ÁLGEBRA III - 2021
Práctico 8

Funcionales lineales y adjuntas. Operadores unitarios y normales. Teoría espectral.

1. Probar que $A \in M_2(\mathbb{R})$ es ortogonal si y sólo si
$$A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}\right) \qquad \text{ó} \qquad A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & -a \end{smallmatrix}\right)$$
donde $a^2 + b^2 = 1$.

2. Probar que una matriz $A \in M_2(\mathbb{C})$ es unitaria si y sólo si es de la forma
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$$
donde $\theta \in \mathbb{R}$ y $a, b \in \mathbb{C}$ con $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

3. Encontrar una matriz unitaria que no sea ortogonal, y una ortogonal que no sea unitaria.

4. Sea $V = M_n(\mathbb{C})$ con el producto interno $(A|B) = \mathrm{tr}(AB^*)$. Para cada M sea L_M el operador multiplicar a izquierda por M. Probar que L_M es unitario si y sólo si M es una matriz unitaria.

5. Sea V el espacio $\mathbb{C}$ considerado como espacio vectorial real.
   (a) Probar que $(\alpha|\beta) = Re(\alpha\overline{\beta})$ define un producto interno en V.
   (b) Dar un isomorfismo de espacios producto interno entre V y $\mathbb{R}^2$ con el producto interno canónico.
   (c) Para cada $\gamma \in V$, sea M_γ el operador definido por $M_\gamma(\alpha) = \gamma\alpha$. Probar que $(M_\gamma)^* = M_{\overline{\gamma}}$.
   (d) ¿Para qué números complejos γ es M_γ autoadjunta?
   (e) ¿Para cuáles γ es M_γ unitaria?
   (f) Encontrar la matriz de M_γ en la base $\{1, i\}$.
   (g) Si T es un operador lineal en V, hallar condiciones necesarias y suficientes para T para que sea un M_γ.

6. Sea $V = \mathbb{R}^2$ con el producto interno canónico. Si U es un operador unitario sobre V, probar que la matriz de U en la base ordenada canónica es de la forma:
$$U_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \text{o} \qquad V_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \quad \text{para algún } \theta \text{ real.}$$
   (a) Notar que U_θ es una rotación de ángulo θ y observar que todo operador unitario en V es o bien una rotación o bien una reflexión seguida de una rotación.
   (b) ¿Qúe es $U_\theta U_\phi$?
   (c) Probar que $U_\theta^* = U_{-\theta}$.
   (d) Sea ϕ un número real fijo, y sea $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ la base ortonormal que se obtiene al rotar la base canónica en un ángulo ϕ. ¿Cuál es la matriz de U_θ en la base $\mathcal{B}$?

7. Sea $V = \mathbb{R}^3$ con el producto interno usual. Sea W el plano generado por $\alpha = (1, 1, 1)$ y $\beta = (1, 1, -2)$. Sea U la transformación lineal definida geométricamente como una rotación de ángulo θ alrededor de la recta ortogonal a W que pasa por el origen. Hallar la matriz de U en la base canónica.
(*Ayuda*: Hallar $\{w_1, w_2\}$ una base ortonormal de W y w_3 un vector de norma 1 ortogonal a W. Hallar la matriz de U en esa base y luego hacer el cambio de base.)

8. Demostrar que $\left(\begin{smallmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{smallmatrix}\right)$ y $\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0\\ 0 & e^{-i\theta}\end{pmatrix}$ son unitariamente equivalentes para todo $\theta\in\mathbb{R}$.

9. Sea V un espacio producto interno de dimensión finita. Para cada α,β en V, sea $T_{\alpha,\beta}$ el operador lineal en V definido por $T_{\alpha,\beta}(\gamma)=(\gamma\,|\,\beta)\,\alpha$. Demostrar que:

   (a) $T^*_{\alpha,\beta}=T_{\beta,\alpha}$.

   (b) $\text{traza}(T_{\alpha,\beta})=(\alpha\,|\,\beta)$.

   (c) $T_{\alpha,\beta}\,T_{\gamma,\delta}=T_{\alpha,(\beta|\gamma)\,\delta}$.

   (d) ¿En qué condiciones es $T_{\alpha,\beta}$ autoadjunto?

10. Sea V un espacio producto interno de dimensión finita y sea W un subespacio de V. Entonces $V=W\oplus W^{\perp}$, esto es, todo α de V se expresa unívocamente en la forma $\alpha=\beta+\gamma$, con β en W y γ en $W^{\perp}$. Se define un operador lineal U por $U(\alpha)=\beta-\gamma$.

    (a) Interpretar geométricamente.

    (b) Demostrar que U es autoadjunto y unitario.

    (c) Si V es $\mathbb{R}^3$ con el producto interno canónico y $W=\langle(1,0,1)\rangle$, hallar la matriz de U en la base ordenada canónica.

    (d) Probar que no existen otros operadores autoadjuntos y unitarios (i.e. todo operador autoadjunto y unitario proviene de algún subespacio W como se describió arriba).

11. Sea V es un espacio producto interno. Un *movimiento rígido* en V es una función $T:V\to V$ (no necesariamente lineal) tal que $\|T\alpha-T\beta\|=\|\alpha-\beta\|$, para todo $\alpha,\beta\in V$ (por ejemplo un operador unitario o una traslación).

    (a) Sea $V=\mathbb{R}^2$ con el producto interno usual. Sea T un movimiento rígido tal que $T(0)=0$. Probar que T es lineal y unitario.

    (b) Probar que todo movimiento rígido de $\mathbb{R}^2$ es composición de una traslación seguida de un operador unitario.

    (c) Probar que todo movimiento rígido de $\mathbb{R}^2$ es o bien una traslación seguida de una rotación o bien una traslación seguida de una reflexión seguida de una rotación.

12. Para cada una de las siguientes matrices reales A hallar una matriz ortogonal real P tal que P^tAP sea diagonal
$$\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\ \sin\theta&-\cos\theta\end{pmatrix}.$$

13. Sea $V=\mathbb{C}^2$ con el producto interno canónico. Sea T el operador lineal sobre V representado en la base canónica por
$$A=\begin{pmatrix}1&i\\i&1\end{pmatrix}.$$
    Demostrar que T es normal y hallar una base ortogonal de V formada por autovectores de T.

14. Dar una matriz A, 2×2, tal que A^2 sea normal pero A no lo sea.

15. Sea T un operador en un espacio producto interno de dimensión finita.

    (a) Si T es unitario y positivo probar que $T=I$.

    (b) Si T es normal y nilpotente probar que es el operador nulo.

16. Sea T un operador normal. Probar que los autovectores de T asociados a autovalores distintos son ortogonales.

17. Demostrar que T es normal si y sólo si $T = T_1 + iT_2$ donde T_1 y T_2 son operadores autoadjuntos que conmutan.

18. Probar que toda matriz simétrica real A tiene una raíz cúbica simétrica real, es decir, existe B simétrica real tal que $B^3 = A$.

19. Sea A una matriz compleja $n \times n$ tal que $A^* = -A$. Sea $B = e^A$. Probar que

    (a) $\det B = e^{\operatorname{tr} A}$.

    (b) $B^* = e^{-A}$.

    (c) B es unitaria.

20. Sean U y T operadores normales que conmutan. Demostrar que $U + T$ y UT son normales.

21. Sea V un espacio producto interno complejo de dimensión finita y sea U un operador unitario sobre V que satisface: $U\alpha = \alpha$ implica $\alpha = 0$. Sea

$$f(z) = i\,\frac{1+z}{1-z}, \qquad z \neq 1.$$

    Demostrar que

    (a) $f(U) = i(I + U)(I - U)^{-1}$;

    (b) $f(U)$ es autoadjunto; y

    (c) para todo operador autoadjunto T sobre V, el operador

$$U = (T - iI)(T + iI)^{-1}$$

    es unitario y tal que $T = f(U)$.

22. Sea T un operador lineal en V, un espacio vectorial complejo de dimensión finita. Probar que las siguientes condiciones son equivalentes.

    (a) T es normal.

    (b) $\|T\alpha\| = \|T^*\alpha\|$, para todo $\alpha \in V$.

    (c) Si $\alpha \in V$, $c \in \mathbb{C}$ tal que $T\alpha = c\alpha$ entonces $T^*\alpha = \bar{c}\alpha$.

    (d) Existe una base ortonormal de V formada por vectores propios de T.

    (e) Todo espacio T-invariante es T^*-invariante.

    (f) $T = NU$ donde N es no negativa, U unitaria y $NU = UN$.

    (g) $T = c_1E_1 + \cdots + c_kE_k$, donde $I = E_1 + \cdots + E_k$, $E_iE_j = 0$ $(i \neq j)$, $E_j^2 = E_j = E_j^*$.

23. Sea $V = M_n(\mathbb{C})$ con el producto interno

$$(A|B) = \operatorname{tr}(AB^*).$$

    Si $B \in V$, sean L_B, R_B y T_B los operadores lineales sobre V definidos por

$$L_B(A) := BA, \qquad R_B(A) := AB, \qquad T_B(A) := BA - AB.$$

    (a) Considerar las 3 familias de operadores que se obtienen al hacer variar B sobre todas las matrices diagonales. Demostrar que cada una de estas familias es un álgebra autoadjunta conmutativa y hallar sus descomposiciones espectrales.

    (b) Probar que L_B es unitariamente equivalente a R_{B^*}.