Cálculo de probabilidades en espacios equiprobables

Problema: Se reparte al azar un mazo de n cartas $1, 2, 3, \ldots, n,$ de a una a la vez. ¿Cuál es la probabilidad de que haya alguna coincidencia entre el número de la carta y la posición en que quedó ubicada?

ubicación de la carta i ← $[x_i$ ← nº de carta

$$\Omega = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \Big/ \begin{matrix} x_i \neq x_j \text{ si } i \neq j \\ x_i, x_j \in \{1, 2, \ldots n\} \end{matrix} \right\}$$

Cualquier n - upla tiene probabilidad $\frac{1}{n!}$ de ocurrir $\left(\#(\Omega) = n!\right)$

A: "Ocurre alguna coincidencia entre el nº de la carta y la posición que ocupa la carta"

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

donde A_i: "Ocurre coincidencia entre la carta i y el lugar i "

Notemos que los eventos A_i no son disjuntos. Ejemplo con 4 cartas:

$$\begin{array}{l} \overset{x_1}{(1}, \overset{x_2}{2}, \overset{x_3}{4}, \overset{x_4}{3}) \in A_1 \ \text{(carta 1 en el lugar 1)} \\ \qquad\qquad\quad \in A_2 \ \text{(carta 2 en el lugar 2)} \end{array}$$

Queremos calcular $P(A)$

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} S_k, \text{ donde}$$

Fórmula para el cálculo de la probabilidad de la unión de n eventos

$$S_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k})$$

$A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}$ es el evento en el que hay coincidencia (nº de carta y lugar) en los lugares $i_1, i_2, i_3 \ldots i_k$. Del resto de las ubicaciones no decimos nada. Entonces:

$$P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) = \frac{(n-k)!}{n!}$$

Hay $(n-k)$ lugares que no tienen restricción (puede o no haber coincidencia)

Pero en la sumatoria $S_k = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k})$ que define a S_k hay $\binom{n}{k}$ sumandos con probabilidad $\frac{(n-k)!}{n!}$

Es decir: $S_k = \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{n!} = \frac{\cancel{n!}}{k!\cancel{(n-k)!}} \frac{\cancel{(n-k)!}}{\cancel{n!}} = \frac{1}{k!}$

Entonces:

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k!}$$

Notemos que $P(A)$ depende de n (nº de cartas)

¿Qué ocurre si n aumenta?

Sea el evento B: "No hay ninguna coincidencia"

entonces: $P_n = P(B) = 1 - P(A) = 1 - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k!}$

$$= 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}$$

$-(-1)^{n+1} = (-1)(-1)^n(-1)$

$= (-1)^2(-1)^n = (-1)^n$

Es el desarrollo de los $n+1$ primeros términos de la serie de Taylor de e^x alrededor del cero y evaluado en $x = -1$

Por lo tanto si n es grande $P_n = P(B)$ debería estar cerca de e^{-1}. Entonces:

$$P(A) = P(A,n) = 1 - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!} \approx 1 - e^{-1}$$

n grande

¿Será fuerte esa dependencia de n?

Por un lado: $1 - e^{-1} = 0.6321\ldots$ Por otro lado:

n	1	2	3	4	5	6
$P(A,n)$	1	0.5	0.6667	0.6250	0.6333	0.6319

Entonces a partir de $n=5$ $P(A,n)$ coincide con $1-e^{-1}$ hasta en el segundo decimal. La dependencia de n es débil

---

Problema: Dos mazos de cartas idénticos son barajados por separado y las cartas de cada uno de ellos son colocadas en filas enfrentadas:

Mazo 1: fila 1, Mazo 2: fila 2

¿Cuál es la probabilidad de que exista al menos una coincidencia (empate)?

$$\Omega = \left\{ (x_1, x_2 \cdots x_n\, x_{n+1}\, x_{n+2} \cdots x_{2n}) \middle/ \begin{array}{l} x_i \neq x_j,\ x_{n+i} \neq x_{n+j}\ \forall i \neq j \\ \text{con } i,j \in \{1,2,3,\ldots n\} \end{array} \right\}$$

$$\#(\Omega) = n!\, n! = (n!)^2$$

A: "hay alguna coincidencia"

A_k: "hay exactamente k coincidencias" $k = 1, 2 \dots$

$A_k \cap A_j = \emptyset$ si $k \neq j$.

Calculemos $P(A_k)$ pues $P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$

$$P(A_k) = \frac{\#(A_k)}{\#(\Omega)}$$

vale para una config. fija

$P_{(n-k)}$ Calculado en el problema anterior, ya que es la PROBABILIDAD de q' en las $(n-k)$ restantes NO haya coincidencias. Luego, multiplico por $(n-k)!$ para obtener nº de casos!

$$\#(A_k) = n! \binom{n}{k} \boxed{P_{(n-k)} (n-k)!}$$

fijo una configuración para el 1º mazo. hay $n!$ formas. (configuraciones)

fijo k lugares donde habrá coincidencias: hay $\binom{n}{k}$ posibilidades

es decir.
$$P(A_k) = \frac{\cancel{n!} \binom{n}{k} P_{(n-k)} (n-k)!}{\cancel{n!}\, n!}$$

$$= \frac{\frac{n!}{k!\,\cancel{(n-k)!}} P_{(n-k)} \cancel{(n-k)!}}{n!}$$

$$= \frac{\cancel{n!}}{\cancel{n!}\, k!} P_{(n-k)}$$

$$\boxed{P(A_k) = \frac{P_{(n-k)}}{k!}}$$

Probabilidad de exactamente k coincidencias

∴ la probabilidad de al menos una coincidencia está dada por:

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$

$$= \boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{P_{(n-k)}}{k!}}$$ donde:

Por lo hecho en el Problema anterior →

$$\sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j \frac{1}{j!} = P_{(n-k)}$$

Ejercicio: 8 pares de medias todos distintos entre sí son guardados desordenadamente y al azar de a dos en un armario. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar todos los pares bien ordenados? (8 coincidencias)

Problema (Nº de celdas o cajas vacías)

Se distribuyen al azar n bolas en m cajas. Se desea calcular:

a) La probabilidad de que exactamente k cajas estén vacías

b) La probabilidad de que al menos una caja esté vacía

$$\Omega = \left\{ (x_1, x_2 \dots x_n) \Big/ \begin{array}{c} x_i \in \{1, 2 \dots m\} \\ 1 \leq i \leq n \end{array} \right\}$$

$(x_1, x_2 \dots x_n)$ tq x_i indica nº de caja donde está la bola i

Ejemplo: 10 cajas y 4 bolas $(4, 10, 4, 1)$

- bola 4 en caja 1
- bola 3 en caja 4
- bola 2 en caja 10
- bola 1 en caja 4

$$\#(\Omega) = m^n$$

b) Calculemos la prob. de al menos 1 caja vacía.

A: "al menos 1 caja está vacía"

A_i: "la caja i está vacía"

$$P(A) = P\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+1} S_i \quad \text{con.}$$

los Ai no son disjuntos

$$S_i = \sum_{1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_i \leq m} P\left(A_{k_1} \cap \ldots \cap A_{k_i}\right)$$

$$P(\underbrace{A_{k_1} \cap \ldots \cap A_{k_i}}_{i \text{ cajas vacías.}}) = \frac{(m-i)^n}{m^n}$$

Además en Si hay $\binom{m}{i}$ sumandos i.e

$$S_i = \binom{m}{i} \frac{(m-i)^n}{m^n} \quad \therefore$$

$$\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+1} \binom{m}{i} \frac{(m-i)^n}{m^n}}$$

a) Y_k : "exact. k cajas vacías"

$$P(Y_k) = \binom{m}{k} \underbrace{P_k^*(m,n)}$$

Probabilidad de una combinación fija en la cual hay exact. k cajas vacías

$P_k^*(m,n) = ?$

es la prob. de exactamente las $(m-k)$ cajas restantes estén ocupadas. (para la configuración fija elegida)

Ahora apliquemos lo probado en b) ya que tenemos n bolas para ubicar en $(m-k)$ cajas y buscamos la probabilidad de alguna caja vacía:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{m-k} (-1)^{i+1} \binom{m-k}{i} \frac{(m-k-i)^n}{(m-k)^n}}$$

Probabilidad de que al ubicar n bolas en $(m-k)$ cajas, haya alguna vacía

Entonces: la probabilidad de ninguna de las $(m-k)$ vacías o la probab. de que las $(m-k)$ estén ocupadas es:

$$\underbrace{1 - \sum_{i=1}^{m-k} (-1)^{i+1} \binom{m-k}{i} \left(\frac{m-k-i}{m-k}\right)^n} = p_0(m-k, n)$$

Nota: esta prob. es para cualquier conjunto de $(m-k)$ cajas y n bolas; en particular para mi combinación

Si multiplico $P_0(m-k,n)$ por $(m-k)^n$ obtengo el nº total de combinaciones de $m-k$ cajas y n bolas con $(m-k)$ cajas todas ocupadas: $(m-k)^n P_0(m-k,n)$

O sea nº total de combinaciones con m cajas y n bolas en las cuales exactamente k cajas están vacías. (Ya repartí las n bolas en las $m-k$ cajas sin dejar ninguna caja vacía de estas $m-k$) $\therefore$

$$P(Y_k) = \binom{m}{k} \frac{(m-k)^n \, P_0(m-k,n)}{m^n}$$

con $$P_0(m-k,n) = 1 - \sum_{i=1}^{m-k} (-1)^{i+1} \binom{n}{i} \left(\frac{m-k-i}{m-k}\right)^n$$

$$\boxed{P_0(m-k,n) = \sum_{i=0}^{m-k} (-1)^i \binom{m-k}{i} \left(\frac{m-k-i}{m-k}\right)^n}$$

Ejercicio Una chica tiene un álbum de 100 figuritas para coleccionar. ¿Cuál es la probabilidad de que al cabo de un año le queden exactamente 20 lugares vacíos en el álbum?