## Funciones inversas e implícitas

**1.** Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(x,y) = \left(x^3y + 3x^2y^2 - 7x - 4y,\ xy + y\right).$$

(a) Demostrar que existen $U, V \subset \mathbb{R}^2$, con $U$ entorno de $(1,1)$ y $V$ entorno de $(-7,2)$, y una función $f^{-1} : V \to U$ que es $C^1$ y es inversa de $f : U \to V$, tal que $f^{-1}(-7,2) = (1,1)$.

(b) Usando la parte (a), calcular la derivada direccional $\dfrac{\partial(g \circ f^{-1})}{\partial \mathbf{v}}(-7,2)$, donde $\mathbf{v} = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$, y $g(x,y) = 2xy^2 + y$.

**2.** Sea $f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$. Observar que identificando $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$ de manera que $(x,y) \longleftrightarrow z = x + iy$ entonces $f(x,y)$ se corresponde con la función $g(z) = z^2$.

(a) Mostrar que para todo punto $\mathbf{x}_0$, excepto $\mathbf{x}_0 = (0,0)$, la restricción de $f$ a algún entorno abierto de $\mathbf{x}_0$ tiene inversa.

(b) Mostrar que si no se restringe el dominio, $f$ no tiene inversa.

(c) Si $f^{-1}$ es la inversa de $f$ en un entorno de $(1,2)$, calcular la transformación afín $A(x,y)$ que mejor aproxima a $f^{-1}$ cerca de $f(1,2) = (-3,4)$.

(d) Si $w = (-3.2, 4.1)$ calcular $u = A(w)$ y comprobar que $f(u) \approx w$.

**3.** Considere la función

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^3 + 3x^2y + z + 2 \\ 3xy^2 + y^3 - z - 1 \\ (x+y)^3 \end{pmatrix}.$$

Demostrar que $f$ es $C^1$ en $\mathbb{R}^3$, pero no puede tener nunca una inversa diferenciable.

**4.** Probar que existen funciones inversibles en un entorno de un punto $\mathbf{x}_0$ sin tener la derivada inversible en $\mathbf{x}_0$.

**5.** Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x,y,z) = x^3 - 2y^2 + z^2.$$

(a) Demostrar que $f(x,y,z) = 0$ define una función implícita $x = \varphi(y,z)$ en el punto $(1,1,1)$.

(b) Encontrar $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(1,1)$ y $\frac{\partial \varphi}{\partial z}(1,1)$.

**6.** El punto $(x,y,t) = (-1,1,1)$ satisface las ecuaciones

$$2x^3y + yx^2 + t^2 = 0, \quad x + y + t - 1 = 0.$$

¿Están $x$ e $y$ definidas implícitamente como función de $t$ en un entorno de $(-1,1,1)$?

**7.** (a) Probar que las ecuaciones

$$\begin{cases} 0 = 3x + 2y + z^2 + u + v^2 \\ 0 = 4x + 3y + z + u^2 - 2v \\ 0 = x + z + u^2 + v^3 \end{cases}$$

definen $x, y$ y $z$ como funciones de $u, v$ cerca de $(x,y,z,u,v) = (0,-1,0,1,-1)$.

(b) Hallar la matriz de la diferencial de la función definida implícitamente por

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}, \quad \text{en} \quad (u,v) = (1,-1).$$

**8.** Considere las ecuaciones:

$$\begin{cases} x = u + v + w, \\ y = u^2 + v^2 + w^2, \\ z = u^3 + v^3 + w^3. \end{cases}$$

Calcular $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ en la imagen $(x,y,z) = (2,6,8)$ de $(u,v,w) = (1,2,-1)$.

**9.** La hipótesis de que $F_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ tenga inversa en el teorema de la función implícita no es condición necesaria para que la ecuación $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ defina una única función diferenciable $f$ tal que $f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{y}_0$. Probar esto tomando $F(x,y) = x^9 - y^3$ y $(x_0, y_0) = (0,0)$.

**10.** Considerar la ecuación $(x-2)^3 y + xe^{y-1} = 0$.

(a) ¿Está $y$ definida implícitamente como una función de $x$ en un entorno de $(x,y) = (0,0)$?

(b) ¿Y en un entorno de $(2,1)$?

(c) ¿Está $y$ definida implícitamente como una función diferenciable de $x$ en un entorno de $(x,y) = (1,1)$? ¿Y si no se pide “diferenciable”?

## COORDENADAS CURVILÍNEAS

**11.** Las **coordenadas polares** en el plano se definen por:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T(r,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{pmatrix}, \quad \text{con} \quad \begin{cases} 0 < r < \infty, \\ 0 \le \theta < 2\pi. \end{cases}$$

(a) Encontrar $\mathrm{d}_{\mathbf{u}} T$ y su inversa en aquellos $\mathbf{u} = (r,\theta)$ donde existan.

(b) Calcular $T^{-1}$ explícitamente, y comparar $\mathrm{d}_{T(\mathbf{u})} T^{-1}$ y $(\mathrm{d}_{\mathbf{u}} T)^{-1}$ en los puntos correspondientes.

**12.** Dibuje las siguientes curvas dadas en coordenadas polares:

(a) $r(\mathrm{sen}\,\theta - \cos\theta) = \pi/2, \quad \pi/2 \le \theta \le \pi.$

(b) $r = \pi/2\,\cos\theta, \quad 0 \le \theta \le \pi/2.$

(c) $r = \theta, \quad 0 \le \theta < 2\pi.$

(d) $r = 1 - \mathrm{sen}\,\theta, \quad 0 \le \theta < 2\pi.$

**13.** Use las coordenadas polares para describir las siguientes regiones en $\mathbb{R}^2$.

(a) $x > 0, \quad 1 \le x^2 + y^2 \le 2.$

(b) $0 \le x \le 1, \quad x^2 \le y \le x.$

(c) $0 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le \sqrt{1-(x-1)^2}.$

**14.** Las **coordenadas esféricas** en $\mathbb{R}^3$ se definen por:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = S(r,\phi,\theta) = \begin{pmatrix} r \operatorname{sen}\phi \, \cos\theta \\ r \operatorname{sen}\phi \, \operatorname{sen}\theta \\ r\cos\phi \end{pmatrix}, \text{ con } \begin{cases} 0 < r < \infty, \\ 0 < \phi < \pi, \\ 0 \le \theta < 2\pi. \end{cases}$$

(a) Hallar $\mathrm{d}_{\mathbf{u}} S$ en los puntos $\mathbf{u} = (r,\phi,\theta)$ donde exista.
(b) Calcular $S^{-1}$ explícitamente.

**15.** Dibuje las curvas y superficies en $\mathbb{R}^3$ expresadas en coordenadas esféricas:
(a) $r = 2,\ \ 0 \le \theta \le \pi/4,\ \ \pi/4 \le \phi \le \pi/2.$
(b) $1 \le r \le 2,\ \ \theta = \pi/2,\ \ \phi = \pi/4.$
(c) $0 \le r \le 1,\ \ 0 \le \theta \le \pi/2,\ \ \phi = \pi/4.$

**16.** Use las coordenadas esféricas para describir las siguientes regiones en $\mathbb{R}^3$.
(a) $y > 0,\ \ x = \sqrt{3}y.$
(b) $x < 0,\ \ x^2 + y^2 + z^2 \le 1.$
(c) $z > 0,\ \ z^2 = 3x^2 + 3y^2.$

**Ejercicios de repaso.** Los ejercicios marcados con $\star$ son de mayor dificultad.

**17.** $\star$ Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} + x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Probar que $f'(0)$ es inversible pero que $f$ no tiene inversa en ningún entorno de 0. ¿Por qué no se cumple el teorema de la función inversa?

**18.** $\star$ Probar que bajo las hipótesis del teorema de la función implícita existe una única función $f$ tal que $F(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) = 0$ en un entorno de $\mathbf{x}_0$. (Ayuda: usar la función $H(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\mathbf{x}, F(\mathbf{x},\mathbf{y}))$ y aplicar el teorema de la función inversa).

**19.** $\star$ Sea $n \in \mathbb{N}$, con $n > 1$, y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase $C^1$. Probar que si existe $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(\mathbf{p}) = 0$ y $\nabla f(\mathbf{p}) \neq 0$, entonces $f$ se anula en infinitos puntos de $\mathbb{R}^n$.

**20.** Dados $a > 0$ y $b > 0$, las **coordenadas elípticas** en el plano están determinadas por:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T(r,\theta) = \begin{pmatrix} ar\cos\theta \\ br \operatorname{sen}\theta \end{pmatrix}, \text{ con } \begin{cases} 0 < r < \infty, \\ 0 \le \theta < 2\pi. \end{cases}$$

Calcular explícitamente $T^{-1}$, y el jacobiano de $T$.

**21.** Dados $a > 0$, $b > 0$ y $c > 0$, las **coordenadas elipsoidales** en $\mathbb{R}^3$ están determinadas por:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T(r,\phi,\theta) = \begin{pmatrix} ar \operatorname{sen}\phi\cos\theta \\ br \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \\ cr\cos\phi \end{pmatrix}, \text{ con } \begin{cases} 0 < r < \infty, \\ 0 < \phi < \pi, \\ 0 \le \theta < 2\pi. \end{cases}$$

(a) Graficar para el caso $a = 1$, $b = c = 2$.
(b) Calcular explícitamente $T^{-1}$, y el jacobiano de $T$.