Práctico 6

Matrices de transformaciones lineales. Cambios de base.

Martes 18 de octubre

Ejercicio 1. Sea $B = \{(1,-2,1),(2,-3,3),(-2,2,-3)\}$

(a) Probar que B es una base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Hallar la matriz de cambio de base de la base canónica C a B.

(c) Hallar las coordenadas, respecto de B, de los vectores $(1,0,1)$ y $(-1,2,1)$.

(d) Más aún, describir (x,y,z) en términos de la base B.

Ejercicio 2. Sea $B = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \right\}$.

(a) Probar que B es una base de $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

(b) Sea $C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$. Hallar la matriz de cambio de base de B a C y la matriz de cambio de base de C a B.

(c) Hallar las coordenadas respecto de B de las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 10 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 3. Sea $B = \{(0,1,-2,0),(1,-1,2,1),(0,-2,3,3),(2,2,-2,-3)\}$.

(a) Probar que B es una base de $\mathbb{R}^4$.

(b) Hallar la matriz de cambio de base de B a la base canónica C y la matriz de cambio de base de C a B.

(c) Hallar las coordenadas respecto de B de $(w,x,y,z) \in \mathbb{R}^4$.

Ejercicio 4. Sean V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial de dimensión n, B una base de V y $A \in \mathbb{k}^{n\times n}$ una matriz inversible. Probar que existen bases B_1 y B_2 tales que:

(a) A es la matriz de cambio de base de B_1 a B;

(b) A es la matriz de cambio de base de B a B_2.

Ejercicio 5.

(a) Para cada una de las transformaciones lineales $T_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ del ejercicio 2 del Práctico 5, dar su matriz respecto de las bases canonicas de $\mathbb{R}^3$.

(b) Repetir pero ahora tomando las bases ordenadas $B_1 = \{(1,1,0),(0,1,1),(1,0,0)\}$ y $B_2 = \{(1,-2,1),(2,-3,3),(-2,2,-3)\}$.

Ejercicio 6. Para las transformaciones lineales $T_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ del ejercicio 2 del Práctico 5, hallar las siguientes composiciones: $T_4 \circ T_3$, $T_3 \circ T_4$, $T_5 \circ T_3$. Verificar que la matriz respecto de las bases canónicas es el correspondiente producto de matrices.

Jueves 20 de octubre

Ejercicio 7. Sean $T, U : \mathbb{R}[t]_2 \to \mathbb{R}[t]_1$ las transformaciones lineales definidas por

$$T(ax^2 + bx + c) = (a+b)x + 2c - a, \qquad U(P) = P'.$$

(a) Sean $C = \{x^2, x, 1\}$, $C' = \{x, 1\}$. Calcular las matrices de T y U respecto de C y C'.

(b) Sean $B = \{x^2+1, x^2+x+1, x^2\}$ y $B' = \{1, x-2\}$. Calcular las matrices de T y U respecto de las bases B y B'.

Ejercicio 8. Sea $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ la transformación lineal dada por $T(x_1, x_2) = (x_1, 0)$. Sea B la base canónica de $\mathbb{C}^2$, y B' la base $\{(1, i), (-i, 2)\}$
Calcular la matriz de T respecto de la base B, respecto de la base B', respecto de las bases B y B', y respecto de las bases B' y B.

Ejercicio 9. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal mostrar que:

(a) Si $T(v) = 0$ para todo $v \in V$, entonces para cualesquiera bases B_V y B_W de V y W respectivamente, la matriz de T respecto de ellas es la matriz nula.

(b) Si $\operatorname{Nu} T$ es no trivial entonces existe una base B_V de V tal que para cualquier base B_W de W la matriz de T respecto de ellas tiene al menos una columna nula. Más aún, se puede elegir B_V de tal manera que tenga $\dim \operatorname{Nu} T$ columnas nulas.

(c) Existen bases B_V y B_W de V y W respectivamente tal que la matriz de T respecto de ellas es $\begin{pmatrix} \mathrm{Id}_m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donde $m = \dim \operatorname{im}(T)$.

Ejercicio 10. Sea $V = \mathbb{R}^{n\times n}$ y sea $A \in V$ una matriz fija. Sean L_A, R_A y T_A las funciones de V en V definidas por:

$$L_A(B) = AB, \qquad R_A(B) = BA, \qquad T_A = AB - BA.$$

(a) Probar que son transformaciones lineales.

(b) Demostrar que $L_A = 0$ si y sólo si $A = 0$.

(c) ¿Es cierto que $T_A = 0$ si y sólo si $A = 0$?

(d) Determinar $\{A : \mathrm{Id}_n \in \operatorname{im} L_A\}$, $\{A : \mathrm{Id}_n \in \operatorname{im} R_A\}$ y $\{A : \mathrm{Id}_n \in \operatorname{im} T_A\}$.

Ejercicio 11. Sean $V = \mathbb{R}^6$ y W_1 y W_2 los siguientes subespacios de V:

$$W_1 = \{(u, v, w, x, y, z) : u + v + w = 0,\ x + y + z = 0\},$$
$$W_2 = \langle (1, -1, 1, -1, 1, -1), (1, 2, 3, 4, 5, 6), (1, 0, -1, -1, 0, 1), (2, 1, 0, 0, 0, 0)\rangle.$$

Determinar $W_1 \cap W_2$ y describirlo por generadores y con ecuaciones.

Ejercicio 12. Sean $V = \mathbb{R}[x]_4$ y W_1 y W_2 los siguientes subespacios de V:

$$W_1 = \{P \in V : P(1) = P(2) = 0\}, \qquad W_2 = \langle 3 - 2x + x^2 + x^4,\ 1 - x + x^2 - x^3\rangle.$$

Determinar $W_1 \cap W_2$.

Ejercicio 13. Sean V y W dos $\Bbbk$-espacios vectoriales, $\operatorname{Hom}(V, W)$ el conjunto de todas las transformaciones lineales.

(a) Dadas $T, U \in \operatorname{Hom}(V, W)$ y $c \in \Bbbk$, definimos las funciones $T + U : V \to W$, $c \cdot T : V \to W$ como sigue:

$$(T + U)(v) = T(v) + U(v), \qquad (c \cdot T)(v) = c \cdot (T(v)), \qquad v \in V.$$

Probar que $T + U$ y $c \cdot T$ son transformaciones lineales; es decir, $T + U, c \cdot T \in \operatorname{Hom}(V, W)$.

(b) Probar que $\operatorname{Hom}(V, W)$ es un $\Bbbk$-espacio vectorial, con la suma y el producto por escalares definidos en el inciso anterior.

Ejercicio 14. Sean V y W dos $\Bbbk$-espacios vectoriales, de dimensión n y m respectivamente. Sean B y B' bases de V y W, respectivamente. Definimos

$$\Phi : \operatorname{Hom}(V, W) \to \Bbbk^{m \times n}, \qquad \Phi(T) = [T]_{B,B'} \text{ para cada } T \in \operatorname{Hom}(V, W).$$

Probar que Φ es un isomorfismo. Concluir que $\dim \operatorname{Hom}(V, W) = mn$.