ALGEBRA LINEAL - Práctica N°4 - Segundo cuatrimestre de 2022
Espacio Dual

Ejercicio 1. Hallar una base del subespacio $S = \{\varphi \in (\mathbb{R}^3)^* : \varphi(1,-1,2) = 0\}$.

Ejercicio 2. En cada uno de los siguientes casos, hallar la base dual de la base B del K-espacio vectorial V:

i) $V = \mathbb{R}^2,\ B = \{(1,-1),(2,0)\}$,

ii) $V = \mathbb{R}^3,\ B = \{(1,-1,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$,

iii) $V = \mathbb{R}_3[X],\ B = \{-X+2,\ X-1,\ X^2-3X+2,\ X^3-3X^2+2X\}$.

Ejercicio 3. Sea $B' = \{\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\}$ la base de $(\mathbb{R}^3)^*$ definida por

$$\varphi_1(x_1,x_2,x_3) = x_1+x_2, \qquad \varphi_2(x_1,x_2,x_3) = x_1+x_3, \qquad \varphi_3(x_1,x_2,x_3) = x_2+x_3.$$

Hallar la base B de $\mathbb{R}^3$ tal que $B' = B^*$.

Ejercicio 4. Sean f_1 , f_2 y $f_3 \in (\mathbb{R}_2[X])^*$ las siguientes formas lineales:

$$f_1(p) = \int_0^1 p(x)\,dx, \qquad f_2(p) = \int_0^2 p(x)\,dx, \qquad f_3(p) = \int_{-1}^0 p(x)\,dx.$$

i) Probar que $\{f_1,\ f_2,\ f_3\}$ es una base de $(\mathbb{R}_2[X])^*$.

ii) Hallar una base B de $\mathbb{R}_2[X]$ tal que $B^* = \{f_1,\ f_2,\ f_3\}$.

Ejercicio 5. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n.

i) Si $\varphi_1,\varphi_2 \in V^* \setminus \{0\}$, demostrar que $\mathrm{Nu}(\varphi_1) = \mathrm{Nu}(\varphi_2)$ si y solo si $\{\varphi_1,\varphi_2\}$ es linealmente dependiente.

ii) Sean $\varphi,\varphi_1,\dots,\varphi_r$ formas lineales en V^* tales que

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = \ldots = \varphi_r(x) = 0 \ \Rightarrow\ \varphi(x) = 0.$$

Probar que $\varphi \in \langle \varphi_1,\dots,\varphi_r \rangle$.

iii) Sean $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ formas lineales en V^*. Probar que

$$\{\,\varphi_1,\dots,\varphi_n\,\} \text{ es base de } V^* \iff \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Nu}(\varphi_i) = 0.$$

Ejercicio 6. Sea $\varphi(x_1,x_2,x_3) = 2x_1+3x_2-x_3 \in (\mathbb{R}^3)^*$ y sea $E^* = \{\delta_1,\delta_2,\delta_3\} \subseteq (\mathbb{R}^3)^*$ la base dual de la canónica.

i) Calcular las coordenadas de φ en E^*.

ii) Calcular las coordenadas de φ en la base $B^* = \{\delta_1+\delta_2+\delta_3, \delta_1+\delta_2, \delta_1\}$.

iii) Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ el subespacio $S = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : 2x_1+3x_2-x_3 = 0\}$ y sea $B \subset \mathbb{R}^3$ la base $B = \{(0,0,1),(0,1,-1),(1,-1,0)\}$. Encontrar una ecuación para S en la base B.

(Sugerencia: notar que B^* es la base dual de B y no hacer ninguna cuenta.)

Ejercicio 7. Sea $B \subset \mathbb{R}^2$ la base $B = \{(1,1),(1,-1)\}$. Encontrar las coordenadas de la base dual de B en la base dual de la canónica.

Ejercicio 8. Sean B y B_1 las bases de $\mathbb{R}^3$ definidas por $B = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ y $B_1 = \{(1,1,-1),(1,-1,1),(-1,1,1)\}$. Si $\varphi \in (\mathbb{R}^3)^*$ tiene coordenadas $(1,-3,2)$ respecto de B^*, calcular sus coordenadas respecto de B_1^*.

Ejercicio 9. Hallar una base de $S^\circ \subseteq V^*$ en los siguientes casos:

i) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \langle (1,-1,2),(2,1,3),(1,5,0) \rangle$.

ii) $V = \mathbb{R}^4$, $S = \langle (1,1,-1,1),(2,-1,3,1) \rangle$.

iii) $V = \mathbb{R}^3$, $S = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_3 = 0, 2x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$.

Ejercicio 10. Sea $B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ y $W = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : A \cdot B = 0\}$. Sea $f \in W^\circ$ tal que $f(I_2) = 0$ y $f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$. Calcular $f(B)$.

Ejercicio 11. Para los siguientes subespacios S y T de V, determinar una base de $(S+T)^\circ$ y una base de $(S \cap T)^\circ$.

i) $V = \mathbb{R}^4$, $S = \langle (1,1,-1,1),(2,-1,3,1) \rangle$, $T = \langle (2,-4,8,0),(-1,1,2,3) \rangle$.

ii) $V = \mathbb{R}^4$, $S = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_3 = 0, x_1 + x_2 + x_4 = 0\}$, $T = \langle (2,1,3,1) \rangle$.

Ejercicio 12. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y S y T subespacios tales que $V = S \oplus T$. Probar que $V^* = S^\circ \oplus T^\circ$.

Ejercicio 13. Sea $tr : K^{n\times n} \to K$ la forma lineal traza. Dado $a \in K^{n\times n}$, se define $f_a : K^{n\times n} \to K$ como $f_a(x) = tr(a \cdot x)$.

i) Probar que $f_a \in (K^{n\times n})^*$ para cada $a \in K^{n\times n}$.

ii) Probar que si $f_a(x) = 0$ para cada $x \in K^{n\times n}$, entonces $a = 0$.

iii) Se define $\gamma : K^{n\times n} \to (K^{n\times n})^*$ por $\gamma(a) = f_a$. Probar que γ es un isomorfismo.

iv) Sea $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = 3a_{11} - 2a_{12} + 5a_{22}.$$

Encontrar una matriz $a \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tal que $\gamma(a) = f$.

Ejercicio 14. Sea $\varphi \in (K^{n\times n})^*$ tal que $\varphi(a \cdot b) = \varphi(b \cdot a)$ para cada $a, b \in K^{n\times n}$. Probar que existe $\alpha \in K$ tal que $\varphi = \alpha\, tr$. Deducir que si $\varphi(a \cdot b) = \varphi(b \cdot a)$ para cada $a, b \in K^{n\times n}$ y $\varphi(I_n) = n$, entonces $\varphi = tr$.

Ejercicio 15. Sean $\alpha_0, \ldots, \alpha_n \in K$ tales que $\alpha_i \neq \alpha_j$ si $i \neq j$. Para cada i, $0 \leq i \leq n$, se define $\epsilon_{\alpha_i} : K_n[X] \to K$ como $\epsilon_{\alpha_i}(P) = P(\alpha_i)$.

i) Probar que $B_1 = \{\epsilon_{\alpha_0}, \dots, \epsilon_{\alpha_n}\}$ es una base de $(K_n[X])^*$.

ii) Sea $B = \{P_0, \dots, P_n\}$ la base de $K_n[X]$ tal que $B^* = B_1$. Probar que el polinomio

$$P = \sum_{i=0}^{n} \beta_i \, P_i$$

es el único polinomio en $K[X]$ de grado menor o igual que n tal que $P(\alpha_i) = \beta_i$ para $0 \leq i \leq n$. Este polinomio se llama el *polinomio interpolador de Lagrange.*

iii) Probar que existen números reales $a_0, \dots, a_n$ tales que, para todo $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$\int_0^1 P(x)\, dx = \sum_{i=0}^{n} a_i \, P(\alpha_i).$$

Hallar a_0, a_1 y a_2 en el caso en que $n = 2$, $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = \frac{1}{2}$ y $\alpha_2 = 0$.

Ejercicio 16. Sean V y W K-espacios vectoriales de dimensión finita y sea $f : V \to W$ una transformación lineal. Se define la función $f^t : W^* \to V^*$ de la siguiente manera:

$$f^t(\varphi) = \varphi \circ f.$$

f^t se llama la función *transpuesta* de f.

i) Probar que f^t es una tranformación lineal.

ii) Probar que $(\mathrm{Im}(f))^\circ = \mathrm{Nu}(f^t)$ y que $\mathrm{Im}(f^t) = (\mathrm{Nu}(f))^\circ$.

iii) Sean $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}^3$ y $f(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, 3x_1, x_1 - 2x_2)$.
Si $B = \{(1,2),(1,3)\}$ y $B_1 = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$, calcular $|f|_{BB_1}$ y $|f^t|_{B_1^* B^*}$.

iv) Si B y B_1 son bases de V y W respectivamente, probar que

$$|f^t|_{B_1^* B^*} = (|f|_{BB_1})^t.$$