Lista de Resultados Teóricos
Análisis II 2do Cuatrimestre 2022

La siguiente es una lista de resultados teóricos cuya demostración se podrá pedir en los exámenes. Tenga en cuenta que las preguntas podrán estar redactadas distintas, combinadas o en forma de verdadero falso.

Además de estas preguntas entran todas las definiciones y enunciados de Lemas Teoremas y Proposiciones dados en clase.

- Sea f una función acotada en el intervalo $[a,b]$ y sean P, Q dos particiones de $[a,b]$. Entonces

  a) $L(f,P) \leq U(f,P)$.

  b) Si $P \subset Q$, $L(f,P) \leq L(f,Q)$ y la afirmación correspondiente para U

  c) $L(f,P) \leq U(f,Q)$.

- Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Si para todo $n \in \mathbb{N}$ existe una partición P_n de $[a,b]$ tal que

  $$\lim_{n\to\infty} L(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} U(f,P_n) =: \ell,$$

  entonces f es integrable sobre $[a,b]$ y $\int_a^b f = \ell$.

- Calcular $\int_0^b x\ dx$ recurriendo a las particiones $P_n = \left\{ \frac{ib}{n} \mid i = 0,\ldots,n \right\}$ $(n \in \mathbb{N})$ del intervalo $[0,b]$.

- Sea f una función acotada en el intervalo $[a,b]$. Entonces f es integrable sobre $[a,b]$ si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe una partición P de $[a,b]$ tal que $S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$.

- Si $a < c < b$ entonces f es integrable sobre $[a,b]$ si y solo si es integrable en $[a,c]$ y en $[c,b]$ y en ambos casos se cumple

  $$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

- Sea f una función integrable en el intervalo $[a,b]$ y $c > 0$ entonces cf es integrable sobre $[a,b]$ y que $\int_a^b cf = c\int_a^b f$.

- Probar que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función integrable que satisface $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a,b]$, entonces $m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$.

- Sea f una función integrable definida en el intervalo $[a,b]$ y sea $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f$. Entonces

  a) si $m \leq f \leq M$, $m \leq \mu \leq M$.

  b)si f es continua, entonces $\mu = f(x_o)$ para algún $x_o \in [a,b]$.

- Sea f una función integrable en el intervalo $[a,b]$. Demostrar que $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, definida por $F(x) = \int_a^x f$, es continua en (a,b).
- Primer Teorema Fundamental del Cálculo Infinitesimal.
- la regla de Barrow: Si f es continua en $[a,b]$ y $f = g'$ para alguna función g, entoces $\int_a^b f = g(b) - g(a)$.
- Propiedades del log: $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$, si $n \in \mathbb{N}$ entonces $\log(x^n) = n\log(x)$, y $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y)$ para todo $x, y > 0$.
- $\exp' = \exp$.
- $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.
- Sea $a > 0$. Entonces $a^0 = 1$, $a^1 = a$, $a^{x+y} = a^x a^y$ and $(a^x)^y = a^{xy}$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$
- $\log_a x = \frac{1}{\log a} \log x$ y fórmulas para las derivadas de a^x y $\log_a x$.
- Si f es derivable y $f' = f$ entonces existe c tal que $f(x) = ce^x$.
- Si $n \in \mathbb{N}$ entonces $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n}$.
- fórmulas de integración por partes y de sustitución.
- Criterio de comparación para integrales impropias.
- Criterio del radio para integrales impropias en ambas versiones ($b \in \mathbb{R}$ o $b = \infty$): Si f, g son funciones no negativas tales que $\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = l$ entonces;

  a) si $l < \infty$ y la integral impropia de g converge entonces tambien converge la de f.

  b)Si $l > 0$ y la integral impropia de g no converge entonces tampoco converge la de f.

  c)Si $l \neq 0, \infty$ entonces la integral impropia de g converge si y solo si converge la de f.
- Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene al punto a y sea $p_{n,a}$ es el polinomio de Taylor de f de orden n alrededor de a entonces
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - p_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$
- Sean P y Q dos polinomios en $(x-a)$ de grado menor o igual a n. Si P y Q son iguales hasta el orden n (i.e $lim_{x\to a}(P(x) - Q(x))/(x-a)^n = 0$) entonces $P = Q$.

- Sean f, $p_{n,a}$ su polinomio de Taylor de grado n alrededor de a y sea P un polinomio en $(x-a)$ de grado menor o igual a n. Entonces si P y f son iguales hasta el orden n, es decir que $lim_{x\to a}(f(x)-P(x))/(x-a)^n = 0$, $P = p_{n,a}$.

- Fórmulas para el resto.

- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sum_{n=1}^{\infty} b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

- Probar que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ existe, entoces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

- Sea $r \in \mathbb{R}$ entonces la serie geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ converge sii $|r| < 1$ y en ese caso $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = 1/(1-r)$.

- Criterio de comparación de series numéricas: $a_n \leq b_n$ y $\frac{a_n}{b_n}$.

- Criterio de convergencia de series: del cociente, de la integral, de Leibnitz y de la raíz.

- Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Además, la serie de los términos positivos y la serie de los términos negativos también convergen.

- Si $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ converge en $x = x_0 \neq a$ entonces converge absolutamnete para todo x tal que $|x-a| < |x_0 - a|$. Por otro lado si no converge en $x = x_1 \neq a$ entonces tampoco converge en x para todo $|x-a| > |x_1 - a|$.

- Posibilidades para el radio de convergencia, y sus propiedades.