-1}{2} = k \end{array}\right\} \rightarrow = \frac{(n-1)!}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!\;2^{n-1}}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

entonces: $\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) = \dfrac{(n-1)!}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!\;2^{n-1}}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$

Falta probar que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Veamos esto:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} u^{\frac{1}{2}-1} e^{-u}\, du$$

$$= \int_0^{+\infty} u^{-\frac{1}{2}} e^{-u}\, du$$

Por otro lado:

$$1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \iff \sqrt{2\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

$$\iff \sqrt{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

$e^{-\frac{x^2}{2}}$ es por $\longrightarrow$ $\iff \sqrt{\pi} = \frac{2}{\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$

$$u = \frac{x^2}{2} \Rightarrow 2u = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{2u}$$

$$\frac{du}{dx} = x \Rightarrow dx = \frac{du}{x} = \frac{du}{\sqrt{2u}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} e^{-u} \frac{du}{\sqrt{2u}}$$

$$= \frac{\cancel{2}}{\cancel{(\sqrt{2})^2}} \int_0^{+\infty} u^{-\frac{1}{2}} e^{-u}\, du$$

Entonces:

$$\sqrt{\pi} = \int_0^{+\infty} u^{-1/2} e^{-u}\, du = \int_0^{+\infty} u^{1/2-1} e^{-u}\, du = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \quad //$$

La Distribución Gamma

Sea $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \begin{cases} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$

con $\lambda > 0$, $\alpha > 0$

Estudiemos $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, dx$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, dx = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}\, dx$$

$$\left.\begin{aligned} u &= \lambda x \\ du &= \lambda\, dx \\ x &= \frac{u}{\lambda} \end{aligned}\right\} \rightarrow = \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{\lambda}\right)^{\alpha-1} e^{-u}\, \frac{du}{\lambda}$$

$$= \frac{1}{\lambda^{\alpha}} \int_0^{+\infty} u^{\alpha-1} e^{-u}\, du$$

$$= \frac{1}{\lambda^{\alpha}} \Gamma(\alpha)$$

Es decir: $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, dx = \frac{1}{\lambda^{\alpha}} \Gamma(\alpha)}$

Sea $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \dfrac{g(x)}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\, dt}$

$$= \frac{g(x)}{\frac{\Gamma(\alpha)}{\lambda^{\alpha}}}$$

$$= \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} g(x)$$

Luego:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} & x>0 \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

Entonces $f(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ y $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

Definición

Sea X v.a absolutamente continua con función de densidad dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} & x>0 \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

donde $\lambda > 0$, $\alpha > 0$.

Entonces decimos que X tiene distribución Gamma con parámetros α y λ. Notación $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$

Observación: Si $\alpha = 1$, $\forall x > 0$ $f(x) = \dfrac{\lambda}{\Gamma(1)} e^{-\lambda x}$ y como $\Gamma(1) = 1$, $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$. Entonces:

Si $\alpha = 1$ $\quad f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x>0 \\ 0 & c.c \end{cases}$

Es decir, si $\alpha = 1$ $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

$$\boxed{X \sim \Gamma(1,\lambda) \iff X \sim \mathcal{E}(\lambda)}$$

la distribución exponencial es un caso particular de la distribución gamma