Cuando T no es diag

$$T = D + N$$

¿Como estudio N? Quiero encontrar una forma elemental para N

⇑

Jordan

⇑

forma racional

<u>Repaso</u> vector cíclico V-ev $T: V \to V$

$v \in V$ es vector cíclico si $\langle v, Tv, \ldots \rangle = V$

como encuentro vectores LI en ⤴

Rta $\{v, Tv, \ldots T^{n-1} v\}$ es base

con $n = \dim V$

Cuando $\exists$ v cíclico $\iff m_T = P_T$

i) En gral cualquier $v \in V$ genera un subespacio cíclico $Z(T,v) = \langle v, T^2 v, \dots \rangle$

¿cuál es la dim de $Z(T,v)$?

1 - Busco anulador $m_{v,T}$ (= divisor más chico de m_T que anula a v)

2 - $\dim Z(v,T) = \operatorname{gr} m_{v,T} = k$

3 - $\underbrace{\{v, Tv, \dots, T^{k-1}(v)\}}_{B}$ es base de $Z(v,T)$

<u>obs</u> $W = Z(v,T)$ es T-inv

y $P_{T|_W} = m_{T|_W} = m_{v,T}$

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & & & \boxed{\begin{matrix} -a_0 \\ \vdots \\ \\ -a_{k-1} \end{matrix}} \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & & 1 & \end{pmatrix}$$

Si $m_{v,T} = a_0 + a_1 X + \dots + X^k$

$$0 = m_{v,T}(T) = a_0 + a_1 T + \dots + T^k$$

$$\Rightarrow T^k = -a_0 - a_1 T - \dots - a_{k-1} T^{k-1}$$

$$T^k v = -a_0 - a_1 Tv - \dots - a_{k-1} T^{k-1} v$$

obs Si T nilpotente (de gr k)

$$X^k = 0$$

$$(a_0 = \dots \quad a_{k-1} = 0)$$

$T: U \to U \quad v_1, \dots v_r \in U$ y

pols $p_1 \dots p_r$ tq

·) $U = Z(v_1, T) \oplus \dots \oplus Z(v_r, T)$

·) $p_i = m_{v_i, T}$

·) $p_1 = m_T$

·) $p_r \mid p_{r-1} \mid p_{r-2} \dots \mid p_1$

·) $P_T = p_1 \dots p_r$

Además $p_1 \dots p_n$ son únicos
(dependen solo de T y además determinan T)

·) Estos pols se llaman factores invariantes

Si T nilpotente

$$p_1 = X^{k_1} \quad p_2 = X^{k_2} \quad \dots \quad p_r = X^{k_r}$$

$$k_r \leq k_{r-1} \dots \leq k_1$$

<u>obs</u> Si $B = \{v_1, Tv_1, \dots, T^{k_1-1}v_1,$
$v_2, Tv_2, \dots, T^{k_2-1}v_2,$
$\vdots$
$v_r, Tv_r, \dots, T^{k_r-1}v_r\}$

$$\Rightarrow [T]_B = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & & \square \\ 1 & 0 & \\ & 1 & \end{bmatrix} & 0 & 0 \\ 0 & \begin{bmatrix} 0 & & \square \\ 1 & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & \begin{bmatrix} 0 & & \square \\ 1 & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} \end{pmatrix} \ddots$$

matriz compañera de P_1
$T|_{Z(v_1,T)}$

matriz compañera de P_2

¿Cómo encuentro descomposición cíclica?

<u>Plan</u> ① Encontrar primero $P_1 \dots P_r$

② Busco v_1 / $m_{v_1,T} = P_1$

Busco v_2 / $m_{v_2,T} = P_2$

y $Z(v_1,T) \cap Z(v_2,T)$

Busco $v_3 / m_{v_3, T} = p_3$

tq $\left(Z(v_1, T) \oplus Z(v_2, T) \right) \cap Z(v_3, T) = 0$

⋮

etc

opción 1

¿Como encuentro $p_1 \ldots p_r$? **Algoritmo**

$[T]_c = A$

1- escribir $\det(xI - A) = P_T$

aplico operaciones elementales por filas y columnas

Super paréntesis $xI - A$ es una matriz con entradas en anillo de pols $\Rightarrow$ puedo dividir solo por unidades de anillos que son los escalares

$\Rightarrow$ es posible llegar a una matriz diagonal usando estas operaciones?

de esta pinta $\begin{pmatrix} p_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & p_n & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$

con $P_r | P_{r-1} | \dots | P_1$

si estamos en caso nilpotente siempre es fácil el algo, si no, no

opción 2 al tanteo

---

ejemplo

ej 8) guía 2

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -4 & -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} P_A &= (X-1)^3 \\ M_A &= (X-1)^2 \end{aligned}$$

quiero $P_1, P_2 \dots$ etc

$\Rightarrow M_A = (X-1)^2 = P_1$

$\Rightarrow P_2 = (X-1) \qquad \left(P_2 | P_1 \ \wedge \ P_1 P_2 = P_T \right)$

para quiero $v_1 \,/\, m_{v_1, T} = (X-1)^2$

o análogo $\dim Z(v_1, t) = 2 = gr\, P_1$

o " $\dim \{v_1, Tv_1\} = 2$

luego v_1 y Tv_1 serán Li

$\Rightarrow$ elijo e_1 (cualquiera de la base canónica sirve)

$v_1 = e_1$

$Te_1 = 3e_1 - e_2 + 2e_3$ li con e_1

busco v_2 / $v_2 \notin \langle v_1, Tv_1 \rangle$

tq $m_{v_2,T} = (x-1)$

$\Rightarrow$ $v_2 \in Nu(T-I)$

es decir v_2 avec

$Nu(T-I) = \langle (1,0,\frac{1}{2})(0,1,-1) \rangle$

Ahora hay que elegir uno que sirva

$v_2 = (0,1,-1)$

y $v_2 \notin \langle v_1, Tv_1 \rangle$

$\Rightarrow$ tomo $B = \{v_1, Tv_1, v_2\}$

$$[T]_B = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

→ matriz compañera de $(X-1)^2$

→ matriz compañera $(X-1)$

⇑

forma racional

Jordan

(1) descomposición primaria

$$A \sim \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{A_n} \end{pmatrix}$$