

## ALGEBRA LINEAL - Práctica N°5 - Segundo cuatrimestre de 2020

### Determinantes

**Ejercicio 1.** Calcular el determinante de las siguientes matrices:

$$\begin{array}{lll} \text{i)} \quad \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} & \text{ii)} \quad \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} & \text{iii)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -3 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & -2 \end{pmatrix} \\ \text{iv)} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} & \text{v)} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 5 \\ 4 & -5 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & -1 & 7 \\ 6 & 3 & -4 & 8 \end{pmatrix} & \text{vi)} \quad \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 & 5 \\ 2 & -3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & 3 & 8 \end{pmatrix} \end{array}$$

**Ejercicio 2.**

- i) Sea  $A \in K^{n \times n}$  una matriz triangular superior. Probar que  $\det(A) = \prod_{i=1}^n A_{ii}$ .
- ii) Calcular el determinante de  $A \in K^{n \times n}$  siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \dots & a_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Ejercicio 3.**

- i) Si  $A \in K^{n \times n}$ ,  $B \in K^{m \times m}$  y  $C \in K^{n \times m}$ , sea  $M \in K^{(n+m) \times (n+m)}$  la matriz de bloques definida por  $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ . Probar que  $\det(M) = \det(A) \cdot \det(B)$ .
- ii) Sean  $r_1, r_2, \dots, r_n \in \mathbb{N}$  y para cada  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , sea  $A_i \in K^{r_i \times r_i}$ . Se considera la matriz de bloques

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_n \end{pmatrix}.$$

Calcular  $\det(M)$ .

**Ejercicio 4.** Calcular los determinantes de las siguientes matrices:

$$\begin{array}{ll} \text{i)} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{pmatrix} & \text{ii)} \quad \begin{pmatrix} x & a & a & \dots & a \\ a & x & a & \dots & a \\ a & a & x & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & x \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\text{iii)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x & x & \dots & 0 & x \\ 1 & x & x & \dots & x & 0 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 5.** Calcular inductivamente el determinante de  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Ejercicio 6.** Dada la matriz de *Vandermonde*:

$$V(k_1, k_2, \dots, k_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ k_1 & k_2 & \dots & \dots & k_n \\ k_1^2 & k_2^2 & \dots & \dots & k_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \dots & \dots & k_n^{n-1} \end{pmatrix},$$

probar que  $\det(V(k_1, k_2, \dots, k_n)) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (k_j - k_i)$ .

Sugerencia: Sin perder generalidad se supone que  $k_i \neq k_j$  si  $i \neq j$ . Si se considera el determinante de  $V(k_1, k_2, \dots, k_{n-1}, X)$  como polinomio en  $X$  probar que  $k_1, \dots, k_{n-1}$  son sus raíces y factorizarlo.

**Ejercicio 7.** Calcular los siguientes determinantes:

$$\text{i)} \begin{pmatrix} 1+a & 1+b & 1+c & 1+d \\ 1+a^2 & 1+b^2 & 1+c^2 & 1+d^2 \\ 1+a^3 & 1+b^3 & 1+c^3 & 1+d^3 \\ 1+a^4 & 1+b^4 & 1+c^4 & 1+d^4 \end{pmatrix} \quad \text{ii)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 8.** Sean  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ , todos distintos y no nulos. Probar que las funciones  $e^{\alpha_1 x}, \dots, e^{\alpha_n x}$  son linealmente independientes sobre  $\mathbb{R}$ . Deducir que  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  no tiene dimensión finita.

Sugerencia: Derivar  $n-1$  veces la función  $\sum_{i=1}^n c_i e^{\alpha_i x}$ .

**Ejercicio 9.**

- i) Sean  $v_i = (v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{in})$  ( $1 \leq i \leq n-1$ ) vectores en  $\mathbb{R}^n$ . Probar que la función  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \det \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_{n-1,1} & v_{n-1,2} & \dots & v_{n-1,n} \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}$$

es una transformación lineal.

- ii) Probar que si  $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$  es linealmente independiente,  $\langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle^\circ = \langle \varphi \rangle$  (es decir,  $\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$  es una ecuación implícita para el subespacio  $\langle v_1, \dots, v_{n-1} \rangle$ ).

**Ejercicio 10.** Sea  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  tal que  $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ . Si  $\det(A) = 3$ , calcular el determinante de la matriz

$$\begin{pmatrix} a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ 1 & 2 & 7 \\ a_{11} + 2a_{13} & a_{21} + 2a_{23} & a_{31} + 2a_{33} \end{pmatrix}.$$

**Ejercicio 11.** Dadas las matrices  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

probar que no existe ninguna matriz  $C \in GL(2, \mathbb{R})$  tal que  $A \cdot C = C \cdot B$ . ¿Y si no se pide que  $C$  sea inversible?

**Ejercicio 12.** Sea  $A \in K^{n \times n}$  y sea  $\lambda \in K$ . Probar que existe  $x \in K^n$ ,  $x \neq 0$ , tal que  $A \cdot x = \lambda \cdot x$  si y sólo si  $\det(A - \lambda \cdot I_n) = 0$ .

**Ejercicio 13.** Calcular el determinante, la adjunta y la inversa de cada una de las siguientes matrices:

$$\text{i) } \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ii) } \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ -5 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{iii) } \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 14.** Sea  $A$  una matriz inversible. Calcular  $\det(\text{adj } A)$ . ¿Qué pasa si  $A$  no es inversible?

**Ejercicio 15.**

- i) Resolver los siguientes sistemas lineales sobre  $\mathbb{Q}$  empleando la regla de Cramer:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x_1 - x_2 = -3 \\ x_1 + 7x_2 = 4 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$$

- ii) Resolver el siguiente sistema lineal sobre  $\mathbb{Z}_7$  empleando la regla de Cramer:

$$\begin{cases} 3x + y + 2z &= 1 \\ x + z &= 6 \\ 2x + 2y + z &= 3 \end{cases}$$

**Ejercicio 16.** Sea  $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$  tal que  $\det(A) = 1$  ó  $\det(A) = -1$ . Probar que para todo  $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{Z}^n$ , existe un único  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$  tal que  $A \cdot x = b$ .

**Ejercicio 17.** Sea  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  la matriz  $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ . Se sabe que

$$\det \begin{pmatrix} 1 & b & c \\ 2 & e & f \\ 5 & h & i \end{pmatrix} = 0, \quad \det \begin{pmatrix} a & 2 & c \\ d & 4 & f \\ g & 10 & i \end{pmatrix} = 0, \quad \text{y} \quad \det \begin{pmatrix} a & b & -1 \\ d & e & -2 \\ g & h & -5 \end{pmatrix} = 0.$$

Calcular  $\det(A)$ .

**Ejercicio 18.**

- i) Sea  $A \in K^{3 \times 3}$  no inversible tal que  $A_{11} \cdot A_{33} - A_{13} \cdot A_{31} \neq 0$ . Calcular la dimensión de  $S = \{x \in K^3 / A \cdot x = 0\}$ .
- ii) Sea  $A \in K^{n \times n}$  no inversible tal que  $\text{adj}(A) \neq 0$ . Calcular  $\text{rg}(A)$  y  $\text{rg}(\text{adj}(A))$ .

**Ejercicio 19.**

- i) Sea  $A = (a_{ij}) \in K^{6 \times 6}$ . ¿Con qué signos aparecen los siguientes productos en  $\det(A)$ ?
  - a)  $a_{23} \cdot a_{31} \cdot a_{42} \cdot a_{56} \cdot a_{14} \cdot a_{65}$
  - b)  $a_{32} \cdot a_{43} \cdot a_{14} \cdot a_{51} \cdot a_{66} \cdot a_{25}$
- ii) Sea  $A = (a_{ij}) \in K^{5 \times 5}$ . Elegir todos los posibles valores de  $j$  y de  $k$  tales que el producto  $a_{1j} \cdot a_{32} \cdot a_{4k} \cdot a_{25} \cdot a_{53}$  aparezca en  $\det(A)$  con signo +
- iii) Sea  $A = (a_{ij}) \in K^{4 \times 4}$ . Escribir todos los términos de  $\det(A)$  que tengan al factor  $a_{23}$  y signo +
- iv) Sin calcular el determinante, calcular los coeficientes de  $X^4$  y de  $X^3$  en

$$\det \begin{pmatrix} 2 \cdot X & X & 1 & 2 \\ 1 & X & 1 & -1 \\ 3 & 2 & X & 1 \\ 1 & 1 & 1 & X \end{pmatrix}.$$

- v) Sin calcular el determinante, calcular el coeficiente de  $a^6$  y el de  $b^6$  en

$$\det \begin{pmatrix} 1 & b & a & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & b & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a & b & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 & 1 & b \\ 1 & 1 & a & b & 1 & a \\ b & a & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Ejercicio 20.** Sean  $A, B, C, D \in K^{n \times n}$ . Sea  $M \in K^{2n \times 2n}$  la matriz de bloques

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Probar que si  $A \in GL(n, K)$ ,  $\det(M) = \det(A \cdot D - A \cdot C \cdot A^{-1} \cdot B)$ . Si además  $A \cdot C = C \cdot A$  entonces  $\det(M) = \det(A \cdot D - C \cdot B)$ .