Def Dada $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ diferenciable $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, decimos que $p \in U$ es punto crítico de f si

$$df_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \text{ no es sobreyectiva}$$

·) La imágen $f(p) \in \mathbb{R}^m$ de un punto crítico es llamado valór crítico

·) Un valor regular de f es un $q \in \operatorname{Im} f$ tq q no es valór crítico

Nota Si $f: U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ diferenciable

$$[df_p]^{C}_{C_0} = (f_x(p), f_y(p), f_z(p)) = (\nabla f)_p$$

Aquí

df_p no es sobre $\Leftrightarrow f_x(p) = f_y(p) = f_z(p) = 0$

Por lo tanto

$a \in f(U)$ es un valor regular de $f: U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sii f_x, f_y, f_z no se anula simultáneamente en ningún punto de la preimagen

$$f^{-1}(\{a\}) = \{(x,y,z) \mid f(x,y,z) = a\}$$

<u>Prop</u> (teo func implícita)

Sea $f: U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable y $a \in \mathrm{Im} f$ un valor regular de f. Entonces $S = f^{-1}(\{a\})$ es una superficie regular

<u>dem</u> Sea $q \in S$, $(\nabla f)_q \neq (0,0,0)$

$\Rightarrow f_x(q) \neq 0$ o $f_y(q) \neq 0$ o $f_z(q) \neq 0$

Supongamos $f_z(q) \neq 0$

Tomemos $F(x,y,z) = f(x,y,z) - a$

$\Rightarrow$ i) $F((q_1, q_2), q_3) = a - a = 0$

ii) $dF_q = (f_x(q), f_y(q), f_z(q))$

$d_q F_z = (f_z(q))$ es inversible
$\underset{0}{\neq}$

TFI
$\Rightarrow \exists$ A abierto de $\mathbb{R}^2$, $\varepsilon > 0$ y $g: A \to \mathbb{R}$ dif

Si $V = \underset{(q_1, q_2)}{\overset{\in}{A}} \times (q_3 - \varepsilon, q_3 + \varepsilon) \Rightarrow q \in V$

$(F((x,y), g(x,y)) = 0 \Leftrightarrow f(x,y,g(x,y)) = a)$

$S \cap V = \{(x, y, g(x,y)) \mid (x,y) \in A\}$

Para demostrar que S es superficie regular para cada q consideremos

$\varphi: A \to \mathbb{R}^3 \quad \varphi(u,v) = (u, v, g(u,v))$

La cual es parametrización por ejemplo 1 de la clase pasada

Si $f_x(q) \neq 0$ o $f_y(q) \neq 0$ es análogo

ejemplo

1) $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^6 + x^2 + y^8 + z^2 = 4\}$ es una superficie regular

i) $S \neq \phi$ pq $(1,1,t) \in S$

ii) Consideremos $f(x,y,z) = x^6 + x^2 + y^8 + y^2 - 4$
diferenciable

$$\nabla f_{(x,y,z)} = (2x(3x^4+1), 2y(4y^6+1), 0)$$

$$\nabla f_{(x,y,z)} = 0 \iff x = 0 \wedge y = 0$$

$\therefore$ Los puntos críticos son $(0,0,t)$
$t \in \mathbb{R}$

y el único valor crítico es
$f(0,0,t) = -4 \quad \forall t$

$\Rightarrow$ 0 no es valor crítico

0 es valor regular

$\therefore$ S es superficie regular (por prop)

$(S = \{(x,y,z) / f(x,y,z) = 0\})$

$(S = f^{-1}(\{0\}))$

def Una superficie regular S se dice conexa si $\forall p, q \in S$ existe una curva $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ continua tq $\alpha(a) = p$ y $\alpha(b) = q$ y $\alpha([a,b]) \subseteq S$

ejemplo no conexo hiperboloide de dos hojas

$S = \{(x,y,z) / -x^2 - y^2 + z^2 = 1\}$

S es regular pq $f(x,y,z) = -x^2 - y^2 + z^2 - 1$ es dif

y $df = 0$ es $(x,y,z) = 0$

$\Rightarrow f(0) = -1$ es el único valor crítico

$\Rightarrow 0$ es valor regular

$\therefore S = f^{-1}(\{0\})$ es sup regular

Veamos que no es conexo:
observemos que el plano $z=0$
no intersecta a S
(si $z=0$ $-x^2-y^2=1$ abs)

definimos $S^+=\{(x,y,z)\in S \,/\, z>0\}$

$S^-=\{(x,y,z)\in S \,/\, z<0\}$

Supongamos por el absurdo que S
es conexo, tomo $p\in S^+$ $q\in S^-$
y $\alpha:[a,b]\longrightarrow \mathbb{R}^3$ continua tq
$\alpha(a)=p$ $\alpha(b)=q$, $\alpha([a,b])\subseteq S$
$\alpha(a)=(\alpha_1(a),\alpha_2(a),\alpha_3(a))$ $\alpha_3(a)>0$
$\alpha(b)=(\alpha_1(b),\alpha_2(b),\alpha_3(b))$ $\alpha_3(b)<0$

Como α continua $\Rightarrow$ α_3 continua
$\alpha_3:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$

como α_3 es continua y $\alpha_3(a)>0$
$\alpha_3(b)<0$ $\exists\, t_0\in[a,b] \,/\, \alpha_3(t_0)=0$
$\Rightarrow \alpha(t_0)=(\alpha_1(t_0),\alpha_2(t_0),0)$

∴ $\alpha(t_0) \in$ plano $z=0$ y $\alpha(t_0) \in S$ abs!!

---

def Un abierto W en una superficie S ($W \subseteq S$) es $W = V \cap S$ con V abierto en $\mathbb{R}^3$

Prop Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ superficie regular y $p \in S$ entonces existe un entorno abierto V de p en S tal que V es gráfico de una función diferenciable $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto, es decir V tiene alguna de las siguientes formas:

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x,y),\ (x,y) \in U\}$$

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = f(x,z),\ (x,z) \in U\}$$

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = f(y,z),\ (y,z) \in U\}$$

<u>demo</u> Sea $\varphi: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ una param del punto $p \in S$

$$\varphi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$
$$(u,v) \in U$$

$$p = \varphi(u_0, v_0)$$

Por la condición 3 el determinante de una de las siguientes submatrices es $\neq 0$ en $(u_0, v_0) = q_0$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \quad , \quad \frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)} \quad , \quad \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}$$

Supongamos que $\det\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(q)\right) \neq 0$

Sea $\pi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $\quad \pi(x,y,z) = (x,y)$

y consideremos $\pi \circ \alpha: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$[d(\pi\circ\alpha)]_q = [d\pi]_{\varphi(q)}[d\varphi]_q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_u(q) & x_v(q) \\ y_u(q) & y_v(q) \\ z_u(q) & z_v(q) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \quad (\text{tiene det} \neq 0)$$

luego por teo función inversa $\exists V_1$ y V_2 de $\mathbb{R}^2$ / $q \in V_1$, $\pi \circ \varphi(q) \in V_2$

y $\pi \circ \varphi|_{V_1} : V_1 \to V_2$ es dif

con inversa dif

$$\left(\pi \circ \varphi|_{V_1}\right)^{-1} : V_2 \to V_1 \quad \text{dif}$$

Sea $V = \varphi(V_1)$

$$V_2 \xrightarrow{(\pi \circ \varphi)^{-1}} V_1 \xrightarrow{\pi_3 \circ \varphi}$$

$$(x,y) \to u(x,y), v(x,y) \to z(u(x,y), v(x,y))$$

donde $\pi_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\pi_3(x,y,z) = z$

Sea $f(x,y) = z(u(x,y), v(x,y))$

$$f = (\pi_3 \circ \varphi) \circ (\pi \circ \varphi^{-1}) \quad \text{dif en } V_2$$

Chequear que $V = \{(x,y,f(x,y)) \mid (x,y) \in V_2\}$

los otros casos son análogos