Corolarios descomposición cíclica

$T: V \to V$ t.l. $\dim V < \infty$ W_0 un subesp T-invar

entonces W_0 es T-admisible $\Leftrightarrow$ W_0 admite un complemento T-invar

también podemos ver que si $v \in Z(v_1, T)$ $m_{v_1,T}(v) = 0$
$m_{v_1,T}(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n T^n v_1)$

Corolario 2 $T: V \to V$ $\dim V < \infty$

(a) $\exists v \in V \,/\, m_{v,T} = m_T$

(b) $\exists v \in V$ vector cíclico $\Leftrightarrow$ $m_T = p_T$

es T-admisible $\Rightarrow$ puedo usar descomp cíclica

demo $W_0 = 0$ $V = \underset{\shortparallel\, 0}{W_0} \oplus Z(v_1, T) \oplus \dots \oplus Z(v_i, T)$
donde $p_i \mid p_{i-1}$ $(p_i = m_{v_i,T})$

$\Rightarrow p_1(T)(V) = \{0\}$

$\boxed{\text{Af}\quad p_1 = m_T}$ $\quad p_1(T)(v) \overset{\text{lema (b)}}{=} \bigoplus_{i=1}^{r} Z(p_1(T)(v_i), T) = 0$

0 $\forall i$ pq $p_i \mid p_1$

$\Rightarrow p_1$ anula $\Rightarrow m_T \mid p_1$

por otro lado $0 = m_T(T)(v) \overset{(b)}{=} \bigoplus_{i=1}^{r} Z(m_T(T)(v_i), T)$

$\therefore m_T(T)(v_1) = 0 \Rightarrow p_1 \mid m_T$

$\Rightarrow p_1 = m_T$
$(m_{v_1,T} = p_1 = m_T)$

$\otimes$ porque

para (a) tenemos $v = v_1$ para (b) de la $\oplus$
como cada $Z(v_i, T)$ es T-invar, p_T es el prod
de los pols característicos de $\underset{\substack{\shortparallel\\ 1}}{Z(v_i, T)}$ $\Rightarrow p_T = \underset{q_1}{p_1} \dots \underset{q_r}{p_r}$

$(\Rightarrow)$ Si $\exists$ vector cíclico $\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & & & | \\ 1 & \ddots & & | \\ & & 1 & | \end{pmatrix}_B$
$B = \{v, Tv, \dots, T^{n-1}v\}$

$\Rightarrow P_A = m_A \Rightarrow P_T = m_T$

$(\Leftarrow)$ tengo $m_T = P_T$

$\Rightarrow gr\, m_T = gr\, P_T = \dim V$

por (a) tenemos v, $m_{v,T} = m_T = P_T$

Ahora $v \neq 0$, $T(v) \neq 0$, $\dots$, $T^{\dim V - 1}(v) \neq 0$

a) pq si no, $T^k(v) = 0$ con $k < \dim V$

$\Rightarrow X^k$ anularía T con respecto a v $\Rightarrow m_{v,T} \mid X^k$ abs porq $gr\, m_{v,T} = \dim V$

$\Rightarrow gr\, m_{v,T} \leq k < \dim V$

Además son todos l.i. Supongo que no

$\exists j \mid T^j v = \alpha_1 v + \alpha_2 Tv + \dots + \alpha_{j-1} T^{j-1} v + \alpha_{j+1} T^{j+1} v + \dots + \alpha_k T^{\dim V - 1} v$

$p_1(T)(v) = T^j v - \alpha_1 v - \dots - \alpha_{j-1} T^{j-1} v = \alpha_{j+1} T^{j+1} v + \dots + \alpha_k T^{\dim V - 1} v$

entonces p_1 anula v con respecto a T

$\Rightarrow m_T = m_{v,T} \mid p_1$

pero $gr\, p_1 \leq \dim V - 1 < \dim V = gr\, m_T$ abs

$\Rightarrow \{v, Tv, \dots, T^k v\}$ son l.i.

$\therefore$ es base $\Rightarrow v$ es cíclico otra ($\Leftarrow$) Partimos de lo mismo

$W_0 = 0$ $\quad V = \underset{\text{"0"}}{W_0} \oplus Z(v_1, T) \oplus \cdots \oplus Z(v_i, T)$

donde $p_i \mid p_{i-1}$ $\quad (p_i = m_{v_i, T})$

sabemos $p_1 = m_T$ y además

$Z(v_j, T)$ son subesp cíclicos

v_j su vector cíclico usando ida

$$p_j = m_{v_j, T} = \boxed{m_{T|_{Z(v_j,T)}} = X_{T|_{Z(v_j,T)}}}$$ X_T caracterist

además $Z(v_j, T)$ son T-invar entonces

$$X_T = \prod_{j=1}^{k} \underline{p_{T|_{Z(v_j,T)}}} = p_j \quad j = 1, \ldots, k$$

como $\quad m_T = X_T$

$$p_1 = m_T = X_T = p_1 \cdots p_k$$

$$\Rightarrow p_2 = \cdots = p_k = 1$$

$$\Rightarrow m_{T|_{Z(v_i,T)}} = 1 \quad \forall\, i = 2, \ldots, k$$

$\Rightarrow T|_{Z(v_i,T)} = 0$ $\quad Z(v_i, T) = 0 \quad i = 2, \ldots, k$

$$\Rightarrow Z(v_1, T) = V$$

$\therefore v_1$ es cíclico

otro $\chi_T|_{Z(v_1,T)} = p_1 = m_T = \chi_T$ $\quad$ gr $\chi_T = \dim V$

$$\chi_T = \chi_T|_{Z(v_1,T)}$$

$$\Rightarrow \dim Z(v_1,T) = \dim V$$

v es cíclico $(Z(v_1,T) = V)$