Objetivos

- Aprender el Principio de Inducción (y sus variantes) y su uso en la demostración de familias numerables de afirmaciones.
- Familiarizarse con la notación de subíndices, sucesiones, sucesiones recursivas, sumatoria, productoria y aprender a manipularlos.

Ejercicios

1) Decir cuáles de los siguientes conjuntos X son inductivos. Justificar.

(a) $X = \mathbb{N} \cup \{\frac{1}{2}\}$.
(b) $X \subseteq \mathbb{N}$, $X \neq \mathbb{N}$ y X infinito.
(c) $X \subseteq \mathbb{N}$, $X \neq \mathbb{N}$, X infinito con $1 \in X$.
(d) $X = \{1\} \cup \{2\} \cup \{x \in \mathbb{R} : x \geq 3\}$.

2) Probar las siguientes afirmaciones usando inducción en n:

(a) $2n - 1 \leq n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$ (b) $n^2 \leq 2^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n > 3$ (c) $3^n \geq 1 + 2^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

3) Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ subconjuntos de un conjunto referencial $\mathcal{U}$. Probar por inducción que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale $(A_1 \cup \cdots \cup A_n)^c = A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_n^c$. (Para $n = 3$ esto es el Ejercicio 5 del Práctico 1).

4) . Dado un número natural m fijo, probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ y $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple que

(a) $x^n \cdot x^m = x^{n+m}$ (b) $(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n$ (c) $(x^m)^n = x^{n \cdot m}$

5) Analizar la validez de las siguientes afirmaciones, para n, $k \in \mathbb{N}$ (no es necesario hacer inducción):

(a) $(2^{2^n})^{2^k} = 2^{2^{n+k}}$
(b) $(2^n)^2 = 4^n$
(c) $\dfrac{(2n)!}{2! \cdot (2n-2)!} = \dfrac{2 \cdot n!}{2! \cdot (n-2)!} + n^2$

6) Calcular/transformar en una expresión equivalente con menos términos (no es necesario hacer inducción):

(a) $2^5 - 2^4$ (b) $2^{n+1} - 2^n$ (c) $(2^2)^n + (2^n)^2$ (d) $(2^{2^n}+1)(2^{2^n}-1)$

7) Calcular

(a) $\displaystyle\sum_{r=0}^{4} r^2$ (b) $\displaystyle\sum_{k=-3}^{-1} \frac{1}{k(k+4)}$ (c) $\displaystyle\prod_{n=2}^{10} \frac{n}{n-1}$ (d) $\dfrac{6!}{2! \cdot (6-2)!}$

8) Sea $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$a_n = (-1)^n \frac{n}{2n+1} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Escribir explícitamente los términos de la sucesión para $n = 1, 2, 3, 99, 100, 2k+1$ donde k denota un número natural.

9) Demostrar por inducción que las siguientes igualdades se verifican para todo $n \in \mathbb{N}$:

(a) $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$.

(b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

(c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (2k+1) = (n+1)^2$.

(d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

(e) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}, \quad (a \in \mathbb{R},\ a \neq 0,\ 1)$.

(f) $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \frac{i+1}{i} = n+1$.

(g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$.

(h) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c a_k = c \sum_{k=1}^{n} a_k$: c es constante.

10) Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por recurrencia de la siguiente manera

$$u_1 = 3, \quad u_2 = 5 \quad \text{y} \quad u_n = 3u_{n-1} - 2u_{n-2} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N} \text{ con } n \geq 3.$$

Escribir explícitamente los primeros 10 términos de la sucesión y probar que $u_n = 2^n + 1$.

11) Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por recurrencia de la siguiente manera

$$a_1 = 1 \quad \text{y} \quad a_{n+1} = (\sqrt{a}_n - (n+1))^2 \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Escribir explícitamente los primeros 10 términos de la sucesión y probar que

$$a_n = \begin{cases} (\frac{n+1}{2})^2 & \text{si } n \text{ es impar,} \\ (\frac{n}{2})^2 & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

12) La *sucesión de Fibonacci* se define recursivamente de la siguiente manera:

$$u_1 = 1, \quad u_2 = 1, \quad u_{n+1} = u_n + u_{n-1},\ n \geq 2.$$

Los primeros términos de esta sucesión son: $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$
Demostrar por inducción que el término general de esta sucesión se puede calcular como:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

(*Ayuda:* En el paso inductivo usar que $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ son las raíces de la ecuación cuadrática $x^2 - x - 1 = 0$)

Observación. *Al número* $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ *se lo conoce como "número de oro" o "proporción áurea".*

13) Imaginemos la siguiente situación. A un salón vacío ingresan n personas, una por vez. Cada vez que ingresa una persona, saluda con un apretón de manos a las personas que ya se encontraban dentro. Llamemos a_n a la cantidad acumulada de apretones de mano que se dieron cuando la n-ésima persona terminó de saludar.

(a) ¿Cuántos nuevos apretones de mano se efectúan cuando entra al salón una persona más?

(b) Expresar a_{n+1} en términos de a_n.

(c) Deducir una fórmula para a_n y demostrarla por inducción.

14) Hallar una fórmula para el término general de las sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definidas a continuación y probar su validez:

(a) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 1 + \sum_{i=1}^{n} i a_i, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

15) Probar las siguientes afirmaciones usando inducción en n:

(a) Si $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, entonces $\sum_{k=0}^{n} a_k^2 \leq \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k|\right)^2$.

(b) Los ángulos interiores de todo polígono convexo de n lados suman $(n-2)\pi$.

(c) Todo polígono convexo de n lados tiene $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonales.

Ejercicios de repaso

Si ya hizo los ejercicios anteriores continue con la siguiente guía. Los ejercicios que siguen son similares y le pueden servir para practicar antes de los exámenes.

16) Sean $A_1, A_2, \dots, A_n$ subconjuntos de un conjunto referencial $\mathcal{U}$. Probar por inducción que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale $(A_1 \cap \cdots \cap A_n)^c = A_1^c \cup A_2^c \cup \cdots \cup A_n^c$.

17) Probar las siguientes afirmaciones usando inducción en n:

(a) $n^3 \leq 3^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

(b) $n^4 \leq 4^n$, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4$.

(c) Si $a \in \mathbb{R}$ y $a \geq -1$, entonces $(1+a)^n \geq 1 + n \cdot a$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

18) Sea $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por recurrencia de la siguiente manera

$$u_1 = 5, \quad u_2 = 13 \quad \text{y} \quad u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Probar que $u_n = 2^n + 3^n$.

19) Las siguientes proposiciones no son válidas para todo $n \in \mathbb{N}$. Intentar, no obstante, demostrarlas por inducción e indicar cuál de los dos pasos del principio de inducción falla:

(a) $n = n^2$ (b) $3^n = 3^{n+2}$ (c) $n = n + 1$. (d) $3^{3n} = 3^{n+2}$.

20) Definimos la *media aritmética* de n números reales positivos $a_1, a_2, \cdots, a_n$ como

$$MA_n(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

y la *media geométrica* como

$$MG_n(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}.$$

El objetivo de este ejercicio es demostrar la desigualdad aritmético-geométrica que afirma que

$$MG_n(a_1, a_2, \cdots, a_n) \leq MA_n(a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

y la igualdad sólo se da cuando $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

(a) Probarla para $n = 2$, es decir, $\sqrt{a_1 a_2} \leq \frac{a_1+a_2}{2}$ y si $\sqrt{a_1 a_2} = \frac{a_1+a_2}{2}$ entonces $a_1 = a_2$.

(b) Probar que si vale para n también vale para $2n$.

(c) Probar que $MA_{n-1}(a_1, \cdots, a_{n-1}) = MA_n(a_1, \cdots, a_{n-1}, \frac{a_1+\cdots+a_{n-1}}{n-1})$, para todo $n \geq 2$.

(d) Probar que si vale para n también vale para $n-1$.

(e) Concluir que vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

21) Hallar una fórmula para el término general de las sucesiones $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definidas a continuación y probar su validez:

(a) $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}(1 - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i), \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(b) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i + (n+1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.