PRÁCTICO 5

VARIABLES CONTINUAS

1. Sea X una variable aleatoria con función de distribución

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 & x > 1 \\ x^3 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

   a) Calcular: $P(X < 0.2)$, $P(0.2 \leq X \leq 0.8)$, $P(X > 0.5)$.

   b) Hallar la densidad de X.

2. El diámetro D (expresado en dm.) del tronco de cierta especie de árboles es una v.a. con función de densidad:

$$f_D(x) = kxI_{(0,10)}(x)$$

   a) Hallar el valor de la constante k.

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que el diámetro de un árbol de esa especie elegido al azar mida entre 4 y 6 dm?

   c) En un área del bosque hay 3 árboles de esa especie. Calcular la probabilidad de que exactamente 2 de ellos tengan diámetro entre 4 y 6 dm.

   d) ¿Cuantos árboles habría que muestrear en el bosque para que la probabilidad de encontrar al menos uno cuyo diámetro mida entre 4 y 6 dm. sea ≥ 0.99?

3. Se quiere realizar un sorteo. Para ello se elige un número al azar en el intervalo [0,1].

   a) Se obtiene un primer premio si la primer cifra decimal del número elegido es un 4. Calcular la probabilidad de obtener el primer premio.

   b) Un segundo premio se obtiene si la segunda cifra decimal del número elegido es un 7. Calcular la probabilidad de obtener el segundo premio.

   c) Calcular la probabilidad de obtener ambos premios.

   d) El premio consuelo se obtiene si la primer cifra decimal es mayor que 5 y la segunda es impar. Calcular la probabilidad de obtener dicho premio.

   e) Si se realizan tres sorteos, ¿cuál es la probabilidad de obtener al menos un primer premio? ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos segundos premios?

4. Un paracaidista cae en un sitio aleatorio de la línea recta entre los marcadores A y B.

   a) Encuentre la probabilidad de que esté más cerca de A que de B.

   b) Calcule la probabilidad de que la distancia con respecto a A sea más de tres veces la distancia con respecto a B.

   c) Suponga que tres paracaidistas actúan independientemente. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente uno de los tres caiga después del punto medio entre A y B?

5. Sean X una variable aleatoria positiva continua con función de densidades f. Encontrar una función de densidad para $Y = X^2$ en términos de f.

6. Considerar el triángulo equilátero con lados de longitud s. Se elige un punto al azar en uno de los lados del triángulo y se considera la distancia X desde el punto al vértice opuesto. Hallar la función de distribución de X.

7. Supongamos que el tiempo de vida medido en meses de un componente electrónico tiene una distribución exponencial de parámetro $\lambda = 0.1$.

   a) Calcular la probabilidad de que el tiempo de vida sea menor a 10 meses.

   b) Calcular la probabilidad de que el tiempo de vida esté entre 5 y 15 meses.

   c) Hallar t_0 tal que la probabilidad de que el tiempo de vida sea mayor que t_0 sea 0.01.

8. Las partículas de una sustancia radioactiva se desintegran según un tiempo T (medido en segundos) que tiene distribución exponencial de parámetro λ. Si durante el primer segundo se desintegra el 50% de las partículas, ¿cuánto demorará en desintegrarse el 75%?

9. Sea T la vida útil de una lámpara, medida en días. Suponga que T tiene distribución exponencial de parámetro $\lambda = 3$. La lámpara es encendida en una habitación en el instante $t = 0$. Un día después, una persona entra en la habitación y permanece en ella 8 horas, saliendo luego.

   a) Halle la probabilidad de que esta persona haya entrado en la habitación cuando ya estaba oscura.

   b) Halle la probabilidad de que esta persona haya entrado con la lámpara encendida y salido con la lámpara quemada.

10. Sea U una v.a. uniformemente distribuida en $[0,1]$,

    a) Pruebe que $1-U$ también es $U[0,1]$.

    b) Halle la función de densidad de $\sqrt{U+2}$.

11. Se dice que una v.a. X tiene distribución simétrica respecto de θ si y solo si

$$P(X \leq \theta - h) = P(X \geq \theta + h) \qquad \forall h > 0$$

    a) Dar dos ejemplos de v.a. con distribución simétrica respecto de algún θ, una discreta y otra continua.

    b) Sea X una v.a. continua con f_X continua. Probar que son equivalentes:

    (i) X tiene distribución simétrica respecto de θ

    (ii) $P(X \leq x) = P(X \geq 2\theta - x)$

    (iii) $F_X(x) = 1 - F_X(2\theta - x)$

    (iv) $f_X(x) = f_X(2\theta - x)$

    (v) $f_X(\theta - x) = f_X(\theta + x)$

12. Consideremos la distribución normal estándar ($Z \sim N(0,1)$).

    a) ¿Cuál es la probabilidad de observar un resultado mayor que 2.6?

    b) Calcular $P(Z < 1.35)$.

    c) Calcular $P(-1.7 < Z < 3.1)$.

    d) Hallar el percentil 85 de la distribución de Z.

    e) Hallar a tal que $P(Z > a) = 0.20$.

13. Entre las mujeres de 18 y 74 años de edad, la presión arterial diastólica se distribuye normalmente con $\mu = 77$ mm Hg y $\sigma = 11.6$ mm Hg.

    a) ¿Cuál es la probabilidad de que una mujer seleccionada al azar tenga presión arterial diastólica menor que 60 mm Hg?

    b) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga presión arterial diastólica mayor que 90 mm Hg?

    c) ¿Cuál es la probabilidad de que tenga una presión arterial diastólica entre 60 y 90 mm Hg?

    d) ¿Cuál es la probabilidad de que su presión esté a menos de un σ de μ?

    e) ¿Cuál es la probabilidad de que entre cinco mujeres seleccionadas al azar de esa población, al menos 1 tenga presión arterial diastólica fuera del rango entre 60 y 90 mm Hg?

14. En un estudio, se midieron los niveles de colesterol de un gran número de varones sanos. La población fue luego seguida por 16 años. Al final de este período, los varones fueron divididos en dos grupos: aquellos que habían desarrollado enfermedades coronarias y aquellos que no lo hicieron. La distribución de los niveles de colesterol iniciales para cada grupo resultó aproximadamente normal. Entre los individuos que desarrollaron enfermedades coronarias la media del nivel de colesterol fue $\mu_e = 244mg/100ml$ con $\sigma_e = 51mg/100ml$ y para aquellos que no desarrollaron la enfermedad $\mu_s = 219mg/100ml$ con un $\sigma_s = 41mg/100ml$.

    Suponiendo que para predecir enfermedades coronarias usamos un nivel de 260 mg/100 ml o mayor:

    a) ¿Cuál es la probabilidad de predecir correctamente la enfermedad coronaria en un varón que la desarrollará?

    b) ¿Cuál es la probabilidad de predecir una enfermedad coronaria en un varón que no la desarrollará?

    c) ¿Cuál es la probabilidad de fallar en predecir una enfermedad coronaria en un varón que la desarrollará?

    d) ¿Cómo cambiarán las probabilidades de los errores falso positivo y falso negativo si el punto de corte para predecir se bajara a 250 mg/100 ml?

15. Sea X una variable aleatoria, $X \sim Exp(\lambda)$. Hallar la distribución de $Y = \min(\lambda, X)$.

16. Una partícula de masa m tiene velocidad aleatoria V, normalmente distribuida con parámetros $\mu = 0$ y σ^2. Hallar la función de densidad de la energía cinética, $E = \frac{1}{2}mV^2$.

17. Sea X una variable aleatoria con distribución $\Gamma(\alpha, \lambda)$. Hallar la densidad de $Y = \sqrt{X}$.

18. El tiempo semanal Y (en horas) durante el cual cierta máquina industrial no funciona, tiene una distribución Gamma con $\alpha = 3$ y $\lambda = 0.5$. La pérdida semanal L (en pesos) para la industria debido a esta baja está dada por $L = 3000Y + 800$ (3000 pesos por hora en que la máquina no funciona más 800 de costo fijo semanal). Calcular la probabilidad de que se pierdan más de 18800 pesos en una semana.

19. Sea X con densidad de Cauchy. Hallar la densidad de $Y = a + bX,\ \ b \neq 0$.

20. Hallar la densidad de la variable aleatoria $Y = e^X$ cuando $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$. Esta distribución se denomina *lognormal*. Verificar que $W = \ln(Y)$ tiene distribución normal.