#Funcional, #Funcional/Teorico

Def $B(X,\mathbb{F})$ se llama espacio dual de X y se escribe X' y sus elementos se nombran funcionales lineales

Corolario X normado $\Rightarrow$ X' Banach

def Sean X, Y, Z normados $T \in B(X,Y)$. $S \in (Y,Z)$
la composición $S \circ T$ se llama producto y $S \circ T := ST$

Lem Sean X, Y, Z normados $T \in B(X,Y)$ $S \in B(Y,Z)$
$\Rightarrow ST \in B(X,Z)$ y $\|ST\| \leq \|S\| \|T\|$
dem (ej)

Notación $B(X) = B(X,X)$ $\quad T^n = T \ldots T$

$$p(X) = \sum a_i X^i \Rightarrow p(T) = \sum a_i T^i$$

Lem X normado ent

1) $B(X)$ es álgebra asoc con la identidad
2) Si $\{T_n\}, \{S_n\} \subseteq B(X)$ $T_n \to T$ $S_n \to S$

$$\Rightarrow S_n T_n \to ST$$

dem 1) ej

$\rightarrow$ $B(X)$ normado $\Rightarrow$ métrico

2) Como $\{T_n\}$ converge $\exists k \,/\, \|T_n\| \leq k \ \forall n$

Sea $\varepsilon > 0 \Rightarrow \forall n \geq n_0$ $\|S_n - S\| \leq \frac{\varepsilon}{2k}$ $\quad \|T_n - T\| \leq \frac{\varepsilon}{2(\|S\|+1)}$

$2\|S\|$??

$$\|S_n T_n - ST\| \leq \|S_n T_n - ST_n\| + \|ST_n - ST\|$$
$$\leq k\|S_n - S\| + \|S\| \|T_n - T\|$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Lem X normado. $T \in B(X)$. Si p, q pols $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ ent

1) $(\lambda p + \mu q)(T) = \lambda p(T) + \mu q(T)$

2) $pq(T) = p(T) q(T)$

Inversas de operadores

def X, Y normado, $T \in B(X, Y)$ se dice inversible si $\exists S \in B(Y, X)$ tq $ST \in I_X$ $TS \in I_Y$ y en tal caso se la llama inversa de T. $S := T^{-1}$. si existe es única

Lem X, Y, Z normados $T \in B(X, Y)$ $S \in B(Y, Z)$ ent

1) Si T, S son inversibles

$\Rightarrow T^{-1}$ tiene inversa T

y ST tiene inversa $T^{-1} S^{-1}$

2) Si $X = Y = Z$ $\quad TS = ST$ ~~ad~~
(conmutan)

·) Si T inversible

$$\Rightarrow T^{-1} S = S T^{-1}$$

·) Si TS inversible

$$\Rightarrow T \text{ y } S \text{ inversibles}$$

dem 1) Facil

2) $T^{-1}S = T^{-1} S T T^{-1} = T^{-1} T S T^{-1} = S T^{-1}$

·) Sea $B = TS$ $\quad \Rightarrow TS = ST$

$S(TS) = (TS)S \Rightarrow B$ y S conmutan

y como B inversible (hipótesis)

I $B^{-1} S = S B^{-1}$ (reusar la lem parte)

$\Rightarrow (B^{-1} S) T \overset{\Rightarrow hip}{=} B^{-1}(TS) = I$

$T(B^{-1} S) \underset{I}{=} (TS) B^{-1} = I$ $\quad$ $TS = B$ es inversible ~~por~~

$\Rightarrow T^{-1} = B^{-1} S = S B^{-1}$ hip $\Rightarrow \exists (TS)^{-1}$

Análogo p/ S^{-1}

Def X, Y normado. Si $\exists T \in B(X,Y)$ inversible decimos que X e Y son isomorfos y q' T es isomorfismo

$$(\|T^{-1}x\| = \|T^{-1}Ty\| = \|y\| = \|Tx\| = \|x\|)$$

$$y = Tx \quad ?.??$$

Lema Si X, Y normado isomorfos. ent

1) $\dim X < \infty \Leftrightarrow \dim Y < \infty$
y $\dim X = \dim Y$

2) X separable $\Leftrightarrow$ Y separable
X Banach $\Leftrightarrow$ Y Banach

---

ej de operador inversible Para $f \in C[0,1]$

$1 \le p \le \infty$ $\quad T_f : L^p(0,1) \longrightarrow L^p(0,1)$ dado por

$$T(f)(u) = T_f u = f \cdot u$$

es claro q' T_f es lineal y está bien def (o sea $f \cdot u \in L^p(0,1)$) más aún es cont pues $\|T_f u\|_p^p = \int |f \cdot u|^p \le \|f\|_\infty \int |u|^p = \|f\|_\infty \|u\|_p^p$

o sea $T_f \in B(L^p(0,1))$. Si además $\frac{1}{f} \in C[0,1]$

ent $\exists (T_f)^{-1}$ y es $(T_f)^{-1} = T_{\frac{1}{f}}$ (ejercicio)

Si $\frac{1}{f} \notin C[0,1]$ ent no sabemos que pasa ya que en gral $\frac{1}{f}u \notin L^p(0,1)$. (Pero podría ocurrir que $\exists (T_f)^{-1}$ y que no sea de la forma T_h para ningún h)

---

teo X Banach $T \in B(X)$ como $\|T\| < 1$ ent $I - T$ es inv y $(I-T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$

dem X Banach ent $B(X)$. Ahora como $\|T\| < 1$ ent $\sum \|T\|^n$ converge y como $\|T^n\| \leq \|T\|^n$ ent tmb converge $\sum \|T^n\|$ y como $B(X)$ banach converge $\sum T^n$.

Sea ent $S = \sum^{\infty} T^n$ y $S_K = \sum_{n=0}^{K} T^n$. La suc S_K converge en $B(X)$

Ahora $\|(I-T)S_K - I\| = \|I - T^{K+1} - I\|$

$S_K - TS_K$

$= \|T^{K+1}\| \leq \|T\|^{K+1}$

y como $\|T\| < 1$

pero $\lim_{k\to\infty}(I-T)S_k = (I-T)S$

$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \|(I-T)S_k - I\| \leq \lim \|T\|^{k+1} \to 0$

por $\sum_{n=0}^{\infty} \|T\|^n < \infty$

$\Rightarrow \lim_{k\to\infty}(I-T)S_k = I$

$\therefore I = (I-T)S$

y análogo $S(I-T) = I$ $\square$

<u>Aplicación</u> $A \in \mathbb{C}$ $K : [a,b]\times[a,b] \to \mathbb{C}$

dada por $K(x,y) = A \operatorname{sen}(x-y)$. Probar

si $|A| < \frac{1}{b-a}$ ent $\forall f \in C[a,b]$ $\exists!\, g \in C[a,b]$

tq $g(x) = f(x) + \int_a^b K(x,y)\, g(y)\, dy$

<u>demo</u> Ya vimos que el operador lineal

$K : C[a,b] \to C[a,b]$ dado por

$$K(g)(s) = \int_a^b K(s,t)\, g(t)\, dt$$

es acotado y $\|K(g)\| \leq |A|(b-a)\|g\|$ visto PRS

en particular $\|K\| \leq |A|(b-a)$

Luego si $|\lambda| < \frac{1}{b-a}$ $\|K\| < 1$.

Como ⊛ se puede escribir como

($g = Ig$ $\quad I$ como operador)

$$(I-K)g = \underbrace{g(t) - \int_a^b k(s,t)\, g(t)\, dt}_{} = f(x)$$

$(I-K)g = f$ por teo anterior

$I-K$ inversible y ent la única sol de ⊛ es $g = (I-K)^{-1} f$

Cor Sea X, Y Banach ent el conjunto A de operadores inversibles es abierto en $B(X,Y)$

dem Sea $T \in A$ $\quad n := \|T^{-1}\|^{-1} > 0$. Basta ver

$\|T - S\| < n \Rightarrow S \in A$

y $\|T - S\| < n \Rightarrow \|(T-S)T^{-1}\| \leq \|T-S\| \|T^{-1}\| < 1$

teo anterior $I_Y - (T-S)T^{-1}$ es inv pero

$$I_Y - (T - S)T^{-1} = I_Y - (I_Y - ST^{-1})$$

$$= ST^{-1}$$

por lem

$\rightarrow$ S inversible

teo (Baire) Sea (M,d) métrico completo

si $M = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$ con $A_j \subset M$ cerrado

ent al menos un A_j contiene una bola abierta

teo (Aplicación abierta). Sean X, Y Banach $T \in B(X,Y)$ sobre. Sea

$$L = \{ Tx : x \in X \text{ con } \|x\| \leq 1 \}$$

(a) $\exists r > 0 \,/\, \{ y \in Y : \|y\| \leq r \} \subseteq \overline{L}$

(b) $\{ y \in Y : \|y\| \leq \frac{r}{2} \} \subseteq L$

(c) Si además T inyectiva ent T es inversible o sea $T(X,X)$ biy

$\Rightarrow T^{-1}$ es continua

(Teo de la inversa continua)

Obs: Si X o Y no son Banach, el teo en gral que es incierto. Tomamos $S \subseteq \ell^\infty$ el subesp. de suc. que tienen a lo sumo finitos términos no nulos y sea $T: S \to T(S)$

Como $T(x_1, x_2, \dots) = (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots)$ q' es lineal, acotado, $\|Tx\| \leq \|x\|$ y biyectivo,

$T^{-1}x = (x_1, 2x_2, 3x_3, \dots)$ q' no es acotado

Tomamos $I: (C[0,1], \| \|_\infty) \to (C[0,1], \| \|_1)$.

$\Rightarrow$ I es biyectiva y cont. pues

$$\|I\| = \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} \|f\|_1 = \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} \int_0^1 |f| \leqslant \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} \|f\|_\infty = 1.$$

Para ver que I^{-1} no es continua, consid. la suc. $\{f_n\}$ de funciones lineales a trozos cuyos graf. unen los puntos $(0, 2n)$, $(\frac{1}{n}, 0)$, $(1, 0)$.

Notar que $\|f_n\|=1 \ \forall n \Rightarrow \|T^{-1}\| = \sup_{\|f\|_1 \le 1} \|f\|_\infty \geq \|f_n\|_\infty = 2n \ \forall n$

$\Rightarrow T^{-1}$ no es acotada

<u>Dem</u>: a) Como T es sobre, $\forall y \in Y \ \exists x \in X : Tx = y$

$\Rightarrow y \in \|x\| L$ y así $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} n\overline{L}$ $\Rightarrow$ por ~~teo~~ de Baire

$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $n_0 \overline{L}$ cont. una bola ab. $\Rightarrow \overline{L}$ cont. una bola ab. $\Rightarrow \exists p \in Y, r > 0$ tq $p + B_0(r) \subseteq \overline{L}$.

Sea ahora $y \in B_0(r) \Rightarrow p+y, p-y \in \overline{L} \Rightarrow y-p \in \overline{L}$.

Luego, $\overline{L}$ convexo (ej) $\Rightarrow$ la combinación convexa $y = \frac{1}{2}(p+y$ $+(y-p)) \in \overline{L}$

$\Rightarrow B_0(r) \subseteq \overline{L} \Rightarrow \overline{B_0(r)} \subseteq \overline{L}$ listo b) con $r = r$.

2) Sea $y \in \overline{B_0(\frac{r}{2})}$. Como $\|2y\| \le r$ y $B_0(r) \subseteq \overline{L}$, $\exists w_1 \in L$ tq $\|2y - w_1\| < \frac{r}{2}$. Ahora, $2(2y - w_1) \in \overline{B_0(r)} \subseteq \overline{L}$

$\Rightarrow \exists w_2 \in L$ tq $\|2^2 y - 2w_1 - w_2\| < \frac{r}{2}$. Siguiendo así,

$\exists \{w_n\} \subseteq L$ tq $\frac{r}{2} > \|2^n y - 2^{n-1} w_1 - 2^{n-2} w_2 - \cdots - w_n\|$

$$= 2^n \left\| y - \left(\frac{w_1}{2} + \frac{w_2}{2^2} + \dots + \frac{w_n}{2^n} \right) \right\| \Rightarrow \left\| y - \sum_{j=1}^{n} 2^{-j} w_j \right\| < 2^{-n-1} r$$

$$\Rightarrow y = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} w_j .$$

Además, $w_n \in L \Rightarrow \exists\, x_n$ con $\|x_n\| \le 1$ tq $Tx_n = w_n$.

Como $\sum_{j=1}^{\infty} \|2^{-j} x_j\| \le \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} = 1 \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} x_j =: x \in X$

(X Banach). Luego

$Tx = T\left(\sum 2^{-j} x_j\right) = \sum 2^{-j} T x_j = \sum 2^{-j} w_j = y$ o sea

$y \in L$ /

3) Si T es biy $\Rightarrow \exists\, T^{-1}: Y \to X$ con T^{-1} lineal

, $T \circ T^{-1} = id_Y$, $T^{-1}T = I_X$.

Veamos que T^{-1} es continua. Sea $y \in Y$ con $\|y\| \le 1$. Sea

$w = \frac{ry}{2}$. Como $\|w\| \le \frac{r}{2}$, por b) $\exists\, x$ con $\|x\| \le 1$ tq $w = Tx$.

Luego $y = T\left(\frac{2x}{r}\right)$ y ent. $\|T^{-1}y\| = \left\|\frac{2x}{r}\right\| \le \frac{2}{r}$.

/