def Sea $T: G \to L$ morfismo de grupos

$\operatorname{Im} T = \{T(x) : x \in G\}$

$\operatorname{Nu} T = \{x \in G \mid T(x) = e\}$ ($e \in L$ neutro)

obs $\operatorname{Im} T$, $\operatorname{Nu} T$ son subgrupos de L y G respectivamente. En efecto si

$y, y' \in \operatorname{Im} T : \exists\, x, x' \in G$ $y = T(x)$ $y' = T(x')$

$\Rightarrow y(y')^{-1} = T(x)T((x')^{-1}) = T(\underbrace{x x'^{-1}}_{\in G \text{ pq } x' \in G})$ $\Rightarrow \underbrace{(y')^{-1}}_{\in G} = T(x'^{-1})$ pq $y' \in G$

Además $e = T(e)$

i) Si $x \in G$ $T(x^{-1}) = T(x)^{-1}$

Para el núcleo. Si $x, x' \in \operatorname{Nu} T \Rightarrow T(x) = e$
$T(x') = e$

Luego $T(x x') = T(x)T(x') = e \cdot e = e$

$\Rightarrow x x' \in \operatorname{Nu} T$

Además $e \in \operatorname{Nu} T$. Si $x \in \operatorname{Nu} T$

$T(x^{-1}) = T(x)^{-1} = e^{-1} = e \Rightarrow x^{-1} \in \operatorname{Nu} T$

CoClases y conteo

Def. Sean G grupo y $H \leq G$. x es congruente a derecha a y módulo H si $xy^{-1} \in H$ (notación $x \equiv_r y \, (H)$)

Análog x congruente a izquierda.

$$x^{-1}y \in H \quad (x \equiv_\ell y \, (H))$$

Teorema 4.2

a) "congruencia derecha" y "cong a izq" son relaciones de equivalencia en G

b) Si $g \in G$ la clase de G respecto de $\equiv_r$ es $Hg = \{hg : h \in H\}$ (la clase de g a derecha mod H)

la clase de g respec $\equiv_\ell$ es $gH = \{gh : h \in H\}$

c) $\forall g \in G \quad |gH| = |H| = |Hg|$

Luego a) Ver $\equiv_r$ es reflexiva, sim y trans

1) Si $g \in G$ $\quad g \equiv_r g\,(H) \Leftrightarrow e = gg^{-1} \in H$ ✓

1) Si $g, h \in G$ $\quad g \equiv_r h\,(H) \Leftrightarrow gh^{-1} \in H$

Como $H \leq G$ $\quad \underbrace{(gh^{-1})}_{\in H}{}^{-1} \in H$

$$(gh^{-1})^{-1} = \underbrace{hg^{-1}}_{\in H} \Leftrightarrow h \equiv_r g\,(H)$$ ✓

1) Sean $g, h, k \in G$: $g \equiv h(H)$ y $h \equiv k\,(H)$

ent $gh^{-1} \in H$ $\quad h \cdot k^{-1} \in H \Rightarrow (gh^{-1})(hk^{-1}) \in H$

$\Rightarrow gk^{-1} \in H \Leftrightarrow g \equiv_r k\,(H)$ ✓

ejercicio Ver que $\equiv_l (H)$ es de equiv

b) La clase de $g \in G$ respecto de $\equiv_r (H)$

es $\{t \in G : g \equiv_r t\,(H)\} = \{t \in G : gt^{-1} \in H\}$

$= \{t \in G : \exists h \in H \mid gt^{-1} = h\}$

$= \{t \in G : \exists h \in H,\ g = ht\}$

$= \{t \in G : \exists h \in H : h^{-1}g = t\}$

$= \{t \in G : \exists h \in H : hg = t\}$

$= Hg$

c) si $g \in G$ la fn $\gamma : H \to Hg$

$\gamma(h) = hg$ es biyectiva

Si $hg = h'g \Rightarrow h = h'$

obs Si g abeliano

$$g \equiv_r h \, (H) \Leftrightarrow g \equiv_e h \, (H)$$

en efecto $g \equiv_r h \, (H) \Leftrightarrow g h^{-1} \in H$

$g \equiv_e h \, (H) \Leftrightarrow g^{-1} h \in H$

pero $g h^{-1} \in H \Leftrightarrow (g h^{-1})^{-1} \in H$

$\Leftrightarrow h g^{-1} \in H$ abeliano

$\Leftrightarrow g^{-1} h \in H$

$\Leftrightarrow g \equiv_e h \, (H)$

ejemplo $G = \mathbb{Z}$ $H = m\mathbb{Z}$ $m \in \mathbb{N}$

ent si $a, b \in \mathbb{Z}$ $a \equiv_r b \bmod (H)$

$\Leftrightarrow$ "$ab^{-1} \in H$" ie $a - b \in m\mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow m \mid a - b \Leftrightarrow a \equiv b \ (m)$

<u>Corolario</u> G grupo $H \leq G$

(i) G es la unión de las coclases a derecha de H. osea $G = \bigcup_{g \in G} Hg$

(ii) Dos coclases a derecha mód H son iguales o disjuntas

$ha = k = \tilde{h} b$

$(\Leftarrow) \Rightarrow hab^{-1} = \tilde{h}$

$ab^{-1} = h^{-1}\tilde{h} \in H$

(iii) si $a, b \in G$ $a \equiv_r b (H) \Leftrightarrow Ha = Hb$

$\Rightarrow ab^{-1} \in H \Rightarrow a = \tilde{h} b$

Sea $k \in Ha \Rightarrow k = ha$

$= h\tilde{h}b$

$= \bar{h} b$

$\Rightarrow k \in Hb$

además $b \equiv_r a (H)$ pq es rel eq misma demo

(iv) Sea $\mathcal{R} = \{Ha : a \in G\}$

$\mathcal{L} = \{aH : a \in G\}$

$$\Rightarrow |\mathcal{R}| = |\mathcal{L}|$$

<u>dem</u> (i) a (iii) sigue del teorema de orden Ver

(iv) Se define $\psi: \mathcal{R} \to \mathcal{L}$

$$\psi(Ha) = a^{-1}H \quad \forall a \in G$$

$\Rightarrow \psi$ es biyectiva (ejercicio)

Def. con la notación anterior

$$|\mathcal{R}| = |\mathcal{L}| =: \underbrace{[G:H]}$$ índice de H en G

ejemplo $[\mathbb{Z} : m\mathbb{Z}] = m$

si $a \in \mathbb{Z}$ vista antes $a \equiv r\,(m)$ $a \equiv r\,(m)$ único $0 \le r \le m-1$

obs $|G| = |H|\,[G:H]$ $\quad G = \bigcup_{gH \in \mathcal{L}} gH$

$\mathcal{R} = \{(n\mathbb{Z})r : r \in \{0, \dots, m-1\}\}$

·) Sea X un conjunto $(X_i)_{i \in I}$ familia de sub tales que

3ℤ: 3, 6 (3+3), 9 (3+3+3), 12 ...

1) $X = \bigcup_{i \in I} X_i$

2 ↳ 6 12 18 24

3 ↳ 9 18 27

2) si $i \neq j$ $X_i \cap X_j = \emptyset$

$\Rightarrow |X| = \sum_{i \in I} |X_i|$

1) y 2) dicen que $(X_i)_{i \in I}$ es una partición $\Leftrightarrow X = \dot{\bigcup}_{i \in I} X_i$

Además si $|X_i| = |X_j| \; \forall i, j \in I$

$$\Rightarrow |X| = |I| \, |X_1|$$

Def Sean G grupo $H \leq G$
un conjunto de representantes de $\equiv_r (H)$ es un subconjunto X de G tal que

$$\forall g \in G \; \exists! \, x \in X : Hg = Hx$$

ent $G = \bigcup_{g \in G} Hg = \dot{\bigcup}_{x \in X} Hx$

obs $|X| = [G : H] \quad (X \simeq R)$

Teorema (Lagrange) G grupo $H \leq G$

$$|G| = |H|[G:H]$$

en particular si $|G| < \infty$ ent $|H| < \infty$

y $|H|$ divide a $|G|$

Teorema 4.5 $\quad G$ grupo $K \leq H \leq G$

ent $\quad [G:K] = [G:H][H:K]$

dem se elige un conjunto de reps

X de H en G:

$$G = \bigcup_{x \in X} Hx \qquad |X| = [G:H]$$

se elige conjunt. de reps Y de

K en H

$$H = \bigcup_{y \in Y} Ky \qquad |Y| = [H:K]$$

$$G = \bigcup_{x \in X} Hx = \bigcup_{x \in X} \left(\bigcup_{y \in Y} Ky \right) x$$

$$= \bigcup_{(x,y) \in X \times Y} Kyx$$

Afirmo $(yx)_{(x,y) \in X \times Y}$ es un conjunto de clases de rep de K en G

Falta ver si $Kyx \overset{*}{=} Ky'x'$ donde $x, x' \in X$ $y, y' \in Y$

ent $x = x'$ $y = y'$

demo En efecto si vale $*$

ent $\exists\, h \in K$: $\overset{\in H}{\underset{\in H}{hy}x} = \underset{\in H}{y'}x'$

$\Rightarrow \exists\, h \in H$: $hx = x'$ pq representante es único!!

ie $Hx = Hx' \Rightarrow x = x' \Rightarrow hy = y'$

$\Rightarrow Ky = Ky'$

$\Rightarrow y = y'$

esto aplicando

$$[G:K] = |X \times Y| = |X||Y|$$
$$= [G:H][H:K]$$

---

ejemplo $K = \{e\} \Rightarrow [G:\{e\}] = |G|$

luego $|G| = [G:\{e\}] = [G:H][H:\{e\}]$
$$= [G:H]\,|H|$$

---

teorema G grupo $H \leq G$ $K \leq G$

supongamos $|H| < \infty$ $|K| < \infty$

$HK = \{h \cdot k : h \in H \ k \in K\}$ (no es subgrupo)

ent $|HK| = \dfrac{|H||K|}{|H \cap K|}$

idea de la demo. sea $C = H \cap K$

ent $C \leq H$ $C \leq K$ $[K:C] = \dfrac{|K|}{|C|} = \dfrac{|K|}{|H \cap K|}$

lagrange

tenemos conjunto de clases de rep

Z de C en K

$$K = \dot{\bigcup_{z \in Z}} Cz$$

$$\Rightarrow HK = \bigcup_{z \in Z} HCz \overset{C \leq H}{=} \bigcup_{z \in Z} Hz$$

ej $\bigcup_{z \in Z} Hz = \dot{\bigcup_{z \in Z}} Hz$ (digamos unión es disjunta)

$$\Rightarrow |HK| = |Z||H| = \frac{|K|}{|C|}|H|$$

---

prop G grupo $H \leq G$ $K \leq G$

ent $[G:K] \geq [H : H \cap K]$

si $[G:K] < \infty$ ent

$$[G:K] = [H : H \cap K] \Leftrightarrow G = H \cdot K$$

demo B coclases a derecha de $[G:K]$

A " " " de $[H : H \cap K]$

defino $\varphi: A \to B$
$(H \cap K)h \mapsto Kh$

Veamos bien def $(H\cap K)h_1 = (H \cap K)h_2$

$\Rightarrow (H\cap K)h_1 h_2^{-1} = (H \cap K)$

$\Rightarrow h_1 h_2^{-1} \in H \cap K$

Como $H \cap K \subseteq K$ $h_1 h_2^{-1} \in K$

$\Rightarrow h_1 \equiv_r h_2 \ (K)$

(son la misma coclase)

osea van a parar a lo mismo en B

i) Veamos inyectividad

$\varphi((H\cap K)h_1) = \varphi((H\cap K)h_2)$

$\Rightarrow Kh_1 = Kh_2 \Rightarrow h_1 h_2^{-1} \in K$

pero también $h_1 h_2^{-1} \in H$

$\Rightarrow h_1 h_2^{-1} \in H \cap K$

$\Rightarrow h_1 \equiv_r h_2 \ (H\cap K)$ (misma coclase)

$\Rightarrow$ por inyectividad $|A| \leq |B| \Leftrightarrow [H : H\cap K] \leq [G:K]$

φ es sobre $\Leftrightarrow |A| = |B|$

$\Leftrightarrow \quad [H : H \cap K] = [G : K]$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{|H|}{|H \cap K|} = \dfrac{|G|}{|K|}$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{|H||K|}{|H \cap K|} = |G|$

Lema) $\quad \Leftrightarrow \quad |HK| = |G|$

$(HK \subseteq G) \quad \Leftrightarrow \quad HK = G$

prop G un grupo $H \leq G$ $K \leq G$ tales

q.e. $[G:H] < \infty$ $[G:K] < \infty$ ent

$[G:H \cap K] < \infty$ $\wedge$ $[G:H \cap K] \leq [G:H][G:K]$

Además $[G:H \cap K] = [G:H][G:K] \Leftrightarrow G = HK$

demo Usando el de arriba $([G:K] \geq [H:H \cap K])$

$$[G:H][H:H \cap K] \leq [G:K][G:H]$$

$$\Leftrightarrow \underset{\|}{[G:H \cap K]} \leq [G:K][G:H]$$

(P9 $H \cap K \leq H \leq G$)

$G = HK \Leftrightarrow [G:K] = [H:H \cap K]$

ej arriba

$\Leftrightarrow [G:K][G:H] = [H:H \cap K][G:H]$

$= [G:H \cap K]$