Def X e Y v.a en $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Se dice que X e Y son indepentientes $\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}$ con $a<b$ y $c<d$ se tiene

1) $P(a < X \leq b, c < Y \leq d)$
$= P(a < X \leq b) \, P(c < Y \leq d)$

2) $P(-\infty < X \leq b, -\infty < Y \leq d)$
$= P(-\infty < X \leq b) \cdot P(-\infty < Y \leq d)$

Entonces X e Y son indeptes sii

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) \, F_Y(y) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$$

demo $(\Rightarrow)$

$$F_{XY}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$
(por 2) $= P(X \leq x) \, P(Y \leq y)$
$= F_X(x) \, F_Y(y)$

$\Leftarrow$) (1) $P(a < X \le b, c < Y \le d)$

clase pasada $\to$ $= F_{X,Y}(b,d) - F_{X,Y}(a,d) - F_{X,Y}(b,c) + F_{X,Y}(a,c)$

hipótesis $= F_X(b)F_Y(d) - F_X(a)F_Y(d) - F_X(b)F_Y(c) + F_X(a)F_Y(c)$

$= F_X(b)(F_Y(d) - F_Y(c)) + F_X(a)(F_Y(d) - F_Y(c))$

$= (F_X(b) + F_X(a))(F_Y(d) - F_X(c))$

$= P(a < X \le b)P(c < Y \le d)$

$\Rightarrow$ son independientes

No falta ver infinito 2) ??

Prop Sean X e Y v.a en $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ con funciones de densidad f_X y f_Y respectivamente. Entonces X e Y son indeptes sii la función f definida por $f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$ es

función densidad conjunta de X e Y

$(f_{X,Y})$

⊗ más abajo vemos que es única salvo en finitos puntos

demo ($\Rightarrow$) supongo X e Y indeptes

que$_f$ $f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$ es

I) función densidad bivariada

II) función de densidad conjunta

I)) $f(x,y) = f_X(x) f_Y(y) \geq 0$

$$\underbrace{f_X(x)}_{\geq 0} \; \underbrace{f_Y(y)}_{\geq 0}$$

) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(y)\,dx\,dy$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)\, dy \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx \right)}_{=1} dy$$

$$= 1 \qquad (f_X \text{ y } f_Y \text{ son densidades})$$

$$\text{II}) \ ¿F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u,v)\, du\, dv\ ?$$

$$\int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u,v)\, du\, dv = \iint f_X(u) f_Y(v)\, du\, dv$$

$$= \int_{-\infty}^{x} f_X(u) \left(\int_{-\infty}^{y} f_Y(v)\, dv \right) du$$

$$= \int_{-\infty}^{x} f_X(u) F_Y(y)\, du = F_Y(y) \int_{-\infty}^{x} f_X(u)\, du$$

$$= F_Y(y) F_X(x)$$

$$(\text{indeptes}) \qquad = F_{X,Y}(x,y)$$

($\Leftarrow$) Veamos que X e Y son indeptes
$(F_{XY}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y))$

$$F_{X,Y}(x,y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u,v)\, du\, dv$$

$$\text{(hipótesis)} = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_X(u)\, f_Y(v)\, du\, dv$$

$= \ldots$ mismas cuentas

$$= F_X(x)\, F_Y(y) \qquad \square$$

Prop Sea X v.a.c en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ con funciones de densidad f y g
Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ tq f y g son continuas en x_0
$\Rightarrow f(x_0) = g(x_0)$

dem supongo $f(x_0) > g(x_0)$

defino $h(x) = f(x) - g(x)$
$h(x_0) > 0$ y h continua en x_0

$\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0 \;/\; h(x) > 0 \quad \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$

$$0 < \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \underbrace{h(x)}_{>0}\, dx = \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f(x)\,dx - \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} g(x)\,dx$$

$$\Rightarrow A = \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f(x)\,dx > \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} g(x)\,dx = B$$

Como f densidad de X

$$A = F_X(x_0+\varepsilon) - F(x_0-\varepsilon)$$

Como f densidad de X

$$B = F_X(x_0+\varepsilon) - F(x_0-\varepsilon)$$

$\Rightarrow A = B$ abs!

Análogo llegamos a abs para

$$f(x_0) < g(x_0)$$

$$\Rightarrow f(x_0) = g(x_0)$$

Prop (Generalización de la de arriba)

Sean $X_1, \dots, X_n$ v.a continua con funciones de densidad conjunta $f_{X_1,\dots,X_n}$ y $g_{X_1,\dots,X_n}$

$x_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n) \in \mathbb{R}^n$ tq

$f_{X_1 \dots X_n}$ y $g_{X_1 \dots X_n}$ continuas en x_0

$\Rightarrow f_{X_1 \dots X_n}(x_0) = g_{X_1 \dots X_n}(x_0)$

Ejemplo $R > 0$

$D(0,R) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq R^2\}$

tomamos un punto $(x,y) \in D(0,R)$ al azar

X = "primera coordenada del (x,y)"

Y = "2da coordenada del (x,y)"

Sabemos que $f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi R^2} & x^2+y^2 \leq R^2 \\ 0 & cc \end{cases}$

clase pasada

y Además las funciones densidad marginales generadas

$$f_X(x) = \frac{2\sqrt{R^2 - x^2}}{\pi R^2} \cdot 1_{[-R,R]}(x)$$ clase pasada

$$f_Y(y) = \frac{2\sqrt{R^2 - y^2}}{\pi R^2} \cdot 1_{[-R,R]}(y)$$

por la proposición de arriba si X e Y fueran indeptes $g(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$ sería func densidad conjunta

$$g(x,y) = \frac{4\sqrt{(R^2-x^2)(R^2-y^2)}}{\pi^2 R^4} \; 1_{[-R,R]}(x) \; 1_{[-R,R]}(y)$$

y en $(0,0)$ $f(0,0) = \frac{1}{\pi R^2}$

$\Rightarrow$ f continua en $(0,0)$

g también continua en $(0,0)$

d) $f(0,0) = g(0,0)$ que no es cierto

$\therefore$ $g(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$ no puede ser densidad conjunta de X e Y

$\therefore$ X e Y no pueden ser indeptes

Ejemplo función densidad conjunta

Def Sean X e Y v.a en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ se dice (X,Y) tiene distr normal bivariada* si su función densidad conjunta es

* [de parámetros $\mu = (\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2$ y $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ simétrica def pos]

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det(A)}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu_1, y-\mu_2)A^{-1}(x-\mu_1, y-\mu_2)^t\right\}$$

$\forall x, y \in \mathbb{R}^2$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{\det(A)}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\vec{x}-\mu)^t A^{-1}(\vec{x}-\mu)\right\} \text{ con } \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Caso particular Normal estandar bivariada

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$$

$$A = Id \quad , \quad u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

) Construyamos funciones de densidad bidimensional

dadas f_1 y f_2 unidimensionales

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como

(1) $f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

f no negativa y además

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = \int\int f_X(x) f_Y(y)\,dx\,dy$$

$$= \int f_Y(y) \underbrace{\left(\int f_X(x)\,dx\right)}_{=1} dy$$

$= 1$

$\therefore f$ definida como en (1) es densidad bivariada

Sean X e Y v.a tal que f definida como en (1) sea f función densidad conjunta

$$\Rightarrow f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(y)\,dy$$

$$= f_1(x) \underbrace{\int f_2(y)\,dy}_{=1}$$

$$= f_1(x)$$

$$\Rightarrow f_X(x) = f_1(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

análogo $f_Y(y) = f_2(y) \quad \forall y \in \mathbb{R}$

$\therefore$ X e Y son indeptes pues

$$\left(f(x,y) = f_1(x)\, f_2(y) = f_X(x)\, f_Y(y)\right)$$

ejemplo 1 $f_1(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

$$f_2(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$

f_1 y f_2 son funciones densidad

$$f(x,y) = f_1(x)\, f_2(y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)}$$

es función densidad bivariada

Sean X e Y v.a. con función densidad f

$\Rightarrow$ (X,Y) tiene función densidad conjunta normal estándar bivariada

y además X e Y son indeptes

con densidades normal estandar univariada $f_X(x) = f_1(x)$ $f_Y(y) = f_2(y)$

<u>ejemplo 2</u> sean X e Y v.a con función de densidad conjunta

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{3}}{4\pi} e^{-\left(\frac{x^2 - xy + y^2}{2}\right)} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^2$$

Además se tiene que (haciendo las cuentas)

$$f_X(x) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{3x^2}{8}} \quad y \quad f_Y(y) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{3y^2}{8}}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\qquad \forall y \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow X \sim N\left(0, \tfrac{4}{3}\right) \quad \left(f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{4}{3}}} e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\frac{4}{3}}} \right.$$

$$Y \sim N\left(0, \tfrac{4}{3}\right)$$

luego $f_X(x) f_Y(y) = \frac{3}{8\pi} e^{-\frac{3}{8}(x^2+y^2)}$

para $f(0,0) = \frac{\sqrt{3}}{4\pi}$ son diferentes

$f_X(0)\, f_Y(0) = \frac{3}{8\pi}$

∘) $f_X(x)\, f_Y(y)$ no es densidad conjunta de X e Y

pero mas que esa función densidad bivariada

∘) Además X e Y no son indeptes