Recordamos

$$[dN]_{\{\varphi_u, \varphi_v\}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Ahora miraremos la relación entre estos coeficientes y Γ_{ij}^k

·) Sabemos que $(\varphi_{uu})_v - (\varphi_{uv})_u = 0_{\mathbb{R}^3}$ $i=1$

$$(\varphi_{vv})_u - (\varphi_{uv})_v = 0_{\mathbb{R}^3} \quad i=2$$

$$N_{uv} - N_{vu} = 0_{\mathbb{R}^3} \quad i=3$$

·) $0_{\mathbb{R}^3}$ pueden escribir como combinación lineal de $\{\varphi_u, \varphi_v, N\}$ y los coef son 0

$i=1,2,3$

$A_i\varphi_u + B_i\varphi_v + C_iN = 0_{\mathbb{R}^3}$ es $A_i = B_i = C_i = 0$

pq $\{\varphi_u, \varphi_v, N\}$ es l.i

A_i, B_i, C_i se pueden escribir en términos de E, F, G, e, f, g

por ejemplo, para obtener A_1 usando

$$\mathrm{I}\ (\varphi_{uu})_v - (\varphi_{uv})_u\ \mathrm{II} = 0 = A_1\varphi_u + B_1\varphi_v + C_1 N$$

Recordar

$$\varphi_{uu} = \Gamma_{11}^1\varphi_u + \Gamma_{11}^2\varphi_v + eN$$

$$\varphi_{uv} = \Gamma_{12}^1\varphi_u + \Gamma_{12}^2\varphi_v + fN$$

$$\varphi_{vv} = \Gamma_{22}^1\varphi_u + \Gamma_{22}^2\varphi_v + gN$$

$\Rightarrow$

$$\mathrm{I}\ (\varphi_{uu})_v = (\Gamma_{11}^1)_v\varphi_u + \Gamma_{11}^1\underbrace{\varphi_{uv}}_{=\Gamma_{12}^1\varphi_u+\cdots} + (\Gamma_{11}^2)_v\varphi_v + \Gamma_{11}^2\underbrace{\varphi_{vv}}_{=\Gamma_{22}^1\varphi_u+\cdots}$$

$$+ e_v N + e\underbrace{N_v}_{=a_{12}\varphi_u + a_{22}\varphi_v}$$

y como queremos A_1 de $A_1\varphi_u + B_1\varphi_v + C_1 N$ despejamos todo lo que tiene φ_u

$$\mathrm{I}\quad \left[(\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^1 + e\,a_{12}\right]\varphi_u + \cdots$$

pero solo me interesa lo que acompaña a φ_u

II

$$(\varphi_{uv})_u = (\Gamma_{12}^1)_u\varphi_u + \Gamma_{12}^1\varphi_{uu} + (\Gamma_{12}^2)_u\varphi_v$$

$$+ \Gamma_{12}^2\varphi_{vu} + f_u N + f\underbrace{N_u}_{=a_{11}\varphi_u + a_{21}\varphi_v}$$

II

$$\left[(\Gamma^1_{12})_u + \Gamma^1_{12}\Gamma^1_{11} + \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{12} + f a_{11}\right]\varphi_u + \cdots$$

restamos I y II

$$0 = A_1 = (\Gamma^1_{11})_v + \Gamma^2_{11}\Gamma^1_{22} + e\, a_{12} - (\Gamma^1_{12})_u - \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{12} - f\, a_{11}$$

$$\Rightarrow (\Gamma^1_{11})_v + \Gamma^2_{11}\Gamma_{22} - (\Gamma^1_{12})_u - \Gamma^2_{12}\Gamma^1_{12} = f a_{11} - e a_{12}$$

recordemos $a_{11} = \dfrac{-eG + fF}{EG - F^2}$

$$a_{12} = \frac{-fG + gF}{EG - F^2}$$

$$\therefore\ f a_{11} - e a_{12} = \frac{-\cancel{feG} + f^2F + \cancel{efG} - egF}{EG - F^2}$$

$$= \frac{-F(eg - f^2)}{EG - F^2} = -KF$$

luego

$$\boxed{(\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22} - (\Gamma_{12}^1)_u - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{12}^1 = -KF}$$

Fórmula de Gauss

y notar que lo simbolos de cristoffer se escriben en términos de E, F, G

por lo tanto si $F \neq 0$, K se escribe en términos de E, F y G

i) Haciendo lo mismo con $B_1 = 0$

$$\boxed{\begin{gathered}(\Gamma_{11}^2)_v - (\Gamma_{12}^2)_u - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{12}^1 - (\Gamma_{12}^2)^2 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2 \\ = a_{21} f - e\, a_{22} = KE\end{gathered}}$$

otra fórmula de Gauss

está es mas linda pq $E \neq 0$

<u>Corolario</u> con estas fórmulas se puede despejar la curvatura en términos de E, F y G y sus derivadas parciales

Teorema (egregium) de Gauss

La curvatura de Gauss es invariante por isometrías locales

<u>dem</u> Sea $\Phi : V \to \tilde{S}$ V abierto de S $\tilde{S}$ superficie regular y Φ iso local de $p \in V$. Sea $\varphi : V \to S$ param de p tq
$\varphi(U) \subseteq V$

Luego $\Phi : \varphi(U) \to \tilde{S}$ iso local de p

Considero $\tilde{\varphi} = \Phi \circ \varphi$ es param de $\Phi(p) \in \tilde{S}$

como f es iso local tenemos

$$E \equiv \tilde{E} \qquad F \equiv \tilde{F} \quad y \quad G \equiv \tilde{G}$$

$\left(\tilde{\varphi}_u = \dfrac{d\,\Phi \circ \varphi}{du} = d\Phi_{\varphi(u,v)}\, \varphi_u \right.$ y $\tilde{E} = \langle d\Phi\, \varphi_u, d\Phi\, \varphi_u \rangle$
$\left. \underset{\text{isometría}}{=} \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle = E \right)$

etc

$$\Rightarrow \Gamma_{ij}^{k} \equiv \tilde{\Gamma}_{ij}^{k} \underset{\substack{\Downarrow \\ \text{fórmula} \\ \text{de Gauss}}}{\Rightarrow} K(q) = \tilde{K}(f(q)) \quad \forall q \in \varphi(U)$$

como φ era arbitrario

$$\Rightarrow K(q) = \tilde{K}(f(q)) \quad \square$$

Planteando $C_1 = 0$ se obtiene

$$\boxed{e_v - f_u = e\Gamma_{12}^{1} + f(\Gamma_{12}^{2} - \Gamma_{11}^{1}) - g\Gamma_{11}^{2}} \quad MC1$$

y con $C_2 = 0$

$$\boxed{f_v - g_u = e\Gamma_{22}^{1} + f(\Gamma_{22}^{2} - \Gamma_{12}^{1}) - g\Gamma_{12}^{2}} \quad MC2$$

MC1 y MC2 se las nombra ecuaciones de Mainardi-Codazzi

con el resto $C_3 = 0$ $A_2 = 0$ ... etc no se obtiene nada nuevo obs En el práctico se ve que isometrías locales no preservan curvatura media

Análogo al teorema fundamental de curvas se obtiene

Teorema de Bonnet

Sean E, F, G, e, f, g funciones diferenciables en $V \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto tales que:

- $E, G > 0$
- $EG - F^2 > 0$
- se satisfacen las ecuaciones de Gauss y Mainardi-Codazzi

$\Rightarrow$ $\forall q \in V$ existe un entorno $U \subseteq V$ de q y un difeo $\varphi : U \to V \subseteq \mathbb{R}^3$ tales que

$\varphi(U)$ es una superficie regular y $\varphi : U \to \varphi(U)$ es una param y los coeficientes de I y II con respecto a φ están dados por

E, F, G, e, f, g respectivamente

Además si U conexo y $\psi : U \to \psi(U)$ es otra param que satisface las mismas condiciones de φ

$\Rightarrow$ existe T movimiento rígido de $\mathbb{R}^3$ tal que $\psi = T \circ \varphi$