PRÁCTICO 5

Acciones de grupos.

(1) Sean G grupo y $A \lhd G$, con A abeliano. Mostrar que G/A actúa sobre A por conjugación y obtener un homomorfismo $f : G/A \to \mathrm{Aut}(A)$.

(2) Sea G grupo. Supongamos que un elemento a de G tiene exactamente dos conjugados. Probar que G contiene un subgrupo normal propio.

(3) Sea H un subgrupo de un grupo G. Mostrar que $Z_G(H) \lhd N_G(H)$ y que $N_G(H)/Z_G(H)$ es isomorfo a un subgrupo de $\mathrm{Aut}(H)$.

(4) En cada uno de los siguientes casos probar que $\cdot$ es una acción del grupo G en el conjunto X. En cada ítem calcular la órbita y el estabilizador de cada elemento x de X. Además, determinar el conjunto $X^G := \{x \in X : g \cdot x = x \ \forall g \in G\}$.
   (a) $G = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \ f(x) = ax + b, \ a \in \mathbb{R}^\times, \ b \in \mathbb{R}\}$, $X = \mathbb{R}$ y $f \cdot x = f(x)$.
   (b) $G = \mathbb{R}^\times$, $X = \mathbb{R}_{>0}$ y $a \cdot x = x^a$.
   (c) $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ y la acción dada por el producto de matrices.

(5) Sea G un grupo actuando sobre un conjunto X y sea $N \lhd G$. Determinar una condición necesaria y suficiente para que exista una acción de G/N en X tal que $\overline{a} \cdot x = a \cdot x$, para todo $a \in G$ y $x \in X$.

(6) Sea X un conjunto finito. Determinar el número de acciones de $\mathbb{Z}$ sobre X.

(7) Sean G grupo y $a \in G$, con $a \neq e_G$ y $|a| \neq 2$. Mostrar que G posee un automorfismo distinto de la identidad.

(8) Sea G un grupo.
   (a) Si $|G| = m$ y p es el menor primo que divide a m, entonces todo subgrupo de índice p es normal.
   (b) Si $|G| = pn$, con p primo y $p > n$, y $H < G$, con $|H| = p$, entonces $H \lhd G$.
   (c) Si $|G| = p^k$, con p primo, y $N \lhd G$, con $|N| = p$, entonces $N \subseteq Z(G)$.

p-grupos y Teoremas de Sylow.

(9) Si $N \lhd G$, y N y G/N son p-grupos, entonces G es un p-grupo.

(10) ¿Es cierto que si G es un p-grupo entonces $|G| < \infty$?

(11) Sean G un p-grupo finito y $H \lhd G$, con H no trivial. Probar que $H \cap Z(G) \neq \{e\}$.

(12) Sean P un p-subgrupo de Sylow normal de un grupo finito G y $f : G \to G$ un homomorfismo. Probar que $f(P) \leq P$.

(13) Sea G un grupo finito. Si cada p-subgrupo de Sylow de G es normal para cada primo p, entonces G es el producto de sus subgrupos de Sylow.

(14) Si $|G| = p^n q$, con $p > q$ primos, entonces G contiene un único subgrupo normal de índice q.

(15) Cada grupo de orden 12, 28, 56 y 200 debe contener un subgrupo de Sylow normal, y, por lo tanto, no es simple.

(16) ¿Cuántos elementos de orden 7 existen en un grupo simple de orden 168?

(17) Caracterizar todos los grupos de orden p^2.

(18) Sea G un grupo de orden p^3, con p primo.
  (a) Si G posee más de un subgrupo normal de orden p, entonces G es abeliano y no cíclico.
  (b) Si G no es abeliano, entonces $|Z(G)| = p$.
  (c) Probar que $Z(G) = [G, G]$.
  (d) Calcular el conmutador $[G, G]$, siendo $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ a, b, c \in \mathbb{Z}_p \right\}$.

(19) Calcular todos los p-subgrupos de Sylow de:

$$\mathbb{Z}_{12}, \quad \mathbb{Z}_{21} \oplus \mathbb{Z}_{15}, \quad \mathbb{S}_3 \times \mathbb{Z}_3, \quad \mathbb{S}_3 \times \mathbb{S}_3.$$

(20) Sean p y q primos. Probar que ningún grupo G de orden p^2q es simple.

(21) Probar que no existen grupos simples de los siguientes órdenes: 30, 36, 56, 96.

(22) Sea G un grupo, $|G| = pq$, $p > q$ primos tales que q no divide a $p - 1$. Probar que G es cíclico.

Ejercicios adicionales

(23) Sean G grupo y $K \leq G$. Mostrar que
  (a) $K \lhd N_G(K)$.
  (b) $K \lhd G$ si y sólo si $N_G(K) = G$.

(24) Sea G un grupo tal que $|G| = 2n$, G tiene n elementos de orden 2 y los restantes elementos forman un subgrupo H. Probar que n es impar y que $H \lhd G$.

(25) Determinar si existe un grupo K tal que G sea el producto semidirecto $N \rtimes K$ en cada uno de los siguientes casos.
  (a) $G = \mathbb{G}_{12}$ y $N = \mathbb{G}_3$.
  (b) $G = \mathbb{C}$ y $N = \mathbb{R}$.
  (c) $G = \mathbb{S}_4$ y $N = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$.

(26) Sea G un p-grupo infinito. Probar que vale una de las siguientes dos condiciones:
  (a) G tiene un subgrupo de orden p^n, para cada $n \in \mathbb{N}$.
  (b) Existe $m \in \mathbb{N}$ tal que cada subgrupo finito tiene orden $\leq p^m$.

(27) Probar que no existen grupos simples de los siguientes órdenes: 200, 204, 260, 2540.