ANÁLISIS NUMÉRICO II — Práctico N°7 - 2023
Sistema de ecuaciones no lineales y minimización

1. **Implemente** una función con nombre `Fun_tres` que evalúe $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y opcionalmente también su derivada $F'(x) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, donde

$$F(x) = \begin{bmatrix} x_1 + x_1 e^{-x_1} + 3x_2 + \sin(x_3) - 3 \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 \\ x_1^2 + 2x_2 e^{-x_1} + 2x_3 - 2 \end{bmatrix}.$$

   La misma debe permitir calcular solo $F(x)$, solo $F'(x)$ o ambas. Use la sintaxis `F, DF = Fun_tres(x, valfun=True, derfun=False)`. De esta manera `F = Fun_tres(x)` o `F = Fun_tres(x, valfun = True, derfun = False)` (calcula solo $F(x)$), `_, DF = Fun_tres(x, derfun = True)` (calcula solo $F'(x)$) o ambas `F, DF = Fun_tres(x, valfun = True, derfun = True)`. Evite realizar operaciones innecesarias.

2. Sea $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ diferenciable en $\bar{x}$ con derivada $F'(\bar{x})$ invertible. Demuestre que existen $\varepsilon > 0$ y $c > 0$ tales que

$$\|x - \bar{x}\|_2 \leq c\|F(x) - F(\bar{x})\|_2, \qquad \forall\, x \in B(\bar{x}, \varepsilon).$$

3. **Implemente** dos funciones con nombre `sol_newton` y `sol_newton_trun` que ejecuten el método de Newton y el Newton truncado, respectivamente. Deberan tener como entrada: una función `func` (como la del ejercicio 1), un punto inicial x^0, una tolerancia de error ϵ y una cantidad máxima de iteraciones m. Verifique su funcionamiento hallando la raíz de la función del ejercicio 1.

4. Utilizar el método de Newton para encontrar los puntos de intersección de la parábola $x_2 = x_1^2 - x_1$ y la elipse $x_1^2/16 + x_2^2 = 1$. Mostrar ambos gráficos al mismo tiempo y los puntos de intersección estimados con el método de Newton.

5. Determine si puede o no existir una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciable que tenga un único punto estacionario que sea minimizador local pero no minimizador global de f en $\mathbb{R}$.

6. Sean $n \geq 2$ y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = (1 - x_n)^3 \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + x_n^2.$$

   a) Demuestre que $\bar{x} = 0$ es el único punto estacionario de f en $\mathbb{R}^n$, que es un minimizador local estricto de f y que no es un minimizador global de f en $\mathbb{R}^n$.

   b) **Implemente** esta función en Python con el nombre `fun_mlocal` para que retorne opcionalemente $f(x) \in \mathbb{R}$, $\nabla f(x) \in \mathbb{R}^n$ y $\nabla^2 f(x) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Use la sintaxis `f = fun_mlocal(x, valfun=True, gradfun=False, hesfun=False)` (valores por defecto), `f, df = fun_mlocal(x, valfun = True, gradfun = True)`, o `f, df, d2f = fun_mlocal(x, valfun = True, gradfun = True, hesfun=True)`. Evite realizar operaciones innecesarias.

7. **Implemente** las reglas de búsqueda lineal de Armijo y de Goldstein en las funciones `regla_armijo` y `regla_goldstein`. Deben tener como entrada f, x, d, ϕ_0, ϕ'_0; donde f debe retornar $f(x), \nabla f(x), \nabla^2 f(x)$ como en el ejercicio 6*b*, $\phi_0 = f(x)$ y $\phi'_0 = \nabla f(x)^T d < 0$. Deben retornar $x^+ = x + \alpha d$.

8. Sea $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simétrica definida positiva, $\xi \in [0,1]$ y para $p, q \in \mathbb{R}^n$ defina

$$W_+ = W + \frac{pp^T}{p^Tq} - \frac{Wqq^TW}{\tau} + \xi\tau vv^T \quad \text{donde } v = \frac{p}{p^Tq} - \frac{Wq}{\tau},\ \tau = q^TWq.$$

Demuestre que W_+ es simétrica y que W_+ es definida positiva si y solo si $p^Tq > 0$.

9. **Implemente** los métodos de minimización no lineal de Cauchy, Newton y BFGS en las funciones `min_cauchy`, `min_newton` y `min_bfgs`. Deben tener como entrada f, x_0, ϵ, m y $regla$; donde f es la función a minimizar, x_0 el punto inicial, ϵ la tolerancia del error, m la cantidad máxima de iteraciones y $regla$ la función de regla a utilizar.

10. Suponga que se tiene un conjunto de datos $\{(x^1, y_1), \ldots, (x^d, y_d)\}$ donde $x^k \in \mathbb{R}^n$ (características) y que pertenecen a dos grupos, digamos $y_k = 1$ o $y_k = -1$ (rótulos). Se desea hallar $w \in \mathbb{R}^n$ y $b \in \mathbb{R}$ tal que el hiperplano $\mathcal{H}_{w,b} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle w, x\rangle = b\}$ separe estos grupos. Para ello, resolveremos el problema

$$\underset{(w,b)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}}{\text{minimizar}} \sum_{k=1}^{d} \log\Big(1 + \exp(-(\langle w, x^k\rangle - b)y_k)\Big).$$

Genere un conjunto de datos con $x^k \in \mathbb{R}^2$ y resuelva el problema usando los métodos del ejercicio 9. Grafique los datos junto al hiperplano separador.

11. Un productor cosecha x_i toneladas de maní, almacena $(1-u_i)x_i$ toneladas de su producción e invierte u_ix_i. Con esto la producción de la próxima cosecha será $x_{i+1} = x_i + \omega u_i x_i$ con $\omega > 0$. Encuentre una estrategia óptima $u_0, \ldots, u_{N-1}$ que, comenzando con 3.5 toneladas, maximice lo almacenado a lo largo de $N = 10$ cosechas penalizando el no cumplimiento de $u_i \in [0,1]$ mediante la función $\psi(t) = \rho(\text{mín}\{t, \text{máx}\{0, t-1\}\})^4$. O sea, se debe maximizar

$$x_N + \sum_{i=0}^{N-1}(1-u_i)x_i - \sum_{i=0}^{N-1}\psi(u_i).$$

Resuelva este problema tomando $\omega = 0.2$, $\rho = 10^3, 10^5$ y utilizando los tres métodos del ejercicio 9.