PRÁCTICO 2

Homomorfismos de grupos. Subgrupos.

(1) Sea $(G, \cdot)$ un grupo y sean $a, b \in G$.
  (a) Probar que las siguientes funciones de G en G son biyectivas y encontrar sus inversas.

  (i) $x \mapsto a \cdot x$.
  (ii) $x \mapsto a \cdot x \cdot b$.
  (iii) $x \mapsto a \cdot x \cdot a^{-1}$.
  (iv) $x \mapsto x^{-1}$.
  (v) $x \mapsto a \cdot x^{-1} \cdot a^{-1}$.

  (b) Determinar cuáles de estas aplicaciones son homomorfismos de grupos.
  (c) Determinar cuáles de estas aplicaciones son homomorfismos si G es abeliano.

(2) Decir si las siguientes funciones son homomorfismos de grupos, y en tal caso decir si son monomorfismos o epimorfismos.
  (a) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(a) := ma$, con $m \in \mathbb{Z}$.
  (b) $f : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_{12}$, $f(a) := 2a$.
  (c) $f : \mathbb{Z}_5 \to \mathbb{Z}_5$, $f(a) := 3a$.

(3) Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes.
  (a) G es abeliano.
  (b) La inversión $f : G \to G$, $f(x) = x^{-1}$, es un morfismo de grupos.
  (c) La aplicación $f : G \to G$ elevar al cuadrado, $f(x) = x^2$, es un morfismo de grupos.

(4) Sea G un grupo y sean H_1 y H_2 dos subgrupos de G.
  (a) Probar que $H_1 \cap H_2$ es un subgrupo de G.
  (b) ¿Qué sucede con la intersección de 3 o más subgrupos?
  (c) Probar que $H_1 \cup H_2$ es un subgrupo si y sólo si $H_1 \subseteq H_2$ o $H_2 \subseteq H_1$.
  (d) ¿Qué sucede con la unión de 3 o más subgrupos?

(5) Probar que

$$\mathcal{H} := \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

es un subgrupo de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$.

(6) Probar que todos los subgrupos de $\mathbb{Z}$ son cíclicos.

(7) Sea G un grupo. Denotemos por $|a|$ al *orden de a en G*. Probar que $\forall\, a, b \in G$ valen:
  (i) $|a| = |a^{-1}|$. (ii) $|a| = |bab^{-1}|$. (iii) $|ab| = |ba|$.

(8) Sea G un grupo abeliano.
  (a) Si existen a, $b \in G$, con $|a| = m$, $|b| = n$, entonces existe $c \in G$ tal que $|c| = [m, n]$.
  (b) Sean p y q primos distintos. Si $|G| = pq$ y existen $a, b \in G$, con $|a| = p$ y $|b| = q$, entonces G es cíclico.

(9) En cada uno de los siguientes casos calcular el orden de x:
  (a) $G = \mathbb{S}_8$, $x = (1235) \cdot (1378)$.
  (b) $G = \mathcal{H}$, $x = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$.

(c) $G = \mathbb{C}^\times$, $x = \cos(2\pi/n) + i\,\mathrm{sen}(2\pi/n)$ con $n \in \mathbb{N}$.
(d) $G = \mathbb{C}^\times$, $x = \frac{1}{2}\cos(2\pi/n) + \frac{1}{2}i\,\mathrm{sen}(2\pi/n)$ con $n \in \mathbb{N}$.
(e) $G = \mathbb{C}^\times$, $x = \cos(m/n) + i\,\mathrm{sen}(m/n)$ con $n, m \in \mathbb{N}$.
(f) $G = \mathbb{Z}_n$, x arbitrario.

(10) Determinar los elementos del subgrupo cíclico de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ generado por $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(11) Hallar todos los subgrupos de: $\mathbb{Z}_3$; $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$; $\mathbb{S}_3$; D_4.

(12) Hallar 9 subgrupos de $\mathbb{S}_4$ diferentes entre sí e isomorfos a $\mathbb{S}_2$ y 4 subgrupos diferentes entre sí e isomorfos a $\mathbb{S}_3$.

(13) Si un grupo tiene sólo una cantidad finita de subgrupos, entonces es finito.

(14) Probar que el subgrupo de $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ generado por $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ es no abeliano de orden 8 y es isomorfo a D_4.

(15) Sea p un número primo mayor que 2. Probar que

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \ a, b, c \in \mathbb{Z}_p \right\},$$

con el producto usual de matrices, es un grupo no abeliano tal que todo elemento distinto de la identidad tiene orden p. ¿Qué sucede si $p = 2$?

(16) Consideremos el grupo simétrico $\mathbb{S}_n$.
(a) Escribir al ciclo $(i_1 i_2 \dots i_r)$ como producto de trasposiciones.
(b) Mostrar que el producto de trasposiciones $(1i)(1j)(1i)$ es una trasposición. ¿Cuál?
(c) Probar que $\mathbb{S}_n$ está generado por las $n-1$ trasposiciones $(1i)$ con $i = 2, \dots, n$.
(d) Calcular el producto de trasposiciones $(1\, j-1)(j-1\, j)(1\, j-1)$, con $j = 3, \dots, n$.
(e) Probar que $\mathbb{S}_n$ está generado por las $n-1$ trasposiciones $(i \;\; i+1)$ con $i = 1, \dots, n-1$.
(f) Sean $\sigma = (12)$ y $\tau = (123 \dots n)$. Calcular $\tau^i \sigma \tau^{-i}$.
(g) Probar que $\mathbb{S}_n$ está generado por σ y τ.

(17) Calcular el orden y el signo de las siguientes permutaciones:

$$(4267) \in \mathbb{S}_9; \quad (365)(173) \in \mathbb{S}_7; \quad (13254)(35) \in \mathbb{S}_6.$$

(18) Decir cuáles de los siguientes grupos son isomorfos entre sí.

$$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2; \quad \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4; \quad \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{G}_4; \quad \mathbb{Z}_8; \quad D_4; \quad \mathbb{G}_8; \quad \mathcal{H}; \quad Q_8$$

donde Q_8 es el *grupo de cuaterniones*: $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ con la operación dada por $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k = -ji$, $(-1)i = -i$, $(-1)j = -j$ y $(-1)k = -k$.

(19) Mostrar que si $f : G \to H$ es un morfismo de grupos y $x \in G$ es tal que $|x|$ es finito, entonces $|f(x)|$ divide a $|x|$.

(20) Para los siguientes pares de grupos (G, H), calcular $\mathrm{Hom}(G, H)$ y $\mathrm{Hom}(H, G)$:

(a) $(\mathbb{G}_n, \mathbb{Z})$. (b) $(\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$. (c) $(\mathbb{Z}, \text{grupo finito})$. (d) $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_4)$.

(21) Para los siguientes grupos G, calcular $\mathrm{End}(G)$ y $\mathrm{Aut}(G)$:

$$\text{(a) } \mathbb{Z}. \qquad \text{(b) } \mathbb{Q}. \qquad \text{(c) } \mathbb{Z}_n. \qquad \text{(d) } \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.$$

Ejercicios adicionales

(22) Probar que todos los grupos de orden ≤ 5 son abelianos. ¿Son todos cíclicos? ¿Cuántos grupos no isomorfos de orden 4 hay?

(23) Probar que:
- (a) $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_n) \neq 0$.
- (b) No existe un epimorfismo de $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
- (c) $\mathrm{Hom}(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}) = 0$.

(24) Sea $f : G \to H$ un homomorfismo. Decir para cuáles de las siguientes propiedades P vale que "si G cumple P, entonces H cumple P". Hacer lo mismo asumiendo que f es epimorfismo y luego asumiendo que es monomorfismo.
- (a) Tener n elementos.
- (b) Ser finito.
- (c) Ser conmutativo.
- (d) Ser no conmutativo.
- (e) Ser cíclico.
- (f) Todo elemento tiene orden finito.
- (g) Todo elemento no trivial tiene orden infinito.

(25) Hallar en $\mathbb{S}_3$ y en $\mathbb{S}_4$ elementos de todos los órdenes posibles.

(26) Sea $G = \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}_3)$. Encontrar subgrupos de G de orden 2, 4 y 8.

(27) Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Probar que $\{a, b\}$ es un sistema de generadores de $\mathbb{Z}$ si y sólo si $(a, b) = 1$.

(28) Sean G grupo finito, $g \in G$ y p primo. Probar que

$$g = g_r g_u = g_u g_r,$$

donde $g_r, g_u \in G$ son tales que $(|g_r|, p) = 1$ y $|g_u| = p^k$, para algún k. Mostrar que g_r y g_u son únicos con esta propiedad. (**Nota**: El elemento g_r se llama la parte *p-regular* de g y el elemento g_u se llama la parte *p-unipotente* de g.)

(29) Sea $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{pmatrix} : \ a, b \in \mathbb{Z}_7, \ a \neq 0 \right\}$.
- (a) Hallar el orden de G.
- (b) Para cada primo p que divide a $|G|$ hallar todos los elementos de G de orden p.

(30) Determinar si los siguientes pares de grupos son isomorfos o no.

$$(\mathbb{Z}_n, \mathbb{G}_n); \quad (\mathbb{Z}_{10}, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5); \quad (\mathbb{R}, \mathbb{C}); \quad (\mathcal{U}_{16}, \mathcal{H}); \quad (\mathbb{A}_4, D_6).$$

(31)
- (i) La relación $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$ es una relación de congruencia en $(\mathbb{Q}, +)$.
- (ii) $\mathbb{Q}/\!\sim$ es un grupo abeliano infinito (se lo llama *grupo de racionales módulo uno*).
- (iii) Mostrar que todos los elementos de $\mathbb{Q}/\!\sim$ tienen orden finito.
- (iv) Probar que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $g \in \mathbb{Q}/\!\sim$ tal que $|g| = n$.

(32) Para cada $p \in \mathbb{N}$ primo definimos el siguiente subconjunto del grupo $\mathbb{Q}/\sim$:

$$\mathbb{Z}(p^\infty) := \{\overline{x} \,:\, x \in R^p\} = \{\overline{x} = \overline{a/b} \in \mathbb{Q}/\sim :\, a, b \in \mathbb{Z},\, b = p^i,\ \text{para algún } i \geq 0\}.$$

Probar que:

(i) $\mathbb{Z}(p^\infty)$ es un subgrupo infinito de $\mathbb{Q}/\sim$.

(ii) $\mathbb{Z}(p^\infty)$ está generado por el conjunto $\{\overline{1/p^n} \,:\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$.

(iii) cada elemento de $\mathbb{Z}(p^\infty)$ tiene orden finito e igual a p^ℓ, par algún $\ell \geq 0$.

Sea H un subgrupo de $\mathbb{Z}(p^\infty)$. Mostrar las siguientes afirmaciones.

(iv) Si existe $h_0 \in H$ tal que $|h_0| = p^k$ y $|h| \leq p^k$, $\forall h \in H$, entonces $H = \langle \overline{1/p^k} \rangle \cong \mathbb{Z}_{p^k}$.

(v) Si para todo $M \in \mathbb{N}$ existe $h \in H$ tal que $|h| > M$, entonces $H = \mathbb{Z}(p^\infty)$.

(vi) Los únicos subgrupos propios de $\mathbb{Z}(p^\infty)$ son los grupos cíclicos finitos $C_n := \langle \overline{1/p^n} \rangle$, $n \in \mathbb{N}$. Más aún, $C_n < C_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.