

## Examen de Análisis Matemático II - 2021 - 2/7/2021

### Parte teórica

- (11 puntos) Enunciar con precisión el segundo criterio de comparación para integrales impropias y demostrarlo.
- (3 puntos, 9 puntos) a) Definir con precisión que la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  sea absolutamente convergente.  
b) Enunciar y demostrar el teorema que relaciona la convergencia con la convergencia absoluta de una serie numérica.
- (7 puntos) Sea  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ . Definir con precisión la función  $\log_a : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  y mostrar que

$$\log_a x = \frac{1}{\log a} \log x.$$

### Parte práctica

- (6 puntos) Mostrar que para todo  $x \in \mathbb{R}$  se cumple que

$$\sinh'(x) = \cosh x \quad \text{y} \quad (\sinh^{-1})'(x) = 1/\sqrt{x^2 + 1}.$$

- (8 puntos, 8 puntos) Calcular las siguientes integrales.

$$\text{a) } \int \frac{x^2 - 3x + 4}{x^3 + 4x} dx, \quad \text{b) } \int \frac{1}{1 + \sqrt[3]{x}} dx.$$

- (8 puntos, 8 puntos) Calcular el valor del límite y el valor de la integral impropia.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4^{\log x} - x^2}{\log x}, \quad \text{b) } \int_1^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx.$$

- (6 puntos) Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función cuyo polinomio de Taylor de orden 5 alrededor de  $a = 0$  es  $q(x) = 3x - 7x^5$  y sea  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $g(x) = (f(x))^2$ . Hallar el polinomio de Taylor de  $g$  de orden 5 alrededor de  $a = 0$  y calcular  $g''(0)$ .
- (4 puntos, 11 puntos) Probar que el radio de convergencia de la siguiente serie de potencias es igual a 1 y hallar el intervalo de convergencia.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n} x^n.$$

- (7 puntos) Sea  $g$  continua y positiva. Sea

$$H(x) = \int_0^{x^2} \left( \log(g(t)) - \frac{1}{3+t^4} \right) dt.$$

Hallar el valor  $g(1)$  sabiendo que  $H'(1) = \frac{3}{2}$ .

- (4 puntos) Sea  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$ . Encontrar particiones  $P$  y  $Q$  de  $[0, 2]$ , con tres y cuatro puntos, respectivamente, tales que  $s(f, P) > s(f, Q)$ .