Ejemplo El cilindro

$$C_r = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2+y^2=r^2\}$$

y $\varphi(u,v) = (r\cos u, r\,\text{sen}\, u, v)$, $N(\varphi) = \dfrac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}$

$$\varphi_u(u,v) = (-r\,\text{sen}\, u, r\cos u, 0)$$
$$\varphi_v(u,v) = (0, 0, 1)$$

$$\|\varphi_u(u,v) \times \varphi_v(u,v)\| = \|(r\cos u, r\,\text{sen}\, u, 0)\|$$
$$= r$$

$$\Rightarrow N(\varphi(u,v)) = (\cos u, \text{sen}\, u, 0)$$

$$-dN_{\varphi(u,v)}(\varphi_u(u,v)) = -\frac{d}{du} N \circ \varphi$$

$$= -\frac{d}{du}(\cos u, \text{sen}\, u, 0)$$

$$= -(-\text{sen}\, u, \cos u, 0)$$

$$= -\frac{1}{r}(-r\,\text{sen}(u), r\cdot\cos(u), 0)$$

en base $\{\varphi_u, \varphi_v\} = B$

$$\left(-\frac{1}{r}, 0\right)_B$$

lo mismo con $dN_{\varphi(u,v)}(\varphi_v(u,v))$

$$(0, 0)_B$$

esto nos da la matriz $[dN_{\varphi(u,v)}]_B$

$\Rightarrow \quad k_1 = 0 \qquad k_2 = -\frac{1}{r}$

$$[dN_p]_p = \begin{pmatrix} -k_1 & \\ & -k_2 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}\varphi_u(u,v)$ $\mathbb{R}\varphi_v(u,v)$ son las direcciones principales

Luego $\alpha(u) = \varphi(u, v_0)$

$\beta(v) = \varphi(u_0, v)$

Ejercicio Si cambiamos la orientación

$N$ por $\bar{N} = -N \Rightarrow \bar{k}_1 = -k_2 \quad \bar{k}_2 = -k_1$

luego $\bar{K}(p) = K(p)$ y $\bar{H}(p) = -H(p)$

def $p \in S$ una dirección asintótica de $S$ en $p$ es una dirección determinada por $v \in T_pS$ tal que $k_n(p) = 0$ en la dirección de $v$

$$(k_n(p) = 0 = II_p(v))$$

En el caso del cilindro $\varphi_r(u,v)$ se determina una dir asintótica la recta vertical

def Una curva asintótica es una curva regular $\alpha: I \to S$ tal que $\alpha'(t)$ determina una dirección asintótica $\forall t \in I$

<u>obs</u> Por fórmula de Euler

$$k_n(p) = \cos^2\theta\, k_1 + \operatorname{sen}^2\theta\, k_2$$

$$\Rightarrow \quad k_2(p) \leq k_n(p) \leq k_1(p)$$

por lo tanto, si $k_1(p) < 0$ o $k_2(p) > 0$ no habrá direcciones asintóticas

## Cálculo de $dN$ y $\mathrm{II}$ en coordenadas

Sea $S$ una superficie regular orientada con orientación $N$ y $\varphi : U \to S$ param compatible con $N$ es decir

$$N|_{\varphi(U)} = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}$$

$$N_u(u,v) = (N \circ \varphi)_u(u,v) = dN_{\varphi(u,v)}(\varphi_u(u,v))$$

$d_{\varphi(u,v)}N(\varphi_u(u,v))$ o $\dfrac{dN|_{\varphi(U)}}{du}$

$$N_v(u,v) = \qquad = dN_{\varphi(u,v)}(\varphi_v(u,v))$$

$$N_u, N_v \in T_{\varphi(u,v)}S$$

$\Rightarrow$ $N_u = a_{11} \varphi_u + a_{21} \varphi_v$ ⎫ esto es base
$N_v = a_{21} \varphi_u + a_{22} \varphi_v$ ⎭ $\{\varphi_u, \varphi_v\} = B$

es decir $\left[ dN_{\varphi(u,v)} \right]_B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

Recordar $dN$ es autoadjunto. Luego en una base ortonormal la matriz es simétrica. En general, no se cumple $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ son b.o.n., la matriz No es simétrica

$w = w_1 \varphi_u + w_2 \varphi_v \qquad (w \in T_p S)$

$$\mathrm{II}_p(w) = \langle -dN_p(w), w \rangle$$
$$= -\langle dN_p(w_1 \varphi_u + w_2 \varphi_2), w_1 \varphi_1 + w_2 \varphi_2 \rangle$$
$$= -\langle w_1 \underbrace{dN_p(\varphi_u)}_{N_u} + w_2 \underbrace{dN_p(\varphi_v)}_{N_v}, w_1 \varphi_1 + w_2 \varphi_2 \rangle$$

$$= -\langle w_1 N_u + w_2 N_v, w_1 \varphi_1 + w_2 \varphi_2 \rangle$$
$$= w_1^2 \langle N_u, \varphi_u \rangle$$

$$-\omega_1\omega_2\left(\langle N_u, \varphi_v\rangle + \langle N_v, \varphi_u\rangle\right)$$
$$-\omega_2^2 \langle N_v, \varphi_v\rangle$$

$$= \omega_1^2 e + 2\omega_1\omega_2 f + \omega^2 g$$

con $e = -\langle N_u, \varphi_u\rangle$

$f = -\langle N_u, \varphi_v\rangle \underset{\substack{dN \text{ autoadj} \\ \langle N, \varphi_u\rangle = 0}}{=} -\langle N_v, \varphi_u\rangle$

$g = -\langle N_v, \varphi_v\rangle$

def $e, f, g$ son los coeficientes de la segunda forma fundamental $\mathrm{II}$

Queremos calcular $a_{ij}$ en términos de

$E, F, G, e, f, g$

$$-f = \langle N_v, \varphi_u\rangle = \langle a_{12}\varphi_u + a_{22}\varphi_v, \varphi_u\rangle$$
$$= a_{12}E + a_{22}F$$

$$-e = \langle N_u, \varphi_u\rangle = a_{11}E + a_{21}F$$
$$-g = \langle N_v, \varphi_v\rangle = a_{11}F + a_{21}G$$

el otro $f$

$$-f = a_{11}F + a_{21}G$$

luego $-\begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$

$\det = EG - F^2$
$= \|\varphi_u \times \varphi_v\| \neq 0$

Cálculo de $dN$ y $II$ en coordenadas

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= -\begin{bmatrix} e & f \\ f & g \end{bmatrix} \frac{1}{EG - F^2} \begin{bmatrix} G & -F \\ -F & E \end{bmatrix}$$

luego

$$a_{11} = \frac{-eG + fF}{EG - F^2} \qquad a_{12} = \frac{-fG + gF}{EG - F^2}$$

$$a_{21} = \frac{eF - fE}{EG - F^2} \qquad a_{22} = \frac{fF - gE}{EG - F^2}$$

## La curvatura gaussiana

$$K = \det(dN) = \det\left(-\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}\right)$$

$$= \frac{(eg - f^2)}{EG - F^2}$$

## Curvatura media

$$H = -\frac{a_{11} + a_{22}}{2} \qquad \left(H = \frac{(k_1 + k_2)}{2}\right)$$

## Autovalores de $-dN$ $\quad k_1, k_2$

$$\det(-dN_p - \lambda I) = \det(dN_p + \lambda I)$$

$$= \det\begin{bmatrix} a_{11} + \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} + \lambda \end{bmatrix}$$

$$= (a_{11} + \lambda)(a_{22} + \lambda) - a_{12}a_{21}$$

$$= \lambda^2 + \lambda\underbrace{(a_{22} + a_{11})}_{Tr(dN)} + \underbrace{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}_{\det(dN)}$$

$$\lambda^2 - 2\lambda H + K$$ (H curvatura media)

raices $\quad \dfrac{\cancel{2}H \pm \sqrt{\cancel{4}H^2 - \cancel{4}K}}{\cancel{2}} = H \pm \sqrt{H^2 - K}$

Corolario Sea $S$ una sup regular con normal unitaria $N$ y $\varphi$ sist coord compatible con $N$. Si $E, F, G, e, f, g$ son los coeficientes de I y II respec entonces

curvatura gauss

curvatura media

(i) $K = \dfrac{eg - f^2}{EG - F^2}$ ii) $H = \dfrac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)}$

curvaturas principales

iii) $K_1, K_2 = H \pm \sqrt{H^2 - K}$