1. Dibujar el conjunto de todos los $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tales que:

(a) $\|(x,y)-(1,2)\| < 3$. (b) $2 < \|(x,y)-(1,2)\| \leq 3$. (c) $\|(x,y)-(1,2)\| = 3$.

(d) $\|(x,y)-(1,2)\| < -\frac{1}{2}$. (e) $x > y$. (f) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} < 1$; a, b no nulos.

2. Dibujar los siguientes conjuntos:
(a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) = t(1,2),\ t \in \mathbb{R}\}$.
(b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = t(1,0,-1),\ t \in \mathbb{R}\}$.
(c) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq \frac{1}{4}\}$.
(d) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq 1,\ |y| \leq 2,\ |z| \leq 3\}$.
(e) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : |x| < 1,\ |y| < 2,\ |z| \leq 3\}$.

3. Considerando los conjuntos definidos en los ejercicios **1.** y **2.**, responder las siguientes cuestiones (sin rigurosidad):
(a) Decidir si son abiertos, cerrados, ambas, o ninguna de las dos cosas.
(b) Identificar sus puntos interiores, de acumulación y su frontera.
(c) Hallar su clausura.
(d) Decidir cuáles son compactos y cuáles no.

4. Considerar la función $f(x,y) = \sqrt{4-x^2-y^2}$.
(a) Dibujar el dominio de f.
(b) Dibujar la imagen de f.
(c) Dibujar el gráfico de f.

5. Dibujar los conjuntos definidos explícitamente por:

(a) $z = x+y$. (b) $z = \sqrt{1-2x^2-3y^2}$. (c) $z = x^2+y^2+x+5y$.

(d) $z = \sqrt{x^2+y^2}$. (e) $z = x^2-36y^2$. (f) $z = 4-x^2-y^2$.

(g) $z = \operatorname{sen}(x)$. (h) $z = \dfrac{1}{x^2+y^2}$. (i) $z = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| < |y|, \\ 0 & \text{si } |x| \geq |y|. \end{cases}$

6. Dibujar los conjuntos definidos paramétricamente por las siguientes funciones:
(a) $f(t) = (2t, t)$, $\quad -1 \leq t \leq 1$.
(b) $f(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\quad t \in \mathbb{R}$.
(c) $g(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 3\operatorname{sen}(t) \end{pmatrix}$, $\quad 0 \leq t \leq 2\pi$. Ayuda: $\cos(t)^2 + \operatorname{sen}(t)^2 = 1$.
(d) $g(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), t)$, $\quad t \in \mathbb{R}$.
(e) $h(t) = (t, t, t^2)$, $\quad -1 \leq t \leq 2$.

7. Dibujar los conjuntos definidos paramétricamente por las siguientes funciones:

(a) $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad u, v \in \mathbb{R}.$$

(b) $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = g\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\ \cos(u)\ \operatorname{sen}(v) \\ b\ \operatorname{sen}(u)\ \operatorname{sen}(v) \\ c\ \cos(v) \end{pmatrix}, \qquad \begin{cases} 0 \leq u \leq 2\pi, \\ 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}, \\ a, b, c > 0. \end{cases}$$

8. Dibujar los conjuntos definidos implícitamente.

(i) En el plano:

(a) $25x^2 + 9y^2 - 100x + 54y - 44 = 0$.

(b) $(x^2 + y^2 + x)(x^2 + y^2 - 1) > 0$.

(ii) En el espacio:

(c) $(x + 2y + z - 1)(-x + 2y - z) = 0$.

(d) $\frac{x^2}{4} + y^2 - z^2 = 1$.

(e) $x^2 + y^2 = 1$.

9. Encontrar las ecuaciones que corresponden a las ocho superficies etiquetadas del I al VIII en la Figura 1. Dar argumentos para justificar su elección.

(a) $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$. (b) $9x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$. (c) $x^2 - y^2 + z^2 = 1$.

(d) $z = x^2 + 2z^2$. (e) $-x^2 + y^2 - z^2 = 1$. (f) $y = 2x^2 + z^2$.

(g) $y^2 = x^2 + 2z^2$. (h) $x^2 + 2z^2 = 1$. (i) $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$.

(j) $y = x^2 - z^2$.

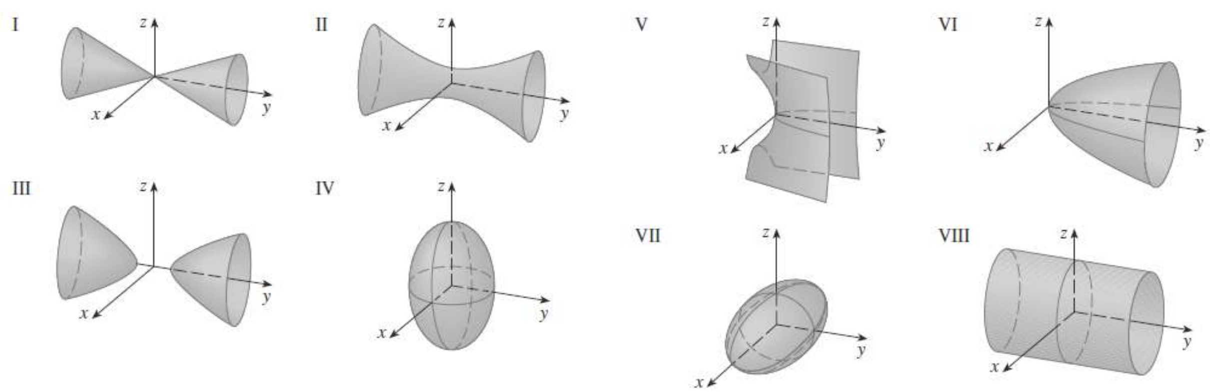


FIGURA 1. Superficies del ejercicio 9.

10. Sea $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$.

(a) Encontrar la imagen del segmento de recta $y = x$ entre (0,0) y (1,1).

(b) Encontrar el ángulo entre las imágenes de las rectas $y = 0$, $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$.

(c) Hallar la imagen de la región definida por $x > 0$, $y > 0$, $x^2 + y^2 < 1$.

Ejercicios de repaso. Los ejercicios marcados con $\star$ son de mayor dificultad.

11. $\star$ Para los conjuntos definidos en **1.**(a), **1.**(b), **1.**(c), probar cuáles puntos son interiores, cuáles son de acumulación y cuáles son de frontera (con rigurosidad).

12. $\star$ Probar rigurosamente que el conjunto definido en **2.**(c) no es abierto, y que el de **1.**(e) no es cerrado.

13. Para cada una de las siguientes funciones lineales:

(a) Describir y dibujar el dominio y la imagen.

(b) Describir y dibujar el conjunto dado implícitamente por la ecuación $L(\mathbf{x}) = 0$, con $\mathbf{x}$ un vector de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$.

(i) $L(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. (ii) $L(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

(iii) $L(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

14. Dibujar los conjuntos definidos implícitamente por:
(a) $3x - 2y^2 - 6y + 7 = 0$ (en el plano).
(b) $(2x + y - 3)(x^2 + y^2 - 4) = 0$ (en el plano).
(c) $x + y = 1$ (en el espacio).
(d) $9z^2 + 6z - x^2 - 4y^2 = 0$ (en el espacio).

15. Sea $f(x,y) = \big(x, y(1 + x^2)\big)$.
(a) ¿Cuáles son las imágenes de las rectas horizontales?
(b) ¿Cuál es la imagen de la recta $y = x$?

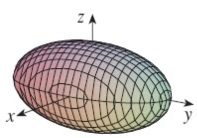
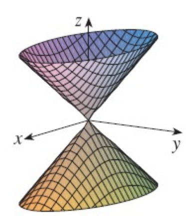
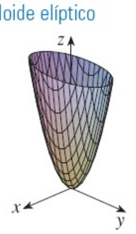
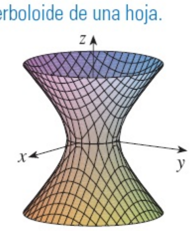
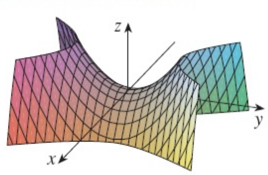
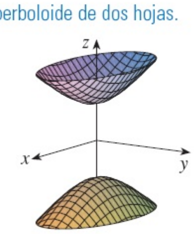
Superficie	Ecuación	Superficie	Ecuación
Elipsoide 	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ Todas las trazas son elipses. Si $a = b = c$, la elipsoide es una esfera.	Cono 	$\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ Las trazas horizontales son elipses. Las trazas verticales en los planos $x = k$ y $y = k$ son hipérbolas si $k \neq 0$ pero son pares de líneas si $k = 0$.
Paraboloide elíptico 	$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ Las trazas horizontales son elipses. Las trazas verticales son parábolas. La variable elevada a la primera potencia indica el eje del paraboloide.	Hiperboloide de una hoja. 	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ Las trazas verticales son elipses. Las trazas verticales son hipérbolas. El eje de simetría corresponde a la variable cuyo coeficiente es negativo.
Paraboloide hiperbólico. 	$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ Las trazas horizontales son hipérbolas. Las trazas verticales son parábolas. Se ilustra el caso donde $c < 0$.	Hiperboloide de dos hojas. 	$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ Las trazas horizontales en $z = k$ son elipses si $k > c$ o $k < -c$. Las trazas verticales son hipérbolas. Los dos signos menos indican dos hojas.

Figura 2. Superficies cuádricas