Clase 22 - Programación lineal (4)

El método Simplex

El método Simplex es un método iterativo para resolver un problema de PL en la forma estándar. Si el problema es no degenerado, el método va recorriendo la región factible, de una manera eficiente, de una solución básica factible (vértice) a otra hasta llegar a la solución básica factible óptima. En cada iteración, se verifica si la solución actual es óptima. Si no lo es, el método elige una dirección donde se mejore el valor óptimo y se avanza en esa dirección hasta encontrar otra solución factible óptima. Luego se repite este procedimiento.

Para entender mejor el método consideraremos un ejemplo:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & z = -x_1 - 2x_2 \\ \text{sujeto a} \quad & -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 7 \\ & x_1 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

El formato estándar de este problema está dado por

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & z = -x_1 - 2x_2 \\ \text{sujeto a} \quad & -2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ & -x_1 + 2x_2 + x_4 = 7 \\ & x_1 + x_5 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{aligned}$$

Para este problema se tienen:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Cuando se tienen restricciones del tipo $\leq$ y se agregan variables de holgura, se puede obtener fácilmente una solución básica factible tomando $x_B = (x_3, x_4, x_5) = (2, 7, 3)$ y $x_N = (x_1, x_2) = (0, 0)$, que corresponde al origen de coordenadas, es decir, el punto $x_a = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 2, 7, 3)$ en la Figura 1.

Para pasar a otra solución básica factible, alguna de las variables no básicas pasará a ser básica, y por lo tanto alguna de las variables básicas dejará de serlo y se convertirá en no básica. Para eso notemos que, a partir de la forma estándar, se obtiene que

$$\begin{aligned} x_3 &= 2 + 2x_1 - x_2 \\ x_4 &= 7 + x_1 - 2x_2 \\ x_5 &= 3 - x_1 \end{aligned} \tag{1}$$

y

$$z = -x_1 - 2x_2,$$

cuyo valor en x_a es $z = 0$, pues $x_1 = x_2 = 0$. Como el objetivo es minimizar z, si cualquiera de estas dos variables toma valores positivos z decrecerá. Es claro que conviene elegir la variable x_2 porque el coeficiente de x_2 hará que z decrezca más que si se eligiera x_1. Por lo tanto, la variable x_2 que era no básica ($x_2 = 0$) pasará a ser básica, es decir tomará un valor positivo. Debido a las restricciones (1), esta variable no puede crecer indefinidamente. Manteniendo la variable no básica x_1, es decir $x_1 = 0$, y teniendo en cuenta (1), obtenemos

$$x_3 = 2 - x_2 \tag{2}$$
$$x_4 = 7 - 2x_2 \tag{3}$$
$$x_5 = 3. \tag{4}$$

Estas 3 ecuaciones permitirán determinar cual es la variable básica que pasará de ser básica a no básica: la variable x_2 puede aumentar hasta que x_3 o x_4 se hagan cero sin tomar valores negativos. De (2), cuando $x_3 = 0$, entonces $x_2 = 2$ y además $x_4 = 3 > 0$. De (3), cuando $x_4 = 0$, entonces $x_2 = 7/2$ y además $x_3 = -3/2 < 0$. Por lo tanto, x_2 puede crecer hasta el valor $x_2 = 2$, y x_3 dejará de ser variable básica para ser no básica. Y así, la nueva solución básica factible será el punto $x_b = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 2, 0, 3, 3)$ en la Figura 1.

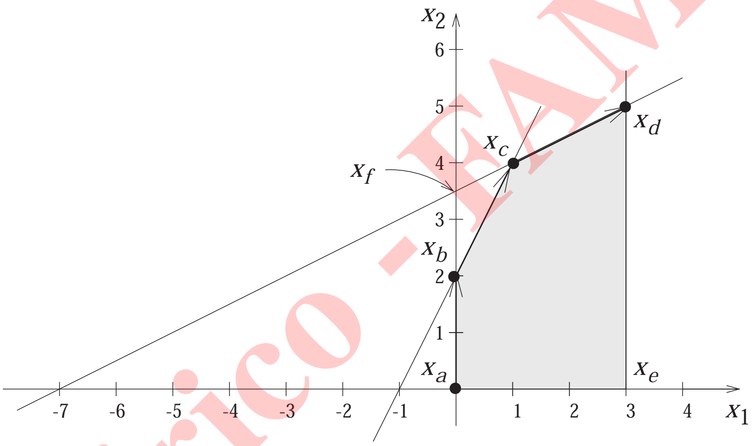

Figura 1: El método Simplex.

Para terminar la iteración, resta actualizar el problema en términos de la nueva solución básica factible, donde las variables básicas están en $x_B = (x_2, x_4, x_5)$ y las no básicas $x_N = (x_1, x_3)$. Para esto, se deben expresar las nuevas variables básicas en términos de las nuevas variables no básicas. Las variables no básicas deben aparecer en la función objetivo y en la matriz de restricciones se debe obtener una matriz identidad en las variables básicas.

De la primera ecuación de (1), tenemos que $x_2 = 2 + 2x_1 - x_3$, y reemplazando en la función objetivo y en las restricciones, el problema de PL resulta

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & z = -4 - 5x_1 + 2x_3 \\ \text{sujeto a} \quad & x_2 = 2 + 2x_1 - x_3 \\ & x_4 = 3 - 3x_1 + 2x_3 \\ & x_5 = 3 - x_1 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{aligned}$$

Como $x_N = (x_1, x_3) = (0, 0)$, entonces $z = -4$ y $x_B = (x_2, x_4, x_5) = (2, 3, 3)$. Esto termina la primera iteración del método.

Fórmulas generales

Consideremos el problema de PL en el formato estándar

$$\begin{array}{rl} \text{minimizar} & z = c^T x \\ \text{sujeto a} & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Si $x = (x_B, x_N)$ es una solución básica factible para alguna submatriz B de $A = [B|N]$, entonces

$$z = c_B^T x_B + c_N^T x_N$$
$$Bx_B + Nx_N = b, \quad \Rightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N,$$

entonces reemplazando en z, se obtiene $z = c_B^T B^{-1} b + (c_N^T - c_B^T B^{-1} N)x_N$.

Ahora, el valor actual de las variables básicas y la función objetivo se obtienen tomando $x_N = 0$, y denotamos $x_B = \hat{b} = B^{-1}b$, y $\hat{z} = c_B^T B^{-1} b$.

Si definimos $c_B^T B^{-1} = y^T$, es decir $y = (c_B^T B^{-1})^T = B^{-T} c_B$, entonces

$$z = y^T b + (c_N^T - y^T N)x_N.$$

Se llama **costo reducido** de x_j a $\hat{c}_j$, la entrada j-ésima en el vector $\hat{c}_N^T \equiv (c_N^T - c_B^T B^{-1} N)$. Luego, $z = \hat{z} + \hat{c}_N^T x_N$.

Test de optimalidad: se debe analizar que ocurre con la función objetivo si se aumenta cada variable no básica a partir del valor cero. Si $\hat{c}_j > 0$ la función objetivo aumentará; si $\hat{c}_j = 0$ la función objetivo se mantiene constante; si $\hat{c}_j < 0$ la función objetivo disminuirá si x_j comienza a crecer a partir de cero. Si la solución no es óptima, entonces se puede elegir una variable no básica x_t con $\hat{c}_t < 0$ para **entrar a la base**.

¿Cuál variable dejará de ser básica?: para esto recordemos que $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$, y dado que las variables no básicas son iguales a cero, excepto x_t, entonces

$$x_B = \hat{b} - \hat{A}_t x_t,$$

donde $\hat{A}_t = B^{-1}A_t$, y A_t es la columna t de A. Ahora, como hicimos en el ejemplo anterior, miremos la i-ésima componente de x_B:

$$(x_B)_i = \hat{b}_i - \hat{a}_{i,t} x_t.$$

Si $\hat{a}_{i,t} > 0$, entonces $(x_B)_i$ decrecerá a medida que x_t aumente, y $(x_B)_i$ será igual a cero cuando $x_t = \hat{b}_i / \hat{a}_{i,t}$. Si $\hat{a}_{i,t} < 0$, entonces $(x_B)_i$ aumentará y si $\hat{a}_{i,t} = 0$ entonces $(x_B)_i$ se mantiene constante. Se aplicará el siguiente **test del cociente mínimo** para decidir cual variable básica pasará a ser no básica:

$$\bar{x}_s = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\hat{b}_i}{\hat{a}_{i,t}} \,|\, \hat{a}_{i,t} > 0 \right\}.$$

Para determinar los nuevos valores de las variables básicas y la función objetivo se debe calcular:

$$x_B \leftarrow x_B - \hat{A}_t \bar{x}_s, \quad \text{y} \quad \hat{z} \leftarrow \hat{z} + \hat{c}_t \bar{x}_s.$$

Si $\hat{a}_{i,t} \leq 0$ para todo i entonces ninguna de las variables básicas decrecerá a medida que x_t aumenta, por lo tanto x_t puede crecer tanto como se quiera. Esto significa, que la función objetivo decrecerá mientras $x_t \to \infty$, o sea que no tendrá un mínimo finito, y por lo tanto el problema es no acotado.

El Algoritmo Simplex

Se comienza con una matriz base B correspondiente a una solución básica factible $x_B = \hat{b} = B^{-1}b \geq 0$. Los siguientes tres pasos resumen el método Simplex.

Paso 1: test de optimalidad.
Calcular $y^T = c_B^T B^{-1}$; $\hat{c}_N^T = c_N^T - y^T N$.
Si $\hat{c}_N^T \geq 0$, entonces la solución es óptima. Sino, elegir una variable x_t tal que $\hat{c}_t < 0$, para entrar a la base (pasar a ser básica).

Paso 2: test del cociente mínimo.
Calcular $\hat{A}_t = B^{-1}A_t$. Determinar un índice s tal que

$$\frac{\hat{b}_s}{\hat{a}_{s,t}} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\hat{b}_i}{\hat{a}_{i,t}} \,|\, \hat{a}_{i,t} > 0 \right\}.$$

Este test determina cual es la variable que abandona la base.
Si $\hat{a}_{i,t} \leq 0$ para todo i, el problema es no acotado.

Paso 3: actualización.
Actualizar la matriz base B y las correspondientes variables básicas x_B.
Volver al Paso 1.

Observación 1: esta es una versión simplificada del método simplex. Existen variantes algorítmicas para evitar algunos problemas que pueden aparecer como ciclos o restricciones redundantes. Además, existen diferentes implementaciones del método simplex, tanto gratuitas como comerciales.

Observación 2: a veces no es posible disponer de una solución básica facible inicial fácilmente. Para esto existen algunos métodos que se usan previamente para obtener esta solución inicial (método de las dos fases, método de la M grande).

Observación 3: bajo adecuadas hipótesis el algoritmo del método simplex converge a una solución básica factible óptima o determina que el problema es no acotado.

Observación 4: cuando las variables involucradas son enteras, el problema es mucho más complejo, tanto matemática como computacionalmente, y esto se estudia en una subárea de Optimización llamada Programación Lineal Entera.

Formulación tabla (tableau) del método Simplex

Para resolver problemas grandes de PL, las implementaciones computacionales eficientes del método Simplex se basan en el algoritmo descripto arriba. En cambio, para problemas pequeños es conveniente usar la formulación tabla por ser una manera compacta y sistemática de organizar las cuentas del métoodo Simplex.

Para la formulación estándar del ejemplo:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & z = -x_1 - 2x_2 \\ \text{sujeto a} \quad & -2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ & -x_1 + 2x_2 + x_4 = 7 \\ & x_1 + x_5 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{aligned}$$

La tabla inicial está dada por:

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
$-z$	-1	-2	0	0	0	0
x_3	-2	1	1	0	0	2
x_4	-1	2	0	1	0	7
x_5	1	0	0	0	1	3

(5)

LD, significa lado derecho en la primera fila de la tabla. Notar que en la segunda fila escribimos $-z$. Esto se debe a que igualamos a cero a la función objetivo:

$$z = -x_1 - 2x_2 \quad \Rightarrow \quad -z - x_1 - 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 0.$$

La primera columna indica las variables básicas y en las 3 últimas filas se indican los coeficientes de las restricciones.

La tabla del problema original y en la base actual de cada iteración están dadas por:

base	x_B	x_N	LD
$-z$	c_B	c_N	0
x_B	B	N	b

base	x_B	x_N	LD
$-z$	0	$c_N^T - c_B^T B^{-1} N$	$-c_B^T B^{-1} b$
x_B	I	$B^{-1}N$	$B^{-1}b$

Como en la Tabla 5, los coeficientes de las variables no básicas en la primera fila (costos reducidos) son negativos, significa que esa solución no es óptima. Elegimos x_2 por tener el costo reducido de mayor magnitud (-2). Esa será la variable no básica que entrará a la base. Para decidir cual variable básica dejará de serlo calculamos el mínimo de los siguientes cocientes:

$$\text{mín}\left\{\frac{2}{1}, \frac{7}{2}\right\} = 2,$$

como este valor de mínimo corresponde a la variable básica x_3, esa variable abandonará la base y será reemplazada por x_2.

El paso siguiente consiste en transformar la tabla de manera de obtener una matriz identidad en las nuevas variables básicas x_2, x_4, x_5. Antes de reemplazar x_3 se debe identificar la columna de x_2 en la tabla

	base	x_1	⇓ x_2	x_3	x_4	x_5	LD
	$-z$	-1	-2	0	0	0	0
⇒	x_3	-2	1	1	0	0	2
	x_4	-1	2	0	1	0	7
	x_5	1	0	0	0	1	3

y transformarla, usando operaciones elementales por filas, en $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. En este caso, se debe sumar 2 veces la fila de x_3 a la fila de $-z$ y restar 2 veces la fila de x_3 a la fila de x_4. Así se obtiene la siguiente tabla

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
$-z$	-5	0	2	0	0	4
x_2	-2	1	1	0	0	2
x_4	3	0	-2	1	0	3
x_5	1	0	0	0	1	3

Ahora se comienza la segunda iteración. En la primera fila, el costo reducido de la variable x_1 es $-5 < 0$, por lo tanto esta solución básica factible no es óptima y x_1 puede pasar a ser básica (entrar a la base). Aplicando el test del cociente mínimo, se deduce que x_4 es la variable que abandonará la base:

	base	⇓ x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
	$-z$	-5	0	2	0	0	4
	x_2	-2	1	1	0	0	2
⇒	x_4	3	0	-2	1	0	3
	x_5	1	0	0	0	1	3

Luego, repitiendo este procedimiento, se obtienen las siguientes tablas, de las iteraciones tres y cuatro:

	base	x_1	x_2	⇓ x_3	x_4	x_5	LD
	$-z$	0	0	$-4/3$	$5/3$	0	9
	x_2	0	1	$-1/3$	$2/3$	0	4
	x_1	1	0	$-2/3$	$1/3$	0	1
⇒	x_5	0	0	$2/3$	$-1/3$	1	2

Finalmente,

base	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	LD
$-z$	0	0	0	1	2	13
x_2	0	1	0	$1/2$	$1/2$	5
x_1	1	0	0	0	1	3
x_3	0	0	1	$-1/2$	$3/2$	3

Vemos que en esta última tabla, los costos reducidos de las variables no básicas (x_4 y x_5) son ambos positivos, y por lo tanto esta solución básica factible es óptima. La solución final está claramente expresada en la última columna: $z = -13$, $x_2 = 5, x_1 = 3$ y $x_3 = 3$, y las variables no básicas $x_4 = x_5 = 0$, lo que corresponde al punto x_d de la Figura 1.