ALGEBRA LINEAL - Práctica N°6 - Segundo cuatrimestre de 2020

Autovalores y autovectores - Diagonalización

Ejercicio 1. Calcular el polinomio característico, los autovalores y los autovectores de la matriz A en cada uno de los siguientes casos (analizar por separado los casos $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$):

i) $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$ ii) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ iii) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$

iv) $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$ v) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ vi) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 2. Para cada una de las matrices A del ejercicio anterior, sea U una base de K^n y sea $f : K^n \to K^n$ la tranformación lineal tal que $|f|_U = A$. Decidir si es posible encontrar una base B de K^n tal que $|f|_B$ sea diagonal. En caso afirmativo, calcular $C(B, U)$.

Ejercicio 3. Sea $A = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$ tal que $\sum\limits_{1\le j\le n} a_{ij} = 1$ para todo $i = 1, \dots, n$. Probar que 1 es autovalor de A y exhibir un autovector correspondiente.

Ejercicio 4. Diagonalizar las matrices $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ encontrando sus autovectores:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5. Sea $\delta : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ la transformación lineal derivación. Mostrar que todo número real es un autovalor de δ y exhibir un autovector correspondiente.

Ejercicio 6.

i) Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in K^{2\times 2}$. Determinar todos los a, b y $c \in K$ para los que A es diagonalizable.

ii) Probar que toda matriz $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ es diagonalizable o bien es semejante a una matriz del tipo $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$.

Ejercicio 7. Hallar todos los valores de $k \in \mathbb{R}$ tales que la siguiente matriz es diagonalizable:

$$A = \begin{pmatrix} k & 1 & 2k + k^2 & -1 \\ 0 & k+1 & 0 & k^2 - 4 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k+1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 8. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por:

$$f(x, y, z) = (-x - 2y + 6z, 4y, -x - 3y + 4z)$$

i) Encontrar una base B de $\mathbb{R}^3$ tal que $|f|_B$ sea diagonal.

ii) Calcular $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}^n$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

iii) Hallar, si es posible, una matriz $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $P^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 9. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

i) Probar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $A^n . \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix}$ donde F_i es el i-ésimo término de la sucesión de Fibonacci (es decir, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ y $F_{i+1} = F_i + F_{i-1}$ para todo $i \in \mathbb{N}$).

ii) Encontrar una matriz $P \in GL(2, \mathbb{R})$ tal que $P^{-1}.A.P$ sea diagonal.

iii) Hallar la fórmula general para el término F_n, $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$.

iv) Se define la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ de la siguiente manera:

$$\begin{cases} a_0 = 0\,,\ a_1 = 1\,,\ a_2 = 1 \\ a_{n+3} = 6a_{n+2} - 11a_{n+1} + 6a_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

Hallar una fórmula general para el término a_n, $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$.

Ejercicio 10. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x'(t) = 6\,x(t) + 2\,y(t) \\ y'(t) = 2\,x(t) + 3\,y(t) \end{cases}$$

con condiciones iniciales $x(0) = 3$, $y(0) = -1$.
Sugerencia: Hallar una matriz $C \in GL(2, \mathbb{R})$ tal que $C^{-1} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} C$ sea diagonal y hacer el cambio de variables $\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = C^{-1} . \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.

Ejercicio 11. Sea $A \in K^{n\times n}$. Probar que A y A^t tienen los mismos autovalores. Dar un ejemplo en el que los autovectores sean distintos.

Ejercicio 12. Analizar la validez de las siguientes afirmaciones:

i) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ inversible $\iff$ 0 no es autovalor de A.

ii) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ inversible, v autovector de $A \Rightarrow v$ autovector de A^{-1}.

iii) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con n impar $\Rightarrow A$ admite un autovalor real.

Ejercicio 13.

i) Sea $f : K^n \to K^n$ un proyector con $\dim(\mathrm{Im}(f)) = s$. Probar que f es diagonalizable y calcular el polinomio característico $\mathcal{X}_f$ de f.

ii) Sea K un cuerpo incluido en $\mathbb{C}$ y sea $f : K^n \to K^n$ un morfismo nilpotente. Calcular $\mathcal{X}_f$. ¿Es f diagonalizable?

Ejercicio 14. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz que verifica $A^2 + I_n = 0$. Probar que A es inversible, que no tiene autovalores reales y que n debe ser par.

Ejercicio 15. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y sea $f : V \to V$ una transformación lineal tal que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 1$.
Probar que f es diagonalizable si y sólo si $\mathrm{Nu}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$.

Ejercicio 16. Sea $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ una transformación lineal. Probar que existe una base B de $\mathbb{C}^n$ tal que $|f|_B$ es triangular superior.

Ejercicio 17. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ las raíces de $\mathcal{X}_A$ contadas con multiplicidad. Probar que $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$ y $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$.

Ejercicio 18.

i) Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ diagonalizable con $tr(A) = -4$. Calcular los autovalores de A, sabiendo que los autovalores de $A^2 + 2A$ son -1, 3 y 8.

ii) Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ tal que $\det(A) = 6$; 1 y -2 son autovalores de A y -4 es autovalor de $A - 3\,I_4$. Hallar los restantes autovalores de A.

Ejercicio 19. Sean $A \in K^{m\times n}$ y $B \in K^{n\times m}$.

i) Probar que las matrices $\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{pmatrix}$ de $K^{(m+n)\times(m+n)}$ son semejantes.

ii) Deducir que, si $n = m$, $\mathcal{X}_{AB} = \mathcal{X}_{BA}$.

Ejercicio 20. Dadas las matrices $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ y los polinomios $P \in \mathbb{C}[X]$, calcular $P(A)$ para:

i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, a) $P = X - 1$, b) $P = X^2 - 1$, c) $P = (X-1)^2$

ii) $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$, $P = X^3 - iX^2 + 1 + i$

Ejercicio 21. Hallar el polinomio minimal de las siguientes matrices (comparar con el polinomio característico):

i) $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix}$ ii) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ iii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ iv) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

v) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ vi) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ vii) $\begin{pmatrix} 1 & i & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

viii) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ ix) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ x) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ xi) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$

Ejercicio 22. Sea $A \in K^{n\times n}$ la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Calcular su polinomio minimal y su polinomio característico.

Ejercicio 23. Calcular el polinomio minimal para cada una de las siguientes transformaciones lineales:

i) $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X],\ f(P) = P' + 2P$

ii) $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n},\ f(A) = A^t$

Ejercicio 24. Sea $\delta : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ la transformación lineal derivada. Probar que δ no admite polinomio minimal.

Ejercicio 25. Utilizando el Teorema de Hamilton-Cayley:

i) Calcular $A^4 - 4A^3 - A^2 + 2A - 5I_2$ para $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

ii) Calcular A^{1000} para $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

iii) Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, expresar a A^{-1} como combinación lineal de A y de I_2.

iv) Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, expresar a $(2A^4 - 12A^3 + 19A^2 - 29A + 37I_2)^{-1}$ como combinación lineal de A y de I_2.

v) Calcular $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 26. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y sea $f : V \to V$ una transformación lineal. Probar que f es un isomorfismo si y sólo si el término constante de $\mathcal{X}_f$ es no nulo. En dicho caso, hallar la expresión general de f^{-1} como polinomio en f.

Ejercicio 27. Exhibir una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $A^2 + I_n = 0$. Comparar con el Ejercicio 14.

Ejercicio 28.

i) Hallar una matriz $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ tal que $m_A(X) = X^3 - 5X^2 + 6X + 8$. Decidir si A es diagonalizable.

ii) Hallar una matriz $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ tal que $m_A(X) = X^4 + 4X^3 + 8X^2 + 8X + 4$. Decidir si A es diagonalizable.

Ejercicio 29. Sea $A \in K^{n\times n}$.

i) Probar que si A es nilpotente, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $m_A(X) = X^k$. Calcular todos los autovalores de A.

ii) Si $K = \mathbb{C}$ y el único autovalor de A es el 0, probar que A es nilpotente. ¿Qué pasa si $K = \mathbb{R}$?

Ejercicio 30. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz de traza nula. Probar que A es semejante a una matriz que tiene toda la diagonal nula.

Ejercicio 31. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por $f(x, y) = (x + 2y,\ 2x - 2y)$. Hallar todos los subespacios de $\mathbb{R}^2$ que sean f-invariantes.

Ejercicio 32. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal nilpotente tal que $f^n = 0$ y $f^{n-1} \neq 0$.

i) Probar que para cada $0 \le i \le n$ existe un subespacio S_i de $\mathbb{R}^n$ de dimensión i que es f-invariante.

ii) Probar que existe un hiperplano de $\mathbb{R}^n$ que es f-invariante pero que no admite un complemento f-invariante.

Ejercicio 33.

i) Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y sea $f : V \to V$ una transformación lineal diagonalizable. Si S es un subespacio de V que es f-invariante, probar que $f|_S : S \to S$ es diagonalizable.

ii) Sean $A,\, B \in K^{n\times n}$ tales que $AB = BA$ y sea $E_\lambda(A) = \{x \in K^n \,/\, Ax = \lambda x\}$. Probar que $E_\lambda(A)$ es B-invariante.

iii) Sean $A,\, B \in K^{n\times n}$ dos matrices diagonalizables tales que $A.B = B.A$. Probar que existe $C \in GL(n, K)$ tal que $C^{-1}AC$ y $C^{-1}BC$ son diagonales. (Es decir, A y B se pueden diagonalizar simultáneamente.)