25/9/24

Definición: sean G grupo y $X \neq \emptyset$ conjunto. Una acción de G en X es una función

$$\begin{aligned} G \times X &\xrightarrow{\ \cdot\ } X \\ (g,x) &\longmapsto g\cdot x \end{aligned}$$

que cumple:

axiomas
- a1) $gh\cdot x = g\cdot(h\cdot x) \quad \forall g,h\in G,\ \forall x\in X$
- a2) $e\cdot x = x \quad \forall x\in X$

En este caso se dice que G actúa (opera) en X mediante $G\times X \longrightarrow X$

Ejemplos:

1) G, $X\neq\emptyset$ cualesquiera, la <u>acción trivial</u> de G en X es aquella tal que $g\cdot x = x \quad \forall x\in X, \forall g\in G$

2) $S(X)$ actúa en X en la forma $S(X)\times X \xrightarrow{\ \cdot\ } X$
$\sigma\cdot x = \sigma(x) \quad \forall \sigma\in S(X), \forall x\in X$
En particular S_n actúa en $I_n = \{1,\dots,n\}$

3) Sea G grupo. G actúa en sí mismo de distintas formas, en este caso mediante el producto $G\times G \xrightarrow{\ \cdot\ } G$ es decir <u>$g\cdot x = gx$</u>
→ Esto se llama "acción regular"

4) $H \trianglelefteq G$, G actúa en H por conjugación $G\times H \longrightarrow H$ $g\cdot x = gxg^{-1}$ $\forall g\in G, x\in H$

5) $S(G) = \{\text{subgrupos de } G\}$, G actúa en $S(G)$ por conjugación:
$g\cdot H = gHg^{-1} \quad \forall g\in G, H\leq G$

6) $H\leq G$, G actúa en las coclases $_H\backslash^G = \{aH \mid a\in G\}$
$g\cdot(aH) = (ga)H \quad \forall g,a\in G$

no lo hace por conjugac. ya que gHg^{-1} en general no es subgrupo sino coclase

<u>Ejercicio</u>: comprobar que los ejemplos satisfacen a1) y a2)

Proposición: sea G grupo, $X \neq \emptyset$ conjunto. Son equivalentes:

i) Una acción $G \times X \xrightarrow{\cdot} X$

ii) Un homomorfismo $\alpha: G \longrightarrow \mathbb{S}(X)$

Demostración:

i) $\Rightarrow$ ii) Tenemos $G \times X \longrightarrow X$ tal que $\begin{cases} a1) \ gh \cdot x = g \cdot (h \cdot x) \ \forall g,h \in G, \forall x \in X \\ a2) \ e \cdot x = x \quad \forall x \in X \end{cases}$

Definimos $\alpha(g)(x) = g \cdot x \qquad g \in G, x \in X$

- Veamos que efectivamente $\alpha(g) \in \mathbb{S}(X)$ (ie que sea biyectiva):

En efecto, si componemos $\alpha(g^{-1})$ con $\alpha(g)$ evaluando en x:

$$\alpha(g^{-1}) \cdot \alpha(g)(x) = \alpha(g^{-1})(gx) = g^{-1}(g \cdot x) \underset{(a1)}{=} (g^{-1} g) \cdot x = e \cdot x \underset{(a2)}{=} x \quad \forall x \in X$$

Análogamente se prueba que $\alpha(g) \cdot \alpha(g^{-1}) = Id_X$

$\therefore \alpha(g)$ es biyectiva y en particular su inversa es $\alpha(g^{-1})$

- Veamos que $\alpha: G \longrightarrow \underbrace{\mathbb{S}(X)}_{\text{composición}}$ es homo

$$\forall x \in X: \ \alpha(g) \cdot \alpha(h)(x) = \alpha(g)(h \cdot x) = g \cdot (h \cdot x) \underset{(a1)}{=} (gh) \cdot x = \alpha(gh)(x)$$

$\therefore \alpha(g) \cdot \alpha(h) = \alpha(gh)$ (y G homo) $\rightarrow \alpha$ homo?

ii) $\Rightarrow$ i) Sea $\alpha: G \longrightarrow \mathbb{S}(X)$ homo

Definimos $G \times X \longrightarrow X$ en la forma $g \cdot x = \alpha(g)(x)$

Veamos que es una acción:

a1) $(gh) \cdot x = \alpha(gh)(x) \underset{\alpha \text{ homo}}{=} (\alpha(g) \cdot \alpha(h))(x) = \alpha(g)\big(\alpha(h)(x)\big) = \alpha(g)(hx) = g \cdot (h \cdot x)$ ✓

a2) α homo $\Rightarrow \alpha(e) = id_X \Rightarrow e \cdot x = \alpha(e)(x) = x \quad \forall x \in X$

$\square$

Ejemplos:

1) La acción trivial $G \times X \longrightarrow X$ corresponde a trivial $\begin{array}{l} G \longrightarrow S(X) \\ g \longmapsto id_X \end{array}$

2) La acción regular $G \times G \longrightarrow G$ corresponde al homomorfismo de Cayley $G \to S(G)$

Cuando $\alpha : G \to S(X)$ mono, la acción se dice fiel.

Sea $G \times X \xrightarrow{\cdot} X$ una acción de un grupo G en $X \neq \emptyset$. Dos elementos $x, y \in X$ se dicen G-conjugados mediante esta acción si $\exists g \in G$ tal que $g \cdot x = y$

Notación: $x \sim y$

Esto define una relación de equivalencia en X → Ejercicio

Así, tal relación particiona a X en clases de equivalencia

Sea $x \in X$, $G \cdot x$ (ó $O_G(x)$) es la clase de equivalencia de x, que se llamará la G-órbita de x: $X = \bigcup_{x \in X} G \cdot x$

Observación: si $G \times X \longrightarrow X$ es acción $\Rightarrow$ cualquier subgrupo de G actúa en X por restricción

De este modo $G = S_n$ actúa naturalmente en I_n $\langle \sigma \rangle \cdot j = O_\sigma(j) = \{\sigma^k(j) \mid k \geq 0\}$ $\forall \sigma \in S_n$

Definición: una acción se dice transitiva si posee una única órbita, es decir, si $\exists x \in X$ tal que $X = G \cdot x$

Definición: sea $G \times X \longrightarrow X$ acción. Dado $x \in X$, el G-estabilizador de x es

$$G_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$$

G_x es un subgrupo de G, $\forall x \in X$, $g, h \in G_x$ → G_x no es necesariam. normal

$$(hg^{-1}) \cdot x = (hg^{-1})(gx) = hg^{-1}g \cdot x = hx = x \Rightarrow hg^{-1} \in G_x \checkmark$$

Si $\alpha : G \longrightarrow S(X)$ homo correspondiente a la acción dada, entonces:

$$\operatorname{Ker}(\alpha) = \bigcap_{x \in X} G_x$$

Ejemplos:

1) $G \times X \longrightarrow X$ acción trivial $\quad G\cdot x = \{x\} \Rightarrow G_x = G$

2) $G \times G \longrightarrow G$ acción regular $\quad g\cdot x = gx$

$G\cdot x = G$ pues $y = (yx^{-1})x = yx^{-1}\cdot x \quad \Rightarrow$ es transitiva

$G_x = \{e\}$ pues $gx = x \iff g = e$

3) $H \trianglelefteq G$, $G \times H \longrightarrow H$ por conjugación $g\cdot x = gxg^{-1}$

$G\cdot x = \{gxg^{-1} \mid g\in G\} = Cl(x)$ Clase de conjugación de X

$G_x = \{g\in G \mid \underbrace{gxg^{-1} = x}_{gx = xg}\} = C_G(x)$ Centralizador de x en G

Calcular estabilizador y centralidad de traslaciones por alguna coclase.

4) Sea $H \leq G$, $G \times {}_H\backslash G \longrightarrow {}_H\backslash G \qquad {}_H\backslash G = \{aH \mid a\in G\}$

$g\cdot aH = ga\cdot H$

Esta acción es transitiva ${}_H\backslash G = G\cdot\{H\}$

$G_H = \{g\in G \mid g\cdot H = gH = H\} = H$

↳ pues esto ocurre si $g\in G$

Proposición: sea $G\times X \longrightarrow X$ una acción de G en X, se tienen:

i) $\forall x\in X$, $G_{g\cdot x} = g\, G_x\, g^{-1} \quad \forall g\in G$

ii) $|G\cdot x| = [G : G_x]$

Demostración:

i) $h\in G_{g\cdot x} \iff h\cdot(g\cdot x) = g\cdot x \iff g^{-1}h\cdot g\cdot x = x \iff g^{-1}hg\cdot x = x$

$\iff g^{-1}hg \in G_x \iff h\in g\,G_x\,g^{-1}$

ii) $[G : G_x] = {}_{G_x}\backslash G = \{g\,G_x \mid g\in G\}$

Definamos una función ${}_{G_x}\backslash G \xrightarrow{\theta} G\cdot x$ (y veamos que es una biyección)

dada por $\theta(g\,G_x) = g\cdot x$

• Primero debemos ver que θ está bien definida (ie no depende del represent. de la coclase)

Supongamos $gG_x = aG_x \iff a^{-1}g \in G_x$

$\iff a^{-1}g \cdot x = x \iff g \cdot x = a \cdot x$

$\therefore$ θ no depende del representante elegido

Con esto no sólo probamos la buena definición sino también la inyectividad (al ver "$\Rightarrow$" se prueba buena definición y al ver "$\Leftarrow$" se muestra inyectividad)

• Veamos θ sobreyectiva:

Sea $y \in G \cdot x$, entonces $\exists g \in G$ tal que $y = g \cdot x = \theta(gG_x)$ ✓

Luego $[G : G_x] = \left| {}_{G_x}\backslash G \right| = |G \cdot x|$ ✓

$\square$

TEOREMA (ecuación de clases): → sus consecuencias son muy importantes

Sean G grupo y $G \times X \longrightarrow X$ una acción de G en $X \neq \emptyset$. Entonces $\exists$ familia $\{G_i\}_{i \in I}$ de subgrupos propios de G (ie $G_i \neq G$) tales que:

$$|X| = |X^G| + \sum_{i \in I} [G : G_i]$$

donde $X^G = \{x \in X \mid g \cdot x = x, \forall g \in G\}$: "G - invariantes"

Demostración:

Sea $\{x_i\}_{i \in I}$ familia de representantes de las órbitas no triviales de X

$(G \cdot x = \{x\}$ (órbita trivial) $\iff x \in X^G)$

Entonces: $X = X^G \,\dot\cup\, \dot{\bigcup_{i \in I}} (G \cdot x_i)$ ⭐

Por la proposición anterior tenemos $|G \cdot x_i| = [G : G_{x_i}]$

Sea entonces $G_i = G_{x_i}$, como $x_i \notin X^G \Rightarrow G_i \subsetneq G$ (subgrupo propio)

Tomando cardinales en ⭐, resulta la ecuación del enunciado

$\square$

TEOREMA DE CAUCHY: sea G grupo de orden n y sea $p>0$ primo tal que $p|n$

Entonces G tiene un elemento de orden p

Demostración: por inducción fuerte sobre $n=|G|$

$n=1$) Si p es primo y $p|n$, G debería tener un elem. de orden p

Como $\nexists$ primo que divida a 1, no hay más nada que probar ie se cumple el enunciado para $n=1$

• Supongamos ahora que $n>1$ y que el teorema vale para grupos de orden menor que n y sea p primo tal que $p \mid |G|=n$

Consideremos la acción $G\times G \longrightarrow G$ por conjugación: $g\cdot x = gxg^{-1}$

Por la ecuación de clases se tiene:

$$|X| = |X^G| + \sum_{i=1}^{r} [G:G_i] \quad , \quad G_i \subsetneq G \quad 1\leq i\leq r$$

Tenemos $X^G = \{x\in G \mid g\cdot x = x \quad \forall g\in G\} = Z(G)$ centro de G

$gxg^{-1}=x \Rightarrow gx=xg$

$$\therefore n = |Z(G)| + \sum_{i=1}^{r} [G:G_i] \quad , \quad G_i \subsetneq G$$

1° caso: $p \nmid |Z(G)| \Rightarrow \exists i, 1\leq i\leq r$ tal que $p \nmid [G:G_i]$

y como $p \mid n = |G_i|[G:G_i] \Rightarrow p \mid |G_i|$

Dado que $G_i \subsetneq G \Rightarrow |G_i|<n$ y podemos aplicar la hipótesis induct.

$\Rightarrow G_i$ tiene un elemento de orden p $\therefore$ el teorema vale en este caso.
↳ y luego G

2° caso: $p \mid |Z(G)|$ si $Z(G) \subsetneq G$, por hipótesis inductiva $Z(G)$ (y luego también G) posee elementos de orden p

Basta entonces considerar el caso $Z(G)=G$ o sea que G es abeliano

Sea $e\neq x\in G$. $p \mid |G| = |\langle x\rangle| [G:\langle x\rangle] \Rightarrow p \mid |x|$ ó $p \mid [G:\langle x\rangle]$

- Si $p \mid |x|$ $\quad |x| = pd$ tal que $d \geq 1 \Rightarrow |x^d| = p$
- Si $p \nmid |x| \Rightarrow p \mid [G, \langle x \rangle] = G/\langle x \rangle$

$G/\langle x \rangle$ grupo (G abeliano) de orden $< n = |G|$
↳ entonces todo subgrupo será normal ∴ puedo tomar cociente

Por hipótesis inductiva, $G/\langle x \rangle$ posee elemento $y\langle x \rangle$ de orden p

Sea $m = |y|$, $y \in G$. Como $y^m = e \in \langle x \rangle \Rightarrow \underbrace{|y\langle x \rangle|}_{p} \mid m$

$m = pd \Rightarrow |y^d| = p$

□