

# Resumen Final Analisis III

Javier Vera

August 9, 2023

# 1 Cayley Hamilton Generalizado

Teorema 1.1 (Cayley Hamilton Generalizado)

Sea  $\mathbb{V}$  un espacio vectorial de dimensión finita y  $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$

1.  $m_T | p_T$  además tienen los mismos factores primos
2. Si  $m_T = p_1^{v_1} \dots p_n^{v_n} \quad \wedge \quad p_T = p_1^{d_1} \dots p_n^{d_n}$  entonces:

$$d_i = \frac{\dim(Nu(p_i)^{v_i})}{gr(p_i)}$$

Proof. 1. Primero usamos descomposición cíclica, obtenemos  $p_1, \dots, p_n$  anuladores de  $v_1, \dots, v_n$  con,  $p_T = p_1 \dots p_n$  tales que  $p_i | p_{i-1}$  y

$$\mathbb{V} = \bigoplus_{i=1}^n Z(v_i, T_i)$$

Además sabemos que  $m_T = p_1$  entonces  $m_T = p_1 | p_1 \dots p_n = p_T$  Ahora queremos ver que  $p$  primo divide a  $p_T$  si y solo si divide a  $m_T$

Sea  $p | m_T$  entonces obviamente divide a  $p_T$

Sea  $p | p_T = p_1 \dots p_n$  entonces existe  $i$  tal que  $p | p_i$  entonces  $p | p_i \wedge p_i | p_1 = m_T$

2. Calculemos  $r_i$  usando descomposición primaria tenemos

$$\mathbb{V} = \bigoplus_{i=1}^n V_i$$

con  $V_i = Nu(p_i(T)^{v_i})$  T-invariantes y además  $T_i := T|_{V_i} : V_i \rightarrow V_i$  con  $m_{T_i} = p_i^{v_i}$  y por parte 1 tenemos  $p_{T_i} = p_i^{r_i}$  con  $r_i \geq v_i$  además también por T-invarianza de los  $V_i$ ,  $p_T = p_{T_1} \dots p_{T_n}$  entonces

$$p_1^{d_1} \dots p_n^{d_n} = p_T = p_{T_1} \dots p_{T_n} = p_1^{r_1} \dots p_n^{r_n}$$

Por lo tanto  $d_i = r_i$ . Pero entonces  $\dim(Nu(p_i(T)^{v_i})) = \dim(V_i) = gr(p_{T_i}) = gr(p_i^{d_i}) = gr(p_i) \cdot d_i$

□

# 2 Diagonal + Nilpotente

Teorema 2.1 (Diagonal + Nilpotente)

Sea  $T : \mathbb{V} \rightarrow V$  con  $\dim \mathbb{V} \leq \infty$  tal que  $m_T$  es producto de factores lineales entonces

1.  $T = D + N$
2.  $DN = ND$

Proof. 1. Como  $m_t = (x - c_1)^{d_1} \dots (x - c_n)^{d_n}$  es producto de factores lineales es producto de factores primos usamos teorema descomposición primaria y tenemos  $V = \bigoplus V_i$  con  $V_i = Nu((T - c_i)^{d_i})$ . Además tenemos  $E_i$  que proyectan en cada  $V_i$  y por descomposición primaria estos son polinomios evaluados en  $T$ .

Sea

$$D = c_1 E_1 + \dots + c_n E_n \text{ obviamente diagonal}$$

$$T.I = T(E_1 + \dots + E_n) = TE_1 + \dots TE_n$$

Luego llamamos  $N = T - D = (T - c_1)E_1 + \dots (T - c_n)E_n$  notar que  $N$  un pol evaluado en  $T$  (por que  $E_i$  lo son)

Entonces conmuta con  $D$  que también es un pol evaluado en  $T$  entonces tenemos la parte ii. Ya tenemos el operador diagonal  $D$  nos falta ver que  $N$  es nilpotente.

$$N^2 = (T - D)^2 = \left( \sum_{i=1}^n (T - c_i) E_i \right)^2 = \sum_{i,j=1}^n (T - c_i) E_i (T - c_j) E_j = \sum_{i,j=1}^n (T - c_i) (T - c_j) E_j E_i = \sum_{i=1}^n (T - c_i)^2 E_i$$

Usando propiedades de proyector. Ahora inductivamente es directo ver que

$$N^r = \sum_{i=1}^n (T - c_i)^r E_i$$

Ahora si tomamos  $r = \max\{d_i : i = 1 \dots n\}$  tenemos que

$$N^r(v) = \sum_{i=1}^n (T - c_i)^r E_i(v)$$

Pero  $E_i(v) \in V_i = \text{Nu}((T - c_i)^{d_i})$  entonces  $N^r(v) = 0 \quad \forall v \in \mathbb{V}$  mostrando que  $N$  es nilpotente

Ahora resta ver unicidad. Sean  $N', D'$  que cumplen las hipótesis entonces

$$D'T = D'(D' + N') = D'D' + D'N' = D'D' + N'D' = (D' + N')D' = TD'$$

por lo tanto  $D'$  conmuta con  $T$ , análogamente  $N'$  conmuta con  $T$  también entonces obviamente conmutan con  $D, N$  que son polinomios evaluados en  $T$  Sabemos que  $N' + D' = T = N + D$  entonces  $N' - N = D' - D$ . Por un lado  $D, D'$  son ambas diagonalizables y como conmutan son simultáneamente diagonalizables entonces  $D' - D$  es diagonalizable Sean  $r, s$  tales que  $N'^s = N^r = 0$

$$(N' - N)^{r+s} = \sum_{i=0}^{r+s} \binom{r+s}{i} (-1)^i N'^{r+s-i} N^i = \sum_{i=0}^s \binom{r+s}{i} (-1)^i N'^{r+s-i} N^i + \sum_{i=s+1}^r \binom{r+s}{i} (-1)^i N'^{r+s-i} N^i$$

El primer sumando es 0 por que  $r + s - i \geq r \quad \forall i \leq s$  y  $N^r = 0$  y el segundo es cero por que  $i > s$  y  $N'^s = 0$

Entonces  $N' - N$  es nilpotente entonces su único autovalor es 0, pero también es diagonal por que  $N' - N = D' - D$  entonces tiene que ser el operador 0

Entonces  $N = N' \wedge D = D'$

□

### 3 Caracterización de operadores Diagonalizables

Teorema 3.1 (Caracterización Diagonalizable)

$T : V \rightarrow V$  con  $\dim(V) \leq \infty$  tal que  $m_T = (x - c_1) \dots (x - c_n)$  es producto de factores lineales si y solo si  $T$  es diagonalizable.

Proof. (Ida) Sea  $p = (x - c_1) \dots (x - c_n)$ , con  $c_1, \dots, c_n$  los autovalores de  $T$  Sabemos que  $(x - c_i)$  es raíz del carácterístico por lo tanto es raíz del minimal, por que tienen las mismas raíces entonces  $(x - c_i) | m_T \quad \forall i = 1 \dots n$  entonces  $p | m_T$

Además sabemos que existe base de autovectores  $\{v_1, \dots, v_j\}$  para cada auto vector existe un aval  $c_i$  tal que  $Tv_i = c_{j(i)} v_i$  equivalentemente  $Tv_i - c_{j(i)} v_i = 0$  equivalentemente  $p_i(T)(v_i) = 0$  con  $p_i = (x - c_{j(i)})$

Ahora tomemos cualquier  $v_i$  en la base de autovectores  $p_i(T)(v_i) = 0$  y es claro que existe  $h \in K[x]$  tal que  $p = p_i \cdot h$

Por lo tanto  $p(T)(v_i) = 0$  entonces  $m_{T, v_i} | p$  y esto vale para todo  $i = 1, \dots, j$  entonces

$$m_T = \text{mcm}\{m_{T, v_1}, \dots, m_{T, v_j}\} | p$$

Mostrando finalmente

$$p = m_T$$

(Vuelta) Tomemos  $W = W_1 \oplus \dots \oplus W_n$  con  $W_i$  auto espacio asociado a  $c_i$ . Supongamos  $W \neq V$  entonces tomo  $v \in V - W$ . Por lema anterior sabemos que  $\exists c_i$  autovalor tal que  $w = (T - c_i)v \in W$ . Entonces podemos escribir  $(T - c_i)v = w = w_1 + \dots + w_n$  con  $w_i \in W_i$  respectivamente.

Ahora definimos  $g = \frac{m_T}{x-c_i}$  y definimos  $g - g(c_i) \in K[x]$  que claramente tiene como raíz a  $c_i$  entonces lo podemos escribir como  $h(x - c_i)$ . Luego

$$g(T)v - g(c_i)v = h(T)(T - c_i)v = h(T)(w)$$

Sabemos que  $W$  es  $T$ -invariante entonces  $h(T)(w) \in W$  por que un polinomio en  $T$  no es mas que una combinacion de  $T$

Y  $0 = m_T(T)(v) = (T - c_i)(g(T)(v))$  pero entonces  $g(T)(v)$  es autovector de autovalor  $c_i$  por lo tanto  $g(T)(v) \in W$

Mostrando asi que  $g(c_i)v \in W$  pero  $v \notin W$  entonces  $g(c_i) = 0$ . Que es absurdo por como definimos a  $g$  claramente  $c_i$  no puede ser raíz. El absurdo provino de suponer que existia un  $v \in V - W$  entonces no existe dicho  $v$  por lo tanto  $V = W$  mostrando que la suma de los autoespacios asociados son todo el espacio, por lo tanto tenemos una base de autovectores y  $T$  es diagonalizable  $\square$

## 4 Adjuntas

Teorema 4.1 (Proposición adjuntas)

Dado  $f \in \mathbb{V}^*$  tenemos que  $\exists! w \in \mathbb{V}$  tal que

$$f(z) = (z|v) \quad \forall z \in \mathbb{V}$$

Proof. Sea  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  base de  $\mathbb{V}$ , proponemos  $v = \sum_{i=1}^n \overline{f(v_i)} v_i$ . Probemos que funciona

$$(z|v) = (z|\sum \overline{f(v_i)} v_i) = f(v_i)(z|\sum v_i) = f(\sum (z|v_i) v_i) = f(z) \quad \forall z \in \mathbb{V}$$

Obs aca usamos que  $\sum (z|v_i) v_i$  son coordenadas de  $z$  en base  $B$ .

Veamos que es único supongamos tenemos  $v, v' \in \mathbb{V}$  tal que

$$(z|v) = f(z) = (z|v')$$

Entonces

$$(z|v - v') = 0 \quad \forall z \in \mathbb{V}$$

en particular

$$(v - v'|v - v') = 0$$

Mostrando que

$$\|v - v'\| = 0 \iff v - v' = 0 \iff v = v'$$

$\square$

Teorema 4.2 (Transformaciones Adjuntas)

Dada  $T : V \rightarrow V$  existe una única transformacion lineal  $T^*$  que cumple

$$(Tv|w) = (v|T^*w)$$

La llamamos adjunta

Proof. Dada  $T$  definimos  $f_w(v) = (Tv|w)$  luego  $f_w \in \mathbb{V}^*$ . Por proposición sabemos que

$$\exists! w^* \text{ tal que } f_w(z) = (z|w^*) \quad \forall z \in \mathbb{V}$$

Entonces  $(Tv|w) = f_w(v) = (v|w^*)$ . por lo tanto para cada  $w \in \mathbb{V}$  tenemos un único  $w^* \in \mathbb{V}$ . Luego, naturalmente podemos definir

$$T^* : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V} \quad T^*(w) = w^*$$

Mostrando finalmente que

$$(Tv|w) = (v|T^*w) \quad \forall v, w \in \mathbb{V}$$

$\square$

## 5 Descomposición Primaria

Teorema 5.1 (Descomposición Primaria)

Sea  $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$  y  $m_T = p_1^{r_1} \dots p_n^{r_n}$  producto de factores primos, entonces

1.  $\mathbb{V} = V_1 \oplus \dots \oplus V_n$  con  $V_i = Nu(p_i(T)^{r_i})$
2. Además si  $T_i = T|_{V_i} : V_i \rightarrow V_i$  sucede que  $m_{T_i} = p_i^{r_i}$ . Con  $V_i$  T-invariante

Proof. Sea

$$f_i = \frac{m_T}{p_i^{r_i}} = \prod_{j \neq i} p_j^{r_j}$$

Claramente  $f_i$  son coprimos entonces  $\exists g_i \in \mathbb{K}[x] / 1 = f_1 g_1 + \dots + f_n g_n$  (Por que como son coprimos el generador de su ideal es el 1). Entonces definimos  $E_i = f_i g_i(T)$ .

Primero notemos que

$$E_1 + \dots + E_n = f_1 g_1(T) + \dots + f_n g_n(T) = (f_1 g_1 + \dots + f_n g_n)(T) = 1(T) = I$$

Ahora  $E_i E_j = f_i g_i f_j g_j(T) = g_i g_j f_i f_j(T) = 0$  por que  $f_i f_j$  es obviamente un múltiplo del minimal de T si  $j \neq i$  (por como definimos  $f_i$ ). Entonces  $E_i E_j = 0$

Por lo tanto sabemos que es directo concluir de aca obviamente sale  $E_i^2 = E_i$

Luego como cumple estas propiedades  $\mathbb{V} = V'_1 \oplus \dots \oplus V'_n$  con  $V'_i = Im(E_i)$

Y por otro lado  $E_i$  son polys evaluados en T por lo tanto conmutan con T luego

$$E_i T = T E_i \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Mostrando que los  $V_i$  son T-invariante

Ahora queremos ver que  $Im(E_i) = V'_i = Nu(p_i^{r_i}(T)) = V_i$ . Tomemos  $v \in V'_i$  luego  $E_i(v) = v$  por lo tanto

$$p_i^{r_i}(T)(v) = p_i^{r_i}(T)E_i(v) = p_i^{r_i}(T)f_i g_i(T)(v) = g_i m_T(T)(v) = g_i m_T(T)(v) = 0.v = 0$$

Mostrando que  $v \in V_i$ . Ahora tomemos  $v \in V_i$ . Sabemos que  $p_i^{r_i} | f_j g_j \quad \forall j \neq i$  entonces  $f_j g_j = p_i^{r_i} h$  por lo tanto

$$E_j(v) = p_i^{r_i} h(T)(v) = 0$$

por que  $v \in Nu(p_i^{r_i}(T))$  y esto vale  $\forall j \neq i$  entonces

$$v = v.I = v(E_1 + \dots + E_n) = E_1(v) + \dots + E_n(v) = E_i(v)$$

Mostrando que  $v \in Im(E_i) = V'_i$  Completando asi la parte i

Ahora notemos que  $p_i^{r_i}(T)(v) = 0 \quad \forall v \in V_i$  por lo tanto  $m_{T_i} | p_i^{r_i}$  y  $f_i(T)v = 0 \quad \forall v \in V_j \quad j \neq i$ .

Ahora sea  $g$  tal que  $g(T_i)(v) = 0$  entonces  $g(T)f_i(T)(v) = 0 \quad \forall v \in \mathbb{V}$

Mostrando que  $p_i^{r_i} f_i = m_T | g f_i$  entonces como estamos hablando de factores primos  $p_i^{r_i} | g$  como vale para cualquier polinomio anulador vale para  $m_{T_i}$ , entonces  $m_{T_i} | p_i^{r_i}$ , finalmente  $m_{T_i} = p_i^{r_i}$

□

Teorema 5.2 (Caracterización de Triangulables)

Sea  $T : \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{V}$  entonces su minimal se escribe en factores primos si y solo si es triangularizable.

Proof. Ida. Como es triangularizable sabemos que en alguna base es una matriz triangular por lo tanto su característico se factoriza en factores primos, por Cayley-Hamilton, el minimal se factoriza en factores primos

Vuelta. Sea  $m_T = p_1^{r_1} \dots p_i^{r_i}$  para empezar seguro tenemos por lo menos un autovalor  $c_1$ , entonces definimos  $V_1 = \langle v_1 \rangle$  con  $v_1$  auto vector de autovalor  $c_1$ . Por lo tanto  $V_1$  es T-invariante. Ahora como el minimal se factoriza en factores primos y  $V_1$  T-invariante, entonces podemos aplicar lema.

$$\exists v_2 \notin V_1 \text{ tal que } (T - c_1 I)v_2 = v \in V_1$$

Llamamos  $V_2 = \langle v_1, v_2 \rangle$ . Obviamente  $v_1$  y  $v_2$  son linealmente independiente por que  $v_2 \notin V_1$ .

Además  $T(v_2) - c v_2 = v$  con  $v \in V_1$  entonces  $T(v_2) = c v_2 + v$  por lo tanto  $T(v_2) \in V_2$

Finalmente  $V_2$  es T-invariante. Ahora hacemos esto recursivamente y llegamos a

$$\exists v_k \notin V_{k-1} \text{ tal que } (T - c_k I)v_k \in V_{k-1}$$

Entonces tenemos  $V_k = \{v_1, \dots, v_k\}$  que es T-invariante y de  $dim(V_k) = k$

Si tomamos  $k = n$  tenemos una base que claramente triangulariza por que  $T(v_i) \in V_i$

□