PRÁCTICO 3

Subgrupos normales y grupos cociente.

(1) Consideremos el grupo simétrico $\mathbb{S}_3$.
  (a) Si H es el subgrupo cíclico generado por $(1\ 2)$, entonces ninguna coclase a izquierda de H (excepto la misma H) es también una coclase a derecha de H.
  (b) Si K es el subgrupo cíclico generado por $(1\ 2\ 3)$, entonces toda coclase a izquierda de K es también una coclase a derecha de K.

(2) Sea G un grupo y H y K dos subgrupos de G. Se define $HK := \{hk :\ h \in H, k \in K\}$. Probar las siguientes afirmaciones.
  (a) $HK \leq G$ si y sólo si $HK = KH$.
  (b) Si G es abeliano, entonces $HK \leq G$.

(3) Sean $k, m, p \in \mathbb{N}$, con p primo y $(p, m) = 1$. Sean G un grupo, con $|G| = p^k m$, $H, K \leq G$ tales que $|H| = p^k$, $|K| = p^d$, $0 < d \leq k$ y $K \nsubseteq H$. Entonces HK no es subgrupo de G.

(4) Si H y K son subgrupos de índice finito de un grupo G tales que $([G : H], [G : K]) = 1$, entonces $G = HK$.

(5) Mostrar que $\mathbb{Q}/\!\sim\, = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, donde $\mathbb{Q}/\!\sim$ es el grupo dado en el Ejercicio 33 del Práctico 2 y $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es el grupo cociente del grupo $(\mathbb{Q}, +)$ por el subgrupo $(\mathbb{Z}, +)$.

(6) Sean G un grupo y $N \leq G$. Probar que si $[G : N] = 2$, entonces $N \lhd G$.

(7) Sea G un grupo y sea $Z(G)$ el *centro* de G:

$$Z(G) := \{a \in G :\ ab = ba \text{ para todo } b \in G\}.$$

  (a) Probar que $Z(G)$ es un subgrupo normal abeliano de G.
  (b) ¿Es $Z/Z(G)$ abeliano?
  (c) Probar que si $f : G \to H$ es un epimorfismo, entonces $f(Z(G)) \subseteq Z(H)$ y si f es un isomorfismo se da la igualdad.
  (d) ¿Es necesaria la hipótesis de que f sea un epimorfismo?

(8) Sea G un grupo y sea $\{N_i :\ i \in I\}$ una familia de subgrupos normales de G. Probar que $\bigcap_{i\in I} N_i \lhd G$.

(9) Si G es abeliano, entonces todo subgrupo es normal. Mostrar que la recíproca no es cierta (ayuda: considerar el grupo de los cuaterniones).

(10) Sean G un grupo y H un subgrupo.
  (a) Probar que para todo $g \in G$, $gHg^{-1} \leq G$ y $gHg^{-1} \cong H$.
  (b) Si $|H| = n$ y es el único subgrupo de orden n en G, entonces $H \lhd G$.

(11) Sea G un grupo y H y K dos subgrupos de G. Probar las siguientes afirmaciones.
  (a) Si $H \lhd G$ o $K \lhd G$, entonces $HK \leq G$.
  (b) Si H y K son normales, entonces HK es normal en G.

(12) Hallar $H, K \leq D_4$ tales que $H \lhd K$, $K \lhd D_4$ y H no es normal en D_4.

(13) Decir cuáles de los siguientes H son subgrupos normales de G:
   (a) $H = \{1, r, r^2, r^3\}$ y $G = D_4$.
   (b) $\mathcal{H}$ y $G = \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$.
   (c) $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$ y $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.

(14) Sean $f : G \to H$ un homomorfismo de grupos y $N \lhd G$. Probar las siguientes afirmaciones.
   (a) Si $B \lhd H$, entonces $f^{-1}(B) \lhd G$.
   (b) Si f es epimorfismo, entonces $f(N) \lhd H$. ¿Vale lo mismo si f no es epimorfismo?
   (c) Si f es un isomorfismo, entonces $G/N \cong H/f(N)$.

(15) Sea G grupo y $N \lhd G$. Si N y G/N son finitamente generados, entonces G es finitamente generado.

(16) Sean G_1 y G_2 dos grupos y N_1 y N_2 dos subgrupos normales de G_1 y G_2 respectivamente. Probar que:
   (a) $N_1 \times N_2 \lhd G_1 \times G_2$.
   (b) $(G_1 \times G_2)/(N_1 \times N_2) \cong (G_1/N_1) \times (G_2/N_2)$. [1]

(17) Sean $n, m \in \mathbb{N}$ tal que n divide a m. Calcular $n\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

(18) Sea $N := \{(1), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$.
   (a) Mostrar que N es un subgrupo normal de $\mathbb{S}_4$ y que N está contenido en $\mathbb{A}_4$.
   (b) Dar un conjunto completo de representantes de coclases a derecha (izquierda) de N en $\mathbb{S}_4$.
   (c) Dar un conjunto completo de representantes de coclases a derecha (izquierda) de N en $\mathbb{A}_4$.
   (d) Probar que $\mathbb{S}_4/N \cong \mathbb{S}_3$ y $\mathbb{A}_4/N \cong \mathbb{Z}_3$.

(19) En cada caso determinar el índice $[G : H]$ y hallar un sistema de representantes de G módulo H.

   (a) $H = \mathbb{Z}$, $G = \mathbb{R}$.
   (b) $H = \langle r \rangle$, $G = D_n$.
   (c) $H = \mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$, $G = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$.
   (d) $H = S^1$, $G = \mathbb{C}^\times$.

(20) Sea G un grupo. Para cada $a \in G$ se define $I_a : G \to G$ por $I_a(g) := a\,g\,a^{-1}$. A la aplicación I_a se la llama la *conjugación por a*,
   (a) Probar que I_a es un automorfismo de G. Estos automorfismos se llaman *interiores*.
   (b) Probar que la aplicación $I : G \to \mathrm{Aut}(G)$, definida por $I(a) = I_a$, es un morfismo de grupos y verificar que $\mathrm{Ker}(I) = Z(G)$.
   (c) Probar que $\mathrm{Im}(I)$ es un subgrupo normal de $\mathrm{Aut}(G)$; usualmente se lo denota $\mathrm{Int}(G)$.
   (d) Deducir que $G/Z(G) \cong \mathrm{Int}(G)$.

(21) Para cada uno de los siguientes grupos G hallar un automorfismo que no sea interior.

(i) $G = \mathbb{Z}_6$. (ii) $G = \mathbb{A}_5$. (iii)* $G = \mathbb{S}_6$.

(22) Para los siguientes pares (G, N) calcular el cociente G/N, proponiendo un grupo K tal que $G/N \cong K$ y explicitando un isomorfismo.

$$(\mathbb{C}^\times, \mathbb{R}_{>0}); \quad (\mathbb{Q}^\times, \mathbb{Q}_{>0}); \quad (\mathbb{G}_{kn}, \mathbb{G}_n); \quad (S^1, \mathbb{G}_n).$$

[1] Debido a este ejercicio se suele decir que cada G_i, con $i = 1, 2$, es normal en (y es cociente de) $G_1 \times G_2$.

Ejercicios adicionales

(23) Calcular los subgrupos cerrados (topológicamente) de $(\mathbb{R}, +)$.

(24) Hallar todos los subgrupos normales de D_n, distinguiendo los casos en que n sea par o impar.

(25) En cada uno de los siguientes casos verificar que $H \lhd G$ y calcular el cociente G/H.
  (a) $G = D_6$ y $H = \{\mathrm{Id}, r^3\}$.
  (b) Sea $p \in \mathbb{N}$ primo, $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & a \end{pmatrix} :\ a, b \in \mathbb{Z}_p,\ a \neq 0 \right\}$ y $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} :\ b \in \mathbb{Z}_p \right\}$.

(26) Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.
  (a) Si $|G| = p$, con p primo, entonces G es cíclico.
  (b) Si $|G| = p^2$, con p primo, entonces G es cíclico.
  (c) Si $H \lhd G$ y $K \lhd G$, entonces $H \vee K \lhd G$. (Nota: $H \vee K := \langle H \cup K \rangle$).
  (d) Sean G_1 y G_2 grupos, y $H_i \lhd G_i$, $i = 1, 2$.
    (i) Si $G_1 \cong G_2$ y $H_1 \cong H_2$, entonces $G_1/H_1 \cong G_2/H_2$.
    (ii) Si $G_1 \cong G_2$ y $G_1/H_1 \cong G_2/H_2$, entonces $H_1 \cong H_2$.
    (iii) Si $H_1 \cong H_2$ y $G_1/H_1 \cong G_2/H_2$, entonces $G_1 \cong G_2$.
  (e) Si $G/N \cong G$, entonces $N = \{e_G\}$.

(27) Hallar pares de grupos G y H no isomorfos tales que $\mathrm{Aut}(G) \cong \mathrm{Aut}(H)$.

(28) Sea G un grupo y sea $[G, G]$ el *subgrupo conmutador* de G:

$$[G, G] := \langle [a, b] :\ a, b \in G \rangle,$$

donde, para todo $a, b \in G$, $[a, b] = aba^{-1}b^{-1} \in G$.
  (a) Probar que $[G, G] \lhd G$. ¿Es $[G, G]$ abeliano?
  (b) Mostrar que $G/[G, G]$ es abeliano.
  (c) Probar que si $f : G \to H$ es un homomorfismo, entonces $f([G, G]) \subseteq [H, H]$; más aún, si f es un epimorfismo, entonces se da la igualdad.
  (d) Sea $H \lhd G$. Entonces G/H es abeliano si y sólo si $[G, G] \subset H$.

(29) Un grupo se dice *perfecto* si $[G, G] = G$.
  (i) Sea G un grupo no abeliano. Probar que si G es simple, entonces es perfecto.
  (ii) Muestre que la recíproca del enunciado anterior no es cierta.

(30) Determinar todos los cocientes de $\mathbb{S}_3$, D_4 y $\mathcal{H}$.

(31) Sean G un grupo finito y $f : G \to G$ un isomorfismo sin puntos fijos distintos de la identidad tal que $f^2 = \mathrm{Id}$. Entonces G es abeliano.

(32) Probar que $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_n) \cong \mathbb{Z}_{(m,n)}$.

(33) Sea G un grupo y sean H, K subgrupos normales de G. Sean π_H y π_K las proyecciones de G sobre G/H y G/K respectivamente. Probar que la aplicación $f : G/(H \cap K) \to G/H \times G/K$ definida por $f(x) = (\pi_H(x), \pi_K(x))$ es un monomorfismo.

(34) Sean $n, p, r \in \mathbb{N}$, con p primo. Sea $G = \mathrm{GL}(n, p^r)$ y $g \in G$. Probar que
- g es p-unipotente si y sólo si los autovalores de g son todos 1 (i. e. $1 - g$ es nilpotente).
- g es p-regular si y sólo si g es semisimple (i. e. g es diagonalizable).

(Ver Ejercicio (28) del Práctico 2 para las definiciones de elemento p-unipotente y elemento p-regular).