Examen de Análisis Matemático II - 2021 - 2/7/2021

Parte teórica

1. (11 puntos) Enunciar con precisión el segundo criterio de comparación para integrales impropias y demostrarlo.

2. (3 puntos, 9 puntos) a) Definir con precisión que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sea absolutamente convergente.

   b) Enunciar y demostrar el teorema que relaciona la convergencia con la convergencia absoluta de una serie numérica.

3. (7 puntos) Sea $a > 0$, $a \neq 1$. Definir con precisión la función $\log_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ y mostrar que
$$\log_a x = \frac{1}{\log a} \log x.$$

Parte práctica

4. (6 puntos) Mostrar que para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple que
$$\operatorname{senh}'(x) = \cosh x \qquad \text{y} \qquad \left(\operatorname{senh}^{-1}\right)'(x) = 1/\sqrt{x^2+1}.$$

5. (8 puntos, 8 puntos) Calcular las siguentes integrales.
$$\text{a)} \int \frac{x^2 - 3x + 4}{x^3 + 4x}\, dx, \qquad \text{b)} \int \frac{1}{1 + \sqrt[3]{x}}\, dx.$$

6. (8 puntos, 8 puntos) Calcular el valor del límite y el valor de la integral impropia.
$$\text{a)} \lim_{x \to 1} \frac{4^{\log x} - x^2}{\log x}, \qquad \text{b)} \int_1^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\, dx.$$

7. (6 puntos) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función cuyo polinomio de Taylor de orden 5 alrededor de $a = 0$ es $q(x) = 3x - 7x^5$ y sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = (f(x))^2$. Hallar el polinomio de Taylor de g de orden 5 alrededor de $a = 0$ y calcular $g''(0)$.

8. (4 puntos, 11 puntos) Probar que el radio de convergencia de la siguiente serie de potencias es igual a 1 y hallar el intervalo de convergencia .
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}\, x^n.$$

9. (7 puntos) Sea g continua y positiva. Sea
$$H(x) = \int_0^{x^2} \left(\log(g(t)) - \frac{1}{3 + t^4} \right) dt.$$
   Hallar el valor $g(1)$ sabiendo que $H'(1) = \frac{3}{2}$.

10. (4 puntos) Sea $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Encontrar particiones P y Q de $[0, 2]$, con tres y cuatro puntos, respectivamente, tales que $s(f, P) > s(f, Q)$.