Vectores aleatorios

- Se tira una moneda honesta con posibles resultados cara o cruz y se tira un dado

$X \sim Ber(p)$ $\quad p :=$ prob de cara

$Y :=$ que numero de dado salió

que prob tengo de que salga cara y sacar un número par

¿ $P((X=1) \cap Y=\{2,4,6\})$?

__def__ Sean $X_1, \ldots, X_n$ v.a definidas sobre $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ e.p, entonces la función $\underline{X} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$\underline{X}(\omega) = (X_1(\omega), X_2(\omega), \ldots, X_n(\omega))$$

es un vector aleatorio n-dim sobre $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

__Notación__ Si $\underline{X}$ es v.a n-dim sobre $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ y $A_1, A_2, \ldots A_n$ subconjuntos de $\mathbb{R} \Rightarrow P((X_1 \in A_1) \cap (X_2 \in A_2) \ldots \cap (X_n \in A_n))$

$= P(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \ldots X_n \in A_n)$

<u>def</u> Sea $\underline{X}$ vector aleatorio sobre $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ definimos función densidad discreta f de $\underline{X}$ como:

$f: \mathbb{R}^n \to [0,1]$

$f(x_1, \ldots x_n) = P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots X_n = x_n)$

equivalentemente si $x \in \mathbb{R}^n$

$$f(\underline{x}) = P(\underline{X} = \underline{x})$$

<u>obs</u> a veces se la llama función de densidad conjunta

- también se la llama función de densidad marginal de X_i $i = 1 \ldots n$

Se puede ver que f satisface

i) $f(\underline{x}) \geq 0$

ii) $\{x \in \mathbb{R}^n : f(\underline{x}) \neq 0\}$ es finito o numerable

Denotaremos $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ (caso en finito) al conjunto que lo satisface y $\{\underline{x}_i\}_{i=1}^{\infty}$

iii) $\sum_{i=1}^{n \leq \infty} f(x_i) = 1$

Demo ejercicio

Notar si $f: \mathbb{R}^n \to [0,1]$ satisface (i), (ii) y (iii) decimos que f es función densidad discreta

Independencia de variables aleatorias

<u>def</u> Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.a $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ e.p

Decimos que $X_1 \ldots X_n$ son indep (a veces se les dice mutuamente independientes)

$P(X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \ldots X_n = A_n)$

$$\prod_{i=1}^{n} P(X_i = A_i)$$

$\forall A_1, A_2$ intervalos abiertos de $\mathbb{R}$

<u>Prop</u> Sean X v.a $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ variable discreta con $R = \{x_i\}_{i=1}^{n \leq \infty}$ e Y v.a en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ con

$$R = \{y_j\}_{j=1}$$

Si $P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y)$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$ entonces X e Y son independientes ej generalizar la proposición para n variables aleatorias

---

Lema: Sean A y B intervalos de $\mathbb{R}$

$$P(X \in A, Y \in B) = P((X \in A) \cap (Y \in B))$$

$$P\left[\left(\dot{\bigcup}_{x_i \in A} (X = x_i)\right) \cap \left(\dot{\bigcup}_{y_j \in B} Y = y_j\right)\right]$$

$$= \sum_{\substack{x_j \in A \\ y_j \in B}} P((X = x_i) \cap (Y = y_j))$$

$$= \sum_{\substack{x_i \in A \\ y_j \in B}} P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j)$$

$$= \sum_{\substack{x_i \in A \\ y_j \in B}} P((X = x_i), P(Y = y_j))$$

$$\sum_{\substack{x_i \in A \\ y_j \in B}} P(X = x_i) P(Y = y_j)$$

$$= \sum_{x_i \in A} P(X = x_i) \cdot \sum_{y_j \in B} P(Y = y_j)$$

$= P\left(\dot{\bigcup}_{x_i \in A} (X = x_i)\right) \cdot P\left(\dot{\bigcup}_{y_i \in B} (Y = y_i)\right)$

$= P(X \in A) \cdot P(Y \in B)$

<u>Aplicación</u> Sean X e Y v.a (i) indeptes tq $X \sim g(p)$ $Y \sim g(p)$

$0 < p < 1$

1) calculemos la función distr acum de $Z = \min(X, Y)$

$F_Z : \mathbb{R} \to [0,1]$

$F_Z(t) = ¿?$

·) si $t < 0$ $F_Z(t) = 0$ pues X e Y son v.a a valores enteros no negativos

·) si $t \geq 0$

$F_Z(t) = P(Z \leq t) = P(\min(X,Y) \leq t)$

$= 1 - P(\min(X,Y) > t)$

$$= 1 - P(X > t, Y > t)$$

$$= 1 - P(X > t) \cdot P(Y > t)$$

indeptes
X e Y

$$= 1 - (1 - P(X \leq t))(1 - P(Y \leq t))$$

$$1 - (1 - F_X(t))(1 - F_Y(t))$$

$$1 - [\cancel{1} - (\cancel{1} - ((1-p)^{[x]+1}))]^2 \qquad F_X(t) = 1 - (1-p)^{[x]+1} = F_Y(t)$$

$$= 1 - (1-p)^{2([t]+1)}$$

$$= 1 - ((1-p)^2)^{[t]+1}$$

$$= 1 - (1 + p^2 - 2p)^{[t]+1}$$

$$1 - (1 - p(2-p))^{[t]+1}$$

$$1 - (1 - p^*)^{[t]+1} \qquad p^* = p(2-p)$$

$$F_Z(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \quad cc \\ 1 - (1-p^*)^{[t]+1} & t \geq 0 \end{cases}$$

$$\therefore \; Z = \min(X, Y) \sim G(p^*)$$

si $0 < p^* < 1$

¿$0 < p^* < 1$? $p^* = p(2-p) > 0$ ✓

¿$p^* < 1$?   Supongo $p(2-p) \geq 1$

$g(p) = 2p - p^2 - 1 \geq 0$

pero $g(p)$ con resolvente

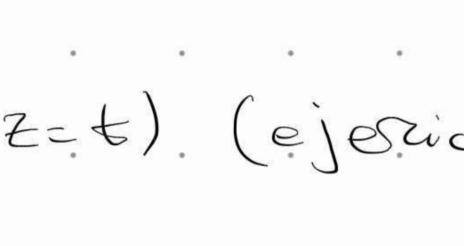
tiene $p_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{-2}$

$= 1$

Una sola raiz

y $g(1) = 0$ $g(p) < 0$ para cualquier otro p

abs!



$\therefore$ $p^* < 1$

2) Calcular $f_Z(t) = P(Z = t)$ (ejercicio)

3) Calculemos densidad discreta de $W = X + Y$

$f_W(t) = P(W = t)$

$P(X+Y=t) = P(X+Y<0) = 0$

Si $t<0$ $\quad f_W(t) = P(W=t) = 0$

pues X e Y v.a a valores enteros no negativos (son geométricas)

Si $t \geq 0$ $\quad f_W(t) = P(X+Y=t)$

$$= P((X+Y=t) \cap \Omega)$$

$$= P\left((X+Y=t) \cap \dot{\bigcup_{i=0}^{\infty}} (X=i)\right)$$

$$= P\left(\dot{\bigcup_{i=0}^{\infty}} (X+Y=t) \cap (X=i)\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} P((X+Y=t) \cap (X=i))$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} P(X+Y=t, X=i)$$

$$= \sum^{\infty} P(i+Y=t, X=i)$$

$$= \sum_{i=0}^{t} P(Y=\underbrace{t-i}_{\geq 0 \iff t \geq i}, X=i)$$

$$(X \text{ e } Y \text{ indep}) = \sum P(Y=t-i)P(X=i)$$

$$f_X(x) = \begin{cases} (1-p)^x p \\ 0 \end{cases} \qquad = \sum (1-p)^{t-i} p \cdot (1-p)^i p$$

$$= \sum_{i=0}^{t} (1-p)^t \cdot p^2$$

$$= (t+1)(1-p)^t p^2$$

$$= (1-p)^t p^2 \binom{2+t-1}{2-1}$$

$$= (1-p)^t p^k \binom{k+t-1}{k-1}$$

$k=2$

$$\Rightarrow \quad X+Y \sim BN(2,p)$$