ÁLGEBRA III - 2023
Práctico 1

Repaso de Álgebra Lineal

Nota: $\mathbb{F}$ denota, salvo mención contraria, un cuerpo a lo largo de este práctico.

1. Sea $\mathbb{F}$ un subcuerpo de los números complejos y sea A una matriz 2×2 sobre $\mathbb{F}$,
   $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.
   Para cada uno de los siguientes polinomios f sobre $\mathbb{F}$, calcular $f(A)$.
   (i) $f = x^2 - x + 2$,
   (ii) $f = x^3 - 1$,
   (iii) $f = x^2 - 5x + 7$.

2. Sea T el operador lineal en $\mathbb{R}^3$ definido por $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_3, -2x_2 - x_3)$. Sea f el polinomio sobre $\mathbb{R}$ definido por $f = -x^3 + 2$. Hallar $f(T)$,

3. (a) Sea S un conjunto de polinomios no nulos sobre $\mathbb{F}$ tal que si f y g están en S, no tienen el mismo grado. Mostrar que S es un conjunto linealmente independientes de $\mathbb{F}[x]$¨.
   (b) Si a y $b \in \mathbb{F}$ con $a \neq 0$, demostrar que los polinomios $1, ax+b, (ax+b)^2, (ax+b)^3, \ldots$ forman una base de $\mathbb{F}[x]$.

4. Si $h \in \mathbb{F}[x]$ tiene grado mayor o igual a 1, demostrar que la asignación $f \to f(h)$ es una transformación lineal inyectiva de $\mathbb{F}[x]$ en $\mathbb{F}[x]$. Además, mostrar que esta transformación es un isomorfismo si y sólo si $\operatorname{gr}(h) = 1$.

5. Usando la interpolación de Lagrange, hallar un polinomio f, con coeficientes reales, tal que f tenga grado ≤ 3 y que $f(-1) = -6, f(0) = 2, f(1) = -2, f(2) = 6$.

6. Sea $\mathbb{F} = \mathbb{R}$,
   $$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
   y $p = (x-2)(x-3)(x-1)$.
   (a) Demostrar que $p(A) = 0$.
   (b) Sean P_1, P_2, P_3 los polinomios de Lagrange para $t_1 = 2, t_2 = 3, t_3 = 1$. Calcular $E_i = P_i(A)$ para $i = 1, 2, 3$.)
   (c) Demostrar que $E_1 + E_2 + E_3 = I,\ E_i E_j = \delta_{i,j} E_i$ y que $A = 2E_1 + 3E_2 + E_3$.

7. Sean A y P matrices $n \times n$ sobre $\mathbb{F}$ con P inversible. Si f es cualquier polinomio sobre $\mathbb{F}$, mostrar que
   $$f(P^{-1}AP) = P^{-1} f(A) P.$$

8. Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{Q}[x]$ son ideales. En caso de serlo, encontrar su generador mónico

   (a) todos los f de grado par;

   (b) todos los f de grado 5;

   (c) todos los f con $f(0) = 0$;

   (d) todos los f con $f(2) = f(4) = 0$;

   (e) todos los f en la imagen del operador lineal

$$T(\sum_{i=0}^{n} c_i x^i) = \sum_{i=0}^{n} \frac{c_i}{i+1} x^{i+1}$$

9. Encontrar el m.c.d de cada uno de los siguientes polinomios.

   (a) $x^2 - 4$, $x^2 - x - 6$ y $x^2 + 4x + 4$.

   (b) $x^4 - x^3 + x^2 + x - 1$ y $x^3 - 1$,

10. (a) Sea A una matriz $n \times n$ sobre $\mathbb{F}$. Demostrar que el conjunto de todos los polinomios $f \in \mathbb{F}[x]$ tales que $f(A) = 0$ es un ideal.

    (b) Si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix};$$

    encontrar el generador mónico del ideal de todos los polinomios $f \in \mathbb{F}[x]$ tales que $f(A) = 0$.

11. Mostrar que la intersección de cualquier número de ideales en $\mathbb{F}[x]$ es un ideal.

12. Sean p un polinomio mónico sobre $\mathbb{F}$, f y g dos polinomios primos relativos sobre $\mathbb{F}$. Mostrar que el máximo común divisor de pf y pg es p.

13. Usando el teorema fundamental del álgebra, demostrar que en $\mathbb{C}$, dos polinomios son primos relativos si y sólo si no tienen raíces en común.

14. Sea $h \in \mathbb{F}[X]$ un polinomio no nulo. Dados $f; g \in \mathbb{F}[X]$, se dice que f es congruente a g módulo h si $h | f - g$. En tal caso se escribe $f \equiv g (\text{mod } h)$. Probar que

    i) $(\text{mod } h)$ es una relación de equivalencia en $\mathbb{F}[X]$.

    ii) Si $f_1 \equiv g_1 (\text{mod } h)$ y $f_2 \equiv g_2 (\text{mod } h)$ entonces $f_1 + f_2 \equiv g_1 + g_2 (\text{mod } h)$ y $f_1 f_2 \equiv g_1 g_2 (\text{mod } h)$.

    iii) Si$f \equiv g (\text{mod } h)$ entonces $f^n \equiv g^n (\text{mod } h)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

    iv) r es el resto de la división de f por h si y sólo si$f \equiv r (\text{mod } h)$ y $r = 0$ o $\text{gr}(r) < \text{gr}(h)$.

    v) Si h es un polinomio irreducible y $fg \equiv 0 (\text{mod } h)$ mostrar que $f \equiv 0 (\text{mod } h)$ o $g \equiv 0 (\text{mod } h)$. Mostrar con un contraejemplo que esto es falso si h no es irreducible.