Anillos

def Un anillo es un conjunto R con dos operaciones

$$+ : R \times R \longrightarrow R$$
$$\cdot : R \times R \longrightarrow R$$

1) $(R, +)$ es abeliano
2) el producto $\cdot$ es asociativo
3) " " " distribuye

$$a(b+c) = ab + ac \qquad \forall a, b, c \in R$$
$$(a+b)c = ac + bc$$

·) Si $ab = ba \ \forall a, b \in R \Rightarrow R$ anillo conmutativo

·) Si $\exists\ 1 \in R$ tq $1.a = a = a.1 \ \forall a \in R$

$\Rightarrow R$ se dice un anillo con identidad

Propiedades básicas

(ej) R anillo $a, b \in R$

Lut 1) $0.a = a.0$ $(0 = e)$

2) $(-a)b = -ab = a(-b)$

3) $(na)b = n(ab) = a(nb) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$

def Sea R anillo. Si existe $n \in \mathbb{N}$ tq

$n.a = 0 \quad \forall a \in R$. El mínimo de estos
$= a.a \dots a = a^n$

$n \in \mathbb{N}$ se nombra característica de R

) Si en cambio $(n.a = 0 \quad \forall a \in R \Rightarrow n = 0)$

se dice que la característica es 0

def Si R, S anillos un homomorfismo de anillos es una función $f : R \to S$ tq

1. $f(a+b) = f(a) + f(b)$
2. $f(a.b) = f(a).f(b)$

prop Sea R anillo con identidad 1 tal que la característica de R es $n > 0$ ent

1) la función $\varphi : \mathbb{Z} \to R$

$\varphi(k) = k.1$ es un homomorfismo de anillos con núcleo $n\mathbb{Z}$

2) $n = \min\{k \in \mathbb{N} : k.1 = 0\}$

dem 1) Sea $h \in \operatorname{Ker} \varphi \iff \varphi(h) = h \cdot 1 = 0$

$\iff h \cdot 1 \cdot a = (h \cdot 1) a = 0$
$\forall a \in R$

(*) $\iff n \mid h$ (n característica es un mínimo)

(*) ($\Rightarrow$) $h = nq + r \quad 0 \leq r < n$ (si $n > h \Rightarrow q = 0$)

$\forall a \in R \quad 0 = ha = q(na) + ra = ra \Rightarrow r = 0$

n-característica

($\Leftarrow$) Si $n \mid h \Rightarrow h = nd$ luego $ha = d(na) = 0$

$\therefore \operatorname{Ker} \varphi = n\mathbb{Z}$

2) Sea $n_0 = \min\{\ldots\}$

como $n \cdot 1 = 0 \Rightarrow n \geq \min\{h \in \mathbb{N} / h \cdot 1 = 0\}$
$= n_0$

como $n_0 \cdot 1 = 0 \Rightarrow n_0 \in \operatorname{Ker} \varphi = n\mathbb{Z}$

$\Rightarrow n \mid n_0$ luego $n = n_0$
por 1)

ejemplos:

1) $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ son anillos con característica 0

2) $\forall n \geq 2$ $\mathbb{Z}_n$ es anillo conmutativo con $1 \neq 0$ y característica n

3) $\mathbb{Z}_n[X]$ pol en una indeterminada X con coef en $\mathbb{Z}_n$ es un anillo conmutativo con característica n con $1 (= 1 \in \mathbb{Z}_n) \neq 0$

4) R anillo $d \in \mathbb{N}$ $M_d(R) = \{(A_{ij})_{1 \leq i,j \leq d} \; A_{ij} \in R\}$ es un anillo no conmutativo si $d > 1$ y $R \neq 0$
~~si~~ R tiene 1 entonces $M_d(R)$ tiene identidad

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

·) la carac de $M_d(R)$ es la misma que R

·) $M_n(\mathbb{Z}_m)$ es un anillo conmutativo de car m con identidad

5) $2\mathbb{Z}$ anillo conmutativo sin identidad de car 0

6) S conjunto y R anillo $R^S = \{f : S \to R, \text{función}\}$

$$(f+g)(s) = f(s) + g(s)$$
$$(f \cdot g)(s) = f(s) \cdot g(s) \qquad s \in S,\ f, g \in R^S$$

.) R^S anillo de característica R

si $1 \in R \Rightarrow R^S$ tiene identidad $\mathbb{1}(s) = 1$ $\forall s \in S$

6.b) $R = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \text{sop } f \text{ compacto}, f \text{ continua}\}$

R anillo con las operaciones puntuales def en 6), R no tiene identidad

obs que estas operaciones estan bien def pues suma y producto de funciones cont con soporte compacto vuelven a ser cont. con sop. compacto

def Sea R un anillo, un subconjunto T de R se dice subanillo si T subgrupo de el grupo abeliano R y ademas T cerrado para el producto

1) $T \leq (R, +)$

2) $a \cdot b \in T \quad \forall a, b \in T$

obs Un subanillo es un anillo con las operaciones inducidas por restricción ejemplo G grupo, R anillo. Para cada $g \in G$

$R_g \cong R$ (R_g grupo abeliano)

↳ para cada $g \in G$ tomo una copia de R

$x \in R[G]$ $\qquad x = \sum_{i=1}^{k} x_{g_i} \qquad x_{g_i} \in R_{g_i} \quad k \in \mathbb{N}$

(única expresión)

notación "$x_{g_i} = x_i g_i$" $\quad x_{g_1} \neq x_{g_2}$ si $g_1 \neq g_2$

$x_{g_i} = x_i \in R$

De manera que $\quad x = \sum_{i=1}^{k} x_i g_i \quad g_i \in G, x_i \in R$
$k \in \mathbb{N}$

definimos $\quad x = \sum x_i g_i \quad y = \sum y_i g_i$

$$x + y = \sum (x_i + y_i) g_i$$

$$xy = \sum_{k} \left[\sum_{i,j \mid \underbrace{g_i g_j}_{\text{producto de } G} = g_k} (x_i y_j) \right] g_k$$

$R[G]$ es anillo llamado el anillo de grupo G con coeficientes en R

ejemplo

·) $\mathbb{Z}[S_3]$ $\quad x = id + (12) - 2(123)$

$$y = (23) - (12) + Id$$

$$xy = id(23) - id(12) + Id$$
$$+ (12)(23) - (12)(12) + 2(12)(123)$$
$$+ Id + Id(12) - 2Id(123)$$

$$= (23) \cancel{- (12)} + Id + (123) - \cancel{Id}$$
$$+ 2(23) + \cancel{Id} + \cancel{(12)} - 2(123)$$
$$= (2+1)(23) + Id + (-2+1)(123)$$
$$= Id + 3(23) - (123)$$

def $f: R \to S$ homomorfismo de anillos

f se dice mono si f inyectivo
epi " " sobre
iso " " biyectiva

$Im f \subseteq S$ subgrupo abeliano
(pues $f: (R,+) \to (S,+)$ homo)

Además $f(a) f(b) = f(a \cdot b) \in Im f$

$\therefore Im f$ subanillo de S

·) El núcleo de f, $\ker f = \{a \in R \mid f(a) = 0\}$ tambien es subanillo

·) Además $ab \in \ker f$ $\forall b \in \ker f$ $\forall a \in R$

$a \cdot b \in \ker f$ $\forall a \in \ker f$ $\forall b \in R$

Es decir que $\ker f \subseteq R$ es un ideal de R de acuerdo con la siguiente def

def Sea R anillo. Un subgrupo $(I,+) \leq (R,+)$ se dice: un ideal a izq si:

$$ax \in I \quad \forall a \in R \quad \forall x \in I$$

ideal a derecha si:

$$xa \in I \quad \forall a \in R \quad \forall x \in I$$

ideal (bilátero) si:

$$ax, xa \in I \quad \forall a \in R \quad \forall x \in I$$

def $I \subseteq R$ ideal definimos en el grupo abeliano R/I la operación

$$(a+I) \cdot (b+I) = ab + I \qquad a, b \in R$$

proposición R/I es anillo con esta operación demo se reduce a probar que el producto está bien definido, luego los axiomas se deducen inmediatamente de los que se cumplen en B)

Supongamos $a+I = a'+I$, $b+I = b'+I$

$$\Updownarrow \, \text{(I)} \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$a \underbrace{-a'}_{+(a')^{-1}} \in I \qquad\qquad b - b' \in I$$

(por ser coclase) equivalencia

$(a, b \in B)$
$$ab - a'b' = a(b-b') + ab' - a'b'$$
$$= \underbrace{a \underbrace{(b-b')}_{\in I}}_{\in I} + \underbrace{\underbrace{(a-a')}_{\in I} b'}_{\in I}$$

bilátero

$$\therefore ab + I \underset{\text{(I)}}{=} a'b' + I$$