Def $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ e.p y X v.a en $(\Omega, \mathcal{A})$ se dice que X es v.a continua si

$$P(X = x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

<u>prop</u> Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ep X va en $(\Omega, \mathcal{A})$ luego

X es continua $\Leftrightarrow$ F_X es continua

<u>demo</u> $(\Rightarrow)$ X es continua quiero ver

$$\lim_{x \to x_0} F_X(x) = F_X(x_0) \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

Ya sabemos F_X es continua por derecha

$$\lim_{x \to x_0^+} F_X(x) = F_X(x_0)$$

tambien sabemos

$$\lim_{x \to x_0^-} F_X(x) = P(X < x_0)$$
$$= F_X(x_0) - P(X = x_0)$$

Como X continua $P(X=x_0)=0$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0^-} F_X(x) = F_X(x_0)$$

$$\therefore \lim_{x \to x_0} F_X(x) = F_X(x_0) \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

$(\Leftarrow)$ F_X es continua quiero ver $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ $P(X=x_0)=0$

$$(X = x_0) = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

donde $A_n = (x_0 - \frac{1}{n} < X \leq x_0 + \frac{1}{n})$

$$= \{\omega \in \Omega / x_0 - \tfrac{1}{n} < X(\omega) \leq x_0 + \tfrac{1}{n}\}$$

luego $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ es decreciente de sucesos

$$P(X=x_0) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} P(A_n)$$

$$= \lim_{n \to \infty} P(x_0 - \tfrac{1}{n} < X \leq x_0 + \tfrac{1}{n})$$

$$= \lim_{n\to\infty} F_X(x_0+\tfrac{1}{n}) - F_X(x_0-\tfrac{1}{n})$$

$$= F_X(x_0) - F_X(x_0) = 0$$

$\forall x_0 \in \mathbb{R}$

$\blacksquare$

obs

Si X es v.a.c $a,b \in \mathbb{R}$ con $a<b$ se tiene

$$P(a< X\le b) = P(a\le X\le b)$$
$$= P(a<X<b)$$
$$= P(a\le X<b)$$

def Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que

1) $f(x)\geq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1$

$\Rightarrow$ se dice que f es una función densidad def Sea X v.a con función acumulada F_X y f función densidad tal que

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Entonces se dice que X es v.a absolutamente continua o equivalentemente F_X es absolutamente continua

obs Si X es v.a absolutamente cont $\forall a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$

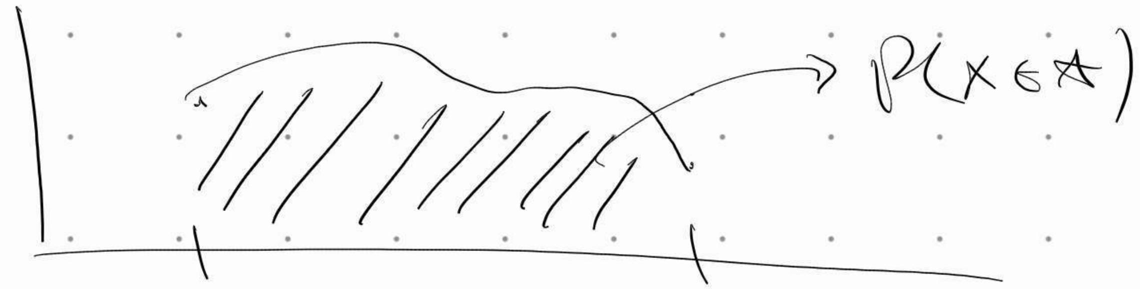
$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(t)\,dt$$

$$P(a < X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b)$$

Además si A es unión numerable de intervalos abiertos en $\mathbb{R}$

$$P(X \in A) = \int_A f(t)\,dt$$

Si $A=(a,b) \Rightarrow P(X\in A)=\int_a^b f(t)\,dt$



Prop. Sea F_X función de distribución acumulada de X v.a tal que

a) F_X es continua en $\mathbb{R}$

b) F_X es derivable salvo en finitos puntos

c) F_X' derivable salvo en finitos puntos

$\Rightarrow$ F_X es absolutamente continua y

$$f(x)=\begin{cases} F_X'(x) & \forall x\in D \\ 0 & c.c \end{cases}$$

es función densidad para X donde D es subconjunto de $\mathbb{R}$ en donde existe y es continua F_X'

demo Usando 1er teo fund del cálculo

ejemplo Sea X v.a con función de distribución acumulada F_X absol cont

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

donde f_X es densidad asociada y

$\Rightarrow f_X$ es continua salvo en finitos puntos

Sea $Y = X^2$

1) Cual es la distr acumulada de Y F_Y!

2) ¿Es Y absol continua!

1) $F_Y(y) = P(Y \leq y)$

·) Si $y < 0$ $F_Y(y) = 0$ pues $X^2 \geq 0$

·) Si $y \geq 0$

$$F_Y(y) = P(X^2 \leq y) = P(|X| = \sqrt{y})$$

$$= P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y})$$

$$= F_X(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y})$$

$$\Rightarrow F_Y(y) = \begin{cases} F_X(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y}) & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$$

·) F_Y continua en $\mathbb{R}$

·) Como f_X es continua salvo en finitos puntos se (F_X absol cont)

$$y\ F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)\,dt \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

por lo teo fund del cálculo

F_X derivable excepto posiblemente en finitos puntos

$A = \{y_1, \dots, y_n\}$ y $F_X'(x) = f_X(x)$

excepto posiblemente en A

•) Si $y < 0$ $F_Y'(y) = 0$
$\Rightarrow$ F_Y es derivable

•) Si $y \geq 0$ $F_Y(y) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$

$\forall \sqrt{y} \notin A$ $F_Y'(y) = F_X'(\sqrt{y}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}$
$- F_X'(-\sqrt{y})\left(-\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)$

$$= \frac{F_X'(\sqrt{y}) + F_X'(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}$$

$$= \frac{f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}$$

$$F_Y'(y) = \begin{cases} \dfrac{f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} & y \in \mathbb{R}_{>0} \cap A^c \\ 0 & cc \end{cases}$$

$\therefore$ F_Y es derivable excepto posiblemente en finitos puntos

•) Como f_X es continua salvo en finitos

$\Rightarrow$ F_Y' es continua salvo en finitos

Luego por prop. anterior F_Y es absol continua y

$$f_Y(x) = \begin{cases} F_Y'(y) & y \in \mathbb{R}_{<0} \cup (\mathbb{R}_{>0} \cap A^c) \\ 0 & cc \end{cases}$$

es densidad de Y

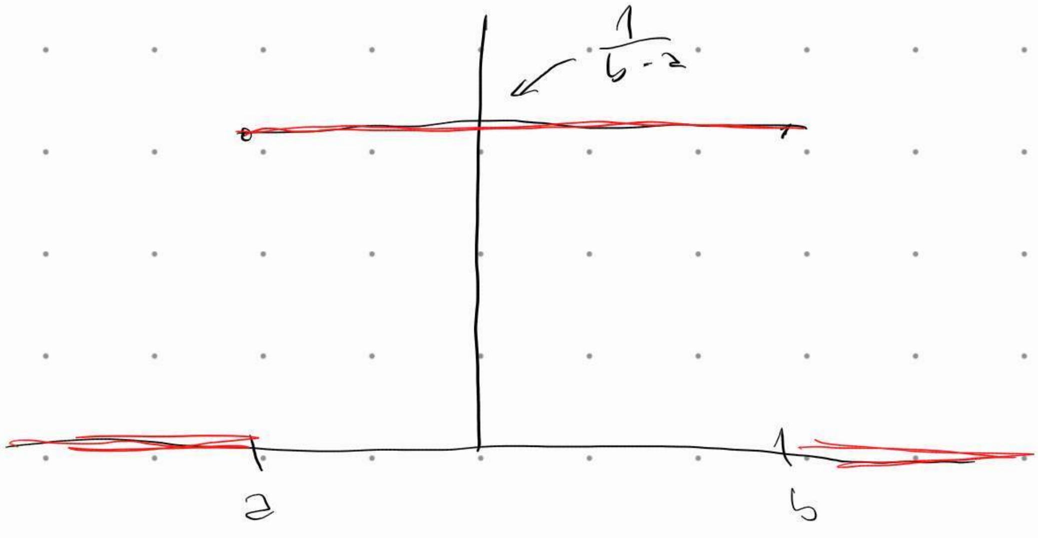
Ejemplo de variable aleatoria continua:

Variable aleatoria uniforme

<u>def</u> Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ se dice que X v.a uniforme si su func densidad es

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in (a,b) \\ 0 & \text{cc} \end{cases}$$

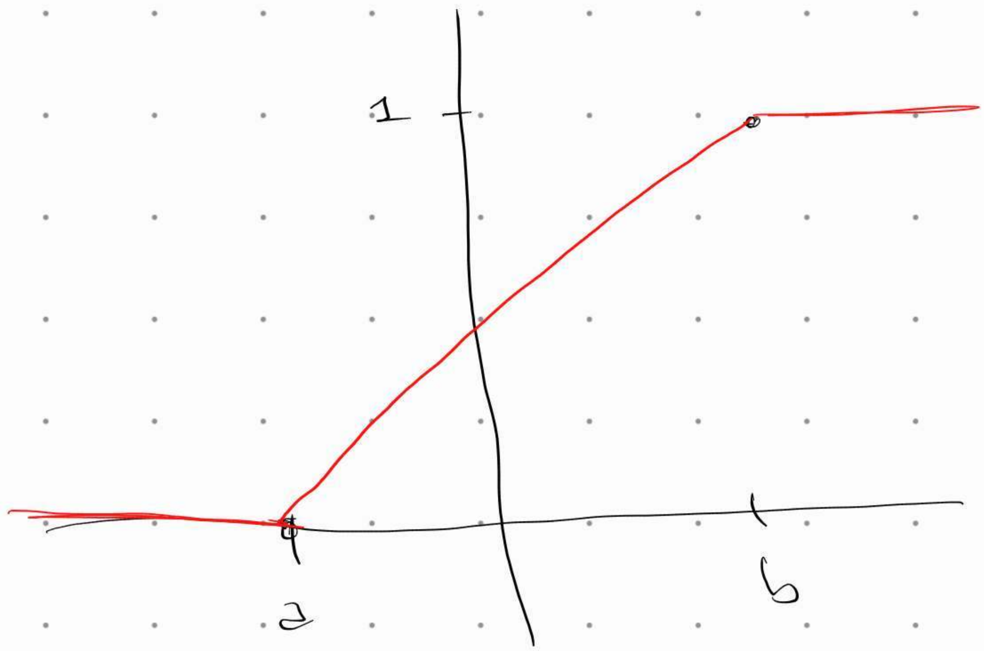
notación $X \sim U(a,b)$



la funcion de distr acumulada es

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a \leq x < b \\ 1 & b \leq x \end{cases}$$

sale de integrar f_X y pedir continuidad



caso particular $X \sim U(0,1)$