Teorico Estructuras Algebraicas

Javier Vera

October 15, 2024

1 Clase 1

2 Clase 2

3 Clase 3

4 Clase 4

5 Clase 5

6 Clase 6

7 Clase 7

8 Clase 8

9 Clase 9

10 Clase 10

11 Clase 11

12 Clase 12

Definición 12.1 (Accion de Grupo)
Sean G grupo y $X \neq \emptyset$ conjunto. Una accion de G en X es una funcion

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto g.x \end{aligned}$$

Que cumple:

1. $gh.x = g.(h.x)$
2. $e.x = x \quad \forall x \in X$

En este caso se dice que G actua (opera) en X mediante $G \times X \longrightarrow X$

Ejemplo 12.1.
1. $G, X \neq \emptyset$ cualesquiera la accion trivial de G en X es aquella tal que $g.x = x \quad \forall x \in X \quad \forall g \in G$
2. $\mathbb{S}(x)$ actua en X en la forma $\mathbb{S} \times X \longrightarrow X$ $\sigma.x = \sigma(x) \quad \forall \sigma \in \mathbb{S}(x) \quad \forall x \in X$. En particular $\mathbb{S}$ actua en $I_n = \{1, \dots n\}$

3. Sea G grupo actua en si mismo de distintas formas, en este caso mediante el producto $G \times G \longrightarrow G$ es decir $g.x = gx$ esto se llama *accion regular*

4. $H \trianglelefteq G$ entonces G actua por conjugacion $G \times H \longrightarrow H$ dada por $g \in G \quad x \in H$

5. $\mathbb{S}(G) = \{\text{subgrupos de } G\}$. entonces G actua en $\mathbb{S}$ por conjugacion $g \in G \quad H \trianglelefteq G$

6. $H \leq G$ entonces G actua en las coclases $G \diagup H$
   Ejercicio probar que satisfacen (A1) y (A2)

Proposición 1
Sea G grupo $X \neq \emptyset$ conjunto. Son equivalentes:

1. *Una accion $G \times X \longrightarrow X$*

2. *Un homomorfismo $\alpha : G \to \mathbb{S}(x)$*

Proof. pendiente ☐

Ejemplo 12.2. 1. La accion trivial $G \times X \to X$ corresponde a

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow \mathbb{S}(X) \\ g &\longmapsto Id_x \end{aligned}$$

2. La accion regular $G \times G \longrightarrow G$ corresponde al homomorfismo de Cayley (DUDA)G

Definición 12.2
Sea $G \times X \longrightarrow X$ una accion de un grupo G en $X \neq \emptyset$. Dos elementos $x, y \in X$ se dicen G-conjugados mediante esta accion si $\exists g \in G$ tal que $g.x = y$ (notacion $x \sim y$)
Esto define una relacion de equivalencia en X (Ejercici). Asi, tal relacion particiona a X en clases de equivalencia
Sea $x \in X$ entonces $G.x$ o $\mathcal{O}_G(x)$ es la clase de equivalencia de x que se llamara G-Orbita de x

$$X = \bigcup_{x \in X} G.x$$

Observación
Si $G \times X \longrightarrow X$ es accion entonces cualquier subgrupo de G actua en X por restriccion. De este modo $G = \mathbb{S}_n$ actua naturalmente en I_n

$$< \sigma > .j = \mathcal{O}_\sigma = \{\sigma^k : k \geq 0\} \quad \forall \sigma \in \mathbb{S}_n$$

Definición 12.3 (Accion Transitiva)
Una accion se dice transitiva si posee una unica orbita es decir si $\exists x \in X$ tal que $X = G.x$

Definición 12.4 (G-Estabilizador)
Sea $G \times X \longrightarrow X$ accion. Dado $x \in X$ el G-estabilizador de x es

$$G_x = \{g \in G : g.x = x\}$$

G_x es un subgrupo de G , $\forall x \in X \quad \forall g, h \in G_x$ (No necesariamente normal)
Si $\alpha : G \longrightarrow \mathbb{S}$ homomorfismo correspondiente a la accion dada entonces:

$$Ker(\alpha) = \bigcap_{x_i X} G_x$$

Ejemplo 12.3. 1. $G \times X \longrightarrow G$ accion trivial $g.x = \{x\}$ entonces $G_x = G$

2. $G \times G \longrightarrow G$ accion regular $g.x = gx$
   $G.x = G$ pues $y = (yx^{-1})x = yx^{-1}.x$ (Entonces es transitiva)
   $G_x = \{e\}$ pues $gx = x \iff g = e$

3. $H \trianglelefteq G$, $G \times H \longrightarrow H$ por conjugacion $g.x = gxg^{-1}$

$$G.x = \{gxg^{-1} : g \in G\} = Cl(X) \quad \text{(Clase de conjugacion de} X)$$
$$G_x = \{g \in G : gxg^{-1} = x\} = C_G(x) \quad \text{(Centralizador de } x \text{ en } G)$$

   (ejercicios calcular estabilizador y centralizador de traslaciones para alfguna coclase)

4. Sea $H \leq G$ con
$$G \times {}^{G}/_{H} \longrightarrow {}^{G}/_{H}$$
   dada por $g.aH = ga.H$ con ${}^{G}/_{H} = \{aH : a \in G\}$
   Es accion transitiva porque $G.{}^{G}/_{H} = {}^{G}/_{H}$
   $G_H = \{g \in G : g.eH = ge.H = H\} = H$ (DUDA)

Proposición 2
Sea $G \times X \longrightarrow X$ una accion de G en X, se tienen:

1. $\forall x \in X, G_{g.x} = gG_xg^{-1} \quad \forall g \in G$
2. $|G.x| = [G : G_x]$

Proof. Pendiente □

Teorema 12.1 (Ecuacion de Clase)
Sean G grupo y $G \times X \longrightarrow X$ una accion de G en $X \neq \emptyset$ $\exists$ famlia $\{G_i\}_{i \in I}$ de sugrupos propios de G tales que:

$$|X| = |X^G| + \sum_{n=1}^{\mathbb{N}}$$

donde $X^G = \{x \in X : g.x = x \quad \forall g \in G\}$ (BG-invariante)

Proof. pendiente □

Teorema 12.2 (Teorema de Cauchy)
Sea G grupo de orden n y sea $p > 0$ primo tal que $p|n$ entonces G tiene un elemento de orden p

Proof. Pendiente □

13 Clase 13

13.1 Duda

pagina 1 teo13 parte gris no entiendo

Observación
Si tenemos $|G| = p$ con p primo y tomamos $e \neq x \in G$ como $|x||p$ y p primo entonces $|x| = p$, luego $G =< x >$ y $G \equiv \mathbb{Z}_p$

Proposición 3
Sea p primo con $|G| = p^2$ entonces G es abeliano

Proof. □

Observación
Grupos abelianos de orden p^2 (No isomorfos entre si) $\mathbb{Z}_{p^2}$ y $\mathbb{Z}_p \bigoplus \mathbb{Z}_p$

Definición 13.1
Un grupo G se dice un p-grupo, con p primo si $\forall x \in G$ $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $x^{p^n} = e$
Es decir todo elemento de G tiene orden una potencia de p

Observación
*Un **p-grupo** finito tiene orden potencia de p*

Proof.

1. Sea $|G| = p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k}$ con p_i primos.
2. Entonces $p_i \big| |G|$ por lo tanto $\exists x \in G \quad |x| = p_i$ (Por Teorema de Cauchy)
3. Luego $p_i = |x| = p^j$ (Esto ultimo por ser **p-grupo**)
4. Entonces $j = 1$ y $p_i = p \quad \forall 1 \leq i \leq k$
5. por lo tanto $|G| = p^j$ con $j > k$

□

Observación
Si $|G| = p^3$ y G no abeliano entonces $G \times \mathbb{Z}_p \times \cdots \times \mathbb{Z}_p$ (k-veces) es no abeliano y $|G| = p^{k+3}$

Proposición 4
*Sea G un **p-grupo** finito, no tivial entonces $Z(G) = \{e\}$ (no trivial)*

Proof. Copias □

Definición 13.2 (Normalizador)
Sea $H \leq G$, el normalizador de H en G es el subgrupo

$$N_G(H) = \{g \in G : gHg^{-1} = H\}$$

Observación
$N_G(H)$ es el estabilizador de $H \in \{$subgrupos de $G\}$ con respecto a la accion de G por conjugacion (DUDA)
Version mia sea $H \leq G$ y G actuando sobre H por conjugacion entonces $N_G(H)$ es el estabilizador de H en G

Observación
$H \trianglelefteq N_G(H)$. Ademas $N_G(H)$ es el mayor subgrupo de G que contiene a H como un subgrupo normal.
En particular

$$H \trianglelefteq G \iff N_G(H) = G$$

Lema 13.1
*Sean p primo y G un **p-grupo** finito. Si $H < G$ entonces $H < N_G(H)$. Concluyendo que $H = N_G(H)$ entonces $H = G$*

Definición 13.3
Un grupo se llama simple si no contiene subgrupos normales distintos de $\{e\}$ y G

Corolario 13.1.1
*Si $|G| = p^n$ y $H \leq G$ con $[G : H] = p$ entonces $H \trianglelefteq G$. En particular el unico **p-subgrupo** finito simple es $\mathbb{Z}_p$*

14 Clase 14

Corolario 14.0.1
$[G : S] = p$ entonces $S \trianglelefteq G$

Proof. □

Proposición 5
$|G| = p^n$ con $n \in \mathbb{N}_0$ entonces:

1. *G posee subrupos de orden $p^i \quad \forall 0 \leq i \leq n$*
2. *Si $0 \leq i \leq n-1$ y $S \leq G$ con $|S| = p^i$ entonces $\exists$ subrupo T de orden p^{i+1} tal que $S \trianglelefteq T$*

14.1 Teoremas de Sylow

Observación
En esta seccion G es grupo finito y p primo

Definición 14.1 (p-grupo de Sylow)
Un p-subgrupo de Sylow de G es un subgrupo H tal que $|H| = p^n$ *donde* $|G| = p^n k$ *con* $(p,k) = 1$

14.2 Primer Teorema de Sylow

Teorema 14.1 (Primer Teorema de Sylow)
Supongamos que $|G| = p^n k$ *con* $(p,k) = 1$. *Entonces* $\forall 0 \leq i \leq n$ *tenemos que G posee un subgrupo de orden* p^i. *En particular G posee un p-Sylow*

Proof. pendiente □

Teorema 14.2 (Segundo Teorema de Sylow)
Sea G grupo finito y p primo. Sean $S \leq G$ *tal que* $|S| = p^i$ *con* $i \in N_0$ *y H un* ***p-subgrupo de Sylow*** *de G entonces* $\exists a \in G$ *tal que* $S \trianglelefteq aHa^{-1}$.

En particular S es ***p-sylow*** *si y solo si S y H son conjugados*

Proof. □

Corolario 14.2.1 (DUDA)
Sea $H \leq G$ ***p-sylow*** *entonces H es el unico* ***p-sylow*** *de G si y solo si* $H \trianglelefteq G$

Proof. $(\Rightarrow)$ Supongamos que no es normal entonces $aHa^{-1} = J$ con $J \neq H$ entonces por ser J es conjugado de H es **p-sylow**. Absurdo por que H era el unico **p-sylow**

$(\Leftarrow)$ Existencia no se , se que existe alguno pero no se si es H. Unicidad supongamos que no es unico entonces $\exists J$ **p-sylow** , entonces $J = aHa^{-1}$ pero $aHa^{-1} = H$ por ser H normal □

Teorema 14.3 (Tercer Teorema Sylow)
Sea G grupo finito, p primo y sea $n_p = |\{\textbf{\textit{p-sylow de}}\ G\}|$ *entonces*

$$n_p \Big| |G| \quad y \quad n_p \equiv 1(p)$$

15 Clase 16

Definición 15.1
Sea R anillo. Un elemento $0 \neq a \in R$ *se* ***divisor de cero a izquierda (derehca)*** *si* $\exists 0 \neq b \in R$ *tal que* $ab = 0$ *(respectivamente* $ba = 0$ *)*

Si a es divisor de cero a izquierda y a derecha entonces se dice que a es divisor de cero

Ejemplo 15.1.
1. En $\mathbb{Z}_n$ si n no es primo tomamos $d|n$ entonces $\overline{d}$ es un divisor en $\mathbb{Z}_n$
2. En $M_n(R) \quad n > 1$ tomamos COPIAR MATRICES

Definición 15.2
Un anillo conmutativo con identidad $1 \neq 0$ *se dice de dominio integro (o de integridad) si no posee divisores de 0*

Ejemplo 15.2.
1. $\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$ son dominios de integridad
2. $\mathbb{Z}_n$ es dominio de integridad sii n es primo observamos que $\mathbb{Z}_n = {}^{\mathbb{Z}}/_{n\mathbb{Z}}$
3. $\mathbb{Z}[x], \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_k]$ etc , son dominios de integridad (Los polonomios con eoficientes en $\mathbb{Z}$ y variables x_i)

Definición 15.3 (Anillo inversible)
Sea R un anillo con identidad y sea $0 \neq a \in R$ *se dice que a es:*

- *Inversible a izquierda* $\iff$ $\exists b \in R$ *tal que* $ba = 1$

- *Inversible a derecha* $\iff \exists b \in R$ *tal que* $ab = 1$
- *Inversible si lo es a derecha y a izquierda*

Un anillo D *con* $1 \neq 0$ *donde todo elemento es inversible se llama* ***anillo de division***

Observación
Si $a \in R$ *es inversible entonces el inverso a izquierda de a coincide con su inverso a derecha y esta univocamente determiando por a (Notacion:* a^{-1}*)*

Definición 15.4
El conjunto de los elementos inversibles en un anillo R (con $1 \neq 0$ *) se llama* ***grupo de unidades de R****.*
(Notacion: R^X *o* R^* *o* $\mathcal{U}(R)$*))*

Ejemplo 15.3. 1.