def X ev $W \subseteq X$ subesp y

$f_W : W \to \mathbb{F}$ funcional lineal

→ Un funcional lineal

$f_X : X \to \mathbb{F}$ se dice extensión

de f_W si $f_W(w) = f_X(w) \quad \forall w \in W$

def X ev real $p : X \to \mathbb{R}$ se dice

funcional sub lineal en X si:

(a) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$

(b) $p(\alpha x) = \alpha p(x) \quad \forall \alpha \geq 0, x \in X$

ejercicio (a) $f : X \to \mathbb{R}$ lineal es sublineal

(b) $f : X \to \mathbb{R}$ lineal $\Rightarrow p(x) = |f(x)|$ es sublineal

(c) Si X normado $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ es sublineal

(d) $X = \mathbb{R}^2 \Rightarrow p(x,y) = |x| + y$ es sublineal obs (a) Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, p seminorma

$\Rightarrow p$ sublineal (por def)

en este caso por (b) $p \geq 0$ → creo que es obs abajo de def de seminorma

luego p seminorma es norma $\Leftrightarrow [p(x)=0 \Rightarrow x=0]$

en gral (a) $f: X \to \mathbb{R}$ no es seminorma (o sea no vale la vuelta)

Ejercicio

(b) No es seminorma

(c) es seminorma

(d) No es 〃

obs p sublineal $\Rightarrow p(0)=0$. En particular

$$p(0) \leq p(x) + p(-x)$$

$$\Rightarrow -p(-x) \leq p(x) \quad (\mathrm{I})$$

Además

$$p(y) \leq p(y-x) + p(x)$$

$$p(x) \leq p(x-y) + p(y)$$

$$\Rightarrow \quad -p(y-x) \leq p(x) - p(y) \leq p(x-y) \quad (\mathrm{II})$$

p No tiene porque ser positivo / No negativo

Pero si p es pso $\Rightarrow p(x) \geq 0 \quad \forall x \in X$ por (I)

en tal caso $|p(x) - p(y)| \underset{\text{II}}{\leq} p(x-y)$

<u>Teorema</u> (Hahn-Banach sobre $\mathbb{R}$)

X $\mathbb{R}$-ev, $p: X \to \mathbb{R}$ sublineal. Supongamos $\exists W \subseteq X$ subesp y $f_W: W \to \mathbb{R}$ lineal, tal que $f_W(w) \leq p(w) \quad \forall w \in W$

$\Rightarrow \exists f_X: X \to \mathbb{R}$ extensión de f_W

tq $f_X(w) \leq p(x)$

<u>Notación</u> Si V es $\mathbb{C}$-ev escribimos $V_{\mathbb{R}}$ al ev real restringiendo los escalares

Si además V normado $\Rightarrow V_{\mathbb{R}}$ normado con la misma norma (ej)

Lema $g: V \to \mathbb{C}$ funcional lineal

$\Rightarrow \exists!\ g_{\mathbb{R}}: V_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ lineal

con $\boxed{g(v) = g_{\mathbb{R}}(v) - i\, g_{\mathbb{R}}(iv) \quad \forall v \in V}$ (I)

recíprocamente si $g_{\mathbb{R}}: V_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ lineal

$\Rightarrow g: V \to \mathbb{C}$ dado por (I) es funcional lineal

Además si V normado

$$g \in V' \Leftrightarrow g_{\mathbb{R}} \in (V_{\mathbb{R}})'$$

en tal caso $\|g\| = \|g_{\mathbb{R}}\|$

(notar que $g_{\mathbb{R}}(v) = g(v)\ \forall v \in V$ con $g(v) \in \mathbb{R}$)

dem (existencia) dado $v \in V$ escribimos

$$g(v) = g_{\mathbb{R}}(v) + i\, g_I(v)$$

con $g_{\mathbb{R}}, g_I$ son funcionales lineales (ejercicio)

$$\Rightarrow g_{\mathbb{R}}(iv) + i\, g_I(iv) = g(iv) \overset{g_{\mathbb{R}}\text{ lineal}}{=} i\, g(v)$$

$$= i\, g_{\mathbb{R}}(v) + i^2 g_I(v)$$

$$= -g_I(v) + i\, g_{\mathbb{R}}(v)$$

??: $\Rightarrow g_{\mathbb{R}}(iv) = -g_I(v) \Rightarrow -g_{\mathbb{R}}(iv) = g_I(v)$

$$\Rightarrow g(v) = g_{\mathbb{R}}(v) - i\,g_I(iv)$$

Unicidad (ej)

recíproca (ej)

Ahora V normado

$(\Rightarrow)$ $|g(v)|^2 = |g_{\mathbb{R}}(v)|^2 + |g_{\mathbb{R}}(iv)|^2 \geq |g_{\mathbb{R}}(v)|^2$

luego si $g \in V'$

$$|g_{\mathbb{R}}(v)| \leq \overset{\to\ \text{por}}{|g(v)|} \leq \|g\|\|v\|$$

(supremo) $\Rightarrow \|g_{\mathbb{R}}\| \leq \|g\|$

$(\Leftarrow)$ Supongamos $g_{\mathbb{R}} \in (V_{\mathbb{R}})'$. Sea $\alpha = \alpha(v) \in \mathbb{C}$

tq $|\alpha| = 1$ y $|g(v)| = \alpha g(v)$

·) si $g(v) = 0$ tomo cualquier α

·) si $g(v) \neq 0$ $\alpha = |g(v)|$

en particular $g_{\mathbb{R}} \in (V_{\mathbb{R}})'$

luego $|g(v)| = g(\alpha v) = g_{\mathbb{R}}(\alpha v) \leq \|g_{\mathbb{R}}\| \, \|\alpha v\|$

(supremo) $\Rightarrow \|g\| \leq \|g_{\mathbb{R}}\|$

y $g \in V'$

<u>Lema 2</u> Sean X, $\mathbb{C}$-ev, $p: X \to \mathbb{R}$ seminorma. Supongo $W \subseteq X$ subesp, $f_w: W \to \mathbb{C}$ lineal con $|f_w(w)| \leq p(w)$ $\forall w \in W$ y supongo $f_{w,\mathbb{R}}: W_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ del lema anterior tiene una extensión $f_{x,\mathbb{R}}: X_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ tq

$$|f_{x,\mathbb{R}}(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in X_{\mathbb{R}}$$

$\Rightarrow f_w$ tiene extensión $f_x: X \to \mathbb{C}$ tq $|f_x(x)| \leq p(x)$ $\forall x \in X$

<u>demo</u> $\exists f_x: X \to \mathbb{C}$ que es extensión de f_w por I lema anterior (ejercicio)

$$f_x(x) = f_{x,\mathbb{R}}(x) - i f_{x,\mathbb{R}}(ix)$$

$x \in X$

i) falta probar $|f_x(x)| \le p(x)$ $\forall x \in X$

dado $x \in X$ con $f_x(x) \neq 0$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$

tq $|f_x(x)| = \alpha f_x(x)$

$$\Rightarrow \underbrace{|f_x(x)|}_{\in \mathbb{R}} = \alpha f_x(x) = \overset{\in \mathbb{R}!}{f_{x,\mathbb{R}}(\alpha x)}$$

↳ por ser $|\cdot|$

$$\le p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$$

$$= p(x)$$

no falta módulo!!

---

teo (Hahn-Banach sobre $\mathbb{C}$) I

Sea X ev $p: X \to \mathbb{R}$ seminorma, $W \subseteq X$ subesp y $f_w: W \to \mathbb{F}$ funcional lineal tal que $|f_w(w)| \le p(w)$ $\forall w \in W$

$\Rightarrow \exists f_x: X \to \mathbb{F}$ extensión de f_w tq

$$|f_x(x)| \le p(x) \quad \forall x \in X$$

demo) Si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ es el teo H-B sobre $\mathbb{R}$ (no probado). Como p seminorma, es par luego $f_x(x) \le p(x)$ $\forall x \in X$

$\Rightarrow -f_x(x) = f_x(-x) \leq p(-x) = p(x) \Rightarrow -p(x) \leq f_x(x)$

$$\Rightarrow |f_x(x)| \leq p(x)$$

ii) Si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Sea $f_{w,\mathbb{R}} : W_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ el dado por

1er Lema $\Rightarrow f_w(w) = f_{w,\mathbb{R}}(w) - i\, f_{w,\mathbb{R}}(iw) \ \forall w \in W$

$\Rightarrow f_{w,\mathbb{R}}(w) \leq |f_{w,\mathbb{R}}(w)| = |f_w(w)| \leq p(w) \ \forall w \in W$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad ? \quad\quad\quad\quad ?$

Luego por H-B sobre $\mathbb{R}$

$\exists f_{x,\mathbb{R}} : X_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ extensión de $f_{w,\mathbb{R}}$

$$\text{Como } |f_{x,\mathbb{R}}(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in X_{\mathbb{R}}$$

y ahora definimos la extensión usando lema 2

Teorema Hahn-Banach en normado

<u>Lema</u> X-$\mathbb{R}$ ev $W \subseteq X$ subesp $p: X \to \mathbb{R}$ sublineal y $f_w: W \to \mathbb{R}$ tal que $|f_w(x)| \leq p(x)$ $\forall w \in W$

Sean $z_1 \notin W$ y $W_1 = sp\{z_1\} \oplus W$

$= \{\alpha z_1 + w \mid \alpha \in \mathbb{R}, w \in W\}$

$\Rightarrow \exists \rho_1 \in \mathbb{R}$ y $f_{w_1}: W_1 \to \mathbb{R}$ tq

$$\overbrace{f_{w_1}(\alpha z_1 + w) = \alpha \rho_1 + f_w(w) \leq p(\alpha z_1 + w)}^{*}$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \forall w \in W$$

en particular f_{w_1} es lineal y extensión de f_w

$$\text{dem } \forall u, v \in W_1 \quad f_w(u) + f_w(v) = \overset{= |f_w(u+v)| \, (f_w: W \to \mathbb{R})}{f_w(u+v)} \leq p(u - z_1) + p(v + z_1)$$

$$\Rightarrow f_w(u) - p(u - z_1) \underset{\mathrm{I}}{\leq} p(v + z_1) - f_w(v)$$

definimos $\rho_1 = \inf_{v \in W} \{-f_w(v) + p(v + z_1)\}$ → pq existe pq esta acotado por $f_w(u) + f_w(u - z_1)$?:

tomando inf en I $f_w(u) - p(u - z_1) \leq \rho_1$

$$\Rightarrow \underbrace{f_w(u) - \rho_1 \leq p(u - z_1)}_{*}$$

por def de inf $\rho_1 \leq -f_w(v) + p(v + z_1)$

$$\rightarrow \underbrace{\rho_1 + f_W(v) \leq p(v + z_1)}_{\text{B}}$$

(i) multiplicamos A por $-\alpha_1$ si $\alpha < 0$

escribiendo $w = -\alpha u$ obtenemos ⊛

(ii) si $\alpha > 0$ multiplicamos ~~po~~ B por α y obtenemos ⊛

(ii) Veamos la última afirmación $\rightarrow \alpha\rho_1 + f_W(\alpha v) = \alpha(\rho_1 + f_W(v)) \leq \alpha\, p(z_1 + v) = p(\alpha z_1 + \alpha v)$?¿

de B, $\alpha > 0$ $\quad \alpha\rho_1 + \alpha f_W(v) = \alpha\rho_1 + f_W(\alpha v) \leq p(\alpha z_1 + \alpha v)$

$(w = \alpha v) \quad \Rightarrow \alpha\rho_1 + f_W(w) \leq p(\alpha z_1 + w)$

(i) sale igual

<u>Teorema (Hahn-Banach en normado)</u>

X normado $\quad W \subseteq X$ subespacio

$\Rightarrow \forall f_W \in W' \ \exists f_X \in X'$ extensión de f_W

tq $\|f_W\| = \|f_X\|$

<u>dem</u> es claro que $p(x) = \|f_W\| \cdot \|x\|$ es seminorma en X

(ejercicio)

Además $\forall w \in W,\ w \neq 0 \quad \frac{1}{\cancel{\|w\|}} \cdot p(w) = p\left(\frac{w}{\|w\|}\right) = \|f_W\|$

(def de $\|\cdot\|$) $\geq \left|f_W\left(\frac{w}{\|w\|}\right)\right| = \frac{|f_W(w)|}{\cancel{\|w\|}}$

$\Rightarrow |f_W(w)| \leq p(w) \quad \forall w \in W$

(I) $\Rightarrow$ $\exists f_X : X \to \mathbb{F}$ extensión de f_W tq

$$|f_X(x)| \leq p(x) \quad \forall x \in X$$

$$\Rightarrow |f_X(x)| \leq \|f_W\| \|x\| \quad \forall x \in X$$

(supremo $\|x\| \leq 1$) $\quad \|f_X\| \leq \|f_W\|$

$f_X|_W = f_W \quad W \subseteq X$

Luego $\|f_X\| \leq \underbrace{\sup\{|f_W(w)| \mid w \in W, \|w\| \leq 1\}}_{= \|f_W\|} \leq \sup\{|f_X(x)| / x \in X \ \|x\| \leq 1\}$

$$= \|f_X\|$$

$$\Rightarrow \|f_X\| = \|f_W\| \qquad \square$$

Teorema X normado $W \subseteq X$ subesp,

sup $\exists x \in X$ tq $\delta = \inf\{\|x + w\| \mid w \in W\} > 0$

$\Rightarrow \exists f \in X' / \|f\| = 1 \quad f(x) = \delta \quad f|_W \equiv 0$

demo Sea $Y = \text{sg}\{x\} \oplus W$, $f_Y : Y \to \mathbb{F}$ dada por $f_Y(\alpha x + w) = \alpha\delta$

(notar que $\delta > 0 \quad \exists x \notin W \Rightarrow f_Y$ bien def) ???

$\Rightarrow |f_Y(\alpha x + w)| = |\alpha| \delta \underset{\text{v inf}}{\leq} |\alpha| \| x + \underbrace{\alpha^{-1} w}_{\in W} \| = \|\alpha x + w\|$

$\|f_Y\| = \sup\{ y \in Y / \|y\| = 1\} = \sup\{\alpha x + w / \|\alpha x + w\| = 1\}$

(supremo) $\Rightarrow \|f_y\| \leq 1$

1) Veamos $\|f_y\| \geq 1$. Sea $\varepsilon > 0$ como $\delta = \inf\{\|x+w\| \mid w \in W\}$

$$\exists\, \tilde{w}_\varepsilon \text{ como } \delta < \|x+\tilde{w}_\varepsilon\| \leq (1+\varepsilon)\delta$$

sea $w = \alpha \tilde{w}_\varepsilon$ con $\alpha \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{|f_y(\alpha x+w)|}{\|\alpha x+w\|} = \frac{|\alpha|\delta}{|\alpha|\,\|x+\alpha^{-1}w\|} = \frac{\delta}{\|x+\alpha^{-1}w\|} \geq \frac{1}{1+\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \left| f_y\left(\frac{\alpha x+w}{\|\alpha x+w\|}\right)\right| \geq \frac{1}{1+\varepsilon} \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$\left| f_y\left(\frac{\alpha x+w}{\|\alpha x+w\|}\right)\right| \geq 1 \Rightarrow f_y(\alpha x+w) \geq \|\alpha x+w\|$$

$$\Rightarrow \|f_y\| \geq 1$$

$$\Rightarrow \|f_y\| = 1$$

Luego puedo extender f_y a X por el Hahn-Banach en normado

$$f_y(x) = f_y(1.x+0) = 1\,\delta = \delta$$

$$f_y(w) = f_y(0.x+w) = 0$$

<u>Corolario</u> Sea $X \neq \{0\}$ normado, $x \in X$ fijo $x \neq 0$

$\Rightarrow \exists f \in X'$ tal que

(a) $\|f\| = 1$, $f(x) = \|x\|$

(b) $\|x\| = \sup\{|f(x)| \mid f \in X', \|f\| = 1\} = \sup A$

(c) si $y \in X$ con $x \neq y$, $\exists f \in X'$ tq

$$f(x) \neq f(y)$$

(en particular, X normado, $X \neq 0 \Rightarrow X' \neq \{0\}$)

<u>dem</u> (a) Teo anterior con $W = \{0\}$

(b) por (a) $\sup A \geq \|x\|$

Además $|f(x)| \leq \|f\| \|x\|$

$$\Rightarrow \sup\{|f(x)| \mid \|f\| = 1\} \leq \|x\|$$

$$\Rightarrow \sup A = \|x\|$$

(c) ejercicio sea $W = sp\{y\}$