Teorico Estructuras Algebraicas

Javier Vera

October 11, 2024

1 Clase 11

Definición 1.1
Sean G grupo y $X \neq \emptyset$ conjunto. Una accion de G en X es una funcion

$$G \times X \longrightarrow X$$
$$(g, x) \longmapsto g.x$$

Que cumple:

1. $gh.x = g.(h.x)$
2. $e.x = x \quad \forall x \in X$

En este caso se dice que G actua (opera) en X mediante $G \times X \longrightarrow X$

Ejemplo 1.1.
1. $G, X \neq \emptyset$ cualesquiera la accion trivial de G en X es aquella tal que $g.x = x \quad \forall x \in X \quad \forall g \in G$
2. $\mathbb{S}(x)$ actua en X en la forma $\mathbb{S} \times X \longrightarrow X$ $\sigma.x = \sigma(x) \quad \forall \sigma \in \mathbb{S}(x) \quad \forall x \in X$. En particular $\mathbb{S}$ actua en $I_n = \{1, \dots n\}$
3. Sea G grupo actua en si mismo de distintas formas, en este caso mediante el producto $G \times G \longrightarrow G$ es decir $g.x = gx$ esto se llama *accion regular*
4. $H \trianglelefteq G$ entonces G actua por conjugacion $G \times H \longrightarrow H$ dada por $g \in G \quad x \in H$
5. $\mathcal{S}(G) = \{\text{subgrupos de } G\}$. entonces G actua en $\mathcal{S}$ por conjugacion $g \in G \quad H \trianglelefteq G$
6. $H \leq G$ entonces G actua en las coclases G/H
   Ejercicio probar que satisfacen (A1) y (A2)

Proposición 1
Sea G grupo $X \neq \emptyset$ conjunto. Son equivalentes:

1. *Una accion $G \times X \longrightarrow X$*
2. *Un homomorfismo $\alpha : G \to \mathcal{S}(x)$*

Proof. pendiente □

Ejemplo 1.2.
1. La accion trivial $G \times X \to X$ corresponde a

$$G \longrightarrow \mathcal{S}(x)$$
$$g \longmapsto Id_x$$

2. La accion regular $G \times G \longrightarrow G$ corresponde al homomorfismo de Cayley G

Definición 1.2
Sea $G \times X \longrightarrow X$ una accion de un grupo G en $X \neq \emptyset$. Dos elementos $x, y \in X$ se dicen G-conjugados mediante esta accion si $\exists g \in G$ tal que $g.x = y$ (notacion $x \sim y$)

Esto define una relacion de equivalencia en X (Ejercici). Asi, tal relacion particiona a X en clases de equivalencia

Sea $x \in X$ entonces $G.x$ o $\mathcal{O}_G(x)$ es la clase de equivalencia de x que se llamara G-Orbita de x

$$X = \bigcup_{x \in X} G.x$$

Observación
Si $G \times X \longrightarrow X$ es accion entonces cualquier subgrupo de G actua en X por restriccion. De este modo $G = \mathcal{S}_n$ actua naturalmente en I_n

$$< \sigma > .j = \mathcal{O}_\sigma = \{\sigma^k : k \geq 0\} \quad \forall \sigma \in \mathcal{S}_n$$

Definición 1.3
Una accion se dice transitiva si posee una unica orbita es decir si $\exists x \in X$ tal que $X = G.x$

Definición 1.4
Sea $G \times X \longrightarrow X$ accion. Dado $x \in X$ el G-estabilizador de xes

$$G_x = \{g \in G : g.x = x\}$$

G_x es un subgrupo de G , $\forall x \in X \quad \forall g, h \in G_x$ (No necesariamente normal)

Si $\alpha : G \longrightarrow \mathcal{S}$ homomorfismo correspondiente a la accion dada entonces:

$$Ker(\alpha) = \bigcap_{x_i X} G_x$$

Ejemplo 1.3.

1. $G \times X \longrightarrow G$ accion trivial $g.x = \{x\}$ entonces $G_x = G$
2. $G \times G \longrightarrow G$ accion regular $g.x = gx$
   $G.x = G$ pues $y = (yx^{-1})x = yx^{-1}.x$ (Entonces es transitiva)
   $G_x = \{e\}$ pues $gx = x \iff g = e$
3. $H \trianglelefteq G$, $G \times H \longrightarrow H$ por conjugacion $g.x = gxg^{-1}$
   $$G.x = \{gxg^{-1} : g \in G\} = Cl(X)$$
   $$G_x = \{g \in G : gxg^{-1} = x\} = C_G(x)$$
   (ejercicios calcular estabilizador y centralizador de traslaciones para alfguna coclase)
4. Sea $H \leq G$ con
   $$G \times {}^G/_H \longrightarrow {}^G/_H$$
   dada por $g.aH = ga.H$ con ${}^G/_H = \{aH : a \in G\}$
   Es accion transitiva porque $G.{}^G/_H = {}^G/_H$
   $G_H = \{g \in G : g.eH = ge.H = H\} = H$ (DUDA)

Proposición 2
Sea $G \times X \longrightarrow X$ una accion de G en X, se tienen:

1. $\forall x \in X, G_{g.x} = gG_xg^{-1} \quad \forall g \in G$
2. $|G.x| = [G : G_x]$

Proof. Pendiente □

Teorema 1.1 (Ecuacion de Clase)
Sean G grupo y $G \times X \longrightarrow X$ una accion de G en $X \neq \emptyset$ $\exists$ famlia $\{G_i\}_{i \in I}$ de sugrupos propios de G tales que:

$$|X| = |X^G| + \sum_{n=1}^{\mathbb{N}}$$

donde $X^G = \{x \in X : g.x = x \quad \forall g \in G\}$ (BG-invariante)

Proof. pendiente $\square$

Teorema 1.2 (Teorema de Cauchy)
Sea G grupo de orden n y sea $p > 0$ primo tal que $p|n$ entonces G tiene un elemento de orden p

Proof. Pendiente $\square$