$I(\mathbb{R}^n) = \{ T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \mid d(T(\alpha), T(\beta)) = d(\alpha, \beta) \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^n \}$

Un elemento de I se dice una isometría

<u>Recordemos</u>: $d(\alpha, \beta) = \|\alpha - \beta\| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

$= \sqrt{\langle \alpha - \beta, \alpha - \beta \rangle}$

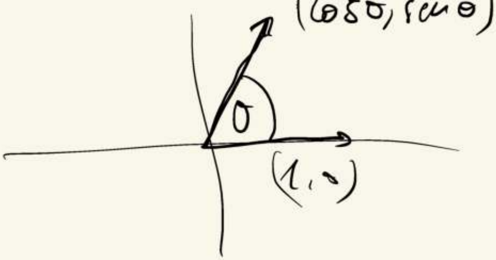
<u>ejemplos</u> 1) $\alpha_0 \in \mathbb{R}^n$ $T_{\alpha_0}(\alpha) = \alpha + \alpha_0$ $\forall \alpha$

es isometría de $\mathbb{R}^n$. En particular una iso no es necesariamente una transf lineal

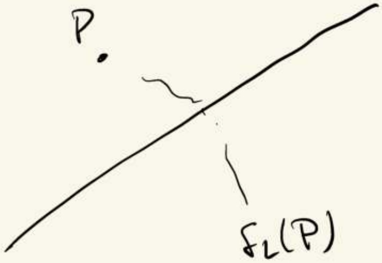
T_{α_0} traslación con respecto a α_0

2) En $\mathbb{R}^2$ r_θ rotación de ángulo θ al rededor del origen

$[r_\theta]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$



·) Si $L \subseteq \mathbb{R}^2$ σ_L reflexión con respecto a L. (es lineal si L pasa por el origen)



·) Si $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ isometría y $T(0) = 0$

$\Rightarrow T$ lineal

demo en stack

Toda isometría es de la forma

$T = T_\alpha \circ S$ donde S es lineal ortogonal

y T_α es la traslación asociada a α

En $\mathbb{R}^2$ hay dos tipos de T.O r_θ, s_L (oth)

Isometría = movimiento rígido

·) $I(\mathbb{R}^n)$ con la composición de funciones forma un grupo: toda iso es biyectiva

$$d(T\alpha, T\beta) = 0 \Rightarrow d(\alpha,\beta) = d(T\alpha, T\beta) = 0$$

$\Rightarrow T$ inyectiva

$T - T_{T(0)}$ + lineal inyectiva $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow T - T_{T(0)}$ es sobre

$\Rightarrow T$ sobre (y biyectiva)

2.1?

·) composición de rotaciones nunca es reflex

T^{-1} tambien es isometría. Dados

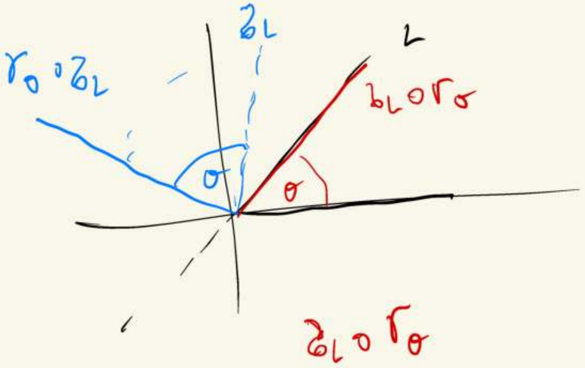
$$d(T^{-1}(\alpha), T^{-1}(\beta)) = d(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$$

$$(iso) \quad = d(T(\tilde{\alpha}), T(\tilde{\beta}))$$

$$= d(\alpha, \beta)$$

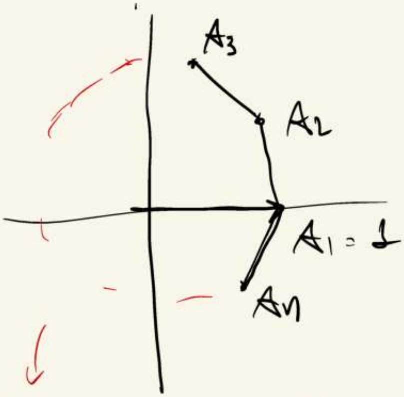
·) r_θ con $\theta = \frac{\pi}{2}$

·) σ_L L pasa por O y $\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$



$\Rightarrow$ no es abeliano

Consideremos en el plano $\mathbb{R}^2$ el polígono regular Δ_n de n lados con centro en el origen y vértices las raíces n-ésimas de algún complejo



Vértices $A_1 = 1, A_2, \ldots, A_n$

dependiendo cuantas raíces halla

•) Sea D_n (o D_{2n}) el conjunto de mov rígidos T plano que preserven a Δ_n

ie $T(\Delta_n) = \Delta_n$ (preserva el polígono)

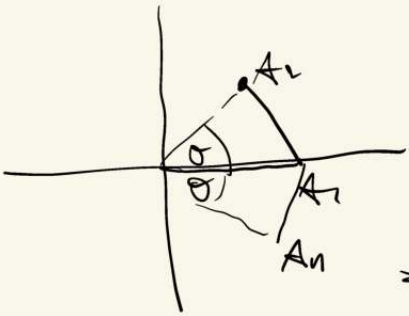
<u>Tenemos</u> ⊛ T queda determinado por su acción en los vértices

⊛ T induce una permutación de los vértices

·) D_n es un grupo con la composición y es finito (a lo sumo hay $n!$ permutaciones de los vértices)

$r = r_\theta \Rightarrow r \in D_n$

usando un θ correcto



$r(A_1) = A_2$

$\ldots \; r(A_n) = A_1$

$\Rightarrow \quad r^k \in D_n \quad \forall k \geq 0$

$r^{k-1}(A_1) = A_k$

·) Sea σ reflexión con respecto a recta que pasa por O y A_1

$\sigma(A_1) = A_1 \quad \sigma(A_2) = A_n \quad \ldots \quad \sigma(A_j) = A_{n-(j-2)}$

·) Sea $T \in D_n \,/\, T(A_1) = A_1 \Rightarrow T = Id$ o $T = \sigma$

pues $T(A_1) = A_1 \Rightarrow T(A_2) = A_2$ o $T(A_2) = A_n$

(pq T preserva distancia)

·) Si $T(A_2) = A_2 \Rightarrow$ como $T(A_3) = A_3$ o $T(A_3) = A_1 = T(A_1)$

pero T biyectiva $\Rightarrow T(A_3) = A_3$

repitiendo $T = Id$

$\not{)}$ si $T(A_2) = A_n \Rightarrow T = \sigma$

pq T lineal y $T(A_1) = A_1$

En general si $T \in D_n$ cualquiera y $T(A_1) = A_j$

$\Rightarrow r^{-(j-1)} T(A_1) = A_1$

$$r^{-(j-1)} \circ T = \begin{cases} Id \\ \sigma \end{cases}$$

$$\Rightarrow T = \begin{cases} r^{j-1} \\ r^{j-1} \circ \sigma \end{cases} \quad 1 \leq j \leq n$$ (despues se repiten)

$\Rightarrow |D_n| = 2n$ (grupo dihedral)

<u>obs</u>

•) D_4 grupo de orden 8 no es abeliano

Ejemplo $\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right.$

$$\left. \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \right\}$$

•) $\mathbb{H}$ grupo no abeliano de orden 8 con el prod de matrices, se lo llama grupo de cuaterniones