Resumen 2do Parcial

Javier Vera

November 18, 2022

1 Integrales

- Fracciones Simples (Si el pol de arriba mayor grado que el de abajo dividir)
- Atento a dividir polinomios por mas que quede resto
- Llevar polinomio de arriba a derivada de polinomio de abajo

$$\int \frac{5x+2}{x^2+2x+10}dx = \int \frac{\frac{5}{2}(\frac{2}{5}5x+\frac{2}{5}2)}{x^2+2x+10}dx = \int \frac{\frac{5}{2}(2x+2-\frac{6}{5})}{x^2+2x+10}dx = \frac{5}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+10}dx - \int \frac{3}{x^2+2x+10}dx$$

  Y ahora podemos usar $u = x^2+2x+10 \quad du = (2x+2)dx$. Segundo sumando lo llevamos a cuadrado

- Sustitución. Si $x = 2\arctan(t)$ y usando $t = \tan(\frac{x}{2})$ obtenemos: $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \sin(x) = \frac{2t}{1+t^2} \quad dx = \frac{2}{1+t^2}dt$

$$\text{Ejemplo} \quad 2x = \arctan(t) \quad dx = \frac{2}{1+t^2} \Rightarrow \int \frac{dx}{1+\cos(x)} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

- Completar cuadrados en el polinomio de abajo para llegar a algo del estilo $\int \frac{1}{u^2+1}$

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = \int \frac{du}{u^2+\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\int \frac{du}{\frac{4}{3}u^2+1} = \frac{4}{3}\int \frac{du}{(\frac{2u}{\sqrt{3}})^2+1} = \int \frac{dv}{v^2+1} = \arctan(v)$$

  Obs: A veces es mas facil y solo con un reemplazo llegamos a $\frac{1}{x^2+1}$

$$\int \frac{dx}{x^2-6x+10} = \int \frac{dx}{(x-3)^2+1} = \int \frac{du}{u^2+1}$$

- Llevar a la forma $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin(x)$$

- Partes
- Multiplicar y dividir

$$\int \sec x = \int \frac{\sec(x)(\sec x+\tan x)}{\sec x+\tan x} = \int \frac{\sec^2 x+\sec\tan x}{\sec x+\tan x}$$

  Y ahora usamos

$$u = \sec x+\tan x \quad du = \sec x\tan x+\sec^2 x$$

  A veces multiplicar por ‘conjugado‘

- Salvar raices:

$$\int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}} = 6\int \frac{u^5}{u^3+u^2} \quad \text{usando} \quad x = u^6 \quad dx = 6u^5du$$

- Formulas de reduccion:

$$\int \cos^n(x)dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1}(x)\sin(x) + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}(x)dx$$

(La del seno es igual pero donde dice seno poner coseno y donde dice coseno poner seno)

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^n} = \int \frac{1}{2n-2}\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{dx}{(x^2+1)^{n-1}}$$

- Sustitución Trigonometrica

  (i) Usando $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$

  $$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad x = \sinh t \quad dx = \cosh t \text{ llegamos a } \int \frac{\sinh t.\cosh t}{\sqrt{1+\sinh^2 t}} = \int \frac{\sinh t \cosh t}{\sqrt{\cosh^2 t}}$$

  (ii) Usando $\cos^2 + \sin^2 = 1$

  $$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx \text{ y usamos } x = \sin u \; dx = \cos u du \Longrightarrow \int \frac{\cos u}{\sqrt{1-\sin^2 u}} = \int \frac{\cos u}{\sqrt{cos^2 u}}$$

- Integrales importantes:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) \qquad \int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \tan^2 x = \sec^2(x) - 1$$

$$\int \sec x \tan x = \sec x \qquad \int \sec^2(x)dx = \tan x$$

La integral $\int \sec x$ ya la sabemos por ejercicios de practico

2 Convergencia de Integrales

2.1 Criterios

Sean f, g dos funciones integrables en $[a, c] \quad \forall c \in [a, b]$ tales que $0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$

- Comparación

$$\int_a^b g(x)dx \text{ converge } \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \text{ converge}$$

Observación: También tenemos su análogo

- Cociente

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = l$$

  (i) Si $0 < l \leq \infty$ entonces:

  $$\int_a^b g(x)dx \text{ es convergente si y solo si } \int_a^b f(x)dx \text{ es convergente}$$

  (ii) Si $l = 0$ entonces:

  $$\int_a^b g(x)dx \text{ es convergente entonces } \int_a^b f(x)dx \text{ es convergente}$$

  (iii) Si $l = \infty$ entonces:

  $$\int_a^b g(x)dx \text{ es divergente entonces } \int_a^b f(x)dx \text{ es divergente}$$

Observación: Cambiando con cuidado el enunciado tenemos el mismo criterio con uno de los bordes a infinito

- Convergencia absoluta

$$\int_a^b |f(x)|dx \text{ converge entonces } \int_a^b f(x)dx \text{ converge}$$

- Criterios P

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p} \text{ converge a } \frac{1}{p-1} \text{ si } p > 1 \text{ si no diverge } (p \le 1)$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} \text{ converge a } \frac{1}{-p+1} \text{ si } p < 1 \text{ si no diverge } (p \ge 1)$$

3 Series

- Serie geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r} \iff |r| < 1$$

- $\{a_n\}$ es sumable $\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$
- Sea $a_n \ge 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty a_n}$ converge $\iff \{S_n\}$ es acotada
- Si $a_n \ge 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ entonces $\{S_n\}$ es creciente por lo tanto si es acotada converge

3.1 Criterios

- Comparacion

$$\text{Sean } a_n, b_n \text{ sucesiones tales que } 0 \le a_n \le b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$\sum b_n \text{ converge} \Longrightarrow \sum a_n \text{ converge}$$
$$\sum a_n \text{ diverge} \Longrightarrow \sum b_n \text{ diverge}$$

- Cociente. Sean a_n, b_n sucesiones positivas $\forall n \in \mathbb{N}$ tales que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ con $c \ne 0 \wedge c \ne \infty$ entonces:

$$\sum a_n \text{ converge} \iff \sum b_n \text{ converge}$$

- Sea a_n sucesion de terminos positivos tal que $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r$

$$r > 1 \Longrightarrow \sum a_n \text{ no converge}$$

$$r < 1 \Longrightarrow \sum a_n \text{ converge}$$

- Integral. Sea f positiva y decreciente en $[1, \infty]$ tal que $f(n) = a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\int_1^\infty f(t)dt \text{ converge} \iff \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge}$$

- Criterio Raiz. Si $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$

$$l < 1 \Longrightarrow \sum |a_n| \text{ converge}$$

$$l > 1 \Longrightarrow \sum a_n \text{ diverge}$$
$$l = \infty \Longrightarrow \sum a_n \text{ no converge}$$

- $\sum |a_n|$ converge entonces $\sum a_n$ converge. Ademas $\{a_{n+}\}$ y $\{a_{n-}\}$ convergen tambien

– Leibniz. Sea a_n una sucesion decreciente y de terminos positivos tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n \text{ converge}$$

– Raave. a_n sucesion de terminos positivos tal que

$$r = \lim_{n\to\infty} n(1 - \frac{a_n}{a_{n-1}})$$

$$r > 1 \Longrightarrow \sum a_n \text{ converge}$$

$$r < 1 \Longrightarrow \sum a_n \text{ diverge}$$

Puede ser util cuando en el criterio de la raiz o en el del cociente nos da 1 el limite

4 Polinomios de Taylor

- El polinomio de la suma de funciones es igual a la suma de polinomios de dichas funciones
- $(P_{n,a,f}(x))' = P_{n-1,a,f'}(x)$
- $P_{n,a,f.g}(x) = P_{n,a,f}.P_{n,a,g}(x)$
- $P_{n,a,cf}(x) = cP_{n,a,f}(x)$
- $P_{n,a,f+g}(x) = P_{n,a,f}(x) + P_{n,a,g}(x)$
- Sea $P_{n,a,f} = \sum_{i=0}^{n} a_i(x-a)^i$ entonces $a_n = \frac{f^{(n)}(x)}{n!}$ por lo tanto $n!a_n = f^{(n)}(x)$
- Sea $f(x) = g(x^n)$, $p(x) = P_{m,0,g}(x)$ y $q(x) = p(x^n)$ entonces $q(x) = P_{n.m,0,f}$
- Sea f una función tal que $f, f^1, \cdots f^{n+1}$ estan bien definidas en $[a, b]$ y sea $R_{n,a}$ el resto del polinomio de taylor de grado n centrado en a:

  (i) $R_{n,a}(x) = \frac{f^{n+1}(t)}{n!}(x-t)^n(x-a)$ para algún $t \in (a, x)$

  (ii) $R_{n,a}(x) = \frac{f^{n+1}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ para algún $t \in (a, x)$

  (iii) $R_{n,a}(x) = \int_a^x \frac{f^{n+1}(t)}{n!}(x-t)^n dt$ para algún $t \in (a, x)$

- Dos funciones se dicen iguales en orden n al rededor de a si cumplen

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - g(x)}{(x-a)^n} = 0$$

- Si f es derivable n veces y P es un polinomio que es igual a f hasta orden n al rededor de a, entonces es el polinomio de taylor de f de grado n
- Dada f

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P_{n,a,f}(x)}{(x-a)^n} = 0$$