

**Universidad Nacional de Córdoba**

FACULTAD DE MATEMÁTICA, ASTRONOMÍA, FÍSICA Y COMPUTACIÓN

# *INTRODUCCIÓN A LA FÍSICA*

*Segunda Edición  
revisión Julio de 2021*

Alberto Wolfenson - Jorge Trincavelli - Pablo Serra

Julio de 2021



# Contents

<b>1</b>	<b>Movimiento en Una Dimensión</b>	<b>7</b>
1.1	Consideraciones generales . . . . .	7
1.2	Sistema de coordenadas unidimensional . . . . .	8
1.3	Distancia entre dos puntos . . . . .	11
1.4	Relación entre posición y tiempo . . . . .	12
1.5	Función de movimiento . . . . .	14
1.5.1	Ejemplos de funciones de movimiento . . . . .	17
1.6	Encuentro . . . . .	20
1.7	Distancia recorrida y desplazamiento . . . . .	23
<b>2</b>	<b>Velocidad y Derivadas</b>	<b>27</b>
2.1	Velocidad media . . . . .	27
2.1.1	Cálculo de la velocidad media para algunas funciones de movimiento . . . . .	29
2.2	Velocidad instantánea - parte I . . . . .	31
2.3	El concepto de límite de una función . . . . .	33
2.3.1	Algunas propiedades del límite de funciones . . . . .	35
2.3.2	El límite de $\sin(x)/x$ para $x \rightarrow 0$ . . . . .	35
2.4	Derivadas . . . . .	37
2.4.1	Definición de derivada . . . . .	37
2.4.2	Reglas de derivación . . . . .	38
2.4.3	Derivadas de funciones simples . . . . .	40
2.5	Análisis de gráficos de funciones . . . . .	47
2.6	Velocidad instantánea - parte II . . . . .	55

<b>3</b>	<b>Aceleración e Integración</b>	<b>57</b>
3.1	Aceleración . . . . .	57
3.2	Condiciones sobre las funciones de movimiento, velocidad y aceleración . . . . .	58
3.3	Ejemplos simples de funciones de movimiento . . . . .	60
3.4	Relación entre aceleración, velocidad y función de movimiento . . . . .	60
3.5	Integración de funciones . . . . .	61
3.6	Integración de las funciones de movimiento . . . . .	64
3.6.1	Aceleración definida a trozos . . . . .	69
3.7	Integrales definidas . . . . .	70
3.8	Aplicación de las integrales definidas en cinemática . . . . .	76
<b>4</b>	<b>Movimiento en el Plano</b>	<b>81</b>
4.1	Localización de un punto en el plano . . . . .	81
4.1.1	Sistema de coordenadas cartesianas ortogonales . . . . .	81
4.2	Trayectoria y Funciones de Movimiento . . . . .	83
4.3	Vectores . . . . .	92
4.3.1	Operaciones con vectores . . . . .	93
4.3.2	Base vectorial . . . . .	98
4.3.3	Vectores en un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales . . . . .	99
4.3.4	Producto escalar . . . . .	103
4.4	Descripción vectorial del movimiento en el plano . . . . .	109
4.4.1	Vector posición . . . . .	109
4.4.2	Función vectorial de movimiento . . . . .	110
4.4.3	Vector desplazamiento . . . . .	110
4.4.4	Vector velocidad media . . . . .	111
4.4.5	Vector velocidad . . . . .	114
4.4.6	Trayectoria y vector velocidad . . . . .	116
4.4.7	Vector aceleración . . . . .	118
4.4.8	Determinación del vector posición a partir del vector aceleración . . . . .	127
4.4.9	Tiro parabólico . . . . .	130

4.4.10	Encuentro de dos móviles en el plano . . . . .	139
<b>5</b>	<b>Movimiento Circular y Movimiento Periódico</b>	<b>141</b>
5.1	Movimiento circular - parte I . . . . .	141
5.2	Coordenadas polares . . . . .	146
5.2.1	Coordenadas polares y funciones de movimiento . . . . .	148
5.3	Movimiento circular - parte II . . . . .	154
5.3.1	Integración de las ecuaciones de movimiento para un movimiento circular . . . .	156
5.3.2	Encuentro en movimiento circular . . . . .	158
5.4	Movimiento periódico . . . . .	162
<b>6</b>	<b>Movimiento relativo</b>	<b>165</b>
6.1	Cambio de coordenadas . . . . .	165
6.2	Ejemplos . . . . .	168
<b>7</b>	<b>Movimiento en Tres Dimensiones</b>	<b>173</b>
7.1	Sistema de coordenadas cartesianas ortogonales . . . . .	173
7.2	Vector posición y función vectorial de movimiento . . . . .	174
7.3	Velocidad y aceleración . . . . .	176
7.4	Trayectoria . . . . .	177
7.5	Encuentro de dos móviles en 3 – $D$ . . . . .	180



# 1

## Movimiento en Una Dimensión

### SECCIÓN 1.1

### Consideraciones generales

Desde los tiempos más remotos la especie humana ha intentado explicar el mundo que lo rodea. La ciencia, la filosofía, e incluso el propio lenguaje humano no son ajenos a este afán. Durante milenios, cuestiones científicas y filosóficas han formado un conjunto bastante inextricable, en particular, el nombre de la disciplina bajo consideración, es decir la Física, ha sido durante mucho tiempo *Filosofía Natural*. La complejidad del proceso de evolución de la Física a lo largo del tiempo, hasta llegar a lo que es hoy, unida al desarrollo de gran número de ciencias, cuyas áreas de estudio muchas veces se superponen con las de la Física, hace que sea extremadamente difícil dar una definición útil y valedera de esta última, lo que sería deseable antes de comenzar un primer curso de Física. Una definición completamente valedera sería decir que la física es la ciencia que estudia los fenómenos físicos. El problema es que esta definición es también perfectamente inútil, a no ser que se explique a conciencia la naturaleza de los fenómenos físicos, lo cual plantea el grave riesgo de hacerlo en términos de la Física, generando un círculo sin fin. En lugar de caer en este tipo de enredos conviene desarrollar los conceptos que han sido considerados parte de la Física por varias generaciones de científicos, sin tratar de dar una definición de la disciplina que los integra.

El término "física" deriva del latín *Physica*, que significa natural, el cual a su vez viene del griego φυσικς (physis), es decir naturaleza. Este último término proviene del griego φῦω (phío), que significa nacer, brotar, engendrar. En este sentido, desde los tiempos de Tales de Mileto y Aristóteles de Estagira, el concepto de Física ha estado ligado al estudio de la naturaleza. Durante la Edad Media el término "físico" se utilizaba para designar a los médicos (lo que sigue ocurriendo hasta el día de hoy en el idioma inglés, que denomina *physician* a una persona que ejerce la medicina). A partir del siglo XVI, con los trabajos de Galileo, y más particularmente, durante el siglo XVII, con la publicación de los *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* de Isaac Newton, la disciplina comienza a diferenciarse del resto y en el siglo XVIII empieza a usarse el término "Física" para denominarla.

Si bien no daremos una "definición rigurosa" de qué involucra la disciplina Física, sí diremos que es una **ciencia experimental**, es decir que **toda** afirmación que se haga en esta ciencia **debe** estar verificada por la experiencia. De la experimentación nacen las leyes de la Física. Estas leyes sintetizan los resultados de las experiencias pues han sido deducidas de estos mismos experimentos. Las leyes además permiten predecir nuevos eventos físicos que también deben ser verificados experimentalmente.

Si deseamos estudiar Física, o sea realizar una descripción de la naturaleza, lo podemos hacer de una

manera cualitativa. Sin embargo, para hacer una descripción más precisa, es decir si deseamos cuantificar esta descripción, vamos a necesitar de un lenguaje que represente los conceptos con la precisión requerida. El lenguaje de la Física es la Matemática, es decir, los conceptos de la Física son representados mediante expresiones matemáticas. Por esta razón iremos desarrollando la matemática que necesitamos para expresar los conceptos de la Física.

En este curso de Física iniciaremos el estudio de lo que se denomina Mecánica Elemental, y en particular comenzaremos estudiando la Cinemática, que es la descripción del movimiento de los cuerpos, sin interesarnos la causa por la cual se mueven. El análisis sobre qué hace que los cuerpos se muevan de determinada forma lo abordaremos más adelante cuando estudiemos la Dinámica. Comenzaremos, entonces, estudiando el movimiento de cuerpos, es decir trataremos de describir qué posiciones del espacio van ocupando a medida que transcurre el tiempo.

Antes de iniciar nuestro estudio en concreto, discutiremos un aspecto característico de la forma de pensar la naturaleza por parte de los físicos: Comenzaremos todo abordaje del estudio de un problema simplificando al máximo las hipótesis a plantear, tratando de dejar de lado toda “complicación superflua” (al menos en un inicio) para quedarnos solo con el carozo fundamental de la cuestión a estudiar. Así, si queremos describir la posición de un cuerpo en función del tiempo (por ejemplo un auto que viaja entre dos ciudades, o la pelota en algún deporte) podemos pensar al cuerpo como un punto (por ejemplo el punto central) y describir solo la posición de este punto en función del tiempo. Esta aproximación, llamada de *cuerpo puntual* ó *punto material* ya fue usada por Kepler en 1609 para describir las órbitas planetarias, donde ambos, planeta y sol, fueron considerados cuerpos puntuales (Notemos que esta aproximación, muy buena para describir el movimiento de los planetas alrededor del sol, es totalmente inútil para explicar el día y la noche o las estaciones).

Entonces estudiaremos el movimiento de cuerpos puntuales. Y siempre comenzaremos por los sistemas más simples para luego ir complicando los problemas a resolver. Sin duda pensamos que debe ser más sencillo describir el movimiento de un automóvil (considerado puntual), que viaja entre dos ciudades de la provincia de la Pampa unidas por una ruta recta que el vuelo de una mosca. Así empezaremos describiendo cuerpos puntuales que solo pueden moverse sobre una recta, esto es, en una dimensión. En capítulos posteriores veremos como describir movimientos en dos y tres dimensiones.

## SECCIÓN 1.2

# Sistema de coordenadas unidimensional

Para abordar el estudio del movimiento de traslación de un cuerpo comenzaremos analizando los casos más sencillos. Por esta razón, inicialmente estudiaremos el movimiento de cuerpos que se desplazan sobre una recta. En este tipo de movimiento la recta es el universo en el cual se mueven los cuerpos (figura 1.1).



Figura 1.1: Cuerpo puntual que puede moverse solo sobre una recta dada.

Como nuestro objetivo es analizar el movimiento del cuerpo, necesitamos poder determinar su ubicación o posición. Para ello fijamos un punto sobre la recta, respecto del cual referiremos la posición del



cuerpo. A ese punto lo llamaremos origen, y lo denotaremos indistintamente por la letra  $O$  o el numero 0.

Una posibilidad para determinar la posición del cuerpo es dar la distancia que existe entre este y el origen, es decir, dar la longitud del segmento de recta que se extiende entre el punto elegido como origen y el punto que corresponde a la posición del cuerpo (ver figura 1.2). Lo que debemos analizar es si de esa manera queda identificada de forma unívoca la posición del cuerpo.

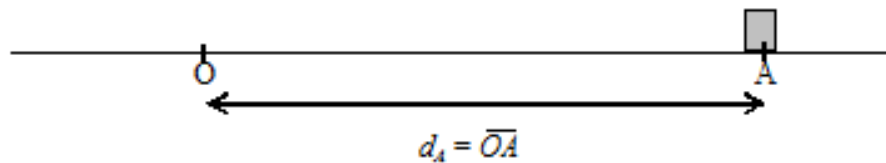


Figura 1.2: Distancia de un cuerpo al origen de coordenadas  $O$ .

El problema es que con esta manera de definir la posición del cuerpo se nos presenta una ambigüedad. Si damos la posición del cuerpo mediante la distancia  $d_A$  estamos ante dos posibilidades, una es que esté a la derecha de  $O$  y la otra es que esté a la izquierda de  $O$ . Entonces vemos que de esta forma no podemos definir unívocamente la posición del cuerpo y por lo tanto debemos encontrar un modo de eliminar esta dualidad. La forma más simple y directa es agregar si el cuerpo está a la derecha o a la izquierda del origen. Así, para indicar la posición de los cuerpos mostrados en la figura 1.3, diríamos:

A está a una distancia  $d_A$  y a la derecha de  $O$ .  
 B está a una distancia  $d_B$  y a la derecha de  $O$ .  
 C está a una distancia  $d_C$  y a la izquierda de  $O$ .

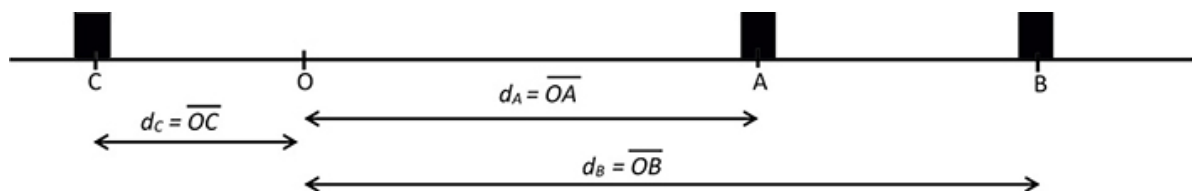


Figura 1.3: Posición de varios cuerpos situados sobre una misma recta.

Lamentablemente esta manera de expresar la ubicación de los puntos tiene dos inconvenientes: a) la noción de derecha o izquierda de la recta no está unívocamente determinada, pues depende desde qué lado de la recta se está observando. b) Esta forma de especificar la posición de un cuerpo es complicada, muy extensa.

Una manera de solucionar este inconveniente es usar la distancia para definir la ubicación de puntos que se hallan de un lado del origen, y la distancia precedida por un signo menos del otro lado. Entonces, para expresar de manera precisa la ubicación de los puntos (o cuerpos puntuales) en nuestro universo (recta) definiremos un ente que denominaremos *sistema de coordenadas unidimensional*, caracterizado por

1. Una recta (sobre la que se desplaza el cuerpo cuyo movimiento queremos describir).

2. Un punto arbitrario en la recta elegido como origen de coordenadas.
3. Una unidad de medida de longitudes.
4. Una y sólo una punta de flecha que indica hacia dónde crecen las coordenadas, es decir, cuál es el sentido positivo.
5. Un nombre para las coordenadas, por ejemplo,  $x$ .

Una vez definido un sistema de coordenadas, **todo punto** sobre la recta tendrá asignada una coordenada, dada por

1. Un número positivo que indica la longitud del segmento con extremos en el origen y el punto en cuestión, esto es, la distancia del punto al origen.
2. Un signo que indica si el punto se encuentra desde el origen hacia la flecha (+) o en sentido opuesto (-).

Entonces, cuando deseamos describir el movimiento de un cuerpo que se desplaza sobre una recta debemos colocar el sistema de coordenadas sobre dicha recta. En la figura 1.4 se muestra una recta con un sistema de coordenadas definido y dos cuerpos, A con coordenada  $x_A$  positiva y B con coordenada  $x_B$  negativa.

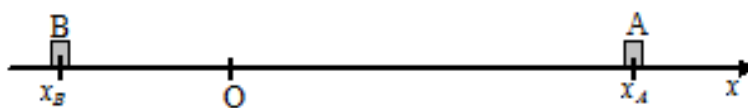


Figura 1.4: Dos cuerpos sobre una recta con un sistema de coordenadas unidimensional.

El origen de coordenadas  $O$  y el sentido positivo son totalmente arbitrarios. En la figura 1.5, podemos observar dos sistemas de coordenadas diferentes definidos sobre la **misma** recta; es posible expresar las coordenadas del cuerpo en cualquiera de ellos. Lo importante es que, elegido uno de ellos, mantengamos el mismo sistema mientras estemos efectuando la descripción del movimiento del cuerpo.

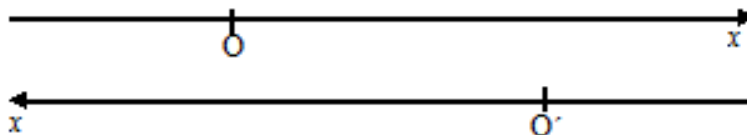


Figura 1.5: Ejemplos de dos sistemas de coordenadas. definidos sobre una misma recta.

A la luz de estos conceptos, vemos que la utilización de un sistema de coordenadas y de la coordenada del cuerpo en dicho sistema es la forma matemática de describir la posición del cuerpo en el espacio (unidimensional en este caso).

## SECCIÓN 1.3

## Distancia entre dos puntos

En el espacio usual, también denominado espacio euclidiano, la distancia  $d$  entre dos puntos distintos es la longitud del segmento de recta que los une. Es decir, la distancia es la longitud del camino que hay que recorrer para ir directamente de un punto al otro. Entonces, por definición,  $d > 0$ .

Veamos ahora cómo podemos calcular la distancia entre dos puntos en función de sus coordenadas.

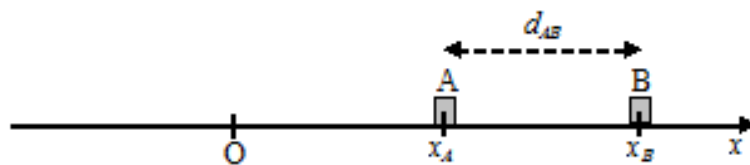


Figura 1.6: Distancia entre dos puntos con coordenadas positivas,  $d_{AB} = x_B - x_A$ .

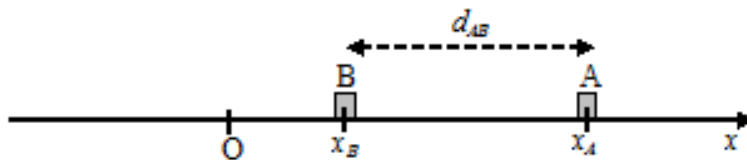


Figura 1.7: Distancia entre dos puntos con coordenadas positivas,  $d_{AB} = x_A - x_B$ .

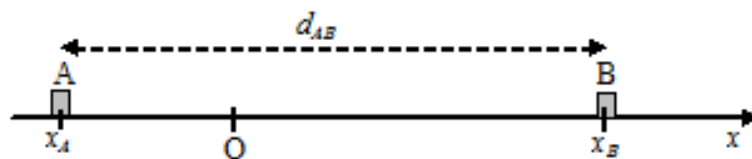


Figura 1.8: Distancia entre dos puntos con coordenadas de distinto signo,  $d_{AB} = x_B - x_A$ .

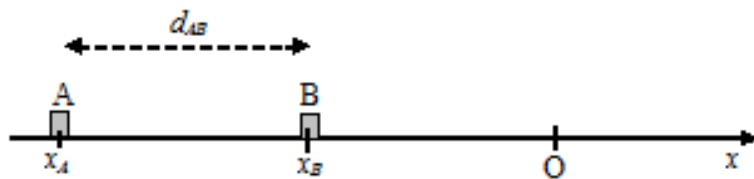


Figura 1.9: Distancia entre dos puntos con coordenadas negativas,  $d_{AB} = x_B - x_A$ .

De los casos ilustrados en las figuras 1.6 a 1.9, vemos que la distancia depende de las coordenadas de los cuerpos  $A$  y  $B$ . En ciertos casos la distancia es  $x_A - x_B$  (figura 1.7) y en otras es  $x_B - x_A$  (figuras 1.6, 1.8, 1.9), ya que, como dijimos, la distancia nunca puede ser un número negativo. Para no tener que analizar en cada caso en particular qué diferencia es la que debemos calcular, definimos

$$d_{AB} = |x_B - x_A| = |x_A - x_B|. \quad (1.1)$$

Es decir que en nuestro universo unidimensional *la distancia entre dos puntos es el valor absoluto de la diferencia de las coordenadas de ambos puntos*.

## SECCIÓN 1.4

# Relación entre posición y tiempo

Hemos dicho que vamos a describir el movimiento de cuerpos que se mueven sobre líneas rectas. Hasta ahora hemos desarrollado los elementos necesarios para dar la posición (sistema de coordenadas y coordenadas de los cuerpos) en la recta. Decir que estudiaremos cómo se mueven significa analizar cómo se modifica su posición a medida que transcurre el tiempo. Si bien el concepto de tiempo es algo difícil de definir, pensemos por ahora que el tiempo es simplemente aquello que medimos con un reloj y que siempre aumenta.

Supongamos que tenemos un cuerpo que se desplaza sobre una recta. A esa recta le adosamos un sistema de coordenadas para poder dar su posición de manera unívoca. Ahora saquemos fotos del sistema a distintos tiempos. La figura 1.10 representa esta situación.

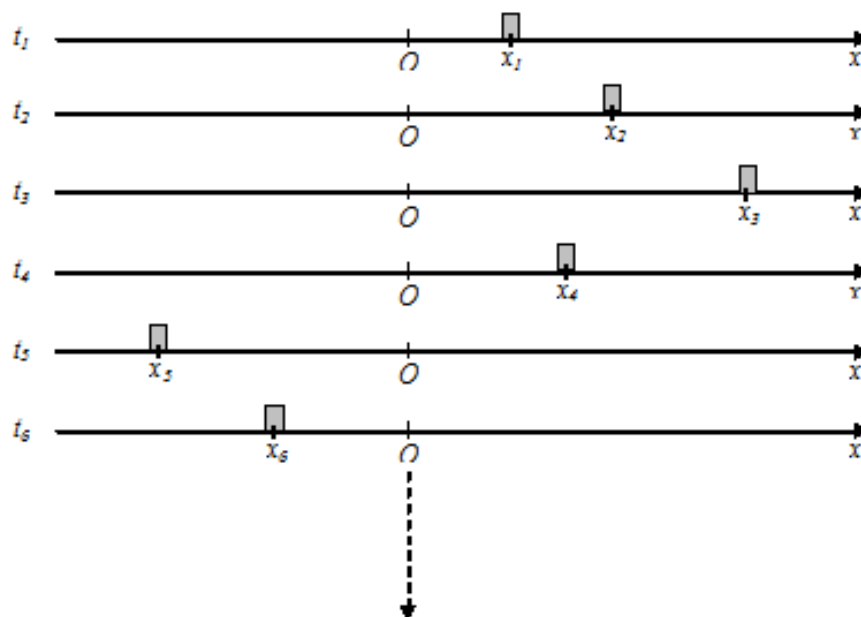


Figura 1.10: Posiciones sucesivas de un móvil a lo largo del tiempo.

Entonces, tenemos que las coordenadas son sucesivamente  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \dots$  correspondientes a los instantes  $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, \dots$  que son sucesivos y crecientes ( $t_1 < t_2 < t_3 < t_4 < t_5 < t_6 < \dots$ ). Con estos valores de  $x$  y  $t$  podemos confeccionar la tabla 1.1.

$t$	$x$
$t_1$	$x_1$
$t_2$	$x_2$
$t_3$	$x_3$
$t_4$	$x_4$
$t_5$	$x_5$
$t_6$	$x_6$
$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$

Tabla 1.1: Tiempos y posiciones registradas para un móvil.

Sabemos cómo medir las coordenadas  $x_i$ ; analicemos ahora cómo definir los valores de tiempo,  $t_i$ . Podríamos tomar para  $t$  la “hora civil” por ejemplo:

$$t_1 = \text{las } 12 \text{ hs } 35 \text{ min } 48,3 \text{ s del } 9 \text{ de marzo de } 1993$$

$$t_2 = \text{las } 9 \text{ hs } 28 \text{ min } 15,2 \text{ s del } 10 \text{ de octubre de } 2007$$

Al hacer esto estamos aceptando una convención, pues asignamos a  $t$  el tiempo transcurrido a partir de cierto momento histórico que arbitrariamente se definió como cero. En los ejemplos, el origen de la

medición del tiempo coincide con el nacimiento de Jesús y esto es lo que generalmente se tomó como origen temporal para narrar la historia de la humanidad en Occidente. En este marco, se toma como tiempos negativos los que corresponden a instantes previos al origen (por ejemplo, el año -59 corresponde al año 59 AC). Este origen del tiempo, como cualquier elección de punto de partida, es arbitrario y no es compartido por todas las culturas. Así, resulta más razonable hacer lo mismo que ya hemos hecho con el origen del sistema de coordenadas: elegir arbitrariamente el origen del tiempo que sea más conveniente para nuestra descripción del movimiento. Esto es, nuestro aparato de medición de tiempos, más que un reloj usual, funciona como un cronómetro.

Al igual que la unidad de longitud, la unidad de tiempo dependerá del fenómeno que estamos describiendo, podemos usar como unidad *millones de años* si se trata de eventos geológicos, o *nanosegundos* si describimos fenómenos atómicos, aunque en la vida diaria, describiendo movimientos de automóviles, pelotas, proyectiles, etc, resulta adecuado en general usar horas (*h*), minutos (*min*) o segundos (*s*). Además el sentido será **siempre** creciente hacia el futuro. Por lo tanto, elegimos el origen del tiempo  $t$  en la tabla de manera que nos resulte más cómodo, por ejemplo, podemos elegir uno de los valores de  $t$  de la tabla 1.1 como origen, y considerar que:

- El tiempo correspondiente al origen es igual a 0
- Tiempos posteriores al origen son positivos ( $t > 0$ )
- Tiempos anteriores al origen son negativos ( $t < 0$ )

Con estos elementos podemos representar los valores de tiempo de manera similar a lo que hicimos con los del espacio, como se muestra en la figura 1.11. Es decir que tendremos un sistema de coordenadas temporales donde cada punto de la recta asociada representa un instante. La separación entre dos puntos de este eje se denomina intervalo de tiempo.

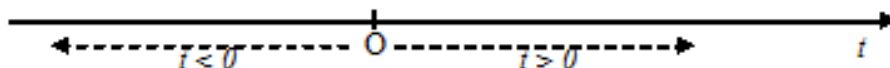


Figura 1.11: Representación gráfica del eje temporal.

## SECCIÓN 1.5

# Función de movimiento

Para describir el movimiento de los cuerpos usaremos coordenadas espaciales  $x$  y temporales  $t$ , que están relacionadas entre sí. Las coordenadas espaciales se expresan en unidades de longitud, tales como *cm*, *m*, *km*, etc., mientras que las temporales en unidades de tiempo, por ejemplo, *s*, *min*, *h*, *años*, etc. Es importante notar que la determinación experimental de una magnitud, por ejemplo la longitud de un objeto, debe comunicarse haciendo referencia a alguna unidad de medida, por ejemplo metros. De lo contrario, decir que el objeto en cuestión “tiene una longitud de 7” carece totalmente de sentido, ya que podría tratarse de una galaxia o un átomo, según cuál sea la unidad no comunicada. A partir de ahora, para referirnos a unidades de distintas magnitudes utilizaremos corchetes; por ejemplo:  $[\ell] = m$  significa “las unidades de longitud son metros”, o bien:  $[t] = s$  quiere decir “las unidades de tiempo son segundos”.

En el ejemplo de la figura 1.10, la relación entre  $t$  y  $x$  se pone en evidencia en la tabla 1.1, que hemos confeccionado con los valores de  $t_i$  y  $x_i$ . Allí queda explícita la posición del cuerpo (coordenada espacial) observada, es decir medida, para cada valor de tiempo (coordenada temporal). Sin embargo, para todos los instantes existentes entre dos instantes consecutivos medidos  $t_i$  y  $t_{i+1}$ , desconocemos cuál es la posición del cuerpo. Podemos realizar nuevos experimentos tomando mayor cantidad de datos  $(t_i, x_i)$ , pero nunca podremos conocer experimentalmente la posición del cuerpo para todo instante. Si graficamos los valores de la tabla colocando en el eje de las abscisas los valores de  $t$  y en el de las ordenadas los correspondientes de  $x$ , este conjunto de puntos mostrará la información experimental que disponemos sobre el movimiento del cuerpo como se muestra en el gráfico de la izquierda de la figura 1.12. Pero el hecho de **no** poder medir la posición en todo instante nos lleva a hacer dos hipótesis:

- i) En cada instante en el intervalo de observación un cuerpo puntual está en un y solo un lugar.
- ii) El movimiento de todo cuerpo es **continuo**. Es decir, en una dimensión, un cuerpo para llegar de un punto a otro **debe** pasar por todos los puntos intermedios.

Estas hipótesis equivalen a asumir la existencia de una función matemática  $x(t)$ , denominada *función de movimiento* del cuerpo (también llamada *función posición*), que al ser evaluada en cada uno de los instantes de la tabla 1.1 resulta en la coordenada del cuerpo correspondiente a dicho instante. La función de movimiento  $x(t)$  es la descripción matemática del movimiento del cuerpo. Supondremos, hasta tener evidencia experimental de lo contrario, que esta función evaluada en cualquier valor de  $t$  (tabulado o no) da la coordenada del cuerpo en ese instante (ver figura 1.12). Si realizamos nuevas mediciones y esta función de movimiento no logra describir alguna o algunas de las nuevas mediciones, deberemos buscar una nueva función de movimiento  $x(t)$  que describa la totalidad de la información experimental que tengamos sobre el movimiento del cuerpo.

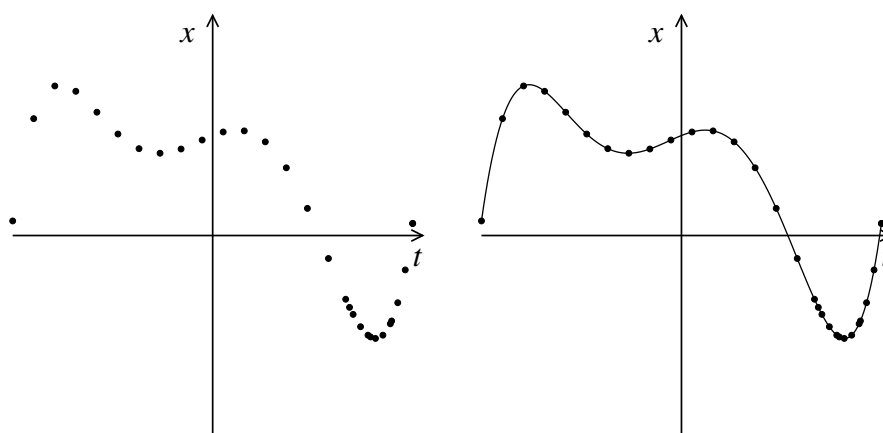


Figura 1.12: En el gráfico de la izquierda vemos la representación gráfica arbitraria de los puntos experimentales de la tabla 1.1. En la figura de la derecha se superpone la función de movimiento continua  $x(t)$ .

Veamos ahora cómo pueden ser las gráficas de las funciones de movimiento de un cuerpo. En la figura 1.12 ya vimos una función de movimiento posible de un cuerpo. Puede verse del gráfico que para cada instante está determinada la posición del cuerpo, es decir su coordenada  $x$ .

En la figura 1.13 se muestran dos gráficos que corresponden a funciones del tiempo; sin embargo estos no pueden representar funciones de movimiento ya que no describen situaciones posibles. La función de la izquierda **no** está definida en el intervalo  $(t_1, t_2)$ , lo cual correspondería a la descripción del movimiento de un cuerpo que desaparece en el instante  $t_1$ , reapareciendo en el instante  $t_2$ ; pero como no existe evidencia experimental de que un cuerpo pueda desaparecer y luego reaparecer, esta no es una

descripción física admisible. Por otro lado, en el gráfico de la derecha se describiría el movimiento de un cuerpo que en un determinado instante  $t_1$  está en un lugar e inmediatamente después está en otra posición diferente sin haber pasado por todas las otras posiciones que unen dichos puntos; nuevamente, no existe ninguna evidencia experimental de que la posición de un cuerpo pueda variar en forma discontinua. Así, ninguna de las funciones de la figura 1.13 corresponde a funciones de movimiento.

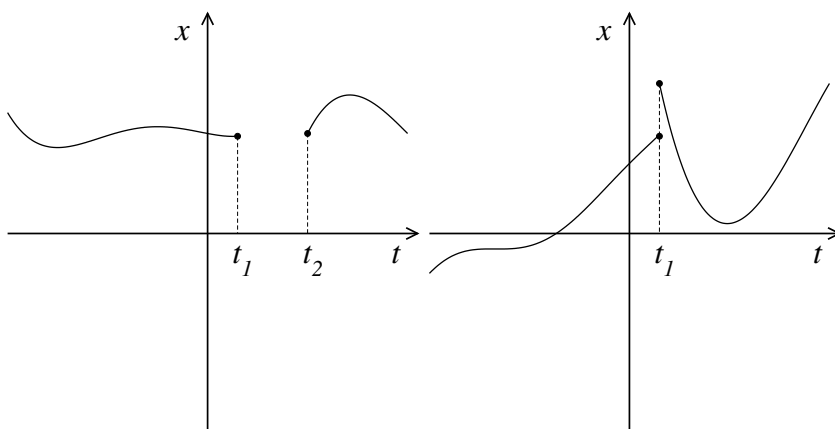


Figura 1.13: Ejemplo de dos funciones que no pueden ser de funciones movimiento: la de la izquierda no está definida en el intervalo  $(t_1, t_2)$ ; la de la derecha es discontinua en  $t = t_1$ .

La relación mostrada en la figura 1.14 no corresponde a una función y en particular, no puede representar el movimiento de un cuerpo, pues para cualquier instante en el intervalo  $(t_1, t_2)$  el cuerpo se encuentra en tres posiciones diferentes simultáneamente, lo que contradice nuestra suposición fundamental de que todo cuerpo se encuentra en un y solo un lugar en un dado instante.

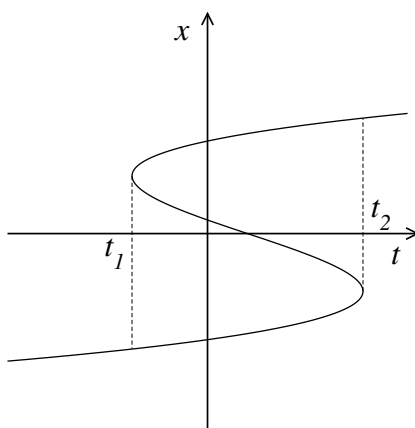


Figura 1.14: Ejemplo de una relación que no puede ser función de movimiento, ya que representaría un cuerpo que se halla al mismo tiempo en más de un lugar para  $t \in [t_1, t_2]$ .

En resumen, la relación entre los valores de las coordenadas  $x_i$  y los tiempos  $t_i$  que representan el movimiento de un cuerpo debe ser una función, y esta función debe ser continua (es decir que su gráfica no puede tener saltos) y además debe estar definida en todo el intervalo de interés. Más adelante veremos que es necesario imponer mayores condiciones a una función para que pueda representar el movimiento de un cuerpo.



### 1.5.1 Ejemplos de funciones de movimiento

A continuación vamos a analizar algunas funciones matemáticas que pueden representar funciones de movimiento.

#### Función constante

Consideremos la función  $x(t) = c$ , donde  $c$  es un número real. En particular, elegiremos un valor positivo para  $c$ , a los fines de graficar la función, tal como se muestra en la figura 1.15.

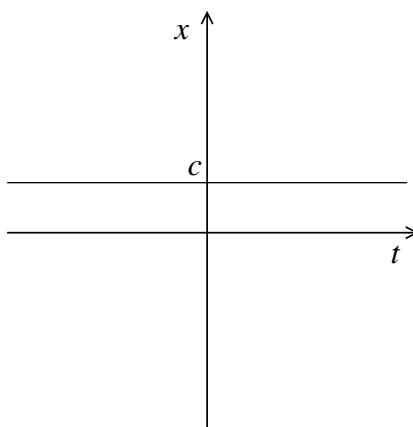


Figura 1.15: Función de movimiento de un cuerpo en reposo en  $x = c$ .

Este gráfico representa la función de movimiento de un cuerpo que está en reposo, es decir que para todo tiempo el cuerpo está en la misma posición  $x = c$ .

#### Función lineal

Una función de movimiento lineal constituye un caso más interesante. La expresión matemática correspondiente está dada por

$$x(t) = at + b; \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}. \quad (1.2)$$

Sabemos que el gráfico de esta función (ver figura 1.16) es una recta y que la constante  $a$  es la pendiente y  $b$ , la ordenada al origen. Al movimiento representado por esta función se lo denomina “Movimiento Rectilíneo Uniforme” (MRU). Ya veremos más adelante a qué se debe esta denominación. Por ahora trataremos de entender cómo se “lee” un gráfico de este tipo. En primer lugar, no debe olvidarse nunca que el tipo de movimiento que estamos describiendo es unidimensional y que las coordenadas espaciales están en el eje  $x$ . Esto nos dice que el móvil “camina” por el eje  $x$ , no por el gráfico de la función de movimiento, en este caso la recta de pendiente  $a$ . Si esta pendiente es positiva, como la mostrada en la figura 1.16, a medida que transcurre el tiempo el cuerpo va cambiando su posición siguiendo la dirección de crecimiento del eje  $x$ , se mueve en sentido positivo. Si  $a$  fuera negativo, eso querría decir que a medida que pasa el tiempo, se va desplazando hacia la dirección opuesta a la flecha del eje  $x$ , se mueve en sentido negativo. Cuando  $a$  vale cero, estamos en el caso anterior, es decir, el reposo es un

caso particular del MRU. El valor de la constante  $b$  indica la posición para  $t=0$ ; en particular, si  $b=0$ , el cuerpo está en el origen de coordenadas cuando  $t=0$ .

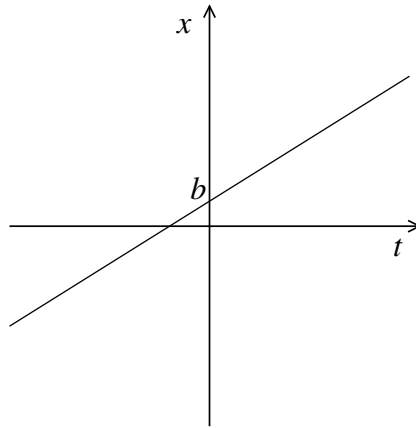


Figura 1.16: Función de movimiento lineal con  $a, b > 0$ .

Si nos plantean que un cuerpo se desplaza con movimiento rectilíneo uniforme, y que en el instante  $t_1$  se encuentra en la posición  $x_1$  y en otro instante  $t_2$  está en la posición  $x_2$ , como por dos puntos dados pasa una y solo una recta, podemos determinar cuál es su función de movimiento. Saber que el cuerpo se mueve con movimiento rectilíneo uniforme nos indica que la función de movimiento será una función lineal,  $x(t) = at + b$ , cuya gráfica es una línea recta. Además sabemos que los pares ordenados  $(t_1, x_1)$  y  $(t_2, x_2)$  pertenecen a dicha recta. Por lo tanto el problema de encontrar la función de movimiento se reduce a resolver el problema matemático de encontrar la ecuación de la recta que pasa por los dos pares ordenados indicados (ver figura 1.17).

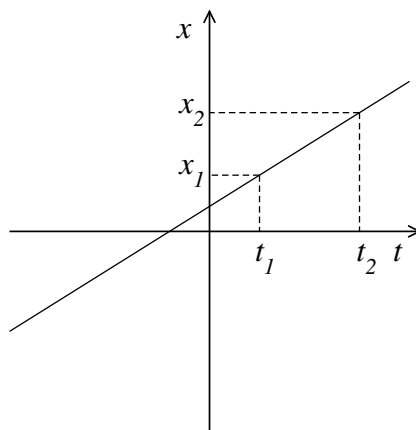


Figura 1.17: Recta que pasa por dos puntos dados.

Con la información proporcionada podemos escribir las ecuaciones

$$x_1 = at_1 + b ; x_2 = at_2 + b, \quad (1.3)$$

y resolviendo este sistema de ecuaciones podemos calcular los valores de las constantes  $a$  y  $b$ ,

$$a = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} ; b = \frac{t_2 x_1 - t_1 x_2}{t_2 - t_1}, \quad (1.4)$$

obteniendo así la expresión de la función de movimiento.

### Función cuadrática

Veamos ahora el caso en que la función de movimiento de un cuerpo es dada por una función cuadrática,

$$x(t) = at^2 + bt + c \quad \text{con } a, b, c \in \mathbb{R}; \quad a \neq 0. \quad (1.5)$$

El gráfico de esta función es una parábola, con ramas hacia arriba si  $a > 0$  (caso mostrado en la figura 1.18 izquierda), o hacia abajo si  $a < 0$  (caso mostrado en la figura 1.18 derecha), el vértice de la parábola se encuentra en  $t = -b/2a$ ;  $x = c - b^2/4a$ .

Notar que la figura 1.18 (izquierda) representa el movimiento de un cuerpo que viene de coordenadas positivas hacia las negativas, llega al vértice, que es el punto mínimo  $x_m = c - b^2/4a$ , y se vuelve hacia las coordenadas positivas cada vez mayores. Por otro lado, la figura 1.18 (derecha) muestra el movimiento de un cuerpo que viene de coordenadas negativas hacia las positivas, llega al vértice, que en este caso es un punto máximo,  $x_M = c - b^2/4a$ , y se vuelve hacia las coordenadas negativas cada vez menores.

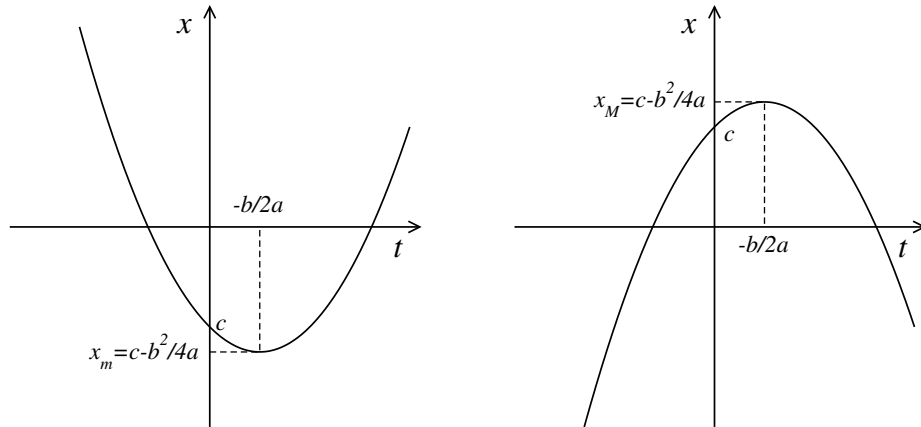


Figura 1.18: Función de movimiento cuadrática con  $a > 0$ ;  $b, c < 0$  (izquierda) y  $a < 0$ ;  $b, c > 0$  (derecha).

Sabemos que por tres puntos no alineados pasa una y solo una parábola, entonces si nos dicen que un cuerpo tiene un movimiento parabólico, necesitaremos medir la posición del cuerpo en tres instantes distintos para calcular los parámetros  $a$ ,  $b$  y  $c$  que definen la función de movimiento. Genéricamente llamaremos  $(t_1, x_1)$ ;  $(t_2, x_2)$ ;  $(t_3, x_3)$  a estos tres puntos; obtener los coeficientes de la parábola resulta algo más complicado que en el caso lineal, pero después de un poco de álgebra obtenemos

$$\begin{aligned}
a &= \frac{(x_2 - x_1)(t_3 - t_1) - (x_3 - x_2)(t_2 - t_1)}{(t_2 - t_1)(t_3 - t_2)(t_1 - t_3)} \\
b &= \frac{t_1^2(x_2 - x_3) + t_2^2(x_3 - x_1) + t_3^2(x_1 - x_2)}{(t_2 - t_1)(t_3 - t_2)(t_1 - t_3)} \\
c &= \frac{t_2 t_3(t_2 - t_3)x_1 + t_1 t_3(t_3 - t_1)x_2 + t_1 t_2(t_1 - t_2)x_3}{(t_2 - t_1)(t_3 - t_2)(t_1 - t_3)}.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

## SECCIÓN 1.6

## Encuentro

Diremos que dos cuerpos se encuentran si en un dado instante estos se hallan en un mismo lugar. Si graficamos las funciones de movimiento de ambos cuerpos es posible visualizar el encuentro como el punto donde las gráficas se cortan.

En general, decir que dos cuerpos  $A$  y  $B$  se encuentran, cualesquiera sean las funciones que describan sus posiciones en función del tiempo,  $x_A(t)$  y  $x_B(t)$ , implica que están en la misma posición (misma coordenada) al mismo tiempo, esto es, cumplen las ecuaciones

$$x_A(t_e) = x_e \quad ; \quad x_B(t_e) = x_e, \tag{1.7}$$

donde  $t_e$  es el tiempo de encuentro y  $x_e$  la coordenada de ambos móviles en dicho instante.

Analicemos un par de ejemplos simples:

a) Supongamos el caso particular de dos cuerpos (denominados  $A$  y  $B$ ) que se desplazan con movimiento rectilíneo uniforme, y por lo tanto sus funciones de movimiento son descritas por funciones lineales. Si las gráficas de estas funciones son rectas no paralelas, entonces estas se cortarán en un punto, tal como se muestra en la figura 1.19. Físicamente entendemos esto como que en ese punto ambos cuerpos se encuentran, es decir los dos cuerpos están en la misma posición en el mismo instante.

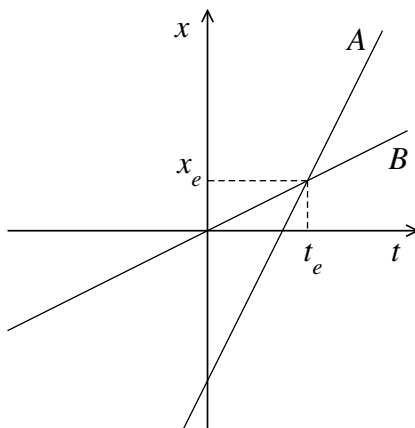


Figura 1.19: Encuentro de dos móviles con MRU.

Si las funciones de movimiento de los cuerpos  $A$  y  $B$  son

$$x_A(t) = a_A t + b_A ; \quad x_B(t) = a_B t + b_B , \quad (1.8)$$

entonces, para determinar el tiempo  $t_e$  y la coordenada  $x_e$  de encuentro, debemos resolver las ecuaciones (1.7) para las funciones de movimiento dadas en (1.8),

$$t_e = \frac{b_B - b_A}{a_A - a_B} ; \quad x_e = \frac{a_A b_B - a_B b_A}{a_A - a_B} . \quad (1.9)$$

b) Supongamos que las funciones de movimiento de cuatro cuerpos son:

$$x_A(t) = 2 \frac{m}{s^2} t^2 - 1 \frac{m}{s} t - 2 m ; \quad (1.10)$$

$$x_B(t) = 1 \frac{m}{s} t + 2 m ; \quad (1.11)$$

$$x_C(t) = 1 \frac{m}{s} t - \frac{5}{2} m ; \quad (1.12)$$

$$x_D(t) = 1 \frac{m}{s} t - 4 m . \quad (1.13)$$

Notar que a las constantes que multiplican las distintas potencias de  $t$  le adjudicamos unidades tales que las coordenadas tengan las dimensiones de longitud adecuadas. En el capítulo siguiente volveremos sobre este tema.

La función de movimiento del cuerpo  $A$ , dada en la ecuación (1.10), es una función cuadrática, cuyo gráfico es una parábola, mientras que las funciones de movimiento de los otros tres cuerpos ( $B$ ,  $C$  y  $D$ ) son funciones lineales y sus gráficas serán rectas. Si analizamos estas tres funciones lineales veremos que tienen la misma pendiente y diferentes ordenadas al origen; es decir sus gráficos son rectas paralelas y por lo tanto no se cortarán en ningún punto. Físicamente esto implica que no habrá ningún encuentro entre los cuerpos  $B$ ,  $C$  y  $D$ . Por lo tanto sólo es necesario analizar los posibles encuentros del cuerpo  $A$  con cada uno de los otros tres cuerpos.

Analicemos primero el problema de encuentro del móvil  $A$  con el  $B$ . Si se encuentran se debe verificar que

$$x_e = 2 \frac{m}{s^2} t_e^2 - 1 \frac{m}{s} t_e - 2 m \quad ; \quad x_e = 1 \frac{m}{s} t_e + 2 m . \quad (1.14)$$

Este sistema de ecuaciones arroja dos soluciones para  $t_e$ ,  $-1 s$  y  $2 s$ . Esto implica que los cuerpos  $A$  y  $B$  se encontrarán dos veces. Reemplazando estos valores de tiempo en la ecuación correspondiente al cuerpo  $A$  o al cuerpo  $B$  podemos determinar la posición donde se produce el encuentro. Para  $t_e = -1 s$  se encontrarán en  $x_e = 1 m$ ; y para  $t_e = 2 s$  los cuerpos se encontrarán en  $x_e = 4 m$ .

Para analizar el encuentro de los cuerpos  $A$  y  $C$  planteamos las ecuaciones

$$x_e = 2 \frac{m}{s^2} t_e^2 - 1 \frac{m}{s} t_e - 2 m \quad ; \quad x_e = 1 \frac{m}{s} t_e - \frac{5}{2} m , \quad (1.15)$$

y dado que un único valor de  $t_e$  es solución de este sistema de ecuaciones, esto nos permite determinar

que los cuerpos A y C se encontrarán en el instante  $t_e = 0,5 \text{ s}$  y en la posición  $x_e = -2 \text{ m}$ .

Finalmente, para estudiar el encuentro entre los cuerpos A y D planteamos el siguiente sistema de ecuaciones

$$x_e = 2 \frac{m}{s^2} t_e^2 - 1 \frac{m}{s} t_e - 2 \text{ m} \quad ; \quad x_e = 1 \frac{m}{s} t_e - 4 \text{ m}. \quad (1.16)$$

Podemos verificar que no existe ningún número  $t_e$  real que sea solución de este sistema. Físicamente esto significa que los cuerpos A y D no se encuentran nunca.

Las soluciones que hemos obtenido para el encuentro de los cuerpos A, B, C y D se corresponden con lo que se puede observar en las gráficas de las funciones de movimiento de estos cuerpos, representadas en la figura 1.20.

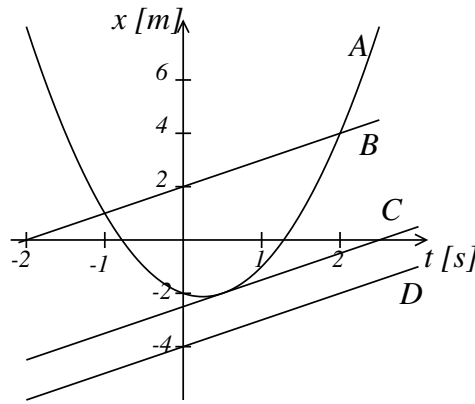


Figura 1.20: Encuentro del móvil A con los móviles B, C y D.

Debemos tener especial cuidado si buscamos puntos de encuentro entre dos cuerpos cuando alguna, o ambas funciones de movimiento están definidas a trozos. Supongamos que deseamos determinar si dos cuerpos, llamados A y B, se encuentran, si sus funciones de movimiento están dadas por:

$$x_A(t) = -1 \frac{m}{s} t + 2 \text{ m}; \quad (1.17)$$

$$x_B(t) = \begin{cases} 1 \frac{m}{s} t - 1 \text{ m} & ; \quad t < 0 \text{ s} \\ 1 \frac{m}{s^2} t^2 + 1 \frac{m}{s} t - 1 \text{ m} & ; \quad t \geq 0 \text{ s}. \end{cases} \quad (1.18)$$

La función de movimiento del cuerpo A es una función lineal y describe la coordenada del cuerpo para todo tiempo. La coordenada del cuerpo B no puede ser descripta por una única expresión que sea válida para todo tiempo y por ello está definida en dos tramos (ecuación (1.18)). Para tiempos menores que cero la función de movimiento es lineal y para tiempos iguales o mayores que cero es una función cuadrática. Para resolver el problema de encuentro entre estos cuerpos necesitamos analizar qué ocurre en cada uno de los intervalos de tiempo.

Para tiempos menores que cero planteamos la condición de encuentro escribiendo el siguiente sistema de ecuaciones

$$x_e = -1 \frac{m}{s} t_e + 2 \text{ m} \quad ; \quad x_e = 1 \frac{m}{s} t_e - 1 \text{ m}. \quad (1.19)$$

Al resolver este sistema obtenemos como solución que el tiempo de encuentro es  $t_e = 1,5s$ . Si bien este valor es solución de las ecuaciones (1.19), no tiene sentido físico pues está fuera del intervalo de tiempo  $t < 0$  que estamos considerando. Por lo tanto no ocurre ningún encuentro para tiempos menores que cero.

Para tiempos iguales o mayores que cero, planteamos la condición de encuentro mediante el sistema de ecuaciones siguiente:

$$x_e = -1 \frac{m}{s} t_e + 2 m \quad ; \quad x_e = 1 \frac{m}{s^2} t_e^2 + 1 \frac{m}{s} t_e - 1 m. \quad (1.20)$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, vemos que tiene dos soluciones para el tiempo de encuentro, siendo ellas  $t_{e1} = -3 s < 0$  y  $t_{e2} = 1 s > 0$ . Aunque ambos valores satisfacen las ecuaciones (1.20), sólo  $t_{e2} = 1 s$  está dentro del intervalo de tiempo que estamos considerando. Reemplazando este valor en cualquiera de las funciones de movimiento correspondientes a  $t \geq 0$  podemos calcular el valor de la coordenada en que se produce el encuentro,  $x_e = 1 m$ .

Por lo tanto, los cuerpos A y B sólo se encontrarán una vez en  $t = 1 s$  y la coordenada del encuentro será  $x = 1 m$ , que se corresponde con el punto donde se cortan los gráficos de las funciones de movimiento mostrados en la figura 1.21.

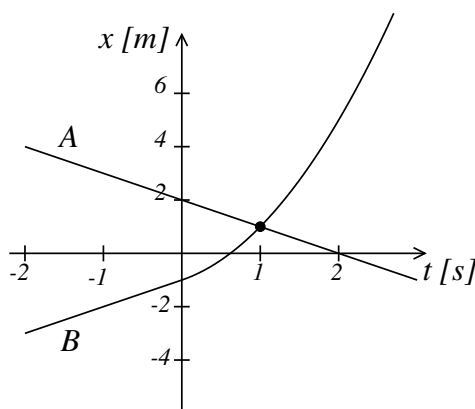


Figura 1.21: Funciones de movimiento dadas por las ecuaciones (1.17) y (1.18), esta última definida por tramos. El punto señala el encuentro en  $t_e = 1 s$ ,  $x_e = 1 m$ .

## SECCIÓN 1.7

# Distancia recorrida y desplazamiento

Si bien en el lenguaje cotidiano se suelen utilizar de manera indistinta las expresiones “distancia recorrida” y “desplazamiento”, en cinemática tienen dos significados totalmente diferentes.

Definimos como distancia recorrida *la longitud del camino que ha realizado el cuerpo en un determinado intervalo de tiempo*. La distancia recorrida es siempre una magnitud positiva y, por ejemplo, en un automóvil sería lo que leemos en el cuentakilómetros.

Por otra parte, el desplazamiento de un cuerpo es cuánto se ha modificado su posición en un determinado intervalo de tiempo con respecto a su posición inicial. Por lo tanto, si la función de movimiento

de un cuerpo está dada por  $x = x(t)$ , su desplazamiento en el intervalo de tiempo  $[t_1, t_2]$  será  $x(t_2) - x(t_1)$ . Denotaremos este desplazamiento usando la letra griega “delta” mayúscula,  $\Delta x = x(t_2) - x(t_1) = x_2 - x_1$  (en pocos años, si bien no aprenderemos griego, su alfabeto nos resultará tan familiar como el latino). De manera similar, denotaremos la distancia recorrida en el mismo intervalo de tiempo como  $d_{12}$ .

Para ejemplificar calculemos el desplazamiento de un cuerpo en el intervalo de tiempo  $[t_1, t_2]$  para algunas funciones de movimiento particulares. En la figura 1.22 vemos la gráfica de la función de movimiento de un cuerpo.

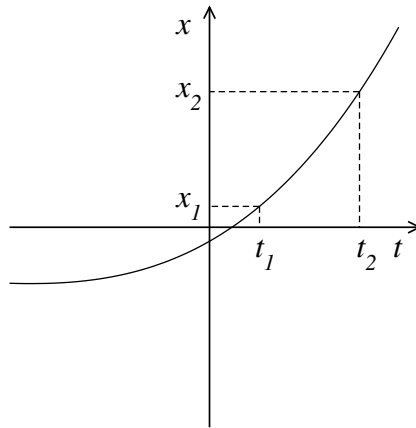


Figura 1.22: Función de movimiento de un móvil con dirección de viaje positiva en el intervalo  $[t_1, t_2]$ , donde se obtiene el mismo valor para la distancia recorrida y el desplazamiento.

En este caso la distancia recorrida y el desplazamiento del cuerpo en el intervalo de tiempo  $[t_1, t_2]$  coinciden en sus valores:  $d_{12} = \Delta x = x_2 - x_1$ .

Supongamos ahora que la función de movimiento del cuerpo es la mostrada en la figura 1.23.

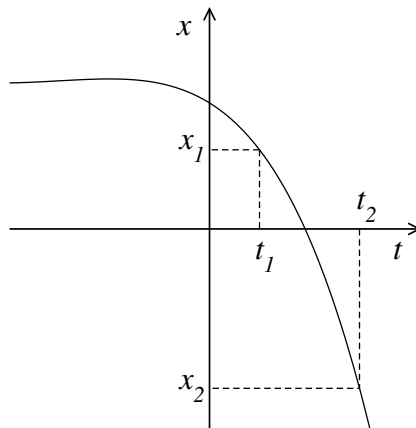


Figura 1.23: Función de movimiento de un móvil con dirección de viaje negativa en el intervalo  $[t_1, t_2]$ , donde se obtiene para la distancia recorrida el valor del desplazamiento cambiado de signo.

El cuerpo cuya función de movimiento se grafica ha recorrido una distancia  $d_{12} = |x_2 - x_1|$  ( $> 0$ ) y ha sufrido un desplazamiento  $\Delta x = x_2 - x_1$  ( $< 0$ ).

En el caso particular mostrado en la figura 1.24 vemos que el cuerpo al final del intervalo se encuentra



en la misma posición que al inicio,  $x_1 = x_2$ ; por lo tanto el desplazamiento del cuerpo es  $\Delta x = x_2 - x_1 = 0$ , mientras que la distancia que ha recorrido es  $d_{12} = 2(x_M - x_1)$ . Notar que no necesitamos conocer el instante en que el móvil estuvo en  $x_M$  para calcular la distancia recorrida.

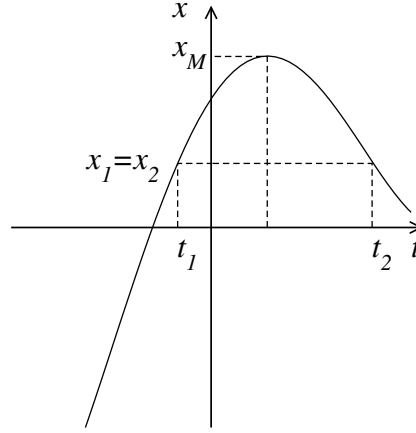


Figura 1.24: Función de movimiento de un móvil cuya dirección de viaje cambia de positiva a negativa en el intervalo  $[t_1, t_2]$ , donde el desplazamiento es nulo, mientras que la distancia recorrida es  $d_{12} = 2(x_M - x_1)$ .

¿Qué sucede si el móvil se mueve a veces hacia las coordenadas positivas y otras hacia las coordenadas negativas? Para el cálculo del desplazamiento esto no es relevante, ya que solo nos interesa conocer las posiciones inicial y final. En cambio, para calcular la distancia recorrida debemos calcular cada distancia parcial recorrida hacia las coordenadas positivas y hacia las coordenadas negativas y luego sumarlas. Veamos esto en un ejemplo concreto:

$$x(t) = \frac{1}{3} \frac{m}{s^3} t^3 - 1 \frac{m}{s} t + \frac{1}{2} m, \quad (1.21)$$

cuyo gráfico se muestra en la figura 1.25.

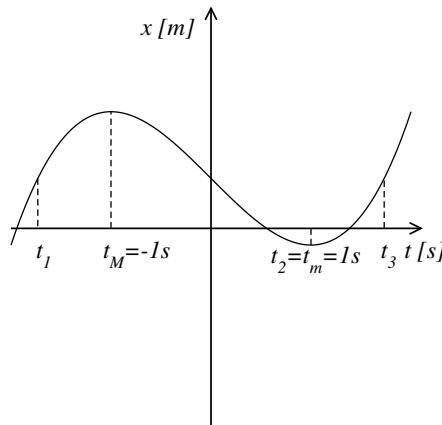


Figura 1.25: Función de movimiento de un móvil con dirección de viaje tanto hacia las coordenadas positivas como hacia las negativas en el intervalo  $[t_1, t_3]$ .

Sean los instantes  $t_1 = -\sqrt{3} s$ ;  $t_2 = 1 s$  y  $t_3 = \sqrt{3} s$ . Supongamos que queremos conocer las distancias

y desplazamientos entre el instante  $t_1$  y los instantes  $t_2 = 1\text{ s}$  y  $t_3 = \sqrt{3}\text{ s}$  y entre el instante  $t_2$  y el instante  $t_3$ . Lo primero que hacemos es calcular la posición del móvil en estos tres instantes:

$$x_1 = x(t_1) = \frac{1}{2}m \quad ; \quad x_2 = x(t_2) = -\frac{1}{6}m \quad ; \quad x_3 = x(t_3) = \frac{1}{2}m. \quad (1.22)$$

Con estos datos ya estamos en condiciones de calcular los desplazamientos:

$$\Delta x_{12} = \left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right)m = -\frac{2}{3}m \quad ; \quad \Delta x_{13} = \frac{1}{2}m - \frac{1}{2}m = 0 \quad ; \quad \Delta x_{23} = \frac{1}{2}m - \left(-\frac{1}{6}m\right) = \frac{2}{3}m. \quad (1.23)$$

El cálculo de las distancias recorridas requiere más cuidado, ya que debemos conocer las distancias recorridas en sentido positivo y las recorridas en sentido negativo, así calculamos primeramente la posición en  $t_M$ ;  $x_M = (7/6)m$  (como  $t_m = t_2$ , ya conocemos  $x_m = x_2$ ). Con esto podemos averiguar las distancias recorridas en los intervalos  $[t_1, t_M]$ :  $d_{1M} = (2/3)m$ ;  $[t_M, t_m]$ :  $d_{Mm} = d_{M2} = |-1/6 - 7/6|m = (4/3)m$  y  $[t_m, t_3]$ :  $d_{m3} = d_{23} = (2/3)m$ . Así obtenemos finalmente

$$d_{12} = d_{1M} + d_{M2} = \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{3}\right)m = 2m \quad ; \quad d_{13} = d_{12} + d_{23} = \left(2 + \frac{2}{3}\right)m = \frac{8}{3}m. \quad (1.24)$$

# 2

## Velocidad y Derivadas

### SECCIÓN 2.1

### Velocidad media

Hasta aquí hemos incorporado algunos elementos esenciales con el propósito de describir el movimiento de un cuerpo que se mueve sobre una recta. En primer lugar definimos un sistema de coordenadas y las coordenadas; con ello queda rigurosamente determinada la posición de un cuerpo en la recta. Luego definimos la función de movimiento del cuerpo,  $x = x(t)$ , que nos permite determinar la coordenada del cuerpo en cada instante.

Pero, como veremos, la función de movimiento guarda mucha más información, que en los siguientes capítulos aprenderemos a obtener. En particular, es claro que no solo nos importa qué distancia recorre un cuerpo, sino también en cuánto tiempo lo hace. Si vamos en 20 minutos de Córdoba a Carlos Paz diremos que fuimos “muy rápido”, si en cambio demoramos 2 horas, diremos que fuimos “muy lento”. Pero los físicos debemos cuantificar todas nuestras observaciones, así que en lugar de *rápido* y *lento* definimos:

**Velocidad media de un cuerpo** es el cociente entre el desplazamiento del móvil y el intervalo de tiempo en el cual lo ha realizado.

Denotaremos la velocidad media como  $\bar{v}$ . Si el movimiento de un cuerpo está descrito por  $x(t)$ , y el móvil está en  $x_1 = x(t_1)$  en el instante  $t_1$  y en un instante  $t_2 > t_1$  está en  $x_2 = x(t_2)$ , la expresión matemática para la velocidad media en el intervalo  $\Delta t = t_2 - t_1$  es

$$\bar{v}(t_1, t_2) = \bar{v}(t_1, \Delta t) = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad (2.1)$$

donde  $\Delta x = x_2 - x_1$ . Notar que la velocidad media depende de ambos instantes,  $t_1$  y  $t_2$ , o, equivalentemente del instante  $t_1$  y la duración del intervalo temporal  $\Delta t$ .

A diferencia de coordenadas y tiempos, no necesitamos definir unidades de velocidad, ya que esta es una *unidad derivada*, esto es, si ya definimos las unidades de longitud (metros o kilómetros, o...) y las de tiempo (segundos, u horas, o...), las de velocidad están dadas, siendo

$$[V] = \frac{[\ell]}{[t]} = \frac{m}{s} \text{ ó } \frac{km}{s} \text{ ó } \frac{km}{h} \text{ ó } \dots \quad (2.2)$$

La velocidad media nos da información acerca de la “rapidez” con que se desplaza el cuerpo, es decir cuán rápido modifica su posición. Como se puede ver en el gráfico 2.1, el valor de la velocidad media coincide con el valor de la pendiente de la recta secante a la curva  $x(t)$  que pasa por los puntos  $(t_1, x_1)$  y  $(t_2, x_2)$ .

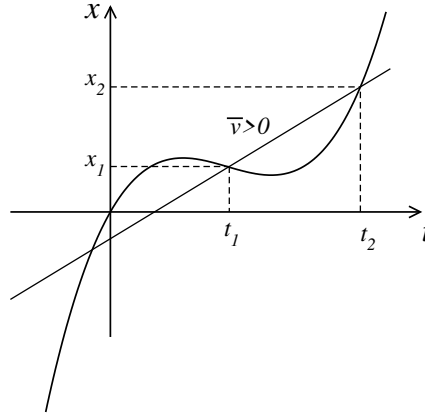


Figura 2.1: La velocidad media entre dos puntos es la pendiente de la recta secante a  $x(t)$  que pasa por dichos puntos.

Como  $\Delta t$  es siempre positivo, el signo de la velocidad media estará dado por el signo de  $\Delta x$ . En el gráfico 2.1 vemos que  $x_2 > x_1$  por lo que la velocidad media es positiva. En el gráfico 2.2 es  $x_2 < x_1$ , y la velocidad media es negativa.

Notemos que si hubiéramos elegido un sentido diferente para las coordenadas crecientes, los signos de la velocidad media cambiarían en ambos casos. Por lo tanto podemos decir que es el valor absoluto de la velocidad media el que nos da información de cuán rápido se movió el cuerpo que estamos observando en el intervalo de tiempo de interés y el signo nos dice hacia dónde se movió en dicho intervalo respecto del sistema de coordenadas utilizado para la descripción del movimiento.

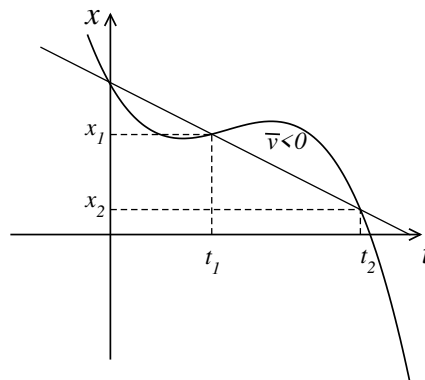


Figura 2.2: La velocidad media puede ser positiva, como en la figura 2.1, o negativa, como en este caso.

Analicemos el caso particular en que el cuerpo haya modificado su posición con el tiempo, pero que en el intervalo de tiempo considerado, la posición del cuerpo sea la misma en el instante inicial y el

final, como se muestra en el gráfico 2.3. En este caso, aplicando la ecuación (2.1), obtendremos que la velocidad media será igual a cero.

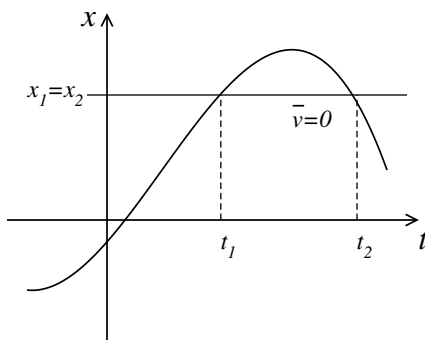


Figura 2.3: Aunque un cuerpo se esté moviendo, su velocidad media en un intervalo particular puede ser nula.

No debemos confundir nuestra definición de velocidad media con velocidad promedio  $\langle V \rangle = d/t$ , donde  $d$  es la distancia recorrida por el cuerpo y  $t$  el tiempo utilizado para recorrer dicha distancia. Por ejemplo cuando vemos una carrera (de autos, motos, bicicletas, etc.) el móvil parte del reposo y su velocidad varía en el transcurso de la competencia. Sin embargo la prensa nos da como información la velocidad promedio, este dato se calcula como el cociente entre la distancia **total** recorrida (¡que no debe confundirse con  $\Delta x$ !) y el tiempo que demoró en hacerlo y nos dice con qué velocidad constante el móvil hubiese recorrido la misma distancia en el mismo tiempo empleado. En contraste, de acuerdo con su definición, la velocidad media de un móvil en toda carrera donde el punto de partida coincide con el de llegada será cero.

### 2.1.1 Cálculo de la velocidad media para algunas funciones de movimiento

Analicemos ahora la velocidad media para algunas de las funciones de movimiento simples estudiadas en el capítulo 1.

a) Función de movimiento constante:  $x(t) = c$

$$x(t_1) = c \text{ y } x(t_2) = c \implies \bar{v} = \frac{c - c}{t_2 - t_1} = 0 \quad \forall t_1, t_2 > t_1. \quad (2.3)$$

Vemos que independientemente del intervalo de tiempo que tomemos la velocidad media es nula. Esto es compatible con el movimiento descrito por esta función de movimiento, la cual corresponde a un cuerpo en reposo.

b) Función de movimiento lineal:  $x(t) = at + b$ :

$$x(t_1) = at_1 + b; x(t_2) = at_2 + b \implies$$

$$\bar{v} = \frac{(at_2 + b) - (at_1 + b)}{t_2 - t_1} = \frac{a(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1} = a \quad \forall t_1, t_2 > t_1. \quad (2.4)$$

Un cuerpo cuya función de movimiento es una función lineal tiene una velocidad media constante cuyo

valor coincide con la pendiente de la recta  $x(t)$ . Es por este motivo que denominamos en el punto 1.5.1 al movimiento descrito por esta función como *Movimiento Rectilíneo Uniforme* (MRU) pues el cuerpo se mueve sobre una recta y su velocidad media es constante independientemente de los instantes  $t_1$  y  $t_2$  que elijamos para su cálculo. Notemos que la función de movimiento constante analizada en (a) es un caso particular de MRU con  $a = 0$ .

Para las dos funciones de movimiento (función constante y función lineal) cuya velocidad media hemos calculado, esta es constante, independiente del intervalo de tiempo utilizado para su cálculo. En ambos casos la recta secante, que une los dos puntos tomados para el cálculo de la velocidad media, coincide con la función de movimiento, esto es, la velocidad media es la pendiente de la recta  $x(t)$ .

c) Función de movimiento parabólica:  $x(t) = a_2 t^2 + a_1 t + a_0$ . En la figura 2.4 mostramos una función de movimiento parabólica con  $a_2 > 0$ ,  $a_1 < 0$ ,  $a_0 > 0$  (¿cómo aseguramos esto?) con la correspondiente recta secante a los puntos  $(t_1, x(t_1))$  y  $(t_2, x(t_2))$ , cuya pendiente es  $\bar{v}(t_1, t_2)$ . Veamos explícitamente cómo la calculamos:

$$x(t_1) = a_2 t_1^2 + a_1 t_1 + a_0 \quad ; \quad x(t_2) = a_2 t_2^2 + a_1 t_2 + a_0 \Rightarrow \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \frac{(a_2 t_2^2 + a_1 t_2 + a_0) - (a_2 t_1^2 + a_1 t_1 + a_0)}{t_2 - t_1} \\ &= \frac{a_2(t_2^2 - t_1^2) + a_1(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1} \\ &= a_2(t_2 + t_1) + a_1 = a_2(2t_1 + \Delta t) + a_1. \end{aligned} \quad (2.6)$$

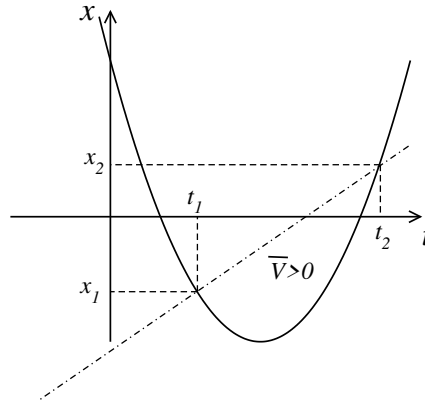


Figura 2.4: Función de movimiento parabólica mostrando la recta secante a dos puntos, cuya pendiente es  $\bar{v}(t_1, t_2) > 0$ .

Como vemos, en el caso en que la función de movimiento del cuerpo es un polinomio de segundo grado, la velocidad media ya no es constante y depende de los valores de  $t_1$  y  $t_2$ , o equivalentemente, de  $t_1$  y  $\Delta t$  elegidos para su determinación. Es decir que aunque mantengamos  $t_1$  constante, la velocidad media variará al cambiar el valor de  $\Delta t$  elegido. En la figura 2.5 se muestra una función de movimiento parabólica (también con  $a_2 > 0$ ,  $a_1 < 0$ ,  $a_0 > 0$ ) mostrando tres velocidades medias para un mismo valor de  $t_1$ , siendo una positiva, otra nula y una tercera negativa dependiendo del valor de  $\Delta t$ .

Podríamos seguir analizando la velocidad media para otras funciones de movimiento tanto o más complicadas que la anterior y encontraríamos que, salvo para la función lineal, la velocidad media de-

pende de los valores elegidos para  $t_1$  y  $\Delta t$ .

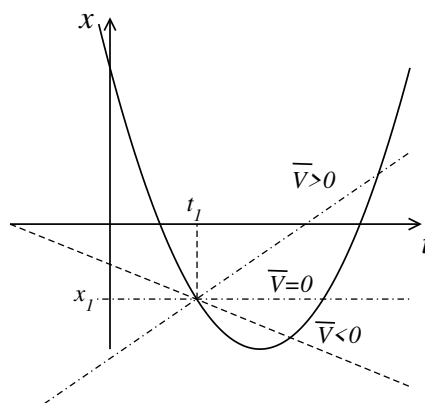


Figura 2.5: Función de movimiento parabólica mostrando tres rectas secantes, que, con igual valor de  $t_1$ , difieren en la elección de  $\Delta t$ , dando velocidades medias positiva, nula y negativa.

En particular podemos tener dos movimientos totalmente diferentes para los cuales la velocidad media sea la misma en un dado tiempo inicial e intervalo de tiempo, como se muestra en la figura 2.6.

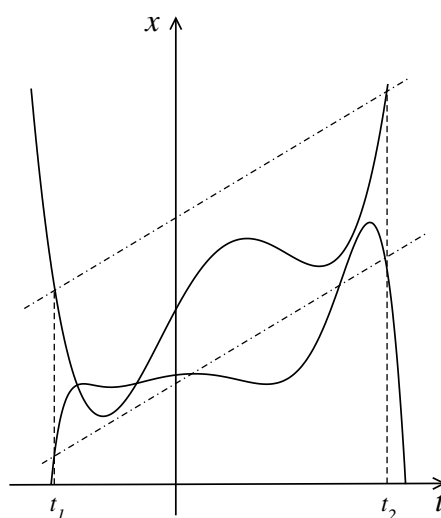


Figura 2.6: Dos funciones de movimiento diferentes pueden tener igual  $\bar{v}(t_1, t_2)$  para alguna elección particular de  $t_1, t_2$ .

## SECCIÓN 2.2

# Velocidad instantánea - parte I

Como vimos, salvo cuando la función de movimiento es una función constante o una función lineal (MRU), el concepto de velocidad media no es un parámetro que permita describir de manera clara el movimiento del cuerpo. Por lo tanto debemos ver cómo podemos definir la velocidad de un cuerpo con el propósito de obtener un parámetro que nos sea más útil en la caracterización de su movimiento. En

particular, una velocidad que dependa solo de un instante dado, no de dos ( $t_1$  y  $t_2 = t_1 + \Delta t$ ). Intuitivamente sabemos qué estamos buscando: la velocidad que nos marca el velocímetro del auto depende solo del instante que miramos, es instantánea, veamos cómo podemos definirla.

La velocidad media caracteriza correctamente el movimiento rectilíneo uniforme. Como  $\bar{v}$  en este caso no depende de  $t_1$  ni de  $\Delta t$ , podemos genuinamente decir que la velocidad del móvil en cualquier instante es  $\bar{v}$ . En un caso general, lo que haremos es restringir el intervalo de tiempo en el cual vamos a calcular la velocidad media. Podemos elegir un intervalo de tiempo lo suficientemente pequeño de manera tal que en este intervalo el movimiento pueda ser considerado aproximadamente rectilíneo y uniforme como se muestra en la figura 2.7.

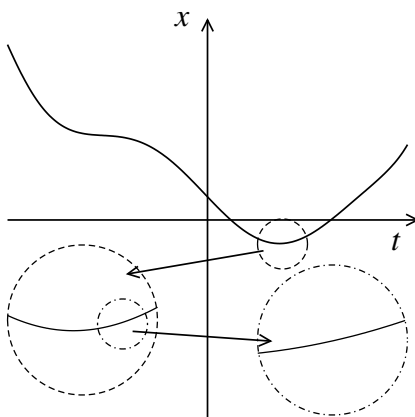


Figura 2.7: Siempre podemos magnificar un trozo de curva hasta que este se aproxime tanto como querramos a una recta.

Cuanto más pequeño sea el intervalo de tiempo elegido para el cálculo de la velocidad media, el movimiento en dicho intervalo más se parecerá a un movimiento rectilíneo uniforme. La velocidad media que calculemos será constante en dicho intervalo y por lo tanto nos dará información de cuán rápido varía la posición del cuerpo en un dado instante y un entorno reducido del mismo. Sin embargo, depende del comportamiento de la función de movimiento, cuán pequeño debe ser el intervalo de tiempo en el cual podemos considerar la función como (aproximadamente) lineal. Para solucionar este problema, lo que podemos hacer es, dado un instante  $t_1$ , tomar un intervalo de tiempo y luego analizar qué ocurre con la velocidad media cuando hacemos a éste cada vez más pequeño, esto es, hacer tender el tamaño del intervalo de tiempo a cero, lo que denotaremos como  $\Delta t \rightarrow 0$ . Es importante notar que hacer  $\Delta t$  tender a cero **excluye**  $\Delta t = 0$ , esto es, el tamaño del intervalo tiende a cero, pero es **siempre** no nulo.

En el cálculo de la velocidad media estamos haciendo tender a cero el denominador; sin embargo cuando el intervalo de tiempo tiende a cero también tiende a cero la variación de la posición del cuerpo ( $\Delta x \rightarrow 0$ ) y por lo tanto podría esperarse que el cociente  $\Delta x / \Delta t$  tienda a un valor finito cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ .

Si calculamos la velocidad media haciendo tender el intervalo de tiempo a cero,  $\Delta t \rightarrow 0$ , entonces la velocidad media ya no dependerá más del intervalo de tiempo sino solo del instante  $t_1$  en el cual estamos realizando el cálculo. Por lo tanto, estaremos obteniendo una información que es función de un determinado instante (tal como ocurre con la función de movimiento), así este cálculo ya no nos dará la velocidad media del cuerpo sino la velocidad instantánea en  $t = t_1$ . Definiremos entonces la función del tiempo velocidad instantánea como el límite del cociente entre el desplazamiento que realiza el cuerpo en el intervalo de tiempo  $\Delta t$  y el tiempo en que lo realiza,  $\Delta t$ , cuando  $\Delta t$  tiende a cero:

$$v(t) \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (2.7)$$



Analicemos geométricamente qué es lo que estamos haciendo en este proceso de tomar límite. Recordando que la velocidad media se obtiene como la pendiente de la recta secante a  $x(t)$ , cuando tomamos intervalos de tiempo cada vez más pequeños, como se muestra en la figura 2.8, si  $\Delta t > \Delta t' > \Delta t''$ , ..., las distintas rectas secantes  $S, S', S'', \dots$  se van aproximando cada vez más a una recta que intersecta la función en un solo punto. Esta recta, señalada en la figura como  $T$ , se denomina *recta tangente* a la función de movimiento en el punto  $(t_1, x(t_1))$ . Por lo tanto, el valor de la velocidad instantánea del cuerpo para un determinado instante viene dado por el valor de la pendiente de la recta tangente a la función de movimiento en dicho instante.

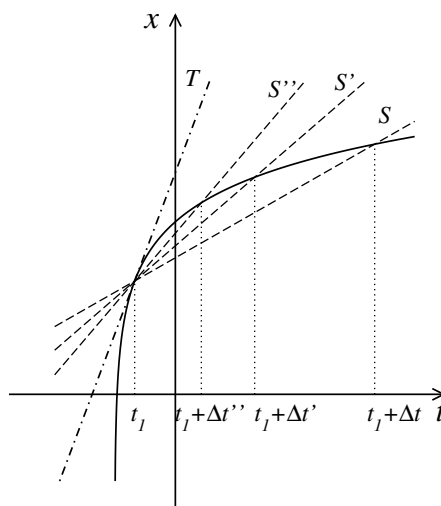


Figura 2.8: Idea geométrica de la velocidad instantánea: se muestran tres rectas secantes  $S, S', S''$  correspondientes a tres valores de intervalos temporales y la recta  $T$ , tangente a  $x(t)$  en el instante  $t = t_1$ .

Veremos más adelante cómo calcular la pendiente de la recta tangente sin necesidad de estudiar las rectas secantes para incrementos  $\Delta t$  cada vez más pequeños. Como dijimos en el capítulo 1, el lenguaje de la física es la matemática, e iremos aprendiendo este lenguaje a medida que los fenómenos físicos que queremos describir nos lo exijan. En particular, en los párrafos precedentes hemos introducido una nueva herramienta matemática: el límite. Utilizando este nuevo concepto, podremos definir la derivada de una función, que nos dará un método para calcular la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto dado. La gran importancia de estos dos conceptos merecen abrir un paréntesis matemático que nos permitirá analizar en profundidad la cinemática de un móvil.

### SECCIÓN 2.3

## El concepto de límite de una función

Nos restringiremos a dar una idea intuitiva y operacional de límite de una función, dejando su tratamiento riguroso para cursos de Análisis Matemático.

Diremos que el límite de una función  $f(x)$ , cuando la variable independiente  $x$  tiende a un determinado valor  $x_0$ , es el valor  $L$  al cual tiende la función, independientemente de que la función esté definida o no en dicho punto, y lo denotaremos como

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L. \quad (2.8)$$

Notemos que tanto  $x_0$  como  $L$  podrían ser  $\pm\infty$ . En tales casos debemos tomar ciertos cuidados.

Analicemos algunos ejemplos simples,

$$\begin{aligned} f(x) = x^2 &\rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4 \\ f(x) = \frac{1}{x^2} &\rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty ; \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0 \\ f(x) = \begin{cases} 3x+7 & x < 3 \\ 4 & x = 3 \\ 2x^2 - 2 & x > 3 \end{cases} &\rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 16. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Notar que el límite de una función para un cierto valor de la variable independiente no siempre existe, un ejemplo drástico es la famosa función de Dirichlet,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es un número racional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es un número irracional} \end{cases}, \quad (2.10)$$

que no tiene límite definido para ningún valor real de  $x$ . Un caso “intermedio” importante es cuando la función no es continua en  $x = x_0$ , pero sí en cualquier punto de un entorno de  $x_0$ , y tiende a valores diferentes según nos aproximemos al punto por números mayores o menores que  $x_0$ , veamos un ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} 4x+1 & \text{si } x < 1 \\ 9 & \text{si } x = 1 \\ 2x^3 & \text{si } x > 1 \end{cases}. \quad (2.11)$$

Claramente no existe el límite de  $f$  para  $x \rightarrow 1$ , pero también es claro que la función tiende a 5 si nos acercamos por valores menores que 1, y a 2 si nos acercamos por valores mayores. Diremos entonces que  $f(x)$  tiende a 5 por valores menores que 1, y a 2 por valores mayores que 1, y lo denotaremos

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 5 ; \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2, \quad (2.12)$$

o, en general

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L^- ; \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L^+, \quad (2.13)$$

y diremos que  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existe si  $L^- = L^+$ . Debemos tener en cuenta que cualquiera, o ambos de estos límites pueden resultar infinito, por ejemplo

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{1}{x-a} = -\infty ; \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{1}{x-a} = +\infty. \quad (2.14)$$

Es importante notar que si una función  $f(x)$  es continua en  $x = x_0$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  (aunque también puede darse vuelta el argumento, en algunos libros se define una función como continua en  $x_0$  si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ ).

### 2.3.1 Algunas propiedades del límite de funciones

Si bien no desarrollaremos demostraciones, resulta importante conocer las siguientes propiedades:

- i) Sean  $f(x)$  y  $g(x)$  funciones con límites definidos en  $x = x_0$ ,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = F ; \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = G ; F, G \in \mathbb{R},$$

y  $\alpha$  una constante, entonces

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha f(x)) = \alpha F ; \quad (2.15a)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = F + G ; \quad (2.15b)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) g(x)) = F G ; \quad (2.15c)$$

$$\text{si } G \neq 0 \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F}{G}. \quad (2.15d)$$

- ii) Sean  $f(x)$ ,  $g(x)$  y  $h(x)$  funciones tales que  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  para todo  $x$  en un entorno de  $x_0$ , excepto posiblemente en  $x = x_0$ , y

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = F ; \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = F ,$$

entonces el límite de  $g(x)$  para  $x \rightarrow x_0$  existe y

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = F . \quad (2.16)$$

### 2.3.2 El límite de $\sin(x)/x$ para $x \rightarrow 0$

Hemos analizado varios ejemplos sencillos, pero el cálculo de límite de funciones se complica cuando  $f(x)$  es, por ejemplo, un cociente de dos funciones,  $f(x) = g(x)/h(x)$ , y queremos calcular el límite en un punto en que ambas,  $g$  y  $h$ , se anulan o divergen, por lo que no podemos utilizar la propiedad descrita en la ecuación (2.15d). Estos casos deben estudiarse con sumo cuidado. En los cursos de Análisis Matemático se verán técnicas especiales para su cálculo. Ahora solo estudiaremos un caso particular, que resulta instructivo y nos será de utilidad en breve. Tomemos la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}, \quad (2.17)$$

que, para  $x \neq 0$ , es el cociente de dos funciones continuas que cumplen

$$\lim_{x \rightarrow 0} x = 0 ; \lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = 0, \quad (2.18)$$

y hemos incluido el punto  $f(0) = 1$  arbitrariamente (a *posteriori* justificaremos este valor) para que  $f$  esté definida para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

En la figura 2.9 podemos distinguir 3 áreas en orden creciente:  $A_a < A_b < A_c$ , cuyos valores podemos calcular:

(a)  $A_a$  es el área de un triángulo rectángulo de lados  $(1, \cos(x), \sin(x)) \Rightarrow A_a = \cos(x) \sin(x)/2$ .

(b)  $A_b$  es el área de un sector circular de radio  $R = 1$  y abertura  $x \Rightarrow A_b = x/2$ .

(c)  $A_c$  es el área de un triángulo rectángulo de lados  $(1/\cos(x), 1, \tan(x)) \Rightarrow A_c = \tan(x)/2$ .

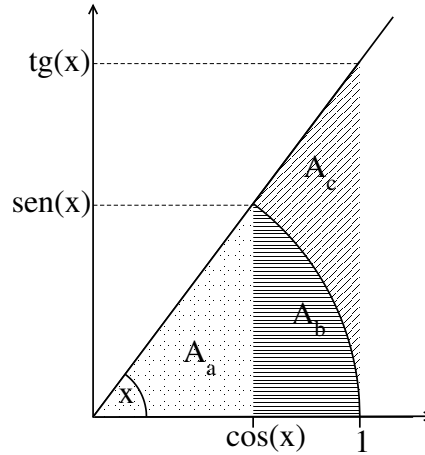


Figura 2.9: Áreas  $A_a$  (punteada)  $< A_b$  (punteada+rayada horizontal)  $< A_c$  (punteada+rayada horizontal+rayada oblicua).

Como  $A_a < A_b < A_c$ , tenemos que

$$\frac{1}{2} \cos(x) \sin(x) < \frac{x}{2} < \frac{1}{2} \tan(x),$$

multiplicando por 2 y dividiendo estas desigualdades por  $\sin(x)$  (que es no nulo y positivo para valores pequeños de  $x > 0$ ),

$$\cos(x) < \frac{x}{\sin(x)} < \frac{1}{\cos(x)},$$

invirtiendo los cocientes, lo cual invierte las desigualdades, obtenemos

$$\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < \frac{1}{\cos(x)}.$$

Sabemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos(x)} = 1,$$

entonces, por la propiedad (2.16), concluimos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1. \quad (2.19)$$

Además, como tomamos  $f(0) = 1$  en la ecuación (2.17), tenemos que  $f(x)$  así definida resulta continua en  $x = 0$ , como se muestra en la figura 2.10.

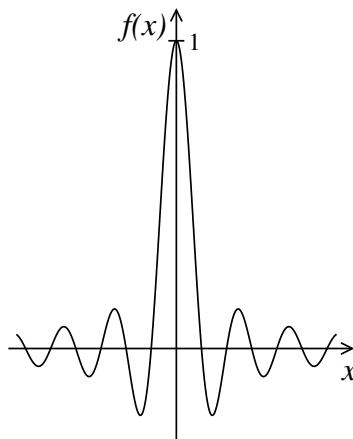


Figura 2.10: Gráfico de la función definida por la ecuación (2.17).

## SECCIÓN 2.4

# Derivadas

Ya hemos visto en la sección 2.2 el concepto geométrico de recta tangente a una función en un punto  $x_0$  como límite de las rectas secantes que cortan la curva en  $y(x_0)$  e  $y(x_0 + \Delta x)$  cuando  $\Delta x \rightarrow 0$ . Introduciremos ahora un nuevo concepto matemático que formaliza y amplía estas ideas, *la derivada* de una función.

### 2.4.1 Definición de derivada

Supongamos que tenemos una función  $y$  de la variable independiente  $x$ ,  $y = y(x)$ , definimos la derivada de  $y(x)$  respecto de  $x$  en un dado punto  $x_0$  como

$$\frac{dy}{dx}(x_0) \equiv \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad (2.20)$$

donde  $\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)$ . El número así obtenido es el límite para  $\Delta x \rightarrow 0$  de las pendientes de las rectas secantes a  $y(x)$  entre los puntos  $(x_0, y(x_0))$  y  $(x_0 + \Delta x, y(x_0 + \Delta x))$ , entonces es la pendiente de la recta tangente a  $y(x)$  en el punto  $x = x_0$ .

Claramente podemos calcular este límite en cualquier punto del dominio de  $y(x)$ , y si este existe,

definimos la *función* derivada de  $y$  respecto de  $x$  como

$$\frac{dy}{dx}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (2.21)$$

Una vez definida, calculemos como ejemplo la derivada de

$$y(x) = \sqrt{\sin^2(\ln(x)) + \frac{x+2}{x-2}}, \quad (2.22)$$

que, aplicando (2.21) resulta

$$\frac{dy}{dx}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\sin^2(\ln(x + \Delta x)) + \frac{x + \Delta x + 2}{x + \Delta x - 2}} - \sqrt{\sin^2(\ln(x)) + \frac{x+2}{x-2}}}{\Delta x}. \quad (2.23)$$

O no, mejor no intentemos calcular este límite, aprendamos primero reglas de derivación y las derivadas de algunas funciones, ¡y veremos que operativamente nunca usaremos la definición, ecuación (2.21) para derivar funciones como esta!

## 2.4.2 Reglas de derivación

Obtengamos a continuación algunas reglas para calcular derivadas.

a) Derivada de una función multiplicada por una constante:

Supongamos que tenemos una constante  $C$  y una función  $f(x)$  y queremos calcular derivada de  $y(x) = Cf(x)$ . Aplicando la definición de derivada tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{Cf(x + \Delta x) - Cf(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{C[f(x + \Delta x) - f(x)]}{\Delta x} = C \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = C \frac{df}{dx}, \end{aligned} \quad (2.24)$$

donde hemos usado la propiedad (2.15a) de límite. Entonces:

*La derivada de una función multiplicada por una constante es la constante multiplicada por la derivada de la función.*

b) Derivada de una suma de funciones:

Sea  $y(x) = f(x) + g(x)$ , entonces

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{[f(x + \Delta x) + g(x + \Delta x)] - [f(x) + g(x)]}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\
&= \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx},
\end{aligned} \tag{2.25}$$

donde hemos usado la propiedad (2.15b) de límite. Entonces:

*La derivada de una suma de funciones es igual a la suma de las derivadas de las funciones.*

c) Derivada de un producto de dos funciones:

Sea la función  $y(x) = f(x)g(x)$ . Su derivada será

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x},$$

sumando y restando  $f(x)g(x + \Delta x)$  en el numerador, obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x) + f(x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x + \Delta x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x + \Delta x) + f(x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x + \Delta x)}{\Delta x} + \frac{f(x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \right] \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x + \Delta x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x + \Delta x) - f(x)g(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} g(x + \Delta x) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} f(x) \\
&= \frac{df}{dx} g(x) + f(x) \frac{dg}{dx},
\end{aligned} \tag{2.26}$$

donde hemos usado las propiedades (2.15b) y (2.15c) de límite. Entonces:

*La derivada del producto de dos funciones es igual a la derivada de la primera función por la segunda sin derivar más el producto de la primera función sin derivar por la derivada de la segunda.*

d) Derivada de la función compuesta:

Sean las funciones  $z = z(y)$  e  $y = y(x)$ , definimos la función de la variable  $x$ ,  $z$  compuesta con  $y$ , como  $z(y(x))$ . La pregunta que nos hacemos es, asumiendo conocidas

$$\frac{dz(y)}{dy}; \frac{dy(x)}{dx},$$

¿cuál es la derivada de la función compuesta  $z(y(x))$  respecto de  $x$ ? Haremos el cálculo utilizando la definición:

$$\frac{dz(y(x))}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{z(y(x + \Delta x)) - z(y(x))}{\Delta x},$$

multiplicando y dividiendo esta expresión por  $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$ , obtenemos

$$\frac{dz(y(x))}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{z(y(x + \Delta x)) - z(y(x))}{\Delta y} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x},$$

aplicando la propiedad del límite (2.15c), usando que  $\Delta y \rightarrow 0$  para  $\Delta x \rightarrow 0$  tenemos

$$\frac{dz(y(x))}{dx} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{z(y + \Delta y) - z(y)}{\Delta y} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \frac{dz(y)}{dy} \frac{dy(x)}{dx}. \quad (2.27)$$

Podemos generalizar para el caso de una composición de más de dos funciones, es decir, supongamos una función  $f = f(g(h(j(\dots(y(x)))))$ , la derivada será:

$$\frac{df(g(h(j(\dots(y(x)))))}{dx} = \frac{df(g)}{dg} \frac{dg(h)}{dh} \frac{dh(j)}{dj} \dots \frac{dy(x)}{dx} \quad (2.28)$$

Esta regla de derivación se denomina *regla de la cadena*.

e) Derivada del cociente de dos funciones:

Podríamos calcularla como en los casos anteriores utilizando la definición (2.21) (dejamos a quien tenga curiosidad que realice esta cuenta). Aquí usaremos un camino más simple: primero aprenderemos la derivada de  $y(x) = 1/x$  y aplicaremos la regla de la derivada de la función compuesta para obtener la derivada de un cociente. Veremos entonces esta regla en la siguiente subsección.

### 2.4.3 Derivadas de funciones simples

Calcularemos ahora derivadas de funciones que usamos frecuentemente.

1.  $y(x) = x^0 = 1$ :

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1 - 1}{\Delta x} = 0,$$

que, junto con la regla (2.24) nos dice que si  $C$  es una constante, entonces

$$\frac{dC}{dx} = 0. \quad (2.29)$$

2.  $y(x) = x$ :

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1,$$



entonces

$$\frac{dx}{dx} = 1. \quad (2.30)$$

3.  $y(x) = x^2$ :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2x + \Delta x = 2x, \end{aligned}$$

entonces

$$\frac{dx^2}{dx} = 2x. \quad (2.31)$$

Este resultado también puede obtenerse aplicando la regla del producto dada por la ecuación (2.26), con  $f(x) = x$ ,  $g(x) = x \Rightarrow x^2 = fg$ , y la derivada de  $x$ , ecuación (2.30), así

$$\frac{dx^2}{dx} = \frac{df}{dx}g + f\frac{dg}{dx} = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x.$$

4.  $y(x) = x^3$ :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2) = 3x^2, \end{aligned}$$

entonces

$$\frac{dx^3}{dx} = 3x^2. \quad (2.32)$$

Similar al caso anterior, podemos obtener este resultado aplicando la regla del producto, ahora con  $f(x) = x^2$ ,  $g(x) = x \Rightarrow x^3 = fg$ , junto a las derivadas ya calculadas, ecuaciones (2.30) y (2.31), así

$$\frac{dx^3}{dx} = \frac{df}{dx}g + f\frac{dg}{dx} = 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 3x^2.$$

5.  $y(x) = x^n$ , con  $n \in \mathbb{N}$ :

Se puede obtener esta derivada usando la definición (2.21), pero como veremos, una vez aprendidas las reglas generales y las derivadas de las funciones elementales, usaremos muy pocas veces la definición para calcular derivadas (como ya hicimos al aplicar la regla del producto para derivar potencias cuadráticas y cúbicas). En particular, en este caso notamos que las ecuaciones (2.29-2.32) parecen insinuar que al derivar  $x^n$  “baja” la potencia  $n$  y se reduce en 1 la potencia de  $x$ , esto es, intuimos que

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}. \quad (2.33)$$

Esta fórmula contempla los casos ya calculados de  $x^n$ ,  $n = 0, \dots, 3$ , pero de aquí a decir que vale para todo  $n$  natural hay un gran paso y debemos probar que sea cierta. Para esto aprenderemos

un método muy interesante y muy útil para probar propiedades sobre los números naturales: *la demostración por inducción matemática*. Veremos aquí la idea intuitiva, y dejaremos su estudio en profundidad para los cursos de Álgebra. La idea es simple: si queremos probar una propiedad (no importa cómo la conocimos) para todo número natural, entonces probamos esta propiedad para  $n = 1$ , la asumimos válida para un número natural arbitrario  $n$ , y la demostramos para el número natural  $n + 1$ . Si logramos esto, la propiedad **debe** ser válida para todo número natural.

Probaremos ahora, utilizando inducción matemática, que la ecuación (2.33) es válida para todo número natural. Ya probamos explícitamente el caso  $n = 1$  (ecuación (2.30)), asumimos ahora que (2.33) es válida para  $n$ , debemos entonces verificar su validez para  $n + 1$ :

$$\frac{dx^{n+1}}{dx} = \frac{d(x^n x)}{dx} = \frac{dx^n}{dx} x + x^n \frac{dx}{dx} = nx^{n-1} x + x^n 1 = (n+1)x^n,$$

donde para llegar a la segunda igualdad usamos la regla de derivada de un producto, y para la siguiente igualdad usamos la ecuación (2.30). Esto completa la demostración. Si tenemos en cuenta la ecuación (2.29) tenemos que (2.33) es válida para  $n \in \mathbb{N} + \{0\}$ .

6.  $y(x) = 1/x = x^{-1}$ :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{x - (x + \Delta x)}{(x + \Delta x)x}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{x - x - \Delta x}{(x + \Delta x)x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{-\Delta x}{(x + \Delta x)x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} -\frac{1}{x^2 + x\Delta x} = -\frac{1}{x^2}, \end{aligned}$$

entonces

$$\frac{d1/x}{dx} = \frac{dx^{-1}}{dx} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}. \quad (2.34)$$

7.  $y(x) = 1/x^n = x^{-n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ :

Para obtener esta derivada, definimos  $g(h) = 1/h$  y  $h(x) = x^n$ , así  $y(x) = g(h(x))$  y podemos usar la regla de la derivada de composición de funciones (2.27):

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{dg(h)}{dh} \frac{dh(x)}{dx} = -\frac{1}{h^2(x)} nx^{n-1} = -\frac{1}{x^{2n}} nx^{n-1} = -\frac{n}{x^{n+1}} = -nx^{-(n+1)},$$

esto es, podemos generalizar el resultado (2.33):

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (2.35)$$

8.  $y = x^{1/n}$ :

Elevando ambos lados a la potencia  $n$ ,  $y^n = x$ , definiendo  $h(y) = y^n$  y derivando a ambos lados esta ecuación, podemos nuevamente aplicar la regla de la función compuesta:

$$\frac{dh(y(x))}{dx} = \frac{dh(y)}{dy} \frac{dy(x)}{dx} = ny^{n-1} \frac{dy(x)}{dx} = nx^{(n-1)/n} \frac{dy(x)}{dx} = 1,$$

despejando  $dy/dx$  obtenemos

$$\frac{dx^{1/n}}{dx} = \frac{1}{n} x^{(1/n)-1}; \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (2.36)$$

Recordar que  $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ , por lo que la ecuación (2.36) es la regla de derivación para raíces  $n$ -ésimas.

9.  $y = x^{\frac{m}{n}}$ ,  $m, n \in \mathbb{Z}$ :

Podemos generalizar el caso anterior a potencias racionales,  $y = x^{\frac{m}{n}}$ ,  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Nuevamente podemos elevar esta igualdad a la potencia  $n \Rightarrow y^n = x^m$ , y utilizando la misma técnica que en el punto anterior, definimos  $h(y) = y^n$  y derivamos a ambos lados esta ecuación, aplicando la regla de la función compuesta:

$$\frac{dh(y(x))}{dx} = \frac{dh(y)}{dy} \frac{dy(x)}{dx} = ny^{n-1} \frac{dy(x)}{dx} = nx^{m(n-1)/n} \frac{dy(x)}{dx} = mx^{m-1},$$

despejando  $dy/dx$  obtenemos

$$\frac{dx^{m/n}}{dx} = \frac{m}{n} x^{(m/n)-1}; \forall m, n \in \mathbb{Z}. \quad (2.37)$$

Entonces la ecuación (2.37) nos dice que la regla de derivación de una potencia de  $x$  vale para todo número racional. ¿Valdrá entonces para todo número real? La respuesta es **sí**, y si bien la demostración requiere conocimientos de límite que aún no tenemos, igualmente enunciaremos la regla de derivada de una potencia real de  $x$ :

$$\frac{dx^\alpha}{dx} = \alpha x^{\alpha-1}; \forall \alpha \in \mathbb{R}. \quad (2.38)$$

10.  $y = \text{sen}(x)$ :

Dejemos ahora las potencias de  $x$ , y veamos derivadas de funciones trigonométricas, comenzando por  $y(x) = \text{sen}(x)$ , recurriremos nuevamente a la definición de derivada:

$$\frac{dy(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x + \Delta x) - \text{sen}(x)}{\Delta x},$$

utilizando la identidad trigonométrica para el ángulo suma,  $\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \text{sen}(\beta)$  obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d\text{sen}(x)}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x) \cos(\Delta x) + \cos(x) \text{sen}(\Delta x) - \text{sen}(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \cos(x) \frac{\text{sen}(\Delta x)}{\Delta x} + \text{sen}(x) \frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x} \right), \end{aligned}$$

utilizando en el segundo término la identidad trigonométrica para el ángulo mitad,  $2\text{sen}^2(\alpha/2) = 1 - \cos(\alpha)$  obtenemos

$$\frac{d\text{sen}(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \cos(x) \frac{\text{sen}(\Delta x)}{\Delta x} - 2\text{sen}^2\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \frac{\text{sen}x}{\Delta x} \right),$$

multiplicando y dividiendo por  $\Delta x/4$  el segundo miembro,

$$\begin{aligned} \frac{d\text{sen}(x)}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \cos(x) \frac{\text{sen}(\Delta x)}{\Delta x} - 2 \frac{\text{sen}(x)}{\Delta x} \frac{\text{sen}^2(\frac{\Delta x}{2}) \frac{\Delta x}{4}}{\frac{\Delta x}{4}} \right) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \cos(x) \frac{\text{sen}(\Delta x)}{\Delta x} - \frac{1}{2} \text{sen}(x) \left( \frac{\text{sen}(\frac{\Delta x}{2})}{(\frac{\Delta x}{2})} \right)^2 \Delta x \right), \end{aligned} \quad (2.39)$$

utilizando ahora las propiedades del límite enumeradas en la sección 2.3.1,

$$\frac{d\operatorname{sen}(x)}{dx} = \cos(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(\Delta x)}{\Delta x} - \frac{1}{2} \operatorname{sen}(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \left( \frac{\operatorname{sen}(\frac{\Delta x}{2})}{(\frac{\Delta x}{2})} \right)^2 \Delta x \right), \quad (2.40)$$

usando también la ecuación (2.19):

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(\Delta x)}{\Delta x} = 1,$$

tenemos que

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \left( \frac{\operatorname{sen}(\frac{\Delta x}{2})}{(\frac{\Delta x}{2})} \right)^2 \Delta x \right) = \left( \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(\frac{\Delta x}{2})}{(\frac{\Delta x}{2})} \right)^2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = 0,$$

usando estos resultados en (2.40) obtenemos finalmente,

$$\frac{d\operatorname{sen}(x)}{dx} = \cos(x). \quad (2.41)$$

#### 11. $y = \cos(x)$

Ahora calculemos la derivada de la función  $y(x) = \cos(x)$ , podemos calcular esta derivada por definición, con un esfuerzo similar al realizado para obtener la derivada del  $\operatorname{sen}(x)$ . Pero, como ya dijimos, siempre que sea posible evitaremos el cálculo por definición. Así, usando las relaciones trigonométricas  $\cos(x) = \operatorname{sen}(x + \pi/2)$ ,  $\operatorname{sen}(x) = -\cos(x + \pi/2)$ , tenemos que

$$\frac{d\cos(x)}{dx} = \frac{d\operatorname{sen}(x + \pi/2)}{dx} = \cos(x + \pi/2) = -\operatorname{sen}(x). \quad (2.42)$$

Dejamos como ejercicio reobtener este resultado partiendo de la bien conocida relación  $\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ .

#### 12. Finalmente, sin demostración, daremos también las derivadas de las funciones logaritmo y exponencial,

$$\frac{d\ln(x)}{dx} = \frac{1}{x} \quad ; \quad \frac{de^x}{dx} = e^x. \quad (2.43)$$

Volvemos ahora a las reglas de derivación. En la sección 2.4.2 no calculamos la derivada de un cociente de funciones porque no habíamos aún calculado la derivada de  $y(x) = 1/x$ .

e) Derivada del cociente de dos funciones:

Aplicaremos ahora la derivada de la función compuesta para calcular la derivada de un cociente de funciones  $y(x) = f(x)/g(x)$ . Para esto usamos la función  $h(g) = 1/g$ , así  $y(x) = f(x)h(g(x))$ . Usamos primero la regla del producto de dos funciones,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(f(x)h(g(x)))}{dx} = \frac{df(x)}{dx}h(g(x)) + f(x)\frac{dh(g(x))}{dx}, \quad (2.44)$$

por la regla de derivada de la función compuesta tenemos que

$$\frac{dh(g(x))}{dx} = \frac{dh(g)}{dg} \frac{dg(x)}{dx} = -\frac{1}{g^2} \frac{dg(x)}{dx}, \quad (2.45)$$

reemplazando (2.45) en (2.44) y poniendo un denominador común  $g^2$  obtenemos finalmente

$$\frac{d(f(x)/g(x))}{dx} = \frac{\frac{df(x)}{dx}g(x) - f(x)\frac{dg(x)}{dx}}{g^2(x)}. \quad (2.46)$$

Entonces:

*La derivada de un cociente de funciones es la derivada de la de arriba por la de abajo menos la de arriba por la derivada de la de abajo dividido el cuadrado de la de abajo.*

Dejamos como ejercicio aplicar esta regla para obtener la derivada de  $y(x) = \tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$ .

Ahora sí estamos en condiciones de calcular la derivada de la función (2.22),

$$y(x) = \sqrt{\sin^2(\ln(x)) + \frac{x+2}{x-2}},$$

Lo que debemos hacer es definir nuevas funciones que nos permitan aplicar las reglas y casos ya conocidos:

$$\begin{aligned} f(g) &= \sqrt{g}; \quad g(x) = \sin^2(\ln(x)) + \frac{x+2}{x-2} \Rightarrow \\ y(x) &= f(g(x)) \Rightarrow \frac{dy(x)}{dx} = \frac{df(g)}{dg} \frac{dg(x)}{dx}, \end{aligned} \quad (2.47)$$

la primera derivada es (2.38) con  $\alpha = 1/2$ , mientras que  $g(x)$  es la suma de dos funciones

$$\begin{aligned} g(x) &= h(x) + i(x); \quad h(x) = \sin^2(\ln(x)); \quad i(x) = \frac{x+2}{x-2} \Rightarrow \\ \frac{dg(x)}{dx} &= \frac{dh(x)}{dx} + \frac{di(x)}{dx}, \end{aligned} \quad (2.48)$$

definiendo  $k(x) = \ln(x)$  podemos aplicar la regla de la función compuesta a  $h(x) = h(k(x))$ , mientras que a  $i(x)$  la regla de derivada de un cociente,

$$\begin{aligned} \frac{dh(k)}{dk} &= \frac{d\sin^2(k)}{dk} = 2\sin(k)\cos(k); \\ \frac{dk(x)}{dx} &= \frac{d\ln(x)}{dx} = \frac{1}{x}; \\ \frac{di(x)}{dx} &= \frac{d\frac{x+2}{x-2}}{dx} = -\frac{4}{(x-2)^2}. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Juntando los resultados obtenidos en las ecuaciones (2.47) a (2.49) obtenemos finalmente

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{1}{2y(x)} \left( \frac{2 \cos(\ln(x)) \operatorname{sen}(\ln(x))}{x} - \frac{4}{(x-2)^2} \right). \quad (2.50)$$

Mostrando con este ejemplo que, con cuidado y con paciencia, podemos utilizar el conjunto de reglas simples aprendidas para calcular las derivadas de funciones muy complicadas.

Resumimos en la tabla 2.1 las derivadas obtenidas en esta sección.

$y(x)$	$y'(x)$
$C f(x)$	$C f'(x)$
$f(x) + g(x)$	$f'(x) + g'(x)$
$f(x) g(x)$	$f'(x) g(x) + f(x) g'(x)$
$f(x)/g(x)$	$(f'(x) g(x) - f(x) g'(x))/g^2(x)$
$f(g(x))$	$f'(g) g'(x)$
$x^\alpha$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\operatorname{sen}(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\operatorname{sen}(x)$
$e^x$	$e^x$
$\ln(x)$	$1/x$

Tabla 2.1: Tabla de derivadas (la prima significa derivación respecto al argumento de la función).

Cerraremos esta sección con una breve discusión sobre distintas notaciones usadas en derivación de funciones,

- Una notación muy usada para la derivada de  $y(x)$  es

$$y'(x) \equiv \frac{dy(x)}{dx}. \quad (2.51)$$

- En Física se suele usar (aunque no lo haremos aquí) una notación particular cuando la derivada de una función es **específicamente** respecto del tiempo:

$$\dot{f}(t) \equiv \frac{df(t)}{dt}. \quad (2.52)$$

- Si queremos la derivada de  $y(x)$  en un punto dado  $x_0$  es **incorrecto** usar como notación  $\frac{dy(x_0)}{dx}$  ya que esto significa “primero evalúe  $y(x)$  en el punto  $x_0$  y luego derive”, lo que, trivialmente, siempre da cero. Notaciones equivalentes usadas para la derivada de una función valuada en un punto dado son:

$$\left. \frac{dy(x)}{dx} \right|_{x=x_0}; \quad \left. \frac{dy(x)}{dx} \right|_{x_0}; \quad y'(x_0); \quad \frac{dy}{dx}(x_0), \quad (2.53)$$

en todos los casos estas notaciones indican claramente la operación correcta: primero derivar  $y(x)$ , luego evaluar la función derivada en  $x_0$ .

- La derivada de la función derivada de  $y(x)$  es también una función que llamamos *derivada segunda* de  $y$  respecto de  $x$  dos veces, y la denotamos

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} = y''(x), \quad (2.54)$$

y podemos continuar con derivada tercera, cuarta,...,  $n$ -ésima, que se denotan como

$$\frac{d^ny(x)}{dx^n} = y^{(n)}(x). \quad (2.55)$$

## SECCIÓN 2.5

# Análisis de gráficos de funciones

En Física resulta importante analizar las funciones que describen cualquier fenómeno que querramos estudiar, por ejemplo, en cinemática, la función de movimiento  $x(t)$  o la velocidad  $v(t)$ . Resulta muy útil visualizar estas funciones para tener una idea cualitativa del fenómeno físico en cuestión. Para esto, dada una función  $f(x)$  buscamos saber

- Si es continua, o en qué puntos es discontinua y qué valores toma en las discontinuidades.
- Si tiene máximos y mínimos.
- Si tiene ceros, esto es, puntos  $x / f(x) = 0$ .
- Intervalos donde la función es positiva e intervalos donde es negativa.
- Puntos en que la función no está definida, en particular, si tiene divergencias.

- Si su dominio es  $\mathbb{R}$ , a qué valores tiende para  $x \rightarrow \pm\infty$ , o cuánto vale en los extremos del intervalo si su dominio es finito.
- Posible existencia de asíntotas.

Ya conocemos gráficos de algunas funciones, por ejemplo

1. La función lineal  $f(x) = a_1 x + a_0$ ;  $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ ;  $a_1 \neq 0$ , sabemos que no tiene máximos ni mínimos, y tiene un y solo un cero,  $f(x_0) = 0 \Rightarrow x_0 = -a_0/a_1$ , además  $f(x=0) = a_0$ , por lo que denominamos  $a_0$  como *ordenada al origen*.
2. La función cuadrática o parábola  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ;  $a \neq 0$ . Sabemos que es una parábola con ramas hacia arriba (abajo) si  $a > 0$  ( $a < 0$ ), que tiene un mínimo (máximo) en  $x_m = -b/(2a)$  y sus ceros son dados por la famosa expresión  $x_{\pm} = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/(2a)$ , por lo que tendrá dos ceros distintos si  $b^2 - 4ac > 0$ , un cero (de multiplicidad 2) si  $b^2 - 4ac = 0$ , y no tendrá ceros si  $b^2 - 4ac < 0$ .

El análisis del gráfico de estas dos funciones lo hicimos utilizando conocimientos previos, sin necesidad de recurrir a las derivadas, pero, como veremos, resultan una poderosa herramienta para el análisis de gráficos de funciones en general.

Recordemos que el valor de la derivada de una función en un punto dado es la pendiente de la recta tangente a la función en dicho punto. Así, como se puede observar en la figura 2.11, cuando una función con derivada definida en todo su dominio es creciente en un intervalo, vemos que en todo punto del mismo la recta tangente tiene pendiente positiva, por lo que el valor de la derivada de la función en dicho intervalo es positivo. De igual manera, cuando la función es decreciente en un dado intervalo, la derivada es negativa en ese intervalo. Entonces un intervalo con derivada positiva **debe** estar separado de uno con derivada negativa por un punto donde la derivada es nula, esto es, la pendiente de la recta tangente se anula, y estos puntos serán máximos o mínimos de nuestra función.

Pero existen puntos con derivada nula que no son máximos ni mínimos, donde la derivada conserva el signo en un entorno del punto de derivada nula. Estos puntos se denominan *puntos de inflexión*. También puede suceder que una función no tenga derivada en todo punto. Definiremos **puntos críticos de una función** como los *puntos donde su derivada es cero o no existe*.

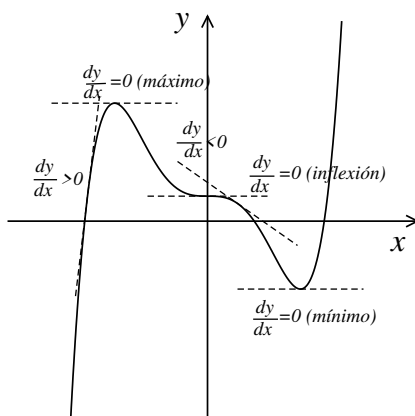


Figura 2.11: Gráfico de una función  $y(x)$  donde se muestra el comportamiento de su derivada.

Comenzaremos analizando funciones cuyo dominio es  $\mathbb{R}$  y con derivada y derivada segunda definidas en todo punto, en este caso los únicos puntos críticos, candidatos a ser máximos o mínimos, son los



puntos donde la derivada se anula. Sea  $x_c$  un punto crítico de  $y(x)$ , para determinar si corresponde a un máximo, mínimo o punto de inflexión debemos analizar el comportamiento de la función derivada  $y'(x)$  en un entorno del punto crítico  $x_c$ . Notamos que como hacemos un estudio *local* de la función (esto es, en un entorno del punto crítico) llamaremos a estos máximos y mínimos, máximos y mínimos locales, lo cual significa que nada decimos sobre valores mayores o menores de la función en otros puntos de su dominio. Si la función posee un valor máximo (mínimo) global, esto es, en todo su dominio, denominaremos a su abscisa, máximo (mínimo) absoluto.

### Determinación de máximos

Si  $x_c$  corresponde a un *máximo local* de  $y(x)$ , como se muestra en la figura 2.12, entonces la función es creciente para valores de  $x < x_c$  e  $y'(x)$  debe ser positiva. Para valores de  $x > x_c$ ,  $y(x)$  debe ser decreciente por lo que  $y'(x)$  será negativa. Esto es, cualitativamente  $y'(x)$  tendrá el aspecto mostrado en el gráfico derecho de la figura 2.12. Así, si  $x_c$  es un máximo,  $y'(x)$  es **decreciente** en un entorno de  $x_c$ , por lo que su derivada, que es la derivada segunda de  $y(x)$  será negativa o nula,  $y''(x_c) \leq 0$ .

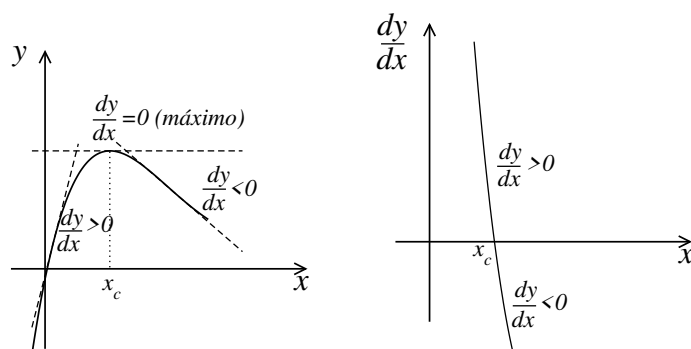


Figura 2.12:  $y(x)$  tiene un máximo en  $x = x_c$ , donde su derivada se anula.

### Determinación de mínimos

Si  $x_c$  corresponde a un *mínimo local* de  $y(x)$ , como se muestra en la figura 2.13, entonces la función es decreciente para valores de  $x < x_c$  e  $y'(x)$  será negativa. Para valores de  $x > x_c$ ,  $y(x)$  debe ser creciente por lo que  $y'(x)$  será positiva. Esto es, cualitativamente  $y'(x)$  tendrá el aspecto mostrado en el gráfico de la derecha de la figura 2.13. Así, si  $x_c$  es un mínimo,  $y'(x)$  es **creciente** en un entorno de  $x_c$ , por lo que su derivada, que es la derivada segunda de  $y(x)$  será positiva o nula,  $y''(x_c) \geq 0$ .

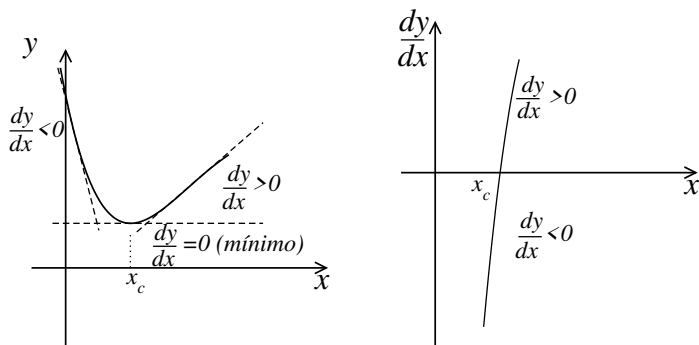


Figura 2.13:  $y(x)$  tiene un mínimo en  $x = x_c$ , donde su derivada se anula.

### Puntos de inflexión

Finalmente, podemos tener una función cuya derivada se anule en  $x = x_c$  y que sea creciente para  $x < x_c$  y para  $x > x_c$ , como se muestra en el gráfico de la izquierda de la figura 2.14. La función  $y'(x)$  será cualitativamente como la mostrada en el gráfico de la derecha de la figura 2.14, por lo que tendremos en este caso que  $y''(x_c) = 0$ .

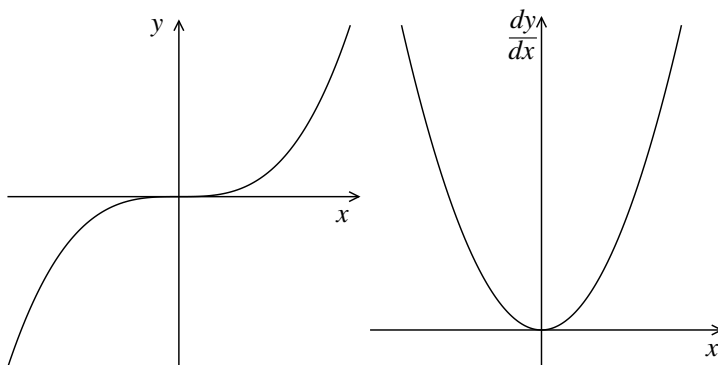


Figura 2.14:  $y(x) = x^3$  tiene un punto de inflexión en  $x_c = 0$ , donde su derivada se anula, pero sin cambiar de signo.

Resumiendo: si en un punto crítico  $x_c$  la derivada segunda es

- negativa, entonces  $x_c$  es un máximo.
- positiva, entonces  $x_c$  es un mínimo.
- nula, todavía no podemos asegurar nada, podría ser un máximo (ejemplo:  $y(x) = -x^4$ ), un mínimo (ejemplo:  $y(x) = x^4$ ), o un punto de inflexión (ejemplo:  $y(x) = x^3$ ). En los tres ejemplos dados tenemos que  $x_c = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$ ,  $y''(0) = 0$ . ¿Qué debemos hacer en este caso?: derivar hasta obtener la primera derivada no nula en  $x = x_c$ , digamos  $y'''(x_c) = 0, \dots, y^{(n-1)}(x_c) = 0$ ;  $y^{(n)}(x_c) \neq 0$ , entonces
  - i) Si  $n$  es par,  $x_c$  es un máximo si  $y^{(n)}(x_c) < 0$  y un mínimo si  $y^{(n)}(x_c) > 0$ .
  - ii) Si  $n$  es impar,  $x_c$  es un punto de inflexión.

En el caso de funciones con derivada segunda continua, muchas veces podemos deducir algunos comportamientos sin necesidad de calcular dicha derivada.

Con esto concluimos el análisis de puntos críticos de funciones “bien comportadas”, esto es, que estén bien definidas todas las derivadas necesarias en  $x = x_c$ .

A modo de ejemplo, busquemos los máximos o mínimos de las funciones lineal y cuadrática ya analizadas, utilizando ahora derivadas:

a) La función lineal  $y(x) = a_1 x + a_0$ ;  $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ ;  $a_1 \neq 0$ , cuya derivada es  $y'(x) = a_1 \forall x$ , así, la función y su derivada son continuas en todo punto y la derivada no tiene ceros, por lo que la función lineal, como ya vimos, no tiene ni máximos ni mínimos.

b) La función cuadrática o parábola  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ;  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ;  $a \neq 0$ , cuya derivada es  $y'(x) = 2ax + b$ , o sea una función lineal, la cual, como sabemos, tiene un único cero en  $x_c = -b/(2a)$ . Además  $y''(x) = 2a$ , por lo que  $x_c$  será un máximo si  $a < 0$  y un mínimo si  $a > 0$ . Notar que podríamos haber obtenido la misma conclusión sin calcular la derivada segunda, simplemente diciendo: si las ramas de la parábola son hacia arriba y tiene un punto crítico, este **debe** ser un mínimo (se puede seguir un razonamiento análogo para  $a < 0$ ).

Analicemos ahora una función un poco más complicada:  $y(x) = 3 + 2x - x^2/2 - 2x^3/3 + x^4/4$ , que es un polinomio de cuarto grado. Como el término de mayor orden es  $x^4/4$ , tenemos que  $y(x) \rightarrow \infty$  para  $x \rightarrow \pm\infty$ , esto es, la función tiene ramas hacia arriba para valores grandes de  $x$ . Como es bien comportada, los puntos críticos solo pueden estar en puntos donde se anula la derivada,

$$\frac{dy}{dx}(x) = 2 - x - 2x^2 + x^3 = 2(1 - x^2) + x(-1 + x^2) = (x^2 - 1)(x - 2), \quad (2.56)$$

cuyos ceros son los tres puntos críticos:  $x_1 = -1$ ;  $x_2 = 1$ ;  $x_3 = 2$ . Calculamos la derivada segunda:  $y''(x) = -1 - 4x + 3x^2 \Rightarrow y''(x_1) = 6 > 0$ , y por lo tanto  $x_1$  es un mínimo,  $y''(x_2) = -2 < 0$ , correspondiendo a un máximo, por último  $y''(x_3) = 3 > 0$ , que es un mínimo. Además  $y(-1) = 17/12$ ;  $y(1) = 49/12$ ;  $y(2) = 11/3$ ; así, el mínimo global es  $x_1$ , por lo que la función no tiene ceros.  $x_2$  es un máximo local y  $x_3$  un mínimo local. Finalmente, la ordenada al origen es  $y(0) = 3$ . Con esto tenemos todos los datos necesarios para hacer el gráfico mostrado en la figura 2.15.

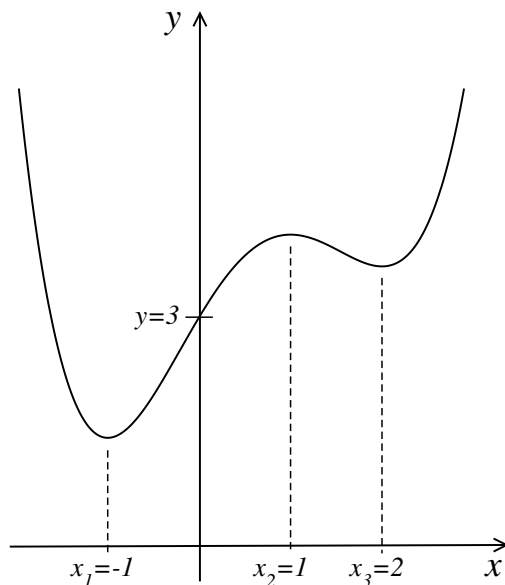


Figura 2.15:  $y(x) = 3 + 2x - x^2/2 - 2x^3/3 + x^4/4$ .

Ya sabemos cómo graficar funciones bien comportadas, además sabemos que los puntos donde la función no es derivable también son críticos. Veamos un ejemplo.

Sea la función  $y(x) = |x|$ , cuya derivada es

$$\frac{dy}{dx} = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ +1 & \text{si } x > 0 \\ \text{no está definida en } x = 0 \end{cases} . \quad (2.57)$$

Ambas funciones son mostradas en la figura 2.16. El único punto crítico de  $y(x)$  es el punto donde la derivada no está definida,  $x_c = 0$ , y como  $|x| \geq 0$ , donde la igualdad vale solo para  $x = 0$ , tenemos que  $x_c = 0$  corresponde a un mínimo.

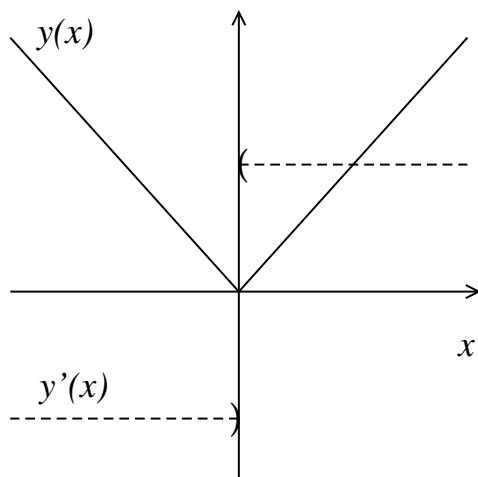


Figura 2.16:  $y(x) = |x|$  (línea continua) y su derivada (línea cortada). Los paréntesis simbolizan los intervalos abiertos donde  $y'$  está definida.

### Funciones con asíntotas

Debemos comenzar por decir qué es una *asíntota*. Más que una definición rigurosa, daremos una idea de su significado: una *línea recta* es asíntota de una función  $f(x)$  si para un dado valor  $x = x_a$  (que puede ser  $\pm\infty$ ) la función se aproxima tanto como querramos a la recta, pero sin llegar nunca a tocarla. Las rectas asíntotas puede ser verticales, horizontales u oblicuas. Veamos ejemplos de los tres casos.

#### i) Función con asíntotas verticales y horizontal

Los gráficos de funciones que divergen para algún valor finito de  $x$  muestran asíntotas verticales en dicho valor. Ejemplos de este comportamiento son las funciones racionales, esto es, funciones que son un cociente de polinomios, que tendrán asíntotas verticales en los casos en que el denominador tenga al menos un cero que no es cero del numerador. Analicemos el gráfico de la función

$$y(x) = \frac{1}{x^2 - 1}. \quad (2.58)$$

$y(x)$  no está definida en  $x = \pm 1$ , cuyos límites son

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} y(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} y(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} y(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} y(x) = +\infty. \quad (2.59)$$

Estas divergencias en  $x = \pm 1$  definen dos **asíntotas verticales**, como se muestra en la figura 2.17. Además, resulta claro que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} y(x) = 0^+, \quad (2.60)$$

que nos dice que el eje  $x$  es una asíntota horizontal. Busquemos máximos y/o mínimos locales,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{(x^2 - 1)^2} = 0 \Rightarrow x_c = 0. \quad (2.61)$$

evaluamos la derivada segunda en  $x_c$ ,

$$\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right|_{x=x_c} = \left. \frac{2 + 6x^2}{(x^2 - 1)^3} \right|_{x=x_c} = -2, \quad (2.62)$$

$y''(0) < 0 \Rightarrow x_c = 0$  es un máximo local con  $y(0) = -1$ . Con todos estos datos estamos en condiciones de obtener el gráfico mostrado en la figura 2.17.

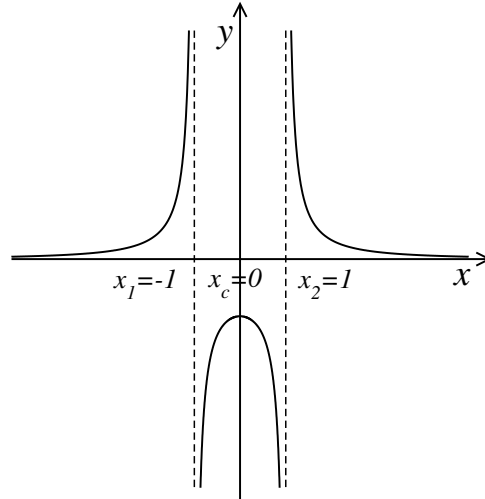


Figura 2.17: Gráfico de  $y(x) = 1/(x^2 - 1)$ . Las líneas cortadas son asíntotas verticales, mientras que el eje  $x$  es una asíntota horizontal.

Notemos finalmente que podríamos haber realizado el gráfico de la figura 2.17 sin calcular la derivada segunda. Habría bastado el siguiente razonamiento:  $f(x)$  es continua en el intervalo abierto  $(-1, 1)$ . Además sabemos de la ecuación (2.59) que la función va a  $-\infty$  cuando  $|x| \rightarrow 1^-$ , por lo tanto el punto crítico  $x_c = 0$  **solo** puede ser un máximo, y no necesitamos el cálculo de la derivada segunda para poder asegurarlo.

Otra función que ya conocemos con (infinitas) asíntotas verticales, es la función  $y(x) = \tan(x) = \sin(x)/\cos(x)$ , dejamos como ejercicio obtener el gráfico de la misma utilizando las herramientas desarrolladas en esta sección.

## ii) Función con asíntotas vertical y oblicua

Estudiemos ahora el comportamiento de la función

$$f(x) = x + \frac{4}{x^2}. \quad (2.63)$$

Primeramente observamos que la función **no** está definida en  $x = 0$ , y como el denominador del término divergente es  $x^2$ , que es siempre positivo, tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty, \quad (2.64)$$

por lo que el eje  $y$  es una asíntota vertical. Además, vemos que para valores grandes de  $x$  el primer término,  $x$ , se hace, en módulo, grande, mientras el segundo,  $4/x^2$ , se hace pequeño, por lo que tenemos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty. \quad (2.65)$$

Más aún, como  $4/x^2$  se hace cada vez más pequeño cuando  $|x|$  es grande, tendremos que  $f(x)$  se acerca cada vez más a la recta  $y(x) = x$ , por lo que decimos que la recta  $y = x$  es **asíntota oblicua** a la función  $f(x)$ . Falta determinar la posible existencia de máximos y mínimos. Para esto buscamos ceros de la derivada,

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x_c} = 1 - \frac{8}{x^3} \Big|_{x_c} = 0 \Rightarrow x_c = 2, \quad (2.66)$$

finalmente evaluamos la derivada segunda en  $x = x_c$ ,

$$\left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x_c} = \frac{24}{x_c^4} = \frac{3}{2} > 0, \quad (2.67)$$

$x_c = 2$  es entonces un mínimo. Notar que podríamos deducir esto **sin** calcular  $f''$ , dado que  $f \rightarrow +\infty$  tanto para  $x \rightarrow 0$ , como para  $x \rightarrow +\infty$ , el punto crítico **solo** puede ser un mínimo. Finalmente damos los valores de la función en su mínimo,  $f(x_c = 2) = 3$  y de  $x^*$  definido por  $f(x^*) = 0$  :  $x^* = -4^{1/3} \simeq -1.5874$ . Juntando todos los datos, obtenemos el gráfico mostrado en la figura 2.18.

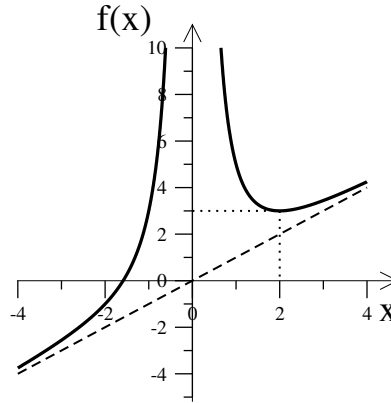


Figura 2.18: Gráfico de la función (2.63), mostrando la asíntota oblicua  $y(x) = x$  con una línea cortada y la posición de su mínimo con líneas punteadas.

## SECCIÓN 2.6

# Velocidad instantánea - parte II

Cerramos por ahora nuestro paréntesis matemático y regresamos al estudio de la cinemática de un cuerpo puntual sobre una recta. Podemos entonces completar la definición de velocidad instantánea (2.7):

$$v(t) \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx(t)}{dt}, \quad (2.68)$$

o sea, *la velocidad instantánea es la derivada de la función de movimiento respecto al tiempo*. Notemos nuevamente que, dada  $x(t)$ , nunca calcularemos la velocidad instantánea usando la definición como un límite, sino usando las reglas aprendidas en las secciones anteriores, resumidas en la tabla 2.1.

Como ejemplos sencillos, calculemos la velocidad instantánea para dos tipos de movimiento ya estudiados,

- Función de movimiento lineal,  $x(t) = a_1 t + a_0$ ,

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d(a_1 t + a_0)}{dt} = \frac{da_1 t}{dt} + \frac{da_0}{dt} = a_1, \quad (2.69)$$

que es el resultado mostrado en la ecuación 2.4 obtenido para  $\bar{v}$  para todo par de instantes  $t_1, t_2$ , por lo que no debe sorprendernos que en este caso ambas magnitudes coincidan.

- Función de movimiento parabólica,  $x(t) = a_2 t^2 + a_1 t + a_0$ ,

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d(a_2 t^2 + a_1 t + a_0)}{dt} = \frac{da_2 t^2}{dt} + \frac{da_1 t}{dt} + \frac{da_0}{dt} = 2a_2 t + a_1. \quad (2.70)$$

En este caso la velocidad instantánea depende del tiempo y resulta distinta a la velocidad media encontrada en la ecuación (2.6), que depende de  $t$  y  $\Delta t$ .



# 3

## Aceleración e Integración

### SECCIÓN 3.1

### Aceleración

Ya vimos que el movimiento de un cuerpo puntual sobre una línea recta en la cual definimos un sistema de coordenadas, puede ser descrito por la función de movimiento  $x(t)$ , es decir, la coordenada  $x$  del cuerpo en el tiempo  $t$ . Dijimos que  $x(t)$  tiene toda la información sobre el movimiento del cuerpo. En particular, en el capítulo anterior definimos la velocidad instantánea en la ecuación (2.68),

$$v(t) \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx(t)}{dt}, \quad (3.1)$$

que cuantifica cómo cambia la posición del cuerpo con el tiempo.

En este capítulo definiremos la función aceleración, que caracteriza cómo un cuerpo varía su velocidad con el tiempo, con lo que se completa la caracterización del movimiento de un cuerpo puntual. Haciendo un análisis similar al realizado cuando definimos la velocidad de un cuerpo, podemos definir la aceleración media de un móvil como el cambio en la velocidad instantánea en un intervalo de tiempo  $\Delta t = t_2 - t_1$ ,

$$\bar{a}(t_1, \Delta t) \equiv \frac{v(t_2) - v(t_1)}{\Delta t} = \frac{v(t_1 + \Delta t) - v(t_1)}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta t}, \quad (3.2)$$

para luego definir la aceleración instantánea, o simplemente la aceleración de un cuerpo, como la derivada de la función velocidad con respecto al tiempo (notar que, dado que el instante  $t_1$  es arbitrario, podemos obviar el subíndice),

$$a(t) \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{a}(t, \Delta t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv(t)}{dt}, \quad (3.3)$$

entonces, usando la definición de velocidad (3.1), podemos expresar la aceleración como la derivada con respecto al tiempo de la derivada con respecto al tiempo de la función de movimiento, es decir que la aceleración es la derivada segunda de la función de movimiento con respecto al tiempo dos veces,

$$a = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dx(t)}{dt} \right) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}. \quad (3.4)$$

Tenemos aquí otra magnitud cuyas unidades son derivadas a partir de otras, al igual de lo que ocurría con la velocidad,

$$[a] = \frac{[v]}{[t]} = \frac{[\ell]}{[t]^2} = \frac{m}{s^2} \text{ ó } \frac{km}{s^2} \text{ ó } \frac{km}{h^2} \text{ ó } \dots \quad (3.5)$$

La función aceleración es una función del tiempo y podríamos estudiar qué información nos da su derivada con respecto al tiempo y así seguir analizando otras derivadas de orden superior. Desde el punto de vista matemático podemos calcular derivadas de estas funciones mientras existan y estas derivadas nos darán información sobre el comportamiento de las funciones. Sin embargo desde el punto de vista físico sólo nos interesa hasta la derivada segunda de la función de movimiento, es decir que sólo llegaremos hasta la aceleración. Cuando analicemos la dinámica del movimiento de los cuerpos veremos que las causas que determinan el movimiento de un cuerpo (fuerzas) están relacionadas con la aceleración que adquiere dicho cuerpo.

## SECCIÓN 3.2

# Condiciones sobre las funciones de movimiento, velocidad y aceleración

Debemos tener siempre presente que la física es una ciencia experimental, y como ya discutimos, toda la evidencia que poseemos nos dice que la función de movimiento **debe ser** una función continua del tiempo. En base a esta misma información experimental sabemos que la función velocidad también **debe** ser continua.

¿Qué nos dice la evidencia experimental sobre la aceleración? Para analizar esto, pensemos en un ejemplo de la experiencia diaria. Sabemos que todos los cuerpos en la superficie de la Tierra sufren una aceleración dirigida hacia abajo (en realidad, hacia el centro de la Tierra), que es constante, independientemente del cuerpo en cuestión. Este hecho fue enunciado en el siglo XVI por Galileo, luego de su famoso experimento realizado en la torre de Pisa<sup>1</sup>. Dada la universalidad de esta aceleración, y su importancia en nuestra vida, designamos su módulo con una letra particular,

$$|a_g| = g \simeq 9,796 \text{ m/s}^2, \quad (3.6)$$

donde ese valor numérico fue medido en Córdoba en 2014 (aunque muchas veces se usan aproximaciones mas gruesas,  $g \simeq 9,8 \text{ m/s}^2$ , o incluso  $g \simeq 10,0 \text{ m/s}^2$ ). Notar que  $g$  representa el módulo de la aceleración gravitatoria en la superficie de la Tierra, ya que su signo dependerá de la definición del sistema de coordenadas.

Pensemos ahora en la siguiente situación, típica de la vida diaria: sostenemos un objeto con nuestra mano, esto es, está en reposo, por lo que tanto su velocidad como su aceleración son nulas. Definiendo

<sup>1</sup>Se dice que Galileo arrojó desde la torre de Pisa, de 57 m de altura, dos esferas de distinta masa y comprobó que caían juntas al suelo, pero no hay ninguna documentación que corrobore que haya realizado este experimento, por lo que algunos historiadores piensan que se trata en realidad de una leyenda forjada después de su muerte.

un sistema de coordenadas con origen en nuestra mano y sentido positivo hacia arriba, la aceleración del cuerpo debido a la gravedad será  $a = -g$ . En un instante que denominaremos  $t_1$  soltamos dicho cuerpo y en un instante posterior  $t_2 = t_1 + \Delta t$  medimos su velocidad, que será no nula, puesto que el cuerpo comienza a caer debido a la gravedad. Entonces

$$\bar{a}(t_1, \Delta t) = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{\Delta t} = \frac{v(t_2)}{\Delta t} = -g \neq 0 \quad (3.7)$$

Este experimento puede realizarse con mucha precisión, para intervalos de tiempo  $\Delta t$  cada vez más chicos, obteniendo siempre el resultado (3.7); asumimos entonces que

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \bar{a}(t_1, \Delta t) = -g; \quad (3.8)$$

esto es, la aceleración como función del tiempo resulta

$$a(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_1 \\ -g & \text{si } t \geq t_1 \end{cases}, \quad (3.9)$$

así, en este caso,  $a(t)$  es discontinua en  $t = t_1$ .

Tenemos entonces que  $v(t)$  es una función continua, aunque su derivada  $a(t)$  puede no serlo. Por otro lado,  $x(t)$  es una función continua y su derivada  $v(t)$  también lo es. Esta condición es más fuerte que la condición de continuidad, y decimos que  $x(t)$  es una función *continuamente diferenciable*.

Por lo tanto, podemos concluir que las funciones que caracterizan el movimiento de un cuerpo deben satisfacer las siguientes condiciones:

- *Función de movimiento*: debe estar definida en todo el intervalo de interés y ser continuamente diferenciable. Esto implica que, además de ser  $x(t)$  continua, su gráfico no debe presentar ningún punto anguloso, pues de existir dicho punto su derivada sería discontinua y por lo tanto lo sería la velocidad del cuerpo. En el gráfico 3.1 podemos ver un ejemplo de una función  $f(t)$  cuya derivada no es continua en un punto, por lo que **no** representa una función de movimiento.

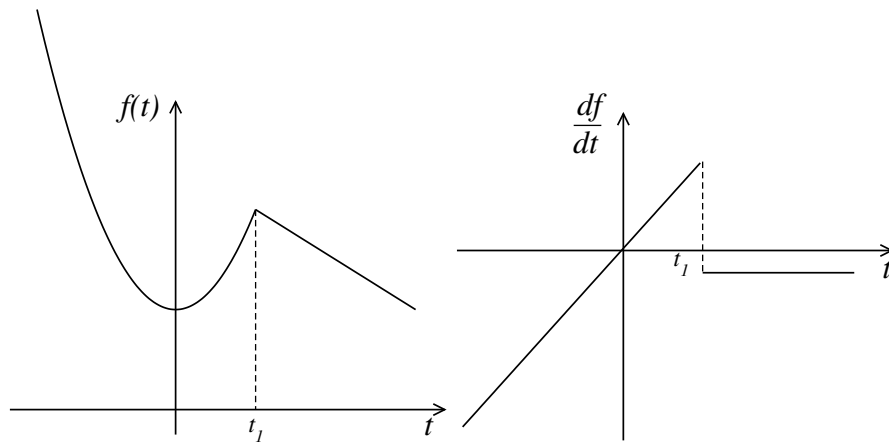


Figura 3.1: La función  $f(t)$  (izquierda) **no** puede representar una función de movimiento, ya que su derivada (derecha) es discontinua en  $t = t_1$ , pero sí puede representar funciones velocidad o aceleración. El gráfico de la derecha solo podría corresponder a una aceleración, ya que la función es discontinua.

- *Función velocidad*: debe ser una función continua definida en todo el intervalo de interés, entonces la función de la figura 3.1 (izquierda) sí puede representar una función velocidad.
- *Función aceleración*: debe estar definida en todo el intervalo de interés y puede (o no) ser discontinua, por lo que las funciones graficadas en la figura 3.1 (izquierda y derecha) pueden ambas representar el gráfico de una función aceleración.

## SECCIÓN 3.3

## Ejemplos simples de funciones de movimiento

Veremos ahora algunos ejemplos ya conocidos de funciones de movimiento y calcularemos también su velocidad y aceleración.

1. *Función de movimiento constante*:

$$x(t) = c \Rightarrow v(t) = \frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow a(t) = \frac{dv}{dt} = 0 \quad (3.10)$$

A esta función de movimiento, que describe un cuerpo en reposo, le corresponde una velocidad nula y una aceleración nula.

2. *Función de movimiento lineal*:

$$x(t) = a_1 t + a_0 \Rightarrow v(t) = \frac{dx}{dt} = a_1 \Rightarrow a(t) = \frac{dv}{dt} = 0 \quad (3.11)$$

Una función lineal describe el movimiento de un cuerpo que se mueve con velocidad constante y aceleración nula. Este movimiento se denomina *movimiento rectilíneo uniforme* (MRU).

3. *Función de movimiento parabólica (polinomio de segundo grado)*:

$$x(t) = a_2 t^2 + a_1 t + a_0 \Rightarrow v(t) = \frac{dx}{dt} = 2a_2 t + a_1 \Rightarrow a(t) = \frac{dv}{dt} = 2a_2 \quad (3.12)$$

Un polinomio de segundo grado describe el movimiento de un cuerpo cuya aceleración es constante y diferente de cero. Este tipo de movimiento recibe el nombre de *movimiento rectilíneo uniformemente variado* (MRUV).

## SECCIÓN 3.4

## Relación entre aceleración, velocidad y función de movimiento

Si conocemos la función de movimiento de un cuerpo tenemos toda la información posible sobre el movimiento del mismo, ya que a partir de la función de movimiento podemos calcular la velocidad y la aceleración del cuerpo,

$$x = x(t) \xrightarrow{\frac{dx}{dt}} v = v(t) \xrightarrow{\frac{dv}{dt}} a = a(t). \quad (3.13)$$

Sin embargo, pocas veces la información que poseemos del sistema es su función de movimiento. Ya vimos en el ejemplo de la sección 3.2 que conocíamos la aceleración del cuerpo (en ese caso dada por la ecuación (3.9)), pero no su velocidad ni su posición en función del tiempo. Este es el caso mas común; en general podemos conocer la función aceleración o en algunos casos la función velocidad (medida, por ejemplo, por el velocímetro de un auto), y a partir de esta información debemos obtener la función de movimiento.

Así, una importante pregunta que debemos responder es: dada la función aceleración  $a(t)$ , ¿cómo podemos obtener la velocidad  $v(t)$ ?, y continuando, dada la velocidad  $v(t)$ , ¿cómo podemos obtener la función de movimiento  $x(t)$ ? Si, por ejemplo, nos dan como dato la función velocidad de un cuerpo,  $v = v(t)$ , sabemos que se cumple la siguiente relación:

$$\frac{dx}{dt} = v(t). \quad (3.14)$$

Por lo tanto, para determinar la función de movimiento del cuerpo a partir de la velocidad no debemos mirar esta ecuación como una fórmula que nos permite calcular  $v(t)$  como hicimos en el capítulo anterior, sino como una ecuación donde la incógnita es  $x(t)$ . Esto implica encontrar una función  $x(t)$ , que cuando se derive con respecto al tiempo nos dé como resultado la función velocidad que es dato, o sea, debemos calcular “la antiderivada” de  $v(t)$ .

Para resolver esta ecuación debemos realizar la operación inversa a la derivación, la cual se denomina integración. Nuevamente abriremos un paréntesis matemático, ahora para desarrollar las nociones de integración necesarias para completar el estudio de cinemática de los cuerpos en una dimensión.

## SECCIÓN 3.5

# Integración de funciones

Por un momento dejemos de lado la Física y analicemos desde un punto de vista matemático muy elemental qué significa realizar la integral de una función. Dada una función  $f$  de una variable independiente  $x$ , se denomina realizar la integral de dicha función con respecto a la variable independiente, a encontrar una función  $y = y(x)$  que satisfaga la siguiente relación:

$$\frac{dy(x)}{dx} = f(x), \quad (3.15)$$

la función  $y(x)$  se denomina *primitiva* de la función  $f(x)$ . Debemos notar que la primitiva de una función no es única, ya que dos funciones que difieren en una constante aditiva poseen igual derivada: si  $y(x)$  cumple (3.15), y definimos  $z(x) = y(x) + C$ , donde  $C$  es una constante, entonces

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{dz(x)}{dx} = f(x), \quad (3.16)$$

ya que la derivada de una constante es cero, esto es,  $y(x)$  y  $z(x)$  son ambas primitivas de  $f(x)$ . Como  $C$

es una constante real arbitraria, tenemos que si existe una primitiva, entonces existen infinitas. La figura 3.2 muestra tres funciones con igual derivada, por lo que son todas primitivas de la misma función.

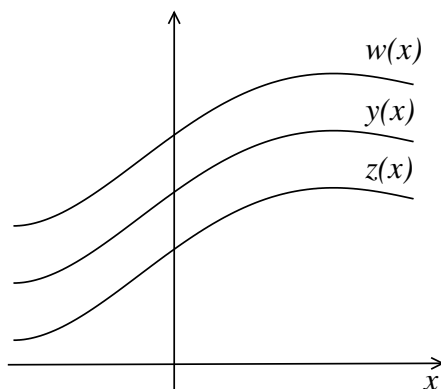


Figura 3.2: Tres funciones que difieren en una constante aditiva, por lo que son todas primitivas de una misma función.

El conjunto de **todas** las primitivas de una función  $f(x)$  se denomina *integral indefinida* y se representa como

$$\int f(x)dx, \quad (3.17)$$

que leemos como *integral de  $f(x)$  diferencial  $x$*  y la función  $f(x)$  la denominamos *integrando*.

Si  $y(x)$  es **una** primitiva de  $f(x)$  se cumple que,

$$\int f(x)dx = y(x) + C, \quad (3.18)$$

y la elección de una primitiva en particular requiere fijar el valor de esta constante aditiva.

Aunque ahora pueda no entenderse el motivo, es necesario incluir  $dx$  en la integral, escribir solo  $\int f$  es incorrecto y como notación no resulta clara, ya que no explicitamos la variable respecto a la cual se está integrando.

Dos propiedades importantes de la integración que se obtienen de las propiedades de la derivación son:

- La integral de una función multiplicada por una constante es igual a la constante multiplicada por la integral de la función,

$$\int Cf(x)dx = C \int f(x)dx. \quad (3.19)$$

- La integral de una suma de funciones es igual a la suma de las integrales de cada una de las funciones,

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx. \quad (3.20)$$

Podemos escribir ambas reglas en forma compacta: dadas dos funciones  $f(x), g(x)$  y dos constantes  $A, B$ , entonces

$$\int (A f(x) + B g(x)) dx = A \int f(x) dx + B \int g(x) dx. \quad (3.21)$$

Dejamos como ejercicio demostrar la ecuación (3.21) utilizando las propiedades conocidas de derivación de funciones. Notamos que, lamentablemente, no existe una regla para la integración de un producto de funciones (tampoco para un cociente) como en el caso de derivadas, podemos decir (sin temor a equivocarnos, pero entre comillas, ya que la frase no está bien definida) que integrar es “más difícil” que derivar.

Existen varios métodos para calcular integrales, por ahora veremos el más directo, esto es, tomar una tabla de derivadas de funciones, y mirando primero la columna de la derecha, interpretarla como una tabla de integrales. Veamos cómo hacemos esto con las funciones elementales a las cuales ya le calculamos su derivada:

1. *Integral de una potencia de  $x$ .* Comencemos recordando la derivada de una potencia, ecuación (2.38),

$$\frac{dx^\alpha}{dx} = \alpha x^{\alpha-1}; \forall \alpha \in \mathbb{R}. \quad (3.22)$$

Buscamos una función  $y(x)$  que satisfaga la ecuación

$$\frac{dy(x)}{dx} = x^\alpha; \alpha \in \mathbb{R}, \quad (3.23)$$

como la derivada de una potencia de  $x$  es también una potencia, proponemos  $y(x) = A x^\beta$ , con  $A, \beta$  constantes. Como conocemos las reglas de derivación, obtenemos

$$\frac{dy(x)}{dx} = A \beta x^{\beta-1}, \quad (3.24)$$

igualando el lado derecho de las ecuaciones (3.23) y (3.24) tenemos

$$x^\alpha = A \beta x^{\beta-1} \Rightarrow A \beta = 1; \beta - 1 = \alpha, \quad (3.25)$$

estas ecuaciones tienen como solución  $\beta = \alpha + 1; A = 1/\beta = 1/(\alpha + 1)$ , obteniendo así

$$y(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}; \alpha \neq -1, \quad (3.26)$$

la cual es una primitiva de  $x^\alpha$ . Así, para obtener la integral indefinida de esta función, debemos sumar a  $y(x)$  una constante arbitraria,

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C; \alpha \neq -1. \quad (3.27)$$

Notamos que si bien la derivada de una potencia real de  $x$  es siempre una potencia real de  $x$ , la ecuación (3.27) no incluye el caso  $\alpha = -1$  (ya que se anularía un denominador), es decir, el resultado que hemos obtenido no es válido para  $x^{-1} = 1/x$ ; más adelante volveremos a este punto.

2. *Integral de las funciones trigonométricas  $\sin(x)$  y  $\cos(x)$ .* A partir de lo visto en el capítulo 2, en particular, usando las ecuaciones (2.41) y (2.42), junto a una aplicación simple de la regla de derivada de la función compuesta, podemos escribir

$$\frac{d\operatorname{sen}(Ax)}{dx} = A \cos(Ax) \quad ; \quad \frac{d\cos(Ax)}{dx} = -A \operatorname{sen}(Ax), \quad (3.28)$$

de estas ecuaciones obtenemos, leyendo de derecha a izquierda,

$$\int \cos(Ax)dx = \frac{1}{A} \operatorname{sen}(Ax) + C \quad ; \quad \int \operatorname{sen}(Ax)dx = -\frac{1}{A} \cos(Ax) + C. \quad (3.29)$$

3. *Integral de la función  $1/x$  y de la función exponencial.* A partir de las ecuaciones (2.43) obtenemos

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + C \quad ; \quad \int e^{Ax} dx = \frac{1}{A} e^{Ax} + C, \quad (3.30)$$

lo que nos permite ahora completar la integral de una potencia de  $x$ ,

$$\int x^\alpha dx = \begin{cases} \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C & \alpha \neq -1 \\ \ln(x) + C & \alpha = -1 \end{cases}. \quad (3.31)$$

Dejamos como ejercicio corroborar las integrales dadas utilizando las reglas de derivación conocidas.

Cerramos este paréntesis matemático y en la próxima sección aplicaremos integrales al estudio de la cinemática de un cuerpo puntual.

## SECCIÓN 3.6

# Integración de las funciones de movimiento

Para tener una completa descripción del movimiento de un cuerpo es necesario conocer su función de movimiento. Si deseamos obtener esta información completa a partir de la aceleración o de la velocidad, debemos considerar la ecuación (3.13) en sentido inverso,

$$a(t) \xrightarrow{\int a(t) dt} v = v(t) \xrightarrow{\int v(t) dt} x = x(t). \quad (3.32)$$

Si tenemos como dato la función velocidad del cuerpo,  $v(t)$ , y deseamos conocer la función de movimiento,  $x(t)$ , sabemos que debemos integrar  $v(t)$ ,

$$\frac{dx(t)}{dt} = v(t) \Rightarrow x(t) = \int v(t) dt. \quad (3.33)$$

Notar que la ecuación (3.33) representa cualquier función de movimiento que tenga esa velocidad, por lo que necesitamos conocer la posición del móvil en un instante dado para determinar unívocamente la función de movimiento a partir de la velocidad, ya que esta condición fijará el valor de la constante de integración. Así, la constante  $C$  que incluimos al calcular una integral indefinida tiene un significado físico importante, que quedará más claro en los próximos ejemplos.

Como de costumbre, empezaremos con los casos más sencillos, los cuales ya hemos estudiado anteriormente: reposo, MRU y MRUV.



- **Cuerpo en reposo:** Por definición, este cuerpo tiene velocidad igual a cero, y la integral de la función nula es simplemente una constante  $C$ . ¿Qué significa esta constante?, significa que el dato de que el cuerpo está en reposo **no** es suficiente para determinar la función de movimiento; debemos saber también **dónde** está en reposo, y ese dato es la constante  $C$ , así  $v(t) = 0 \Rightarrow x(t) = C = \text{constante}$ . Notemos que cuando integramos velocidades, la constante aditiva **debe** tener unidades de longitud.
- **MRU:** Un cuerpo en movimiento rectilíneo uniforme tiene aceleración nula y velocidad  $v(t) = v_0 = \text{constante}$ , por lo que obtenemos

$$x(t) = \int v(t) dt = v_0 \int dt = v_0 t + C, \quad (3.34)$$

donde para obtener la primitiva de la función constante  $v_0$ , usamos la ecuación (3.31) con  $\alpha = 0$ . ¿Qué significa en este caso la constante aditiva  $C$ ? Nuevamente el dato de que el cuerpo está en MRU con velocidad constante  $v_0$  **no** es suficiente para determinar la función de movimiento, ya que hay infinitos MRU con velocidad constante  $v_0$ . Debemos dar también la posición del cuerpo en algún instante; así, si sabemos que el móvil estaba en  $x_0$  en el instante  $t_0$  obtenemos el valor de  $C$ ,

$$x(t_0) = x_0 = v_0 t_0 + C \Rightarrow C = x_0 - v_0 t_0 \Rightarrow x(t) = v_0 t + x_0 - v_0 t_0, \quad (3.35)$$

es decir,

$$x(t) = v_0 (t - t_0) + x_0. \quad (3.36)$$

Notemos que si  $t_0 = 0 \Rightarrow C = x_0$ .

- **MRUV:** Un cuerpo en movimiento rectilíneo uniformemente variado tiene aceleración constante  $a(t) = a = \text{constante}$ . Si solo conocemos el valor de  $a$ , en este caso necesitamos primero calcular  $v(t)$  para luego obtener  $x(t)$ . Como  $a$  es una constante, tenemos

$$v(t) = \int a(t) dt = a \int dt = at + C, \quad (3.37)$$

de manera similar al caso anterior, necesitamos conocer la velocidad en algún instante  $t_0$  para obtener  $v(t)$ . Sea  $v(t_0) = v_0$  un dato conocido, entonces

$$v(t_0) = v_0 = at_0 + C \Rightarrow C = v_0 - at_0 \Rightarrow v(t) = a(t - t_0) + v_0. \quad (3.38)$$

Podemos ahora obtener la función de movimiento integrando la velocidad respecto al tiempo,

$$x(t) = \int v(t) dt = \int (a(t - t_0) + v_0) dt = \frac{1}{2}at^2 + (v_0 - at_0)t + D, \quad (3.39)$$

donde nuevamente hemos usado la ecuación (3.31), ahora con  $\alpha = 0$  y 1, y  $D$  es la constante de integración. Nuevamente, para fijar la constante  $D$  necesitamos como dato la posición del móvil en algún instante, que puede o no coincidir con  $t_0$ . Supongamos que  $x(t_1) = x_1$  es dato, entonces

$$x(t_1) = x_1 = \frac{1}{2}at_1^2 + (v_0 - at_0)t_1 + D \Rightarrow D = x_1 - \left( \frac{1}{2}at_1^2 + (v_0 - at_0)t_1 \right), \quad (3.40)$$

obteniendo finalmente

$$x(t) = \frac{1}{2}a(t^2 - t_1^2) + (v_0 - at_0)(t - t_1) + x_1. \quad (3.41)$$

Notar que si  $t_0 = t_1 = 0$ , entonces  $x(t)$  toma la simple forma

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0. \quad (3.42)$$

A partir de este ejemplo particular puede extraerse una conclusión general: ya que dada la aceleración  $a(t)$  debemos integrar dos veces para obtener  $x(t)$ , tendremos **siempre** dos constantes de integración que deben obtenerse a partir de dos **condiciones conocidas** sobre el movimiento del cuerpo. ¿Cuáles deben ser estas condiciones? Hay dos conjuntos distintos de datos que nos permitirán conocer la función de movimiento a partir de la aceleración:

- a) Como en el ejemplo que acabamos de ver, conocer la velocidad del móvil en un instante dado, digamos  $t_1$ , y la posición en otro, digamos  $t_2$ , que pueden o no ser el mismo instante.
- b) Conocer la posición del cuerpo en dos instantes **distintos**,  $x(t_1)$  y  $x(t_2)$ , con  $t_1 \neq t_2$ .

Para ilustrar esto, veamos cómo podemos obtener la misma función de movimiento a partir de datos tipo a) o b) de un móvil sujeto a una aceleración

$$a(t) = 6\frac{m}{s^3}t - 2\frac{m}{s^2}. \quad (3.43)$$

Asumiendo que una persona midió la velocidad del móvil en  $t = 0$  y su posición en  $t = 1$  s; mientras que una segunda persona midió la posición del móvil en los mismos instantes, veremos que ambas llegan a la misma función de movimiento.

**Condiciones tipo a):** es dato que  $v(t = 0) = -2$  m/s y  $x(t = 1 \text{ s}) = 3$  m. Tenemos que

$$\begin{aligned} v(t) &= \int \left( 6\frac{m}{s^3}t - 2\frac{m}{s^2} \right) dt = 6\frac{m}{s^3} \int t dt - 2\frac{m}{s^2} \int dt \\ &= 6\frac{m}{s^3} \frac{1}{2}t^2 - 2\frac{m}{s^2}t + C = 3\frac{m}{s^3}t^2 - 2\frac{m}{s^2}t + C. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Notemos que usamos la propiedad de suma de integrales, sin embargo **no** incluimos una constante aditiva por cada integral. El motivo es simple, de haber incluido una constante por cada integral, digamos  $C_1$  y  $C_2$ , basta definir  $C = C_1 + C_2$ , quedando siempre una sola constante aditiva a determinar. El valor de esta constante,  $C$ , debe fijarse utilizando el dato conocido sobre la velocidad,

$$v(t = 0) = -2\frac{m}{s} = C \Rightarrow v(t) = 3\frac{m}{s^3}t^2 - 2\frac{m}{s^2}t - 2\frac{m}{s}. \quad (3.45)$$

Conocida la función velocidad podemos determinar la función de movimiento del cuerpo,

$$\begin{aligned} x(t) &= \int \left( 3\frac{m}{s^3}t^2 - 2\frac{m}{s^2}t - 2\frac{m}{s} \right) dt = 3\frac{m}{s^3} \int t^2 dt - 2\frac{m}{s^2} \int t dt - 2\frac{m}{s} \int dt \\ &= 3\frac{m}{s^3} \frac{1}{3}t^3 - 2\frac{m}{s^2} \frac{1}{2}t^2 - 2\frac{m}{s}t + D = 1\frac{m}{s^3}t^3 - 1\frac{m}{s^2}t^2 - 2\frac{m}{s}t + D, \end{aligned}$$

donde la segunda constante de integración del problema,  $D$ , se determina usando el dato  $x(t = 1 \text{ s}) = 3 \text{ m}$ ,

$$x(1 \text{ s}) = 3 \text{ m} = 1 \frac{m}{s^3}(1s)^3 - 1 \frac{m}{s^2}(1s)^2 - 2 \frac{m}{s}(1s) + D \Rightarrow D = 5 \text{ m} \Rightarrow$$

$$x(t) = 1 \frac{m}{s^3}t^3 - 1 \frac{m}{s^2}t^2 - 2 \frac{m}{s}t + 5m. \quad (3.46)$$

**Condiciones tipo b):** Como estamos describiendo el movimiento de un móvil dado, sabemos que este tiene la aceleración (3.43), pero en este caso tenemos como datos que  $x(t = 0) = 5 \text{ m}$  y  $x(t = 1 \text{ s}) = 3 \text{ m}$ , esto es, no tenemos ningún dato sobre la velocidad, pero conocemos la posición del móvil en dos instantes. Comenzamos calculando la velocidad, que nuevamente será dada por la ecuación (3.44), solo que esta vez no conocemos ningún valor de la velocidad que nos permita determinar la constante de integración, por lo que, por ahora, la dejaremos expresada como  $C$ . Para obtener la función de movimiento integramos la velocidad con respecto al tiempo,

$$x(t) = \int \left( 3 \frac{m}{s^3}t^2 - 2 \frac{m}{s^2}t + C \right) dt = 3 \frac{m}{s^3} \int t^2 dt - 2 \frac{m}{s^2} \int t dt + C \int dt$$

$$= 1 \frac{m}{s^3}t^3 - 1 \frac{m}{s^2}t^2 + Ct + D,$$

como sabemos que  $x(t = 0) = 5 \text{ m}$ , y  $x(t = 1 \text{ s}) = 3 \text{ m}$ , podemos escribir dos ecuaciones, una para cada tiempo  $t_0 = 0$  y  $t_1 = 1 \text{ s}$ ,

$$x(t = 0) = D = 5 \text{ m}$$

$$x(t = 1 \text{ s}) = 1 \frac{m}{s^3}(1s)^3 - 1 \frac{m}{s^2}(1s)^2 + C(1s) + D = 3 \text{ m}. \quad (3.47)$$

Esto es, tenemos un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, cuya solución nos permite determinar conjuntamente los valores de las constantes  $C$  y  $D$ ,

$$C = -2 \frac{m}{s} \quad ; \quad D = 5 \text{ m}. \quad (3.48)$$

Obtenidas  $C$  y  $D$ , la función de movimiento resulta

$$x(t) = 1 \frac{m}{s^3}t^3 - 1 \frac{m}{s^2}t^2 - 2 \frac{m}{s}t + 5m, \quad (3.49)$$

que es idéntica a la función de movimiento (3.46).

Completaremos esta sección con un ejemplo donde la aceleración es una función sinusoidal,

$$a(t) = -\omega^2 A \text{ sen}(\omega t) \quad ; \quad A = 1 \text{ m} \quad ; \quad \omega = 2 \frac{\text{rad}}{s}. \quad (3.50)$$

Consideremos que el movimiento está sujeto a las condiciones iniciales  $x(0) = 0$ ,  $v(0) = 2 \text{ m/s}$ . Integrando la aceleración con respecto al tiempo obtenemos,

$$v(t) = \int a(t) dt = -\omega^2 A \int \sin(\omega t) dt = \omega A \cos(\omega t) + C, \quad (3.51)$$

donde la integración fue realizada utilizando una de las ecuaciones (3.29). De la condición  $v(0) = 2 \text{ m/s}$  calculamos la constante de integración,

$$v(t=0) = \omega A + C = 2 \frac{m}{s} + C = 2 \frac{m}{s} \Rightarrow C = 0. \quad (3.52)$$

Seguidamente, integramos la velocidad con respecto al tiempo para obtener la función de movimiento,

$$x(t) = \int v(t) dt = \omega A \int \cos(\omega t) dt = A \sin(\omega t) + D, \quad (3.53)$$

donde utilizamos la otra ecuación de (3.29). Sabiendo que el móvil está en el origen para  $t = 0$ , obtenemos  $D$ :

$$x(0) = D = 0 \Rightarrow D = 0. \quad (3.54)$$

Los gráficos de

$$x(t) = 1 \text{ m} \sin(2t/s), \quad v(t) = 2 \frac{m}{s} \cos(2t/s) \quad \text{y} \quad a(t) = -4 \frac{m}{s^2} \sin(2t/s) \quad (3.55)$$

se muestran en la figura 3.3.

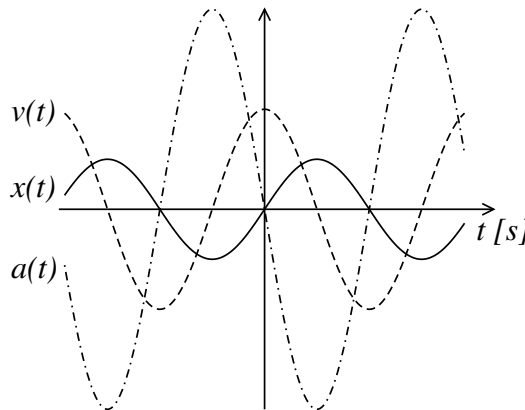


Figura 3.3: Funciones posición (en  $m$ ), velocidad (en  $m/s$ ) y aceleración (en  $m/s^2$ ) en función del tiempo cuando la aceleración es sinusoidal (ecuaciones (3.55)).

Veremos más adelante que estas funciones describen adecuadamente el movimiento de un cuerpo puntual atado a un resorte. Este movimiento se denomina *oscilador armónico* de amplitud  $A$  y frecuencia  $\omega$ .

### 3.6.1 Aceleración definida a trozos

El hecho de que la aceleración pueda ser una función discontinua del tiempo, o aun siendo continua pueda tener cambios en su expresión como función, hace que en muchos casos debamos definirla a trozos, como en el ejemplo visto al inicio de este capítulo, donde la aceleración, dada por la ecuación (3.9), es discontinua y está definida por funciones distintas para  $t < t_1$  y  $t \geq t_1$ :

$$a(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_1 \\ -g & \text{si } t \geq t_1 \end{cases} . \quad (3.56)$$

Un segundo ejemplo es

$$a(t) = \begin{cases} 1 \frac{m}{s^2} & \text{si } t < 0 \\ -1 \frac{m}{s^3} t + 1 \frac{m}{s^2} & \text{si } t \geq 0 \end{cases} , \quad (3.57)$$

que es continua para todo tiempo, pero está definida por funciones distintas para  $t < 0$  y  $t \geq 0$ .

Para entender cómo se procede en estos casos, resolvamos el siguiente ejemplo:

$$a(t) = \begin{cases} 1 \frac{m}{s^2} & \text{si } t < 1s \\ 2 \frac{m}{s^2} & \text{si } t \geq 1s \end{cases} , \quad (3.58)$$

donde conocemos también los siguientes datos:  $v(t=0) = 1 \frac{m}{s}$  y  $x(t=2s) = 2m$ . Integrando la función aceleración con respecto al tiempo podemos obtener la función velocidad,

$$v(t) = \int a(t) dt = \begin{cases} \int 1 \frac{m}{s^2} dt & \text{si } t < 1s \\ \int 2 \frac{m}{s^2} dt & \text{si } t \geq 1s \end{cases} = \begin{cases} 1 \frac{m}{s^2} t + C_1 & \text{si } t < 1s \\ 2 \frac{m}{s^2} t + C_2 & \text{si } t \geq 1s \end{cases} , \quad (3.59)$$

ya que debemos incluir una constante de integración por cada una de las funciones integradas en los distintos trozos. Conocemos la velocidad en  $t=0$ , así, utilizando la expresión correspondiente tenemos

$$v(t=0) = 1 \frac{m}{s} = C_1 , \quad (3.60)$$

pero tenemos otra constante indeterminada más,  $C_2$ , y no conocemos *a priori* la velocidad en ningún otro instante, ¿cómo determinamos  $C_2$ ? La respuesta es que **sí** tenemos otra condición sobre la velocidad, y ya la hemos discutido: la función velocidad es **continua** para todo tiempo, en particular para  $t=1s$ ,

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} v(t) = \lim_{t \rightarrow 1^+} v(t) = \lim_{t \rightarrow 1} v(t) , \quad (3.61)$$

y esta condición, llamada *condición de continuidad*, es la que permite calcular la segunda constante  $C_2$ ,

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} v(t) = 1 \frac{m}{s^2} 1s + 1 \frac{m}{s} = 2 \frac{m}{s} = \lim_{t \rightarrow 1^+} v(t) = 2 \frac{m}{s^2} 1s + C_2 = 2 \frac{m}{s} + C_2 \Rightarrow C_2 = 0 . \quad (3.62)$$

Finalmente, la función velocidad resulta

$$v(t) = \begin{cases} 1 \frac{m}{s^2} t + 1 \frac{m}{s} & \text{si } t < 1 \text{ s} \\ 2 \frac{m}{s^2} t & \text{si } t \geq 1 \text{ s} \end{cases}. \quad (3.63)$$

Resta calcular la función de movimiento, para lo que debemos integrar la velocidad con respecto al tiempo,

$$x(t) = \int v(t) dt = \begin{cases} \int (1 \frac{m}{s^2} t + 1 \frac{m}{s}) dt & \text{si } t < 1 \text{ s} \\ \int 2 \frac{m}{s^2} t dt & \text{si } t \geq 1 \text{ s} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{m}{s^2} t^2 + 1 \frac{m}{s} t + D_1 & \text{si } t < 1 \text{ s} \\ 1 \frac{m}{s^2} t^2 + D_2 & \text{si } t \geq 1 \text{ s} \end{cases}. \quad (3.64)$$

Dejamos como ejercicio calcular  $x(t)$  dado que  $x(t = 2 \text{ s}) = 2 \text{ m}$ .

## SECCIÓN 3.7

# Integrales definidas

Completaremos ahora nuestro paréntesis matemático referido a integración. Dada  $f(x)$ , vimos que se puede definir la función derivada  $f'(x)$ . Asimismo, vimos que la derivada valuada en un punto dado,  $f'(x_0)$  tiene una interpretación geométrica clara: es la pendiente de la recta tangente al gráfico de  $f(x)$  en el punto  $x_0$ . Podemos entonces preguntarnos ¿tiene la integral una interpretación geométrica? La respuesta es *sí*, y la justificaremos a continuación.

Primeramente necesitamos el concepto de *integral definida*. Sea  $y(x)$  una primitiva de  $f(x)$ , y  $x_a < x_b$  dos números reales en el dominio de  $f$ . Definimos

$$\int_{x_a}^{x_b} f(x) dx \equiv y(x_b) - y(x_a), \quad (3.65)$$

Notar que la ecuación (3.65) no depende de la elección de la primitiva, si tomamos otra primitiva de  $f(x)$  cualquiera,  $z(x) = y(x) + C$ , entonces

$$\int_{x_a}^{x_b} f(x) dx = y(x_b) - y(x_a) = y(x_b) - y(x_a) + C - C = (y(x_b) + C) - (y(x_a) + C) = z(x_b) - z(x_a). \quad (3.66)$$

La definición (3.65) es conocida como *Regla de Barrow*<sup>2</sup>.

Trataremos ahora uno de los más antiguos problemas de la matemática, que no presenta *a priori* una relación evidente con el tema que nos ocupa: el cálculo de áreas. En particular, dada una función **continua y no negativa**  $f(x) \geq 0 \forall x$  en el intervalo cerrado  $[x_a, x_b]$ ;  $x_a < x_b$ , nos preguntamos cuál es el área comprendida entre la curva  $f(x)$  y el eje  $x$  en dicho intervalo, o sea, en el ejemplo mostrado en la

<sup>2</sup>En reconocimiento al matemático Isaac Barrow (1630-1667), tutor académico de Isaac Newton.

figura 3.4, ¿cuánto vale el área sombreada? Solo sabemos calcular áreas de polígonos (también el área bajo una parábola, ya conocida en la antigua Grecia). En particular, el área de un rectángulo es base por altura, así, en primera aproximación podemos decir que el área buscada, que denotaremos  $A(f; x_a, x_b)$  es mayor que el área del rectángulo de la figura 3.5(a) y menor que el área del rectángulo de la figura 3.5(b).

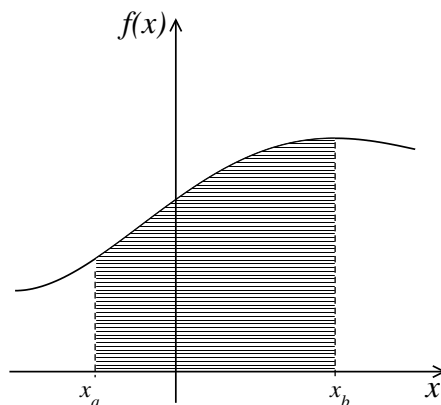


Figura 3.4: La región sombreada es el área bajo la curva de  $f(x)$  en el intervalo  $[x_a, x_b]$ .

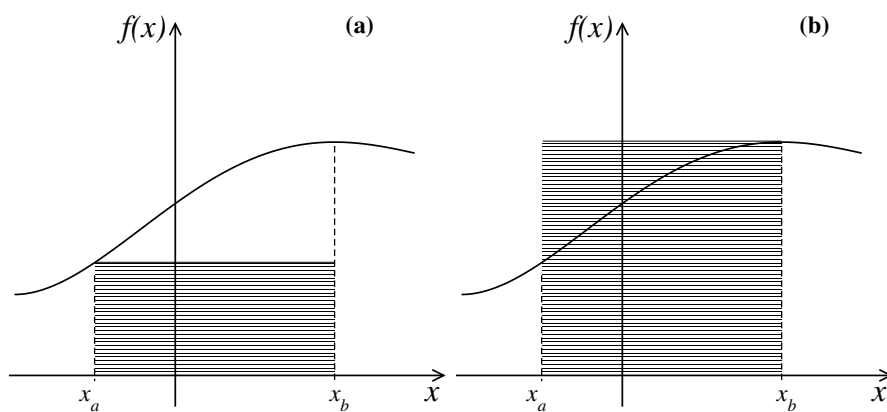


Figura 3.5: Cotas inferior y superior al área sombreada en la figura 3.4.

Es posible obtener mejores cotas para el área bajo la curva aumentando la cantidad de rectángulos utilizados como se muestra en la figura 3.6.

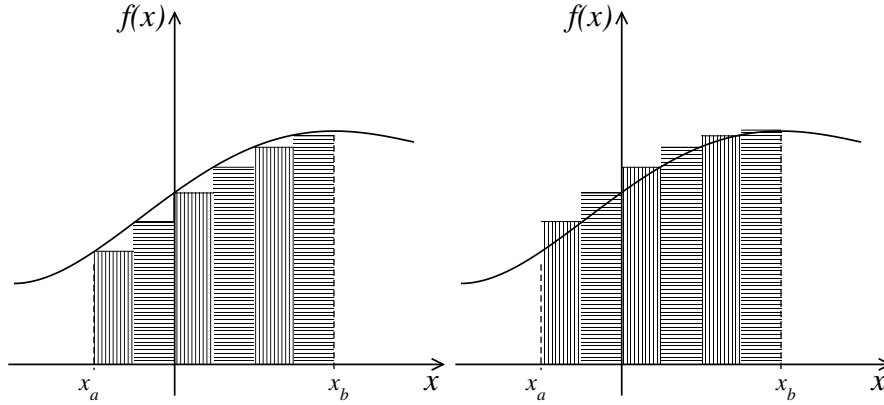


Figura 3.6: Cotas inferior y superior al área sombreada en la figura 3.4.

Para esto dividimos el intervalo  $[x_a, x_b]$  en  $N$  intervalos iguales de ancho  $\Delta x = (x_b - x_a)/N$  y denotamos los puntos límites de cada subintervalo como  $x_i = x_a + i\Delta x$ ;  $i = 0, \dots, N$ . Denotamos también los puntos donde  $f(x)$  toma su valor mínimo y máximo en el  $i$ -ésimo intervalo  $[x_i, x_{i+1}]$  como

$$f m_i = \inf \{f(x) / x \in [x_i, x_{i+1}]\} ; \quad f M_i = \max \{f(x) / x \in [x_i, x_{i+1}]\} ; \quad i = 0, \dots, N-1. \quad (3.67)$$

Podemos entonces definir una cota inferior  $L_N$  como la suma de todos los rectángulos de base  $\Delta x$  y altura  $f m_i$  y una cota superior  $U_N$  como la suma de todos los rectángulos de base  $\Delta x$  y altura  $f M_i$ <sup>3</sup>,

$$L_N = \sum_{i=0}^{N-1} f m_i \Delta x \quad ; \quad U_N = \sum_{i=0}^{N-1} f M_i \Delta x, \quad (3.68)$$

que para todo  $N > 0$  cumplen

$$L_N \leq A(f; x_a, x_b) \leq U_N. \quad (3.69)$$

Con las condiciones pedidas para  $f(x)$ , continua y no negativa, los límites de  $L_N$  y  $U_N$  para  $N \rightarrow \infty$  siempre existen y ambos coinciden, ese límite es entonces el área buscada,

$$A(f; x_a, x_b) = \lim_{N \rightarrow \infty} L_N = \lim_{N \rightarrow \infty} U_N. \quad (3.70)$$

Más adelante estudiaremos cuánto podemos relajar las condiciones sobre  $f$  para que los límites de  $L_N$  y  $U_N$  existan y sean iguales. Como ejemplo de función que los límites no son coincidentes podemos usar nuevamente la función de Dirichlet (2.10), la cual es discontinua en todo punto, y se tiene que  $L_N = 0$  y  $U_N = x_b - x_a \forall x_a < x_b \in \mathbb{R}$  y  $\forall N \in \mathbb{N}$ , por lo que no podemos definir un área bajo la curva de esta función.

Notamos que si en vez de tomar los valores mínimo y máximo de  $f(x)$  en cada intervalo tomamos un punto elegido con cualquier criterio (punto medio, al azar, etc.), que denotaremos  $\xi_i$ , definimos

<sup>3</sup>Las letras  $L$  y  $U$  utilizadas en la literatura para estas sumas provienen del inglés *lower*: inferior y *upper*: superior.



$$S_N = \sum_{i=0}^{N-1} f(\xi_i) \Delta x, \quad \xi_i \in [x_i, x_{i+1}], \quad (3.71)$$

que cumple

$$L_N \leq S_N \leq U_N, \quad (3.72)$$

y utilizando la propiedad del límite (2.16), tenemos que

$$A(f; x_a, x_b) = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N. \quad (3.73)$$

La suma (3.71) se denomina *suma de Riemann*.

Ya “sabemos” calcular el área bajo la curva de cualquier función continua no negativa, aunque queda claro que la definición no es operativa, y son pocas las áreas que podemos calcular utilizando la ecuación (3.73). Veremos ahora cómo relacionar este cálculo de áreas con derivadas e integrales. Para esto tomamos un punto arbitrario  $x_0 \in [x_a, x_b]$ . El área bajo la curva en el intervalo  $[x_0, x_0 + \Delta x]$ , correspondiente al área sombreada en la figura 3.7 cumple, según la ecuación (3.73),

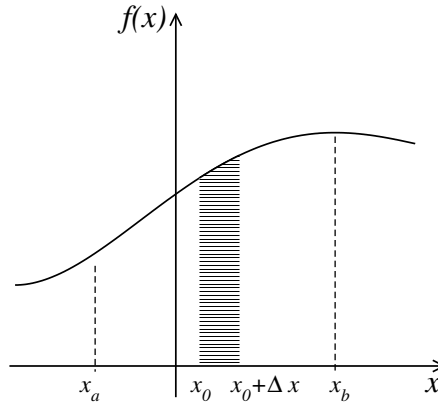


Figura 3.7: La región sombreada es el área bajo la curva de  $f(x)$  en el intervalo  $[x_0, x_0 + \Delta x]$ .

$$f(x_0) \Delta x \simeq A(f; x_a, x_0 + \Delta x) - A(f; x_a, x_0), \quad (3.74)$$

o, dividiendo por  $\Delta x$ ,

$$f(x_0) \simeq \frac{A(f; x_a, x_0 + \Delta x) - A(f; x_a, x_0)}{\Delta x}, \quad (3.75)$$

que en el límite  $\Delta x \rightarrow 0$  ( $N \rightarrow \infty$ ) se vuelve exacta,

$$f(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A(f; x_a, x_0 + \Delta x) - A(f; x_a, x_0)}{\Delta x} = \frac{dA(f; x_a, x_0)}{dx_0}. \quad (3.76)$$

Como esta ecuación es válida  $\forall x_0 \in [x_a, x_b]$ , esto implica que  $A(f; x_a, x)$  es **una** primitiva de  $f(x)$  en  $[x_a, x_b]$ , es decir,

$$A(f; x_a, x_0) = y(x_0) + C, \quad (3.77)$$

donde  $y(x)$  es una primitiva arbitraria de  $f(x)$  y  $C$  es una constante a determinar. Pero además sabemos que el área bajo un punto es nula y por lo tanto, debe cumplirse  $A(f; x_a, x_a) = 0$ , entonces,

$$0 = A(f; x_a, x_a) = y(x_a) + C \Rightarrow C = -y(x_a), \quad (3.78)$$

es decir, reemplazando en la ecuación (3.77)

$$A(f; x_a, x_0) = y(x_0) - y(x_a) = \int_{x_a}^{x_0} f(x) dx, \quad (3.79)$$

donde en la última igualdad usamos la regla de Barrow, ecuación (3.65). En palabras, la integral definida (3.65) nos da el área bajo la gráfica de cualquier función continua no negativa  $f(x)$  en el intervalo  $[x_a, x_b]$ , siendo esta la interpretación geométrica buscada de la integración de funciones.

¿Qué sucede si  $f(x)$  es continua, pero no positiva,  $f(x) \leq 0 \forall x \in [x_a, x_b]$ ? En este caso la función  $g(x) = -f(x)$  es continua y no negativa, además, si  $y(x)$  es una primitiva de  $f(x)$ ,  $-y(x)$  será una primitiva de  $g(x)$ . Así tenemos que

$$A(g; x_a, x_b) = \int_{x_a}^{x_b} g(x) dx = -y(x_b) - (-y(x_a)) = -(y(x_b) - y(x_a)) = -\int_{x_a}^{x_b} f(x) dx, \quad (3.80)$$

esto es, si una función continua es no positiva, entonces su integral definida nos da el área entre la gráfica y el eje  $x$  **anteponiendo un signo negativo**. Si, como se muestra en la figura 3.8, la función  $f(x)$  es continua, pero positiva en algunas regiones y negativa en otras, el resultado de la integral definida será la suma de todas las áreas donde  $f(x)$  es positiva **menos** la suma de todas las áreas donde  $f(x)$  es negativa. En el ejemplo de la figura 3.8 será

$$\int_{x_a}^{x_b} f(x) dx = \text{suma de las áreas rayadas verticalmente} - \text{suma de las áreas rayadas horizontalmente}. \quad (3.81)$$

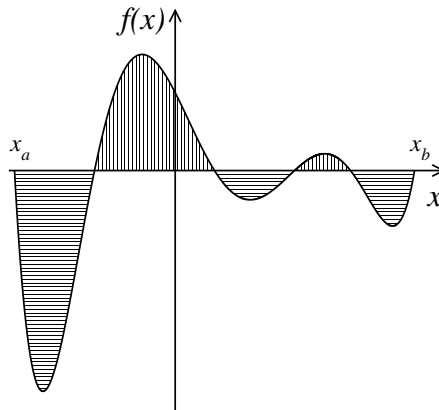


Figura 3.8: Las áreas sobre el eje  $x$  (rayas verticales) se toman como positivas, las áreas bajo el eje  $x$  (rayas horizontales) se toman como negativas.

Analicemos un ejemplo sencillo: supongamos que nos interesa calcular el área bajo la gráfica de la función  $f(x) = 2x + 2$  en el intervalo  $[-1, 3]$ . Como esta área corresponde a un triángulo, vale  $\text{base} \times \text{altura}/2 = 16$ . Corroboremos que por la regla de Barrow obtenemos el mismo resultado,

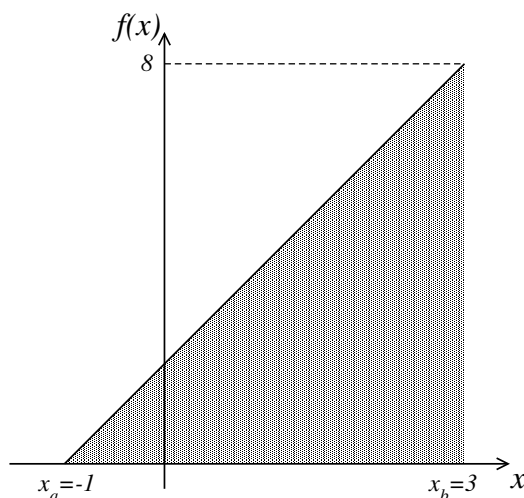


Figura 3.9: La región sombreada es el área de un triángulo rectángulo de base 4 y altura 8.

Calculemos primeramente la integral de  $f(x)$

$$\int f(x) dx = \int (2x + 2) dx = x^2 + 2x + C. \quad (3.82)$$

Como necesitamos **una** primitiva de  $f(x)$ , podemos elegir el valor de la constante aditiva. La elección mas simple resulta  $C = 0$ . Si calculamos el valor de la integral definida obtenemos:

$$\begin{aligned} A(f; -1, 3) &= \int_{-1}^3 (2x + 2) dx = [3^2 + 2 \cdot 3] - [(-1)^2 + 2(-1)] \\ &= (9 + 6) - (1 - 2) = 15 - (-1) = 16, \end{aligned} \quad (3.83)$$

que coincide con el valor del área del triángulo calculada anteriormente.

Pero, ¿qué obtendremos si en vez de  $f(x) = 2x + 2$  integramos  $g(x) = 2x$  en el mismo intervalo? En este caso, el área a calcular es la mostrada en la figura 3.10. Integrando  $g(x)$  obtenemos

$$\begin{aligned} A(g; -1, 3) &= \int_{-1}^3 2x dx = [3^2 + C] - [(-1)^2 + C] \\ &= 9 - 1 = 8. \end{aligned} \quad (3.84)$$

¿Cómo entendemos este resultado? El triángulo sombreado con rayas verticales tiene base 3 y altura 6, por lo que su área es 9, mientras que el triángulo de rayas horizontales tiene base 1 y altura 2, por lo que su área es 1, pero esta está bajo el eje  $x$ , por lo que debe restarse al área sobre el eje, obteniendo así el mismo resultado calculando áreas de triángulos que el arrojado por la integral (3.84).

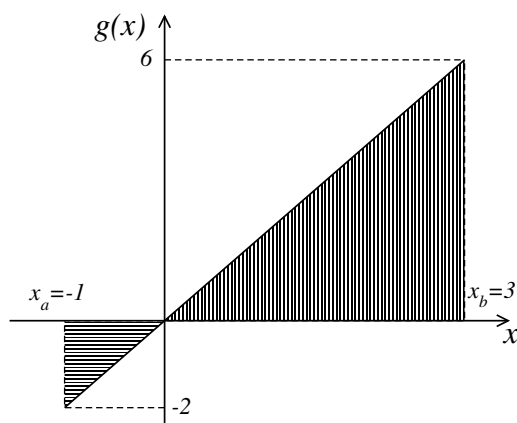


Figura 3.10: El área de la región de rayas horizontales debe restarse al área de rayas verticales.

Es importante notar que si el límite superior de una integral definida es la variable  $x$ , esto define una función que es **una primitiva particular** de  $f(x)$ , ya que determina la constante aditiva. Dada cualquier primitiva  $y(x)$  de  $f(x)$ , entonces la función

$$F(x) = \int_{x_a}^x f(x') dx' = y(x) - y(x_a), \quad (3.85)$$

es la primitiva que cumple  $F(x_a) = 0$ . Aquí vemos la relevancia de la notación, que claramente nos dice que la variable de integración,  $x'$ , es distinta a la variable  $x$ , argumento de  $F$  y límite superior de la integral.

Finalmente daremos una notación muy usada, utilizando la barra vertical de manera similar a la definida por la ecuación (2.53), que permite escribir de manera compacta la diferencia de una función valuada en puntos,

$$y(x)|_{x=x_a}^{x=x_b} = y(x)|_{x_a}^{x_b} = y(x_b) - y(x_a), \quad (3.86)$$

entonces, si  $y(x)$  es una primitiva de  $f(x)$  podemos escribir

$$\int_{x_a}^{x_b} f(x) dx = y(x)|_{x_a}^{x_b} = y(x_b) - y(x_a). \quad (3.87)$$

## SECCIÓN 3.8

# Aplicación de las integrales definidas en cinemática

Ya vimos en la sección 3.6 que conociendo la aceleración de un cuerpo en función del tiempo,  $a(t)$ , y su velocidad en un instante dado,  $v(t_0) = v_0$ , entonces  $v(t)$  es la primitiva de  $a(t)$  que cumple esta condición. En la sección 3.6 escribíamos una primitiva de  $a(t)$  con una constante arbitraria y calculábamos esta

constante por la condición para la velocidad en  $t = t_0$ . En vez de esto, podemos hacer uso de la ecuación (3.85) que define la primitiva particular que necesitamos, esto es,

$$\int_{t_0}^t a(t') dt' = v(t) - v(t_0) = v(t) - v_0, \quad (3.88)$$

es decir,

$$v(t) = \int_{t_0}^t a(t') dt' + v_0, \quad (3.89)$$

que nos dará la función velocidad sin importar qué primitiva de  $a(t)$  usemos. Lo mismo vale para la función de movimiento; si  $x(t_0) = x_0$  podemos escribir

$$x(t) = \int_{t_0}^t v(t') dt' + x_0, \quad (3.90)$$

que es la función de movimiento **que cumple** la condición  $x(t = t_0) = x_0$ .

Podemos obtener este mismo resultado interpretando la ecuación

$$a(t) = \frac{dv}{dt} \quad (3.91)$$

como un cociente de diferenciales. Así, multiplicando a ambos lados por  $dt$  (que llamamos *diferencial t*) obtenemos

$$dv = a(t) dt. \quad (3.92)$$

Si conocemos que el cuerpo en el instante  $t = t_0$  tiene una velocidad  $v(t_0) = v_0$  podemos realizar la integral definida en ambos miembros de la expresión anterior. Notemos que para que la igualdad continúe siendo válida al integrar sobre diferentes variables, los límites de integración deben estar relacionados,  $t_0 \rightarrow v_0$  y  $t \rightarrow v(t)$ , obteniendo

$$\int_{v_0}^{v(t)} dv = \int_{t_0}^t a(t') dt'. \quad (3.93)$$

Primero calculemos la integral definida de la izquierda,

$$\int_{v_0}^{v(t)} dv = (v(t) + C) - (v_0 + C) = v(t) - v_0. \quad (3.94)$$

reemplazando (3.94) en (3.93) obtenemos

$$v(t) - v_0 = \int_{t_0}^t a(t') dt', \quad (3.95)$$

y sumando  $v_0$  a ambos lados de la igualdad reobtenemos la expresión (3.89).

Veamos un ejemplo: queremos conocer la función de movimiento de un cuerpo para  $t > 0$ , sabiendo que en  $t = 0$ , cuando estaba a  $2 \text{ m}$  del origen en la dirección positiva, con una velocidad de  $1 \text{ m/s}$ , comenzó a actuar una aceleración constante  $a = 3 \text{ m/s}^2$ . Aplicamos (3.89) para obtener  $v(t)$ :

$$v(t) = \int_0^t a(t') dt' + v(t=0) = \int_0^t 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} dt' + v_0 = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} t + 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad (3.96)$$

una vez obtenida  $v(t)$ , con un procedimiento similar obtenemos  $x(t)$ ,

$$x(t) = \int_0^t v(t') dt' + x(t=0) = \int_0^t (3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} t' + 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}) dt' + x_0 = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \frac{t^2}{2} + 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} t + 2 \text{m}, \quad (3.97)$$

que es la función de movimiento buscada, válida para  $t \geq 0$ .

La ecuación (3.89) también nos dice que si tomamos un intervalo  $[t_0, t_1]$ , la variación de la velocidad del cuerpo en el intervalo,  $\Delta v = v(t_1) - v(t_0)$  está dada por el área bajo la curva  $a(t)$  en dicho intervalo, tomada como **positiva** en los subintervalos en que  $a(t) > 0$  y como **negativa** en los subintervalos en que  $a(t) < 0$ . El mismo argumento puede utilizarse para relacionar el desplazamiento  $\Delta x = x(t_1) - x(t_0)$  con el área bajo la curva  $v(t)$  en el intervalo  $[t_0, t_1]$ . Veamos como ejemplo el caso de un cuerpo que se desplaza con aceleración constante, como se observa en la figura 3.11.

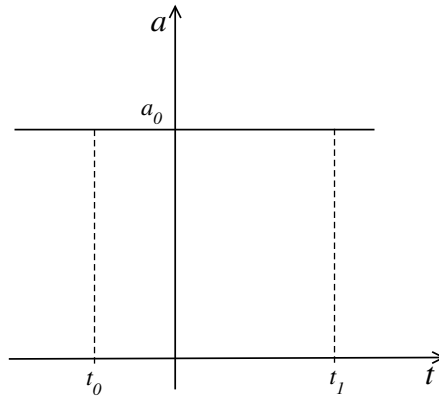


Figura 3.11: Aceleración constante en el intervalo  $[t_0, t_1]$ .

Entonces la variación de la velocidad en el intervalo  $[t_0, t_1]$  será igual al área bajo la gráfica de la función aceleración. En este caso particular en que la aceleración es constante, el área corresponde a la de un rectángulo, resultando  $\Delta v = a_0(t_1 - t_0)$ , que coincide con lo obtenido en el caso de un movimiento rectilíneo uniformemente variado.

Veamos otro ejemplo: supongamos que un cuerpo está sometido a una aceleración cuya gráfica se muestra en la figura 3.12, y se nos pide calcular  $\Delta v$  en el intervalo  $[-2 \text{ s}, 3 \text{ s}]$ .

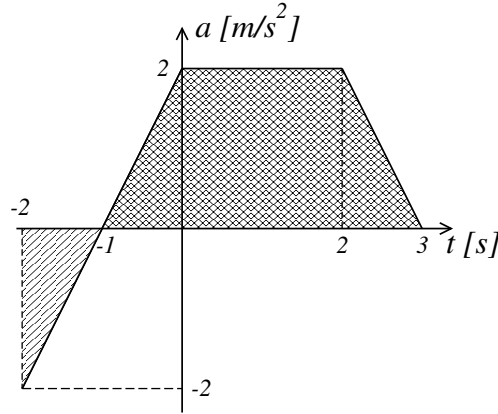


Figura 3.12:  $a(t)$  en el intervalo  $[-2\text{ s}, 3\text{ s}]$ . El área rayada debe restarse al área cuadriculada para obtener  $\Delta v$ .

Por lo que acabamos de ver,  $\Delta v$  será igual al área entre la gráfica de  $a(t)$  y el eje  $t$ , considerada como positiva en la región  $a(t) > 0$  (cuadriculada en la figura) y como negativa en la región  $a(t) < 0$  (rayada en la figura). El área cuadriculada,  $A_c$ , es un rectángulo de base  $2\text{ s}$  y altura  $2\text{ m/s}^2$  más dos triángulos de base  $1\text{ s}$  y altura  $2\text{ m/s}^2$ , por lo que se obtiene  $A_c = 6\text{ m/s}$ . El área rayada,  $A_r$ , es un triángulo de base  $1\text{ s}$  y altura  $2\text{ m/s}^2$ , tenemos entonces  $A_r = 1\text{ m/s}$ . Entonces la variación de la velocidad en el intervalo  $[-2\text{ s}, 3\text{ s}]$  será

$$\Delta v = A_c - A_r = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (3.98)$$

Obtengamos este resultado integrando; para esto debemos usar el gráfico 3.12 para calcular la expresión analítica de  $a(t)$ , dejamos como ejercicio comprobar que esta es

$$a(t) = \begin{cases} 2\frac{m}{s^3}t + 2\frac{m}{s^2} & \text{si } -2\text{ s} < t < 0\text{ s} \\ 2\frac{m}{s^2} & \text{si } 0 \leq t \leq 2\text{ s} \\ -2\frac{m}{s^3}t + 6\frac{m}{s^2} & \text{si } 2\text{ s} < t \leq 3\text{ s} \end{cases}. \quad (3.99)$$

Calculamos entonces la diferencia de velocidades en el intervalo utilizando la ecuación (3.95) con  $t_0 = -2\text{ s}$  y  $t = 3\text{ s}$ ,

$$\begin{aligned} \Delta v(t)|_{-2s}^{3s} &= \int_{-2s}^{3s} a(t) dt = \int_{-2s}^{0s} \left( 2\frac{m}{s^3}t + 2\frac{m}{s^2} \right) dt + \int_{0s}^{2s} 2\frac{m}{s^2} dt + \int_{2s}^{3s} \left( -2\frac{m}{s^3}t + 6\frac{m}{s^2} \right) dt \\ &= \left( 2\frac{m}{s^3} \frac{t^2}{2} + 2\frac{m}{s^2}t \right) \Big|_{-2s}^{0s} + 2\frac{m}{s^2}t \Big|_{0s}^{2s} + \left( -2\frac{m}{s^3} \frac{t^2}{2} + 6\frac{m}{s^2}t \right) \Big|_{2s}^{3s} \\ &= 0\frac{m}{s} + 4\frac{m}{s} + 1\frac{m}{s} = 5\frac{m}{s}, \end{aligned} \quad (3.100)$$

que coincide con el resultado del cálculo de áreas (3.98).





# 4

## Movimiento en el Plano

### SECCIÓN 4.1

### Localización de un punto en el plano

Hasta ahora hemos descrito el movimiento unidimensional (1-D) de cuerpos puntuales, es decir que se mueven sobre rectas. Sin embargo, nos interesa poder describir movimientos algo más complejos que los rectilíneos. Para incrementar de manera gradual la dificultad en la descripción de distintos tipos de movimiento ahora estudiaremos el movimiento de cuerpos en dos dimensiones (2-D), es decir cuerpos que se mueven sobre un plano.

Lo primero que debemos hacer, al igual que en la descripción de movimientos unidimensionales, es dar una receta para determinar de manera unívoca la posición de un cuerpo en este universo plano.

#### 4.1.1 Sistema de coordenadas cartesianas ortogonales

Si bien existen varios sistemas de coordenadas que nos permiten determinar de manera unívoca la posición de un punto en un plano, el más simple y utilizado es el sistema de coordenadas cartesianas ortogonales. Este sistema está conformado por dos ejes cartesianos, como los utilizados en la descripción de movimientos unidimensionales, perpendiculares entre sí, con un origen común a ambos, que al igual que en una dimensión denotaremos como  $O$ . Por **convención** dibujaremos un eje horizontal y otro vertical, que llamaremos *eje  $x$*  y *eje  $y$* , considerando direcciones positivas de los mismos hacia la derecha y hacia arriba de la hoja respectivamente, como se muestra en la figura 4.1.

Todo punto del plano queda unívocamente definido por un par de números referidos al sistema de coordenadas elegido. Por ejemplo, como se observa en la figura 4.1, el punto  $A$  tiene una posición en el plano que queda determinada por medio de las coordenadas espaciales  $(x_A, y_A)$ . También es una convención universal dividir el plano en 4 cuadrantes, según las 4 posibilidades de los signos de las coordenadas de un punto en el cuadrante:  $(+, +)$ ;  $(-, +)$ ;  $(-, -)$ ;  $(+, -)$  denotándolos con los números romanos *I*; *II*; *III*; *IV* respectivamente.

La distancia que existe entre un punto  $A$  del plano con coordenadas  $(x_A, y_A)$  y el origen del sistema de coordenadas,  $d_{AO}$ , se obtiene utilizando el teorema de Pitágoras,

$$d_{AO} = \overline{OA} = \sqrt{x_A^2 + y_A^2}. \quad (4.1)$$

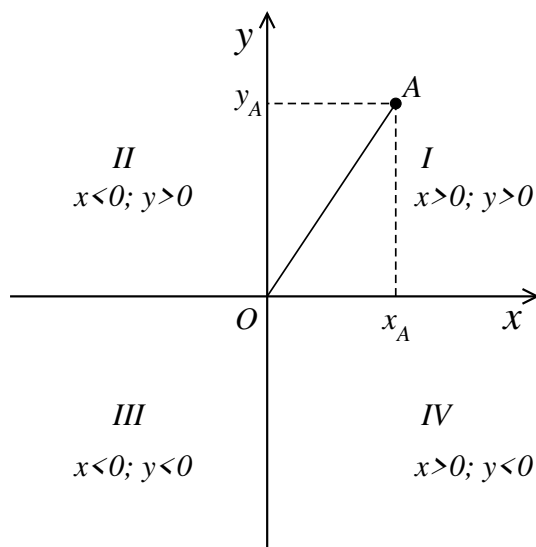


Figura 4.1: Sistema de coordenadas cartesianas ortogonales y coordenadas de un punto  $A$ .

Dados dos puntos del plano  $A$  y  $B$ , de coordenadas  $(x_A, y_A)$  y  $(x_B, y_B)$  respectivamente, la distancia entre ellos es la longitud del segmento  $\overline{AB}$ . Esta distancia también puede calcularse utilizando el teorema de Pitágoras:

$$d_{AB} = \overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}, \quad (4.2)$$

siendo esta fórmula independiente del cuadrante donde se hallen los puntos, como se ve en la figura 4.2.

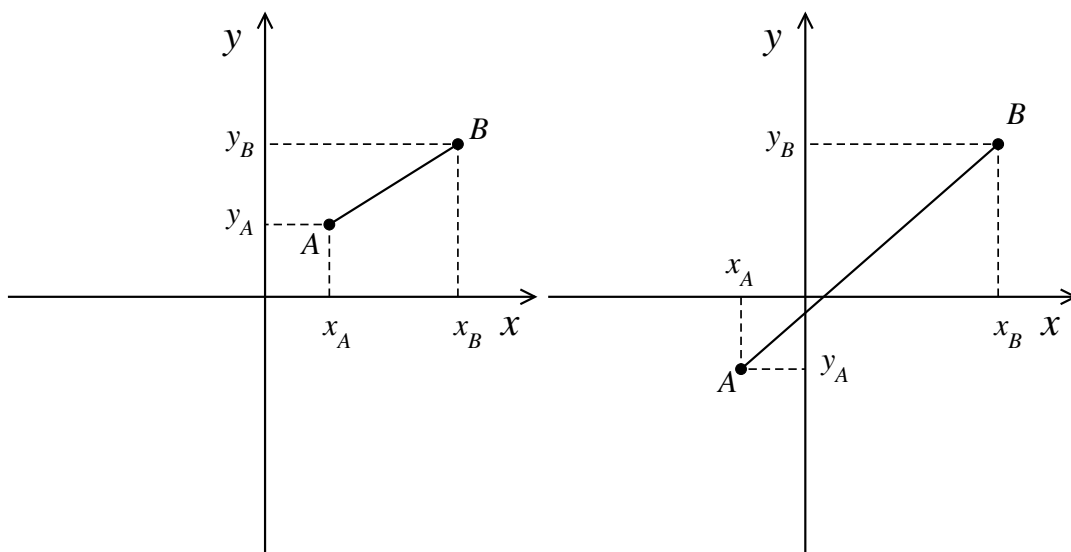


Figura 4.2: Dos ejemplos de distancia entre dos puntos en el plano.

Cuando analizamos el movimiento unidimensional de un cuerpo existía un único sistema de coordenadas para su descripción (solo podíamos decidir la localización del origen y la escala de longitudes). Sin embargo, para el estudio del movimiento de cuerpos en el plano existen muchos otros posibles sistemas de coordenadas aparte del cartesiano. Siempre se utilizará aquel sistema de coordenadas en el cual la descripción matemática del movimiento sea lo más simple posible. Más adelante introduciremos el sistema de coordenadas polares como ejemplo de otro sistema de coordenadas factible de ser utilizado para describir el plano cuando el problema a tratar así lo amerite.

## SECCIÓN 4.2

## Trayectoria y Funciones de Movimiento

Para definir funciones de movimiento en el plano, generalizaremos lo expuesto en la sección 1.4. Si de manera similar a lo realizado cuando estudiamos movimientos unidimensionales en el capítulo 1, para cada tiempo  $t_i$  determinamos cuáles son las coordenadas  $(x_i, y_i)$ , del punto del plano donde está ubicado el cuerpo, podemos construir una tabla similar a la tabla 1.1, solo que agregando otra columna con los valores correspondientes de la coordenada  $y$ , obteniendo

$t$	$x$	$y$
$t_1$	$x_1$	$y_1$
$t_2$	$x_2$	$y_2$
$t_3$	$x_3$	$y_3$
$t_4$	$x_4$	$y_4$
$t_5$	$x_5$	$y_5$
$t_6$	$x_6$	$y_6$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$

Tabla 4.1: Tiempos y posiciones registradas para un móvil en el plano  $x - y$ .

También asumiremos, como en una dimensión, que el movimiento es continuo. Entonces si marcamos todos los puntos del plano que un cuerpo ocupa sucesivamente en su movimiento tendremos una gráfica, como la que se muestra en la figura 4.3. Este conjunto de puntos del plano que el cuerpo ocupó en algún instante se denomina *trayectoria*. Es importante notar que la trayectoria **no** necesariamente corresponde a la gráfica de una función.

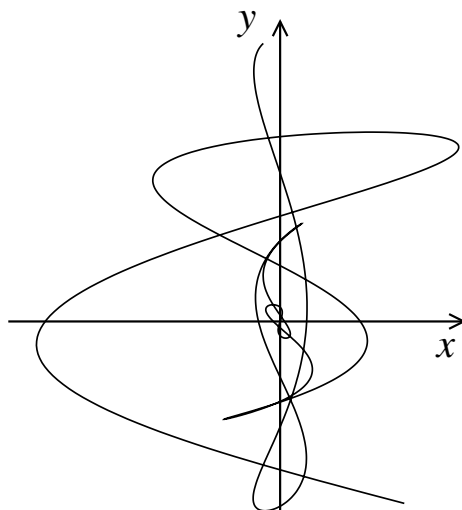


Figura 4.3: Trayectoria de un cuerpo que se mueve sobre un plano.

Por lo tanto se denomina *trayectoria* a la gráfica del camino que recorre el cuerpo a medida que realiza su movimiento (esta definición es válida independientemente de la dimensión del espacio, es decir, vale también en tres dimensiones, y si no la definimos en una dimensión fue porque al ser en este caso todas las trayectorias segmentos de recta, este concepto no presenta utilidad).

Toda la información de la tabla 4.1 la podemos desdoblar analizando, por separado, el comportamiento de la coordenada  $x$ , y por otro lado el de la coordenada  $y$ . Para esto hacemos una tabla con los valores de cada una de estas coordenadas para los distintos instantes de tiempo

$t$	$x$
$t_1$	$x_1$
$t_2$	$x_2$
$t_3$	$x_3$
$t_4$	$x_4$
$t_5$	$x_5$
$t_6$	$x_6$
$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$

$t$	$y$
$t_1$	$y_1$
$t_2$	$y_2$
$t_3$	$y_3$
$t_4$	$y_4$
$t_5$	$y_5$
$t_6$	$y_6$
$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$

Podemos encontrar dos funciones del tiempo  $x(t)$  e  $y(t)$  tales que, cuando sean evaluadas en los tiempos  $t_i$ , sus resultados reproduzcan los valores medidos  $x_i$  e  $y_i$  de las coordenadas del cuerpo. Estas funciones  $x(t)$  e  $y(t)$  se denominan *funciones de movimiento* del cuerpo, y nos permiten determinar cuál es la posición del cuerpo en el plano dando sus coordenadas para cada instante. Como ejemplo mostramos en la figura 4.4 un par de funciones de movimiento,  $x(t)$  e  $y(t)$ , que dibujan la trayectoria de la figura 4.3.

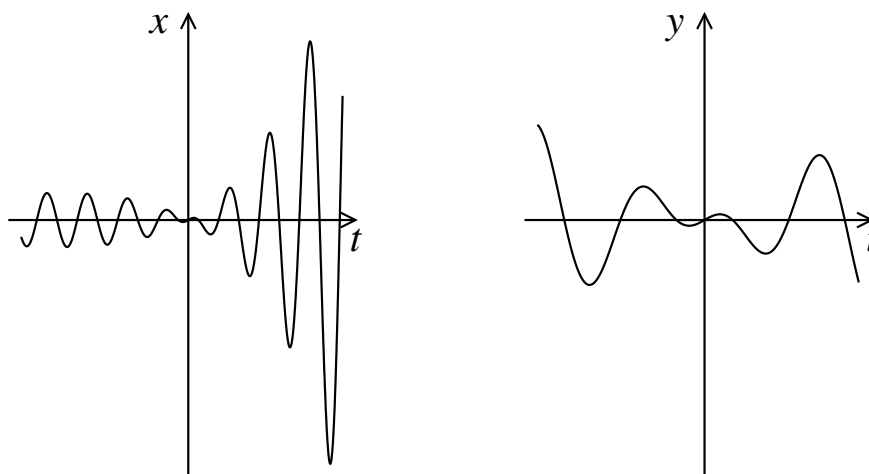


Figura 4.4: Funciones de movimiento correspondientes a la trayectoria mostrada en la figura 4.3.

Debemos tener en cuenta que no existe una relación uno a uno entre funciones de movimiento y trayectorias, muchas (¡infinitas!) funciones de movimiento distintas pueden describir el mismo camino, es decir, la misma trayectoria en el plano  $x - y$ . Como ejemplo simple, podemos recorrer la misma trayectoria en sentido opuesto, como las funciones de movimiento de la figura 4.5 que también describen la trayectoria mostrada en la figura 4.3. Como en la trayectoria no hay referencia al tiempo, funciones de movimiento que recorran el mismo camino, pero mas rápido, frenando, invirtiendo a veces el movimiento, etc., corresponderán todas a la misma trayectoria.

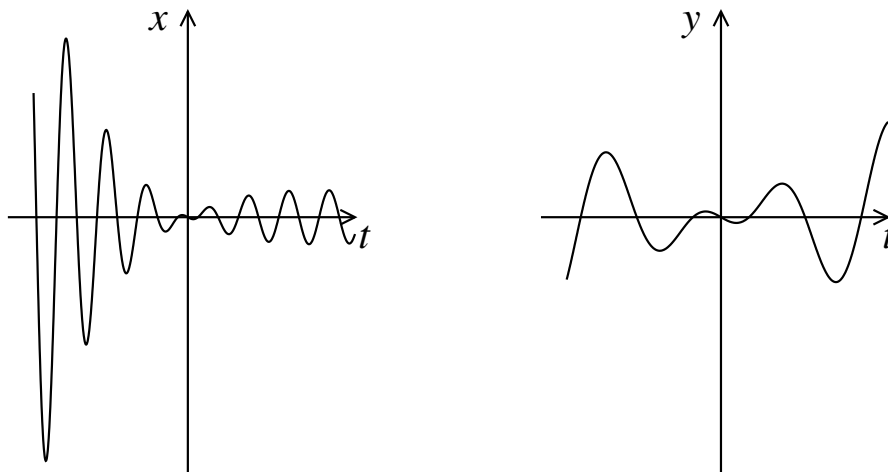


Figura 4.5: Otro par de funciones de movimiento que también describen la trayectoria mostrada en la figura 4.3, donde el móvil la recorre en sentido inverso al correspondiente a la figura 4.4.

Hemos definido a la trayectoria del cuerpo como el conjunto de puntos del plano que, en algún instante, fueron ocupados por el cuerpo. Este conjunto de puntos no necesariamente es una función; sin embargo, para algunos movimientos particulares lo es. En estos casos la expresión matemática de la trayectoria estará dada por una relación  $y = f(x)$  la cual puede deducirse a partir de las funciones de movimiento del cuerpo al igual que el dominio de la misma.

La forma de obtener la expresión  $y = f(x)$  en el caso particular que esta sea una función es eliminando la variable  $t$  de las funciones de movimiento  $x(t)$  e  $y(t)$ . Las dos formas más simples de realizar esto son:

1. Se despeja la variable  $t$  de una de las funciones de movimiento, por ejemplo  $x(t)$ , y luego se reemplaza esta expresión en la otra función de movimiento, por ejemplo  $y(t)$ , obteniendo  $y(x) = y(t(x))$ .
2. Se despeja la variable  $t$  de ambas funciones de movimiento, obteniendo  $t = g(x)$  y  $t = h(y)$ . Se igualan ambas expresiones eliminando el parámetro  $t$ ,  $g(x) = h(y)$ , y de esta igualdad se puede obtener  $x = g^{-1}(h(y))$  ó  $y = h^{-1}(g(x))$ .

Siempre es posible dar una expresión matemática a la trayectoria, aún cuando la relación entre  $x$  e  $y$  no sea una función, como es el caso mostrado en la figura 4.3. Una manera de hacer esto es partir la trayectoria en trozos en los cuales  $y(x)$ , o bien  $x(y)$ , sí sea una función, obteniendo una expresión distinta para cada trozo aplicando alguna de las técnicas 1 ó 2. Pero es importante notar que, dado que  $x(t)$  e  $y(t)$  nos permiten determinar cuál es la posición del cuerpo para cada instante, si conocemos estas funciones ya nos están definiendo cuál es la trayectoria del cuerpo. Por este motivo decimos que  $x(t)$  e  $y(t)$  describen la trayectoria en *forma paramétrica*, donde el parámetro es  $t$ . De hecho, fue de esta manera que se graficó la trayectoria de la figura 4.3 a partir de las funciones de movimiento de la figura 4.4 (podríamos haber utilizado igualmente las funciones de movimiento de la figura 4.5).

Analicemos a continuación algunos ejemplos simples de cómo obtener la expresión para la trayectoria a partir de las funciones de movimiento del cuerpo.

a) Cuerpo en reposo: en este caso las funciones de movimiento no dependen del tiempo,

$$x(t) = x_0 \quad ; \quad y(t) = y_0, \quad (4.3)$$

donde  $x_0$  e  $y_0$  representan constantes reales. La trayectoria es simplemente el punto del plano donde se encuentra el cuerpo, como se muestra en la figura 4.6.

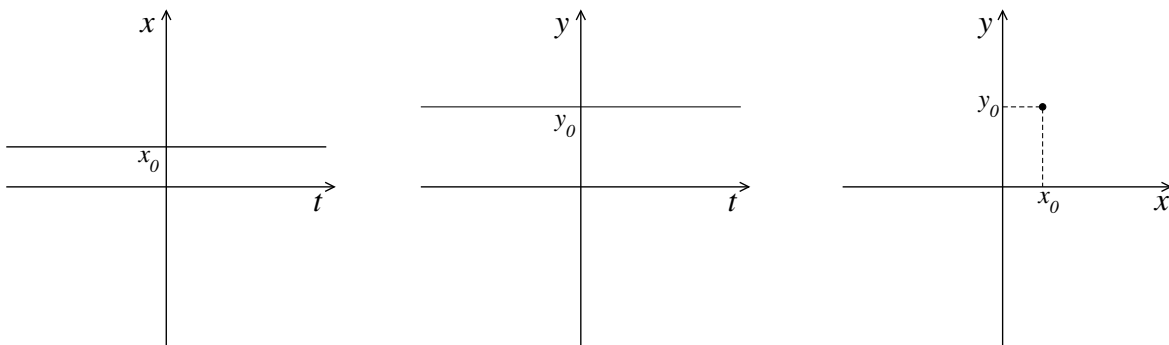


Figura 4.6: Funciones de movimiento y trayectoria de un cuerpo que se encuentra en reposo.

b) Movimiento rectilíneo paralelo al eje  $y$ :

$$x(t) = x_0 \quad ; \quad y(t) = \beta t + y_0. \quad (4.4)$$

En la figura 4.7 se muestra el gráfico de las funciones de movimiento y la trayectoria del cuerpo.

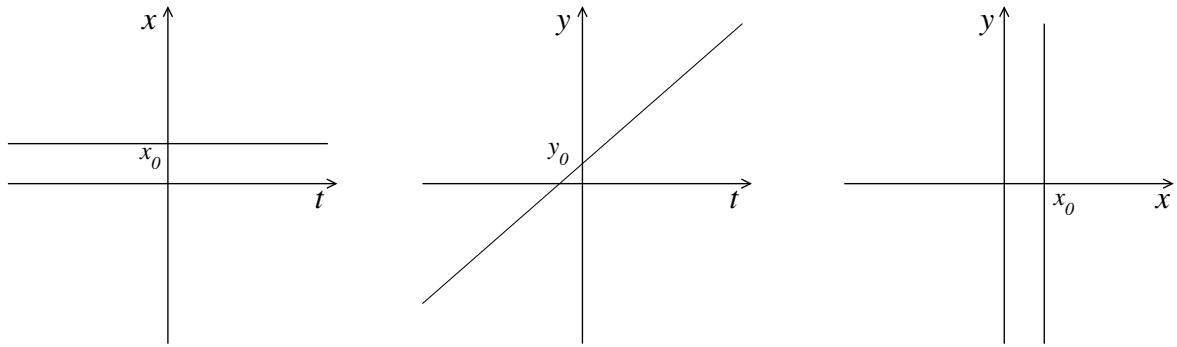


Figura 4.7: Funciones de movimiento y trayectoria de un cuerpo que se mueve sobre una línea paralela al eje  $y$ .

Como vemos en este ejemplo la trayectoria es un conjunto de puntos del plano que no puede ser descrito por una función  $y(x)$ . Por lo tanto podemos expresar a la trayectoria como un conjunto de puntos denominado  $A$ ,

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x = x_0\} \quad (4.5)$$

Aunque debemos notar que  $x(y) = x_0$  sí es una función.

c) Movimiento lineal más general:

$$x(t) = \alpha t + x_0; \alpha \neq 0 \quad ; \quad y(t) = \beta t + y_0, \quad (4.6)$$

En este caso ambas funciones de movimiento son funciones lineales (el caso  $\alpha = 0$  fue considerado en el ejemplo anterior), así podemos obtener de la primera ecuación  $t(x)$  y reemplazar esta función en  $y(t)$ ,

$$t(x) = \frac{x - x_0}{\alpha} \Rightarrow y(x) = \frac{\beta}{\alpha}x + \left(y_0 - \frac{\beta x_0}{\alpha}\right), \quad (4.7)$$

resultando la trayectoria  $y(x)$  también una función lineal. La figura 4.8 muestra las funciones de movimiento y trayectoria para el caso  $\alpha < 0$ ;  $\beta > 0$ .

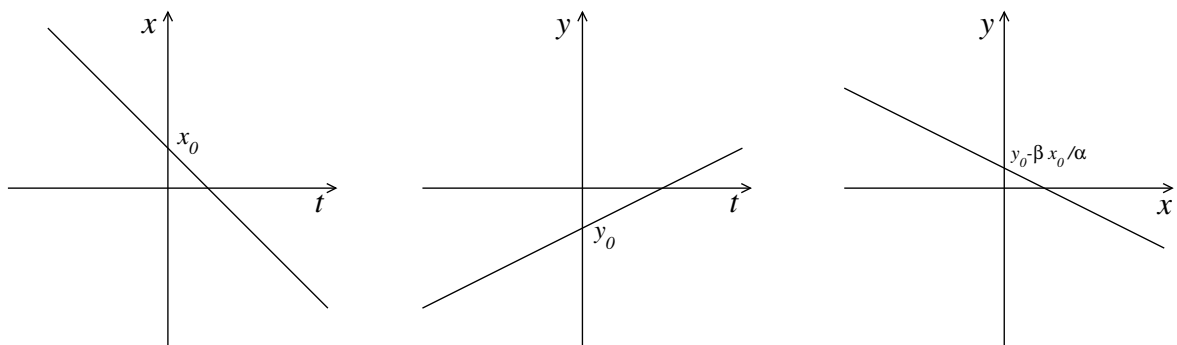


Figura 4.8: Funciones de movimiento y trayectoria de un cuerpo que se mueve sobre el plano con movimiento rectilíneo uniforme.

Notemos que como  $y(x)$  es una recta, podríamos elegir un sistema de coordenadas cuyo eje  $x$  coincida con dicha recta. En este sistema el problema es unidimensional, como los ya tratados en el

capítulo 1. Esto es una primera muestra de la **importancia** de elegir de manera adecuada el sistema de coordenadas para lograr una descripción matemática lo más **simple** posible de un dado problema físico.

d) Combinación de una función lineal y una función cuadrática:

$$x(t) = \alpha t \quad ; \quad y(t) = \beta t^2 + y_0 \quad ; \quad \alpha, \beta \neq 0. \quad (4.8)$$

Despejando  $t$  de la primera ecuación y reemplazando esta expresión en la ecuación de  $y(t)$  obtenemos la expresión de la trayectoria,

$$y(x) = \frac{\beta}{\alpha^2} x^2 + y_0, \quad (4.9)$$

que describe una trayectoria parabólica. Suponiendo que todos los coeficientes son positivos el gráfico cualitativo de las funciones de movimiento y trayectoria se muestran en la figura 4.9.

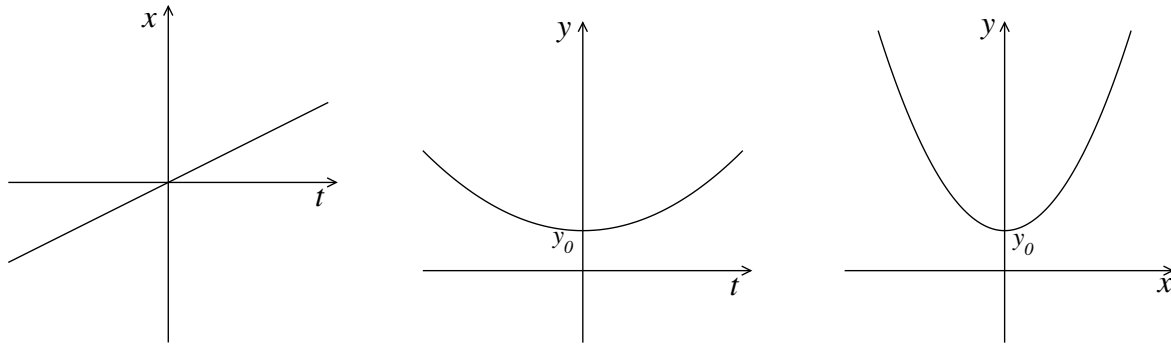


Figura 4.9: Funciones de movimiento y trayectoria de un cuerpo que se mueve sobre el plano con una trayectoria parabólica.

e) Combinación de una función cuadrática y una cuártica:

$$x(t) = \alpha t^2 \quad ; \quad y(t) = \beta t^4 + y_0. \quad (4.10)$$

Para poder analizar este ejemplo supondremos que todos los coeficientes,  $\alpha$ ;  $\beta$ ; e  $y_0$ , son positivos. En este caso lo primero a notar es que  $x$  e  $y$  son **siempre** positivos, independientemente del valor de  $t$ , así, cuando despejamos  $t$  en función de  $x$ ,

$$t(x) = \pm \sqrt{\frac{x}{\alpha}} \quad ; \quad x \geq 0, \quad (4.11)$$

y debemos tomar la raíz positiva para  $t > 0$  y la negativa para  $t < 0$ . Reemplazando esta última ecuación en  $y(t)$  obtenemos la trayectoria

$$y(x) = \frac{\beta}{\alpha^2} x^2 + y_0 \quad ; \quad x \geq 0, \quad (4.12)$$

Como vemos, la trayectoria es formalmente igual a la función obtenida en el ejemplo anterior, ecuación (4.9) (aunque los coeficientes  $\alpha$  y  $\beta$  tienen distintas dimensiones en ambos ejemplos); sin embargo su dominio es diferente pues sólo pertenecen a él los valores de  $x \geq 0$ . Por lo tanto el gráfico cualitativo de la trayectoria es el que se muestra en la figura 4.10.



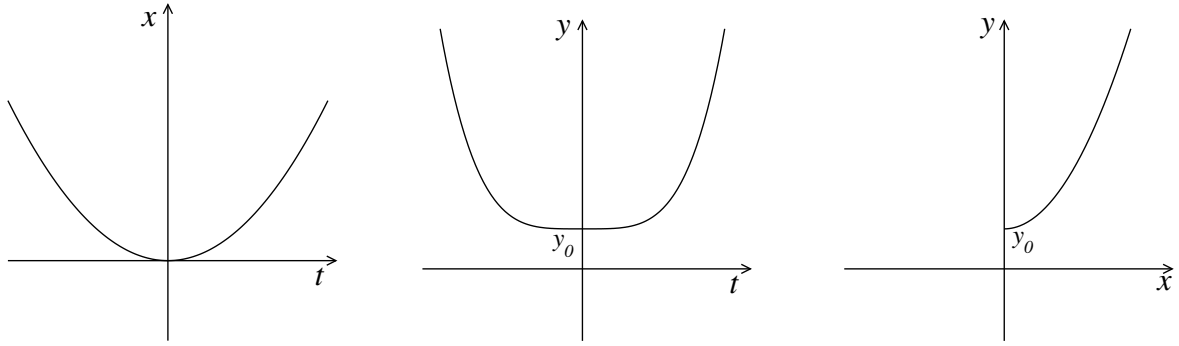


Figura 4.10: Funciones de movimiento dadas por las ecuaciones (4.10) y la trayectoria correspondiente.

- f) Un caso muy interesante, que analizaremos en detalle en el capítulo 5, es el correspondiente a funciones de movimiento trigonométricas de la forma

$$x(t) = R \cos(\omega t) ; y(t) = R \sin(\omega t). \quad (4.13)$$

En la figura 4.11 se muestra el gráfico de estas funciones de movimiento asumiendo que ambos parámetros,  $R$  y  $\omega$ , son positivos.

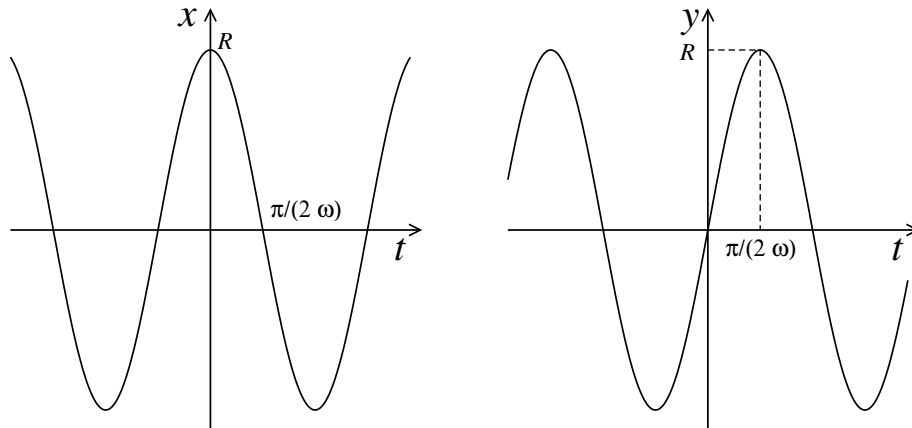


Figura 4.11: Funciones de movimiento dadas por las ecuaciones (4.13).

Si para obtener la expresión de la trayectoria queremos seguir el mismo procedimiento que en los ejemplos anteriores, debemos notar que las funciones trigonométricas  $\cos(\omega t)$  y  $\sin(\omega t)$  son invertibles en intervalos de longitud  $\pi/\omega$  y debemos invertir de a trozos en intervalos de dicha longitud. Teniendo esto en cuenta obtenemos:

$$t = \frac{1}{\omega} \arccos\left(\frac{x}{R}\right) \Rightarrow y(x) = R \sin\left(\arccos\left(\frac{x}{R}\right)\right). \quad (4.14)$$

No es simple determinar cuáles son los puntos del plano que pertenecen a la trayectoria a partir de la expresión de  $y(x)$  dada en la ecuación (4.14). En este caso resulta más conveniente utilizar algunas relaciones conocidas de las funciones trigonométricas para determinar la expresión de la trayectoria. Primero elevamos ambas funciones de movimiento al cuadrado,

$$x^2(t) = R^2 \cos^2(\omega t) ; y^2(t) = R^2 \sin^2(\omega t), \quad (4.15)$$

y sumando ambas expresiones de la ecuación (4.15) tenemos

$$x^2 + y^2 = R^2 \cos^2(\omega t) + R^2 \sin^2(\omega t) = R^2 (\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)) . \quad (4.16)$$

Finalmente, utilizando la famosa relación  $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$ , obtenemos la trayectoria del móvil

$$x^2 + y^2 = R^2 , \quad (4.17)$$

que corresponde a la ecuación de una circunferencia de radio  $R$  centrada en el origen mostrada en la figura 4.12. Estas funciones de movimiento corresponden al denominado *movimiento circular uniforme (MCU)*, que, como dijimos, estudiaremos en el capítulo 5.

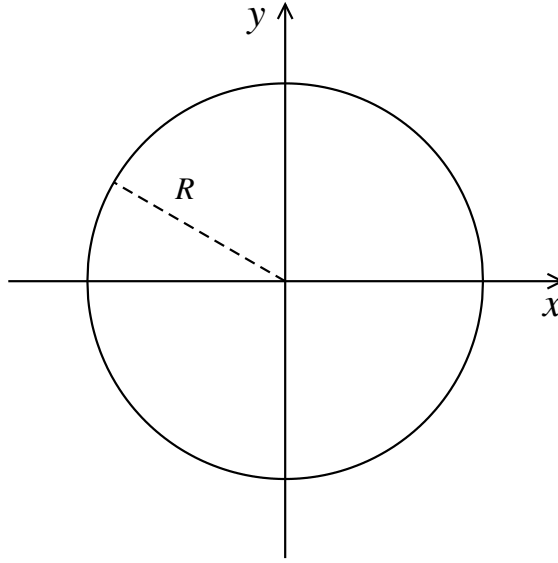


Figura 4.12: Trayectoria de un movimiento circular uniforme de radio  $R$  dado por la ecuación (4.17).

Notar que la ecuación (4.17) **no** corresponde a una función  $y(x)$ , pero si a dos,  $y_{\pm}(x) = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$ .

Expresiones más generales para estos tipos de funciones de movimiento son

$$x(t) = a \cos(\omega t) + x_0 \quad ; \quad y(t) = b \sin(\omega t) + y_0 . \quad (4.18)$$

Despejando las funciones  $\cos(\omega t)$  y  $\sin(\omega t)$  de estas expresiones obtenemos

$$\frac{x - x_0}{a} = \cos(\omega t) \quad ; \quad \frac{y - y_0}{b} = \sin(\omega t) , \quad (4.19)$$

elevando al cuadrado ambas expresiones tenemos

$$\left( \frac{x - x_0}{a} \right)^2 = \cos^2(\omega t) \quad ; \quad \left( \frac{y - y_0}{b} \right)^2 = \sin^2(\omega t) , \quad (4.20)$$

y sumando ambas igualdades de la ecuación (4.20) obtenemos

$$\left( \frac{x - x_0}{a} \right)^2 + \left( \frac{y - y_0}{b} \right)^2 = \cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) , \quad (4.21)$$

llegando finalmente a la expresión para la trayectoria

$$\left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2 = 1. \quad (4.22)$$

Esta trayectoria que recorre el móvil, cuyas funciones de movimiento son las expresadas en la ecuación (4.18), es una elipse centrada en  $x = x_0$  y  $y = y_0$  y con semiejes  $a$  y  $b$ . En la figura 4.13 se muestra un ejemplo con  $a > b$ ,  $x_0 > 0$  e  $y_0 < 0$ . El ejemplo de movimiento circular que desarrollamos es un caso particular donde  $a = b = R$  y  $x_0 = y_0 = 0$ .

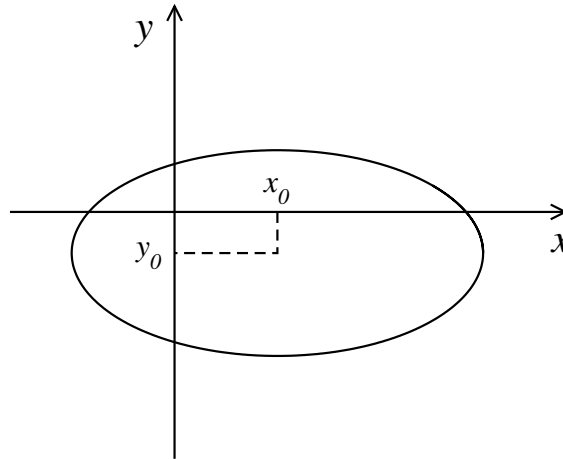


Figura 4.13: Trayectoria sobre una elipse dada por la ecuación (4.22).

- g) Como veremos en este ejemplo, la forma funcional de las funciones de movimiento en general no tiene relación con la forma funcional de la trayectoria. Tomemos ahora también funciones de movimiento trigonométricas, pero de la forma

$$x(t) = R \cos(\omega t) ; y(t) = R \sin(\omega t), \quad (4.23)$$

que se ven similares a las funciones de movimiento (4.13), sin embargo, la trayectoria es simplemente

$$y(x) = x ; \quad -R \leq x \leq R, \quad (4.24)$$

que es un segmento de recta. Compare las funciones de movimiento y trayectoria mostradas en la figura 4.14 con las mostradas en las figuras 4.11 y 4.12 para el movimiento circular.

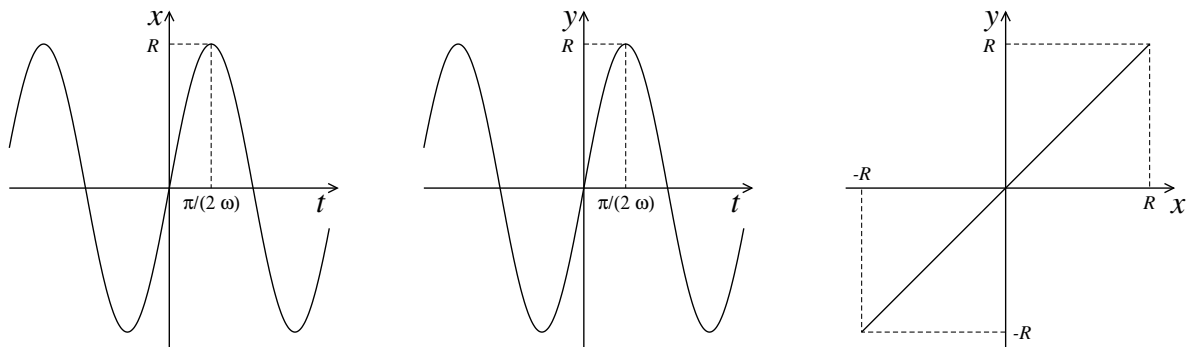


Figura 4.14: Funciones de movimiento dadas por las ecuaciones (4.23) y la correspondiente trayectoria, ecuación (4.24).

Sabemos que podemos expresar una posición en el plano dando sus coordenadas como un par ordenado  $(x,y)$ . Sin embargo, desde un punto de vista operativo esta forma no es la más adecuada de hacerlo. Por lo tanto ahora haremos un pequeño impasse en la descripción física del movimiento en dos dimensiones para introducir la forma matemática que utilizaremos para determinar la posición de un punto en el plano.

### SECCIÓN 4.3

## Vectores

Las magnitudes físicas que hemos definido hasta ahora son magnitudes escalares, es decir que están completamente definidas dando un número real y la correspondiente unidad. Sin embargo, hay muchas magnitudes físicas para las cuales es necesario dar más información; este es el caso de magnitudes en las cuales la orientación juega un papel importante. Para definir este tipo de magnitudes se utiliza un ente matemático denominado vector y las magnitudes correspondientes reciben el nombre de magnitudes vectoriales. El nombre “vector” proviene del latín “vectoris”, derivado del verbo “veho”, que significa el que transporta o conduce. El concepto de vector puede utilizarse en diversos ámbitos; en particular en física un vector es representado como un segmento de recta orientado, tal como se muestra en la figura 4.15.

Los elementos necesarios para definir un vector son:

- Una dirección: la cual es definida por una recta en el espacio.
- Un módulo: que es la longitud de un segmento sobre la recta que define la dirección.
- Un sentido: que define la orientación del segmento de recta; ya que dada una dirección existen dos sentidos posibles.
- Un punto de aplicación: gráficamente coincide con el origen del segmento utilizado para representar el vector.



Figura 4.15: Representación gráfica de un vector.

Para denotar que una magnitud es vectorial lo haremos mediante una letra que lo identifica, que puede ser mayúscula o minúscula, con una flecha encima, por ejemplo  $\vec{r}$ , que leemos como *el vector r*. Para denotar el módulo de un vector se encierra el símbolo utilizado para el vector entre dos barras verticales  $|\vec{r}|$  ó simplemente la misma letra utilizada para denotar el vector, pero sin flecha arriba,  $r$ . El módulo de un vector es una magnitud escalar no negativa, es decir que queda totalmente definido por un número real positivo (o cero solo en el caso del vector nulo) y eventualmente por una unidad.

### 4.3.1 Operaciones con vectores

#### Multiplicación de un vector y un escalar

Si multiplicamos un vector  $\vec{a}$  por un escalar  $\lambda \in \mathbb{R}$ , su resultado es un vector  $\vec{A} = \lambda \vec{a}$ , que tiene las siguientes características.

- i) Módulo:  $|\vec{A}| = |\lambda \vec{a}| = |\lambda| |\vec{a}|$ .
- ii) Dirección:  $\vec{A}$  y  $\vec{a}$  tienen la misma dirección, multiplicar por un escalar **no** cambia la dirección.
- iii) Sentido:  $\begin{cases} \lambda > 0 & \vec{A} \text{ y } \vec{a} \text{ tienen igual sentido} \\ \lambda < 0 & \vec{A} \text{ y } \vec{a} \text{ tienen sentidos opuestos} \\ \lambda = 0 & \vec{A} \text{ es el vector nulo} \end{cases}$

Veamos los vectores que se obtienen al multiplicar un vector dado por distintos escalares:

Si  $\lambda = -1$  entonces  $\vec{A} = \lambda \vec{a} = -\vec{a}$ , que es el vector opuesto a  $\vec{a}$ ; lo que implica que tiene la misma dirección y módulo, pero sentido contrario (ver figura 4.16).



Figura 4.16: Producto de un vector por el número -1.

Como  $|\vec{A}| = |\lambda| |\vec{a}|$ , si  $|\lambda| > 1$  entonces  $|\vec{A}| > |\vec{a}|$ , mientras que si  $|\lambda| < 1$  entonces  $|\vec{A}| < |\vec{a}|$ . Además, si  $\lambda > 0$  el vector  $\vec{A}$  tendrá el mismo sentido que  $\vec{a}$ , y si, en cambio,  $\lambda < 0$ ,  $\vec{A}$  tendrá el sentido contrario al de  $\vec{a}$ , como puede verse en la figura 4.17.

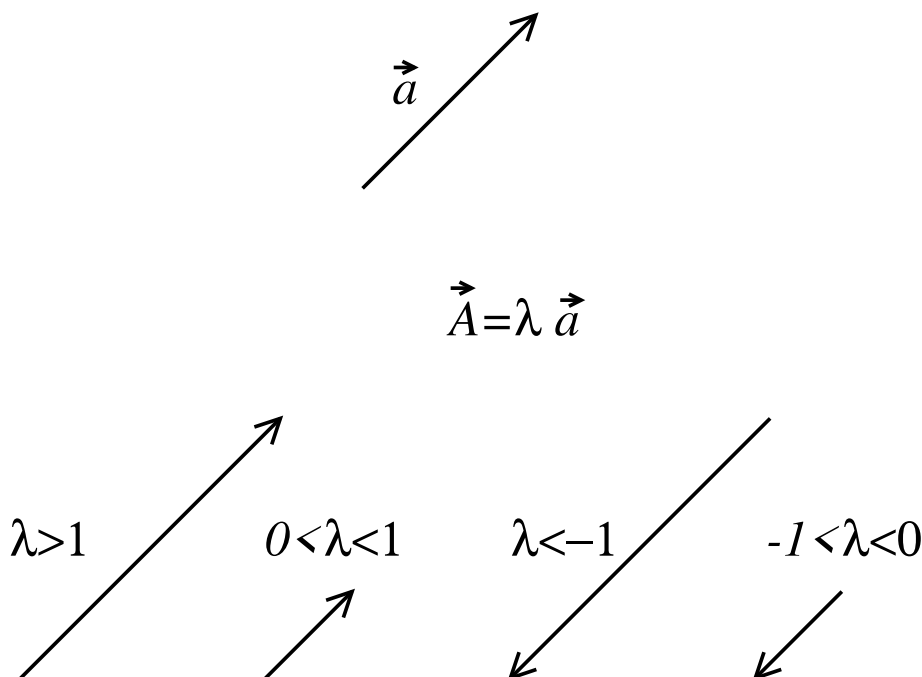


Figura 4.17: Distintos casos de multiplicación de un escalar por un vector. Notar que en todos los casos  $\vec{A}$  tiene la misma dirección que  $\vec{a}$ .

### Suma de vectores

La suma de dos vectores da como resultado otro vector. El vector suma se puede obtener gráficamente por la denominada regla del paralelogramo. Para ello hay que trasladar los dos vectores al mismo punto de aplicación, luego se forma un paralelogramo trazando por el extremo de cada vector una recta paralela al otro, como se muestra en la figura 4.18, y el vector suma queda definido por la diagonal del paralelogramo que contiene al punto común de aplicación de los vectores.

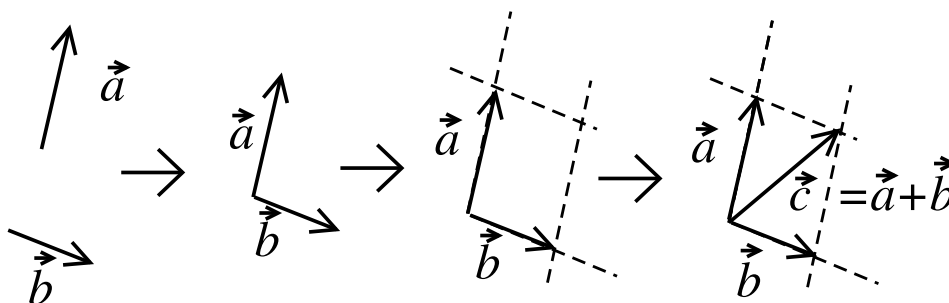


Figura 4.18: Suma de vectores utilizando el método del paralelogramo.

Otra forma de sumar gráficamente dos vectores es trasladar el segundo vector al extremo del primero y el vector suma será el que une el origen del primero con el extremo del segundo (ver figura 4.19).

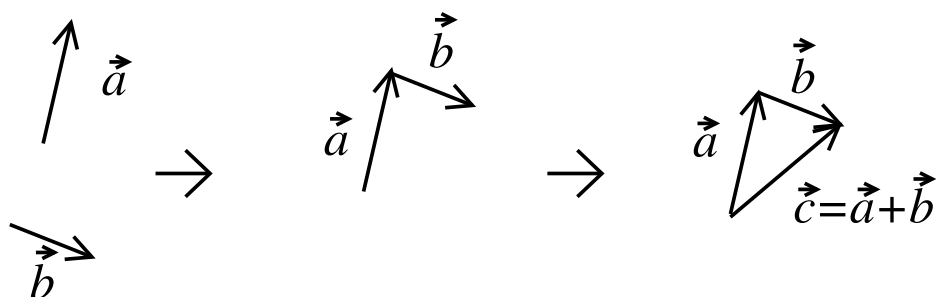


Figura 4.19: Suma de vectores trasladando uno de ellos al extremo del otro.

Ambas reglas de suma son equivalentes, salvo en el caso de suma de vectores de igual dirección, en cuyo caso la regla del paralelogramo no está definida, mientras esta última receta si lo está. En este caso decimos que los vectores son colineales. Si bien para vectores colineales no podemos definir un paralelogramo, la segunda regla gráfica nos dice que el vector suma tendrá la misma dirección que los dos vectores, el sentido del de mayor módulo (el “más largo” de los vectores) y su módulo será la suma de ambos módulos si ambos vectores tienen el mismo sentido o la diferencia si ambos tienen sentidos opuestos, como se muestra en la figura 4.20.

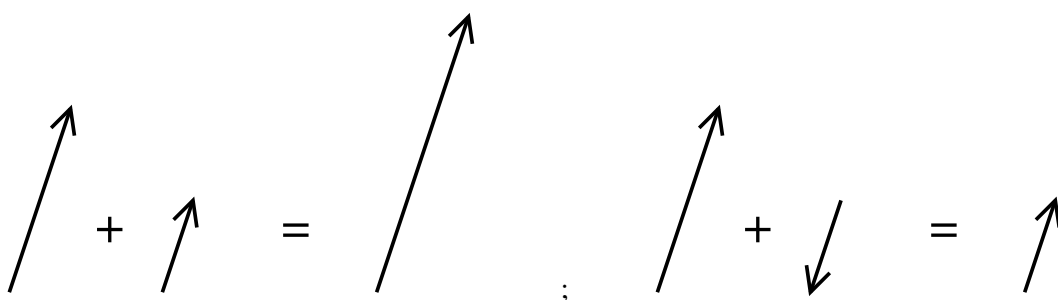


Figura 4.20: Dos casos de suma de dos vectores colineales. Izq.: ambos vectores tienen igual sentido. Der. los vectores tienen sentidos opuestos.

Para sumar más de dos vectores aplicamos reiteradamente el método del paralelogramo (ver figura 4.21), o el último método descrito, como se esquematiza en la figura 4.22.

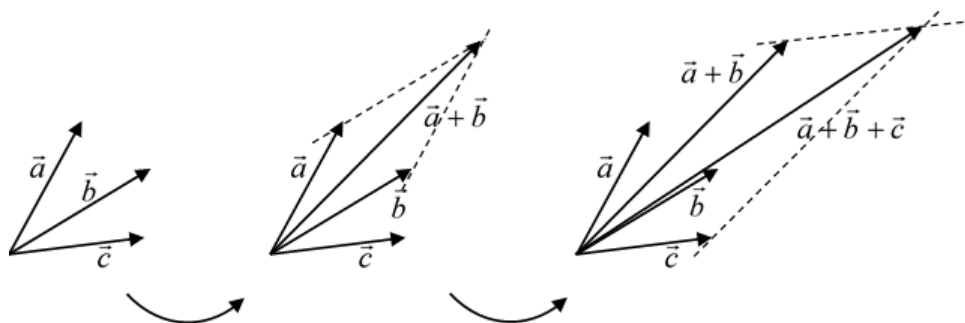


Figura 4.21: Suma de más de dos vectores aplicando el método del paralelogramo.

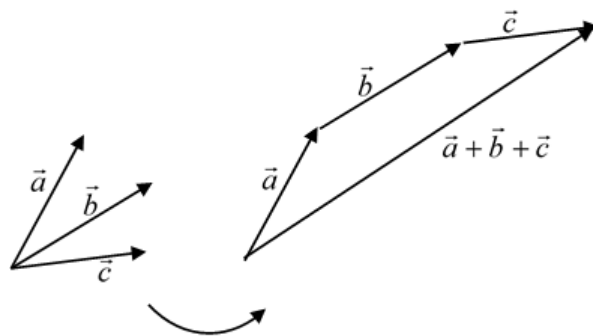


Figura 4.22: Suma de más de dos vectores trasladándolos.

A partir de la regla del paralelogramo vemos que, entre otras, la suma de vectores posee las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva respecto a la multiplicación por un escalar.

- i) Propiedad conmutativa:  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ .
- ii) Propiedad asociativa:  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ .
- iii) Propiedad distributiva respecto a la multiplicación por un escalar:  $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ .

### Resta de vectores

Podemos pensar al vector resta de dos vectores,  $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$  como el vector suma de dos vectores  $\vec{c} = \vec{a} + (-\vec{b})$ , donde entendemos al vector  $(-\vec{b})$  como uno con la misma dirección y módulo pero sentido contrario al del vector  $\vec{b}$  (ver multiplicación de un vector por un escalar).

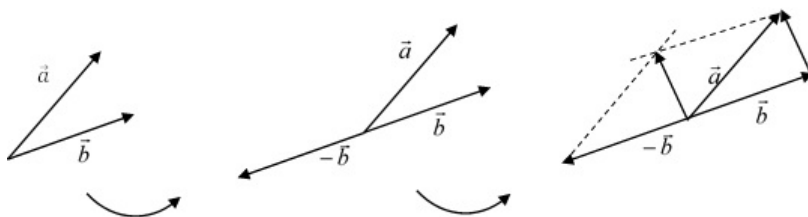


Figura 4.23: Resta de dos vectores aplicando el método del paralelogramo.

Podemos ver que en el caso de la diferencia de vectores es más simple su representación gráfica pues, como se ve en la figura 4.23, el vector diferencia es igual al vector con inicio en el extremo del vector sustraendo y final en el extremo del vector minuendo.

### Descomposición de vectores

Un vector  $\vec{a}$  puede ser expresado como la suma de dos vectores que estén en dos direcciones predeterminadas no colineales. Encontrar cuáles son esos vectores se denomina hacer la descomposición del vector  $\vec{a}$  en dichas direcciones. En la figura 4.24 se esquematiza el procedimiento correspondiente; se trazan, por el extremo del vector  $\vec{a}$ , dos rectas paralelas a cada una de las direcciones predeterminadas;



los puntos donde estas rectas cortan a las direcciones dadas determinan los extremos de los vectores en los cuales hemos descompuesto el vector  $\vec{a}$ . Notar que  $\vec{a}$  resulta la suma de los dos vectores así definidos,  $\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2$ .

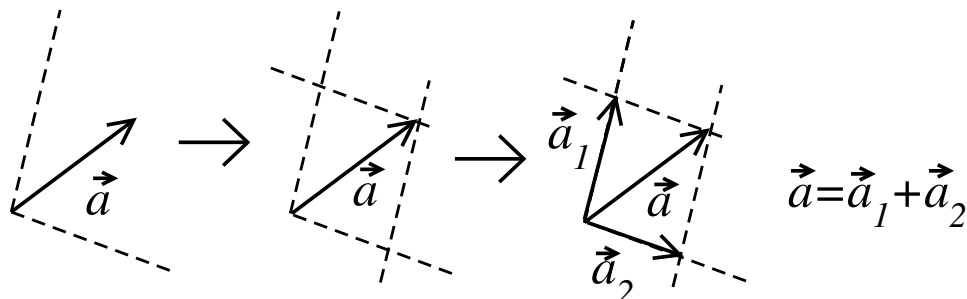


Figura 4.24: Descomposición de un vector en dos direcciones arbitrarias.

### Vectores

Un versor es simplemente un vector con la única particularidad de que su módulo es igual a 1. Sin embargo, veremos que definir versores es de gran importancia para simplificar nuestro trabajo con vectores. Para distinguirlos de los otros vectores, a los versores los designaremos con una letra y en su parte superior, en lugar de una flecha, el símbolo correspondiente al acento circunflejo; por ejemplo  $\hat{a}$ .

La característica que tienen los versores es que definen una dirección en el espacio y, a partir de ellos, podemos generar todos los vectores sobre dicha dirección. Para generar un vector en la dirección del versor debemos multiplicar el versor por un número real que cumpla las siguientes condiciones: su valor absoluto debe ser igual al módulo del vector que deseamos generar y su signo debe ser positivo si el vector debe tener el mismo sentido del versor o negativo si debe tener sentido opuesto.

Dado un vector  $\vec{a} \neq 0$  podemos generar, a partir de él, un versor con su misma dirección y sentido. Para esto debemos multiplicar el vector por un escalar cuyo valor es igual a la inversa de su módulo

$$\lambda = \frac{1}{|\vec{a}|} > 0, \quad (4.25)$$

entonces

$$\hat{a} = \lambda \vec{a} = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}. \quad (4.26)$$

Podemos ver que el módulo de este vector es

$$|\hat{a}| = |\lambda \vec{a}| = \frac{1}{|\vec{a}|} |\vec{a}| = 1. \quad (4.27)$$

### 4.3.2 Base vectorial

Hemos visto que podemos expresar un vector  $\vec{A}$  como la suma de dos vectores que estén en dos direcciones determinadas. Por otro lado, dos versores cualesquiera (no colineales) pueden definir las direcciones a lo largo de las cuales queremos descomponer un vector. Al conjunto de versores que definen estas direcciones se lo llama *base vectorial* (ver figura 4.25).

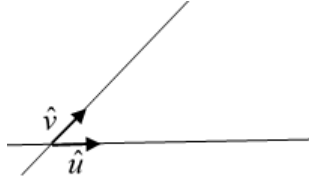


Figura 4.25: Versores de la base vectorial.

Por ejemplo, consideremos los versores  $\hat{u}$  y  $\hat{v}$  que definen la base mostrada en la figura 4.25, en cuyas direcciones queremos descomponer un vector  $\vec{A}$ . Llamamos a estos vectores  $\vec{A}_1$  y  $\vec{A}_2$ , que cumplen

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2, \quad (4.28)$$

como se muestra en la figura 4.26.

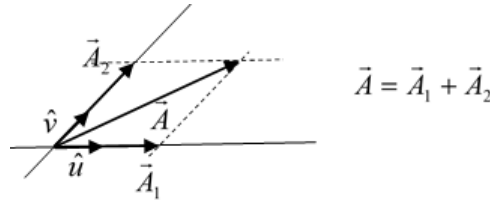


Figura 4.26: Descomposición del vector  $\vec{A}$ .

$\vec{A}_1$  y  $\vec{A}_2$  son los vectores en los cuales se descompone el vector  $\vec{A}$  según las direcciones de  $\hat{u}$  y  $\hat{v}$  respectivamente. Como  $\vec{A}_1$  y  $\hat{u}$  son vectores paralelos, al igual que  $\vec{A}_2$  y  $\hat{v}$ , podemos escribir:

$$\vec{A}_1 = A_u \hat{u} \quad ; \quad \vec{A}_2 = A_v \hat{v}. \quad (4.29)$$

Por lo tanto

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 = A_u \hat{u} + A_v \hat{v}, \quad (4.30)$$

donde  $A_u$  y  $A_v$  son dos cantidades escalares que se denominan *componentes* del vector  $\vec{A}$  en las direcciones de  $\hat{u}$  y  $\hat{v}$  respectivamente.

### 4.3.3 Vectores en un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales

Así como con un versor podíamos generar todos los posibles vectores sobre la dirección definida por el versor, con un par de versores no paralelos podemos generar todos los posibles vectores en el plano. Una base vectorial muy usada, y que utilizaremos habitualmente, es la base ortonormal ilustrada en la figura 4.27 en la cual los versores que la definen son perpendiculares entre sí. En el caso del sistema cartesiano ortogonal, que utilizamos para describir el movimiento de los cuerpos que se mueven sobre un plano, los versores se ubicarán sobre cada uno de los ejes. El versor que determina la dirección del eje  $x$  se denomina  $\hat{i}$  y el que determina la dirección del eje  $y$  se denomina  $\hat{j}$ .

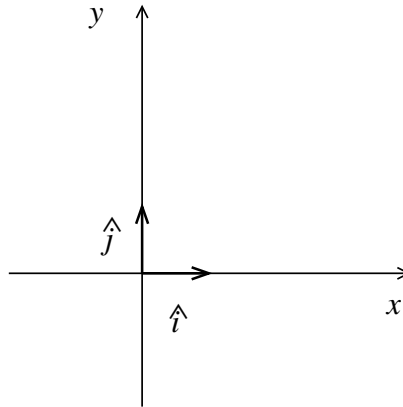


Figura 4.27: Base ortonormal cartesiana.

Las componentes de un vector según estas direcciones perpendiculares se llaman componentes ortogonales o componentes cartesianas (ver figura 4.28).

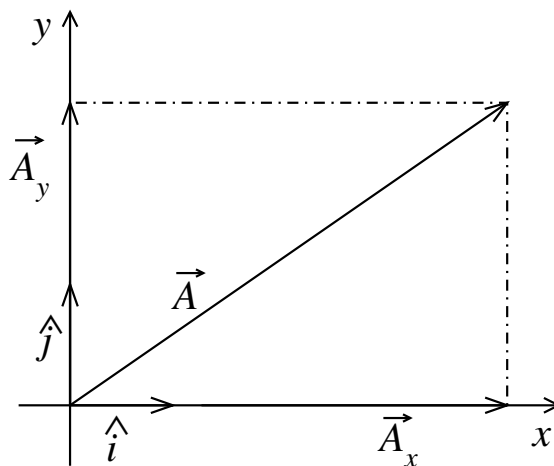


Figura 4.28: Descomposición de un vector  $\vec{A}$  en una base cartesiana.

$\vec{A}_x$  y  $\vec{A}_y$  son las componentes *vectoriales* en las que se descompone el vector  $\vec{A}$  según las direcciones de los ejes  $x$  e  $y$  respectivamente. Por lo tanto, podemos escribir

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y = A_x \hat{i} + A_y \hat{j}. \quad (4.31)$$

donde  $A_x$  y  $A_y$  son las componentes del vector  $\vec{A}$  a lo largo de las direcciones  $x$  e  $y$  respectivamente, y son magnitudes escalares que pueden ser positivas, negativas o nulas.

Calculamos el módulo del vector utilizando el teorema de Pitágoras expresándolo en función de estas componentes;

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}. \quad (4.32)$$

### Dirección de un vector en un sistema cartesiano ortogonal

Podemos obtener la dirección y sentido de un vector  $\vec{A}$  si conocemos las componentes cartesianas del mismo. La *convención usual* es dar el ángulo  $\theta$  que forma el vector con el eje  $x$  en el sentido antihorario. De la figura 4.28 deducimos que

$$\theta_A = \arctan(A_y/A_x). \quad (4.33)$$

Si permitimos que  $\theta$  tome valores en el intervalo  $[0, 2\pi)$ , entonces el ángulo define ambos, dirección y sentido del vector, ya que un vector  $\vec{A}$  que forma un ángulo  $\theta_A$  con el eje  $x$  tendrá la misma dirección, pero sentido opuesto a un vector  $\vec{B}$  que forma un ángulo  $\theta_B = \theta_A + \pi$  con el eje  $x$ , como muestra el ejemplo de la figura 4.29.

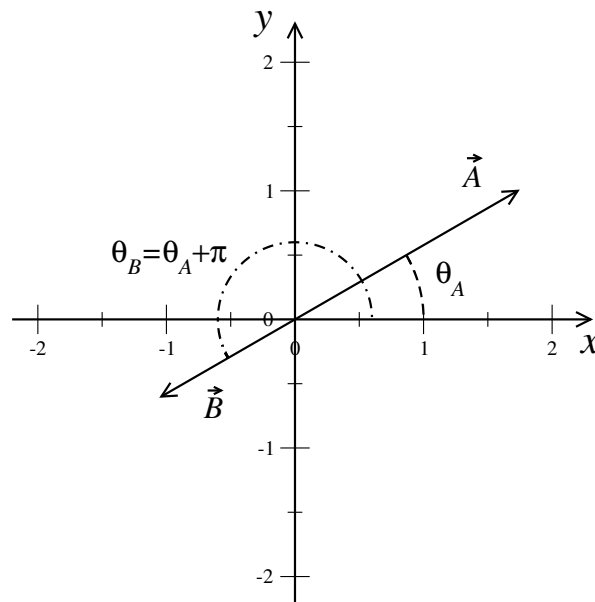


Figura 4.29: Dos vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  con igual dirección y sentido opuesto.

Pero debemos tener en cuenta que la función tangente tiene período  $\pi$ , esto es,  $\tan(\theta + \pi) = \tan(\theta)$ . Entonces para dos vectores que tienen igual dirección pero sentido opuesto se cumple que  $A_y/A_x = B_y/B_x$ , por lo que una calculadora nos dará un único valor al evaluar la función arcotangente usando las componentes de  $\vec{A}$  o de  $\vec{B}$ . Además, para vectores en el segundo o cuarto cuadrante, la calculadora arroja un valor negativo para la arcotangente, en el intervalo  $(-\pi/2, 0)$ . Entonces, para obtener adecuadamente la dirección y sentido de un vector como el ángulo que forma con el eje  $x$ , debemos tener en cuenta también el signo de sus componentes para determinar unívocamente dicho ángulo. Así, para obtener el ángulo  $\theta_A \in [0, 2\pi)$  que forma  $\vec{A}$  con el eje  $x$ , al resultado arrojado por la calculadora para  $\arctan(A_y/A_x) = \alpha$  le debemos aplicar la prescripción siguiente:

$$\text{Si } \begin{cases} A_x > 0; A_y \geq 0 & \text{el vector está en el 1}^{\text{er}} \text{ cuadrante} & \Rightarrow \theta_A = \alpha \\ A_x < 0; A_y \geq 0 & \text{el vector está en el 2}^{\text{o}} \text{ cuadrante} & \Rightarrow \theta_A = \alpha + \pi. \\ A_x < 0; A_y < 0 & \text{el vector está en el 3}^{\text{o}} \text{ cuadrante} & \Rightarrow \theta_A = \alpha + \pi. \\ A_x > 0; A_y < 0 & \text{el vector está en el 4}^{\text{o}} \text{ cuadrante} & \Rightarrow \theta_A = \alpha + 2\pi. \\ A_x = 0; A_y > 0 & \text{el vector está en el eje } y \text{ positivo} & \Rightarrow \theta_A = \pi/2 \\ A_x = 0; A_y < 0 & \text{el vector está en el eje } y \text{ negativo} & \Rightarrow \theta_A = 3\pi/2 \end{cases} \quad (4.34)$$

### Suma de dos vectores en un sistema cartesiano ortogonal

Supongamos que deseamos determinar el vector suma de dos vectores  $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ . Podemos calcular esta suma mediante la regla del paralelogramo, como se muestra en la figura 4.30, o expresar estos vectores utilizando los versores y sus componentes cartesianas,

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j}; \quad \vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j}; \quad \vec{C} = C_x \hat{i} + C_y \hat{j}. \quad (4.35)$$

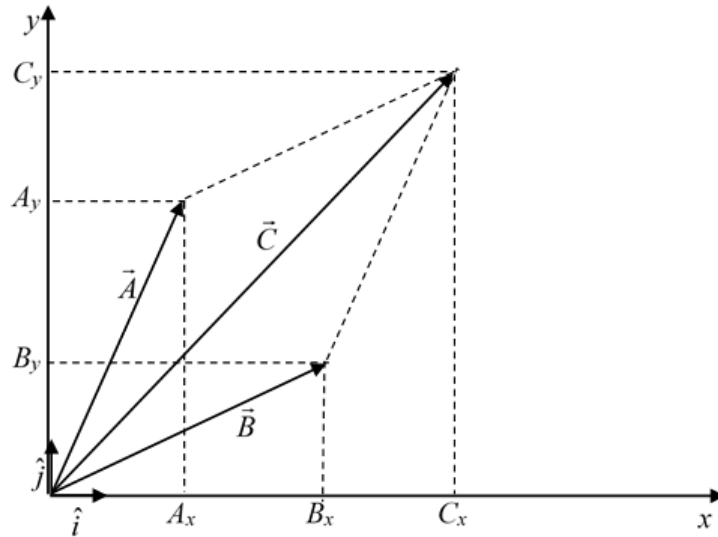


Figura 4.30: Suma de vectores por regla del paralelogramo y por suma de componentes en una base cartesiana.

Calculamos entonces la suma utilizando las expresiones (4.35),

$$\begin{aligned}
\vec{C} &= \vec{A} + \vec{B} \\
&= A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + B_x \hat{i} + B_y \hat{j} \\
&= (A_x + B_x) \hat{i} + (A_y + B_y) \hat{j},
\end{aligned} \tag{4.36}$$

y podemos identificar las componentes del vector  $\vec{C}$

$$C_x = A_x + B_x \quad ; \quad C_y = A_y + B_y. \tag{4.37}$$

Entonces vemos que la suma de dos vectores es igual a otro vector cuya componente en una determinada dirección es la suma de las componentes de cada uno de los vectores en dicha dirección.

### Resta de dos vectores en una base ortogonal

Para realizar la resta de dos vectores,  $\vec{C} = \vec{A} - \vec{B}$ , procedemos de manera similar a la suma, pues podemos pensar esta resta como la suma de dos vectores  $\vec{C} = \vec{A} + (-\vec{B})$ . Expresando los vectores en términos de sus componentes cartesianas, ecuaciones (4.35), tenemos que

$$-\vec{B} = -B_x \hat{i} - B_y \hat{j}, \tag{4.38}$$

por lo que obtenemos

$$\begin{aligned}
\vec{C} &= \vec{A} + (-\vec{B}) = \vec{A} - \vec{B} \\
&= A_x \hat{i} + A_y \hat{j} - B_x \hat{i} - B_y \hat{j} \\
&= (A_x - B_x) \hat{i} + (A_y - B_y) \hat{j},
\end{aligned} \tag{4.39}$$

donde

$$C_x = A_x - B_x \quad ; \quad C_y = A_y - B_y. \tag{4.40}$$

Por lo tanto, el vector resta de dos vectores es igual a un vector cuya componente en una determinada dirección es la resta de las componentes de cada uno de los vectores en dicha dirección.

### Multiplicación de un vector por un escalar en una base ortogonal

Si  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ , cuya expresión en componentes es dada por las ecuaciones (4.35) cumplen  $\vec{B} = \lambda \vec{A}$  esto quiere decir que

$$\vec{B} = \lambda (A_x \hat{i} + A_y \hat{j}) = \lambda A_x \hat{i} + \lambda A_y \hat{j}, \tag{4.41}$$

entonces

$$B_x = \lambda A_x \quad ; \quad B_y = \lambda A_y, \quad (4.42)$$

además

$$|\vec{B}| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{(\lambda A_x)^2 + (\lambda A_y)^2} = |\lambda| \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = |\lambda| |\vec{A}|. \quad (4.43)$$

### Otras notaciones

En muchos libros se identifica los vectores utilizando una letra en negrita,  $\mathbf{A} = \vec{A}$ , pero dada la dificultad de escribir letras en negrita en un pizarrón o un cuaderno, no utilizaremos esta notación.

Otra notación muy utilizada es escribir las componentes cartesianas del vector como un par ordenado de números reales. En particular, si escribimos los versores base como

$$\hat{i} = (1, 0) \quad ; \quad \hat{j} = (0, 1), \quad (4.44)$$

obtenemos para un vector  $\vec{A}$  dado,

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} = (A_x, A_y). \quad (4.45)$$

A esta notación la usaremos en algunas ocasiones, siempre que trabajemos en un sistema de coordenadas cartesiano ortogonal.

#### 4.3.4 Producto escalar

El producto escalar (también denominado producto interno o producto punto) es una operación entre dos vectores cuyo resultado es un escalar. Dados dos vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ , como los mostrados en la figura ??, que subtienden entre sí un ángulo  $\alpha$ , el producto escalar entre ambos está definido como el producto de los módulos de los vectores por el coseno del ángulo comprendido,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos(\alpha), \quad (4.46)$$

donde el ángulo subtendido cumple  $0 \leq \alpha \leq \pi$ .

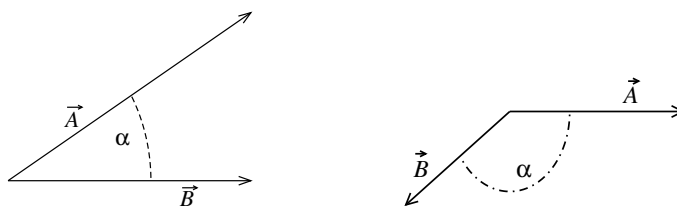


Figura 4.31: Dos ejemplos de vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  y el ángulo  $\alpha$  entre ellos.

Como dijimos, el producto escalar entre dos vectores no nulos,  $\vec{A} \cdot \vec{B}$ , da como resultado un escalar. Este será positivo si  $0 \leq \alpha < \pi/2$ , negativo si  $\pi/2 < \alpha \leq \pi$ , o cero si  $\alpha = \pi/2$ .

A partir de la definición del producto escalar se desprende que:

- i) El producto escalar es conmutativo

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}. \quad (4.47)$$

- ii) El producto escalar es distributivo respecto a la suma de vectores

$$(\vec{A} + \vec{B}) \cdot \vec{C} = \vec{A} \cdot \vec{C} + \vec{B} \cdot \vec{C}. \quad (4.48)$$

- iii) El producto escalar de un vector por sí mismo es igual al módulo del vector elevado al cuadrado.

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = |\vec{A}| |\vec{A}| \cos(0) = |\vec{A}|^2. \quad (4.49)$$

Como consecuencia de esto se verifica que el producto interno de un versor por sí mismo es igual a uno (en particular  $\hat{i} \cdot \hat{i} = 1$  y  $\hat{j} \cdot \hat{j} = 1$ ).

- iv) Multiplicación por un escalar

$$(\lambda \vec{A}) \cdot \vec{B} = \vec{A} \cdot (\lambda \vec{B}) = \lambda \vec{A} \cdot \vec{B}. \quad (4.50)$$

- v) El producto escalar de dos vectores no nulos ( $\vec{A} \neq 0$  y  $\vec{B} \neq 0$ ) perpendiculares entre sí ( $\vec{A} \perp \vec{B}$ ) es igual a cero.

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos(\pi/2) = 0. \quad (4.51)$$

Por lo tanto el producto interno entre los versores que definen la base cartesiana es igual a cero,  $\hat{i} \cdot \hat{j} = 0$ . Entonces, cuando deseamos demostrar que dos vectores no nulos son perpendiculares sólo debemos calcular el producto escalar entre ellos y verificar que es igual a cero.

- vi) Es posible determinar el ángulo que subtienden dos vectores entre sí. De la definición de producto escalar

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos(\alpha), \quad (4.52)$$

despejamos el coseno del ángulo subtendido,

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| |\vec{B}|} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} \cdot \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|}, \quad (4.53)$$

obteniendo finalmente

$$\cos(\alpha) = \hat{A} \cdot \hat{B}. \quad (4.54)$$

- vii) Se puede determinar la proyección de un vector  $\vec{C}$  en una determinada dirección.

Para esto realizamos el producto escalar entre el vector dado y un versor  $\hat{u}$  que define dicha dirección (ver figura 4.32).

$$\vec{C} \cdot \hat{u} = |\vec{C}| |\hat{u}| \cos(\beta) = |\vec{C}| \cos(\beta) \quad (4.55)$$



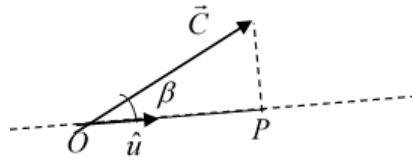


Figura 4.32: Producto escalar de un vector por un versor.

Como se puede ver en la figura 4.32,  $\vec{C} \cdot \hat{u}$  es la proyección del vector  $\vec{C}$  sobre la dirección definida por  $\hat{u}$ .

Si se tienen dos vectores,  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ , y deseamos calcular la componente o proyección de uno de ellos, supongamos el vector  $\vec{A}$ , a lo largo de la dirección de  $\vec{B}$  (ver figura 4.33), debemos calcular el producto escalar del vector  $\vec{A}$  con un versor con la misma dirección y sentido del vector  $\vec{B}$ . Sabemos que podemos definir un versor en la dirección del vector  $\vec{B}$  como:

$$\hat{B} = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|}, \quad (4.56)$$

de esta manera

$$\vec{A} \cdot \hat{B} = \vec{A} \cdot \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = |\vec{A}| \cos(\alpha). \quad (4.57)$$

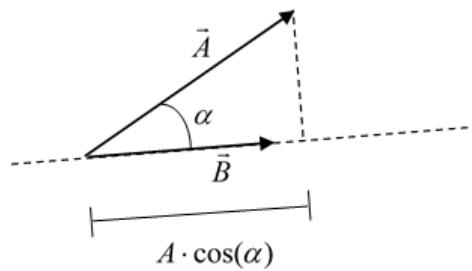


Figura 4.33: Proyección de un vector en una dirección.

Podemos encontrar las componentes de un vector (por ejemplo el vector  $\vec{C}$  mostrado en la figura 4.34) en una base ortogonal, haciendo el producto escalar del vector por los versores que definen la base.

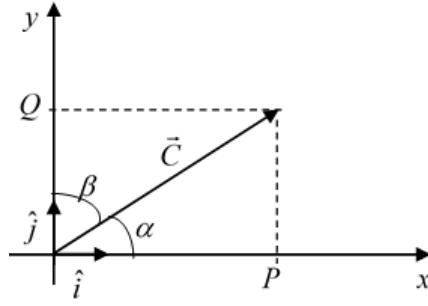


Figura 4.34: Proyección de un vector en una base cartesiana.

$$\vec{C} \cdot \hat{i} = C \cos(\alpha) = \overline{OP} = C_x, \quad (4.58)$$

$$\vec{C} \cdot \hat{j} = C \cos(\beta) = \overline{OQ} = C_y. \quad (4.59)$$

Si tuviéramos un vector  $\vec{D}$  en el segundo cuadrante (ver figura 4.35) tendríamos que

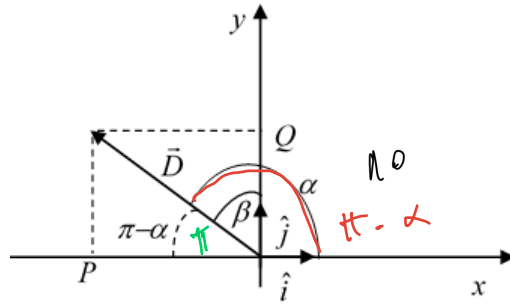


Figura 4.35: Proyección de un vector en el segundo cuadrante en una base cartesiana.

$$\vec{D} \cdot \hat{i} = D \cos(\alpha) = -D \cos(\pi - \alpha) = -\overline{OP} = D_x, \quad (4.60)$$

$$\vec{D} \cdot \hat{j} = D \cos(\beta) = \overline{OQ} = D_y. \quad (4.61)$$

Si repetimos el cálculo con vectores en cualquiera de los cuadrantes veríamos que el resultado sería el mismo, es decir que para todo vector  $\vec{A}$  en el plano podemos encontrar sus componentes en un sistema de coordenadas cartesiano ortogonal haciendo el producto escalar de este vector por cada uno de los versores que definen la base.

$$\vec{A} \cdot \hat{i} = A_x \quad ; \quad \vec{A} \cdot \hat{j} = A_y. \quad (4.62)$$

**Producto escalar en coordenadas cartesianas**

Dados dos vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ , expresados en sus componentes cartesianas, el producto escalar entre ambos resulta

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x \hat{i} + A_y \hat{j}) \cdot (B_x \hat{i} + B_y \hat{j}), \quad (4.63)$$

aplicando la propiedad distributiva (4.48) y de multiplicación por escalares, (4.50), tenemos

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x (\hat{i} \cdot \hat{i}) + A_x B_y (\hat{i} \cdot \hat{j}) + A_y B_x (\hat{j} \cdot \hat{i}) + A_y B_y (\hat{j} \cdot \hat{j}), \quad (4.64)$$

teniendo en cuenta que  $\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = 1$  e  $\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{i} = 0$ , resulta

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y. \quad (4.65)$$

Este resultado también puede obtenerse a partir de la primera definición que dimos para el producto escalar. Sean los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  de la figura 4.36, su producto escalar es

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos(\alpha) = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos(\theta_B - \theta_A), \quad (4.66)$$

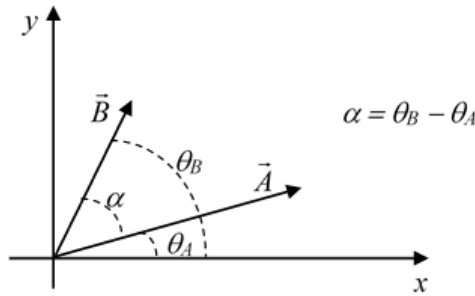


Figura 4.36: Producto escalar de dos vectores.

desarrollando el coseno de la diferencia de los ángulos

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} &= |\vec{A}| |\vec{B}| \cos(\theta_A) \cos(\theta_B) + |\vec{A}| |\vec{B}| \sin(\theta_A) \sin(\theta_B) \\ &= |\vec{A}| \cos(\theta_A) |\vec{B}| \cos(\theta_B) + |\vec{A}| \sin(\theta_A) |\vec{B}| \sin(\theta_B), \end{aligned} \quad (4.67)$$

podemos identificar en esta expresión a las componentes de los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ ,

$$A_x = |\vec{A}| \cos(\theta_A) ; A_y = |\vec{A}| \sin(\theta_A) ; B_x = |\vec{B}| \cos(\theta_B) ; B_y = |\vec{B}| \sin(\theta_B). \quad (4.68)$$

Reemplazando estas expresiones en (4.67) obtenemos el producto escalar de dos vectores en términos de sus coordenadas cartesianas,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y. \quad (4.69)$$

Con esta forma de calcular el producto escalar resulta fácil verificar que el producto escalar de un vector por sí mismo es igual a su módulo al cuadrado

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = (A_x \hat{i} + A_y \hat{j}) \cdot (A_x \hat{i} + A_y \hat{j}) = A_x^2 + A_y^2 = |\vec{A}|^2. \quad (4.70)$$

También es posible calcular el ángulo entre dos vectores en términos de sus componentes cartesianas a partir de la ecuación (4.53),

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}| |\vec{B}|} = \hat{A} \cdot \hat{B}, \quad (4.71)$$

obtenemos

$$\cos(\alpha) = \frac{A_x B_x + A_y B_y}{\sqrt{(A_x^2 + A_y^2)(B_x^2 + B_y^2)}}. \quad (4.72)$$

### Ejemplos:

Aplicemos los conceptos arriba vertidos en algunos ejemplos particulares. Supongamos que tenemos los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ , que expresados en el sistema de coordenadas cartesiano de la figura 4.37 son  $\vec{A} = 8\hat{i} + 6\hat{j}$  y  $\vec{B} = -6\hat{i} + 4\hat{j}$ .

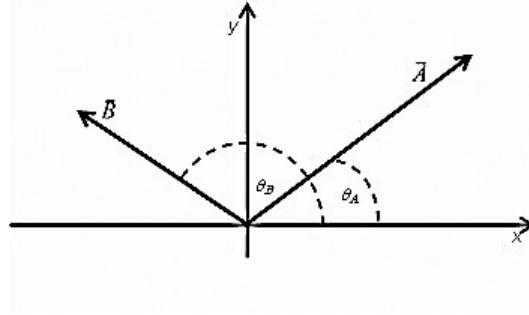


Figura 4.37

- Calculemos el módulo de los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ . De acuerdo a la ecuación (4.70) tenemos

$$\begin{aligned} |\vec{A}| &= \sqrt{8^2 + 6^2} = 10; \\ |\vec{B}| &= \sqrt{(-6)^2 + 4^2} = \sqrt{52} = 7,211. \end{aligned} \quad (4.73)$$

- Calculemos dirección y sentido de los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ . La dirección y el sentido de estos vectores pueden determinarse dando el valor del ángulo  $\theta$  que forman con el eje  $x$  según la ecuación (4.34). Como  $\vec{A}$  está en el primer cuadrante, tenemos que  $\theta_A = \arctan(A_y/A_x)$ , mientras que, como  $\vec{B}$  está en el segundo cuadrante será  $\theta_B = \arctan(B_y/B_x) + \pi$ . Por lo tanto

$$\begin{aligned}\theta_A &= \arctan\left(\frac{6}{8}\right) = \arctan\left(\frac{3}{4}\right) \simeq 0,643\text{rad} \simeq 36,87^\circ \\ \theta_B &= \arctan\left(\frac{4}{-6}\right) + \pi = -\arctan\left(\frac{2}{3}\right) + \pi \simeq (-0,588 + \pi)\text{rad} = 2,55\text{rad} \simeq 146,31^\circ.\end{aligned}\quad (4.74)$$

- Determinemos los versores en las direcciones de los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ . Aplicando la ecuación (4.26) obtenemos

$$\begin{aligned}\hat{A} &= \frac{1}{|\vec{A}|} \vec{A} = \frac{1}{10} (8\hat{i} + 6\hat{j}) = 0,8\hat{i} + 0,6\hat{j}; \\ \hat{B} &= \frac{1}{|\vec{B}|} \vec{B} = \frac{1}{\sqrt{52}} (-6\hat{i} + 4\hat{j}) \simeq -0,832\hat{i} + 0,555\hat{j}.\end{aligned}\quad (4.75)$$

- Generemos un vector  $\vec{C}$  que tenga la misma dirección y sentido que el vector  $\vec{A}$  pero de módulo 12 y otro vector  $\vec{D}$  que tenga la misma dirección y sentido opuesto al vector  $\vec{B}$  y que sea de módulo 2. Sabemos que si conocemos un versor en una determinada dirección, a partir de él podemos generar todos los vectores en dicha dirección. Para ello debemos multiplicar el versor por un número cuyo valor absoluto sea igual al módulo del vector que queremos generar y cuyo signo sea positivo si queremos que el vector tenga el mismo sentido que el versor o negativo si queremos que tenga el sentido opuesto. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\vec{C} &= 12\hat{A} = 9,6\hat{i} + 7,2\hat{j}; \\ \vec{D} &= -2\hat{B} = 1,664\hat{i} + -1,110\hat{j}.\end{aligned}\quad (4.76)$$

- Calculemos el ángulo que forman los vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  entre sí. De acuerdo a la ecuación (4.71)

$$\begin{aligned}\cos(\theta_{AB}) &= \hat{A} \cdot \hat{B} = (0,8\hat{i} + 0,6\hat{j}) \cdot (-0,832\hat{i} + 0,555\hat{j}) / \sqrt{52} = -\frac{6}{5\sqrt{13}} \simeq -0,333 \Rightarrow \\ \theta_{AB} &\simeq 1,91\text{rad} \simeq 109,44^\circ,\end{aligned}\quad (4.77)$$

*este es el versor*

que coincide con el valor que obtenemos si calculamos  $\theta_{AB} = \theta_B - \theta_A$ .

## SECCIÓN 4.4

# Descripción vectorial del movimiento en el plano

### 4.4.1 Vector posición

Vamos a identificar con un vector el punto del plano donde se encuentra ubicado el cuerpo cuyo movimiento estamos describiendo, y a este vector lo denominaremos *vector posición* y lo denotaremos generalmente con la letra  $\vec{r}$  (ver figura 4.38),

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} ; r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (4.78)$$

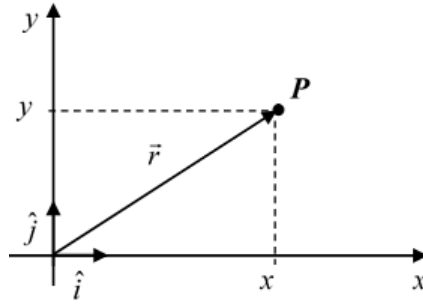


Figura 4.38: El vector posición que señala la posición del cuerpo.

#### 4.4.2 Función vectorial de movimiento

Hemos visto que la posición de un punto en el plano puede ser dada por un vector denominado *vector posición del punto*, determinado por sus coordenadas cartesianas. También vimos en la sección 4.2 que para describir el movimiento de un cuerpo sobre el plano necesitamos dos funciones de movimiento,  $x(t)$  e  $y(t)$ . Ya que su vector posición variará con el tiempo y en cada instante tendremos un vector posición determinado por las coordenadas  $x$  e  $y$  del cuerpo en ese instante, tenemos entonces un vector que es función del tiempo,  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ . Si describimos el movimiento en una base ortonormal correspondiente a un sistema de coordenadas cartesianas ortogonal tendremos,

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}. \quad (4.79)$$

Por lo tanto tenemos una forma de referir el movimiento de un cuerpo en el plano por medio de una *función vectorial de movimiento*  $\vec{r}(t)$ , como se muestra en la figura 4.39.

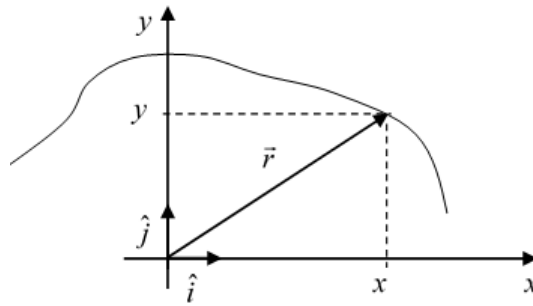


Figura 4.39: Trayectoria de un móvil y el vector posición en un instante dado.

#### 4.4.3 Vector desplazamiento

Dados los vectores posición  $\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1)$  y  $\vec{r}_2 = \vec{r}(t_2)$ , para los instantes  $t_1 < t_2$  respectivamente, definimos el *vector desplazamiento* como el vector  $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ . Como vemos en la figura 4.40, este vector comienza

en la posición sobre la trayectoria que ocupaba el cuerpo en el tiempo  $t_1$  y finaliza en la posición sobre la trayectoria donde estaba el cuerpo para el instante  $t_2$ ; en resumen comienza en el extremo del vector posición  $\vec{r}_1$  y termina en el extremo del vector posición  $\vec{r}_2$ . El módulo del vector desplazamiento es igual a la longitud del segmento que une ambos puntos sobre la trayectoria.

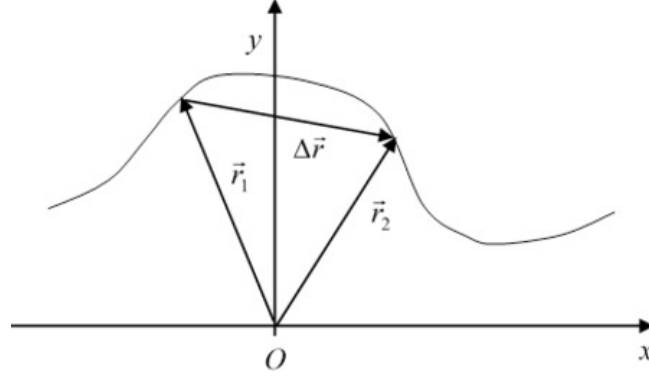


Figura 4.40: Vectores posición en dos instantes y su correspondiente vector desplazamiento en  $[t_1, t_2]$ .

#### 4.4.4 Vector velocidad media

La función vectorial de movimiento define la posición del cuerpo en todo instante, pero podemos complementar esta información dando, además, la dirección, sentido y rapidez del movimiento. Si bien, cuando analizamos el movimiento de cuerpos en una dimensión concluimos que la velocidad media no era un parámetro que permitiera caracterizar adecuadamente el movimiento de cuerpos, igualmente exploraremos qué información puede brindarnos en el movimiento bidimensional. Definimos el *vector velocidad media* como:

$$\vec{v}(t_1, t_2) \equiv \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}, \quad (4.80)$$

donde  $\Delta \vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$  y  $\Delta t = t_2 - t_1$ . Como  $t_2 = t_1 + \Delta t$ , podemos escribir

$$\vec{v}(t_1, \Delta t) \equiv \frac{\vec{r}(t_1 + \Delta t) - \vec{r}(t_1)}{\Delta t}. \quad (4.81)$$

Como  $t_1$  es un instante arbitrario, podemos omitir el subíndice y llamar al instante en cuestión simplemente  $t$ ,

$$\vec{v}(t, \Delta t) \equiv \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}. \quad (4.82)$$

Notemos que el vector  $\vec{v}$  es el resultado de multiplicar el vector  $\Delta \vec{r}$  por el escalar  $1/\Delta t$ ; entonces el vector velocidad media tendrá la misma dirección y sentido que el vector  $\Delta \vec{r}$  pues  $\Delta t > 0$ . Además su módulo será  $|\vec{v}| = |\Delta \vec{r}|/\Delta t$ .

A continuación analizaremos el comportamiento del vector velocidad media para algunas funciones de movimiento particulares:

$$1. x(t) = a_1 t + a_0 \quad ; \quad y(t) = b_1 t + b_0.$$

$$\begin{aligned} \Delta \vec{r} &= \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) \\ &= [a_1(t + \Delta t) + a_0] \hat{i} + [b_1(t + \Delta t) + b_0] \hat{j} - (a_1 t + a_0) \hat{i} - (b_1 t + b_0) \hat{j} \\ &= (a_1 t + a_1 \Delta t + a_0 - a_1 t - a_0) \hat{i} + (b_1 t + b_1 \Delta t + b_0 - b_1 t - b_0) \hat{j} \\ &= a_1 \Delta t \hat{i} + b_1 \Delta t \hat{j}, \end{aligned} \quad (4.83)$$

por lo tanto la velocidad media será

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = a_1 \hat{i} + b_1 \hat{j}, \quad (4.84)$$

siendo en este caso  $\vec{v}$  un vector constante. Analicemos cómo es la trayectoria del cuerpo cuando sus funciones de movimiento son las dadas en este ejemplo,  $x(t) = a_1 t + a_0$ ;  $y(t) = b_1 t + b_0$ :

$$t(x) = \frac{x - a_0}{a_1} \Rightarrow y(x) = \frac{b_1}{a_1} x + \frac{a_1 b_0 - a_0 b_1}{a_1}. \quad (4.85)$$

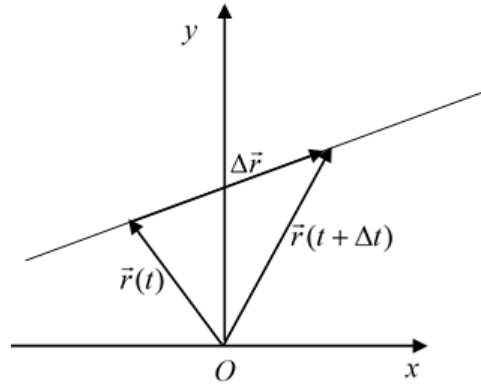


Figura 4.41: Movimiento rectilíneo uniforme, MRU, en el plano.

Como vemos en la figura 4.41 la trayectoria es una línea recta y en este caso, sin importar cuál sea el valor de  $t$  y  $\Delta t$ , el cálculo del vector velocidad media nos dará el mismo resultado. Este movimiento es el que se denomina *Movimiento Rectilíneo Uniforme* (MRU).

$$2. x(t) = a_2 t^2 \quad ; \quad y(t) = b_2 t^2 + b_0.$$

$$\begin{aligned} \Delta \vec{r} &= \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) \\ &= a_2(t + \Delta t)^2 \hat{i} + [b_2(t + \Delta t)^2 + b_0] \hat{j} - a_2 t^2 \hat{i} - (b_2 t^2 + b_0) \hat{j} \\ &= a_2(t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2) \hat{i} + [b_2(t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2) + b_0] \hat{j} - a_2 t^2 \hat{i} - (b_2 t^2 + b_0) \hat{j} \\ &= (a_2 2t\Delta t + a_2 \Delta t^2) \hat{i} + (b_2 2t\Delta t + b_2 \Delta t^2) \hat{j} \\ &= \Delta t(2t + \Delta t)(a_2 \hat{i} + b_2 \hat{j}). \end{aligned} \quad (4.86)$$

Entonces la velocidad media en este caso resulta



$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = (2t + \Delta t) (a_2 \hat{i} + b_2 \hat{j}) . \quad (4.87)$$

Vemos que en este ejemplo el vector  $\vec{v}$  es el vector constante  $(a_2 \hat{i} + b_2 \hat{j})$  multiplicado por el escalar  $(2t + \Delta t)$ , es decir que es un vector que siempre está sobre la misma dirección y que sólo modifica su módulo y sentido dependiendo de los valores de  $t$  y  $\Delta t$ . Analicemos cuál es la trayectoria del cuerpo para estas funciones de movimiento suponiendo que  $a_2, b_0 > 0$  y  $b_2 < 0$ ; entonces

$$t(x) = \pm \sqrt{\frac{x}{a_2}} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{b_2}{a_2} x + b_0 \quad ; \quad x \geq 0. \quad (4.88)$$

El gráfico de la trayectoria (figura 4.42) muestra que en este ejemplo el movimiento del cuerpo también es rectilíneo, sin embargo el vector  $\vec{v}$  tiene una dirección constante pero su módulo y sentido dependen de  $t$  y  $\Delta t$ .

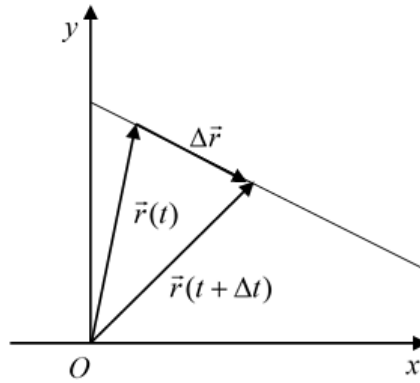


Figura 4.42: Vectores posición y vector desplazamiento para el ejemplo 2.

$$3. \quad x(t) = a_1 t \quad ; \quad y(t) = b_2 t^2 \quad ; \quad a_1, b_2 > 0$$

$$\begin{aligned} \Delta \vec{r} &= \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) \\ &= a_1 (t + \Delta t) \hat{i} + b_2 (t + \Delta t)^2 \hat{j} - a_1 t \hat{i} - b_2 t^2 \hat{j} \\ &= a_1 \Delta t \hat{i} + b_2 (2t \Delta t + \Delta t^2) \hat{j} \\ &= \Delta t [a_1 \hat{i} + b_2 (2t + \Delta t) \hat{j}] . \end{aligned} \quad (4.89)$$

Entonces, para este ejemplo, el vector velocidad media resulta

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = a_1 \hat{i} + b_2 (2t + \Delta t) \hat{j}. \quad (4.90)$$

Para realizar un mejor análisis del vector velocidad media para este ejemplo veremos cuál es la trayectoria de un cuerpo con estas funciones de movimiento.

$$t(x) = \frac{x}{a_1} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{b_2}{a_1^2} x^2 \quad (4.91)$$

Como se observa en la figura 4.43, para este ejemplo el vector  $\Delta \vec{r}$ , y por lo tanto el vector velocidad media, pueden modificar su dirección y módulo en un  $t$  fijo dependiendo del valor elegido para  $\Delta t$ .

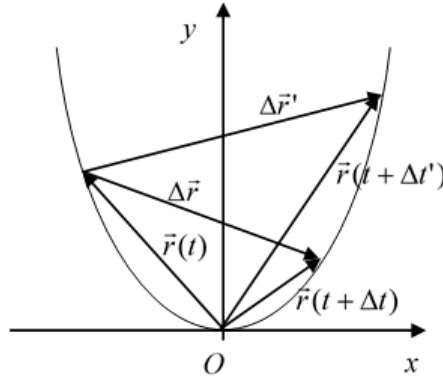


Figura 4.43: Vectores posición y desplazamiento para varios intervalos de tiempo para el ejemplo 3.

En los ejemplos anteriores hemos visto que el vector velocidad media, salvo en algunos casos particulares, modifica su módulo, dirección y sentido dependiendo del valor elegido para  $\Delta t$ . Esto indica que el vector  $\vec{v}$  no es un buen parámetro para la descripción del movimiento del cuerpo. Por tanto necesitamos, de manera similar a lo realizado cuando analizamos movimientos unidimensionales, definir una magnitud que sólo dependa del punto sobre la trayectoria donde se encuentra el cuerpo o del instante de que se trate. Para ello definiremos lo que llamamos *vector velocidad instantánea* o simplemente, *vector velocidad*.

#### 4.4.5 Vector velocidad

Definimos el *vector velocidad* como el límite del vector velocidad media cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}. \quad (4.92)$$

En general, si tenemos un vector  $\vec{A}$  que depende de una variable  $z$ , es decir  $\vec{A} = \vec{A}(z)$ , se define la derivada del vector  $\vec{A}(z)$  con respecto a  $z$  como

$$\frac{d\vec{A}(z)}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\vec{A}(z + \Delta z) - \vec{A}(z)}{\Delta z}, \quad (4.93)$$

entonces la ecuación (4.92) nos dice que el vector velocidad es la derivada del vector posición respecto al tiempo,

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}. \quad (4.94)$$

Analicemos cómo podemos hacer esta derivada de un vector, pues hasta ahora sólo sabemos derivar funciones escalares. Si el vector posición está dado en términos de sus componentes cartesianas como

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}, \quad (4.95)$$

derivando respecto al tiempo la ecuación (4.95), y utilizando las reglas de derivada de una suma y derivada de un producto, tenemos

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d(x(t)\hat{i})}{dt} + \frac{d(y(t)\hat{j})}{dt} \\ &= \frac{dx(t)}{dt}\hat{i} + x(t)\frac{d\hat{i}}{dt} + \frac{dy(t)}{dt}\hat{j} + y(t)\frac{d\hat{j}}{dt},\end{aligned}\quad (4.96)$$

pero como los versores  $\hat{i}$  y  $\hat{j}$  son constantes, su derivada es nula, por lo que la ecuación (4.96) se reduce a

$$\vec{v}(t) = \frac{dx(t)}{dt}\hat{i} + \frac{dy(t)}{dt}\hat{j} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j}. \quad (4.97)$$

Notar que esta expresión es válida porque los versores base son constantes, si este no fuese el caso habría que incluir en el cálculo términos provenientes de las derivadas de los versores respecto al tiempo. También observemos que, al igual que el vector posición, el vector velocidad es una función vectorial del tiempo.

Calculemos el vector velocidad para los ejemplos simples para los cuales calculamos el vector velocidad media.

$$1. \quad x(t) = a_1 t + a_0 \quad ; \quad y(t) = b_1 t + b_0.$$

Para este ejemplo el vector posición es

$$\vec{r}(t) = (a_1 t + a_0)\hat{i} + (b_1 t + b_0)\hat{j}, \quad (4.98)$$

obtenemos ahora el vector velocidad derivando el vector posición

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = a_1\hat{i} + b_1\hat{j}. \quad (4.99)$$

Para estas funciones de movimiento el vector velocidad es un vector constante y resulta igual al vector velocidad media. Este es el único caso en que ocurre y es debido a que como la velocidad es un vector constante corresponde a un movimiento rectilíneo uniforme.

$$2. \quad x(t) = a_2 t^2 \quad ; \quad y(t) = b_2 t^2 + b_0.$$

En este caso, los vectores posición y velocidad son

$$\vec{r}(t) = a_2 t^2 \hat{i} + (b_2 t^2 + b_0) \hat{j} ; \quad \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = 2t(a_2 \hat{i} + b_2 \hat{j}). \quad (4.100)$$

El vector velocidad es un vector constante multiplicado por un escalar ( $2t$ ) que depende del tiempo. Por lo tanto este vector, dependiendo del valor de  $t$ , puede modificar su módulo y sentido pero no su dirección. Si recordamos que la trayectoria que corresponde a estas funciones de movimiento es  $y(x) = (b_2/a_2)x + b_0$  ( $x \geq 0$ ), entonces sabemos que corresponde a un movimiento rectilíneo.

$$3. \quad x(t) = a_1 t \quad ; \quad y(t) = b_2 t^2 \quad ; \quad a_1, b_2 > 0.$$

Para un cuerpo con estas funciones de movimiento, los vectores posición y velocidad son:

$$\vec{r}(t) = a_1 t \hat{i} + b_2 t^2 \hat{j} ; \vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = a_1 \hat{i} + 2b_2 t \hat{j}, \quad (4.101)$$

cambiando en este ejemplo tanto el módulo como la dirección de  $\vec{v}$ .

#### 4.4.6 Trayectoria y vector velocidad

Al vector velocidad lo hemos definido como

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{\bar{v}}, \quad (4.102)$$

analicemos, desde un punto de vista geométrico, qué ocurre con el vector  $\vec{\bar{v}}$  cuando hacemos tender  $\Delta t$  a cero.

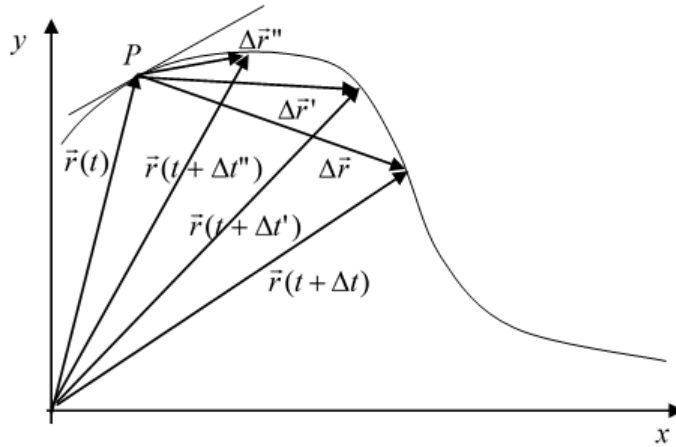


Figura 4.44: Vectores posición y desplazamiento para un instante dado y tres valores del intervalo de tiempo.

El vector  $\vec{\bar{v}}$  tiene la misma dirección del vector  $\Delta \vec{r}$  y por lo tanto ambos están sobre la secante que une los dos puntos de la trayectoria elegidos para el cálculo. A medida que  $\Delta t \rightarrow 0$  se ve que  $\vec{r}(t + \Delta t) \rightarrow \vec{r}(t)$  y la dirección de  $\Delta \vec{r}$  tiende a alinearse con la de la recta tangente a la trayectoria en el punto  $P$ . Como  $\vec{\bar{v}}$  tiene la misma dirección que  $\Delta \vec{r}$  y  $\vec{\bar{v}} \rightarrow \vec{v}$  cuando  $\Delta t \rightarrow 0$  entonces se puede visualizar en la figura 4.44 que **la dirección del vector velocidad en un punto de la trayectoria es la de la recta tangente a la trayectoria en dicho punto**, obteniéndose para el vector velocidad en ese instante el vector mostrado en la figura 4.45.

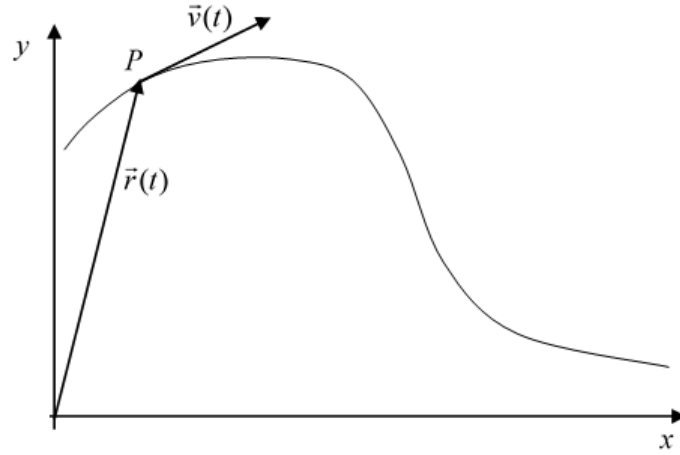


Figura 4.45: Dirección del vector velocidad respecto a la trayectoria.

Veamos esta última afirmación en el ejemplo 3 recientemente analizado. Si las funciones de movimiento son  $x(t) = a_1 t$  e  $y(t) = b_2 t^2$ , la trayectoria que describe el cuerpo es :

$$t(x) = \frac{x}{a_1} \quad \Rightarrow \quad y(x) = \frac{b_2}{a_1^2} x^2, \quad (4.103)$$

o sea una parábola, como se muestra en la figura 4.46. El vector posición es  $\vec{r}(t) = a_1 t \hat{i} + b_2 t^2 \hat{j}$  y el vector velocidad es  $\vec{v}(t) = a_1 \hat{i} + 2b_2 t \hat{j}$ .

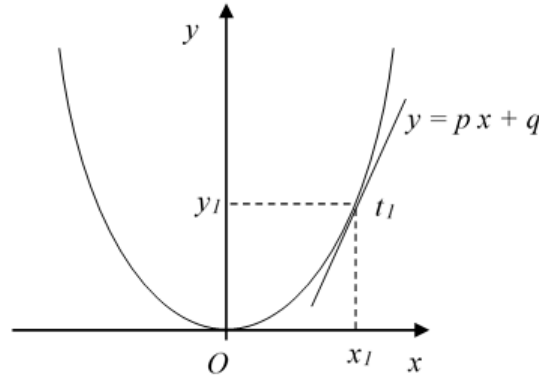


Figura 4.46: Trayectoria y recta tangente en un punto para el ejemplo 3.

Si el móvil se encontraba en la posición  $(x_1, y_1)$  en  $t = t_1$ , entonces  $t_1 = x_1/a_1$  y el vector velocidad evaluado en  $t_1$  es

$$\vec{v}(t_1) = a_1 \hat{i} + 2 \frac{b_2}{a_1} x_1 \hat{j}, \quad (4.104)$$

y la pendiente  $m$  de la recta tangente que contiene al vector velocidad es

$$m = \frac{v_y}{v_x} = 2 \frac{b_2}{a_1^2} x_1. \quad (4.105)$$

Por otro lado, podemos calcular la pendiente  $p$  de la recta tangente a la trayectoria en el punto  $(x_1, y_1)$  mediante la derivada de la función que define la trayectoria

$$p = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_1} = 2 \frac{b_2}{a_1^2} x_1 \quad \therefore \quad p = m. \quad (4.106)$$

Como vemos, la pendiente de la recta que contiene al vector velocidad y la pendiente de la recta tangente a la trayectoria en dicho punto son iguales, por lo tanto se verifica que el vector velocidad es tangente a la trayectoria.

#### 4.4.7 Vector aceleración

Cuando analizamos el caso del movimiento unidimensional habíamos definido la aceleración como la magnitud que da información de cómo cambia la velocidad con el tiempo. En el caso unidimensional teníamos que:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (4.107)$$

Ahora, en el movimiento bidimensional la velocidad es un vector y por lo tanto el cambio de la velocidad en el tiempo deberá dar cuenta del cambio de un vector en el tiempo. Un vector, y de manera particular el vector velocidad, puede cambiar de diversas maneras:

a) cambiando solamente el módulo y/o sentido sin modificar su dirección, como se muestra en la figura 4.47.



Figura 4.47: Vectores velocidad en dos instantes y  $\Delta \vec{v}$  en el caso en que estos no cambian su dirección con el tiempo.

b) cambiando solamente de dirección sin modificar su módulo, como se muestra en la figura 4.48.

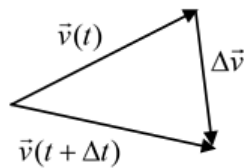


Figura 4.48: Vectores velocidad en dos instantes y  $\Delta \vec{v}$  en el caso en que estos no cambian su módulo con el tiempo.

c) modificando módulo y dirección simultáneamente, como se muestra en la figura 4.49.

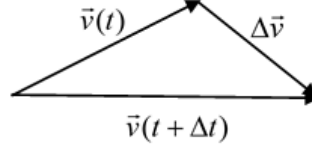


Figura 4.49: Caso más general, donde  $\vec{v}(t)$  cambia módulo, dirección y sentido.

Notar que este análisis es también válido para el vector posición  $\vec{r}(t)$ , pero por razones que quedarán claras más adelante, resulta particularmente importante tenerlo en cuenta al estudiar la aceleración.

Definimos al vector aceleración como

$$\vec{a}(t) \equiv \frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}, \quad (4.108)$$

Lo que nos dice que el vector aceleración tiene la dirección y sentido del vector  $\Delta \vec{v}$  en el límite  $\Delta t \rightarrow 0$ . Si  $\vec{v}(t)$  es dado en coordenadas cartesianas, tenemos

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v_x \hat{i} + v_y \hat{j}) = \frac{dv_x}{dt} \hat{i} + \frac{dv_y}{dt} \hat{j} \quad (4.109)$$

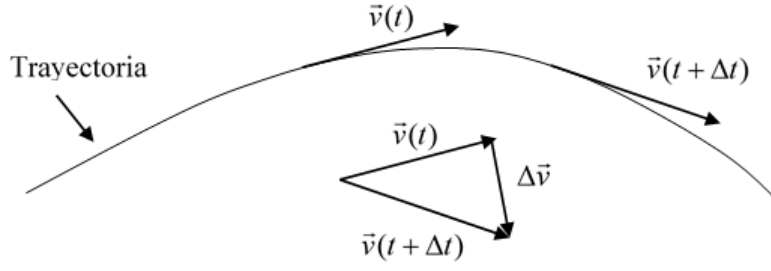
que nos permite identificar las componentes cartesianas del vector aceleración

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \quad ; \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad (4.110)$$

como  $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$  podemos escribir

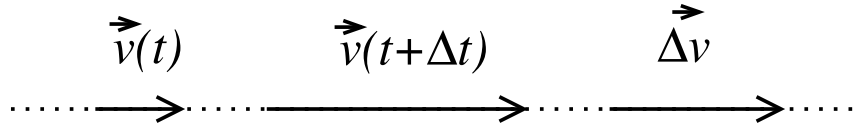
$$\vec{a} = \frac{d}{dt} \left( \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2 x}{dt^2} \hat{i} + \frac{d^2 y}{dt^2} \hat{j}. \quad (4.111)$$

Sabemos que el vector velocidad es tangente a cualquier punto sobre una trayectoria, y nos preguntamos qué podemos decir respecto al vector aceleración. En particular, si elegimos dos puntos en los instantes  $t$  y  $t + \Delta t$  sobre una trayectoria, por ejemplo la mostrada en la figura 4.50, debemos analizar la evolución de  $\Delta \vec{v}/\Delta t$  cuando  $\Delta t \rightarrow 0$  para comprender el comportamiento del vector aceleración.

Figura 4.50: Evolución de  $\vec{v}(t)$  sobre la trayectoria.

Para una mejor comprensión de este tema analicemos primero algunos casos simples:

a) Sea un móvil que se desplaza en una trayectoria lineal, por lo tanto el vector velocidad sólo puede cambiar de módulo y/o sentido pero no su dirección. El vector velocidad en los instantes  $t$  y  $t + \Delta t$  es como se muestra en la figura 4.51.

Figura 4.51:  $\vec{v}$  para un móvil en una trayectoria rectilínea en dos instantes y el correspondiente  $\Delta \vec{v}$ .

Definimos el versor  $\hat{v} = \vec{v}(t)/|\vec{v}(t)|$ , el cual es un versor constante que no depende del tiempo. Entonces podemos escribir

$$\vec{v}(t) = v(t) \hat{v} \quad ; \quad \vec{v}(t + \Delta t) = v(t + \Delta t) \hat{v}, \quad (4.112)$$

donde  $v(t + \Delta t)$  es la componente de  $\vec{v}(t + \Delta t)$  en la dirección de  $\hat{v}$ ,  $v(t + \Delta t) = \vec{v}(t + \Delta t) \cdot \hat{v}$ , la cual será positiva si  $\vec{v}(t)$  y  $\vec{v}(t + \Delta t)$  tienen igual sentido y negativa si tienen sentido opuesto. Así obtenemos en el caso que estamos analizando,

$$\Delta \vec{v} = v(t + \Delta t) \hat{v} - v(t) \hat{v} = (v(t + \Delta t) - v(t)) \hat{v} = \Delta v \hat{v}, \quad (4.113)$$

entonces

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} \hat{v}, \quad (4.114)$$

como  $\hat{v}$  no depende del tiempo resulta

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \hat{v}. \quad (4.115)$$

Vemos que el vector aceleración en un movimiento rectilíneo tiene la misma dirección que la velocidad, es decir que  $\vec{a} \parallel \vec{v}$ . Escribiendo  $\vec{a}(t) = a(t) \hat{v}$ , la componente  $a(t)$  coincide con la aceleración



de un movimiento unidimensional. A este vector aceleración, paralelo al vector velocidad, lo llamaremos *vector aceleración tangencial* y lo denotaremos como  $\vec{a}_{\parallel}$  ó  $\vec{a}_t$ , pues su dirección es tangente a la trayectoria,

$$\vec{a}_t = \frac{dv}{dt} \hat{v}. \quad (4.116)$$

Por lo tanto la aceleración tangencial es la responsable de modificar el módulo del vector velocidad sin afectar la dirección del mismo. Dicho módulo aumentará (el cuerpo se acelera) si  $\frac{dv}{dt} > 0$  y  $\vec{a}$  y  $\vec{v}$  tienen el mismo sentido; y disminuirá (el cuerpo se frena) si  $\frac{dv}{dt} < 0$ , en cuyo caso  $\vec{a}$  y  $\vec{v}$  tienen sentidos opuestos.

Veamos un ejemplo:

Analicemos nuevamente el movimiento rectilíneo estudiado en el ejemplo 2 de la sección 4.4.5, en el cual las funciones de movimiento son  $x(t) = a_2 t^2$  e  $y(t) = b_2 t^2 + b_0$ . Asumiendo que  $a_2, b_0 > 0$  y  $b_2 < 0$ , en la ecuación 4.88 se muestra la expresión de la trayectoria y la figura 4.42 su gráfica cualitativa. Entonces, si estas son las funciones de movimiento del móvil, los vectores posición  $\vec{r}(t)$ , velocidad  $\vec{v}(t)$  y aceleración  $\vec{a}(t)$  son:

$$\vec{r} = a_2 t^2 \hat{i} + (b_2 t^2 + b_0) \hat{j}, \quad (4.117)$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 2a_2 t \hat{i} + 2b_2 t \hat{j} = 2t(a_2 \hat{i} + b_2 \hat{j}), \quad (4.118)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 2(a_2 \hat{i} + b_2 \hat{j}). \quad (4.119)$$

Vemos que en este caso particular, en que la trayectoria es rectilínea, las expresiones obtenidas para  $\vec{v}$  y  $\vec{a}$  son ambas proporcionales al mismo vector  $(a_2 \hat{i} + b_2 \hat{j})$ ; por lo tanto  $\vec{a} \parallel \vec{v}$ .

b) Pensemos ahora que tenemos un móvil en una trayectoria no rectilínea, pero que es recorrida de manera tal que el módulo del vector velocidad permanece constante. Nuevamente podemos escribir  $\vec{v}(t) = v(t) \hat{v}(t)$  y  $\vec{v}(t + \Delta t) = v(t + \Delta t) \hat{v}(t + \Delta t)$ . En este caso particular, como el módulo es constante,  $v(t) = v(t + \Delta t) = v$ . Entonces:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v \hat{v}(t))}{dt} = \frac{dv}{dt} \hat{v}(t) + v \frac{d\hat{v}(t)}{dt}, \quad (4.120)$$

como  $v$  no depende del tiempo, su derivada es nula, obteniendo

$$\vec{a} = v \frac{d\hat{v}}{dt}. \quad (4.121)$$

Es importante notar que  $d\hat{v}/dt$  **no** es un versor, esto es, su módulo puede en principio tomar cualquier valor no negativo.

En el caso particular descrito por la ecuación (4.121) no resulta evidente cuál es la dirección del vector aceleración. Intentemos realizar un análisis más minucioso. Sabemos que  $\vec{v} \parallel \hat{v}$  y, en este caso particular,  $\vec{a} \parallel d\hat{v}/dt$ . Además, como  $\hat{v}$  es un versor, se verifica que  $\hat{v} \cdot \hat{v} = 1$ . Si derivamos respecto al

tiempo en ambos lados de esta última igualdad tenemos

$$\frac{d}{dt}(\hat{v} \cdot \hat{v}) = \frac{d}{dt} 1, \quad (4.122)$$

el lado izquierdo de esta ecuación es la derivada de un producto, el derecho la derivada de una constante, por lo que se tiene

$$\frac{d\hat{v}}{dt} \cdot \hat{v} + \hat{v} \cdot \frac{d\hat{v}}{dt} = 0, \quad (4.123)$$

usando la propiedad conmutativa del producto escalar obtenemos

$$\hat{v} \cdot \frac{d\hat{v}}{dt} = 0. \quad (4.124)$$

De la ecuación (4.124) se deduce que  $\hat{v} \perp d\hat{v}/dt$ . Por lo tanto, siempre que un cuerpo se mueva sobre una trayectoria no rectilínea con un vector velocidad de módulo constante, el vector aceleración será perpendicular al vector velocidad,  $\vec{a} \perp \vec{v}$ , como se muestra en la figura 4.52.

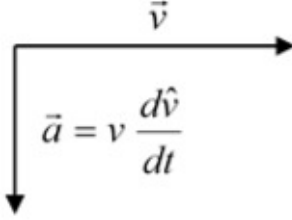


Figura 4.52: Vectores velocidad y aceleración para un cuerpo que se mueve en una trayectoria no rectilínea con  $|\vec{v}|$  constante.

Este vector aceleración que resulta perpendicular al vector velocidad lo llamaremos *vector aceleración normal*, y lo denotaremos como  $\vec{a}_\perp$  ó  $\vec{a}_n$ . El vector aceleración normal es el responsable de modificar la dirección del vector velocidad sin afectar su módulo,

$$\vec{a}_n = v \frac{d\hat{v}}{dt}, \quad (4.125)$$

lo que nos permite asegurar que **todo movimiento no rectilíneo es acelerado**.

Como vemos en la figura 4.53, el vector aceleración normal apunta siempre hacia la parte cóncava de la trayectoria.

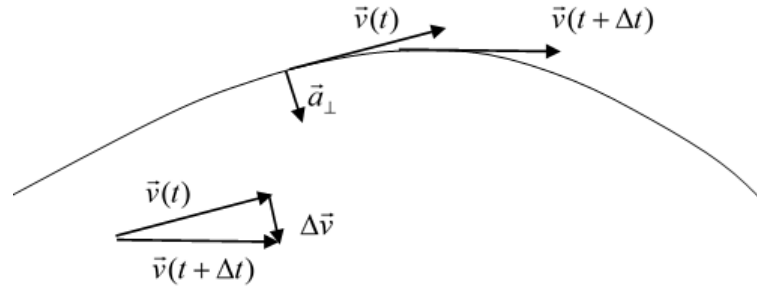


Figura 4.53: Aceleración normal a la trayectoria para un móvil con  $|\vec{v}| = \text{constante}$ .

Analicemos nuevamente la trayectoria circular descrita en el ejemplo f de la sección 4.2. Supongamos que las funciones de movimiento del cuerpo son  $x(t) = R \cos(\omega t)$  e  $y(t) = R \sin(\omega t)$ , donde  $\omega$  es un número positivo. La trayectoria que sigue este cuerpo es una circunferencia de radio  $R$  descrita por la ecuación 4.17. Los vectores posición y velocidad del cuerpo son:

$$\vec{r}(t) = R [\cos(\omega t) \hat{i} + \sin(\omega t) \hat{j}], \quad (4.126)$$

y

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = R\omega [-\sin(\omega t) \hat{i} + \cos(\omega t) \hat{j}]. \quad (4.127)$$

El módulo del vector velocidad es

$$|\vec{v}| = R\omega \sqrt{[-\sin(\omega t)]^2 + [\cos(\omega t)]^2} = R\omega. \quad (4.128)$$

Estas funciones de movimiento describen un cuerpo que realiza un movimiento circular (ver ecuación (4.17)) con un vector velocidad de módulo constante, por lo que debe tener solo aceleración normal. Este movimiento particular se denomina *movimiento circular uniforme* y será analizado en detalle en el capítulo 5, pero corroboremos ahora el carácter de su aceleración.

Para obtener el vector aceleración derivamos con respecto al tiempo la ecuación (4.127),

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -R\omega^2 [\cos(\omega t) \hat{i} + \sin(\omega t) \hat{j}], \quad (4.129)$$

y verificaremos que el vector aceleración es perpendicular al vector velocidad calculando el producto escalar entre ambos vectores,

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{v} &= -R^2 \omega^3 [\cos(\omega t) \hat{i} + \sin(\omega t) \hat{j}] \cdot [-\sin(\omega t) \hat{i} + \cos(\omega t) \hat{j}] \\ &= -R^2 \omega^3 [-\cos(\omega t) \sin(\omega t) + \sin(\omega t) \cos(\omega t)] \\ &= 0, \end{aligned} \quad (4.130)$$

tal como esperábamos al tratarse de un movimiento con  $v$  constante, comprobamos que  $\vec{a} \perp \vec{v}$ .

Analicemos ahora qué característica tiene el vector aceleración en el caso más general, en que el vector velocidad modifica tanto su módulo,  $v = |\vec{v}|$ , como su dirección,  $\hat{v}$ .

Por ejemplo, en la trayectoria de la figura 4.54 en el instante  $t$  el vector velocidad es  $\vec{v}(t)$  y en el instante  $t + \Delta t$  es  $\vec{v}(t + \Delta t)$ . Como para calcular el vector aceleración necesitamos  $\Delta\vec{v} = \vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)$  podemos graficar  $\vec{v}(t)$  y  $\vec{v}(t + \Delta t)$  como se muestra en la figura 4.55

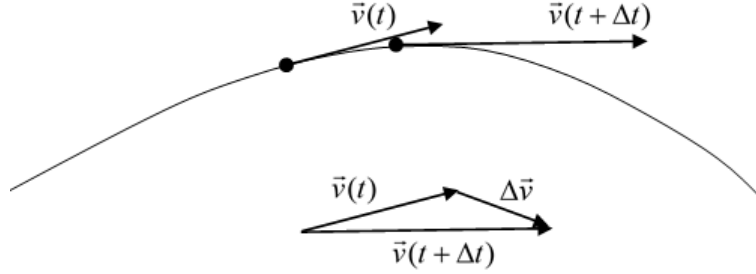


Figura 4.54: Trayectoria y vectores velocidad en el caso más general en el que tanto módulo como dirección y sentido de  $\vec{v}$  cambian en el tiempo.

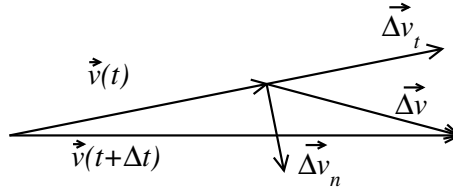


Figura 4.55: Descomposición de  $\Delta\vec{v}(t)$  en direcciones tangencial y normal a  $\vec{v}(t)$ .

Podemos descomponer al vector  $\Delta\vec{v}$  en dos vectores; uno en la misma dirección del vector  $\vec{v}$ , que denominaremos  $\Delta\vec{v}_t$  (componente tangencial, o sea está en la dirección tangente a la trayectoria), y otro que denominaremos componente normal ( $\Delta\vec{v}_n$ ) cuya dirección es perpendicular a  $\vec{v}$ .

$$\Delta\vec{v} = \Delta\vec{v}_t + \Delta\vec{v}_n. \quad (4.131)$$

Por lo tanto, si calculamos la aceleración tenemos

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(\Delta\vec{v}_t + \Delta\vec{v}_n)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}_t}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}_n}{\Delta t} \\ &= \vec{a}_t + \vec{a}_n, \end{aligned} \quad (4.132)$$

donde

$$\vec{a}_t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}_t}{\Delta t} \quad ; \quad \vec{a}_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}_n}{\Delta t}. \quad (4.133)$$

La ecuación (4.132) nos dice que al vector aceleración lo podemos escribir como la suma de dos vectores

perpendiculares entre sí definidos en la ecuación (4.133). Uno de ellos denominado  $\vec{a}_t$  (*aceleración tangencial*) que tiene la misma dirección que  $\vec{v}$ , y por lo tanto es el responsable de modificar el módulo y sentido del vector velocidad, y la otra componente, denominada  $\vec{a}_n$  (*aceleración normal*), perpendicular a  $\vec{v}$  y responsable de modificar la dirección del vector velocidad.

Para determinar las componentes tangenciales y normales a la trayectoria del vector aceleración debemos escribir al vector velocidad como el producto de su módulo por un versor que define su dirección,  $\vec{v} = v(t) \hat{v}(t)$ . Para calcular la aceleración derivamos el vector velocidad expresado de esta manera,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}[v(t) \hat{v}(t)] = \frac{dv}{dt} \hat{v} + v \frac{d\hat{v}}{dt}. \quad (4.134)$$

Como vemos en la ecuación (4.134) el vector aceleración está expresado como la suma de dos vectores, uno en la dirección de  $\vec{v}$ , que por lo tanto es la componente denominada aceleración tangencial. El segundo término de la suma es un vector en la dirección de  $d\hat{v}/dt$ , que hemos visto tiene la dirección perpendicular a  $\vec{v}$ , y que corresponde a la componente normal a la trayectoria del vector aceleración,

$$\vec{a}_t = \vec{a}_{\parallel} = \frac{dv}{dt} \hat{v} \quad ; \quad \vec{a}_n = \vec{a}_{\perp} = v \frac{d\hat{v}}{dt}. \quad (4.135)$$

Resumiendo; el vector aceleración **siempre** puede descomponerse como la suma de dos vectores perpendiculares entre sí y cuyos efectos sobre el vector velocidad son bien diferenciados. Uno de ellos en la dirección del vector velocidad, denominado *vector aceleración tangencial*,  $\vec{a}_t$ , que es responsable de modificar el módulo y sentido del vector velocidad. El otro, en la dirección perpendicular al vector velocidad, denominado *vector aceleración normal*,  $\vec{a}_n$ , es el responsable de modificar la dirección del vector velocidad.

Analicemos ahora cómo calcular las componentes tangencial y normal de la aceleración cuando al vector aceleración lo tenemos expresado en términos de sus componentes cartesianas. Como vemos en la figura 4.56 lo que deseamos es encontrar las componentes del vector aceleración en las direcciones tangente a la trayectoria y perpendicular a la misma.

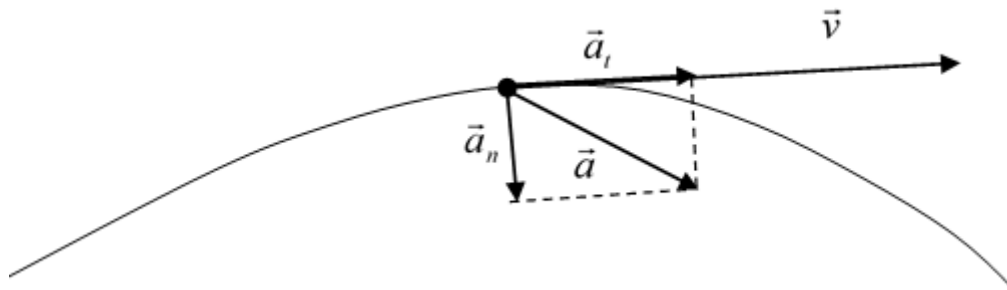


Figura 4.56: Descomposición de  $\vec{a}$  como  $\vec{a}_n + \vec{a}_t$ .

Para calcular la componente tangencial a la trayectoria del vector aceleración, utilizamos el versor velocidad,  $\hat{v} = \vec{v}/|\vec{v}|$  y de acuerdo a la ecuación (4.57), tenemos que

$$a_t(t) = \vec{a}(t) \cdot \hat{v}(t), \quad (4.136)$$

y escribimos el vector aceleración tangencial como

$$\vec{a}_t = a_t \hat{v} = (\vec{a} \cdot \hat{v}) \hat{v} = \left( \vec{a} \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \right) \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \left( \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \right) \vec{v}, \quad (4.137)$$

que en coordenadas cartesianas se reduce a

$$\vec{a}_t = \left( \frac{a_x v_x + a_y v_y}{v_x^2 + v_y^2} \right) (v_x \hat{i} + v_y \hat{j}). \quad (4.138)$$

Una vez conocidos los vectores aceleración total y tangencial, podemos escribir el vector aceleración normal como

$$\vec{a}_n = \vec{a} - \vec{a}_t. \quad (4.139)$$

Apliquemos lo visto anteriormente a un ejemplo particular. Supongamos que deseamos calcular el vector aceleración tangencial y normal, en  $t = 1$  s, de un móvil cuyo vector posición es

$$\vec{r}(t) = \left( 2\frac{m}{s^2}t^2 - 2m \right) \hat{i} + \left( -1\frac{m}{s^3}t^3 + 2\frac{m}{s}t \right) \hat{j}, \quad (4.140)$$

entonces, los vectores velocidad y aceleración serán

$$\vec{v}(t) = 4\frac{m}{s^2}t \hat{i} + \left( -3\frac{m}{s^3}t^2 + 2\frac{m}{s} \right) \hat{j} \quad ; \quad \vec{a}(t) = 4\frac{m}{s^2} \hat{i} - 6\frac{m}{s^3}t \hat{j}. \quad (4.141)$$

Evaluando los vectores velocidad y aceleración en  $t = 1$  s obtenemos

$$\vec{v}(1s) = (4\hat{i} - 1\hat{j}) \frac{m}{s} \quad ; \quad \vec{a}(1s) = (4\hat{i} - 6\hat{j}) \frac{m}{s^2}. \quad (4.142)$$

Utilizando la expresión de la ecuación (4.138) obtenemos que el vector aceleración tangencial es

$$\vec{a}_t(1s) = \frac{22}{17} (4\hat{i} - \hat{j}) \frac{m}{s^2}, \quad (4.143)$$

y, de acuerdo a la ecuación (4.139), el vector aceleración normal es

$$\vec{a}_n(1s) = \vec{a}(1s) - \vec{a}_t(1s) = -\frac{20}{17} (\hat{i} + 4\hat{j}) \frac{m}{s^2}. \quad (4.144)$$

La trayectoria de este móvil y los vectores  $\vec{a}$ ,  $\vec{a}_t$  y  $\vec{a}_n$  calculados en  $t = 1$  s pueden verse en la figura 4.57.

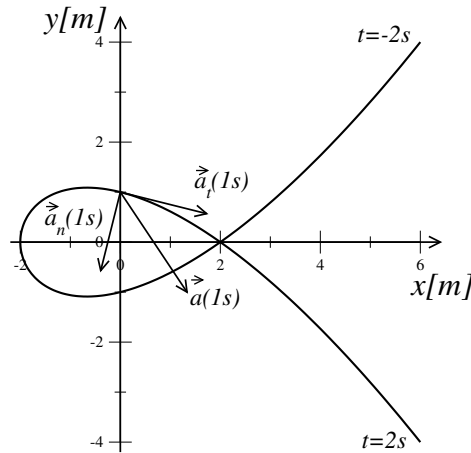


Figura 4.57: Trayectoria del móvil con  $\vec{r}(t)$  dado por la ecuación (4.140) para  $t \in [-2s, 2s]$ , mostrando  $\vec{a}$ ,  $\vec{a}_t$  y  $\vec{a}_n$  en  $t = 1s$ .

#### 4.4.8 Determinación del vector posición a partir del vector aceleración

Como vimos en el capítulo 3 al analizar el movimiento unidimensional, en general no conocemos la función de movimiento del cuerpo, sino que tenemos que determinarla a partir de la aceleración del mismo, que es una magnitud usualmente accesible experimentalmente. En el caso de la descripción del movimiento de cuerpos que se mueven en el plano la situación es totalmente similar, simplemente debemos reemplazar la relación (3.4) por su equivalente utilizando vectores,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (4.145)$$

Por lo tanto, lo primero que podemos determinar es el vector velocidad integrando el vector aceleración con respecto al tiempo.

$$\vec{v}(t) = \int \vec{a} dt. \quad (4.146)$$

Notar que al integrar deberemos incorporar ahora un vector constante  $\vec{C}$  que juega el mismo rol que la constante de integración  $C$  discutida en la sección (3.6), esto es, define cuál es la primitiva particular de  $\vec{a}(t)$  que corresponde al vector velocidad.

Pero, ¿cómo se realiza la integración de un vector? También resulta una simple generalización de integración de funciones **si trabajamos en coordenadas cartesianas**, donde los versores base son constantes. En este caso la ecuación (4.146) se escribe como

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \int \vec{a}(t) dt = \int (a_x(t) \hat{i} + a_y(t) \hat{j}) dt \\ &= \left( \int a_x(t) dt \right) \hat{i} + \left( \int a_y(t) dt \right) \hat{j}, \end{aligned} \quad (4.147)$$

donde cada una de las integrales corresponde a una función y se realizan como aprendimos en el capítulo

3. Los casos en que los versores base dependen de la variable de integración escapan al nivel de este libro, por lo que no serán tratados aquí.

Nuevamente continuamos de manera similar a lo realizado en movimientos unidimensionales para calcular el vector posición a partir del vector velocidad,

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \int \vec{v}(t) dt = \int (v_x(t) \hat{i} + v_y(t) \hat{j}) dt \\ &= \left( \int v_x(t) dt \right) \hat{i} + \left( \int v_y(t) dt \right) \hat{j}.\end{aligned}\quad (4.148)$$

También aquí al integrar debemos incluir un vector constante de integración que nos determina la primitiva particular que corresponde al vector posición sujeto a las condiciones dadas para el móvil en cuestión. Las ecuaciones (4.147) y (4.148) nos dicen entonces que para obtener el vector posición partiendo del vector aceleración, debemos conocer dos vectores constantes de integración. La interpretación física de estos vectores es la misma que en una dimensión, pero como ahora tenemos una dimensión extra, debemos duplicar el número de constantes. Así las condiciones (a) ó (b) que dimos en la sección 3.6 para determinar unívocamente el movimiento se generalizan ahora a alguna de las siguientes condiciones:

- a) Debemos dar como dato el vector velocidad del móvil en un instante dado, digamos  $t_1$ , que nos permitirá calcular el valor del vector constante de integración de la ecuación (4.147), y el vector posición en otro, digamos  $t_2$ , que pueden o no ser el mismo instante, que nos permitirá obtener el segundo vector constante de integración al integrar el vector velocidad en la ecuación (4.148).

ó

- b) Debemos dar la posición del cuerpo en dos instantes **distintos**,  $\vec{r}(t_1)$  y  $\vec{r}(t_2)$ , con  $t_1 \neq t_2$ . Así tendremos dos ecuaciones vectoriales, esto es, 4 ecuaciones algebraicas, que nos permitirán obtener ambos vectores constantes de integración que aparecen al integrar la aceleración y la velocidad respectivamente.

Notar que

- i) **Siempre** necesitamos dar cuatro constantes de integración, dos componentes del vector velocidad y dos del vector posición en instantes dados en (a), o dos componentes del vector posición en un instante y dos en otro en el caso (b), o también, aunque es poco frecuente, podemos dar condiciones (a) para una componente y (b) para la otra, por ejemplo tener los datos de  $x(t_1)$ ;  $x(t_2)$ ;  $y(t_3)$  y  $v_y(t_4)$ .
- ii) Expresando el vector aceleración en un sistema de coordenadas cartesianas, las ecuaciones vectoriales pueden verse como una forma compacta de escribir el doble de ecuaciones unidimensionales. Así podemos, en lugar de trabajar con vectores, realizar los cálculos para obtener los vectores velocidad y posición trabajando con cada una de las componentes como si fueran dos movimientos unidimensionales independientes uno del otro,

$$v_x(t) = \int a_x(t) dt \quad ; \quad v_y(t) = \int a_y(t) dt, \quad (4.149)$$

y con esto podemos escribir el vector velocidad,

$$\vec{v}(t) = v_x(t) \hat{i} + v_y(t) \hat{j}, \quad (4.150)$$



y posteriormente calcular cada una de las componentes del vector posición,

$$x(t) = \int v_x(t) dt \quad ; \quad y(t) = \int v_y(t) dt \quad (4.151)$$

escribiendo finalmente el vector posición como

$$\vec{r}(t) = x(t) \hat{i} + y(t) \hat{j}. \quad (4.152)$$

Veamos un ejemplo. Supongamos que queremos averiguar el vector posición de un cuerpo cuya aceleración está dada por

$$\vec{a}(t) = 2 \frac{m}{s^2} \hat{i} + \left( -2 \frac{m}{s^3} t + 2 \frac{m}{s^2} \right) \hat{j}, \quad (4.153)$$

y sabemos que

$$\vec{v}(1s) = 1 \frac{m}{s} \hat{j} \quad ; \quad \vec{r}(-2s) = 10m \hat{i} + \frac{4}{3} m \hat{j}. \quad (4.154)$$

Comenzamos calculando el vector velocidad en función del tiempo integrando el vector aceleración

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \int \vec{a}(t) dt \\ &= \int \left( 2 \frac{m}{s^2} \hat{i} + \left( -2 \frac{m}{s^3} t + 2 \frac{m}{s^2} \right) \hat{j} \right) dt \\ &= 2 \frac{m}{s^2} t \hat{i} + \left( -1 \frac{m}{s^3} t^2 + 2 \frac{m}{s^2} t \right) \hat{j} + \vec{C}. \end{aligned} \quad (4.155)$$

Utilizando la condición  $\vec{v}(1s) = 1 \frac{m}{s} \hat{j}$  despejamos el valor del vector  $\vec{C}$ ,

$$\vec{C} = -2 \frac{m}{s} \hat{i}, \quad (4.156)$$

por lo tanto el vector velocidad en función del tiempo es

$$\vec{v}(t) = \left( 2 \frac{m}{s^2} t - 2 \frac{m}{s} \right) \hat{i} + \left( -1 \frac{m}{s^3} t^2 + 2 \frac{m}{s^2} t \right) \hat{j}. \quad (4.157)$$

Ahora podemos determinar el vector posición realizando la integral del vector velocidad respecto del tiempo,

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= \int \vec{v}(t) dt = \int \left[ \left( 2 \frac{m}{s^2} t - 2 \frac{m}{s} \right) \hat{i} + \left( -1 \frac{m}{s^3} t^2 + 2 \frac{m}{s^2} t \right) \hat{j} \right] dt \\ &= \left( 1 \frac{m}{s^2} t^2 - 2 \frac{m}{s} t \right) \hat{i} + \left( -\frac{1}{3} \frac{m}{s^3} t^3 + 1 \frac{m}{s^2} t^2 \right) \hat{j} + \vec{D}. \end{aligned} \quad (4.158)$$

Exigiendo que este vector posición evaluado en  $t = -2s$  sea igual a  $10m\hat{i} + \frac{4}{3}m\hat{j}$  calculamos el valor del vector  $\vec{D}$ ,

$$\vec{D} = 2m\hat{i} - \frac{16}{3}m\hat{j}, \quad (4.159)$$

entonces, el vector posición en función del tiempo es

$$\vec{r}(t) = \left(1 \frac{m}{s^2} t^2 - 2 \frac{m}{s} t + 2m\right) \hat{i} + \left(-\frac{1}{3} \frac{m}{s^3} t^3 + 1 \frac{m}{s^2} t^2 - \frac{16}{3} m\right) \hat{j}. \quad (4.160)$$

#### 4.4.9 Tiro parabólico

Analizaremos un caso particular de movimiento en el plano que es de gran interés. Estudiaremos la cinemática de un cuerpo bajo la acción de la atracción gravitatoria de la Tierra. Todos los cuerpos ubicados en las proximidades de la superficie de la Tierra experimentan la misma aceleración, que denominaremos con la letra  $g$ . Esta aceleración apunta en la dirección vertical hacia la Tierra. En realidad, por causas que se explicarán más adelante, la aceleración gravitatoria terrestre es solo aproximadamente una constante, asumiendo que estamos a nivel del mar, varía con la latitud del lugar donde estemos ubicados, siendo su valor aproximadamente  $9,78m/s^2$  en el ecuador y  $9,83m/s^2$  en los polos. En los pocos casos en que sea necesario reemplazar  $g$  por su valor numérico en esta sección, usaremos una aproximación mas grosera,  $g \simeq 10m/s^2$ .

El problema denominado *parábola de tiro* o *tiro parabólico* es un interesante ejemplo de movimiento de un cuerpo bajo la acción de una aceleración constante. Es uno de los primeros problemas resueltos de la física, ya que su solución se debe a Galileo en 1638. Se trata de resolver el movimiento de un cuerpo puntual lanzado desde la superficie de la Tierra con una velocidad inicial dada y que solo está sometido a la aceleración de la gravedad terrestre considerada constante.

Esto es, el problema en su forma más simple (que trataremos aquí) incluye varias aproximaciones:

- i) Despreciamos completamente la acción del aire.
- ii) Consideramos la Tierra como localmente plana.
- iii) Consideramos el campo gravitatorio terrestre como constante.

La primera aproximación se hace porque la trayectoria de cuerpo “puntual” se ve poco afectada por la presencia del aire, como puede comprobarse al realizar la experiencia de arrojar una pequeña bolita metálica. En cambio, si soltamos una hoja de papel desplegada esta aproximación es mala y no logrará describir razonablemente su trayectoria. En cualquier caso, considerar la acción del aire es un problema sumamente complicado, aún para su tratamiento numérico utilizando las computadoras actuales más poderosas. Las dos últimas consideraciones serán válidas si la velocidad inicial es “pequeña” y toda la trayectoria del cuerpo se encuentra próxima a la superficie terrestre. El problema que resolveremos es el de un cuerpo que se lanza desde una altura  $h$  con un vector velocidad de módulo  $v_0$  que forma un ángulo  $\alpha$  con la horizontal como se muestra en la figura 4.58, hasta que el móvil cae a tierra.

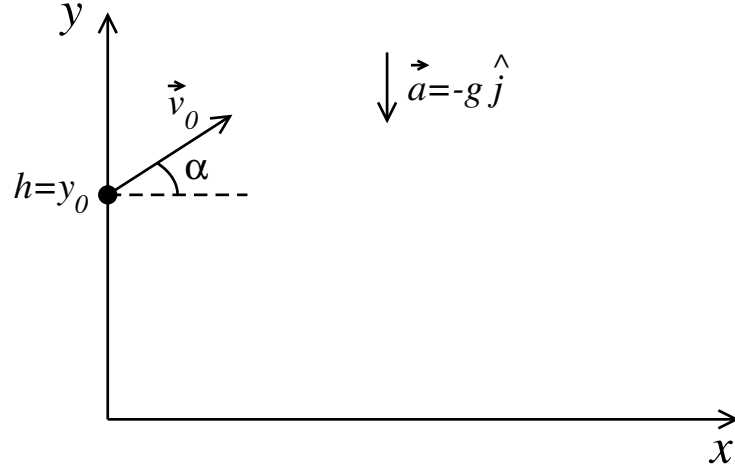


Figura 4.58: Diagrama de tiro parabólico al tiempo de disparo (instante inicial  $t_0 = 0$ ).

Si para la descripción del movimiento utilizamos el sistema de coordenadas cartesianas graficado en la figura 4.58, la expresión del vector aceleración será:

$$\vec{a}(t) = -g \hat{j}. \quad (4.161)$$

Considerando el instante inicial de la descripción cuando el cuerpo es lanzado con velocidad  $\vec{v}_0$  como  $t = 0$  s, entonces podemos escribir los vectores posición y velocidad para ese instante,

$$\vec{r}(0) = h \hat{j}, \quad (4.162)$$

$$\vec{v}(0) = v_0 \cos(\alpha) \hat{i} + v_0 \sin(\alpha) \hat{j}. \quad (4.163)$$

Integrando el vector aceleración respecto del tiempo obtenemos el vector velocidad

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \int \vec{a} dt = - \int g \hat{j} dt \\ &= -gt \hat{j} + \vec{C}. \end{aligned} \quad (4.164)$$

Para determinar  $\vec{C}$  evaluamos el vector velocidad (ecuación (4.164)) en el instante en que conocemos su valor,  $t = 0$  s,

$$\vec{v}(0s) = \vec{C} = v_0 \cos(\alpha) \hat{i} + v_0 \sin(\alpha) \hat{j}. \quad (4.165)$$

Entonces el vector velocidad del cuerpo es

$$\vec{v}(t) = v_0 \cos(\alpha) \hat{i} + (-gt + v_0 \sin(\alpha)) \hat{j}. \quad (4.166)$$

Para obtener el vector posición del cuerpo debemos integrar el vector velocidad

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \int \vec{v} dt = \int (v_0 \cos(\alpha) \hat{i} + [-gt + v_0 \sin(\alpha)] \hat{j}) dt \\ &= v_0 \cos(\alpha) t \hat{i} + \left[ -\frac{g}{2} t^2 + v_0 \sin(\alpha) t \right] \hat{j} + \vec{D}.\end{aligned}\quad (4.167)$$

Al valor del vector  $\vec{D}$  lo determinamos evaluando el vector posición, ecuación (4.167), en el instante para el cual lo conocemos, que en nuestro caso es  $t = 0$  s,

$$\vec{r}(0s) = \vec{D} = h \hat{j}, \quad (4.168)$$

con lo cual el vector posición del cuerpo en función del tiempo es

$$\vec{r}(t) = v_0 \cos(\alpha) t \hat{i} + \left[ -\frac{g}{2} t^2 + v_0 \sin(\alpha) t + h \right] \hat{j}. \quad (4.169)$$

Vamos a responder varias preguntas respecto al movimiento del cuerpo:

a) ¿Cuál es la trayectoria que sigue un cuerpo sometido a la aceleración de la gravedad?

La función de movimiento de cada una de las coordenadas es:

$$x(t) = v_0 \cos(\alpha) t, \quad (4.170)$$

$$y(t) = -\frac{g}{2} t^2 + v_0 \sin(\alpha) t + h. \quad (4.171)$$

Despejando la variable  $t$  en la ecuación (4.170) y reemplazando en la ecuación (4.171) obtenemos

$$y(x) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\alpha)} x^2 + \tan(\alpha) x + h, \quad (4.172)$$

que corresponde a una trayectoria parabólica con las ramas hacia abajo (ver figura 4.59).

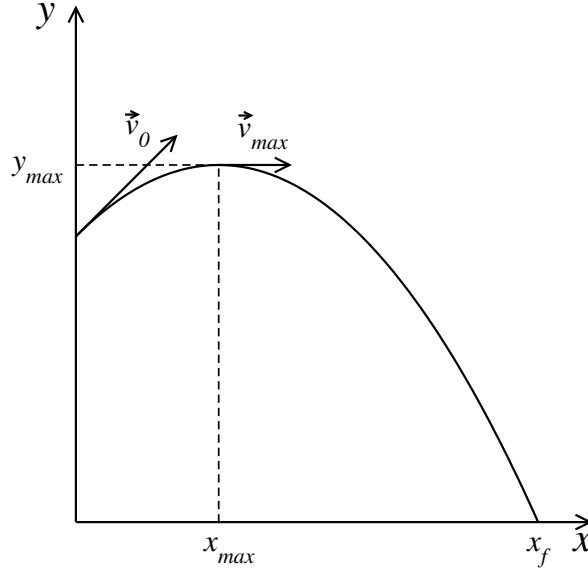


Figura 4.59: Esquema de la trayectoria del tiro parabólico.

b) ¿Cuál es la máxima altura que alcanza el cuerpo?

La máxima altura ( $y_{max}$ ) que alcanza el cuerpo se corresponde con el máximo de la parábola de la trayectoria (ver figura 4.59). Para esto derivamos la ecuación (4.172) respecto a  $x$  e igualamos la derivada a cero para encontrar la coordenada  $x_{max}$  del máximo,

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_{max}} = -\frac{g}{v_0^2 \cos^2(\alpha)} x_{max} + \tan(\alpha) = 0, \quad (4.173)$$

de donde obtenemos

$$x_{max} = \frac{v_0^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha)}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{2g}. \quad (4.174)$$

Evaluando la expresión de la trayectoria, ecuación (4.172), en el valor obtenido para  $x_{max}$ , ecuación (4.174), obtenemos la máxima altura que alcanza el cuerpo,

$$y_{max} = y(x_{max}) = \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{2g} + h. \quad (4.175)$$

Hemos encontrado la altura máxima que alcanza el cuerpo haciendo un análisis geométrico de la trayectoria. Sin embargo, también lo podemos hacer mediante consideraciones físicas. El cuerpo alcanza su máxima altura cuando deja de ascender verticalmente, por lo tanto en el instante  $t_{max}$  que alcanza su máxima altura la componente vertical de la velocidad se hace igual a cero. De esta manera podemos determinar el instante en que el cuerpo alcanza la altura  $y_{max}$ ,

$$v_y(t_{max}) = -gt_{max} + v_0 \sin(\alpha) = 0, \quad (4.176)$$

obteniendo

$$t_{max} = \frac{v_0 \sin(\alpha)}{g}. \quad (4.177)$$

Como la altura máxima es la coordenada vertical del cuerpo para este instante, entonces reemplazando este valor de tiempo (ecuación (4.177)) en la ecuación (4.171) obtenemos

$$y_{max} = y(t_{max}) = \frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{2g} + h. \quad (4.178)$$

Como vemos resulta más simple el cálculo de la altura máxima que alcanza el cuerpo utilizando consideraciones físicas.

c) ¿Cuál es el alcance que tiene el cuerpo?

Entendemos por alcance a la distancia horizontal que recorre el cuerpo desde que es lanzado hasta que toca el piso, la cual, debido a la elección del sistema de coordenadas, coincide con la coordenada  $x$ , que denominaremos  $x_f$  (ver figura 4.59). El vector posición del punto en el cual impacta el cuerpo es

$$\vec{r}(t_f) = x(t_f) \hat{i} + y(t_f) \hat{j} = x_f \hat{i}. \quad (4.179)$$

Como al caer al piso el valor de la coordenada  $y(t_f)$  es cero, podemos calcular el instante de impacto con la tierra resolviendo la ecuación (4.171),

$$y(t_f) = -\frac{g}{2} t_f^2 + v_0 \sin(\alpha) t_f + h = 0, \quad (4.180)$$

que tiene dos soluciones posibles,

$$t_{\pm} = \frac{v_0 \sin(\alpha) \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2(\alpha) + 2gh}}{g}, \quad (4.181)$$

Analizando estas dos soluciones vemos que si  $h > 0$  resulta  $t_+ > 0$  y  $t_- < 0$ . Si bien  $t_-$  satisface la ecuación (4.180), esta solución no tiene sentido físico, pues toda la descripción que estamos haciendo es válida para  $t \geq 0$ . Concluimos entonces que  $t_f = t_+$ , obteniendo para el alcance  $x_f = x(t_f)$ ,

$$\begin{aligned} x_f &= v_0 \cos(\alpha) \left( \frac{v_0 \sin(\alpha) + \sqrt{v_0^2 \sin^2(\alpha) + 2gh}}{g} \right) \\ &= \frac{v_0^2}{g} \cos(\alpha) \left( \sin(\alpha) + \sqrt{\sin^2(\alpha) + \frac{2gh}{v_0^2}} \right). \end{aligned} \quad (4.182)$$

### Caso particular $h = 0$

Analicemos qué sucede cuando tanto el punto de lanzamiento como el de impacto están a la misma altura (usualmente, aunque no necesariamente, ambos coinciden con la superficie terrestre), esto es, tomamos

$h = 0$  m. En este caso las soluciones (4.181) son

$$t_+ = \frac{2v_0 \sin(\alpha)}{g} ; \quad t_- = 0s. \quad (4.183)$$

Como en el caso  $h > 0$  tenemos que  $t_f = t_+$ , pero, para  $h = 0$ ,  $t_-$  sí tiene una interpretación física: es el instante de lanzamiento, en que la coordenada  $y$  del móvil también cumple  $y(t_-) = 0$ . Entonces el alcance del cuerpo  $x_f$  (ecuación (4.182)) es

$$x_f = \frac{2v_0^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha)}{g}, \quad (4.184)$$

y usando que  $2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) = \sin(2\alpha)$  obtenemos

$$x_f = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}. \quad (4.185)$$

Notemos que, en este caso particular,  $t_f = 2t_{max}$  (ecuaciones (4.177) y (4.183)) y  $x_f = 2x_{max}$  (ecuaciones (4.174) y (4.185)), pues la trayectoria es simétrica respecto al eje que pasa por su máximo.

La expresión del alcance, ecuación (4.185), es un factor positivo multiplicado por  $\sin(2\alpha)$ , con  $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ , cuyo gráfico se muestra en la figura 4.60.

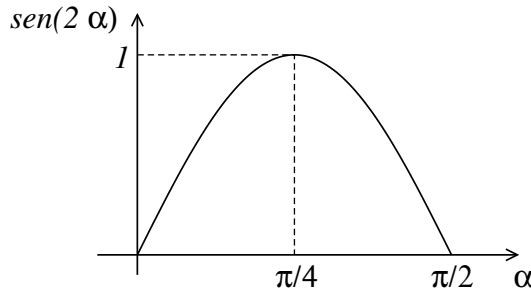


Figura 4.60:  $\sin(2\alpha)$  versus  $\alpha$  para  $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ .

Tenemos entonces que, para cada valor de  $\sin(2\alpha)$  hay dos posibles valores del ángulo  $\alpha$ :  $\alpha_< < \pi/4$  y  $\alpha_> > \pi/4$ , que arrojan el mismo valor de  $x_f$ , excepto para  $\sin(2\alpha) = 1$  donde vale  $\alpha = \pi/4$ . Estos dos ángulos son equidistantes de  $\pi/4$ ,  $|\alpha_< - \pi/4| = |\alpha_> - \pi/4|$ .

Como el alcance depende del módulo de la velocidad inicial,  $v_0$ , y del ángulo  $\alpha$ , nos podemos preguntar ¿cuál es el ángulo de lanzamiento óptimo ( $\alpha_{op}$ ) para lograr el máximo alcance posible para un dado valor de  $v_0$ ? A partir de la ecuación (4.185) es simple notar que el valor máximo de  $x_f$  se logra cuando  $\sin(2\alpha_{op}) = 1$ ; es decir  $\alpha_{op} = \pi/4$ . En la figura 4.61 se muestran 3 tiros parabólicos con igual módulo de velocidad inicial  $v_0$  pero con tres ángulos diferentes,  $\alpha_< = \pi/6$ ,  $\alpha_> = \pi/3$  y  $\alpha_{op} = \pi/4$ .

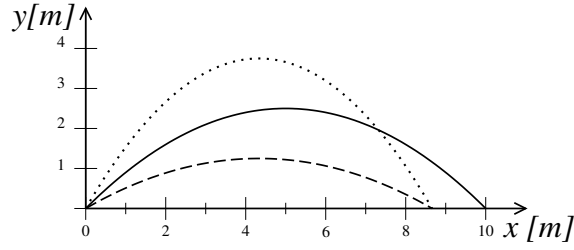


Figura 4.61: Parábola de tiro para  $v_0 = 10\text{m/s}$  y  $\alpha_{op} = \pi/4$  (línea continua),  $\alpha_{<} = \pi/6$  (línea cortada) y  $\alpha_{>} = \pi/3$  (línea de puntos).

Evaluando la expresión (4.166) en el instante  $t_f$ , dado por la ecuación (4.183), determinamos la velocidad del cuerpo en el instante del impacto con el piso,

$$\vec{v}(t_f) = v_0 \cos(\alpha) \hat{i} - v_0 \sin(\alpha) \hat{j}. \quad (4.186)$$

Haciendo el producto escalar entre el vector velocidad inicial (ecuación (4.163)) y el vector velocidad final (ecuación (4.186)) obtenemos

$$\begin{aligned} \vec{v}(0s) \cdot \vec{v}(t_f) &= [v_0 \cos(\alpha) \hat{i} + v_0 \sin(\alpha) \hat{j}] \cdot [v_0 \cos(\alpha) \hat{i} - v_0 \sin(\alpha) \hat{j}] \\ &= v_0^2 [\cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)] \\ &= v_0^2 \cos(2\alpha). \end{aligned} \quad (4.187)$$

Cuando el ángulo de lanzamiento  $\alpha = \alpha_{op} = \pi/4$  el producto escalar  $\vec{v}(0s) \cdot \vec{v}(t_f) = 0$  y por lo tanto, para este ángulo particular, el vector velocidad en el momento del impacto será perpendicular al vector velocidad inicial.

### Aceleraciones tangencial y normal

En el tiro parabólico, la aceleración tiene una expresión muy simple, es un vector constante,  $\vec{a}(t) = -g \hat{j}$ , pero, ¿que sucede con  $\vec{a}_t(t)$  y  $\vec{a}_n(t)$ ? Conocemos  $\vec{v}(t)$ , y por lo tanto, también conocemos  $\hat{v}(t) = \vec{v}(t)/|\vec{v}(t)| = \beta_x \hat{i} + \beta_y \hat{j}$ , donde  $\beta_x$  y  $\beta_y$  son las componentes cartesianas de  $\hat{v}(t)$ . Sabemos que hay dos versores ortonormales a  $\hat{v}$ :  $\pm\beta_y \hat{i} \mp \beta_x \hat{j}$ , también sabemos que  $\beta_x > 0$  y  $\vec{a}_n(t) \cdot \hat{j} < 0 \forall t$ , entonces, el versor con la dirección y sentido de  $\vec{a}_n(t)$  será

$$\hat{a}_n(t) = \beta_y \hat{i} - \beta_x \hat{j} \Rightarrow \vec{a}_n = (\vec{a} \cdot \hat{a}_n) \hat{a}_n = g \beta_x(t) (\beta_y(t) \hat{i} - \beta_x(t) \hat{j}) = \frac{g v_x}{|\vec{v}|^2} (v_y \hat{i} - v_x \hat{j}). \quad (4.188)$$

En el punto de máxima altura:  $\vec{a}(t_{max}) = \vec{a}_n(t_{max})$ ;  $\vec{a}_t(t_{max}) = 0$ . En cualquier otro punto de la trayectoria  $\vec{a}_n$  y  $\vec{a}_t$  son no nulos. En la figura 4.62 vemos los versores  $\hat{v}$  y  $\hat{a}_n$  en cinco puntos particulares de la trayectoria de un tiro parabólico. El análisis realizado es independiente del valor de  $h$ .



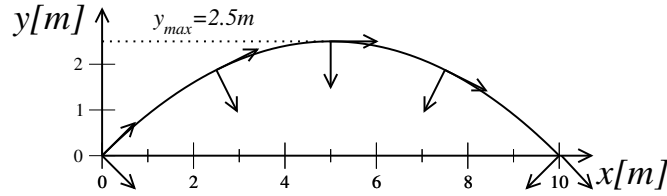


Figura 4.62: Parábola de tiro con  $v_0 = 10\text{m/s}$ ,  $h = 0$  y  $\alpha_{op}(0) = \pi/4 = 45^\circ$  mostrando  $\hat{v}$  y  $\hat{a}_n$  para  $x = 0$ ;  $x_f/4$ ;  $x_f/2 = x_{max}$ ;  $3x_f/4$  y  $x_f$ .

### Caso general $h \geq 0$

Si el lanzamiento es hecho desde una altura  $h$ , y queremos conocer el ángulo óptimo en función de la altura de la base,  $\alpha_{op}(h)$  para el cual el proyectil tiene su máximo alcance,  $x_f(\alpha_{op})$ , el cálculo es ahora algo más complejo. Antes de hacer ninguna cuenta, vemos en la figura 4.63 que si  $\alpha > \pi/4$  la trayectoria cruzará la correspondiente a  $\alpha = \pi/4$  a una altura mayor que  $h$ , y como dos parábolas se cortan a lo máximo en dos puntos sabemos entonces que  $\alpha_{op}(h) \leq \pi/4$ . Por el mismo argumento, para un ángulo levemente menor que  $\pi/4$  cortará la trayectoria de  $\alpha = \pi/4$  en un altura levemente menor que  $h$ , por lo que la igualdad vale solo para  $h = 0$ , obteniendo  $\alpha_{op}(h > 0) < \pi/4$ .

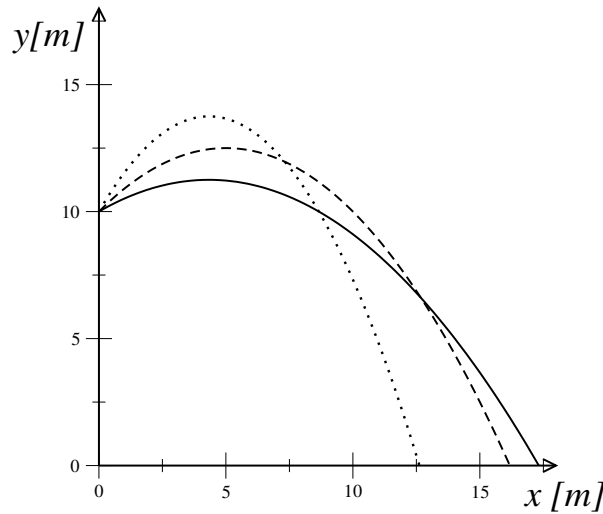


Figura 4.63: Parábola de tiro para  $v_0 = 10\text{m/s}$ ,  $h = 10\text{m}$  y  $\alpha = \alpha_{op}(10\text{m}) = \pi/6 = 30^\circ$  (línea continua),  $\alpha = \pi/4$  (línea cortada) y  $\alpha = \pi/3$  (línea de puntos). Las parábolas correspondientes a  $\alpha = 30^\circ$  y  $60^\circ$  se cortan en  $y = h = 10\text{m}$ .

El ángulo óptimo es el que maximiza la expresión de  $x_f$ , ecuación (4.182), por lo que debemos buscar el punto crítico de  $x_f$ ,

$$\frac{dx_f}{d\alpha} = \frac{v_0^2}{g} \left( -\sin^2(\alpha) - \sin(\alpha) \sqrt{\sin^2(\alpha) + \frac{2gh}{v_0^2}} + \cos^2(\alpha) + \frac{\sin(\alpha) \cos^2(\alpha)}{\sqrt{\sin^2(\alpha) + \frac{2gh}{v_0^2}}} \right) = 0. \quad (4.189)$$

Esta ecuación es complicada, pero usaremos el siguiente “truco”: llamando  $D = \sqrt{\sin^2(\alpha) + \frac{2gh}{v_0^2}}$ , y multiplicando la ecuación (4.189) por  $D$  obtenemos

$$-\sin^2(\alpha)D - \sin(\alpha)D^2 + \cos^2(\alpha)D + \sin(\alpha)\cos^2(\alpha) = 0, \quad (4.190)$$

que es una cuadrática para  $D$ , cuya raíz positiva es

$$D = \frac{\cos^2(\alpha)}{\sin(\alpha)}. \quad (4.191)$$

Claro, debido al truco que usamos, todavía no obtenemos  $\alpha_{op}$ , ya que  $D$  es función del ángulo, pero usando que  $\cos^2(\alpha) = 1 - \sin^2(\alpha)$ , elevando al cuadrado la ecuación (4.191) obtenemos,

$$\sin(\alpha_{op}) = \frac{1}{\sqrt{2 + \frac{2gh}{v_0^2}}} \Rightarrow \cos(\alpha_{op}) = \sqrt{\frac{1 + \frac{2gh}{v_0^2}}{2 + \frac{2gh}{v_0^2}}}; \tan(\alpha_{op}) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2}}}, \quad (4.192)$$

reemplazando estas expresiones en la ecuación (4.182) obtenemos

$$x_f(\alpha_{op}) = \frac{v_0^2}{g} \sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2}} = \frac{v_0^2}{g \tan(\alpha_{op})}. \quad (4.193)$$

Notamos que para  $h = 0$  reobtenemos los resultados de la sección anterior,  $\alpha_{op} = \pi/4$ ,  $x_f = \frac{v_0^2}{g}$ . De la ecuación (4.192) vemos que  $\tan(\alpha_{op})$  decrece cuando  $h$  crece, entonces la ecuación (4.193) nos dice que el proyectil llegará más lejos mientras más alta sea la base de lanzamiento.

Finalmente calculamos el ángulo de caída para  $\alpha_{op}$ , esto es, el ángulo que forma  $v_f$  con el eje  $x$ , el cual viene dado por

$$\tan(\theta_f) = \frac{v_{f,y}}{v_{f,x}} = \frac{-gt_f + v_0 \sin(\alpha_{op})}{v_0 \cos(\alpha_{op})} = \frac{-gx_f + v_0^2 \sin(\alpha_{op}) \cos(\alpha_{op})}{v_0^2 \cos^2(\alpha_{op})}, \quad (4.194)$$

donde hemos usado que  $x_f = v_0 \cos(\alpha_{op}) t_f$ . Reemplazando en (4.194) los valores de  $\sin(\alpha_{op})$  y  $\cos(\alpha_{op})$  dados en (4.192), obtenemos

$$\tan(\theta_f) = -\sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2}} = -\frac{1}{\tan(\alpha_{op})}; \quad (4.195)$$

tenemos entonces que  $\tan(\theta_f) \tan(\alpha_{op}) = -1$ , esto es, la velocidad inicial para el ángulo óptimo es perpendicular a la velocidad de llegada a tierra,

$$\vec{v}_0(\alpha_{op}) \cdot \vec{v}_f(\theta_f) = 0, \quad (4.196)$$

obteniendo que esta condición es válida para todo valor de  $h \geq 0$ .

#### 4.4.10 Encuentro de dos móviles en el plano

Igual que en el caso de movimientos sobre una recta, definimos encuentro de dos móviles cuando ambos se encuentran en el **mismo** lugar en el **mismo** instante. Esto es, dado dos cuerpos  $A$  y  $B$  con vectores posición  $\vec{r}_A(t)$  y  $\vec{r}_B(t)$ , diremos que habrá encuentro si existe al menos un tiempo  $t_e$  tal que

$$\vec{r}_A(t_e) = \vec{r}_B(t_e), \quad (4.197)$$

o sea, el conjunto de ecuaciones

$$x_A(t_e) = x_B(t_e) \quad ; \quad y_A(t_e) = y_B(t_e) \quad (4.198)$$

tiene al menos una solución. En caso contrario, los móviles no se encuentran.

En el caso de movimiento en el plano es importante no confundir encuentro con cruce de trayectoria. En una dimensión, cuando vemos el gráfico  $x-t$ , si las curvas se cruzan, entonces hay encuentro, en dos dimensiones la trayectoria está en el plano  $x-y$ , por lo que, aun existiendo un punto de cruce de trayectorias, los cuerpos pueden haber pasado por dicho punto en distintos instantes.

Veamos esto con un ejemplo: sean los vectores posición de dos cuerpos  $A$  y  $B$

$$\vec{r}_A(t) = 1\frac{m}{s}t\hat{i} + 1\frac{m}{s}t\hat{j} \quad ; \quad \vec{r}_B(t) = \left(2\frac{m}{s}t + b\right)\hat{i} - \left(2\frac{m}{s}t - d\right)\hat{j}, \quad (4.199)$$

y asumiremos en particular que las constantes  $b$  y  $d$  cumplen  $b + d = 1\text{ m}$ , lo que nos lleva a las siguientes trayectorias,

$$y_A(x_A) = x_A \quad ; \quad y_B(x_B) = -x_B + 1\text{ m}. \quad (4.200)$$

Ambas trayectorias son líneas rectas, que como se muestra en la figura 4.64 se cruzan en un punto  $(x_c, y_c)$ , dado por

$$y_A(x_c) = y_B(x_c) \Rightarrow x_c = \frac{1}{2}m \quad ; \quad y_c = \frac{1}{2}m. \quad (4.201)$$

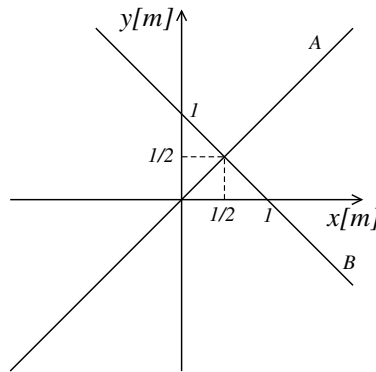


Figura 4.64: Trayectorias de los cuerpos  $A$  y  $B$  dados por las ecuaciones (4.200).

Entonces las trayectorias se cortan en este punto, pero ¿los móviles se encuentran? Para contestar esta pregunta debemos resolver la ecuación (4.197) (¡que es distinta a la ecuación (4.201)!), o equivalentemente las ecuaciones (4.198), que arrojan como resultado

$$b = -\frac{1}{2}m \quad ; \quad d = \frac{3}{2}m \quad ; \quad t_e = \frac{1}{2}s, \quad (4.202)$$

esto es, **solo** en el caso en que  $b = -1/2m$  y  $d = 3/2m$  se produce un encuentro en  $t_e = 1/2s$ . Para cualquier otro valor de los parámetros  $b$  y  $d$  que elijamos (sujetos a la condición  $b + d = 1m$ ) hay cruce de trayectorias pero **no** habrá encuentro. Dejamos como ejercicio verificar que, por ejemplo, con la elección  $b = -1m$ ;  $d = 2m$  el móvil  $A$  pasa por el punto de cruce en  $t = 1/2s$ , mientras el móvil  $B$  lo hace en  $t = 3/4s$ . Como los móviles pasan por el mismo punto a distintos tiempos no hay encuentro. Esto es lo que sucede en cualquier esquina, que las trayectorias de los automóviles que vienen por las distintas calles se cruzan sin haber encuentro (¡salvo cuando ocurre un choque entre automóviles!).

# 5

## Movimiento Circular y Movimiento Periódico

### SECCIÓN 5.1

### Movimiento circular - parte I

El movimiento circular es un caso particular de un movimiento en el plano en el cual la trayectoria es una circunferencia, o parte de ella, esto es, para todo instante en el intervalo de interés, las coordenadas del móvil cumplen

$$(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2 = R^2, \quad (5.1)$$

donde  $(x_0, y_0)$  son las coordenadas del centro del círculo y  $R$  su radio. En la figura 5.1 se muestran tres ejemplos de trayectorias correspondientes a movimientos circulares.

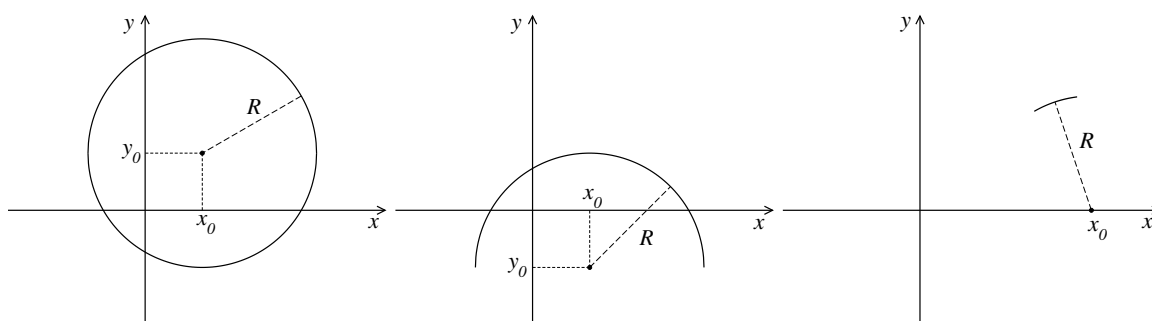


Figura 5.1: Tres trayectorias correspondientes a movimientos circulares, esto es, que sus funciones de movimiento cumplen la ecuación (5.1).

Si para describir el movimiento se elige un sistema de coordenadas cuyo origen coincida con el centro de la circunferencia, entonces  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$  y la trayectoria es descrita en coordenadas cartesianas por la ecuación

$$x^2(t) + y^2(t) = R^2. \quad (5.2)$$

Como siempre, elegiremos el sistema de coordenadas que más simplifique la descripción del movimiento del móvil en cuestión, esto es estudiaremos en adelante movimientos circulares centrados en el origen, cuya trayectoria obedece la ecuación (5.2). El vector posición  $\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$  de una partícula que realiza un movimiento circular puede expresarse en función del radio del círculo, que es una constante, y el ángulo  $\theta(t)$ , que forma dicho vector con el eje  $x$  (ver figura 5.2),

$$\vec{r}(t) = R[\cos(\theta(t))\hat{i} + \sin(\theta(t))\hat{j}] \Rightarrow |\vec{r}(t)| = R, \quad (5.3)$$

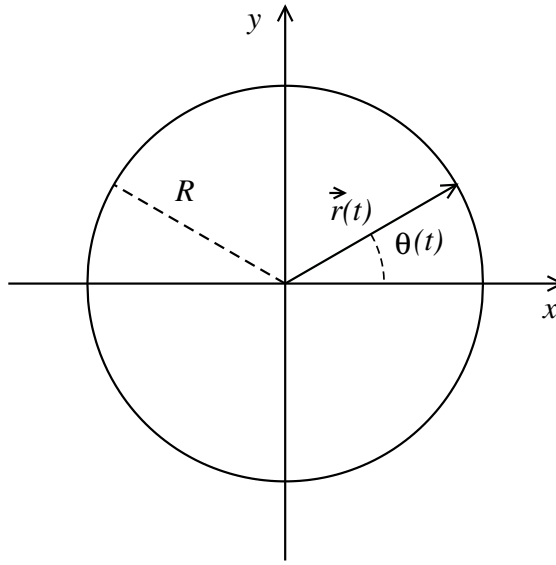


Figura 5.2: Vector posición  $\vec{r}(t)$  y ángulo  $\theta(t)$  en un movimiento circular.

Derivando  $\vec{r}(t)$  obtenemos la velocidad del cuerpo,

$$\vec{v}(t) = R \left[ -\sin(\theta(t)) \frac{d\theta}{dt} \hat{i} + \cos(\theta(t)) \frac{d\theta}{dt} \hat{j} \right] = R \frac{d\theta}{dt} [-\sin(\theta(t))\hat{i} + \cos(\theta(t))\hat{j}]. \quad (5.4)$$

La derivada con respecto al tiempo de la función de movimiento angular,  $\theta(t)$ , se denomina velocidad angular y se denota por

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt}, \quad (5.5)$$

entonces

$$\vec{v}(t) = R\omega(t) [-\sin(\theta(t))\hat{i} + \cos(\theta(t))\hat{j}] \Rightarrow |\vec{v}(t)| = R|\omega(t)|. \quad (5.6)$$

Derivando el vector velocidad obtenemos el vector aceleración

$$\begin{aligned}
\vec{a}(t) &= R \frac{d\omega}{dt} [-\sin(\theta(t))\hat{i} + \cos(\theta(t))\hat{j}] + R\omega \left[ -\cos(\theta(t)) \frac{d\theta}{dt} \hat{i} - \sin(\theta(t)) \frac{d\theta}{dt} \hat{j} \right] \\
&= R \frac{d\omega}{dt} [-\sin(\theta(t))\hat{i} + \cos(\theta(t))\hat{j}] + R\omega^2 [-\cos(\theta(t))\hat{i} - \sin(\theta(t))\hat{j}], \quad (5.7)
\end{aligned}$$

definiendo la aceleración angular  $\gamma(t)$  como la derivada respecto al tiempo de la velocidad angular,

$$\gamma(t) = \frac{d\omega(t)}{dt}, \quad (5.8)$$

podemos escribir el vector aceleración como

$$\vec{a}(t) = -R\omega^2(t) [\cos(\theta(t))\hat{i} + \sin(\theta(t))\hat{j}] + R\gamma(t) [-\sin(\theta(t))\hat{i} + \cos(\theta(t))\hat{j}]. \quad (5.9)$$

Si realizamos el producto escalar entre el vector posición, ecuación (5.3), y el vector velocidad, ecuación (5.6), vemos que

$$\begin{aligned}
\vec{r}(t) \cdot \vec{v}(t) &= (R[\cos(\theta(t))\hat{i} + \sin(\theta(t))\hat{j}]) \cdot (R\omega[-\sin(\theta(t))\hat{i} + \cos(\theta(t))\hat{j}]) \\
&= R^2\omega [-\cos(\theta(t))\sin(\theta(t))\hat{i} \cdot \hat{i} + \cos^2(\theta(t))\hat{i} \cdot \hat{j} - \sin^2(\theta(t))\hat{j} \cdot \hat{i} + \sin(\theta(t))\cos(\theta(t))\hat{j} \cdot \hat{j}] \\
&= R^2\omega [-\cos(\theta(t))\sin(\theta(t)) + \sin(\theta(t))\cos(\theta(t))] = 0. \quad (5.10)
\end{aligned}$$

Como el producto escalar de dos vectores no nulos solo puede ser cero si estos son ortogonales, entonces en un movimiento circular el vector posición es perpendicular al vector velocidad en todo instante,  $\vec{r}(t) \perp \vec{v}(t)$ .

Analicemos ahora el vector aceleración de un movimiento circular. De la ecuación (5.10) tenemos para el versor posición y el versor en la dirección de la velocidad

$$\begin{aligned}
\hat{r}(t) &= \cos(\theta(t))\hat{i} + \sin(\theta(t))\hat{j} \\
\hat{u}_v(t) &= -\sin(\theta(t))\hat{i} + \cos(\theta(t))\hat{j} \\
\hat{r}(t) \cdot \hat{u}_v(t) &= 0. \quad (5.11)
\end{aligned}$$

Estos versores se denominan *ortonormales* por ser de módulo uno y perpendiculares entre sí. Es importante notar que  $\hat{u}_v$  define la dirección del vector velocidad, mientras que su sentido es dado por el signo de  $\omega(t)$ ,  $\vec{v}(t) = R\omega(t)\hat{u}_v(t)$ .

Notemos entonces que el vector aceleración, escrito en la forma de la ecuación (5.9), resulta ya descompuesto en aceleración tangencial y aceleración normal utilizando los dos versores ortonormales de la ecuación (5.11),

$$\vec{a}(t) = -R\omega^2(t)\hat{r}(t) + R\gamma(t)\hat{u}_v(t) = \vec{a}_n(t) + \vec{a}_t(t). \quad (5.12)$$

Entonces cuando descomponemos el vector aceleración en aceleración tangencial y aceleración normal, **para un movimiento circular**, tenemos que la aceleración normal **siempre** tiene la misma dirección y sentido contrario al vector posición,

$$\vec{a}_n(t) = -R\omega^2(t)\hat{r}(t), \quad (5.13)$$

mientras que la aceleración tangencial, en la dirección de la velocidad, es

$$\vec{a}_t(t) = R\gamma(t)\hat{u}_v(t), \quad (5.14)$$

como se muestra en el ejemplo de la figura 5.3.

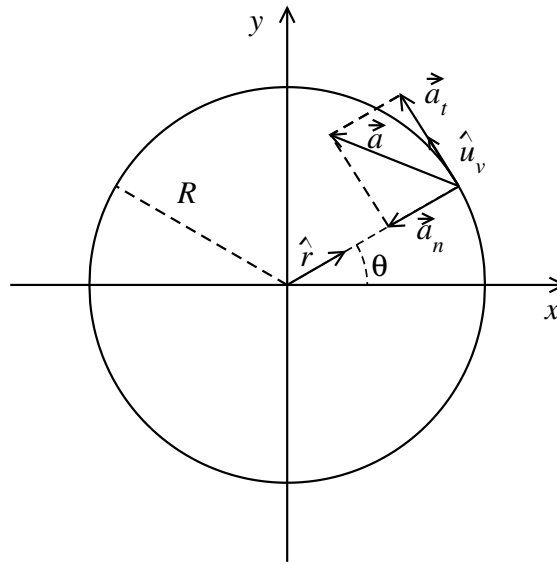


Figura 5.3: Descomposición del vector aceleración en las direcciones normal y tangencial en un movimiento circular.

Como siempre comenzaremos estudiando el caso más sencillo; veamos nuevamente el problema de una partícula en movimiento circular uniforme (MCU), tratado en el ejemplo (f) de la sección 4.2, en el que la velocidad angular es una constante,

$$\omega(t) = \omega_0 \Rightarrow \begin{cases} \gamma(t) &= \frac{d\omega}{dt} = 0 \\ \theta(t) &= \int \omega dt = \omega_0 t + \theta_0 \end{cases}, \quad (5.15)$$

donde  $\theta_0$  es el ángulo determinado por el vector posición a  $t = 0$ .

Como es un movimiento uniforme, no perdemos generalidad si elegimos el sistema de coordenadas tal que  $\vec{r}(t = 0) = R\hat{i}$ , lo que implica  $\theta_0 = 0$ . Tenemos entonces que el vector posición en este caso será, según las ecuaciones (5.3) y (5.15),

$$\vec{r}(t) = R[\cos(\omega_0 t)\hat{i} + \sin(\omega_0 t)\hat{j}], \quad (5.16)$$



por lo que el vector velocidad es

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = R\omega_0 [-\sin(\omega_0 t)\hat{i} + \cos(\omega_0 t)\hat{j}], \quad (5.17)$$

que nos dice que el módulo del vector velocidad es constante,

$$|\vec{v}(t)| = R|\omega_0|. \quad (5.18)$$

Finalmente calculamos la aceleración,

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = -R\omega_0^2 [\cos(\omega_0 t)\hat{i} + \sin(\omega_0 t)\hat{j}] = -R\omega_0^2 \hat{r}(t). \quad (5.19)$$

Como el vector aceleración es normal a la trayectoria y la aceleración angular  $\gamma$  es nula, el vector aceleración coincide con el vector aceleración normal,

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_n(t) = -R\omega_0^2 \hat{r}(t), \quad (5.20)$$

que es un vector cuyo módulo también es constante,  $|\vec{a}(t)| = R\omega_0^2$ . Esto es, en un MCU los módulos de los vectores posición, velocidad y aceleración son constantes. Las ecuaciones (5.11) y (5.20) nos dicen que

$$\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t) = 0, \quad (5.21)$$

como ambos vectores son no nulos, concluimos que en un MCU los vectores velocidad y aceleración son ortogonales en todo instante, como puede observarse en la figura 5.4.

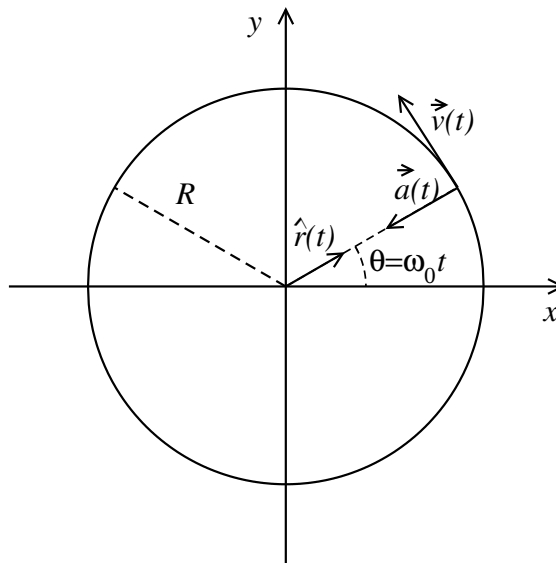


Figura 5.4: Versor posición, vectores velocidad y aceleración y ángulo  $\theta$  en un movimiento circular uniforme.

Entonces, al no haber aceleración tangencial, esto es, en el sentido de la velocidad, el módulo de la velocidad permanece constante, pero cambia su dirección y sentido debido a la presencia de una aceleración normal no nula. Vemos otro ejemplo que muestra que la aceleración normal es responsable del cambio en dirección del vector velocidad, cumpliendo el enunciado general establecido en la sección 4.4.7: **todo movimiento no rectilíneo es acelerado**.

## SECCIÓN 5.2

## Coordenadas polares

Ya vimos en el capítulo 4 que dado un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales, a cada punto  $P$  del plano le corresponde unívocamente un par de números reales, las coordenadas  $x_p$  e  $y_p$  del punto. Pero queda claro que cualquier regla que identifique unívocamente puntos en el plano con pares de números reales también merecen ser llamada sistema de coordenadas. Podríamos pensar entonces que es posible definir muchos (¡infinitos!) sistemas de coordenadas, y efectivamente es así, claro que solo algunos pocos nos serán de utilidad para describir el movimiento de los cuerpos. En la sección precedente, sin mencionarlo, estuvimos muy cerca de usar el sistema que, junto con el cartesiano ortogonal, resultan los más usados en el plano: *el sistema de coordenadas polares*.

También en el capítulo 4 mostramos que la distancia de un punto  $p$  al origen de coordenadas, que denotaremos por la letra griega  $\rho$ , está dada por

$$\rho_p = \sqrt{x_p^2 + y_p^2}. \quad (5.22)$$

Si además damos el ángulo  $\theta$  que forma el segmento  $\overline{OP}$  con el eje  $x$ , tomado en sentido antihorario (estos dos requerimientos son convenciones universalmente aceptadas), entonces tenemos un par de números reales  $(\rho_p, \theta_p)$  que determinan unívocamente cualquier punto del plano, como se muestra en la figura 5.5. Denominaremos este par de números reales como *coordenadas polares del punto  $P$* .

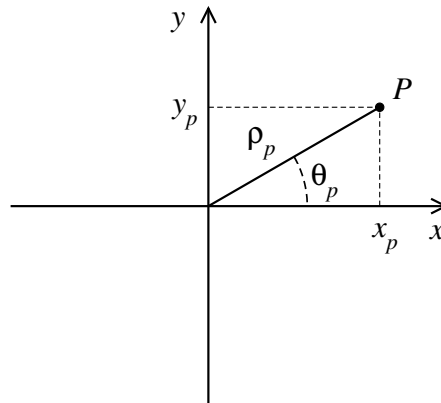


Figura 5.5: Coordenadas cartesianas y polares del punto  $P$

De la figura 5.5 podemos ver que la relación de las coordenadas cartesianas con las coordenadas polares de un punto son

$$x_p = \rho_p \cos(\theta_p) ; y_p = \rho_p \sin(\theta_p), \quad (5.23)$$

y de estas ecuaciones obtenemos la expresión de  $\theta$  en coordenadas cartesianas,

$$\tan(\theta_p) = \frac{y_p}{x_p} \Rightarrow \theta_p = \arctan\left(\frac{y_p}{x_p}\right). \quad (5.24)$$

La figura 5.5 y la ecuación (5.24) nos muestran que estrictamente las coordenadas polares **no** establecen una biyección entre puntos del plano y pares de números reales, ya que el origen de coordenadas  $x = 0$ ,  $y = 0$  le corresponde  $\rho = 0$ , pero la coordenada  $\theta$  no puede definirse, aunque este hecho no introduce ninguna ambigüedad, pues este punto queda unívocamente definido por la condición  $\rho = 0$ . Volveremos a ocuparnos de esta cuestión en la próxima sección, cuando estudiemos las propiedades de las funciones de movimiento al escribirlas en coordenadas polares. Notamos también que la ecuación (5.22) establece que  $\rho \geq 0$ , mientras que  $\theta$  puede ser cualquier número real. No restringimos  $\theta$  al intervalo  $[0, 2\pi]$ , ya que las coordenadas polares se relacionan con las coordenadas cartesianas a través de funciones trigonométricas definidas para todo número real. Veremos su significado físico cuando estudiemos funciones de movimiento en coordenadas polares.

Veamos ahora cómo calcular la distancia entre dos puntos en coordenadas polares. Sabemos calcular la distancia  $d_{AB}$  entre dos puntos cualesquiera  $A$  y  $B$  dadas sus coordenadas cartesianas (ecuación (4.2)), entonces usando las ecuaciones (5.23) podemos calcular  $d_{AB}$  en coordenadas polares (ver figura 5.6),

$$\begin{aligned} d_{AB} &= \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(x_A^2 + y_A^2) + (x_B^2 + y_B^2) - 2(x_A x_B + y_A y_B)} \\ &= \sqrt{\rho_A^2 + \rho_B^2 - 2\rho_A \rho_B (\cos(\theta_A) \cos(\theta_B) + \sin(\theta_A) \sin(\theta_B))} \\ &= \sqrt{\rho_A^2 + \rho_B^2 - 2\rho_A \rho_B \cos(\theta_A - \theta_B)}, \end{aligned} \quad (5.25)$$

donde en la última igualdad se usó la identidad trigonométrica para el coseno de una suma,  $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta)$ .

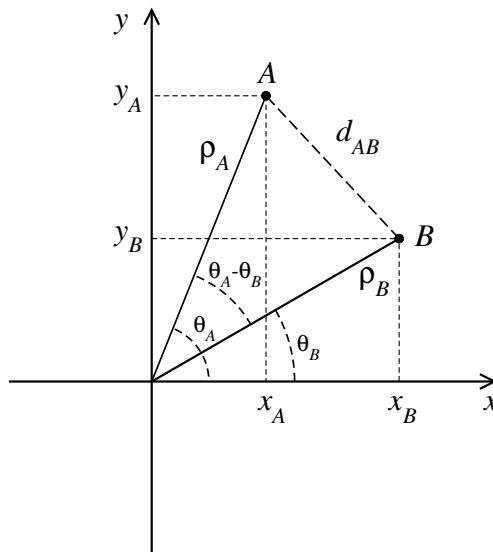


Figura 5.6: Coordenadas cartesianas y polares de dos puntos y la distancia entre ellos.

### 5.2.1 Coordenadas polares y funciones de movimiento

Si queremos describir el movimiento de un cuerpo dado, ya vimos en la sección 4.2 que podemos hacer una serie de mediciones de la posición del cuerpo en  $n$  instantes distintos  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , y estas mediciones las podemos expresar en cualquier sistema de coordenadas, en particular podemos usar cartesianas o polares,

$t$	$x$	$y$	$\rho$	$\theta$
$t_1$	$x_1$	$y_1$	$\rho_1$	$\theta_1$
$t_2$	$x_2$	$y_2$	$\rho_2$	$\theta_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$t_n$	$x_n$	$y_n$	$\rho_n$	$\theta_n$

Podemos entonces expresar funciones de movimiento en cualquier sistema de coordenadas, o sea, obtener tanto  $(x(t), y(t))$ , como  $(\rho(t), \theta(t))$ . Claramente, aunque sean funciones distintas, ambos pares describen el movimiento del cuerpo, que **no** depende del sistema de coordenadas elegido.

En las figuras 5.7 a 5.10 se muestran las funciones de movimiento en coordenadas polares, su gráfico en el plano  $\rho - \theta$  y su trayectoria para algunos ejemplos:

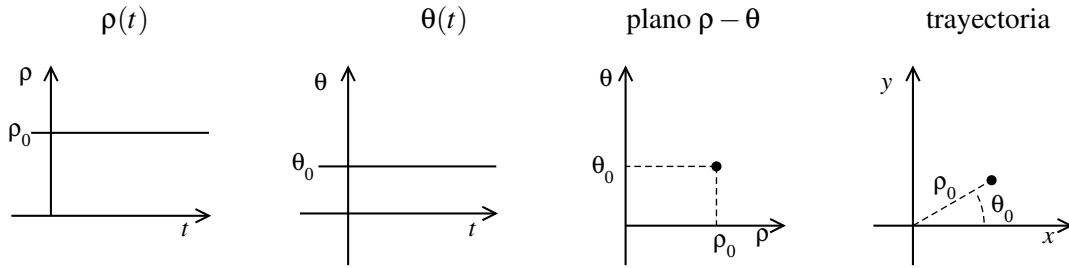


Figura 5.7: Cuerpo en reposo.

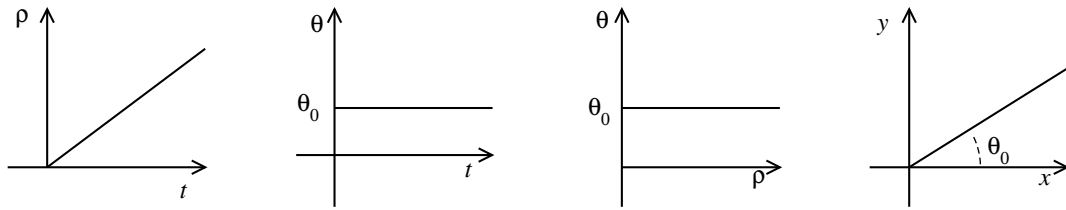


Figura 5.8: MRU:  $\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t$ ;  $\vec{v}_0 = v_0 (\cos(\theta_0)\hat{i} + \sin(\theta_0)\hat{j})$ ;  $t \geq 0$ .

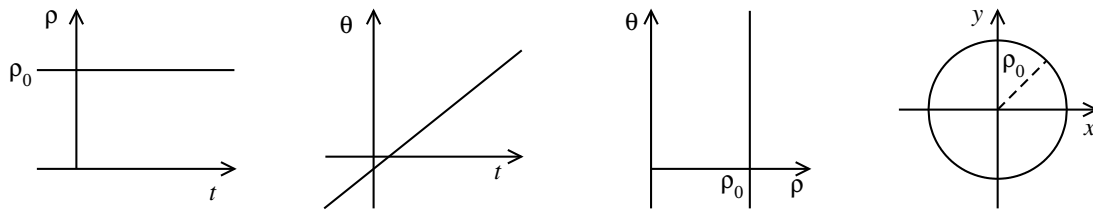


Figura 5.9: Movimiento circular uniforme (MCU).

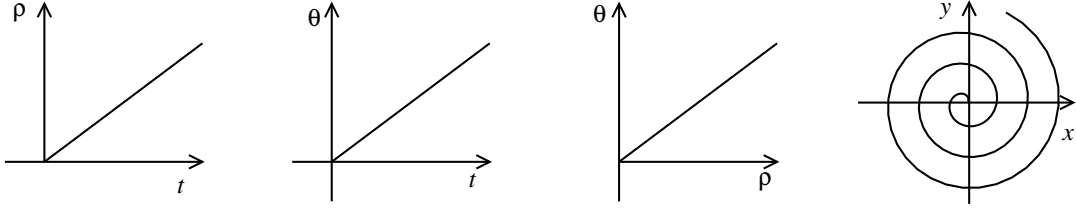


Figura 5.10: Espiral de Arquímedes:  $\vec{r}(t) = v_0 t (\cos(\omega_0 t) \hat{i} + \sin(\omega_0 t) \hat{j})$ ;  $\rho(t) = v_0 t$ ;  $\theta(t) = \omega_0 t$ .

Veamos en detalle un ejemplo bien conocido en coordenadas cartesianas: el movimiento rectilíneo uniforme, que nos permitirá discutir las propiedades de las funciones  $\rho(t)$  y  $\theta(t)$ . Sabemos que el hecho experimental de la continuidad del movimiento y velocidad de los cuerpos nos llevó a postular que las funciones de movimiento  $x(t)$  e  $y(t)$  deben ser continuamente diferenciables. También podemos concluir que la coordenada  $\rho(t)$ , que representa la distancia del móvil al origen, debe ser continua. Pero como veremos, el hecho de que la coordenada  $\theta$  no está definida en el origen trae ciertos problemas matemáticos. Para ello estudiemos el siguiente MRU **que pasa por el origen de coordenadas**:

$$\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t = v_{0x} t \hat{i} + v_{0y} t \hat{j} \Rightarrow y(x) = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x; v_{0x} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{m}{s}; v_{0y} = \frac{1}{2} \frac{m}{s}. \quad (5.26)$$

Estas funciones de movimiento y la correspondiente trayectoria se muestran en la figura 5.11.

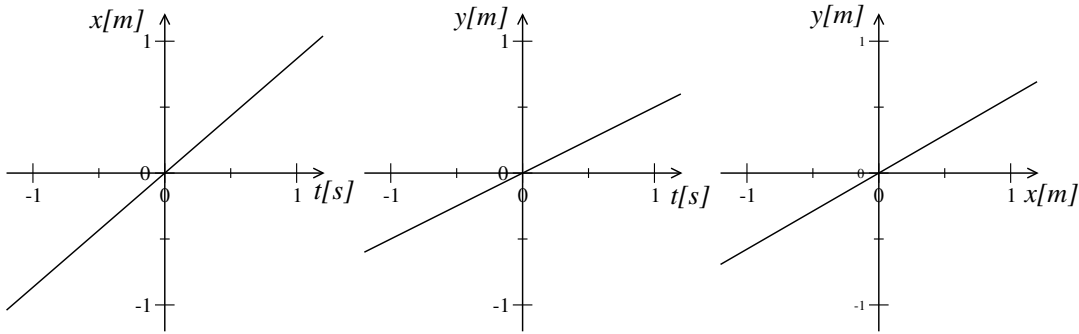


Figura 5.11: Funciones de movimiento y trayectoria de un móvil descrito por las ecuaciones (5.26).

Tratemos ahora este problema en coordenadas polares. Usando la ecuación (5.22) obtenemos

$$\rho(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)} = |\vec{v}_0 t| = 1 \frac{m}{s} |t|, \quad (5.27)$$

mientras que la ecuación (5.24) nos da para la coordenada angular

$$\theta(t) = \arctan\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right) = \arctan\left(\frac{v_{0y}}{v_{0x}}\right). \quad (5.28)$$

Analicemos primero la coordenada  $\rho$ ;  $\rho(t) = |\vec{v}_0 t| = 1 \frac{m}{s} |t| \Rightarrow$  es continua pero **no diferenciable** en  $t = 0$

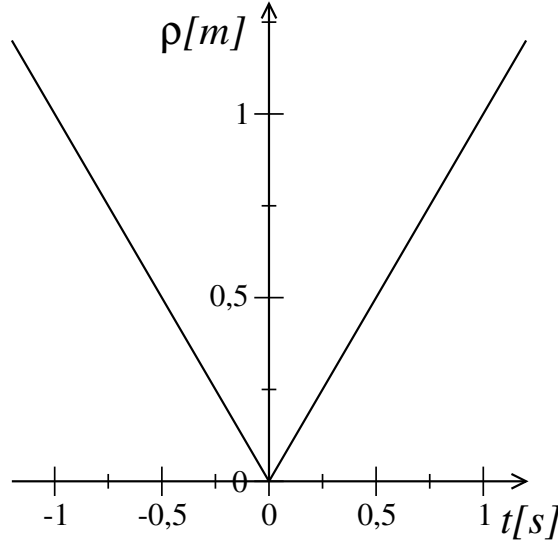


Figura 5.12: Función  $\rho(t)$  dada por la ecuación (5.27), cuya derivada es discontinua en  $t = 0$ .

Volvamos ahora a la ecuación (5.28) para  $\theta(t)$ , donde  $\vec{v}_0$  es dado por (5.26), obteniendo

$$\theta(t) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad (5.29)$$

pero esta fórmula no debe confundirnos, dijimos que al calcular la función arcotangente debemos además indicar el cuadrante según la ecuación (4.34), así

- $t > 0 \Rightarrow x, y > 0 \Rightarrow$  primer cuadrante

- $t < 0 \Rightarrow x, y < 0 \Rightarrow$  tercer cuadrante

como se observa en la figura 5.13, obteniendo entonces

$$\theta(t) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{6} & \text{si } t > 0 \\ \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6} & \text{si } t < 0 \end{cases} . \quad (5.30)$$

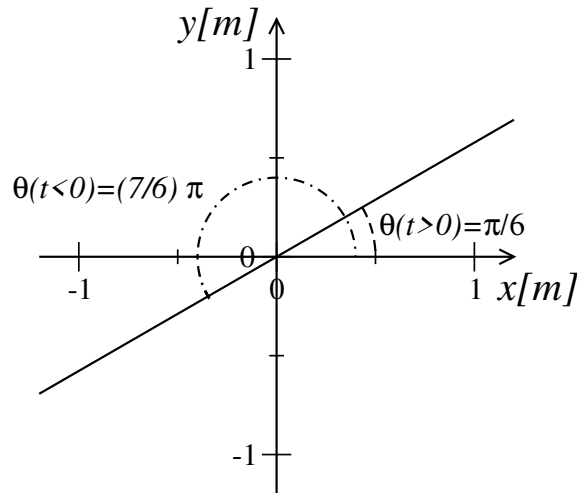


Figura 5.13: Trayectoria de la figura 5.11, mostrando los ángulos que forma con el eje  $x$ .

Vemos de la figura 5.13 que  $\theta(t)$  es **discontinua** en  $t = 0$ , esto es, en el origen, donde  $\theta$  **no** está definida, como se muestra en la figura 5.14.

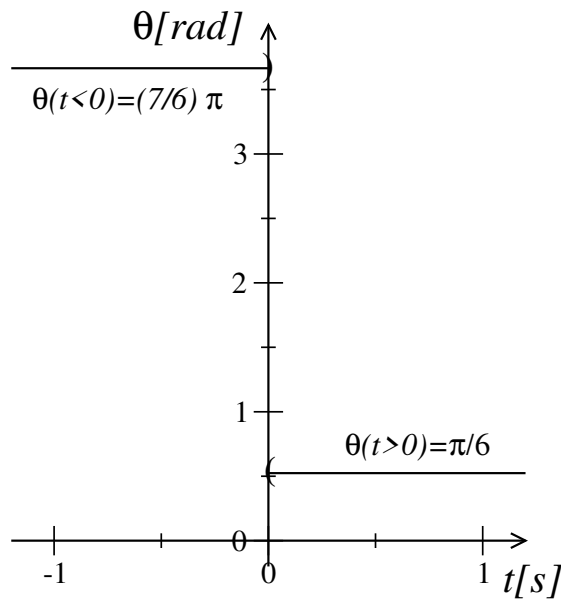


Figura 5.14:  $\theta$  vs.  $t$  para la trayectoria dada por la ecuación (5.26), mostrando una discontinuidad en  $t = 0$ .

Finalmente el gráfico de  $\theta(\rho)$  (que no es una función) también resulta discontinuo en  $\rho = 0$ , como se muestra en la figura 5.15

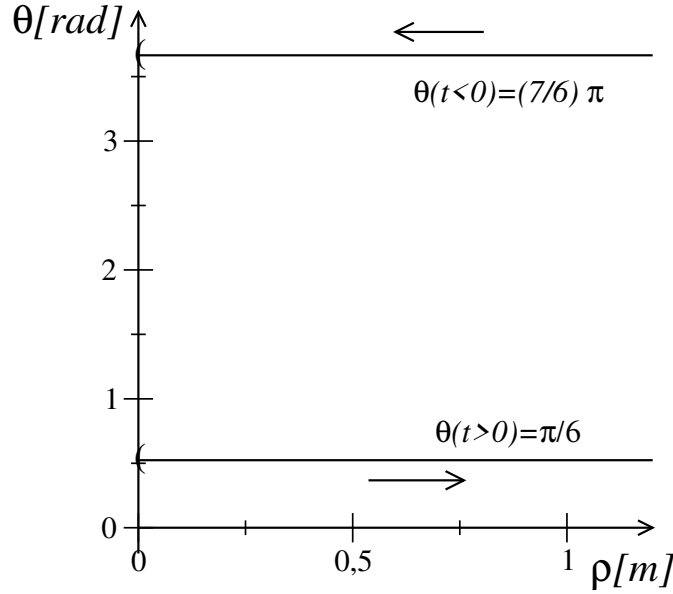


Figura 5.15:  $\theta$  vs.  $\rho$  para la trayectoria dada por la ecuación (5.26), mostrando una discontinuidad en  $\rho = 0$  (las flechas indican el sentido de movimiento).

Debe quedar claro que la trayectoria del cuerpo es rectilínea (figura 5.11), independientemente del sistema de coordenadas empleado para describir su movimiento, mientras que las discontinuidades encontradas en coordenadas polares provienen del *problema matemático* resultante de la indefinición de  $\theta$  en el origen de coordenadas, y las encontraremos siempre que la trayectoria pase por dicho punto.

### Unidades de magnitudes angulares

Estamos acostumbrados a medir ángulos en el llamado *sistema sexagesimal*, que divide la circunferencia en 360 partes llamadas grados, y se denotan con un supraíndice *o*. Así un ángulo recto mide  $90^\circ$ . En este sistema, cada grado se divide en 60 minutos,  $1^\circ = 60'$ , y cada minuto en 60 segundos,  $1' = 60''$ . El principal motivo del uso de este sistema es que, al ser 360 divisible por muchos enteros, resulta cómodo de utilizar en variadas ocasiones. Por el mismo motivo, también es popular (aunque menos usado) el sistema centesimal, el cual parte el ángulo recto en 100 unidades llamadas *gradianes*.

Sin embargo una manera natural de definir la medida de un ángulo es dividir la longitud de un arco de circunferencia por la longitud del radio de la misma. Así la unidad de medida será la longitud de un arco de circunferencia que mide igual que su radio dividida por este último. Notemos que esta es una cantidad **adimensional**, pero para evitar confusiones y dejar en claro que hablamos de ángulos, la llamaremos *radián*. En estas unidades, el ángulo de una circunferencia completa es  $2\pi$ , donde  $\pi$ , uno de los mas célebres números de la matemática, es irracional, y sus primeras 50 cifras son

$$\pi \simeq 3.1415926535897932384626433832795028841971693993751. \quad (5.31)$$

Dado que la circunferencia mide  $360^\circ$  o  $2\pi \text{ rad}$  (y el ángulo recto  $90^\circ$  o  $\pi/2 \text{ rad}$ ), podemos obtener el factor de conversión de una unidad a la otra,

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \simeq 0.01745329252 \text{ rad} \quad ; \quad 1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \simeq 57.29577951^\circ. \quad (5.32)$$



Como el radián es una magnitud *ficticia*, no la tendremos en cuenta cuando la multiplicamos por una magnitud "verdadera", por ejemplo  $\text{rad} \times m = m$ . En el caso de división de magnitudes, por ejemplo  $\text{rad}/s = s^{-1}$ , pueden utilizarse indistintamente ambas notaciones.

Debemos tener en cuenta que  $\pi$  es un número irracional, entonces, como sucede con todos los números irracionales, **no** debemos reemplazar el símbolo  $\pi$  por una aproximación numérica (por ejemplo la ecuación (5.31)) a menos que sea imprescindible.

### Los versores $\hat{u}_\rho$ y $\hat{u}_\theta$ en coordenadas polares

Así como  $\hat{i}$  y  $\hat{j}$  son los versores en las direcciones de crecimiento de las coordenadas  $x$  e  $y$ , respectivamente, podemos también definir versores en las direcciones de crecimiento de las coordenadas  $\rho$  y  $\theta$ , o sea, los versores que en el plano  $\rho - \theta$  se muestran en la figura 5.16.

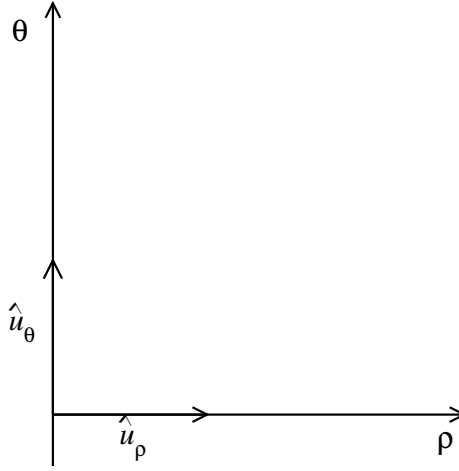


Figura 5.16: Versores  $\hat{u}_\rho$  y  $\hat{u}_\theta$  en el plano  $\rho - \theta$ .

Pero este no es el plano físico donde se mueve un móvil, es entonces necesario conocer la expresión de los versores  $\hat{u}_\rho$  y  $\hat{u}_\theta$  en un sistema de coordenadas cartesiano ortogonal en el plano  $x - y$ .

Para obtener  $\hat{u}_\rho$  usamos que  $\rho = |\vec{r}|$ , por lo tanto

$$\hat{u}_\rho = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{x\hat{i} + y\hat{j}}{|\vec{r}|} = \frac{\rho \cos(\theta)\hat{i} + \rho \sin(\theta)\hat{j}}{\rho} = \cos(\theta)\hat{i} + \sin(\theta)\hat{j}. \quad (5.33)$$

La forma más sencilla de calcular la expresión del versor  $\hat{u}_\theta$ , es usar el hecho que, como se ve en la figura 5.16, este versor es ortogonal a  $\hat{u}_\rho$ ; como además  $\hat{u}_\theta$  es un versor, tenemos dos condiciones:

$$\hat{u}_\rho \cdot \hat{u}_\theta = \cos(\theta)u_{\theta,x} + \sin(\theta)u_{\theta,y} = 0 \quad ; \quad u_{\theta,x}^2 + u_{\theta,y}^2 = 1, \quad (5.34)$$

donde  $u_{\theta,x}$  y  $u_{\theta,y}$  son las componentes cartesianas del versor  $\hat{u}_\theta$  y  $\cos(\theta)$  y  $\sin(\theta)$ , las componentes cartesianas del versor  $\hat{u}_\rho$  dadas en la ecuación (5.33). Estas ecuaciones tienen dos soluciones  $u_{\theta,x} = \pm \sin(\theta)$ ;  $u_{\theta,y} = \mp \cos(\theta)$ , lo que era de esperar, ya que una dirección (ortogonal a  $\hat{u}_\rho$ ) define dos sentidos, y por lo tanto dos versores posibles. Dada la convención usual de definir el ángulo  $\theta$  a partir del eje  $x$  en sentido antihorario, pedimos que para  $\theta = 0$  se cumpla  $\hat{u}_\theta = \hat{j}$ , así, de las dos soluciones nos quedamos

con

$$\hat{u}_\theta = -\text{sen}(\theta) \hat{i} + \cos(\theta) \hat{j}. \quad (5.35)$$

Notemos que este versor coincide con el versor  $\hat{u}_v$  definido en la ecuación (5.11).

Para un cuerpo en movimiento, si  $\theta$  depende del tiempo, entonces los vectores  $\hat{u}_\rho$  y  $\hat{u}_\theta$  también dependerán del tiempo. Con esta definición de los versores  $\hat{u}_\rho$  y  $\hat{u}_\theta$ , el vector posición toma una expresión muy simple en coordenadas polares,

$$\vec{r}(t) = \rho(t) \hat{u}_\rho(t). \quad (5.36)$$

En la figura 5.17 mostramos los versores  $\hat{u}_\rho$  y  $\hat{u}_\theta$  en el plano  $x-y$  para dos puntos distintos  $A$  y  $B$ .

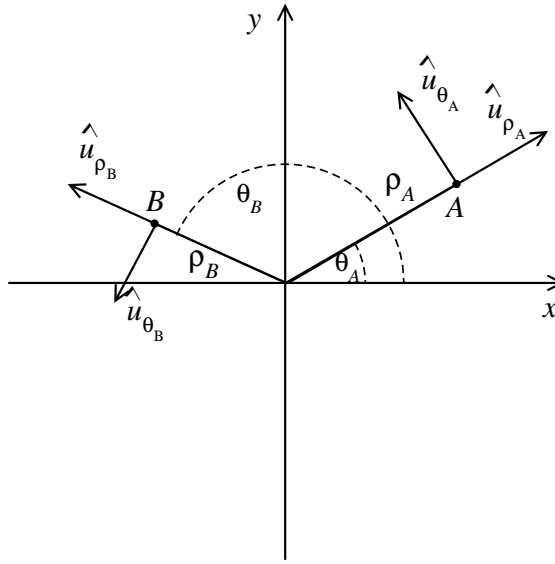


Figura 5.17: Versores  $\hat{u}_\rho$  y  $\hat{u}_\theta$  en los puntos  $A$  y  $B$  en el plano  $x-y$ .

### SECCIÓN 5.3

## Movimiento circular - parte II

Vimos que no resulta muy conveniente describir un MRU en coordenadas polares; ya hemos discutido que siempre hay que usar las herramientas que mas convengan para describir un fenómeno físico, que ocurre independientemente de nuestra observación y descripción, y claramente para describir movimientos rectilíneos resulta conveniente utilizar un sistema cartesiano.

Distinto es el caso de un cuerpo en movimiento circular, en este caso trae simplicidad en la descripción usar un sistema de coordenadas polares, centrado en el círculo, ya que la ecuación (5.3), que define un movimiento circular, en coordenadas polares toma la simple forma

$$\rho = R, \quad (5.37)$$

es decir,  $p$  es una constante, el radio del círculo, y solo necesitamos la función  $\theta(t)$  para describir completamente el movimiento. Conocida esta función, el vector posición en función del tiempo será

$$\vec{r}(t) = R \hat{u}_\rho(t). \quad (5.38)$$

Para calcular la velocidad debemos derivar el vector posición respecto del tiempo. Hasta ahora habíamos derivado vectores cuyas componentes están escritas en coordenadas cartesianas, donde los versores son constantes y por lo tanto su derivada respecto al tiempo es cero. Sin embargo, como se observa en la figura 5.17, en un sistema de coordenadas polares los versores modifican su dirección cuando cambia la posición del cuerpo cuyo movimiento describimos. Resulta entonces conveniente calcular las derivadas temporales de los versores  $\hat{u}_\rho$  y  $\hat{u}_\theta$ ,

$$\frac{d\hat{u}_\rho}{dt} = -\sin(\theta) \frac{d\theta}{dt} \hat{i} + \cos(\theta) \frac{d\theta}{dt} \hat{j} = \frac{d\theta}{dt} (-\sin(\theta) \hat{i} + \cos(\theta) \hat{j}) = \omega(t) \hat{u}_\theta(t); \quad (5.39)$$

$$\frac{d\hat{u}_\theta}{dt} = -\cos(\theta) \frac{d\theta}{dt} \hat{i} - \sin(\theta) \frac{d\theta}{dt} \hat{j} = -\frac{d\theta}{dt} (\cos(\theta) \hat{i} + \sin(\theta) \hat{j}) = -\omega(t) \hat{u}_\rho(t). \quad (5.40)$$

Notemos que las derivadas de los versores **no** resultan versores, sino vectores de módulo  $|\omega(t)|$ . Entonces, en el caso de un movimiento circular el vector velocidad es

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = R \frac{d\hat{u}_\rho(t)}{dt} = R \omega(t) \hat{u}_\theta(t). \quad (5.41)$$

Es evidente, a partir de esta expresión del vector velocidad, que  $\vec{r}(t) \perp \vec{v}(t)$ . Para calcular el vector aceleración debemos derivar la velocidad respecto al tiempo

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (R \omega(t) \hat{u}_\theta(t)) = R \frac{d\omega}{dt} \hat{u}_\theta + R \omega \frac{d\hat{u}_\theta}{dt} = R \gamma(t) \hat{u}_\theta(t) - R \omega^2(t) \hat{u}_\rho(t). \quad (5.42)$$

En esta expresión del vector aceleración es claro que la componente en la dirección del versor  $\hat{u}_\theta$  es paralela a la velocidad y la componente en la dirección  $\hat{u}_\rho$  es normal a la velocidad, por lo tanto

$$\vec{a}_t = R \gamma(t) \hat{u}_\theta(t) \quad ; \quad \vec{a}_n = -R \omega^2(t) \hat{u}_\rho(t). \quad (5.43)$$

La componente normal de la aceleración tiene la dirección  $\hat{u}_\rho$  y sentido opuesto, es decir que apunta hacia el centro del círculo (parte cóncava de la trayectoria). Esta componente de la aceleración, que es la responsable de la modificación de la dirección de la velocidad, en el movimiento circular recibe el nombre de *aceleración centrípeta*.

Basta reemplazar las expresiones de los versores polares por sus componentes cartesianas, dadas en las ecuaciones (5.33) y (5.35) para verificar que el tratamiento en coordenadas polares es equivalente al tratamiento en coordenadas cartesianas hecho en la sección 5.1. Dejamos esta verificación como ejercicio.

### 5.3.1 Integración de las ecuaciones de movimiento para un movimiento circular

Ya vimos en el capítulo 3 que para obtener el vector posición de un cuerpo en movimiento conocida su aceleración, es necesario dar como datos la posición en un instante y velocidad en el mismo u otro instante, o alternativamente, también puede darse la posición en dos instantes.

También dijimos que **no** sabemos integrar vectores si los versores no son constantes, así, en general, si  $\vec{a}(t)$  es dada en coordenadas polares,

$$\vec{v}(t) = \int \vec{a}(t) dt = \int (a_p(t) \hat{u}_p(t) + a_\theta(t) \hat{u}_\theta(t)) dt, \quad (5.44)$$

como los versores dependen de  $t$  a través de  $\theta$ ,  $\hat{u}_p(t) = \hat{u}_p(\theta(t))$ ;  $\hat{u}_\theta(t) = \hat{u}_\theta(\theta(t))$  y **no** conocemos  $\theta(t)$ , **no** sabemos calcular la integral (5.44).

Sin embargo, en el caso particular del movimiento circular, la condición  $p = R$  simplifica los cálculos si trabajamos en coordenadas polares, ya que esta es una de las funciones de movimiento, ¡y es también una constante dato del problema! Como solo necesitamos conocer  $\theta(t)$ , es suficiente dar como datos la aceleración angular  $\gamma(t)$ , la velocidad angular en algún instante  $t_1$ ,  $\omega(t_1) = \omega_1$  y el ángulo en otro instante (que puede o no coincidir con  $t_1$ ),  $\theta(t_2) = \theta_2$ , o alternativamente, dar el ángulo en dos instantes distintos. Luego el procedimiento es similar al caso unidimensional desarrollado en el capítulo 3.

Veamos cómo se procede: tenemos un cuerpo en movimiento sobre una circunferencia de radio  $R = 1\text{ m}$ , cuya aceleración angular es dada por la función  $\gamma(t) = (1/2)\text{ rad/s}^2$  y sabemos que  $\omega(1\text{ s}) = (1/2)\text{ rad/s}$  y  $\theta(0) = \pi/4$ , entonces

$$\omega(t) = \int \gamma(t) dt = \frac{1\text{ rad}}{2s^2} t + C, \quad (5.45)$$

la condición para la velocidad angular nos dice que  $C = 0$ , así el ángulo viene dado por

$$\theta(t) = \int \omega(t) dt = \frac{1\text{ rad}}{2s^2} \frac{t^2}{2} + D, \quad (5.46)$$

como  $\theta(0) = \pi/4$  obtenemos  $D = \pi/4$ . Una vez obtenida la función  $\theta(t)$ , el vector posición en ambos sistemas, coordenadas polares y cartesianas es dado por

$$\vec{r}(t) = R \hat{u}_p(\theta(t)) = R \left( \cos\left(\frac{t^2}{4s^2} + \frac{\pi}{4}\right) \hat{i} + \sin\left(\frac{t^2}{4s^2} + \frac{\pi}{4}\right) \hat{j} \right). \quad (5.47)$$

Nos preguntamos ahora cuáles son los vectores  $\vec{r}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{a}$ ,  $\vec{a}_t$ ,  $\vec{a}_n$  en  $t = 0$  y en el instante en que el móvil pasa por primera vez por el eje y.

Reemplazando las condiciones iniciales  $\theta(0) = \pi/4$ ;  $\omega(0) = 0$  y  $\gamma = (1/2)\text{ rad/s}^2$ , en las ecuaciones (5.47), (5.41) y (5.43), obtenemos

$$\vec{r}(0) = \frac{1\text{ m}}{\sqrt{2}} (\hat{i} + \hat{j}) \quad ; \quad \vec{v}(0) = 0 \quad ; \quad \vec{a}(0) = \vec{a}_t(0) = \frac{1\text{ m}}{2\sqrt{2}s^2} (-\hat{i} + \hat{j}). \quad (5.48)$$

La condición de que el móvil pase por primera vez por el eje y significa  $\theta(t_1) = \pi/2$ , esto es, el

tiempo en que pasa por primera vez por eje  $y$  es  $t_1 = \sqrt{\pi}s$ , obteniéndose para los vectores buscados

$$\vec{r}(t_1) = 1m\hat{j} ; \quad \vec{v}(t_1) = -\frac{\sqrt{\pi}m}{2s}\hat{i} ; \quad \vec{a}_n(t_1) = -\frac{\pi m}{4s^2}\hat{j} ; \quad \vec{a}_t(t_1) = -\frac{1m}{2s^2}\hat{i}, \quad (5.49)$$

donde  $\vec{a}(t_1) = \vec{a}_t(t_1) + \vec{a}_n(t_1)$ . Estos vectores, en ambos tiempos,  $t = 0, t_1$ , son mostrados en la figura 5.18.

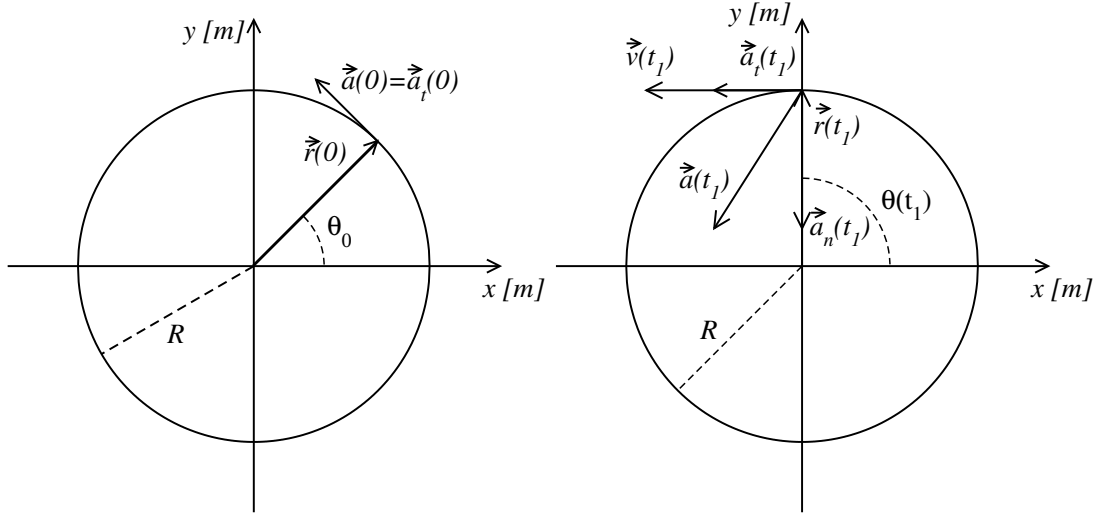


Figura 5.18: Vectores  $\vec{r}$ ,  $\vec{v}$ ,  $\vec{a}$ ,  $\vec{a}_t$ ,  $\vec{a}_n$  en  $t = 0$  (izquierda) y  $t = t_1$  (derecha).

Analicemos un segundo ejemplo. Para la preparación de pilotos y astronautas se los introduce en dispositivos que pueden girar a gran velocidad de manera de exponerlos a grandes aceleraciones en el plano horizontal. En este tipo de experimentos se acostumbra expresar las aceleraciones logradas en términos de la aceleración de la gravedad  $g$  ( $g = 9,8 \frac{m}{s^2}$ ). Una persona tiene distinta tolerancia para aceleraciones verticales u horizontales. En promedio la máxima aceleración vertical hacia arriba que puede soportar una persona es  $5g$  pero utilizando trajes antigraavedad este límite es de  $10g$  y cuando descende la máxima aceleración soportada es entre  $2g$  y  $3g$ . Cuando la aceleración es en la dirección horizontal la máxima aceleración soportada es de aproximadamente  $20g$ . Este dispositivo de entrenamiento puede lograr aceleraciones de hasta  $30g$ . El radio de la trayectoria que describe el individuo de prueba es de  $6m$  y la aceleración angular  $\gamma = 0,3s^{-2}$ . Con esta información, y sabiendo que el simulador parte del reposo, calculemos:

- a) ¿Cuál es la velocidad angular  $\omega_m$  del simulador cuando la aceleración centrípeta llega a  $20g$ ?  
La aceleración centrípeta es  $\vec{a}_n = -R\omega^2\hat{u}_p$ , cuyo módulo resulta  $|\vec{a}_n| = R\omega^2$ , obteniendo

$$\omega_m = \sqrt{\frac{|\vec{a}_n|}{R}} = \sqrt{\frac{20g}{6m}}, \quad (5.50)$$

reemplazando los valores obtenemos  $\omega_m = 5,715 rad/s$ .

- b) ¿Cuánto tiempo demora el simulador en alcanzar esta velocidad angular?  
Sabiendo que la aceleración angular es constante y que el sistema parte del reposo podemos obtener la velocidad angular en función del tiempo,  $\gamma = 0,3 rad/s^2$ , siendo la velocidad angular

$$\omega = \int \gamma dt = \gamma t + C, \quad (5.51)$$

como  $\omega(0) = 0$ , tenemos que  $C = 0$ . Ahora podemos determinar cuánto tiempo demora el simulador en alcanzar la velocidad angular deseada,

$$t_m = \frac{\omega_m}{\gamma} = t_m = 19,052s. \quad (5.52)$$

- c) Si luego de alcanzar la velocidad angular máxima  $\omega_m$ , esta se mantiene constante, dé la expresión de la aceleración que experimenta el individuo de prueba en coordenadas polares.

Para tiempos menores a  $t_m$  hay aceleración angular y por lo tanto el vector aceleración tendrá una componente tangencial y otra normal. Para tiempos mayores a  $t_m$  la velocidad angular es constante, por lo que la aceleración tangencial es nula y el vector aceleración sólo tendrá componente normal,

$$\vec{a}(t) = \begin{cases} R\gamma\hat{u}_\theta - R\omega^2\hat{u}_\rho & \text{si } t \leq t_m \\ -R\omega_m^2\hat{u}_\rho & \text{si } t > t_m, \end{cases} \quad (5.53)$$

reemplazando obtenemos

$$\vec{a}(t) = \begin{cases} R\gamma\hat{u}_\theta - R\gamma^2 t^2 \hat{u}_\rho & \text{si } t \leq t_m \\ -R\gamma^2 t_m^2 \hat{u}_\rho & \text{si } t > t_m. \end{cases} \quad (5.54)$$

- d) Calcule el valor del módulo de la aceleración en el instante que se alcanza la velocidad angular máxima.

En el instante  $t_m$  las componentes tangencial y normal del vector aceleración son

$$\vec{a}(t) = R\gamma\hat{u}_\theta - R\gamma^2 t_m^2 \hat{u}_\rho, \quad (5.55)$$

obteniendo

$$|\vec{a}(t)| = \sqrt{(R\gamma)^2 + [R\gamma^2 (t_m^-)^2]^2} = 196,008 \frac{m}{s^2} = 20,001g. \quad (5.56)$$

### 5.3.2 Encuentro en movimiento circular

El problema de encuentro de dos cuerpos toma también una forma simple en coordenadas polares si ambos cuerpos realizan movimientos circulares; en particular si ambos se mueven sobre la misma circunferencia de radio  $R$ , como los móviles  $A$  y  $B$  de la figura 5.19.

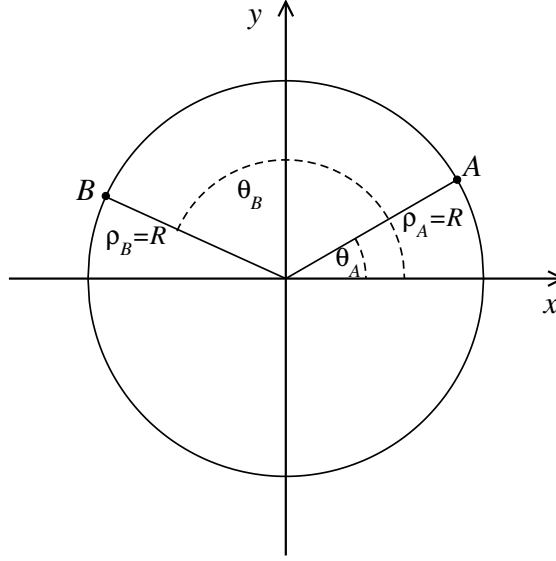


Figura 5.19: Dos móviles,  $A$  y  $B$ , en un movimiento circular sobre la misma circunferencia de radio  $R$ .

Así la ecuación (4.197) para un problema de encuentro en el plano,

$$\vec{r}_A(t_e) = \vec{r}_B(t_e), \quad (5.57)$$

donde  $t_e$  es el, o los tiempos de encuentro soluciones de esta ecuación, se reduce en el caso de un movimiento circular al par de ecuaciones

$$\cos(\theta_A(t_e)) = \cos(\theta_B(t_e)) ; \quad \sin(\theta_A(t_e)) = \sin(\theta_B(t_e)). \quad (5.58)$$

Hay que tener cuidado al buscar soluciones de este par de ecuaciones, ya que las funciones trigonométricas involucradas tienen período  $2\pi$ , esto es,  $\cos(\alpha + 2n\pi) = \cos(\alpha)$  ;  $\sin(\alpha + 2n\pi) = \sin(\alpha) \forall n \in \mathbb{Z}$ . Esto nos dice que  $\theta_A(t_e) = \theta_B(t_e)$  es solo la solución particular con  $n = 0$ , la solución general de las ecuaciones (5.58) es

$$\theta_A(t_e) + 2n\pi = \theta_B(t_e) \quad ; \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (5.59)$$

La interpretación es sencilla, nos dice que dos móviles pueden encontrarse cuando han realizado cada uno distinto número de vueltas. Pensemos en el caso mas simple: uno de los cuerpos, digamos el  $A$  está en reposo en el punto  $\vec{r}_A = R\hat{i}$ , el cuerpo  $B$  se mueve con MCU, entonces cada vez que el cuerpo  $B$  complete una vuelta habrá un encuentro con  $A$ . Más generalmente, si ambos cuerpos se muevan con MCU, y al menos una velocidad angular es no nula, es fácil comprobar que si  $\omega_A \neq \omega_B$  **siempre** habrá infinitos encuentros, pero si  $\omega_A = \omega_B$ , entonces no se producen encuentros (salvo el caso trivial que ambos móviles tengan igual posición para todo tiempo). Veamos algunos ejemplos concretos.

### El problema del reloj

Resolvamos un problema clásico de encuentro para MCU: En un reloj común, la aguja de las horas da una vuelta cada doce horas, mientras que la del minutero lo hace en una hora, asumiendo que el reloj es

“perfecto” (esto es, no atrasa ni adelanta) ¿En qué instantes se encuentran superpuestas las agujas de las horas y los minutos?

En este caso definiremos  $t = 0$  a las 12 : 00 h, cuando ambas agujas están en posición vertical. Esta elección, midiendo los ángulos a partir del eje y creciendo en sentido *horario*, es un buen ejemplo donde se muestra que podemos abandonar las convenciones cuando no resultan convenientes. Entonces, tenemos

$$\begin{aligned}\theta_h &= \omega_h t ; \omega_h \cdot 12 h = 2\pi \Rightarrow \omega_h = \frac{\pi}{6} \text{rad/h} \\ \theta_m &= \omega_m t ; \omega_m \cdot 1 h = 2\pi \Rightarrow \omega_m = 2\pi \text{rad/h}.\end{aligned}\quad (5.60)$$

Nos interesan solo las soluciones con  $0 \leq \theta_h < 2\pi$ , esto es

$$\theta_m(t_e^{(n)}) = \theta_h(t_e^{(n)}) + 2n\pi ; n = 0, 1, \dots, 10. \quad (5.61)$$

ya que para  $n = 11$ , que corresponde al doceavo cruce, ambas agujas vuelven a encontrarse a las 12 : 00 h. Usando (5.60), las soluciones de la ecuación (5.61) tienen la forma

$$2\pi \frac{\text{rad}}{h} t_e^{(n)} = \frac{\pi \text{rad}}{6 h} t_e^{(n)} + 2n\pi \Rightarrow t_e^{(n)} = \frac{12}{11} n h ; n = 0, 1, \dots, 10. \quad (5.62)$$

Entonces el primer cruce se produce a los  $12/11h$  de hora,  $t_e^{(1)} = 1.0909 \dots h = 1h 5min 27.27s$ , el segundo encuentro a dos veces este tiempo,  $t_e^{(2)} = 2h 10min 54.54s$ , y así siguiendo hasta llegar al último cruce anterior a las doce,  $t_e^{(10)} = 10h 54min 32.73s$ .

### Problema de encuentro mezclando movimientos rectilíneo y circular

El siguiente ejemplo de encuentro combina un movimiento circular con un movimiento rectilíneo. Se trata de un móvil  $A$  que se mueve sobre un círculo de radio  $R = 1m$ . Elegimos el sistema de coordenadas con origen en el centro del círculo, tal que en  $t = 0$  el móvil se encuentra en  $\vec{r}_A(t = 0) = R\hat{i}$ , definimos  $\theta$  de la manera usual (positivo en sentido antihorario). El móvil tiene una aceleración angular constante  $\gamma_A < 0$  y velocidad angular inicial  $\omega(t = 0) = \omega_0 > 0$ . Tenemos además un segundo móvil  $B$  que se mueve con velocidad constante  $\vec{v} = v_0(\cos(\pi/4)\hat{i} + \sin(\pi/4)\hat{j})$ , con  $v_0 = 2m/s$ , encontrándose en  $t = 0$  en  $\vec{r}_B(t = 0) = -R(\hat{i} + 2\hat{j})$ .

Nos preguntamos cuáles deben ser los valores de  $\gamma_A$  y  $\omega_0$  si exigimos que los puntos de cruce de trayectorias sean puntos de encuentro sin que el móvil  $A$  haya pasado dos veces por el mismo sitio. Nota: esta última condición es necesaria para que el problema tenga solución única; también exige que  $\omega(t) \geq 0$  hasta que se produzcan los encuentros.

Las funciones de movimiento y trayectorias del movimiento rectilíneo uniforme y del movimiento circular con aceleración constante ya han sido estudiadas en detalle, por lo que dejamos como ejercicio comprobar que para el móvil  $A$  el ángulo en función del tiempo viene dado por

$$\theta(t) = \frac{1}{2}\gamma_A t^2 + \omega_0 t, \quad (5.63)$$



y la trayectoria cumple

$$x_A^2 + y_A^2 = R^2. \quad (5.64)$$

Mientras que para el móvil  $B$  tenemos que su vector posición es

$$\vec{r}_B(t) = \left( \frac{v_0}{\sqrt{2}}t - R \right) \hat{i} + \left( \frac{v_0}{\sqrt{2}}t - 2R \right) \hat{j}, \quad (5.65)$$

y su trayectoria resulta

$$y_B(x_B) = x_B - R. \quad (5.66)$$

Una vez obtenidas las trayectorias, debemos encontrar sus puntos de cruce, que denotaremos como  $(x_c, y_c)$ , exigiendo que cumplan ambas ecuaciones (5.64) y (5.66),

$$x_c^2 + y_c^2 = R^2 ; y_c = x_c - R \quad (5.67)$$

utilizando la expresión de  $y_c$  de la segunda ecuación en la primera obtenemos

$$x_c^2 + (x_c - R)^2 = R^2 \Rightarrow 2x_c^2 - 2Rx_c = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_{c1} = 0 & ; y_{c1} = -R \\ x_{c2} = R & ; y_{c2} = 0 \end{cases}, \quad (5.68)$$

encontrando dos cruces de trayectoria, como se muestra en la figura 5.20.

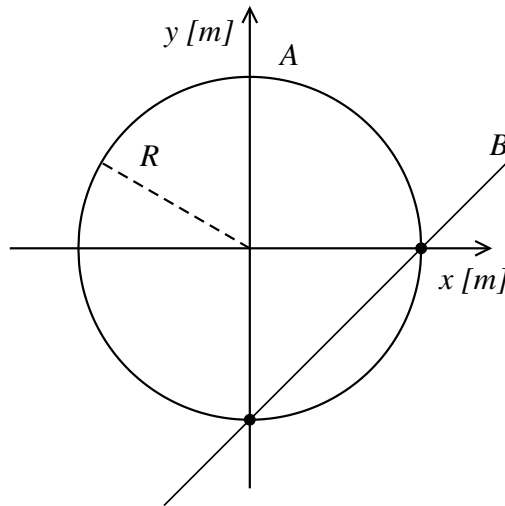


Figura 5.20: Trayectorias de los móviles  $A$  y  $B$  definidas por las ecuaciones (5.64) y (5.66) mostrando con círculos negros sus dos puntos de cruce obtenidos en la ecuación (5.68).

Finalmente debemos obtener los valores de  $\gamma_A$  y  $\omega_0$  tal que los puntos de cruce resulten puntos de encuentro. De la ecuación (5.65) podemos obtener los dos tiempos,  $t_1$  y  $t_2$ , en que el móvil  $B$  pasa por los puntos de cruce, siendo el primero

$$x_B(t_1) = x_{c1} = \frac{v_0}{\sqrt{2}}t_1 - R = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{\sqrt{2}R}{v_0} = \frac{1s}{\sqrt{2}}, \quad (5.69)$$

y para el segundo tiempo obtenemos

$$y_B(t_2) = y_{c2} = \frac{v_0}{\sqrt{2}}t_2 - 2R = 0 \Rightarrow t_2 = \frac{2\sqrt{2}R}{v_0} = \sqrt{2}s = 2t_1. \quad (5.70)$$

Las condiciones para que los puntos de cruce de trayectorias sean también puntos de encuentro son  $\vec{r}_A(t_1) = \vec{r}_B(t_1)$  y  $\vec{r}_A(t_2) = \vec{r}_B(t_2)$ . Estas condiciones, junto a la condición de que el móvil A recorra el círculo solo una vez, dan para la función de movimiento angular en estos tiempos los valores  $\theta(t_1) = 3\pi/2$  y  $\theta(t_2) = 2\pi$ , esto es

$$\theta(t_1) = \frac{3}{2}\pi = \frac{1}{2}\gamma_A t_1^2 + \omega_0 t_1 \quad ; \quad \theta(t_2) = 2\pi = \frac{1}{2}\gamma_A t_2^2 + \omega_0 t_2. \quad (5.71)$$

Las ecuaciones (5.71) forman un conjunto de dos ecuaciones con dos incógnitas:  $\gamma_A$  y  $\omega_0$ , cuya solución es

$$\gamma_A = -2\pi \frac{\text{rad}}{s^2} \quad ; \quad \omega_0 = 2\sqrt{2}\pi \frac{\text{rad}}{s}. \quad (5.72)$$

#### SECCIÓN 5.4

### Movimiento periódico

En esta sección trataremos otro tipo de movimiento con características propias: el *movimiento periódico*.

Volvamos al movimiento circular uniforme (MCU), donde el vector posición es

$$\vec{r}(t) = R (\cos(\omega_0 t + \theta_0) \hat{i} + \sin(\omega_0 t + \theta_0) \hat{j}), \quad (5.73)$$

como ya notamos, las funciones trigonométricas  $\cos(\alpha)$  y  $\sin(\alpha)$  tienen período  $2\pi$ , por lo que en un MCU siempre se cumple

$$\vec{r}(t + 2n\pi/\omega_0) = \vec{r}(t), \quad (5.74)$$

lo cual puede comprobarse directamente usando las expresiones  $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$  y  $\sin(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\sin(\beta) + \sin(\alpha)\cos(\beta)$ .

La ecuación (5.74) tiene una característica muy particular: el móvil vuelve a pasar por el mismo lugar, con igual velocidad y aceleración a intervalos idénticos de tiempo. Para cumplir esta última condición, el movimiento **no** necesita ser un MCU, pensemos por ejemplo en una pista de scalestrix tan complicada como se nos ocurra, con sus cruces, puentes, curvas, etc. Siempre que mantengamos un autito recorriendo la pista con  $|\vec{v}(t)| = \text{constante}$ , si tardó un tiempo  $T$  en dar una vuelta estará al tiempo  $t + nT$  en el

mismo lugar. Otros ejemplos de movimiento periódico son: el movimiento de un péndulo, los latidos del corazón (asumiendo reposo del individuo, por intervalos de tiempo aunque cortos, largos comparados con su período), el movimiento de la tierra alrededor del Sol (aunque estrictamente es cuasiperiódico), el movimiento de los pistones de un motor en régimen, el movimiento de los electrones en algunos circuitos eléctricos (por ejemplo el denominado *RLC*), etc.

Definiremos un movimiento como *periódico* si existe una constante  $T > 0$ , con unidades de tiempo, tal que  $\forall t$  se cumple

$$\vec{r}(t + T) = \vec{r}(t), \quad (5.75)$$

notemos que esto implica que  $\forall t$  se cumple

$$\vec{r}(t + kT) = \vec{r}(t + nT) \quad \forall k, n \in \mathbb{Z}. \quad (5.76)$$

Derivando una y dos veces la ecuación (5.75) obtenemos

$$\vec{v}(t + T) = \vec{v}(t) ; \quad \vec{a}(t + T) = \vec{a}(t) \quad \forall t. \quad (5.77)$$

Finalmente definimos la frecuencia  $f$  como la cantidad de períodos en una unidad de tiempo:

$$f = \frac{1}{T}. \quad (5.78)$$

Si bien las unidades de frecuencia son  $[f] = [1/t]$ , notemos que la frecuencia es la cantidad de vueltas que da el móvil en una unidad de tiempo, por lo que es muy común expresarla como revoluciones (vueltas)  $\times [t]$ . Nos resulta muy familiar esta medida en motores, por ejemplo, el tacómetro de un automóvil mide *revoluciones  $\times$  minuto*.

Volvamos al ejemplo del MCU, la ecuación (5.74) nos dice que en este caso

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \Rightarrow f = \frac{\omega_0}{2\pi}. \quad (5.79)$$

Otro ejemplo conocido de movimiento periódico, esta vez unidimensional, es el oscilador armónico que vimos en la sección 3.6, ecuaciones (3.50) a (3.55) y figura 3.3. La función de movimiento para ese ejemplo es

$$x(t) = 1 \text{ m sen}(2t/s), \quad (5.80)$$

que por tratarse de una función seno, corresponde a un movimiento periódico con  $T = \pi \text{ s}$ .



# 6

## Movimiento relativo

Como repetimos varias veces, los cuerpos están moviéndose en el espacio **independientemente** de nuestro interés por describir dicho movimiento. Y como dicen por ahí, si hay dos personas, habrá al menos dos opiniones. Entonces es muy posible que para describir el movimiento de un dado cuerpo, dos personas que lo observan utilicen dos sistemas de coordenadas diferentes. Como si esto fuera poco, las personas pueden estar en distintos lugares, y además moviéndose a distintas velocidades. Veamos un ejemplo, la descripción del movimiento de una pelota que cae de las manos de un niño que camina por un vagón de un tren en marcha será distinta según la mire el niño, una persona que está sentada en un asiento del vagón, o una vaca que pasta en el campo.

Además, debemos tener en cuenta que un elemento clave de la investigación científica es la **validación de los resultados**: mis resultados **deben** poder ser corroborados por otras personas. Para esto, necesitamos saber describir **un mismo móvil** desde **diferentes sistemas de coordenadas** y relacionar las funciones de movimiento encontradas en cada uno. Es decir, para que la descripción de un movimiento cualquiera sea objetiva, además de dar la función de movimiento, es necesario indicar **unívocamente** el sistema de referencia utilizado. Por otra parte, debe ser posible dar la descripción del movimiento del mismo móvil desde otro sistema de referencia, **siempre y cuando se conozca el movimiento de un sistema de coordenadas respecto a otro**.

### SECCIÓN 6.1

## Cambio de coordenadas

Analicemos qué relación existe entre las coordenadas correspondientes a dos sistemas de referencia diferentes denominados  $A$  y  $B$ . Solo analizaremos el caso en que los sistemas de referencia son ortogonales y tienen sus ejes paralelos entre sí con igual sentido positivo. Las coordenadas de un punto  $P$  del plano en los dos sistemas serán  $(x_{PA}, y_{PA})$  y  $(x_{PB}, y_{PB})$ , respectivamente.

El origen del sistema  $B$ , visto desde el sistema  $A$ , está determinado por el vector posición  $\vec{r}_{BA}$  (léase posición de  $B$  con respecto a  $A$ ) mientras que el origen del sistema  $A$  respecto del sistema  $B$  está dado por  $\vec{r}_{AB}$  (léase posición de  $A$  con respecto a  $B$ ). Queda claro de la figura 6.1 que  $\vec{r}_{BA} = -\vec{r}_{AB}$ ; además se observa que se verifican las siguientes relaciones vectoriales:

$$\vec{r}_{PA} = \vec{r}_{PB} - \vec{r}_{AB} \quad ; \quad \vec{r}_{PB} = \vec{r}_{PA} - \vec{r}_{BA} . \quad (6.1)$$

Notar que en el lado izquierdo de cada igualdad tenemos un vector referido a un sistema de coordenadas y

del derecho dos vectores referidos al otro sistema. Además, resulta arbitrario a qué sistema denominamos  $A$  y a cuál  $B$ , así vemos que, si en la ecuación de la izquierda cambiamos  $A \leftrightarrow B$  obtenemos la ecuación de la derecha y si lo hacemos en la de la derecha obtenemos la de la izquierda.

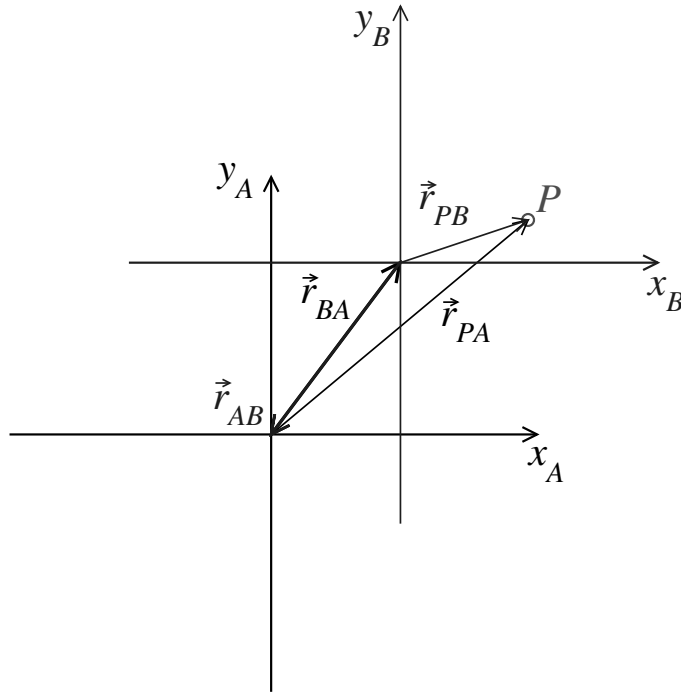


Figura 6.1: Posición del punto  $P$  visto desde dos sistemas de coordenadas  $A$  y  $B$ . Se muestran también los vectores del origen de coordenadas de cada sistema respecto al otro.

Las ecuaciones (6.1) nos permiten encontrar la posición de un objeto (el punto  $P$ ) con respecto a un sistema de coordenadas siempre que conozcamos su posición con respecto a otro sistema y la posición relativa entre ambos sistemas.

Veamos un ejemplo: un dado punto  $P$ , cuyo vector posición en un sistema de coordenadas  $A$  es  $\vec{r}_{PA} = -1m\hat{i} + 2m\hat{j}$  (como solo consideramos sistemas con ejes paralelos entre sí, no necesitamos subíndices en los versores). Un segundo sistema de coordenadas  $B$  tiene su origen respecto a  $A$  en  $\vec{r}_{BA} = 3m\hat{i} + 4m\hat{j}$ , ¿cuál es el vector posición de  $P$  en el sistema  $B$ ,  $\vec{r}_{PB}$ ? La segunda ecuación (6.1) nos dice que

$$\vec{r}_{PB} = \vec{r}_{PA} - \vec{r}_{BA} = -1m\hat{i} + 2m\hat{j} - (3m\hat{i} + 4m\hat{j}) = -4m\hat{i} - 2m\hat{j}. \quad (6.2)$$

Los sistemas de coordenadas y los vectores involucrados se muestran en la figura 6.2.

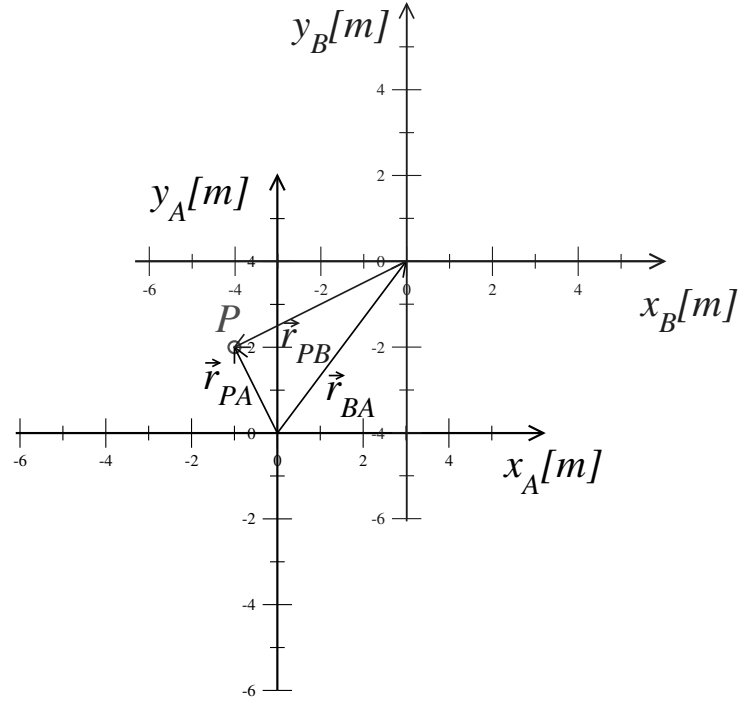


Figura 6.2: Posición del punto  $P$  visto desde dos sistemas de coordenadas  $A$  y  $B$ .

En general, la situación descrita en la figura 6.1 podría evolucionar en el tiempo, es decir, dicha figura podría pensarse como una fotografía en un instante particular. La película completa sería la sucesión de fotografías para distintos valores del tiempo, y debemos incluir la dependencia temporal en las ecuaciones (6.1),

$$\vec{r}_{PA}(t) = \vec{r}_{PB}(t) - \vec{r}_{AB}(t) \quad ; \quad \vec{r}_{PB}(t) = \vec{r}_{PA}(t) - \vec{r}_{BA}(t). \quad (6.3)$$

Estas ecuaciones, que relacionan coordenadas de un punto respecto a dos sistemas de coordenadas se denominan *transformaciones de coordenadas*.

Analicemos los siguientes casos:

- a) Supongamos que los sistemas  $A$  y  $B$  no se mueven uno respecto a otro. Entonces las relaciones son:

$$\vec{r}_{PA}(t) = \vec{r}_{PB}(t) - \vec{r}_{AB} \quad ; \quad \vec{r}_{PB}(t) = \vec{r}_{PA}(t) - \vec{r}_{BA}, \quad (6.4)$$

donde los vectores  $\vec{r}_{AB} = -\vec{r}_{BA}$  son constantes. La velocidad del cuerpo vista desde cada uno de los sistemas puede obtenerse derivando el vector posición con respecto al tiempo:

$$\vec{v}_{PB} = \frac{d\vec{r}_{PB}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r}_{PA}(t) - \vec{r}_{BA}) = \frac{d\vec{r}_{PA}(t)}{dt} = \vec{v}_{PA} \quad (6.5)$$

esto es, si dos sistemas están en reposo uno respecto del otro, se cumple que la velocidad de cualquier móvil respecto a ambos sistemas es la misma,  $\vec{v}_{PB} = \vec{v}_{PA}$ .

- b) Supongamos ahora que los sistemas están en movimiento uno respecto del otro. En este caso, la derivación de la ecuación (6.3) nos lleva a una versión de las ecuaciones (6.5) donde  $\vec{r}_{AB}$  y  $\vec{r}_{BA}$  son

ahora funciones del tiempo:

$$\vec{v}_{PB} = \frac{d\vec{r}_{PB}(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}_{PA}(t)}{dt} - \frac{d\vec{r}_{BA}(t)}{dt} \quad \text{y} \quad \vec{v}_{PA} = \frac{d\vec{r}_{PA}(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}_{PB}(t)}{dt} - \frac{d\vec{r}_{AB}(t)}{dt}, \quad (6.6)$$

es decir,

$$\vec{v}_{PB} = \vec{v}_{PA} - \vec{v}_{BA} \quad \text{o bien} \quad \vec{v}_{PA} = \vec{v}_{PB} - \vec{v}_{AB}, \quad (6.7)$$

donde  $\vec{v}_{AB} = \frac{d\vec{r}_{AB}}{dt}$  y  $\vec{v}_{BA} = \frac{d\vec{r}_{BA}}{dt}$  son las velocidades de A respecto de B y de B respecto de A, respectivamente.

Estas relaciones (6.7), que vinculan las velocidades de un cuerpo observadas por dos sistemas diferentes que se mueven uno respecto del otro suelen denominarse *Teorema de adición de velocidades*.

Las transformaciones de coordenadas que asumen que la velocidad relativa entre ambos sistemas es constante, es decir  $\vec{v}_{AB} = -\vec{v}_{BA} = \text{constante}$ ; por lo tanto  $\vec{r}_{BA}(t) = \vec{v}_{BA} t + \vec{r}_{BA}(0)$  con lo cual la relación entre las coordenadas del cuerpo descriptas por los dos sistemas puede obtenerse sustituyendo esta expresión en la ecuación (6.3):

$$\vec{r}_{PA}(t) = \vec{r}_{PB}(t) - \vec{v}_{AB} t - \vec{r}_{AB}(0) \quad (6.8)$$

se denominan *transformaciones de Galileo*, y jugarán un rol importante cuando estudiemos las leyes de la dinámica.

### Cambio de coordenadas: Otra Notación

Una notación muy usada para cambio de coordenadas es definir un sistema “no primado”  $S$  con origen  $O \Rightarrow \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$ ;  $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ ; etc. y un sistema “primado”  $S'$  con origen  $O' \Rightarrow \vec{r}' = x'\hat{i} + y'\hat{j}$ ;  $\vec{v}' = d\vec{r}'/dt$ ; etc. Nuevamente, notar que no ponemos primas a los versores base porque los ejes coordenados de  $S$  y  $S'$  son paralelos, en el caso mas general (que no veremos) los versores de  $S'$  también llevarán primas. Así, si llamamos  $S$  al sistema A, y  $S'$  al sistema B, las ecuaciones (6.3) toman la forma,

$$\vec{r}'_P = \vec{r}_P - \vec{r}_{O'} \quad ; \quad \vec{r}_P = \vec{r}'_P - \vec{r}'_{O'} \quad (6.9)$$

y el teorema de adición de velocidades, ecuaciones (6.7), toma la forma

$$\vec{v}'(t) = \vec{v}(t) - \vec{v}_{O'}(t) \quad ; \quad \vec{v}(t) = \vec{v}'(t) - \vec{v}'_{O'}(t) \quad (6.10)$$

Esta notación es de hecho la mas usada en la literatura, y la encontrarán en gran cantidad de libros y páginas que puedan consultar.

## SECCIÓN 6.2

### Ejemplos

Analícemos ahora algunos ejemplos particulares. En primer lugar, supongamos que en una ciudad está lloviendo y no hay viento a nivel de superficie. Una persona que está en una parada de ómnibus verá que las gotas caen verticalmente, pero ¿cómo las verá caer otra persona que viaja en un automóvil?



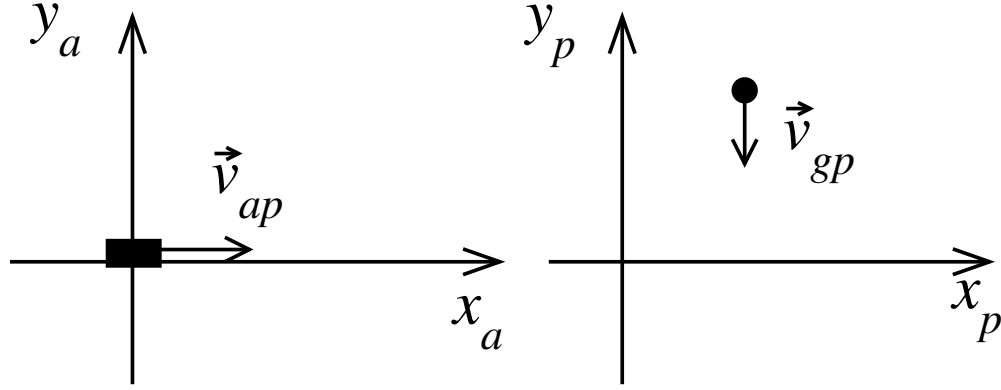


Figura 6.3: Sistema de coordenadas  $p$  fijo en la parada de ómnibus y  $a$  fijo al auto y las velocidades de la gota de lluvia  $g$  (círculo) y el automóvil (rectángulo) respecto al sistema de coordenadas  $p$ .

Los dos sistemas de referencia mostrados en la figura 6.3 son la persona en la parada de ómnibus ( $A \rightarrow p$ ) y la persona que viaja en el automóvil ( $B \rightarrow a$ ), donde se ha reemplazado los nombres de los sistemas de coordenadas  $A$  y  $B$  genéricos por las iniciales propias de los elementos del problema para mayor claridad. La velocidad de la gota vista desde el sistema  $p$  será  $\vec{v}_{gp} = v_{gp}\hat{j}$  (de acuerdo al sistema de coordenadas graficado  $v_{gp} < 0$ ), mientras que la velocidad del auto respecto del sistema  $p$  será  $\vec{v}_{ap} = v_{ap}\hat{i}$  (en nuestro caso será  $v_{ap} > 0$ ). Utilizando la expresión que relaciona la velocidad vista por ambos sistemas dada en la ecuación (6.7) podemos obtener cuál es la velocidad de la gota vista por la persona que viaja en el auto:

$$\vec{v}_{ga} = \vec{v}_{gp} - \vec{v}_{ap} = v_{gp}\hat{j} - v_{ap}\hat{i} \quad (6.11)$$

Si damos valores razonables a las velocidades, por ejemplo  $v_{gp} = -15 \text{ km/h} = \text{constante}$  (que es realista debido a la presencia del aire), mientras que para la velocidad del auto respecto de la parada asumimos  $\vec{v}_{ap} = v_{ap}\hat{i} = 30 \text{ km/h} \hat{i}$ , la ecuación (6.11) nos dice que  $\vec{v}_{ga} = -30 \text{ km/h} \hat{i} - 15 \text{ km/h} \hat{j}$ , mostrando que la velocidad de la gota respecto del automóvil en marcha está orientada de manera oblicua, siguiendo la trayectoria típicamente observada a través de las ventanillas laterales de un auto, como se ve en la figura 6.4. Así, una persona que va en el auto ve caer la gota con un ángulo dado por  $\theta = \arctan(v_{ga,y}/v_{ga,x}) = \arctan(1/2) \Rightarrow \theta = 206,6^\circ$ . La calculadora nos da el valor  $26,6^\circ$ , que es el ángulo que forman  $\vec{v}_{ga}$  con  $\vec{v}_{pa}$ , pero si deseamos obtener el ángulo  $\theta$  que forma  $\vec{v}_{ga}$  con el eje  $x$  debemos sumarle a este resultado  $180^\circ$ , ya que el **vector apunta hacia el tercer cuadrante**.

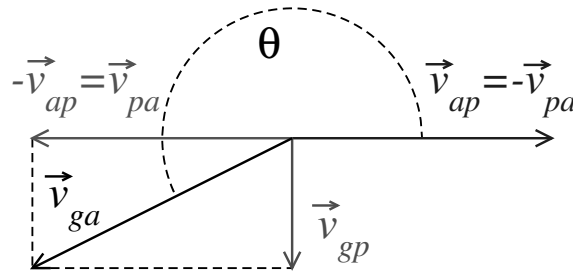


Figura 6.4: Esquema de todos los vectores velocidad involucrados en la caída de la gota de lluvia.

Veamos otro ejemplo. Un vuelo debe pasar por la ciudad de Rosario y dirigirse a la ciudad de Santa Fe (situada justo al norte de Rosario). El piloto fija el rumbo hacia el norte mientras el avión vuela a una velocidad de módulo  $v_{na}$  (léase velocidad de la nave respecto del aire). El informe meteorológico informa que hay viento en dirección oeste-este cuya velocidad es de módulo  $v_{at}$  (velocidad del aire respecto de tierra). ¿Podrá el piloto lograr su objetivo?

Como vemos aquí, los datos están referenciados a dos sistemas diferentes. La posición de las ciudades y la velocidad del viento están dados con respecto a un sistema fijo a tierra; mientras que el módulo y la dirección de la velocidad del avión están referenciados a un sistema fijo al aire. Antes que nada conviene establecer la diferencia entre el *rumbo* y la *dirección de viaje*. El rumbo es la dirección hacia adonde apunta el avión, o el barco, o el móvil que sea, mientras que la dirección de viaje es la dirección que sigue la trayectoria de la nave respecto de tierra. En este problema se verá claramente que ambas direcciones no tienen por qué coincidir. Consideremos el diagrama de la figura 6.5. La situación esquematizada muestra al avión sobrevolando la ciudad de Rosario y apuntando hacia el norte, es decir, con el rumbo fijado por el piloto como se indicó anteriormente.

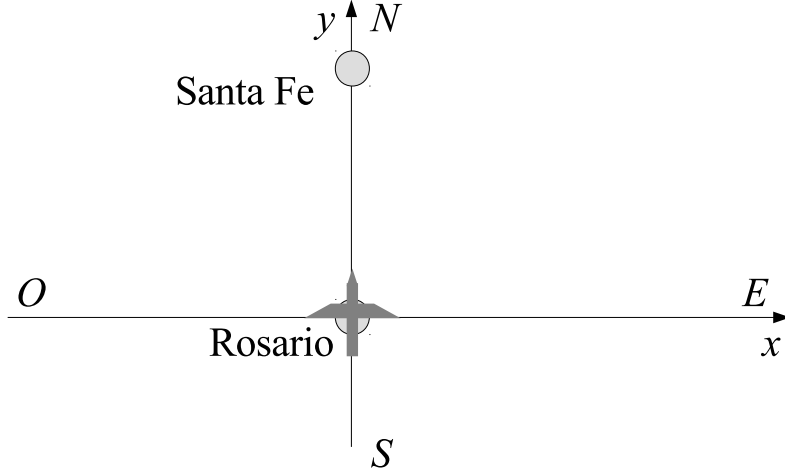


Figura 6.5: Diagrama de un avión sobrevolando Rosario y apuntando a la ciudad de Santa Fe. En el sistema de coordenadas fijo a tierra se indican los puntos cardinales.

Si bien en la figura 6.5 solo se muestra el sistema de coordenadas fijo a tierra, es necesario considerar otro sistema respecto del aire, que es paralelo al anterior, pero “se lo lleva el viento” hacia el este. Utilizando estos sistemas podemos escribir:

- Velocidad de la nave con respecto al aire:  $\vec{v}_{na} = v_{na}\hat{j}$ .
- Velocidad del viento (velocidad del aire respecto a tierra):  $\vec{v}_{at} = v_{at}\hat{i}$ .

Utilizando la expresión que relaciona la velocidad de un cuerpo visto por dos sistemas diferentes de coordenadas, ecuación (6.7), podemos escribir

$$\vec{v}_{nt} = \vec{v}_{na} - \vec{v}_{ta} = \vec{v}_{na} + \vec{v}_{at} . \quad (6.12)$$

reemplazando obtenemos

$$\vec{v}_{nt} = v_{na}\hat{j} + v_{at}\hat{i} \quad (6.13)$$

Como vemos, el vector velocidad del avión visto desde un sistema fijo a tierra tiene componentes en las direcciones de  $\hat{i}$  y  $\hat{j}$ . Pero como Rosario y Santa Fe están en la dirección sur-norte, para llegar a Santa Fe el vector velocidad del avión solo debería tener componente en la dirección de  $\hat{j}$ . Lo que ocurre es que si el piloto pone dirección al norte los motores lo mueven en esta dirección pero el aire lo hará moverse también en la dirección del viento. Considerando esto podemos prever que el avión no llegará a Santa Fe, sino más bien, a algún lugar de la provincia de Entre Ríos.

Ahora nos preguntamos qué rumbo tendría que fijar el piloto para poder llegar efectivamente a Santa Fe. Es evidente que para viajar hacia el norte debe compensar el arrastre del viento y por lo tanto la

velocidad del avión con respecto al aire, cuya dirección no es otra cosa que el rumbo, deberá tener una componente horizontal como se muestra en la figura 6.6.

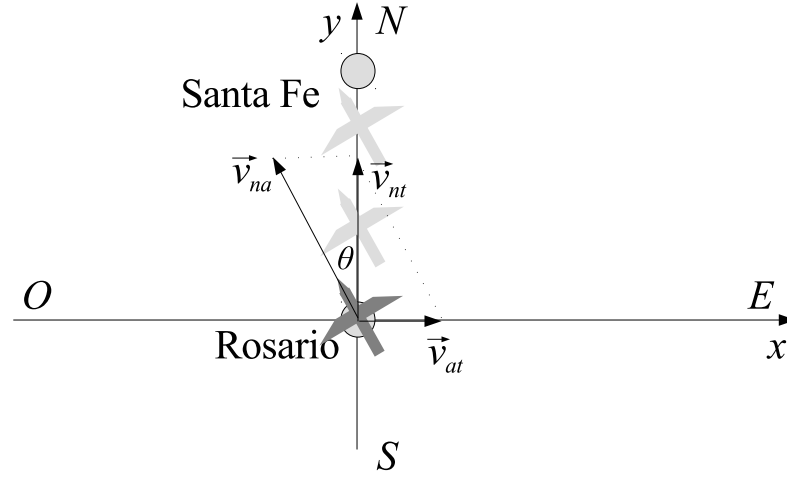


Figura 6.6: Diagrama de un avión sobrevolando Rosario con rumbo noroeste. En el sistema de coordenadas fijo a tierra se indican los puntos cardinales. Se ilustran, en un tono más claro, las posiciones que irá ocupando el avión durante el transcurso del vuelo. Además se muestran los vectores velocidad relevantes en el problema.

Para esta nueva situación podemos escribir los vectores velocidad como:

- Velocidad de la nave con respecto al aire:  $\vec{v}_{na} = -v_{na} \sin(\theta) \hat{i} + v_{na} \cos(\theta) \hat{j}$ .
- Velocidad del aire respecto de tierra:  $\vec{v}_{at} = v_{at} \hat{i}$ .

Sabemos que  $\vec{v}_{nt} = \vec{v}_{na} + \vec{v}_{at}$  y reemplazando obtenemos

$$\begin{aligned} \vec{v}_{nt} &= -v_{na} \sin(\theta) \hat{i} + v_{na} \cos(\theta) \hat{j} + v_{at} \hat{i} \\ &= [v_{at} - v_{na} \sin(\theta)] \hat{i} + v_{na} \cos(\theta) \hat{j}. \end{aligned} \quad (6.14)$$

Para que el avión viaje hacia el norte su velocidad vista por una persona parada en tierra solo debe tener componente en la dirección de  $\hat{j}$ , y por lo tanto debería ser  $\vec{v}_{nt} = v_{nt} \hat{j}$ . Igualando ambos vectores obtenemos

$$v_{nt} \hat{j} = [v_{at} - v_{na} \sin(\theta)] \hat{i} + v_{na} \cos(\theta) \hat{j}, \quad (6.15)$$

igualando componente a componente resulta:

$$0 = v_{at} - v_{na} \sin(\theta) \quad \text{y} \quad v_{nt} = v_{na} \cos(\theta). \quad (6.16)$$

En este sistema de ecuaciones las incógnitas son  $v_{nt}$  (módulo de la velocidad de la nave respecto a tierra) y  $\theta$ , el ángulo que debe formar la velocidad del avión respecto al aire (rumbo) con la dirección sur-norte. Resolviendo obtenemos

$$\sin(\theta) = \frac{v_{at}}{v_{na}} \quad \text{y} \quad v_{nt} = v_{na} \cos(\theta). \quad (6.17)$$

Resumiendo, el avión debe volar con rumbo noroeste formando un ángulo  $\theta$  con respecto a la dirección norte-sur, dado por la primera de las ecuaciones (6.17). El avión se mantendrá apuntando según ese

ángulo, desplazándose paralelo a sí mismo a lo largo de la dirección sur-norte con una velocidad respecto de tierra dada por la segunda de las ecuaciones (6.17) (ver figura 6.6).

# 7

## Movimiento en Tres Dimensiones

En los capítulos anteriores hemos descrito el movimiento de cuerpos puntuales que se mueven sobre una recta (una dimensión o  $1-D$ ) y sobre un plano (dos dimensiones o  $2-D$ ). Pero vivimos en un espacio tridimensional, y nuestro estudio de la cinemática de cuerpos puntuales no estaría completo si no sabemos describir movimientos en tres dimensiones (o  $3-D$ ). De manera similar a lo realizado para la descripción de los movimientos  $1-D$  y  $2-D$ , lo primero que debemos hacer es determinar de manera unívoca la posición de un cuerpo en el espacio tridimensional.

### SECCIÓN 7.1

## Sistema de coordenadas cartesianas ortogonales

Este sistema es la generalización directa del que utilizamos para definir la posición de un cuerpo en el plano. Así como al pasar de  $1-D$  a  $2-D$  agregamos la coordenada  $y$  al sistema cartesiano, al pasar a  $3-D$  solo tenemos que agregar otra coordenada, esto es, un nuevo eje, perpendicular a los dos que definen el plano, en el cual se especifica la altura a la que se encuentra el cuerpo respecto del plano de referencia. A esta nueva coordenada la llamaremos  $z$ . Por lo tanto, para definir la posición de un punto en el espacio tridimensional deberemos especificar una terna de valores, que llamaremos  $x, y, z$ , que corresponden a las tres coordenadas cartesianas del cuerpo en el espacio tridimensional. Para poder hacer un gráfico  $3-D$  en el plano, nos vemos obligados a usar perspectiva. La convención usual es dibujar el eje  $z$  hacia arriba de nuestra hoja, el eje  $y$  de manera horizontal (como dibujamos los ejes  $x-y$  en el plano), y el eje  $x$  en perspectiva, “saliendo hacia afuera” de nuestra hoja, como se observa en la figura 7.1.

La distancia entre dos puntos, independientemente de la dimensión del espacio en que estemos trabajando, se define como la longitud del segmento que los une. Así, la distancia  $d_{OP}$  de un punto  $P$  al origen es dada por la longitud del segmento  $\overline{OP}$  mostrado en la figura 7.1. Este es la hipotenusa de un triángulo rectángulo de lados  $\sqrt{x_P^2 + y_P^2}$  y  $|z_P|$ , por lo que la distancia del punto  $P$  al origen de coordenadas se obtiene, al igual que en  $2-D$ , aplicando el teorema de Pitágoras:

$$d_{OP} = \sqrt{x_P^2 + y_P^2 + z_P^2}. \quad (7.1)$$

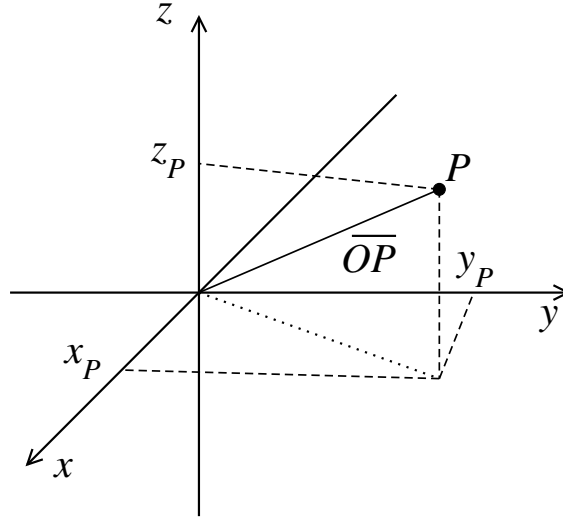


Figura 7.1: Un punto  $P$  en un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales en tres dimensiones. Todos los ángulos entre ejes son de  $90^\circ$  y el eje  $x$  se grafica utilizando perspectiva. La línea de puntos se halla en el plano  $x-y$ , y su longitud es  $\sqrt{x_P^2 + y_P^2}$ .

También podemos usar el teorema de Pitágoras para el cálculo de la distancia entre cualquier par de puntos en el espacio,  $P_1$  y  $P_2$ , de coordenadas  $(x_1, y_1, z_1)$  y  $(x_2, y_2, z_2)$  respectivamente,

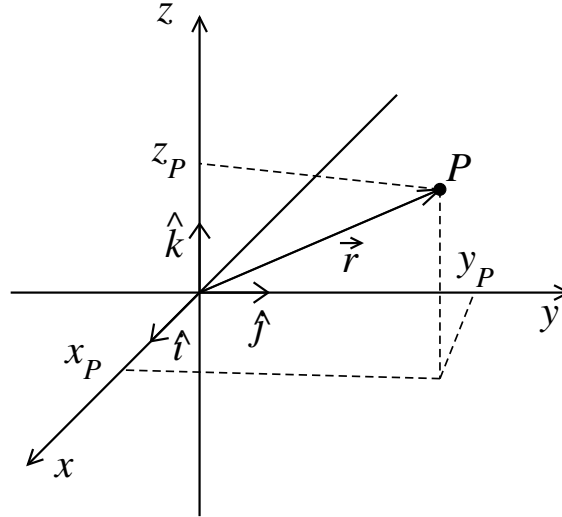
$$d_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (7.2)$$

Esta ecuación para la distancia en tres dimensiones es claramente la extensión de la fórmula para la distancia que habíamos utilizado en dos dimensiones mediante la ecuación (4.2). Por otra parte, puede verse que la fórmula de la distancia de un punto al origen, ecuación (7.1), es un caso particular de la distancia entre dos puntos dada en la ecuación (7.2).

## SECCIÓN 7.2

# Vector posición y función vectorial de movimiento

Podemos identificar un punto  $P$  del espacio tridimensional, de coordenadas  $(x_P, y_P, z_P)$ , mediante un vector  $\vec{r}$  que tenga su punto de aplicación en el origen del sistema de coordenadas y su extremo en  $P$ , como muestra la figura 7.2. Como ahora tenemos tres ejes coordenados, además de los versores  $\hat{i}$  en la dirección  $x$ , y  $\hat{j}$  en la dirección  $y$ , debemos agregar un tercer versor en la dirección  $z$ , que, por supuesto, denominaremos  $\hat{k}$ , y es ortogonal a los otros versores base,  $\hat{i} \cdot \hat{k} = 0$ ;  $\hat{j} \cdot \hat{k} = 0$ .

Figura 7.2: Localización de un punto  $P$  del espacio tridimensional mediante su vector posición.

Las componentes de este vector  $\vec{r}$  son las coordenadas cartesianas de  $P$ ; es decir,

$$r_x = x_P, \quad r_y = y_P \quad y \quad r_z = z_P, \quad (7.3)$$

por lo tanto, el vector  $\vec{r}$  que caracteriza el punto  $P$  se escribe en un sistema cartesiano  $3-D$  como

$$\vec{r} = x_P \hat{i} + y_P \hat{j} + z_P \hat{k}. \quad (7.4)$$

Cuando identificamos con este vector  $\vec{r}$  el punto del espacio donde se encuentra ubicado el cuerpo cuyo movimiento estamos describiendo, a este vector lo denominamos *vector posición*.

En  $1-D$ , basados en la información de la tabla 1.1, definimos la función de movimiento  $x(t)$ . Luego vimos movimientos en el plano descritos en un sistema cartesiano. En este caso necesitamos una segunda coordenada, y por lo tanto agregar una columna a la tabla 1.1 para obtener la tabla 4.1 que nos lleva a definir la correspondiente función de movimiento  $y(t)$ . Es claro que en  $3-D$  debemos agregar a esta última tabla una columna más, correspondiente a la coordenada  $z$ , como se muestra en la tabla 7.1.

$t$	$x$	$y$	$z$
$t_1$	$x_1$	$y_1$	$z_1$
$t_2$	$x_2$	$y_2$	$z_2$
$t_3$	$x_3$	$y_3$	$z_3$
$t_4$	$x_4$	$y_4$	$z_4$
$t_5$	$x_5$	$y_5$	$z_5$
$t_6$	$x_6$	$y_6$	$z_6$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$

Tabla 7.1: Tiempos y posiciones registradas para un móvil en el espacio  $3-D$ .

Al igual que en  $1-D$  y  $2-D$ , asumiremos, a partir de postular la continuidad del movimiento y la velocidad de los cuerpos, que las tres funciones obtenidas,  $x(t)$ ,  $y(t)$  y  $z(t)$ , son continuamente diferenciables.

Como hemos visto, la posición de un punto en el espacio puede ser dada por un vector denominado *vector posición del punto*; si el cuerpo se mueve, su vector posición variará con el tiempo y, por lo tanto, en cada instante tendremos un vector posición. Es decir que el vector posición será una función del tiempo

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (7.5)$$

Si referimos el vector posición a una base ortogonal coincidente con el sistema de coordenadas cartesiano ortogonal, podemos escribir

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}. \quad (7.6)$$

Por lo tanto, podemos describir el movimiento de un cuerpo en el espacio por medio de la *función vectorial de movimiento*  $\vec{r}(t)$ , cuyas componentes cartesianas serán las funciones de movimiento  $x(t)$ ,  $y(t)$  y  $z(t)$ .

### SECCIÓN 7.3

## Velocidad y aceleración

Como veremos, esta sección es similar a lo desarrollado en la sección 4.4 para movimientos en el plano. La principal diferencia en las definiciones de velocidad, aceleración, etc. radica en el **número de componentes de los vectores** (3 en lugar de 2).

La definición de velocidad instantánea es formalmente la misma que en dos dimensiones, ecuación (4.92), sólo que ahora los vectores involucrados tienen tres componentes,

$$\vec{v}(t) \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}. \quad (7.7)$$

El vector de la derecha de la igualdad, expresado en un sistema cartesiano es

$$\frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}, \quad (7.8)$$

y expresando el vector velocidad en términos de sus componentes cartesianas,  $\vec{v}(t) = v_x(t)\hat{i} + v_y(t)\hat{j} + v_z(t)\hat{k}$ , identificamos

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt}, \quad v_y(t) = \frac{dy}{dt} \quad \text{y} \quad v_z(t) = \frac{dz}{dt}. \quad (7.9)$$

Aquí vemos claramente que la ecuación (7.7) es válida en cualquier dimensión, mientras que las ecuaciones (7.8) y (7.9) se refieren a vectores con tres componentes, y son válidas sólo en  $3 - D$ .

Al igual que en el caso bidimensional, la trayectoria de un móvil es el conjunto de puntos que durante el movimiento coincidieron con el vector posición, es decir, una fotografía del camino seguido por el móvil que, sin embargo, no permite conocer en qué forma fue recorrido. Daremos ejemplos más adelante, volvamos ahora al análisis de la velocidad y la aceleración.

En el caso  $2 - D$ , el vector velocidad de un móvil resulta tangente a su trayectoria. Si bien no repetiremos aquí la deducción hecha en el punto 4.4.4 (basada en una construcción gráfica, figuras 4.44 y 4.45, que resultaría mucho mas difícil de visualizar en  $3 - D$ ), nos debe quedar claro que, independientemente de la dimensión del espacio en el que el cuerpo se mueva, **el vector velocidad es tangente a la trayectoria**.



También la definición del vector aceleración es formalmente independiente de la dimensión espacial,

$$\vec{a}(t) \equiv \frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d}{dt} \left[ \frac{d\vec{r}}{dt} \right] = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}. \quad (7.10)$$

Si el vector posición  $\vec{r}$  está expresado en términos de sus coordenadas cartesianas,  $\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$ , resulta

$$\vec{a}(t) = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k}. \quad (7.11)$$

Puesto que podemos expresar un vector como un versor multiplicado por un escalar, en el caso particular de la velocidad podemos escribir  $\vec{v}(t) = v(t)\hat{v}(t)$ , donde  $v(t) = |\vec{v}(t)|$  y  $\hat{v}(t) = \vec{v}(t)/|\vec{v}(t)|$  es un versor tangente a la trayectoria. Tanto el módulo como la dirección del vector velocidad pueden variar con el tiempo; entonces tenemos:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}[v(t)\hat{v}(t)], \quad (7.12)$$

y aplicando la regla de derivación del producto de funciones obtenemos

$$\vec{a}(t) = \frac{dv(t)}{dt}\hat{v}(t) + v(t)\frac{d\hat{v}(t)}{dt}. \quad (7.13)$$

Vemos que esta expresión de la aceleración contiene las dos componentes que ya hemos identificado en el caso de movimiento bidimensional.

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_t(t) + \vec{a}_n(t), \quad (7.14)$$

donde la aceleración tangencial es

$$\vec{a}_t(t) = \frac{dv(t)}{dt}\hat{v}(t), \quad (7.15)$$

y la aceleración normal

$$\vec{a}_n(t) = v(t)\frac{d\hat{v}(t)}{dt}. \quad (7.16)$$

Entonces, al igual que en dos dimensiones, podemos expresar el vector aceleración como suma de dos componentes cuyos efectos sobre el vector velocidad están bien diferenciados, la *aceleración tangencial*,  $\vec{a}_t$ , responsable de modificar el módulo del vector velocidad y la *aceleración normal*,  $\vec{a}_n$ , responsable de modificar la dirección del vector velocidad. Obviamente, estas dos componentes y el vector aceleración están en un mismo plano, pero además, como  $\vec{a}_t$  es paralela al vector velocidad, podemos ver que las dos componentes se encuentran sobre el plano formado por los vectores velocidad y aceleración.

## SECCIÓN 7.4

# Trayectoria

Mientras que para el caso de movimientos en el plano la trayectoria puede expresarse por una ecuación que relacione las coordenadas  $x$  e  $y$ , por ejemplo,  $y = x + b$  o  $x^2 + y^2 = R^2$ , para movimientos en dimensión tres se debe incluir tres coordenadas  $x$ ,  $y$  y  $z$ , por lo que, en general, necesitaremos dos ecuaciones para expresar la trayectoria, por ejemplo  $y(x)$  y  $z(x)$ . Otra forma algo más indirecta de dar la trayectoria es a través de tres ecuaciones en términos de un parámetro común, por ejemplo el tiempo  $t$ , esto es, construyendo una tabla como la tabla 7.1 con las tres funciones de movimiento  $x(t)$ ,  $y(t)$  y  $z(t)$ .

Así como todo movimiento rectilíneo podemos describirlo utilizando un sistema de coordenadas uni-

dimensional, un móvil que se mueve en un plano se puede describir utilizando un sistema de coordenadas bidimensional. Por ejemplo, el caso de un proyectil disparado desde el suelo (origen de coordenadas) formando un ángulo de elevación de  $\alpha = 60^\circ$  y un ángulo  $\beta = 45^\circ$  respecto del plano  $z - y$  (ver figura 7.3).

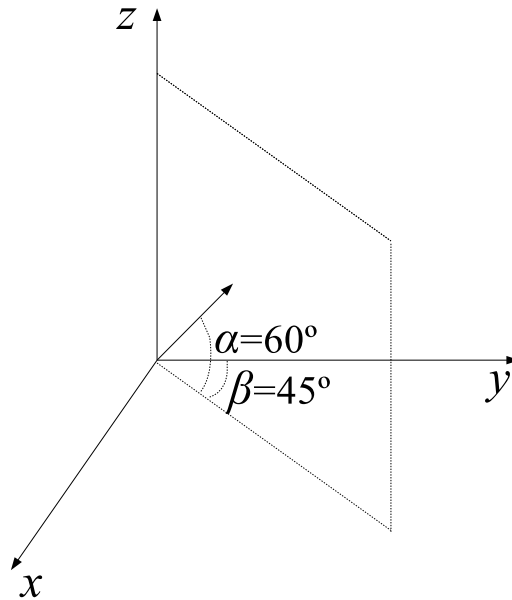


Figura 7.3: Movimiento plano en el espacio tridimensional.

El movimiento en realidad se producirá en un plano, indicado en la figura, que contiene al eje  $z$  y que corta perpendicularmente el plano  $x - y$ . En este caso basta cambiar nuestro sistema de coordenadas adecuadamente para que el movimiento pueda describirse usando sólo dos dimensiones. Sin embargo, la situación no siempre es así, de la misma manera que un problema de encuentro de dos movimientos rectilíneos no paralelos no puede tratarse utilizando un sistema unidimensional, el problema de encuentro de dos movimientos planos no coplanares debe tratarse en un sistema tridimensional, como veremos en el ejemplo de la próxima sección. Además, un sinnúmero de movimientos son intrínsecamente tridimensionales y no pueden reducirse al caso bidimensional. Pensemos por ejemplo en el vuelo de una mosca en una habitación, o en el movimiento de un pez en el agua. La trayectoria de estos y otros movimientos resulta más difícil de describir que en el caso bidimensional.

Veamos un ejemplo concreto: el de un movimiento helicoidal (de tirabuzón) dado por las ecuaciones

$$x(t) = R \cos(\omega t) \quad ; \quad y(t) = R \sin(\omega t) \quad ; \quad z(t) = \alpha t, \quad (7.17)$$

donde  $R$  es el radio del círculo que proyecta el móvil en el plano  $x - y$ ,  $\omega$  su velocidad angular y  $\alpha$  es la velocidad de avance en  $z$ . Estas ecuaciones pueden describir el movimiento de un corcho que flota sobre un tanque que se está desagotando o el de una partícula cargada en presencia de un campo magnético uniforme.

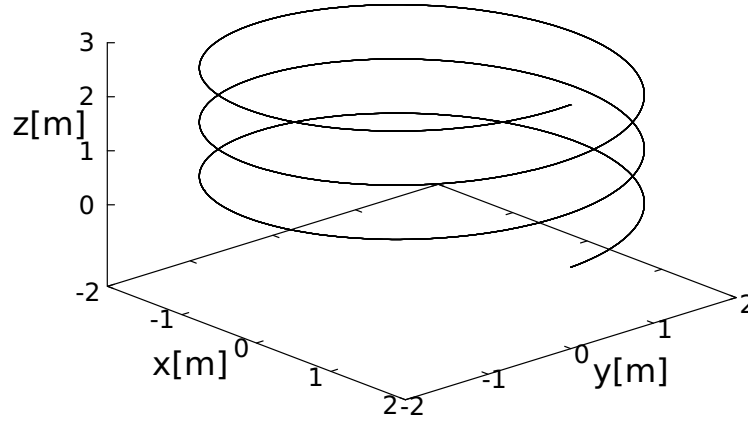


Figura 7.4: Trayectoria helicoidal, ecuaciones (7.19), para  $0 \leq t \leq 3s$ .

Las ecuaciones (7.17) son las funciones de movimiento, o bien las expresiones paramétricas de la trayectoria dadas en términos del parámetro  $t$ . Notemos que en este caso, la relación lineal entre  $z$  y  $t$  nos permite escribir las funciones  $x(z)$  e  $y(z)$  que describen la trayectoria 3-D del móvil, que es mostrada en la figura 7.4. Si bien en la trayectoria no hay información sobre la velocidad de su recorrido, si las funciones de movimiento están dadas por las ecuaciones (7.17), entonces el período del movimiento circular en el plano es  $T = 2\pi/|\omega|$ , y en el tiempo que dio una vuelta completa en el plano, su altura aumentó en  $\Delta z = |\alpha|T$ . Entonces de la trayectoria se obtiene la siguiente relación entre  $\omega$  y  $\alpha$ ,

$$\left| \frac{\alpha}{\omega} \right| = \frac{\Delta z}{2\pi}, \quad (7.18)$$

La trayectoria mostrada en la figura 7.4 puede ser recorrida con distintas velocidades, pero vemos que si damos una vuelta, la coordenada  $z$  cambia en  $1m$ , esto es, según (7.18)  $|\omega| = 2\pi|\alpha|/1m$ . En particular, esta trayectoria fue graficada utilizando las funciones de movimiento

$$x(t) = 2m \cos\left(2\pi \frac{rad}{s} t\right) \quad ; \quad y(t) = 2m \sin\left(2\pi \frac{rad}{s} t\right) \quad ; \quad z(t) = 1 \frac{m}{s} t. \quad (7.19)$$

Estudiemos ahora la velocidad y aceleración de este móvil,

$$\vec{v}(t) = R\omega(-\sin(\omega t)\hat{i} + \cos(\omega t)\hat{j}) + \alpha\hat{k} \Rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{R^2\omega^2 + \alpha^2}, \quad (7.20)$$

esto es, el módulo de la velocidad no depende del tiempo, por lo que el móvil debe tener solo aceleración normal. Como la derivada segunda de  $z(t)$  es nula, la aceleración es idéntica a la de un MCU,

$$\vec{a}(t) = -R\omega^2(\cos(\omega t)\hat{i} + \sin(\omega t)\hat{j}), \quad (7.21)$$

y efectivamente vemos que  $\vec{a}(t) \cdot \vec{v}(t) = 0$ , por lo que  $\vec{a}(t) = \vec{a}_n(t)$  para todo tiempo.

## SECCIÓN 7.5

## Encuentro de dos móviles en 3 – D

La definición de encuentro es (¡nuevamente!) independiente de la dimensión; dados dos móviles  $A$  y  $B$  habrá encuentro si se hallan en el mismo lugar al mismo tiempo, esto es:

$$\vec{r}_A(t_e) = \vec{r}_B(t_e), \quad (7.22)$$

que es idéntica a la ecuación (4.197).

Veamos un ejemplo: Un deportista está practicando el deporte olímpico *tiro al platillo*, que consiste en una máquina, situada en el punto que definimos como origen de coordenadas, que dispara un platillo (que llamaremos  $p$ ) en  $t = 0$ , y el deportista debe pegarle al mismo al vuelo, disparando una bala (que llamaremos  $b$ ) en  $t = t_d > 0$  desde una posición  $\vec{r}_b(t = 0) = x_0 \hat{i} + y_c \hat{j}$ , con  $x_0 < 0$  e  $y_b(t) = y_c \forall t$  tal que la bala impacta al platillo en el punto de máxima elevación de este, como se muestra en la figura 7.5 (esta última condición presenta para el deportista la ventaja de apuntar al lugar donde el platillo va más lento).

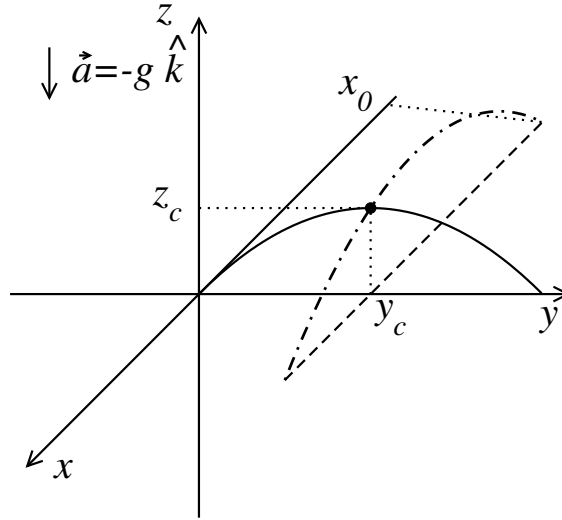


Figura 7.5: Práctica de *tiro al platillo*, en la que dar en el blanco equivale a resolver un problema 3 – D de encuentro. Las trayectorias del platillo y la bala son mostradas en línea continua y línea cortada con puntos respectivamente.

A un tiro parabólico como el estudiado al final del capítulo 4 **siempre** podemos describirlo como un movimiento en el plano, pero si tenemos dos tiros parabólicos en distintos planos **debemos** usar un sistema tridimensional.

Entonces nos preguntamos, si el plano de trayectoria del platillo ( $x = 0$ ) es perpendicular al plano de trayectoria de la bala ( $y = y_c$ ), ¿cuál es el instante  $t_d$  en que el deportista debe efectuar el disparo y cuál debe ser el ángulo de disparo de la bala,  $\alpha_b$ ?

Los datos (bastante realistas) del problema son:  $v_{p0} = 20 \text{ m/s}$ ;  $\alpha_p = \pi/4$ ;  $x_0 = -50 \text{ m}$ ;  $v_{b0} = 300 \text{ m/s}$ , y consideramos que ambos, platillo y bala son lanzados desde el suelo, dado por  $z = 0$ .

Lo primero que vemos es que tenemos todos los datos necesarios para conocer la cinemática del

platillo, así que su punto de máxima altura, que es el punto de cruce de trayectorias, está dado por las ecuaciones (4.174), (4.175) y (4.177) con  $\alpha_p = \pi/4$ ,

$$y_c = \frac{v_{p0}^2}{2g} \quad ; \quad z_c = \frac{v_{p0}^2}{4g} \quad ; \quad t_c = \frac{v_{p0}}{\sqrt{2}g} . \quad (7.23)$$

Dejamos como ejercicio corroborar los resultados dados en (7.23). Como un punto de encuentro sólo puede estar en un punto de cruce de trayectorias, exigimos que  $\vec{r}_e = y_c \hat{j} + z_c \hat{k}$  y  $t_e = t_c$ .

Debemos ahora encontrar las funciones de movimiento y trayectoria de la bala, que también es una parábola de tiro, sólo que lanzada al tiempo  $t_d > 0$ , desde  $\vec{r}_{b0} = x_0 \hat{i} + y_c \hat{j}$  con velocidad inicial  $\vec{v}_{b0} = v_{b0} (\cos(\alpha_b) \hat{i} + \sin(\alpha_b) \hat{j})$ . Dejamos también como ejercicio verificar que

$$\vec{r}_b(t) = (v_{b0} \cos(\alpha_b) (t - t_d) + x_0) \hat{i} + y_c \hat{j} + \left( -\frac{1}{2}g(t - t_d)^2 + v_{b0} \sin(\alpha_b) (t - t_d) \right) \hat{k}, \quad (7.24)$$

válido para  $t \geq t_d$ . Entonces, de la condición de encuentro  $\vec{r}_p(t_e) = \vec{r}_b(t_e)$ , usando que  $\vec{r}_p(t_e) = y_c \hat{j} + z_c \hat{k}$  y la ecuación (7.24) obtenemos

$$y_c \hat{j} + z_c \hat{k} = (v_{b0} \cos(\alpha_b) (t - t_d) + x_0) \hat{i} + y_c \hat{j} + \left( -\frac{1}{2}g(t - t_d)^2 + v_{b0} \sin(\alpha_b) (t - t_d) \right) \hat{k}. \quad (7.25)$$

La componente  $y$  de esta ecuación es trivial, mientras que de las componentes  $x$  y  $z$  obtenemos

$$v_{b0} \cos(\alpha_b) (t_e - t_d) + x_0 = 0 \quad ; \quad -\frac{1}{2}g(t_e - t_d)^2 + v_{b0} \sin(\alpha_b) (t_e - t_d) = z_c, \quad (7.26)$$

que son dos ecuaciones para las dos incógnitas  $t_d$  y  $\alpha_b$ . De la primera ecuación obtenemos

$$t_e - t_d = -\frac{x_0}{v_{b0} \cos(\alpha_b)}, \quad (7.27)$$

que permite eliminar la incógnita  $t_e$  en la segunda ecuación,

$$-\frac{gx_0^2}{2v_{b0}^2 \cos^2(\alpha_b)} - x_0 \tan(\alpha_b) = z_c. \quad (7.28)$$

Usando la identidad trigonométrica  $1/\cos^2(\alpha_b) = 1 + \tan^2(\alpha_b)$  obtenemos una ecuación cuadrática para  $\tan(\alpha_b)$ :

$$\frac{gx_0^2}{2v_{b0}^2} \tan^2(\alpha_b) + x_0 \tan(\alpha_b) + \frac{gx_0^2}{2v_{b0}^2} + z_c = 0, \quad (7.29)$$

recordando que  $x_0 = -50m$ ;  $v_{b0} = 300m/s$ ;  $z_c = 10m$ ;  $t_e = \sqrt{2}s$  obtenemos

$$\tan(\alpha_b) = \frac{73}{180 + \sqrt{32327}} \Rightarrow \alpha_b \simeq 0.2 \text{ rad} \simeq 11,5^\circ, \quad (7.30)$$

finalmente, reemplazando este valor del ángulo en la ecuación (7.27) obtenemos el tiempo en que debe efectuarse el disparo para dar en el blanco:

$$t_d = (\sqrt{2} - \sqrt{2(899 - 5\sqrt{32327})})s \simeq 1.24s. \quad (7.31)$$