11/9/24

La clase anterior vimos que $S_n \ni \sigma \overset{!}{=} (\cdot\cdot)(\cdot\cdot)\cdots(\cdot\cdot)$ (producto de ciclos disjuntos)

Ejemplo: en S_4, toda permutación es de alguno de los siguientes tipos:

1) Id 2) (ab) 3) (abc) 4) $(abcd)$ 5) $(ab)(cd)$

orden 2 = mcm entre los órdenes de cl permutación

Estos se llaman estructuras cíclicas en S_n

Órdenes de los elementos de S_4: 1, 2, 3, 4 $\Rightarrow |S_4 = 24|$

- Un subgrupo de S_4 de orden 6 sería S_3, considerando $S_3 \xhookrightarrow{2} S_4$ (las permut. de S_3 fijando un elemento de S_4)

$$2(\sigma)(j) = \begin{cases} \theta^{-1}\sigma\theta, & j \neq k \\ k, & j = k \end{cases} \qquad \theta: I_n - \{k\} \longrightarrow I_{n-1} \text{ biyección}, \quad 1 \leq k \leq n$$

Así al menos hay 4 subgrupos de orden 6 (uno por cada elemento del conjunto)

- Habrá un subgrupo sólo de orden 12, para esto nos servirá la siguiente

Proposición: las transposiciones generan S_n. En particular S_n está generado por elementos de orden 2

Demostración:

Como toda permutación es producto de ciclos (disjuntos), basta probar que todo ciclo es producto de transposiciones

Observemos que: $(x_1 \quad x_r) = (x_1 x_r)(x_1 x_{r-1})\cdots(x_1 x_{j+1})(x_1 x_j)\cdots(x_1 x_2)$

Si tomo x_j, la trasposición $(x_1 x_j)$ lo manda a x_1
la transposición siguiente manda x_1 a x_{j+1} y allí queda
} manda x_j en x_{j+1}

Con esto hemos probado el siguiente

Lema: todo r-ciclo puede escribirse como producto de r-1 transposiciones

Así, se respeta la paridad ie si tenemos un r-ciclo con r par, siempre podremos escribirlo como producto de una cantidad impar de transposiciones

GRUPO ALTERNADO

Para cada $\sigma \in S_n$, sea: $A_\sigma = \{(i,j) \in I_n \times I_n \mid i < j \text{ y } \sigma(i) > \sigma(j)\}$

Un elemento de A_σ se dice una inversión de σ

Ejemplo: $\sigma = (12) \in S_3$

Si tomo $(1,3)$ tengo $1<3$ pero $\sigma(1) = 2 > \sigma(3) = 3$ y esto es abs $\therefore (1,3) \notin A_\sigma$

$\Rightarrow |A_\sigma| = 1$ ie $\exists!$ inversión $A_\sigma = \{(1,2)\}$

Notar que vale lo mismo si miramos $(i\, j) \in S_n$, $n \in \mathbb{N}$

Sean $m_\sigma = |A_\sigma|$ (cardinal)

$\sigma^* : I_n \times I_n \longrightarrow I_n \times I_n$ la biyección dada por $\sigma^*(i,j) = (\sigma(i), \sigma(j))$

$c : I_n \times I_n \longrightarrow I_n \times I_n$ dada por $c(i,j) = (j,i)$

Proposición: sean $\sigma, \tau \in S_n$, entonces $m_{\sigma\tau} \equiv m_\sigma + m_\tau \pmod 2$

Demostración:

- Veamos que $m_\sigma = m_{\sigma^{-1}}$

$(i,j) \in A_{\sigma^{-1}} \iff i<j$ y $\sigma^{-1}(i) > \sigma^{-1}(j)$

$\iff \underbrace{(\sigma^{-1}(j), \sigma^{-1}(i))}_{(\sigma^{-1})^* c\,(i,j)} \in A_\sigma$ pues $\sigma^{-1}(j) < \sigma^{-1}(i)$ y además $\sigma(\sigma^{-1}(j)) = j > i = \sigma(\sigma^{-1}(i))$

$\therefore A_\sigma = \underbrace{(\sigma^{-1})^* c}_{\text{biyectiva}}\,(A_{\sigma^{-1}}) \rightarrow$ notar que $(\sigma^{-1})^* = (\sigma^*)^{-1}$

$\therefore |A_{\sigma^{-1}}| = m_{\sigma^{-1}} = |A_\sigma| = m_\sigma$

- Ahora veamos la relación entre $A_{\sigma\tau}$ y los A_σ, A_τ

$(i,j) \in A_{\sigma\tau} \iff i<j$ y $\sigma\tau(i) > \sigma\tau(j)$

Esto ocurre $\iff$ ocurre alguna de las siguientes:

a) $i<j$ $\tau(i) < \tau(j)$ y $\sigma\tau(i) > \sigma\tau(j)$

b) $i<j$ $\tau(i) > \tau(j)$ y $\sigma\tau(i) > \sigma\tau(j)$

Entonces tenemos:

a) $\iff \tau^*(i,j) \in A_\sigma$ y $(i,j) \notin A_\tau$ (pues $i<j$ pero $\tau(i)<\tau(j)$)

b) $\iff \tau^* c(i,j) \notin A_\sigma$ y $(i,j) \in A_\tau$ aplico c pues $j<i$ y para poder aplicar τ^* necesito que $i<j$, por eso aplico c

Si y sólo si

a) $\tau^*(i,j) \in A_\sigma$ y $\underbrace{\tau^*(i,j)}_{(\tau(i),\tau(j))} \notin A_{\tau^{-1}}$ pues $\tau(i)>\tau(j)$ pero $i \not> j$ (chequear)

b) $\tau^* c(i,j) \in A_{\tau^{-1}}$ y $(\tau^* c)(i,j) \notin A_\sigma$

$$A_{\sigma\tau} = (\tau^*)^{-1}(A_\sigma - A_{\tau^{-1}}) \,\dot{\cup}\, (\tau^* c)^{-1}(A_{\tau^{-1}} - A_\sigma)$$

$$\begin{aligned}
|A_{\sigma\tau}| &= |A_\sigma - A_{\tau^{-1}}| + |A_{\tau^{-1}} - A_\sigma| \\
&= |A_\sigma| - |A_\sigma \cap A_{\tau^{-1}}| + |A_{\tau^{-1}}| - |A_{\tau^{-1}} \cap A_\sigma| \\
&= |A_\sigma| + |A_{\tau^{-1}}| - 2\,|A_\sigma \cap A_{\tau^{-1}}| \\
&= m_\sigma + m_{\tau^{-1}} - 2\,|A_\sigma \cap A_{\tau^{-1}}| \\
&= m_\sigma + m_\tau - 2\,|A_\sigma \cap A_{\tau^{-1}}| \\
&\equiv m_\sigma + m_\tau \pmod 2
\end{aligned}$$

$\square$

Podemos definir un homomorfismo de grupos:

$$Sg : S_n \longrightarrow G_2 = \{\pm 1\} \qquad Sg(\sigma) = (-1)^{m_\sigma}$$

Sg se llama el homomorfismo signo

Ejemplo: $Sg(12) = (-1)^{m_\sigma} = (-1)^1 = -1$

hay una sola inversión

En particular, $Sg : S_n \longrightarrow G_2$ es epimorfismo

Definición: el subgrupo alternado $A_n \leq S_n$ se define como el núcleo de Sg

$A_n = \ker(Sg)$ $\rightarrow$ Observación: $A_n \trianglelefteq S_n$

$\sigma \in S_n$ se dice par / impar si $\sigma \in A_n$ / $\sigma \notin A_n$

Así $S_n = A_n \cup A_n(12)$ $\rightarrow$ coclase impar (chequear)

Por el 1° Teorema de isomorfismos: $S_n / A_n \cong G_2 \cong \mathbb{Z}_2$

En particular, $|A_n| = \frac{n!}{2}$

Definición: G se dice simple si sus únicos subgrupos normales son $\{e\}$ y G

Se puede probar que A_n es simple $\forall n \geq 0$

ser conjugado es equivalente a tener la misma estructura cíclica

Lema: $(i\,j) \in S_n$. Entonces existe $\tau \in S_n$ tal que $(i\,j) = \tau^{-1}(1\,2)\tau$

Demostración:

Definimos $\tau : I_n \to I_n$ de la forma: $\begin{cases} \tau(i) = 1 \\ \tau(j) = 2 \\ \tau(x) = \theta(x) & \forall x \notin \{i,j\} \end{cases}$

donde $\theta : I_n - \{i,j\} \to I_n - \{1,2\}$

Notar que si $x \notin \{i,j\}$ entonces $\left.\begin{array}{l} (i\,j)(x) = x \\ \tau^{-1}(1\,2)\tau(x) = \tau^{-1}(1\,2)(\theta(x)) = \tau^{-1}(\theta(x)) = x \end{array}\right\} \checkmark$

Por otra parte si tomamos i entonces $\left.\begin{array}{l} (i\,j)(i) = j \\ \tau^{-1}(1\,2)\tau(i) = \tau^{-1}(1\,2)(1) = \tau^{-1}(2) = j \end{array}\right\} \checkmark$

(completar)

□

Proposición: una permutación $\sigma \in A_n \Leftrightarrow \sigma$ se escribe como producto de un número par de transposiciones

Demostración:

$\Leftarrow)$ $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_m$ $\quad \tau_i$ transposiciones

$$Sg(\sigma) = \prod_{j=1}^{m} \underbrace{Sg(\tau_j)}_{-1 \text{ por lema anterior}} = (-1)^m \qquad \therefore\ m \text{ par} \Leftrightarrow \sigma \in A_n$$

□

Propiedades de A_n: (prueba de ejercicio)

1) $\sigma^2 \in A_n$, $\forall \sigma \in S_n$

2) Sea σ un $\underbrace{r\text{-ciclo}}_{\text{producto de } r-1 \text{ transposiciones}}$, $\sigma \in A_n \Leftrightarrow r$ es impar

3) $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_k$, σ_i ciclos disjuntos

$\sigma \in A_n \Leftrightarrow$ la cantidad de ciclos de longitud par es par

los ciclos de longitud par aportan un -1 y los de long. impar aportan un 1.

Ejemplo: estructuras cíclicas en $\mathbb{A}_5$

S_5	$\mathbb{A}_5$
Id	Id
$(\cdot\,\cdot)$	$(\cdot\,\cdot\,\cdot)$
$(\cdot\,\cdot\,\cdot)$	$(\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot)$
$(\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot)$	$(\cdot\,\cdot)(\cdot\,\cdot)$
$(\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot)$	
$(\cdot\,\cdot)(\cdot\,\cdot)$	
$(\cdot\,\cdot)(\cdot\,\cdot\,\cdot)$	

Lema: los triciclos generan $\mathbb{A}_n$

Demostración:

pues toda permutac. es prod. de transposic.

Basta ver que el producto de dos transposiciones es producto de triciclos

Tomamos (ij), $(k\ell)$ transposiciones, podemos suponer que $(ij) \neq (k\ell)$

Si $\{i,j\} \cap \{k,\ell\} \neq \emptyset$, sin pérdida de generalidad digamos que $j=k$

$$(ij)(k\ell) = (ij)(j\ell) = (ij\ell)$$

Si $\{i,j\} \cap \{k,\ell\} = \emptyset \Rightarrow (ij)(k\ell) = (ik\ell)(ij\ell)$

$\square$