Práctico 8

Autovalores y autovectores. Transformaciones lineales diagonalizables.

Martes 1 de noviembre

Ejercicio 1. Para cada una de las siguientes transformaciones lineales $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, hallar sus autovalores, y para cada autovalor, dar una base de autovectores del espacio propio asociado. Decidir en cada caso si la transformación lineal es o no diagonalizable.

(a) $T(x, y) = (y, 0)$.

(b) $T(x, y, z) = (x - y + 4z, 3x + 2y - z, 2x + y - z)$.

(c) $T(x, y, z, u) = (-5x - 5y - 9z + 7u, 8x + 9y + 18z - 9u, -2x - 3y - 7z + 4u, 2u)$

(d) $T(x, y, z, w) = (2x - y, x + 4y, z + 3w, z - w)$.

(e) $T(x, y, z, u, v) = (3x + 2y + 4z, 2x + 2z, 4x + 2y + 3z, 3u + v, 2u + 2v)$.

Ejercicio 2. Sean V un $\Bbbk$-espacio vectorial y $T \in \operatorname{Hom}(V, V)$.

(a) Supongamos que T es un isomorfismo, y sea $\lambda \in \Bbbk$ no nulo. Probar que λ es un autovalor de T si y sólo si λ^{-1} es un autovalor de T^{-1}

(b) Probar que si T es un múltiplo de Id_V, entonces todos los elementos de V son autovectores de T.

(c) Supongamos que $\Bbbk = \mathbb{C}$ y que $\dim V = 2$. Probar que toda $T \in \operatorname{Hom}(V, V)$ es *triangularizable*. Es decir, existe una base de V tal que la matríz de T en esa base es triangular superior.

(d) Decidir si el enunciado anterior es verdadero o falso cuando $\Bbbk = \mathbb{R}$.

Ejercicio 3. Hallar los autovalores, autovectores y autoespacios de las siguientes matrices A, y decidir si son diagonalizables. En caso que lo sean, dar una matriz C tal que $D = C^{-1}AC$ es diagonal. Considerarlas primero como matrices en $\mathbb{R}$ y luego en $\mathbb{C}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -9 & 4 & 4 \\ -8 & 3 & 4 \\ -16 & 8 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Para cada una de las matrices A anteriores, calcular $P(A)$, donde $P = 4x^4 - 2x^3 + x^2 - 3x + 1$.

Ejercicio 4. Sea $A \in \Bbbk^{2\times 2}$.

(a) Probar que el polinomio característico de A es $x^2 - \operatorname{tr}(A)x + \det(A)$.

(b) Probar que si A no es inversible, entonces sus autovalores son 0 y $\operatorname{tr}(A)$.

Ejercicio 5. Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \Bbbk^{n\times n}$ una matriz triangular superior. Calcular su polinomio característico y sus autovalores. Calcular también los autovalores de A^m, $m \geq 2$.

Definición

Sea $\Bbbk$ un cuerpo y $A \in \Bbbk^{n\times n}$.

(a) Se dice que A es *nilpotente* si existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $A^m = 0$.

(b) Se dice que A es *idempotente* si $A^2 = A$.

Ejercicio 6.

(a) Probar que si $A \in \mathbb{k}^{n\times n}$ es nilpotente, entonces 0 es el único autovalor de A.

(b) Probar que si $E \in \mathbb{k}^{n\times n}$ es idempotente y no nula, entonces 0 y 1 son sus únicos autovalores.

Jueves 3 de noviembre

Ejercicio 7. Probar que existe una única transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $(1,1,1)$ y $(-1,1,0)$ son autovectores de autovalor 2 y $(0,-2,1)$ es autovector de autovalor 1. Para tal T, calcular $\det T$ y dar la matriz de T en la base canónica.

Ejercicio 8. Sean V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial y $T \in \operatorname{Hom}(V,V)$.

(a) Decidir si la recíproca del **Ejercicio 2 (b)** es verdadera o falsa.

(b) Supongamos que T conmuta con toda $S \in \operatorname{Hom}(V,V)$. Probar que T es un múltiplo de Id_V.

(c) Supongamos que $\dim \operatorname{Im} T = k$. Probar que T tiene a lo sumo $k+1$ autovalores distintos.

(d) Sean $\lambda_1,\dots,\lambda_h$ los autovalores (distintos) no nulos de T. Sea $d_j = \dim \operatorname{Nu}(T-\lambda_j \operatorname{Id}_V)$. Probar que $d_1+\cdots+d_h \le \dim \operatorname{Im} T$.

Ejercicio 9. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

(a) Probar que el término independiente del polinomio característico de A es $(-1)^n \det(A)$ y que el coeficiente del término de grado $n-1$ es $-\operatorname{tr}(A)$.

(b) Probar que si $c_1,\dots,c_n$ son los autovalores de A (contados con la multiplicidad repetida), entonces $\det(A) = c_1 \dots c_n$ y $\operatorname{tr}(A) = c_1 + c_2 + \cdots c_n$.

Ejercicio 10. Hallar una matriz $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ tal que $A^3 - A^2 + A - \operatorname{Id}_3 = 0$. Decidir si A es diagonalizable.

Ejercicio 11. Sea $A \in \mathbb{k}^{n\times n}$. Probar que A y A^t tienen los mismos autovalores. Dar un ejemplo en el que los autovectores sean distintos.

★ **Ejercicio 12.** Sean V un espacio vectorial y $T \in \operatorname{Hom}(V,V)$. Probar que si $T^2 = T$, entonces $V = \operatorname{Nu} T \oplus \operatorname{Im} T$.

Definición

Sea $\mathbb{k}$ un cuerpo. Se dice que dos matrices $A, B \in \mathbb{k}^{n\times n}$ son *semejantes* si existe una matríz inversible $C \in \mathbb{k}^{n\times n}$ tal que $B = C^{-1}AC$.

★ **Ejercicio 13.**

(a) Probar que la relación de semejanza en $\mathbb{k}^{n\times n}$ es una relación de equivalencia.

(b) Probar que dos matrices semejantes tienen la misma traza, el mismo determinante y los mismos autovalores.

(c) Sea V un espacio vectorial de dimensión finita. Supongamos que tenemos dos bases $\mathbb{B}_1$ y $\mathbb{B}_2$ de V, y sea $T \in \operatorname{Hom}(V,V)$. Probar que $[T]_{\mathbb{B}_1}$ y $[T]_{\mathbb{B}_2}$ son semejantes.

(d) Si $B = C^{-1}AC \in \mathbb{k}^{n\times n}$ y V es cualquier espacio vectorial de dimensión n, entonces existen bases $\mathbb{B}_1$ y $\mathbb{B}_2$ de V y $T \in \operatorname{Hom}(V,V)$ tales que $B = [T]_{\mathbb{B}_2}$, $\;C = \mathcal{C}(\mathbb{B}_2,\mathbb{B}_1)\;$ y $A = [T]_{\mathbb{B}_1}$.

★ **Ejercicio 14.** Sean $A \in \mathbb{k}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{k}^{n\times m}$

(a) Probar que las matrices $\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{pmatrix}$ en $\mathbb{k}^{(m+n)\times(m+n)}$ son semejantes.

(b) Asumir ahora que $m = n$. Utilizar el resultado anterior para concluir que los polinomios característicos de AB y de BA coinciden. Deducir que AB y BA tienen los mismos autovalores.