Variables aleatorias

Consideremos dos juegos en el que cada jugador arroja 3 veces una moneda, la cual tiene probabilidad p de salir cara. $(0 < p < 1)$

En el primer juego:

- Por cada cara, se le paga al jugador \$1.
- Por cada cruz el jugador debe pagar \$1.

En el segundo juego:

- Se paga al jugador \$3 si obtiene por lo menos 2 caras.
- El jugador paga \$4 si obtiene por lo menos 2 cruces.

Entonces: $\left(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P\right)$

		JUEGO 1	JUEGO 2
ω	$P(\{\omega\})$	$X(\omega)$	$Y(\omega)$
(ccc)	p^3	3	3
(ccx)	$p^2(1-p)$	1	3
(cxc)	$p^2(1-p)$	1	3
(xcc)	$p^2(1-p)$	1	3
(cxx)	$p(1-p)^2$	-1	-4
(xcx)	$p(1-p)^2$	-1	-4
(xxc)	$p(1-p)^2$	-1	-4
(xxx)	$(1-p)^3$	-3	-4

Puntos Muestrales (Resultados del experimento)

Asignación de Probabilidad

Cantidad en \$ que recibe (+) o que debe pagar (-) el jugador

La cantidad de interés en cada juego está representada en ambos juegos por la cantidad total que recibe o debe pagar el jugador.

Esta cantidad puede pensarse como una función del resultado del experimento. Más precisamente que tanto X como Y son funciones a valores reales cuyo dominio es Ω. Precisemos estas ideas:

Definición: Sea E experimento con espacio muestral Ω y sea $\mathcal{A}$ una σ-álgebra de subconjuntos de Ω. Decimos que $X : \Omega \to \mathbb{R}$ función, es una variable aleatoria (v.a) sobre $(\Omega, \mathcal{A})$ si $\forall\, x \in \mathbb{R}$, se cumple que $\{\omega \in \Omega / X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{A}$

La definición establece que $X : \Omega \to \mathbb{R}$ función, es v.a sobre $(\Omega, \mathcal{A})$, si $\forall\, x \in \mathbb{R}$ $\{\omega \in \Omega / X(\omega) \leq x\}$ es un evento; es decir la preimagen por X de $(-\infty, x]$ es un evento $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

La definición NO afirma que X tiene inversa

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ función

$$x \in \mathbb{R} \to (-\infty, x] \xrightarrow{X^{-1}} \underbrace{\{\omega \in \Omega / X(\omega) \leq x\}}_{\text{Subconjunto de } \Omega \text{ que puede o no estar en } \mathcal{A}.}$$

Para que X sea v.a., $\{\omega \in \Omega / X(\omega) \leq x\}$ debe estar en $\mathcal{A}$, cualquiera sea x en $\mathbb{R}$.

Ejemplo: En el problema de los dos juegos, nos concentremos en el juego 1

$\Omega = \{(ccc); (ccx); (cxc); (xcc); (cxx); (xcx); (xxc); (xxx)\}$

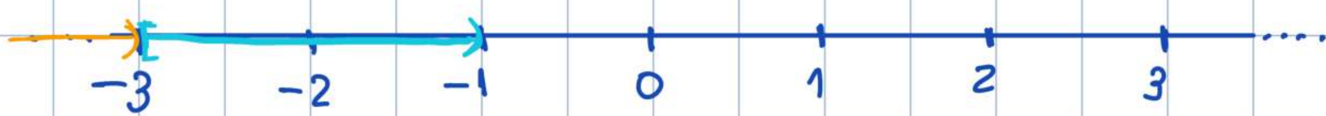
$\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ $\quad p =$ "probabilidad de sacar cara en cq. tirada"

		JUEGO 1	JUEGO 2
ω	$P(\{\omega\})$	$X(\omega)$	$Y(\omega)$
(ccc)	p^3	3	3
(ccx)	$p^2(1-p)$	1	3
(cxc)	$p^2(1-p)$	1	3
(xcc)	$p^2(1-p)$	1	3
(cxx)	$p(1-p)^2$	-1	-4
(xcx)	$p(1-p)^2$	-1	-4
(xxc)	$p(1-p)^2$	-1	-4
(xxx)	$(1-p)^3$	-3	-4

Definimos $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$X(\omega) = \begin{cases} -3 & \text{si } \omega = (xxx) \\ -1 & \text{si } \omega \in \{(cxx); (xcx); (xxc)\} \\ 1 & \text{si } \omega \in \{(ccx); (cxc); (xcc)\} \\ 3 & \text{si } \omega = (ccc) \end{cases}$$

¿Es X variable aleatoria sobre $(\Omega, \mathcal{A})$



Sea $\underline{x < -3}$ $\quad \{\omega \in \Omega / X(\omega) \leq x\} = \emptyset \in \mathcal{A}$

Sea $\underline{-3 \leq x < -1}$ $\quad \{\omega \in \Omega / X(\omega) \leq x\} = \{\omega \in \Omega / X(\omega) = -3\} = \{(xxx)\} \in \mathcal{A}$

Sea $-1 \leq x < 1$ $\quad \{\omega \in \Omega / X(\omega) \leq x\} = \{(xxx); (cxx); (xcx); (xxc)\} \in \mathcal{A}$

⋮

completar (ejercicio)

Conclusión: X es variable aleatoria

<u>Ejercicio</u> Analice si X es v. a. sobre $(\Omega, \mathcal{B})$ con $\mathcal{B} = \{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$ donde $A = \{(ccc); (xxx)\}$

<u>Ejemplo</u>: $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ espacio de probabilidad

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \ / \ X(\omega) = c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}$$

Entonces X es v.a sobre $(\Omega, \mathcal{A})$ pues:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Sea } x < c & \{\omega / X(\omega) \leq x\} = \emptyset \in \mathcal{A} \\ \text{Sea } c \leq x & \{\omega / X(\omega) \leq x\} = \Omega \in \mathcal{A} \end{array}\right\} \Rightarrow X \text{ es v.a sobre } (\Omega, \mathcal{A})$$

No estamos diciendo que los resultados del experimento son todos iguales. Sino que a cualquier resultado del experimento (hay al menos dos resultados diferentes) se le asocia por X un mismo valor: c

> <u>Proposición</u>: Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ espacio de probabilidad y sea $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ v.a. sobre $(\Omega, \mathcal{A})$.
> <u>Entonces</u>: $\forall x \in \mathbb{R}$: a) $\{\omega \in \Omega / X(\omega) < x\} \in \mathcal{A}$
> b) $\{\omega \in \Omega / X(\omega) = x\} \in \mathcal{A}$

__Demostración:__ Ejercicio

- Ayuda para a): Sea $x \in \mathbb{R}$

$$\{\omega \in \Omega / X(\omega) < x\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{\omega \in \Omega / X(\omega) \leq x - \frac{1}{n}\right\}$$

- Ayuda para b): Aplicar a) y usar diferencia de conjuntos.

__Notación:__ (Simplificamos la escritura)

Sea $x \in \mathbb{R}$ al conjunto $\{\omega \in \Omega / X(\omega) \leq x\}$ lo denotaremos como $\{X \leq x\}$ ó $(X \leq x)$. Es decir

$$\{\omega \in \Omega / X(\omega) \leq x\} =: \{X \leq x\} =: (X \leq x)$$

Similarmente:

$$\{\omega \in \Omega / X(\omega) = x\} =: \{X = x\} =: (X = x)$$

$$\{\omega \in \Omega / X(\omega) < x\} =: \{X < x\} =: (X < x)$$

Definición

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y sea $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Decimos que X es una variable aleatoria discreta sobre $(\Omega, \mathcal{A})$ si su rango es un conjunto finito de números reales $\{x_i\}_{i=1}^{n}$, o un conjunto infinito numerable de números reales $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, tal que $\forall i = 1, 2 \ldots n, \infty$ $(X = x_i) \in \mathcal{A}$.

Definición:

Si X es v.a discreta sobre $(\Omega, \mathcal{A})$, decimos que X es una v.a a valores enteros, si X toma sólo valores enteros; y decimos que X es v.a. a valores enteros no negativos, cuando X asume sólo valores enteros no negativos.

Ejemplo:

La v.a X del juego 1 es variable aleatoria discreta (Ejercicio)

En particular es variable aleatoria a valores enteros (Ejercicio)

Definición

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y sea $X: \Omega \to \mathbb{R}$ una v. a. discreta sobre $(\Omega, \mathcal{A})$. Entonces la función $f_X: \mathbb{R} \to [0,1]$ dada por:

$$f_X(x) = P(X=x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

se llama FUNCIÓN de DENSIDAD DISCRETA de X.

Para no perder de vista la dependencia de P, a f_X se le suele denotar P_X

Además: Decimos que $x \in \mathbb{R}$ es un valor posible de X, si $f_X(x) > 0$

Ejemplo

Consideremos el caso del juego 1; definimos, X variable aleatoria discreta dada por:

$$X(w) = \begin{cases} -3 & \text{si} \quad w = (\text{x,x,x}) \\ -1 & \text{si} \quad w \in \{(\text{x,x,c});(\text{x,c,x});(\text{c,x,x})\} \\ 1 & \text{si} \quad w \in \{(\text{c.c,x});(\text{x,c,c});(\text{c,x,c})\} \\ 3 & \text{si} \quad w = (\text{c,c,c}) \end{cases}$$

donde c indica que la moneda salió cara; y x indica que la moneda salió cruz.
Entonces, si p es la probabilidad de que la moneda salga cara $(0 < p < 1)$,la función de densidad discreta de

X esta dada por $p_X : \mathbb{R} \to [0,1]$:

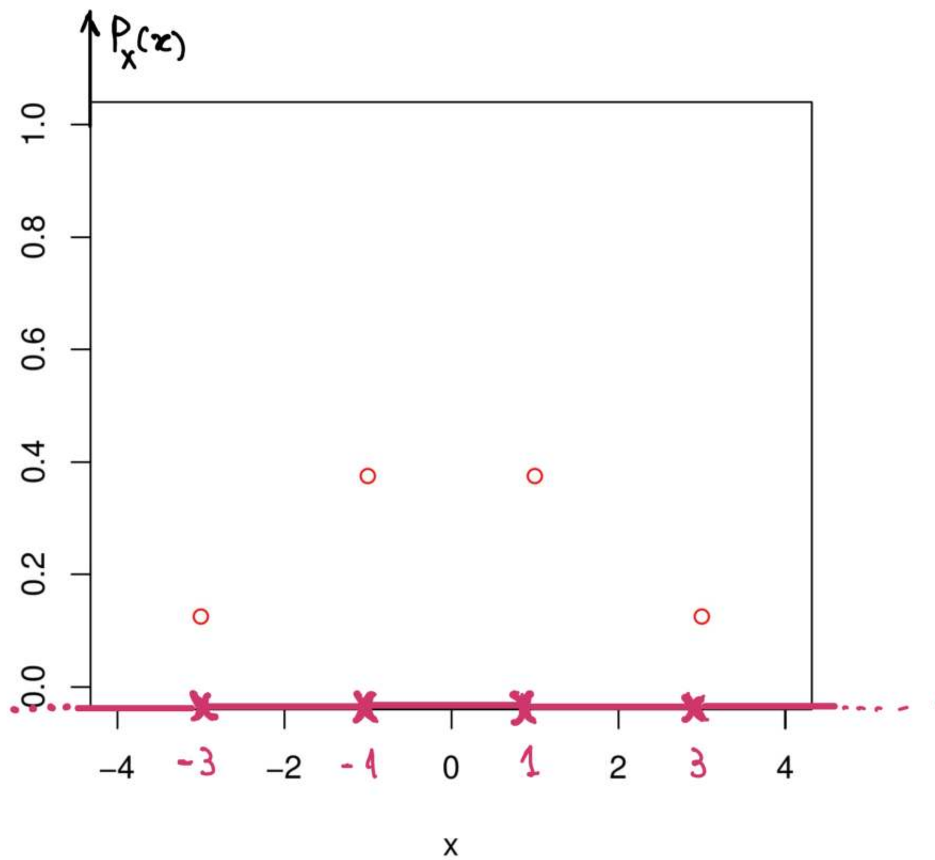
$$p_X(x) = \begin{cases} (1-p)^3 & \text{si} \quad x = -3 \\ 3p(1-p)^2 & \text{si} \quad x = -1 \\ 3p^2(1-p) & \text{si} \quad x = 1 \\ p^3 & \text{si} \quad x = 3 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

		JUEGO 1	JUEGO 2
ω	$P(\{\omega\})$	$X(\omega)$	$Y(\omega)$
(ccc)	p^3	3	3
(ccx)	$p^2(1-p)$	1	3
(cxc)	$p^2(1-p)$	1	3
(xcc)	$p^2(1-p)$	1	3
(cxx)	$p(1-p)^2$	-1	-4
(xcx)	$p(1-p)^2$	-1	-4
(xxc)	$p(1-p)^2$	-1	-4
(xxx)	$(1-p)^3$	-3	-4

La función p_X depende de la constante p, llamado parámetro de la función de densidad discreta de X.

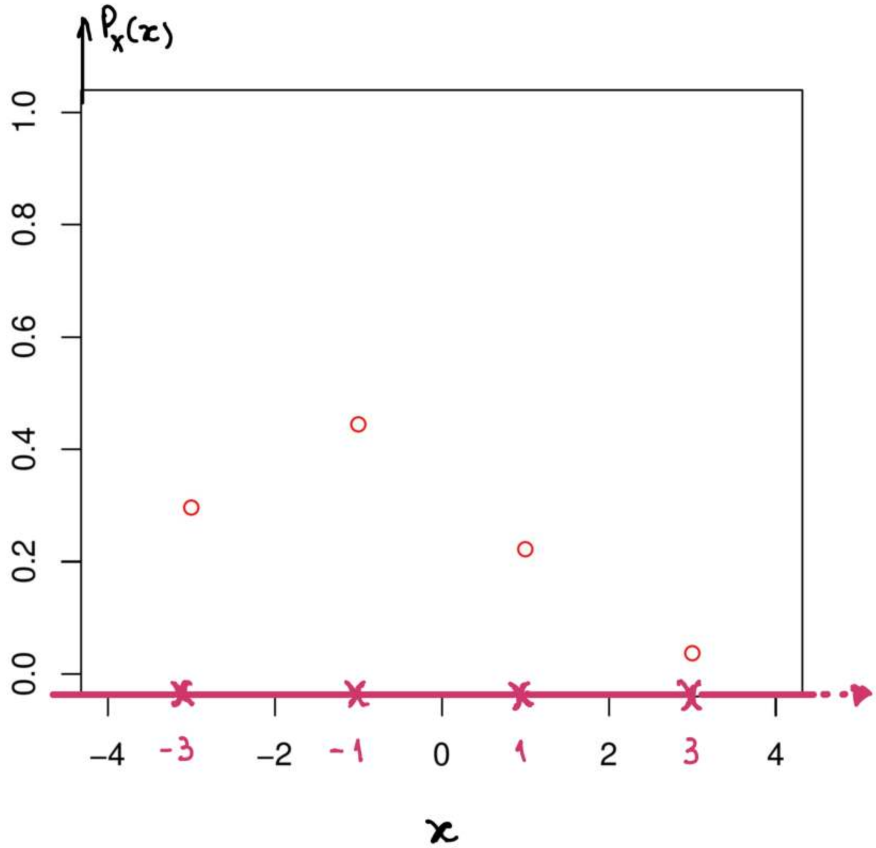
Supongamos $p = 0.5$ **(Caso 1):**

$$p_X(x) = \begin{cases} 1/8 & \textbf{si} \quad x = -3 \textbf{ ó } x = 3 \\ 3/8 & \textbf{si} \quad x = -1 \textbf{ ó } x = 1 \\ 0 & \textbf{c.c.} \end{cases}$$



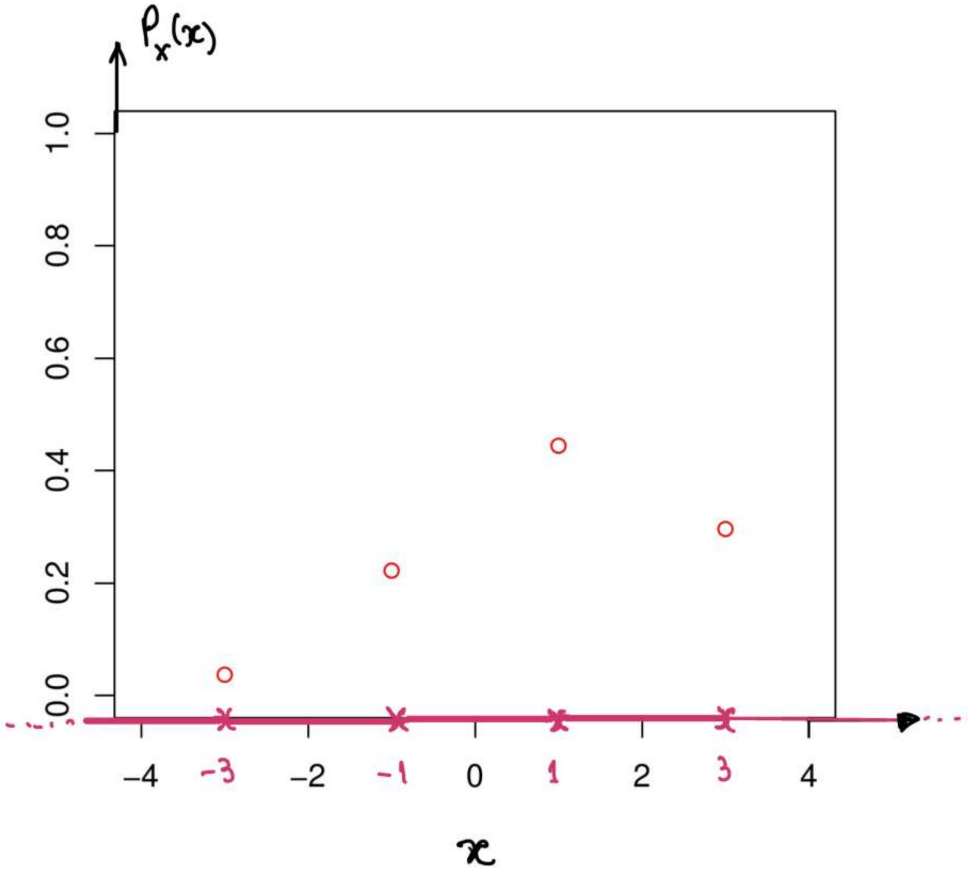
Analicemos otros casos:
Caso 2: $p = 1/3$

$$p_X(x) = \begin{cases} 8/27 & \textbf{si} \quad x = -3 \\ 12/27 & \textbf{si} \quad x = -1 \\ 6/27 & \textbf{si} \quad x = 1 \\ 1/27 & \textbf{si} \quad x = 3 \\ 0 & \quad\quad \textbf{c.c.} \end{cases}$$



Caso 3: $p = 2/3$

$$p_X(x) = \begin{cases} 1/27 & \textbf{si} \quad x = -3 \\ 6/27 & \textbf{si} \quad x = -1 \\ 12/27 & \textbf{si} \quad x = 1 \\ 8/27 & \textbf{si} \quad x = 3 \\ 0 & \quad \textbf{c.c.} \end{cases}$$



Propiedades de la función densidad discreta

Proposición

Sea $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ un espacio de probabilidad y X v.a. discreta definida sobre $(\Omega, \mathfrak{A})$ con función de densidad discreta P_X entonces:

i) $P_X(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

ii) $\{x \in \mathbb{R} / P_X(x) \neq 0\}$ es un subconjunto finito o infinito numerable de $\mathbb{R}$.

iii) $\sum_{i=1}^{n \leq \infty} P_X(x_i) = 1$ donde $\{x_i\}_{i=1}^{n \leq \infty} = \{x \in \mathbb{R} / P_X(x) \neq 0\}$

Demostración: Ejercicio

Definición: Una función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisface i), ii) y iii) de la proposición anterior, se llama densidad discreta

Se puede probar que toda función de densidad discreta es la función de densidad discreta de alguna v.a. discreta. Es decir, si f es una función de densidad discreta, es posible construir un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ y una v.a. discreta X definida sobre $(\Omega, \mathfrak{A})$ tal que

$$P_X = f$$

Función de Distribución Acumulada

Definición

Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un e.p. y $X : \Omega \to \mathbb{R}$ una v.a sobre $(\Omega, \mathcal{A})$

Se define la función de distribución acumulada de X a $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ dada por:

$$F_X(x) = P(X \leq x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Recordemos que $(X \leq x) = \{ w \in \Omega / X(w) \leq x \}$

Ejemplo: Consideremos X definida a partir del juego 1

$R(X)$ = rango de $X = \{-3, -1, 1, 3\}$

Queremos determinar F_X

$F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ y $F_X(x) = P(X \leq x)$

Sea $x \geq 3$ $\quad F_X(x) = P(X \leq x) = P\Big(\overbrace{\{ w \in \Omega / \underbrace{X(w)}_{\text{puede valer } -3,\, -1,\, 1 \text{ ó } 3} \leq \underbrace{x}_{x \geq 3} \}}^{\Omega}\Big) = P(\Omega) = 1$

Sea $1 \leq x < 3$ $\quad F_X(x) = P(X \leq x) = P\Big(\{ w \in \Omega / \underbrace{X(w)}_{\text{puede valer } -3,\, -1 \text{ ó } 1} \leq \underbrace{x}_{1 \leq x < 3} \}\Big)$

$1 \leq x < 3$ $\quad F_X(x) = P\left(\{w \in \Omega / X(w) \in \{-3, -1, 3\}\}\right)$

$$= P(X=-3) + P(X=-1) + P(X=3)$$

$$= P_X(-3) + P_X(-1) + P_X(3)$$

Teníamos:

$$p_X(x) = \begin{cases} (1-p)^3 & \text{si} \quad x=-3 \\ 3p(1-p)^2 & \text{si} \quad x=-1 \\ 3p^2(1-p) & \text{si} \quad x=1 \\ p^3 & \text{si} \quad x=3 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

Entonces si $1 \leq x < 3$,

$$F_X(x) = (1-p)^3 + 3p(1-p)^2 + 3p^2(1-p)$$
$$= 1 - p^3$$

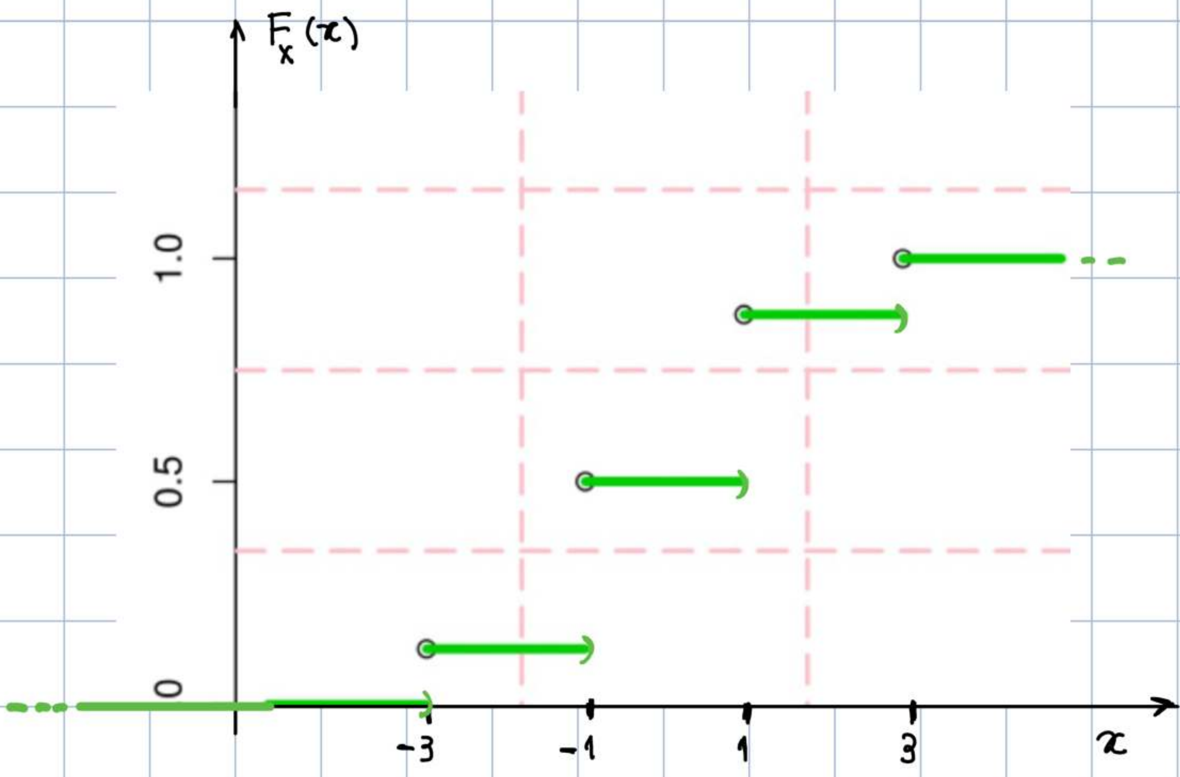
Continuar el análisis: $-1 \leq x < 1$, luego $-3 \leq x < -1$ y luego $x \leq -3$

Concluir que:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < -3 \\ (1-p)^3 & \text{si} \quad -3 \leq x < -1 \\ (1-p)^3 + 3p(1-p)^2 & \text{si} \quad -1 \leq x < 1 \\ 1-p^3 & \text{si} \quad 1 \leq x < 3 \\ 1 & \text{si} \quad 3 \leq x \end{cases}$$

Analicemos el caso $p = 0.5$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \textbf{si} \quad x < -3 \\ 1/8 & \textbf{si} \quad -3 \leq x < -1 \\ 1/2 & \textbf{si} \quad -1 \leq x < 1 \\ 7/8 & \textbf{si} \quad 1 \leq x < 3 \\ 1 & \textbf{si} \quad x \geq 3 \end{cases}$$



$$p_X(x) = \begin{cases} 1/8 & \textbf{si} \quad x = -3 \textbf{ ó } x = 3 \\ 3/8 & \textbf{si} \quad x = -1 \textbf{ ó } x = 1 \\ 0 & \textbf{c.c.} \end{cases}$$

Ejercicio: Calcular y graficar F_X para los otros dos casos ($p = 1/3$ y $p = 2/3$)

Ejercicios

1) Determinar y graficar P_X y F_X para el caso en que $X \equiv c$ $(c \in \mathbb{R})$

2) Verificar que Y definida a partir del juego 2 es una v.a discreta a valores enteros. Luego determinar P_Y y F_Y. Graficar estas funciones para diferentes valores de p (por ejemplo: $p = 0.5$, $p = 1/3$, $p = 2/3$)