Análisis Numérico I / Análisis Numérico — **Práctico N°7 - 2023**

Programación Lineal

1. Dibujar en un plano las curvas de nivel de las siguientes funciones y en el mismo dibujo graficar el vector gradiente en el origen, respectivamente:

   a) $f(x,y) = 2x + y$; *b*) $g(x,y) = x - y$; *c*) $h(x,y) = -x - 2y$.

2. Transformar los siguientes problemas de programación lineal a la forma estándar:

   a)
$$\begin{array}{rl} \text{maximizar} & z = 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 \\ \text{sujeto a} & 7x_1 - 2x_2 - 3x_3 \geq 4 \\ & -2x_1 + 4x_2 + 8x_3 = -3 \\ & 5x_1 - 3x_2 - 2x_3 \leq 9 \\ & x_1 \geq 1, x_2 \leq 7, x_3 \geq 0. \end{array}$$

   b)
$$\begin{array}{rl} \text{minimizar} & z = x_1 - 5x_2 - 7x_3 \\ \text{sujeto a} & 5x_1 - 2x_2 + 6x_3 \geq 5 \\ & 3x_1 + 4x_2 - 9x_3 = 3 \\ & 7x_1 + 3x_2 + 5x_3 \leq 9 \\ & x_1 \geq -2, x_2 \geq 0, x_3 \,\text{libre}. \end{array}$$

3. Resolver gráficamente los siguientes problemas de programación lineal:

   a)
$$\begin{array}{rl} \text{minimizar} & z = 3x_1 + x_2 \\ \text{sujeto a} & x_1 - x_2 \leq 1 \\ & 3x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$$

   b)
$$\begin{array}{rl} \text{minimizar} & z = x_1 - 2x_2 \\ \text{sujeto a} & x_1 - 2x_2 \geq 4 \\ & x_1 + x_2 \leq 8 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$$

   c)
$$\begin{array}{rl} \text{maximizar} & z = x_1 + 2x_2 \\ \text{sujeto a} & 2x_1 + x_2 \geq 12 \\ & x_1 + x_2 \geq 5 \\ & -x_1 + 3x_2 \leq 3 \\ & 6x_1 - x_2 \geq 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$$

   d)
$$\begin{array}{rl} \text{minimizar} & z = -x_1 - x_2 \\ \text{sujeto a} & x_1 - x_2 \geq 1 \\ & x_1 - 2x_2 \geq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$$

4. Determinar los vértices de la región poliedral de $\mathbb{R}^3$ definida por el siguiente sistema de inecuaciones lineales
$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z & \leq & 3 \\ y - z & \leq & 2 \\ x - 2y & \leq & 1 \\ x & \geq & 0 \end{array} \right.$$

5. Dados los vectores
$$c = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{3}{4} \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

   a) Graficar el vector c y los conjuntos $H_j = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid c^T x = 2^j\}$ para $j = 0, 1, 2$.

   b) Realizar tres gráficos con los vectores u, v, w y los conjuntos
$$\begin{array}{rcl} C_1 & = & \{x \in \mathbb{R}^2 \mid u^T x \leq -3,\ v^T x \leq 1,\ w^T x \leq 2\}, \\ C_2 & = & \{x \in \mathbb{R}^2 \mid u^T x \leq -3,\ v^T x \leq 1,\ w^T x = 2\}, \\ C_3 & = & \{x \in \mathbb{R}^2 \mid u^T x \leq -3,\ v^T x \leq 1,\ w^T x \geq 2\}. \end{array}$$

c) Determinar gráficamente el vector x_* que minimiza $c^T x$ en C_1, C_2 y C_3.

6. Graficar la región poliedral convexa en $\mathbb{R}^2$ definida por

$$\begin{cases} 2x+3y & \leq & 2 \\ 3x+2y & \leq & 2 \\ x+y & \leq & 1 \\ x & \geq & 0 \end{cases}$$

¿Cuáles son los vértices de esta región?

7. Considerar el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 & \leq & 100 \\ x_1 + x_2 & \leq & 80 \\ x_1 & \leq & 40 \\ x_1,\, x_2 & \geq & 0. \end{array}$$

a) Escribir este sistema de ecuaciones en la forma estándar y determinar todas las soluciones básicas (factibles e infactibles).

b) Determinar los puntos extremos de la región factible.

8. Resolver usando el método simplex los siguientes problemas de programación lineal:

a)

$$\begin{array}{rl} \text{minimizar} & z = 40x_1 + 30x_2 \\ \text{sujeto a} & x_1 + x_2 \leq 12 \\ & 2x_1 + x_2 \leq 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rl} \text{maximinar} & z = 7x_1 + 5x_2 \\ \text{sujeto a} & x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ & 4x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$$

9. Una compañía minera produce 100 toneladas de mineral rojo y 80 toneladas de mineral negro cada semana. Éstos pueden tratarse en diferentes formas para producir tres diferentes aleaciones: **frágil**, **poco frágil** y **resistente**. Para producir 1t de aleación frágil se necesitan 5t de mineral rojo y 3t de negro, para la poco frágil se requieren 3t de rojo y 5t de negro mientras que para la resistente se requieren 5t de rojo y 5t de negro. Las ganancias que se obtiene de sus ventas son \$C250, \$C300 y \$C400 para el frágil, poco frágil y resistente, respectivamente. Encontrar la producción semanal de aleaciones que maximiza las ganancias.

10. Una dietética vende tres tipos de barras de cereal: **masticable**, **crocante** y **almendrada**. Las barras se hacen mezclando semillas, pasas y almendras. Las especificaciones son dadas por la siguiente tabla:

Mezcla	Semillas	Pasas	Almendras	Precio/kg
Masticable	-	al menos 60 %	a lo sumo 25 %	\$C16
Crocante	al menos 60 %	-	-	\$C12
Almendrada	a lo sumo 20 %	-	al menos 60 %	\$C20

Los proveedores pueden entregar semanalmente a lo sumo 100kg de semillas a \$C10/kg, 80kg de pasas a \$C15/kg y 60kg de almendras a \$C20/kg. Suponiendo que toda la producción se vende, formular el problema de hallar el esquema de producción que maximice la ganancia semanal.