ÁLGEBRA III - 2023
Práctico 2

Determinantes

1. Sea K un anillo conmutativo con identidad. Si A es una matriz 2×2 sobre K, la *adjunta clásica* de A es la matriz 2×2 $\mathrm{adj}A$ definida por
$$\mathrm{adj}A = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$
Si $\det$ denota la única función determinante en matrices 2×2 sobre K, muestre que
   a) $(\mathrm{adj}A)A = A(\mathrm{adj}A) = (\det A)I$.
   b) $\det(\mathrm{adj}A) = \det(A)$.
   c) $\mathrm{adj}A^t = (\mathrm{adj}A)^t$.

2. Sea A una matriz 2×2 sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ y supóngase que $A^2 = 0$. Demostrar que para todo escalar $x, \det(xI - A) = x^2$.

3. Sea K un subcuerpo de los números complejos y n un entero positivo. Sean $j_1, j_2, \ldots, j_n$ y $k_1, k_2, \ldots, k_n$ enteros positivos no mayores que n. Para una matriz $A, n \times n$ sobre K se define
$$D(A) = a_{j_1k_1}a_{j_2k_2}\ldots a_{j_nk_n}.$$
Demostrar que D es n-lineal si y sólo si los enteros $j_1, j_2, \ldots, j_n$ son distintos.

4. Sea K un anillo conmutativo con unidad. Demostrar que la función determinante sobre las matrices 2×2 A, sobre K es alternada y 2-lineal como función de las columnas de A.

5. Sea K un anillo conmutativo con unidad. Se define una función D sobre las matrices 3×3 sobre K
$$D(A) = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{23} \end{vmatrix}$$
Demostrar que D es alternada y 3-lineal como función de las columnas de A.

6. Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo y D una función sobre las matrices $n \times n$ sobre $\mathbb{F}$ (con valores en $\mathbb{F}$). Supóngase que $D(AB) = D(A)D(B)$ para toda A, B. Demostrar que $D(A) = 0$ para toda A, o bien $D(I) = 1$. En este último caso demostrar que $D(A) \neq 0$ si A es inversible.

7. Una matriz $n \times n, A = (a_{ij})$ se dice *triangular* si $a_{ij} = 0$ para todo $i > j$ o si $a_{ij} = 0$ para todo $i < j$.
Demostrar que si A es triangular entonces $\det A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$, donde los a_{ii} son los elementos de la diagonal de A.

8. ¿Cómo se relacionan $\det 2A, \det -A$ y $\det A^t$ con $\det A$?.

9. Use eliminación Gaussiana para verificar que el determinante de una matriz de Vandermonde 3×3 es
$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$$

10. Sean $\mathbb{F}$ un cuerpo y $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Demostrar que:

a) si A es antisimétrica ($A^t = -A$), n es impar y $\operatorname{car}\mathbb{F} \neq 2$, entonces $\det A = 0$;

b) si A es ortogonal ($AA^t = I$), entonces $\det A = \pm 1$.¿Qué clase de paralelepípedo forman las columnas (o las filas) de A?;

c) si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ y A es unitaria ($A^*A = I$, donde A^* denota la *transpuesta conjugada* $\bar{A}^t$ de A), entonces $|\det A| = 1$.

11. Dado $0 < r, n$ y una matriz $Mn \times n$ la podemos escribir como

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

donde, A, B, C y D son matrices $r \times r, r \times (n-r), (n-r) \times r$ y $(n-r) \times (n-r)$ respectivamente. Probar que si A es inversible $\det M = \det A \det(D - CA^{-1}B)$.

12. Sea A_n la matriz $n \times n$ cuyos coeficientes son nulos si están en la diagonal y uno si están fuera. Calcule $\det A_n$. Ayuda: use inducción y el ejercicio anterior.

13. Sea T un operator lineal en $\mathbb{F}^n$. Se define

$$D_T(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \det(T\alpha_1, T\alpha_2, \ldots, T\alpha_n)$$

donde $\alpha_i \in \mathbb{F}^n$.

a) Demostrar que D_T es una función alternada n-lineal.

b) Si $\{e_i\}_{i=1}^n$ es la base canónica y

$$c = \det(Te_1, Te_2, \ldots, Te_n)$$

demostrar que dados n vectores $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ arbitrarios se tiene

$$\det(T\alpha_1, T\alpha_2, \ldots, T\alpha_n) = c \det(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

c) Si $\mathcal{B}$ es cualquier base ordenada de $\mathbb{F}^n$ y A es la matriz de T en la base ordenada $\mathcal{B}$, demostrar que $\det A = c$.

d) ¿ Podemos definir una función determinante para un operador lineal?

14. Sean $V = \mathbb{F}^{n\times n}$ el espacio vectorial de las matrices $n \times n$ sobre un cuerpo $\mathbb{F}$ y $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$. Consideremos L_B y R_B los operadores lineales sobre V definidos por $L_B(A) := BA$ y $R_B(A) := AB$. Demostrar que:

a) $\det L_B = (\det B)^n$.

b) $\det R_B = (\det B)^n$.