Binormal

$$b'(s) = \underbrace{t'(s) \times n(s)}_{t' \perp n \,=\, 0} + t(s) \times n'(s)$$

$$= t(s) \times n'(s)$$

$$\Rightarrow \quad b'(s) \perp t(s)$$

Además $b'(s) \perp b(s)$ pq

$$1 = \|b(s)\|^2 \Rightarrow \quad 0 = (\|b(s)\|^2)'$$
$$= 2 \langle b(s), b'(s) \rangle$$

$\Rightarrow$ $b'(s)$ paralelo a $n(s)$

$\Rightarrow$ $b'(s) = \tau(s) \cdot n(s)$ para alguna función $\tau(s)$

$\tau : I \to \mathbb{R}$

Fórmula Frenet

$$
\begin{cases}
t'(s) = k(s)\, n(s) \\
n'(s) = -k(s)\, t(s) - \tau(s)\, b(s) \\
b'(s) = \tau(s)\, n(s)
\end{cases}
$$

demo $t'(s) = (\alpha'(s))' = \alpha''(s) = k(s)\, n(s)$

$b'(s) = \tau(s)\, n(s)$ visto arriba

$n'(s)$ como $n(s)$ es normal a $b(s)$ y $t(s)$ y son los 3 unitarios (α regular) $\Rightarrow$

$$n(s) = b(s) \times t(s)$$

$$\Rightarrow n'(s) = b'(s) \times t(s) + b(s) \times t'(s)$$

$$\tau(s)\, n(s) \times t(s) + k(s)\, (b(s) \times n(s))$$

$$= -\tau(s)\, b(s) \pm k(s)\, t(s)$$

$$\begin{pmatrix} b(s) \\ n(s) \\ t(s) \end{pmatrix} \rightsquigarrow - \begin{pmatrix} n(s) \\ b(s) \\ t(s) \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow (-)(-) \begin{pmatrix} n(s) \\ t(s) \\ b(s) \end{pmatrix} \rightsquigarrow - \begin{pmatrix} t(s) \\ n(s) \\ b(s) \end{pmatrix}$$

$$= -\tau(s) b(s) - k(s) t(s)$$

otra forma $\quad n'(s) = \langle n'(s), t(s) \rangle t(s) + \langle n'(s), n(s) \rangle n(s) + \langle n'(s), b(s) \rangle b(s)$

usando coordenadas en base $\{t, n, b\}$

Teorema

Sea $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ curva PLA tq $k(s) \neq 0$ $\forall s \in I$

$\Rightarrow \tau \equiv 0$ sii la traza de α está contenida en un plano

demo ($\Rightarrow$) si $\tau = 0 \Rightarrow b'(s) = 0$

(3er ec de Frenet)

$\Rightarrow b(s) = b_0$ cte

Sea $s_0 \in I$ y

$$P = \{ q \in \mathbb{R}^3 \, / \, \langle q - \alpha(s_0), b_0 \rangle = 0 \}$$

Sea $f: I \to \mathbb{R}$ $\quad f(s) = \langle \alpha(s) - \alpha(s_0), b_0 \rangle$

$$f'(s) = \langle \alpha'(s) - \cancel{\alpha'(s_0)}, b_0 \rangle + \langle \cancel{\alpha(s) - \alpha(s_0)}, 0 \rangle$$

binormal $\perp \alpha'$

$$= \langle \alpha'(s), b_0 \rangle = 0$$

$\Rightarrow$ f es cte

$\Rightarrow f(s_0) = \langle \alpha(s_0) - \alpha(s_0), b_0 \rangle = 0$

$\Rightarrow f \equiv 0$

$\Rightarrow \langle \alpha(s) - \alpha(s_0), b_0 \rangle = 0 \quad \forall s \in I$

$\Rightarrow \alpha(s) \in P \quad \forall s \in I$

$(\Leftarrow)$ Si $\alpha(I) \subseteq P$ y $s_0 \in I$

$\Rightarrow \alpha(s_0) \in P$ para P de la siguiente forma

$$P = \{ q \in \mathbb{R}^3 / \langle q - \alpha(s_0), N \rangle = 0 \}$$

N unitario

$\Rightarrow \langle \alpha(s) - \alpha(s_0), N \rangle = 0 \quad \forall s \in I$

derivamos

$\langle \alpha'(s) - \alpha'(s_0), N \rangle + \langle \alpha(s) - \cancel{\alpha(s_0)}, N' \rangle = 0$

derivo otra

$N' = 0$
N vector

$$\langle \alpha''(s), N \rangle + \cancel{\langle \alpha'(s), N' \rangle} = 0$$

$$\Rightarrow \langle n(s), N \rangle \underset{*}{=} 0 \quad \forall s \in I$$

$* \ \langle \alpha'(s), N \rangle = 0 \Rightarrow \langle t(s), N \rangle = 0$

$\langle \alpha''(s), N \rangle = 0$

Luego para cada $s \in I$

$\Rightarrow \boxed{N = \pm b(s)}$ (pues ambos son unitarios)

$\Rightarrow \exists$ una función $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$

con $|\varepsilon(s)| = 1 \quad \forall s$

tq $b(s) = \varepsilon(s) N$

$\Rightarrow \varepsilon(s) = \langle b(s), N \rangle$ continua $*$

$\therefore \varepsilon(s) = 1$ o $\varepsilon(s) = -1 \quad \forall s \in I$

$*$ porque N continua y b continua por def escalar

Analicemos cada caso

i) Si $\varepsilon(s) = 1 \quad \forall s \in I \Rightarrow b(s) = N$

$\Rightarrow b'(s) = 0 \quad \tau(s) = 0$

Curvas regulares (no necesariamente PLA)

Hemos definido la curvatura y la torsión solo para PLA.

Ahora simplemente transferimos a α una curva regular, la curvatura y la torsión de la reparametrización por longitud de arco β

$$\alpha(t) = \beta(s(t))$$

$\Rightarrow$ la curvatura de α en t

$$k_\alpha(t) = k_\beta(s(t))$$

la torsión de α en t

$$\tau_\alpha(t) = \tau_\beta(s(t))$$

Sea $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ curva parametrizada dif regular

$$k_\alpha(t) = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}$$

$$\tau_\alpha(s) = -\frac{\langle \alpha'(t) \times \alpha''(t), \alpha'''(t) \rangle}{\| \alpha'(t) \times \alpha''(t) \|^2}$$

<u>demo</u> práctico

Curvatura signada de curvas planas ($\mathbb{R}^2$)

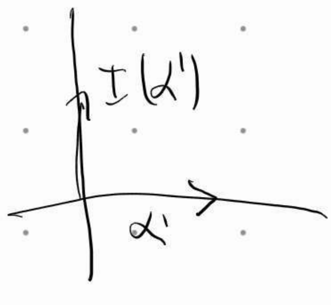
Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ curva PLA

Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es isomorfismo lineal definido por

⊗ pq $\|t(s)\| = 1$ pq α es PLA

$$T(x,y) = (-y, x)$$

(si identificamos a $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$, T es "la multiplicación por i")



observa que $t'(s) = \alpha''(s)$

y $N(s) = T(t(s))$ son

ambos ⊗ unitario ortogonales a $t(s)$

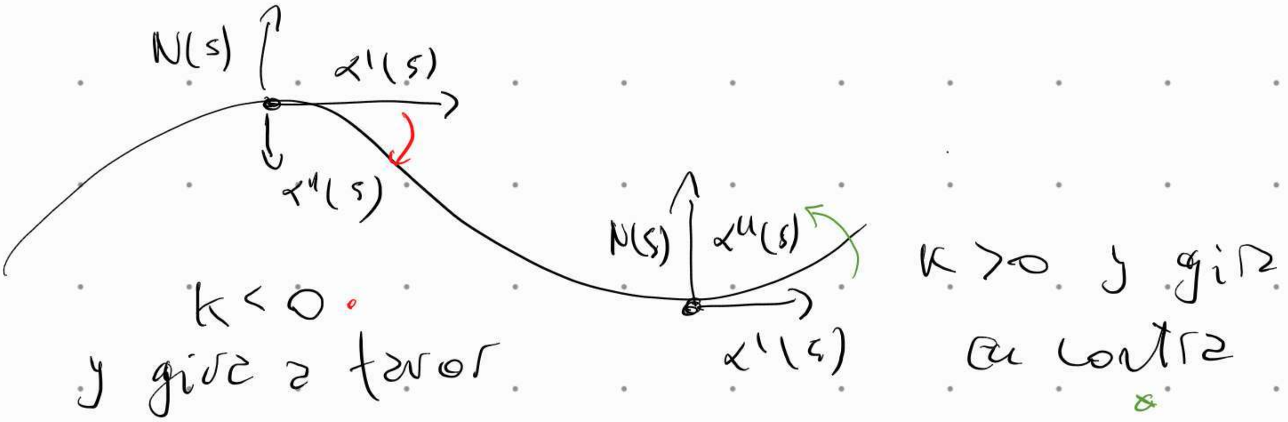
por lo tanto son paralelos

$\Rightarrow t'(s) = \kappa(s) N(s)$

para alguna función $K: I \to \mathbb{R}$

def $K: I \to \mathbb{R}$ es la curvatura signada

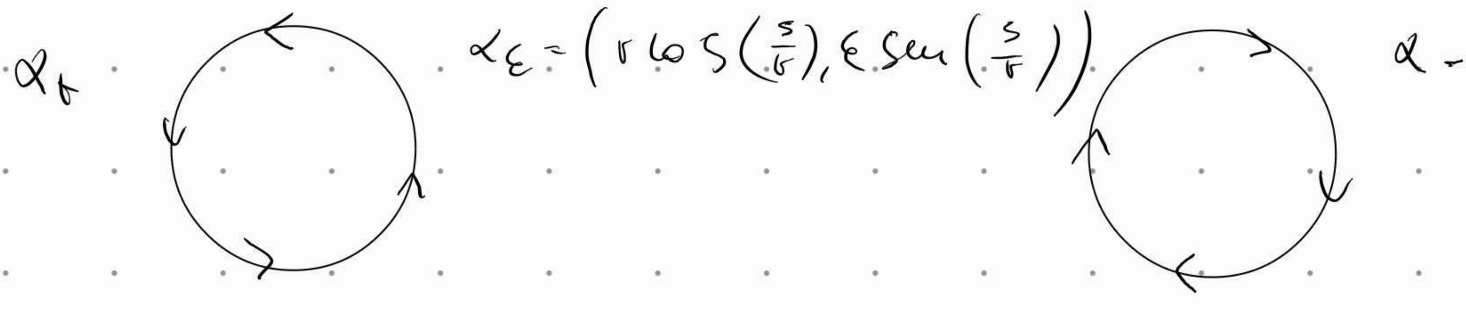
obs el signo de K nos dice si la curva gira en sentido horario $(-)$ o antihorario $(+)$



estamos mirando la curva de izq a derecha (parametrizada positiva)

ejemplo calcular la curvatura signada de α_+ y α_- del círculo de radio r centrado en el origen

$\alpha_\varepsilon = \left(r\cos\left(\frac{s}{r}\right), \varepsilon \operatorname{sen}\left(\frac{s}{r}\right)\right)$



$\alpha'_\varepsilon = \left(-\operatorname{sen}\left(\frac{s}{r}\right), \varepsilon \cos\left(\frac{s}{r}\right)\right)$ $\left(\varepsilon = \pm 1\right)$

$\Rightarrow N_\varepsilon(s) = \left(-\varepsilon \cos\left(\frac{s}{r}\right), -\operatorname{sen}\left(\frac{s}{r}\right)\right)$

$\alpha''_\varepsilon = \left(-\underset{=\varepsilon^2}{\frac{1}{r}} \cos\left(\frac{s}{r}\right), -\varepsilon \frac{1}{r} \operatorname{sen}\left(\frac{s}{r}\right)\right)$

ahora $\alpha''_\varepsilon(s) = K(s) N_\varepsilon(s)$

$\Rightarrow$ $-\frac{\varepsilon^2}{r} \cos\left(\frac{s}{r}\right) = K(s) \cdot -\varepsilon \cos\left(\frac{s}{r}\right)$

$\frac{\varepsilon}{r} = K(s)$

Si lo hacemos en la segunda componente nos da lo mismo.

$\Rightarrow K_{\alpha_+}(s) = \frac{1}{r} > 0 \wedge K_{\alpha_-}(s) = -\frac{1}{r} < 0$

Prop Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ PLA

$\Rightarrow k(s) = |K(s)|$

dem

$k(s) = \|\underset{=t'(s)}{\alpha''(s)}\| = \|K(s) \cdot N(s)\|$

$$= |\kappa(s)| \, \|N(s)\|$$

$$= |\kappa(s)| \, \| \underset{\substack{\| \\ 1}}{T(\alpha'(s))} \|$$

pq tiene la misma norma que $\alpha'(s)$
porque T es unitaria
(preserva normas
$$\|\underbrace{T(\alpha'(s))}_{Tv}\| = \|\underbrace{\alpha'(s)}_{v}\|$$

(T es rotar, es ortogonal)

Si no a mano