Orientación de superficies

<u>def</u> Una superficie regular se dice orientable si existe una familia $\mathcal{F}$ de parametrizaciones que cubren S tales que si $\varphi: U \to S$ y $\psi: V \to S$ son param en $\mathcal{F}$ y $\varphi(U) \cap \psi(V) \neq \phi$

$$\Rightarrow \det\left(d_q(\varphi^{-1} \circ \psi)\right) > 0$$

$$\forall p = \psi(q) \in \varphi(U) \cap \psi(V)$$

$$\left(\forall q \;/\; q \in \psi^{-1}(\varphi(U) \cap \psi(V))\right)$$

·) La elección de tal familia se denomina una orientación de S (y se dice que S es orientada)

·) Si no existe una tal familia $\mathcal{F}$ como en la definición, S se dice no orientable

<u>Ejemplos</u> Si es posible cubrir a S con una carta $\Rightarrow$ S es orientable

ej: gráfico de función

Prop Sea S una superficie regular, supongamos que existe $\varphi: U \to S$ $\psi: V \to S$ param. Tal que $\varphi(U) \cup \psi(V) = S$ y $\varphi(U) \cap \psi(V) = W$ es conexo

$\Rightarrow S$ es orientable

dem Como W conexo $\Rightarrow \psi^{-1}(W) = \tilde{W}$ es conexo en $\mathbb{R}^2$. Luego $\det(d(\varphi^{-1} \circ \psi)) : \tilde{W} \to \mathbb{R}$
$w \to \det(d_w \varphi^{-1} \circ \psi)$
es continua y nunca nula y como $\tilde{W}$ es conexo*, $\det(d\varphi^{-1} \circ \psi)$ nunca cambia de signo (im $\det(d\varphi^{-1} \circ \psi)$ es conexo en $\mathbb{R}$)

◦) Si $\det(d\varphi^{-1} \circ \psi) > 0$ en $\tilde{W}$ entonces S es orientable (tomando $\mathcal{F} = \{\varphi, \psi\}$)

◦) Si $\det(d\varphi^{-1} \circ \psi) < 0$ en $\tilde{W}$

Sea $\sigma(z, w) = \varphi(w, z)$ $\quad R(z, w) = (w, z)$

Luego $\sigma = \varphi \circ R$

Se tiene que σ está definido

$R^{-1}(U) = R(U) \quad (R^{-1} = R)$

Si $\varphi^{-1}(p) = (u_0, v_0)$ entonces $\sigma^{-1}(p) = (v_0, u_0)$

luego σ es param de S (pues R es difeo de $\mathbb{R}^2$)

Sea $\mathcal{F} = \{\sigma, \varphi\}$ entonces

$$\det(d\,\sigma^{-1} \circ \varphi) = -\underbrace{\det(d\varphi^{-1} \circ \varphi)}_{<0} > 0 \text{ en } \tilde{W}$$

luego S es orientable

---

ejemplo S^2 con las proyecciones estereográf

Dados φ, ψ sist de coord en p

$$\psi_u \times \psi_v = \det(d\varphi^{-1} \circ \psi)\, \varphi_{\tilde{u}} \times \varphi_{\tilde{v}}$$

Recordemos

$$N_\varphi(p) = \frac{(\varphi_{\tilde{u}} \times \varphi_{\tilde{v}})(\tilde{q})}{\|\varphi_{\tilde{u}} \times \varphi_{\tilde{v}}\|}, \quad \varphi(\tilde{q}) = p$$

$$N_\psi(p) = \frac{(\psi_u \times \psi_v)(q)}{\|\psi_u \times \psi_v\|} \qquad \psi(q) = p$$

Luego $N_\varphi(p) = N_\psi(p) \Leftrightarrow \det(d_q \varphi^{-1} \circ \psi) > 0$

def Un campo normal unitario diferen en S es una función $N: S \to \mathbb{R}^3$ dif tal que $\begin{cases} N(p) \perp T_pS & \forall p \in S \\ \|N(p)\| = 1 \end{cases}$

prop Una sup regular S es orientable ~~ssi~~ y solo si $\exists\, N: S \to \mathbb{R}^3$ campo normal unitario diferenciable

demo práctico

Ej Sea $S = \{\varphi(u,v) \mid u \in \mathbb{R}, |v| < r\}$

donde $\varphi(u,v) = \alpha(u) + v\,V(u)$

$\alpha(u) = (\cos u, \operatorname{sen} u, 0)$

$V(u) = \cos\left(\frac{u}{2}\right)\alpha(u) + \operatorname{sen}\left(\frac{u}{2}\right)(0,0,1)$

para r pequeño S es una sup regular y no orientable

demo Supongamos $\exists N$ campo normal unitario dif

Consideremos $n(u) = N(\alpha(u))$ $n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dif

$\varphi_u(u,v) = \alpha'(u) + v\,V'(u)$

$\varphi_v(u,v) = V(u)$

$\varphi_u(u,0) \times \varphi_v(u,0) = \alpha'(u) \times V(u)$ es unitario (pues $\|\alpha'(u)\| = 1$ y $\|V(u)\| = 1$ y $\alpha'(u) \perp V(u)$)

$\Rightarrow n(u) \overset{\otimes}{=} \varepsilon(u)\big(\alpha'(u) \times V(u)\big)$, $\varepsilon(u) = \pm 1$

Como ε es continua $\Rightarrow \varepsilon(u) = 1$ o $\varepsilon(u) = -1$ $\forall u$

$\otimes$ n es normal y unitario por $n(u) = N(\alpha(u))$ y $\alpha'(u) \times V(u)$ tambien es normal $\Rightarrow n$ y $\alpha'(u) \times V(u)$ son paralelos y ambos norma 1

Luego $n(0) = -n(2\pi)$ pues

$n(0) = \varepsilon(0)\,(\alpha'(0) \times V(0))$

$n(2\pi) = \varepsilon(2\pi)\,(\alpha'(2\pi) \times V(2\pi))$ ε continua

y $V(0) = -V(2\pi)$ (chequear) $(\alpha'(0) = \alpha'(2\pi))$ $(\varepsilon(0) = \varepsilon(2\pi))$

$\Rightarrow n(0) = -n(2\pi)$

$N(1,0,0) = N(\alpha(0)) = n(0) = -n(2\pi)$

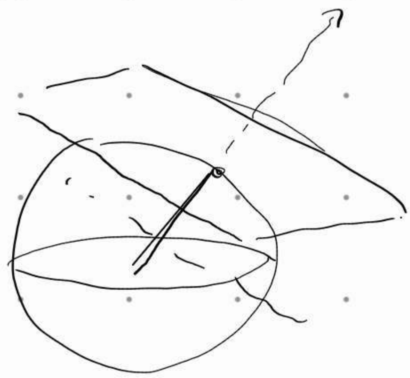
$= -N(\alpha(2\pi)) = -N(1,0,0)$

$\Rightarrow N(1,0,0) = 0$ abs! no tiene norma 1

def Sea S una sup regular con orientación N, la aplicación $N: S \to S^2$

S^2 esfera

se denomina mapa de gauss



Nota $T_{N(p)}S^2 = N(p)^{\perp}$

$= T_pS$

pq $N(p) \perp T_pS$

$\Rightarrow \quad dN_p : T_pS \to T_pS$

ejemplo Sea $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax+by+cz=d\}$

$a,b,c \in \mathbb{R}$

$N : S \to \mathbb{R}^3 \qquad N(x,y,z) = \dfrac{(a,b,c)}{\|(a,b,c)\|}$

Sea $v \in T_pS$ i.e $v = \gamma'(0)$ $\quad \gamma : I \to S$ dif, $\gamma(0) = p$

$\Rightarrow dN_p(v) = dN_p(\gamma'(0)) = \dfrac{d}{dt}\Big|_0 \underbrace{N(\gamma(t))}_{cte} = 0$

$\Rightarrow dN_p(v) = 0 \quad \forall v \in T_pS \quad dN_p \equiv 0 \quad \forall p \in S$

Sea $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2+y^2+z^2 = 1\}$

$N: S \to \mathbb{R}^3$, $N(x,y,z) = -(x,y,z)$
defino

Sea $v \in T_pS$, $v = \gamma'(0)$ $\gamma(0) = p$

$$dN_p(v) = dN_p(\gamma'(0)) = \frac{d}{dt}\Big|_0 N(\gamma(t))$$

$$= \frac{d}{dt}\Big|_0 (-\gamma(t)) = -\gamma'(0) = -v$$

$\Rightarrow dN_p = -Id_{T_pS}$ $\forall p$

3) Sea $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2+y^2+1\}$ "=0 ?.:

$N(x,y,z) = (-x,-y,0)$

Sea $v \in T_pS$ $v = \gamma'(0)$, $\gamma(0) = p$

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

$$\gamma'(0) = (x'(0), y'(0), z'(0)) = v$$

$$dN_p(v) = \frac{d}{dt}\Big|_0 N(\gamma(t)) = \frac{d}{dt}\Big|_0 (-x(t), -y(t), 0)$$

$$= -(x'(0), y'(0), 0) = -\pi(v)$$

donde $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \quad \pi(x,y,z) = (x,y,0)$

c) Si v es tangente al cilindro y paralelo a $Z \Rightarrow dN_p(v) = 0$

d) Si v es paralelo a plano xy

$\Rightarrow dN_p(v) = -v$