1	2	3	4	5	6	7	8	9		Calif.

Apellido y Nombre:

Condición: Libre Regular

Algebra III - Final

16 de diciembre de 2022

Justificar todas las respuestas. No se permite el uso de dispositivos electrónicos. Todos los resultados teóricos utilizados deben ser enunciados apropiadamente; en caso de utilizar resultados teóricos no dados en clase, los mismos deben demostrarse. Para aprobar se debe tener como mínimo 15 pts. en la parte teórica y 30 pts. en la parte práctica.

Parte Teórica (30 pts.)

1. (14 pts) Enunciar y demostrar el Teorema de Cayley-Hamilton generalizado.
2. (12 pts) Diagonal más nilpotente, enunciar y probar.
3. Determinar si cada una de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando en cada caso la respuesta dada.
   (a) (3 pts) Sea V un $\mathbb{k}$-espacio vectorial de dimensión $n \geq 2$, $\lambda \in \mathbb{k}$ y $T : V \to V$ una transformación lineal tal que $m_T = (x - \lambda)^n$. Entonces existen exactamente $n + 1$ subespacios T-invariantes.
   (b) (3 pts) Sea V espacio vectorial con producto interno. Toda transformación lineal en V tiene adjunto.
   (c) (3 pts) Si $T : V \to V$ tiene un vector cíclico, entonces los únicos subespacios T-invariantes son 0 y V.

Parte Práctica (70 pts.)

5. (15 pts) Sea V el $\mathbb{C}$-espacio vectorial de los polinomios de grado ≤ 4, y $T : V \to \mathbb{C}^{2\times 2}$ la transformación lineal dada por $T(p) = \begin{pmatrix} p(1) & p'(1) \\ p''(1) & p'''(1) \end{pmatrix}$.

   Probar que T es un isomorfismo. Hallar los polinomios minimal y característico de T.

   Decidir si es diagonalizable y si existe un vector cíclico.

6. (15 pts) Sean $\Bbbk$ un cuerpo y $T : \Bbbk^5 \to \Bbbk^5$ una transformación lineal tal que $T^5 = \mathrm{id}$.

   (a) Hallar todas las posibles formas de Jordan y racionales cuando $\Bbbk = \mathbb{R}$.

   (b) Hacer lo mismo para $\Bbbk = \mathbb{C}$ y $\Bbbk = \mathbb{Z}_5$.

7. (15 pts) Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con producto interno, $T : V \to V$. Probar que $\langle T(v), v\rangle = 0$ para todo $v \in V$ si y sólo si $T^* = -T$ (en particular, T tiene adjunto).

8. Para cada $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, sea $\phi_A : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ la función definida por $\phi_A(B) = A^t BA$.

   (a) (10 pts) Probar que ϕ_A es una transformación lineal.

   (b) (10 pts) Si fijamos $\langle\cdot|\cdot\rangle$ el producto interno de $\mathbb{R}^{n\times n}$ dado por $\langle B|C\rangle = \mathrm{tr}(B^t C)$ para cada par $B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$, probar que $(\phi_A)^* = \phi_{A^t}$.

9. Sean V, W dos $\Bbbk$-espacios vectoriales de dimensión finita, $\mathcal{L}(V, W)$ el espacio vectorial de todas las transformaciones lineales de V en W y $\{w_1, \cdots, w_n\}$ una base de W.

   (a) (5 pts) Dados $f_1, \cdots, f_n \in V^*$, definimos $T_{f_1,\cdots,f_n} : V \to W$, $T_{f_1,\cdots,f_n}(v) = \sum_{i=1}^n f_i(v)w_i$. Probar que $T_{f_1,\cdots,f_n}$ es una transformación lineal.

   (b) (10 pts) Sea $\Phi : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{n} \to \mathcal{L}(V, W)$ la función dada por $\Phi(f_1, \cdots, f_n) = T_{f_1,\cdots,f_n}$.

   Probar que Φ es un isomorfismo.