Análisis Funcional I – 2024
Práctico 4

(1) Demostrar que las inclusiones $i : \ell^1 \to \ell^2$, $i : \ell^2 \to \ell^\infty$ e $i : \ell^p \to \ell^q$ para todo $1 \leq p \leq q \leq \infty$ son continuas. ¿Qué ejercicio del Práctico 1 permite aseguarlo?

(2) Sean $\mathcal{N}$ y $\mathcal{M}$ espacios normados. Definimos $\mathcal{B}(\mathcal{N}, \mathcal{M}) := \{A : \mathcal{N} \to \mathcal{M} : A$ es lineal y continua$\}$.
   (a) Probar que $\mathcal{B}(\mathcal{N}, \mathcal{M})$ es un espacio normado con $||A|| = \sup_{x:||x||\leq 1} ||Ax|| = \sup_{x:||x||<1} ||Ax|| = \sup_{x:||x||=1} ||Ax||$.
   (b) Probar que $\mathcal{B}(\mathcal{N}, \mathcal{M})$ es de Banach si $\mathcal{M}$ lo es.

(3) Sea X espacio de Banach finitamente dimensional e Y un espacio de Banach. Probar que si $T : X \to Y$ es lineal, entonces T es continua.

(4) Sea $X = \ell^1$, e Y un espacio de Banach finitamente dimensional. Probar que no todas las aplicaciones lineales son continuas.

(5) (a) Sea $\mathcal{N}_p$ es el espacio $C[a, b]$ con $|| \cdot ||_p$ y definimos el operador $A(f) := f(a)$ para toda f en $C[a, b]$. Probar que $A \in \mathcal{B}(\mathcal{N}_p, \mathbb{K})$ si y sólo si $p = \infty$.
   (b) Demostrar que Id: $L^\infty[a, b] \to L^2[a, b] \to L^1[a, b]$ son continuas. Hallar sus normas.
   Probar que Id: $L^1[a, b] \to L^2[a, b] \to L^\infty[a, b]$ no son continuas.

(6) Hacer los ejercicios 4.1, 4.2 y 4.3 de la página 96 del libro Linear Functional Analysis de Rynne y Youngson.

(7) Dar un ejemplo de una isometría entre dos espacios de Banach que no sobreyectiva.

(8) Probar que la composición de isometrías entre espacios normados es isometría.

(9) ¿Cuáles son todas las aplicaciones lineales que son isometrías de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ con respecto a $\| \cdot \|_2$?

(10) Hacer los ejercicios 4.6, 4.7, 4.10 y 4.11 de la Sección 4.2 del libro Linear Functional Analysis de Rynne y Youngson.

(11) Sean X e Y espacios de Banach. Sea $A : X \to Y$ lineal que satisface cada vez que $x_n \to 0$ en X y $Ax_n \to y$ en Y entonces $y = 0$. Probar que A es continua.

(12) Sea N un espacio normado, $S \subseteq N$ un subespacio vectorial cerrado.

(a) Probar que N/S es normado con

$$||x+S|| = \inf_{y\in S} ||x+y||.$$

(b) Probar que si N es un espacio de Banach entonces N/S es un espacio de Banach.

(13) (a) Sean $\mathcal{N}$ y $\mathcal{M}$ espacios de Banach. Probar que $A \in B(\mathcal{N},\mathcal{M})$ es inyectiva y $A(\mathcal{N})$ es cerrado si y sólo si existe k_1 tal que $||x|| \leq k_1||Ax||$.

(b) Sean $\mathcal{N}$ y $\mathcal{M}$ espacios de Banach. Probar que $A \in B(\mathcal{N},\mathcal{M})$ tiene imagen $A(\mathcal{N})$ cerrada si y sólo si existe k_2 tal que para todo $y \in A(\mathcal{N})$ existe $x \in \mathcal{N}$ con $Ax = y$ y $||x|| \leq k_2||y||$.

(c) Sean $\mathcal{N}$ de Banach y sea $A \in B(\mathcal{N},\mathcal{N}) := B(\mathcal{N})$. Probar que A es inversible si y sólo si $\mathrm{Im}(A) = \mathcal{N}$ y existen $0 < c \leq C < \infty$ tales que

$$c||x|| \leq ||Ax|| \leq C||x||,$$

para todo $x \in \mathcal{N}$.

(14) Sean X_0, X_1, X_2, X_3 espacios de Banach y sean $A_i : X_i \to X_{i+1}$ para $i = 0, 1, 2$ operadores lineales tales que

(a) A_0, A_2, $A_2A_1A_0$, son continuas,
(b) A_0 es biyectiva,
(c) A_2 es inyectiva.

Probar que A_1 es continua.

(15) Probar que si $\mathcal{N}$ y $\mathcal{M}$, son espacios de Banach, el conjunto

$$\{A \in B(\mathcal{N},\mathcal{M}) : A \text{ es inytectivo y } A(\mathcal{N}) \text{ es cerrado}\}$$

es abierto en $B(\mathcal{N},\mathcal{M})$.

(16) Probar que $L^2[0,1]$ es de primera categoría en $L^1[0,1]$ usando el Teorema de la aplicación abierta.

(17) Demostrar el Teorema de Hellmger-Toepliz: Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert con producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Si $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ es una aplicación lineal que satisface $\langle A(x), y\rangle = \langle x, A(y)\rangle$ para todo $x, y \in \mathcal{H}$, entonces A es continua.

(18) Hacer los ejercicios 4.18, 4.19 y 4.21 de la página 120 del libro Linear Functional Analysis de Rynne y Youngson.

Ejercicio Extra. Transformada de Fourier en $\mathbb{R}$.
Dada $f \in L^1(\mathbb{R})$ se define su transformada de Fourier como la función $\widehat{f}$ dada por

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i x\xi}\, dx.$$

(1) Probar que la aplicación $f \mapsto \widehat{f}$ es lineal y continua de $L^1(\mathbb{R})$ en $L^\infty(\mathbb{R})$.

(2) Dada $f \in L^1(\mathbb{R})$ probar que $\widehat{f}$ es continua y que $\lim_{|\xi|\to\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$, es decir $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R})$.

(3) Sea L_x el operador de traslación. Dada $f \in L^1(\mathbb{R})$ calcular $\widehat{L_x f}$.

(4) Dada $f \in L^1(\mathbb{R})$ calcular $\widehat{e^{2\pi i\lambda\,(\cdot)} f}$ para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$.

(5) Para $\lambda \neq 0$ sea $D_\lambda(f)(x) = f(\lambda x)$. Dada $f \in L^1(\mathbb{R})$ calcular $\widehat{D_\lambda(f)}$.

(6) Dadas f y g en $L^1(\mathbb{R})$, probar que $\int f\widehat{g} = \int \widehat{f} g$.

(7) Calcular $\widehat{e^{-x^2/2}}$.

(8) Probar que si f y $\widehat{f}$ están en $L^1(\mathbb{R})$, entonces vale la fórmula de inversión

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{i2\pi\xi x}\, d\xi \qquad ppx.$$

(9) Probar que la transformada de Fourier se extiende de $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ dando lugar a un isomorfismo isométrico de $L^2(\mathbb{R})$ en $L^2(\mathbb{R})$ (ver “Teorema de Plancherel”).