Fórmula de euler

Si $\{e_1, e_2\}$ es base de autovecs de dN_p

Dado $v \in T_pS$ $\|v\| = 1$

$$v = \cos\theta\, e_1 + \operatorname{sen}\theta\, e_2$$
$$\langle \quad \rangle e_1 + \langle \quad \rangle e_2$$

$$k_n(p) = II_p(v) = \langle -dN_p(v), v \rangle$$
$$= -dN_p(\cos\theta e_1 + \operatorname{sen}\theta e_2), \cos\theta e_1 + \operatorname{sen}\theta e_2 \rangle$$
$$= -\cos\theta\, dN_p(e_1) - \operatorname{sen}\theta\, dN_p(e_2), \quad \rangle$$
$$= \langle \cos\theta\, k_1 e_1 + \operatorname{sen} k_2 e_2, \quad \rangle$$
$$= \boxed{\cos^2\theta\, k_1 + \operatorname{sen}^2\theta\, k_2}$$

euler

def Sean $p \in S$ y $dN_p : T_pS \to T_pS$ la diferencial de la aplicación de gauss

Definimos la <u>curvatura gaussiana</u> de S en p por $K(p) = \det(-dN_p) = k_1 k_2$

y la <u>curvatura media</u> de S en p por

$$H(p) = \frac{1}{2} Tr(-dN_p) = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

def Dado $p \in S$ se dice:

*) elíptico si $K(p) > 0$

*) hiperbólico si $K(p) < 0$

*) parabólico si $K(p) = 0$ pero $dN_p \neq 0$

*) planar si $dN_p = 0$

def Un punto $p \in S$ se dice umbílico si $k_1 = k_2$ es decir, $-dN_p = k_1 I_{T_pS}$

prop Si S es conexo y todos los puntos de S son umbílicos (p umbílico $\forall p \in S$) entonces S está contenida en una esfera o en un plano.

demo

Paso 1 La curvatura principal en cada abierto coordenado conexo es constante

por hipótesis (todos umbílicos)

$$dN_q(z) = \lambda(q) z \quad \forall z \in T_pS$$

Sea $\varphi : U \to S$ un sistema de coord con U conexo

Calculemos

$$(i)\ (N \circ \varphi)_u(u,v) = dN_{\varphi(u,v)} \varphi_u(u,v)$$

$$= \underbrace{\lambda(\varphi(u,v))}_{:= h(u,v)\quad h : U \to \mathbb{R}} \varphi_u(u,v)$$

ii) $(N \circ \varphi)_v(u,v) = \lambda(\varphi(u,v))\varphi_v(u,v)$
$= h(u,v)\varphi_v(u,v)$

derivo (i) y (ii) y las resto

$$(N\circ\varphi)_{vu}(u,v) = h_v(u,v)\varphi_u(u,v) + h(u,v)\varphi_{vu}(u,v)$$
$$\shortparallel \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \shortparallel$$
$$(N\circ\varphi)_{uv}(u,v) = h_u(u,v)\varphi_v(u,v) + h(u,v)\varphi_{uv}(u,v)$$

$$0 = h_v(u,v)\varphi_u(u,v) - h_u(u,v)\varphi_v(u,v)$$

pero $\{\varphi_u, \varphi_v\}$ son l.i

$\Rightarrow h_v \equiv 0 \qquad h_u \equiv 0$

como $\nabla h = 0$ y U es conexo
obtenemos h cte en U
como $h(u,v) = \lambda(\varphi(u,v))$ cte en U
$\Rightarrow \lambda$ es cte en U

Paso 2 Cada abierto coordenado conexo está contenido en un plano o una esfera

Caso $\lambda = 0$ (N campo normal)

tenemos que $(N \circ \varphi)_u = 0 = (N \circ \varphi)_v$

$\Rightarrow N \circ \varphi$ es cte en U

$N(\varphi(U))$ cte llamo $N_0 := N \circ \varphi$

Sea $p \in \varphi(U)$ veamos que $\varphi(U)$ está contenido en

$$P = \{ q \in \mathbb{R}^3 \mid \langle q - p, N_0 \rangle = 0 \}$$

queremos ver que

$$f(u,v) = \langle \varphi(u,v) - p, N_0 \rangle$$

es cero $\forall (u,v) \in U$

$N \circ \varphi(u,v)$ normal en (u,v) es perp a $\varphi_u(u,v)$

derivo $f_u(u,v) = \langle \varphi_u(u,v), N_0 \rangle = 0$

$$f_v(u,v) = \langle \varphi_v(u,v), N_0 \rangle = 0$$

$\Rightarrow f$ cte en U

Como $p \in \varphi(U) \Rightarrow \exists (u_0, v_0) \in U$

tal que $\varphi(u_0, v_0) = p$

y $f(u_0, v_0) = 0$

$\Rightarrow f \equiv 0$

Como $f(u,v) = 0 \quad \forall (u,v) \in U$

$\Rightarrow \varphi(U) \subseteq P$ (Plano)

<u>Caso $\lambda \neq 0$</u> queremos ver que $\varphi(U)$ está contenido en una esfera

Veamos que

$$C(u,v) = \varphi(u,v) - \frac{1}{\lambda} N \circ \varphi(u,v)$$

es cte

derivando

$$C_u(u,v) = \varphi_u(u,v) - \frac{1}{\lambda}(N \circ \varphi)_u(u,v)$$

$$= \varphi_u(u,v) - \frac{1}{\lambda} dN_{\varphi(u,v)}(\varphi_u(u,v))$$

$$= \varphi_u(u,v) - \frac{1}{\cancel{\lambda}} \cancel{\lambda} \varphi_u(u,v)$$

$$= 0$$

análogo $C_v(u,v)=0$

$\Rightarrow$ C cte en U

propongo C como centro

$\Rightarrow$ $\|\varphi(u,v)-C\| = \|\frac{1}{\lambda} N\circ\varphi(u,v)\|$

$= |\frac{1}{\lambda}|\, \underbrace{\|N\circ\varphi(u,v)\|}_{=1}$ pq N es campo normal

$= |\frac{1}{\lambda}|$

$\Rightarrow$ $\varphi(U) \subseteq S_{\frac{1}{|\lambda|}}(C)$ (esfera de radio $\frac{1}{|\lambda|}$ y centro C)

<u>Paso 3</u> toda la superficie está contenida en un plano o una esfera

<u>caso $\lambda \neq 0$</u> sea $p \in S$ y $\varphi: U \to S$ sist de coord con U conexo y $p \in \varphi(\tilde{q})$

por el paso 2

$\varphi(U) \subseteq P = \{p' \in \mathbb{R}^3 \mid \langle p'-p, N_0\rangle = 0\}$

Sea $q \in S$ veamos que $q \in P$

Como S es conexa $\exists\, \alpha : [0,1] \to S$

continua tal que $\alpha(0) = p$ y $\alpha(1) = q$

Sea $A = \{ s \mid \langle \alpha(t) - p, N_0 \rangle = 0 \ \forall t \in [0,s] \}$

y $\sup A = s_0$ $\quad (A \neq \emptyset$ pues $0 \in A)$

Veamos $s_0 = \max A$

Consideremos $f(t) = \langle \alpha(t) - p, N_0 \rangle$

f continua

Sea $t_n \to s_0^-$ con $t_n \in A$

Como f es continua

$$f(s_0) = \lim_{t_n \to s_0^-} f(t_n) = 0$$

$\Rightarrow f(s_0) = 0 \Rightarrow s_0 \in A$

* si $s_0 = 1 \Rightarrow q \in P$

* si $s_0 < 1$

Sea V_0 entorno convexo de $\alpha(s_0)$ es decir (V, φ) sist de coord de $\alpha(s_0)$ con V convexo $V_0 = \varphi(V)$

$\Rightarrow$ V_0 está contenido en un plano o una esfera

Luego, $\exists\, \varepsilon > 0$ tal que

$$\alpha((s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon)) \subseteq V_0 \quad (\alpha \text{ continua})$$

y sabemos $\alpha((s_0 - \varepsilon, s_0]) \subseteq P$

$\Rightarrow$ $V_0 \subseteq P$ (α continua)

luego $\alpha((s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon)) \subseteq P$

$\Rightarrow$ $s_1 \in A$ $\forall s_1 \in (s_0, s_0 + \varepsilon)$ abs.

pues $s_0 = \sup A$ y $s_0 < s_1$

$\Rightarrow$ $s_0 = 1$ $\square$