1) a) $\langle (1\ 2) \rangle = \{e, (1\ 2)\}$

sabiendo que $|G| = 6$ es fácil encontrar G

y después probar a mano

las coclases son de dos elementos

$\{g, g(12)\}$ a izquierda
$\{g, (12)g\}$ a derecha
ver son distintas

para cada $g \in G$

b) La misma idea

(2) Sea G un grupo y H y K dos subgrupos de G. Se define $HK := \{hk : \ h \in H, k \in K\}$. Probar las siguientes afirmaciones.

(a) $HK \leq G$ si y sólo si $HK = KH$.

(b) Si G es abeliano, entonces $HK \leq G$.

$(\Rightarrow)$ a) $(\subseteq)$ Sea $x \in HK \Rightarrow x^{-1} \in HK$ (por subgrupo)

$x = hk \qquad x^{-1} = \tilde{h}\tilde{k}$

$\Rightarrow hk\tilde{h}\tilde{k} = e$

$x = hk = \underset{\in K}{\tilde{k}^{-1}} \underset{\in H}{\tilde{h}^{-1}}$ (subgrupo)

$\Rightarrow x \in KH$ análogo para $(\supseteq)$

$(\Leftarrow)$ Sea $x \in HK$ $x = hk \Rightarrow x^{-1} = k^{-1}h^{-1} \in KH = HK$

$\Rightarrow x^{-1} \in HK$

$HK \leq G$

b) $x \in HK \Rightarrow x = \underset{\in G}{h}\underset{\in G}{k} = kh \Rightarrow x \in KH$ por a)

$HK \leq G$

(3) Sean $k, m, p \in \mathbb{N}$, con p primo y $(p, m) = 1$. Sean G un grupo, con $|G| = p^k m$, $H, K \leq G$ tales que $|H| = p^k$, $|K| = p^d$, $0 < d \leq k$ y $K \not\subseteq H$. Entonces HK no es subgrupo de G.

La idea es ver que $|HK| \nmid |G|$

$$|HK| = \frac{|H||K|}{|H \cap K|} = p^k p^d$$

$H \cap K \leq K$ y $H \cap K \leq H$

$\Rightarrow |H \cap K| \mid p^d$ y $|H \cap K| \mid p^k$

$(d \leq k) \Rightarrow |H \cap K| \mid p^d$

pero $|H \cap K| \neq p^d$

~~por~~ si no $H \cap K \subseteq K$

$\Rightarrow H \cap K = K \Rightarrow K \subseteq H$ abs!

$|H \cap K| = p^j \quad 0 < j < d$

$$\Rightarrow |HK| = \frac{p^k p^d}{p^j} \qquad |G| = p^k m$$

$(p, m) = 1$

Si $|HK| \mid |G| \Rightarrow p^k p^{d-j} \mid p^k m$

$\Rightarrow p^{d-j} \mid m$ abs!.

4) Sabemos que $[G:H\cap K] \leq [G:H][G:K]$

pq H y K son finitos

veamos la otra desigualdad

$$[G:H\cap K] = [G:K][K:H\cap K]$$

$$[G:H\cap K] = [G:H][H:H\cap K]$$

$[G:K] \perp [G:H]$

$\Rightarrow$ $[G:K] \mid [G:H\cap K]$

$[G:H] \mid [G:H\cap K]$

$\Rightarrow$ $[G:K][G:H] \mid [G:H\cap K]$

$$\Rightarrow [G:K][G:H] \leq [G:H\cap K]$$

$$\Rightarrow [G:H\cap K] = [G:K][G:H]$$

$$\Rightarrow HK = G$$

(5) Mostrar que $\mathbb{Q}/\sim = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, donde $\mathbb{Q}/\sim$ es el grupo dado en el Ejercicio 33 del Práctico 2 y $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es el grupo cociente del grupo $(\mathbb{Q}, +)$ por el subgrupo $(\mathbb{Z}, +)$.

Notar $\mathbb{Z}$ normal a $\mathbb{Q}$ si no no podríamos cocientar

$x, y \in \mathbb{Q}$

pertenecientes a una misma coclase en $\mathbb{Q}/\sim$ $\Leftrightarrow x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$ (definición $\mathbb{Q}/\sim$)

$\Leftrightarrow x + y^{-1} \in \mathbb{Z}$ $(x \in \mathbb{Z} + y)$

(notación aditiva) $\Leftrightarrow x y^{-1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \equiv_r y \ (\mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow x, y$ pertenecen a una misma clase en $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$

(6) Sean G un grupo y $N \leq G$. Probar que si $[G:N] = 2$, entonces $N \lhd G$.

$[G:N] = 2 \Rightarrow$ supongo coclases son $\{eN, \bar{a}N\}$

obviamente $eN = Ne \Rightarrow$ son la misma clase

supongo $\bar{a}N \cap N\bar{a} = \emptyset$

solo hay dos coclases

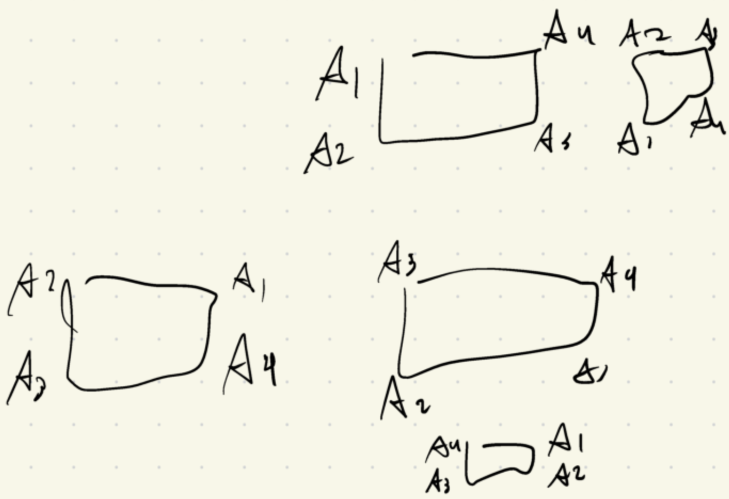
Sea $a \in N\bar{a} \Rightarrow a \notin \bar{a}N \Rightarrow a \in eN$

$a \in G$

$\Rightarrow a = en$

$\Rightarrow a\tilde{n} = en\tilde{n} = e\bar{n} \in eN$

$\Rightarrow \bar{a}N = eN$ abs!



(7) Sea G un grupo y sea $Z(G)$ el *centro* de G:

$$Z(G) := \{a \in G : \ ab = ba \text{ para todo } b \in G\}.$$

(a) Probar que $Z(G)$ es un subgrupo normal abeliano de G.

(b) ¿Es $Z/Z(G)$ abeliano?

(c) Probar que si $f : G \to H$ es un epimorfismo, entonces $f(Z(G)) \subseteq Z(H)$ y si f es un isomorfismo se da la igualdad.

(d) ¿Es necesaria la hipótesis de que f sea un epimorfismo?

a) Sea $a \in G$ / $a \in \bar{a} Z(G)$

$$\Rightarrow a = \underset{\in G}{\bar{a}}\ \underset{\in Z(G) \subseteq G}{z}$$

$$= z\bar{a} \quad (\text{def de } Z(G))$$

$$\Rightarrow a \in Z(G)\bar{a}$$

$$\Rightarrow a \in \bar{a}Z(G) \cap Z(G)\bar{a}$$

$$\Rightarrow \bar{a}Z(G) = Z(G)\bar{a}$$

es abeliano por definición

b) Sea $aZ(G)$ y $bZ(G) \in Z/Z(G)$

$$\Rightarrow aZ(G) . bZ(G) \overset{\text{def}}{=} ab\, Z(G)$$

c) Sea $a \in Z(G)$ Sea $h \in H \Rightarrow \underset{\text{epi}}{\exists} g / f(g) = h$

$$f(a)f(g) \overset{\text{homo}}{=} f(a \cdot g) = f(g \cdot a) = f(g) \cdot f(a)$$

$$\| \qquad\qquad\qquad\qquad = h\, f(a)$$

$$f(a) \cdot h$$

$$\Rightarrow f(a) \in Z(H)$$

$$\Rightarrow f(Z(G)) \subseteq Z(H)$$

·) $z \in Z(H)$, sea $h \in H \Rightarrow zh = hz$

por epi $\exists g, \tilde{g} / f(g) = z \quad f(\tilde{g}) = h$

$$\Rightarrow f(g) f(\tilde{g}) = f(\tilde{g}) f(g)$$

$$\Rightarrow f(g\tilde{g}) = f(\tilde{g} g)$$

como es mono $\quad g\tilde{g} = \tilde{g} g$

$$\Rightarrow g \in Z(G)$$

$$\Rightarrow z \in f(Z(G))$$

$$\Rightarrow \quad Z(H) \subseteq f(Z(G))$$

$$\therefore \quad Z(H) = f(Z(G))$$

d)

8) Sea $a, b \in \bigcap N_i \Rightarrow a, b \in N_i \ \forall i$

$\Rightarrow a \cdot b^{-1} \in N_i$ (por ser N_i subgrupo)

$\Rightarrow a \cdot b^{-1} \in \bigcap N_i$

$\Rightarrow N_i$ subgrupo

$a \in \bar{a}(\bigcap N_i) \Rightarrow a = \bar{a} n_i$ con $n_i \in N_i$

$= \tilde{n}_i \bar{a}$ $(N_i \trianglelefteq G)$

$\Rightarrow a = \tilde{n}_i \bar{a} \in N_i \bar{a}$

$\Rightarrow a \in (\bigcap N_i) \bar{a}$

$\Rightarrow \bigcap N_i \trianglelefteq G$

(9) Sea H subgrupo

$$a \in \bar{a}H \Rightarrow a = \underset{\in G}{\bar{a}}\,\underset{\in G}{h} \overset{G \text{ abeliano}}{=} h\bar{a}$$

$$\Rightarrow a \in H\bar{a}$$

$$\Rightarrow \bar{a}H = H\bar{a}$$

$$\Rightarrow H \trianglelefteq G$$

(10) Sean G un grupo y H un subgrupo.

(a) Probar que para todo $g \in G$, $gHg^{-1} \leq G$ y $gHg^{-1} \cong H$.

(b) Si $|H| = n$ y es el único subgrupo de orden n en G, entonces $H \lhd G$.

Sea $g\underset{\in H}{h}g^{-1} \in gHg^{-1}$ y $g\underset{\in H}{\tilde{h}}g^{-1} \in gHg^{-1}$

$$\Rightarrow (ghg^{-1}).(g\tilde{h}g^{-1})^{-1} = (ghg^{-1})(g\tilde{h}^{-1}g^{-1})$$

$$= g\underbrace{h\tilde{h}^{-1}}_{\substack{\in H \\ H \leq G}}g^{-1} \in gHg^{-1}$$

$$\Rightarrow gHg^{-1} \leq G$$

$gHg^{-1} \cong H$

Sea $\varphi : gHg^{-1} \longrightarrow H \quad \varphi(ghg^{-1}) = h$

$$\varphi((ghg^{-1})(g\tilde{h}g^{-1})) = \varphi(g\underbrace{h\tilde{h}}_{\in H}g^{-1}) = h\tilde{h}$$

$$= \varphi(ghg^{-1})\varphi(g\tilde{h}g^{-1})$$

b) $H \leq G$ único de orden n y $gHg^{-1} \leq G$

por a) también de orden n

$$\Rightarrow \quad H = gHg^{-1} \quad \Rightarrow \quad H \trianglelefteq G$$

(11) Sea G un grupo y H y K dos subgrupos de G. Probar las siguientes afirmaciones.

(a) Si $H \triangleleft G$ o $K \triangleleft G$, entonces $HK \leq G$.

(b) Si H y K son normales, entonces HK es normal en G.

a) Sea $h_1k_1 \in HK$ $\quad h_2k_2 \in HK$

Supongo $K \triangleleft G$ qvq $(h_1k_1) \cdot k_2^{-1}h_2^{-1} \in HK$

$$
\begin{aligned}
(h_1k_1)k_2^{-1}h_2^{-1} &= h_1 k h_2^{-1} \\
&= \underbrace{\underbrace{h_1 h_2^{-1}}_{\in H} \underbrace{k}_{\in K}}_{\in HK} \quad (\text{pq } K \trianglelefteq G)
\end{aligned}
$$

Análogo si $H \triangleleft G$

b) Dado $g \in G$ qvq $gHK = HKg$

Sea $g \in \bar{g}HK$ $\quad H \trianglelefteq G$

$\Rightarrow g = \bar{g}hK = \tilde{h}\bar{g}K$

$K \trianglelefteq G \quad = \tilde{h}\tilde{k}\bar{g} \in HK\bar{g}$

$\Rightarrow g \in \bar{g}HK \cap HK\bar{g}$

$\Rightarrow \bar{g}HK = HK\bar{g} \Rightarrow HK \trianglelefteq G$

(12) Hallar $H, K \leq D_4$ tales que $H \lhd K$, $K \lhd D_4$ y H no es normal en D_4.

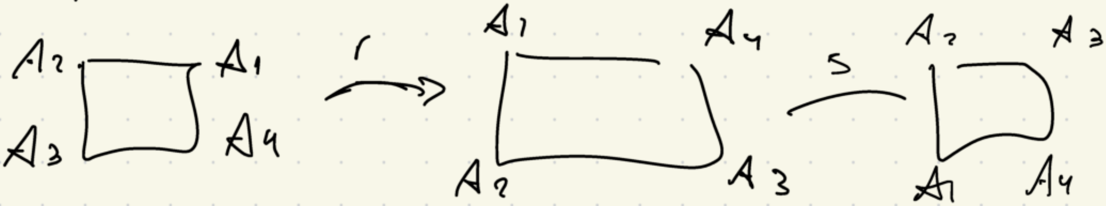
(13) Decir cuáles de los siguientes H son subgrupos normales de G:

(a) $H = \{1, r, r^2, r^3\}$ y $G = D_4$.

(b) $\mathcal{H}$ y $G = \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$.

(c) $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ y $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

a)



(14) Sean $f : G \to H$ un homomorfismo de grupos y $N \lhd G$. Probar las siguientes afirmaciones.

(a) Si $B \lhd H$, entonces $f^{-1}(B) \lhd G$.

(b) Si f es epimorfismo, entonces $f(N) \lhd H$. ¿Vale lo mismo si f no es epimorfismo?

(c) Si f es un isomorfismo, entonces $G/N \cong H/f(N)$.

a) $x, y \in f^{-1}(B) \Rightarrow f(x \cdot y^{-1}) = \underset{\in B}{f(x)} \, \underset{\in B}{f(y^{-1})}$

$\Rightarrow f(x \cdot y^{-1}) \in B$

$\Rightarrow x \cdot y^{-1} \in f^{-1}(B)$

$\Rightarrow f^{-1}(B) \leq G$

Sea $g \in \bar{g} f^{-1}(B) \Rightarrow g = \bar{g} f^{-1}(b) \quad b \in B$.

(usando homo separo) $\quad f(g) = f(\bar{g})\, b \quad \in f(\bar{g}) B$

como B normal $\quad f(\bar{g}) B = B f(\bar{g})$

$\Rightarrow f(g) = \tilde{b} f(\bar{g}) \quad \tilde{b} \in B$

$g = f^{-1}(\tilde{b})\, \bar{g} \in f^{-1}(B) \cdot \bar{g}$

$g \in f^{-1}(\tilde{b} f(\bar{g})) = \{ a \in G / f(a) = \tilde{b} f(\bar{g}) \}$

$\Rightarrow f^{-1}(\tilde{b})\, \bar{g} \in f^{-1}(\tilde{b} f(\bar{g}))$

b) $a, b \in f(N) \xrightarrow{\text{epi}} \exists\, n_1, n_2 \in N \,/\, f(n_1) = a$

$f(n_2) = b^{-1}$

$$\Rightarrow f(\underbrace{n_1 \cdot n_2}_{\in N}) = f(n_1) f(n_2) = a b^{-1}$$

$$\Rightarrow ab^{-1} \in f(N) \Rightarrow f(N) \leq H$$

$$a \in \bar{a} f(N) \Rightarrow a = \bar{a} f(n) \qquad \begin{matrix} n \in N \\ \bar{a} \in H \end{matrix}$$

$= \bar{a}$

$$(\text{epi} \cdot \exists\, \tilde{a} \in G) = f(\tilde{a}) f(n)$$

$$= f(\tilde{a} n)$$

$\bar{a}$ es el representante
estoy abusando notación

$$\left(\begin{matrix} N \text{ normal} \\ \exists\, \tilde{n} \in N \end{matrix}\right) = f(\tilde{n} \tilde{a})$$

$$= f(\tilde{n}) f(\tilde{a})$$

$$\in f(N) \bar{a}$$

$$\Rightarrow \bar{a} f(N) = f(N) \bar{a}$$

c) por b) $f(N) \trianglelefteq H$

$\Rightarrow$ por (a) $f^{-1}(f(N)) \trianglelefteq G$

$N \trianglelefteq G$

1) entonces ambos cocientes están bien definidos

por corolario teo isomorfismos

f induce un homo $\tilde{f} : G/N \to H/f(N)$

$\tilde{f}$ iso $\Leftrightarrow \underbrace{\operatorname{Im} f \vee f(N) = H}_{\mathrm{I}}$ y $\underbrace{f^{-1}(f(N)) \leq N}_{\mathrm{II}}$

II $f^{-1}(f(N)) = N \leq N$ ✓

I $\operatorname{Im} f \vee f(N) =$ subgrupo generado por $\operatorname{Im} f \cup f(N)$

(iso) $= H \vee f(N) =$ subgrupo generado por $H \cup f(N) = H$

$= H$ $\square$

(15) Sea G grupo y $N \lhd G$. Si N y G/N son finitamente generados, entonces G es finitamente generado.

$N = \langle n_1, \dots \; n_j \rangle \qquad j \in \mathbb{N}$

·) $p \in N \Rightarrow p = n_{i_1}^{\alpha_1} \cdots n_{i_j}^{\alpha_j}$

$i_n \in \{1, \dots j\}$

$G/N = \langle \bar{g}_1, \dots \; \bar{g}_k \rangle \qquad k \in \mathbb{N}$

$p \in G/N \Rightarrow p = \bar{g}_{i_1}^{\alpha_1} \cdots \bar{g}_{i_l}^{\alpha_l}$

$i_n \in \{1, \dots k\}$

Sea $g \in G \Rightarrow g \in \bar{g} \in G/N$

$\Rightarrow \bar{g} = \bar{g}_{i_1}^{\alpha_1} \cdots \bar{g}_{i_l}^{\alpha_l}$

(G/N grupo) $= \overline{g_{i_1}^{\alpha_1} \cdots g_{i_l}^{\alpha_l}}$

$\Rightarrow g \equiv g_{i_1}^{\alpha_1} \cdots g_{i_l}^{\alpha_l} \; (N)$

$(g \equiv h \, (N) \Leftrightarrow gh^{-1} \in N \Leftrightarrow g \in hN)$

$$\Leftrightarrow \quad g = g_{i_1}^{\alpha_1} \cdots g_{i_l}^{\alpha_l} \cdot n_{i_1}^{\alpha_1} \cdots n_{i_j}^{\alpha_j}$$

$$\in \langle g_1, \dots, g_k, n_1, \dots, n_j \rangle$$

$$\Rightarrow \quad G \subseteq \underbrace{\langle g_1, \dots, g_k, n_1, \dots, n_j \rangle}_{\text{finito}} \subseteq G$$

(16) Sean G_1 y G_2 dos grupos y N_1 y N_2 dos subgrupos normales de G_1 y G_2 respectivamente. Probar que:

(a) $N_1 \times N_2 \lhd G_1 \times G_2$.

(b) $(G_1 \times G_2)/(N_1 \times N_2) \cong (G_1/N_1) \times (G_2/N_2)$. [1]

a) Sea $(n_1, n_2) \in N_1 \times N_2$

$(\tilde{n}_1, \tilde{n}_2) \in$

$\Rightarrow (n_1, n_2) \cdot (\tilde{n}_1, \tilde{n}_2)^{-1} = (n_1 \tilde{n}_1^{-1}, n_2 \tilde{n}_2^{-1}) \in N_1 \times N_2$

$\Rightarrow$ es subgrupo de $G_1 \times G_2$

Sea $(g_1, g_2) \in = (\tilde{g}_1, \tilde{g}_2) \cdot (N_1 \times N_2)$

$\Rightarrow (g_1, g_2) = (\tilde{g}_1, \tilde{g}_2) \cdot \underbrace{(n_1, n_2)}_{\in N_1 \times N_2}$

$= (\tilde{g}_1 n_1, \tilde{g}_2 n_2)$

$(N_1 \trianglelefteq G_1, N_2 \trianglelefteq G_2) = (\tilde{n}_1 \tilde{g}_1, \tilde{n}_2 \tilde{g}_2)$

$g_1 n_1 \in \bar{g} N_1 = N_1 \bar{g}$

$= (\tilde{n}_1, \tilde{n}_2)(\tilde{g}_1, \tilde{g}_2)$

$\Rightarrow g_1 n_1 \in N_1 \bar{g}$

$g_1 n_1 = \tilde{n}_1 \tilde{g}$

$\in (N_1 \times N_2)(\tilde{g}_1, \tilde{g}_2)$

$\Rightarrow N_1 \times N_2 \trianglelefteq G_1 \times G_2$

b) $(g_1, g_2) \cdot (n_1, n_2) \in G_1 \times G_2 / N_1 \times N_2$

$$= (g_1 n_1 , g_2 n_2) \in G_1/N_1 \times G_2/N_2$$

sea $f: G_1 \times G_2 / N_1 \times N_2 \longrightarrow G_1/N_1 \times G_2/N_2$

$$f\left(\overline{(g_1, g_2)}\right) = (\overline{g_1}, \overline{g_2})$$

Homo $\quad f\left(\overline{(g_1, g_2)} + \overline{(\tilde{g}_1, \tilde{g}_2)}\right) = f\left(\overline{(g_1, g_2) + (\tilde{g}_1, \tilde{g}_2)}\right)$

$$= f\left(\overline{g_1 + \tilde{g}_1 , g_2 + \tilde{g}_2}\right)$$

$$= \left(\overline{g_1 + \tilde{g}_1} , \overline{g_2 + \tilde{g}_2}\right)$$

$$= \left(\overline{g_1} + \overline{\tilde{g}_1} , \overline{g_2} + \overline{\tilde{g}_2}\right)$$

$$= (\overline{g_1}, \overline{g_2}) + (\overline{\tilde{g}_1}, \overline{\tilde{g}_2})$$

$$= f(\overline{g_1, g_2}) + f(\overline{\tilde{g}_1, \tilde{g}_2})$$

) mono y epi sale con misma idea

(17) Sean $n, m \in \mathbb{N}$ tal que n divide a m. Calcular $n\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

$n \mid m \Rightarrow \quad m = kn \qquad$ Veamos $\dfrac{n\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Z}_k$

módulo k

$f : \dfrac{n\mathbb{Z}}{m\mathbb{Z}} \longrightarrow \mathbb{Z}_k \qquad f(\overline{nx}) = \overline{x}^k = (\overline{x}^k)$

Bien def $\quad \underbrace{nx \sim ny}_{\text{mismo coclase}}$

$$nx \equiv ny \ (m\mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow nx(ny)^{-1} \in m\mathbb{Z}$$

$$nx - ny \in m\mathbb{Z}$$

$$nx - ny = m \underset{\in \mathbb{Z}}{h}$$

$$m \mid nx - ny$$

$$\Leftrightarrow \quad k \mid x - y$$

$$\Leftrightarrow x \equiv y \ (k)$$

$$\Leftrightarrow x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad \overline{x} = \overline{y}$$

$$\Leftrightarrow \overline{x}^k = \overline{y}^k$$

<u>Homo</u> $f(\overline{nx} + \overline{ny})$

$= f(\overline{n(x+y)}) \quad = \overline{(x+y)^k}$

$= \overline{(x+y) + \cdots + (x+y)}$

$= \overline{x+y+ \quad +x+y}$

(en $\mathbb{Z}$ conmuta) $= \overline{x^k + y^k}$

$= \overline{x^k} + \overline{y^k}$

$a \cdot b = 0$

$= f(\overline{nx}) + f(\overline{ny})$

<u>mono</u> $f(\overline{nx}) = f(\overline{ny}) \iff \overline{x^k} = \overline{y^k}$

(clases son grupo) $\iff \overline{x^k} - \overline{y^k} = \overline{0}$

$\iff \overline{x^k - y^k} = \overline{0}$

$\mathbb{Z}$ conmuta $\iff \overline{(x-y)^k} = \overline{0}$

$\iff (x-y)^k = 0$

$\iff (x-y) = 0$

$\iff x = y$

$\iff \overline{x} = \overline{y}$

→ epi sale igual

(19) En cada caso determinar el índice $[G : H]$ y hallar un sistema de representantes de G módulo H.

(a) $H = \mathbb{Z}$, $G = \mathbb{R}$.

(b) $H = \langle r \rangle$, $G = D_n$.

(c) $H = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

(d) $H = S^1$, $G = \mathbb{C}^{\times}$.

a) $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = \{ r + \mathbb{Z} : r \in [0,1) \}$

$$a \equiv b(\mathbb{Z}) \iff ab^{-1} \in \mathbb{Z} \quad (a - b \in \mathbb{Z})$$

$$\iff a \in \mathbb{Z} + b$$

·) Si $x, y \in [0,1)$ y $x \sim y \Rightarrow x = z + y$

$$x - y = z \in \mathbb{Z}$$

pero $0 \leq x < 1$, $0 \leq y < 1 \Rightarrow 0 \leq x - y < 1$

$$\Rightarrow x - y = 0$$

$$x = y$$

·) Si $x \in \mathbb{R} \Rightarrow n = \lfloor x \rfloor = \min\{ n \in \mathbb{Z} : n \leq x \leq n+1 \}$

$$\Rightarrow 0 < x - n \leq 1$$

$$\Rightarrow x - n = a \in [0,1)$$

$$x = a + n = n + a$$

$x \in \mathbb{Z} + a$ con $a \in [0,1)$

$\rightarrow x \in \bar{a} \quad a \in [0,1)$

$\rightarrow [0,1)$ conj de representantes

(b) $H = \langle R \rangle$, $G = D_n$

- D_n es finito, con $|D_n| = 2n$ y $|\langle R \rangle| = n$

  $\Rightarrow [D_n : \langle R \rangle] = 2$

- Sea $\sigma \in G$ reflexión $(\sigma \notin H) \Rightarrow \{Id, \sigma\}$ conj de rep. de D_n modulo H

(c) $H = SL(n, \mathbb{R})$, $G = GL(n, \mathbb{R})$

Sean $A, B \in GL(n, \mathbb{R})$. $A \equiv B \pmod H \Leftrightarrow A^{-1}B \in SL(n, \mathbb{R}) \Leftrightarrow \det(A^{-1}B) = 1$

$\Leftrightarrow \det(A) = \det(B) \in \mathbb{R} - \{0\}$

Af: $C = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \\ \vdots & 0 & 1 & \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}}_{\in GL(n, \mathbb{R})} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} - \{0\} \right\}$ es sist. de rep. de G mod H.

- Sea $A \in GL(n, \mathbb{R})$ con $\lambda = \det(A) \in \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow A \sim \begin{pmatrix} \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in C$ ✓

- Supongamos $M_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \beta & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = M_\beta \Leftrightarrow \det(M_\alpha) = \det(M_\beta)$

  $\rightarrow \alpha = \beta$

  $\Rightarrow M_\alpha = M_\beta$ ✓

$\therefore$ C es sist de representantes.

(d) $H = S^1$, $G = \mathbb{C}^\times$. Sean $z, w \in G$, $z \equiv w \pmod H \Leftrightarrow z/w \in H \Leftrightarrow |z/w| = 1$

$\Leftrightarrow |z| = |w|$ $(\neq 0)$

- Sea $C = \{ z = x + iy \in G \mid y = 0,\ x > 0 \}$

- Sean $z_1, z_2 \in C$ con $z_1 \sim z_2$, $\underline{z_1 = x_1,\ z_2 = x_2}$ con $x_i \in \mathbb{R}_{>0}$

  $\Leftrightarrow |x_1| = |z_1| = |z_2| = |x_2| \Leftrightarrow x_1 = x_2$

  $\Rightarrow z_1 = z_1$ ✓

- Sea $w \in \mathbb{C}^\times$ y sea $\alpha = |w| > 0$. Quiero ver $w \sim z$ donde $z = \alpha + i0$

$|w| = \alpha = |\alpha| = |z| \Rightarrow w \sim z$ ✓ $\Rightarrow$ C es cjto. de rep. de $\mathbb{C}^\times$ modulo S^1.