ANÁLISIS NUMÉRICO I / ANÁLISIS NUMÉRICO — **Práctico N°1 - 2023**

Preliminares matemáticos: error absoluto y relativo, sistema de punto flotante, velocidad de convergencia, notación $\mathcal{O}$ y o.

Aclaración: La agrupación de ejercicios por subtemas intenta englobar el tema principal de cada grupo, sin embargo pueden existir ejercicios que involucren más de un tema.

Series de potencias y de Taylor

1. *a*) Obtener la serie de Taylor centrada en 0 para la función $f(x) = \ln(x+1)$. Escribir la serie usando la notación de sumatorias. Dar una expresión para el resto cuando la serie es truncada en k términos.

   b) Estimar el número de términos que deberán incluirse en la serie para aproximar $\ln(1.5)$ con un margen de error no mayor que 10^{-10}.

2. Si la serie para $\ln(x)$ centrada en $x = 1$ se corta después del término que comprende a $(x-1)^{1000}$ y después se utiliza para calcular $\ln(2)$ ¿Qué cota se puede imponer al error?

3. Verificar la siguiente igualdad y mostrar que la serie converge en el intervalo $-e < x \le e$

$$\ln(e+x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \left(\frac{x}{e}\right)^k.$$

4. Desarrollar la función $\sqrt{x}$ en serie de potencias centrada en $x = 1$ y verifique que utilizando la aproximación lineal de dicha función se puede aproximar $\sqrt{0.9999999995}$ con un error no mayor que 10^{-10}.

Notación $\mathcal{O}$ y o

5. Verificar que las siguientes sucesiones convergen a 1 y analizar su velocidad de convergencia:

   a) $x_n = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$ *b*) $x_n = 1 + \frac{1}{2^{2^n}}$ *c*) $x_n = 1 + \frac{1}{n^n}$.

6. Para n fijo, demostrar que $\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1}{1-x} + o(x^n)$ cuando $x \to 0$.

7. Mostrar que si $E = \mathcal{O}(h^n)$ cuando $h \to 0$, entonces $E = \mathcal{O}(h^m)$ cuando $h \to 0$ para todo m entero no negativo tal que $m \le n$.

8. Mostrar que toda función “suave” (esto significa con todas las derivadas que sean necesarias) se puede aproximar en un intervalo de longitud h por medio de un polinomio de grado n con una cota del error de orden $\mathcal{O}(h^{n+1})$ cuando $h \to 0$.

9. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique.

   a) $\frac{1}{x^2} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right) \quad (x \to 0)$

   b) $\frac{n+1}{n^2} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \to \infty)$

   c) $\frac{1}{x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right) \quad (x \to 0)$

   d) $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \mathcal{O}(x^4) \quad (x \to 0)$

10. *a*) En numerosas ocasiones, principalmente dentro de la Física, la aproximación $\operatorname{sen}(x) \approx x$ para x suficientemente pequeño, es usualmente usada. Determinar el intervalo alrededor de x para el cual esto se cumple con un error relativo de 0.5×10^{-14}.

b) Otra forma equivalente de decir que $\text{sen}(x) \approx x$ para x suficientemente pequeño es mediante la expresión matemática

$$\text{sen}(x) = x + \mathcal{O}(x^3) \qquad (x \to 0)$$

Justifique la expresión anterior.

Sistema de punto flotante

11. Considerar los siguientes números reales: $u = 3.721478693$ y $v = 3.720230572$. La resta $u - v$ es igual a 0.001248121. Si los cálculos se efectúan en un sistema de punto flotante en base 10 y con 5 dígitos decimales [1] , verificar que el error relativo de la resta es del 4 % aproximadamente.

12. En un sistema de punto flotante en base 10 y con 5 dígitos decimales, ¿qué números reales x cumplen $fl(1.0 + x) = 1.0$?

13. Dar una forma alternativa para realizar las siguientes operaciones evitando la pérdida de dígitos significativos, para x próximo a 0:

    a) $(\alpha + x)^n - \alpha^n$, para $\alpha > 0$, $x > 0$

    b) $\alpha - \sqrt{\alpha^2 - x}$

    c) $\ln(\alpha + x) - \ln(\alpha)$, para $\alpha > 0$

    d) $\text{sen}(\alpha + x) - \text{sen}(\alpha - x)$

14. Considerar los siguientes números: $x_1 = 1.234 \times 10^1, x_2 = 3.453 \times 10^0, x_3 = 3.441 \times 10^{-2}, x_4 = 4.667 \times 10^{-3}, x_5 = 9.876 \times 10^{-4}$. Realizar la suma $x_1 + \ldots + x_5$ en el sistema de punto flotante con base 10 y 4 dígitos decimales en orden creciente y decreciente. ¿Cuál será más conveniente? (El resultado correcto es 15.8330646).

15. Hallar la raíz menor (en módulo) de la ecuación $x^2 - 40x + 0.25 = 0$, utilizando aritmética de punto flotante en base 10 y con 4 dígitos decimales y comparar con el resultado obtenido utilizando aritmética exacta. Calcular el error relativo. ¿A qué se debe la pérdida de dígitos significativos? Proponer otro método alternativo para calcular esa raíz con mayor precisión. ¿Cuál es el error relativo con el nuevo método?

16. El municipio ha acordado pagarle a la empresa de ómnibus urbano una comisión del 9.3 % por cada boleto vendido. Para sus finanzas el municipio usa un software configurado con aritmética de punto fijo con dos decimales. Sabiendo que el boleto cuesta C$ 2.25 (pesos Cordobeses):

    a) ¿cuánto dinero debería ganar la empresa por cada boleto vendido? Si la cuenta que hace el municipio en su software es 2.25×9.3 y luego divide por 100, ¿cuánto dinero va a darle el municipio a la empresa por cada boleto vendido?

    b) Ya que se estima en 14 millones el número de personas que viajan mensualmente en ómnibus, ¿cuánto dinero paga el municipio y cuánto debería ganar la empresa mensualmente?

    c) Sugerir al municipio cómo puede hacer la cuenta en esa aritmética evitando el error de redondeo.

17. Mostrar en los siguientes cálculos que, trabajando con punto flotante con una precisión de 4 dígitos decimales, no valen las leyes asociativa y distributiva.

    a) $0.98765 + 0.012424 - 0.0065432$

    b) $(4.2832 - 4.2821) \times 5.7632$

[1] Durante esta materia consideraremos el sistema de punto flotante con un cero delante de la coma, y el primer número después de la coma distinto de cero. La cantidad de decimales indica el número de dígitos después de la coma. Es decir, un número en punto flotante en base 10 con k dígitos decimales se escribe:

$$0, d_1 d_2 \cdots d_k \cdot 10^\beta \quad \text{con } d_1 \neq 0,\ d_i \in \{0, 1, \ldots, 9\} \text{ y } \beta \in \mathbb{Z}.$$

18. Evaluar el polinomio $P(x) = x^3 - 6x^2 + 3x - 0.149$ en $x = 4.71$ utilizando aritmética de punto flotante de 3 dígitos decimales. Evaluarlo luego usando la expresión alternativa $P(x) = ((x - 6)x + 3)x - 0.149$ (denominada Esquema de Horner). Comparar con el resultado exacto y sacar conclusiones.

Material adicional: Notación $\mathcal{O}$

- What is Big O Notation Explained: Space and Time Complexity
- Rendimiento de algoritmos y notación Big-O
- Use Big O Notation to Design Better Algorithms
- Big-O notation in 5 minutes — The basics
- Notación Big O — Análisis de algoritmos de forma sencilla