# Práctico 2

1. Sean $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ funciones diferenciables. Hallar $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u(t) \times v(t))$ en términos de $u, v$ y sus derivadas.

2. ¿Cambian la curvatura y la torsión de una curva parametrizada por longitud de arco en el espacio si se la recorre en sentido opuesto?

3. Graficar la trayectoria de la curva $\alpha(t) = \frac{e^t}{\sqrt{3}}(\cos t, \operatorname{sen} t, 1)$. Hallar la reparametrización por longitud de arco $\beta(s)$ con $\beta(0) = \alpha(0)$. Calcular el tiedro de Frenet, la curvatura y la torsión de $\beta$.

4. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada regular (no necesariamente por longitud de arco). Probar que:

   (a) La curvatura de $\alpha$ viene dada por
   $$\kappa = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}.$$

   (b) La torsión de $\alpha$ está determinada por
   $$\tau = -\frac{\langle \alpha' \times \alpha'', \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \times \alpha''\|^2}$$

5. Sea $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por longitud de arco. Suponer que existe $t_0 \in (a, b)$ tal que $\|\alpha(t)\|$ alcanza el máximo en $t_0$. Probar que $\kappa(t_0) \geq 1/\|\alpha(t_0)\|$.

6. Considerar la hélice circular $\alpha(s) = (a\cos(s/c), a\operatorname{sen}(s/c), bs/c)$, con $c^2 = a^2 + b^2$, $a, b, c > 0$.

   (a) Mostrar que $\alpha$ tiene rapidez unitaria.

   (b) Calcular el triedro de Frenet de $\alpha$.

   (c) Hallar el plano osculador y el plano osculador afín de $\alpha$ en $s = \pi$.

   (d) ¿Cómo cambia la curvatura de una hélice circular si se la comprime o dilata en la dirección del eje $z$? ¿Y si se lo hace en la dirección ortogonal al eje $z$?

   (e) ¿Qué relación existe entre la torsión de la hélice dada y la torsión de su reflejada respecto del plano $x$-$z$?

7. Una curva $\alpha$ parametrizada por longitud de arco se llama *hélice* si las rectas tangentes a $\alpha$ forman un ángulo constante con una dirección fija. Asumiendo $\kappa(t) \neq 0$ para todo $t$ probar:

   (a) $\alpha$ es una hélice si y sólo si $\tau/\kappa =$ constante.

   (b) $\alpha$ es una hélice si y sólo si las rectas que contienen a $N(t)$ y pasan por $\alpha(t)$ son paralelas a un plano fijo.

   (c) $\alpha$ es una hélice si y sólo si las rectas que contienen a $B(t)$ y pasan por $\alpha(t)$ forman un ángulo constante con una dirección fija.

8. Probar que una curva regular $\alpha$ esta contenida en una recta si y sólo si existe un punto $p$ tal que cada recta tangente a $\alpha$ pasa por $p$. ¿Qué ocurre si no pedimos como hipótesis que la curva sea regular?

9. Sea $\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t), 0)$ una curva regular (contenida en el plano $z = 0$) y sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal inyectiva.

   (a) Mostrar que la curva $\gamma = T \circ \beta$ es regular.

   (b) ¿Cómo son las torsiones de $\beta$ y $\gamma$?

10. Probar que la curva de menor longitud que une dos puntos de $\mathbb{R}^3$ es el segmento de recta que los une. Para ello considerar $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva, $p = \alpha(a)$, $q = \alpha(b)$ y probar que:

    (a) Dado $v \in \mathbb{R}^3$, $\|v\| = 1$, se tiene
    $$\langle q - p, v\rangle = \int_a^b \langle \alpha'(t), v\rangle \, dt \leq \int_a^b \|\alpha'(t)\| \, dt.$$

    (b)
    $$\|\alpha(b) - \alpha(a)\| \leq \int_a^b \|\alpha'(t)\| \, dt.$$

**Curvas planas**

11. ¿Cambia la curvatura signada de una curva plana parametrizada por longitud de arco si se la recorre en sentido opuesto?

12. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva plana parametrizada por longitud de arco, y supongamos que $0 \in I$. Una circunferencia de centro $p$ y radio $r$ se llama *circunferencia osculatriz* de $\alpha$ en 0 si es una aproximación de orden dos de $\alpha$ en $t = 0$, o más precisamente, si la función $f(s) = \|\alpha(s) - p\|^2$ cumple que $f(0) = r^2$ y $f'(0) = f''(0) = 0$. Probar que si $\kappa(0) \neq 0$, entonces la circunferencia de centro $p = \alpha(0) + \frac{1}{\kappa(0)}\mathbf{n}(0)$ y radio $\frac{1}{|\kappa(0)|}$ es la única circunferencia osculatriz de $\alpha$ en $t = 0$.

13. Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva regular plana. Mostrar que su curvatura signada viene dada por
    $$\kappa = \frac{\det(\alpha', \alpha'')}{\|\alpha'\|^3}$$

14. *La Catenaria*. Sea $\alpha(t) = (t, \cosh t)$.

    (a) Dibujarla.

    (b) Mostrar que la curvatura de $\alpha$ es $\kappa(t) = 1/\cosh^2 t$.

    (c) ¿En qué punto es máxima la curvatura?

15. $\star$ Sea $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ una curva cerrada y simple, tal que en la región acotada por $\alpha$ se puede colocar un disco de radio $r$. Probar que la longitud de $\alpha$ es al menos $2\pi r$.

16. $\star$ Encontrar los *vértices* de la curva $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (a\cos(t), b\sin(t))$.

# Ejercicios extras

17. Sea $\alpha : (a, b) \to \mathbb{R}^2$ una curva de rapidez unitaria y sean $\kappa, k : (a, b) \to \mathbb{R}$ su curvatura y su curvatura signada, respecivamente. Mostrar que $\kappa = |k|$.

18. Supongamos que todas las rectas normales a una curva parametrizada pasan por un punto fijo. Probar que la traza de la curva está contenida en una circunferencia.

19. Calcular el triedro de Frenet de la curva $\beta(t) = (\frac{4}{5}\cos(t), 1 - \operatorname{sen}(t), -\frac{3}{5}\cos(t))$ y mostrar que es una circunferencia. ¿Cuáles son su centro y su radio?

20. Sea $\alpha : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ la curva definida por

$$\alpha(t) = \left( \frac{(1+t)^{3/2}}{3}, \frac{(1-t)^{3/2}}{3}, \frac{t}{\sqrt{2}} \right).$$

Probar que está parametrizada por longitud de arco y calcular su triedro de Frenet.