Superficies regulares

Def Un subconjunto $S \subseteq \mathbb{R}^3$ es una superficie regular si $\forall p \in S$ existen:

- •) Un entorno $V \in \mathbb{R}^3$ de p
- •) Una función $\varphi: U \to V \cap S$

donde $U \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto

Tales que:

•) φ diferenciable, es decir, si
$\varphi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$
$\to$ $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v)$ tienen derivadas parciales continuas de todos los órdenes en U

••) φ es un homeomorfismo, es decir tiene inversa continua
$$\varphi^{-1}: V \cap S \longrightarrow U$$

•:) Para cada $q \in U$ $d\varphi_q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es 1 a 1

Def El mapa φ es llamado parametrización o sistema de coordenadas locales en p. (U, φ)

Prop Sea $\varphi: U \to \mathbb{R}^3$ un mapa diferenciable $U \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto son equivalentes

a) la curva $\varphi \circ \alpha$ es regular, para toda curva regular diferenciable $\alpha: (a,b) \to U$

b) $d\varphi_q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es inyectiva $\forall q \in U$

dem b) $\Rightarrow$ a) Supongo α regular

$$\Rightarrow (\varphi \circ \alpha)'(t) = \underbrace{d\varphi_{\alpha(t)}}_{\text{inyectiva}} \alpha'(t) = 0 \Rightarrow \alpha'(t) = 0$$

abs!

$$\Rightarrow (\varphi \circ \alpha)'(t) \neq 0 \quad \forall t$$

$\Rightarrow \varphi \circ \alpha$ es regular

a) $\Rightarrow$ b) Supongo $\exists z \neq 0 \,/\, d\varphi_q(z) = 0 \quad q \in U$
(o sea $d\varphi_q$ no inyectiva)

Sea $\alpha(t) = q + tz \quad , \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$\varepsilon \,/\, \alpha((-\varepsilon, \varepsilon)) \subseteq U$

$\Rightarrow \alpha'(t) = z \neq 0 \quad \alpha$ es regular

$\Rightarrow \varphi\circ\alpha$ es regular por hipótesis

$\Rightarrow (\varphi\circ\alpha)'(0) \neq 0$ pero

$(\varphi\circ\alpha)'(0) = d\varphi_{\alpha(0)}\, \alpha'(0) = d\varphi_q z = 0$ abs!

$\Rightarrow d\varphi_q$ es inyectiva

Más acerca de superficies regulares :)

en general tenemos $\varphi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$

si $q = (u_0, v_0)$

$$[d\varphi_q]_{C_2 C_3} = \begin{bmatrix} x_u(q) & x_v(q) \\ y_u(q) & y_v(q) \\ z_u(q) & z_v(q) \end{bmatrix}$$

$\mathcal{C}_2 = \{(1,0)\ (0,1)\}$ $\quad \mathcal{C}_3 = \{e_1, e_2, e_3\}$

Adrones

$d\varphi_q$ inyectiva $\Leftrightarrow$ $[d\varphi_q]$ tiene rango 2

$\Leftrightarrow$ $\varphi_u(q) \times \varphi_v(q) \neq 0$

(prod vect de cols)

$\Leftrightarrow$ una de las submatrices

menores de orden 2 de $[d\varphi_q]$ tiene

determinante $\neq 0$ en q

$$\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(q) = \begin{vmatrix} x_u(q) & x_v(q) \\ y_u(q) & y_v(q) \end{vmatrix}, \frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}, \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} \right)$$

det $\neq 0$

<u>Condición 2</u> es importante para evitar intersección (necesaria para hablar de plano tangente en p). Más adelante veremos por qué la continuidad de la inversa es importante

<u>ejemplos</u>

1 <u>gráfico de funciones</u> Sea A un abierto de $\mathbb{R}^2$ y $f: A \to \mathbb{R}$ una función diferenciable el gráfico de f, es decir,

$S = \operatorname{graf}(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x,y), (x,y) \in A\}$

es una superficie regular, en efecto

Tomemos $U = A$ y

$$\varphi(u,v) = (u, v, f(u,v))$$

condición 1 ✓

Condición 3 $\quad [d\varphi_{(u,v)}]_{C_2C_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \end{bmatrix}$

$\Rightarrow d\varphi_{(u,v)}$ es inyectiva $\forall u,v$
(cols l.i)

Condición 2

Tenemos $V = A \times \mathbb{R}$ y $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$F(x,y,z) = (x,y)$$

Veamos $\underline{\varphi(U) = V \cap S}$:

$(\subseteq)$ $(u,v) \in U \Rightarrow \varphi(u,v) \in S$

$\varphi(u,v) = (\underbrace{u, v}_{\in U}, \underbrace{f(u,v)}_{\in \mathbb{R}})$

$\Rightarrow \varphi(u,v) \in V$

$\Rightarrow \varphi(u,v) \in S \cap V$

$(\supseteq)$ $w \in S \cap V \rightarrow w = (\underbrace{x,y}_{\in A},\underbrace{z}_{\in \mathbb{R}})$ y $w = (x,y,f(x,y))$

$\Rightarrow z = f(\underbrace{x,y}_{\in A = U}) \Rightarrow w = \varphi(\underbrace{x,y}_{\in A = U}) \rightarrow w \in \varphi(U)$

φ^{-1} es la restricción de F

$F(\varphi(u,v)) = F(u,v,f(u,v)) = (u,v)$

$\Rightarrow F|_{\varphi(U)} = \varphi^{-1}$

2) La esfera de radio 1 centrada en el origen

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2+y^2+z^2 = 1\}$$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \|(x,y,z)\| = 1\}$$

es una superficie regular. En efecto

Sea $p \in S$, $P = (p_1, p_2, p_3) \neq 0$

$\Rightarrow p_i \neq 0$ para algún i

Supongo $p_3 > 0$ (p este en hemisferio norte)

Sea $U_1 = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 / u^2 + v^2 < 1\}$

$$\varphi_1(u,v) = (u, v, \sqrt{1-u^2-v^2})$$

Luego usamos el ejemplo 1, (U_1, φ_1)

resulta una parametrización para todo punto del hemisferio norte

Ahora queremos cubrir toda esfera con parametrizaciones similares

$$\varphi_2(u,v) = (u, v, -\sqrt{1-u^2-v^2})$$

$$U_2 = U_1$$

cubre hemisferio sur, falta ecuador

$$\varphi_3(u,v) = (u, \sqrt{1-u^2-v^2}, v) \quad U_3 = U_1$$

$$\varphi_4(u,v) = (u, -\sqrt{1-u^2-v^2}, v) \quad U_4 = U_1$$

$$\varphi_5(u,v) = \left(\sqrt{1-u^2-v^2}, u, v\right) \quad U_5 = U_1$$

$$\varphi_6(u,v) = \left(-\sqrt{1-u^2-v^2}, u, v\right) \quad U_6 = U_1$$

Con estas 6 cubrimos toda la esfera probando que la esfera es superficie regular

③ Helicoide consideremos $U = \mathbb{R}^2$

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad \varphi(u,v) = (u\cos(v), u \operatorname{sen} v, v)$$
$$= (0,0,v) + u(\cos(v), \operatorname{sen}(v), 0)$$

$S = \operatorname{Im} \varphi$

a) ✓

ii) $d\varphi_{(u,v)} = \begin{bmatrix} \cos v & -u \operatorname{sen} v \\ \operatorname{sen} v & u\cos v \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Columnas Li

iii) $V = \mathbb{R}^3$ y $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$\varphi(u,v) = (u\cos v, u \operatorname{sen} v, v) = (x,y,z)$$

¿ $u(x,y,z)$ $v(x,y,z)$?

$v = z$ $\quad x = u\cos z$ $\quad y = u \operatorname{sen} z$

$$u = u.1 = u\langle(\cos z, \operatorname{sen} z),(\cos z, \operatorname{sen} z)\rangle$$

$$= \langle(u\cos z, u \operatorname{sen} z),(\cos(z), \operatorname{sen}(z))\rangle$$

$$= x\cos(z) + y \operatorname{sen}(z)$$

$$\Rightarrow F(x,y,z) = (x\cos z + y \operatorname{sen} z, z)$$