Teorico Estructuras Algebraicas

Javier Vera

October 13, 2024

1 Clase 1

2 Clase 2

3 Clase 3

4 Clase 4

5 Clase 5

6 Clase 6

7 Clase 7

8 Clase 8

9 Clase 9

10 Clase 10

11 Clase 11

12 Clase 12

Definición 12.1 (Accion de Grupo)
Sean G grupo y $X \neq \emptyset$ conjunto. Una accion de G en X es una funcion

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto g.x \end{aligned}$$

Que cumple:

1. $gh.x = g.(h.x)$
2. $e.x = x \quad \forall x \in X$

En este caso se dice que G actua (opera) en X mediante $G \times X \longrightarrow X$

Ejemplo 12.1.

1. $G, X \neq \emptyset$ cualesquiera la accion trivial de G en X es aquella tal que $g.x = x \quad \forall x \in X \quad \forall g \in G$
2. $\mathbb{S}(x)$ actua en X en la forma $\mathbb{S} \times X \longrightarrow X$ $\sigma.x = \sigma(x) \quad \forall \sigma \in \mathbb{S}(x) \quad \forall x \in X$. En particular $\mathbb{S}$ actua en $I_n = \{1, \ldots n\}$

3. Sea G grupo actua en si mismo de distintas formas, en este caso mediante el producto $G \times G \longrightarrow G$ es decir $g.x = gx$ esto se llama *accion regular*

4. $H \trianglelefteq G$ entonces G actua por conjugacion $G \times H \longrightarrow H$ dada por $g \in G \quad x \in H$

5. $\mathbb{S}(G) = \{\text{subgrupos de } G\}$. entonces G actua en $\mathbb{S}$ por conjugacion $g \in G \quad H \trianglelefteq G$

6. $H \leq G$ entonces G actua en las coclases G/H
 Ejercicio probar que satisfacen (A1) y (A2)

Proposición 1
Sea G grupo $X \neq \emptyset$ conjunto. Son equivalentes:

1. *Una accion $G \times X \longrightarrow X$*

2. *Un homomorfismo $\alpha : G \to \mathbb{S}(x)$*

Proof. pendiente □

Ejemplo 12.2. 1. La accion trivial $G \times X \to X$ corresponde a

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow \mathbb{S}(X) \\ g &\longmapsto Id_x \end{aligned}$$

2. La accion regular $G \times G \longrightarrow G$ corresponde al homomorfismo de Cayley (DUDA)G

Definición 12.2
Sea $G \times X \longrightarrow X$ una accion de un grupo G en $X \neq \emptyset$. Dos elementos $x, y \in X$ se dicen G-conjugados mediante esta accion si $\exists g \in G$ tal que $g.x = y$ (notacion $x \sim y$)
Esto define una relacion de equivalencia en X (Ejercici). Asi, tal relacion particiona a X en clases de equivalencia
Sea $x \in X$ entonces $G.x$ o $\mathcal{O}_G(x)$ es la clase de equivalencia de x que se llamara G-Orbita de x

$$X = \bigcup_{x \in X} G.x$$

Observación
Si $G \times X \longrightarrow X$ es accion entonces cualquier subgrupo de G actua en X por restriccion. De este modo $G = \mathbb{S}_n$ actua naturalmente en I_n

$$< \sigma > .j = \mathcal{O}_\sigma = \{\sigma^k : k \geq 0\} \quad \forall \sigma \in \mathbb{S}_n$$

Definición 12.3
Una accion se dice transitiva si posee una unica orbita es decir si $\exists x \in X$ tal que $X = G.x$

Definición 12.4
Sea $G \times X \longrightarrow X$ accion. Dado $x \in X$ el G-estabilizador de x es

$$G_x = \{g \in G : g.x = x\}$$

G_x es un subgrupo de G , $\forall x \in X \quad \forall g, h \in G_x$ (No necesariamente normal)
Si $\alpha : G \longrightarrow \mathbb{S}$ homomorfismo correspondiente a la accion dada entonces:

$$Ker(\alpha) = \bigcap_{x_i X} G_x$$

Ejemplo 12.3. 1. $G \times X \longrightarrow G$ accion trivial $g.x = \{x\}$ entonces $G_x = G$

2. $G \times G \longrightarrow G$ accion regular $g.x = gx$
   $G.x = G$ pues $y = (yx^{-1})x = yx^{-1}.x$ (Entonces es transitiva)
   $G_x = \{e\}$ pues $gx = x \iff g = e$

3. $H \trianglelefteq G$, $G \times H \longrightarrow H$ por conjugacion $g.x = gxg^{-1}$

$$G.x = \{gxg^{-1} : g \in G\} = Cl(X) \quad \text{(Clase de conjugacion de} X)$$
$$G_x = \{g \in G : gxg^{-1} = x\} = C_G(x) \quad \text{(Centralizador de } x \text{ en } G)$$

(ejercicios calcular estabilizador y centralizador de traslaciones para alfguna coclase)

4. Sea $H \leq G$ con

$$G \times {}^{G}/_{H} \longrightarrow {}^{G}/_{H}$$

dada por $g.aH = ga.H$ con ${}^{G}/_{H} = \{aH : a \in G\}$

Es accion transitiva porque $G.{}^{G}/_{H} = {}^{G}/_{H}$

$G_H = \{g \in G : g.eH = ge.H = H\} = H$ (DUDA)

Proposición 2
Sea $G \times X \longrightarrow X$ una accion de G en X, se tienen:

1. $\forall x \in X, G_{g.x} = gG_xg^{-1} \quad \forall g \in G$
2. $|G.x| = [G : G_x]$

Proof. Pendiente □

Teorema 12.1 (Ecuacion de Clase)
Sean G grupo y $G \times X \longrightarrow X$ una accion de G en $X \neq \emptyset$ $\exists$ famlia $\{G_i\}_{i \in I}$ de sugrupos propios de G tales que:

$$|X| = |X^G| + \sum_{n=1}^{\mathbb{N}}$$

donde $X^G = \{x \in X : g.x = x \quad \forall g \in G\}$ (BG-invariante)

Proof. pendiente □

Teorema 12.2 (Teorema de Cauchy)
Sea G grupo de orden n y sea $p > 0$ primo tal que $p|n$ entonces G tiene un elemento de orden p

Proof. Pendiente □

13 Clase 13

Definición 13.1 (Normalizador)
Sea $H \trianglelefteq G$ el normalizador de H en G

$$N_G(H) = \{g \in G : gHg^{-1} = H\}$$

14 Clase 13

Definición 14.1
Un grupo G se dice un p-grupo, con p primo si $\forall x \in G$ $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $x^{p^n} = e$
Es decir todo elemento de G tiene orden una potencia de p

Observación
El Teorema de Cauchy nos dice que un p-grupo finito tiene orden potencia de p

Proof.
1. Sea $|G| = p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k}$ con p_i primos.
2. Entonces $p_i||G|$ por lo tanto $\exists x \in G \quad |x| = p_i$ (Por Teorema de Cauchy)
3. Luego $p_i = |x| = p^j$ (Esto ultimo por ser p-grupo)
4. Entonces $j = 1$ y $p_i = p \quad \forall 1 \leq i \leq k$
5. por lo tanto $|G| = p^j$ con $j > k$

□

15 Clase 14

Corolario 15.0.1
$[G : S] = p$ entonces $S \trianglelefteq G$

Proof. □

Proposición 3
$|G| = p^n$ $n \in \mathbb{N}_0$ entonces:

1. *$\forall 0 \leq i \leq n$ G posee subrupos de orden p^i*
2. *Si $0 \leq i \leq n-1$ y $S \leq G$ con $|S| = p^i$ entonces $\exists$ subrupo T de orden p^{i+} tal que $S \trianglelefteq T$*

15.1 Teoremas de Sylow

Definición 15.1
Un p-subgrupo de Sylow de G es un subgrupo de H tal que $|H| = p^n$ donde $|G| = p^n k$ con $(p,k) = 1$

15.2 Primer Teorema de Sylow

Teorema 15.1 (Primer Teorema de Sylow)
Supongamos que $|G| = p^n k$ con $(p,k) = 1$. Entonces $\forall 0 \leq i \leq n$ tenemos que G posee un subgrupo de orden p^i. En particular G posee un p-Sylow

Proof. pendiente □