

Objetivos

- Repasar las operaciones entre conjuntos (unión, intersección, complemento, diferencia simétrica, producto cartesiano, partes)
- Familiarizarse con la notación de conjuntos.
- Aprender los distintos tipos de relaciones.

Ejercicios

1) Dado el conjunto $A = \{1, 2, \{3\}, \{1, 2\}\}$, determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

- | | | | |
|-------------------------|-----------------------------|-----------------------------------|-----------------------------|
| (a) $3 \in A$ | (d) $\{\{3\}\} \subseteq A$ | (g) $\{\{1, 2\}\} \subseteq A$ | (j) $\emptyset \subseteq A$ |
| (b) $\{3\} \subseteq A$ | (e) $\{1, 2\} \in A$ | (h) $\{\{1, 2\}, 3\} \subseteq A$ | (k) $A \in A$ |
| (c) $\{3\} \in A$ | (f) $\{1, 2\} \subseteq A$ | (i) $\emptyset \in A$ | (l) $A \subseteq A$ |

2) Dados $A = \{1, 3, 5, 7, 8, 11\}$ y $B = \{-1, 3, -5, 7, -8, 11\}$, hallar $A \cap B$, $A \cup B$, $B - A$ y $A \Delta B$.

3) Describir por extensión y traducir en símbolos (es decir, escribir de la forma $\{\dots \mid \dots\}$) los siguiente conjuntos:

- (a) El conjunto de todos los números naturales menores que 30 y divisibles por 3.
- (b) El conjunto de todos los números naturales mayores que 5 y menores que 76 que son cuadrados perfectos.

4) Sean A , B y C conjuntos. Representar los siguientes conjuntos con un diagrama de Venn:

- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| (a) $(A \cup B^c) \cap C$ | (b) $A \Delta (B \cup C)$ |
|---------------------------|---------------------------|

5) Dados subconjuntos A , B y C de un conjunto referencial V , describir $(A \cup B \cup C)^c$ en términos de intersecciones y complementos, y $(A \cap B \cap C)^c$ en términos de uniones y complementos.

6) Hallar el conjunto $\mathcal{P}(A)$ de partes de A en los siguientes casos:

- | | |
|-----------------------|---------------------------|
| (a) $A = \emptyset$. | (c) $A = \{1, \{1, 2\}\}$ |
| (b) $A = \{1\}$ | (d) $A = \{a, b, c\}$ |

7) Sean A y B conjuntos. Probar las siguientes afirmaciones:

- | | |
|---|---|
| (a) $A \subseteq B \Rightarrow B^c \subseteq A^c$. | (b) $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \Leftrightarrow A \subseteq B$ |
|---|---|

8) Sean $A = \{0, 1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$. Hallar $A \times B$ y $B \times B$.

9) La cantidad de dígitos o cifras de un número se cuenta a partir del primer dígito distinto de cero. Por ejemplo, 0035010 es un número de 5 dígitos. Sea A el conjunto de todos los números de 5 dígitos. Dar conjuntos A_1 , A_2 , A_3 , A_4 y A_5 tales que A se pueda identificar con el producto cartesiano:

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 \times A_5.$$

10) Describir los siguientes conjuntos utilizando uniones y productos cartesianos de conjunto:

- (a) El conjunto de los números pares de 5 dígitos.
- (b) El conjunto de los números de 5 dígitos con sólo un 3.
- (c) El conjunto de los números capicúas de exactamente 5 dígitos.
- (d) El conjunto de los números capicúas de a lo sumo 5 dígitos.

Observación. *Descripciones como las de los Ejercicios 9) y 10) serán de utilidad para calcular cardinales de conjuntos finitos en la unidad de Conteo.*

11) Sean A , B y C conjuntos. Probar que:

$$(a) (A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C) \quad (b) (A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$$

12) Mostrar que las siguientes identidades no valen en general exhibiendo contraejemplos:

$$(a) (A \times B)^c = A^c \times B^c \quad (b) (A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$$

13) En cada uno de los siguientes casos determinar si la relación \mathcal{R} en A es reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva, de equivalencia o de orden.

- (a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$
- (b) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$
- (c) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 2), (1, 3), (2, 5), (1, 5)\}$
- (d) $A = \mathbb{N}$, \mathcal{R} definida por $a \mathcal{R} b \Leftrightarrow b$ es múltiplo de a
- (e) $A = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, \mathcal{R} definida por $X \mathcal{R} Y \Leftrightarrow X \cap \{1, 2, 3\} \subseteq Y \cap \{1, 2, 3\}$

14) Sea $A = \{a, b, c, d, e, f\}$. Dada la siguiente relación de equivalencia en A :

$$\mathcal{R} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (f, f), (a, b), (b, a), (a, f), (f, a), (b, f), (f, b), (c, e), (e, c)\},$$

hallar la clase \bar{a} de a , la clase \bar{b} de b , la clase \bar{c} de c , la clase \bar{d} de d , y la partición asociada a \mathcal{R} .

15) En el conjunto \mathbb{Z} de números enteros, considerar la relación de equivalencia dada por la paridad: dos números están relacionados si y solo si tienen la misma paridad (son ambos pares o ambos impares). ¿Cuántas clases de equivalencia distintas tiene? Hallar un representante para cada clase.

16) Probar que las siguientes son relaciones de equivalencia en \mathbb{Z} y hallar un representante para cada clase equivalencia.

- (a) $a \sim b$ si y sólo si 2 divide a $a - b$. Comparar con la relación del ejercicio anterior.
- (b) $a \sim b$ si y sólo si 3 divide a $a - b$.
- (c) Fijado $n \in \mathbb{N}$, $a \sim b$ si y sólo si n divide a $a - b$.

Observación. *Profundizaremos más adelante en esta relación cuando veamos congruencias.*

17) En el conjunto de todos los subconjuntos finitos de \mathbb{N} , sea la relación de equivalencia dada por el cardinal (es decir, la cantidad de elementos): dos subconjuntos están relacionados si y solo si tienen la misma cantidad de elementos. ¿Cuántas clases de equivalencia distintas tiene? Hallar un representante para cada clase.