

**Interpolación polinomial:****Método de Newton y de Lagrange, Error del polinomio interpolante, Splines.**

1. a) Para la función  $f(x) = \frac{1}{x}$ , construir el polinomio interpolante de Lagrange  $p$  y el polinomio interpolante de Newton  $q$ . Usar como nodos los puntos  $x_0 = 2$ ,  $x_1 = 2.5$ ,  $x_2 = 4$ .
  - (i) Comparar los polinomios  $p$  y  $q$  y dar sus grados.
  - (ii) Calcular  $p(3)$ .
  - (iii) Graficar  $f(x)$  y  $p(x)$ .
  - (iv) Analizar los resultados.
- b) Construir los polinomios de Taylor  $p_n$  de grado  $n = 0, 1, 2, 3$  de la función  $f(x) = \frac{1}{x}$  alrededor de  $x_* = 1$ .
  - (i) Calcular  $p_n(3)$ .
  - (ii) Graficar  $p_n(x)$ .
- c) Comparar los valores  $p(3)$  y  $p_n(3)$ .
2. Demostrar que si  $f$  es un polinomio de grado menor o igual que  $n$  entonces el polinomio de grado menor o igual que  $n$  que interpola a  $f$  en  $x_0, x_1, \dots, x_n$  es  $f$ .
3. Mostrar que si  $g(x)$  interpola a  $f(x)$  en los puntos  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$  y  $h(x)$  interpola a  $f(x)$  en los puntos  $x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$ , entonces

$$p(x) = g(x) + \frac{x_0 - x}{x_n - x_0}(g(x) - h(x)),$$

interpola a  $f(x)$  en  $x_0, x_1, \dots, x_n$ .

4. Dados  $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ , se definen los polinomios básicos de Lagrange  $l_k$  para  $k = 0, \dots, n$  como

$$l_k(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)}.$$

- a) Probar que  $\sum_{k=0}^n l_k(x) = 1$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .
- b) Probar que  $\sum_{k=0}^n x_k l_k(x) = x$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .
- c) Probar que  $\sum_{k=0}^n x_k^m l_k(x) = x^m$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , con  $m \leq n$ .

5. Considerar los siguientes conjuntos de datos
 

$x$	-1	0	2	3
$y$	-1	3	11	27

$x$	-1	0	1	2
$y$	-3	1	1	3

- a) Calcular los polinomios interpolantes de grado menor o igual que 3, en la forma de Lagrange.
- b) Construir las tablas de diferencias divididas y los polinomios interpolantes en la forma de Newton.
- c) Agregar a las tablas el punto  $x = 4$ ,  $y = 1$  y actualizar las tablas de diferencias divididas para recalcular los polinomios interpolantes.
6. Sea  $f : [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2^x$ . Sea  $P_n$  un polinomio de grado menor o igual a  $n$  que interpola a  $f$  en  $n + 1$  puntos distintos del intervalo  $[0, 5]$ . Demostrar que para cualquier  $x$  en dicho intervalo vale que

$$|P_n(x) - f(x)| \leq \frac{32 \cdot 5^{n+1}}{(n+1)!}.$$

7. Mostrar que el error obtenido al interpolar la función  $f(x) = \cosh(x)$  con un polinomio  $p(x)$  de grado menor o igual a 22 en el intervalo  $[-1,1]$  es menor o igual a  $5 \times 10^{-16}$ .
8. a) Sea  $a < b$ ,  $m$  el punto medio entre  $a$  y  $b$ ,  $p = m - h$  y  $q = m + h$  para  $0 \leq h \leq (b-a)/2$ . Demostrar que para todo  $x$  en  $[a, b]$ ,

$$|(x-p)(x-q)| \leq \frac{(b-a)^2}{4}.$$

- b) Sean  $x_i = a + i \left( \frac{b-a}{n} \right)$ ,  $i = 0, \dots, n$ ,  $n+1$  puntos equiespaciados en el intervalo  $[a, b]$ . Demostrar que para todo  $x$  en  $[a, b]$ ,

$$|(x-x_0) \dots (x-x_n)| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{2^{n+1}}.$$

9. a) Sea  $f(x) = \cos(\pi x)$ , hallar un polinomio de grado menor o igual a 3 que verifique

$$p(-1) = f(-1), p(0) = f(0), p(1) = f(1), p'(1) = f'(1).$$

- b) Hallar un polinomio de grado menor o igual a 4 que verifique las condiciones del ítem anterior, más la condición  $p''(1) = f''(1)$ .

10. Se desea aproximar la función  $f(x) = \sqrt{x}$  con un error de a lo sumo  $5 \times 10^{-8}$ , usando los siguientes métodos:

- a) Un spline lineal  
b) Interpolación cuadrática cada 3 nodos.

Determinar para cada caso el mínimo número necesario  $n$  de nodos de la forma  $x_i = 1 + \frac{i}{n}$  para  $i = 0, \dots, n$ , y la longitud de paso  $h$ , para satisfacer la cota del error.

11. Dada una tabla de valores igualmente espaciados de la función  $f(x) = \cos(x)$ , determinar el valor del paso  $h$  y el mínimo número de nodos necesarios para aproximar  $f(x)$  por un spline lineal en el intervalo  $[0, 2\pi]$  con un error menor o igual a  $5 \times 10^{-7}$ .
12. a) Determinar valores de  $\alpha, \beta, \gamma$  para que  $S$  sea una función spline cúbica, siendo

$$S(x) = \begin{cases} \alpha x^3 + \gamma x, & 0 \leq x \leq 1, \\ -\alpha x^3 + \beta x^2 - 5\alpha x + 1, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

- b) Con los valores de  $\alpha, \beta, \gamma$  obtenidos en el ítem anterior, decidir si  $S$  interpola a la función  $f(x) = 2^x + 0.5x^2 - 0.5x - 1$  en el intervalo  $[0, 2]$  respecto de los nodos  $\{0, 1, 2\}$ .  
c) Graficar simultáneamente  $f$  y  $S$  en el intervalo  $[0, 2]$ .

13. Sea

$$s(x) = \begin{cases} 1 + b_1 x + c_1 x^2 + d_1 x^3, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ b_2(x-1) + c_2(x-1)^2 + d_2(x-1)^3, & \text{si } 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

un spline cúbico natural para una función  $f$  que satisface

$$f(0) = 1, \quad f(1) = 0, \quad f(2) = 3.$$

Encontrar los coeficientes  $b_1, c_1, d_1, b_2, c_2$  y  $d_2$ .