Práctico 5

1. Sea $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable, con $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto, y sea S el gráfico de f, es decir $S = \{(u, v, f(u, v)) : (u, v) \in U\}$.
   (a) Hallar los coeficientes de la primera forma fundamental de S respecto del sistema coordenado canónico.
   (b) Probar que, si U es acotado, el área de S es igual a
   $$\iint_U \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v.$$
2. Calcular la primera forma fundamental para el paraboloide hiperbólico
   $$S_{a,b} = \{(au \cosh v, bu \operatorname{senh} v, u^2) :\ u, v \in \mathbb{R}\}.$$
3. Calcular el área de la esfera de radio r y del cilindro de radio r y altura h.
4. *Superficies de revolución II.* Sea $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ una curva regular en el plano con $\gamma_1(t) > 0$ para todo t en un cierto intervalo abierto I. Si
   - $I = (0, a)$ y γ es inyectiva con inversa continua, o bien
   - $I = \mathbb{R}$ y γ es periódica de período a e inyectiva en $[0, a)$,

   entonces
   $$S = \{(\gamma_1(t) \cos(\theta), \gamma_1(t) \sin(\theta), \gamma_2(t)) \mid t \in I, \theta \in \mathbb{R}\}$$
   es una superficie regular, llamada superficie de revolución con curva generatriz γ.
   (a) Encontrar dos (o cuatro) sistemas coordenados que cubran a S, y calcular los coeficientes de la primera forma fundamental respecto de uno de ellos.
   (b) Si γ tiene rapidez unitaria, mostrar que el área de S es $2\pi \int_0^a \gamma_1(s)\, ds$.
   (c) Hallar el área del toro de revolución con curva generatriz $\gamma(s) = (2 + \cos s, \sin s)$.
5. Probar por definición que la esfera es orientable (intentar probarlo sin hacer un cálculo directo).
6. Sea A un abierto de $\mathbb{R}^3$ y sea $a \in \mathbb{R}$ un valor regular de la función diferenciable $f : A \to \mathbb{R}$. Probar que la superficie $f^{-1}(a)$ es orientable.
7. Sea S una superficie regular. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes.
   (a) S es orientable.
   (b) S tiene un campo normal continuo nunca nulo.
   (c) S tiene un campo normal diferenciable nunca nulo.
8. Sea S_2 una superficie orientable y $\phi : S_1 \longrightarrow S_2$ una función diferenciable que es un difeomorfismo local en todo punto. Probar que S_1 es también orientable.