De la clase pasada

prop1 Si $V \subseteq \mathbb{R}^3$ abierto, S superficie regular / $S \subseteq V$ y $F: V \to \mathbb{R}^n$ dif
$\Rightarrow f = F|_S : S \to \mathbb{R}^n$ es dif

dem Sea $p \in S$ y $\varphi: U \to S$ param de p

$\Rightarrow f \circ \varphi = F \circ \varphi|_U$ ambas dif
$\Rightarrow f \circ \varphi$ dif
$\varphi: U \to \mathbb{R}^3$ es dif $\Rightarrow f$ dif

prop2 Sea S una sup regular y $f: D \to \mathbb{R}^3$ diferenciable, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto tq $f(D) \subseteq S$ entonces $f: D \to S$ es diferenciable

dem Sea $r \in D$ y $p = f(r) \in S$
Tomo φ carta de p, $\varphi(U) = V \cap S$
V abierto de $\mathbb{R}^3$ $p \in$

f es dif $\Rightarrow$ f continua

$\Rightarrow \exists$ abierto $W \subseteq D$ / $r \in W$ y $f(W) \subseteq V$

(W preimagen de V es abierto pq f continua) $V \subseteq \varphi(U)$

Veamos que $\varphi^{-1} \circ f$ es dif en W

en la demo de cambio de coordenadas

$\varphi^{-1}|_{\tilde{U} \cap S} = \pi \circ F^{-1}|_{\tilde{U} \cap S}$ $\tilde{U}$ abierto $\tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^3$ y $p \in \tilde{U}$

De ser necesario achico W de manera que $f(W) \subseteq \tilde{U}$

$\Rightarrow \varphi^{-1} \circ f|_W = \pi \circ F^{-1}|_W$ es dif por ser composición de dif

Casos particulares de la proposición

I abierto

1) $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ curva dif tq $\alpha(I) \subseteq S$
$\Rightarrow \alpha : I \to S$ es dif

2) $\varphi : U \to S$ parametrización

en particular $\varphi : \underset{U \subseteq}{\mathbb{R}^2} \to \underset{S \subseteq}{\mathbb{R}^3}$ dif por ser carta
$\varphi(U) \subseteq S$
$\Rightarrow \varphi : U \to S$ es dif

def Sean S_1, S_2 dos superficies regulares, $f : S_1 \to S_2$ y $p \in S_1$
$\Rightarrow$ decimos f es dif en p si existen parametrizaciones $\varphi : U \to S_1$ y $\psi : V \to S_2$ de p y $f(p)$ respectivamente tales que

•) $f(\varphi(U)) \subseteq \psi(V)$

•) $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ es dif en $\varphi^{-1}(p)$

f se dice diferenciable en S_1 si lo

es en p, $\forall p \in S$

obs la definición no depende de las param elegidas

def Dos superficies regulares S_1 y S_2 se dicen difeomorfas si existe una biyección $f: S_1 \to S_2$ diferenciable con inversa diferenciable. Una tal f se llama difeomorfismo

Ejemplo Si $\varphi: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ es un parametrización
$\Rightarrow \varphi: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es dif, por prop 2) $\varphi: U \to \varphi(U)$ es dif
ya tenemos φ dif biy e inversible resta ver inversa es dif
$\Rightarrow \varphi^{-1}: \varphi(U) \to U$ es dif, en efecto

si $p \in \varphi(U)$ y $\psi: V \to S$ es paramet en p

$$\Rightarrow \varphi^{-1} \circ \psi|_{\psi^{-1}(W)}: \underset{V}{\psi^{-1}(W)} \to \underset{U}{\varphi^{-1}(W)}$$

$$W = \varphi(U) \cap \psi(V)$$

es diferenciable (cambio coord)
$\Rightarrow \varphi^{-1}$ es diferenciable $\Rightarrow \varphi$ es difeomorfismo
$\Rightarrow U$ y $\varphi(U)$ son difeomorfos

$\varphi|_U: \underset{S_1}{U} \to \underset{S_2}{\varphi(U)}$ es la f

prop Sean S_1 y S_2 dos sup regulares
Supongamos que $S_1 \subseteq V \subseteq \mathbb{R}^3$ V abierto
y $F: V \to \mathbb{R}^3$ diferenciable tal que
$F(S_1) \subseteq S_2 \Rightarrow f = F|_{S_1}: S_1 \to S_2$
es diferenciable

ej usando prop

la esfera $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x^2+y^2+z^2 = 1\}$

y elipsoide $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$
son difeomorfos

Idea

$F(x,y,z) = (ax, by, cz)$

$F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dif trivial

$F|_{S_1}: S_1 \to S_2$ dif por prop

solo ver que $F(S_1) \subseteq S_2$

Plano tangente

Sea S una superficie y $p \in S$. Definimos el plano tangente a S en p

$$T_p S = \{ \alpha'(0) \mid \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S \text{ diferenciable tq } \alpha(0) = p \}$$

prop Sea $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ una parametrización de p de una sup regular S y sea $q \in U \,/\, \varphi(q) = p$

$$\Rightarrow T_p S = (d\varphi_q)(\mathbb{R}^2) = \operatorname{Im}(d\varphi_q)$$

en particular $T_p S$ es un espacio vectorial de dim 2 y $\{\varphi_u(q), \varphi_v(q)\}$ es una base

demo $T_p S \subseteq d\varphi_q(\mathbb{R}^2)$

$w \in T_p S \Rightarrow w = \alpha'(0)$ con $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \varphi(U) \subseteq S$

con $\alpha(0) = p$

Sea $\beta = \varphi^{-1} \circ \alpha$ $\quad$ β es dif porq α es dif por def y φ^{-1} es conts

$(\varphi \circ \beta) = \alpha$

$$\beta(0) = \varphi^{-1}(\alpha(0)) = \varphi^{-1}(p) = q$$

$$w = \alpha'(0) = (\varphi \circ \beta)'(0) = d\varphi_{\beta(0)} \cdot \beta'(0)$$
$$= d\varphi_q v$$
$$\Rightarrow w \in d\varphi_q(\mathbb{R}^3)$$

$\underline{d\varphi_q(\mathbb{R}^2) \subseteq T_pS}$ $\quad$ $w \in d\varphi_q(\mathbb{R}^2) = \mathrm{Im}(d\varphi_q)$

$\Rightarrow \exists v \in \mathbb{R}^3 \,/\, w = d\varphi_q(v)$
($v \in T_pS$ en particular $v \in \mathbb{R}^3$)

Sea $\beta : (-\varepsilon, \varepsilon) \to V$ $\quad$ $\beta(t) = q + tv$

$$\beta(0) = q \qquad \beta'(0) = v$$

Considero $\alpha = \varphi \circ \beta$

$\Rightarrow \alpha(0) = \varphi \circ \beta(0) = \varphi(q) = p$

$\alpha'(0) = (\varphi \circ \beta)'(0) = d\varphi_{\beta(0)} \beta'(0) = d\varphi_q(v) = w$

$\Rightarrow w \in T_pS$

Diferencial de $f: S_1 \to S_2$

Dada S_1, S_2 dos superficies regulares y $f: S_1 \to S_2$ un mapa diferenciable

Para cada $p \in S_1$ y $w \in T_p S_1$, queremos definir $df_p(w) \in T_{f(p)} S_2$

→ Tangente en S_2

Definimos $df_p(w) = \beta'(0)$ donde $\beta(t) = f \circ \alpha(t)$ para algun $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \to S_1$

↓ Te lo manda a S_2

diferenciable tal que $\alpha(0) = p$ $\alpha'(0) = w$

$$f: S_1 \to S_2$$
$$df_p: T_p S_1 \to T_{f(p)} S_2$$

$\beta(0) = f(p)$

$\to df_p(w) = \beta'(0) \in T_{f(p)} S_2$

props

a) $\beta'(0)$ no depende de la selección de α

b) $df_p: T_p S_1 \to T_{f(p)} S_2$ es un mapa lineal

demo clase que viene

a) Primero vamos a escribir a w en términos de $\{\varphi_u(q), \varphi_v(q)\}$, $\varphi(q) = p$ (φ es carta que cubre p)

φ parametrización

$$w = \alpha'(0), \quad \alpha : I \to \varphi(U) \subseteq S$$

Consideramos

$\gamma : I \to U$ dada por $\gamma(t) = (u(t), v(t))$

y vamos $\alpha = \varphi \circ \gamma : I \to \varphi(U)$

$$\gamma(0) = \varphi^{-1}(\alpha(0)) = \varphi^{-1}(p) = q$$

$$w = \alpha'(0) = \frac{d}{dt}\Big|_0 \varphi \circ \gamma(t) = \frac{d}{dt}\Big|_0 \varphi(u(t), v(t))$$

Regla Cadena

$$= \varphi_u(u(t), v(t))\, u'(t)\big|_0 + \varphi_v(u(t), v(t))\, v'(t)\big|_0$$

$$= \varphi_u(q)\, u'(0) + \varphi_v(q)\, v'(0)$$

$\Rightarrow$ escribimos w en base $\{\varphi_u(q), \varphi_v(q)\}$ tiene coordenadas $u'(0)$, $v'(0)$

$\Rightarrow$ w no depende de la α que elijamos, porque escritura en una base es única

Sean φ y ψ parametrizaciones de p y $f(p)$ respectivamente $\varphi(q) = p$ $\psi(r) = f(p)$

Consideremos $\xi = \psi^{-1} \circ \beta$

$$\psi^{-1} \circ f \circ \varphi(u,v) = (\tilde{f}_1(u,v), \tilde{f}_2(u,v))$$
$$(u,v) \in U$$

$$\varphi^{-1} \circ \alpha(t) = (u(t), v(t)) \quad t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

$$\beta(t) = f \circ \alpha(t)$$

$$\xi(t) = \psi^{-1} \circ \beta(t) = \psi^{-1} \circ f \circ \alpha(t)$$
$$= \underbrace{\psi^{-1} \circ f \circ \varphi}_{(f_1(u,v),\, f_2(u,v))} \circ \underbrace{\varphi^{-1} \circ \alpha(t)}_{(u(t),\, v(t))}$$

$= (f_1(u(t), v(t)), f_2(u(t), v(t)))$

$$\xi'(0) = \Big(\underbrace{\frac{\partial f_1}{\partial u}\Big|_q u'(0) + \frac{\partial f_1}{\partial v}\Big|_q v'(0)}_{a},$$

$$\underbrace{\frac{\partial f_2}{\partial u}\Big|_q u'(0) + \frac{\partial f_2}{\partial v}\Big|_q v'(0)}_{b} \Big)$$

coordenadas

$\Rightarrow$ a y b no dependen de α

$\therefore \beta'(0) = a\,\varphi_{\tilde{u}}(r) + b\,\varphi_{\tilde{v}}(r)$

no depende de α $\square$

b) Usando

$$\big[\underbrace{df_p}(w)\big]_{\{\varphi_{\tilde{u}}, \varphi_{\tilde{v}}\}} = \big[\beta'(0)\big]_{\{\,\}} = \xi'(0) = \Big(\frac{\partial f_1}{\partial u}\Big|_q u'(0) + \frac{\partial f_1}{\partial v}\Big|_q v'(0),$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial u}\Big|_q u'(0) + \frac{\partial f_2}{\partial v}\Big|_q v'(0)\Big)$$

df_p

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}(q) & \frac{\partial f_1}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}(q) & \frac{\partial f_2}{\partial u}(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{pmatrix}$$

es decir df_p es lineal

y va desde T_pS_1 en $T_{f(p)}S_2$

cuya matriz en las bases

$\{\varphi_u(q), \varphi_v(q)\}$ y $\{\psi_{\tilde{u}}(r), \psi_{\tilde{v}}(r)\}$
de T_pS_1 de $T_{f(p)}S_2$

es la matriz jacobiana de $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$

i.e
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}(q) & \frac{\partial f_1}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}(q) & \frac{\partial f_2}{\partial v}(q) \end{pmatrix}$$

<u>Def</u> El mapa lineal $df_p: T_pS_1 \to T_{f(p)}S_2$ es llamado diferencial de f en el punto p de S_1

Nota De manera similar se define la diferencial de una función

$f: S \to \mathbb{R}^n$ en el punto p

como un mapa lineal

$$df_p : T_pS \to \mathbb{R}^n$$

$$\Big(\underset{\substack{\shortparallel \\ \alpha(0)}}{df_p}(\alpha'(0)) = \frac{d}{dt}\Big|_0 f \circ \alpha(t) \Big)$$

$f \circ \alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

$\alpha'(0) \;/\; \alpha \in S \quad \alpha(0) = p$