ANÁLISIS NUMÉRICO II — Práctico N°4 - 2023
Cuadrados mínimos

1. Resuelva el siguiente sistema lineal usando rotaciones de Givens y reflexiones de Householder
$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 29 \end{bmatrix}.$$

2. Encuentre una reflexión Q tal que $Qx = y$ para vectores $x, y \in \mathbb{R}^n$ con $\|x\|_2 = \|y\|_2 = 1$.

3. **Implemente** las siguientes funciones en `Python` que realizan una descomposición QR. Deben tener como entrada una matriz A y como salida Q y R.
   a) `qrgivens` que utilice rotaciones de Givens.
   b) `qrhholder` que utilice reflexiones de Householder.

4. **Implemente** una función en `Python` llamada `qrgivensp` que utilice rotaciones de Givens con permutación de columnas. Debe tener como entrada la matriz A y como salida Q, R y P.

5. Demuestre que si $R \in \mathbb{R}^{n-1\times n-1}$, $w \in \mathbb{R}^{n-1}$, $v \in \mathbb{R}^{m-n+1}$, $c \in \mathbb{R}^{n-1}$, $d \in \mathbb{R}^{m-n+1}$ tales que
$$A = \begin{bmatrix} R & w \\ 0 & v \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix},$$
con A de rango completo, entonces $\min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} \|Ax - b\|_2^2 = \|d\|_2^2 - (v^T d/\|v\|_2)^2$

6. Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ y $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ t.q. $\phi(x) = \frac{1}{2}\|Ax - b\|_2^2$. Demuestre que:
   a) existe $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ solución de $\underset{x}{\text{minimizar}}\, \phi(x)$,
   b) $\bar{x}$ es solución del problema si y solo si $A^T A\bar{x} = A^T b$.

7. **Implemente** una función en `Python` llamada `sol_cuadmin` que dadas A y b retorne $\bar{x}$ solución del problema de cuadrados mínimos, i.e.,
$$\underset{x}{\text{minimizar}}\ \|Ax - b\|_2^2.$$
Utilice la función del ejercicio 4 y resuelva un sistema triangular.

8. Sea $A(\epsilon) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon \end{bmatrix}$. Utilice `Python` para resolver el sistema lineal $A(\epsilon)x = [1, 1, 1]$ cuando $\epsilon \to 0$ de dos formas distintas:
   a) Utilizando la ecuación normal ($A^T Ax = A^T b$) y resolviendo el sistema lineal mediante LU.
   b) Utilizando la descomposición QR con la implementación de `sol_cuadmin`.

   Comparar ambas soluciones entre sí para cada ϵ.

9. Encuentre $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ solución de $\underset{x}{\text{minimizar}}\ \|Ax - b\|_2^2$ para $A \in \mathbb{R}^{n\times(n-2)}$ y $b \in \mathbb{R}^n$ con
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & \ddots & 0 \\ -1 & \ddots & -1 \\ 0 & \ddots & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

usando los algoritmos de QR y Cholesky, para $n = 100$ y $n = 1000$.

10. Se desea hallar la recta que ajuste los datos $(x_i, y_i) = (i, i)$ para $i = 1, \ldots, 9$ y $(x_{10}, y_{10}) = (10, 0)$.

    a) Encuentre la solución de minimizar $\|Ax - b\|_2^2$ usando `sol_cuadmin` del ejercicio 7.

    b) Encuentre la solución de minimizar $\|Ax - b\|_1$ usando `scipy.optimize.linprog`.

    c) Encuentre la solución de minimizar $\|Ax - b\|_\infty$ usando `scipy.optimize.linprog`.

    d) Grafique simultaneamente las tres rectas y los datos.

11. Se desea contar con un modelo para pronosticar el comportamiento de un sistema desconocido. Para ello, contamos con valores de entrada $u(t)$ y de salida $y(t)$ para tiempos $t = 0, \ldots, N$. Una estrategia, consiste en suponer que la salida depende de las últimas $\tau + 1$ entradas, o sea,

$$y(t) \approx h_0 u(t) + h_1 u(t-1) + \cdots + +h_\tau u(t-\tau), \quad \text{para } t = \tau, \ldots, N.$$

    Descargue el archivo `dryer2.dat` (datos de una secadora industrial obtenidos de DaISy) donde los datos t, $u(t)$, $y(t)$ están en las columnas 1, 2 y 5, respectivamente.

    a) Grafique conjuntamente $u(t)$ e $y(t)$.

    b) Entrene su modelo con $\tau = 100$ y $N = 500$.

    c) Grafique su estimación $y_{\text{est}}(t)$ junto a $y(t)$ para $t > N$.