# Distribución binomial

Ej

Progenitor 1

| | | r | d |
|---|---|---|---|
| Prog 2 | r | r r | r d |
| | d | d r | d d |

r = recesivo

d = dominante

A = "el individuo tiene apariencia dominante"

Supongo $\boxed{P(A) = \frac{3}{4}}$

Los progenitores tienen 4 hijos

a) X v.a indica el número de individuos con apariencia dominante entre los 4 herederos

$$X \sim \underset{\underset{\text{binomial}}{\Downarrow}}{Bi}\left(\overset{\to\ \text{4 ensayos}}{4}, \underset{\to\ \text{prob de cada ensayo}}{\boxed{0.75}}\right)$$

$$f_X(x) = \binom{4}{x} p^x (1-p)^{4-x}$$

$$f_X(1) = \binom{4}{1} \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^3$$

# Distribución de Bernoulli

$X \sim Bi(1, p)$ Nº éxitos en un ensayo

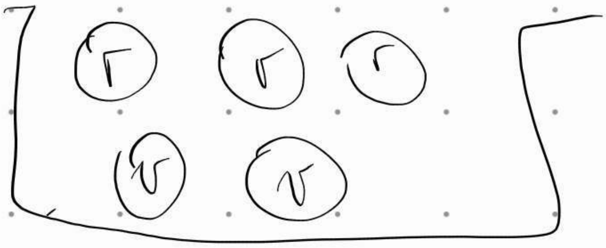
Notación $X \sim B(p)$

obs Se puede ver que si $X \sim Bi(n, p)$

$$\Rightarrow X = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \text{donde } X_i \sim B(p)$$

## Rol de función densidad discreta

experimento 1



Seleccionar al azar con repo 2 fichas y anotamos color

$$\Omega = \{\overset{X=0}{(r,r)}\overset{X=1}{(r,v)}\ \overset{X=1}{(v,r)},\overset{X=2}{(v,v)}\}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 \quad \frac{3}{5}\,\frac{2}{5} \quad \frac{2}{5}\,\frac{3}{5} \quad \left(\frac{2}{5}\right)^2$$

definimos "exito" como sacar una bolita verde $P(E) = \frac{2}{5}$

quiero $X$ v.a que indica nº de verdes en 2 extracciones

$$X : \Omega \to \mathbb{R} \qquad R(X) = \{0,1,2\}$$

$$P(X=0) = \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

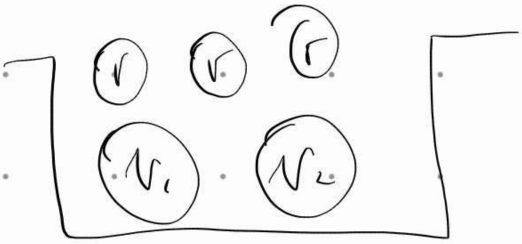
$$P(X=1) = P(\{(v,r)(r,v)\}) = P(\{r,v\}) + P(\{v,r\})$$
$$= 2\,P(\{r,v\})$$
$$= 2\,\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}$$

$$P(X=2) = \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

$$\Rightarrow f_X(x) = \begin{cases} \binom{2}{x}\left(\frac{2}{5}\right)^x\left(\frac{3}{5}\right)^{2-x} & x = 0,1,2 \\ 0 & cc \end{cases}$$

$$\Rightarrow X \sim Bi\left(2, \frac{2}{5}\right)$$

# Experimento 2



Seleccionar con repo 2 fichas

$$\Omega' = \{(r,r)(r,v_1)(r,v_2)(v_1,r)(v_1,v_1)(v_1,v_2)$$
$$(v_2,v_2)(v_2,r)(v_2,v_1)\}$$

$\mathcal{A}' = \mathcal{P}(\Omega')$  $P'$ definida sobre $\mathcal{A}'$

(alcanza con definirla en singuletes)

$P(rr) = \left(\frac{3}{5}\right)^2$  $P(rv_1) = \frac{3}{5}\frac{1}{5}$

defino $Y: \Omega' \to \mathbb{R}$ donde $Y$ cuenta número de éxitos (sacar verde) en 2 extracciones  $R(Y) = \{0,1,2\}$

$$f_Y(0) = P(Y=0) = P(rr) = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = P(X=0) = f_X(0)$$

$$f_Y(1) = P(Y=1) = P(rv_1, rv_2, v_1r, v_2r) = f_Y(1)$$
$$= 4\,\frac{3}{5}\,\frac{1}{5} = P(X=1)$$

$f_Y(2) = P(Y=2) = 4\left(\frac{1}{5}\right)^2 = P(X=2) = f_X(2)$

$f_Y(y) = P(Y=y) = 0 \quad \forall y \neq \{0,1,2\}$
$= f_X(y)$

$\Rightarrow f_X = f_Y$

$\Rightarrow Y \sim Bi(2, \frac{2}{5})$

Conclusión: dos experimentos pueden ser completamente diferentes $\Omega$ y $\Omega'$ $P$ y $P'$ pero si tienen la misma distribución (v.a) los podemos ver como iguales y trabajar con cualquiera de los dos

# Distribución Hipergeométrica

Cajón con N manzanas de las cuales D están en mal estado (malas)

Se extraen secuencialmente sin repe $n$ manzanas y se observa la cantidad X de manzanas malas en la muestra (x manzanas)

Sea $X =$ "nº de manzanas malas"

(si fuese con repo $X \sim B(n, \frac{D}{N})$)

pero no

Buscamos $R(X)$

Caso $N = 5$  $D = 3$  $n = 3$

$$0 \leq X \leq 3$$

$$X \leq D$$

$$R(X) \subseteq \{0,1,2,3\}$$

$$3 - X \leq 2 \qquad X \geq 1$$

$$\Rightarrow R(X) = \{1,2,3\}$$

# En general (dist hipergeométrica)

N: nº total de objetos
D: nº total de " tipo 1
N-D: " " " " tipo 2
n: " " " " seleccionados entre los N (al azar)

X: nº total de objetos de tipo 1 en (la muestra seleccionada)

⇒ $0 \leq X \leq n$ ① $X \leq D$ ② $n - X \leq N - D$ ③
$X \geq n - N + D$

$R(X) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

① y ② $X \leq \min\{n, D\}$
① y ③ $X \geq \max\{0, n-N+D\}$

para el cálculo de la densidad discreta de la X, es posible asumir, que los n objetos iniciales están numerados de 1 a N y que la selección de los n objetos de la muestra, es simultánea y sin rep.

$I_N$ el conjunto de todos los objetos numerados $1, 2, \dots, D$ de tipo 1 y $D+1, \dots, N$ de tipo 2

$$\Omega = \{A \subseteq I_N \,/\, \#(A) = n\}$$

$$\#(\Omega) = \binom{N}{n} \qquad \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$$

y naturalmente $P(\omega) = \dfrac{1}{\binom{N}{n}}$

$\omega \in \Omega$

v.a $X$: nº elementos de tipo 1 en la muestra

$$P(X = x) = \frac{\#(X = x)}{\#\,\Omega} = \frac{\binom{D}{x}\binom{N-D}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

elijo $x$ manzanas entre $D$ (malas)

para las restantes $(N-x)$ elijo entre manzanas buenas

a) $$f_X(x) = \begin{cases} \binom{D}{x}\binom{N-D}{n-x} & \max\{0, n-N+D\} \le x \le \min\{D, n\} \\ 0 & cc \end{cases}$$

cumple las 2 1eras prop (trivial)

Falta ver $\sum_{x \in R(X)} f_X(x) = 1$ ⊗

que es lo mismo que

$$\sum_{x=0}^{n} \frac{\binom{D}{x}\binom{N-D}{n-x}}{\binom{N}{n}} = 1$$

quizas hay más sumandos que ⊗ pero se anulan

Para demostrar esto usamos
$\forall k = 0,1,\ldots, s+t$ vale

$$\binom{s+t}{k} = \sum_{j=0}^{t} \binom{t}{j}\binom{s}{k-j}$$

$t = D$ $\quad s = N-D$ $\quad s+t = N$

$$\sum_{j=0}^{D} \binom{D}{j}\binom{N-D}{k-j} = \binom{N}{k}$$

en particular $K = n$. $\quad (1 \leq n \leq N)$

$$\sum_{j=0}^{\boxed{D} = n \text{ falta ver}} \binom{D}{j}\binom{N-D}{n-j} = \binom{N}{n}$$

a) $$\frac{\sum_{j=0}^{n} \binom{D}{j}\binom{N-D}{n-j}}{\binom{N}{n}}$$