#Funcional, #Funcional/Teorico

Corolario X normado tq $(X, \|\ \|_1)$ $(X, \|\ \|_2)$

Banach. Supongamos $\|x\|_1 \leq c\|x\|_2 \quad \forall x \in X$

ent $\|\ \|_1$ y $\|\ \|_2$ son eq

dem tenemos $I: (X, \|\ \|_1) \longrightarrow (X, \|\ \|_2)$ que es lineal continua y biyectiva luego por T aplicación abierta $\square$

Corolario (teo de gr cerrado) X, Y banach

$T: X \longrightarrow Y$ ent

gráfico cerrado $\Rightarrow$ continua

dem X, Y Banach ent también es $\mathcal{B}$ gr T (pues es cerrado)

Sea $\mathcal{B}: \text{Gr} f \longrightarrow X$ dada por

$\mathcal{B}(x, Tx) = x$ ent $\mathcal{B}$ es bi y lineal

Además $\|\mathcal{B}(x, Tx)\| = \|x\| \leq \|x\| + \|Tx\|$

$= \|(x, Tx)\|$

por

luego $\mathcal{B}$ es continua ent por TAA

$\mathcal{B}^{-1}: X \longrightarrow \text{gr} f$ es continua

Ahora $\forall x \in X$

$$\|Tx\| \leq \|x\| + \|Tx\| = \|(x, Tx)\| = \|B^{-1}x\| \leq \|B^{-1}\|\|x\|$$

por

$\Rightarrow T$ continua

Lema X, Y normado $T \in B(X,Y)$ inv

$\Rightarrow \|Tx\| \geq \|T^{-1}\|^{-1}\|x\| \quad \forall x \in X$

demo $x = T^{-1}(Tx) \Rightarrow \|x\| \leq \|T^{-1}\|\|Tx\|$

Lema X Banach, Y normado $T \in B(X,Y)$

si $\exists \alpha > 0$ tq $\|Tx\| \geq \alpha\|x\| \quad \forall x \in X$

ent $\operatorname{Im} T$ es cerrado

demo Sea $\{y_n\} \subseteq \operatorname{Im} T$ tq $y_n \to y$ en Y

ent $\exists x_n \in X \,/\, Tx_n = y_n$ como $\{y_n\}$ converge

es de cauchy luego $\|y_n - y_m\| = \|T(x_n - x_m)\|$

$\geq \alpha\|x_n - x_m\|$

luego $\{x_n\}$ es de cauchy como X es Ban

$x_n \to x \in X$

$\Rightarrow Tx_n \to Tx \quad (y_n \to y)$

Teo X, Y Banach $T \in B(X,Y)$ ent son eq

(a) T es inversible

(b) $\mathrm{Im}\, T$ es denso en Y y $\exists \alpha > 0$

tq $\|Tx\| \geq \alpha \|x\| \quad \forall x \in X$

demo (a) $\Rightarrow$ (b) $\mathrm{Im}\, T = Y$ usando lema

con $\alpha = \|T\|^{-1}$

por lema Im cerrado

(b) $\Rightarrow$ (a) $Y = \overline{\mathrm{Im}\, T} = \mathrm{Im}\, T$ ent T sobre

Además si $x \in \mathrm{Ker}\, T$ $\quad 0 = \|Tx\| \geq \alpha \|x\|$

$\Rightarrow x = 0$

$\Rightarrow T$ inyectiva

por el teo A Abierta T^{-1} continua $\square$

$\Rightarrow T$ inversible

Corolario X, Y banach $T \in B(X,Y)$

T no es inversible $\Leftrightarrow$ $\overline{\mathrm{Im}\, T} \neq Y \wedge \exists \{x_n\} \subseteq X$ con $\|x_n\| = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$ tq $Tx_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

Aplicación del coro para $f \in C[0,1]$ sea

$T_f : L^p[0,1] \to L^p[0,1]$ $(1 \leq p < \infty)$ dada por

$$T_f(u) = f \cdot u \ dt$$

Si $f(t) = t$ ent T_f es no inversible

-) Sea $u_n = n^{\frac{1}{p}} \chi_{[0,\frac{1}{n}]} \in L^p[0,1]$

Ahora $\|u_n\|_p^p = \int_0^1 \left(n^{\frac{1}{p}} \chi_{[0,\frac{1}{n}]}\right)^p = 1 \quad \forall n$

y además $\|T_f u_n\|_p^p = \int_0^1 \left(f \, n^{\frac{1}{p}} \chi_{[0,\frac{1}{n}]}\right)^p dt$

$$n \int_0^{\frac{1}{n}} f^p = \frac{n}{(p+1) n^{p+1}} \longrightarrow 0$$

$\Rightarrow$ por coro T no inversible

Lema $S \neq \emptyset$, X normado sobre $\mathbb{F}$.
definimos

$$\mathcal{F}(S,X) = \{ f : S \to X \} \text{ (ev sobre } \mathbb{F})$$

$$\mathcal{F}_b(S,X) = \{ f : S \to X \ / \ \{\|f(s)\| : s \in S\} \text{ es acotado} \}$$

ent $\|f\|_b = \sup\{\|f(s)\| : s \in S\}$ es norma

y si X es banach ent $F_b(S,X)$ es banach

demo Es facil ver que es norma

Sup ahora X es B y sea $\{f_n\} \subseteq F_b(S,X)$

una suc de cauchy. $\varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq

$$\|f_n - f_m\|_b < \varepsilon \quad \forall n,m \geq n_0$$

luego $\forall s \in S$ y tales $n,m \geq n_0$

$$\|f_n(s) - f_m(s)\| \overset{\to \text{ def norma } \|\|_b}{\leq} \|f_n - f_m\|_b \underset{\triangle}{<} \varepsilon$$

osea $\{f_n(s)\}$ es de cauchy en X

y por def $f(s) = \lim f_n(s)$

haciendo $n \to \infty$ en $\triangle$

osea $\|f_n(s) - f(s)\| \underset{\otimes}{\leq} \varepsilon \quad \forall s \in S \quad n \geq n_0$

$\Rightarrow \|f(s)\| \overset{\to \text{por}}{\leq} \varepsilon + \|f_n(s)\| \leq \varepsilon + \|f_n\|_b$

osea f es acotada $\Rightarrow f \in F_b(S,X)$

De $\otimes$ deduce que $\|f_n - f\|_b \to 0$

$\square$

Teo (Acotado unif de Banach-Steinhaus)

Sean U, X banach sea $S \neq \phi$ y para cada $s \in S$. Sea $T_s \in \mathcal{B}(U,X)$ ent si p/cada $u \in U$ el conj $\{T_s(u) : s \in S\}$ es acotado $\Rightarrow$ $\{\|T_s\| : s \in S\}$ es acotada

$\|T_s u\| \leq M_x \quad \forall s \in S$

dem para cada $u \in U$ sea $f^u : S \to X$ dada por $f^u(s) = T_s u$ ent $\{\|f^u(s)\| : s \in S\}$ es acotada luego $\to$ por

$f^u \in F_b(S,X)$. Sea ahora

$\Phi : U \to F_b(S,X)$ dada por $\Phi(u) = f^u$

Veamos que graf Φ es cerrado. Si esto es cierto ent T.G Cerrado

$\Rightarrow \Phi$ es continua y luego

$\|T_s u\| = \|f^u(s)\| \leq \|f^u\|_b = \|\Phi(u)\| \leq \|\Phi\| \|u\|$

$\hookrightarrow$ tomo $\sup_{\|u\|=1} \Rightarrow \quad \|T_s\| \leq \|\Phi\|$

$\forall s \in S \quad \forall u \in U$ o sea $\|T_s\| \leq \|\Phi\| \quad \forall s \in S$

sea $\{u_n, \phi(u_n)\} \subset gr\,\phi$ tq $(u_n, \phi(u_n)) \to (u, g)$

en $U \times F_b(S, X)$

ent $\lim \| g(s) - \phi(u_n)(s) \| \leq \lim \| g - \phi(u_n) \|_b = 0$

luego como T_g es continua $g(s) = \lim \phi(u_n)(s)$

$$= \lim f^{u_n}(s)$$

$$= \lim T_s u_n$$

$$= T_s u$$

osea $g(s) = T_s u = \phi(u)(s) \quad \forall s \in S$

luego $g = \phi(u)$ LISTO

Esp duales

<u>Teo</u> X normado $\dim X < \infty$. Sea $\{x_1 \ldots x_n\}$ base

ent X' tiene base $\{f_1 \ldots f_n\}$ tq

$$f_j(x_k) = \delta_{jk} \quad \forall\ 1 \le j,k \le n$$

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \ne k \end{cases}$$

en particular $\dim X = \dim X'$

<u>dem</u> ej

Teo (representación de Riesz)

Sea H Hilbert $f \in H'$ ent $\exists!\ y \in H$ tq

$f(x) = (x, y)\ \forall x \in H$. más aún $\|f\|_{H'} = \|y\|_H$

<u>dem</u> si $f(x) = 0\ \forall x \in H$ elegimos $y = 0$

Si no $\operatorname{Ker} f$ es subesp cerrado $\ne H$

y ent $(\operatorname{Ker} f)^\perp \ne \emptyset$ luego $\exists\ z \in \operatorname{Ker} f^\perp$

$(H = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Ker} f^\perp)$ tq $f(z) = 1$

si $(\operatorname{Ker} f)^\perp = \emptyset$ abs $\Rightarrow$ pq $\operatorname{Ker} f$ cerrado)

en particular $z \ne 0$

ent por def $y = \frac{z}{\|z\|^2}$. Sea ahora $x \in H$

ent $f(x - f(x)z) = f(x) - f(x)f(z) = 0$

o sea $x - f(x)z \in \ker f$. luego como

$z \in \ker f^{\perp}$

$$0 = (x - f(x)z, z) = (x, z) - f(x)(z, z)$$

$$\Rightarrow (x, z) = f(x)\|z\|^2$$

$$\Rightarrow f(x) = (x, y) \quad ??$$

Ahora si $\|x\| \leq 1$

$$|f(x)| = |(x, y)| \leq \|x\|\|y\| \leq \|y\|$$

o sea $\|f\| \leq \|y\|$ por otro lado

si $\frac{y}{\|y\|} = x$ ent $\|x\| = 1$

$$\|f\| \geq |f(x)| = \frac{|f(y)|}{\|y\|} = \frac{(y, y)}{\|y\|} = \|y\|$$

luego $\|f\| = \|y\|$

Unicidad Sup $\exists\, y, w \in H \,/\, f(x) = (x, y) = (x, w)$

$\forall x \in H$ ent $(x, y - w) = 0 \quad \forall x \in H$

tomando $x = y - w \Rightarrow (y-w, y-w) = 0$

$\Rightarrow y - w = 0 \Rightarrow y = w$

---

teo H hilbert sea $T_H : H \to H'$ dado por $T_H y = f_y$ donde $f_y(x) \doteq (x, y)$ $\forall x \in H$

ent T_H es biy y $\forall y \in H$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$

(a) $T_H(\alpha y + \beta z) = \bar{\alpha} T_H y + \bar{\beta} T_H z$

(b) $\|T_H y\|_{H'} = \|y\|_H$

Además se puede definir un prod interno en H' como

$$(T_H z, T_H y)_{H'} \overset{*}{=} (y, z)_H \quad \forall y, z \in H$$

con este producto H' es hilbert y la norma asoc a cada f_y coincide con la norma de f_y como elemento de $B(H, \mathbb{F})$??

dem la biyección y (b) salen del teo anterior

Ahora para $x \in H$, tenemos

$$f_{\alpha y + \beta z}(x) \underset{\text{por def}}{=} (x, \alpha y + \beta z) = \bar{\alpha}(x,y) + \bar{\beta}(x,z)$$

$$= \bar{\alpha} f_y(x) + \bar{\beta} f_z(x)$$

luego vale (a)

Veamos ⓐ define un pi en H'

I) tenemos $(f_y, f_y)_{H'} = (y,y)_H \geq 0$

con $= \Leftrightarrow y = 0$ $(f_y = 0)$

II) ~~Ad~~ $(f_z, f_y)_{H'} = (y, z)_H = \overline{(z, y)}_H$

$$= \overline{(f_y, f_z)}_{H'}$$

III)

$$(\alpha f_y + \beta f_z, f_w)_{H'} = (f_{\bar{\alpha} y + \bar{\beta} z}, f_w)_{H'}$$

$$= (w, \bar{\alpha} y + \bar{\beta} z)_H$$

$$= \alpha (w, y)_H + \beta (w, z)_H$$

$$= \alpha (f_y, f_w)_{H'} + \beta (f_z, f_w)_{H'}$$