<u>def</u> Una reparametrización de $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ regular es una función de la forma

$$\tilde{\alpha} = \alpha \circ \Phi : \tilde{I} \to \mathbb{R}^n,$$ donde $\tilde{I}$ es un intervalo de $\mathbb{R}$ y $\Phi : \tilde{I} \to I$ es una función biyectiva tal que $\Phi'(x) \neq 0 \quad \forall x \in \tilde{I}$

<u>obs</u> $\circ)$ $\tilde{\alpha}$ preserva la orientación si $\Phi' > 0$

$\circ)$ $\tilde{\alpha}$ invierte la orientación si $\Phi' < 0$

<u>ejemplo</u> Sea $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

$$\alpha(t) = (r\cos t, r \operatorname{sen} t)$$

$$\alpha'(t) = (-r \operatorname{sen} t, r\cos t)$$

$$\Rightarrow \alpha'(t) \neq 0 \quad \forall t$$

$$\|\alpha'(t)\| = r \quad (\text{es PA sii } r = 1)$$

reparametrizo

$$s(t) = \int_0^t \|\alpha'(u)\| \, du$$

$$= \int_0^t r \, du = rt$$

$\Rightarrow s(t) = rt \Rightarrow t = \frac{s}{r}$

$(*)$

$$t(s) = \frac{s}{r}$$

$(*)$ Como $t \in [0, 2\pi]$ $s \in [0, 2\pi r]$

$\Rightarrow t(s) : [0, 2\pi r] \longrightarrow [0, 2\pi]$

$\therefore \beta(s) = \alpha\left(\frac{s}{r}\right) = \left(r\cos\left(\frac{s}{r}\right), r\,\text{sen}\left(\frac{s}{r}\right)\right)$

$\beta : [0, 2\pi r] \to \mathbb{R}^2$

<u>obs</u> Dada $\alpha : (a,b) \to \mathbb{R}^3$ PLA a veces sirve

$\beta : (-b, -a) \to \mathbb{R}^3$ $\beta(-s) = \alpha(s)$

β recorre misma trayectoria en dirección opuesta

<u>obs</u> Se dice α y β tienen distinta orientación o difieren por cambio de orientación

def Sean dos bases ordenadas en un ev
tienen misma orientación si la matriz cambio de base entre ellas tiene det > 0.
Esto define una clase de equivalencia con 2 clases

obs Siempre definimos primero que es orientación positiva dando una base y luego se usa la det

Props de prod vectorial

•) $u \times v = - v \times u$

•) $(au + bv) \times w = a u \times w + b v \times w$

•) $\langle u \times v, w \rangle = \det (u \mid v \mid w)$

en particular $\langle u \times v, u \rangle = 0$

$\langle u \times v, v \rangle = 0$

$\cdot$) $\|u \times v\| = \|u\| \|v\| \operatorname{sen}(\alpha)$

$\cdot$) $\{u, v\}$ ortogonal $\Rightarrow$ $\|u \times v\| = \|u\| \|v\|$

$\cdot$) $\{u, v\}$ ld $\Rightarrow$ $\|u \times v\| = 0$

ves si

Si $\{u, v\}$ LI $\Rightarrow$ $\{u, v, u \times v\}$ son una base positiva de $\mathbb{R}^3$

porque cambio de base $P = (u | v | u \times v)$

$$\det P = \det P^t = \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ & u \times v & \end{pmatrix}$$

$$= \langle u \times v, u \times v \rangle$$

$$= \|u \times v\|^2 > 0$$

pq u, v li

$$(u(t) \times v(t))' = (u'(t) \times v(t) + u(t) \times v'(t))$$

Curvas en el espacio

Sea $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ PLA

Def la curvatura en α en $t \in I$ es $k(t) = \|\alpha''(t)\|$

Nota $k(t)$ mide cuán rápido la curva se aleja de la tangente en t, en un entorno de t

Ejemplo $\beta(s) = \left(r\cos\left(\frac{s}{r}\right), r\operatorname{sen}\left(\frac{s}{r}\right)\right)$

$$\Rightarrow \|\beta''(s)\| = \frac{1}{r}$$

Nota α'' y k permanecen invariantes bajo cambio de orientación.

$$\beta(-s) = \alpha(s) \Rightarrow -\beta'(-s) = \alpha'(s)$$

$$\beta''(-s) = \alpha''(s)$$

$$\Rightarrow k_\beta(-s) = k_\alpha(s)$$

triedro de frenet

$\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ PLA con $k(s) \neq 0 \ \forall s \in I$

definimos
- $t(s) = \alpha'(s)$ vector tg de α en s
- $n(s) = \dfrac{\alpha''(s)}{k(s)}$ vector normal de α en s
- $b(s) = t(s) \times n(s)$ vector binormal

t, n, b son mapas suaves de I en $\mathbb{R}^3$ y son llamados campos vectoriales tangente, normal y binormal a lo largo de α respectivamente

prop para cada $s \in I$ $\{t(s), n(s), b(s)\}$ forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ y es positiva dem $\|t(s)\| = \|\alpha'(s)\| = 1$

$$\|n(s)\| = \left\| \frac{\alpha''(s)}{k(s)} \right\| = \frac{\|\alpha''(s)\|}{k(s)} = 1$$

Como $\|\alpha'(s)\| = 1 \quad \forall s$ (PLA)

$$\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = 1 \quad \forall s$$

derivo $\quad \langle \alpha''(s), \alpha'(s) \rangle + \langle \alpha'(s), \alpha''(s) \rangle$

$$2 \langle \alpha'(s), \alpha''(s) \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \langle \alpha'(s), n(s)\, k(s) \rangle = 0$$

$$k(s) \langle \alpha'(s), n(s) \rangle = 0$$

$k(s) \neq 0$ $\forall s$ & $\langle t(s), n(s) \rangle = 0$

$$t(s) \perp n(s)$$

Como $b(s) = t(s) \wedge n(s)$ $\quad b(s) \perp n(s)$

$b(s) \perp t(s)$

Además $\|b(s)\| = \|t(s) \times n(s)\|$

$t(s) \perp n(s)$ $\qquad = \underset{\underset{\text{PLA}}{1}}{\underset{\shortparallel}{\|t(s)\|}} \, \underset{\underset{\text{visto arriba}}{1}}{\underset{\shortparallel}{\|n(s)\|}} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$= 1$

<u>def</u> $\{t(s), n(s), b(s)\}$ es el triedro de frenet

<u>def</u> Para cada $s \in I$ el plano generado por $\{t(s), n(s)\}$ es llamado el plano osculador de α en s

ie, $\operatorname{span}\{t(s), n(s)\} = b(s)^{\perp}$ es un subev de dim 2 en $\mathbb{R}^3$

o) El plano $\alpha(s) + \operatorname{span}\{t(s), n(s)\}$ es llamado plano osculador afín de α en s (no necesariamente un EV)

Notar que $b(s)$ es normal al plano osculador entonces $\|b'(s)\|$ mide curva rápido la curva se aleja del plano osculador