Espacio con prod interno

def $\mathbb{V}$ K-ev. Un prod interno sobre V es una función $(\cdot|\cdot): V \times V \to K$ tq $\forall v, w, z \in V$ $c \in K$

(a) $(v+w|z) = (v|z) + (w|z)$

(b) $(cv|z) = c(v|z)$

(c) $(v|z) = \overline{(z|v)}$

(d) $(v|v) > 0 \iff v \neq 0$

$\hookrightarrow$ Norma $\|\cdot\|: \mathbb{V} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$

$\|v\| = \sqrt{(v|v)}$

obs valen

(i) $(v|w+z) = (v|w) + (v|z)$

(ii) $(v|cz) = \bar{c}(v|z)$

(iii) $(0|v) = 0 = (v|0)$

ejemplos

$\mathbb{V} = K^n$ $((x_1, \ldots x_n)|(y_1, \ldots y_k)) = \sum^n$

Kunze el resto $(A|B) = Tr(A.B^*)$

obs $\|v \pm w\| = \|v\|^2 \pm 2\,\mathrm{Re}\,(v|w) + \|w\|^2$

$$(v \pm w | v \pm w) = \underset{\|v\|^2}{\underset{\shortparallel}{(v|v)}} \pm (v|w) \pm \underset{\overline{(v|w)}}{\underset{\shortparallel}{(w|v)}} \pm \underset{\|w\|^2}{\underset{\shortparallel}{(w|w)}}$$

caso $(v+w) + \overline{(v+w)} \Rightarrow \qquad z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}\, z$

caso $(v+w) - \overline{(v|w)} \Rightarrow \quad 2\,\mathrm{Im}\, z = -2\,\mathrm{Re}\, z$

$\mathbb{K} = \mathbb{R} \qquad (v|w) = \frac{1}{4}\left(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2\right)$

$\mathbb{K} = \mathbb{C} \qquad (v|w) = \frac{1}{4}\left(\|v+w\|^2 + i\|v+iw\|^2 - \|v-w\|^2 - i\|v-iw\|^2\right)$

$= \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \|v + i^k w\|^2$ $\quad \mathrm{Im}(b+ai)$

$(2\,\mathrm{Re}(v|iw) = -2i\,\mathrm{Re}(v|w) = -2i\,\mathrm{Re}(a+bi)$
$= -2ia =$

obs todo espacio tiene un producto interno

$(V, (\cdot|\cdot))$ un evpi Sea $T: W \to V$ monomorfismo

$\Rightarrow$ defino $(\cdot|\cdot)_W : W \times W \to K$

$(w|w')_W = (T(w)|T(w'))$

y este es prod interno

demo Usando $(T(w)|T(w'))$ es pi

<u>Teorema</u> $(V, (\cdot|\cdot))$ k-evpi $\forall v, w \in V$ $c \in K$ valen

(i) $\|cv\| = |c| \|v\|$, $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

(ii) $|(v|w)| \leq \|v\| \|w\|$

(iii) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ (des triangular)

<u>ejemplo</u> $V = C([0,1])$ $(f|g) = \int_0^1 f(t) g(t)\, dt$

como esto es un p.i por teorema

tenemos $\left| \int_0^1 f(t) g(t) \right| \leq \sqrt{\int_0^1 f(t)^2\, dt \int_0^1 g(t)^2\, dt}$

(des triangular)

<u>def</u> Sea $(V, (\cdot|\cdot))$ ev pi

(a) $v, w \in V$ son ortogonales

sii $(v|w) = 0$

(b) $S \subseteq V$ sub ortogonal si

$(v|w) = 0$ $\forall v, w \in S$

(c) $S \subseteq V$ sub ortonormal

sii S es ortogonal y $\|v\| = 1$ $\forall v \in S$

obs S ortogonal tq $0 \notin S \rightsquigarrow \tilde{S} = \{ \frac{v}{\|v\|} : v \in S \}$

$\therefore \tilde{S}$ es ortonormal

Teorema $S \subseteq V$ ortogonal talque $0 \notin S$

$\Rightarrow S$ es l.i

Corolario $v \in \langle S \rangle$ $S = \{v_1, \dots, v_k\}$ ortogonal

$v_i \neq 0 \Rightarrow v = \sum_{i=1}^{k} \frac{(v | v_i)}{\|v_i\|^2} v_i$

Teorema $(V, (\,|\,))$ evpi $w_1, \dots, w_k \in V$ li

$\exists v_1, \dots v_k \in V \,/\, \langle v_1, \dots, v_\ell \rangle = \langle w_1, \dots, w_\ell \rangle$

ortogonales $\forall \ell = 1, \dots, k$

$$v_1 = w_1 \qquad v_\ell = w_\ell - \sum_{j=1}^{\ell-1} \frac{(w_\ell | v_j)}{\|v_j\|^2} v_j \qquad \ell \geq 2$$

proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt

Corolario todo ev con p.i de dim finita numerable tiene base ortogonal

⊗ ejemplo $V = K[X]$ $(p | q) = \int_a^b p(t) q(t)\, dt$

def $W \subseteq V$ subespacio V evpi
$v \in V$. Una mejor aproximación a v por W es un vector $w \in W$ tq

$$\|v-w\| \leq \|v-w'\| \quad \forall w' \in W$$

$\hookrightarrow \|v-w\| = \min\{\|v-w'\| : w' \in W\}$

obs $v \in W$, $W \leq$ subesp $\leadsto \{\|v-w\|, w \in W\} \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$

$\Rightarrow$ es acotado inferiormente

mejor aprox $\Longleftrightarrow$ W que realiza el mínimo

teorema $(V, (\,|\,))$ evpi, $W \subseteq V$ subesp
$v \in V$

(i) $w \in W$ es una mejor aprox a v por W $\Leftrightarrow$ $v - w \perp w'$ $\forall w' \in W$

(ii) Si existe una mejor aprox de v por W es única

(iii) Si $\dim W < \infty$ y $\{w_1, \ldots, w_n\}$ es una base ortogonal

$\Rightarrow$ la mejor aprox de v por W es

$$w = \sum_{i=1}^{n} \frac{(v|w_i)}{\|w_i\|^2} w_i$$

<u>demo</u> (i) ($\Rightarrow$) Sea $w \in W$ una mejor aprox, para cada $\tilde{w} \in W$

$$\|v - \tilde{w}\|^2 = \|(v-w) + \underbrace{(w-\tilde{w})}_{=w' \in W}\|^2$$

$$= \|v-w\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(v-w|\underbrace{w-\tilde{w}}_{=w'\in W}) + \underbrace{\|w-\tilde{w}\|^2}_{=w'\in W}$$

Sabemos $\|v-w\|^2 \leq \|v-\tilde{w}\|^2$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq 2\,\mathrm{Re}\,(v-w|\underset{\hat{w}}{w'}) + \|\underset{\hat{w}}{w'}\|^2 \quad \forall w' \in W$$

∘) Si $v \in W \Rightarrow v$ es su mejor aprox

$$v - v = 0 = \min\{\|v - w'\| : w' \in W\} \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$$

además $\quad 0 = v - v \perp w'$

$$0 \perp w' \quad \forall\, w' \in W$$

∘) Si $v \notin W \leadsto v - w \neq 0$ para cada $\underset{\neq 0}{w'} \in W$ armo $\hat{w} = -\dfrac{(v-w|w-w')}{\|w-w'\|^2}(w-w')$

$$\leadsto 0 \leq -\frac{\cancel{2}|(v-w|w-w')|^2}{\underset{\neq 0}{\|w-w'\|^2}} + \cancel{\frac{(v-w|w-w')^2}{\|w-w'\|^2}}$$

$$\Rightarrow -|(v-w|w-w')|^2 = 0 \Rightarrow (v-w|w-w') = 0$$

$\therefore\ v - w \perp w - w'$

$\Rightarrow v - w \perp w' \quad \forall\, w' \in W$

(cualquier w' lo puedo escribir como resta de $w - w'$)