Ejemplo de densidad condicional

Sea $X \sim U(0,1)$ $\quad Y \sim U(0,X)$

¿Cuál es la densidad de Y dado $X = x$ con $x \in (0,1)$?

Dado $x \in (0,1)$ $\quad Y \sim U(0,x)$

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } y \in (0,x) \\ 0 & cc \end{cases}$$

¿Cuál es $f_{X,Y}$? si $x \in (0,1)$ $y \in (0,x)$

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$$

$$\rightarrow f_{X,Y}(x,y) = f_{Y|X}(y|x) \cdot f_X(x)$$

En general

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{x} \, 1_{(0,x)}(y) \, 1_{(0,1)}(x)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \in (0,1) \wedge y \in (0,x) \\ 0 & \text{cc} \end{cases}$$

¿cuál es f_Y?

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} \, 1_{(0,x)}(y) \, 1_{(0,1)}(x) \, dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{x} \, 1_{(0,x)}(y) \, dx$$

$$= \int_y^1 \frac{1}{x} \, dx$$

$$= \begin{cases} \ln(y) & \text{si } y \in (0, x) \\ 0 & \text{cc} \end{cases}$$

Motivación

Jugador paga 100 \$ por jugar

Juego tiene $\{x_1 \dots x_6\}$ resultados

Si el resultado x_i se da
el jugador gana $\$ x_i$

¿Conviene jugar?

Supongamos que el jugador decide
jugar n veces

¿Cuánto ganará al cabo de n?

Defino Y_i = "resultado de la i-ésima jugada"

$\forall i = 1, \ldots, n$

Quiero conocer el valor de

$Y_1 + \cdots + Y_n$ v.a

i) $R(Y_i) = \{x_1, \ldots, x_r\}$ $\forall i = 1, \ldots, n$

ii) $Y_1, \ldots, Y_n$ son indeptes con igual distribución y una función densidad discreta f llamemos Y a cualquiera de ellas (resultado de una jugada)

Sea $N_n(x_i)$ la cantidad de veces que ocurrió el resultado x_i en las n jugadas $\forall i = 1, \ldots, n$

$$y_1 + \cdots + y_n = \sum_{i=1}^{r} x_i N_n(x_i)$$

resultado jugada 1 $\quad$ resultado de n-esima jugada

$\Rightarrow$ en promedio

$$\frac{y_1 + \dots + y_n}{n} = \sum_{i=1}^{r} x_i \frac{N_n(x_i)}{n}$$

$\frac{N_n(x_i)}{n}$ es la frecuencia relativa del resultado x_i $\forall i = 1, \dots, r$

la teoría frecuentista nos dice

$$\frac{N_n(x_i)}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} P(Y = x_i)$$

$$\forall i = 1, \dots, r$$

$$\Rightarrow \frac{y_1 + \dots + y_n}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} \sum_{i=1}^{r} x_i P(Y = x_i)$$

$$\Rightarrow \frac{y_1 + \dots + y_n}{n} \simeq \mu = \sum_{i=1}^{r} x_i P(Y = x_i)$$

ganará en promedio ($\frac{y_1+\dots+y_n}{n} \simeq \mu$)

- Si $\mu > 100$ conviene jugar
- Si $\mu < 100$ no
- Si $\mu = 100$ da lo mismo

μ es un promedio ponderado de los valores $\{x_1, \dots x_r\}$ y se lo llama esperanza o valor esperado de la v.a

<u>Def</u> X v.a discreta con posibles valores $x_1, \dots x_n$ y densidad f_X. Decimos X tiene esperanza finita y la definimos como

$$E(X) = \sum_{x_i} x_i \, f_X(x_i)$$

i) si $\sum |x_i| f_X(x_i) < \infty$

ii) si $\sum |x_i| f_X(x_i) = \infty$

decimos X no tiene esperanza

<u>ejemplo</u> $X \sim P(\lambda)$

$$\sum_{i=0}^{\infty} |x_i| f_X(i) = \sum_{i=0}^{\infty} i \, f_X(i)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} i \, \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda^i}{(i-1)!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^{j+1}}{j!}$$

$$= e^{-\lambda} \lambda \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{j!}$$

$= e^{-\lambda} \lambda \, e^{\lambda} = \lambda < \infty$

$\Rightarrow E(X) = \lambda$

Def Sea X v.a continua con función densidad f_X, decimos que X tiene esperanza finita si $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x)\, dx < \infty$ y se define la esperanza de X o valor esperado como

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \, f_X(x)$$

ej $X \sim U(a,b)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} |x| \frac{1}{b-a} 1_{(a,b)}(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{b-a} \int_a^b \underbrace{|x|\, dx}_{<\infty} < \infty$$

$\Rightarrow$ $E(X)$ existe

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{b-a} 1_{(a,b)}(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{b-a} \int_a^b x \, dx$$

$$\frac{1}{b-a} x^2 \Big|_a^b = \ldots\ldots = \frac{b+a}{2}$$

<u>ejemplo 2</u> $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ $\alpha, \lambda > 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x) = \int_0^{\infty} x f_X(x)$$

$f_X(x) = 0$
si $x < 0$

$$= \int_0^{\infty} x \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)} dx$$

$$= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int x^\alpha e^{-\lambda x} dx$$

$$u = \lambda x \Rightarrow x = \frac{u}{\lambda}$$

$$du = \lambda\, dx \Rightarrow \frac{du}{\lambda} = dx$$

$$= \frac{\cancel{\lambda^\alpha}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \left(\frac{u}{\cancel{\lambda}}\right)^\alpha e^{-u} \frac{du}{\lambda}$$

$$= \frac{1}{\lambda\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty u^{\overset{(\alpha+1)-1}{\alpha}} e^{-u}\, du$$

$$= \frac{1}{\lambda\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha+1)$$

$$= \frac{\alpha\,\Gamma(\alpha)}{\lambda\,\Gamma(\alpha)} = \frac{\alpha}{\lambda} < \infty$$

$$\Rightarrow \exists\; E(X)$$

$$y \quad E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_x(x)\, dx = \frac{\alpha}{\lambda}$$

ejemplo 3 $\quad X \sim \text{cauchy}$

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|}{\underbrace{1+x^2}_{\text{función par}}}\, dx$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\, dx = \frac{2}{\pi} \lim_{t \to \infty} \int_0^t \frac{x}{1+x^2}\, dx$$

$$= \frac{\cancel{2}}{\pi} \lim_{t \to \infty} \left. \frac{\ln(1+x^2)}{\cancel{2}} \right|_0^t$$

$$= \frac{1}{\pi} \lim_{t \to \infty} \ln(1+t^2) + \ln(1)$$

$$= \frac{1}{\pi} \lim_{t \to \infty} \ln(1+t^2) = \infty$$

$$\Rightarrow \nexists\, E(X)$$

Teo (A) Caso discreto

·) Sea X vector aleatorio en $\mathbb{R}^p$ y $\{x_j\}_{j\in J}$ con $J \subseteq \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{j\in J} P(X = x_j) = 1$$

·) Sea f_X densidad conjunta discreta

$$f_{\vec{X}}(\vec{x}) = P(X_1 = x_1, \ldots X_p = x_p)$$

·) Sea $\varphi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ y $Z = \varphi(\vec{X})$ v.a

$\Rightarrow$ Z tiene esperanza finita

sii
$$\sum |\varphi(\vec{x_j})| f_{\vec{x}}(\vec{x_j}) < \infty$$

y en tal caso

$$E(Z) = \sum \varphi(\vec{x_j}) f_{\vec{x}}(\vec{x_j})$$

(B) Caso continuo

Sea $X = (X_1, \dots, X_p)$ vector continuo con X_i v.a. continua $\forall i = 1, \dots, p$ y con densidad conjunta

$$f_{\vec{X}} = f(x_1, \dots x_p)$$

Sea $\varphi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ y $Z = \varphi(X)$

$\Rightarrow Z$ tiene esperanza finita si

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x_1 \dots x_p)| \, f_X(x_1 \dots x_p) \, dx_1 \dots dx_p < \infty$$

y $$E(Z) = \int \int \varphi(x_1 \dots x_p) \, f_{\vec{X}}(x_1 \dots x_p) \, dx_1 \dots dx_p$$

teo X e Y v.a. discreta con esperanza finita

$\Rightarrow$ a) Si $c = cte$ $P(X = c) = 1$

$\Rightarrow E(X) = c$

b)

c)

d)

demo 2) ε