Objetivos

- Repasar las operaciones entre conjuntos (unión, intersección, complemento, diferencia simétrica, producto cartesiano, partes)
- Familiarizarse con la notación de conjuntos.
- Aprender los distintos tipos de relaciones.

Ejercicios

1) Dado el conjunto $A = \{1, 2, \{3\}, \{1, 2\}\}$, determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

(a) $3 \in A$
(b) $\{3\} \subseteq A$
(c) $\{3\} \in A$
(d) $\{\{3\}\} \subseteq A$
(e) $\{1, 2\} \in A$
(f) $\{1, 2\} \subseteq A$
(g) $\{\{1, 2\}\} \subseteq A$
(h) $\{\{1, 2\}, 3\} \subseteq A$
(i) $\emptyset \in A$
(j) $\emptyset \subseteq A$
(k) $A \in A$
(l) $A \subseteq A$.

2) Dados $A = \{1, 3, 5, 7, 8, 11\}$ y $B = \{-1, 3, -5, 7, -8, 11\}$, hallar $A \cap B$, $A \cup B$, $B - A$ y $A \triangle B$.

3) Describir por extensión y traducir en símbolos (es decir, escribir de la forma {... | ...}) los siguiente conjuntos:

(a) El conjunto de todos los números naturales menores que 30 y divisibles por 3.
(b) El conjunto de todos los números naturales mayores que 5 y menores que 76 que son cuadrados perfectos.

4) Sean A, B y C conjuntos. Representar los siguientes conjuntos con un diagrama de Venn:

(a) $(A \cup B^c) \cap C$
(b) $A \triangle (B \cup C)$

5) Dados subconjuntos A, B y C de un conjunto referencial V, describir $(A \cup B \cup C)^c$ en términos de intersecciones y complementos, y $(A \cap B \cap C)^c$ en términos de uniones y complementos.

6) Hallar el conjunto $\mathcal{P}(A)$ de partes de A en los siguientes casos:

(a) $A = \emptyset$.
(b) $A = \{1\}$
(c) $A = \{1, \{1, 2\}\}$
(d) $A = \{a, b, c\}$

7) Sean A y B conjuntos. Probar las siguientes afirmaciones:

(a) $A \subseteq B \Rightarrow B^c \subseteq A^c$.
(b) $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \Leftrightarrow A \subseteq B$

8) Sean $A = \{0, 1, 2, 3\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$. Hallar $A \times B$ y $B \times B$.

9) La cantidad de dígitos o cifras de un número se cuenta a partir del primer dígito distinto de cero. Por ejemplo, 0035010 es un número de 5 dígitos. Sea A el conjunto de todos los números de 5 dígitos. Dar conjuntos A_1, A_2, A_3, A_4 y A_5 tales que A se pueda identificar con el producto cartesiano:

$$A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 \times A_5.$$

10) Describir los siguientes conjuntos utilizando uniones y productos cartesianos de conjunto:

(a) El conjunto de los números pares de 5 dígitos.

(b) El conjunto de los números de 5 dígitos con sólo un 3.

(c) El conjunto de los números capicúas de exactamente 5 dígitos.

(d) El conjunto de los números capicúas de a lo sumo 5 dígitos.

Observación. *Discripciones como las de los Ejercicios* **9)** *y* **10)** *serán de utilidad para calcular cardinales de conjuntos finitos en la unidad de Conteo.*

11) Sean A, B y C conjuntos. Probar que:

(a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ (b) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

12) Mostrar que las siguientes identidades no valen en general exhibiendo contraejemplos:

(a) $(A \times B)^c = A^c \times B^c$ (b) $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$

13) En cada uno de los siguientes casos determinar si la relación $\mathcal{R}$ en A es reflexiva, simétrica, antisimétrica, transitiva, de equivalencia o de orden.

(a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$

(b) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$

(c) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathcal{R} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (1, 2), (1, 3), (2, 5), (1, 5)\}$

(d) $A = \mathbb{N}$, $\mathcal{R}$ definida por $a \,\mathcal{R}\, b \Leftrightarrow b$ es múltiplo de a

(e) $A = \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $\mathcal{R}$ definida por $X \,\mathcal{R}\, Y \Leftrightarrow X \cap \{1, 2, 3\} \subseteq Y \cap \{1, 2, 3\}$

14) Sea $A = \{a, b, c, d, e, f\}$. Dada la siguiente relación de equivalencia en A:

$$\mathcal{R} = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (f, f), (a, b), (b, a), (a, f), (f, a), (b, f), (f, b), (c, e), (e, c)\},$$

hallar la clase $\bar{a}$ de a, la clase $\bar{b}$ de b, la clase $\bar{c}$ de c, la clase $\bar{d}$ de d, y la partición asociada a $\mathcal{R}$.

15) En el conjunto $\mathbb{Z}$ de números enteros, considerar la relación de equivalencia dada por la paridad: dos números están relacionados si y solo si tienen la misma paridad (son ambos pares o ambos impares). ¿Cuántas clases de equivalencia distintas tiene? Hallar un representante para cada clase.

16) Probar que las siguientes son relaciones de equivalencia en $\mathbb{Z}$ y hallar un representante para cada clase equivalencia.

(a) $a \sim b$ si y sólo si 2 divide a $a - b$. Comparar con la relación del ejercicio anterior.

(b) $a \sim b$ si y sólo si 3 divide a $a - b$.

(c) Fijado $n \in \mathbb{N}$, $a \sim b$ si y sólo si n divide a $a - b$.

Observación. *Profundizaremos más adelante en esta relación cuando veamos congruencias.*

17) En el conjunto de todos los subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$, sea la relación de equivalencia dada por el cardinal (es decir, la cantidad de elementos): dos subconjuntos están relacionados si y solo si tienen la misma cantidad de elementos. ¿Cuántas clases de equivalencia distintas tiene? Hallar un representante para cada clase.