¿ ; ?)¿[¿ 27/9/24

Si tenemos $|G|=p$, p primo y tomamos $e \neq x \in G$, como $|x| \mid p$ y p primo entonces $|x|=p$, luego $G=\langle x\rangle$ y $G \cong \mathbb{Z}_p$

Por otro lado consideremos $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$, $p(x,y)=(px,py)=0 \Rightarrow |(x,y)| \mid p$

$\therefore |(x,y)| \neq p^2 \Rightarrow \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$ no es cíclico

Proposición: sea p primo, $|G|=p^2 \Rightarrow G$ es abeliano

↳ p/ esto ver que $Z(G)=G$

Demostración:

Por el corolario de la ecuación de clases:

$$p^2=|G|=|Z(G)|+\sum_{i=1}^{r}[G:G_i], \quad G_i \subsetneq G$$

Como $|G|=|G_i|[G:G_i]$, $|G_i|<|G|$ (pues $G_i \subsetneq G$)

$\therefore p \mid [G:G_i] \ \forall i$

luego $p \mid |Z(G)|$ y $Z(G) \neq \{e\}$

$|Z(G)| \mid |G|=p^2 \Rightarrow |Z(G)|=p$ ó p^2

- Si $|Z(G)|=p^2 \Rightarrow Z(G)=G$ y así G es abeliano
- Si $|Z(G)|=p$:

  Recordemos $Z(G) \trianglelefteq G \Rightarrow$ podemos mirar el cociente $G/Z(G)$ y tenemos $\left|G/Z(p)\right|=p$

La proposición se sigue de la siguiente observación:

$$G/Z(G) \text{ cíclico} \Rightarrow G \text{ abeliano}$$

En efecto: $G/Z(G)=\langle aZ(G)\rangle$

Dado $x\in G$, $xZ(G)=(aZ(G))^n=a^nZ(G) \Leftrightarrow x^{-1}a^n=z_1\in Z(G)$

$\Leftrightarrow x=a^nt_1$, $t_1=z_1^{-1}\in Z(G)$

Si $y\in G$ es tal que $y=a^mt_2$, $t_2\in Z(G)$

Tenemos: $xy=a^nt_1a^mt_2 \underset{t_1\in Z(G)}{=} a^na^mt_1t_2 \underset{\text{potencias conmutan entre ellas}}{=} a^m\underbrace{a^nt_1t_2}_{} \underset{t_2\in Z(G)}{=} a^mt_2a^nt_1=yx$

$\Rightarrow G$ es abeliano $\Rightarrow |Z(G)|=p^2$

pero $|Z(G)|=p \rightarrow$ abs! $\square$

Grupos abelianos de orden p^2 (no isomorfos entre sí)

$\mathbb{Z}_{p^2}$ y $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$ → son sólo estos
es consecuencia de un teo que veremos más adelante

Definición: un grupo G se dice un p-grupo, p primo si $\forall x \in G, \exists n \in \mathbb{N}$ tal que $x^{p^n} = e$

Es decir, todo elemento de G tiene orden una potencia de p

Observación: sigue del Teorema de Cauchy que un p-grupo finito tiene orden potencia de p
↳ clase pasada

$|G| = p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$, p_i primos, si $n_i > 0$ ie $p_i \mid |G| \Rightarrow \exists x \in G \; |x| = p_i$
aplico Cauchy a cada nº primo

queremos ver que sólo puede haber un primo en esta factorización

$\Rightarrow p_i = p^j \Rightarrow j = 1$ y $p_i = p$

G es p-grupo

→ $\exists$ grupos de orden p^3 tales que no son abelianos (en general p^n, $n \geq 3$)

- Si p es impar, todos sus elementos son de orden $|x| \mid p$

Observación: si $|G| = p^3$, G no abeliano $\Rightarrow G \times \underbrace{\mathbb{Z}_p \times \dots \times \mathbb{Z}_p}_{k}$ no abeliano

$|G| = p^{k+3}$

Proposición: sea G un p-grupo finito no trivial $\Rightarrow Z(G) \neq \{e\}$ (no trivial)

Demostración:

Por la ecuación de clases: $p^n = |G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^{k} [G:G_i]$, $G_i \lneq G$ ($n \geq 0$)

Como $G_i \lneq G \Leftrightarrow [G:G_i] > 1 \Rightarrow [G:G_i] = p^{n_i}$, $n_i > 0$

pues $[G:G_i] \mid p^n$

$\therefore p \mid \sum_{i=1}^{k} [G:G_i] \Rightarrow p \mid |Z(G)|$

En particular $|Z(G)| \neq 1$

□

Definición: sea $H \leq G$, el **normalizador** de H en G es el subgrupo

$$N_G(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$$

Observación: $N_G(H)$ es el estabilizador de $H \in \{\text{subgrupos de } G\}$ con respecto a la acción de G por conjugación

Recordemos: dada la acción $G \times X \longrightarrow X$, $x \in X$

la órbita es $G \cdot x = \{gx \mid g \in G\}$

El estabilizador es $G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$

$\boxed{H \trianglelefteq N_G(H)}$

$N_G(H)$ es el mayor subgrupo de G que contiene a H como subgrupo normal

En particular $H \trianglelefteq G \iff N_G(H) = G$

Lema: sean p primo y G un p-grupo finito. Si $H \lneq G \Rightarrow H \lneq N_G(H)$

($\therefore$ Si $H = N_G(H) \Rightarrow H = G$)

Demostración:

Tenemos $|G| = p^n$, $n > 0$. Haremos inducción fuerte sobre n

- $n = 1$) $|G| = p$ y si $H \lneq G \Rightarrow H = \{e\} \Rightarrow N_G(H) = G$ y vale el enunciado
- Supongamos $n > 1$ y el resultado vale $\forall\ 1 \leq k \leq n$

Como $H \lneq G$, tomemos $x \in G$ tal que $x \notin H$

Si $x \in Z(G) \Rightarrow xHx^{-1} = H$ y $\therefore x \in N_G(H)$ el centro está en el normalizad siempre

luego $H \lneq N_G(H)$ en este caso

En particular, podemos suponer que $Z(G) \leq H$

Miremos $H/Z(G) \lneq \underbrace{G/Z(G)}_{\substack{\text{también es un } p\text{-grupo} \\ \text{de orden } p^r \text{ con } r < n}}$ pues $H \lneq G$ $\rightarrow$ pues $Z(G) \neq \{e\}$

Por hipótesis inductiva, $H/Z(G) \lneq N_{G/Z(G)}(H/Z(G))$

Sea $a \in G$ tal que $aZ(G) \in N_{G/Z(G)}(H/Z(G)) - H/Z(G)$

En particular $a \notin H$ pues $a \notin H/Z(G)$

Si $h \in H$, $\overline{aha^{-1}} = \bar{a}\,\underset{\underset{H/Z(G)}{\cap}}{\bar{h}}\,\bar{a}^{-1} \in H/Z(G)$ $\Rightarrow$ $\overline{aha^{-1}} = \bar{t}$, $t \in H$

$\Rightarrow aha^{-1} \in \underset{\underset{H}{\cap}}{t}\, \underset{\underset{H}{\cap}}{Z(G)} \subseteq H$

Luego $aHa^{-1} \subseteq H$ y $\underset{\text{por tener el mismo orden finito}}{aHa^{-1} = H}$, es decir, $a \in N_G(H)$ y así $\underset{\text{pues } a \notin H}{H \subsetneq N_G(H)}$

$\square$

Definición: un grupo se llama simple si no contiene subgrupos normales distintos de $\{e\}$ y G → los únicos son ellos dos

Corolario: si $|G| = p^n$ y $H \leq G$, $[G:H] = p$ $\Rightarrow H \trianglelefteq G$

En particular, el único p-grupo finito simple es $\mathbb{Z}_p$

Demostración:

Por la proposición anterior $H \subsetneq N_G(H) \leq G$

$\Rightarrow \underbrace{[G:H]}_{p} = \underbrace{[G:N_G(H)]}_{1} \underbrace{[N_G(H):H]}_{>1}$ pues de lo contrario tendríamos $H = N_G(H)$

$\Rightarrow [N_G(H):H] = p$ y $G = N_G(H)$ $\Rightarrow$ $H \trianglelefteq G$

$\square$