Teorico Estructuras Algebraicas

Javier Vera

October 12, 2024

1 Clase 1

2 Clase 2

3 Clase 3

4 Clase 4

5 Clase 5

6 Clase 6

7 Clase 7

Teorema 7.1 (Representacion de Riesz)
Sea $\mathcal{H}$ Hilbert $f \in H'$ entonces $\exists! y \in H$ tal que $f(x) = (x, y) \quad \forall x \in \mathcal{H}$. Mas aun $\|f\|_{\mathcal{H}'} = \|y\|_{\mathcal{H}}$

Proof. □

Teorema 7.2
$\mathcal{H}$ Hilbert sea $T_H : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ dado por $T_H(y) = f_y$ donde $f_y(x) := (x, y) \quad \forall x \in \mathcal{H}$. Entonces T_H es biyectivo. Ademas $\forall y \in \mathcal{H} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{F}$ 1. $T_H(\alpha y + \beta z) = \overline{\alpha} T_H(y) + \overline{\beta} T_H(z)$ 2. $\|T_H(y)\|_{\mathcal{H}'} = \|y\|_H$ Ademas se puede definir un producto interno en $\mathcal{H}'$ como

$$(T_H(z), T_H(y))_{\mathcal{H}'} = (y, z)_{\mathcal{H}} \quad \forall y, z \in \mathcal{H}$$

Con este producto $\mathcal{H}'$ es Hilbert y la norma asociada a cada f_y coincide con la norma de f_y como elemento $B(\mathcal{H}, \mathbb{F})$

Proof. Pendiente copiar

□

8 Clase 8

9 Clase 9

10 Clase 10

Corolario 10.0.1
Sea $X \neq \emptyset$ normado, $x \in X$ fijo $x \neq 0$ entonces

(a.) $\exists f \in X'$ *tal que* $\|f\| = 1 \quad f(x) = \|x\|$

(b.) $\|x\| = \sup\{|f(x)| : f \in X', \|f\| = 1\} = \sup A$

(c.) *Si* $y \in X$ *con* $x \neq y$, $\exists f \in X'$ *tal que* $f(x) \neq f(y)$

(En particular, X normado, $x \neq 0$ *entonces* $X' \neq \emptyset$*)*

Proof. (a.) Por [[Teórico 10 3a0090]] usando $W = \{0\}$

(b.) Veamos

2.1 a. sup $A \geq \|x\|$

2.2 $|f(x)| \leq \|f\|\|x\|$ (Vale siempre truco de $\frac{x}{\|x\|}$) entonces $\sup\{|f(x)| : \|f\| = 1\} \leq \|x\|$

(c.) 3.1 (Ejercicio) $W = Sp\{y\}$ y usando [[3a0090]] $\delta > 0$ por que $\|-x + y\| \neq 0$ por que son distintos (suponiendo que $x \notin Sp\{y\}$)

3.2 Si no supusiera eso es trivial $f(x) \neq \alpha f(x) = f(\alpha x)$

3.3 Entonces$f(-x) = \delta$ osea $f(x) = \delta \neq 0$ pero $f|_W \equiv 0$ entonces como $y \in W$ sucede $f(y) = 0$

□

11 Clase 11

Corolario 11.0.1
Si $x_1, \ldots, x_n \in X$ *son linealmente independientes entonces existe* $f_1, \ldots, f_n \in X'$ *tal que*

$$f_j(x_k) = \delta_{k_j} \quad 1 \leq j, k \leq n$$

Proof. 1. Si $W = Sp\{x_1, \ldots, x_n\}$ por [[Teórico 10 3a0090]] conseguimos $f_{1,W}, \ldots, f_{n,W} \in W'$ que cumplen lo que queremos. No deberiamos usar $Sp\{x_2, \ldots, x_n\}$ y aplicar teo para conseguir $f_{1,W}$ esta cunpliria segun el teo $f_{1,W}(x_i) = 0$ si $i = 2, \ldots n$.. no me queda claro porque δ seria 1. Pero asi hacemos lo mismo y conseguimos todas las funciones que necesitamos

2. Entonces por [[Teórico 10 8c080d]] existen $f_{i,X} = f_i \in X'$ extensiones

□

Teorema 11.1
DUDA X' *separable entonces* X *separable*

Proof. 1. Sea $B = \{f \in X' : \|f\| = 1\} \subseteq X'$

2. Como X' es separable $\exists F = \{f_j\} \subseteq B$ tal que F es denso en B (B separable porque X' separable)

3. Para $n \in \mathbb{N}$ sea w_n con $\|w_n\| = 1$ y $f_n(w_n) \geq \frac{1}{2}$ (Existe por def de $\|f\|$ supremo)

4. Sea $W = \overline{Sp}\{w_j\}$ si $W \subsetneq X$ usando Teórico tenemos $f \in B$ tal que $f(w) = 0 \quad \forall w \in W$

5. $\frac{1}{2} \leq |f_n(w_n)| = |f_n(w_n) - f(w_n)| \leq \|f_n - f\|\|w_n\| = \|f_n - f\| \quad \forall n \in \mathbb{N}$ (Por que $f(w_n) = 0$)

6. Esto contradice la densidad de F en B. Entonces $W = X$.

7. Ahora razonando como en Teórico Parte 2, la vuelta.

8. Tomamo un $x \in \overline{Sp}\{w_j\}$ como es clausura existe $Sp\{w_j\}$ tal que x

9. Entonces $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|\| < \frac{\epsilon}{2}$

10. Como $Sp\{w_j\}$ entonces $c_n w_n$ y a esta si la podemos aproximar por con coeficientes racionales

11. Se puede ver que las combinaciones lineales finitas con coeficientes racionales son densas (y claramente son numerables). Por ende X es separable

□

Observación
X separable no implica X' *separable*

1. *no es separable por que vimos que si $p \in [1,\infty), q \in (1,\infty]$ hay un isomorfismo de en con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ entonces si fuese separable entonces seria separable*

2. *separable pero es isomorfo isometricamente a que no es separable. Por lo tanto no puede haber isomorfismo entre y pues es separable y no es separable*

Teorema 11.2 (Hahn-Banach sobre $\mathbb{R}$)
X espacio vectorial $p : X \to \mathbb{R}$ Teórico Supongamos $\exists W \subseteq X$ subespacio y $f_W : W \to \mathbb{R}$ lineal tal que $f_W(w) \leq p(w) \quad \forall w \in W$ Entonces $\exists f_X : X \to \mathbb{R}$ extension de f_W tal que $f_X(x) \leq p(x) \quad \forall x \in X$

Proof. X espacio vectorial real, sea E el conjunto de funciones lineal f en X tales que:

- f esta definida en un subespacio D_f con $W \subseteq D_f \subseteq X$
- $f = f_W$ en W
- $f \leq p$ en D_f

1. Notar que E es el conjunto de todas las extensiones de f_W a subespacios $D_f \subseteq X$ tales que safistacen el teorema de Hahn-Banach en reales, pero con $X = D_f$ ($E \neq 0$ por que $f_W \in E$)
2. Definimos un orden $f < g \iff D_f \subseteq D_g$ y $f = g$ en D_f. Es facil ver que es orden parcial
3. Sea $\tilde{E} \subseteq E$ con $\tilde{E}$ totalmente ordenado, osea una cadena de E. Entonces $\forall f, g \in \tilde{E}$ sucede que g es extension de f y $D_f \subseteq D_g$ o viceversa)
4. Sea $Z_{\tilde{E}} = \bigcup_{f \in \tilde{E}} D_f$. Es directo ver que $Z_{\tilde{E}}$ es subespacio.
5. Sea $x, y \in Z_{\tilde{E}}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ entonces $x \in D_f$ e $y \in D_g$
6. Por ser $\tilde{E}$ totalmente ordenado (o cadena) sin perdida de generalidades $f \leq g$ por lo tanto $D_f \subseteq D_g$ entonces $x, y \in D_g$ como D_g subespacio $\alpha x + \beta y \in D_g$
7. Definimos $f_{\tilde{E}} : Z_{\tilde{E}} \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera.
8. Dado $z \in Z_{\tilde{E}}$ sabemos $\exists \delta \in \tilde{E}$ tal que $z \in D_\delta$ entonces $f_{\tilde{E}}(z) = \delta(z)$
9. La definicion es buena ya que si $z \in D_\mu$ como $\tilde{E}$ es orden total $D_\mu \subseteq D_\delta$ entonces $\delta = \mu$ coinciden en D_μ o viceversa entonces $\delta(z) = \mu(z)$
10. Usando el orden total de $\tilde{E}$ y razonando como arriba es facil ver que $f_{\tilde{E}}$ es lineal.
11. Mas aun $f_{\tilde{E}} \in E$ (Osea cumple las hipotesis) y ademas $f \leq f_{\tilde{E}}$ en el sentido de la relacion de orden. Entonces $f_{\tilde{E}}$ es cota superior de $\tilde{E}$ por *Lema de Zorn* E tiene un elemento maximal f_{max}
12. Suponemos $D_{f_{max}} \neq X$. Por Teórico sucede que f_{max} tiene una extension que esta claramente en E (osea cumple las hipotesis) contradiciendo que f_{max} fuera maximal.

□

Definición 11.1
Funcional de Minkowski $C \subseteq X$ normado real, con $0 \in C$ y C abierto. El funcional de Minkowski *p_C de C esta dado por*

$$p_C(x) = \inf\{\alpha 0 : \alpha x \in C\} \quad \forall x \in X$$

Como $0 \in C$ y C abierto p_C esta bien definido.

Observación
DUDA Notar que si $C = B_1(0)$ entonces $p_c(x) = \|x\|$ y si $C = B_r(0)$ entonces $p_C(x) = \frac{\|x\|}{r}$

Proof.

1. Sea α tal que $\|x\| < \alpha$ entonces $\left\|\frac{x}{\alpha}\right\| < \left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| = 1$ entonces $C = B_1(0)$
2. Entonces $p_C(x) \leq \|x\|$ (en todo caso menor que α)

3. Si fuera $p_C(x) < \|x\|$ por def de infimo $\exists \alpha \in (p_C(x), \|x\|)$ intervalo, tal que $\frac{x}{\alpha} \in C$
4. Entonces $\left\|\frac{x}{\alpha}\right\| 1$ que es absurdo

$\square$

Lema 11.3
Sean $\emptyset \neq C \subseteq X$ normado real, C abierto y convexo con $0 \in C$. Entonces el Teórico nombrado p_C es sublineal y

1. (a) $\quad C = \{x : x \in X,\ p_C(x) < 1\}$
2. (b) $\quad 0 \leq p_C(x) \leq c\|x\| \quad \forall x \in X$

Proof. DUDA Sublineal

1. Para $x, y \in X$ sean $\alpha p_C(x)$ con $\beta p_C(y)$.
2. Sea $r = \alpha + \beta$ entonces $r\alpha$ y $r\beta$ (DUDA no tengo que pedir que ademas sean mayores que 0. Si no en 4. $\frac{\alpha}{r}$ podria ser negativo)
3. Entonces como p_C es funcional lineal, multiplico α y llego a que αC. Analogo C.
4. Luego como C convexo $\frac{1}{r}(x+y) = \frac{\alpha}{r}\alpha C$ (Notar que $\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r} = 1$ con $\frac{\alpha}{r}, \frac{\beta}{r} < 1$ por 2. por eso esta en C recordar por convexidad $(1-t)x + ty \in C$)
5. entonces $p_C\left(\frac{1}{r}(x+y)\right) < 1$ por lo tanto $p_C(x+y) < r = \alpha + \beta$
6. Como α, β son arbitrarios se sigue que $p_C(x+y) \leq p_C(x) + p_C(y)$ (DUDA) (Osea p_C cumple desigualdad triangular)
7. Y es claro que $p_C(\alpha x) = \alpha p_C(x) \quad \forall \alpha \geq 0$. Mostrando que p_C es Teórico

$\square$

(b)

1. Por otro lado $0 \in C$ abierto entonces $\exists \delta 0$ tal que $\|z\| \leq \delta$ implica $z \in C$ (Definicion de abierto). Entonces para tales z sucede $p_C(z) \leq 1$.
2. Si elegimos ahora $z = \frac{\delta}{2} \cdot \frac{x}{\|x\|}$ vale $\|z\| < \delta$ y $\frac{\delta}{2} \cdot \frac{1}{\|x\|} p_C(x) = p_C(z) \leq 1$. (Por sublinealidad)
3. Por lo tanto $p_C(x) \leq \frac{2}{\delta}\|x\|$ entonces vale (b)
4. $p_C(x) 0$ por definicion de Teórico

(a)

1. $(\subseteq)$ Si $x \in C$ entonces C para algun $\alpha < 1$ por que $\|\alpha\| = \alpha x\|$ y agrando el α hasta que este metido en una bola centrada en 0 adentro de C que existe por que C es abierto (DUDA pero si $\|x\|$ es muy grane α tiene que ser muy grande quizas mas que 1)
2. Entonces $p_C(x) \leq \alpha < 1$
3. $(\supseteq)$ Si tomamos x tal que $p_C(x) < 1$ entonces $\exists \alpha 0$ tal que $p_C(x) < \alpha < p_C(x) + \epsilon < 1$ tal que αC (Por def de infimo) por lo tanto $\alpha < 1$
4. Luego como $0 \in C$ convexo, $x = \alpha\alpha) 0 \in C$ entonces $x \in C$

Teorema 11.4 (Teorema de Separacion (DUDA))
X normado real o complejo. Sean $A, B \subseteq X$ conjuntos disjuntos no vacios y convexos

- *(a) Si A abierto $\exists f \in X'$ con $\gamma \in R$ tal que*

$$Re(f(a)) < \gamma \leq Re(f(b)) \quad \forall a \in A \quad \forall b \in B$$

- (b) Si A compacto y B cerrado entonces $\exists f \in X'$ con $\delta, \gamma 0$ tales que

$$Re(f(a)) \leq \gamma - \delta < \gamma + \delta \leq Re(f(b)) \quad \forall a \in A \quad \forall b \in B$$

Proof. (a)

1. Supongo X es real. Sean $a_0 \in A$, $b_0 \in B$ y $w_0 = b_0 - a_0$ con $C = w_0 + A - B$
2. Entonces $0 \in C = \bigcup_{b \in B}(w_0 + A - b)$ abierto (union de abiertos por que A es abierto y trasladar abiertos es abierto) (DUDA esto no es en espacio vectorial topologico??)
3. C convexo veamoslo, sean $a_1 - b_1 + w_0 \in C$ y $a_2 - b_2 + w_0 \in C$

□

$$\alpha(a_1 - b_1 + w_0) + (1-\alpha)(a_2 - b_2 + w_0) \tag{1}$$
$$= \alpha a_1 + (1-\alpha)a_2 - (\alpha b_1 + (1-\alpha)b_2) + w_0 \tag{2}$$
$$= a_3 - b_3 + w_0 \in C \tag{3}$$

para ciertos $a_3 \in A, b_3 \in B$ que existen pues A y B son abiertos

1. Como A y B son disjuntos y C conexo $w_0 \notin C$ entonces por Teórico (negandolo) $p_C(w_0) \geq 1$
2. Sea $W = Sp\{w_0\}$ y $f_W : W \to \mathbb{R}$ lineal dada por $f_W(\alpha w_0) = \alpha$
3. Si $\alpha \geq 0$. $f_W(\alpha w_0) = \alpha \leq \alpha p_C(w_0) = p_C(\alpha w_0)$
4. Si $\alpha < 0$ tenemos $f_W(\alpha w_0) \leq 0 \leq p_C(\alpha w_0)$
5. Entonces $f_W \leq p_C$ en W por Teórico (dado que estamos en el caso real) $\exists f_X$ extension lineal tal que $f_X(x) \leq p_C(x) \quad \forall x \in X$.
6. Por Teórico sucede $f_X(x) \leq p_C(x) \leq c\|x\| \quad \forall x \in X$
7. Por otro lado $-f_X(x) = f_X(-x) \leq p_C(-x) \leq c\|-x\| = c\|x\|$ entonces $f_X(x) \geq -c\|x\|$
8. Entonces $|f_X(x)| \leq c\|x\|$ por lo tanto f_X continua
9. Ahora $\forall a \in A$ y $b \in B$

   $$1 + f_X(a) - f_X(b) = f_X(w_0) + f_X(a) - f_X(b) = f(w_0 + a - b) \leq p_C(w_0 + a - b) < 1$$

   La ultima desigualdad vale por que $w_0 + a - b \in C$
10. Entonces $f_X(a) < f_X(b) \quad \forall a \in A \quad \forall b \in B$
11. Ahora tomo $\gamma = \inf\{f(b) : b \in B\}$ y tenemos $f_X(a) \leq \gamma \leq f_X(b$
12. Supongamos existe $a \in A$ tal que $f_X(a) = \gamma$.
13. Como A es abierto, $\exists \delta 0$ tal que $a + \delta w_0 \in A$
14. $f_X(a + \delta w_0) = f_X(a) + \delta f_W(w_0) = \gamma + \delta \gamma$ (Por def de $f_W(w_0)$) que es absurdo por 11.
15. Entonce vale (a)

(b)

1. Como A compacto y B cerrado. Entonces $\epsilon = \frac{1}{4}\inf\{\|a - b\| : a \in A, b \in B\}0$
2. Sean $A_\epsilon = A + B_\epsilon(0)$ y $B_\epsilon = B + B_\epsilon(0)$ (Son bolas las B_ϵ)
3. Es facil ver que $A_\epsilon \cap B_\epsilon = \emptyset$ (usando desigualdad triangular)

4. Ademas A_ϵ y B_ϵ son abiertos por que son union de abiertos $A_\epsilon = \bigcup_{a\in A} a + B_\epsilon(0)$
5. Y son convexos (Sale similas a convexidad de C)
6. Luego vale (a) con A_ϵ y B_ϵ en lugar de A y B.
7. Sea $\delta = \frac{\epsilon}{2\|w_0\|}$ entonces $a + \delta w_0 \in A_\epsilon$. Pues $\delta w_0 \in B_{\frac{\epsilon}{2}}(0)$
8. Entonces $f_X(a) = f(_X a + \delta w_0) - \delta f_W(w_0) \leq \gamma - \delta$ (Recordar $f_W(w_0) = 1$)
9. Analogamente $\gamma + \delta \leq f(b) \quad \forall b \in B$ entonces vale (b)

12 Clase 12

Definición 12.1
$H \subseteq X$ normado es hiperplano *si*

$$H = \{x \in X : f(x) = \gamma\}$$

con $f : X \to \mathbb{F}$ lineal no necesariamente continuo. $f \not\equiv 0$ y $\gamma \in Im(f)$. Dados $A, B \subseteq X$ decimos que H separa A y B sii

$$f(x) \leq \gamma \quad \forall x \in A \quad y \quad f(x) \geq \gamma \quad \forall x \in B$$

Y que separa estrictamente sii

$$f(x) \leq \gamma - \epsilon \quad \forall x \in A \quad y \quad f(x) \geq \gamma + \epsilon \quad \forall x \in B$$

Observación

- *El Teorema de Separacion dice que bajo las condiciones de (a) existe* hiperplano *que separa A y B y bajo las condiciones (b) separa estrictamente*
- *Si A o B no es convexo (a) del teo no es cierto*
- *Si A no es comacto (b) en general no es cierto*

Observación
Es equivalente llamar hiperplano *a $\tilde{H} = x_0 + Ker(f)$ (y en este caso decimos que pasa por x_0) para cierto $f : X \to \mathbb{F}$ lineal tal que $f \not\equiv 0$ pues sea $x_0 \in H$ fijo con $\gamma = f(x_0)$. Entonces si $x \in H$ tenemos*

$$x = x - x_0 + x_0 \quad y \quad f(x - x_0) = f(x) - f(x_0) = 0$$

osea $x - x_0 \in Ker(f)$ luego $x \in \tilde{H}$.
Reciprocamente si $x \in \tilde{H}$ entonces $x = x_0 + z$ con $f(z) = 0$ entonces $f(x) = f(x_0) = \gamma$ osea $x \in H$

Teorema 12.1
$W \subseteq X$ subespacio. Entonces W es hiperplano que pasa por 0 sii $W \neq X$ y $X = W \bigoplus Sp\{y\}$ para cualquier $y \in X \setminus W$

Proof. $(\Rightarrow)$

1. Supongamos W hiperplano que pasa por 0 ($W = Ker(f)$). Como $f \not\equiv 0$ existe $z \in X$ con $f(z) \neq 0$ Osea existe $z \in X \setminus W$ entonces $X \neq W$
2. Sea $y \in X \setminus W$ arbitrario entonces $f(y) \neq 0$
3. Para $x \in X$ escribo $x = x - \beta y + \beta y$ con $\beta = \frac{f(x)}{f(y)}$
4. Como $f(x - \beta y) = 0$ entonces $x - \beta y \in Ker(f) = W$
5. Entonces $x \in Sp\{y\} + Ker(f)$ y ademas $W \cap Sp\{y\} = \{0\}$
6. Entonces $X = W \bigoplus Sp\{y\}$

$(\Leftarrow)$

1. Si $X = W \bigoplus Sp\{y\}$ dado $x \in X$ entonces $x = w + \alpha y$.
2. Definimos $f : X \to \mathbb{F}$ dada por $f(x) = \alpha$ es claro que es lineal y que $f \not\equiv 0$ y $Ker(f) = W$

□

12.1 El segundo dual, espacios reflexivos, opradores duales

Observación
Sea X normado entonces sabemos que X' es Banach y tambien X'' es Banach

Proposición 1
Para cualquier $x \in X$ la aplicacion $F_x : X' \to \mathbb{F}$ dada por $F_x(f) = f(x)$ satisface que $F_x \in X''$ y $\|F_x\| = \|x\|$

Proof.
1. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ y $f, g \in X'$ entonces $F_x(\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g)(x) = \alpha f(x) + \beta g(x) = \alpha F_x(f) + \beta F_x(g)$ entonces F_x es lineal
2. Ademas $|F_x(x)| = |f(x)| \leq \|x\|\|f\| = k\|x\|$ entonces F_x es continua por lo tanto $F_x \in B(X', \mathbb{F}) = X''$
3. $\|x\| = \sup\{|f(x)| : \|f\| = 1\} = \sup\{|F_x(f)| : \|f\| = 1\} = \|F_x\|$ (El ultimo igual de definicion de norma en $B(X', \mathbb{F})$) (El primer igual es por (2.) Teórico

□

Definición 12.2
Para X normado definimos $J_X : X \to X''$ por $J_X x = J_X(x) = F_X$ osea $F_X(f) = J_X(x)(f) = f(x) \quad \forall x \in X \quad \forall f \in X'$. (Es claro que J_X es lineal)

Corolario 12.1.1
$J_X : X \to X''$ es una isometria. En particular:

1. *X es isometricamente isomorfo a un subconjunto de X'' (de hecho a $J_X(X)$)*
2. *X es isometricamente isomorfo a un suconjunto denso de un Banach*

Proof.
1. Inyectiva es por ser una isometria. Sobreyectiva es por que $J_X(X) = Im(J_X)$
2. Como X'' es Banach entonces $\overline{J_X(X)}$ es Banach (por ser cerrado en un Banach)

□

Observación
Si X no es Banach entonces $J_X(X)$ no es Banach por que son isometricamente isomorfos ademas $J_X X \neq X''$ pues X'' es Banach

Definición 12.3 (Reflexivo)
Decimos que X es reflexivo si $J_X(X) = X''$

Observación
- *Luego si X normado y reflexivo entonces es Banach*
- *X reflexivo sii $\forall \psi \in X'' \quad \exists x_\psi \in X$ tal que $\psi = J_X(x_\psi)$.*
- *Analogamente $\psi(f) = J_X(x_\psi)(f) = f(x_\psi) \quad \forall f \in X'$) (DUDA Osea si J_X es sobre??)*

Teorema 12.2
1. *Si X es normado con $\dim X = n < \infty$ entonces X es reflexivo*
2. *Si H es Hilbert entonces H es reflexivo*

Proof. DUDA

1. Como dimension de X es finita sabemos que $\dim X = \dim X' = \dim X''$ (DUDA Por teorema pasado cual??) y como $J_X : X \to X''$ lineal e inyectiva (por ser isometria) entonces es sobre
2. Por Teorema 7.4 tenemos que $T_\mathcal{H} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ dada por $T_\mathcal{H}(y) = f_y$ con $f_y(x) = (x, y)$ es biyeccion. Y $\mathcal{H}'$ es Hilbert con
$$(T_\mathcal{H}(z), T_\mathcal{H}(y))_{\mathcal{H}'} = (y, z)_\mathcal{H} \quad (I)$$
3. Ahora como $\mathcal{H}'$ es Hilbert entonces re aplicando teorema $T_{\mathcal{H}'} : \mathcal{H}' \to \mathcal{H}''$ dada por $T_{H'}(g) = \psi_g$ con
$$T_{\mathcal{H}'}(g)(f) = \psi_g(f) = (f, g)_{\mathcal{H}'} \quad (II)$$
es biyeccion (y $\mathcal{H}''$ es Hilbert)

4. En particular si $f \in \mathcal{H}'$ y $\psi \in \mathcal{H}''$ entonces $\exists! x, y \in H$ tales que $f = T_{\mathcal{H}} x$ y $\psi = T_{\mathcal{H}'}(T_{\mathcal{H}} y)$ (Unicos,devuelta por que Teorema 7.4 nos dice que son biyectivas, para la parte de ψ seria usar dos veces biyectividad)

5. Ahora dado $\psi \in \mathcal{H}''$ y $f \in \mathcal{H}'$ tenemos

$$\begin{aligned} J_{\mathcal{H}}(y)(f) = f(y) = T_{\mathcal{H}} x(y) &= (y, x)_{\mathcal{H}} && \text{(Por def Teorema 7.4)} \\ &= (T_{\mathcal{H}}(x), T_{\mathcal{H}}(y))_{\mathcal{H}'} && \text{(Por } (I)) \\ &= (f, T_{\mathcal{H}}(y))_{\mathcal{H}'} && \text{(Por def de } f) \\ &= T_{\mathcal{H}'}(T_{\mathcal{H}}(y))(f) && \text{(Por } (II)) \\ &= \psi(f) && \forall f \in \mathcal{H}' \quad \text{(Por def de } \psi) \end{aligned}$$

Osea $\psi = J_{\mathcal{H}}(y)$.

6. Pero entonces dado un $\psi \in \mathcal{H}''$ encontramos un unico $y \in \mathcal{H}$ como preimagen. Luego $J_{\mathcal{H}}$ es sobreyectiva

□

Teorema 12.3
X Banach entonces X reflexivo sii X' reflexivo ($\iff J_{X'} : X' \to X'''$ es sobre)

Proof. DUDA $(\Rightarrow)$

1. Sea $\rho \in X'''$ como $\rho : X'' \to \mathbb{F}$ y $J_X : X \to X''$. Entonces $f = \rho \circ J_X \in X'$ pues ambos son lineales y continuas.
2. Sea $\psi \in X''$ como X reflexivo $\exists x \in X$ tal que $\psi = J_X(x)$ osea $\psi(f) = (J_X x)(f) = f(x) \quad \forall f \in X'$
3. $(J_{X'}(f))(\psi) = \psi(f) = f(x) = \rho \circ J_X(x) = \rho(\psi)$ (Recordar $J_{X'}(f)$ es el funcional evaluar en f)
4. Osea $\rho = J_{X'}(f)$ y $J_{X'}$ es sobre entonces X' es reflexivo

$(\Leftarrow)$

1. Supongamos X' reflexivo pero $\exists \tilde{x} \in X'' \setminus J_X(X)$. (Osea negar que X sea refelxivo)
2. X es Banach y entonces $J_X(X)$ tambien (pues son isomorfos [[Teórico y $J_X(X) \subseteq X''$ que es Banach y por lo tanto es $J_X(X)$ es cerrado (El X'' es metrico?)
3. Por [[Teórico ($W = J_X(X)$ y tenemos $\tilde{x} \in X'' \setminus J_X(X)$ pero cumple? $\delta 0$) (DUDA) Existe $k \in X'''$ tal que $k(\tilde{x}) \neq 0$ y $k(J_X(x)) = k|_{J_X(X)} = 0 \quad \forall x \in X$
4. Ademas como X' es reflexivo $J_{X'} : X' \to X'''$ es sobre en particular $\exists g \in X'$ tal que $k = J_{X'}(g)$ osea $k(\psi) = (J_{X'}(g))(\psi) = \psi(g) \quad \forall \psi \in X''$ (Recordar $J_{X'}(f)$ es el funcional evaluar en f)
5. Luego $g(x) = (J_X(x))(g) = k(J_X(x)) = 0 \quad \forall x \in X$. osea $g \equiv 0$.
6. Pero como $\tilde{x} \in X''$ por 4. tenemos $\tilde{x}(g) = k(\tilde{x}) \neq 0$ (esto ultimos por 3.). Absurdo por que $g \equiv 0$ y $\tilde{x}$ es funcional lineal

□

Teorema 12.4
X reflexiva, $Y \subseteq X$ subespacio vectorial cerrado entonces Y reflexivo

Proof.
1. Y reflexiva $\iff \forall \psi \in Y''$ existe $y_\psi \in Y$ tal que $J_Y(y_\psi) = \psi$ osea

$$\psi(g) = J_Y(y_\psi)(g) = g(y_\psi) \quad \forall g \in Y' \quad (a)$$

2. Como [[Teórico dice que $g = f|_Y$ para algun $f \in X'$. (osea para toda $g \in Y'$ existe extension $f \in X'$ por ser extension $f|_Y = g$)

3. Entonces (a) es equivalente a ver que dado un $\psi \in Y''$ existe $y_\psi \in Y$ tal que

$$(I) \quad f|Y(y\psi) = \psi(f|_Y) \quad \forall f \in X'$$

4. Definimos $\phi : X' \to \mathbb{F}$ dada por

$$(II) \quad \phi(f) = \psi(f|_Y)$$

5. Resulta que $|\phi(f)| \leq \|\psi\|\|f|_Y\| \leq \|\psi\|\|f\| = k\|f\|$ osea es continua ergo $\phi \in X''$

6. Como X reflexiva $\exists x_\phi \in X$ tal que $J_X(x_\phi) = \phi$ osea

$$(III) \quad f(x_\phi) = \phi(f) \quad \forall f \in X'$$

7. Veamos que $x_\phi \in Y$. Supongamos que no. Como Y cerrado por [[Teórico existe $h \in X'$ tal que $h \equiv 0$ en Y y $h(x_\phi) \neq 0$ pero $0 \neq h(x_\phi) = \phi(h) = \phi(h|_Y) = 0$ (la igualdad del medio vale por $(II), (III)$ y la ultima por ser ϕ lineal y $h|_Y \equiv 0$)

8. Pero entonces dicho $x_\phi \in Y$ que estabamos buscando. Por que usando $(II), (III)$

$$f|_Y(x)(\phi) = f(x_\phi) = \phi(f) = \psi(f|_Y) \quad \forall f \in X'$$

□

Definición 12.4
Anuladores X normado $\emptyset \neq W \subseteq X$ y $\emptyset \neq Z \subseteq X'$ defino los anuladores de W y Z como

$$W^\circ = \{f \in X' : f(x) = 0 \quad \forall x \in W\}$$

$$^\circ Z = \{x \in X : f(x) = 0 \quad \forall f \in Z\}$$

Lema 12.5
X normado $\emptyset \neq W_1 \subseteq W_2 \subseteq X$ y $\emptyset \neq Z_1 \subseteq Z_2 \subseteq X'$ entonces

1. $W_2^\circ \subseteq W_1^\circ \quad {}^\circ Z_2 \subseteq {}^\circ Z_1$
2. $W_1 \subseteq^\circ (W_1^\circ) \quad Z_1 \subseteq ({}^\circ Z_1)^\circ$
3. W_1°, ${}^\circ Z_1$ *son subespacios cerrados*

Proof. ejercicio □

Teorema 12.6
X normado $W \subseteq X$ subespacio cerrado $Z \subseteq X'$ subespacio cerrado entonces

(a.) $W = {}^\circ(W^\circ)$

(b.) *Si X reflexivo $Z = ({}^\circ Z)^\circ$*

Proof. (a.)
1. Sabemos que $W \subseteq {}^\circ(W^\circ)$
2. Supongamos $p \in W$
3. Como W cerrado por [[Teórico 103a0090]] existe $f \in X'$ tal que $f(p) \neq 0$ y $f \equiv 0$ en W osea $f \in W^\circ$
4. Entonces $p \notin {}^\circ(W^\circ)$. Absurdo

(b.)
1. Sabemos $Z \subseteq ({}^\circ Z)^\circ$. Supongamos que $\exists g \in ({}^\circ Z)^\circ \setminus Z$
2. Como en parte 1. sabemos $\exists \psi \in X''$ tal que (I) $\psi(g) \neq 0$ y $\psi(f) = 0 \quad \forall f \in Z$
3. Como X reflexivo $\exists q \in X$ tal que $\psi = J_X(q)$ osea (II) $\psi(f) = f(q) \quad \forall f \in X'$
4. Luego $f(q) = \psi(f) = 0 \quad \forall f \in Z$ osea que $q \in {}^\circ Z$

5. Pero $g(q) = \psi(g) \neq 0$ por $(I), (II)$ entonces $q \notin (^\circ Z)^\circ$. Absurdo

$\square$

Lema 12.7
Sea $V = \{a = \{a_n\} \in \ell^1 : \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n = 0\}$ *y* c_0 *subsucesiones de* ℓ^∞ *que convergen a* 0. *Sea*

$$T_{c_0} : \ell^1 \to c_0'$$

dada por $T_{c_0}(a) = f_a$. *Donde para* $x = \{x_n\} \in c_0$ *sucede* $f_a(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$

Sea $Z = T_{c_0}(V)$ *entonces* V *y* Z *son subespacios propios y cerrados de* ℓ^1 *y* c_0' *respectivamente, ademas* $(^\circ Z)^\circ = c_0' (\supsetneq Z)$ *y* T_{c_0} *es isomorfismo*

Proof. queda pendiente $\mathbb{F}$ $\square$

13 Clase 13

Corolario 13.0.1
Los espacios c_0 *y* ℓ^∞ *no son reflexivos*

Proof.

1. Vimos en Lema 12.7 que $(^\circ Z)^\circ = c_0' \neq Z$
2. Luego c_0 no puede ser reflexivo por Teorema 12.6 $b)$
3. Ademas como c_0 cerrado en ℓ^∞ y no es reflexivo tampoco puede serlo ℓ^∞ por Teorema 12.4

$\square$

Teorema 13.1
X, Y normados , $T \in B(X, Y)$ entonces $\exists! T' \in B(Y', X')$ tal que

$$T'(f)(x) = f(Tx) \quad \forall f \in Y' \quad \forall x \in X$$

Proof.

1. Para $f \in Y'$ definimos $T'f = f \circ T$.
2. Como T, f son lineales y continuas $T'f$ lo es entonces $T'(f) \in X'$
3. Ademas $T' : Y' \longrightarrow X$ cumple que
$$T'(f)(x) = f(Tx) \quad \forall x \in X, \forall f \in Y'$$
4. Si hubiera otra $S_i B(Y', X')$ tal que $S(f)(x) = f(Tx) \quad \forall x \in X \forall y \in Y'$ entonces $S(f) = T'(f) \quad \forall f \in Y'$ osea $S = T'$
5. Veamos que es lineal y continua. Sean $f, g_i Y', \alpha, \beta \in \mathbb{F}$ entonces
$$(\alpha f + \beta g) \circ T = \alpha(f \circ T) + \gamma(g \circ T)$$
Osea $T'(\alpha f + \beta g) = \alpha T'(f) + \beta(T')g$
6. Ademas $\|T(f)\| = \|f \circ T\| = \|f\| \|T\|$. Por lo tanto T es continua (mas aun $\|T'\| \leq \|T\|$)

$\square$

Proposición 2
X, Y normados $T \in B(X, Y)$ entonces

1. $|T'| = \|T\|$
2. $Ker(T') = (ImT)^\circ$
3. $Ker(T) =^\circ (ImT)$

Proof.

1. 1.1 Por Corolario Hahn Banach Corolario $\exists f \in Y'$ tal que $f(Tx) = \|Tx\|$ y $\|f\| = 1$

1.2 Entonces $\|Tx\| = f(Tx) = T(f)(x) \leq \|T'\|\|f\|\|x\|$ y sabemos $\|f\| = 1$. Por lo tanto $\|T\| \leq \|T'\|$ (La otra desigualdad vale por Desigualdad)

2. 2.1 $(\subseteq)$ Sea $f \in KerT'$ y $z \in ImT$ entonces $\exists x \in X$ tal que $z = Tx$
   2.2 Luego $f(z) = f(Tx) = T'(f)(x) = 0$
   2.3 $(\supseteq)$ Sea $f \in (ImT)^{\circ}$ entonces $\forall x \in X$ sucede $T(f)(x) = f(Tx) = 0$ pues $Tx \in ImT$
   2.4 Osea $T(f) = 0$ por lo tanto $f \in KerT'$

3. (Ejercicio)

□

Teorema 13.2
X, Y normados $T \in B(X, Y)$

1. *Si T es isomorfismo entonces T' es isomorfismo con $(T')^{-1} = (T^{-1})'$.*
   (En particular si son isomorfos X e Y tambien lo son X' e Y')

2. *Si T isomorfismo isometrico entonces T' isomorfismo isometrico*

Proof.

1. 1.1 Sea $S = T^{-1}$ entonces $S \in B(Y, X)$ y ademas esta bien definida $S' \in B(X', Y')$ por Teorema 13.1
   1.2 Ahora $\forall x \in X, f \in X'$ tenemos
   $$T'(S'(f))(x) = S'(f)(Tx) = f(S(Tx)) = f(x)$$
   Osea $T(S'(f)) = f$ por lo tanto $T' \circ S' = Id_{X'}$
   1.3 Analogamente vemos $S' \circ T' = Id$

2. 2.1 por (1.) basta ver que T' es isometria.
   2.2 Por una parte $\|T'(f)(x)\| = \|f(Tx)\| \leq \|f\|\|T\|\|x\|$ (Con $\|T\| = 1$ por ser isometria)
   2.3 Entonces $\|T'(f)\| \leq \|f\|$
   2.4 Por otro lado $\forall \epsilon > 0$ $\exists y \in Y$ con $\|y\| = 1$ tal que $|f(y)| \geq \|f\| - \epsilon$ (Por def de supremo)
   2.5 Sea $x = T^{-1}y$ entonces $\|x\| = 1$ (Pues $1 = \|y\| = \|T(T^{-1}y)\| = \|Tx\| = \|x\|$)
   2.6 Por lo tanto $\|T'(f)\| \geq |T'(f)(x)| = |f(Tx)| = |f(y)| \geq \|f\| - \epsilon$
   2.7 Mostrando que $\|T'(f)\| = \|f\|$

□

Observación
Recordar que si $1 \leq p < \infty$, $x \in \ell^p$, $a \in \ell^q$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Tomando $f_a(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ entonces $T_p : \ell^q \longrightarrow (\ell^p)'$ dada por $T_p(a) = f_a$ es isomorfismo isometrico

Corolario 13.2.1
ℓ^p , $1 < p < \infty$ con $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ es reflexivo

Proof.

1. Sean $x \in \ell^p \quad y \in \ell^q$. Entonces
$$T_p'(J_{\ell^p}(x)) = (J_{\ell^p}(x))T_p(y) = T_p(y)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n = T_q(x)(y)$$

2. Osea $T_p'(J_{\ell^p}(x)) = T_q(x)$

3. Y T_p' es iso por Teorema 13.2 (por que T lo es)

4. Luego $J_{\ell^p} = (T_p')^{-1} \circ T_q$ y como T_q y T_p' son iso entonces la compisicion es iso.

5. como J_{ℓ^p} es isomorfismo entonces ℓ^p es reflexivo

□

Teorema 13.3
X, Y normados, $T \in B(X,Y)$. Entonces
$$J_Y \circ T = T'' \circ J_X \tag{1}$$

Proof.
$$X \xrightarrow{T} Y \xrightarrow{J_Y} Y'' \quad X \xrightarrow{J_Y} X'' \xrightarrow{T''} Y''$$
Ahora tenemos $T'' : X'' \longrightarrow Y''$ dada por $\psi \longrightarrow T''(\psi)$ con $T''(\psi)(g) = \psi(T'(g))$ con $g \in Y'$
Luego dado $x \in X \quad q \in Y'$ tenemos
$$J_Y(Tx)(g) = g(Tx) = T'(g)(x) = (J_x x)(T'(g)) = T''(J_x x)(g)$$
Luego
$$J_Y(Tx) = T''(J_X x) \quad \forall x \in X$$
□

Corolario 13.3.1
Si X, Y son isomorfos entonces X reflexivo sii Y reflexivo

Proof.
1. Como X, Y son isomorfos existe $T : X \longrightarrow Y$ isomorfismo. Entonces por Teorema 13.2 T' y T'' son isomorfos.
2. Luego usando la igualdad en Teorema 13.3 queda probado

□

Corolario 13.3.2
ℓ^1 no es reflexivo

Proof. Sabemos que c_0 no es reflexivo y ℓ^1 es isomorfo a c_0' □

13.1 Proyeciones y subespacios complementarios

Observación
En esta seccion X es espacio vectorial

Definición 13.1
$U, V \subseteq X$ subespacios, se dicen complementarios si $X = U \bigoplus V$ Osea $\forall x \in X \quad \exists! u_X \in U \quad v_X \in V$ tal que $X = u_x + v_x$
Si X normado y $x \mapsto u_x \quad x \mapsto v_x$ son continuas decimos que son complementarios topologicos

Definición 13.2
$p : X \longrightarrow X$ lineal se dice proyeccion si $p^2 = p$

Lema 13.4
Sea p proyeccion en X. Entonces $x \in Im(p) \iff p(x) = x$. Ademas $I - p$ es proyeccion y $Im(p) = Ker(I - p) \quad Ker(p) = Im(I - p)$

Proof. Ejercicio □

Lema 13.5
1. *$U, V \subseteq X$ y sean $p_U : X \longrightarrow U \quad p_V : X \longrightarrow V$ dadas por $x \mapsto u_x$ $x \mapsto v_x$*
   Entonces p_U, p_V son proyecciones en X y $p_U + p_V = Id$. (p_U se dice proyeccion sobre U de V, analogo para p_V)
2. *si p es proyeccion en X entonces los subespacios $Im(p), Im(I - p)$ son complementarios*

Proof. (ejercicio) □

Proposición 3
a $U, V \subseteq X$ son complementarios entonces:

1. *U y V complementarios topologicos sii P_U y P_V son continuas*
2. *Si U, V son complementarios topologicos entonces U, V son cerrados*

3. *X es Banach. Si U y V son cerrados y complementarios entonces son complementarios topologicos*

Proof.

1. a
2. $U = Im(P_U) = Ker(I - P_U)$
3. 3.1 Como $P_U + P_V = Id$ basta ver que P_U es continua. Por TGC basta ver que $gr(P_U)$ es cerrado.
   3.2 Sea $\{(x_n, P_U x_n)\} \subseteq gr(P_U)$ tal que $(x_n, P_U x_n) \longrightarrow (x, y) \in X \times X$ queremos $y = P_U x$
   3.3 Como $\{P_U x_n\} \subseteq U$ con U cerrado e entonces $y \in U$.
   3.4 Analogamente $\{(I - P_U)x_n\} \subseteq V$ entonces $x - y = \lim x_n - P_U x_n \in V$
   3.5 Como $P_U(x) = x \quad \forall x \in U$ y $P_U x = 0 \quad \forall x \in V$ tenemos $0 = P_U(x - y) = P_U x - P_U y = P_U(x) - y$

□

Observación
Dado $U \subseteq X$ sub espacio cerrado $\exists V \subseteq X$ tal que U y V son complementos topologicos?.

Por resultados anteriores esto es equivalente a que exista proyeccion continua P tal que $U = ImP$. Pues en tal caso tomamos $V = Im(I - P)$ (ejercicio)

Si $dimV < \infty$ es cierto (ej). En general esto no es cierto pero si vale en espacios de Hilbert (Lo vemos mas adelante)

Lema 13.6
Sea $S = \{s_\alpha : \alpha \in A\}$ tal que $\overline{Sp}S = X$. Si $\{f_n\}$ es una sucesion acotada en X' y $\{f_n(s_\alpha)\}$ converge $\forall \alpha \in A$ entonces $\exists f \in X'$ tal que $f_n(x) \longrightarrow f(x) \quad \forall x \in X$

Proof.

1. Sea $x \in X$ como $\{f_n\}$ es acotada $\exists c > 0$ tal que $\|f_n\| \leq c \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
2. Ahora dado $\epsilon > 0$ existe $s \in Sp(S)$ con $\|x - s\| \leq \frac{\epsilon}{3c}$. Entonces $\forall n$ $|f_n(x) - f_n(s)| \leq \|f_n\|\|x - s\| \leq \frac{\epsilon}{3}$
3. Luego
$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f_n(s)| + |f_n(s) - f_m(s)| + |f_m(s) - f_m(x)| \leq \frac{2}{3}\epsilon + |f_n(s) - f_m(s)|$$
4. Pero $|f_n(s) - f_m(s)| \leq \frac{\epsilon}{3}$ si $n, m \geq 0$ por que $\{f_n(s_\alpha)\}$ converge $\forall \alpha \in A$ y S es combinacion lineal finita de elementos

□