Objetivos

- Aprender los conceptos de divisibilidad y sus propiedades (Ejercicios 1 y 2).
- Adquirir destrezas en la manipulación de los números enteros para probar propiedades de divisibilidad (Ejercicios 3, 7, 8, 9 y 10).
- Aprender los conceptos de cociente y resto, sus propiedades y su utilidad para demostrar propiedades de divisibilidad (Ejercicios 4, 5, 6).

Ejercicios

Los ejercicios con el símbolo ⓐ tienen una ayuda al final del archivo para que recurran a ella después de pensar un poco.

1) Sean a, b, $c \in \mathbb{Z}$. Demostrar las siguientes afirmaciones:

(a) Si $ab = 1$, entonces $a = b = 1$ ó $a = b = -1$.
(b) Si $a \mid 1$ entonces $a = 1$ ó $a = -1$.
(c) Si $a, b \neq 0$, $a \mid b$ y $b \mid a$, entonces $a = b$ ó $a = -b$.
(d) Si $a \neq 0$ y $a \mid b$, entonces $a \mid b \cdot c$.
(e) Si $a \neq 0$, $a \mid b$ y $a \mid c$, entonces $a \mid (bx + cy)$ para $x, y \in \mathbb{Z}$ arbitrarios.
(f) Si $a \neq 0$, $a \mid b$ y $a \mid (b + c)$, entonces $a \mid c$.
(g) Si $a \neq 0$ y $a \mid b$, entonces $a^n \mid b^n$ para todo natural n (más adelante veremos que si $a^n \mid b^n$ para *algún* natural n, entonces $a \mid b$).
(h) $a \mid b$ y $b \neq 0 \Rightarrow |a| \leq |b|$.

2) Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Probar que las siguientes afirmaciones son falsas dando un contraejemplo.

(a) $a \mid b \cdot c \Rightarrow a \mid b$ ó $a \mid c$.
(b) $a \mid (b + c) \Rightarrow a \mid b$ ó $a \mid c$.
(c) $a \mid c$ y $b \mid c \Rightarrow a \cdot b \mid c$.
(d) $a \mid c$ y $b \mid c \Rightarrow (a + b) \mid c$.

3) Probar las siguientes afirmaciones usando inducción.

(a) 8 divide a $3^{2n} - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
(b) 3 divide a $2^n + 5^{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

4) Hallar el cociente y el resto de la división de:

(a) 127 por 99.
(b) -135 por 23.
(c) 135 por -23.
(d) -135 por -23.

5) Sea X un conjunto arbitrario de 20 números naturales. Probar que hay al menos dos elementos de X cuya diferencia es divisible por 19.

6) Dados b, c enteros, probar las siguientes propiedades:

(a) 0 es par y 1 es impar.
(b) Dados dos enteros consecutivos, entonces uno es par y el otro es impar.
(c) El producto de un número entero por su consecutivo es un número par.
(d) La suma de un número par y uno impar es impar.
(e) $b + c$ es par si y sólo si b y c son ambos pares o ambos impares.
(f) Dado un número entero n, n es par si y sólo si n^2 es par.

7) Probar que el producto de tres enteros consecutivos es divisible por 6.

8) Determinar los enteros positivos n tales que

(a) $n^2 - 7n + 10$ es divisible por $n - 3$. (b) $n^2 + 2n + 3$ es divisible por $n + 1$.

9) Sean $a, b \in \mathbb{Z}$.

(a) ⓐ Probar que si $a \neq b$, entonces $a - b \mid a^n - b^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Probar que si n es un número natural impar y $a \neq -b$, entonces $a + b \mid a^n + b^n$.

(c) Probar que si n es un número natural par y $a \neq -b$, entonces $a + b \mid a^n - b^n$.

10) ⓐ Probar que las siguientes afirmaciones son verdaderas para todo $n \in \mathbb{N}$.

(a) El producto de n enteros consecutivos es divisible por $n!$

(b) $2^n \prod_{i=1}^{n}(2i - 1)$ es divisible por $n!$

Ayudas

9) Puede hacerlo por inducción y en el paso inductivo, sumar y restar algo apropiado a $a^{n+1} - b^{n+1}$. O puede calcular explícitamente el cociente.

10) En la primer parte usar que los números combinatorios son enteros y elegir un número combinatorio apropiado. En la segunda parte usar $(2n)!$ y la primer parte.

Ejercicios complementarios

Si ya hizo los ejercicios anteriores continue con la siguiente guía. Los ejercicios que siguen son similares y le pueden servir para practicar antes de los exámenes.

11) Probar que cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$:

(a) $3^{2n+2} + 2^{6n+1}$ es múltiplo de 11.

(b) $3^{2n+2} - 8n - 9$ es divisible por 64.

12) Probar las siguientes afirmaciones.

(a) Sea a un número entero impar. Probar que $a^2 - 1$ es divisible por 8.

(b) $n^2 + 2$ no es divisible por 4 para todo $n \in \mathbb{Z}$.

13) Dado $m \in \mathbb{N}$ hallar los restos posibles de m^2 y m^3 en la división por 3 y por 11.

14) Sean n, m y a números naturales, $a \neq 1$. Probar que si r es el resto de la división de n por m, entonces el resto de la división de $a^n - 1$ por $a^m - 1$ es $a^r - 1$.

15) Sean $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ números enteros. Probar que existen índices i, j con $1 \leq i \leq j \leq n$ tales que $\sum_{k=i}^{j} a_k$ es divisible por n. (Sugerencia: considere los restos en la división por n de los n números a_1, $a_1 + a_2$, $a_1 + a_2 + a_3, \cdots, a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.)

16) Probar que las siguientes afirmaciones son verdaderas para todo $n \in \mathbb{N}$:

(a) $\binom{2n}{n}$ es divisible por 2.

(b) $\binom{2n}{n}$ es divisible por $n+1$ (Sugerencia: probar que $(2n+1)\binom{2n}{n} = (n+1)\binom{2n+1}{n}$ y observar que $\binom{2n}{n} = (2n+2)\binom{2n}{n} - (2n+1)\binom{2n}{n}$).