4/9/24

$f: G \to H$ homomorfismo

↳ $\ker(f) \trianglelefteq G$ (subgrupo normal)

$\operatorname{Im}(f) \leq H$ → no necesariamente es normal

f epi $\Leftrightarrow \operatorname{Im}(f) = H$

f mono $\Leftrightarrow \ker(f) = \{e\}$

TEOREMAS DE ISOMORFISMO

TEOREMA: sea $f: G \to H$ homo. Si $N \trianglelefteq G$ tal que $N \leq \ker f$, entonces $\exists!$ homo $\bar{f}: G/N \to H$ tal que $\bar{f}(aN) = f(a)$, $\forall a \in G$. Se tiene además que $\operatorname{Im} \bar{f} = \operatorname{Im} f$ y $\ker \bar{f} = \ker f / N$.

En particular, $\bar{f}$ es un iso $\Leftrightarrow$ f epi y $\ker f = N$

Demostración:

Observemos que, como $N \trianglelefteq G$ y $N \leq \ker f \Rightarrow N \trianglelefteq \ker f$

$\{aN \mid a \in \ker f\} = \ker f / N \leq G/N$

$aNbN = abN$

Veamos primero que $\bar{f}: G/N \to H$, $\bar{f}(aN) = f(a)$ está bien definida ie que no depende del representante de la coclase aN

Supongamos que tomamos otro representante: $aN \overset{!}{=} bN$, $a,b \in G$
$a \equiv b (N)$

$\Leftrightarrow a^{-1}b \in N \underset{\text{hip.}}{\leq} \ker f \Rightarrow f(a^{-1}b) = e$

$f(a^{-1}b) = f(a)^{-1} \cdot f(b)$ por ser homo

$\Leftrightarrow f(a) = f(b)$ (pues $f(a)^{-1} f(b) = e$)

Luego $\bar{f}$ está bien definida

$\bar{f}(aN \cdot bN) = \bar{f}(abN) = f(ab) = f(a)f(b) = \bar{f}(aN)\bar{f}(bN)$ $\therefore \bar{f}$ homo

Por definición $\bar{f}$ cumple la condición $\bar{f}(aN) = f(a)$ $\forall a \in G$

Veamos la unicidad

Si $f' : G/N \to H$ satisface que $f'(aN) = f(a)$ $\forall a \in G$, claramente $f' = \bar{f}$, ie $\bar{f}$ es único con esta condición

- $\operatorname{Im} \bar{f} = \{ \bar{f}(aN) \mid a \in G \} = \{ f(a) \mid a \in G \} = \operatorname{Im} f$
- $aN \in \ker \bar{f} \iff e = \bar{f}(aN) = f(a)$
  $\iff a \in \ker f$

  $\therefore \ker \bar{f} = \{ aN \mid a \in \ker f \} = \ker f / N$ $\square$

En un lenguaje categórico, el teorema (su primera parte) se expresa así:

$N \trianglelefteq G$
$N \leq \ker f$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "///"] & H \\ G/N \arrow[ur, dashed, "\exists ! \bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Si $\exists ! \bar{f}$ algunos autores la escriben y si no es única, no le escriben el nombre.

La conmutatividad del diagrama $\bar{f}\pi = f$ equivale a $\underbrace{\bar{f}(aN)}_{\bar{f}(\pi(a))} = f(a)$, $\forall a \in G$

Isomorfía Hungerford

Corolario (Primer Teorema de Isomorfismos) sea $f : G \to H$ homo de grupos. Entonces f induce un isomorfismo $G/\ker f \cong \operatorname{Im} f$

Demostración:

Si tomamos $N = \ker f \trianglelefteq G$ en el teorema anterior, tenemos

$\bar{f} : G/\ker f \to H$ tal que $\bar{f}(aN) = f(a)$ $\forall a \in G$

$\operatorname{Im} \bar{f} = \operatorname{Im} f$ y $\ker \bar{f} = \{e\} = \ker f / \ker f$

con lo cual $\bar{f}$ es mono y da lugar a un iso $G/\ker f \xrightarrow{\cong} \operatorname{Im} \bar{f} = \operatorname{Im} f$ por correstricción. $\square$

Observación: si $f: G \to H$ es mono, entonces f induce un iso $G \cong \operatorname{Im} f \leq H$

TEOREMA (Cayley): Sea G grupo. Entonces existe un subgrupo $\tilde{G}$ de $\mathbb{S}(G)$ tal que $G \cong \tilde{G}$

Demostración:

Sea $C: G \to \mathbb{S}(G)$, $C(a)(x) = ax$, $\forall a \in G, x \in G$ $\to$ C homo de grupos

$C(ab)(x) = (ab)x = a(bx) = C(a)(bx) = C(a)C(b)(x)$

Además $\operatorname{Ker} C = \{a \mid C(a) = Id_G\} = \{a \mid ax = x \ \forall x \in G\} = \{e\}$

se ve tomando $x = e$

$\therefore$ C es un monomorfismo

Por el corolario anterior, C induce un iso $G \cong \underbrace{\operatorname{Im} C}_{\tilde{G}}$ $\square$

C se dice "representación de Cayley"

Observación: si $|G| = n < \infty \Rightarrow G \cong \tilde{G} \leq \mathbb{S}_n$

$|G| = n$ y $|\mathbb{S}_n| = n!$

Observación: supongamos que $f: G \to H$, G, H finitos

Por el 1° Teorema de Isomorfismos (PTI) $\Rightarrow$ $G/\ker f \cong \operatorname{Im} f \leq H$

$|\operatorname{Im} f| \,\big|\, |H|$ y $|\operatorname{Im} f| = \dfrac{|G|}{|\ker f|}$ $\therefore$ $\dfrac{|G|}{|\ker f|} \,\Big|\, |H|$

visto la clase anterior

$f: \mathbb{H} \to D_6$ $\to$ $|\mathbb{H}| = 8$ y $|D_6| = 12$ $\therefore$ f no puede ser mono

Más aún $2 \mid |\ker f|$ $\left(\text{pues } \dfrac{8}{\ker f} \,\Big|\, 12\right)$

Notar además que D_6 no tiene subgrupo de orden 8

Si el orden del grupo de salida no divide al orden del grupo de llegada entonces f no puede ser mono

Corolario: sea $f: G \to H$ homo y sean $N \trianglelefteq G$, $M \trianglelefteq H$ tales que $f(N) \leq M$.

Entonces f induce un homo. $\bar{f}: G/N \to G/M$ que cumple $\bar{f}(aN) = f(a)M$, $\forall a \in G$

Se tiene $\operatorname{Im} \bar{f} = {}^{(\operatorname{Im} f \vee M)}/_{M}$, $\ker \bar{f} = f^{-1}(M)/N$

En particular $\bar{f}$ es iso $\iff$ $\operatorname{Im} f \vee M = H$ y $f^{-1}(M) \leq N$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "///"] & H \arrow[d] \\ G/N \arrow[r, dashed, "\exists ! \bar{f}"'] & H/M \end{tikzcd}$$

$f(N) \leq M$

se dice que se "factoriza por el cociente"

Demostración:

$f: G \to H$ da lugar a un homo $\pi f: G \to H/M$, $\pi: H \to H/M$ proyección canónica

$f(N) \leq M \implies N \leq \ker(\pi f)$ pues $\pi f(a) = f(a)M = M$ $\forall a \in N$

Por el primer Teorema probado en esta clase, πf induce un homo

$$\bar{f}: G/N \longrightarrow H/M \quad \text{tal que } \bar{f}(aN) = \pi f(a) = f(a)M \ , \quad \forall a \in G$$

$\operatorname{Im} \bar{f} = \operatorname{Im}(\pi f) = \{ f(a)M \mid a \in G \} = {}^{\operatorname{Im} f \vee M}/_{M}$ (M no necesariam. $\leq \operatorname{Im} f$)

$\ker \bar{f} = {}^{\ker(\pi f)}/_{N}$ ¿Quién es $\ker(\pi f)$?

$$a \in \ker(\pi f) \iff \underset{\substack{\parallel \\ f(a)M}}{\pi f(a)} = \underset{\substack{\parallel \\ M}}{eM} \iff f(a) \in M$$

Luego $\ker(\pi f) = f^{-1}(M)$ y sigue la 2° afirmación.

La tercera es consecuencia de esto. $\square$

Corolario (segundo Teorema de Isomorfismo): Sean G grupo, $K \leq G$, $N \trianglelefteq G$.

$K \cap N \trianglelefteq K$ pues está dentro de N que es normal

Entonces $K/_{K \cap N} \cong KN/_{N}$

Demostración:

$$f: K \overset{i}{\hookrightarrow} KN \xrightarrow{\pi} KN/N \quad \text{es homo de grupos con núcleo } K \cap N$$

$$a \longmapsto a \longmapsto aN$$

toma elemento de K y lo manda a su coclase módulo N

Por el Teorema anterior, este homo induce $\bar{f}: K/_{K \cap N} \longrightarrow KN/_{N}$

$\bar{f}(a(K \cap N)) = f(a) = aN$ y f monomorfismo

Basta ver que $\bar{f}$ es epi (para concluir $\bar{f}$ iso) $\quad (KN = NK$ pues $N \trianglelefteq G)$

Sean $k \in K$, $a \in N$, $\quad k\underbrace{aN}_{N} = kN = \bar{f}(k(K \cap N))$

ie todas las coclases son $\square$

<u>Observación</u>: bajo las hipótesis del 2° Teorema de Isomorfismos :

$$[KN : N] = [K : K \cap N]$$

Corolario (Tercer Teorema de Isomorfismo): sean $H, K \trianglelefteq G$, G grupo tales que $K \leq H$

Entonces $H/K \trianglelefteq G/K$ y $\dfrac{G/K}{H/K} \cong G/H$

Demostración:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "id"] \arrow[d] & G \arrow[d] \\ G/K \arrow[r, dashed, "\overline{id}"'] & G/H \end{tikzcd}$$

Por el 2° Teorema de la clase de hoy $\overline{id}$ es homo.

$\overline{id}(aK) = aH$

Además $\mathrm{Ker}(\overline{id}) = id^{-1}(H)/K = H/K$

$\mathrm{Im}(\overline{id}) = \underbrace{\mathrm{Im}\ id}_{G} \vee H/H = G/H \quad \therefore \overline{id}$ es epi

Luego, por el 1° Teo. de Iso tenemos que $\dfrac{G/K}{H/K} \cong G/H$ $\square$

En resumen (los 3 Teo de isomorfismo):

I) $f : G \to H$, $\quad G/\ker f \cong \mathrm{Im}\, f$

II) $N \trianglelefteq G$, $H \leq G$, $\quad K/N \cap K \cong KN/N$

III) $K, H \trianglelefteq G$, $K \leq H$, $\quad \dfrac{G/K}{H/K} \cong G/H$

TEOREMA (de correspondencia de subgrupos): sea $f : G \to H$ epimorfismo

Entonces la función $K \longmapsto f(K)$ define una correspondencia biyectiva entre

i) subgrupos K tales que $\ker f \leq K \leq G$ (se dicen intermedios)

ii) subgrupos de H

Bajo esta correspondencia, los subgrupos normales.

Demostración:

Notemos que si $K \leq G \Rightarrow f(K) \leq H$

$\underset{x = f(a)}{} \quad \overset{\cup}{y = f(b)} \rightarrow xy^{-1} = f(a)f(b)^{-1} = f(ab^{-1}) \in f(K)$ pues $ab^{-1} \in K$

Análogamente, si $L \leq H \Rightarrow f^{-1}(L) \leq G$:

$f^{-1}(L) = \{a \in G \mid f(a) \in L\}$

$\overset{\cup}{a,b} \qquad f(ab^{-1}) = f(a)f(b)^{-1} \in L \leq H \qquad \Rightarrow ab^{-1} \in f^{-1}(L)$

Veamos que $\ker f \subseteq f^{-1}(L)$: Sea $a \in \ker f \Rightarrow f(a) = e \in L \Rightarrow a \in f^{-1}(L)$

Afirmación: La aplicación $L \longmapsto f^{-1}(L)$ es inversa de $K \longmapsto f(K)$, entre los conjuntos (i) y (ii)

Demostración:

$f^{-1}(f(K)) = \{a \in G \mid f(a) \in f(K)\}$

Sea $\ker f \leq K \leq G$ si $\underset{k \in K}{f(a) = f(k)} \Rightarrow f(ak^{-1}) = f(a)f(k)^{-1} = e \Rightarrow ak^{-1} \in \ker f \leq K$

$\Rightarrow a \in Kk = K \quad \therefore f^{-1}(f(K)) \subseteq K$ y claramente $K \subseteq f^{-1}(f(K))$

$\therefore K = f^{-1}(f(K)) \ \forall \ker f \leq K \leq G$

Resta ver que $f(f^{-1}(L)) = L \quad \forall L \leq H$

$\subseteq$) Obvia

$\supseteq$) sea $x \in L$, $\underset{f \text{ epi}}{x = f(a)}$ $a \in f^{-1}(L)$ (pues $f(a) \in L$)

Por último tenemos que ver que subgrupos normales se corresponden con subgrupos norm.

$K \trianglelefteq G \Rightarrow f(K) \trianglelefteq \operatorname{Im} f = H$ - (f epi) pues $y \in \operatorname{Im} f$, $x = f(a) \in f(K)$
$y = f(b), b \in G \quad a \in K$

$yxy^{-1} = f(b)f(a)f(b)^{-1} = f(\underset{K \trianglelefteq G}{\underset{\cap}{bab^{-1}}}) \in f(K)$

Analogamente, si $L \trianglelefteq H \Rightarrow f^{-1}(L) \trianglelefteq G$ $\square$