Análisis Numérico I / Análisis Numérico — **Práctico N°4 - 2023**
Aproximación de funciones por cuadrados mínimos

1. Obtener el polinomio que mejor aproxima en el sentido de cuadrados mínimos del grado indicado en cada caso:

   a) polinomio de grado 1, para la siguiente tabla de datos

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	-0.1	1.1	1.9	3.2	3.8	5.0	6.0	7.3	8.1	8.9

   b) polinomio de grado 2, para la siguiente tabla de datos

x	-1	0	1	3	6
y	6.1	2.8	2.2	6	26.9

2. Probar que si se tienen $n+1$ puntos distintos, la mejor aproximación polinomial (en el sentido de cuadrados mínimos) de grado n coincide con el polinomio interpolante.

3. Hallar el polinomio de grado cero que mejor aproxime en el sentido de cuadrados mínimos a una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ en n puntos $x_1, \ldots, x_n$ del intervalo $[a, b]$.

4. Aproximar los datos de la siguiente tabla con un modelo de la forma $f(x) \sim ae^{bx}$ en el sentido de cuadrados mínimos.

x	-1	0	1	2
y	8.1	3	1.1	0.5

5. Aproximar los datos de la siguiente tabla con un modelo de la forma $f(x) \sim -e^{ax^2+bx+c}$ en el sentido de cuadrados mínimos.

x	-1	0	1	2
y	-1.1	-0.4	-0.9	-0.5

6. Suponer que se realizó un experimento para encontrar la constante de elasticidad k de la Ley de Hooke: $F = k(l - 5.3)$. La función F es la fuerza requerida para estirar el resorte l unidades.

   a) Se midieron las fuerzas $F(l)$ para distintas longitudes l y se obtuvo la siguiente tabla:

l	7	9.4	12.3
F	2	4	5

   Encontrar la mejor aproximación en el sentido de cuadrados mínimos para k

   b) Realizando más mediciones se obtuvieron nuevos datos

l	8.3	11.3	14.4	15.9
F	3	5	8	10

   Calcular la nueva apoximación para k sólo con el segundo grupo de valores.

   c) ¿Cuál valor de k aproxima mejor utilizando los datos de todas las mediciones?

7. Obtener la aproximación lineal en el sentido de cuadrados mínimos de la función f en el intervalo indicado si:

   a) $f(x) = x^2 + 3x + 2$ en el intervalo $[0, 1]$.
   b) $f(x) = x^2 + 3x + 2$ en el intervalo $[-1, 1]$.
   c) $f(x) = e^x$ en el intervalo $[0, 2]$.

8. Aproximar los datos de la siguiente tabla en el sentido de cuadrados mínimos con un modelo de la forma $f(x) \sim a\cos(x) + b\,\mathrm{sen}(x)$.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	1.8	3.5	2.1	-1.0	-3.3	-2.7	0.9	3.3	2.8	-0.1	-3.0

9. Considerar el conjunto de polinomios ortogonales de Legendre $\{P_0, P_1, P_2\}$ en el intervalo $[-1, 1]$, dados por $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$ y $P_2(x) = x^2 - 1/3$. Verificar que $\{P_0, P_1, P_2\}$ es un conjunto ortogonal de funciones.

10. Determinar las aproximaciones lineal y cuadrática de la función $f(x) = e^x$ en el sentido de cuadrados mínimos usando los polinomios ortogonales de Legendre, en el intervalo $[-1, 1]$.

11. Hallar una base ortogonal $\{\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2\}$ del conjunto de polinomios de grado menor o igual a 2 en el intervalo $[-1, 1]$ respecto a la función de peso $\omega(x) = x^2$.

    Ayuda: elegirlos de modo que $gr(\Phi_k) = k$, $k = 0, 1, 2$.