Espacios vect. topológicos.

<u>Def.</u> X ev, (X,τ) esp. topológico tq: (a) $\forall x\in X$, $\{x\}$ es cerrado (τ es T_1)

(b) $(x,y)\mapsto x+y$ y $(\alpha,x)\mapsto \alpha x$ son cont. resp. a τ.

O sea, $\forall (x_1,x_2)\in X\times X$ y V entorno (abierto q' contiene al pto) de x_1+x_2, $\exists$ ent. V_1, V_2 de x_1 y x_2 tq $V_1+V_2\subset V$; $\forall x\in X$, $\forall \alpha\in\mathbb{F}$, V ent. de αx, $\exists\, r>0$ y W ent. de x tq. $|\beta-\alpha|<r \Rightarrow \beta W\subset V$. En este caso, X se dice <u>esp. vect. top.</u>

<u>Obs.</u> . (a) + (b) $\Rightarrow$ τ es Hausdorff (ptos. $\neq$ tienen entornos disj.), R. Teo. 1.12. (lo probamos en la página E.4)

. (a) + (b) $\Rightarrow$ $T_a, M_\lambda : X\to X$ dados por $T_a(x) \doteq a+x$, $a\in X$ y $M_\lambda(x)\doteq \lambda x$, $0\neq\lambda\in\mathbb{F}$ son <u>homeos</u> (biy. cont. con inv. cont.); lo cual $\Rightarrow$ τ es <u>invariante</u>: $E\subset X$ ab $\Leftrightarrow$ $a+E$ ab, $a\in X$. Luego, τ queda determinada por cq. base local (una flia. γ de ent. de $p\in X$ es <u>base local en p</u> si todo ent. de p contiene un elem de γ). Por lo tanto, de ahora en más, <u>base local</u> se referirá a base local en 0. O sea, una base local de un evt. X es una flia $\mathcal{B}$ de ent. de 0 tq. todo ent. de 0 contiene un miembro de $\mathcal{B}$ (y los ab. de X son las uniones de trasl. de miembros de $\mathcal{B}$) (en un e.t., $\mathcal{B}\subseteq\tau$ es base $\Leftrightarrow$ $\mathcal{B}(x)\doteq\{B\in\mathcal{B} : x\in B\}$ es base local en x)

Lema. (1) Para $a\in X$, $\lambda\in\mathbb{C}-\{0\}$, $T_a: X \to X$, $x \mapsto x+a$, $M_\lambda : X\to X$, $x\mapsto \lambda x$ son homeo. (X evt) E2

(2) Si $x_0\in X$, V ent. de 0, ent. x_0+V es ent. de x_0.

(3) V ent. de 0, $F\subset X$, ent. $F+V$ es ab. q' contiene a F.

(4) Si U, V son entornos de 0, ent:

(a) $U\cap V$, $U\cup V$, $-U$ son entornos de 0.

(b) $U\cap(-U)$ es entorno simétrico de 0 (A simétrico si $A=-A$)

(c) Si U es entorno simétrico de 0, también lo es $U+U$.

(5) Si W es entorno de 0, ent. $\exists V$ entorno simétrico de 0 tq. $V+V+V+V\subset W$

Dem/ (1) T_a y M_λ son cont. por hip., y por tanto también lo son sus inv T_{-a} y $M_{\frac{1}{\lambda}}$

(2) Como T_{x_0} es homeo, $T_{x_0}(V)=x_0+V$ es ab. q' contiene a x_0 (pues $0\in V$)

(3) Es $F=\bigcup_{x\in F}\{x\} \underset{0\in V}{\subset} \bigcup_{x\in F}\underbrace{(x+V)}_{\text{ab. por (2)}} = F+V$ ab.

(4) (a) Es claro q' $U\cap V$, $U\cup V$ son entornos de 0, $-U$ tb. pues es ab pues $-U=T_{-1}(U)$.

(b) Por (a) $U\cap(-U)$ es entorno de 0, y es claro q' es simétrico.

(c) Por (3), $U+U$ es ab y $0=0+0\in U+U$, y como U es simétrico, es fácil ver q' $U+U$ tb. lo es.

(5) Como $0\in W$ ab y $0=0+0$, por la cont. de la suma $\exists U_1, U_2$ entornos de 0 tq. $U_1+U_2\subset W$. Por (4a), $U_0 \doteq U_1\cap U_2$ es entorno de 0, y por (4b), $V\doteq U_0\cap(-U_0)$

es entorno simétrico de 0. Ad., es claro q' $U+U \subset U_1+U_2 \subset W$. Aplic. esto al entorno U, $\exists V$ entorno de 0 simétrico tq. $V+V\subset U$, y ent. $V+V+V+V\subset U$. ■

Teo. (Rudin, Teo. 1.10) X evt, $K\subset X$ comp., $C\subset X$ cerr., tq $K\cap C=\emptyset$. Ent. $\exists V$ entorno de 0 tq. $(K+V)\cap(C+V)=\emptyset$.

Dem/ Si $K=\emptyset$, por def. $K+V=\emptyset$ y listo. Si $K\neq\emptyset$, sea $x\in K$. Como $K\cap C=\emptyset$ y C cerr., $\exists$ ab. $W_x\subset X\setminus C$ tq $x\in W_x$. Por lema ant., W_x-x ab. y $0\in W_x-x$. O sea W_x-x es entorno de 0. Lema ant. $\Rightarrow \exists V_x$ entorno simétrico de 0 tq. $V_x+V_x+V_x+V_x\subset W_x-x$. En part., $0\in V_x$ y ent. $V_x+V_x+V_x = 0+V_x+V_x+V_x\subset W_x-x$. O sea, $x+V_x+V_x+V_x\subset W_x\subset X\setminus C$, luego, $(x+V_x+V_x+V_x)\cap C=\emptyset$. Afirmo: $(x+V_x+V_x)\cap(C+V_x)\overset{(*)}{=}\emptyset$. Si no, sea z en la intersec. Como $z\in C+V_x$, $\exists c\in C$ y $v\in V_x$ tq. $z=c+v$. O sea, $c=\underbrace{z}_{\in x+V_x+V_x}+\underbrace{(-v)}_{\in V_x \text{ pues } V_x \text{ simétr.}}\in x+V_x+V_x+V_x$. Pero ad. $c\in C$, abs.

Ahora, $K\subset\bigcup_{x\in K}\overbrace{(x+V_x)}^{ab}$ y ent.

K comp $\Rightarrow K\subset\bigcup_{i=1}^{n}(x_i+V_{x_i})$. Sea $V=\bigcap_{i=1}^{n}V_{x_i}$. Ent. $K+V\subset\bigcup_{i=1}^{n}(x_i+V_{x_i})+V=$

$\{x+v : x\in\bigcup_{i=1}^{n}x_i+V_{x_i},\ v\in V\}=\bigcup_{i=1}^{n}\{x+v : x\in x_i+V_{x_i},\ v\in V\}\underset{(\triangle)}{\overset{v\in V_{x_i}}{\subset}}\bigcup_{i=1}^{n}(x_i+V_{x_i}+V_{x_i})$; y además

$C+V\subset C+V_{x_i}$ $\forall i$. Como $(*)\Rightarrow(x_i+V_{x_i}+V_{x_i})\cap(C+V_{x_i})=\emptyset$ $\forall i$, es $(x_i+V_{x_i}+V_{x_i})\cap(C+V)=\emptyset$ $\forall i$, o sea $\left[\bigcup_{i=1}^{n}(x_i+V_{x_i}+V_{x_i})\right]\cap(C+V)=\emptyset$; luego listo por $(\triangle)$. ■

<u>Coro.</u> (Rudin, Teo. 1.12) Todo evt. es de Hausdorff.

Dem/ Aplic. lo anterior a cq. $\{x\}$; $\{y\}$ (si $x \neq y$) en lugar de K y C. ∎

<u>Obs.</u> Como $K+V$ y $C+V$ son ab. disj., ent. tb. $\overline{K+V} \cap (C+V) = \phi$. En efecto, si $\exists x \in C+V$, entonces $\exists U$ entorno de x con $U \subset C+V$. Pero $x \in \overline{K+V} \Rightarrow$ todo entorno de x intersecta a $K+V$, en part. $\exists y \in U \cap (K+V)$. Abs.

<u>Coro.</u> (Rudin, Teo. 1.11) $\mathcal{B}$ base local de X evt. Ent todo miembro de $\mathcal{B}$ contiene la clausura de algún otro miembro de $\mathcal{B}$, i.e. $\forall U \in \mathcal{B}$ $\exists W \in \mathcal{B}$ tq. $\overline{W} \subset U$.

Dem/ Tomamos $K = \{0\}$ y $C = U^c$. Ent. teo $\Rightarrow \exists V$ entorno de 0 tq. $V \cap (U^c + V) = \phi$. O sea, $V \subset \underbrace{(U^c+V)^c}_{\text{cerr}} \subset U$ $\forall V$ ent. de 0. Por def. de <u>base local</u>, $\exists W \in \mathcal{B}$ tq. $W \subset V$. Luego, $\overline{W} \subset \overline{V} \subset \overline{(U^c+V)^c} = (U^c+V)^c \subset U$. ∎

<u>Def.</u> $B \subset X$ evt. es <u>balanceado</u> si $\alpha B \subset B$ $\forall \alpha \in \mathbb{F}$ con $|\alpha| \leq 1$.

Notar q' en $\mathbb{C} = X = \mathbb{F}$, los únicos conj. balanceados son los discos centrados en 0 y $\mathbb{C}$. En $X = \mathbb{R}^2$ y $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, tb. son balanc. los segmentos cuyo pto. medio es el $(0,0)$.

<u>Lema.</u> Todo entorno del 0 contiene un entorno balanceado del 0.

Dem/ Sea U entorno del 0. Como la multipl. por escalares es cont y $0.0 = 0$, $\exists \delta > 0$ y V entorno del 0 tq. $\alpha V \subset U$ si $|\alpha| < \delta$. Si ponemos $W \doteq \bigcup_{|\alpha|<\delta} (\alpha V)$, ent. $W \subset U$, es entorno del 0 y es balanceado (fácil, ej.) ∎

<u>Def</u>. $E \subset X$ evt. es <u>acot</u>. si $\forall V$ entorno de 0, $\exists r>0$ tq. $E \subset tV$ $\forall t>r$.

<u>Obs</u>. En un esp. métrico (X,d), decimos q' E es acot. si $d(x,y) \le M$ $\forall x,y \in E$. Esta def. en gral. <u>no</u> coincide con la anterior. Si X es normado y d es la métrica inducida por la norma, ent. sí coinciden. Pero si reemplazamos d por la métrica q' induce la misma topología, $d_1 \doteq \frac{d}{1+d}$ (ej., para probar la desig. triangular sirve la misma cuenta q' está al comienzo del ejemplo ① más adelante), entonces no coinciden. De hecho, notar q' con d_1 todos los conj. son acot. con la 2da def.

Veamos q' en X normado sí coinciden. Sup $E \subset tU$ $\forall t$ grande, U entorno de 0. En part., dado n fijo, $E \subset tB_{\frac{1}{n}} = B_{\frac{t}{n}}$ $\quad (B_r \doteq \{x \in X : \|x\| < r\})$. Luego, $\forall x,y \in E$,
$\|x-y\| \le \|x\| + \|y\| \le 2\frac{t}{n}$. Recíprocamente, sup $d(x,y) \le M$ $\forall x,y \in E$, y sea $z_0 \in E$ fijo. Ent, $\forall x \in E$, $\|x\| \le \|x-z_0\| + \|z_0\| \le M + \|z_0\| \doteq \tilde{M}$. O sea, $E \subset B_r$ si $r > \tilde{M}$. Sea ahora U entorno de 0. Como $\{B_{\frac{1}{n}} : n \in \mathbb{N}\}$ es base local, $\exists n_0$ tq. $B_{\frac{1}{n_0}} \subset U$. Luego, $\forall t > \tilde{M}.n_0$ es $E \subset B_{\frac{t}{n_0}} = tB_{\frac{1}{n_0}} \subset tU$, listo.

<u>Teo</u>. (Rudin, Teo. 1.15) Sean X evt, V entorno de 0.

(a) $\forall$ sucesión $0 < r_n \to \infty$, $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} r_n V$.

(b) K compacto $\Rightarrow$ K acotado.

(c) Si V es <u>acotado</u>, $\forall$ sucesión $0 < \delta_n \to 0$, $\{\delta_n V : n \in \mathbb{N}\}$ es base local numerable.

Dem/ (a) Sea $x \in X$. Como la multiplic. por escalares $\mathbb{F} \to X$, $\alpha \mapsto \alpha x$ es cont., la suc $\{\frac{x}{r_n}\}$ conv. a 0. Luego, como V entorno de 0, $\frac{x}{r_n} \in V$ $\forall n \geq n_0$, o sea $x \in r_n V$ $\forall n \geq n_0$.

(b) Sea K compacto. Queremos ver $K \subset tV$ $\forall t$ grande. Por lema ant., $\exists W$ entorno de 0 balanceado tq. $W \subset V$, y por (a), $K \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}(nW)$. Ahora, K compacto $\Rightarrow K \subset \bigcup_{j=1}^{j_0}(n_j W) = n_{j_0} \underbrace{\bigcup_{j=1}^{j_0}\left(\frac{n_j}{n_{j_0}} W\right)}_{\subset W \text{ pues } W \text{ balanc.}} \subset n_{j_0} W$. Luego, $\forall t > n_{j_0}$, $K \subset n_{j_0} W = t\left(\frac{n_{j_0}}{t} W\right) \subset tW \subset tV$.

(c) Sea U entorno de 0. Como V acotado, $V \subset tU$ $\forall t$ grande. O sea, $t^{-1} V \subset U$ $\forall t$ grande. Luego, $\delta_n V \subset U$ si n grande.

Def. Sea X evt. Decimos q'

(a) X es <u>localmente convexo</u> si $\exists$ base local cuyos elem. son convexos

(b) X es <u>localmente acotado</u> si $\exists$ entorno del 0 acotado.

(c) X es loc. compacto si $\exists$ ent. del 0 con clausura comp.
(d) X es metrizable si τ es inducida por alg. métrica
(e) X es esp. de Frechet si X es loc. compacto y τ es induc. por una métrica d q' es invariante $(d(x,y) = d(x+z, y+z)\ \forall x,y,z \in X)$ y completa.
(f) X es normable si τ es induc. por la métrica corresp. a alg. norma.
(g) X tiene la prop. de Heine-Borel si cerr. y acot. $\Rightarrow$ comp.

Teo. (a) X loc. acot $\Rightarrow$ X tiene base local numerable (R. Teo. 1.15) (probado en la página anterior)
(b) X metrizable $\Leftrightarrow$ X tiene base local numerable (R. Teo. 1.24)
(c) X normable $\Leftrightarrow$ X es loc. conv. y loc. acot (R. Teo. 1.39) ($\Leftrightarrow$ 0 tiene ent. conv. y acot.)
(d) X loc acot y tiene la prop. H-B $\Rightarrow$ $\dim X < \infty$ $\Leftrightarrow$ X es loc. comp. (R. Teos. 1.21-22-23)

Obs. (i) Si (X,τ) es e.t. metriz., ent. $\{B_{1/n}(x) : n \in \mathbb{N}\}$ es base local en x, o sea, $\Rightarrow$ en (b) es fácil. En $\Leftarrow$ se prueba q' la métrica es inv., y q' si X es loc. conv., las bolas ab. son conv.
(ii) Si X es normable y $\|\ \|$ es compat. con τ, ent. $\{x \in X : \|x\| < 1\}$ es ent. del 0 conv. y acot., o sea, $\Rightarrow$ en (c) es fácil. Para $\Leftarrow$, se def. $\|x\| \doteq \mu_U(x)$, μ_U fc. de Minkowski de alg. U ent. adec. del 0. $(\mu_U(x) \doteq \inf\{t > 0 : t^{-1}x \in U\}.)$ $(x \in X)$.

Def. X ev. $p : X \to \mathbb{R}$ es seminorma si $p(x+y) \leq p(x) + p(y)\ \forall x,y \in X$, $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)\ \forall x \in X, \alpha \in \mathbb{F}$.
Una flia. $\mathcal{P}$ de seminormas se dice q' separa si p/c $0 \neq x \in X$ $\exists p \in \mathcal{P}$ tq. $p(x) \neq 0$. $\rightarrow$
A partir de una flia de seminormas en un ev. se puede generar un evt loc. conv:

<u>Obs.</u> Notar q' $p(0)=0$ (tomar $\alpha=0$), y $0=p(x-x)\leq p(x)+p(-x)=2p(x)$ $\forall x$, o sea $p(x)\geq 0$ $\forall x\in X$. Luego, p es norma $\Leftrightarrow$ [$p(x)=0 \Rightarrow x=0$].

<u>Teo</u> (R. Teo. 1.37) Sup. $\mathcal{P} = \{p_i\}_{i\in I}$ es una flia. de seminormas q' separa en un X ev. Para $n \in \mathbb{N}$, $i \in I$, sean $V(p_i, n) \doteq \{x \in X : p_i(x) < 1/n\}$, y $\mathcal{B}$ la flia. de todas las intersec. finitas de los conj. $V(p_i, n)$. Ent. $\mathcal{B}$ es una base local convexa para una top. τ en X, q' hace de X un evt loc. convexo, y tq:

(a) $\forall p_i \in \mathcal{P}$, p_i es cont. (b) $E \subset X$ es acot $\Leftrightarrow$ todo $p_i \in \mathcal{P}$ es acot. en E.

<u>Obs.</u> En la prueba se def q' $A \subset X$ es ab. $\Leftrightarrow$ A es unión (pos. vacía) de translac. de elem. de $\mathcal{B}$. Esto def. una top. τ invariante en X, y $\mathcal{B}$ es base local de τ.

Si $\mathcal{P} = \{p_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ es numerable, sabemos por teo. anterior q' X es metrizable (pues queda $\mathcal{B}$ numerable). En este caso se puede def. una métrica invariante compat. con τ como $d(x,y) \doteq \max_i \dfrac{c_i\, p_i(x-y)}{1+p_i(x-y)}$, donde $\{c_i\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ es tq. $c_i \to 0$ si $i \to \infty$.

<u>Ejemplos y aplic.</u>

① Sea $X \doteq (C[0,1], \mathbb{F})$. Definimos $d(f,g) \doteq \int_0^1 \dfrac{|f-g|}{1+|f-g|}$. Es fácil ver q' d es métrica:

Es claro q' $d(f,g) \overset{=d(g,f)}{\geq} 0$, $= 0 \Leftrightarrow f = g$. Para la des. triang., basta ver $\underbrace{\dfrac{|f-g|}{1+|f-g|}}_{\doteq x} \leq \underbrace{\dfrac{|f-h|}{1+|f-h|}}_{\doteq y} + \underbrace{\dfrac{|h-g|}{1+|h-g|}}_{\doteq z}$

Esto es lo mismo q' $\cancel{1} - \dfrac{1}{1+x} \leq \cancel{1} - \dfrac{1}{1+y} + 1 - \dfrac{1}{1+z} \Leftrightarrow \dfrac{2+y+z}{(1+y)(1+z)} \leq 1 + \dfrac{1}{1+x}$

Lo ant. es cierto pues, como $x \leq y+z$,

$1 + \dfrac{1}{1+x} \geq \dfrac{1}{1+y+z} + 1 = \dfrac{2+y+z}{1+y+z} \geq \dfrac{2+y+z}{(1+y)(1+z)}$. Luego, (X, τ) es esp. métrico.

Definimos ahora en X la flia. de seminormas $\{p_x\}_{x\in[0,1]}$ por $p_x(f) \doteq |f(x)|$. Es claro q' son seminormas, y q' separan pues $p_x(f)=0 \ \forall x \Rightarrow f\equiv 0$. Luego, $\exists$ top. τ_p por teo. ant. tq. (X,τ) es evt, y las intersec. finitas de $V(p_x,n)=\{f\in X : p_x(f)<\frac{1}{n}\}$ son base local de τ_p. La top. τ_p se llama <u>top. de la converg. puntual</u>. Notar q' si $f_n \xrightarrow{\tau_p} f$ ent. $\lim_n |f_n-f|(x) = \lim_n p_x(f_n-f) = p_n(0)=0$, pues p_x es cont (por teo.) en esta top.

Vamos a ver q' $Id:(X,\tau_p)\to(X,\tau)$ <u>es sec. cont</u>. pero <u>no</u> es cont, y por lo tanto (X,τ_p) <u>no</u> es metriz. (pues si $f: X\to Y$, X,Y Hausdorff, X tiene base loc. numerable (en part., si X es metr.), ent. f cont $\Leftrightarrow$ f sec. cont)(recordar $\{x_n\}\subset X$ Haus. es tq. $x_n\to x$ si todo ent. de x cont. todos los x_n salvo un nro. finito de ellos)

. $Id:(X,\tau_p)\to(X,\tau)$ es sec. cont: Sup. $f_n \xrightarrow{\tau_p} f$. Ent $f_n(x)\to f(x)\ \forall x\in[0,1]$. Luego, por TCD

$$\int_0^1 \underbrace{\frac{|f_n(x)-f(x)|}{1+|f_n(x)-f(x)|}}_{\to 0 \text{ y } |\,|\le 1} \to 0 \ , \quad \text{o sea} , \ d(f_n,f)\to 0 .$$

$\longrightarrow$

. $Id:(X,\tau_p)\to(X,\tau)$ no es cont: Sup. q' sí es cont. en 0. Como $\bigcap$ finita de $V(p_x,n)$ es base local y como $V(p_x,n)\cap V(p_y,m) \supseteq \{f\in X : |f(x)|<\frac{1}{k},\ |f(y)|<\frac{1}{k},\ k\doteq \max(n,m)\}$, la cont. en $0 \Rightarrow \forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0,\ \{x_1,\dots,x_n\}_{n<\infty}\subset X$ tq. $\{f\in X : |f(x_j)|<\delta,\ \forall 1\le j\le n\}\subseteq B_d(0,\varepsilon)$.

Ahora, $\forall k\in\mathbb{N}$, sea $f_k(x)\doteq \prod_{j=1}^{n} k(x-x_j)\in B_d(0,\varepsilon)$. O sea $\int_0^1 \underbrace{\frac{|f_k|}{1+|f_k|}}_{\ge 0 \text{ y } \le 1} \le \varepsilon \ \forall k\in\mathbb{N}$. Pero

$\frac{|f_k|}{1+|f_k|} \xrightarrow{k\to\infty} 1,\ \forall x\notin\{x_1,\dots,x_n\}$. Luego, TCD $\Rightarrow 1\le\varepsilon$, abs. ∎

(esta τ no es T_1)

Es fácil dar ej. de (X, τ) et. no metr.: sup $\tau = \{\phi, X\}$ y X tiene al menos 2 elem x, y. Ent. τ no metriz. pues si no: $d(x,y) = \varepsilon > 0$. Ent $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$ es ab., pero $\underset{x \in B}{\phi \neq} B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x) \underset{y \notin B}{\neq X}$

Del otro lado vemos un evt T_2 q' no es metriz.

Ejemplos: ② El espacio $C(\Omega)$: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ab. Def $C(\Omega) \doteq \{f : \Omega \to \mathbb{F}$ cont.$\}$.

. $\exists$ suc. $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ tq. $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$, $K_n \subseteq \mathring{K}_{n+1}$, K_n compacto, $\forall n$. En efecto, si $\Omega = \mathbb{R}^n$, tomemos $K_n \doteq \overline{B}_n(0)$. Si no, $\Omega^c \neq \phi$ y está bien def. y es cont. la fc. $d(x) \doteq \text{dist}(x, \Omega^c)$
Def. $K_n \doteq \overline{B}_n(0) \cap d^{-1}([\frac{1}{n}, \infty))$. Ent. K_n compacto (pues es cerr. en un compacto). Notar q' $K_n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq n$ y $d(x, \Omega^c) \geq \frac{1}{n}\} \subseteq \Omega$. Ahora, $x \in \Omega$ y Ω ab $\Rightarrow x \in \overline{B}_{n_0}$ y $d(x, \Omega^c) > 0$, en part. $d(x, \Omega^c) \geq \frac{1}{n_1}$. Luego, $x \in K_{\max(n_0, n_1)}$, y ent. $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Por último, $x \in K_n \Rightarrow$ $\text{dist}(x, 0) \leq n < n+1$ y $\text{dist}(x, \Omega^c) \geq \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$, o sea $x \in \mathring{K}_{n+1}$.

. Definimos la sig. flia. de seminormas: $p_n : C(\Omega) \to \mathbb{R}_0^+$ dada por $p_n(f) \doteq \|f\|_{L^\infty(K_n)}$. Es facil ver q' son seminormas, y separan pues $p_n(f) = 0$ $\forall n \Rightarrow f = 0$ en Ω (pues $\Omega = \bigcup K_n$)
Luego, teo. ant $\Rightarrow \mathcal{P} \doteq \{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ induce una top. tq. $(C(\Omega), \tau)$ es evt. loc. convexo.
Más aún, el teo dice q' las intersec. finitas de conj. $V(p_m, n) = \{f \in C(\Omega) : p_m(f) < \frac{1}{n}\} = \{f \in C(\Omega) : \|f\|_{L^\infty(K_m)} < \frac{1}{n}\}$ forman una base local (conv) de τ. Como $K_n \subseteq \mathring{K}_{n+1}$ $\forall n$,
$V(p_m, n) \cap V(p_j, k) \supseteq V(p_i, i)$, con $i = \max(n, m, j, k)$. Luego, $\{V(p_i, i) : i \in \mathbb{N}\}$ es base local de τ. Como es numerable, por teo. ant. deduc. q' $C(\Omega)$ es <u>metrizable</u>.
De hecho, se puede ver q' τ es compatible con la métrica inv. $d(x, y) \doteq \max_i c_i \cdot \frac{p_i(x-y)}{1 + p_i(x-y)}$, donde $\{c_i\}$ es una suc. de nros. posit. tq. $c_i \to 0$ cuando $i \to \infty$. Más aún, esta métrica es completa y ent. $C(\Omega)$ es Frechet.
Veamos q' $(C(\Omega), \tau)$ <u>no</u> es normable.
Sup. por el abs. q' $\exists \|\,\|$ en $C(\Omega)$ q' genera la top. τ. Sea $\varepsilon > 0$.

E.11

Como los conj. $V(p_n, n)$ forman una base local en 0 en la top. τ, y como $\{f \in C(\Omega) : \|f\| < \varepsilon\}$ es ent. de 0, se tiene q' $\exists\, n_0$ tq. $V(p_{n_0}, n_0) \subseteq B(0,\varepsilon)$ $(*)$.

Sea $z_0 \in \Omega \setminus K_{n_0}$. Ent. $\exists\, f \in C(\Omega)$ tq. $f \equiv 0$ en K_{n_0} y $f(z_0) = 1$ (por ej.,

$$f(z) = \frac{\operatorname{dist}(z, K_{n_0})}{\operatorname{dist}(z_0, K_{n_0})}, \quad z \in \Omega).$$ Ahora, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $p_{n_0}(kf) = \|kf\|_{L^\infty(K_{n_0})} = 0 < \frac{1}{n_0}$.

O sea $kf \in V(p_{n_0}, n_0)$ $\forall\, k \in \mathbb{N}$. Luego, de $(*)$ resulta $\|kf\| < \varepsilon$, o sea $\|f\| < \frac{\varepsilon}{k}$.

Haciendo $k \to \infty$ es $\|f\| = 0$. Pero $f(z_0) = 1$, absurdo. ∎