$$d_v w(p) = \frac{dw}{dt}(0)$$

Lema

$D_v w(p)$ solo depende de v (y p) y no de α

dem Sea $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ tq $\alpha(0) = p$ $\alpha'(0) = v$. Dada $\varphi : \tilde{U} \to S$ carta

$$\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t)) \qquad \alpha((-\varepsilon, \varepsilon)) \subseteq \varphi(\tilde{U}) \subseteq U$$

$$w(t) = \underbrace{a(u(t), v(t))}_{= a(t)} \varphi_u(u(t), v(t)) + \underbrace{b(u(t), v(t))}_{= b(t)} \varphi_v(u(t), v(t))$$

$$= a\varphi_u + b\varphi_v$$

$$\Rightarrow w'(t) = a'\varphi_u + a(\varphi_{uu} u' + \varphi_{uv} v') + b'\varphi_v + b(\varphi_{uv} u' + \varphi_{vv} v')$$

Recordar

$$\varphi_{uu} = \Gamma_{11}^1 \varphi_u + \Gamma_{11}^2 \varphi_v + eN$$
$$\varphi_{uv} = \Gamma_{12}^1 \varphi_u + \Gamma_{12}^2 \varphi_v + fN$$
$$\varphi_{vv} = \Gamma_{22}^1 \varphi_u + \Gamma_{22}^2 \varphi_v + gN$$

$\to$ dirección normal se va cuando proyectamos ortogonal

$$\frac{Dw}{dt}(0) = \left(a' + au'\Gamma_{11}^1 + v'\Gamma_{12}^1 a + bu'\Gamma_{12}^1 + bv'\right)\varphi_u$$

$$\left(au'\Gamma_{11}^2 + av'\Gamma_{12}^2 + b' + bu'\Gamma_{12}^2 + bv'\Gamma_{22}^2\right)\varphi_v\Big|_{t=0}$$

y esta expresión depende solo de p y v

ej: Sea S el plano que pasa por p_0 y está generado por $\{v_1, v_2\}$ BOG

$$\varphi(u,v) = p_0 + u v_1 + v v_2$$

$$\Rightarrow E = G = 1 \quad F = 0$$

para cristofer (clase 18 p 6)

$$\Gamma_{ij}^k = 0$$

$$\frac{Dw}{dt} = a'\varphi_u + b'\varphi_v = a'v_1 + b'v_2$$

$$= w'$$

porque

$$w' = (a\varphi_u + b\varphi_v)' = a'\varphi_u + a\cancel{\varphi_u'} + b'\varphi_v + \cancel{b\varphi_v'}$$

$\therefore$ en este caso la derivada covariante coincide con la derivada usual

def Sea $\alpha: I \to S$ dif en S
Un campo vectorial a lo largo de α es una correspondencia que asigna a cada $t \in I$, un vector $w(t) \in T_{\alpha(t)} S$
Se dice diferenciable en t_0 si $\exists$ carta $\varphi: U \to S$ de $\alpha(t_0)$ en S tq si

$$w(t) = a(t)\varphi_u + b(t)\varphi_v$$

entonces a y b son dif en t_0

def La derivada covariante de W un campo a lo largo de α se define mediante mediante la fórmula ⊛ de lema

ej $\alpha'(t)$ es un campo a lo largo de α

$$\frac{D\alpha'(t)}{dt} = \text{componente tangencial (a } S) \text{ de } \alpha''(t)$$

proyectar α'' sobre tangente

Def Sea un campo w a lo largo de α se dice paralelo si $\frac{Dw}{dt} = 0 \quad \forall t \in I$

ejemplo Si S es el plano
$\varphi(u,v) = p_0 + u v_1 + v v_2$

$w(\alpha(t)) = a \varphi_u + b \varphi_v$ con a, b ctes

$\Rightarrow w$ es paralelo a lo largo de cualquier α curva en el plano

prop Si V y W son campos paralelos a lo largo de $\alpha: I \to S$ dif entonces $\langle V(t), W(t) \rangle_{\alpha(t)}$ es cte

En particular, $\|V(t)\|$, $\|W(t)\|$ y el angulo que forman $V(t)$ y $W(t)$ son constantes demo como W es paralelo $\left(\frac{DW}{dt}=0\right)$

$\Rightarrow W'(t) \perp T_{\alpha(t)}S \quad \forall t \in I$

$\Rightarrow \langle W'(t), \underbrace{V(t)}_{\in T_{\alpha(t)}S} \rangle = 0 \quad \forall t \in I$

Análogo $\langle W(t), V'(t) \rangle = 0 \quad \forall t \in I$

$\Rightarrow \langle V(t), W(t) \rangle' = \langle V'(t), W(t) \rangle$
$+ \langle V(t), W'(t) \rangle$
$= 0 + 0 = 0$

ejemplo Si α es un círculo máx en S^2 esfera (α PLA)

α' es un campo vect
a lo largo de α

n_α paralelo N

y $\alpha'' = n_\alpha \perp T_{\alpha(t)}S$

$\Rightarrow \frac{D\alpha'(t)}{dt} = 0 \quad \forall t \in I$

$\Rightarrow \alpha'$ es un campo vectorial paralelo

prop Sea $\alpha : I \to S$, $w_0 \in T_{\alpha(t_0)} S$
$\Rightarrow \exists!$ campo vectorial w paralelo a lo largo de α tal que
$w(t_0) = w_0$

La prop se demuestra aplicando un teorema de existencia y unicidad de ec diferenciales

$$\begin{cases} \dfrac{Dw}{dt} = 0 \\ w(t_0) = w_0 \end{cases}$$