<u>Corolario</u> los espacios c_0 y ℓ^∞ no son reflexivos

dem Vimos que $({}^\circ z)^\circ = c_0' \neq z$ luego c_0 no puede ser reflexivo por b) del teo anterior.
Además como c_0 cerrado en ℓ^∞ y no es reflexivo tampoco puede serlo ℓ^∞ (teo ant)

<u>Teo</u> X, Y normados, $T \in B(X,Y)$ Sii $\exists!\, T' \in B(Y', X')$ tq $T'(f)(x) = f(Tx)$ $\forall f \in Y'$ $\forall x \in X$

dem para $f \in Y'$ sea $T' f = f \circ T$. Como T, f son lineales y continuas, $T'(f) \in X'$ y $T' : Y' \to X'$ cumple que $T'(f)(x) = f(Tx)$ $\forall x \in X$ $f \in Y'$

Si $\exists\, S \in B(Y', X')$ tq $S(f)(x) = f(Tx)$ $\forall x \in X$ $f \in Y'$

entonces $S(f) = T'(f)$ $\forall f \in Y'$ o sea $S = T'$

Veamos que es lineal y continua. Sean $f, g \in Y'$ $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ es $(\lambda f + \mu g) \circ T = \lambda (f \circ T) + \mu (g \circ T)$

o sea $T'(\lambda f + \mu g) = \lambda T'(f) + \mu (T' g)$

Además $\|T(f)\| = \|f \circ T\| = \|f\| \|T\|$ luego T es continua (de hecho $\|T'\| \leq \|T\|$)

I

prop X, Y normados $T \in B(X,Y)$ ent

(a) $\|T'\| = \|T\|$ (b) $\ker T' = (\operatorname{Im} T)^{\circ}$

(c) $\ker T = {}^{\circ}(\operatorname{Im} T')$

dem (a) por corolario H-B normado todo $x \in X$

$\exists f \in Y'$ tq $f(Tx) = \|Tx\|$ y $\|f\| = 1$

ent $\|Tx\| = f(Tx) = T'(f)(x) \leq \|T'\| \underbrace{\|f\|}_{=1} \|x\|$

o sea $\|T\| \leq \|T'\|$ luego listo por (I)

b) Sea $f \in \ker T'$, $z \in \operatorname{Im} T$ ent $\exists x \in X$ tq

$z = Tx$ luego $f(z) = f(Tx) = T'(f)(x) = 0$

Sea $f \in (\operatorname{Im} T)^{\circ}$ ent $\forall x \in X$ $T'(f)(x) = f(Tx) = 0$

pues $Tx \in \operatorname{Im} T$ o sea $T'(f) = 0$ luego

$f \in \ker T'$

(c) ejercicio

Teo X, Y normado $T \in B(X,Y)$

(a) si T iso ent T' es iso con $(T')^{-1} = (T^{-1})'$ en particular si son isomorfos X e Y tambien lo son X' e Y'

(b) si T isomor isométrico ent T' isomorf isométrico

dem (a) Sea $S = T^{-1}$ ent $S \in B(Y,X)$ y además está bien def $S' \in B(X',Y')$. Ahora $\forall x \in X$ $f \in X'$

$$T'(S'(f))(x) = S'(f)(Tx) = f(S(Tx)) = f(x)$$

o sea $T'(S'(f)) = f$, ent $T' \circ S' = Id_{X'}$

y análogo $S' \circ T' = Id$

(b) por (a) ¿? basta ver que T' es isometría

por una parte

$$\|T'(f)(x)\| = \|f(Tx)\| \leq \|f\| \overbrace{\|T\|}^{=1} \|x\|$$

$$\Rightarrow \|T'(f)\| \leq \|f\|$$

por otro lado $\forall \varepsilon > 0$ $\exists y \in Y$ con $\|y\| = 1$ tq

$|f(y)| \geq \|f\| - \varepsilon$. Sea $x = T^{-1}y$. ent $\|x\| = 1$

(pues $\|Tx\| = \|x\| \Rightarrow \|T(T^{-1}y)\| = \|T^{-1}y\|$)

y cut $\|T'(f)\| \geq |T'(f)(x)| = |f(Tx)| = |f(y)|$

$$> \|f\| - \varepsilon \quad \square$$

Corolario ℓ^p $1 < p < \infty$ es reflex. Sea $1 < q < \infty$ t.q. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Dado $x \in \ell^p$ $y \in \ell^q$ cut

$$T_p'(J_{\ell^p}(x))(y) = (J_{\ell^p}(x))\, T_p(y)$$