# Esp normado

**def** $X$ e.v sobre $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Una norma en $X$ es una función $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$ / $\forall x, y \in X$ y $\forall \alpha \in \mathbb{F}$. Se tiene

(1) $\|x\| \geq 0$

(2) $\|x\| = 0 \iff x = 0$

(3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

(4) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

·) Un ev en el que hay una norma se dice ev normado y $x \in X$ / $\|x\| = 1$ se dice unitario

ejs (1) La función $\|\cdot\|: F^n \to \mathbb{R}$ dada por $\|(x_1 - x_n)\| = (\sum |x_j|^2)^{\frac{1}{2}}$ es una norma en $\mathbb{F}^n$ y se dice norma estándar en $\mathbb{F}^n$

(2) Sea $X$ un e.v de dim finita sobre $\mathbb{F}$ con base $\{e_1, \dots e_n\}$. toda $x \in X$ se puede escribir como $x = \sum \lambda_j e_j$ con $\lambda_j \in \mathbb{F}$ únicos. La función $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$ dada por $\|x\| = (\sum |\lambda_j|^2)^{\frac{1}{2}}$ es una norma en $X$. En efecto es fácil ver que valen (1) - (3) (ej). Para ver (4)

Sean $x = \sum \lambda_j e_j \quad y = \sum \mu_j e_j$

$$\|x+y\|^2 = \sum |\lambda_j + \mu_j|^2 = \sum |\lambda_j|^2 + 2\operatorname{Re}(\lambda_j \mu_j) + |\mu_j|^2$$

$$\leq \sum |\lambda_j|^2 + 2|\lambda_j||\mu_j| + |\mu_j|^2$$

Holder $\rightarrow$ $\leq \sum |\lambda_j|^2 + 2\left(\sum |\lambda_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum |\mu_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \sum |\mu_j|^2$

$$\sum^n |x_j||y_j| \leq \left(\sum^n |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum^n |y_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$= \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2$$

$$= \left(\|x\| + \|y\|\right)^2$$

(3) Sea $M$ es un esp métrico compacto

y $C_F(M)$ el ev de

(4) Sea $(X, \Sigma, \mu)$ esp medida y consideramos $L^p(X)$, con $1 \leq p \leq \infty$

(a) si $1 \leq p < \infty$ $\|f\|_p = \left(\int |f|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

es norma

(b) si $p = \infty$ $\|f\|_p = \sup \text{ess} |f|$

es norma $L^\infty(X)$ (ej)

(5) Si tomamos caso particular de (4)

$(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_c)$ $\mu_c$ medida de contar

(i.e la cantidad de elementos de $S$)

como toda fc $f : \mathbb{N} \to \mathbb{F}$ puede verse como una sucesión $\{a_n\}$, $a_n = f(n)$. resulta $f$ integrable resp de $\mu_c$ sii $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$

y $\int_{\mathbb{N}} f \, d\mu_c = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$\ell^p(\mathbb{N}) = \ell^p$ el conj de todas las suc de $\{x_n\} \subset \mathbb{F}$ / $\sum^{\infty} x_n < \infty$ $(1 \leq p < \infty)$

$\ell^\infty :=$ el conj de sucesiones acotadas

Las f's $\|\{x_n\}\|_p = \left(\sum |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

y $\|\{x_n\}\|_\infty = \sup |x_n|$. son normas.

Notar que holder (vale para infinito)

$$\|x_n y_n\| = \int_X |fg| \le \left(\int |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |g|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_p \|g\|_q$$

$$= \sum^{\infty} |x_n y_n| = \|x_n y_n\| \le \|f\|_p \|g\|_q = \left(\sum_1^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_1^{\infty} |y_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

(6) Si $X$ es un EV con $\|\cdot\|$ y $S$ es ev ent $\|\cdot\|_S$ dada por restricción de $\|\cdot\|$ en $X$ es una norma en $S$

(7) Si $X, Y$ son normados con $\|\cdot\|_1$ $\|\cdot\|_2$ respec $\Rightarrow$ $Z = X \times Y$ es normado con $\|(x,y)\|_Z = \|x\|_1 + \|y\|_2$ (ej)

<u>Lema</u> Sea $X$ un ev con $\| \ \|$. Si $d : X \times X \to \mathbb{R}$ por $d(x,y) = \|x-y\|$ $\Rightarrow$ $(X,d)$ es métrico (ej)

<u>obs</u> Si $X$ es un ev con una métrica $d$ en gral no es cierto que exista una norma tq $\|x-y\|$ (ejemplo $d$ acotada $d(x,y) \le M$ ent no vale (3) de norma)

pero si la métrica es:

-) homogénea $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x,y)$

$\Rightarrow$ cumple (3)

-) invariante por traslación:

$$d(x,y) = d(x+z, y+z)$$

$\Rightarrow$ cumple (4)

y (1), (2) cumple siempre

$\Rightarrow$ la $d$ es una norma

(para ver (4) $\|x+y\| = d(x+y, 0) \leq d(x+y, x) + d(x, 0)$

$$\overset{(\text{invar})}{=} d(y,0) + d(x,0)$$
$$= \|y\| + \|x\|$$

---

•) Cuando $X$ sea en uno $\|\cdot\|$ y $d$ métrica dada por $\|x-y\|$, decimos $d$ es métrica asociada y usualmente consideremos esta como topología

Def Sea $X$ ev normado decimos $\{x_n\}$ converge en $X$ a $x$ si $\|x_n - x\| \to 0$ cuando $n \to \infty$ y lo notamos

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

teo Sea $X$ ev $\|\cdot\|$. Sea $x_n \to x$, $y_n \to y$, $\{\alpha_n\} \subseteq \mathbb{F}$ / $\alpha_n \to \alpha$ ent

(1) $\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x-y\|$

(2) $\lim \|x_n\| = \|x\|$

(3) $\lim x_n + y_n = x + y$

(4) $\lim \alpha_n x_n = \alpha x$

notar (2) dice que $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ es cont y (3) (4) dice que la suma y la mult por escalar son continuas

demo (1) $\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x-y\| + \|y\|$

$\Rightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|$

y cambiamos $x$ por $y$ por el otro lado

(2) por (1) $\big| \|x_n\| - \|x\| \big| < \|x_n - x\| \to 0$

(3) $\|(x_n+y_n) - (x+y)\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \to 0$

(4) Como $\alpha_n \to \alpha$ es $|\alpha_n| \leq M \quad \forall n$

Luego $\|\alpha_n x_n - \alpha x\| \leq \underbrace{|\alpha_n|}_{\leq M} \underbrace{\|x_n - x\|}_{\to 0} + \underbrace{|\alpha_n - \alpha| \|x\|}_{\to 0}$

$-\alpha_n x + \alpha_n x$

$\longrightarrow 0$

---

Esp normados de dim finita

---

def Sea $X$ ev y $\| \ \|_1$ $\| \ \|_2$ normas en $X$

Decimos que $\| \ \|_1$ es equiv a $\| \ \|_2$ si

$\exists m, M > 0 \ / \ m\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M\|x\|_1 \quad \forall x \in X$

Lo anterior define una rel de eq en el conjunto de todas las normas en $X$

En efecto, es facil ver que esta rel es reflexiva y simétrica (ej) y tmb trans

lema Sea $X$ ev $\| \ \|_1, \| \ \|_2, \| \ \|_3$ normas en $X$ tq $\| \ \|_1$ eq $\| \ \|_2$, $\| \ \|_2$ eq $\| \ \|_3$

$\Rightarrow \| \ \|_1$ eq $\| \ \|_3$ (ej)

$\| \ \|_1 \leq K \| \ \|_2 \leq K \cdot \tilde{K} \| \ \|_3$

etc

def $\{x_n\} \subset X$ $(X,d)$ métrico es de cauchy si $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ d(x_n, x_m) < \varepsilon \ \forall n,m \geq n_0$

$X$ completo si toda suc de cauchy converge

lema Sea $X$ ev con $\| \ \|$ y $\| \ \|_1$ y $d, d_1$ métricas asociadas. Sup $\exists k > 0$ tq $\|x\| \leq k\|x\|_1 \ \forall x \in X$. Sea $\{x_n\} \subset X$

(1) $x_n \to x$ en $(X, d_1) \Rightarrow x_n \to x$ en $(X, d)$

(2) $\{x_n\}$ de cauchy en $(X, d_1) \Rightarrow \{x_n\}$ de cauchy en $(X, d)$

dem (1) dado $\varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ ( $\|x_n - x\|_1 \leq \frac{\varepsilon}{k}$ $\forall n \geq n_0$

$\Rightarrow$ para tal $n$

$d(x_n, x) = \|x_n - x\| \leq k\|x_n - x\|_1 \leq \varepsilon$

y vale (1)

(2) similar (ej)

Cor Sea $X$ ev $\| \|, \| \|_1$ normas equiv en $X$ con $d$ y $d_1$ las dist asociadas

Sea $\{x_n\} \subset X$ ent

(1) $x_n \to x$ en $(X, d) \Leftrightarrow x_n \to x$ en $(X, d_1)$

(2) $\{x_n\}$ es de cauchy en $(X, d)$

$\Leftrightarrow \{x_n\}$ es de cauchy $(X, d_1)$

(3) $(X, d)$ es completo $\Leftrightarrow (X, d_1)$ es completo

dem (ej) como son equivalentes $\| \| \leq k \| \|_1$
$\| \|_1 \leq \tilde{k} \| \|$

y usando ej de arriba valen (1) y (2)

---

·) Si $X$ tiene dim finita $\exists$ al menos una norma $\|x\| = \left(\sum |\lambda_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ $x = \lambda_j e_j$
$\{e_j\}$ base

Veremos ahora que todas las normas son equivalentes

Teo Sea $(X, d)$ métrico compacto y $f: \Omega \to \mathbb{F}$ continua

ent $\exists\, c > 0 \;/\; |f(x)| \leq c \quad \forall x \in \Omega$
($f$ acotada)

En particular si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ los nros

$a = \sup\{|f(x)| : x \in \Omega\}$

$b = \inf\{|f(x)| : x \in \Omega\}$

existen y son finitos. más aún

$\exists\, x, y \in \Omega \;/\; f(x) = a$ y $f(y) = b$

Teo Sea $X$ ev dim finita con norma $\|\;\|$. Sea $\{e_1 \ldots e_n\}$ base para $x = \sum \lambda_j e_j \in X$

Sea $\|x\|_1 = \left(\sum |\lambda_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow \|\;\|_1$ y $\|\;\|$ son equiv

(Coro todas las normas son equivalentes)

dem $\quad r = \left(\sum \|e_j\|^2\right)^{\frac{1}{2}} > 0$ (pues $\{e_j\}$ base) mayor estricto

tenemos $\|x\| = \|\sum \lambda_j e_j\| \leq \sum \|\lambda_j e_j\| = \sum |\lambda_j| \|e_j\|$

fácil si $n=2$
después inducción

$$\leq \left(\sum |\lambda_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \underbrace{\left(\sum \|e_j\|^2\right)^{\frac{1}{2}}}_{M}$$

pq inducción
no es holder
holder es p/ $\|\cdot\|_1$

$$= \underbrace{M \|X\|_1}_{\circledast}$$

Sea ahora $f: \mathbb{F}^n \to \mathbb{B}$ dado por

$$f(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \|\sum \lambda_j e_j\| \ (= \|X\|) \text{ cont } f \text{ cont pues}$$

$$|f(\lambda_1, \dots, \lambda_n) - f(\beta_1, \dots, \beta_n)|$$

$$\left| \|\sum \lambda_j e_j\| - \|\sum \beta_j e_j\| \right| \leq \|\sum \lambda_j e_j - \sum \beta_j e_j\|$$

$$= \|\sum (\lambda_j - \beta_j) e_j\|$$

$$\leq \sum^n \underbrace{|\lambda_j - \beta_j|}_{< \frac{\varepsilon}{n\|e_j\|} = \delta} \|e_j\| \leq \varepsilon$$

I

en realidad
$\delta = \min \left\{ \frac{\varepsilon}{n\|e_j\|} \right\}$

$\vec{\beta} \in B((\lambda_1, \dots, \lambda_n), \delta)$ $(\|\lambda - \beta\| < \delta)$
$\Rightarrow \|f(\lambda) - f(\beta)\| \leq \varepsilon$

como que en $\mathbb{F}$ tenga métrica!!

$$S = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{F}^n : \sum |\lambda_j|^2 = 1\}$$

es fácil ver que es compacto (ej)

por teo anterior $\exists (u_1, \dots, u_n) \in S$
$f: \mathbb{F}^n \to \mathbb{B}$ por ese teo anterior

$$m = f(u_1, \dots, u_n) \leq f(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \ \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

Si fuera $m = 0 \Rightarrow \|\sum u_j e_j\| = 0 \Rightarrow u_j = 0 \ \forall j$
$= \sum u_j e_j = 0$

pues $\{e_j\}$ base abs! pues $(u_1 \ldots u_n) \in S$

$\Rightarrow m > 0$. Ahora si $x = \sum \lambda_j e_j \in X$

con $\|x\|_1 = 1 \Rightarrow \sum |\lambda_j|^2 = 1$

osea $(\lambda_1 \ldots \lambda_n) \in S$ y $m \leq f(\lambda_1 \ldots \lambda_n) = \|x\|$

$m\|x\|_1 \leq \|x\|$

Ahora si $x \in X$ como $x \neq 0$ tenemos $\frac{x}{\|x\|_1} = a$

$\Rightarrow \|a\|_1 = 1 \Rightarrow m \leq \left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\|$ osea $\underbrace{m\|x\|_1 \leq \|x\|}_{(**)}$

de $(*)$ y $(**)$ estamos

Contraejemplo

obs en ev de $\boxed{\text{dim infinita}}$ (I) lo ant no es cierto ejemplo $C^1[0,\pi]$ tenemos normas $\|u\|_\infty$ y $\|u\|_\infty + \|u'\|_\infty$ consideramos las fc $u_n = \operatorname{sen}(nx)$ es fácil ver que estas normas no son equivalentes

Coro $X$ dim finita y $\|\ \|_1$ la del teo ant $\Rightarrow$ con la métrica asoc $(X, d_1)$ es esp completo

dem ya sabemos que en métrico $\{x_n\} \subset X$ suc de cauchy $\epsilon > 0$. todo elem de $x_n$

puede ser escrito como $x_m = \sum_j \lambda_{j,m} e_j$

$\lambda_{j,m} \in \mathbb{F}$

Como $\{x_m\}$ es de cauchy $\exists n_0 \in \mathbb{N}$

tq $\forall k, m \geq n_0$ $\sum_j |\lambda_{j,k} - \lambda_{j,m}|^2$

$= \|x_k - x_m\|_1^2 \leq \varepsilon^2$

Luego $|\lambda_{j,k} - \lambda_{j,m}|^2 \leq \varepsilon^2$ $\forall k, m \geq n_0$

o sea $\{\lambda_{j,m}\}$ es de cauchy en $\mathbb{F}$

para cada $j$

por lo tanto $\lim_{m \to \infty} \lambda_{j,m} = \lambda_j$ ($\mathbb{F}$ completo)

luego $\exists n_j \in \mathbb{N}$ tq $|\lambda_{j,m} - \lambda_j|^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{n}$

$\forall m \geq n_j$

sea $\tilde{n} = \max(\overbrace{n_0, \dots, n_n}^{\text{finitos / dim finita}})$ y $x = \sum \lambda_j e_j$

$\Rightarrow$ para $m \geq \tilde{n}$ tenemos

$\|x_m - x\|_1^2 = \sum_j^n |\lambda_{j,m} - \lambda_j|^2 \leq \sum_j^n \frac{\varepsilon^2}{n} = \varepsilon^2$

$\|x_m - x\|_1 \leq \varepsilon \Rightarrow x_m$ converge

Cor Un ev de dim finita es métrico completo con la métrica asoc a cualquier norma

dem todas las normas son eq / con $d_1$ es completo y vimos que (si $d$ eq $d_1$) $(X, d)$ completo ⟺ $(X, d_1)$ completo

---

Teo $(M, d)$ métrico $A \subseteq M$

(a) $A$ completo $\Rightarrow$ $A$ cerrado

(b) Si $M$ completo $\Rightarrow$ $A$ completo $\Leftrightarrow$ $A$ cerrado

(c) Si $A$ es compacto $\Rightarrow$ $A$ cerrado y acotado

(d) Cerr y acotado en $\mathbb{F}^n$ $\Rightarrow$ compacto

?

Corolario Si $Y$ subesp de dim finita de ev $X$ $\Rightarrow$ $Y$ es cerrado

dem $Y$ es normado (por ser e.v) $\xRightarrow{\text{dim finita}}$ es completo

$\Rightarrow Y$ métrico completo

$\Rightarrow$ es cerrado por teo (a)

Contraejemplo

obs lo anterior no es cierto si $Y$ tiene dim inf ejemplo

$S = \{ \{x_n\} \in \ell^\infty : \exists n_0 \in \mathbb{N} / x_n = 0 \ \forall n \geq n_0 \}$

es claro que $S$ sub vemos que no es cerrado

Sea $x = \{1, \frac{1}{2}, \ldots \frac{1}{3} \ldots\} \in \ell^\infty \setminus S$

y $x_n = \{1, \frac{1}{2}, \ldots \frac{1}{n}, 0, \ldots 0\} \in S$

$\|x_n - x\| = \|(0, \ldots 0, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2} \ldots)\|$ $\rightarrow -\frac{1}{n+1}$

$= \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow x_n \to x$ pero $x \notin S$

$\Rightarrow S$ no es cerrado

## Esp de Banach

⊛ No puedo usar el teo de arriba pq dim no finita

<u>Lema</u> $X$ normado, $S$ subesp de $X$

$\Rightarrow \bar{S}$ es sub de $X$

<u>dem</u> Sean $x, y \in \bar{S}$ $\alpha \in \mathbb{F} \Rightarrow \exists \{x_n\} \{y_n\} \subset S$

tq $x_n \to x$ $y_n \to y$ en $X$

como $S$ subesp $\Rightarrow x_n + y_n \in S$

$\|x_n + y_n - x - y\| \leq \underbrace{\|x_n - x\|}_{\to 0} + \underbrace{\|y_n - y\|}_{\to 0}$

y $x_n + y_n \to x + y$

$\Rightarrow x + y \in \bar{S}$

Análogo $\alpha x_n \to \alpha x$ osea $x+y, \alpha x \in \bar{S}$

$\Rightarrow \bar{S}$ sub

<u>def</u> Si $E \subset X$ normado

$\text{sp}\, E = \{$todas las comb lineales finitas de elementos de $E\}$

o equiv la intersección de todos los sub que contienen a $E$

$\overline{\text{sp}}\, E$ como la intersección de todos los sub cerrados que contienen a $E$

Lema $X$ normado $\emptyset \neq E \subset X$ ent:

(a) $\overline{Sp}\, E$ es un sub cerrado de $X$ que contiene a $E$

(b) $\overline{Sp}\, E = \overline{Sp\, E}$

dem (a) es cierto pues $\cap$ de cerrados es cerrado y $\cap$ de sub es sub

(b) Por lema anterior $\overline{Sp}\, E$ es sub (cerrado) y contiene a $E$. Luego $\overline{Sp}\, E \subseteq \overline{Sp\, E}$

por otro lado $\overline{Sp}\, E$ es sub que contiene $\overline{Sp\, E} \subseteq \overline{\overline{Sp}\, E} = \overline{Sp}\, E$ cerrado que contiene a $E$

$Sp\, E \subseteq \overline{Sp}\, E$ por def

Li SAO

·) Notar que en dim finita todo subesp es cerrado en particular $Sp\, E$, pero este teo es en gral

Teo (Lema de Riesz) Sea $X$ normado, $Y$ subesp cerrado con $Y \neq X$. Sea $\alpha \in (0,1)$. Ent $\exists x_\alpha \in X$ con $\|x_\alpha\| = 1$ tq $\|x_\alpha - y\| > \alpha \quad \forall y \in Y$

obs En esp c/ prod interno de dim $< \infty$ se puede ver que $\exists x_\alpha$ con $\|x_\alpha\| = 1$ / $\|x_\alpha - y\| \geq 1 \quad \forall y \in Y$

dem Como $Y \neq X$ $\exists x \in X \setminus Y$ tq

$$d = \inf\{\|x - z\| : z \in Y\} > 0$$ pues $Y$ cerrado

Como $0 < \alpha < 1$ $d < d\alpha^{-1} \Rightarrow \exists z \in Y$ / $\|x - z\| < d\alpha^{-1}$

Sea $x_\alpha = \frac{x - z}{\|x - z\|} \Rightarrow \|x_\alpha\| = 1$ y se tiene

$y \in Y$ $\Rightarrow \|x_\alpha - y\| = \left\|\frac{x - z}{\|x - z\|} - y\right\| = \underbrace{\frac{1}{\|x - z\|}}_{\geq \frac{1}{d\alpha^{-1}}} \underbrace{\|x - \overline{(z + \|x - z\| y)}\|}_{\inf = d}$ como se $\in Y$ por subesp

$$> \frac{d}{d\alpha^{-1}} = \alpha$$

Notar $x_\alpha \notin Y$ si no $\|x_\alpha - x_\alpha\| > \alpha > 0$

Teo Si $X$ es dim inf $\Rightarrow D = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ y $K = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ no son compactos

(equiv $D$ y $K$ no compactos $\Rightarrow \dim X < \infty$)

dem $x_1 \in K$. como $\dim X = \infty$ $\overline{sp\{x_1\}} \neq X$ cerrado pq es subesp dim finita

Luego por riesz $\exists x_2 \in K$ / $\|x_2 - x_1\| \geq \frac{1}{2}$ $\to \|x_2\| = 1$

Ahora $sp\{x_1, x_2\} \neq X$ por riesz

$\Rightarrow \exists x_3 \in K$ / $\|x_3 - x_1\| \geq \frac{1}{2}$ y $\|x_3 - x_2\| \geq \frac{1}{2}$

siguiendo así $\exists \{x_n\} \subset K$ / $\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2} \quad \forall n \neq m$

y esta suc no puede tener sub convergente

$\Rightarrow K$ no compacto

~~Def~~ Un esp de Banach es un esp normado que es completo con la métrica asoc a la norma

teo (a) todo normado de dim $< \infty$ es banach

(b) si $X$ métrico completo $C_{\mathbb{F}}(X)$ es banach

(c) si $(X, \Sigma, \mu)$ subesp medible $\Rightarrow L^p(X)$ $1 \leq p \leq \infty$ son banach

En particular $\ell^p$ es banach $\forall\, 1 \leq p \leq \infty$

(d) $X$ Banach, $Y$ sub esp $Y$ Banach $\Leftrightarrow Y$ cerrado

dem (a) ya lo vimos arriba

(d) consecuencia de que en métrico completo $M$ para $A \subseteq M$ se tiene $A$ completo $\Leftrightarrow A$ cerrado

(b) (c) se asumen ya vistos

---

def Sea $X$ normado y $\{x_n\} \subset X$ para $n \in \mathbb{N}$.
Sea $S_n = \sum_1^n x_k$. Decimos que $\sum_1^\infty x_n$ converge en $X$ si $\lim S_n$ existe en $X$, en tal caso

$$\text{def } \sum_1^\infty x_k = \lim_{n \to \infty} S_n$$

<u>teo</u> Sea $X$ Banach $\{x_n\}$ suc. de $X$. Si la serie $\sum^{\infty} \|x_n\|$ converge $\Rightarrow \sum^{\infty} x_n$ converge

<u>dem</u> $\varepsilon > 0$ $S_n = \sum^{n} x_n$ la n-ésima suma parcial. Como $\sum^{\infty} \|x_n\|$ converge, las sumas parciales de esa serie forman una suc de cauchy, luego $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\sum_{k=n+1}^{m} \|x_k\| < \varepsilon$ $\forall m > n \geq n_0$

$$\left| \sum^{m} \|x_k\| - \sum^{n} \|x_k\| \right| < \varepsilon$$

cauchy

luego para tales $m, n$

$$\| S_m - S_n \| = \Big\| \sum_{k=n+1}^{m} x_k \Big\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|x_k\| < \varepsilon$$ o sea

$\{S_n\}$ es de cauchy en $X$ como $X$ completo

$S_n$ converge