

## Algunas construcciones categóricas

### Productos

- Sean  $G, H$  grupos  $G \times H = \{(g, h) \mid g \in G, h \in H\}$

$G \times H$  es un grupo con el producto  $(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1 g_2, h_1 h_2)$

Donde el neutro es  $e_{G \times H} = (e_G, e_H)$

El inverso  $(g, h)^{-1} = (g^{-1}, h^{-1})$

- Sea  $\{G_i\}_{i \in I}$  familia de grupos

El producto cartesiano es  $\prod_{i \in I} G_i = \{f: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} G_i \mid f(i) \in G_i\}$

$f \equiv \{a_i\}_{i \in I}$  tal que  $a_i = f(i) \in G_i \quad \forall i \in I$

$\prod_{i \in I} G_i$  es un grupo con el producto "componente a componente":

$$\{a_i\}_{i \in I} \cdot \{b_i\}_{i \in I} = \{a_i b_i\}_{i \in I}$$

El neutro es  $e = \{e_i\}_{i \in I} \quad e_i \in G_i \text{ neutro}$

El inverso  $\{a_i\}_{i \in I}^{-1} = \{a_i^{-1}\}_{i \in I}$

Para cada  $i \in I$  definimos  $\pi_i: \prod_{j \in I} G_j \rightarrow G_i$  dada por  $\pi_i(\{a_j\}_{j \in I}) = a_i$

$\pi_i$  es homo de grupos  $\forall i \in I$

**Proposición:** el par  $(\prod_{i \in I} G_i, \{\pi_i\}_{i \in I})$  cumple la siguiente propiedad universal:

para todo grupo  $G$  y homos de grupos  $G \xrightarrow{f_i} G_i, i \in I$ , existe un único

homo  $G \xrightarrow{f} \prod_{i \in I} G_i$  tal que  $\pi_i \circ f = f_i, \forall i \in I$

Notación:  $f = \prod_{i \in I} f_i$

Diagramas:

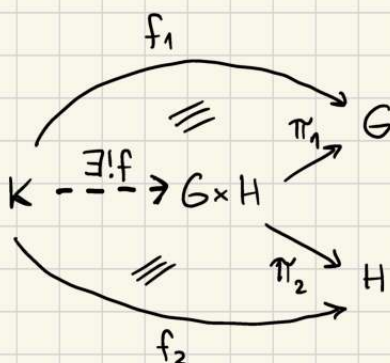
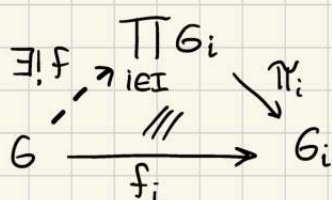
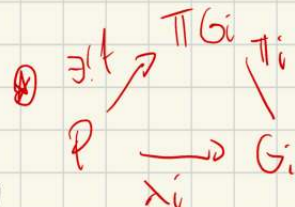
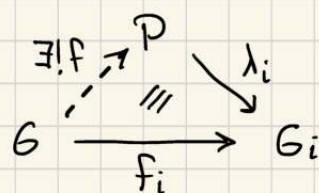


Diagrama de la prop. universal para el prod. cartesiano

Además esta propiedad determina al par  $\left(\prod_{i \in I} G_i, \{\pi_i\}_{i \in I}\right)$  salvo un único isomorfismo, es decir, que si  $(P, \{\lambda_i\}_{i \in I})$  es otro par que cumple la misma prop. universal, entonces existe un único iso  $f: P \rightarrow \prod_{i \in I} G_i$  tal que  $\lambda_i = \pi_i \circ f \quad \forall i \in I$

$\prod_{i \in I} G_i$  se dice el producto de la familia  $\{G_i\}_{i \in I}$  en la categoría  $G_p$  (de grupos)



Demostración:

- Veamos que  $\left(\prod_{i \in I} G_i, \{\pi_i\}_{i \in I}\right)$  tiene la propiedad universal

Sea  $f_i: G \rightarrow G_i, i \in I$

Definimos  $f: G \rightarrow \prod_{i \in I} G_i$  en la forma  $f(g) = \{f_i(g)\}_{i \in I}$

Es claro que  $f$  es homo (pues  $f_i$  lo es  $\forall i$ ) y  $\pi_i \circ f = f_i \quad \forall i \in I$

Ahora veamos que  $f$  es único:

Si  $\tilde{f}: G \rightarrow \prod_{i \in I} G_i$  es tal que  $\pi_i \circ \tilde{f} = f_i$

Si denotamos  $\tilde{f}(g) = \{a_i\}_{i \in I} \Rightarrow a_i = f_i(g) \quad \forall i \in I$   
 $\pi_i \circ \tilde{f}(g)$

Luego  $\tilde{f}(g) = \{f_i(g)\}_{i \in I} = f(g)$  y como esto sucede  $\forall g \in G \Rightarrow f = \tilde{f}$

Resta probar la unicidad de  $\left(\prod_{i \in I} G_i, \{\pi_i\}_{i \in I}\right)$  con la propiedad universal

Sea  $(P, \{\lambda_i\}_{i \in I})$  otro tal par con  $\lambda_i: P \rightarrow G_i$

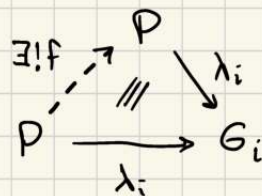
Por la propiedad universal de  $\left(\prod_{i \in I} G_i, \{\pi_i\}_{i \in I}\right) \exists!$  homo  $f: P \rightarrow \prod_{i \in I} G_i$  tal que  $\pi_i \circ f = \lambda_i \quad \forall i \in I$

Por otro lado, los homo  $\pi_i: \prod_{i \in I} G_i \rightarrow G_i$ , por la propiedad universal de  $(P, \{\lambda_i\}_{i \in I})$ ,  $\exists!$  homo  $\bar{f}: \prod_{i \in I} G_i \rightarrow P$  tal que  $\lambda_i \circ \bar{f} = \pi_i \quad \forall i \in I$

Luego tomemos  $\bar{f} \circ f: P \rightarrow P$  homo que satisface  $\underbrace{\lambda_i \circ \bar{f}}_{\pi_i} \circ f = \pi_i \circ f = \lambda_i \quad \forall i \in I$



Resulta entonces  $\bar{f}f = \text{id}_P$  pues  $\exists! f$  que hace que el diagrama conmute y tal  $f$  es  $\text{id}_P$



De manera similar  $f\bar{f} = \text{id}_{\prod G_i}$ , lo cual muestra que  $f$  es iso

Que  $f$  sea único con esta propiedad de nuevo es consecuencia de la unicidad en la propiedad universal  $\square$

## COPRODUCTO Ó SUMA DIRECTA

Sea  $\{G_i\}_{i \in I}$  familia de grupos, el **coproducto** de los  $G_i$ 's es

$$\coprod_{i \in I} G_i = \left\{ \{a_i\}_{i \in I} \in \prod_{i \in I} G_i \mid a_i = e_i \text{ (neutro de } G_i) \text{ para todos salvo un n}^\circ \text{ finito de } i \in I \right\}$$

para casi todos  $\forall$

El n° finito depende del  $a_i$  en cuestión

$\coprod_{i \in I} G_i$  es un subgrupo de  $\prod_{i \in I} G_i$ . En particular es un grupo con el producto componente a componente:

inclusión natural  $\hookleftarrow \iota_i : G_i \longrightarrow \coprod_{i \in I} G_i$  homo

$$\iota_i(g)(j) = \begin{cases} g, & j=i \\ e_j, & j \neq i \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1, 0, 2, 0, \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, 0, 0, \dots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0, 0, 2, 0, \dots \end{pmatrix}$$

$\uparrow \iota_1$                        $\uparrow \iota_3$   
 $\downarrow$                                        $\downarrow$

$\rightarrow$  por ello se lo llama suma directa al coproducto

$\left( \coprod_{i \in I} G_i, \{\iota_i\}_{i \in I} \right)$  es el coproducto de  $\{G_i\}$  en  $G_p$

$\nearrow$  abelianos

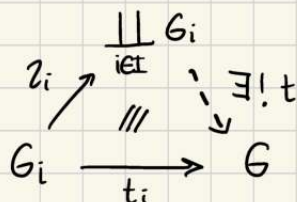
**Proposición:** el par  $\left( \coprod_{i \in I} G_i, \{\iota_i\} \right)$  cumple con la siguiente propiedad universal:

$\forall$  grupo abeliano  $G$  y homs  $G_i \xrightarrow{t_i} G, i \in I$ , existe un único homo

$$\coprod_{i \in I} G_i \xrightarrow{t} G \text{ tal que } t \iota_i = t_i \quad \forall i \in I$$

Ademas  $\left( \coprod_{i \in I} G_i, \{\iota_i\} \right)$  es único salvo un único iso con esta propiedad

Diagramas:



Es igual al diagrama anterior pero con las flechas en dirección opuesta

## Demostración:

→ pl esto me ayuda que sea abeliano

Veamos que cumple la propiedad. Sea  $G_i \xrightarrow{t_i} G$ ,  $i \in I$

Sea  $t: \coprod_{i \in I} G_i \rightarrow G$ ,  $t(\{a_i\}_{i \in I}) = \sum_{i \in I} t_i(a_i) \in G$  tiene sentido pues los  $a_i$ 's son casi todos 0 y como  $G$  es abeliano, no importa el orden en que sume

$$t(\{a_i\} + \{b_i\}) = t(\{a_i + b_i\}_{i \in I}) = \underbrace{\sum_{i \in I} t_i(a_i + b_i)}_{\text{suma finita}} = \left( \sum_{i \in I} t_i(a_i) \right) + \left( \sum_{i \in I} t_i(b_i) \right) = t(\{a_i\}) + t(\{b_i\})$$

$$t \circ \iota_i(a) = t(\{a_j\}_{j \in I}), \quad a_j = \begin{cases} a & \text{si } i=j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad \therefore t \circ \iota_i(a) = t_i(a)$$

Ahora, la unicidad de  $(\coprod G_i, \{\iota_i\})$  se prueba de la misma forma que se hizo para el producto → ejercicio □

Notación alternativa para el coproducto

$$\bigoplus_{i \in I} G_i$$

$$\text{ó } \sum_{i \in I} G_i$$

Se lo suele llamar suma directa externa

El coproducto se puede definir siempre pero este no siempre existe

El coproducto en la categoría de grupos abelianos finitos

## GRUPOS LIBRES Y PRESENTACIONES

Sea  $X$  conjunto, tomemos conjuntos  $X^{-1}$  y  $\{e\}$  ambos disjuntos con  $X$  y entre sí, tales que  $X^{-1}$  está en correspondencia biyectiva con  $X$ .

Denotamos por  $x^{-1} \in X^{-1}$  al elemento que corresponde a  $x \in X$  bajo una biyección (fija)

alfabeto

Una palabra en  $X \cup \{e\} \cup X^{-1}$  es una sucesión  $(a_1, a_2, \dots)$  donde  $a_i \in X \cup \{e\} \cup X^{-1}$  y  $\exists n \in \mathbb{N}$  tal que  $a_i = e \quad \forall i \geq n$  (ie es sucesión finita)

Notación:  $a_1 a_2 \dots a_n$

Una palabra  $a = (a_1 a_2 \dots)$  se dice **reducida** si cumple:

i)  $\forall x \in X$ , los elementos  $x$  y  $x^{-1}$  no son adyacentes en  $a$

ii) Si  $a_k = e \Rightarrow a_i = e \quad \forall i \geq k$  (el neutro  $e$  no se intercala con otros elem.)

**Palabra vacía:**  $(e, e, e, \dots)$  es reducida

Toda palabra reducida (no vacía) es de la forma:

$$\underbrace{x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}}_{\substack{x_1 \dots x_1 \quad x_2 \dots x_2 \quad \dots \quad x_n \dots x_n \\ k_1\text{-veces} \quad k_2\text{-veces} \quad \dots \quad k_n\text{-veces}}} \text{ tal que } x_i \in X, n \in \mathbb{N}, k_i \in \{0, 1\}$$