Práctico 1

1. Decidir cuáles de los siguientes conjuntos tiene supremo y/o máximo. En los incisos (a), (d), (e) y (h) justificar su respuesta dando una demostración.

(a) $[3, 8)$. (b) $(-\infty, \pi)$.

(c) $\{6k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. (d) $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

(e) $\{1/m \mid m \in \mathbb{Z},\ m \neq 0\}$. (f) $\left\{3 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$.

(g) $\left\{x \in \mathbb{Q} \mid 0 < x < \sqrt{2}\right\}$. (h) $\left\{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leq x \leq \sqrt{2}\right\}$.

2. (a) Escribir la definición de ínfimo y mínimo de un conjunto. Enunciar y demostrar una Proposición sobre el ínfimo, análoga a la que se dio en la teoría para el supremo.

(b) Decidir cuales de los conjuntos del ejercicio 1. tiene ínfimo y/o mínimo.

3. Mostrar que si A y B son conjuntos no vacíos de números reales y $\sup A = \inf B$, entonces para todo $\varepsilon > 0$ existen $a \in A$ y $b \in B$ tales que $b - a < \varepsilon$.

4. Sean f y g funciones acotadas en el intervalo $[\alpha, \beta]$ $(-\infty < \alpha < \beta < \infty)$. Se definen

$$\begin{aligned} M &= \sup\{(f+g)(x) \mid \alpha \leq x \leq \beta\}, \\ M' &= \sup\{f(x) \mid \alpha \leq x \leq \beta\}, \\ M'' &= \sup\{g(x) \mid \alpha \leq x \leq \beta\}. \end{aligned}$$

Probar $M \leq M' + M''$.

5. Sea $f : [-2, 3] \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^3 + 1$, y sea $P = \{-2, -1, 2, 3\}$. Calcular $S(f, P)$ y $s(f, P)$. Hacer lo mismo con $f(x) = x^2 - x - 5$.

6. Calcular $s(f, P)$ y $S(f, P)$ en los siguientes casos.

(a) $P = \{-3, -2, 0\}$ y $f : [-3, 0] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 4, & \text{si } -3 \leq x < 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(b) $P = \left\{-1, 0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ y $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{si } -1 \leq x < 0, \\ x + 2, & \text{si } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

7. Escribir las sumas inferior y superior de las siguientes funciones en los intervalos indicados. Utilizar una partición tal que la longitud de cada subintervalo sea $1/n$.

(a) $f(x) = x^2$, en $I = [0, 1]$. (b) $f(x) = \frac{1}{x}$, en $I = [1, 2]$.

8. Demostrar que $\int_0^b x^3 dx = b^4/4$, considerando particiones en n subintervalos iguales y utilizando la fórmula

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}.$$

9. Deducir cuáles de las siguientes funciones son integrables sobre $[0, 2]$, y cuando sea posible, calcular la integral sin partir el dominio (i.e. sin usar el teorema $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$).

(a) $f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ x - 2, & \text{si } 1 < x \leq 2. \end{cases}$ (b) $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ x^2, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

10. Qué funciones tienen la propiedad de que toda suma inferior es igual a toda suma superior?

11. (a) Demostrar que si f es integrable sobre $[a, b]$ y $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, entonces $\int_a^b f \geq 0$.

(b) Demostrar que si f y g son integrables sobre $[a, b]$ y $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, entonces $\int_a^b f \geq \int_a^b g$.

(c) Verificar que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \operatorname{sen}(x)\, dx \leq \pi^2/8$.

12. (a) Dar un ejemplo de una función f tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, $f(x_0) > 0$ para algún $x_0 \in [a, b]$, y $\int_a^b f = 0$.

(b) Suponer que f es una función integrable en $[a, b]$ tal que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, y continua en un $x_0 \in [a, b]$ con $f(x_0) > 0$. Probar que $\int_a^b f > 0$.

13. Sea f una función acotada sobre $[a, b]$. Demostrar que si f es continua en $[a, b]$ salvo en $x_0 \in (a, b)$, entonces f es integrable sobre $[a, b]$.

14. Sea f una función no decreciente sobre $[a, b]$, y sea $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ una partición de $[a, b]$ tal que $t_i - t_{i-1} = \delta$ para todo i.

(a) Demostrar que $S(f, P) - s(f, P) = \delta(f(b) - f(a))$.

(b) Demostrar que f es integrable.

(c) Dar un ejemplo de una función no decreciente sobre $[0, 1]$ que sea discontinua en una cantidad infinita de puntos.

15. Sea f una función integrable en el intervalo $[a, b]$, y sea μ el promedio de f en ese intervalo, es decir,

$$\mu = \frac{\int_a^b f}{b - a}.$$

Mostrar que μ no pertenece necesariamente a la imagen de f.

16. Calcular las siguientes integrales.

(a) $\displaystyle\int_a^b (x + y)\, dx.$ (b) $\displaystyle\int_a^b \left(\int_a^x (1 + t)\, dz \right) dx.$