Resumen Final Analisis II

Javier Vera

April 2, 2024

Teorema 0.1 (Sumas superiores e inferiores)
Sea f una función acotada en el intervalo $[a,b]$ y sean P, Q dos particiones de $[a,b]$.

1. $L(f,P) \leq U(f,P)$
2. $P \subset Q$ *implica* $L(f,P) \leq L(f,Q)$. *Analogamente* $U(f,Q) \leq U(f,P)$
3. $L(f,P) \leq U(f,Q)$

1. *Proof.*
$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}) = U(f,P)$$
Esto vale por que
$$m_i = \inf\{f(x) \mid t_{i-1} \leq x \leq t_i\} \leq \sup\{f(x) \mid t_{i-1} \leq x \leq t_i\} = M_i$$
□

2. *Proof.* Como $P \subset Q \quad \exists x \in Q \ / \ P \subset P \cup \{x\} \subseteq Q$
Ahora si miramos la particion de $P \cup \{x\}$ (llamemosla A)
$$A = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{j-1} < x < t_j < \ldots < t_n = b\}$$
Que es muy parecida a la de P
$$P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{j-1} < t_j < \ldots < t_n = b\}$$
Y llamemos
$$m_{\text{izq}} = \inf\{f(t) \mid t_{j-1} \leq t \leq x\} \quad m_{\text{der}} = \inf\{f(t) \mid x \leq t \leq t_j\}$$
Ahora
$$L(f,A) = \sum_{i=1}^{j-1} m_i(t_i - t_{i-1}) + m_{izq}(x - t_{j-1}) + m_{der}(t_j - x) + \sum_{i=j+1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1})$$

Pero
$$\{f(t) \mid t_{j-1} \leq t \leq x\} \subseteq \{f(t) \mid t_{j-1} \leq t \leq t_j\}$$
Luego
$$m_{izq} = \inf\{f(t) \mid t_{j-1} \leq t \leq x\} \geq \inf\{f(t) \mid t_{j-1} \leq t \leq t_j\} = m_j$$
Entonces $m_{izq} \geq m_i$. De forma análoga vemos que $m_{der} \geq m_i$
(Si agrandamos el conjunto el infimo se queda igual o se achica)

Continuando la ecuacion tenemos
$$L(f,A) \geq \sum_{i=1}^{j-1} m_i(t_i - t_{i-1}) + m_j(x - t_{j-1}) + m_j(t_j - x) + \sum_{i=j+1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}) = L(f,P)$$
Ahora si $A = Q$ tenemos nuestro resultado $L(f,Q) \geq L(f,P)$, si no agregamos otro punto a A y repetimos hasta que $A = Q$. Esto es posible por que Q es finito, entonces repetiremos finitas veces el proceso.

La otra afirmación sale igual y usando que al agrandar un conjunto el supremos se queda igual o se agranda por lo tanto tendremos
$$M_{izq} \leq M_i \quad M_{der} \leq M_i$$
Y llegaremos a $U(f,A) \leq U(f,P)$. Etc
□

3. Sea $R = P \cup Q$ entonces $P \subset R \wedge Q \subset R$

$$L(f,P) \leq L(f,R) \quad \text{Por item 2}$$

$$L(f,R) \leq U(f,R) \quad \text{Por item 1}$$

$$U(f,R) \leq U(f,Q) \quad \text{Por item 2 devuelta}$$

Finalmente

$$L(f,P) \leq U(f,Q)$$

Teorema 0.2 (Criterio integrabilidad: Limite de Particiones)
Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Si para todo $x \in \mathbb{N}$ existe una partición P_n de $[a,b]$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} L(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} U(f,P_n) = L$$

entonces f es integrable sobre $[a,b]$ y $\int_a^b f = L$

Proof. Trivial. Sabemos que $L(f,P_n) \in A = \{L(f,P) \mid \text{P es partición}\} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
Por lo tanto $L(f,P_n) \leq \sup A \quad \forall n \in \mathbb{N}$. De la misma forma $\inf B \leq U(f,P_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$
Por Teorema 0.1.3 sabemos que las sumas inferiores estan acotadas por las sumas superiores entonces

$$L(f,P_n) \leq \sup A \leq \inf B \leq U(f,P_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por lo tanto

$$L = \lim_{n\to\infty} L(f,P_n) \leq \sup A \leq \inf B \leq \lim_{n\to\infty} U(f,P_n) = L$$

Mostrando que $\sup A = \sup B = L$ entonces f es integrable. Más aún su integral vale L

□

Teorema 0.3 (Criterio integrabilidad: Epsilon)
Sea f una función acotada en el intervalo $[a,b]$. Enotnces f es integrable sobre $[a,b]$ si y sólo si para todo $\epsilon > 0$ existe una partición P de $[a,b]$ tal que

$$U(f,P) - L(f,P) < \epsilon$$

Proof. $\Rightarrow$) Sean

$$B = \{U(f,P) \mid P \text{ partición de } [a,b]\} \quad \text{y} \quad A = \{L(f,P) \mid P \text{ partición de } [a,b]\}$$

Y sea $\ell = \sup A = \inf B$. Sabemos por propiedades de supremo e ínfimo que existe

$$P_1 \text{ tal que } \ell < U(f,P_1) < \ell + \epsilon$$

$$P_2 \text{ tal que } \ell - \epsilon < L(f,P_2) < \ell$$

Restando a la primera expresión la segunda obtenemos

$$-\epsilon \leq U(f,P_1) - L(f,P_2) \leq \epsilon$$

Ahora llamamos $P_\epsilon = P_1 \cup P_2$ y sabemos que

$$U(f,P_\epsilon) \leq U(f,P_1) \quad \text{y} \quad L(f,P_2) \leq L(f,P_\epsilon)$$

Sumando ambas expresiones

$$U(f,P_\epsilon) + L(f,P_2) \leq U(f,P_1) + L(f,P_\epsilon)$$

$$U(f,P_\epsilon) - L(f,P_\epsilon) \leq U(f,P_1) - L(f,P_2) \leq \epsilon$$

Probando lo que queriamos

$\Leftarrow$) Dado $\epsilon > 0$ sabemos que exsiste P_ϵ particion tal que

$$U(f, P_\epsilon) - L(f, P_\epsilon) \leq \epsilon$$

Además

$$U(f, P_\epsilon) \geq \inf(B) \quad \text{y} \quad \sup(A) \geq L(f, P_\epsilon)$$

Sumando ambos y pasando términos de lado a lado

$$\epsilon \geq U(f, P_\epsilon) - L(f, P_\epsilon) \geq \inf(B) - \sup(A) > 0$$

Pero esto vale para todo $\epsilon > 0$ en particular si tomamos $\epsilon = \frac{1}{n}$ y usamos límte podemos ver que

$$0 \geq \inf(B) - \sup(A) \geq 0$$

Mostrando que $\inf(B) = \sup(A)$. Mostrando que f es integrable $\square$

Teorema 0.4 (Separación de integrales)
Si $a < c < b$ entonces f es integrable sobre $[a, b]$ si y sólo si es integrable en $[a, c]$ y $[c, b]$ y en ambos casos se cumple

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Proof. $\Rightarrow$) Como es integrable dado $\epsilon > 0$ sabemos que existe partición P tal que

$$U(f, P) - L(f, P) < \epsilon$$

Ahora si $c \in P$ seguimos con P si no definimos $Q = P \cup \{c\}$. Además sabemos

$$U(f, P) > U(f, Q) \quad \text{y} \quad L(f, Q) > L(f, P)$$

Entonces sumando ambos y operando llegamos a que

$$U(f, Q) - L(f, Q) < \epsilon$$

Sabemos que $Q = \{a = t_0, \ldots, t_{j-1}, c, t_{j+1} \ldots, t_n = b\}$
Entonces podemos definir

$$Q_1 = \{a = t_0, \ldots, c\} \quad \text{y} \quad Q_2 = \{c, \ldots, t_n = b\}$$

Sabemos que $Q_1 \cup Q_2 = Q$ luego

$$U(f, Q) = U(f, Q_1) + U(f, Q_2) \quad \text{y} \quad L(f, Q) = L(f, Q_1) + L(f, Q_2)$$

Entonces

$$\epsilon > U(f, Q) - L(f, Q) = U(f, Q_1) - L(f, Q_1) + U(f, Q_2) - L(f, Q_2)$$

Como $U(f, Q_1) > L(f, Q_1)$ entonces $U(f, Q_1) - L(f, Q_1) > 0$ y lo mismo con Q_2
Entonces $\epsilon > U(f, Q_1) - L(f, Q_1)$ y lo mismo con Q_2
Entonces f es integrable en $[a, c]$ y en $[c, b]$
$\Leftarrow$) Sabemos que es integrable en $[a, c]$ y en $[c, b]$ entonces

$$U(f, P_1) - L(f, P_1) < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{y} \quad U(f, P_2) - L(f, P_2) < \frac{\epsilon}{2}$$

Donde P_1, P_2 son particiones de $[a, c]$ y $[c, b]$ respectivamente
Entonces

$$U(f, P_1) + U(f, P_2) - L(f, P_1) - L(f, P_2) < \epsilon$$

Ahora sea $P = P_1 \cup P_2$ tenemos que

$$U(f, P) - L(f, P) = U(f, P_1) + U(f, P_2) - L(f, P_1) - L(f, P_2) < \epsilon$$

Entonces f integrable en $[a, b]$

Finalemente veamos la igualdad. Sea Q una partición cualquiera. Definimos $P = Q \cup \{c\}$
Luego tenemos P_1, P_2 particiones de $[a, c]$ y $[c, b]$ tales que $P = P_1 \cup P_2$ por lo tanto

$$L(f,Q) \leq L(f,P) = L(f,P_1) + L(f,P_2) \leq \int_a^c f + \int_c^b f < U(f,P_1) + U(f,P_2) = U(f,P) \leq U(f,Q)$$

Entonces para toda partición Q

$$L(f,Q) < \int_a^c f + \int_c^b f < U(f,Q)$$

$$\int_a^b f = \sup(A) \leq \int_a^c f + \int_c^b f \leq \inf(B) = \int_a^b f$$

□

Teorema 0.5 (Integral cf = c Integral f)
Si f es una función integrable en $[a, b]$ y $c \in \mathbb{R}$ entonces cf es integrable en $[a, b]$ y vale

$$c \int_a^b f = \int_a^b cf$$

Proof. Sea P partición de $[a, b]$ y M_i, m_i los de siempre. Definimos

$$M_i' = \sup\{cf(t) \mid t_{i-1} < t < t_i\} \quad \text{y} \quad m_i' = \inf\{cf(t) \mid t_{i-1} < t < t_i\}$$

Como $c > 0$ sabemos que $cM_i = M_i'$ y $cm_i = m_i'$
Entonces

$$U(cf,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i'(t_{i+1} - t_i) = \sum_{i=1}^{n} cM_i = cU(f,P)$$

Análogamente vemos $L(cf, P) = cL(f, P)$
Como es integrable en $[a, b]$ dado $\epsilon > 0$ tenemos

$$U(f,P) - L(f,P) < \frac{\epsilon}{c}$$

Entonces

$$U(cf,P) - L(cf,P) = c(U(f,P) - L(f,P)) = \epsilon$$

Entonces cf es integrable en $[a, b]$
Mostremos la igualdad

$$cL(f,P) = L(cf,P) \leq \int_a^b cf \leq cU(cf,P) = cU(f,P)$$

Entonces

$$c \int_a^b f = c \sup A \leq \int_a^b cf \leq c \inf B = c \int_a^b f$$

Si $c < -1$. Sucede algo similar solo que esta vez $-m_i = M_i'$ y $-M_i = m_i'$
Entonces esta vez

$$U(-f,P) = \sum_{i=1}^{m} M_i'(t_{i+1} - t_i) = -\sum_{i=1}^{n} m_i(t_{i+1} - t_i) = -L(f,P)$$

Análogamente llegamos a $L(-f, P) = -U(f, P)$. De donde podemos ver

$$U(-f,P) - L(-f,P) = U(f,P) - L(f,P) < \epsilon$$

Concluyendo que $-f$ es integrable en $[a, b]$
Veamos la igualdad

$$-L(f,P) = U(-f,P) \geq \int_a^b -f \geq L(-f,P) = -U(f,P)$$

$$L(f,P) \leq -\int_a^b -f \leq U(f,P)$$

esto vale para toda partición, entonces

$$\int_a^b f = \sup(A) \leq -\int_a^b -f \leq \inf(B) \int_a^b f$$

Entonces $\int_a^b -f = -\int_a^b f$

Caso $c < 0$ entonces $cf = (-c)(-f)$. Por el paso 2 sabemos que $-f$ es integrable además $-c > 0$ entonces como $-f$ es integrable $(-c)(-f)$ es integrable por paso 1. Entonces cf integrable

$$\int_a^b cf = \int_a^b (-c)(-f) = -c \int_a^b -f = (-c)(-1) \int_a^b f = c \int_a^b f$$

□

Teorema 0.6 (Lema acotación)
Sea f una función integrable que satisface $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a,b]$ entonces $m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$

Proof. Sabemos que $m < f(x) < M$. Useos las sumas de la partición $P = \{a, b\}$

$$m(b-a) \leq m_i(b-a) = L(f,P) \leq \int_a^b f \leq U(f,P) = M_i(b-a) \leq M(b-a)$$

□

Teorema 0.7 (Promedio)
Sea f una función integrale definida en el intervalo $[a,b]$ y sea $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f$. Entonces

1. *Si $m \leq f \leq M$ sucede $m \leq \mu \leq M$*
2. *Si f es contínua entonces $\mu = f(x_0)$ para algún $x_0 \in [a,b]$*

Proof. El primero sale de usar el lema de acotación y dividir todo por $(b-a)$ El segundo como es contínua podemos usar tvm

$$\int_a^b f = f(x_0)(b-a) \quad x_0 \in [a,b]$$

Entonces

$$\mu = \frac{f(x_0)(b-a)}{(b-a)} = f(x_0) \quad x_0 \in [a,b]$$

□

Teorema 0.8 (Continuidad de Primitiva)
Si f es una función integrable en $[a,b]$, entonces la función $F : [a,b] \to \mathbb{R}$

$$F(x) = \int_a^x f$$

es contínua

Proof. Veremos que F es contínua en $c \in [a,b]$ un punto arbitrario

$$\lim_{h \to 0} F(c+h) = F(c)$$

Veamos primero el caso $h > 0$

$$F(c+h) - F(c) = \int_a^{c+h} f - \int_a^c f = \int_a^c f + \int_c^{c+h} - \int_a^c f = \int_c^{c+h} f$$

Ahora como f es integrable entonces es acotada $m < f < M$ entonces usamos lema acotació

$$mh \leq \int_c^{c+h} f \leq Mh \quad \implies \quad mh \leq F(c+h) - F(h) \leq Mh$$

Usando limie de $h \to 0^+$ de ambos lados vemos que

$$\lim_{h \to 0^+} F(c+h) - F(c) = 0$$

Si $h < 0$

$$F(c+h) - F(c) = \int_a^{c+h} f - \int_a^c f = - \int_{c+h}^c f$$

Por lema acotación

$$m(-h) \leq \int_{c+h}^c f \leq M(-h)$$

Lo mismo usando límite se termina la demostración llegamos a

$$\lim_{h \to 0^-} F(c+h) - F(c) = 0$$

Entonces $\lim_{h \to 0} F(c+h) - F(c) = 0$ Y esto vale para todo $c \in [a,b]$ por lo tanto F es contínua □

Teorema 0.9 (Primer TFC)
Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función contínua y sea $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \int_a^x f$$

Entonces F es derivable y $F' = f$. Para los extremos se entiende que se cumple $F'_+(a) = f(a)$ $F'_- = f(b)$

Proof. Sea $c \in (a,b)$ (Para los extremos a y b valen argumentos similares). Por definición

$$F'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{F(c+h) - f(c)}{h}$$

Nos gustaria ver que el lìmite es igual a $f(c)$. Caso $h > 0$

$$F(c+h) - F(c) = \int_c^{c+h} f - \int_a^c f = \int_c^{c+h} f$$

Ahora definimos

$$m(h) = \min\{f(x) \mid x \in [c, c+h]\}$$
$$M(h) = \max\{f(x) \mid x \in [c, c+h]\}$$

Como h tiende a 0 y f es contínua $f(x)$ con $x \in [c, c+h]$ tiende a $f(c)$. Entonces el mìnimo tiende a $f(c)$ entonces $m(h)$ tiende a $f(c)$. Lo mismo pasa con $M(h)$
y además

$$m(h) \leq f(x) \leq M(h) \quad \forall x \in [c, c+h]$$

Si vamos fijando h podemos usar lema de acotación entones para cada h

$$hm(h) \leq \int_c^{c+h} f \leq hM(h)$$

$$m(h) \leq \frac{\int_c^{c+h} f}{h} \leq M(h)$$

Usando limite llegamos a

$$f(c) \leq \lim_{h \to 0^+} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} \leq f(c)$$

Si tomamos $h < 0$ $(-h > 0)$. Haciendo algo similar al ejercicios pasado llegamos a

$$(-h)m(h) \leq \int_{c+h}^{c} f \leq (-h)M(h)$$

$$m(h) \leq -\frac{\int_{c+h}^{c} f}{h} \leq M(h)$$

Sabemos que el limite de $m(h)$ y $M(h)$ es $f(c)$ entonces el limite por izquierda lo és

Ahora usando limite

$$f(c) = \lim_{h \to 0^-} \frac{F(c+h) - F(c)}{h}$$

Finalmente

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} = f(c)$$

Que es la definición de derivada de F, entonces $F'(c) = f(c)$ y esto vale para cualquier $c \in [a,b]$ que tomemos entonces $F' = f$ □

Teorema 0.10 (Barrow)
Sea $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función tal que su derivada g' es contínua en $[a,b]$. Entonces

$$\int_a^b g'(t)dt = g(b) - g(a)$$

Proof. Sea $F(x) = \int_a^x g'(t)dt$. Como f es contínua.

$$F'(x) = g'(x)$$

Pero entonces $F(x) = g(x) + c \quad \forall x \in [a,b]$

Evaluando en a tenemos $0 = F(a) = g(a) + c$ entonces $-g(a) = c$

Evalaundo en b tenemos $\int_a^b g'(t)dt = F(b) = g(b) + c = g(b) - g(a)$ □

Proposición 1 (Propiedades Log)
Algunas propiedades del $\log \quad \forall x, y > 0$

1. $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$

   Derivamos ambos miembros con respeto a x y vemos que ambas derivadas coinciden entonces dichas funciones difieren por una constante

   $$\log(xy) = \log(x) + \log(y) + c \quad \forall x, y > 0$$

   Entonces evaluando $x = 1$

   $$\log(y) = \log(1) + \log(y) + c$$

   Finalmente $c = 0$. Mostrando la igualdad

2. $\log x^n = n \log(x)$. *Sale de la primera. Para rigurosidad usar inducción*

3. $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y$

   $$\log(x) = \log\left(\frac{x}{y}.y\right) = \log\left(\frac{x}{y}\right) + \log(y)$$

Proposición 2 (Propiedades exp)
Algunas propiedades

1. $\exp = \exp'$

   $$\exp'(x) = (\log^{-1})'(x) = \frac{1}{\log'(\log^{-1} x)} = \frac{1}{\frac{1}{\log^{-1} x}} = \log^{-1} x = \exp(x)$$

2. $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$

   Veámoslo. Sabemos
$$x + y = \log(exp(x)) + \log(exp(y))$$
   Entonces por prop del log
$$\log exp(x+y) = \log(exp(x)exp(y))$$
   Como log *es inyectiva tenemos lo que queremos*

3. a^{x+y} *Vale por que* $a^{x+y} = e^{(x+y)\log(a)} = e^{x\log a}.e^{y\log a} = a^x.a^y$

4. $(a^x)^y = a^{xy}$. *Sale igual*

Proposición 3 (Log a vs Log e)
$$\log_a x = \frac{1}{\log a}\log x$$

Proof. Veremos equivalentemente que $\log_a x.\log a = \log x$

Sabemos que e es inyectiva. Entonces basta ver que $e^{\log_a x.\log a} = e^{\log x}$

Pero
$$e^{\log_a x.\log a} = e^{(\log a)^{\log_a x}} = a^{\log_a x} = x = e^{logx}$$
□

Proposición 4 (Derivadas de log)
$$\frac{\partial a^x}{\partial x} = a^x \log a$$
$$\frac{\partial \log_a(x)}{\partial x} = \frac{1}{x\log(a)}$$

Proof. Ambas salen usando $a^x = e^{x\log a}$ y $\log_a(x) = \frac{\log x}{\log a}$ □

Teorema 0.11 (f′=f entonces f = ce x)
Sea f una función derivable tal que $f' = f$ entonces $\exists c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ce^x$

Proof. Sea $g(x) = \frac{f(x)}{e^x}$, como $e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
$$g'(x) = \frac{f'(x)e^x - f(x)e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(f(x) - f(x)}{e^{2x}} = 0$$
Entonces $g(x) = c$ entonces $ce^x = f(x)$ □

Proposición 5 (Lim ex / en)
$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n} = \infty$$

Proof. Sabemos que $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty \quad$ y $\quad \lim_{x\to\infty} x^m = \infty$

Entonces aplicamos sucesivamente l'hopital
$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{nx^{n-1}} = \ldots = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{n!} = \infty$$
□

Teorema 0.12 (Sustitución en integrales)
Sea f contínua y g derivable entonces:
$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

Proof. Sea F una primitiva de f ($F' = f$). Entonces por regla de la cadena tenemos $f(g(x))g'(x) = (F \circ g(x))'$.
Por lo tanto

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_a^b (F \circ g(x))'dx = F \circ g(b) - F \circ g(a) = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

□

Teorema 0.13 (Método partes)
dummy

Proof. dummy □

1 Criterios convergencia integrales

Teorema 1.1 (Criterio comparacion integrales impropias)
Sean f, g dos funciones definidas en $[a, b)$ tales que

$$0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f(x), g(x) \textit{ son integrables en } [a, c] \quad \forall c \textit{ tal que } b > c > a$$

Entonces

$$\int_a^b g(x)dx \textit{ converge} \implies \int_a^b f(x)dx \textit{ converge}$$

Proof. Sean

$$F(y) = \int_a^y f(x)dx \quad G(y) = \int_a^y g(x)dx \quad b > y > a$$

Ambas F, G son crecientes por que sus derivadas son f, g respectivamente que son mayores que 0 siempre.
Además como $f \leq g$ tenemos

$$\int_a^y f(x)dx \leq \int_a^y g(x)dx \quad \forall y \in [a, b]$$

Luego

$$\lim_{y \to b^-} F(y) = \lim_{y \to b^-} \int_a^y f(x)dx \leq \lim_{y \to b^-} \int_a^y g(x)dx = \ell$$

El límite de la izquierda existe si no F no sería creciente.
Y acabamos de ver que está acotado. Por lo tanto el límite es finito entonces $\int_a^b f$ converge □

Teorema 1.2 (Criterio del Radio para integrales impropias)
Sean f, g dos funciones en $[a, b)$ tq $0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a, b)$ e integrables en $[a, c] \quad \forall c \leq b$
Miro

$$\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \geq 0$$

1. *Si $\ell < \infty$*
$$\int_a^b g(x) \textit{ converge} \implies \int_a^b f \textit{ converge}$$
2. *Si $\ell > 0$*
$$\int_a^b g(x) \textit{ diverge} \implies \int_a^b f \textit{ diverge}$$
3. *Si $0 < \ell < \infty$. Comparten comportamiento*

Proof. 1. Dado $e > 0 \quad \exists \delta \ / \ |x - b| < \delta \Rightarrow |\frac{f(x)}{g(x)} - \ell| < \epsilon$

Tomo $\epsilon = k - l > 0 (k > l)$

$$\exists \delta \ / \ -\delta + b < x < b + \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \ell \right| \leq k - l$$

Entonces

$$\frac{f(x)}{g(x)} \leq \epsilon \Rightarrow f(x) \leq g(x)\epsilon$$

En particular esto vale para $x < b$. Entonces dado $k \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$\exists c \text{ con } b > c \geq a \text{ tal que } f(x) \leq kg(x) \quad \forall x \in [c, b)$$

Dicho $c < b$ existe por que la afirmaciòn vale para todo $\delta - b < x < \delta + b$ Y que $c \geq a$ también vale por que si $\delta - b < a$ directamente puedo tomar $c = a$ y si no $a < \delta - b$ entonces el c que tome seguro es mayor que a

Si hubiera tomado $c = a$ quedaria provada la afirmación por comparación por que

$$f \leq kg(x) \quad \forall x \in [a, b)$$

Si $c > a$ sabemos

$$\int_c^b f(x) \leq k \int_c^b g(x)$$

Por comparación $\int_c^b f(x)$ converge y $\int_a^c f(x)$ es finita asi que converge mostrando que

$$\int_a^b f(x) \text{ converge}$$

2. Si $\ell > 0$ es exactamente lo mismo pero tomando $\epsilon = \ell - k$, trabajando el c de la misma forma y llegamos a

$$k \in \mathbb{R} \quad \exists c \in \mathbb{R} \ / \ kg(x) \leq f(x) \quad \forall x \in [c, b)$$

Como $k \int_a^b g(x)$ diverge entonces $\int_c^b g(x)$ diverge.

Si $\int_c^b g(x)$ convergiera entonces $\int_a^b g(x)$ convergeria por que $\int_a^c g(x)$ es finita asi que converge

Entonces por comparación $\int_c^b f(x)$ diverge entonces $\int_a^b f(x)$ diverge pues $\int_a^b f(x) = \int_a^c f(x) + \int_c^b f(x)$

Entonces si convergiera cada sumando tendría que converger

Si $\ell = \infty$ entonces por definición de límite $\exists c \in \mathbb{R} \ / \ \frac{f(x)}{g(x)} > k$

Vale para todo $x \in \mathbb{R}$ en particular para $x \in [c, b)$ Y ahora hacemos el mismo proceso que para el otro caso

3. Si $0 < \ell < \infty$ cumple hipótesis del item 1 y del 2. Entonces comparte comportamiento

$\square$

Teorema 1.3 (Pol de f es igual hasta orden n a f)

Sea f una función tq $f(a), f'(a), \ldots, f^n(a)$ estan definidas. Sean $C_k = \frac{f^k(a)}{k!} \quad 0 \leq k \leq n$ y sea

$$P_{n,a}(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i (x - a)^i$$

El pol de taylor de grado n de f en a. Entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P_{n,a}(x)}{(x - a)^n} = 0$$

Proof.
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P_{n,a}(x)}{(x-a)^n}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P_{n-1,a}(x)}{(x-a)^n}-C_n=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)-P'_{n-1,a}(x)}{n(x-a)^{n-1}}-C_n=\dots$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x)-P^{(n-1)}_{n-1,a}(x)}{n!(x-a)}-C_n$$

Y sabemos que $P^{(n-1)}_{n-1,a}(a)=f^{(n-1)}(a)$
Entonces
$$=\frac{1}{n!}\lim_{x\to a}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(a)}{x-a}-C_n=\frac{f^n(a)}{n!}-C_n=0$$

□

Teorema 1.4 (Dos pols que son iguales hasta orden n son el mismo pol)
Sean P,Q pols en centrados en a de grado menor o igual que n. Si P,Q son iguales hasta orden n entonces $P=Q$

Proof. Sea $R=P-Q$.
$$0=\lim_{x\to a}\frac{P(x)-Q(x)}{(x-a)^n}=\lim_{x\to a}\frac{R(x)}{(x-a)^n}$$

Ahora tenemos $R(x)=b_0+b_1(x-a)+\dots b_n(x-a)^n$, nos gustaria ver $b_j=0 \quad j=1\dots n$
$$\frac{R(x)}{(x-a)^i}=\frac{R(x)(x-a)^{n-i}}{(x-a)^i(x-a)^{n-i}}=\frac{R(x)(x-a)^{n-i}}{(x-a)^n}$$

Entonces
$$\lim_{x\to a}\frac{R(x)}{(x-a)^i}=\lim_{x\to a}\frac{R(x)}{(x-a)^n}(x-a)^{n-i}=0 \quad i=1\dots n$$

Entonces si ponemos $i=0$ tenemos $\lim_{x\to a}R(x)=0$
Como R es contínua $R(a)=0$. Pero sabemos que $R(a)=b_1$ entonces $b_1=0$
Además $b_1=\frac{R(a)}{(x-a)}$ como $\lim_{x\to a}\frac{R(x)}{(x-a)}=0$ entonces $b_1=0$
Asi sucesivamente vemos que $b_j=0 \quad j=1,\dots n$
Entonces $R=0$ entonces $P=Q$

□

Teorema 1.5 (P es igual a f hasta orden n entonces P es pol de f)
Si $P_{n,a}(x)$ es el pol de f centrado en a de grado n. Y Q es un pol centrado en a de grado n igual a f hasta orden n entonces $P=Q$

Proof.
$$\lim_{x\to a}\frac{Q(x)-P(x)}{(x-a)^n}=\lim_{x\to a}\frac{Q(x)-f(x)}{(x-a)^n}+\frac{f(x)-P(x)}{(x-a)^n}=0$$

El primer sumando por que Q es igual a f hasta orden n, el segundo sumando por que P es el pol de f de grado n por el teorema anterior es igual hasta orden n a f □

Teorema 1.6 (Fórmulas del resto)
Sea f una función derivable n+1 veces en $[a,b]$ y sea $R_{n,a}$ el resto del taylor de f de grado n en a.

1. $R_{n,a}(x)=\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n(x-a)$ *para algún* $t\in(a,x)$
2. $R_{n,a}(x)=\frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ *para algún* $t\in(a,x)$
3. *Si además* f^{n+1} *es integrable en* $[a,x]$

   $R_{n,a}(x)=\frac{\int_a^x f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt$ *para algún* $t\in(a,x)$

Proof. 1. Fijamos un x tal que $b \geq x > a$. Ahora si $t \in [a, x]$ tenemos

$f(x) = P_{n,t}(x) + R_{n,t}(x) = f(t) + f'(t) + \ldots + \frac{f^n(t)}{n!}(x-t)^n + R_{n,t}(x)$. Estos existen por que las derivadas estan definidas en $[a, b]$, en particular están definidas en $[a, x]$

Entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial f(x)}{dt} \\ &= f'(t) + (f''(t)(x-t) - f'(t)) \\ &+ \frac{1}{2}(f^3(t)(x-t)^2 - 2f^2(t)(x-t)) \\ &\vdots \\ &+ \frac{1}{n!}\left[f^{(n+1)}(t)(x-t)^n - nf^n(t)(x-t)^{n-1}\right] \\ &+ \frac{\partial R_{n,t}(x)}{\partial t} \end{aligned}$$

Entonces $0 = \frac{1}{n!}f^{n+1}(t)(x-t)^n + \frac{\partial R_{n,t}(x)}{\partial t}$. Luego $R'(t) = -\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(t)(x-t)^n$

Aplicamos teorema valor medio a $R_{n,t}(x)$ como función de t y en $[a, x]$ y tenemos

$$\frac{R_{n,x}(x) - R_{n,a}(x)}{(x-a)} = R'(t_0)$$

Pero $R_{n,x}(x)$ es el pol centrado en x evaluado en x es cero. Entonces

$$-\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(t_0)(x-t_0)^n = R'(t_0) = -\frac{R_{n,a}(x)}{(x-a)}$$

Finalmente

$$\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(t_0)(x-t_0)^n(x-a) = R_{n,a}(x)$$

2. Estuvo mal dada en clase por lo tanto tengo que conseguir una demo correcta.

3. $f^{n+1}(t)(x-t)^n$ integrable entonces

$$\int_a^x \frac{f^{n+1}(t)(x-t)^n}{n!} = \int_a^x -R'(t)dt = -R(x) + R(a) = -R_{n,x}(x) + R_{n,a}(x) = R_{n,a}(x)$$

□

Teorema 1.7 (Suma y escalares de sumatoria)

Proof. dummy □

Teorema 1.8 (Serie converge entonces sucesion converge)
Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *existe entonces* $\lim_{n\to\infty a_n=0}$

Proof. Supongo $\ell = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} S_n$. Donde S_N son las sumas parciales.
Sabemos entonces que $\lim_{N\to\infty S_{N-1}=\ell}$ Y por otro lado $S_N = S_{N-1} + a_N$ entonces $a_N = S_N - S_{N-1}$
Tomando limites llegamos a

$$\lim_{N\to\infty} a_N = \lim_{N\to\infty} S_N - \lim_{N\to\infty} S_{N-1} = \ell - \ell = 0$$

□

Teorema 1.9 (Convergencia de serie Geometrica)
Sea $r \in \mathbb{R}$. *Si* $|r| \geq 1$ *entonces la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ *no converge Si* $r < 1$ *entonces*

1. $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$

Proof. Si $|r| > 1$ entonces $\lim_{\to\infty} r^n$ no es finito

Si $|r| = \pm 1$ entonces $\lim_{\to\infty} r^n$ no existe (-1) o 1. En todos estos casos el límite no da 0 asi que no converge la serie

Si $|r| < 1$ Sabemos que

$$(1-r)(1+r+\ldots+r^n) = 1 - r^{n+1}$$

Entonces como $r \neq 1$

$$S_n = 1 + r + \ldots + r^{n+1} = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

Por lo tanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-r^{n+1}}{1-r} = \frac{1}{1-r}$$

Pues $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ cuando $|r| < 1$. Para finalizar

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \sum_{n=0}^{\infty} r^n - r^0 = \frac{1}{1-r} - 1 = \frac{r}{1-r}$$

□

Teorema 1.10 (Comparacion Series)
Si $0 \leq a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ *entonces*

1. *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *converge* $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge*

2. *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge* $\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge*

Proof. Sean S_N, T_N sumas parciales de a_n, b_n respectivamente. Sabemos $S_N \leq T_N$ y ambas son crecientes (pueden ser ctes pero creciente incluye lo constante por definición)

Ahora usando limite vemos

$$0 \leq \lim_{N\to\infty} S_N \leq \lim_{N\to\infty} T_N = \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \ell$$

Pero entonces S_N es creciente y acotada por lo tanto converge. Entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge

□

Teorema 1.11 (Criterio división)
Sean a_n, b_n *sucesiones de términos positivos. tales que* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ *con* c *finito y distinto de 0*

Luego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge* $\iff \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *converge*

Proof. Supongo $\sum_{n=1}^{\infty}$ converge. Como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$$

$$\exists n_0 \;/\; |\frac{a_n}{b_n} - c| < c \quad \forall n \geq n_0$$

Eqivalentemente

$$\frac{a_n}{b_n} \leq 2c \quad \forall n \geq n_0$$

Entonces

$$a_n \leq 2cb_n \quad \forall n \geq n_0$$

Por lo tanto como serie b_n es convergente $\sum_{n_0}^{\infty} a_n$ es convergente.

Y los anteriores términos hacen una suma finita por lo tanto no alteran la convergencia

Finalmente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

En caso de que tengamos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge miramos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{\ell}$$

que es distinto de 0 y finito y usamos la misma demostración □

Teorema 1.12 (Criterio Cociente, Integral, Leibniz y Raiz)
dumm

Proof. dum □

Teorema 1.13 (Convergencia absoluta implica convergencia)
Si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Además la serie de términos positivos y la serie de términos negativos convergen también

Proof. Notemos que

$$a_n + |a_n| = \begin{cases} 2a_n & \text{si } a_n \geq 0 \\ 0 & \text{si } a_n < 0 \end{cases}$$

Entonces para todo n se cumple

$$0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|$$

Pero sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n|$ converge entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + |a_n|$ también convergerá por comparación.
Por lo tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} an + |a_n| - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

En esta última suma sabemos que cada uno de sus sumandos converge probando lo que queríamos □

Teorema 1.14 (Convergencia de Series de potencias)
Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-a)^n$ es convergente para algún $x_0 \neq a$
Entonces la serie es absolutamente convergente $\forall x \in \mathbb{R}$ tal que $|x-a| < |x_0 - a|$
Análogamente si no converge en $x_1 \neq a$ $\forall x \in \mathbb{R}$ tal que $|x-a| > |x_1 - a|$

Proof. Sabemos que converge en x_0 entonces $|a_n(x_0-a)^n|$ tiende a 0. Por lo tanto

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } |a_n(x_0-a)^n| \leq M \quad \forall n \geq n_0$$

Sea x tal que $|x-a| < |x_0-a|$ entonces $\frac{|x-a|}{|x_0-a|} < 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(x-a)^n| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n||(x_0-a)|^n \left(\frac{|x-a|}{|x_0-a|}\right)^n \leq \sum_{n=1}^{\infty} Mr^n = M \sum_{n=1}^{\infty} r^n \text{ con } r < 1$$

Por ser geométrica la última sumatoria converge entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(x-a)^n| < M \sum_{n=1}^{\infty} r^n$$

Que converge $\forall x$ tal que $|x-a| < |x_0-a|$
Para la segunda parte supongamos que existe $\tilde{x}$ donde la serie converge que cumple $|\tilde{x}-a| > |x_1-a|$
Por lo demostrado arriba la serie debería converger en x_1 lo cual es absurdo □

Teorema 1.15 (Radio de Convergencia)
Sea $a \in \mathbb{R}$ y $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ la serie de potencias centrada en a y R radio de convergencia. Si existe

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$$

Entonces

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{L}$$

Donde si $L = 0$ entonces $R = \infty$ y si $L = \infty$ entonces $R = 0$

Proof. Supongamos

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$$

Usamos por criterio de raiz en $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ y tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(x-a)^n|} = \lim_{n\to\infty} |x-a| \sqrt[n]{|a_n|} = |x-a|.0 = 0 < 1$$

Entonces la serie de potencias converge absolutamente $\forall x \in \mathbb{R}$.Luego $R = \infty$.
Ahorpora si $L = \infty$ haciendo lo mismo vemos que la serie de potencias no converge $\forall x \in \mathbb{R}$. Luego $R = 0$
Si $0 < L < \infty$ entonces haciendo lo mismo llgamos a

$$|x-a| \sqrt[n]{|a_n|} = |x-a|L$$

Luego si

$$|x-a|L < 1 \iff |x-a| < \frac{1}{L} \quad \text{La serie de potencias converge}$$

$$|x-a|L > 1 \iff |x-a| > \frac{1}{L} \quad \text{La serie de potencias diverge}$$

Entonces $R = \frac{1}{L}$

$\square$