Clase 12 - Aproximación de funciones (3)

Mejor aproximación de funciones con pesos

Ahora se reformulará el problema de mejor aproximación de funciones por cuadrados mínimos con funciones de peso.

Definición 1. *Una función (integrable)* ω *se llama* **función de peso** *en el intervalo* I *si* $\omega(x) \geq 0$ *para todo* $x \in I$*, pero* $\omega(x) \neq 0$ *para todo* x *en cualquier subintervalo de* I*, es decir* ω *no puede ser constantemente cero en un subintervalo de* I*.*

Las funciones de peso se utilizarán en la definición de la medida del error y permiten dar más o menos importancia a las aproximaciones en ciertas partes del intervalo. Por ejemplo, la función de peso definida por

$$\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{para } x \in (-1,1)$$

pone menos énfasis cerca del origen y por el contrario mucho más cerca de los extremos del intervalo. Ver Figura (1).

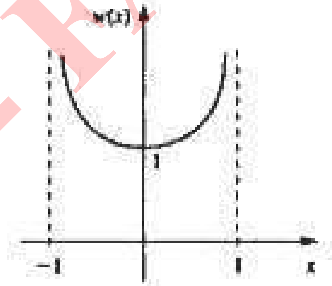

Figura 1: Función de peso $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

El problema reformulado: Dados $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\}$ un conjunto de funciones linealmente independientes en $[a,b]$, una función de peso ω definida en $[a,b]$ y f una función continua en $[a,b]$, se desean determinar los coeficientes $a_0, a_1, \dots, a_n$ de la combinación lineal que definen

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \, \phi_k(x),$$

tal que minimizan la medida del error

$$E = E(a_0, \dots, a_n) = \int_a^b \omega(x)[f(x) - P(x)]^2 \, dx = \int_a^b \omega(x)[f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k \, \phi_k(x)]^2 \, dx.$$

Notar que esto generaliza lo que vimos en la clase anterior tomando $\omega(x) \equiv 1$ y $\phi_k(x) = x^k$ para $k = 0, \dots, n$.

Nuevamente, una condición necesaria para encontrar un minimizador en $(a_0, \dots, a_n)$ es que $\partial E / \partial a_j = 0$ para todo $j = 0, \dots, n$, esto es,

$$\frac{\partial E}{\partial a_j} = 2 \int_a^b \omega(x)[f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k \, \phi_k(x)] \, \phi_j(x) \, dx = 0, \qquad \text{para} \quad j = 0, \dots, n.$$

Así, obtenemos las **ecuaciones normales** para el caso general

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \int_a^b \omega(x)\phi_k(x)\phi_j(x)\,dx = \int_a^b \omega(x)f(x)\phi_j(x)\,dx, \qquad \text{para} \quad j=0,\dots,n.$$

Si fuera posible elegir funciones $\{\phi_0,\dots,\phi_n\}$ tal que

$$\int_a^b \omega(x)\phi_k(x)\phi_j(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad j\neq k \\ \alpha_j>0 & \text{si} \quad j=k \end{cases} \tag{1}$$

las ecuaciones normales se podrían reducir a

$$a_j \int_a^b \omega(x)(\phi_j(x))^2\,dx = \int_a^b \omega(x)f(x)\phi_j(x)\,dx, \qquad \text{para} \quad j=0,\dots,n.$$

Ahora, usando (1) se tiene

$$a_j\alpha_j = \int_a^b \omega(x)f(x)\phi_j(x)\,dx, \qquad \text{para} \quad j=0,\dots,n,$$

y por lo tanto

$$a_j = \frac{1}{\alpha_j}\int_a^b \omega(x)f(x)\phi_j(x)\,dx, \qquad \text{para} \quad j=0,\dots,n.$$

Definición 2. *El conjunto $\{\phi_0,\dots,\phi_n\}$ es un* **conjunto ortogonal** *de funciones en el intervalo $[a,b]$, con respecto a la función de peso ω, si*

$$\int_a^b \omega(x)\phi_k(x)\phi_j(x)\,dx = \begin{cases} 0 & si \quad j\neq k \\ \alpha_j & si \quad j=k. \end{cases}$$

Si $\alpha_j=1$ para todo $j=0,\dots,n$ se dice que el conjunto es **ortonormal**.

Lema 1. *Si $\{\phi_0,\phi_1,\dots,\phi_n\}$ es un conjunto ortogonal de funciones en el intervalo I con respecto a una función de peso ω definida en I entonces son linealmente independientes.*

Demostración. Supongamos que

$$\sum_{j=0}^{n} c_j\,\phi_j(x)=0, \qquad \text{para todo } x\in I.$$

Luego

$$0=\int_a^b 0\,\phi_k(x)\,\omega(x)\,dx = \int_a^b \sum_{j=0}^{n} c_j\,\phi_j(x)\,\phi_k(x)\,\omega(x)\,dx = \sum_{j=0}^{n} c_j \int_a^b \phi_j(x)\,\phi_k(x)\,\omega(x)\,dx = c_k\,\alpha_k,$$

como $\alpha_k>0$, entonces $c_k=0$ para todo $k=0,\dots,n$, y por lo tanto las funciones son linealmente independientes. □

Lema 2. *Sea el conjunto de funciones polinomiales $\{\phi_0,\phi_1,\dots,\phi_n\}$ es un conjunto ortogonal en el intervalo $[a,b]$ con respecto a una función de peso ω, con grado de ϕ_k igual a k y $Q_k(x)$ es un polinomio de grado k menor estricto que n entonces*

$$\int_a^b \omega(x)\phi_n Q_k(x)\,dx = 0.$$

Demostración. Como $Q_k(x)$ tiene grado k se sabe que existen coeficientes $c_0,\dots,c_k$ tales que

$$Q_k(x) = \sum_{j=0}^{k} c_j \phi_j(x).$$

Luego

$$\int_a^b \omega(x)\phi_n(x)Q_k(x)\,dx = \sum_{j=0}^{k} c_j \int_a^b \omega(x)\phi_n(x)\phi_j(x)\,dx = 0,$$

pues ϕ_n es ortogonal a ϕ_j para cada $j = 0,\dots,k$. □

En resumen, con lo anterior se ha probado el siguiente teorema

Teorema 1. *Si $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\}$ es un conjunto ortogonal de funciones en el intervalo $[a,b]$ con respecto a una función de peso ω definida en $[a,b]$, entonces la aproximación por cuadrados mínimos a una función continua f respecto al peso ω está dada por*

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \phi_k(x),$$

donde para cada $k = 0,\dots,n$,

$$a_k = \frac{\int_a^b \omega(x) f(x)\phi_k(x)\,dx}{\int_a^b \omega(x)(\phi_k(x))^2\,dx} = \frac{1}{\alpha_k}\int_a^b \omega(x) f(x)\phi_k(x)\,dx.$$

El resultado siguiente da una relación de recurrencia que permite generar un conjunto de funciones ortogonales.

Teorema 2. *El conjunto de funciones polinomiales $\{\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n\}$ que se define a continuación es un conjunto ortogonal en el intervalo $[a,b]$ con respecto a una función de peso ω*

$$\phi_0(x) = 1, \quad \phi_1(x) = x - B_1 \quad \text{para cada } x \in [a,b],$$

donde

$$B_1 = \frac{\int_a^b x\omega(x)(\phi_0(x))^2\,dx}{\int_a^b \omega(x)(\phi_0(x))^2\,dx},$$

y para $k \geq 2$

$$\phi_k(x) = (x - B_k)\,\phi_{k-1}(x) - C_k\,\phi_{k-2}(x) \qquad \text{para cada } x \in [a,b],$$

donde

$$B_k = \frac{\int_a^b x\omega(x)(\phi_{k-1}(x))^2\,dx}{\int_a^b \omega(x)(\phi_{k-1}(x))^2\,dx} \quad \text{y} \quad C_k = \frac{\int_a^b x\omega(x)\phi_{k-1}(x)\phi_{k-2}(x)\,dx}{\int_a^b \omega(x)(\phi_{k-2}(x))^2\,dx}.$$

Demostración. La prueba se hará por inducción en k.

Si $k = 1$, entonces,

$$\int_a^b \omega(x)\phi_1(x)\phi_0(x)\,dx = \int_a^b x\omega(x)\phi_0(x)\,dx - B_1\int_a^b \omega(x)\phi_0(x)\,dx = 0,$$

pues $\phi_0(x) = (\phi_0(x))^2$ y por la definición de B_1.

Ahora supongamos, por hipótesis inductiva, que $\{\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_{k-1}\}$ son ortogonales, y veamos que ϕ_k es ortogonal a todas las funciones anteriores.

$$\begin{aligned}
\int_a^b \omega(x)\phi_k(x)\phi_{k-1}(x)\,dx &= \int_a^b \omega(x)\left((x-B_k)\,\phi_{k-1}(x) - C_k\phi_{k-2}(x)\right)\phi_{k-1}(x)\,dx \\
&= \int_a^b x\omega(x)(\phi_{k-1}(x))^2\,dx - B_k\int_a^b \omega(x)(\phi_{k-1}(x))^2\,dx \\
&\quad -C_k\int_a^b \omega(x)\phi_{k-2}(x)\phi_{k-1}(x)\,dx = 0,
\end{aligned}$$

pues los dos primeros términos suman cero por la definición de B_k y el último término es cero por la hipótesis inductiva.

Además,

$$\begin{aligned}
\int_a^b \omega(x)\phi_k(x)\phi_{k-2}(x)\,dx &= \int_a^b \omega(x)\left((x-B_k)\,\phi_{k-1}(x) - C_k\phi_{k-2}(x)\right)\phi_{k-2}(x)\,dx \\
&= \int_a^b x\omega(x)\phi_{k-1}(x)\phi_{k-2}(x)\,dx - B_k\int_a^b \omega(x)\phi_{k-1}(x)\phi_{k-2}(x)\,dx \\
&\quad -C_k\int_a^b \omega(x)(\phi_{k-2}(x))^2\,dx = 0,
\end{aligned}$$

pues el primero y el tercer término suman cero por la definición de C_k y el segundo término es cero por la hipótesis inductiva.

Por último para $0 \leq i \leq k-3$, reemplazando k por $i+1$ en $\phi_k(x) = (x-B_k)\,\phi_{k-1}(x) - C_k\,\phi_{k-2}(x)$, se obtiene que $\phi_{i+1}(x) = (x-B_{i+1})\,\phi_i(x) - C_{i+1}\,\phi_{i-1}(x)$ y por lo tanto

$$x\phi_i(x) = \phi_{i+1}(x) + B_{i+1}\phi_i(x) + C_{i+1}\phi_{i-1}(x). \tag{2}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\int_a^b \omega(x)\phi_k(x)\phi_i(x)\,dx &= \int_a^b \omega(x)\left((x-B_k)\,\phi_{k-1}(x) - C_k\phi_{k-2}(x)\right)\phi_i(x)\,dx \\
&= \int_a^b x\omega(x)\phi_{k-1}(x)\phi_i(x)\,dx - B_k\int_a^b \omega(x)\phi_{k-1}(x)\phi_i(x)\,dx \\
&\quad -C_k\int_a^b \omega(x)\phi_{k-2}(x)\phi_i(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Los dos últimos términos son iguales a cero por la hipótesis inductiva. Usamos (2) para analizar el primer término:

$$\begin{aligned}
\int_a^b x\omega(x)\phi_{k-1}(x)\phi_i(x)\,dx &= \int_a^b \omega(x)x\phi_i(x)\phi_{k-1}(x)\,dx \\
&= \int_a^b \omega(x)\left(\phi_{i+1}(x) + B_{i+1}\phi_i(x) + C_{i+1}\phi_{i-1}(x)\right)\phi_{k-1}(x)\,dx \\
&= \int_a^b \omega(x)\phi_{i+1}(x)\phi_{k-1}(x)\,dx + B_{i+1}\int_a^b \omega(x)\phi_i(x)\phi_{k-1}(x)\,dx \\
&= +C_{i+1}\int_a^b \omega(x)\phi_{i-1}(x)\phi_{k-1}(x)\,dx,
\end{aligned}$$

y estos tres términos son iguales a cero por la hipótesis inductiva si $0 \leq i \leq k-3$. Por lo tanto queda demostrada la ortogonalidad en todos los casos. $\square$

Ejemplos:

- **Polinomios de Legendre:** $I = [-1,1]$, $\omega(x) = 1$ para todo $x \in I$,

$$\phi_0(x) = 1, \quad \phi_1(x) = x, \quad \phi_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}, \quad \phi_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x, \quad \phi_4(x) = x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{25}, \ldots$$

- **Polinomios de Chebyshev:** $I = (-1,1)$, $\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ para todo $x \in I$,

$$\phi_k(x) = \cos(k \arccos(x)), \qquad \text{para todo } x \in I, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

- **Polinomios de Laguerre:** $I = [0,+\infty)$, $\omega(x) = e^{-x}$ para todo $x \in I$,

$$\phi_k(x) = \frac{e^x}{k!}\frac{d^k}{dx^k}(x^k e^{-x}), \qquad \text{para todo } x \in I, \quad k = 0,1,2,\ldots$$

- **Polinomios de Hermite:** $I = (-\infty,+\infty)$, $\omega(x) = e^{-x^2}$ para todo $x \in I$,

$$\phi_k(x) = (-1)^k e^{x^2}\frac{d^k}{dx^k}e^{x^2}, \qquad \text{para todo } x \in I, \quad k = 0,1,2,\ldots$$