Lema todo entorno del 0 es un entorno balanceado del 0

demo Sea $U$ ent del 0. Como la multiplicación es continua y $0 \cdot 0 = 0$ $\exists \delta > 0$ y $V$ ent del 0 tq $\alpha V \subset U$ si $|\alpha| < \delta$. Si ponemos $W = \bigcup_{|\alpha|<\delta} \alpha V$ puede $W \subset U$ $W$ ent del y $W$ balanceado (ej)

Lema todo ent del 0 contiene un entorno balanceado del 0

def $E \subset X$ ent es acotado si $\forall U$ entorno del 0 $\exists \delta > 0 / E \subset tU$ $\forall t > \delta$

obs En un esp métrico $(X, d)$ decimos que $E$ es acotado si $d(x,y) \leq M$. Esta def en grl no coincide con la anterior. Si $X$ es normado y $d$ la dist inducida por norm ent sí coinciden. Pero si reemplazo $d$ por la métrica (q' induce la misma topo) $d_1 = \frac{d}{d+1}$ ent no coinciden

(de hecho todo los conj con $d_1$ son acotados).

Veamos que en un normado $X$ sí coinciden

sup $E \subset tU$ $\forall t$ grande. $U$ ent del $0$

En particular tomo $n$ fijo

$$E \subset t B_{\frac{1}{n}} = B_{\frac{t}{n}}$$

$B_r = \{x \in X : \|x\| < r\}$ $\|x-y\| \leq \|x\| + \|y\| \leq \frac{2t}{n}$

Recíprocamente, sup $d(x,y) \leq M$ $\forall x, y \in E$

sea $z_0 \in E$ ent $\forall x \in E$ $\|x\| \leq \|x - z_0\| + \|z_0\|$

$$\leq M + \|z_0\| = \tilde{M}$$

luego $E \subset B_r$ si $r > \tilde{M}$. Sea ahora

$U$ ent del $0$. Como $\{B_{\frac{1}{n}} : n \in \mathbb{N}\}$ es bola $\exists n_0$ tq $B_{\frac{1}{n_0}} \subset U$

Luego $\forall t > \tilde{n} n_0$ es $E \subset B_{\frac{t}{n_0}} \subset t B_{\frac{1}{n_0}} \subset t U$ $\square$

teorema (B. teo 1.15) $X$ evt $U$ ent del 0

ent

(a) $\forall$ suc $0 < r_n \to \infty$ $X = \bigcup r_n U$

(b) $K$ compacto $\Rightarrow$ $K$ acotado

(c) si $U$ acotado, $\forall$ suc $0 < \delta_n \to 0$

$\{\delta_n U : n \in \mathbb{N}\}$ es base local numerable

demo (a) Sea $x \in X$. Como la mult es cont

la suc $\{\frac{x}{r_n}\}$ converge a 0

luego como $U$ ent del 0 $\frac{x}{r_n} \in U$ $\forall n$ grande

(b) Sea $K$ compacto. Dvq $K \subset tV$ $\forall t$

grande. Por lema anterior

$\exists W$ ent del 0 bal tq $W \subset V$ y por

(a) $K \subset \bigcup n W$. Ahora

$K$ compacto $\Rightarrow K \subset \bigcup^{j_0} n_j W = n_{j_0} \bigcup_i^{j_0} \underbrace{\left(\frac{n_j}{n_{j_0}} W\right)}_{\subset W \text{ pues } W \text{ bal}} \subset n_{j_0} W$

luego $\forall t > n_{j_0}$

$$K \subset n_{j_0} W = t\left(\frac{n_{j_0}}{t} W\right) \subset tW \subset tU$$

(c) $U$ entorno de $0$. Como $V$ es acotado

$V \subset tU$ $\forall t$ grande $\Rightarrow \frac{V}{t} \subset U$ $\forall t$ grande

O sea $\delta_n V \subset U$ si $n$ grande

def $X$ evt decimos:

(a) $X$ es loc conv si $\exists$ b.l cuyos elementos son convergentes

(b) $X$ es lo acotado si $\exists$ entorno del $0$ acotado

(c) $X$ es loc compacto si $\exists$ entorno del $0$ con clausura compacta

(d) $X$ es esp Frechet si $X$ es loc compacto y $\tau$ inducida por una métrica $d$ invariante

$(d(x,y) = d(x+z, y+z) \ \forall x,y,z \in X)$

y completa

(e) $X$ es metrizable si $\tau$ es inducida por una métrica

(f) $X$ es normable si $\tau$ es inducida por la métrica correspondiente a una norma

(g) $X$ tiene la prop Heine Borel si cerrado y acotado $\Rightarrow$ compacto teo (a) $X$ loc acotado (R. Teo 1.15)

$\Rightarrow X$ tiene b.l numerable

(b) $X$ metrizable $\Leftrightarrow X$ tiene b.l numerable

(R. teo 1.24)

(c) $X$ normable $\Leftrightarrow$ $X$ loc convexo y $X$ " acotado

(R. 1.39)

(d) $X$ loc acotado y tiene la prop Heine Borel $\Rightarrow$ dim $X$ finita

($\Leftrightarrow X$ loc compacto)

(R. teo 1.21, 1.22, 1.23)

demo $\cdot$) Si $(X, \tau)$ metrizable

$\Rightarrow \{ B_{\frac{1}{n}}(x) : n \in \mathbb{N} \}$ es base local en $X$ ((b) $\Rightarrow$ )

$\cdot$) Si $X$ normable $\rightarrow \{ x \in X : \|x\| < 1 \}$ en entorno del 0 convexo y acotado

((c) $\Rightarrow$ )

def $X$ ev $p: X \to \mathbb{R}$ es seminorma si $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ $\forall x, y \in X$

$$p(\alpha x) = |\alpha|\, p(x) \quad \forall x \in X \ \alpha \in \mathbb{F}$$

def Una familia $\mathcal{P}$ de seminormas separa si p/c $0 \neq x \in X$ $\exists p \in \mathcal{P}$ tq $p(x) \neq 0$

obs $p(0) = 0 \Rightarrow 0 = p(x-x) \leq p(x) + p(-x) = 2p(x)$

luego $p$ seminorma es norma

$$\Leftrightarrow \{ p(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \}$$

teo (R. 1.37) sup $\mathcal{P} = \{p_i\}_{i \in I}$ es una familia de seminormas que separan en un $X$ ev para $n \in \mathbb{N}$.

Sean $V(p_i, n) = \{x \in X : p_i(x) < \frac{1}{n}\}$

$\mathcal{B}$ familia de todas las intersecciones finitas de los conjuntos $V(p_i, n)$.

Ent $\mathcal{B}$ es una base local convexa para una top $\tau$ en $X$ que hace de $X$ un ent loc convexo y tq

(a) $\forall p_i \in P$ $p_i$ es continua

(b) $E \subset X$ es acotada $\Leftrightarrow$ todo $p_i \in P$ es acotad en $E$

ejemplo

① Sea $X = C([0,1], \mathbb{F})$ defino

$$d(f,g) = \int_0^1 \frac{|f-g|}{1+|f-g|}$$

·) es fácil ver que es métrica

lo único que hay que comprobar es la desigualdad triangular: basta ver

$$\frac{|f-g|}{1+\underbrace{|f-g|}_{=x}} \leq \frac{|f-h|}{1+\underbrace{|f-h|}_{=y}} + \frac{|h-g|}{1+\underbrace{|f-h|}_{=z}}$$

esto es lo mismo que

$$\cancel{1} - \frac{1}{1+x} \leq \cancel{1} - \frac{1}{1+y} + 1 - \frac{1}{1+z}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2+y+z}{(1+y)(1+z)} \leq 1 + \frac{1}{1+x} \quad \text{y esto es}$$

cierto pues como $x \leq y+z$, ent

$$1+\frac{1}{1+x} \geq \frac{1}{1+y+z}+1=\frac{2+y+z}{1+y+z} \geq \frac{2+y+z}{(1+y)(1+z)}$$

Luego $(X,\tau)$ con $\tau$ dada por $d$ es esp métrico

definimos Ahora en $X$ la flia de seminormas $\{p_x\}_{x\in[0,1]}$ con

$$p_x(f) \doteq |f(x)|$$

es claro que son seminormas y que separan pues

$$p_x(f)=0 \quad \forall x \Rightarrow f(x)\equiv 0$$

Ent por teo anterior $\exists$ topo $\tau_p$ tq $(X,\tau_p)$ es evt y las intersecciones finitas de

$$U(p_x,n)=\{f\in X : p_x(f)<\tfrac{1}{n}\}$$

son b.l de $\tau_P$. Esta top se llama topo de convergencia puntual

teorema
(a) $\forall p_i \in P$ $p_i$ es continua
(b) $E \subset X$ es acotada $\Leftrightarrow$ todo $p_i \in P$ es acotado en $E$

notar que si $f_n \xrightarrow{\tau_P} f$ ent

$$\lim_n |f_n - f|(x) = \lim p_x(f_n - f) = p_x(0) = 0$$

teo

vamos a ver que $Id : (X, \tau_P) \to (X, \tau)$ es secuencial. cont pero no es cont y por lo tanto $(X, \tau_P)$ no es métrico

1) $Id : (X, \tau_P) \to (X, \tau)$ es sec continua
sup $f_n \xrightarrow{\tau_P} f$ ent $f_n(x) \to f(x)$ $\forall x \in [0,1]$

Luego por TC dominada (todo menor que $f \equiv 1$)

$$\int_0^1 \frac{|f_n(x) - f(x)|}{\underbrace{1 + |f_n(x) - f(x)|}_{\leq 1}} \longrightarrow 0 \quad \text{listo}$$

-) Vemos que $Id : (X, \tau_p) \to (X, \tau)$ no es continua. Sup si es continua en 0

Como $\cap$ finita de $U(p_x, n)$ es b.l

y como

$$U(p_x, n) \cap U(p_y, m) = \{ f \in X : |f(x)| < \tfrac{1}{k}, |f(y)| < \tfrac{1}{k} \quad k = \max(m, n) \}$$

por la continuidad en 0

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ y $\{x_1, \dots x_n\}_{n < \infty} \subset X$ Por

$$\{ f \in X : |f(x_j)| < \delta \quad \forall 1 \leq j \leq n \} \subseteq B_d(0, \varepsilon)$$

Ahora $\forall k \in \mathbb{N}$ Sea $f_k(x) = \prod_{j=1}^{n} k(x - x_j) \in B_d(0, \varepsilon)$

o sea $\displaystyle\int_0^1 \frac{|f_k(x)|}{1 + |f_k(x)|} \leq \varepsilon \quad \forall k \in \mathbb{N}$

$$y \quad \int_0^1 \frac{|f_k(x)|}{1+|f_k(x)|} \xrightarrow{k\to\infty} \begin{cases} 1 & x \neq x_j \\ 0 & x = x_j \end{cases}$$

por dominada

$1 \leq \varepsilon$ abs!

(2) $C(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{F} \text{ continua}\}$ $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ab

$\exists$ suc $\{K_n\} \subset \mathbb{R}^n$ tq $\Omega = \bigcup_1^\infty K_n$, $K_n$ compacto

y $K_n \subseteq K_{n+1}$. Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, $K_n = \overline{B_n(0)}$

si no $\Omega^c \neq \emptyset$ y esta bien def y es continua la dist $d(x) = d(x, \Omega^c) > 0$

definimos

$$K_n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq n,\ d(x, \Omega^c) \geq \tfrac{1}{n}\}$$
$$= \overline{B_n(0)} \cap d^{-1}([\tfrac{1}{n}, \infty)) \quad \text{(ejercicio)}$$

definimos la siguiente flia de normas $p_n : C(\Omega) \to [0,\infty)$ dada por $p_n(f) = \|f\|_{L^\infty(K_n)}$

es facil ver que son seminormas y separan pues $p_n(f) = 0 \ \forall n$ $f = 0$ en $\Omega$ pues $\bigcup K_n = \Omega$

(Teo anterior) $\Rightarrow$ $\mathcal{P} = \{P_n\}$ induce una top tq

$(C(\Omega), \tau)$ es evt loc convexo. Más

aún como la flia es numerable, esta top

es métrica (teo anterior). Además como

$K_n \subseteq K_{n+1}$ $\quad V(P_m, n) \cap V(P_j, K) \supseteq V(P_i, i)$

si $i = \max(m, n, j, K)$. Luego $\{V(P_i, i) : i \in \mathbb{N}\}$

es base local de $\tau$

Veamos que $(C(\Omega), \tau)$ no es normado

sup $\exists \|\ \|_\infty$ en $C(\Omega)$ que genera la top $\tau$

Sea $\varepsilon > 0$ como los $V(P_n, n)$

son b.l en 0 en la topo $\tau$ y como

$\{f \in C(\Omega) : \|f\| < \varepsilon\}$ es entorno de 0

se tiene que $\exists n_0 / V(P_{n_0}, n_0) \subseteq B(0, \varepsilon)$ (*)

Sea $z_0 \in \Omega \setminus K_{n_0}$ ent $\exists f \in C(\Omega)$ tq

$f \equiv 0$ en $K_{n_0}$ $\quad f(z_0) = 1$

$$f(z) = \frac{d(z, K_{n_0})}{d(z_0, K_{n_0})}$$

Ahora $\forall k \in \mathbb{N}$

$$p_{n_0}(kf) = \|kf\|_{L^\infty(K_{n_0})} = 0 < 1 \quad \text{o sea}$$

$kf \in V(p_{n_0}, n_0)$ $\forall k$ y por ⊛ tenemos

$\|kf\| < \varepsilon$ haciendo $\varepsilon \to 0$ es $\|f\| = 0$

pero $f(z_0) = 1$ abs!