Algunas construcciones categóricas

Productos

- Sean G, H grupos $\quad G\times H = \{(g,h) \mid g\in G,\ h\in H\}$

  $G\times H$ es un grupo con el producto $(g_1,h_1)\cdot(g_2,h_2) = (g_1g_2,\ h_1h_2)$

  Donde el neutro es $e_{G\times H} = (e_G, e_H)$

  El inverso $(g,h)^{-1} = (g^{-1}, h^{-1})$

- Sea $\{G_i\}_{i\in I}$ familia de grupos

  El producto cartesiano es $\prod_{i\in I} G_i = \left\{ f: I \longrightarrow \bigcup_{i\in I} G_i \;\middle|\; f(i)\in G_i \right\}$

  $f \equiv \{a_i\}_{i\in I}$ tal que $a_i = f(i)\in G_i \quad \forall i\in I$

  $\prod_{i\in I} G_i$ es un grupo con el producto "componente a componente":

  $$\{a_i\}_{i\in I}\cdot\{b_i\}_{i\in I} = \{a_ib_i\}_{i\in I}$$

  El neutro es $e = \{e_i\}_{i\in I}$ $\quad e_i\in G_i$ neutro

  El inverso $\{a_i\}_{i\in I}^{-1} = \{a_i^{-1}\}_{i\in I}$

  Para cada $i\in I$ definimos $\pi_i : \prod_{j\in I} G_j \longrightarrow G_i$ dada por $\pi_i\left(\{a_j\}_{j\in I}\right) = a_i$

  π_i es homo de grupos $\forall i\in I$

Proposición: el par $\left(\prod_{i\in I} G_i,\ \{\pi_i\}_{i\in I}\right)$ cumple la siguiente propiedad universal:

para todo grupo G y homos de grupos : $G \xrightarrow{f_i} G_i$, $i\in I$, existe un único homo : $G \xrightarrow{f} \prod_{i\in I} G_i$ tal que $\pi_i\circ f = f_i$, $\forall i\in I$

<u>Notación</u>: $f = \prod_{i\in I} f_i$

Diagramas:

$$\begin{tikzcd}
 & \prod_{i\in I} G_i \arrow[dr, "\pi_i"] & \\
G \arrow[ur, dashed, "\exists! f"] \arrow[rr, "f_i"'] \arrow[rr, phantom, shift left=3ex, "///"] & & G_i
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & G \\
K \arrow[r, dashed, "\exists! f"] \arrow[urr, bend left, "f_1"] \arrow[drr, bend right, "f_2"'] & G\times H \arrow[ur, "\pi_1"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & \\
 & & H
\end{tikzcd}$$

Diagrama de la prop. universal para el prod. cartesiano

Además esta propiedad determina al par $\left(\prod_{i\in I} G_i, \{\pi_i\}_{i\in I}\right)$ salvo un único isomorfismo, es decir, que si $\left(P, \{\lambda_i\}_{i\in I}\right)$ es otro par que cumple la misma prop. universal, entonces existe un único iso $f: P \longrightarrow \prod_{i\in I} G_i$ tal que $\lambda_i = \pi_i f \ \forall i\in I$ ⊗

$\prod_{i\in I} G_i$ se dice el producto de la familia $\{G_i\}_{i\in I}$ en la categoría G_p (de grupos)

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dr, "\lambda_i"] & \\ G \arrow[ur, dashed, "\exists! f"] \arrow[rr, "f_i"'] & & G_i \end{tikzcd}$$

⊗
$$\begin{tikzcd} & \prod G_i \arrow[dr, "\pi_i"] & \\ P \arrow[ur, "\exists! f"] \arrow[rr, "\lambda_i"'] & & G_i \end{tikzcd}$$

Demostración:

- Veamos que $\left(\prod_{i\in I} G_i, \{\pi_i\}_{i\in I}\right)$ tiene la propiedad universal

  Sea $f_i: G \longrightarrow G_i$, $i\in I$

  Definimos $f: G \longrightarrow \prod_{i\in I} G_i$ en la forma $f(g) = \{f_i(g)\}_{i\in I}$

  Es claro que f es homo (pues f_i lo es $\forall i$) y $\pi_i f = f_i \ \forall i\in I$

  Ahora veamos que f es único:

  Si $\tilde{f}: G \to \prod_{i\in I} G_i$ es tal que $\pi_i \tilde{f} = f_i$

  Si denotamos $\tilde{f}(g) = \{a_i\}_{i\in I} \Rightarrow \underset{\pi_i \tilde{f}(g)}{\underset{\parallel}{a_i}} = f_i(g) \ \forall i\in I$

  Luego $\tilde{f}(g) = \{f_i(g)\}_{i\in I} = f(g)$ y como esto sucede $\forall g\in G \Rightarrow f = \tilde{f}$

Resta probar la unicidad de $\left(\prod G_i, \{\pi_i\}\right)$ con la propiedad universal

Sea $\left(P, \{\lambda_i\}_{i\in I}\right)$ otro tal par con $\lambda_i: P \to G_i$

Por la propiedad universal de $\left(\prod G_i, \{\pi_i\}\right)$ $\exists!$ homo $f: P \to \prod G_i$ tal que $\pi_i f = \lambda_i \ \forall i\in I$

Por otro lado, los homo $\pi_i: \prod G_i \longrightarrow G_i$, por la propiedad universal de $(P, \{\lambda_i\})$, $\exists!$ homo $\bar{f}: \prod G_i \longrightarrow P$ tal que $\lambda_i \bar{f} = \pi_i \ \forall i\in I$

Luego tomemos $\bar{f} f: P \longrightarrow P$ homo que satisface $\underbrace{\lambda_i \bar{f}}_{\pi_i} f = \pi_i f = \lambda_i \ \forall i\in I$

Resulta entonces $\bar{f}f = id_P$ pues $\exists! f$ que hace que el diagrama conmute y tal f es id_P

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dr, "\lambda_i"] & \\ P \arrow[ur, dashed, "\exists! f"] \arrow[rr, "\lambda_i"'] \arrow[r, phantom, ""] & /// & G_i \end{tikzcd}$$

De manera similar $f\bar{f} = id_{\prod G_i}$, lo cual muestra que f es iso

Que f sea único con esta propiedad de nuevo es consecuencia de la unicidad en la propiedad universal $\square$

COPRODUCTO ó SUMA DIRECTA

Sea $\{G_i\}_{i\in I}$ familia de grupos, el **coproducto** de los G_i's es

$$\coprod_{i\in I} G_i = \left\{ \{a_i\}_{i\in I} \in \prod_{i\in I} G_i \;\middle|\; a_i = e_i \text{ (neutro de } G_i) \text{ para todos salvo un n° finito de } i\in I \right\}$$

para casi todos $\forall A$

El n° finito depende del a_i en cuestión

$\coprod_{i\in I} G_i$ es un subgrupo de $\prod_{i\in I} G_i$. En particular es un grupo con el producto componente a componente:

inclusión natural ← $\imath_i : G_i \longrightarrow \coprod_{i\in I} G_i$ homo $\qquad \imath_i(g)(j) = \begin{cases} g, & j = i \\ e_j, & j \neq i \end{cases}$

$(1,0,2,0,\dots) = \underset{\substack{\uparrow \imath_1 \\ 1}}{(1,0,0,\dots)} + \underset{\substack{\uparrow \imath_3 \\ 2}}{(0,0,2,0,\dots)}$ → por ello se lo llama suma directa al coproducto

$\left(\coprod_{i\in I} G_i, \{\imath_i\}_{i\in I}\right)$ es el coproducto de $\{G_i\}$ en G_p

Proposición: el par $\left(\coprod G_i, \{\imath_i\}\right)$ cumple con la siguiente propiedad universal: (abelianos)

$\forall$ grupo abeliano G y homos $G_i \xrightarrow{t_i} G$, $i\in I$, existe un único homo $\coprod_{i\in I} G_i \xrightarrow{t} G$ tal que $t\imath_i = t_i$ $\forall i\in I$

Además $\left(\coprod G_i, \{\imath_i\}\right)$ es único salvo un único iso con esta propiedad

Diagramas:

$$\begin{tikzcd} & \coprod_{i\in I} G_i \arrow[dr, dashed, "\exists! t"] & \\ G_i \arrow[ur, "\imath_i"] \arrow[rr, "t_i"'] & /// & G \end{tikzcd}$$

Es igual al diagrama anterior pero con las flechas en dirección opuesta

Demostración:

p/ esto me ayuda que sea abeliano

Veamos que cumple la propiedad. Sea $G_i \xrightarrow{t_i} G$, $i \in I$

Sea $t : \coprod_{i\in I} G_i \longrightarrow G$, $t\left(\{a_i\}_{i\in I}\right) = \sum_{i\in I} t_i(a_i) \in G$ tiene sentido pues los a_i's son casi todos 0 y como G es abeliano, no importa el orden en que sume

$$t\left(\{a_i\}+\{b_i\}\right) = t\left(\{a_i+b_i\}_{i\in I}\right) = \underbrace{\sum_{i\in I}}_{\text{suma finita}} t_i(a_i+b_i) = \left(\sum_{i\in I} t_i(a_i)\right) + \left(\sum_{i\in I} t_i(b_i)\right)$$
$$= t(\{a_i\}) + t(\{b_i\})$$

$$t\,\iota_i(a) = t\left(\{a_j\}_{j\in I}\right), \quad a_j = \begin{cases} a & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i\neq j \end{cases} \qquad \therefore \quad t\,\iota_i(a) = t_i(a)$$

Ahora, la unicidad de $\left(\coprod G_i, \{\iota_i\}\right)$ se prueba de la misma forma que se hizo para el producto → ejercicio

□

Notación alternativa para el coproducto $\bigoplus_{i\in I} G_i$ ó $\sum_{i\in I} G_i$

Se lo suele llamar suma directa externa

El coproducto se puede definir siempre pero este no siempre existe

∄ coproducto en la categoría de grupos abelianos finitos

GRUPOS LIBRES Y PRESENTACIONES

Sea X conjunto, tomemos conjuntos X^{-1} y $\{e\}$ ambos disjuntos con X y entre sí, tales que X^{-1} está en correspondencia biyectiva con X.

Denotamos por $x^{-1} \in X^{-1}$ al elemento que corresponde a $x \in X$ bajo una biyección (fija)

Una palabra en $\underbrace{X \cup \{e\} \cup X^{-1}}_{\text{alfabeto}}$ es una sucesión $(a_1, a_2, \dots)$ donde $a_i \in X \cup \{e\} \cup X^{-1}$ y $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $a_i = e$ $\forall i \geq n$ (ie es sucesión finita)

Notación: $a_1 a_2 \cdots a_n$

Una palabra $a=(a_1 a_2 \cdots)$ se dice reducida si cumple:

i) $\forall x \in X$, los elementos x y x^{-1} no son adyacentes en a

ii) Si $a_k = e \Rightarrow a_i = e \quad \forall i \geq k$ (el neutro e no se intercala con otros elem.)

Palabra vacía: $(e,e,e,\dots)$ es reducida

Toda palabra reducida (no vacía) es de la forma:

$$\underbrace{x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_n^{k_n}}_{\underbrace{x_1 \cdots x_1}_{k_1\text{-veces}} \underbrace{x_2 \cdots x_2}_{k_2\text{-veces}} \cdots \underbrace{x_n \cdots x_n}_{k_n\text{-veces}}} \quad \text{tal que } x_i \in X,\ n \in \mathbb{N},\ k_i \in \{-1,1\}$$