Objetivos

- Reconocer y aplicar los principios matemáticos empleados en el conteo de conjuntos (Principio de adición, de multiplicación, del palomar, del complemento).
- Dominar técnicas de conteo.

Ejercicios

1. (a) Dar todas las funciones $f : \{1, 2\} \to \{a, b, c\}$ y determinar cuáles son inyectivas, suryectivas o biyectivas.

(b) Dar todas las funciones $f : \{a, b, c\} \to \{1, 2\}$. Decidir cuáles son inyectivas, suryectivas o biyectivas.

2. En un grupo de 7 personas las sumas de sus edades es 332. Probar que se pueden elegir 3 de ellas tal que la suma de sus edades sea por lo menos 143.

3. Si se distribuyen al azar los números del 1 al 10 alrededor de un círculo, probar que existen 3 números consecutivos tales que su suma es al menos 17.

4. (a) ¿Cuántos números de 5 dígitos hay?

(b) ¿Cuántos números pares de 5 dígitos hay?

(c) ¿Cuántos números de 5 dígitos con sólo un 3 hay?

(d) ¿Cuántos números capicúas de exactamente 5 dígitos hay?

(e) ¿Cuántos números capicúas de a lo sumo 5 dígitos hay?

(f) ¿Cuántos números de 5 dígitos con al menos dos 3 hay?

Observacion. *De acuerdo a los Ejercicios 9) y 10) del Práctico 1 las preguntas (a)-(e) se pueden responder usando los Principio de Adición y Multiplicación. La pregunta (f) se puede resolver usando el Principio del complemento (¿de qué conjunto?).*

5. (a) Calcular la cantidad de funciones inyectivas $f : [1, 5] \to [1, 8]$ tales que $f(5) = 6$.

(b) Calcular la cantidad de funciones inyectivas $f : [1, 5] \to [1, 5]$ tales que $f(5) = 5$. ¿Son todas biyectivas?

6. ¿Cuántos subconjuntos de $\{0, 1, 2, \ldots, 8, 9\}$ contienen al menos un número impar?

7. Suponé que tenés 8 CD's[1] distintos de *Rock*, 7 CD's distintos de *Música Clásica* y 5 CD's distintos de *Cuarteto*.

(a) ¿De cuántas formas distintas podés seleccionar un CD?

(b) ¿De cuántas formas distintas podés seleccionar tres CD's, uno de cada tipo?

(c) Si querés escuchar 3 CD's, uno a continuación de otro. ¿ De cuántas formas distintas podés hacerlo si no querés mezclar más de dos estilos?

8. Las aerolíneas Iberia (Ibe), Air France (AF), Lufthansa (Luf) y Aerolíneas Argentinas (AA) disponen cada una de un vuelo diario desde Córdoba a Buenos Aires, uno desde Buenos Aires a Madrid y uno desde Madrid a Berlin. Usted quiere viajar de Córdoba a Berlin utilizando algunos de estos vuelos.
¿De cuántas maneras distintas puede realizar su viaje si ...

[1] Quizás sos demasiado jóven y ahora escuchas música desde Spotify pero antes se usaban CD's en donde estaba gravada la música :)

(a) puede hacer cualquier conexión entre los vuelos ofrecidos?
(b) puede hacer cualquier conexión entre los vuelos ofrecidos pero quiere utilizar exactamente 2 aerolíneas distintas?
(c) puede hacer cualquier conexión entre los vuelos ofrecidos pero quiere utilizar una aerolínea distinta en cada trayecto?
(d) los vuelos de AA y AF sólo pueden ser conectados con vuelos de AA y AF, mientras que los vuelos de Ibe y Luf sólo pueden ser conectados con los vuelos de Ibe y Luf?

9. ¿De cuántas formas puede formarse un comité de 5 personas tomadas de un grupo de 11 personas entre las cuales hay 4 docentes y 7 estudiantes, si:
(a) no hay restricciones en la selección?
(b) el comité debe tener exactamente 2 docentes?
(c) el comité debe tener al menos 3 docentes?
(d) le docente X y le estudiante Y no pueden estar juntos en el comité?

10. ¿De cuántas maneras distintas se pueden ordenar en una fila n personas vestidas de rojo y n personas vestidas de azul de modo que todas las personas de color azul estén juntas?

11. ¿ De cuántas formas distintas pueden ordenarse las letras de la palabra MATEMATICA si
(a) ... no hay restricción?
(b) ... se pide que las consonantes y las vocales se alternen?

12. (a) ¿Cuántas “palabras” distintas pueden formarse con cinco letras D y tres letras A? Con “palabra” nos referimos a cualquier combinación de las ocho letras sin importar si tiene significado o no.
(b) Sean m y n números naturales ¿Cuántas “palabras” distintas pueden formarse con m letras A y n letras D?

13. Dar una biyección entre los conjuntos del ejercicio anterior y los conjuntos de este ejercicio para responder las siguientes preguntas.
(a) ¿Cuántos caminos diferentes en $\mathbb{R}^2$ hay entre $(0, 0)$ y $(5, 3)$ si cada camino se construye moviéndose una unidad a la derecha o una unidad hacia arriba en cada paso?
(b) Deducir una fórmula general para hallar la cantidad de caminos entre $(0, 0)$ y (m, n) con $m, n \in \mathbb{N}$.

14. ¿ De cuántas maneras distintas pueden sentarse 8 personas en una mesa circular?

15. ¿ De cuántas maneras distintas puede armar un collar con 6 bolas rojas y 6 bolas azules si
(a) ... no hay restricción?
(b) ... las bolas rojas deben estar juntas?
(c) ... nunca deben quedar dos bolitas rojas juntas?

16. ¿Cuántas diagonales tiene un polígono regular de n lados? (En el Práctico 2 este ejercicio se resolvió usando inducción; aquí se deben usar técnicas de conteo).

17. De una caja que contiene 100 bolillas numeradas del 1 al 100 se extraen 5 bolillas. ¿Cuántos resultados posibles hay si...

(a) ... las bolillas se extraen una a la vez y no son restituidas en la caja?

(b) ... las bolillas se extraen todas juntas?

(c) ... las bolillas se extraen una a la vez y cada bolilla que se extrae es restituida?

Observacion. *Estas situaciones se pueden expresar mediante funciones apropiadas y contar todas estas funciones es una manera de responder a las preguntas. ¿ Sabes cuáles son esas funciones?*

18. (a) En una clase de 30 estudiantes, ¿de cuántas maneras se puede formar un equipo de 6 integrantes donde unx de ellxs es designadx como lider? ¿Y si el equipo fuera de 5 integrantes ó 10 ó 12?

(b) En una clase de n estudiantes, ¿de cuántas maneras se puede formar un equipo de m integrantes donde unx de lxs integrantes es designadx como lider?

(c) En una clase de n estudiantes, ¿de cuántas maneras se puede formar un equipo con un integrante designadx como lider?

Observacion. *El inciso (c) se puede resolver de dos maneras distintas y así deducir que*

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \ldots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. ¿Sabes cuáles son esas dos formas?

19. Demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$ valen:

(a) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$

(b) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0.$

20. Dados m, n y k naturales tales que $m \leq k \leq n$, probar que se verifica

$$\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}.$$