Clase 2

Algoritmo de Horner: evaluación de polinomios

El algoritmo de Horner es un algoritmo reconocido por su eficiencia para evaluar polinomios utilizando un número mínimo de operaciones (sumas y productos).

Para fijar ideas veamos un ejemplo. Consideremos

$$p(x) = 2 + 4x - 5x^2 + 2x^3 - 6x^4 + 8x^5 + 10x^6$$

Primero notemos que, dado x, el método usual para evaluar x^k requiere $(k-1)$ productos:

$$x^k = \underbrace{x \cdot \ldots \cdot x}_{k},$$

por ejemplo, si $k = 2$, se requiere 1 producto, si $k = 3$, se requieren 2 productos, etc.

Método 1: evaluar las potencias de la manera usual, multiplicar por la constante respectiva y sumar los monomios. Es fácil ver que se requieren:

$$0+1+2+3+4+5+6 = \sum_{i=1}^{6} i = \frac{6(6+1)}{2} = 21 \text{ productos, y por lo tanto, se tienen}$$

# sumas	=	6
# productos	=	21

Método 2: la idea consiste en evaluar las potencias de x en forma sucesiva:

$$x^2 = x * x, \quad x^3 = x * x^2, \quad x^4 = x * x^3, \quad x^5 = x * x^4, \quad x^6 = x * x^5,$$

teniendo en cuenta que cada potencia de x se debe multiplicar por un coeficiente, se tienen $0+1+2+2+2+2+2 = 11$ productos, y por lo tanto

# sumas	=	6
# productos	=	11

Método 3: conocido como método de Horner o multiplicación encajada. La idea consiste en reescribir convenientemente el polinomio $p(x)$ de modo de reducir el número de productos:

$$p(x) = 2 + x(4 + x(-5 + x(2 + x(-6 + x(8 + x \cdot 10))))).$$

Es fácil ver que ahora se requieren:

# sumas	=	6
# productos	=	6

Si el grado de $p(x)$ es n, se requieren $n(n+1)/2$ productos en el método 1, $2n-1$ en el método 2 y sólo n en el método 3.

Si $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$, con $a_n \neq 0$, la evaluación de $p(x)$ en $x = z$ se realiza con los siguientes pasos:

$$\begin{aligned}
b_{n-1} &= a_n \\
b_{n-2} &= a_{n-1} + z * b_{n-1} \\
&\vdots \\
b_0 &= a_1 + z * b_1 \\
p(z) &= a_0 + z * b_0.
\end{aligned}$$

En forma más compacta, podemos escribir:

Algoritmo de Horner (multiplicación encajada)

Dados el polinomio $p(x)$, de grado n, con coeficientes a_i, para $i = 0, \ldots n$, con $a_n \neq 0$ y un número real z en el que se desea evaluar $p(x)$.

input $n; a_i, i = 0, \ldots, n; z$

$b_{n-1} \leftarrow a_n$

for $k = n-1$ **to** 0 **step** -1, **do**

$\qquad b_{k-1} \leftarrow a_k + z * b_k$

end do

output $b_i, i = -1, \ldots, n-1$

end

Notar que $b_{-1} = p(z)$

Fuentes de error y aritmética de la computadora

Una de las tareas más importantes en Análisis Numérico es estimar la precisión del resultado en un cálculo numérico.

Los resultados numéricos están influenciados por diferentes tipos de errores. Algunos de estos pueden eliminarse, en otros se puede reducir su influencia, y otros son inevitables y nada se puede hacer.

Principales fuentes de error.

1. **Errores en los datos de entrada** (frecuentemente inevitables). Los datos de entrada pueden ser el resultado de mediciones experimentales que podrían estar afectadas a errores sistemáticos debido al equipamiento utilizado. También, se tienen los errores que se producen al representar un número real irracional con un número finito de dígitos.

2. **Errores de redondeo**. Aparecen cuando los cálculos se realizan usando un número finito de dígitos.

3. **Errores de truncamiento**. Aparecen cuando un proceso infinito es reemplazado por un proceso finito. Ejemplos: aproximar una serie por una suma parcial, aproximar una función por un polinomio (Taylor), aproximar una derivada por un cociente incremental, etc.

4. **Errores humanos**. Son frecuentes y a veces difíciles de detectar. Ejemplos: errores en la formulación del problema, en los cálculos "a mano", al escribir un programa en la computadora, etc.

Errores absolutos y relativos

Antes de analizar que ocurre al representar números en una computadoras y se realizan operaciones, veremos algunos conceptos básicos que sirven en un contexto más general.

Definición 1 *Cuando un número real r (valor exacto) es aproximado por otro número $\bar{r}$, se define el* **error** *por $r-\bar{r}$. Llamaremos, respectivamente, a*

$$\begin{aligned} \textbf{Error absoluto:} \quad \Delta r &= |r-\bar{r}|, \\ \textbf{Error relativo:} \quad \delta r &= \left|\frac{r-\bar{r}}{r}\right| = \frac{\Delta r}{|r|}. \end{aligned}$$

También se llama **error (relativo) porcentual** *al producto $100 * \delta r$.*

En general, el error relativo y el error porcentual son más útiles que el error absoluto, porque da una idea del error cometido relativo a la magnitud de la cantidad que se está considerando.

En términos prácticos no se conocen exactamente los valores de los errores absolutos y relativos sino que se tienen cotas de ellos. Siempre se trata que las cotas sean lo más ajustadas posible. Así, por ejemplo, si $r=\sqrt{2}$ y $\bar{r}=1.414$, entonces

$$\begin{aligned} \Delta r &= |r-\bar{r}| = |\sqrt{2}-1.414| = |0.0002135\ldots| \leq 0.00022 \\ \delta r &= \frac{\Delta r}{|r|} = \frac{|0.0002135\ldots|}{\sqrt{2}} \leq 0.00016 \end{aligned}$$

y el error porcentual es $0.016\,\%$.

Las siguientes notaciones son equivalentes:

$$\bar{r}=1.414, \quad \Delta r \leq 0.22\,10^{-3}$$

$$r = 1.414 \pm 0.22\,10^{-3}$$

$$1.41378 \leq r \leq 1.41422$$

Redondeo y truncado

Existen dos maneras de escribir un número real reduciendo el número de dígitos: **redondeo** y **truncado**.

Redondeo. Veamos algunos ejemplos de redondeo a 3 dígitos (decimales):

$$\begin{aligned} 0.774432 &\to 0.774 \\ 1.23767 &\to 1.238 \\ 0.3225 &\to 0.323 \\ 100.23767 &\to 100.238 \end{aligned}$$

En general, la aproximación por redondeo a n dígitos decimales $\tilde{r}$ de un número r es un número de n dígitos decimales (después del punto decimal) que coinciden con los de r si el dígito $(n+1)$ de r es $0,1,2,3$ o 4. Por otro lado, si el dígito $(n+1)$ de r es $5,6,7,8$ o 9, entonces para definir $\tilde{r}$ se suma una unidad al n-ésimo dígito de r. Así se cumple que:

$$|r-\tilde{r}| \leq \frac{1}{2}10^{-n}. \tag{1}$$

Para fijar ideas veamos un ejemplo muy sencillo, con $n=1$:

- si $r = 0.11$ entonces $\tilde{r} = 0.1$ y $|r - \tilde{r}| = 0.01 \leq 0.05 = 5\,10^{-2} = \frac{1}{2}\,10^{-1}$;
- si $r = 0.16$ entonces $\tilde{r} = 0.2$ y $|r - \tilde{r}| = 0.04 \leq 0.05 = 5\,10^{-2} = \frac{1}{2}\,10^{-1}$.

Truncado. Veamos algunos ejemplos de truncado a 3 dígitos (decimales):

$$\begin{array}{rcl} 0.774432 & \rightarrow & 0.774 \\ 1.23767 & \rightarrow & 1.237 \\ 0.3225 & \rightarrow & 0.322 \end{array}$$

En general, la aproximación por truncado (o truncamiento) a n dígitos decimales $\hat{r}$ de un número r es un número de n dígitos decimales (después del punto decimal) que coinciden con los n primeros dígitos de r. Así se cumple que:

$$|r - \hat{r}| \leq 10^{-n}, \tag{2}$$

Para fijar ideas veamos un ejemplo muy sencillo, con $n = 1$:

- si $r = 0.12$ entonces $\hat{r} = 0.1$ y $|r - \hat{r}| = 0.02 \leq 0.1 = 10^{-1}$;
- si $r = 0.19$ entonces $\hat{r} = 0.1$ y $|r - \hat{r}| = 0.09 \leq 0.1 = 10^{-1}$.

En general, las computadoras trabajan con el sistema de redondeo y no el truncado.

Es importante observar que, si bien el error absoluto que introduce el redondeo depende de la magnitud del número, el error relativo, que es el más significativo, por ser independiente de la magnitud, está controlado en términos de la cantidad de dígitos con la que se trabaja. Así vamos a definir el número de dígitos significativos en términos del error relativo.

Definición 2 *El número $\bar{r}$ aproxima a r con m* **dígitos significativos** *si*

$$\delta r = \frac{\Delta r}{|r|} \leq 5\ 10^{-m}.$$

Esto dice que el error relativo es del orden de 10^{-m}.

Así, en los ejemplos anteriores tenemos

r	$\tilde{r}$	Δr	δr	díg. signif.
0.774432	0.774	0.00043	$0.00056(< 5\,10^{-3})$	3
1.23767	1.238	0.00033	$0.00027(< 5\,10^{-4})$	4
0.3225	0.322	0.0005	$0.0015(< 5\,10^{-3})$	3
100.23767	100.238	0.00033	$0.0000032(< 5\,10^{-6}$	6

Errores en las operaciones

Analizaremos los errores que se introducen en las operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división). Más específicamente, nos centraremos en las dos primeras.

Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, y $\bar{x_1}, \bar{x_2}$ aproximaciones de x_1 y x_2 respectivamente.

Sean $y = x_1 + x_2, \quad \bar{y} = \bar{x_1} + \bar{x_2}$.

El error en la operación **suma** está dado por:

$$y - \bar{y} = (x_1 + x_2) - (\bar{x_1} + \bar{x_2}) = (x_1 - \bar{x_1}) + (x_2 - \bar{x_2}),$$

por lo tanto el error absoluto

$$\begin{array}{rcl} \Delta y & = & |y - \bar{y}| \leq |x_1 - \bar{x_1}| + |x_2 - \bar{x_2}| \\ \Delta y & \leq & \Delta x_1 + \Delta x_2 \end{array}$$

y el error relativo

$$\delta y = \frac{\Delta y}{|y|} \leq \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{|x_1 + x_2|}.$$

En general, si $y = \sum_{i=1}^{n} x_i$ entonces $\Delta y \leq \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i$.

El caso de la **resta** es similar. Sean $y = x_1 - x_2, \quad \bar{y} = \bar{x_1} - \bar{x_2}$. Entonces el error absoluto se obtiene haciendo

$$\begin{array}{rcl} \Delta y & = & |y - \bar{y}| = |(x_1 - x_2) - (\bar{x_1} - \bar{x_2})| = |(x_1 - \bar{x_1}) - (x_2 - \bar{x_2})| \\ \Delta y & \leq & \Delta x_1 + \Delta x_2 \end{array}$$

y el error relativo

$$\delta y = \frac{\Delta y}{|y|} \leq \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{|x_1 - x_2|}.$$

Es posible estimar cotas de errores para la **multiplicación** y la **división** definiendo $y = x_1 * x_2, \quad \bar{y} = \bar{x_1} * \bar{x_2}$, $z = x_1/x_2, \quad \bar{z} = \bar{x_1} * \bar{x_2}$. Se puede deducir que:

$$\Delta y \lessapprox |x_2|\Delta x_1 + |x_1|\Delta x_2 \qquad \delta y = \frac{\Delta y}{|y|} \lessapprox \frac{\Delta x_1}{|x_1|} + \frac{\Delta x_2}{|x_2|}$$

y que

$$\Delta z \lessapprox \frac{1}{|x_2|}\Delta x_1 + \frac{|x_1|}{|x_2^2|}\Delta x_2 \qquad \delta z = \frac{\Delta z}{|z|} \lessapprox \frac{\Delta x_1}{|x_1|} + \frac{\Delta x_2}{|x_2|}$$