Clase 19 - Programación lineal

Introducción

La programación lineal (PL) es uno de los mecanismos más naturales para tratar una gran cantidad de problemas del mundo real de un modo sencillo. Es una subárea de Optimización donde, como es de esperar, todas las funciones involucradas para formular el problema son lineales. Aunque las funciones lineales son de las más simples, existen muchos problemas de economía, producción, planning, logística, redes, scheduling, transporte y otras áreas que pueden formularse como un problema de programación lineal. Además, los aspectos matemáticos y computaciones de PL son muy interesantes. Por un lado, la matemática de PL es sencilla, poderosa y elegante y utiliza enfoques geómetricos y de Álgebra lineal, que están conectados entre sí. Por otro lado, los aspectos computacionales son muy importantes por las potenciales aplicaciones y variantes de los algoritmos para resolver el problema. El método más conocido, es el Simplex, y fue propuesto por Dantzig en 1947. En estas clases, por una cuestión de tiempo, presentaremos algunas nociones básicas de PL y el método Simplex en una versión resumida. Para entender en que consiste un problema de PL consideraremos inicialmente un ejemplo.

Ejemplo: un agricultor debe comprar fertilizantes (abono) para sus campos. El ingeniero agrónomo le dijo que cada kilogramo de fertilizante le alcanza para $10\,m^2$ de su campo, y debido a las características propias de esas tierras, el fertilizante debe contener (al menos): $3\,g$ de fósforo (P), $1.5\,g$ de nitrógeno (N) y $4\,g$ de potasio (K) por cada $10\,m^2$. En el mercado existen 2 tipos de fertilizantes: T1 y T2. El fertilizante T1 contiene $3\,g$ de P, $1\,g$ de N y $8\,g$ de K y cuesta \$ 10 por kilogramo. En cambio, el fertilizante T2 contiene $2\,g$ de P, $3\,g$ de N y $2\,g$ de K y cuesta \$ 8 por kilogramo. El agricultor desea saber cuántos kilogramos de cada fertilizante debe comprar, por cada $10\,m^2$ de campo, de modo de minimizar el costo total cubriendo los requerimientos de su suelo.

Vamos a resumir toda esta información en la siguiente tabla y a continuación definiremos el problema:

	Tipo 1 (x_1)	Tipo 2 (x_2)	Necesidades mínimas
P (fósforo)	3	2	3
N (nitrógeno)	1	3	1.5
K (potasio)	8	2	4
Costo	10	8	

Incógnitas:
x : cantidad de fertilizante de tipo 1 (T1), en kg.
y : cantidad de fertilizante de tipo 2 (T2), en kg.

Restricciones (requerimientos):

$$\begin{array}{rcl} 3x+2y & \geq & 3 \\ x+3y & \geq & 1.5 \\ 8x+2y & \geq & 4 \\ x \geq 0, y \geq 0 & & \qquad \text{(no negatividad)} \end{array}$$

Las últimas restricciones de no negatividad son razonables pues la cantidad de fertilizantes no puede ser negativa.

Función objetivo (costo): $f(x,y) = 10x + 8y$.

Objetivo: *Minimizar* $f(x,y) = 10x + 8y$.

Así, este problema puede ser formulado en la siguiente forma:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x,y) = 10x + 8y \\ \text{sujeto a} & 3x + 2y \geq 3 \\ & x + 3y \geq 1.5 \\ & 8x + 2y \geq 4 \\ & x \geq 0, y \geq 0 \end{array}$$

o de una forma más compacta:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & c^T x \\ \text{sujeto a} & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

donde $c = (10,8)$, $x = (x_1, x_2)$ y

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1.5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Este problema se puede representar gráficamente como se ve en la Figura 1. La región sombreada se llama **región factible** y establece el conjunto de posibles soluciones, es decir los posibles valores de x e y que satisfacen las restricciones.

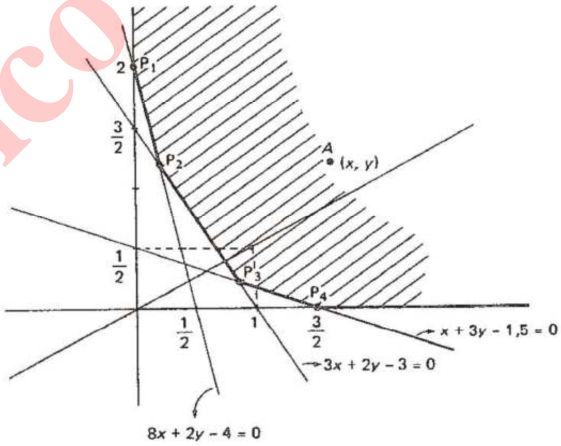

Figura 1: Representación gráfica del ejemplo de los fertilizantes.

El objetivo será encontrar la **solución óptima** en la región factible, es decir (x_*, y_*) en la región factible que minimiza la función objetivo (costo) f.

En general, los problemas de PL están definidos por:

- un vector de variables $x \in \mathbb{R}^n$ que son no negativas, es decir, $x_i \geq 0$ para $i = 1, \ldots, n$.
- una función objetivo lineal f, que deberá ser minimizada o maximizada. Como esta función debe ser lineal será de la forma $f(x) = c^T x = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n$.
- un conjunto de restricciones que deben satisfacer las variables. Estas restricciones estarán dadas por ecuaciones (igualdades) o inecuaciones (desigualdades) lineales.

- una región (o conjunto) factible definida por la **intersección** de todas las restricciones lineales que deben satisfacer las variables.

Por lo tanto, los problemas de PL se escriben de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x) \\ \text{sujeto a} & Cx = d \\ & Rx \geq s \\ & x \geq 0 \end{array} \tag{1}$$

donde f es la función objetivo a minimizar (o maximizar); el sistema lineal $Cx = d$ corresponde al conjunto de ecuaciones lineales de igualdad que deben satisfacer las variables; $Rx \geq s$ corresponde al conjunto de restricciones lineales de desigualdad que deben satisfacer las variables (podrían ser con $\leq$ en vez de $\geq$); y por último, las restricciones de no negatividad $x \geq 0$. Observar que en el ejemplo anterior no había restricciones de igualdad.

Se denomina **forma estándar** cuando el problema de PL es formulado como

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & c^T x \\ \text{sujeto a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array} \tag{2}$$

con $b \geq 0$.

Veamos que cualquier problema de PL en formato general puede ser llevado a la forma estándar:

- Conversión de maximización en minimización: si el problema original fuera:

  $$\text{maximizar}\, z = 4x_1 - 3x_2 + 6x_3 = c^T x,$$

  multiplicando sólo la función objetivo por (-1) se convierte en

  $$\text{minimizar}\, \hat{z} = -4x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -c^T x.$$

  Una vez que el problema de minimización es resuelto, el valor de la función objetivo se debe multiplicar por (-1), de manera que $z_* = -\hat{z}_*$, aunque las variables óptimas son las mismas.

- Si alguna componente $b_i < 0$ para algún i, se debe multiplicar por (-1) a toda la restricción, cambiando el signo de la desigualdad si la hubiera.

- Si la cota inferior de una variable no fuera cero, por ejemplo $x_1 \geq 5$, se puede definir $\hat{x}_1 = x_1 - 5 \geq 0$.

- Si una variable tuviera una cota superior, por ejemplo $x_1 \leq 7$, se la tratará como cualquiera de las otras restricciones.

- Si una variable fuera irrestricta (libre), por ejemplo la variable x_2, entonces debe reemplazarse por: $x_2 = \hat{x}_2 - x_2'$, donde $\hat{x}_2, x_2' \geq 0$.

- Una restricción de desigualdad con $\leq$ se convierte en una restricción de igualdad agregando una **variable de holgura** (slack), por ejemplo: $2x_1 + 7x_2 - 3x_3 \leq 10$ es equivalente a $2x_1 + 7x_2 - 3x_3 + s_1 = 10$ con $s_1 \geq 0$.

- Una restricción de desigualdad con $\geq$ se convierte en una restricción de igualdad agregando una **variable de exceso**, por ejemplo: $6x_1 - 2x_2 + 4x_3 \geq 15$ es equivalente a $6x_1 - 2x_2 + 4x_3 - s_1 = 15$ con $s_1 \geq 0$.
- Una restricción de igualdad puede convertirse en 2 restricciones de desigualdad, por ejemplo: $2x_1 + 3x_2 = 1$ es equivalente a $2x_1 + 3x_2 \leq 1$ y $2x_1 + 3x_2 \geq 1$.

Entonces, el problema del ejemplo puede ser escrito en la forma estándar:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & z = 10x_1 + 8x_2 \\ \text{sujeto a} & 3x_1 + 2x_2 - s_1 = 3 \\ & x_1 + 3x_2 - s_2 = 1.5 \\ & 8x_1 + 2x_2 - s_3 = 4 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{array}$$

Ahora veremos algunas definiciones y resultados sobre la geometría del problema de PL.

Definición 1. *Dados $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, $a \neq 0$, y $b \in \mathbb{R}$, se definen:*

1. $\{x \in \mathbb{R}^n | a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b\}$ *es llamado* **hiperplano** *(afín si $b \neq 0$) del espacio n-dimensional ;*
2. $\{x \in \mathbb{R}^n | a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n \leq b\}$ *es llamado* **semiespacio** *(cerrado) del espacio n-dimensional.*

Observación: un hiperplano divide al espacio en dos semiespacios.

Ejemplos:

1. $x_1 + x_2 = 2$ es un hiperplano en $\mathbb{R}^2$;
2. $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ y $x_3 = 2$ son 2 hiperplanos afines en $\mathbb{R}^3$.

Definición 2. *Un conjunto S de $\mathbb{R}^n$ es* **convexo** *si para todo par de puntos distintos $x, y \in S$, el segmento que los une también está contenido en S, es decir, $(\alpha x + (1-\alpha)y) \in S$ para todo $\alpha \in [0,1]$. (Ver Figura 2).*

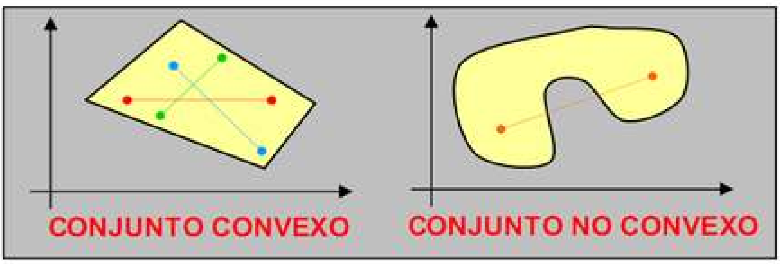

Figura 2: Conjuntos convexo y no convexo.

Los siguientes dos lemas son muy fáciles de demostrar y sus demostraciones se dejan como ejercicio.

Lema 1. *la intersección finita de conjuntos convexos es un conjunto convexo.*

Lema 2. *todo semispacio cerrado es un convexo.*

Definición 3. *La intersección de una cantidad finita de semiespacios cerrados de* $\mathbb{R}^n$ *se denomina* **región poliedral cerrada** *de* $\mathbb{R}^n$.

Observación 1: por los dos lemas anteriores, toda región poliedral cerrada es un conjunto convexo.

Observación 2: el conjunto de restricciones de un problema de programación lineal dado por $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b, Rx \leq s\}$ es una región poliedral cerrada. Usualmente, el conjunto factible de un problema de PL suele llamarse **politopo**, siempre que sea no vacío. Además, si esta región es acotada suele llamarse siemplemente **poliedro**. Que sea acotada, significa que si $(x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$ entonces existen constantes positivas k_i tales $|x_i| \leq k_i$ para $i = 1, \ldots, n$.

Para caracterizar las regiones poliedrales como Ω, estamos interesados en los **vértices**, los cuales se determinan por la intersección de las ecuaciones que definen los semiespacios de Ω.

En el Ejemplo 1, cuya región factible Ω está dada por las restricciones

$$\begin{array}{rcll} 3x+2y & \geq & 3 & \qquad\qquad (r1) \\ x+3y & \geq & 1.5 & \qquad\qquad (r2) \\ 8x+2y & \geq & 4 & \qquad\qquad (r3) \\ x & \geq & 0 & \qquad\qquad (r4) \\ y & \geq & 0 & \qquad\qquad (r5) \end{array}$$

y está graficada en la Figura 1, los vértices son:

$$P_1 = (0,2), \quad P_2 = (\frac{1}{5}, \frac{6}{5}), \quad P_3 = (\frac{6}{7}, \frac{3}{14}), \quad P_4 = (\frac{3}{2}, 0).$$

Por ejemplo, el punto $P_2 = (\frac{1}{5}, \frac{6}{5})$ se obtiene de resolver el siguiente sistema lineal:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3x+2y & = & 3 \\ 8x+2y & = & 4 \end{array} \right.$$

que corresponden a los hiperplanos (rectas) que definen las restricciones (r1) y (r3).

Observación: el punto $(0, \frac{3}{2})$ es solución de

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3x+2y & = & 3 \\ x & = & 0 \end{array} \right.$$

correspondiente a las restricciones (r1) y (r4) pero **no es un vértice de la región factible** Ω.

Definición 4. *Sea* Ω *una región poliedral cerrada de* $\mathbb{R}^n$ *determinada por un sistema de* m *inecuaciones lineales. Se llaman* **vértices** *de* Ω *a los puntos pertenecientes a* Ω *que satisfacen uno de los posibles sistemas de* n *ecuaciones lineales independientes (obtenido de las* m *inecuaciones).*

Ejercicio: determinar todos los vértices de la región poliedral cerrada Ω en $\mathbb{R}^3$ definida por

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+y+z & \leq & 3 \\ y-z & \leq & 2 \\ x-2y & \leq & 1 \\ x & \geq & 0 \end{array} \right.$$

Geométricamente, los vértices de una región poliedral cerrada Ω de $\mathbb{R}^n$ son los puntos extremos, esto es, puntos de Ω que no están contenidos en el interior de algún segmento contenido en la región. (Formalizaremos la definición de punto extremo en la próxima clase).