Corolario Si $x_1, \dots x_n \in X$ son l.i entonces existe $f_1, \dots f_n \in X'$ / $f_j(x_k) = \delta_{kj}$ $\forall 1 \le j, k \le n$

dem Si $W = sp\{x_1 \dots x_n\}$ por teo anterior $\exists f_{1,w}, \dots f_{n,w} \in W'$ que cumplen lo que queremos $\Rightarrow$ por (H-B) normado $\square$

Teo X' sep $\Rightarrow X$ sep

dem $B = \{f \in X' : \|f\| = 1\}$

Como X' es separable $\exists F = \{f_j\} \subset B$ tq F es denso en B

Para $n \in \mathbb{N}$ sea w_n con $\|w_n\| = 1$ y $f_n(w_n) \geq \frac{1}{2}$

$W = \overline{sp}\{w_j\}$. Si $W \subset X$, por teo anterior existe $f \in B$ / $f(w) = 0$ $\forall w \in W$.

Luego $\frac{1}{2} \le |f_n(w_n)| = |f_n(w_n) - f(w_n)| \le \|f_n - f\| \underbrace{\|w_n\|}_{\le 1}$ Un abs!

Luego $W = X$. Entonces razonando como en el teo $\{H$ sep $\Leftrightarrow H$ tiene b.o$\}$ se ve que todas las comb lineales finitas con coef en $\mathbb{Q}$ (o $\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}$) son densas en X

$\square$

coro Sabemos que $p \in [1, \infty)$, $(\ell_p)'$ isomorfo a ℓ^q con $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Notar que puede haber iso de ℓ^1 a ℓ'_∞ pues (teo arriba) lo sería separable

---

<u>demo de (H-B) en er real</u>

X er real, sea $\mathcal{G}$ el conjunto de funcionales lineales f en X tq

(a) f está det en un subesp D_f con $W \subseteq D_f \subseteq X$

(b) $f = f_W$ en W

(c) $f \leq p$ en D_f

Notar $\mathcal{E}$ es el conjunto de todas las extensiones de f_w a subesp $D_f \subseteq X$ tq se satisfacen el teo pero con $X = D_f$

($\mathcal{E} \neq \emptyset$ pq $f_w \in \mathcal{E}$)

$\Rightarrow$ definimos $<$ en $\mathcal{E}$ como $f < g \Leftrightarrow D_f \subseteq D_g$

y $f = g$ en D_f. Es fácil ver que es orden parcial

$\Rightarrow$) Vamos a aplicar Zorn a $\mathcal{E}$ y mostrar que el maximal de $\mathcal{E}$ es el fc que queremos.

Supongo $\tilde{E} \subset \mathcal{E}$ con $\tilde{\mathcal{E}}$ total ordenado (o sea $\forall f, g \in \tilde{\mathcal{E}}$ f es extensión de g o viceversa)

Veamos que $\tilde{E}$ tiene cota superior en $\mathcal{E}$

Sn $Z_{\tilde{\mathcal{E}}} \doteq \bigcup_{f \in \tilde{\mathcal{E}}} D_f$. Es fácil ver que $Z_{\tilde{\mathcal{E}}}$ subespacio. Definimos $f_{\tilde{\mathcal{E}}} : Z_{\tilde{\mathcal{E}}} \to \mathbb{R}$

dado $z \in Z_{\tilde{E}}$. $\exists f \in \tilde{E} / z \in D_f$

y entonces definimos $f_{\tilde{E}}(z) = f(z)$.

está bien def pq $\tilde{E}$ es tot ordenado (ej)

más aún es fácil ver que $f_{\tilde{E}}$ es lineal (ej)

Además $f_{\tilde{E}} \in \mathcal{E}$ (pues valen (a) ... (c))

y $f < f_{\tilde{E}}$ $\forall f \in \tilde{E}$

luego $f_{\tilde{E}}$ es cota superior de $\tilde{E}$

luego por Zorn $\Rightarrow \mathcal{E}$ tiene maximal f_{max}

•) Si $D_{f_{max}} \neq X$ entonces por lem anterior f_{max} tiene una extensión que está en $\mathcal{E}$ abs! pq f_{max} es maximal

Def Supongamos que tengo $C \subseteq X$ normado real con $0 \in C$, C abierto entonces el funcional de Minkowski ρ_c de C

$$\rho_c(x) = \inf\{\alpha > 0 : \alpha^{-1} x \in C\} \quad x \in X$$

Como $0 \in C$ y C abierto ρ_c bien def

Obs notar que si $C = B_1(0) \rightarrow \rho_c(x) = \|x\|$

demo $\alpha > \|x\| \Rightarrow \left\|\frac{x}{\alpha}\right\| < \left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| = 1$

$$\Rightarrow \alpha^{-1} x \in C \Rightarrow \rho_c(x) \leq \|x\|$$

Si fuera $\rho_c(x) < \|x\|$ por def ínfimo

$$\exists \alpha \in \underbrace{(\rho_c(x), \|x\|)}_{\text{intervalo}} \; / \; \frac{x}{\alpha} \in C \quad \text{pero}$$

entonces $\left\|\frac{x}{\alpha}\right\| > 1$ abs!

•) Si $C = B_r(0)$ ent $\rho_c(x) = \frac{\|x\|}{r}$ (ej)

Como $\emptyset \neq C \subseteq X$ normado real, $0 \in C$ abierto y convexo. Ent $p_C : X \to \mathbb{R}$ sublineal

$\underbrace{C = \{x \in X : p_C(x) < 1\}}_{\mathrm{II}}$, y $\underbrace{0 \leq p_C(x) \leq c\|x\| \ \forall x \in X}_{\mathrm{I}}$

con c no dependiente de x

dem Para $x, y \in X$, sean $\alpha > p_C(x)$, $\beta > p_C(y)$

$r = \alpha + \beta$. Por def $\alpha^{-1}x, \beta^{-1}y \in C$

Como C convexo $\frac{1}{r}(x+y) = \frac{\alpha}{r}\alpha^{-1}x + \frac{\beta}{r}\beta^{-1}y \in C$

luego $p_C(x+y) \leq r$. Como α, β son cualesquiera

deducimos $p_C(x+y) \leq p_C(x) + p_C(y)$

Además es claro que $p_C(\alpha x) = \alpha p_C(x)$

$\forall \alpha > 0$ o sea p_C es sublineal

Por otro lado $0 \in C$ abierto

$\Rightarrow \exists \delta > 0 \ / \ \|z\| < \delta \Rightarrow z \in C$

Luego para tales z, $p_C(z) \leq 1$. Dado $x \in X$

si definimos $z = \frac{\delta}{2}\frac{x}{\|x\|}$ ent $\|z\| < \delta$

y $\frac{\delta}{2}\frac{1}{\|x\|} p_C(x) = p_C(z) \leq 1 \Rightarrow p(x) \leq \frac{2}{\delta}\|x\|$, $\square$ I

II

por último si $x \in C$ como C abierto $\alpha^{-1}x \in C$ p/algún $\alpha < 1$ luego $p_C(x) \le \alpha < 1$

recíprocamente si $p_C(x) < 1$ entonces $\alpha^{-1}x \in C$ p/algún $\alpha < 1$ luego como $0 \in C$ y C convexo $x = \alpha\alpha^{-1}x + (1-\alpha)0 \in C$ □

Teorema (teo de separación)

X normado real. Sean $A, B \subset X$ conjuntos disjuntos no vacíos y convexos

(a) si A abierto, $\exists f \in X'$ $\gamma \in \mathbb{R}$ tq

$$Re(f(a)) < \gamma \le Re(f(b)) \quad \forall a \in A \ \forall b \in B$$

(b) si A compacto y B cerrado

$\Rightarrow \exists f \in X'$ y $\delta > 0$, $\gamma > 0$ / $Re(f(a)) \le \gamma - \delta < \gamma + \delta \le Re(f(b))$ $\forall a \in A$ $b \in B$

dem (a) Supongo X es real. $a_0 \in A$, $b_0 \in B$

$w_0 = b_0 - a_0 \quad C = w_0 + A - B$

ent $0 \in C \quad C = \bigcup_{b \in B} (w_0 + A - b)$ es abierto

y C convexo pues A y B lo son

o sea $(\alpha(a_1 - b_1 + w_0) + (1-\alpha)(a_2 - b_2 + w_0) = a_3 - b_3 + w_0)$

p/ ciertos $a_3 \in A$, $b_3 \in B$

Además $A \cap B = \phi \quad w_0 \notin C$ y entonces por lema anterior $\rho_C(w) \geq 1$

$W = sp\{w_0\}$. Sea $f_w : W \to \mathbb{R}$ lineal dada por $f_w(\alpha w_0) = \alpha$

Ahora si $\alpha \geq 0 \quad f_w(\alpha w_0) = \alpha \leq \rho_C(w_0)$

y si $\alpha < 0 \quad f_w(\alpha w_0) \leq 0 \leq \rho_C(\alpha w_0)$

(H-B real) $\Rightarrow \exists$ extensión f en X tq $f(x) \leq \rho_C(x) \ \forall x \in X$, luego por lema anterior

$f(x) \leq c\|x\| \quad \forall x \in X$

Además $-f(x) = \rho_C(-x) \leq c\|x\|$

$\Rightarrow |f(x)| \leq c\|x\| \Rightarrow f$ acotada (continua)

$A \neq 0 X'$

Lema anterior

Sea $a \in A$, $b \in B$.

$$1 + f(a) - f(b) = f(w_0 + a - b) \leq p_C(w_0 + a - b) < 1$$

o sea $f(a) < f(b)$. Sea $\gamma = \inf\{f(b) : b \in B\}$

Luego $f(a) \leq \gamma \leq f(b)$ $\forall a \in A$, $b \in B$

Supongamos $\exists a \in A \,/\, f(a) = \gamma$. Como A ab

$\exists \delta > 0 \,/\, a + \delta w_0 \in A$ y entonces

$$f(a + \delta w_0) = f(a) + \delta f_{w}(w_0) = \gamma + \delta > \gamma$$

abs!

(b) Como A convexo y B cerrado

$$\varepsilon = \frac{1}{4} \inf\{\|a - b\| : a \in A, b \in B\} > 0$$

Sea $A_\varepsilon = A + B_\varepsilon(0)$ $B_\varepsilon = B + B_\varepsilon(0)$ y

por des triang $A_\varepsilon \cap B_\varepsilon = \emptyset$, $A_\varepsilon, B_\varepsilon$ abiertos

$\left(A_\varepsilon = \bigcup_{a \in A} a + B_\varepsilon(0)\right)$ y convexo (ejercicio similar a 2(a))

Luego vale (a) con A_ε y B_ε en lugar de A y B. Sea $\delta = \frac{\varepsilon}{2\|w_0\|}$ entonces

$a + \underbrace{\delta w_0} \in A_\varepsilon$ y luego $f(a) = f(a + \delta w_0) - \delta f_w(w_0)$

$$\le \gamma - \delta$$

Análogo $\gamma + \delta \le f(b)$ $\forall b \in B$ luego vale (b)

Obs si fuera X complejo las hipótesis valen en $X_{\mathbb{R}}$ (pues la convexidad involucra solo escalares reales) entonces valen (a) y (b) con algún $f_{\mathbb{R}} \in X'_{\mathbb{R}}$ en lugar de $\operatorname{Re} f$

definimo $f : X \to \mathbb{C}$ por $f(x) = f_{\mathbb{R}}(x) - i f_{\mathbb{R}}(ix)$

que por lema anterior está en X'

y por def es $\operatorname{Re} f_{\mathbb{R}} = f_{\mathbb{R}}$. Listo