Notación: Distribución Hipergeométrica

$X \sim H(N, D, n)$ $N, D, n \in \mathbb{N}$ $n, D \leq N$

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\binom{D}{x}\binom{N-D}{n-x}}{\binom{N}{n}} & \max\{0, n-N+D\} \leq x \leq \min\{n, D\} \\ 0 & cc \end{cases}$$

Aproximación de la distribución Hipergeom a la binomial

$n_0 \in \mathbb{N}$ fijo. Sea $N \in \mathbb{N}$ $N > n_0$

y sea $D = D_N \in \mathbb{N}$ $D_N < N$

tq $\lim_{N \to \infty} \dfrac{D_N}{N} = \theta \in \mathbb{R}$

y sean

$X \sim H(N, D_n, n_0)$ v.a con f_X^N dens discreta de X

$Y \sim Bi(n_0, \theta)$ v.a con f_Y dens discreta de Y

$\Rightarrow \forall x \in \mathcal{B}$ se cumple que

$$f_Y(x) = \lim_{N \to \infty} f_X^N(x)$$

<u>Concepto</u> para n_0 fijo y N suficientemente grande la distribución hipergeom $H(N, D_N, n_0)$ se puede aproximar por la distribución binomial $Bi(n_0, \theta)$ con $\theta = \lim_{N \to \infty} \frac{D_N}{N}$

<u>Regla práctica</u> Si tenemos una población dicotómica de tamaño N, "muy grande" de la que se extrae una muestra sin reposición de tamaño n "muy chico en relación a N"

con $N = \underbrace{D}_{\text{Tipo 1}} + \underbrace{(N - D)}_{\text{tipo 2}}$

$\Rightarrow$ si $\frac{n}{N} \leq 0.05$ el experimento hipergeométrica lo podemos ver como un experimento binomial con n ensayos y probabilidad de éxito igual a $\frac{D}{N}$

$$X \sim H(N, D, n) \overset{\sim}{\sim} Y \sim Bi\left(n, \frac{D}{N}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{n}{N} \leq 0.05$$

Ejemplo Población de 10.000 habitantes donde 8000 tienen ADHD. Se seleccionan 5 individuos al azar sin repo

a) La prob de que exactamente 2 entre los 5 tengan ADHD

b) "A lo sumo 2"
usar app

a) $$P(X=2) = \frac{\binom{8000}{2}\binom{2000}{3}}{\binom{10.000}{5}} = 0.0511$$

b) $$P(X \leq 2) = \sum_{x=0}^{2} f_X(x) = f_X(0) + f_X(1) + f_X(2)$$

$$= 0.0578$$

$$\max\{0, -1995\} \leq x \leq \min\{8000, 5\}$$

Ahora usemos binomial $\left(\frac{n}{N} = \frac{5}{10000} = 0{,}0005\right)$

a) $P(X=2) = 0.0512$

b) $P(X \leq 2) = 0{,}0579$

Distribución geométrica

Def Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un e.p y X v.a sobre $(\Omega, \mathcal{A})$. Se dice que X tiene una distribución geométrica con parámetro p $(0 < p < 1)$ si su función densidad discreta está dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} p(1-p)^x & x \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ 0 & c.c \end{cases}$$

p probabilidad de éxito

Notar que f_X es función densidad pq cumple las props

suma geométrica

$$\text{I)} \sum_{x=0}^{\infty} f_X(x) = \sum^{\infty} p(1-p)^x = \cancel{p} \frac{1}{\cancel{1-(1-p)}} = 1$$

y las otras dos trivial

Notación $X \sim G(p)$ $0 < p < 1$

Función de distribución acumulada de $X \sim G(p)$

$F_X : \mathbb{R} \to [0,1] \qquad F_X(t) = P(X \le t)$

$\to f_X(x) = 0$ si $x \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$

si $t < 0 \qquad F_X(t) = P(X \le t) = 0$

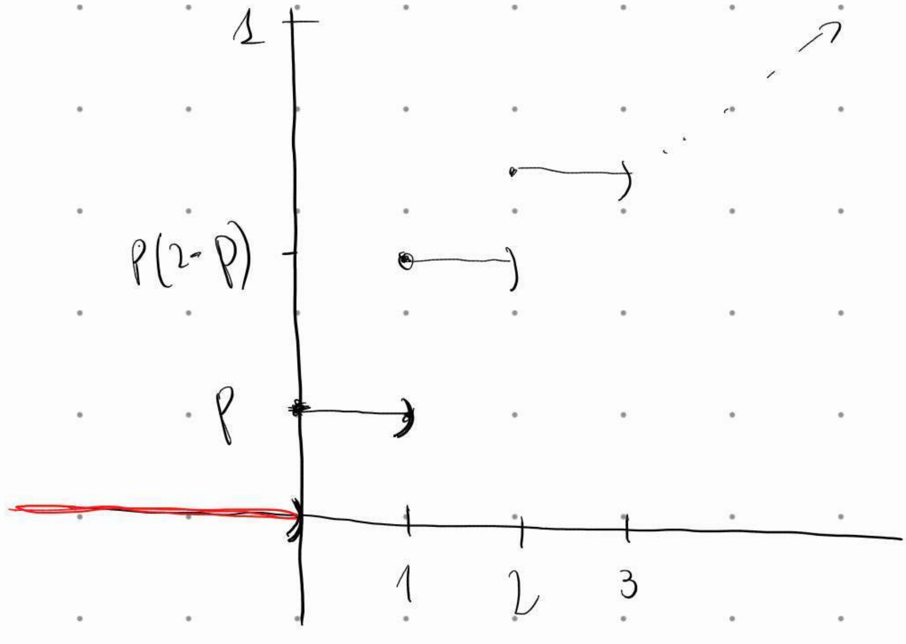
si $t \geq 0 \qquad F_X(t) = \sum_{x=0}^{[t]} f_X(x) = \sum P(X = x)$

$$= \sum_{x=0}^{[t]} p(1-p)^x$$

Serie geométrica truncada

$$\sum_{i=0}^{n} r^x = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

$$= \cancel{p} \, \frac{1 - (1-p)^{[t]+1}}{1 - \cancel{(1}-p)}$$



obs Sea $X \sim G(p)$ y sea $x \in R(X) = \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$P(X \geq x) = 1 - P(X < x)$$
$$= 1 - P(X \leq x - 1)$$

$$= 1 - F_X(x-1)$$
$$= 1 - \left[1 - (1-p)^{x-1+1}\right]$$

$$= (1-p)^x$$

Proposición Sea $X \sim G(p)$ $(0 < p < 1)$

entonces $\forall n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se cumple
$$P(X \geq n+m \mid X \geq n) = P(X \geq m)$$

demo $P(X \geq n+m \mid X \geq n)$
$$= \frac{P((X \geq n+m) \cap (X \geq n))}{P(X \geq n)}$$

$$= \frac{P(X \geq n+m)}{P(X \geq n)} = \frac{(1-p)^{n+m}}{(1-p)^n} = (1-p)^m = P(X \geq m)$$

Caracterización de dist geométrica

Prop $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ e.p X v.a discreta a valores enteros definida sobre $(\Omega, \mathcal{A})$ tq

1) X no es cte

2) $P(X \geq 0) = 1$

3) $P(X > n+m) = P(X > n) \cdot P(X > m)$
$\forall n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$\Rightarrow \ Y = (X-1) \sim G(p)$ con $p = P(X=1)$

demo Aplicamos 3) $n = m = 0$

$$P(X>0) = P(X>0)\, P(X>0)$$
$$= \{P(X>0)\}^2 \to P(X>0) = 0 \text{ ó } \to P(X>0) = 1$$

Supongamos $P(X>0) = 0 \Rightarrow 1 = P(X \leq 0)$

$\Rightarrow 1 = P(X=0) + \underbrace{P(X<0)}_{=0 \text{ por } 2)}$

$\Rightarrow 1 = P(X=0)$ absurdo por 1) $\Rightarrow \boxed{P(X>0) = 1}$

$P(X>0)=1 \Rightarrow$ a) $P(X=0)=0$

b) $P(X\geq 1)=1$

Llamemos p a $P(X=1)$, se puede probar

i) $0<p<1$

ii) $P(X=n)=(1-p)^{n-1} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Ahora definimos $Y=(X-1)$

$P(X\geq 1)=1 \Rightarrow P(Y\geq 0)=P(X\geq 1)=1$

$R(Y)=\mathbb{N}\cup\{0\}$. Sea $n\in R(Y)$

$$P(Y=n)=P(X-1=n)$$
$$=P(X=n+1)\underset{ii)}{=}p(1-p)^n$$

$\Rightarrow Y\sim G(p)$

Probemos i) ii) $m=1$ $n=0$

$$
\begin{aligned}
P(X>1) &= P(X>0)\, P(X>1) \\
&= P(X>0)\,(1-P(X\leq 1)) \\
&= P(X>0)\,(1-P(X=1)-P(X=0)) \\
&= \underbrace{P(X>0)}_{1}\,\underbrace{(1-P(X=1))}_{1-p}
\end{aligned}
$$

$$= 1-p$$

$$
\begin{aligned}
P(X>n+1) &= P(X>n)\, P(X>1) \\
(3) \quad &= P(X>n)\,(1-p) \\
(3) \quad &= P(X>n-1)\, P(X>1)\,(1-p) \\
&= \ldots = P(X>0)\,(1-p)^{n+1} \\
&= (1-p)^{n+1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(X=n) &= P(X>n-1) - P(X>n) \\
&= (1-p)^{n-1} - (1-p) \\
&= (1-p)^{n-1}\,[1-(1-p)] \\
&= (1-p)^{n-1}\, p
\end{aligned}
$$

y vale $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$