

Primer Parcial - Álgebra I  
08 de octubre de 2020

Justifique todas sus respuestas - La actividad es completamente individual

1) Sea  $\mathcal{R} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  una relación definida por

$a\mathcal{R}b$  si y sólo si  $a^2 - b^2$  es múltiplo de 4.

- a) (2.5 puntos) Mostrar que  $\mathcal{R}$  es una relación de equivalencia.  
b) (2.5 puntos) Mostrar que  $a\mathcal{R}b$  si y sólo si  $a$  y  $b$  son ambos pares o ambos impares.

2) a) (2.5 puntos) Sea la sucesión  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  definida recursivamente como

$$a_1 = -1 \quad a_2 = 2 \quad a_n = -2a_{n-1} - a_{n-2}, \quad n > 2.$$

Mostrar, usando el principio de inducción fuerte, que  $a_n = (-1)^n n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

b) (2.5 puntos) Analizar la verdad o falsedad de la siguiente afirmación, justificando o dando contraejemplo:

$$\sum_{j=0}^{n-1} (j^2 j!) \leq (n-1) n!, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$