6/9/24

El grupo simétrico

Sean X, Y conjuntos, $\theta : X \to Y$ biyección (ie X e Y tienen el mismo cardinal)

Entonces $\quad S(X) \cong S(Y)$

$$\sigma \longmapsto F(\sigma) = \theta\sigma\theta^{-1} \in S(Y)$$

(with $\sigma \in S(X)$ written below $S(X)$ as $\overset{\cup\!\!\!|}{\sigma}$)

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\sigma"] & Y \arrow[d, "\theta"] \\ Y \arrow[u, "\theta^{-1}"] \arrow[r, "F(\sigma)"'] & Y \end{tikzcd}$$

Sea F isomorfismo

Primero, F es biyectiva con $F^{-1}(\tau) = \theta^{-1}\tau\theta \quad \forall \tau \in S(Y)$

Además $F(\sigma\mu) = \theta\sigma\mu\theta^{-1} = \theta\sigma\underbrace{\theta^{-1}\theta}_{id_X}\mu\theta^{-1} = F(\sigma)F(\mu)$ $\square$

$|G| = n < \infty \qquad \underbrace{G \hookrightarrow}_{\text{monomorfismo}} S(G) \cong S_n$

Esto nos dice que el grupo simétrico no depende del conjunto G sino de su cardinal.

Fijado $n \in \mathbb{N}$

$I_n = \{1, 2, \dots, n\} \qquad S_n(I_n)$

Dado $H \leq S_n$, $i, j \in I_n$ se dirán conjugados por H, denotado $i \sim_H j$ si $\exists \sigma \in H$ tal que $j = \sigma(i)$

$\sim_H$ es una relación de equivalencia en I_n y particiona a I_n en clases de equivalencia

Veamos un caso especial: $H = \langle \sigma \rangle \quad \sigma \in S_n$ (H cíclico)

La clase de equivalencia de $i \in I_n$ se llamará la σ-órbita de i y se denotará por $O_\sigma(i) = \{i, \sigma(i), \dots, \sigma^{k-1}(i)\} \quad k = |\sigma|$

Valen las siguientes propiedades

1) $I_n = \bigcup_{i \in I_n} O_\sigma(i)$

2) $O_\sigma(i) \cap O_\sigma(j) = \emptyset$ ó bien $O_\sigma(i) = O_\sigma(j)$

3) $O_\sigma(i) = O_\sigma(j) \iff \exists k$ tal que $j = \sigma^k(i) \iff \exists l$ tal que $i = \sigma^l(j)$

4) Si $m = \min\{k \mid \sigma^k(i) = i\}$ $\quad O_\sigma(i) = \{i, \sigma, \dots, \sigma^{m-1}(i)\}$ $\quad |O_\sigma(i)| = m$

Una órbita se dice no trivial si tiene más de un elemento

Un ciclo de longitud $r \geq 2$ (r-ciclo) es una permutación que tiene una única órbita no trivial

Ejemplo: $(1\,2\,3)(4\,5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \sigma$ $\quad \{1\,2\,3\} = O_\sigma(1)$ $\quad \{4\,5\} = O_\sigma(4)$

Como $(1\,2\,3)$ y $(4\,5)$ son permutac. disjuntas, se puede intercambiar su orden:

$\sigma^2 = (1\,2\,3)(4\,5)(1\,2\,3)(4\,5) = (1\,2\,3)\cancel{(4\,5)}\cancel{(4\,5)}(1\,2\,3) = (1\,3\,2)$

Sea σ r-ciclo $\underset{\text{representante}}{O_\sigma(x_1)}$ la única órbita no trivial de σ $\quad 1 \leq x_1 \leq n$

$x_2 = \sigma(x_1) \quad x_3 = \sigma(x_2) = \sigma^2(x_1) \quad , \dots , \quad x_r = \sigma^{r-1}(x_1)$

$O_\sigma(x_1) = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$

Notación: $\sigma = (x_1\, x_2 \cdots x_r) = (x_2\, x_3 \cdots x_r\, x_1) = \dots$ → da lo mismo con cual se empieza siempre y cuando se respete el orden de la permutación

$\sigma(y) = y \quad \forall y \neq x_1, \dots, x_r$

Proposición:

i) Sea $\sigma \in S_n$ r-ciclo. Entonces $|\sigma| = r$

ii) Si $\sigma, \tau \in S_n$ son ciclos disjuntos, es decir que las órbitas no tienen elem. en común, entonces $\sigma\tau = \tau\sigma$ y $|\sigma\tau| = [|\sigma|, |\tau|]$

iii) La cantidad de r-ciclos de S_n es $\binom{n}{r}(r-1)! = \dfrac{n!}{(n-r)!\,r}$

La permutación es como poner los elem. en una mesa redonda donde no hay principio ni final sino que importa qué elementos están al lado de otros.

Demostración:

i) $|O_\sigma(x_1)| \neq 1 \quad \sigma = (x_1 \cdots x_r)$

$\sigma^r = id$ pues $\sigma^r(x_1) = x_1 \quad \sigma^r\sigma^k(x_1) = \sigma^k(x_1)$

$\sigma^m = id \Rightarrow \sigma^m(x_1) = x_1 \quad \Rightarrow \quad m \geq r$

$\therefore r = \min\{m \mid \sigma^m = id\} = |\sigma|$

ii) $\mathcal{O}_\sigma, \mathcal{O}_\tau$ son las órbitas no triviales de σ y τ respectivamente $\mathcal{O}_\sigma \cap \mathcal{O}_\tau = \emptyset$

Sea $1 \leq i \leq n$ ie $\mathcal{O}_\sigma \Rightarrow i \notin \mathcal{O}_\tau$ y $\tau(i) = i \Rightarrow \sigma\tau(i) = \sigma(i) = \tau\sigma(i)$

pues $\underset{\underset{\mathcal{O}_\sigma}{\cap}}{\sigma(i)} \notin \mathcal{O}_\tau$

Similarmente, si $i \in \mathcal{O}_\tau$

Si $i \notin \mathcal{O}_\sigma$, $i \notin \mathcal{O}_\tau \Rightarrow \sigma(i) = i = \tau(i)$

$\sigma\tau(i) = i = \tau\sigma(i)$ $\quad \therefore \sigma\tau = \tau\sigma$

- En general si $a, b \in G$ (G grupo) son tales que $|a| = n$, $|b| = m < \infty$ y $ab = ba$, entonces $|ab| = [|a|, |b|]$ (MCM)

Demostración:

Llamemos $\tilde{n} = [|a|, |b|]$. Como $n, m \mid \tilde{n} \Rightarrow a^{\tilde{n}} = b^{\tilde{n}} = e$

$(ab)^{\tilde{n}} \underset{\text{(pues } ab=ba)}{=} a^{\tilde{n}} b^{\tilde{n}} = e \quad \therefore |ab| \mid \tilde{n}$

Supongamos que $(m,n) = 1 \Rightarrow (ab)^k = e = a^k \cdot b^k \Rightarrow \underset{\text{orden} \mid n}{a^k} \cdot \underset{\text{orden} \mid m}{b^{-k}} \Rightarrow a^k = b^k = e$

$\Rightarrow n = |a| \mid k$ y $m = |b| \mid k \Rightarrow nm \mid k$ pues $(n,m) = 1$

Luego, en particular ($k = |ab|$) $\underbrace{nm}_{\tilde{n}} \mid |ab|$ ✓

$$[n,m] = \frac{nm}{(n,m)} = \frac{n}{(n,m)} \cdot m$$

$$e = a^{(n,m)\frac{n}{(n,m)}} = b^{(n,m)\frac{m}{(n,m)}}$$

Notar que $\left(\frac{n}{(n,m)}, \frac{m}{(n,m)}\right) = 1$

Entonces como $|a^{(n,m)}| = \frac{n}{(n,m)}$ y $|b^{(n,m)}| = \frac{m}{(n,m)}$ se tiene:

$$\left|(ab)^{(n,m)}\right| = \frac{n\,m}{(n,m)^2} = \frac{|ab|}{(n,m)} \checkmark$$

TEOREMA: sea $\sigma \in S_n$. Entonces $\exists m \in \mathbb{N}_0$ y ciclos $\sigma_1, \ldots, \sigma_m$ disjuntos 2 a 2 tales que $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_m$ → producto de ciclos

Además esta descomposición es única, salvo el orden de los factores

Demostración:

Podemos suponer $\sigma \neq id$

Sean $x_1, \dots, x_m$ representantes de las órbitas no triviales de σ en I_n

Para cada $1 \leq j \leq m$ definimos $\sigma_j \in S_n$ el ciclo dado por:

$$\sigma_j = (x_j \ \sigma(x_j) \ \cdots \ \sigma^{r_j - 1}(x_j)) \qquad r_j = |\mathcal{O}_\sigma(x_j)| \qquad \sigma\big|_{\mathcal{O}_\sigma(x_j)} = \sigma_j\big|_{\mathcal{O}_\sigma(x_j)}$$

Afirmamos que $\sigma = \sigma_1 \cdot \ldots \cdot \sigma_m$ (comparando lo que hace cada una)

En efecto, si $x \in I_n \to$ 1) $x \in \mathcal{O}_\sigma(x_j)$ para algún $1 \leq j \leq m$

$\hookrightarrow$ 2) $x \notin \mathcal{O}_\sigma(x_j) \quad \forall j = 1, \dots, m$

1) $\sigma(x) = \sigma\big|_{\mathcal{O}_\sigma(x_j)}(x) = \sigma_j\big|_{\mathcal{O}_\sigma(x_j)}(x) = ⊛$

Como $x \in \mathcal{O}_\sigma(x_j)$ $(x \notin \mathcal{O}_\sigma(x_i), i \neq j) \Rightarrow \sigma_i(x) = x \quad \forall i \neq j$ entonces:

$⊛ = (\sigma_1 \cdots \sigma_m)\big|_{\mathcal{O}_\sigma(x_j)}(x) = (\sigma_1 \cdots \sigma_m)(x)$

2) $\mathcal{O}_\sigma(x) = \{x\} \iff \sigma(x) = x$

también, por definición de σ_j, $\sigma_j(x) = x \ \forall j \iff \sigma(x) = (\sigma_1 \cdots \sigma_m)(x)$

Unicidad:

(I)

supongamos que $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_m = \tau_1 \cdots \tau_\ell$ con τ_i's ciclos disjuntos

Para cada $1 \leq j \leq \ell$, sea y_j un representante de la órbita no trivial de τ_j

$\sigma(y_j) = \tau_j(y_j) \neq y_j \quad \therefore \ \mathcal{O}_\sigma(y_j)$ es no trivial

- Si $r \neq j$ $\mathcal{O}_\sigma(y_r) \neq \mathcal{O}_\sigma(y_j)$ si no, debería $\exists h$ tal que $y_j = \sigma^h(y_r)$

Como los ciclos conmutan $\Rightarrow \sigma^h(y_r) = \tau_1^h \cdot \ldots \cdot \tau_\ell^h(y_r) = \tau_r^h(y_r) \in \mathcal{O}_{\tau_r}(y_r)$

disjuntos (I)

solo mueve lo que tiene r

pero $y_j \in \mathcal{O}_{\tau_j} \to$ abs!

órbitas son disjuntas

$\therefore$ σ tiene exactamente ℓ órbitas no triviales

De hecho, si $\mathcal{O}_\sigma(x)$ no trivial $\Rightarrow x \neq \sigma(x) = \tau_1 \cdots \tau_\ell(x)$

$\Rightarrow \exists!\ 1 \leq j \leq \ell$ tal que $\tau_j(x) \neq x \quad \Rightarrow x \in \mathcal{O}_{\tau_j}(y_j)$

$\Rightarrow x = \tau_j^h(y_j) = (\tau_1 \cdots \tau_\ell)^h(y_j) = \sigma^h(y_j) \quad \Rightarrow \quad x \in \mathcal{O}_\sigma(y_j)$

Luego $\mathcal{O}_\sigma(y_1), \ldots, \mathcal{O}_\sigma(y_\ell)$ son las órbitas no triviales de σ

Como $\sigma\big|_{\mathcal{O}_\sigma(y_j)} = \tau_j\big|_{\mathcal{O}_{\tau_j}}$ entonces $m = \ell$ y para cada $1 \leq j \leq \ell$ $\exists!\ k$ tal que $\tau_j = \sigma_k$

$\square$