## ALGEBRA LINEAL - Práctica N°6 - Segundo cuatrimestre de 2022

## Autovalores y autovectores - Diagonalización

**Ejercicio 1.** Calcular el polinomio característico, los autovalores y los autovectores de la matriz $A$ en cada uno de los siguientes casos (analizar por separado los casos $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$):

i) $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$  ii) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$  iii) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$

iv) $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$  v) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

**Ejercicio 2.** Para cada una de las matrices $A$ del ejercicio anterior, sea $U$ una base de $K^n$ y sea $f : K^n \to K^n$ la tranformación lineal tal que $|f|_U = A$. Decidir si es posible encontrar una base $B$ de $K^n$ tal que $|f|_B$ sea diagonal. En caso afirmativo, calcular $C(B, U)$.

**Ejercicio 3.** Sea $\delta : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ la transformación lineal derivación. Mostrar que todo número real es un autovalor de $\delta$ y exhibir un autovector correspondiente.

**Ejercicio 4.** Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$f(x, y, z) = (-x - 2y + 6z, 4y, -x - 3y + 4z).$$

i) Encontrar una base $B$ de $\mathbb{R}^3$ tal que $|f|_B$ sea diagonal.

ii) Calcular $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

iii) Hallar, si es posible, una matriz $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $P^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

**Ejercicio 5.** Diagonalizar las matrices $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ encontrando sus autovectores:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Ejercicio 6.** Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

i) Probar que $A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $F_i$ es el $i$-ésimo término de la sucesión de Fibonacci (es decir, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ y $F_{i+1} = F_i + F_{i-1}$).

ii) Encontrar una matriz $P \in GL(2, \mathbb{R})$ tal que $PAP^{-1}$ es diagonal.

iii) Hallar la fórmula general para el término $F_n$ para cada $n \in \mathbb{N}_0$.

iv) Se define una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ de la siguiente manera:

$$\begin{cases} a_0 = 0\,,\ a_1 = 1\,,\ a_2 = 1\,, \\ a_{n+3} = 6a_{n+2} - 11a_{n+1} + 6a_n \quad (n \in \mathbb{N}_0). \end{cases}$$

Hallar una fórmula general para el término $a_n$ para cada $n \in \mathbb{N}_0$.

**Ejercicio 7.** Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} x'(t) = 6x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = 2x(t) + 3y(t) \end{cases}$$

con condiciones iniciales $x(0) = 3$, $y(0) = -1$.
Sugerencia: Hallar una matriz $C \in GL(2, \mathbb{R})$ tal que $C^{-1} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} C$ es diagonal y hacer el cambio de variables $\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = C^{-1} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.

**Ejercicio 8.** Sea $A \in K^{n\times n}$. Probar que $A$ y $A^t$ tienen los mismos autovalores. Dar un ejemplo en el que los autovectores sean distintos.

**Ejercicio 9.**

i) Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ diagonalizable con $tr(A) = -4$. Calcular los autovalores de $A$ sabiendo que los autovalores de $A^2 + 2A$ son $-1$, $3$ y $8$.

ii) Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ tal que $\det(A) = 6$; $1$ y $-2$ son autovalores de $A$ y $-4$ es autovalor de la matriz $A - 3I_4$. Hallar los restantes autovalores de $A$.

**Ejercicio 10.**

i) Sea $f : K^n \to K^n$ un proyector con $\dim(\mathrm{Im}(f)) = s$. Calcular $\mathcal{X}_f$. ¿Es $f$ diagonalizable?

ii) Sea $K$ un cuerpo incluido en $\mathbb{C}$ y $f : K^n \to K^n$ un endomorfismo nilpotente. Calcular $\mathcal{X}_f$. ¿Es $f$ diagonalizable?

**Ejercicio 11.** Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz que satisface $A^2 + I_n = 0$. Probar que $A$ es inversible, que no tiene autovalores reales y que $n$ debe ser par.

**Ejercicio 12.** Sea $V$ un $K$-espacio vectorial de dimensión finita y $f : V \to V$ una transformación lineal tal que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 1$. Probar que $f$ es diagonalizable si y sólo si $\mathrm{Nu}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$.

**Ejercicio 13.** Sea $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ una transformación lineal. Probar que existe una base $B$ de $\mathbb{C}^n$ tal que $|f|_B$ es triangular superior.

**Ejercicio 14.** Sean $A \in K^{m\times n}$ y $B \in K^{n\times m}$.

i) Probar que las matrices $\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{pmatrix}$ de $K^{(m+n)\times(m+n)}$ son semejantes.

ii) Deducir que si $n = m$, entonces $\mathcal{X}_{AB} = \mathcal{X}_{BA}$.

**Ejercicio 15.** Dadas las matrices $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ y los polinomios $P \in \mathbb{C}[X]$, calcular $P(A)$ para:

i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, a) $P = X - 1$, b) $P = X^2 - 1$, c) $P = (X-1)^2$.

ii) $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$, $P = X^3 - i\,X^2 + 1 + i$.

**Ejercicio 16.** Hallar el polinomio minimal de las siguientes matrices (comparar con el polinomio característico):

i) $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix}$ ii) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ iii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ iv) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

v) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ vi) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ vii) $\begin{pmatrix} 1 & i & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

viii) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ ix) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$

**Ejercicio 17.** Sea $A \in K^{n\times n}$ la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & -a_2 \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Calcular su polinomio minimal y su polinomio característico.

**Ejercicio 18.** Calcular el polinomio minimal de cada una de las siguientes transformaciones lineales:

i) $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$, $f(P) = P' + 2P$.

ii) $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $f(A) = A^t$.

**Ejercicio 19.** Sea $\delta : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ la transformación lineal derivada. Probar que $\delta$ no admite ningún polinomio minimal.

**Ejercicio 20.** Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Probar que el polinomio minimal de $A$ como matriz real y el polinomio minimal de $A$ como matriz compleja coinciden.

**Ejercicio 21.** Sea $A \in K^{n\times n}$. Probar que $A$ y $A^t$ tienen el mismo polinomio característico y el mismo polinomio minimal.

**Ejercicio 22.** Utilizando el Teorema de Hamilton-Cayley:

i) Calcular $A^4 - 4\,A^3 - A^2 + 2\,A - 5\,I_2$ para $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

ii) Calcular $A^{1000}$ para $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

iii) Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, expresar a $A^{-1}$ como combinación lineal de $A$ y de $I_2$.

iv) Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, expresar a $(2\,A^4 - 12\,A^3 + 19\,A^2 - 29\,A + 37\,I_2)^{-1}$ como combinación lineal de $A$ y de $I_2$.

v) Calcular $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

vi) Calcular $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

**Ejercicio 23.** Exhibir una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $A^2 + I_n = 0$. Comparar con el Ejercicio 11.