PRÁCTICO 3

1. Sea $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una función como a continuación.

   (a) $\varphi(u, v) = (u, uv, v)$.
   (b) $\varphi(u, v) = (u^2, u^3, v)$.
   (c) $\varphi(u, v) = (\cos 2\pi u, \operatorname{sen} 2\pi u, v)$.

   En cada uno de los casos encontrar una superficie regular S y un abierto U maximal tales que $\varphi(U) = S$ y $\varphi|_U : U \to S$ resulte una parametrización.

2. Mostrar que el conjunto $S = \{(x, y, z) :\ z = x^2 - y^2\}$ es una superficie regular y que los dos mapas que siguen son parametrizaciones de S.

   (a) $\varphi(u, v) = (u + v, u - v, 4uv)$, con $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.
   (b) $\psi(u, v) = (u \cosh v, u \operatorname{senh} v, u^2)$, con $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ y $u > 0$.

3. Encontrar una parametrización del paraboloide $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = 1 + x^2 + y^2\}$.

4. Mostrar que el cilindro $\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ es una superficie regular y encontrar parametrizaciones cuyos entornos coordenados lo cubran.

5. Mostrar que las coordenadas esféricas constituyen un sistema coordenado de la esfera unitaria S^2 y encontrar sistemas coordenados similares para cubrirla toda. Entender cómo se escriben en coordenadas los paralelos, los meridianos y los círculos máximos.

6. Para cada una de las siguientes funciones hallar el dominio, encontrar sus puntos críticos y decidir para qué valores de c el conjunto $f^{-1}(c)$ es una superficie regular

   a) $f(x, y, z) = (x + y + z)^{-1}$ b) $f(x, y, z) = xyz^2$.

EJERCICIOS EXTRAS

7. Decir en qué región el mapa $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\varphi(u, v) = (u, u^2, v + v^3)$ es una parametrización.

8. Una manera de definir un sistema de coordenadas en la esfera $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$ es mediante la proyección estereográfica, que lleva el punto $(x, y, z) \neq (0, 0, 2)$ de la esfera al punto del plano xy donde corta la recta que pasa por (x, y, z) y el punto $(0, 0, 2)$. Llamamos π a esta proyección.

   (a) Mostrar que $\varphi = \pi^{-1}$ está dado por la fórmula

   $$\varphi(u, v) = \frac{2}{u^2 + v^2 + 4}(2u, 2v, u^2 + v^2).$$

   (b) Mostrar que con esta carta y otra similar se puede cubrir la esfera con dos entornos coordenados.

(c) Entender como se escriben en coordenadas los paralelos, los meridianos y los círculos máximos.

(d) Desarrollar todo lo anterior de manera análoga para la esfera unitaria centrada en el 0.

9. ¿Existe una función diferenciable $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ para la cual 0 no es un valor regular de f, pero sin embargo $f^{-1}(0)$ es una superficie regular?.