Lema $\emptyset \neq A$ A cerrado, convexo, $p \in H$

$\exists! \, q \in A \; / \; \|p-q\| = \inf\{\|p-c\| \mid c \in A\}$

dem Sea $\gamma = \inf\{\|p-c\| \mid c \in A\}$

por def de inf $\exists \{q_n\} \subset A$ tq

$$\gamma^2 \leq \|p-q_n\|^2 \overset{\circledast}{\leq} \gamma^2 + \frac{1}{n} \quad \circledast$$

Veamos $p-q_n$ es cauchy

$$\|(p-q_n)+(p-q_m)\|^2 + \|(p-q_n)-(p-q_m)\|^2$$

regla paralelo

$$= 2\|p-q_n\|^2 + 2\|p-q_m\|^2$$

ent $\|2p-(q_n+q_m)\|^2 + \|q_m-q_n\|^2$

$$\overset{\circledast}{\leq} 4\gamma^2 + 2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)$$

Como $q_n, q_m \in A$ y A convexo

$\frac{1}{2}(q_n+q_m) \in A$

$\Rightarrow \|2p-(q_n+q_m)\|^2 = 4\|p-\frac{1}{2}(q_n+q_m)\|^2$

$$\geq 4\gamma^2$$

ent $\|q_n-q_m\|^2 < 2\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)$

Luego $\{f_n\}$ es de cauchy y por lo tanto converge a algún $q \in H$ pues H hilbert. Pero $q_n \in A$

A cerrado

$\Rightarrow q \in A$ y además tomando límite en (1) $\lim_{n\to\infty} \|p - q_n\|^2 = \gamma^2$

↳ norma es continua

$$\|p - q\|^2 = \gamma^2$$

$$\|p - q\| = \gamma$$

$$\gamma > 0$$

<u>Unicidad</u> Sup $w \in A$ tq $\|p - w\| = \gamma$

ent $\frac{1}{2}(q + w) \in A$ y por lo tanto

$\|p - \frac{1}{2}(q+w)\| \geq \gamma$. Ahora

$$\|(p-w) + (p-q)\|^2 + \|(p-w) - (p-q)\|^2$$

$$= 2\|p - w\|^2 + 2\|p - q\|^2 = 4\gamma^2$$

ent $4\|q - w\|^2 = 4\gamma^2 - 4\|p - \frac{1}{2}(q+w)\|^2$

≤ 0

obs! En fin ∞ la existencia de q es cierta inclusive si A no es convexo pues la suc $\{q_n\}$ es acotada, tiene una subsuc convergente. Si A no es convexo la ! en gral no es cierto tomar A un círculo y p el centro

---

<u>teo 3.34</u> Sea Y subesp cerrado en H Hilbert ent $\forall x \in H$ $\exists! (y \in Y, z \in Y^\perp)$ tq $x = y + z$. Además $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$ (generalización de pitágoras) (*)

obs si tenemos $H = \mathbb{R}^2$
$Y = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}$ $Y^\perp = \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}$
es pitágoras

dem Sea $x \in H$. $Y \neq \phi$ convexo y cerrado por el teo de arriba $\exists y \in Y$ tq $\|x - y\| \leq \|x - u\|$ $\forall u \in Y$

dut $z = x - y$ (luego $x = y + z$) ent

$\forall u \in Y$ $\|z - u\| = \|x - \underbrace{(y + u)}_{\substack{\in Y \\ \text{suma en subesp}}}\| \geq \|x - y\| = \|z\|$

luego por prop clase pasada $z \in Y^\perp$

o sea y, z existen

unicidad sale $x_1 - y_1 = z = x_2 - y_2$

algo así $\Rightarrow x_1 - x_2 = y_1 - y_2$

$\Rightarrow x_1 - x_2 = 0$

$y_1 - y_2 = 0$

ejercicio

Corolario Si Y subesp cerrado en H hilbert ent $Y = Y^{\perp\perp}$

dem Ya sabemos que $Y \subset Y^{\perp\perp}$

Sea $x \in Y^{\perp\perp}$ ent $x = y + z$, $z \in Y^\perp$ $y \in Y$

o sea $\langle x, z \rangle = 0 = \langle z, x \rangle$ luego

$0 = \langle x, z \rangle = \langle y + z, z \rangle = \cancel{\langle y, z \rangle} + \langle z, z \rangle = \|z\|^2$

luego $z = 0$ y por lo tanto

$x = y + Y$. listo

obs si Y no es cerrado no

puedo usar $Y = \underbrace{Y^{\perp\perp}}_{\text{cerrado}}$ pero:

<u>Caso</u> si Y subesp Hilbert ent

$Y^{\perp\perp} = \overline{Y}$

<u>dem</u> me la perdí

Bases ortonormal de dim inf

Def Sea X ev pi. Un suc $\{e_n\} \subset X$ se dice ortonormal si $\|e_n\| = 1$ $\forall n$ y $\langle e_n, e_m \rangle = 0$ $\forall n \neq m$

ej.) En ℓ^2 tomamos $e_n = (0, \dots, \underset{n}{1}, \dots)$

) En $L^2_{\mathbb{C}}\{-\pi, \pi\}$ tomamos

$$e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} \quad n \in \mathbb{Z} \quad \text{ent}$$

$$\|e_n\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} \cdot \overline{e^{inx}} \, dx = 1$$

$$\langle e_n, e_m \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-imx} \, dx$$

$$= \left. \frac{e^{i(n-m)x}}{2\pi i(n-m)} \right|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

por :)

Teo todo esp X con $\dim X = \infty$ X con $\langle , \rangle$ contiene una sucesión ortonormal.

dem Usando la construcción del teo que dice que la bola no es compacta si $\dim X = \infty$. Tenemos una sucesión $\{x_n\} \subset X$ de vectores unitarios que forman un conjunto li

(es LI pq riesz te da cosas li)

aplico el algo de G-S a esta sucesión

) Si X es ev pi dim K y $\{e_1 \ldots e_K\}$ es base de X ent

$$x = \sum_{1}^{K} \langle x, e_n \rangle e_n .$$

Queremos ver si se puede generalizar esto a $x = \sum^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$ o sea si la serie converge y si converge a x

3.41 Lema (desigualdad de Bessel). X e.p.i. $\{e_n\} \subset X$ suc ortonormal entonces $\forall x \in X$ la serie $\sum^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2$ converge y $\sum^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2$

dem. Para $k \in \mathbb{N}$ tenemos la suc de sumas parciales

$$y_k = \sum_{n=1}^{k} \underbrace{\langle x, e_n\rangle}_{\alpha_n} e_n \quad \text{ent}$$

$$\|x - y_k\|^2 = \langle x - y_k, x - y_k\rangle$$

$$= \|x\|^2 - \sum_1^k \overline{\langle x, e_n\rangle}\langle x, e_n\rangle \quad = |\langle x, e_n\rangle|^2 \; " |\alpha_n|^2$$

?

$$- \sum_1^k \langle x, e_n\rangle\langle e_n, x\rangle$$

$$+ \underbrace{\cancel{\|y_k\|^2}}_{= \cancel{\sum^k |\alpha_n|^2}}$$

pues $\{e_1, \dots, e_k\}$ ortonormal

$$\|\sum \alpha_k e_n\|^2 = \sum |\alpha_n|^2$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{n=1}^{k} |\langle x, e_n\rangle|^2$$

o sea $\sum^{K} |\langle x, e_n\rangle|^2 = \|x\|^2 - \|x - y_K\|^2 \leq \|x\|^2$

luego la sucesión de sumas parciales es creciente y acotada por arriba por $\|x\|^2$. Listo $\sum^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2$ converge

---

Teo 3.42 Sea $\{e_n\} \subset H$ Hilbert. Una suc ortonormal y $\{\alpha_n\} \subseteq \mathbb{F}$ ent

$$\sum^{\infty} \alpha_n e_n \text{ converge} \Leftrightarrow \sum^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty$$
$$(\Leftrightarrow \{\alpha_n\} \in \ell^2)$$

Si esto ocurre

$$\left\| \sum^{\infty} \alpha_n e_n \right\|^2 = \sum^{\infty} |\alpha_n|^2$$

dem ($\Rightarrow$) Sup $\sum^{\infty} \alpha_n e_n < \infty$

$x = \sum \alpha_n e_n$ ent $\forall m \in \mathbb{N}$

$$\langle x, e_m\rangle = \lim_{K \to \infty} \left(\left\langle \sum_{n=1}^{K} \alpha_n e_n , e_m \right\rangle \right)$$

$$= \alpha_m$$

pues $K \geq m$ si $K \to \infty$

Bessel

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 = \sum^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2 < \infty$$

$(\Leftarrow)$ supongamos $\sum\limits^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty$ y para $k \in \mathbb{N}$

sea $x_k = \sum\limits_{1}^{k} \alpha_n e_n$. ent $\forall j, k$ con $j > k$

$$\|x_k - x_j\|^2 = \|\sum_{n=j+1}^{k} \alpha_n e_n\|^2 = \sum_{n=j+1}^{k} |\alpha_n|^2 \underset{j,k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Luego $\{x_k\}$ es de cauchy y H hilbert $\Rightarrow$ converge. Por último

$$\|\sum^{\infty} \alpha_n e_n\|^2 = \lim_{k\to\infty} \|\sum^{k} \alpha_n e_n\|^2$$

$$= \lim_{k\to\infty} \sum_{1}^{k} |\alpha_n|^2 = \sum_{1}^{\infty} |\alpha_n|^2 (< \infty)$$

<u>Corolario</u> Sea $\{e_n\} \subset H$ Hilbert una suc ortonormal. ent. $\forall x \in H$ $\sum\limits^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$ converge en H

<u>dem</u> por Bessel $\sum\limits^{\infty} |\underbrace{\langle x, e_n \rangle}_{= \alpha_n}|^2$ converge

luego por teo anterior

$$\sum^{\infty} \underbrace{\langle x, e_n \rangle}_{= \alpha_n} e_n \text{ converge}$$

queremos ver cuando $x = \sum^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n < \infty$

$\forall x \in H$. Si $\{e_n\} \subset S$ un c. ortonormal

en general no ocurre

dem: Sea $\{e_n\} \subseteq H$ ortonormal

y $S = \{e_{2n}\}$. Veamos que $e_1 \neq \sum^{\infty} \alpha_{2n} e_{2n}$

p/cualquier $\{\alpha_{2n}\}$. Si $e_1 = \sum^{\infty} \alpha_{2n} e_{2n}$

ent $0 = \langle e_1, e_{2m} \rangle = \lim_{k} \langle \sum^{k} \alpha_{2n} e_{2n}, 2m \rangle$

$= ?$

3.47

Teorema Sea $\{e_n\} \subset H$ Hilbert suc ortonor entonces son equivalentes

(a) $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}^{\perp} = \{0\}$

(b) $\overline{sp}\{e_n : n \in \mathbb{N}\} = H$

(c) $\|x\|^2 = \sum_{1}^{\infty} |\langle x, e_n\rangle|^2$ (teo Parseval)

(d) $x = \sum^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n$

decimos que $\{e_n\}$ es base orto de H si cumple alguna de las condiciones anteriores

(Notar que por una base orto se cumple la igualdad en la desigualdad de Bessel)

dem (a) $\Rightarrow$ (d) $x \in H$, $y = x - \sum^{\infty} \langle x, e_n\rangle e_n$

cont $\forall m \in \mathbb{N}$

$\langle y, e_m\rangle = \langle x, e_m\rangle - \lim \langle \sum \langle x, e_n\rangle e_n, e_m\rangle$

$= \langle x, e_m\rangle - \langle x, e_m\rangle = 0$

$\forall m$ $y \in \{e_n : n \in \mathbb{N}\}^{\perp}$ luego (a) $\Rightarrow$ (d)

$\Rightarrow y = 0$ por (a) $\Rightarrow$ (d)

(d) $\Rightarrow$ (c) $\quad x = \sum \langle x, e_n \rangle e_n$

$$\Rightarrow x = \lim_{k \to \infty} \underbrace{\sum^{k} \langle x, e_n \rangle e_n}_{x_k} \quad \text{o sea}$$

$x_k \to x$ luego

$$\|x\|^2 = \|\lim_{k \to \infty} x_k\|^2$$

$$= \lim_{k \to \infty} \|x_k\|^2$$

$$= \lim_{k \to \infty} \left\| \sum^{k} \langle x, e_n \rangle e_n \right\|^2$$

$$= \lim_{k \to \infty} \sum_{1}^{k} |\langle x, e_n \rangle|^2$$

$$= \sum^{\infty} |\alpha_n|^2$$

(c) $\Rightarrow$ (a) ejercicio

(d) $\Rightarrow$ (b) $x \in H \overset{(d)}{\Rightarrow} x = \lim_{k} \sum^{k} \langle x, e_n \rangle e_n$

o sea $x \in \overline{Sp\{e_n : n \in \mathbb{N}\}}$

$x \in Sp\{e_n : n \in \mathbb{N}\} \quad = \overline{Sp}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$

(b) ⇒ (a) Sea $y \in \{e_n : n \in \mathbb{N}\}^\perp$

obser $\langle y, e_n \rangle = 0$ $\forall n$. luego $e_n \in \{y\}^\perp$
$\forall n$

ent $sp\{e_n\} \subset \{y\}^\perp$

cerrado

$\Rightarrow \mathcal{H} = \overline{sp}\{e_n\} \subset \overline{\{y\}^\perp} = \{y\}^\perp$

¡!

Ej Sea $\{e_n\} \subset \ell^2$. $e_n = (0, \ldots, 1, 0, \ldots)$
ent $\{e_n\}$ es sec ortonormal y
además es b.o pues para
$x = \{x_n\} \in \ell^2$

$$\|x\|^2 = \sum^{\infty} |x_n|^2 = \sum^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2$$

obser vale (c) en el teo anterior

$\Rightarrow \{e_n\}$ b.o

Teo (a) esp normado dim $< \infty$ son separables (métrica densa numerable)

(b) Un Hilbert con dim $= \infty$ es separable sii tiene una bon

Corolario el esp ℓ^2 es separable

obs Veremos desp que $L^2[a,b]$ tiene un b.o y por lo tanto es separable y tb $C[a,b]$ es separable (con otro argumento)

obs. ejemplo Hilbert, no separable (Debnath Mikusinski)

Sea $\ell^2(\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0$ a lo sumo para numerables x y tq $\sum_{x \in \mathbb{R}} f^2(x) < \infty \}$

es fácil ver que es Hilbert con

$$\langle f, g \rangle = \sum_{x \in \mathbb{R}} f(x) g(x)$$

Veamos que no es separable. Consideremos

$f_S \quad f_y(x) = \begin{cases} 1 & y = 1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \quad \|f_y - f_z\| = 2$

si tuvieses un denso

para cada $f_y(x)$ tengo un

entorno y un elemento del denso

si tomo entornos más chicos

que 2, no se intersecan

$\Rightarrow$ por cada uno tengo un

elemento del denso

$\Rightarrow$ tengo tantos elementos

como entornos y tantos entornos

como f_y que son no

numerables $\Rightarrow$ denso

no puede ser

numerable

demo en clase siguiente