Análisis Funcional I – 2021
Práctico 5

Espacios vectoriales topológicos

(1) (a) Probar que si $1 < p < \infty$ y $1 - 1/p = 1/p'$ entonces $(\ell^p)'$ es isométricamente isomorfo a $\ell^{p'}$.
(b) Probar que $(\ell^1)'$ es isométricamente isomorfo a ℓ^∞.
¿Vale el mismo resultado intercambiando los roles de ℓ^1 y ℓ^∞?
(c) Probar que $(c_0)'$ es isométricamente isomorfo a ℓ^1. ¿Qué ocurre con c'?
(d) Probar que si $0 < p < 1$ entonces existe un isomorfismo lineal entre $(\ell^p)'$ y ℓ^∞.

(2) El Teorema de Banach-Steinhauss (o Principio de Acotación Uniforme) no vale cuando X no es completo. Considerar

$$X := \{x = \{x_i\}_{i=1}^\infty,\ x_i = 0 \text{ salvo un número finito de i's } \}.$$

Notar que X es un espacio normado con la $||\cdot||_1$, $||\cdot||_2$ o $||\cdot||_\infty$.
Sea $A_n(x) := nx_n$. Probar
(a) $A_n \in X' := \mathcal{B}(X, \mathcal{B}K)$.
(b) $\sup_n |A_n(x)| < \infty$ y $\lim\limits_{n\to\infty} ||A_n|| = \infty$ (verificarlo con $||\cdot||_1$).

(3) Sea N un espacio normado.
(a) Probar que para todo $x \neq 0$ en N existe $F \in N'$ tal que $||F|| = 1$ y $F(x) = ||x||$.
(b) N' separa puntos en N, es decir, dados $x_1 \neq x_2 \in N$ existe $F \in N'$ tal que $F(x_1) \neq F(x_2)$.
(c) Probar que para todo $x \in N$ existe $\tilde{x} : N' \to \mathbb{K}$, definida por $\tilde{x}(F) = F(x)$ lineal y continua, es decir $\tilde{x}$ pertenece al bidual o doble-dual $N'' := (N')'$ de N.
(d) Probar que la aplicación $x \to \tilde{x}$ es lineal e isométrica.

(4) Sea N un espacio normado, $S \subseteq N$ un subespacio vectorial cerrado. Probar que para todo $x \notin S$ existe $F \in N'$ tal que $F(x) \neq 0 = F(y)$ para todo $y \in S$.

(5) Hacer los ejercicios 5.26, 5.28 y 5.30 de la página 165 del libro Linear Functional Analysis de Rynne y Youngson.

(6) Sea S un subconjunto de un EV X. Entonces su capsula convexa es

$$S_c = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i : x_i \in S,\ \alpha_i > 0,\ \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1 \ y \ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

(7) Probar que si S es balanceado, su cápsula convexa S_c es balanceada. Deducir que en un EVTLC, los entornos del $0 \in X$ balanceados y convexos (y absorbentes por ser entornos del origen) forman base de entornos.

(8) Sea X un EV y $\mathcal{P}$ una familia no vacia de seminormas sobre X. Para cada $p \in \mathcal{P}$ y $\epsilon > 0$ definimos $V(p, \epsilon) = \{x \in X : p(x) < \epsilon\}$. Sea $\mathcal{U}$ el conjunto de todas las intersecciones finitas de estos conjuntos. Demostrar que $\mathcal{U}$ cumple el Teorema 1 y por lo tanto existe una única topología τ que admite a $\mathcal{U}$ como base de entornos de 0.

(9) Sea $X = l^1(\mathbb{N})$ y sea $p_i(x) = |x_i|, i \in \mathbb{N}$. Probar que $\{p_i\}$ es una familia de seminormas que determinan sobre X una topología localmente convexa. Determinar los entornos del cero. Esta topología es equivalente a la generada por la $\|\|_1$?

(10) Sea X un EVT sobre $\mathbb{K}$, con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *o* $\mathbb{K}$. Sea $\Lambda : X \to \mathbb{K}$ lineal, no nula. Probar que Λ es una aplicación abierta.

(11) Dar ejemplo de un EVTLC no metrizable y de un EVT metrizable no LC.

(12) Probar que un EVT T_1 es normable si y solo si el origen admite un entorno S convexo y acotado. Ayuda: usar la funcional de Minkowski de S.

(13) Sean $(X, \mathcal{P})$ y $(Y, \mathcal{Q})$ dos espacios vectoriales topológicos localmente convexos (EVTLC), generados por las familias de seminormas $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ respectivamente. Sea $A : X \to Y$ lineal. Entonces:
A es continua si y sólo si, para todo $q \in \mathcal{Q}$ existen $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{P}$ y $M > 0$ tales que

$$q(A(x)) \leq M[p_1(x) + \cdots + p_n(x)]$$

para todo $x \in X$.

(14) Sea $\mathcal{P} = \{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una familia númerable de seminormas en un EV X, tal que para todo $x \in X$ existe $p_n \in \mathcal{P}$ con $p_n(x) \neq 0$. Demostrar que

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x-y)}{1 + p_n(x-y)},$$

es una distancia en X.

(15) Sea $C := C[0,1] = \{f[0,1] \to \mathbb{C}, \text{continuas}\}$. Definimos

$$d(f, g) = \int_0^1 \frac{|f(x) - g(x)|}{1 + |f(x) - g(x)|}\, dx.$$

Sea (C, σ) el espacio C con la topología inducida por esta métrica y (C, τ) el espacio C con la topología de las seminormas

$$p_x(f) = |f(x)|, \qquad 0 \leq x \leq 1.$$

(a) Probar que todo conjunto τ-acotado también es σ-acotado y por lo tanto la $id : (C, \tau) \to (C, \sigma)$ manda conjuntos acotados en conjuntos acotados.

(b) Probar que $id : (C, \tau) \to (C, \sigma)$ no es continua, a pesar que es sucesionalmente continua, (por el teorema de la convergencia dominada), y por lo tanto (C, τ) no es metrizable. Probar también que (C, τ) no tiene base local numerable.

(c) Probar que toda funcional lineal en (C, τ) es de la forma $f \to \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i)$, para alguna elección de puntos $x_1, \ldots, x_n \in [0, 1]$ y algunos $c_i \in \mathbb{C}$.

(d) Probar que los únicos abiertos convexos de (C, σ) son $\emptyset$ y C.

(e) $id : (C, \sigma) \to (C, \tau)$, no es continua.

(16) Sea $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ el espacio de las funciones de Schwartz.

(a) Probar que las aplicaciones $f \to x^n f$, $f \to \frac{d^n}{dx^n} f$ y $f \to gf$ son continuas de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ donde $g \in \mathcal{S}$.

(b) Probar que para cada f fija en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ la aplicación $h \to \tau_h(f) = f(x-h)$ es continua de $\mathbb{R}$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Además, para cada h fijo, la aplicación $f \to \tau_h(f)$ es continua de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(c) Probar que la inclusión de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ en $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$ y la inclusión de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ en $C_0(\mathbb{R})$ son continuas, donde $C_0(\mathbb{R})$ es el espacio de todas las funciones continuas f tal que $\lim_{|x| \to \infty} f(x) = 0$ con la norma infinito.

(17) Probar que las siguientes funcionales están en el espacio de distribuciones temperadas $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$:

(a) $\delta_a f = f(a)$.

(b) $L_g(f) = \int fg$ donde $g \in L^p(\mathbb{R})$ y $1 \leq p \leq \infty$.

(18) Para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ definimos en valor principal de $\frac{1}{x}$ en f como

$$v.p. \frac{1}{x}(f) := \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|t| > \epsilon} \frac{f(t)}{t} \, dt.$$

Demostrar que el valor principal de $\frac{1}{x}$ están en el espacio de distribuciones temperadas $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Ayuda, para cada ϵ dividir la integral en los conjuntos $\{|t| > 1\}$ y $\{1 \geq |t| > \epsilon\}$ en este ultimo usar el teorema del valor medio.

(19) Sea $X = C([0, 1])$. Consideremos en X las topologías generadas por $||\cdot||_\infty$ y la generada por la familia de seminormas $\mathcal{P}_x(f) = |f(x)|$. Si $T : X \to X$ es el operador definido por $(Tf)(x) = \int_0^x f(t)dt$, probar que:

(a) $T : (X, ||\cdot||_\infty) \to (X, ||\cdot||_\infty)$ es continuo y hallar su norma.

(b) $T : (X, ||\cdot||_\infty) \to (X, \mathcal{P}_x)$ es una aplicación continua.

(c) $T : (X, \mathcal{P}_x) \to (X, \mathcal{P}_x)$ no es continua.