

PRÁCTICO 4

DISTRIBUCIÓN CONJUNTA, CONDICIONAL Y MARGINAL

1. Sean X e Y variables aleatorias con densidad conjunta dada por la tabla

$x \setminus y$	-1	0	2	6
-2	$1/9$	$1/27$	$1/27$	$1/9$
1	$2/9$	0	$1/9$	$1/9$
3	0	0	$1/9$	$4/27$

- a) Encontrar las densidades marginales de X e Y .
 - b) ¿Son X e Y independientes?
 - c) Calcular la probabilidad de los siguientes eventos :
 - i) Y es par, ii) XY es impar, iii) $X > 0$, iv) $Y \geq 0$.
2. Un fabricante ofrece relojes en lotes de 50, en cada uno de los cuales hay buenos, recuperables y desechables. Para ver si adquiere el lote, un comprador toma de un lote una muestra de 8, sin reposición, de los cuales, al menos 5 deben ser buenos y ninguno desechable. Si en el lote hay 20 buenos, 25 recuperables y 5 desechables:
- a) Dé la función de densidad del vector aleatorio que cuenta la cantidad de relojes de cada tipo que hay en la muestra.
 - b) Halle la probabilidad de que compre.
 - c) Resuelva ahora el inciso (a) pero suponiendo que la extracción de la muestra de 8 se realiza con reposición.
3. Una urna contiene 4 bolitas blancas y 6 negras. Se extraen 3 bolitas sin reposición y se definen las siguientes variables aleatorias:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si el número de bolitas blancas extraídas es par} \\ 0 & \text{si el número de bolitas blancas extraídas es impar} \end{cases}$$

$$Y = k \quad \text{si se extraen } k \text{ bolitas negras}$$

- a) Hallar p_{XY} y F_{XY} .
 - b) Hallar p_Y y p_X . Determinar si X e Y son independientes.
4. Sean X_1, X_2, X_3 variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (v.a.i.i.d.) $\mathcal{B}(4, \frac{1}{3})$. Sea $Y = X_1 X_2 X_3$. Calcular $P(Y = 0)$.
5. Sean X e Y variables aleatorias discretas y sean g, h funciones tales que

$$P(X = x, Y = y) = g(x)h(y).$$

- a) Expresar $P(X = x)$ en términos de g y h .
- b) Expresar $P(Y = y)$ en términos de g y h .
- c) Demostrar que $(\sum_x g(x))(\sum_y h(y)) = 1$.
- d) Demostrar que X e Y son independientes.

6. Sean X e Y v. a. independientes. Probar que si:

a) $X \sim \mathcal{B}(n, p), Y \sim \mathcal{B}(m, p) \implies X + Y \sim \mathcal{B}(n + m, p)$

b) $X \sim \mathcal{P}(\lambda), Y \sim \mathcal{P}(\mu) \implies X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$

c) $X \sim \mathcal{G}(p), Y \sim \mathcal{G}(p) \implies X + Y \sim \mathcal{B}^-(2, p)$

clase 10

7. Se sabe que en la provincia de Salta la proporción de hombres de ojos azules es 20%, de ojos verdes es 5%, de ojos negros es 10%, otro color de ojos es 65%. José decide viajar de la capital salteña a una ciudad a 200 km, donde se realizará un congreso médico sobre alcoholismo. Para ello debe tomar 2 colectivos en los que viajan sólo salteños. Para llevar a cabo una prueba decide tomar una copa de jerez con cada hombre de ojos verdes o azules que encuentre en su viaje. En el primer colectivo viajan 10 hombres de los cuales ninguno traspasa al siguiente. En el segundo hay 8 hombres.

a) Calcular la probabilidad de que en la primera parte del trayecto haya tomado menos de 4 copas.

b) Calcular la probabilidad de que tome más de 3 copas en total.

8. El número de ballenas macho que aparecen semanalmente en el Golfo Nuevo sigue una distribución $\mathcal{P}(2)$, mientras que el número de hembras sigue una distribución $\mathcal{P}(2.5)$. Suponiendo que el número de machos es independiente del de hembras:

a) Hallar la probabilidad de que en una semana aparezcan 2 o más ballenas.

b) Si la semana pasada hubo 2 ballenas, encontrar la probabilidad de que hayan sido de distinto sexo.

9. Se arroja un dado equilibrado 2 veces. Sean $X_i = n^\circ$ en la tirada $i, (i = 1, 2)$.

a) Sea $Y = X_1 + X_2$. Hallar p_Y .

b) Sea la variable aleatoria $Z = \begin{cases} 1 & \text{si } Y \text{ es par} \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$

Determinar si X_1 y Z son independientes.

10. El 10% de la población fuma sólo cigarrillos negros, el 35% fuma sólo cigarrillos rubios, el 3% fuma sólo pipa y el resto no fuma. Se realiza una encuesta a 35 personas, siendo:

Y_1 = número de personas que no fuman,

Y_2 = número de personas que fuman cigarrillos rubios,

Y_3 = número de personas que fuman cigarrillos negros,

Y_4 = número de personas que fuman pipa.

a) Hallar la distribución de (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) .

b) Hallar la distribución de $(Y_1, Y_2 + Y_3, Y_4)$.

c) Hallar la distribución de $Y_2 + Y_3$. ¿Que sentido tendría hallar la distribución conjunta de $(Y_2 + Y_3, Y_1 + Y_4)$ (es decir, ¿la distribución conjunta del vector aleatorio de dos componentes agrega información nueva a la contenida en la distribución marginal de la primera coordenada)?

11. a) Sean X e Y v. a. independientes. Probar que si,

i) $X \sim \mathcal{B}(n, p), Y \sim \mathcal{B}(m, p)$, entonces $X|(X + Y = k) \sim \mathcal{H}(k, n, n + m)$.

ii) $X \sim \mathcal{P}(\lambda), Y \sim \mathcal{P}(\mu)$, entonces $X|(X + Y = k) \sim \mathcal{B}(k, \lambda/(\lambda + \mu))$.

b) Sean X_1, \dots, X_n mutuamente independientes con distribución Poisson con parámetros $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Sea $\lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$. Muestre que la distribución conjunta de X_1, \dots, X_n dado $X_1 + \dots + X_n = m$ es multinomial de parámetros m y $p_i = \lambda_i/\lambda$.

12. Probar que si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $Y|(X = k) \sim \mathcal{B}(k, p)$ para todo k , entonces $Y \sim \mathcal{P}(\lambda p)$.
13. Un señor se va a pescar un fin de semana. La cantidad de peces que pican en el lapso de una hora sigue una distribución $\mathcal{P}(\lambda)$. Además, cada pez tiene probabilidad q de zafarse y $1 - q = p$ de ser atrapado. Sean X = cantidad de peces que pican en una hora, e Y = cantidad de peces atrapados en una hora.
- a) Mostrar que Y tiene distribución $\mathcal{P}(\lambda p)$.
 - b) Mostrar que la distribución de $(X - Y)|(Y = y)$ es $\mathcal{P}(\lambda(1 - p))$.
14. El número de pasas en un budín inglés sigue la distribución $\mathcal{P}(60)$. Una persona compra un budín, saca todas las pasas una por una y reparte las pasas entre él y un amigo de la siguiente forma: después de extraer cada pasa tira una moneda equilibrada dando una pasa al amigo si sale cara, o comiéndosela él si sale ceca.
- a) ¿Cuál es la distribución del número de pasas que el amigo recibe?
 - b) Calcular la probabilidad de que reciban 30 pasas cada uno.
 - c) Calcular la probabilidad de que el budín tenga más de 60 pasas, dado que el amigo recibió 30.
15. Se tira un dado equilibrado. Si el resultado es múltiplo de 2, se sacan con reposición 2 bolitas de una urna que contiene 2 bolitas blancas y 3 rojas. Si el resultado del dado no es múltiplo de 2, se sacan 3 bolitas sin reposición de la misma urna. Se define X como el número de bolitas rojas e Y = resultado del dado. Hallar f_X , f_Y , f_{XY} , $f_{X|Y}$, $f_{Y|X}$.
16. De una urna que contiene 3 bolitas rojas y 4 blancas se extraen con reposición 2 bolitas. Si el número de bolitas blancas extraídas es k , se extraen con reposición bolitas hasta obtener $k + 2$ bolitas blancas. Calcular la probabilidad de que no haya sido extraída ninguna bolita blanca en la primera parte del experimento, sabiendo que en la segunda parte del experimento se tuvieron que sacar 3 bolitas.
17. Sean X e Y variables aleatorias independientes, con densidad geométrica de parámetros p_1 y p_2 respectivamente. Hallar: a) $P(X \geq Y)$; b) $P(X = Y)$.
Hallar además la densidad de c) $\min(X, Y)$, d) $X + Y$.
18. Sean X e Y variables aleatorias independientes con densidad uniforme en $\{1, 2, \dots, N\}$. Calcular la densidad de $X + Y$.
19. Probar que si X_1, \dots, X_n son v.a. independientes, $X_i \sim \mathcal{B}^-(\alpha_i, p)$, $i = 1, \dots, n$, entonces $X_1 + \dots + X_n \sim \mathcal{B}^-(\alpha_1 + \dots, \alpha_n, p)$.
20. Sea X_1, X_2, \dots una sucesión de variables aleatorias independientes que toman valores enteros no negativos y tienen la misma densidad. Sea $S_0 = 0$ y $S_n = X_1 + \dots + X_n$ cuando $n \geq 1$. Sea N una variable aleatoria a valores enteros no negativa y suponga que N, X_1, X_2, \dots son independientes. Entonces $S_N = X_1 + \dots + X_N$ es la suma de un número aleatorio de variables aleatorias. Probar que la función generadora de probabilidad de S_N está dada por

$$\Phi_{S_N}(t) = \Phi_N(\Phi_{X_1}(t)), \quad -1 \leq t \leq 1.$$