PRÁCTICO 7

ESPERANZA, VARIANZA Y TEOREMA CENTRAL DEL LÍMITE

1. Sea $n \in \mathbb{N}$ y

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{n(n+1)} & x = 1, \ldots, n \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Probar que f es una densidad discreta y hallar su esperanza.

2. En un comercio de artículos para el hogar hay en existencia 6 televisores. Sea X el número de clientes que entran a comprar un televisor por semana, siendo $X \sim \mathcal{P}(5)$. Tomando en cuenta que cada cliente que entra a comprar un televisor lo compra si está disponible, ¿cuál es el número esperado de televisores a ser vendidos la próxima semana?

3. Sea X el resultado que se obtiene al arrojar un dado equilibrado una vez. Si antes de arrojar el dado se ofrece la opción de elegir entre recibir $\frac{1}{E(X)}$ pesos o $h(X) = \dfrac{1}{X}$ pesos, decidir cuál de las dos opciones es preferible.

4. Sea $X \sim P(\lambda)$. Hallar $E\left(\frac{1}{1+X}\right)$.

5. Un juego consiste en arrojar un dado equilibrado hasta obtener un número mayor o igual que 4 por primera vez. Sea X el número de veces que se arroja el dado. El puntaje que se obtiene es $(4-X)$ si $1 \leq X \leq 3$ y se obtiene puntaje cero en caso contrario.

   a) ¿Cuál es el puntaje esperado de este juego?

   b) Si se juega dos veces este juego y en total se obtuvieron 2 puntos, ¿cuál es la probabilidad de que la primera vez no se haya obtenido puntaje?

6. Calcular la esperanza de la variable aleatoria X bajo las siguientes condiciones:

   a) $X \sim B(n, p)$

   b) $X \sim H(k, m, N)$.

   c) $X \sim BN(r, p)$ con $r \in \mathbb{N}$.

7. Calcular la esperanza de la variable X en las siguientes situaciones.

   a) Se tira cinco veces una moneda honesta y sea X la variable n° de caras obtenidas.

   b) Se tiran dos dados honestos n veces, y sea X el n° de veces que la suma excede 10.

   c) Una caja de pastillas de menta de 70 unidades tiene 25 pastillas rotas. Si se extraen al azar 15 pastillas, sea X el n° de pastillas rotas de la muestra.

   d) Se tira una moneda honesta hasta que aparece una cara. Sea X el n° de tiradas necesarias.

8. La demanda semanal de gas propano (en miles de galones) de una distribuidora en particular es una variable aleatoria X con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{c.c.} \end{cases}$$

   a) Calcule $E(X)$.

b) Si 1500 galones están en existencia al principio de semana y no se recibe nuevo suministro durante la semana, ¿cuánto de los 1500 galones se espera que queden al final de la semana?

9. Calcular la varianza de la variable aleatoria X bajo las siguientes condiciones:

   a) $X \sim Poisson(\lambda)$,
   b) $X \sim B(n,p)$,
   c) $X \sim H(k,m,N)$,
   d) $X \sim BN(r,p)$ con $r \in \mathbb{N}$.

10. Calcule $E(X)$ para X variable aleatoria con distribución $\mathcal{U}[a,b]$ con $a < b$.

11. Sean X e Y variables aleatorias independientes con distribución común $\mathcal{U}[0,1]$. Calcule $E[Z]$ y $E[W]$, si $Z = \min(X,Y)$ y $W = \max(X,Y)$.

12. Dos componentes electrónicos son testeados simultáneamente. Suponga que la vida en horas de cada componente esta distribuído exponencialmente con parámetro λ, y que las vidas de los componentes son independientes. Calcule:

    a) la esperanza del tiempo que pasa hasta que falle alguno de los dos componentes.
    b) la esperanza del tiempo que pasa hasta que ambos componentes fallen.

13. Calcule la varianza de la variable aleatoria X en las siguientes condiciones:

    a) $X \sim \Gamma(\alpha,\lambda)$, donde $\alpha > 0$ y $\lambda > 0$.
    b) $X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, donde $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma > 0$.
    c) $X \sim \mathcal{U}[a,b]$, donde $a < b$.

14. Suponga que Y_1 e Y_2 son variables aleatorias tales que:
    $E(Y_1) = 2$, $E(Y_2) = -1$, $\rho(Y_1,Y_2) = \frac{1}{2\sqrt{6}}$, $Var(Y_1) = 4$ y $Var(Y_2) = 6$.
    Obtenga $E(3Y_1 - 2Y_2)$, $Var(3Y_1 - 2Y_2)$, $Cov(3Y_1 - 2Y_2, Y_1)$ y $Cov(3Y_1 - 2Y_2, Y_2)$.

15. Sea ρ el coeficiente de correlación entre X e Y. Determinar $\rho(Z,W)$ en función de ρ, si $Z = aX + b$ y $W = cY + d$, donde $a \neq 0$, $c \neq 0$.

16. Usando el Teorema Central del Límite para variables aleatorias con distribución de Poisson, probar que

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

17. Se dispone de 100 números que se convierten en enteros por redondeo. Supongamos que el error de redondeo cometido en un número es una variable aleatoria uniforme en el intervalo [-1/2,1/2]. Si se suman los 100 números, calcular utilizando el teorema central del límite la probabilidad de que el error de redondeo de la suma exceda en valor absoluto a 1 y a 5.

18. Supongamos que una empresa fabrica computadores con cuatro circuitos impresos. Sea p_i la probabilidad de que un computador enviado a reparar necesite i circuitos nuevos. Se sabe que $p_1 = 1/2$, $p_2 = 1/4$, $p_3 = 1/8$, $p_4 = 1/8$. Se envían 10000 unidades a reparar al año. ¿Cuál es la probabilidad de necesitar más de 18875 circuitos?

19. La duración (en horas) de ciertos tubos eléctricos tiene una distribución exponencial con parámetro $\lambda = 1/192$. Disponemos de un stock de 40 tubos para iluminar una habitación con uno de dichos tubos. Los tubos se sustituyen inmediatamente al no funcionar. Calcular aproximadamente la probabilidad de que al cabo de un año tengamos luz.

20. Se tira un dado 100 veces en forma independiente. Usando la aproximación normal hallar:

    a) La probabilidad de que el número 6 salga entre 15 y 20 veces.

    b) La probabilidad de que la suma de los resultados de las 100 tiradas del dado sea menor que 300.