Prop Sea S una superficie regular y $p \in S$. Dada $\varphi: U \to \mathbb{R}^3$, $U \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto tal que $p \in \varphi(U) \subseteq S$ entonces si φ inyectiva y satisface (1) y (3) $\Rightarrow$ satisface (2) es decir φ es homeo

demo $\varphi(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ $(u,v) \in U$

$q = (u,v)$

entonces por (1) y (3) podemos asumir

$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$ si $\pi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ proyección

$$\pi(x,y,z) = (x,y)$$

por teo función inversa $\exists V_1$ abierto de q en U y V_2 de $\pi \circ \varphi(q)$ en $\mathbb{R}^2$ tales que $\pi \circ \varphi|_{V_1}: V_1 \to V_2$ es dif con inversa dif

Como φ es inyectiva $\varphi|_{V_1}: V \to \varphi(V_1)$ es biyectiva

Queremos encontrar F continua tal que

$$\varphi^{-1} = F|_{\varphi(V_1)}$$

Afirmación $F = \underbrace{(\pi \circ \varphi)^{-1} \circ \pi}$
Continua por composición de continuas

F definida en $\underbrace{\pi^{-1}(V_2)}_{= \varphi(V_1)}$ abierto, $V_2 = \pi \circ \varphi(V_1)$

$$F|_{\varphi(V_1)} = F(\varphi|_{V_1}(u,v)) = (\pi \circ \varphi)^{-1} \circ \pi \circ \varphi(u,v)$$
$$= (u,v)$$

Cambio de parámetros

Prop Sea S superficie regular $p \in S$ y $\varphi : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$, $\psi : V \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ dos parametrizaciones de S tales que

$p \in \varphi(U) \cap \psi(V) = W$. Entonces el

cambio de coordenadas

$h = \varphi^{-1} \circ \psi : \psi^{-1}(W) \to \varphi^{-1}(W)$ es difeomorfismo, es decir h es diferenciable y tiene inversa diferenciable

dem Veremos que h es diferenciable en r $\forall r \in \psi^{-1}(W)$.

Sea $q = h(r) \in \varphi^{-1}(W)$

La condición 3 de φ dice que algún determinante menor de la diferencial es no nulo

Si $\varphi(x_1, x_2, x_3) \to x_i$ s función coordenada de φ

$\psi(x_1, x_2, x_3) \to y_i$ s " " " ψ

Supongamos que $\det \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(u,v)}(q) \neq 0$

extendemos φ a una $F: U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ ($\subseteq \mathbb{R}^2$ abierto)

$$F(u,v,t) = (x_1(u,v), x_2(u,v), x_3(u,v)+t)$$

notar

$$F(u,v,0) = \varphi(u,v)$$

$$dF_{(q,0)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1(q)}{\partial u} & \frac{\partial x_1(q)}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial x_2(q)}{\partial u} & \frac{\partial x_2(q)}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial x_3(q)}{\partial u} & \frac{\partial x_3(q)}{\partial v} & 1 \end{bmatrix}$$

$\det \neq 0$

$$\Rightarrow \det\left(dF_{(q,0)}\right) \neq 0$$

Por TF inversa $\exists\, \tilde{U}$ entorno $F(q,0) = \varphi(q)$

tal que $F^{-1} : \tilde{U} \to F^{-1}(\tilde{U})$ diferenciable

Como φ es continua $\exists\, \tilde{V}$ entorno abierto de q tal que $\varphi(\tilde{V}) \subseteq \tilde{U}$ $(\tilde{U} \subseteq \tilde{V})$

ver bien por qué

$\tilde{\tilde{U}} = \tilde{U} \cap \varphi(V)$

$\subseteq \varphi(V) \Rightarrow \tilde{V} \subseteq \varphi^{-1}(\tilde{\tilde{U}})$ preimagen de abierto

Afirmación

$$h|_{\tilde{V}} = \varphi^{-1} \circ \varphi|_{\tilde{V}} = \pi \circ F^{-1} \circ \varphi|_{\tilde{V}}$$

Con $\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \quad \pi(x,y,z) = (x,y)$

* basta ver que $\varphi^{-1}(m) = \pi \circ F^{-1}(m) \quad \forall m \in \breve{U} \cap S$

Si $m \in \breve{U} \cap S \Rightarrow F^{-1}(m) = (\varphi^{-1}(m), 0)$

Aplicando π obtenemos

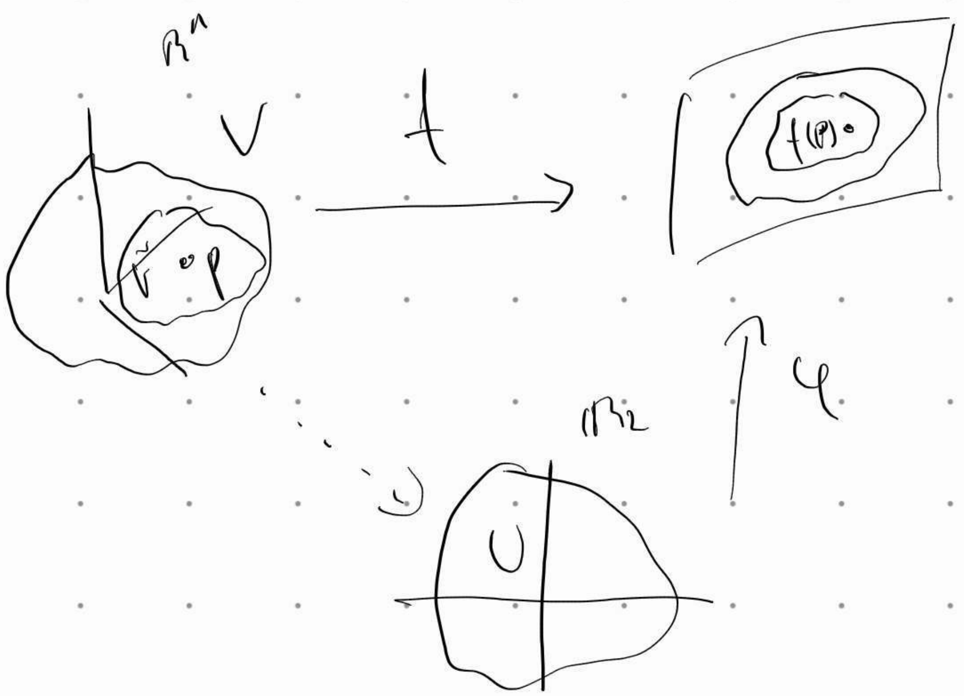
$$\pi \circ F^{-1}(m) = \varphi^{-1}(m)$$

$\therefore h$ es diferenciable en r para cada $r \in \varphi^{-1}(W)$. Análogamente h^{-1} resulta diferenciable (pues es del mismo tipo)

$\Rightarrow h$ difeomorfismo

def Sea $f: S \to \mathbb{R}^n$ una función definida en una función regular S entonces f se dice diferenciable en p si existe una parametrización $\varphi: U \to S$ tal que $p \in S$ tq $p \in \varphi(U)$ y $f \circ \varphi$ es diferenciable en $\varphi^{-1}(p)$.

f se dice diferenciable en S si es diferenciable en p $\forall p \in S$



•) Sea $f: V \subseteq \mathbb{R}^n \to S$ con U abierto

se dice f diferenciable en $p \in V$ si $\exists\ \varphi: U \to S$ param $\forall q$ $f(p) \in \varphi(U)$

$\tilde{V} \subseteq V$, $\tilde{V}$ entorno abierto de p tal que $f(\tilde{V}) \subseteq \varphi(U)$ y $\varphi^{-1} \circ f$ es dif en p

f es diferenciable en V si f lo és en p $\forall p \in V$

<u>obs</u> Las definiciones no dependen de la elección de las parametrizaciones

Ej Si $f: S \to \mathbb{R}^n$ satisface que $f \circ \varphi$ es dif en q para algún φ

Sea ψ otra param de $p = \varphi(q)$

$\psi: V \to S$

luego $f \circ \psi|_{\psi^{-1}(W)} = \overbrace{f \circ \varphi}^{\text{dif}} \circ \overbrace{\varphi^{-1} \circ \psi}^{\text{dif}}|_{\psi^{-1}(W)}$

con $W = \varphi(U) \cap \psi(V)$

$\Rightarrow f \circ \varphi : \varphi^{-1}(W) \to \mathbb{R}^n$

dif en $\varphi^{-1}(q)$