Teorema G grupo $N \leq G$. Son equivalentes

(i) $\equiv_r(N)$ y $\equiv_\ell(N)$ coinciden

(ii) toda coclase a izquierda de N en G es una coclase a derecha de N en G

(iii) $aN = Na \quad \forall a \in G$

(iv) $\forall a \in G \quad aNa^{-1} = \{axa^{-1} : x \in N\} \subset N$

(v) $\forall a \in G \quad aNa^{-1} = N$

def ~~si~~ N satisface alguna de estas eq se dice normal $N \triangleleft G$

demo Sabemos que toda rel de eq da lugar a una partición y viceversa

Además dos rel de eq son iguales sii sus particiones asociadas son iguales

En particular se sigue i) $\Rightarrow$ iii)

ii $\Rightarrow$ iii) Supongamos que una coclase a derecha Na es también una coclase a izq: $\exists b,\ Na = bN$ ent $\underset{\Rightarrow a \in bN}{}\ \Rightarrow a \in bN \cap aN$

(a siempre está en aN y Na) $\Rightarrow bN = aN \Rightarrow Na = aN$

iii) $\Rightarrow$ iv) $(aN)a^{-1} = (Na)a^{-1} \subset N$

iv) $\Rightarrow$ v) $aNa^{-1} \subset N \quad \forall a \in G$

en particular $a^{-1}Na \subset N$

$a^{-1}(aNa^{-1})a \subset a^{-1}Na$

Si $x \in N \quad x = a^{-1}a\,x\,a^{-1}a$

$\Rightarrow N \subset a^{-1}(aNa^{-1})a \subset a^{-1}Na$

$\Rightarrow N = a^{-1}N\cancel{a}$

como vale por todo $a \in G$ vale por a^{-1}

$\Rightarrow N = aNa^{-1}$

v) $\Rightarrow$ i) Sea $a \in G$ aN coclase a izq

$N = a^{-1}Na$

$\Rightarrow aN = aa^{-1}Na = Na$

---

ejemplo sea $T: G \to K$ un morfismo de grupos. $\ker T \triangleleft G$

dem $x \in G$, $m \in \ker T$ queremos ver

$x m x^{-1} \in \operatorname{Nu} T$ $\left(\Rightarrow x \operatorname{Nu}(T) x^{-1} \subset \operatorname{Nu}(T) \text{ (IV)} \right)$

en efecto $T(x m x^{-1}) = T(x) T(m) T(x^{-1})$

$= T(x) e T(x^{-1}) = e$

$\Rightarrow x m x^{-1} \in \operatorname{Nu} T$

---

ejemplo X conjunto no vacio

$S_X = \{ f : X \to X \,/\, f \text{ biyectiva} \}$

Se define $\operatorname{Ad} : G \to S_X$ donde G

es grupo así

*) sea $x \in G$, $a \in G$. $\operatorname{Ad} a \in S_G$

def $\operatorname{Ad} a\,(x) = a x a^{-1}$

obs $\underbrace{(\operatorname{Ad} a)}_{\varphi(a)} \underbrace{(\operatorname{Ad} b)}_{\varphi(b)} = \operatorname{Ad}(ab) = \varphi(ab)$ $\quad \operatorname{Ad} e = \operatorname{Id}_G$

demo $x \in G$ $\quad (\operatorname{Ad} a)(\operatorname{Ad} b)(x) = \operatorname{Ad} a\,(b x b^{-1})$

$= a b x b^{-1} a^{-1}$

$= (ab) x (ab)^{-1}$

$= \operatorname{Ad}(ab)(x)$

$\Rightarrow \operatorname{Ad} a$ es morfismo (además automorf)

Conclusión: Si $a \in G$, $\mathrm{Ad}\,a : G \to G$ es biyectiva y $(\mathrm{Ad}\,a)^{-1} = \mathrm{Ad}(a^{-1})$ ← I

$$\mathrm{Ad}\,a \cdot \mathrm{Ad}(a^{-1}) = \underbrace{\mathrm{Ad}\,a a^{-1}}_{\text{morfismo}} = \mathrm{Ad}\,e = \mathrm{Id}_G$$

$$\mathrm{Ad}(a^{-1})\mathrm{Ad}(a) = \mathrm{Ad}\,e = \mathrm{Id}_G \quad \text{(análogo)}$$

$\Rightarrow$ biyectiva

$$G \to \mathrm{Aut}\,G$$
$$a \mapsto \mathrm{Ad}\,a$$

---

ej 5 en $\mathrm{Aut}\,G = \{T \in S_G : T(xy) = T(x)T(y) \ \forall x, y \in G\}$

$= \{\text{automorfismo de } G\}$

ent 1) $\mathrm{Aut}\,G \leq S_G$

2) $\mathrm{Im}\,\mathrm{Ad} \trianglelefteq \mathrm{Aut}\,G$

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\mathrm{Ad}} & S_G \\ & & \text{\rotatebox{90}{$\leq$}} \\ \text{(I)}\ \mathrm{Ad} & \rightsquigarrow & \mathrm{Aut}\,G \end{array}$$

$$\boxed{g\, \mathrm{Im}\,\mathrm{Ad}\, g^{-1} \subseteq \mathrm{Im}\,\mathrm{Ad} \quad \forall g \in S_G}$$

Nota $\mathrm{Im}\,\mathrm{Ad} = \mathrm{Int}\,G$ (automorfismos interiores)

¿qué es $\mathrm{Nu}\,\mathrm{Ad}$?

Sea $x \in G$. $x \in \mathrm{Nu}\,\mathrm{Ad} \Leftrightarrow \mathrm{Ad}\,x = \mathrm{Id}_G$

$\Leftrightarrow \forall y \in G \quad (\mathrm{Ad}\,x)(y) = y$

$\Leftrightarrow \forall y \in G \quad x y x^{-1} = y$

$\circledast \Leftrightarrow \forall z \in G \quad x z = z x$

en efecto $(\Rightarrow)$ sea $z \in G$ ent

$$x z = (x z x^{-1}) x = z x$$

$(\Leftarrow)$ si $y \in G$ $\quad (xy)x^{-1} = (yx)x^{-1} = y$

<u>Notación</u> $Z(G) = \mathrm{Nu}\,\mathrm{Ad} = \{x \in G : xy = yx \ \ \forall y \in G\}$

"centro de G".

Claramente $Z(G) \triangleleft G$ $\quad$ ($Z(G)$ abeliano)

<u>ej</u> si $H \leq Z(G) \Rightarrow H \triangleleft G$

<u>obs</u> si G es abeliano y $H \leq G$

$\Rightarrow H \triangleleft G$

<u>ejemplos</u> 1) $G = S_3$

$N = \{\mathrm{Id}, (123), (132)\}$

ent $N \triangleleft S_3$ pero $Z(S_3) = \{e\}$

2) $N \leq M \leq G \quad N \triangleleft M \quad M \triangleleft G \not\Rightarrow N \triangleleft G$

pero $N \triangleleft G \Rightarrow N \triangleleft M$

<u>Teorema</u> Sean G grupo $N \triangleleft G, K \leq G$

ent (i) $N \cap K \triangleleft K$

(ii) $N \triangleleft N \vee K = \{$subgrupo generado por $N \cup K\}$

(iii) $NK = N \vee K$

(iv) supongamos que $K \triangleleft G$ y $K \cap N = \{e\}$

ent: $\forall k \in K \quad n \in N : \quad kn = nk$

<u>demo</u> i) Sea $x \in N \cap K \quad y \in K$. <u>Ver</u> $yxy^{-1} \in N \cap K$

como $N \triangleleft G, x \in N \Rightarrow yxy^{-1} \in N$

como $x \in K \quad yxy^{-1} \in K$

ii) $N \leq N \vee K \Rightarrow N \cap (N \vee K) = N$

por i) $N \cap (N \vee K) \triangleleft N \vee K \Rightarrow$ ii)

iii) Veamos $NK \leq G$. Sean $x, y \in NK$

$x = nk \quad y = ml \qquad n, m \in N \quad k, l \in K$

$x.y = nkml = n\underbrace{kmk^{-1}}_{\in N}\underbrace{kl}_{\in K} \Rightarrow \in N$ pues $N \triangleleft G$

Así $x, y \in NK$ Ahora $x^{-1} = (nk)^{-1} = k^{-1}n^{-1}$

Ahora $x^{-1} = (nk)^{-1} = k^{-1}n^{-1}$

$$= \underbrace{(k^{-1}n^{-1}k)}_{\in N}\underbrace{k^{-1}}_{\in K}$$

Ahora NK es un subgrupo $NK \supseteq N$

$NK \supseteq K \Rightarrow NK \supseteq N \vee K$

por otro lado $NK \subseteq N \vee K$ (siempre)

$\Rightarrow NK = N \vee K$

<u>Además</u> $NK = KN$ tomando inverso

(iv) $N \triangleleft G$ $K \triangleleft G$ $K \cap N = \{e\}$

Sea $k \in K$ $n \in N$

$n(kn^{-1}k^{-1}) \in K \cap N = \{e\}$

$\Rightarrow nkn^{-1}k^{-1} = e$

$nkn^{-1} = k$

$nk = kn$

Teorema Sea G un grupo, $N \triangleleft G$. ent el conjunto de coclases es un grupo de orden $[G:N]$ respecto de la operación

$$(aN)(bN) = abN \quad (*)$$

$\boxed{\text{notación } G/N \text{ se lo llama el grupo cociente } N}$

dem en 1er lugar veremos la operación $*$ está bien definida

es decir si $\left.\begin{array}{l} a \equiv a_1 (N) \\ b \equiv b_1 (N) \end{array}\right\} \overset{?}{\Rightarrow} ab \equiv a_1 b_1 (N)$

por hipótesis $\exists\, m, n \in N$ $\quad a = a_1 n$
$\quad b = b_1 m$

ent $ab = a_1 n b_1 m = a_1 b_1 \underbrace{(\underbrace{b_1^{-1} n b_1}_{\in N}) m}_{\in N} = p$ $\quad N \triangleleft G$

$= a_1 b_1 p$ con $p \in N$

) se sigue inmediatamente que la operación $*$ es asoc admite inversas $(aN)^{-1} = a^{-1}N$ y neutro eN

obs Sea $\pi : G \to G/N$ la fn $\pi(a) = aN$

ent 1) π es un morfismo de grupos

2) $Nu\,\pi = N$

$Nu\,\pi = \{a \in G : aN = N\} = N$

$\Rightarrow nhn^{-1}h^{-1} = e$

$\Rightarrow nhn^{-1} = h$

$nh = hn$

3) π es survectiva

teorema Sea $f : G \to H$ un morfismo de grupo. ent $N = Nu\,f$ es normal en G

f induce un morfismo de grupos

$$\bar{f} : G/N \to H \qquad \bar{f}(a, N) = f(a)$$

demo En 1er lugar. Veamos la buena def de $\bar{f}$: si $aN = bN \overset{?}{\Rightarrow} f(a) = f(b)$

en efecto si $aN = bN$ ent $\exists\, n \in N$ tq

$a = bn$

$\Rightarrow f(a) = f(bn) = f(b) f(n) \overset{n \in Nu\,f}{=} f(b)$

$\therefore \bar{f} : G/N \to H$ bien def

ej $Im\,\bar{f} = Im\,f \qquad Nu\,\bar{f} = \{e\}$

ej Sea $g: H \to K$ morfismo de grupos

g es inyectiva $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Nu}\, g = \{e\}$