Otro ejemplo de variable aleatoria absoluta continua

$$X \sim \mathcal{U}(0,1) \quad \text{(uniforme)}$$

definimos $Y = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-X)$ con >0

1) ¿F_Y?

2) ¿es absol contin?

demo 1) $F_Y(y) = P(Y \leq y)$

si $0 < X < 1 \Rightarrow 0 < 1-X < 1$

$$-\infty < \ln(1-X) < 0$$

$$-\infty < \frac{\ln(1-X)}{\lambda} < 0$$

$$0 < \frac{-\ln(1-X)}{\lambda} < \infty$$

$\therefore 0 < Y$

$\cdot)$ si $y \leq 0 \Rightarrow F_Y(y) = 0$ (pues $Y > 0$)

$\cdot)$ si $y > 0 \Rightarrow F_Y(y) = P(Y \leq y)$

$$= P\left(-\frac{1}{\lambda}\ln(1-X) \leq y\right)$$

$$= P(\ln(1-X) \geq -\lambda y$$

$$= P(-X \geq e^{-\lambda y} - 1$$

$$= P(X \leq 1 - e^{-\lambda y})$$

$$= F_X(1 - e^{-\lambda y})$$

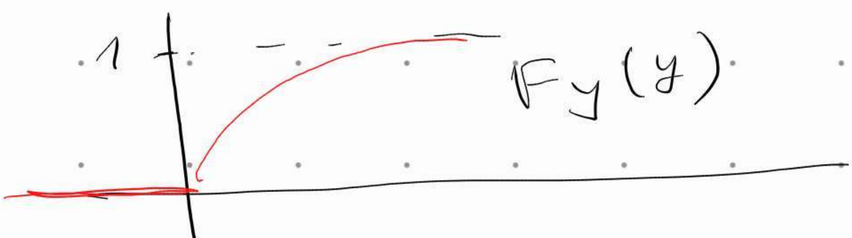
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x & 0 \leq x < 1 \\ 1 & 1 \leq x \end{cases}$$

$$-\lambda y < 0 \Rightarrow 0 < e^{-\lambda y} < e^0 = 1$$

$$0 > -e^{-\lambda y} > -1$$

$$1 > 1 - e^{-\lambda y} > 0$$

$$\Rightarrow F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda y} & y > 0 \end{cases}$$



1) $F_Y(y)$ es continua

2) F_Y es derivable salvo en 0 (finitos puntos)

3) F'_Y continua salvo en 0

$\Rightarrow$ Y absolutamente continua y

$$f_Y(y) = \begin{cases} F_Y'(y) & \forall y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0 & y = 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \lambda e^{-\lambda c} & > 0 \\ 0 & y \leq 0 \end{cases}$$

$$F_Y(y) = \int_0^y f(t)$$

def sea Y v.a continua con función de densidad

$$f_Y(y) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda y} & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$$

entonces se dice que Y tiene una distribución exponencial de parámetros $\lambda > 0$ y se denota $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$

obs Sea X v.a absolutamente continua sobre $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ $Y = g(X)$ como g función

¿Será Y absol cont?

¿Que condiciones necesito?

Prop Sea $I \to \mathbb{R}$ y sea

$g: I \to \mathbb{R}$ función tal que

a) $\exists\, g^{-1}: \operatorname{Im} g \to I$

b) g sea diferenciable

c) $g'(g^{-1}(t)) \neq 0$ excepto en una cantidad finita de puntos

Sea X v.a abs continua con densidad f_X tal que

$$f_X(x) = 0 \quad \forall x \notin I$$

$\Rightarrow$ la v.a $Y \sim g(X)$ es abs continua y densidad es

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(y)) \left| \dfrac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| & y \in g(I) \\ 0 & cc \end{cases}$$

$$\underbrace{\Omega \xrightarrow{X} F_n(X) \subseteq I \longrightarrow g(I) \subseteq \mathbb{R}}$$

$$Y = g(X)$$

~~de una~~ Como g^{-1} existe. g es estrict (decreciente o creciente)

$(\Rightarrow g^{-1}$ es estrict creciente$)$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y)$$

$$= P(X \leq g^{-1}(y))$$

estrictamente creciente

$$= F_X(g^{-1}(y))$$

Proponemos una densidad para Y y luego veremos que f_Y satisface

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(t)\,dt \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Sea
$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(y)) \left| \dfrac{d g^{-1}(y)}{dy} \right| & \text{si } y \in g(I) \text{ y } \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \text{ existe} \\ 0 & \text{cc} \end{cases}$$

¿ $F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(t)\,dt$?

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(t)\,dt \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \quad F_X(g^{-1}(y)) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(t)\,dt$$

Si f_Y es densidad y se cumple (1)

$\Rightarrow Y$ es absol continua (teórico)

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(y))\dfrac{1}{g'(g^{-1}(y))} & \text{si } y \in g(I) \\ & g'(g^{-1}(y)) \neq 0 \\ 0 & cc \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{y} f_Y(t)\,dt = \int_{-\infty}^{y} \frac{f_X(g^{-1}(t))}{g'(g^{-1}(t))} 1_{g(I)}(t)\,dt$$

Como $1_{g(I)}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in g(I) \\ 0 & cc \end{cases}$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } \overbrace{g^{-1}(t)}^{=u} \in I \\ 0 & cc \end{cases} = 1_I(u)$$

$u = g^{-1}(t)$ $\qquad \frac{du}{dt} = \frac{d\, g^{-1}(t)}{dt}$

$g(u) = t$

$$= g'(g^{-1}(t))$$

$$\rightarrow du = \frac{dt}{g'(g^{-1}(t))}$$

$$\int_{-\infty}^{g^{-1}(y)} f_X(u)\, 1_I(u)\, du = \int_{-\infty}^{g^{-1}(y)} f_X(u)\, du$$

(pq X es abs cont) $\rightarrow = F_X(g^{-1}(y))$

como queríamos

Aplicación de la proposición

Sea X v.a con densidad f_X (absolutamente continua)

Sea $Y = aX + b = g(X)$ con $a, b \in \mathbb{R}$

$a \neq 0$

Entonces Y es abs continua y

una densidad para Y es

$$f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right) \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

demo CT usando la prop de arriba

<u>ejemplo</u> de v.a que no es continua y no es discreta

Sea $X \sim U(0,1)$, $Y = \min(X, \frac{1}{2})$

→ a) Y es v.a

b) $F_Y(y) = ¿?$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y)$$
$$= P(\min(X, \tfrac{1}{2}) \leq y)$$
$$= 1 - P(\min(X, \tfrac{1}{2}) > y)$$

$$= 1 - P(X > y, \tfrac{1}{2} > y)$$

∘) Si $0 < y < \frac{1}{2}$

$$F_Y(y) = 1 - P(X > y, \tfrac{1}{2} > y)$$

$$= 1 - P(X > y)$$
$$= P(X \leq y) = F_X(y)$$

$\cdot)$ Si $y \geq \frac{1}{2}$

$$F_Y(y) = 1 - P(X > y, \underbrace{\tfrac{1}{2} > y}_{\emptyset})$$

$$= 1 - 0 = 1$$

$\cdot)$ Si $y \leq 0$

$$F_Y(y) = 1 - P\left(X > 0, \tfrac{1}{2} > 0\right)$$

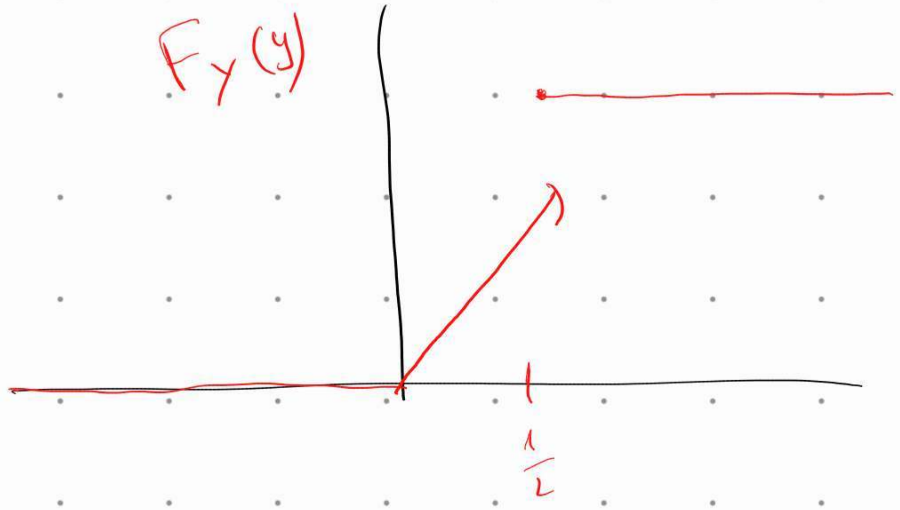
$$= 1 - P(X > 0)$$

$$= P(X \leq 0) = F_X(0) = 0$$

$$(X \sim U(0,1))$$

$$\Rightarrow F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ F_X(y) & 0 < y < \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \leq y \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ y & 0 < y < \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \leq y \end{cases}$$



$\Rightarrow$ $F_Y(y)$ No es continua

$\Rightarrow$ Y no es continua

y como F_Y no es escalonada a trozos $\Rightarrow$ Y no es discreta

-) Siempre que tenga una densidad f voy a poder encontrar una v.a X que admita a f como densidad
-) Como luego para que dada una función g construir una densidad

Sea $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tq

-) $g(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
-) $0 < \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, dx < \infty$

Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{g(x)}{\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, dx}$$

$\Rightarrow f$ es densidad