Isometrías en $\mathbb{R}^3$

def Una isometría es una función $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ diferenciable que preserva distancias, es decir

$$d(f(p), f(q)) = d(p, q) \quad \forall\, p, q \in \mathbb{R}^3$$

ejemplo Traslaciones $L_v(x) = x + v$

def $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ T.L se dice ortogonal si preserva el prod interno

ejemplo rotación θ

$$T(x,y,z) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

prop Si $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una isometría tq $f(0,0,0) = (0,0,0) \Rightarrow f$ es lineal ortogonal

<u>demo</u> 1) preserva norme

$$\|f(p)\| = \|f(p) - \overset{=0}{f(0)}\| = d(f(p), f(0))$$
$$= d(p, 0)$$
$$= \|p - 0\| = \|p\|$$

2) preserva p.i

$$\|f(p) - f(q)\|^2 = d(f(p), f(q))^2 = d(p, q)^2$$
$$= \|p - q\|^2$$

$$\Rightarrow \langle f(p) - f(q), f(p) - f(q) \rangle = \langle p - q, p - q \rangle$$

$$\cancel{\|f(p)\|^2} - \cancel{2}\langle f(p), f(q) \rangle + \cancel{\|f(q)\|^2}$$
$$= \cancel{\|p\|^2} - \cancel{2}\langle p, q \rangle + \cancel{\|q\|^2} \qquad \square$$

3) f lineal $\quad 0 \overset{?}{=} \|f(p+q) - f(p) - f(q)\|$

$$0 = \|f(cp) - c f(p)\|$$

esercizio

<u>Teorema</u> Si f es una isometría de $\mathbb{R}^3$ entonces existen T traslación y C lineal ortogonal tal que

$$f = T \circ C$$. Más aún, T y C son únicas

<u>demo</u> sea $v = f(0,0,0)$

$$\Rightarrow C(X) = f(X) - v$$

$$\Rightarrow C(0) = f(0,0,0) - v = 0$$

$\Rightarrow$ C lineal por demo anterior

y $$d(C(p), C(q)) = \|C(p) - C(q)\|$$
$$= \|f(p) - \cancel{v} - (f(q) - \cancel{v})\|$$
$$= \|f(p) - f(q)\|$$
$$= d(f(p), f(q))$$
$$= d(p, q)$$

$\Rightarrow$ preserva dist, C isometría

$\therefore$ C ortogonal

$\Rightarrow f(x) = C(x) + v = T(C(x))$

donde $T(y) = y + v$ traslación

$\Rightarrow f = T \cdot C$

<u>Unicidad</u> Supongo $T \cdot C = \tilde{T} \cdot \tilde{C}$
con $T, \tilde{T}$ traslación $C, \tilde{C}$ lineal ortogonal

$$\tilde{T}^{-1} T = \tilde{C} C^{-1}$$

$$\tilde{T}^{-1} T(0) = \underbrace{\tilde{C} C^{-1}}_{TL}(0) = 0$$

Como $\tilde{T}^{-1} T$ es traslación por ser composición de traslaciones
$\tilde{T}^{-1} T = Id$ (traslación que no hace nada, si no te movería el 0)

Teorema Dados $p, q \in \mathbb{R}^3$ y dos BON $\{e_1, e_2, e_3\}$, $\{f_1, f_2, f_3\}$ existe una única isometría f de $\mathbb{R}^3$ tq $f(p) = q$ y $df_p e_i = f_i$

demo Sea C la tl / $C(e_i) = f_i$

luego C ortogonal (manda bon en bon)

Sea T la traslación en $q - C(p)$

$$t(a) = a + q - C(p)$$

definimos $f = T \circ C$

$$f(p) = TC(p) = C(p) + q - C(p) = q$$

$df_p = d_{C(p)} = C$ y es única por teo anterior

$$f(x) = C(x) + v$$

$$\rightarrow d_x f = d_x C$$

def Se dice que una isometría $f = T_a C$ preserva orientación si $\det C = 1$ y que invierte si $\det C = -1$

Lema Si C es lineal ortogonal entonces

$$Cv \times Cw = \det C\,(v \times w) \quad \forall\, v, w$$

demo $Cv \times Cw = \det C\,(v \times w)$

$(\Leftarrow)$ $\langle Cv \times Cw,\ Cz \rangle = \det C \langle C(v \times w), Cz \rangle$

(C preserva p.i

$(\Leftarrow)$ $\det(Cv|Cw|Cz) = \det C\ \langle v \times w, z \rangle$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \|$

$(\Leftarrow)$ $\det(C)\det(v|w|z) = \det C\ \det(v|w|z)$

$\square$

teorema Sea α PLA con $k > 0$, f isometría de $\mathbb{R}^3$ y defino

$\tilde{\alpha} = f \circ \alpha$ entonces $\tilde{\alpha}$ es PLA

$\tilde{k} = k$, $\tilde{\tau} = \det C\ \tau$

y $\{ \tilde{t} = Ct, \tilde{n} = Cn, \tilde{b} = \det(C)\, Cb \}$ es el triedro

dem $\tilde{\alpha}' = (f \circ \alpha)' = df \cdot \alpha'$

$f = \tau \cdot c$

$\Rightarrow \|\tilde{\alpha}'\| = \|df \cdot \alpha'\| = \|c\,\alpha'\|$

c orto $= \|\alpha'\| \underset{\pi}{=} 1$

PLA

$\Rightarrow \tilde{\alpha}$ PLA

$\tilde{\alpha}'' = (f \circ \alpha)'' = (df \cdot \alpha')' = (c\,\alpha')'$

$= dc\,\alpha''$

$= c\,\alpha''$

$\Rightarrow \tilde{k} = \|\tilde{\alpha}''\| = \|c\,\alpha''\| = \|\alpha''\| = k$

$\tilde{n} = \dfrac{\tilde{\alpha}''}{\tilde{k}} = \dfrac{c(\alpha'')}{k} \overset{c \text{ lineal}}{=} c\left(\dfrac{\alpha''}{k}\right) = cn$

$\tilde{b} = \tilde{t} \times \tilde{n} = ct \times cn = \det c \; c(t \times n)$

$= \det c \; c(b)$

$(\quad 0 = \langle \tilde{b}, \tilde{u} \rangle' = \langle \tilde{b}', \tilde{u} \rangle + \langle \tilde{b}, \tilde{u}' \rangle$

$\Rightarrow \quad b'$

$$\tilde{\tau} = - \langle \tilde{b}, \tilde{u}' \rangle = - \langle \det(C)\, C(b), C u' \rangle$$

$$= - \det(C) \langle Cb, Cu'$$

$$= \det(C) \, - \langle b, u' \rangle$$

$$= \det(C) \, \tau$$