Lema Sea $\varphi: U \to S$ una param de p con p hiperbólico entonces las curvas coordenadas

($u = cte$ o $v = cte$) son ambas asintóticas si y solo si $e = g = 0$

dem Podemos suponer que $\varphi(0,0) = p$
$\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$ es asintótica
$\iff \mathrm{II}_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) = 0 \quad \forall t \in I$

$$\iff e(u')^2 + 2f(u')(v') + g(v')^2 = 0$$

$(\Rightarrow)$

Si u cte $\Rightarrow g(v')^2 = 0$
$\Rightarrow$ como $v \neq cte$ $v' \neq 0$
$\Rightarrow g = 0$

(y teniendo en cuenta que las curvas coordenadas son asintóticas)

Si v cte $\Rightarrow e = 0$

$(\Leftarrow)$ Si $e = g = 0 \Rightarrow$ quiero ver

$$2f(u')(v') = 0$$

como p hiperbolico $f \neq 0$

$$\text{es } (u')(v') = 0$$
$$\Rightarrow (u') = 0 \quad \text{o} \quad (v') = 0$$

si $u = cte \Rightarrow$ se cumple
si $v = cte \Rightarrow$ se cumple

$\therefore$ las curvas coordenadas son asintóticas

<u>Lema</u> Sea $\varphi: U \to S$ una param en p no umbílico. Entonces las curvas coordenadas son linea de curvatura

$$\Leftrightarrow F = f = 0$$

<u>dem</u> $\alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$ es línea de curvatura $\Leftrightarrow dN_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) = \lambda(t)\alpha'(t) \quad \forall t$

recordar $\alpha'(t) = u'\varphi_u + v'\varphi_v = (u', v')_B$

$$[dN_{\alpha(t)}]_B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$ que ya vimos su forma

$\Rightarrow \{dN_{\alpha(t)}\}_B \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix}$ (α línea de curvatura)

Esto es para una curva cualquiera en general

(1) $\dfrac{fF - eG}{EG - F^2} u' + \dfrac{gF - fG}{EG - F^2} v' = \lambda u'$

(2) $\dfrac{eF - fE}{EG - F^2} u' + \dfrac{fF - gE}{EG - F^2} v' = \lambda v'$

multiplico (1) por v' y (2) por u' y resto

vuelta polémica

$\Leftrightarrow (fE - eF)(u')^2 + (gE - eG)u'v' + (gF - fG)(v')^2 = 0$ (I)

$(\Rightarrow)$

Ahora si $u = cte$, $v = cte$ son principales

φ_u, φ_v son ortogonales

(pq como es autoadj. diagonaliza en b on)

Ahora si miro $u = cte$

$\Rightarrow F = 0 \Rightarrow fE(u')^2 + (gE - eG)u'v' + (-fG)(v')^2 = 0$

como $u' = 0$ y $G \neq 0 \Rightarrow A = 0$

análogo con $v = cte$

$(\Leftarrow)$ si $F = f = 0 \Rightarrow$ las curvas coord son líneas de curvatura pues se satisface I

<u>ejemplo</u> Superficie de revolución

Sea $\alpha(v) = (p(v), 0, q(v))$ PLA $v \in (a,b)$ y $p(v) > 0$

y sea $\varphi(u,v) = (p(v)\cos u, p(v)\,\text{sen}(u), q(v))$

φ definida en $(0,2\pi) \times (a,b)$

$\varphi_u = (-p(v)\,\text{sen}\,u, p(v)\cos u, 0)$

$\varphi_v = (p'(v)\cos u, p'(v)\,\text{sen}\,u, q'(v))$

$\Rightarrow E = p(v)^2, \; F = 0, \; G = (p')^2 + (q')^2 \underset{PLA}{=} 1$

$$\varphi_{uu} = (-p(v)\cos u, -p(v)\operatorname{sen} u, 0)$$

$$\varphi_{uv} = (-p'(v)\operatorname{sen} u, p'(v)\cos u, 0)$$

$$\varphi_{vv} = (p''(v)\cos u, p''(v)\operatorname{sen} v, q''(v))$$

$$N = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|} = (q'(v)\cos(u), q'(v)\operatorname{sen}(u), -p'(v))$$

$e = -p(v)q'(v) \quad f = 0 \quad g = p''(v)q'(v) - p'(v)q''(v)$

Como $f = F = 0 \qquad B = \{\varphi_u, \varphi_v\}$

$$\Rightarrow [dN]_B \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{eG}{EG} & 0 \\ 0 & \frac{-gE}{EG} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{e}{E} & 0 \\ 0 & -\frac{g}{E} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \varphi_u, \varphi_v$ son avecs de $-dN$

con avals $\frac{e}{E}, \frac{g}{G}$

$$\{b_1, b_2\} = \left\{ \frac{e}{E}, \frac{g}{E} \right\} = \left\{ -\frac{q'}{p}, p''q' - p'q'' \right\}$$

$$K = \frac{eg}{EG} = -\frac{q'}{p}\left(p''q' - p'q''\right) = \circledast$$

como α PLA $(p')^2 + (q')^2 = 1$

$= \|\alpha'\|^2 = \langle p', q' \rangle^2$

$$\Rightarrow 2p'p'' + 2q'q'' = 0$$

$$\Rightarrow p'p'' + q'q'' = 0$$

$$\Rightarrow q'q'' = -p'p''$$

$$\circledast = \frac{-(q')^2 p'' + p'q'q''}{p}$$

$$= \frac{-(q')^2 p'' - p'p'p''}{p}$$

$$= \frac{-p''\left((q')^2 + (p')^2\right)}{p} = -\frac{p''}{p}$$

$$\therefore \boxed{K = -\frac{p''}{p}}$$

Además

$$H = \frac{1}{2}\left(-\frac{q'}{p} + p'' q' - p' q''\right)$$

Por otro lado

∘) p planar $\Leftrightarrow$ $q' = 0 \wedge q'' = 0$

∘) p parabólico $(K = 0 \wedge dN \neq 0)$

$K = 0 \Leftrightarrow p'' = 0$

$$\{h_1, h_2\} = \{\frac{q'}{p}, -p' q''\}$$

$\nearrow$ $q' = 0 \wedge q'' \neq 0$

$\searrow$ $q' \neq 0 \Rightarrow p' q'' = 0$

Isometrias

Dada $F: S_1 \to S_2$ se dice que F es una isometría si es un difeomorf tal que

i) $\langle \underbrace{dF_p(v)}_{\in T_pS_2}, \underbrace{dF_p(w)}_{\in T_pS_2} \rangle = \langle \underbrace{v}_{\in T_pS_1}, \underbrace{w}_{\in T_pS_2} \rangle$

$\forall p \in S_1 \quad \forall v, w \in T_pS_1$

Si tal F existe se dice que F es isométrica

obs La condición es equivalente a

$$I_{F(p)}(dF_p(v)) = I_p(v) \quad \forall p \in S$$
$$\forall v \in T_pS$$

def Una función $F: V_1 \to S_2$ V_1 abierto de S_1, $p \in V_1$ se dice isometría local en p si existe entorno abierto U_2 de $F(p)$ en S_2 tal que $F: V_1 \to U_2$ es isometría

o) Decimos que S_1 es localmente isométrica a S_2 si $\forall p \in S_1$ existe una isometría local de p en S_1 en S_2

i) Decimos que S_1 y S_2 son localmente isométricos si S_1 es localmente isom a S_2 y S_2 es loc isom a S_1