Cor U, X Banach $T_n \in B(U, X)$.

si $\lim_{n\to\infty} T_n u$ $\exists$ p/c $u \in U$

y $Tu = \lim_{n\to\infty} T_n(u)$ en $T \in B(U, X)$

dem trivial que T lineal

$$T(u+v) = \lim T_n(u+v) \ldots \text{etc}$$

Como $\exists \lim_{n\to\infty} T_n(u)$ el $\{T_n u : n \in \mathbb{N}\}$

es acotado ent B-Steinhaus

$$\{\|T_n\| : n \in \mathbb{N}\} \quad (S = \mathbb{N}) \text{ ??}$$

o sea $\|T_n\| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ent $\|T_n\| = \|\lim T_n u\| = \lim \|T_n u\|$

$$\leq M \|u\|$$

Lema sea $S_k = \{(x_1, \dots, x_k, 0, \dots 0 \dots) : x_j \in \mathbb{F}\}$

$S = \bigcup^{\infty} S_k$ ent S denso en ℓ^p

si p finito y no es denso en ℓ^∞

Además ℓ^p es separable si $1 \leq p < \infty$

y no lo es si $p = \infty$

demo Sea $C = \{(x_1, \dots x_k, 0, \dots) : k \in \mathbb{N}$

$x_k : \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}\}$

es numerable y es fácil ver que es denso en ℓ^p con cuentas similares a ℓ^2 en el práctico, o por ver que (H Hilbert con b.o $\Rightarrow H$ sep)

En particular S es denso en ℓ^p pues $C \subset S \subset \ell^p$ y ent $\underset{\ell^p}{\overset{\shortparallel}{\overline{C}}} \subset \overline{S} \subset \overline{\ell^p} = \ell^p$

Además si $z = (1, 1, \dots)$

ent $\|z - x\|_\infty \geq 1 \quad \forall x \in S$. O sea

S no puede ser denso en ℓ^∞

•) Por último para ver ℓ^∞ no sep

sea $A = \{x^k\} \subset \ell^\infty$ un conjunto numerable

con $x^k = (x_1^k, x_2^k, \dots)$ definimos

$y \in \ell^\infty$ como $y_k = \begin{cases} x_k^k + 1 & \text{si } |x_k^k| \leq 1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$

ent $\|y - x^k\|_\infty \geq |y_k - x_k^k| \geq 1 \quad \forall k$

o sea no puede ser aproximada

por elementos de A ??

Teo Sea $p \in [1,\infty)$ y $q \in (1,\infty]$

tq $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ent

(a) si $a=\{a_n\} \in \ell^q$ ent $\forall x=\{x_n\} \in \ell^p$

la suc $\{a_n x_n\} \in \ell^1$ y $f_a : \ell^p \to \mathbb{F}$

def por $f_a(x) \doteq \sum^{\infty} a_n x_n$ esta

en $(\ell^p)'$ y $\|f_a\| = \|a\|_q$

b) $\forall f \in (\ell^p)'$, $\exists!\, a \in \ell^q \,/\, f = f_a$

c) $T_p : \ell^q \to (\ell^p)'$ def por

$$T_p\, a = f_a$$

es isomorfismo isométrico

dem (c) es consecuencia directa de (a) y (b)

Supongamos primero que $p>1$

es claro que f_a es lineal y por holder $\sum |a_n x_n| \leq \left(\sum^k |a_n|^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum^k |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

$$\leq \|a\|_q \|x\|_p$$

luego $\sum a_n x_n$ absolut convergente

Ademas $k \to \infty$ tenemos

$$\|f_a\| = \sup_{\|x\|_p = 1} \{|f_a(x)|\}$$

$$\leq \|a\|_q \|x\|_p \leq \|a\|_q$$

$\Rightarrow$ f_a acotada $\|f_a\| \leq \|a\|_q$

Sea $f \in (\ell^p)'$ arbitrario, sea $a_n = f(\tilde{e}_n)$ (I)

lineal por estar en dual

como $\tilde{e}_n = (0, \ldots, 1, 0 \ldots)$ para

$n \in \mathbb{N}$ sea $\gamma = (\gamma_1, \ldots \gamma_k, 0 \ldots) \in S_k$

con $\gamma_n = \begin{cases} 0 & \text{si } a_n = 0 \\ \dfrac{|a_n|^q}{a_n} & \text{si } a_n \neq 0 \end{cases}$

$1 \leq n \leq k$

para tales n $\gamma_n a_n \underset{\mathrm{II}}{=} |a_n|^q$

$$|\gamma_n|^p = |a_n|^{pq-p} = |a_n|^q$$

$$\|a\|_q = \sum^k |a_n|^q \underset{\mathrm{II}\ y\ \mathrm{I}}{=} \sum^k \underbrace{\gamma_n f(\tilde{e}_n)}_{\text{lineal}} = |f(\gamma)|$$

f acotada por ser del dual $\leq \|f\| \|\gamma\|_p$

$$= \|f\| \Big(\sum^k \underbrace{|\gamma_n|^p}_{=|a_n|^q}\Big)^{\frac{1}{p}}$$

$$\Rightarrow \frac{\sum |a_n|^q}{(\sum |a_n|^q)^{\frac{1}{p}}} \leq \|f\|$$

$$\Rightarrow (\sum |a_n|^q)^{1-\frac{1}{p} = \frac{1}{q}} \leq \|f\| \Rightarrow \|a\|_q \leq \|f\|$$

Como esto vale $\forall k$ la sucesión $a = \{a_n\} \in \ell^q$ y $\|a\|_q \underset{\mathrm{III}}{\leq} \|f\|$. Ahora

p/ $k \in \mathbb{N}$ y $x = \{x_n\} \in S_k$

$$f(x) = f\Big(\sum^k x_n \tilde{e}_n\Big) \underset{\text{I y linealidad de } f}{=} \sum^k x_n a_n = f_a(x)$$

luego $f = f_a$ en S. Como f denso en ℓ^p $f = f_a$ en ℓ^p. Además

así $f = f_a = f_b$ en ℓ^p ent también en S_1 osea $a_1 x_1 = b_1 x_1 \Rightarrow a_1 = b_1$

también en S_2 ent $a_2 = b_2$ ... etc

$\Rightarrow a = b$

observar que si ahora hacemos lo anterior

con f_a en lugar de f ent dada

$a = \{a_n\} \in \ell^2$ se tiene $a_n = f_a(\bar{e}_n)$

y luego $\|a\|_q \leq \|f_a\|$ Listo $p > 1$

) Si $p = 1$ el único cambio que hay

que hacer es para ver III

(es trivial que el resto sigue

valiendo)

Ahora $|a_n| = |f(\bar{e}_n)| \leq \|f\| \|e_n\|_\infty = \|f\|$ $\forall n$

$\Rightarrow \|a\|_\infty \leq \|f\|_1$

entonces vale III

esp vectorial topológico

Def X ev (X, τ) es topo tq

(a) $\forall x \in X$ $\{x\}$ es cerrado (τ es T_1)

(b) $(x, y) \longmapsto x + y$ son contivas
$(\alpha, x) \longmapsto \alpha x$ respecto a τ

osea $\forall (x_1, x_2) \in X \times X$

V entorno de $x_1 + x_2$
$\exists$ entorno U_1, U_2 de x_1, x_2 tq $U_1 + U_2 \subset V$

$\forall x \in X$ $\forall \alpha \in F$ V entorno de αx
$\exists r > 0$ y W ent tq $|\beta - \alpha| < r \Rightarrow \beta W \subset V$

En este caso se dice que X es esp vect topo

obs (a) + (b) $\Rightarrow$ τ es hausdorff
(lo probamos dsps)

(a) + (b) $T_a, M_\lambda : X \to X$ dadas por

$\tau_a x = x + a \quad m_\lambda x = \lambda x \quad \underset{\in \mathbb{F}}{\lambda \neq 0}$

son continuas con inversa continua (homeos)

osea τ es invariante.

$$G \subset X \text{ ab} \Leftrightarrow a + G \text{ ab} \quad a \in X$$

Luego τ queda determinada por cualquier base local, por lo tanto

de ahora en más base local se referirá a base local en 0

Osea una base local de un evt X es una flia $\mathcal{B}$ de entornos de 0 tq todo entorno de 0 contiene un elemento de $\mathcal{B}$

Lema (1) para $a \in X$ ent $\lambda \in \mathbb{G} - \{0\}$

$T_a: X \to X$ $\quad$ $M_\lambda: X \to X$ son homeo

$x \mapsto x+a$ $\quad$ $x \mapsto \lambda a$

(2) Si $X_0 \in X$ U ent de 0 $X_0 + U$ es entorno de X_0

(3) V entorno de 0 $F \subset X$ entonces $F+V$ es abierto y contiene a F

(4) Si U, V entorno de 0 ent

(a) $U \cap V$, $U \cup V$, $-U$ son entornos del 0

(b) $U \cap (-U)$ es entorno (simétrico) de 0 (A simétrico sii $A = -A$)

(c) Si U entorno simétrico $\Rightarrow U+U$ es entorno simétrico

⑤ W es normado de 0

$\Rightarrow \exists V$ es norm de 0 simétrico tq

$$V+V+V+V \subset W$$

dem ③ $F = \bigcup_{x\in F} \{x\} \subset \bigcup_{x\in F} (x+\underbrace{V}) = F+V$

V entorno de 0 — abierto por ② entorno de x

② traslados es homeo

⑥ Como $0\in W$ y $0=0+0$ por continuidad de la suma $\exists\, U_1, U_2$ entornos del 0

tq $U_1+U_2 \subset W$

$\Rightarrow U_0 = U_1 \cap U_2$ entorno del 0

y $U = U_0 \cap (-U_0)$ que es entorno simétrico del 0

Además $U+U \subset U_1+U_2 \subset W$. Aplicamos esto al entorno U, $\exists V$ entorno del 0 tq

$V+V \subset U$ ent $V+V+V+V \subset W$

Teo (Teo 1.10) X evt $K \subset X$ compacto $C \subset X$ cerrado / $K \cap C = \phi$ ent $\exists$ entorno de 0 V / $(K+V) \cap (C+V) = \phi$

dem Si $K = \phi$ por def $K+V = \phi$

listo.

Si $K \neq \phi$ $x \in K$ como $K \cap C = \phi$ y C cerrado $\exists$ abierto $W_x \subset X \setminus C$ tq $x \in W_x$. Por lema anterior

$W_x - x$ es abierto y $0 \in W_x - x$

o sea $W_x - x$ es entorno del 0

luego $\exists V_x$ entorno simétrico de 0

tq $U_x + V_x + V_x + V_x \subset W_x - x$

Lema 5

En particular $0 \in V_x$ y entonces

$V_x + V_x + V_x = 0 + V_x + V_x + V_x \subset W_x - x$

o sea $x + V_x + V_x + V_x \subset W_x \subset X \setminus C$

luego $(x + V_x + V_x + V_x) \cap C = \phi$

$\Rightarrow$ $\boxed{(x + V_x + V_x) \cap (C + V_x) = \phi}$ $(*)$

Si no sea z en la intersección

como $z \in C + V_x$, $\exists c \in C \,/\, v \in V_x$

y $z = c + v$

o sea $c = z + (-v) \in x + V_x + V_x + V_x$

$z \in x + V_x + V_x$

$-v \in V_x$ pues V_x simétrico

pero $c \in C$ abs!

Ahora $K \subset \bigcup_{x \in K} \underbrace{(x + U_x)}_{\text{abierto}}$

$(K \text{ compacto}) \Rightarrow K \subset \bigcup_{i=1}^{n} x_i + U_{x_i}$

Sea $V = \bigcap^{n} V_{x_i}$ ent

$\underbrace{K + V \subset}_{\text{I}} \bigcup^{n} (x_i + U_{x_i}) + V = \{x + v : x \in \bigcup^{n} x_i + U_{x_i} ; v \in V\}$

$= \bigcup_{i=1}^{n} \{x + v : x \in x_i + U_{x_i} , v \in V\}$

$\subset \bigcup^{n} (x_i + U_{x_i} + U_{x_i})$

y además $C + V \subset C + V_{x_i} \quad \forall i$

como $\circledast \Rightarrow (x_i + U_{x_i} + U_{x_i}) \cap (C + U_{x_i}) = \emptyset \quad \forall i$

$\Rightarrow (x_i + U_{x_i} + V_{x_i}) \cap (C + V) = \emptyset$ o sea

$\left[\bigcup_{i=1}^{n} (x_i + U_{x_i} + U_{x_i})\right] \cap (C + V) = \emptyset$

$K + V \overset{\subset}{\text{I}}$ Listo por I

Corolario todo evt es t_2

dem $x, y \in X$ $\overbrace{K = \{x\}}^{\text{compacto}}$ $\overbrace{C = \{y\}}^{\text{cerrado por def evt}}$

y teo de arriba

---

obs Como $K+V$ y $C+V$ son abiertos disjuntos ent también $\overline{K+V} \cap (C+V) = \phi$

En efecto si $x \in C+V$ ent $\exists\, U$ entorno de x con $U \subseteq C+V$.

si $x \in \overline{K+V} \Rightarrow$ todo entorno de x interseca a $K+V$ en particular $\exists y \in U \cap (K+V)$ abs!

Corolario (teo 1.11) $\mathcal{B}$ base de X ent

Ent todo miembro de $\mathcal{B}$ contiene la clausura de algún otro miembro de B osea $\forall U \in \mathcal{B}$ $\exists W \in \mathcal{B}$ tq

$$\overline{W} \subset U$$

luego tomamos $K = \{0\}$ $C = U^c$

obs anterior $\Rightarrow$ $\exists V$ entorno de 0 tq

$$\overline{V} \cap U^c = \emptyset \quad \text{listo}$$

def $B \subset X$ est balanceado sii

son