Esp con prod interno. Esp Hilbert

Def Un ev sobre $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$). Un p.i en X es una fc $X \times X \to \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) tq

$\forall x, y, z \in X$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$)

a) $\langle x, x \rangle \geq 0$ (y $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}$)

b) $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

c) $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$

d) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ $\left(\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \right)$

ej las f's

·) $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$

$$\langle x, y \rangle \mapsto \sum x_k \overline{y_k}$$

·) $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\langle x, y \rangle \mapsto \sum^{n} x_k y_k$$

son p.i

·) Si X es ev con base $\{e_1, \dots e_k\}$

y $x, y \in X$ / $x = \sum \lambda_n x_n$ $y = \sum \beta_n e_n$

$$\Rightarrow \langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$\langle x, y \rangle \longmapsto \sum \lambda_n \overline{\beta_n}$$

es p.i

·) Sea (X, Σ, μ) es medible

$\Rightarrow$ $\langle f, g \rangle = \int f \bar{g}$ es prod interno

en $L^2(X)$

(notar $\int |f \bar{g}| < \infty$ por holder $p = q = 2$)

·) caso particular $a = \{a_n\}$ $b = \{b_n\} \in \ell^2$

$\Rightarrow$ la sucesion $\{a_n b_n\} \in \ell^1$

y la fc $\langle \cdot, \cdot \rangle : \ell^2 \times \ell^2 \longrightarrow \mathbb{C}$
$\langle a, b \rangle \longmapsto \sum a_n \overline{b_n}$

·) Si X ev con $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y S sub esp

$\Rightarrow$ la restriccion de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es p.i en S

.) Si X, Y son ev con p.i $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ y $\langle\cdot,\cdot\rangle_2 \Rightarrow Z = X\times Y$

es evpi con

$$(X\times Y)\times(X\times Y) \to \mathbb{C}$$

$$\langle (u,v),(x,y)\rangle = \langle u,x\rangle_1 + \langle v,y\rangle_2$$

Lem X evpi $x,y,z\in X$ $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$ ent

a) $\langle 0,y\rangle = \langle x,0\rangle = 0$

b) $\langle x, \alpha y + \beta z\rangle = \bar{\alpha}\langle x,y\rangle + \bar{\beta}\langle x,z\rangle$

c) $\langle \alpha x+\beta y, \alpha x+\beta y\rangle = |\alpha|^2\langle x,x\rangle + |\beta|^2\langle y,y\rangle$
$+ \alpha\bar{\beta}\langle x,y\rangle + \beta\bar{\alpha}\langle y,x\rangle$

demo ej

Prop X evpi $x,y\in X$ ent

(a) $|\langle x,y\rangle|^2 \le \langle x,x\rangle\langle y,y\rangle$

(b) La fc $\|\ \| : X\to\mathbb{R}$ dada por $\|x\| = \langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}$

es norma en X

dem (a) $x, y \neq 0$ uit. usamos el del lema anterior $\alpha = -\frac{\overline{\langle x,y\rangle}}{\langle x,x\rangle}$ $\beta = 1$

$\Rightarrow 0 \leq \langle \alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y \rangle$

$$= \left(\left|\frac{\langle x,y\rangle}{\cancel{\langle x,x\rangle}}\right|\right)^2 \cancel{\langle x,x\rangle} + \langle y,y\rangle - \overline{\frac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle}}\langle x,y\rangle$$

$$= \overline{\langle x,y\rangle}$$

$$- \frac{\langle x,y\rangle\langle y,x\rangle}{\langle x,x\rangle}\langle y,x\rangle$$

$\Rightarrow$?!:

$$\overline{\frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle x,x\rangle}} = \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle x,x\rangle} - \frac{|\langle x,y\rangle|^2}{\langle x,x\rangle} + \langle y,y\rangle$$

obs la norma $\| \| = \langle , \rangle^{\frac{1}{2}}$ se dice que inducida por el pi. Cuando tengamos un esp pi lo pensaremos como esp normado con pi. Es fácil ver que $\mathbb{F}^k, \ell^2, L^2(X)$ (por los pi todos arriba) como las normas inducidas son las definidas anteriormente

Notar que (a) se puede escribir como

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\| \|y\| \quad (C\text{-}S)$$

Lema: Sea X un pi $\langle , \rangle$ ent. $\forall\, u,v,x,y \in X$ se tiene

a) $\langle u+v, x+y\rangle - \langle u-v, x-y\rangle = 2\langle u,y\rangle + 2\langle v,x\rangle$

b) $4\langle u,y\rangle = \langle u+v, x+y\rangle - \langle u-v, x-y\rangle + i\langle u+iv, x+iy\rangle$

$$- i\langle u-ix, x-iy\rangle$$

si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$

dem: ej

---

teorema Sea X con p.i. con norma inducida $\|\cdot\|$ ent $\forall\, x, y \in X$

(a) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$
(regla paralelogramo)

(b) si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ $\quad 4\langle x, y\rangle = \|x-y\|^2 - \|x-y\|^2$

$\mathbb{F} = \mathbb{C}$ $\quad 4\langle x, y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2$
$- i\|x-iy\|^2$
(id de polarización)

obs la norma en $C[0,1]$ no provi de un p.i $\left(\|f\|_{C[0,1]} = \max_{x \in [0,1]} |f(x)|\right)$

no vale (a) fácil

$\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$

$x - y \quad \langle x-y, x-y\rangle^{\frac{1}{2}}$

prop (cont del p.i) Sea X ev pi

$\{x_n\}, \{y_n\} \subseteq X$ $\quad x_n \to x$, $y_n \to y$ en X

$\Rightarrow \langle x_n, y_n\rangle \longrightarrow \langle x, y\rangle$

dem

$$|\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| \leq |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, y\rangle| + |\langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle|$$

$$(C-S) \quad \leq \underbrace{\|x_n\|\,\|y_n - y\|}_{\to 0} + \underbrace{\|x_n - x\|\,\|y\|}_{\to 0}$$

ortogonalidad

Def Sea X ev p.i decimos que $x, y \in X$ son ortogonales si $\langle x, y\rangle = 0$

Dec además $\{e_1 \ldots e_k\} \subset X$ es ortonormal si $\|e_k\| = 1 \ \forall k$ y $\langle e_j, e_k\rangle = 0$ $\forall j \neq k$

Lema X ev p.i

(a) Un conjunto ortonormal $\{e_1 \ldots e_k\}$ es l.i en particular si $\dim X = k$ $\{e_1 \ldots e_k\}$ base de X y $\forall x \in X$

$$x = \sum_{n=1}^{k} \langle x, e_n\rangle e_n$$

En este caso decimos que $\{e_1 \ldots e_k\}$ b.o.n y $\langle x, e_n\rangle$ son las coordenadas en esa base

(b) Sea $\{v_1, \ldots, v_k\}$ l.i en X ent $\exists$ base ortonormal $\{e_1 \ldots e_k\}$ de $S = sp\{v_1 \ldots v_k\}$
gram-schmidt dmo ej

Def Un esp con p.i completo con respec métrica asociada a la norma inducida por el esp.i se dice esp Hilbert

ej (1) todo ev de dim $< \infty$ con $(\cdot,\cdot)$
(todo lo de la clase pasada)

(2) $L^2(X)$, ℓ^2 con los p.i estandar
(ya asumimos que $L^p(X)$ es completo)
?¿?

obs esp c/p.i que no es Hilbert

Sea $\ell^2 = \{ \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} / x_n \neq 0$ solo en finitos $n \}$

es | facil ver que

esto no es ℓ^2

$$\langle \{x_n\}, \{y_n\} \rangle = \sum x_n \overline{y_n} \text{ es p.i}$$

con norma asoc
$$\| \{x_n\} \| = \left(\sum |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

probar no es completo

¿) no dice que ℓ^2 es completo ??

prop Sea H Hilbert (completo), $Y \subset H$ subesp

ent Y Hilbert $\Leftrightarrow$ Y es cerrado en H

dem Y Hilbert $\Leftrightarrow$ Y completo

pero subesp de un metrico completo

completo $\Leftrightarrow$ cerrado

(clase pasada)

Complemento ortogonal

Def X ev con $(\cdot,\cdot)$. Dado $A \subset X$

def el complemento ortogonal de A

como $A^{\perp} = \{x \in X : (x, a) = 0 \ \forall a \in A\}$

(Si $A = \emptyset$ ponemos $A^{\perp} = X$)

ej 1) $X = \mathbb{R}^3$ $A = \{(a_1, a_2, a_3) : a_3 = 0\}$

$\Rightarrow A^{\perp} = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 : a_1 = a_2 = 0\}$

2) supon $\{e_1, \dots, e_n\}$ base de X

$A = sp\{e_1 \ldots e_p\} \quad 1 \le p < k$

$\Rightarrow \quad A^\perp = sp\{e_{p+1}, \ldots e_k\}$

Lem X ev p.i. $\quad A \subset X$ subconj ent

(a) $0 \in A^\perp$

(b) si $0 \in A \Rightarrow A \cap A^\perp = \{0\}$

si no $A \cap A^\perp = \phi$

(c) $\{0\}^\perp = X \quad , X^\perp = \{0\}$

(d) Si A contiene un bola $B_a(r)$

p/alg $r > 0$ y $a \in A \Rightarrow A^\perp = \{0\}$

$\Rightarrow$ en particular si A es abierto no vacío

$\Rightarrow A^\perp = \{0\}$

(e) $B \subset A \Rightarrow A^\perp \subset B^\perp$

(f) $A^\perp$ es subesp cerrado de X

(g) $A \subset (A^\perp)^\perp = A^{\perp\perp}$

(a) Ej (b) $x \in A \cap A^{\perp} \Rightarrow \langle x, x \rangle = 0$

$\Rightarrow x = 0$

$(0, a) = 0 \ \forall a \in A$

$\Rightarrow 0 \in A^{\perp}$

(c) Si $0 \neq x \in A^{\perp}$. Sea $y \in X^{\perp} \Rightarrow \langle y, x \rangle = 0$

$\forall x \in X$

en particular $\langle y, y \rangle = 0 \Rightarrow y = 0$

$\Rightarrow X^{\perp} = \{0\}$

(d) Sup $\exists\, 0 \neq x \in A^{\perp}$. Sea $y = \frac{x}{\|x\|}$

como $y \in A^{\perp}$ $(y, a) = 0$ $\forall a \in A$

como $a + \frac{ry}{2} \in A \Rightarrow \langle y, a + \frac{ry}{2} \rangle = 0$

$\in B_a(r)$ $\cup\!/$ $\quad$ $\frac{r}{2} \langle y, y \rangle$

$\Rightarrow \langle y, y \rangle = 0$

$\Rightarrow A^{\perp} = \{0\}$

$\langle a, a + \frac{ry}{2} \rangle$

$\langle a, a \rangle + \langle a, \frac{ry}{2} \rangle$

$\|a\|^2$

(f) Sea $y, v \in A^{\perp}$

prop Sea Y subesp de X euclí

ent $x \in Y^{\perp}$ es $\|x-y\| \geq \|x\| \quad \forall y \in Y$

dem por lema anterior

$$\|x-\alpha y\|^2 = \|x\|^2 - \bar{\alpha}\langle x,y\rangle - \alpha\langle y,x\rangle + |\alpha|^2\|y\|^2$$
$\forall x \in X$
$\forall y \in Y$
$\forall \alpha \in \mathbb{F}$

($\Rightarrow$) sean $x \in Y^{\perp}$ $y \in Y$

$\Rightarrow \langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle = 0$ usando

$\alpha = 1$ sería $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$
$\geq \|x\|^2$

($\Leftarrow$) $\|x-y\|^2 \geq \|x\|^2 \quad \forall y \in Y$ como Y subesp

$\Rightarrow$ esto vale con αy en lugar de y

$\Rightarrow 0 \leq \|x-\alpha y\|^2 - \|x\|^2 = -\bar{\alpha}\langle x,y\rangle$
$-\alpha\langle y,x\rangle + |\alpha|^2\|y\|^2$

Sea
$$\beta = \begin{cases} \dfrac{|\langle x, y\rangle|}{\langle y, x\rangle} & \text{si } \langle x, y\rangle \neq 0 \\ 1 & \text{si } \langle x, y\rangle = 0 \end{cases}$$

y $\beta\langle y, x\rangle = |\langle x, y\rangle|$ sea $\alpha = t\beta$ $t>0$

$$0 \leq -t\overline{\beta}\langle x, y\rangle - t\beta\langle y, x\rangle + t^2\underbrace{|\beta|^2}_{=1}\|y\|^2$$

$$= -2t\,|\langle x, y\rangle| + t^2\|y\|^2$$

o sea $\quad |\langle x, y\rangle| = \frac{t}{2}\|y\|^2$

Def $A \subset X$ ev es convexo si $\forall x, y \in A$

$tx + (1-t)y \in A \quad \forall t \in [0,1]$

teo (proy sobre un convexo) Sea $\emptyset \neq A \subseteq H$ Hilbert, A cerrado y convexo

Sea $p \in H \Rightarrow \exists!\, q \in A$ tq

$$\|p - q\| = \inf\{\|p - a\| : a \in A\} = \operatorname{dist}(p, A)$$

obs Sea $q \in A$ convexo y $\mathbb{F} = \mathbb{R}$

ent $\|p - q\| = \min_{a \in A} \|p - a\| \iff \langle p - q, a - q\rangle \leq 0$

supong q satisface, sea $a \in A$

y $v \in A$ $v = (1-t)q + ta$ $t \in [0,1]$

$\Rightarrow \|p - q\| \leq \|p - v\| = \|(p - q) - t(a - q)\|$

$$\|p - q\|^2 \leq \|p - q\|^2 + t^2\|a - q\|^2 - 2t\langle p - q, a - q\rangle$$

$$0 \leq \cancel{t}\left(t\|a-q\|^2 - 2\langle p-q, a-q\rangle \right)$$

$$\Rightarrow t \to 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \geq \langle p-q, a-q\rangle$$

✓

<u>réciproque</u>

$$\|p-a\|^2 = \|(p-q)-(a-q)\|^2$$

$$= \|p-q\|^2 + \underbrace{\|q-a\|^2}_{\geq 0} \underbrace{- 2\underbrace{\langle p-q, a-q\rangle}_{\leq 0}}_{\geq 0}$$

$$\geq \|p-q\|^2 \qquad \forall a \in A$$