1	2	3	4	5	6	7	8	9		Calif.

Apellido y Nombre:

Condición: Libre Regular

Algebra II - Final

2 de marzo de 2020

Justificar todas las respuestas. No se permite el uso de dispositivos electrónicos. Todos los resultados teóricos utilizados deben ser enunciados apropiadamente; en caso de utilizar resultados teóricos no dados en clase, los mismos deben demostrarse. Para aprobar se debe tener como mínimo 15 pts. en la parte teórica y 30 pts. en la parte práctica.

Parte Teórica (30 pts.)

1. (10 pts) Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, y $b \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$. Denotemos por S al conjunto de soluciones del sistema no homogéneo:

$$S = \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \; : \; A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b \right\}.$$

Probar que si $S \neq \emptyset$ los elementos de S se pueden escribir como una solución fija más un vector que es solución del sistema homogéneo asociado.

2. Sea $\mathbb{k}$ un cuerpo y V, W dos $\mathbb{k}$-espacios vectoriales de dimensión finita. Sean B_1 y B_2 bases de V y W respectivamente, y $f : V \to W$ una transformación lineal.

   - (2 pts) Definir la matriz de f en la bases B_1, B_2 (denotada $[f]_{B_1,B_2}$).
   - (8 pts) Probar que para todo $v \in V$ vale que $[f(v)]_{B_2} = [f]_{B_1,B_2}[v]_{B_1}$.

3. (10 pts) Sea $\mathbb{k}$ un cuerpo y V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial. Sea $f : V \to V$ una transformación lineal. Probar que si v y w son dos autovectores de f correspondientes a autovalores distintos, entonces el conjunto $\{v, w\}$ es linealmente independiente.

4. Determinar si cada una de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando en cada caso la respuesta dada.

   (a) (3 pts) En $\mathbb{R}^2$ consideremos la siguiente función $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por

   $$\Phi((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1x_2 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + y_1y_2.$$

   La función Φ define un producto interno en $\mathbb{R}^2$.

   (b) (3 pts) Sea $\mathbb{k}$ un cuerpo y V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial de dimensión 3. Si $W \subset V$ es un subespacio de dimensión 2 entonces W admite un único complemento, o sea existe un único $U \subset V$ subespacio tal que $U \oplus W = V$.

Parte Práctica (70 pts.)

5. (15 pts) Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ la matriz dada por $\begin{pmatrix} t & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & t & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & t & \cdots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & t+a_{n-1} \end{pmatrix}$.

   Probar que $\det(A) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$.

6. (15 pts) Sean a, b, c tres números reales distintos. Para cada uno de ellos definimos una transformación lineal $e_a : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}$ (respectivamente e_b y e_c) dada por $e_a(P) = P(a)$ (o sea evaluar el polinomio en el elemento a). Probar que $B = \{e_a, e_b, e_c\}$ es una base de $(\mathbb{R}_2[x])^*$.

7. (15 pts) Sea $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ una matriz cualquiera. Probar que existe un número real λ tal que la matriz $A - \lambda\,\mathrm{id}$ es invertible.

8. Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita, y sean $f, g : V \to V$ transformaciones lineales tales que $f \circ g = g \circ f = 0$ (la transformación lineal nula) y $f + g = \mathrm{id}$.

   (a) (10 pts) Probar que $V = \mathrm{Nu}(f) \oplus \mathrm{Nu}(g)$.

   (b) (10 pts) Sea $T : V \to V$ una transformación lineal tal que $T^2 = \mathrm{id}$. Probar que si λ es autovalor de T entonces $\lambda = \pm 1$. Utilizando el ítem anterior deducir que T es diagonalizable.

9. Sea Π el subespacio de $\mathbb{R}^3$ (con el producto interno canónico) generado por $\{(1,1,1), (1,-1,0)\}$.

   (a) (5 pts) Calcular el espacio ortogonal de Π.

   (b) (15 pts) Calcular el punto de Π cuya distancia a $(1,0,0)$ sea la menor posible.
   Justificar por qué el punto elegido es el de menor distancia (Sugerencia: usar Pitágoras).

EJERCICIO PARA LIBRES **El puntaje entre paréntesis es lo que se le resta al puntaje de la parte práctica en caso de no ser resuelto correctamente**

Consideremos la transformación lineal $T : \mathbb{R}[x]_3 \to \mathbb{R}[x]_3$ dada por $T(P(x)) = P''(x) - 3P(x)$.

- (-9 pts) Calcular bases del núcleo y de la imagen de T.
- (-6 pts) Decidir si T es diagonalizable.

JUSTIFICAR DEBIDAMENTE TODAS LAS RESPUESTAS