Propiedades de una probabilidad

Teorema Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ e.p

$A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$

$\Rightarrow$ a) $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} B_j$

con $B_j = \sum_{1 \leq t_1 < t_2 \ldots < t_j \leq n} P(A_{t_1} \cap A_{t_2} \ldots \cap A_{t_j})$

ejemplo $\underline{n=2}$ $\sum_{j=1}^{2} (-1)^{j+1} B_j = B_1 - B_2$

$B_1 = P(A_1) + P(A_2)$

$B_2 = P(A_1 \cap A_2)$

$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$

$\underline{n=3}$ en la guía

b) $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

demo por inducción

base $P(A_1) \leq P(A_1)$ ✓

HI $P\left(\bigcup^{n-1} A_i\right) \leq \sum^{n-1} P(A_i)$ queremos probar b)

$$P\left(\bigcup^{n} A_i\right) = P\left(\underbrace{\bigcup^{n-1} A_i}_{B} \cup A_n\right)$$

$$= P(B) + P(A_n) - P(A_n \cap B)$$

$$\leq P(B) + P(A_n) \overset{\text{induc}}{\leq} \sum^{n-1} P(A_i) + P(A_n)$$

$$= \sum^{n} P(A_i)$$

def Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ e.p sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión de eventos

a) Se dice que $\{A_n\}$ es suc creciente si $A_1 \subseteq A_2 \ldots \subseteq A_n \ldots \subseteq$

en este caso definimos

$$\lim_{n \to \infty} A_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

b) Se dice que $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ suc de eventos

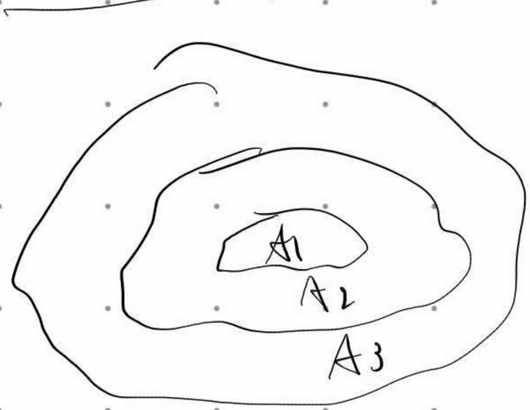
si $A_1 \supseteq A_2 \dots \supseteq A_n \supseteq \dots$?

en este caso definimos

$$\lim_{n \to \infty} A_n = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

<u>Proposición</u> $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ e.p $\{A_n\}^{\infty}$ suc de eventos creciente (decreciente) entonces $P(\lim_{n \to \infty} A_n) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$

<u>demo</u> (caso creciente)



defino $B_1 = A_1$

$B_2 = A_2 - A_1$

$B_3 = A_3 - A_2$

1) $B_i \cap B_j = \emptyset \quad \forall i,j \ / \ i \neq j$

2) $\bigcup_{i=1}^{k} B_i = \bigcup_{i=1}^{k} A_i \quad \forall k \in \mathbb{N}$

3) $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$

$$P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P\left(\dot{\bigcup_{i=1}^{\infty}} B_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} P(B_i)$$

$$= \lim_{n\to\infty} P\Big(\underbrace{\dot{\bigcup_{i=1}^{n}} B_i}_{A_n}\Big) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

Probabilidad condicional

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ e.p definimos

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$$

si $P(A) = 0 \Rightarrow P(B|A)$ es indefinido

1) $A \in \mathcal{A}$, $P(A) > 0$
$\Rightarrow P(\cdot|A) : \mathcal{A} \to [0,1]$ dado por
$P(\cdot|A)(B) := P(B|A) \quad \forall B \in \mathcal{A}$

Vemos que $P(\cdot|A)$ es función proba

1) $P(\cdot|A)(B) \geq 0$, si pues
$$P(\cdot|A)(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \begin{matrix} \geq 0 \\ > 0 \end{matrix}$$

2) $P(\cdot|A)(\Omega) = P(\Omega|A)$
$$= \frac{P(\Omega \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$

3) ejercicio

det 1) $P(B|A)$ no necesariamente es igual a $P(A|B)$

ejemplo Dado 6 caras

$A_1 = \{2\}$ $A_2 = \{2, 4, 6\}$

$$P(A_1 | A_2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{P(A_1)}{P(A_2)}$$

$$= \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$P(A_2 | A_1) = \frac{P(A_2 \cap A_1)}{P(A_1)} = \frac{P(A_1)}{P(A_1)} = 1$$

2) $P(A|B) \neq P(A)$ contraejemplo

caso igual con los datos

Teorema de la probabilidad total

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ e.p $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ suc finita de eventos

Tales que 1) $\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

2) $A_i \cap A_j = \emptyset \quad i \neq j$

3) $P(A_i) > 0 \quad \forall i = 1, \dots, n$

entonces $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B | A_i) \cdot P(A_i)$

demo $P(B) = P(B \cap \Omega) = P(B \cap \dot{\bigcup}_{i=1}^{n} A_i)$

$$= P\left(\dot{\bigcup}_{i=1}^{n} (B \cap A_i)\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{P(B \cap A_i)}{P(A_i)} P(A_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(B | A_i) \cdot P(A_i)$$

Teorema Bayes

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ e.p $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ suc finita de eventos

tq 1) $\bigcup^{n} A_i = \Omega$

2) $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ $i \neq j$

3) $P(A_i) > 0$

y $P(B)$ otro evento tq $P(B) > 0$

$$\Rightarrow P(A_j | B) = \frac{P(B|A_j) \cdot P(A_j)}{\sum^{n} P(B|A_i)\, P(A_i)} \quad \forall 1 \leq j \leq n$$

demo $$P(A_j | B) = \frac{P(B \cap A_j)}{P(B)}$$

$$= \frac{\dfrac{P(A_j \cap B)\, P(A_j)}{P(A_j)}}{P(B)}$$

$$= \frac{P(B|A_j) \cdot P(A_j)}{P(B)}$$ teorema prob Total

ejemplo

Compro a dos proveedores

70% de los relojes a B

30% " " " a A

el 4% de los de B Fallan

el 1.5% " " " A "

1) que probabilidad de vender un reloj fallado

$$P(F) \underset{TPT}{=} P(F|A) \cdot P(A) + P(F|B)\, P(B)$$

$$= 0{,}04 \cdot 0{,}3 + 0{,}015 \cdot 0{,}7$$

e) Un día devuelven un reloj por estar fallado que probabilidad hay de que venga de B

$$P(B|F) \underset{Bayes}{=} \frac{P(F|B) \cdot P(B)}{P(F)} = \frac{0{,}015 \cdot 0{,}7}{P(F)}$$

$\square$