1	2	3	4	5	6	7	8	9		Calif.

Apellido y Nombre:

Condición: Libre Regular

Algebra II - Final

19 de diciembre de 2019

Justificar todas las respuestas. No se permite el uso de dispositivos electrónicos. Todos los resultados teóricos utilizados deben ser enunciados apropiadamente; en caso de utilizar resultados teóricos no dados en clase, los mismos deben demostrarse. Para aprobar se debe tener como mínimo 15 pts. en la parte teórica y 30 pts. en la parte práctica.

Parte Teórica (30 pts.)

1. (10 pts) Sea $\Bbbk$ un cuerpo, V un $\Bbbk$-espacio vectorial de dimensión finita, y sean $S, T \subset V$ subespacios.
   - Definir $S+T$, y probar que es un subespacio.
   - Dar una fórmula para $\dim(S+T)$ y demostrarla.
2. (10 pts) Sea $\Bbbk$ un cuerpo, V un $\Bbbk$-espacio vectorial de dimensión finita y $f: V \to V$ una transformación lineal. Dar la definición de un autovalor para f y probar que $\lambda \in \Bbbk$ es un autovalor de f si y sólo si λ es una raíz del polinomio característico de f.
3. (10 pts) Sea $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita con producto interno. Enunciar y demostrar el Teorema de ortogonalización de Gram-Schmidt.
4. Determinar si cada una de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando en cada caso la respuesta dada.
   (a) (3 pts) Si $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una transformación lineal cuyo polinomio característico tiene exactamente dos raíces reales distintas, entonces f no es diagonalizable.
   (b) (3 pts) Sean V y W son $\mathbb{Q}$-espacios vectoriales y $f: V \to W$ una función que satisface $f(v_1+v_2) = f(v_1)+f(v_2)$ para todo par $v_1, v_2 \in V$ entonces f es una transformación lineal.

Parte Práctica (70 pts.)

5. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$.Consideramos las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} c & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) (8 pts) Calcular $\det A$ y $\det B$ en función de a, b, c.
   (b) (7 pts) Sean $S = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 | \det A = 0\}$, $T = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 | \det B = 0\}$. Decidir si S y T son subespacios de $\mathbb{R}^3$.

6. Sea $\mathbb{R}[t]_n$ el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que n y sea $T : \mathbb{R}[t]_n \to \mathbb{R}[t]_n$ la transformación lineal dada por $T(p(t)) = p(t) - p'(t)$, para todo $p(t) \in \mathbb{R}[t]_n$.

   (a) (6 pts) Probar que T es invertible.

   (b) (6 pts) Probar que 1 es el único autovalor de T.

   (c) (8 pts) Hallar el autoespacio de 1. Decidir si T es diagonalizable.

7. Sea V el $\mathbb{R}$-espacio vectorial de sucesiones que valen cero a partir de un valor, o sea si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ es una función, entonces $f \in V$ si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ (que depende de f) tal que $f(n) = 0$ para todo $n \geq n_0$. Sea $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$ la función dada por $\Phi(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)g(n)$ (notar que Φ es una función bien definida porque sólo hay una cantidad finita de sumandos no nulos).

   (a) (8 pts) Probar que Φ es un producto interno en V.

   (b) (3 pts) Sea $T : V \to V$, la función dada por $T(f)(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 1, \\ f(n-1) & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$.
   Probar que T es una transformación lineal.

   (c) (6 pts) Probar que para todo par de funciones $f, g \in V$ se cumple $\Phi\big(T(f), T(g)\big) = \Phi(f, g)$. Deducir de esta igualdad que T es un monomorfismo.

   (d) (3 pts) Probar que T no es un isomorfismo.

8. Sean $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 : \mathbb{R}[x]_2 \to \mathbb{R}$ las funciones dadas por:

$$\varphi_1(P) = P(-1), \qquad \varphi_2(P) = P(0), \qquad \varphi_3(P) = P(1), \qquad P \in \mathbb{R}[x]_2.$$

   (a) (10 pts) Probar que $B = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$ es una base de $(\mathbb{R}[x]_2)^*$.

   (b) (5 pts) Sea $\varphi \in (\mathbb{R}[x]_2)^*$, $\varphi(a + bx + cx^2) = 3a + 9b + 27c$. Hallar las coordenadas de φ en la base B.

9. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita y $f : V \to V$ una transformación lineal.

   (a) (3 pts) Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale que $\mathrm{Nu} f^n \subseteq \mathrm{Nu} f^{n+1}$, $\mathrm{Im} f^n \supseteq \mathrm{Im} f^{n+1}$.

   (b) (7 pts) Probar que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathrm{Nu} f \subsetneq \mathrm{Nu} f^2 \subsetneq \mathrm{Nu} f^3 \cdots \subsetneq \mathrm{Nu} f^m = \mathrm{Nu} f^{m+1},$$
$$\mathrm{Im} f \supsetneq \mathrm{Im} f^2 \supsetneq \mathrm{Im} f^3 \cdots \supsetneq \mathrm{Im} f^m = \mathrm{Im} f^{m+1}.$$

   Ayuda: $f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f$ es una transformación lineal. Utilizar relación entre las dimensiones de su núcleo y su imagen.

   (c) (5 pts) Probar además que $V = \mathrm{Nu} f^m \oplus \mathrm{Im} f^m$.

EJERCICIO PARA LIBRES **El puntaje entre paréntesis es lo que se le resta al puntaje de la parte práctica en caso de no ser resuelto correctamente**

En $\mathbb{R}[x]_3$ consideramos los siguientes subespacios:

$$S_1 = \{P \in \mathbb{R}[x]_3 : P(1) = P'(1) = 0\}, \qquad S_2 = \{P \in \mathbb{R}[x]_3 : P(-1) = P'(-1) = 0\}.$$

1. (-9pts) Hallar bases de S_1, S_2 y $S_1 \cap S_2$.
2. (-6 pts) Decidir si existe un epimorfismo $T : \mathbb{R}[x]_4 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\mathrm{Nu}(T) = S_1$.

JUSTIFICAR DEBIDAMENTE TODAS LAS RESPUESTAS