Def Una categoría $\mathcal{C}$ consiste en una clase de objetos X, Y, etc

Para cada par de objetos X, Y un conjunto $\mathcal{C}(X,Y)$ o $Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ que están

munidos de una función

$$\mathcal{C}(Y,Z) \times \mathcal{C}(X,Y) \longrightarrow \mathcal{C}(X,Z)$$

$$(f,g) \longmapsto f \circ g$$

tales que

* $\forall X, Y, Z, T$ objetos de $\mathcal{C}$

$\forall f \in \mathcal{C}(X,Y) \quad g \in \mathcal{C}(Y,Z) \quad h \in \mathcal{C}(Z,T)$

$$h(gf) = (hg)f$$

* $\forall X$ de $\mathcal{C} \quad \exists 1_X \in \mathcal{C}(X,Y)$

$/ \forall f \in \mathcal{C}(X,Y) \quad g \in (Z,X)$

$$f 1_X = f \ , \ 1_X g = g$$

ejemplos $\mathcal{C} = \mathcal{S}$ (sets) la categoría de conjuntos

Objetos conjuntos: $X, Y, \ldots$

$$\mathcal{S}(X,Y) = \{ f : X \to Y \mid f \text{ función} \}$$

·) con la operación dada por la composición de funciones

·) Aquí $1_X = Id_X$ $\forall X$ de $\mathcal{S}$

los elementos de $\mathcal{C}(X,Y)$ se llaman morfismos de X a Y o flechas de X a Y se grafican

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, bend left] \arrow[dr, bend right, "gf"'] \arrow[dr, phantom, "///"] & Y \arrow[d] \\
 & Z
\end{tikzcd}
\qquad f \in \mathcal{C}(X,Y)$$

(obs) 1) $\forall$ grupo G $\quad id_G : G \to G$ es homomorfismo

2) si $f : G \to H$ y $g : H \to K$ homomorfismos

$\Rightarrow$ $g \circ f : G \to K$ es homomorfismo

$$(g\circ f)(ab) = g(f(ab)) \overset{f \text{ homo}}{=} g(\underset{\in H}{f(a)}\ \underset{\in H}{f(b)})$$

$$\overset{g \text{ homo}}{=} g(f(a))\, g(f(b))$$

$$= (g\circ f)(a)\,(g\circ f)(b)$$

Gp: Categoría de grupos

<u>objetos</u> grupos $G, H, K, \ldots$

<u>def</u> Sean G, H grupos. Un homomorfismo de grupos de G a H es una función $f : G \to H$ / $f(a \cdot b) = f(a) f(b)$ $\forall a, b \in G$

<u>Morfismos</u> $Gp(G,H) = Hom_{Gp}(G,H)$

$= \{ f : G \to H \mid f \text{ homo} \}$

donde $Gp(H,K) \times Gp(H,K) \to Gp(H,K)$
está dada por la composición de funciones. Bien def por (obs 2)

.) El resto de las props (para ver que es cat) siguen de las respectivas propiedades para la composición de funciones (siendo que ya observamos que $id_G \in Gp(G,G)$)

<u>otro ejemplo</u> V_{EC_F}: F esp vect (F cuerpo) y las transformaciones lineales

---

<u>Lema</u> $f : G \to H$ homo entonces

i) $f(e) = e$

ii) $\forall a \in G,\ f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$

Demo i) $f(e) = f(e.e) = f(e) \cdot f(e)$

$$\Rightarrow f(e)^{-1} f(e) = f^{-1}(e)\,(f(e)\,f(e))$$

$$= (f^{-1}(e)\,f(e))\,f(e)$$

$$= e\,f(e)$$

ii) Sea $a \in G$ $\quad f(a^{-1} \cdot a) = f(e) = e$

$$\Rightarrow f(a^{-1})\,f(a) = e$$

y también $\quad f(a\,a^{-1}) = f(e) = e$

$$\Rightarrow f(a)\,f(a^{-1}) = e$$

$$\therefore f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$$

(es el único inverso de $f(a) \in H$)

$\{x\}$ es un grupo con $x \cdot x = x$
(su neutro es x) $\{x\}$ se denota

$\{e\} \equiv e$ se llama grupo trivial

???

<u>ejemplos</u> de morfismos dentro de Gp

1) Cualquiera sea G $\quad \{e\} \to G$ $\quad$ único homo de $\{e\}$ en G

$$e \mapsto e$$

$G \mapsto \{e\}$ es el único homo de G en $\{e\}$ $\forall g : g \mapsto e$

$$|\mathrm{Hom}(G,\{e\})| = |\mathrm{Hom}(\{e\},G)| = 1$$

2) $\mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}_n$ $\quad f(a) = r$ resto de a módulo n $\quad \forall a \in \mathbb{Z}$

$f(a+b) = f(a) + f(b)$ vale (álgebra I)

f homo de grupo

3) $f : \mathbb{Z} \to S^1$ $\quad f(a) = e^{ia}$

$f(a+b) = f(a) \cdot f(b)$

$e^{i(a+b)} = e^{ia} e^{ib}$ $\Rightarrow$ es morfismo

4) $\det : GL(n,F) \to F^\times = F - \{0\}$

es homo de grupo

Def Sea $f: G \to H$ homo de grupos

f se dice:

- monomorfismo si es inyectivo
- epimorfismo si es sobreyectivo
- isomorfismo si es ambos (bi)

esto cuando los morfismos son funciones.

En categorías en general (donde morfismos no necesariamente son funciones)

·) f mono $\Leftrightarrow$ $f \cdot g = fh \Rightarrow g = h$

·) f epi $\Leftrightarrow$ $g \cdot f = hf \Rightarrow g = h$

<u>en Grupos</u>

<u>Lema</u> f isomorfismo

$\Leftrightarrow \exists\, g: H \to G$ Homo de grupos

tq $f \cdot g = id_H \quad gf = id_G$

Este g se llama f^{-1} (inverso de f)

demo Una función f es biyectiva

$\iff$ tiene inversa

$\therefore$ vale $(\Leftarrow)$

$(\Rightarrow)$ como f iso $\Rightarrow$ bi

Sea $f^{-1}: H \to G$ su función inversa

Basta ver f^{-1} es homo de grupos

$$f(f^{-1}(x y)) = (f f^{-1})(x y) = x y$$

$$= (f f^{-1})(x) (f f^{-1}) y$$

f homo $$= f(f^{-1}(x) f^{-1}(y))$$

Como f biyectiva esto implica

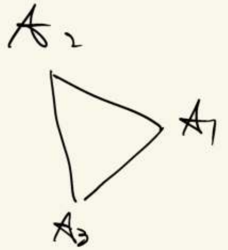
$$f^{-1}(x y) = f^{-1}(x) f^{-1}(y) \quad \forall x, y \in H$$

Los grupos isomorfos suelen tratarse como "el mismo" grupo es decir los identificamos. "G es isomorfo a H" es una rel de equiv $\exists f: G \to H$ iso

Denotamos $G \cong H$

ejemplos 1) $\mathbb{Z}_2 \cong U(\mathbb{Z}_4) \cong G_2 = \{\pm 1\}$

2) $D_3 \xrightarrow{f} S_3$ donde $f(T)(j) = l$ si $T(A_j) = A_l$



permutar vértices es lo mismo que permutar índices

$1 \leq j, l \leq n$

$\left(S_n = \{f : \{1, \dots, n\} \circlearrowleft \mid f \text{ biyectiva}\} \right)$

•) f siempre mono pues T está det por su acción en los vértices

Cuando $n=3$, f isomorfismo

(eg usando $|D_3| = |S_3| = 6$)

Luego $D_3 \cong S_3$

En general si $G \cong H \Rightarrow |G| = |H|$

obs Sea $f: G \to H$ homo

1) Si G abeliano y f epi $\Rightarrow H$ abeliano

2) Si H " y f mono $\Rightarrow G$ es abel

) G grupo y $a_1 \dots a_k \in G$. Se puede probar que cualquier par de productos de los a_i que tenga sentido coincide

$(a_1 a_2) a_3$ o $a_1 (a_2 a_3)$ etc

Definimos $k \in \mathbb{N}$ $\prod_{i=1}^{k} a_i$

$k=1$ $\prod_{i=1}^{1} a_i = a_1$, ... $\prod_{i=1}^{k} a_i = \left(\prod_{i=1}^{k-1} a_i\right) a_{k+1}$

se denota $a_1 \dots a_k$

def $a \in G$ $a^n = a^{n-1} \cdot a$ $n \geq 1$, $a^0 = e$

si $n \in \mathbb{Z}_{<0}$, $a^n = (a^{-1})^{(-n)} = (a^{-n})^{(-1)}$

Lema $a \in G$ $n, m \in \mathbb{Z}$ entonces

$$a^{n+m} = a^n \cdot a^m$$

demo Por inducción cuando $n \in \mathbb{N}$ y extender a $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z} \xrightarrow{f} G$ $f(n) = a^n$ (a fijo en G)

obs si $f: G \to H$ homo

$\Rightarrow f(a^n) = f(a)^n$ $\forall n \in \mathbb{Z}$

definimos Sea G grupo. Un subconjunto no vacío H de G se dice subgrupo si

$$ab^{-1} \in H \quad \forall a, b \in H$$

notación $H \leq G$

obs $H \leq G \Rightarrow e \in H$ $(e = aa^{-1} \in H \quad \forall a \in H)$

Además $\forall a \in H \quad a^{-1} = ea^{-1} \in H$

$\forall a, b \in H \Rightarrow a.b = a(b^{-1})^{-1} \in H$
(pues $a, b^{-1} \in H$)

$\therefore H$ es un grupo con las operaciones restringidas

Ej $U(\mathbb{Z}) = \{1, -1\} \subseteq \mathbb{Z}$ no es subgrupo