Planos tangentes

1. Dadas las siguientes funciones, encuentre una representación explícita para el plano tangente al gráfico de f en el punto $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, y una representación paramétrica para la recta normal al mismo, que pasa por el punto de tangencia.

(a) $f(x,y) = \sqrt{xy}$ en $\mathbf{x}_0 = (1,1,1)$.
(b) $f(x,y) = x^2 + xy + 3y^2$ en $\mathbf{x}_0 = (1,1,5)$.
(c) $f(x,y) = x^2y^2$ en $\mathbf{x}_0 = (1,2,4)$.
(d) $f(x,y) = xy + ye^x$ en $\mathbf{x}_0 = (1,1,1+e)$.

2. Para cada uno de los siguientes conjuntos definidos paramétricamente como $S = \mathrm{Im}(g)$, hallar el plano tangente a S en el punto $\mathbf{p}$ indicado.

(a) $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = g\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cos(u) \\ v \\ 2\,\mathrm{sen}(u) \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} 0 \le u < 2\pi, \\ -\infty < v < \infty. \end{cases}, \quad \mathbf{p} = g\left(\frac{\pi}{4}, 2\right).$$

(b) $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = g\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u\cos(v) \\ u\,\mathrm{sen}(v) \\ 2u \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} 0 \le u, \\ 0 \le v < 2\pi. \end{cases}, \quad \mathbf{p} = g(1,0).$$

(c) $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = g\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos(u)\,\mathrm{sen}(v) \\ b\,\mathrm{sen}(u)\,\mathrm{sen}(v) \\ c\cos(v) \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} 0 \le u \le 2\pi, \\ 0 \le v \le \frac{\pi}{2}, \\ a,b,c > 0 \text{ fijos.} \end{cases}, \quad \mathbf{p} = g\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right).$$

(d) $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = g\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{sen}(v) \\ (2+\cos(v))\,\mathrm{sen}(u) \\ (2+\cos(v))\cos(u) \end{pmatrix} \qquad -\pi < u, v < \pi, \quad \mathbf{p} = g\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right).$$

3. Obtener la ecuación del plano tangente a la superficie de nivel de la función f que pasa por el punto dado.

(a) $f(x,y,z) = z^2 - x^2 - y^2$ en $\mathbf{x}_0 = \left(\sqrt{3}, 0, -2\right)$.
(b) $f(x,y,z) = x^2y + y^2z + z^2x$ en $\mathbf{x}_0 = (1,-1,1)$.
(c) $f(x,y,z) = \cos(x+2y+3z)$ en $\mathbf{x}_0 = \left(\frac{\pi}{2}, \pi, \pi\right)$.

Polinomios de Taylor

4. Encuentre la mejor aproximación de segundo grado de la función $f(x,y) = \sqrt{1+x^2+y^2}$ cerca del punto $(x_0,y_0) = (0,0)$. Lo mismo para $g(x,y,z) = (x+y)^2e^z$ en $(0,0,0)$.

5. Encuentre el desarrollo de Taylor de tercer grado de $(x+y)^3$, alrededor del punto $(x_0,y_0) = (0,0)$, y alrededor de $(x_0,y_0) = (1,2)$.

6. Calcular el desarrollo de Taylor de segundo grado de xe^y en $(x_0,y_0) = (2,0)$,

(a) usando la definición, (b) por sustitución.

7. Si $f(x,y) = (x^2+y^2)e^{x^2+y^2}$, usar el desarrollo de Taylor de f para calcular $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0,0)$.

8. Calcular el siguiente límite empleando un polinomio de Taylor de orden adecuado. Justificar usando el resto.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{xy}\cos(x+y) + x^2 + y^2 - 1}{x^2+y^2}$$

Máximos y mínimos

9. Encontrar los puntos críticos de las siguientes funciones, y decidir si allí la función tiene un máximo local, un mínimo local o ninguno de los anteriores.

(a) $f(x,y) = e^x \operatorname{sen}(y)$. (b) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-1}$.

(c) $f(x,y) = 4 - \sqrt{x^2+y^2}$. (d) $f(x,y) = x^2y^2$. es silla?

(e) $f(x,y) = x\,\operatorname{sen}(y)$. (f) $f(x,y) = \dfrac{x}{1+x^2+y^2}$.

(g) $f(x,y) = (x+y)e^{-xy}$. (h) $f(x,y) = (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$.

10. Probar que $(0,0,0)$ es un punto crítico de $f(x,y,z) = \cos(x^2+yz)$, y analizar si es extremo relativo o no.

11. Encuentre los máximos y mínimos absolutos de las siguientes funciones.

(a) $f(x,y) = e^{-xy}$ en la región $x^2+4y^2 \le 1$.

(b) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ en la región $(x-2)^2+y^2 \le 1$.

(c) $f(x,y) = x^2+y^2+\frac{2\sqrt{2}}{3}xy$ en la región $x^2+2y^2 \le 1$.

(d) $f(x,y,z) = y^3+xz^2$ en la esfera $x^2+y^2+z^2 = 1$.

12. Una caja rectangular sin tapa debe tener una superficie con un área de 27 unidades cuadradas. Encuentre las dimensiones que le darán volumen máximo.

13. Encuentre el valor máximo de la función $x(y+z)$ dado que $x^2+y^2=1$ y $xz=1$.

14. Obtenga los puntos de la curva de intersección del elipsoide $x^2+4y^2+4z^2=4$ y el plano $x-\sqrt{3}y-z=0$ que estén más cerca del origen, y calcule la distancia mínima.

Ejercicios de repaso.

15. Hallar el polinomio de Taylor de grado $2n$ de la función $f(x,y) = \dfrac{1}{1+xy}$ en el $(0,0)$. ¿Qué ocurre con el de grado $m \in \mathbb{N}$?

16. Calcular el polinomio de Taylor de orden 2 de $f(x,y) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$ centrado en $(0,0)$. Además, mostrar que si $|x| \le 0{,}1$ e $|y| \le 0{,}1$ entonces el error que se comete al aproximar f por su polinomio de Taylor de orden 2 es menor que $2 \cdot 10^{-3}$.

17. Escribir el polinomio xy^2z^3 como un polinomio en $(x-1)$, $y+1$ y z.

18. Encontrar los valores máximos y mínimos locales de $f(x,y) = xye^{-x^2-y^4}$.

19. Hallar los puntos más lejanos al origen y que están en la curva

$$(x,y,z) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), \operatorname{sen}(t/2)).$$

20. Encuentre los máximos y mínimos absolutos de las siguientes funciones.

(a) $f(x,y) = 3x+1$, si $x^2+y^2=10$,

(b) $f(x,y) = e^{xy}$, si $x^3+y^3=16$,

(c) $f(x,y) = x^2+y^2+4x-4y$, si $x^2+y^2 \le 9$,

(d) $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$, si $xyz=1$.

21. Los hiperplanos $x + y - z - 2w = 1$ y $x - y + z + w = 2$ se cortan en un conjunto $\mathcal{F}$ en $\mathbb{R}^4$. Hallar el punto de $\mathcal{F}$ más cercano al origen.

22. Encuentre la distancia mínima en $\mathbb{R}^2$ entre la elipse $x^2 + 2y^2 = 1$ y la recta $x + y = 4$. Indicación: considerar el cuadrado de la distancia como función de cuatro variables.

23. Este ejercicio se trata de ver que algunos hechos válidos para máximos y mínimos de funciones continuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no son ciertos para funciones de varias variables:

(a) Demostrar que la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = -(x^2 - 1)^2 - (x^2 y - x - 1)^2$$

tiene sólo dos puntos críticos y ambos son máximos locales.

(b) Demostrar que la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = x^2 + y^2(1 + x)^3$$

tiene un sólo punto crítico, que resulta ser un mínimo local pero no absoluto.

24. Sean $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x, y) = x^2 + y^2, \quad g(x, y) = (y - 1)^3 - x^2.$$

Hallar el valor mínimo de f sujeta a la restricción $g(x, y) = 0$. Mostrar que no existe ninguna constante λ tal que $\nabla f = \lambda \nabla g$ para algún punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. ¿Por qué el método de los multiplicadores de Lagrange falla en este ejemplo?