Clase 21 - Programación lineal (3)

Fundamentos matemáticos del método Simplex

Por razones de tiempo veremos algunos fundamentos matemáticos del método Simplex y posteriormente presenteramentos la versión tabla del método, sin entrar en casos particulares ni variantes especiales que lo hacen más robusto. Comenzaremos dando algunas definiciones.

Consideremos el sistema lineal de ecuaciones de la forma

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. \tag{1}$$

Matricialmente se puede expresar como

$$Ax = b,$$

con $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$ y $b \in \mathbb{R}^m$. Supongamos que $n > m$ y que la matriz A tiene rango m.

Definición 1. Solución básica: *dado un conjunto de m ecuaciones lineales en n incógnitas como en (1), se llamará* **base** *a cualquier submatriz B, $m \times m$ de A, no singular, formada por m columnas independientes de A. Es posible reordenar columnas de A para definir B. Como rango(A) = m, es claro que existe tal matriz B. Sea N la submatriz $m \times (n-m)$ de A, formada por las restantes columnas. Así podemos escribir A y x particionados:*

$$A = [B|N] \quad y \quad x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix} \quad \text{y por lo tanto,} \quad Bx_B + Nx_N = b.$$

Luego $x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N$.

Si $x = (x_B, x_N) = (B^{-1}b - B^{-1}Nx_N, x_N)$ es tal que $x_N = 0$, es decir cada una de las $(n-m)$ componentes son iguales a 0, entonces $x_B = B^{-1}b$ y así $x = (x_B, x_N) = (x_B, 0)$ es llamada **solución básica** *de (1), con respecto a la base B. Las componentes de x_B son llamadas* **variables básicas** *de x y las componentes de x_N son llamadas* **variables no-básicas** *de x.*

Definición 2. Solución básica degenerada: *si una o más variables básicas en una solución básica toma el valor* 0*, se dice que esta solución es una* **solución básica degenerada**. *Desde el punto de vista geométrico, esto ocurre cuando se tiene un vértice determinado por la intersección de más de dos rectas o hiperplanos.*

Ahora consideremos el siguiente sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} Ax & = & b \\ x & \geq & 0 \end{array}\right. \tag{2}$$

con $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, de rango m y $b \in \mathbb{R}^m$, el cual representa el conjunto factible de restricciones de un problema de PL en su forma estándar.

Definición 3. *Una solución x que satisface (2) se dice que es factible para este sistema. Si además esa solución x es básica se llama* **solución básica factible**. *Si esta solución fuera básica degenerada, se la llama* **solución básica factible degenerada**.

Finalmente, consideremos el problema de PL en la forma estándar:

$$\begin{cases} \text{Minimizar} & c^T x \\ \text{sujeto a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{cases} \tag{3}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ es una matriz de rango m.

Definición 4. *Se llama* **solución básica factible óptima** *a la solución básica factible que da el valor óptimo (en este caso el valor mínimo) para la función objetivo del problema (3).*

El siguiente teorema, que sólo enunciaremos, establece la importancia fundamental de las soluciones básicas factibles para resolver un problema de PL. Quien esté interesado en ver la demostración puede consultarla en el libro "Linear and Nonlinear Programming" de Luenberger, Ye, 4th edition, Springer, 2015.

Teorema 1. Teorema Fundamental de Programación Lineal. *Dado un problema de PL en la forma estándar (3), donde $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, tiene rango m. Luego,*

i) si existe una solución factible, entonces existe una solución básica factible.

ii) si existe una solución factible óptima, entonces existe una solución básica factible óptima.

La importancia de este teorema radica en que reduce el problema de resolver un problema de PL a la búsqueda en el conjunto de soluciones básicas factibles. Como para un problema de PL de n variables y m restricciones, con $n > m$, se tiene (a lo sumo)

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

soluciones básicas (correspondientes al número de posibilidades de elegir m columnas de las n posibles para construir la matriz base B). De esta manera, este teorema da una natural, pero muy ineficiente, técnica de búsqueda finita, la cual suele llamarse **método enumerativo**. Este método consiste en determinar todas las soluciones básicas factibles resolviendo todos los respectivos sistemas lineales y elegir el que produzca el menor valor objetivo, en el caso de un problema de minimización. Por otro lado, el método simplex, que veremos próximamente realiza una búsqueda inteligente sin necesidad de revisar todas las soluciones básicas factibles.

Por último veremos la conexión de las soluciones básicas factibles con los puntos extremos. Esta conexión establece la relación entre resultados algebraicos con resultados geométricos y de convexidad.

Definición 5. *Un punto x en la región factible $\Omega = \{x|Ax = b, x \geq 0\}$, con $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ de rango m y $b \in \mathbb{R}^m$, se dice que es un* **punto extremo** *de Ω si y sólo si x no puede ser expresado como:*

$$x = \alpha y + (1-\alpha) z, \quad y, z \in \Omega, \quad 0 < \alpha < 1, \quad x \neq y \neq z$$

Fijo

Esta definición dice básicamente que un punto extremo no puede estar en un segmento que conecte otros dos puntos distintos del mismo conjunto. Por ejemplo, cada vértice de un triángulo es un punto extremo del triángulo. Por lo tanto, todos los vértices de una región poliedral cerrada como Ω son puntos extremos.

Ahora veremos algunos resultados que relacionan los vértices de la región factible con la solución óptima de un problema de PL.

Teorema 2. *Sea Ω la región factible dada en la definición anterior. Un vector x es un punto extremo de Ω si y sólo es una solución básica factible de Ω.*

Demostración.
($\Leftarrow$) Supongamos que x es una solución básica factible de Ω, entonces x puede particionarse como $x = (x_B, x_N)$, con $Bx_B = b$ y $x_B \geq 0$, $x_N = 0$.

Demostraremos que x debe ser un punto extremo, por contradicción. Si x no es un punto extremo entonces existen dos puntos distintos $y, z \in \Omega$ tal que

$$x = \alpha y + (1-\alpha)z, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Como α y $(1-\alpha)$ son positivos y $x_N = 0$ entonces los vectores y, z también tienen se particionan de la misma manera y tienen $n - m$ componentes iguales a cero:

$$y = (y_B, y_N), \qquad z = (z_B, z_N)$$

con $By_B = b$, $y_B \geq 0$, $y_N = 0$, y $Bz_B = b$, $z_B \geq 0$, $z_N = 0$.

Como la matriz B es inversible y $Bx = By = Bz = b$, entonces $x = y = z$ lo cual contradice que x no es punto extremo. Por lo tanto hemos probado que x es un punto extremo.

($\Rightarrow$) Supongamos que x es un punto extremo entonces veamos que x es una solución básica factible. También se probará por contradicción.

Como x es un punto extremo de Ω también debe ser un punto factible, es decir, $Ax = b$ y $x \geq 0$. Reordenando las variables del vector x, si fuera necesario, es posible escribir x como

$$x = \begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix},$$

donde $x_N = 0$ y $x_B > 0$, es decir x_N contiene las componentes de x que son iguales a cero. Entonces particionamos la matriz A de igual forma como

$$A = [B|N]$$

donde B y N contienen las columnas correspondientes a x_B y x_N, respectivamente. Notar que B podría no ser una matriz cuadrada. Si las columnas de B son linealmente independientes, entonces x es una solución básica factible y termina aquí la demostración. Ahora supongamos que las columnas de B son linealmente dependientes y construiremos dos puntos factibles distintos y, z tal que $x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$, y por lo tanto, x no puede ser un punto extremo.

Sea B_i la i-ésima columna de B. Si las columnas de B son linealmente dependientes, entonces existen números reales $r_1, \ldots, r_k$, no todos nulos, tales que

$$r_1B_1 + r_2B_2 + \cdots + r_kB_k = 0, \quad \text{o equivalentemente} \quad B_1r_1 + B_2r_2 + \cdots + B_kr_k = 0,$$

esto dice que si $r = (r_1, r_2, \dots, r_k)$, entonces $Br = 0$. Notar que

$$B(x_B \pm \alpha r) = Bx_B \pm \alpha Br = Bx_B \pm 0 = Bx_B = b,$$

para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Como $x_B > 0$, para valores suficientemente pequeños de $\varepsilon > 0$ se tiene que $x_B + \varepsilon r > 0$ y $x_B - \varepsilon r > 0$. Sean

$$y = \begin{bmatrix} x_B + \varepsilon r \\ x_N \end{bmatrix} \quad \text{y } z = \begin{bmatrix} x_B - \varepsilon r \\ x_N \end{bmatrix}.$$

Luego, los vectores y, z son factibles, distintos entre sí y distintos de x. Como $x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z$, lo cual contradice que x es un punto extremo. □

Los corolarios que se enuncian a continuación son consecuencia de este teorema y del Teorema Fundamental de PL.

Corolario 1. *Si el conjunto Ω es no vacío, entonces tiene al menos un punto extremo.*

Corolario 2. *Si existe una solución óptima de un problema de programación lineal, entonces existe una solución óptima finita que es un punto extremo del conjunto de restricciones.*

Corolario 3. *El conjunto de restricciones Ω tiene a lo sumo un número finito de puntos extremos.*

Ejemplo: para fijar ideas vamos a determinar las soluciones básicas factibles del siguiente problema de maximización.

$$\begin{array}{lll}
\text{Maximizar} & z = 4500x_1 + 8000x_2 & \\
\text{sujeto a} & 5x_1 + 20x_2 \leq 400 & (r1) \\
 & 10x_1 + 15x_2 \leq 450 & (r2) \\
 & x_1 \geq 0 & (r3) \\
 & x_2 \geq 0 & (r4)
\end{array}$$

Agregando variables de holgura, las restricciones de este problema en formato estándar resultan:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc}
5x_1 & + & 20x_2 & + & x_3 & & & = & 400 \\
10x_1 & + & 15x_2 & & & + & x_4 & = & 450 \\
x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0
\end{array} \right.$$

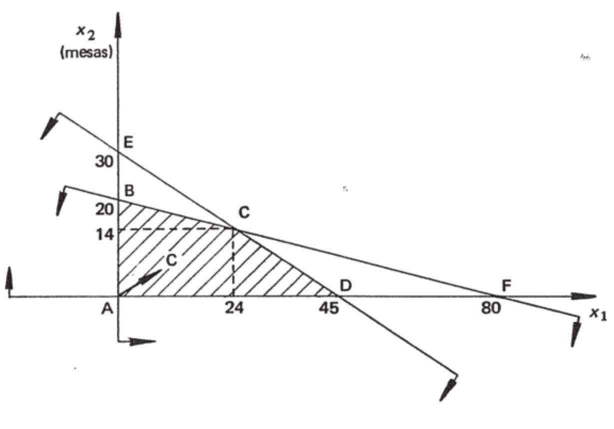

Figura 1: Región factible del ejemplo.

La matriz A y el vector b del conjunto de restricciones en la forma estándar están dados por

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 20 & 1 & 0 \\ 10 & 15 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 400 \\ 450 \end{bmatrix}.$$

Como A tiene 2 filas y 4 columnas, se tienen a lo sumo $\binom{4}{2} = \dfrac{4!}{2!(4-2)!} = 6$ casos a considerar, como posibles vértices del conjunto factible. Ver Figura 1.

Caso 1: La matriz base B formada por las columnas 3 y 4 de la matriz A. Entonces

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad x_B = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

Luego

$$B x_B = b \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 450 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto $x_B = (x_3, x_4) = (400, 450)$, $x_N = (x_1, x_2) = (0, 0)$, y la solución básica asociada a esta base es $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 400, 450)$, que corresponde al vértice A.

Caso 2: La matriz base B formada por las columnas 2 y 4 de la matriz A. Entonces

$$B = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 15 & 1 \end{bmatrix} \quad x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

Luego

$$B x_B = b \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 15 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 450 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto $x_B = (x_2, x_4) = (20, 150)$, $x_N = (x_1, x_3) = (0, 0)$, y la solución básica asociada a esta base es $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 20, 0, 150)$, que corresponde al vértice B.

Caso 3: La matriz base B formada por las columnas 1 y 2 de la matriz A. Entonces

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 20 \\ 10 & 15 \end{bmatrix} \quad x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Luego

$$B x_B = b \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 5 & 20 \\ 10 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 450 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto $x_B = (x_1, x_2) = (24, 14)$, $x_N = (x_3, x_4) = (0, 0)$, y la solución básica asociada a esta base es $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (24, 14, 0, 0)$, que corresponde al vértice C.

Caso 4: La matriz base B formada por las columnas 1 y 3 de la matriz A. Entonces

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 10 & 0 \end{bmatrix} \quad x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Luego

$$B x_B = b \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 10 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 450 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto $x_B = (x_1, x_3) = (45, 175)$, $x_N = (x_2, x_4) = (0, 0)$, y la solución básica asociada a esta base es $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (45, 0, 175, 0)$, que corresponde al vértice D.

Caso 5: La matriz base B formada por las columnas 2 y 3 de la matriz A. Entonces

$$B = \begin{bmatrix} 20 & 1 \\ 15 & 0 \end{bmatrix} \quad x_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Luego

$$Bx_B = b \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 20 & 1 \\ 15 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 450 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto $x_B = (x_2, x_3) = (30, -200)$, $x_N = (x_1, x_4) = (0, 0)$, y la solución básica asociada a esta base es $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 30, -200, 0)$, que corresponde al punto E, que no es un vértice.

Caso 6: La matriz base B formada por las columnas 1 y 4 de la matriz A. Entonces

$$B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 10 & 1 \end{bmatrix} \quad x_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

Luego

$$Bx_B = b \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 10 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 450 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto $x_B = (x_1, x_4) = (80, -350)$, $x_N = (x_2, x_3) = (0, 0)$, y la solución básica asociada a esta base es $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (80, 0, 0, -350)$, que corresponde al punto F, que no es un vértice.