1	2	3	4	5	6	7	8

Calif.

Apellido y Nombre:

Condición: Libre Regular

Algebra III - Final

6 de febrero de 2023

Justificar todas las respuestas. No se permite el uso de dispositivos electrónicos. Todos los resultados teóricos utilizados deben ser enunciados apropiadamente; en caso de utilizar resultados teóricos no dados en clase, los mismos deben demostrarse. Para aprobar se debe tener como mínimo 15 pts. en la parte teórica y 30 pts. en la parte práctica.

Parte Teórica (30 pts.)

1. (14 pts) Enunciar el Teorema de Descomposición Cíclica y dar un bosquejo de la demostración completando los detalles de la primera parte.

2. (12 pts) Enunciar y demostrar el teorema de caracterización de las transformaciones lineales triangularizables.

3. Determinar si cada una de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando en cada caso la respuesta dada.

   (a) (3 pts) Sea V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión finita y $T : V \to V$ una transformación lineal con polinomio característico p. Entonces T es invertible si y sólo si $p(0) \neq 0$.

   (b) (3 pts) Si $T^2 = 1$ entonces T es diagonalizable.

   (c) (3 pts) Sea V espacio vectorial con producto interno. Toda transformación lineal en V tiene adjunto.

Parte Práctica (70 pts.)

4. (15 pts) Sea $T : \mathbb{C}[t] \to \mathbb{C}[t]$ la transformación lineal dada por $T(p) = p + p'$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea V_n el subespacio de los polinomios de grado $\leq n$.
   (a) Probar que cada V_n es T-invariante y que $T_{|V_n}$ es un isomorfismo. Deducir que T es un isomorfismo.
   (b) Hallar la forma de Jordan de $T_{|V_n}$ y una base en la cual se realiza.
   (c) Hallar la descomposición en diagonalizable más nilpotente de $T_{|V_n}$.
5. (15 pts) Sean $\mathbb{k}$ un cuerpo y $T : \mathbb{k}^4 \to \mathbb{k}^4$ una transformación lineal tal que $(T^3 - \mathrm{id})(T + \mathrm{id}) = 0$.
   (a) Hallar todas las posibles formas de Jordan y racionales cuando $\mathbb{k} = \mathbb{R}$.
   (b) Hacer lo mismo para $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ y $\mathbb{k} = \mathbb{Z}_3$.
6. (15 pts) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica, sean $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sus autovalores (eventualmente repetidos). Probar que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2.$$

7. (15 pts) Sea V un espacio de dimensión finita, $W \subseteq V$ un subespacio y $T : V \to V$ una transformación lineal. Probar que W es T-invariante si y sólo si el anulador W^0 de W es T^t-invariante.
8. (20 pts) Diremos que una matriz $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *tiene raíz cuadrada* si existe una matriz $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $P = Q^2$. Diremos también que Q es una *raíz cuadrada* de P
   (a) Sea $N \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ una matriz nilpotente. Probar que $A = \mathrm{id} + \frac{1}{2}N - \frac{1}{8}N^2$ es una raiz cuadrada de $\mathrm{id} + N$.
   (b) Sea N como antes. Deducir que $\lambda\,\mathrm{id} + N$ tiene raiz cuadrada para todo $\lambda \neq 0$.
   (c) Probar que toda matriz invertible $P \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ tiene raíz cuadrada (sugerencia: usar la forma de Jordan).