Análisis Funcional I – 2024
Práctico 1

(1) Un espacio métrico (X, d) es un conjunto no vacío X junto con una aplicación $d : X \times X \to \mathbb{R}$ que satisface las siguentes propiedades para todo x, y, z en X:
 (D1) $d(x, y) \geq 0$ (*positividad*)
 (D2) $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.
 (D3) $d(x, y) = d(y, x)$ (*simetría*)
 (D4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (*desigualdad triangular*)
 Dicha función d se llama *métrica*. Probar que (D2), (D3) y (D4) implican (D1).

(2) Sea X un EV. Decimos que un conjunto $\mathcal{B}$ de vectores de X es linealmente independiente si todo subconjunto finito de $\mathcal{B}$ es linealmente independiente. Un conjunto $\mathcal{B}$ de vectores de X genera el espacio vectorial X si todo vector en X se puede escribir como combinación lineal finita de elementos de $\mathcal{B}$. Una base algebraica de X es un conjunto $\mathcal{B}$ de vectores que generan X y que son linealmente independientes. Probar que todo espacio vectorial X tiene base algebraica.

(3) Sea $\mathcal{X}$ un espacio normado. Demostrar que el espacio $\mathcal{X}$ es de Banach si y sólo si dada $\{x_n\}$ una sucesión en $\mathcal{X}$, la condición $\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n|| < \infty$ implica que existe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} x_n$.

(4) Sea $\ell^2(\mathbb{N})$ el espacio vectorial de las sucesiones de cuadrado sumable. Probar lo siguiente:
 (a) Probar que $\ell^2(\mathbb{N})$ es un espacio de Banach.
 (b) $\ell^2(\mathbb{N})$ tiene dimensión infinita.
 (c) $\ell^2(\mathbb{N})$ es separable.
 (d) $\{x \in \ell^2(\mathbb{N}) : ||x||_2 = 1\}$ es cerrado pero no compacto.
 (e) $\{x \in \ell^2(\mathbb{N}) : x_i = 0$ salvo un número finito de i's$\}$ es denso.

(5) Definimos

$$\ell^p(\mathbb{N}) := \{x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} : ||x||_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\}$$

$$\ell^\infty(\mathbb{N}) := \{x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty} : ||x||_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i| < \infty\}.$$

 (a) Dar ejemplos de:
  - una sucesión $\{x^n\} \subset \ell^2(\mathbb{N})$ que converja en $(\ell^\infty(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$ pero que no converja en $(\ell^2(\mathbb{N}), \|\cdot\|_2)$.
  - una sucesión $\{x^n\} \subset \ell^1(\mathbb{N})$ que converja en $(\ell^2(\mathbb{N}), \|\cdot\|_2)$ pero que no converja en $(\ell^1(\mathbb{N}), \|\cdot\|_1)$.
 (b) Probar que $\ell^1(\mathbb{N})$ y $\ell^\infty(\mathbb{N})$ son de Banach con las normas $|| \cdot ||_1$ y $|| \cdot ||_\infty$ respectivamente, pero $\ell^1(\mathbb{N})$ no es de Banach con la norma $|| \cdot ||_\infty$ (i.e. $\ell^1(\mathbb{N})$ no es subespacio cerrado de $\ell^\infty(\mathbb{N})$.)

(c) $\ell^1(\mathbb{N})$ es subespacio vectorial denso (propio) de $\ell^2(\mathbb{N})$ (por lo tanto no es completo con la $||\cdot||_2$).

(d) Probar que a clausura de $\ell^1(\mathbb{N})$ y $\ell^2(\mathbb{N})$ en $\ell^\infty(\mathbb{N})$ es $c_0 := \{x = \{x_i\}_{i=1}^\infty : \lim_{i\to\infty} |x_i| = 0\}$. Deducir que c_0 es de Banach con la $||\cdot||_\infty$.

(e) Mostrar que

$$\ell^1(\mathbb{N}) \subsetneqq \ell^2(\mathbb{N}) \subsetneqq c_0 \subsetneqq c := \{x = \{x_i\}_{i=1}^\infty : \exists \lim_{i\to\infty} x_i\} \subsetneqq \ell^\infty(\mathbb{N}).$$

(f) ¿Es c cerrado en $\ell^\infty(\mathbb{N})$?

(g) Probar que $||x||_q \leq ||x||_p$ para todo $x \in \ell^p(\mathbb{N})$ para todo $1 \leq p \leq q \leq \infty$. (Ayuda: Primero suponer que $||\cdot||_p = 1$.)

(6) (a) Sea $\mathcal{H}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ con un producto interno $(\cdot,\cdot)$. Definimos $||x|| = (\cdot,\cdot)^{\frac{1}{2}}$. Probar que $||\cdot||$ es una norma.

(b) En todo pre-Hilbert (espacio vectorial con producto interno, no necesariamente completo) vale la "regla del paralelogramo" $2||x||^2 + 2||y||^2 = ||x-y||^2 + ||x+y||^2$. Además vale

$$(x,y) = \frac{1}{4}\{||x+y||^2 - ||x-y||^2\}, \qquad \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{R},$$

$$(x,y) = \frac{1}{4}\{||x+y||^2 - ||x-y||^2 \ + i||x+iy||^2 - i||x-iy||^2\}, \qquad \text{si } \mathbb{K} = \mathbb{C}.$$

Nota: *El producto escalar se rescata a partir de la norma y está determinado por sus valores en la diagonal o sea por* $(x,x) = ||x||^2$.

(c) Las normas $||\cdot||_1$ y $||\cdot||_\infty$ no cumplen con la regla del paralelogramo y por lo tanto $\ell^1(\mathbb{N})$ y $\ell^\infty(\mathbb{N})$ no son de Hilbert. Pero $\ell^1(\mathbb{N})$ es pre-Hilbert con la $||\cdot||_2$. ¿Son $\ell^1(\mathbb{N})$, c y c_0 espacios pre-Hilbert con la norma $||\cdot||_\infty$?

(7) (a) Probar que $(f,g) = \int f(x)\overline{g(x)}\,dx$ es un producto escalar y notar que $(f,f)^{\frac{1}{2}} = ||f||_2$.

(b) Probar que $||f+g|| = ||f|| + ||g||$, donde $||\cdot||$ viene dada por un producto escalar, si y sólo si $f = \alpha g$ para algún $\alpha \geq 0$. Deducir que $||\cdot||_1$ y $||\cdot||_\infty$ no vienen dadas por ningún producto escalar.

(c) Consideramos (X,μ) un espacio de medida tal que $\mu(X) < \infty$. Probar que $L^q(X) \subseteq L^p(X)$ y que $||f||_p \leq \mu(X)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}||f||_q$, si $1 \leq p \leq q \leq \infty$.

(d) Si (X,μ) un espacio de medida tal que $\mu(X) < \infty$ y $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, probar que

$$||f||_1 \leq \mu(X)^{\frac{1}{p'}}||f||_p \leq \mu(X)||f||_\infty$$

y $||f||_\infty = \lim_{p\to\infty} ||f||_p$.

(e) Si $r \leq p \leq s$ entonces $L^p(X) \subset L^r(X) + L^s(X)$, donde el conjunto de la derecha es $\{f+g : f \in L^r(X) \text{ y } g \in L^s(X)\}$. Dar una descomposición no trivial ($f = f + 0$).

(f) Probar que $|| \cdot ||_p$ cumple la regla del paralelogramo si y sólo si $p = 2$. Luego $|| \cdot ||_2$ es la única que viene de un producto escalar.

(8) Sea $f_\alpha(x) = x^{-\alpha}$, $0 \leq \alpha < \infty$

(a) Si $X = [0,1]$ con la medida de Lebesgue, ¿Para qué valores de α, $f_\alpha \in L^p(X)$?

(b) Si $X = [1,\infty)$ con la medida de Lebesgue, ¿Para qué valores de α, $f_\alpha \in L^p(X)$?

(9) Construir una sucesión de funciones en $C([0,1])$ que converja a 0 pero que diverja respecto de la norma $\|\cdot\|_1$.

(10) Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en $C([0,1])$ que converge *uniformemente* a una función f. Mostrar que f es continua y que a su vez $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f respecto de la $\|\cdot\|_1$.

(11) (a) Probar que en todo espacio vectorial existe una norma.

(b) Si X es un espacio normado entonces

- $|\,||x|| - ||y||\,| \leq ||x-y||$.
- $||x_1 + x_2 + \cdots + x_n|| \leq ||x_1|| + ||x_2|| + \cdots + ||x_n||$.

Ejercicios adicionales

(12) Sea $(X, ||\cdot||)$ un espacio vectorial normado de dimensión finita. Entonces $(X, ||\cdot||)$ es un espacio de Banach.

(13) (a) Probar que, si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, entonces

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$$

está en $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ y es continua.

(b) Demostrar que, si $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, entonces $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ y $||f * g||_p \leq ||f||_1 ||g||_p$.