Clase 20 - Programación lineal (2)

El problema

Recordemos la formulación del problema de programación lineal

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x) \\ \text{sujeto a} & Cx = d \\ & Rx \geq s \\ & x \geq 0 \end{array}$$

o en su forma estándar

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & c^T x \\ \text{sujeto a} & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

con $b \geq 0$.

En la clase anterior dijimos que la región factible es una región poliedral cerrada y que los vértices de esa región serán importantes al momento de buscar las soluciones del problema de PL.

Método gráfico para el caso bidimensional

Cuando el problema tiene 2 variables la forma más simple de buscar la solución de un problema de PL es el **método gráfico**. Para fijar ideas, consideraremos el siguiente ejemplo en dimensión 2:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & z = -x_1 - 2x_2 \\ \text{sujeto a} & -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ & -x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0. \end{array}$$

Se puede pensar en la función objetivo como $z = f(x_1, x_2) = c^T(x_1, x_2)$, con $c = (-1, -2)$. La región factible de este problema puede verse en la Figura 1.

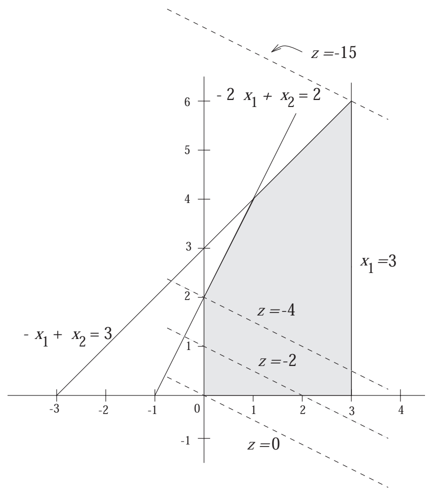

Figura 1: Solución gráfica de un problema lineal.

Notar que la figura incluye algunas líneas punteadas correspondientes a las curvas de nivel para diferentes valores de la función objetivo. Por ejemplo, el conjunto de nivel $\{(x_1,x_2)|z = -x_1 - 2x_2 = -2\}$ es la recta $z = -2$ que pasa por los puntos $(2,0)$ y $(0,1)$. El conjunto de nivel $\{(x_1,x_2)|z = -x_1 - 2x_2 = 0\}$ es la recta paralela $z = 0$ que pasa por el origen. Recordemos que el objetivo del problema es minimizar z. Como se ve en la Figura 1, el valor de z decrece a medida que se avanza hacia la derecha, sin embargo no puede decrecer indefinidamente porque la región factible es acotada. Al continuar trazando rectas, asociadas a conjuntos de nivel, hacia la derecha llegará un momento donde esa recta intersecará por última vez al conjunto factible. En este problema el mínimo ocurre cuando $z = -15$ en el punto $(3,6)$, que corresponde a un vértice del conjunto factible. No es coincidencia que sea un vértice, como veremos más adelante en algunos resultados.

Por otro lado se sabe, por un resultado de Análisis de varias variables, que la dirección del gradiente de una función es la dirección de máximo crecimiento y, análogamente, la dirección de menos gradiente es la dirección de máximo descenso. Esto será muy útil cuando el objetivo sea maximizar o minimizar una función lineal. Ahora bien, como la función es lineal, el gradiente no es más que el vector de costos c. En este caso, $c = (-1,-2)$ y por lo tanto, si queremos minimizar la función $z = -x_1 - 2x_2$, basta con trazar rectas paralelas en la dirección de $-c$, es decir, $(1,2)$ hasta intersecar por última vez a la región factible. Ver Figura 2:

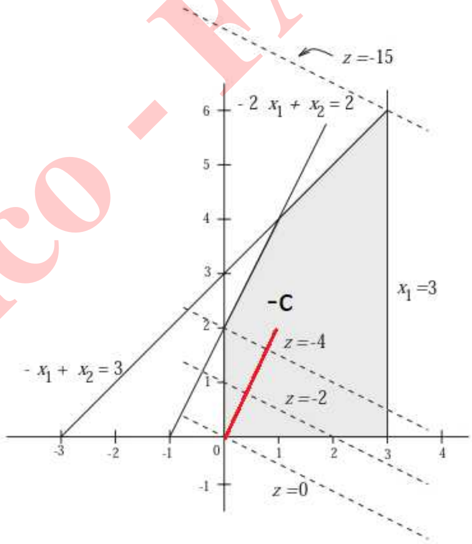

Figura 2: Solución gráfica de un problema lineal y vector c.

En resumen, el método gráfico para problemas de PL consiste en trazar rectas perpendiculares al vector gradiente de la función objetivo, es decir al vector de costos c, y trasladarse en una dirección u otra dependiendo si se desea minimizar o maximizar.

Tipos de solución

Es fácil imaginar que pueden surgir diferentes tipos de problemas y soluciones para el caso de un problema de PL en dos dimensiones, debido a la geometría del conjunto factible, a la dirección del vector de costos y si se está minimizando o maximizando. En todas las figuras siguientes consideraremos $f(x_1,x_2) = x_1 + 2x_2$.

- Regiones no acotadas sin vértices:

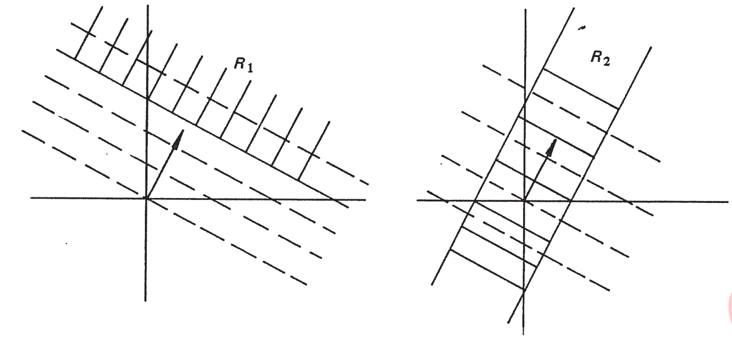

Figura 3: Regiones no acotadas sin vértices.

En el caso de R1 se alcanza el valor mínimo en toda la recta (frontera de R1) y no hay valor máximo. En el caso de R2 no hay mínimo ni máximo. Ver Figura 3.

- Regiones no acotadas con vértices:

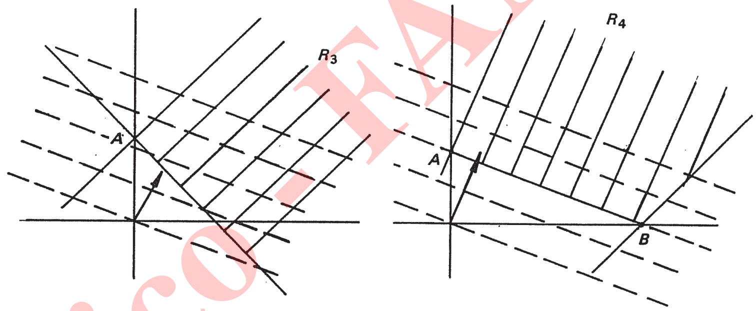

Figura 4: Regiones no acotadas con vértices.

En el caso de R3 no hay máximo ni mínimo. En el caso de R4 se alcanza el mínimo en los vértices A y B, por lo tanto en todo el segmento que une a estos puntos, y no hay máximo. Notar que en el caso de la región R4 hay infinitas soluciones al problema de minimización. Ver Figura 4.

- Región acotada (con al menos tres vértices):

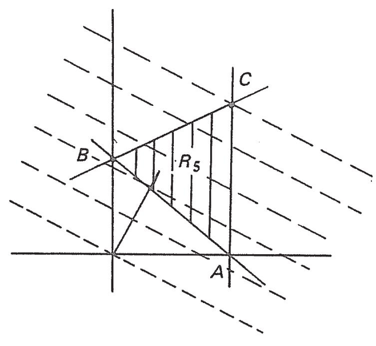

Figura 5: Región acotada (con al menos tres vértices).

Asume el mínimo en el punto A y el máximo en el punto C de la región R5. Ver Figura 5.

- Casos degenerados:

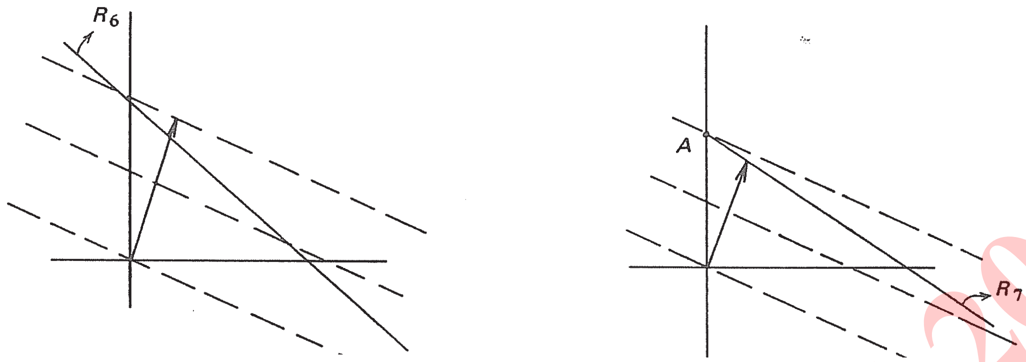

Figura 6: Casos degenerados

En el caso de la región R6 no hay mínimo ni máximo. En cambio, la región R7 tiene un máximo en el punto A y no hay mínimo. Ver Figura 6.

Figura 7: Casos degenerados

La región R8 tiene un mínimo en el punto B y un máximo en el punto A. La región R9 tiene un mínimo y un máximo en el punto A. Ver Figura 7.

El caso n-dimensional

El método gráfico presentado en la sección anterior es útil sólo en casos bidimensionales y en algunos casos tridimensionales. Para dimensiones mayores que 2 el método gráfico se torna impracticable y se requiere un método eficiente para resolver tales problemas. Para esto vamos a introducir el Método Simplex, el cual fue propuesto en 1947 por George Dantzig, para resolver problemas de PL que modelizaban situaciones de planificación económica y militar (planning). Este método consiste en un algoritmo eficiente de búsqueda, que comenzando en algún vértice de la región factible avanza hacia otro vértice vecino hasta encontrar la solución óptima de una manera inteligente y eficiente. La Programación Lineal se había desarrollado muy poco hasta 1947 debido a la dificultad computacional de resolver problemas lineales por el hecho de tener una gran número de combinaciones posibles de restricciones a ser consideradas. Con la aparición de este método, estos cálculos fueron optimizados y desde entonces el método Simplex es uno de los algoritmos más estudiados y utilizados a nivel mundial. Aunque se han propuesto otros métodos más recientes, el método Simplex sigue siendo muy competitivo y eficiente y se puede aplicar en una gran cantidad de problemas. En la actualidad, matemáticos aplicados, programadores y especialistas en computación continuan investigando en mejores implementaciones y variantes del método.