Prop Sea v.a X con $X \sim N(0, \sigma^2)$
$\Rightarrow X^2 \sim \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sigma^2}\right)$

dem si $Y \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha - 1} e^{-\lambda y} & \forall y > 0 \\ 0 & cc \end{cases}$$

quiero $Y := X^2$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} \frac{\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2} - 1} e^{-\frac{y}{2\sigma^2}} & y > 0 \\ 0 & c\,c \end{cases}$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{y}{2\sigma^2}} & y > 0 \\ 0 & cc \end{cases}$$

Ⓔ Recordamos si U v.a absoluta continua con func densidad f_U continua

$\Rightarrow V = U^2$ es abs cont

y

$$f_V(u) = \begin{cases} \dfrac{f_U(\sqrt{u}) + f_U(-\sqrt{u})}{2\sqrt{u}} & u > 0 \\ 0 & c.c \end{cases}$$

Usemos esto para probar que

$X^2 \sim \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sigma^2}\right)$

•) X es v.a contin con densidad

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \qquad (X \sim N(0, \sigma^2))$$

•) f_X es continua en todo $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ por Ⓔ

$$\therefore\ f_{X^2}(y) = \begin{cases} \dfrac{f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} & y > 0 \\ 0 & cc \end{cases}$$

Si $y > 0$

$$f_{X^2}(y) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\sqrt{y})^2}{2\sigma^2}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(-\sqrt{y})^2}{2\sigma^2}}}{2\sqrt{y}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi y \sigma^2}} e^{-\frac{y}{2\sigma^2}}$$

$$\therefore\ X^2 \sim \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sigma^2}\right)$$

Distribuciones simétricas

Def Sea X v.a en $(\Omega, \mathcal{A}, P)$
se dice que X es simétrica si
X y $-X$ tienen las mismas
distribuciones

esto es $P(X \leq t) = P(-X \leq t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$

ejemplo $X \sim N(0, \sigma^2)$ es simétrica

Lema sea X v.a discreta o continua
con con densidad f_X
$\Rightarrow$ X es v.a simétrica

$\Leftrightarrow$ f_X es una función par
salvo en una cantidad finita de
puntos

dem ejercicio

otro ejemplo sea X v.a. se dice

que X tiene distr cauchy si

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

por lema esta es simétrica

prop si X v.a con $X \sim U(0,1)$

$\Rightarrow Y = tg(\pi X - \frac{\pi}{2}) \sim$ Cauchy

si $x \in (0,1)$ $\quad \pi x - \frac{\pi}{2} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = K$

$tg(\pi x - \frac{\pi}{2})$ esta bien definida

en K y tiene inversa

•) $I = (0,1)$ y sea $g: I \to \mathbb{R}$ tq

$$g(x) = tg\left(\pi x - \frac{\pi}{2}\right)$$

•) g^{-1} existe en $g(I) = (-\infty, \infty)$

$$g^{-1}(y) = \left(arctg(y) + \frac{\pi}{2}\right)\frac{1}{\pi}$$

•) g es dif $\quad g'(x) = \dfrac{\pi}{\cos^2(\pi x - \frac{\pi}{2})}$

$\Rightarrow$ está bien definida $\underset{\in}{} \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ pq $x \in (0,1)$

•) $g'(g^{-1}(y)) = \dfrac{\pi}{\cos^2(arctg(y))} \neq 0$

y está bien def

•) Además como $X \sim U(0,1)$

$f(x) = 0$ si $x \notin I \in (0,1)$

$\Rightarrow$ Por prop (del cambio de variable) se tiene que $Y = g(X)$ es abs cont y

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \notin g(I) \\ f_X(g^{-1}(y)) \left| \dfrac{d\, g^{-1}(y)}{dy} \right| & y \in g(I) \end{cases}$$

$$\frac{d g^{-1}}{dy}(y) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1+y^2)}$$

como $g(I) = (-\infty, +\infty)$

$$\Rightarrow f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1+y^2)}$$

$$= \underbrace{f_X\Big(\underbrace{\tfrac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}(y) + \tfrac{\pi}{2}\right)}_{\in (0,1)}\Big)}_{=1 \quad (X \sim U(0,1))} \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{(1+y^2)}\right)$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{1}{(1+y^2)} \quad \Rightarrow X \sim \text{Cauchy}$$

De ahora en más v.a son v.a.c

<u>def</u> Sean X e Y v.a en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

Sea $F: \mathbb{R}^2 \to [0,1]$

Decimos que F es función de distr. conjunta del par (X,Y) si

$$F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$
$$= P((X,Y) \in (-\infty, x] \times (-\infty, y])$$

para calcular la proba de que (X,Y) esté en un rectángulo $R = (a,b] \times (c,d]$ solo necesito conocer F $(a<b \wedge c<d)$

$$P((X,Y) \in R) = F(b,d) - F(a,d) - F(b,c) + F(a,c)$$

Notación $F = F_{(X,Y)} = F_{X,Y}$

def si $F_{X,Y}$ es distr conjunta de X, Y

$\Rightarrow$ las funciones de distribución de X e Y se llaman distr marginales F_X y F_Y

Además

1) $F_X(x) = \lim_{y \to \infty} F_{X,Y}(x,y) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2) $F_Y(y) = \lim_{x \to \infty} F_{X,Y}(x,y) \quad \forall y \in \mathbb{R}$

dem (1) $\quad A_n = (X \leq x, Y \leq n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow (X \leq x) = (X \leq x) \cap \underbrace{\Omega}_{= \bigcup_{n=1}^{\infty} (Y \leq n)}$$

$$= \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

$$\Rightarrow F_X(x) = P(X \leq x) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

(An creciente) $\quad = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$

$$= \lim_{n\to\infty} P(X \leq x, Y \leq n)$$

$$= \lim_{n\to\infty} F_{X,Y}(x, y)$$

Probar ahora que $\lim_{y\to\infty} F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)$

Ayuda

$$(X \leq x, Y \leq \underbrace{[y]}_{\in\mathbb{N}}) \subseteq (X \leq x, Y \leq y) \subseteq (X \leq x, Y \leq \underbrace{[y]+1}_{\in\mathbb{N}})$$

Def Una función de densidad bidimensional o bivariada es una función $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tq

1) $f(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

2) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$

def Sea X e Y v.a en en $(\Omega, \mathcal{A}, P)$
Decimos que X e Y tienen densidad conjunta si existe f densidad bidimensional y que

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(s,t)\, ds\, dt$$

$\forall x, y$

en este caso f es dicha densidad conjunta

notación $f = f_{X,Y} = f_{(X,Y)}$

obs si X e Y v.a con función densidad conjunta $f_{X,Y}$

$\Rightarrow$ X e Y son v.a abs continuas (es decir tienen densidad)

$$P(X \leq x, -\infty \leq Y \leq \infty) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} X \leq x, Y \leq n\right)$$
$$(\text{creciente}) = \lim_{n \to \infty} P(X \leq x, Y \leq n) = \lim_{n \to \infty} F(x,n)$$

$= \lim_{n\to\infty} \int_0^x \int_0^n f_{X,Y}$

dem $F_X(x) = P(X \leq x)$

$= P(X \leq x, -\infty < Y < \infty) =$

(por hipótesis) $\overset{*}{=} \int_{-\infty}^{x} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \left(f_{X,Y}(u,v)\, dv \right)}_{f_X(u)} du$

proponemos como densidad de X

a $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,v)\, dv$

Vemos que f_X es densidad

) $f_X(x)$ es no negativa pues $f_{X,Y}$ es

no negativa (por ser densidad bidim)

$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(u)\, du = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u,v)\, dv \right) du$

$= 1$

por ser $f_{X,Y}$ bidim

Además $F_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u)\, du$ por $*$

$\therefore$ X es v.a absolut cont

ejemplo Sea $R > 0$

$$D(0,R) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R\}$$

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} c & \text{si } (x,y) \in D(0,R) \\ 0 & \text{cc} \end{cases}$$

quiero encontrar c tal que f sea función de densidad bidim

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int \int c\, 1_{D(0,R)}(x,y)\,dx\,dy$$

$$c \left(\int \int 1_{D(0,R)}(x,y)\,dx\,dy \right)$$

c. (Área de disco)

$= c\pi R^2 \Rightarrow c = \dfrac{1}{\pi R^2}$

$\therefore f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi R^2} & (x,y) \in D(0,R) \\ 0 & cc \end{cases}$

Supongamos que elegimos al azar un $(x,y) \in D(0,R)$ y queremos que a cualquier sub de $D(0,R)$ con la misma área se le asigne la misma proba (uniformidad)

definimos (X,Y) como

X: v.a indica la 1era coordenada de (x,y)

Y: v.a indica la 2da coord de (x,y)

Para que se cumpla esto vamos a tomar como densidad conjunta a f

y $F(x,y) = \int\int f(u,v)\,du\,dv$

llamamos a $f = f_{X,Y}$

Calculemos f_X y f_Y vale por la demo pasada

Sea $x \in \mathbb{R}$ $\quad f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,v)\,dv$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi R^2} 1_{D(0,R)}(x,v)\,dv$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{1}{\pi R^2}\,dv & -R \leq x \leq R \\ 0 & cc \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\pi R^2} 2\sqrt{R^2 - x^2} & \text{si } |x| \leq R \\ 0 & \text{cc} \end{cases}$$

Análogo

$$A_y(y) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{R^2 - y^2}}{\pi R^2} & \text{si } |y| \leq R \\ 0 & \text{cc} \end{cases}$$