8. Descomposición prima

$T: V \to V$ $m_T = p_1^{v_1} \cdots p_k^{v_k}$ desc en factores primos
$\Rightarrow V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ con $W_i = Nu(p_i(T)^{v_i})$ es
T-invar $T_i = T|_{W_i} \rightsquigarrow m_{T_i} = p_i^{v_i}$

<u>Corolario</u> $E_i : V \to V$ las proy asociadas a W_i
$\Rightarrow$ cada E_i se obtiene como un polinomio
evaluado en $T \Rightarrow TE_i = E_iT$

$1 = f_1 g_1 + \cdots + f_k g_k$ $\quad f_i = \frac{m_T}{p_i^{v_i}}$ $\quad h_i = f_i g_i \rightsquigarrow E_i = h_i(T)$

<u>Teorema</u> $T: V \to V$ TL $\dim V < \infty$ tq m_T es prod
de factores lineales
$\Rightarrow \exists\, D, N : V \to V$ TL's tales que

(i) D diagonalizable, N nilpotente

(ii) $T = D + N$, $DN = ND$

Más aún D y N son únicos satisfaciendo (i)(ii)
y son polinomios de T

<u>dem</u> $m_T = \underbrace{(x-c_1)^{v_1}}_{p_1^{v_1}} \cdots \underbrace{(x-c_k)^{v_k}}_{p_k^{v_k}} \rightsquigarrow V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$

con $W_i = Nu(T - c_i)^{v_i}$ $c_i \neq c_j$ si $i \neq j$
y tenemos las proyecciones asociadas, E_i's
que son polinomios evaluados en T

$T = TI = TE_1 + \dots + TE_k$

$D = c_1E_1 + \dots + c_kE_k$ $\Rightarrow N = T - D = (T-c_1)E_1 + \dots + (T-c_k)E_k$

$= \underbrace{(c_1h_1 + \dots + c_kh_k)}_{f}(T)$ $= (x-f)(T)$

notar que D y N son pols evaluados en T
$\therefore ND = DN$

$$N^2 = ((T-c_1)E_1 + \dots + (T-c_k)E_k)^2 = \sum_{i,j=1}^{k} (T-c_i)E_i(T-c_j)E_j$$

$$= \sum (T-c_i)(T-c_j)E_iE_j = \sum_{i=1}^{k} (T-c_i)^2 E_i$$

$\cdot)$ por inducción $\quad N^r = \sum^k (T-c_i)^r E_i$

$\cdot)$ si $r \geq \nu_i \ \forall i$ $\quad N^r(v) = \sum_{i=1}^{k} (T-c_i)^r E_i(v) = 0$

$E_i(v) \in W_i = Nu(T-c_i)^{\nu_i} \subseteq Nu(T-c_i)^r$ $\quad \forall i = 1, \dots, k$

$\Rightarrow N^r = 0$

$\cdot)$ Así tenemos descripción como (i) (ii) donde D y N son polinomios evaluados en T

<u>Unicidad</u> Sean $\tilde{D}$ $\tilde{N}$ TL's que cumplen (i)(ii)

$\tilde{N}, \tilde{D}$ conmutan

$\tilde{D}T = \tilde{D}(\tilde{D}+\tilde{N}) = (\tilde{D}+\tilde{N})\tilde{D} = T\tilde{D}$ $\quad = \tilde{D}\tilde{D} + \tilde{D}\tilde{N} = \tilde{D}\tilde{D} + \tilde{N}\tilde{D}$

análogamente $\tilde{N}T = T\tilde{N}$ $\quad \Rightarrow \tilde{D}, \tilde{N}$ conmutan con T

De aquí $\tilde{D}$ y $\tilde{N}$ también conmutan con D y N
(porque D y N son pols evaluados en T)

$\cdot)$ $D + N = T = \tilde{D} + \tilde{N}$

$\Rightarrow D - \tilde{D} = N - \tilde{N}$. Como D y $\tilde{D}$ son diag

$\Rightarrow D - \tilde{D}$ es diag (simultáneamente diag)

Por otro lado $\exists\, r, s \,/\, N^r = 0 = \tilde{N}^s$

(podemos usar forma binomio pq conmutan)

$$(N-\tilde{N})^{\overset{r+s}{k}} = \sum_{l=0}^{\overset{r+s}{k}} \binom{\overset{r+s}{k}}{l}(-1)^l N^{\overset{r+s}{k-l}} \tilde{N}^l$$

$$= \sum_{l=0}^{s} \binom{r+s}{l}(-1)^l \underbrace{N^{\overset{\geq 0}{r+(s-l)}}}_{=0} \tilde{N}^l + \sum_{l=s+1}^{r+s} \binom{r+s}{l}(-1)^l N^{r+s-l} \underbrace{\tilde{N}^l}_{=0} = 0$$

Así $D-\tilde{D} = N-\tilde{N}$ es diag y nilpotente

$\Rightarrow$ su minimal es X^k $k \geq 1$ y por ser diag $\boxed{k=1} \rightsquigarrow D-\tilde{D} = 0 = N-\tilde{N}$