Operadores normales

$T: U \to U$ U-evpi tiene bon de avecs

$B \rightsquigarrow [T]_B = \begin{pmatrix} c_1 & & \\ & \ddots & \\ & & c_n \end{pmatrix}$

$$[T^*]_B = \overline{[T]}^t_B = \begin{pmatrix} \bar{c_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \bar{c_n} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow TT^* = T^*T$$

<u>def</u> Una Tl se llama normal si $TT^* = T^*T$

<u>ejemplo</u> T tiene bon de avecs

$\Rightarrow$ T normal

<u>ejemplo</u> T autoadjunta $(T = T^*)$

<u>Teorema</u> $T: U \to U$ Tl autoadjunta $\dim U < \infty$ entonces todo autovalor T es real y avec asociados son ortogonales (si es que existen aval)

demo c aval de T. Sea v avec

$$c\|v\|^2 = c(v|v) = (cv|v) = (Tv|v)$$

$$\text{autoadj} = (v|T^*(v)) = (v|T(v))$$

$$= (v|cv) = \bar{c}(v|v)$$

$$= \bar{c}\|v\|^2$$

$$\Rightarrow \bar{c} = c \Rightarrow c \in \mathbb{R}$$

Sea $d \neq c$ otro aval, w su avec

$$c(v|w) = (cv|w) = (T(v)|w) = (v|Tw)$$

$$= (v|dw) = \bar{d}(v|w)$$

avals son reales $\quad = d(v|w)$

como $d \neq c$

$$(v|w) = 0$$

$\Rightarrow v, w$ son ortogonales

Teorema $T: V \to V$ autoadj ($\dim V < \infty$)

$\Rightarrow$ tiene un aval real

???

$\Rightarrow$ tiene un aval por lo menos

demo, V es $\mathbb{C}$-ev $\Rightarrow \mathbb{C}$ alg cerrado

y teorema

•) V es $\mathbb{R}$-ev: Fijemos B bon

$\leadsto$ $A = [T]_B \in \mathbb{R}^{n\times n}$

ev. 1 canónico

$A^t = A$ (autoadj). Tomemos $S : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$

$Sv = Av$

$A = [S]_C$

$\Rightarrow A^* = A^T = A$

•) S es autoadjunta

$\Rightarrow$ (caso 1) Tiene aval real

$\Rightarrow$ $X - c \mid P_S = P_A = P_T$

$\therefore c$ aval de T $(c \in \mathbb{R})$

Prop $T : V \to V$ TL $\dim V < \infty$ $W \subseteq V$ subesp

T-inv $\Rightarrow W^\perp$ es T^*-inv

demo Tomemos $v \in W^\perp$ queremos probar $T^* v \in W^\perp$... Para cada $w \in W$

$$(w \mid T^* v) = (\underbrace{Tw}_{\in W} \mid v) = 0$$

$\Rightarrow T^*(v) \in W^\perp \quad \forall v \in V$

<u>Teorema</u> $T: V \to V$ autoadj $\dim V < \infty$ entonces $\exists B$ base ortonormal tal que todo elemento de B es avec

<u>demo teorema</u> Del teo anterior $\exists v_1 \in V$ avec (con $c_1 \in \mathbb{R}$ aval asociado) $\|v_1\| = 1$ (si no fuera normal normalizo)

Si $\dim V = 1$ ya esta

Si $\dim V > 1$ llamamos $W = \langle v_1 \rangle$

$\overset{\text{prop}}{\Rightarrow} W^\perp$ es $T^* = T$ (autoadjunta) - invariante

Miramos $\tilde{T} = T|_{W^\perp} : W^\perp \to W^\perp$ $\langle Tv | w \rangle = \langle v | Tw \rangle$ T auto adjunta

$(\cdot|\cdot): V \times V \to K \rightsquigarrow (\cdot|\cdot)|_{W^\perp} : W_\perp \times W_\perp \to K$

prod interno heredado para el cual

$\langle T|_{W^\perp} v | w \rangle = \langle v | T|_{W^\perp} w \rangle$

$\tilde{T}$ es autoadjunta, $\dim W^\perp = \dim V - 1$

por inducción $\exists \{v_2, \dots v_n\}$ bon de $W^\perp$ donde cada v_i es avec de $\tilde{T} = T|_{W^\perp}$

De aqui $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una bon de V donde cada v_i es avec de T D

Teorema V - ev pi $\dim V < \infty$ $T: V \to V$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) importante para paso 2

TL. Luego

T es normal $\Leftrightarrow$ $\exists B$ bon de avecs

demo ($\Leftarrow$) lo vimos al comienzo de clase

($\Rightarrow$) Asumimos T normal ($TT^* = T^*T$)

paso 1 si B bon / $A = [T]_B$ es triang sup

T normal $\Rightarrow$ A diagonal (pq $A = A^T$)

paso 2 $T: V \to V$ TL $\Rightarrow$ $\exists B$ bon $[T]_B$ es triang sup

Lema aux $T: V \to V$ normal $\Rightarrow$ $v \in V$ avec de T con aval c $\Leftrightarrow$ v avec de T^* con aval $\bar{c}$

demo lema

($\Rightarrow$) U normal $\Rightarrow$ $\forall v \in V$

(i) $(Uv | Uv) = (v | U^* U v)$

normal $= (v | U U^* v)$

$U = U^{**}$ $= (U^* v | U^* v)$

$\Rightarrow \|Uv\|^2 = \|U^* v\|^2 \Leftrightarrow \|Uv\| = \|U^* v\| \quad \forall v \in V$

(ii) T normal $\Rightarrow$ $U = T - cI$ es normal $\forall c \in K$

porque $U^* = (T - cI)^* = T^* - \bar{c} I$

$UU^* = (T - cI)(T^* - \bar{c}I) = (T^* - \bar{c}I)(T - cI)$

$= U^* U$

luego sea v avec de T con aval c

$\Rightarrow (T - cI) v = 0 \Rightarrow \| (T - cI) v \| = 0$

$\overset{(ii)\,(i)}{\iff} \| (T^* - \bar{c} I) v \| = 0$

$\iff$ v avec de T^*

con aval $\bar{c}$

<u>probamos paso 1</u> $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ bon $\quad$ T normal $\quad A^* = [T^*]_B$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 \cdots 0 & & a_{nn} \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & & 0 \\ \overline{a_{12}} & \ddots & \\ \vdots & & \\ \overline{a_{1n}} & & \overline{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

$T v_1 = a_{11} v_1 \overset{\text{lema ant}}{\Rightarrow} T^* v_1 = \overline{a_{11}} v_1$

pero viendo A^* $\quad T^* v_1 = \sum_{j=1}^{n} \overline{a_{1j}} v_j$

$\Rightarrow a_{12} = \dots = a_{1n} = 0$

Ahora

$T v_2 = \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{a_{12}} v_1 + a_{22} v_2 = a_{22} v_2 \Rightarrow T^* v_2 = \overline{a_{22}} v_2$

$T^* v_2 = \sum_{j=2}^{n} \overline{a_{2j}} v_j \Rightarrow a_{23} = \dots = a_{2n} = 0$, etc..

$\Rightarrow$ $a_{ij} = 0$ si $i < j$ $\therefore$ A diagonal

<u>queda pendiente paso 2</u> y estaría listo

<u>def</u> $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es normal si $AA^* = A^*A$

<u>Corolario</u> $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ $A^* = A$

$\Rightarrow \exists P$ unitaria / PAP^{-1} es diag

($A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $A^t = A$

$\exists P$ ortogonal / PAP^{-1} es diag)

<u>teorema espectral</u> $T: U \to U$ normal (si U complejo) o autoadjunto (si U real)

Sean $c_1, \dots, c_k$ avals de T $W_1, \dots, W_k$ los autoespacios, $E_1 \dots E_k$ proyecciones

$$\Rightarrow \begin{cases} T = c_1 E_1 + \dots + c_k E_k \\ W_i \perp W_j \text{ si } i \neq j \end{cases}$$