8	9	10	S

APELLIDO y nombre (en letra de imprenta):

Examen de Análisis Matemático II - 2022 - 7/7/2022

Parte teórica - 22

8. (10 puntos) Sea f una función acotada en el intervalo $[a, b]$ y sean P, Q dos particiones de $[a, b]$. Demostrar lo siguiente.

   a) Si $P \subset Q$, entonces $s(f, P) \leq s(f, Q)$.

   b) $s(f, P) \leq S(f, Q)$. (Dar por sabida la afirmación análoga a la de (a) para sumas superiores.)

9. (11 puntos) Demostrar la fórmula de sustitución: Si f y g son funciones tales que f y g' son continuas, entonces
$$\int_{g(a)}^{g(b)} f = \int_a^b (f \circ g)\, g'.$$

10. (9 puntos) Encontrar el polinomio de Taylor de orden n de la función $g(x) = 1/(1 + x^2)$ alrededor de $a = 0$, y verificarlo. Sugerencia: Considerar $y = -x^2$ en el producto
$$(1 - y)\left(1 + y + y^2 + y^3 + \cdots + y^n\right)$$
y para la verificación usar el siguiente resultado: Sea f una función con derivadas de todos los órdenes en el punto a. Si P es un polinomio en $x - a$ de grado menor o igual que n tal que
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x - a)^n} = 0,$$
entonces P es el polinomio de Taylor de orden n de f alrededor de a.

8	9	10	S

APELLIDO y nombre (en letra de imprenta):

Examen de Análisis Matemático II - 2022 - 7/7/2022

Parte teórica - 21

8. (12 puntos) Demostrar el primer criterio de integrabilidad: Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Si existen $\ell \in \mathbb{R}$ y una sucesión de particiones $\{P_n\}$ de $[a, b]$ tales que

$$\lim_{n\to\infty} s(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} S(f, P_n) = \ell,$$

entonces f es integrable en $[a, b]$ y $\int_a^b f(x)\ dx = \ell$.

9. (9 puntos) Sea $\Gamma : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ la función Γ, definida por

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\ dt.$$

Mostrar que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ para todo $\mathbf{x} \geq \mathbf{1}$. Dar por sabido que $\lim_{\beta\to\infty} \beta^x e^{-\beta} = 0$ para todo $x > 0$.

10. (9 puntos) Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ una serie de potencias tal que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \ell \geq 0$$

(ℓ un número real). Mostrar que que el radio de convergencia de la serie es igual a $1/\ell$, con la convención de que $1/0 = \infty$. Dar por sabido el criterio de la raíz para la convergencia de series numéricas.