def Sea S sup reg con orientación N, la aplicación

$$N: S \to S^2$$

se denomina aplicación de gauss

obs $dN_p : T_pS \to T_{N(p)}S^2 = N(p)^\perp$

$= T_pS$

$\therefore\ dN_p : T_pS \to T_pS$

prop $dN_p : T_pS \to T_pS$ es autoadj (con respecto a el p.i de $\mathbb{R}^3$)

dem que $\langle dN_p(w_1), w_2 \rangle = \langle w_1, dN_p(w_2) \rangle$

⊛ $\forall w_1, w_2 \in T_pS$

·) observar que basta probarlo en una base $\{w_1, w_2\}$ de T_pS

Sea φ una carta de p

$\Rightarrow \{\varphi_u(q), \varphi_v(q)\}$ base de $p = \varphi(q) = \varphi(u_0, v_0)$

T_pS ?!!

Sabemos que

$$< \overset{\in S}{N(\varphi(u,v))}, \overset{\in T_pS}{\varphi_u(u,v)} > = 0 \quad \forall u,v \in U$$

derivo con respecto a v y evalúo en q

$$< dN_{\underset{\varphi(q)}{\underset{\shortparallel}{p}}}(\varphi_v(q)), \varphi_u(q) > + < N(p), \varphi_{vu}(q) > = 0$$

$$\textcircled{I}$$

Análogamente

$$< N(\varphi(u,v)), \varphi_v(u,v) > = 0 \quad \forall u,v \in U$$

derivo con respecto a u y evalúo en q

$$< dN_p(\varphi_u(q)), \varphi_v(q) > + < N(p), \varphi_{uv}(q) > = 0$$

$$\textcircled{II}$$

Resto $\textcircled{I}$ y $\textcircled{II}$ y uso simetría de prod interno y que $\varphi_{uv}(q) = \varphi_{vu}(q)$ obtenemos

$$< dN_p(\varphi_u(q)), \varphi_v(q) >$$
$$= < \varphi_u(q), dN_p(\varphi_v(q)) >$$

el resultado se obtiene observando que

ⓔ vale para $w_1 = w_2 = \varphi_u(q)$ y también para $w_1 = w_2 = \varphi_v(q)$ usando la simetría de $\langle , \rangle$ $\square$ por!

---

def la forma cuadrática

$$II_p : T_pS \to \mathbb{R}$$

definida por $II_p(w) = -\langle dN_p(w), w \rangle \; \forall w \in T_pS$

Se llama la segunda forma fundamental de S en p

def Sea α una curva regular en S pasando por p, k la curvatura de α en p y $\cos\theta = \langle n, N \rangle$ donde n es el vector normal del triedro de Frenet de α por p y N de vector normal a S en p

Se define la curvatura normal de α en S en el punto p por

$$k_n = k \cos\theta$$

Obs $k_n = \langle k n, N \rangle$ es la proy ortogonal de $k n$ sobre N

"α" $\quad$ $\boxed{k n \cdot N}$

Si α es PLA y $\alpha(0) = p$

Sea $N(s)$ la restricción del campo normal a la curva $\alpha(s)$

$$\boxed{N(s) := N(\alpha(s))}$$

Luego. $\langle N(s), \alpha'(s) \rangle = 0 \quad \forall s$

derivo $\langle N'(s), \alpha'(s) \rangle + \langle N(s), \alpha''(s) \rangle = 0$ $\circledast$

$$\begin{aligned}
II_p(\alpha'(0)) &= -\langle dN_p(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle \\
&= -\langle N'(0), \alpha'(0) \rangle \\
\circledast \quad &= \langle N(0), \alpha''(0) \rangle \\
\text{PLA} \quad &= \langle N(0), k(0) n(0) \rangle \\
&= \langle N, k n \rangle (p) \qquad (\alpha(0) = p) \\
&= k_n(p)
\end{aligned}$$

Corolario

Dado $v \in T_pS$, $\|v\| = 1$ todas las curvas β en S PLA tales que $\beta(0) = p$ y $\beta'(0) = v$ tienen la misma curvatura en p. Luego tiene sentido hablar de curvatura normal en p a lo largo de una dirección dada

def Dado $v \in T_pS$ $\|v\| = 1$, la sección normal a lo largo de v es la intersección de S con el plano que pasa por p generado por v y $N(p)$

obs

·) La sección normal de S en p es una curva regular γ en un entorno de p

i) La curva está en S pero tmb en el plano es una curva plana cuyo vector normal en p es $\pm N(p)$ o 0

por ?: L

luego, la curvatura de γ en p es $|k_n(p)|$

$k_\gamma = \langle nk, n\rangle$
$= \langle nk, N\rangle = k_n$

ej 1) S^2 con $N(x,y,z) = -(x,y,z)$

Dado $p \in S^2$, las secciones normales en p son los círculos máximos

$\Rightarrow$ la curvatura normal es 1 $\forall$ sección normal

$\Rightarrow$ $II_p(v) = 1 \quad \forall \|v\| = 1 \quad \forall p \in S^2$

por: esfera de radio 1
$k_\alpha = \frac{1}{r} = 1 \Rightarrow k_n = 1 = I_p(v)$

2) $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2+y^2 = 1\}$

$N(x,y,z) = -(x,y,0)$

Secciones normales en p	$k_n(p)$
circunf de radio 1	1
elipse	$0 < k_n(p) < 1$
rectas paralelas a z	0

Como dN_p es autoadjunta
$\Rightarrow$ es diag. luego existe
$\beta = \{e_1, e_2\}$ BON de avecs de T_pS
no son los canónicos
tales que $[dN_p]_B = \begin{pmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 \end{pmatrix}$

$$k_1 \geq k_2$$

$$\mathrm{II}_p(e_1) = -\langle \overbrace{dN_p(e_1)}^{-k_1 e_1}, e_1 \rangle = k_1$$

$\mathrm{II}_p(e_2) = k_2$ (análogo)

$\Rightarrow \mathrm{II}_p(ae_1+be_2)$

$= -\langle dN_p(ae_1+be_2), ae_1+ae_2 \rangle$

$= -\langle a\,dN_p(e_1)+b\,dN_p(e_2), ae_1+ae_2 \rangle$

$= \langle ak_1(e_1)+bk_2(e_2), ae_1+ae_2 \rangle$

$= a^2k_1+b^2k_2$

$\Rightarrow \mathrm{II}_p(\{ae_1+be_2 \mid a^2+b^2=1\}) = [k_1\ k_2]$

coordenadas en base $\{e_1, e_2\}$

<u>def</u> •) k_1 y k_2 son llamadas las curvaturas principales de S en p

Son únicas?

•) $\mathbb{R}e_1$ y $\mathbb{R}e_2$ son llamadas direcciones principales de S en p

<u>def</u> Una curva regular $\gamma: I \to S$ se dice línea de curvatura si $\gamma'(t)$

[illegible]

es una dirección principal
está contenida en ???

<u>Prop</u> (Olindos Rodrigues)

Una curva regular $\alpha: I \to S$ es línea de curvatura si y sólo si

$$N'(t) = \lambda(t)\,\alpha'(t)$$

para $\lambda: I \to \mathbb{R}$ dif donde

$$\boxed{N(t) = N(\alpha(t))}$$

$\Rightarrow$) Si α es línea de curvatura entonces $\alpha'(t)$ es avec de $dN_{\alpha(t)}$

$$\Rightarrow dN_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) = \lambda(t)\,\alpha'(t)$$

$$N'(t) = \lambda(t)\,\alpha'(t)$$

Vemos que $\lambda: I \to \mathbb{R}$ es dif

Veamos que λ es dif en t_0 $\forall t_0 \in I$

$$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$$

$$N \circ \alpha(t) = (n_1(t), n_2(t), n_3(t))$$

$N'(t) = (n_1'(t), n_2'(t), n_3'(t))$

Como $\alpha'(t_0) \neq 0 \Rightarrow \exists i / \alpha_i'(t_0) \neq 0$

$\Rightarrow \exists I_0 \subseteq I / t_0 \in I_0$ y $\alpha'(t) \neq 0$ $\forall t \in I_0$

$$\Rightarrow \lambda(t) = \frac{n_i'(t)}{\alpha_i'(t)} \quad \forall t \in I_0$$

$\Rightarrow \lambda$ es dif en t_0

($\Leftarrow$) Como $N'(t) = \lambda(t)\alpha'(t)$

$\Rightarrow dN_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) = \lambda(t)\alpha'(t)$

$\rightarrow \alpha'(t)$ es avec de $dN_{\alpha(t)}$ con avl $\lambda(t)$ $\forall t \in I$

$\rightarrow \alpha$ es línea de curvatura