PRÁCTICO 2

PROBABILIDAD CONDICIONAL E INDEPENDENCIA. ANÁLISIS COMBINATORIO

1. En la sección de productos lácteos de un hipermercado se encuentran 150 litros de leche, 100 de los cuales son frescos y los restantes son del día anterior.

   a) Si se seleccionan dos litros, ¿cuál es la probabilidad de que ambos sean frescos?

   b) ¿Cuál es la probabilidad condicional de que ambos sean frescos, dado que por lo menos uno de ellos es fresco?

2. Se lanza dos veces un dado honesto y se anotan los resultados obtenidos. ¿Cuál es la probabilidad (condicional) de que la suma de los dos dados sea siete, dado que:

   a) la suma es impar?

   b) la suma es mayor que seis?

   c) el resultado del primer dado fue impar?

   d) el resultado del segundo dado fue par?

   e) el resultado de por lo menos un dado fue impar?

   f) los dos dados tuvieron el mismo resultado?

   g) los dos dados tuvieron diferentes resultados?

   h) la suma de los dos dados es doce?

3. En un taller el 25% de sus personas trabajadoras pertenecen al rubro mecánico, el 15% al rubro electricista y el 10% a ambas especialidades. Se selecciona al azar una persona trabajadora del taller.

   a) Si se sabe que la persona seleccionada es del rubro mecánico, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca también al rubro electricista?

   b) Si se sabe que la persona seleccionada es del rubro electricista, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca también al rubro mecánico?

4. Durante el mes de noviembre la probabilidad de que llueva es de 0,3 y se sabe que el equipo de fútbol A gana un partido en un día de lluvia con probabilidad 0,4 y en un día sin lluvia con probabilidad de 0,7. Si el equipo A ganó un partido en noviembre, ¿cuál es la probabilidad de que haya llovido ese día?

5. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ un espacio de probabilidad y supongamos que los conjuntos $A_1, A_2, \ldots$ pertenecen a $\mathcal{A}$. Probar lo siguiente:

   a) Si los A_n son disjuntos y $P(B|A_n) \geq c$ para todo n, entonces $P(B|\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \geq c$. (Puede suponer que $P(A_n) > 0 \, \forall n$).

   b) Si $A_n \supseteq A_{n+1}$ y $P(A_{n+1}|A_n) \leq \frac{1}{2} \, \forall n$, entonces $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$.

   c) Si los A_n son disjuntos y $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$, entonces $P(B|C) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n|C)P(B|A_n \cap C)$.

6. a) Se extrae, con reposición, una muestra de tamaño dos de una urna que contiene 6 bolas, de las cuales 4 son blancas. Sea A el evento "la primera bola extraída es blanca" y sea B el evento "la segunda bola extraída es blanca". ¿Son independientes A y B?

   b) Idem a) pero sin reposición.

7. El estudiantado de una cierta universidad estaba compuesto por un 60% de hombres y un 40% de mujeres. Las siguientes proporciones de estudiantes fumaban cigarrillos: el 40% de los hombres y el 60% de las mujeres. ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante que fumaba cigarrillo fuera hombre? ¿Y de que fuera mujer?

8. Un estudio de la conducta después del tratamiento de un gran número de drogadictos sugiere que la probabilidad de reincidencia dentro de los dos años siguientes al tratamiento puede depender de la educación del paciente. Las proporciones de casos que caen dentro de cuatro categorías de educación-reincidencia se presentan a continuación:

	Condición dentro del período de dos años después del tratamiento		
Educación	Reincidente	No reincidente	Totales
10 años o más	0.10	0.30	0.40
9 años o menos	0.27	0.33	0.60
Totales	0.37	0.63	1.00

Suponga que se selecciona un solo paciente del programa de tratamiento. Defina los eventos:

A: el paciente tiene diez años o más de educación.

B: el paciente reincide dentro del período de los dos años siguientes al tratamiento.

Encuentre la probabilidad de:

(a) A (b) B (c) $A \cap B$. ¿Son A y B independientes? (d) $\overline{A \cup B}$
(e) A, dado que ocurrió B (f) B, dado que ocurrió A

9. Un bolso contiene 3 monedas, una de las cuales tiene dos caras mientras que las otras dos monedas son normales. Se escoge una moneda al azar del bolso y se lanza 4 veces la moneda extraída. Si resultó cara las cuatro veces, ¿cuál es la probabilidad de que ésta sea la moneda de dos caras?

10. En una fábrica de pernos, las máquinas A, B y C fabrican 25, 35 y 40 por ciento de la producción total, respectivamente. De lo que producen, el 5, 4 y 2 por ciento, respectivamente, es defectuoso. Se escoge un perno al azar y se encuentra que es defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que el perno provenga de la máquina A? De la B? De la C?

11. Decir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar sus respuestas.
    a) Si A y B son eventos independientes entonces A y B son excluyentes o disjuntos.
    b) Si A y B son sucesos independientes, entonces A^c y B^c son independientes.

12. Considerar los eventos independientes $A_1, \ldots, A_n$.
    a) Demostrar que $P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - P(A_1^c)P(A_2^c)\ldots P(A_n^c)$.
    b) Obtener la probabilidad de que en seis lanzamientos de un dado legal el número tres aparezca por lo menos una vez.
    c) Si los eventos independientes $A_1, \ldots, A_n$ tienen $P(A_i) = p_i \, \forall i$, determinar la probabilidad de que exactamente k de los eventos ocurran.

13. Supongamos cuatro escritorios con dos cajones cada uno. Cada cajón tiene una moneda. Los escritorios "I" y "II" tienen una moneda de oro y una de plata, el escritorio "III" tiene dos monedas de oro y el escritorio "IV" tiene dos monedas de plata. Un escritorio es elegido al azar y se abre un cajón, encontrando en él una moneda de oro. Calcular la probabilidad de que el otro cajón tenga :
    a) una moneda de oro.
    b) una moneda de plata.

14. Cinco cartas numeradas de 1 a 5 son puestas aleatoriamente en fila. Calcular la probabilidad de los siguientes eventos:
    a) La carta "1" aparece en la primera posición.
    b) La carta "1" está inmediatamente seguida por la carta "2".

c) La carta "1" no está en la primera posición y la "2" no está en la segunda posición.
d) Hay exactamente tres coincidencias (ocurre una coincidencia cuando la carta "i" está en la posición "i").

15. Un mazo de 52 cartas es mezclado y se dan 13 cartas a cada uno de los 4 jugadores A, B, C y D. Calcular la probabilidad de los siguientes eventos:
    a) "A" tiene todos los corazones, "B" todos los diamantes, "C" todos los tréboles y "D" todas las espadas.
    b) Cada jugador tiene cartas de un solo palo.
    c) El jugador "A" no tiene ases.
    d) Los jugadores "A" y "B" obtienen un total de 15 cartas rojas entre los dos.

16. Se arrojan dos dados y suponga que cada uno de los 36 resultados posibles son igualmente probables.
    a) Calcular la probabilidad de obtener por lo menos cinco puntos en la suma de ambos resultados.
    b) Calcular la probabilidad de que la suma de ambos resultados sea par.

17. De 6 números positivos y 8 negativos, se eligen aleatoriamente 4 números sin sustitución y luego se multiplican. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto sea un número positivo?

18. Una urna contiene diez tickets numerados del 0 al 9. Se extrae una muestra de tamaño tres con reemplazo. Al arreglar los números en hilera, en el orden en que aparecen, se forma un número entero entre 0 y 999. ¿Cuál es la probabilidad de que el número formado de esta manera sea divisible por 39? (Considere al cero como divisible por 39).

19. a) Supongamos que nos interesa distribuir n bolas distinguibles en m celdas. Los puntos muestrales de este experimento pueden ser vistos como n-uplas donde cada coordenada a_j es el número de celda en que cae la bola j. Por ejemplo, $(a_1,\ldots,a_n)$ representa la situación "la bola 1 cae en la celda a_1, la bola 2 cae en la celda a_2, …, la bola n cae en la celda a_n". Suponga que todas las configuraciones son igualmente probables. Calcule la probabilidad de un punto $(a_1,\ldots,a_n)$.
    b) Si las bolas son indistinguibles, en vez de puntos $(a_1,\ldots,a_n)$ podemos considerar m-uplas $(k_1,\ldots,k_m)$, donde k_j es el número de bolas que cayeron en la celda j y $\sum_{j=1}^m k_j = n$. Pruebe que $P(\{(k_1,\ldots,k_m)\}) = \frac{n!}{k_1!\ldots k_m!}\frac{1}{m^n}$.
    c) **Esquema de Bosse-Einstein** (usado en Mecánica): Si se asigna a cada uno de los puntos $(k_1,\ldots,k_m)$ igual probabilidad tenemos el esquema de Bosse-Einstein. Calcule $P(\{(k_1,\ldots,k_m)\})$ en este caso. Ayuda: muestre que hay $\binom{n+m-1}{m-1}$ m-uplas $(k_1,\ldots,k_m)$ con $\sum_{j=1}^m k_j = n$, donde k_j es el número de bolas en la celda j.

20. Cinco bolas numeradas son distribuídas aleatoriamente en tres celdas A, B y C. Calcular las probabilidades de los siguientes eventos:
    a) La caja "A" está vacía.
    b) Solo la caja "A" está vacía.
    c) Exactamente una caja está vacía.
    d) Al menos una caja está vacía.
    e) Ninguna caja está vacía.
    f) Dos cajas están vacías.
    g) Tres cajas están vacías.
    h) La caja "A" o la "B" están vacías.

    Repita el ejercicio en el esquema de Bosse-Einstein (ver ejercicio anterior).

21. Dos amigos, Antonio y Daniel, son miembros de un grupo de seis personas que han colocado sus mochilas en un perchero. Cada persona selecciona al azar una mochila del perchero. ¿Cuál es la probabilidad de que:
    a) Antonio obtenga su propia mochila?
    b) ambos, Antonio y Daniel, escojan sus propias mochilas?
    c) por lo menos uno, Antonio o Daniel, escoja su mochila?

22. Hay 10 pares de zapatos en un armario; se eligen sucesivamente cuatro zapatos al azar. Hallar la probabilidad de que se logre al menos un par.

23. Felipe estaciona su auto en la calle, en alguno de los lugares de una hilera de n lugares, sin que quede en ninguna de las esquinas. Cuando vuelve encuentra que exactamente r de los n lugares están ocupados (esto incluye su propio vehículo). ¿Cuál es la probabilidad de que ambos lugares contiguos estén ocupados?