ALGEBRA LINEAL - Práctica N°8 - Primer cuatrimestre de 2022

Espacios vectoriales con producto interno

En esta práctica, todos los espacios vectoriales serán sobre $\mathbb{R}$ o sobre $\mathbb{C}$ únicamente.

Ejercicio 1. Sea V un espacio vectorial y sea $\langle\, ,\rangle$ un producto interno sobre V. Probar:

i) $\langle x,\, y+z\rangle = \langle x,y\rangle + \langle x,z\rangle$.

ii) $\langle x,\, cy\rangle = \bar{c}\,\langle x,y\rangle$.

iii) Si $\langle x,y\rangle = \langle x,z\rangle$ para cada $x \in V$, entonces $y = z$.

Ejercicio 2. Sea $(V, \langle\, ,\rangle)$ un espacio vectorial con producto interno. Probar que $|\langle x,y\rangle| = \|x\|\,\|y\|$ si y sólo si $\{x,y\}$ es un conjunto linealmente dependiente.

Ejercicio 3. Determinar si las siguientes funciones son productos internos. En caso afirmativo encontrar su matriz en la base canónica del espacio correspondiente.

i) $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \ \Phi(x,y) = 2\,x_1\,y_1 + 3\,x_2\,y_1 - x_2\,y_2 + 3\,x_1\,y_2,$

ii) $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \ \Phi(x,y) = x_1\,y_1 + x_2\,y_1 + 2\,x_2\,y_2 - 3\,x_1\,y_2,$

iii) $\Phi : K^2 \times K^2 \to K,\ \ \Phi(x,y) = 2\,x_1\,y_1 + x_2\,y_2 - x_1\,y_2 - x_2\,y_1,$ con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$,

iv) $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C},\ \ \Phi(x,y) = 2\,x_1\,\overline{y}_1 + x_2\,\overline{y}_2 - x_1\,\overline{y}_2 - x_2\,\overline{y}_1,$

v) $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C},\ \ \Phi(x,y) = 2\,x_1\,\overline{y}_1 + (1+i)\,x_1\,\overline{y}_2 + (1+i)\,x_2\,\overline{y}_1 + 3\,x_2\,\overline{y}_2,$

vi) $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C},\ \ \Phi(x,y) = x_1\,\overline{y}_1 - i\,x_1\,\overline{y}_2 + i\,x_2\,\overline{y}_1 + 2\,x_2\,\overline{y}_2,$

vii) $\Phi : K^3 \times K^3 \to K,\ \ \Phi(x,y) = 2\,x_1\,\overline{y}_1 + x_3\,\overline{y}_3 - x_1\,\overline{y}_3 - x_3\,\overline{y}_1,$ con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$.

Ejercicio 4. Determinar para qué valores de a y b en $\mathbb{R}$,

$$\Phi(x,y) = a\,x_1\,y_1 + b\,x_1\,y_2 + b\,x_2\,y_1 + b\,x_2\,y_2 + (1+b)\,x_3\,y_3$$

es un producto interno en $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 5. Probar que las siguientes funciones definen productos internos sobre los espacios vectoriales considerados:

i) $\langle\, ,\rangle : K^{n\times n} \times K^{n\times n} \to K,\ \ \langle A,B\rangle = tr(A\,B^*),$ con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$.

ii) $\langle\, ,\rangle : C[0,1] \times C[0,1] \to \mathbb{R},\ \ \langle f,g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx.$

iii) $\langle\, ,\rangle : K^n \times K^n \to K,\ \ \langle x,y\rangle = \overline{y}\,Q^*\,Q\,x^t,$ con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$,
donde $Q \in K^{n\times n}$ es una matriz inversible.

iv) $\langle\, ,\rangle_T : V \times V \to K,\ \ \langle x,y\rangle_T = \langle T(x), T(y)\rangle,$ con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$,
donde V y W son espacios vectoriales sobre K, $\langle\, ,\rangle$ es un producto interno sobre W y $T : V \to W$ es un monomorfismo.

Ejercicio 6. Restringir el producto interno del item ii) del ejercicio anterior a $\mathbb{R}_n[X]$ y calcular su matriz en la base $B = \{1, X, \dots, X^n\}$.

Ejercicio 7. Sea V un espacio vectorial de dimensión n y $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V.

i) Probar que existe un único producto interno en V para el cual B resulta ortonormal.

ii) Hallarlo en los casos

a) $V = \mathbb{C}^2$ y $B = \{(1, i), (-1, i)\}$,
b) $V = \mathbb{R}^3$ y $B = \{(1, -1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$.

Ejercicio 8. Hallar el complemento ortogonal de los siguientes subespacios de V:

i) $V = \mathbb{R}^4$, $S_1 = <(1,1,0,-1), (-1,1,1,0), (2,-1,1,1)>$ para el producto interno canónico.

ii) $V = \mathbb{R}^3$, $S_2 = <(1,2,1)>$ para el producto interno definido por
$\langle x, y\rangle = x_1\, y_1 + 2\, x_2\, y_2 + x_3\, y_3 - x_1\, y_2 - x_2\, y_1$.

iii) $V = \mathbb{C}^3$, $S_3 = <(i,1,1), (-1,0,i)>$,
para el producto interno $\langle , \rangle_T$ definido en el Ejercicio 5. iv) con $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$,
$T(x) = \begin{pmatrix} i & -1+i & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 1 & i+1 & i \end{pmatrix} x^t$ y $\langle , \rangle$ el producto interno canónico sobre $\mathbb{C}^3$.

iv) $V = \mathbb{C}^4$, $S_4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4 : x_1 + 2\, i\, x_2 - x_3 + (1+i)\, x_4 = 0,\ x_2 + (2-i)\, x_3 + x_4 = 0\}$,
para el producto interno $\langle x, y\rangle = x_1\, \overline{y}_1 + 2\, x_2\, \overline{y}_2 + x_3\, \overline{y}_3 + 3\, x_4\, \overline{y}_4$.

Ejercicio 9.

i) Hallar bases ortonormales para los subespacios del ejercicio anterior para los productos internos considerados.

ii) Definir explícitamente las proyecciones ortogonales sobre cada uno de dichos subespacios.

iii) Hallar el punto de S_4 más cercano a $(0, 1, 1, 0)$.

Ejercicio 10. Se define $\langle , \rangle : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ por $\langle f, g\rangle = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k}{n}\right)$.

i) Probar que $\langle , \rangle$ es un producto interno.

ii) Para $n = 2$, calcular $< X >^{\perp}$.

Ejercicio 11.

i) Se considera $\mathbb{C}^{n\times n}$ con el producto interno $\langle A, B\rangle = tr(AB^*)$. Hallar el complemento ortogonal del subespacio de las matrices diagonales.

ii) Se considera $\mathbb{R}_3[X]$ con el producto interno $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\, dx$. Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $\{1, X, X^2, X^3\}$. Hallar el complemento ortogonal del subespacio $S = < 1 >$.

iii) Se considera $C[-1, 1]$ con el producto interno $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\, dx$. Hallar el polinomio de grado menor o igual que 3 más próximo a la función $f(x) = \mathrm{sen}(\pi x)$.
Sugerencia: Observar que basta considerar el subespacio $S = < 1, x, x^2, x^3, \mathrm{sen}(\pi x) >$.