ANÁLISIS NUMÉRICO II — Práctico N°5 - 2023
Valores singulares y Autovalores

1. Demuestre que si $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tiene valores singulares $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_n > 0$, entonces $\|(A^TA)^{-1}\|_2 = \sigma_n^{-2}$, $\|(A^TA)^{-1}A^T\|_2 = \sigma_n^{-1}$, $\|A(A^TA)^{-1}\|_2 = \sigma_n^{-1}$ y $\|A(A^TA)^{-1}A^T\|_2 = 1$.

2. Demuestre que dados $\varepsilon > 0$ y $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ de rango $r < \text{mín}\{m,n\}$, existe $A_\varepsilon \in \mathbb{R}^{m\times n}$ de rango $\text{mín}\{m,n\}$ tal que $\|A - A_\varepsilon\|_2 < \varepsilon$.

3. Dada $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, defina $B(\lambda) = (A^TA + \lambda I)^{-1}A^T$ con $\lambda > 0$. Demuestre que si $p = \text{mín}\{m,n\}$, $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_r > \sigma_{r+1} = \ldots = \sigma_p = 0$ son los valores singulares de A y $A^\dagger$ es su pseudo inversa, entonces
$$\|B(\lambda) - A^\dagger\|_2 = \frac{\lambda}{\sigma_r(\sigma_r^2 + \lambda)}.$$
Concluya que $B(\lambda) \to A^\dagger$ si $\lambda \to 0^+$.

NOTA: Para ejercicios 4 al 6 pueden obtener la descomposición SVD con Numpy (`np.linalg.svd`)

4. **Implemente** una función llamada `cuad_min_svd` que reciba una matriz A y un vector b y resuelva el problema de cuadrados mínimos min $\|Ax - b\|_2^2$ mediante la descomposición SVD, dando como salida x y $\|Ax - b\|_2$. Probar la implementación leyendo A y b desde `A_p5e4.txt` y `b_p5e4.txt`, respectivamente. Comparar la norma 2 de esta solución, con la solución obtenida mediante cuadrados mínimos con QR.

5. **Implemente** una función llamada `im_aprox_svd` que reciba como entradas una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y una tolerancia `tol` y que realice lo siguiente:
   - Obtener la descomposición SVD de A,
   - Para $k \in \{1, \ldots, \text{mín}\{m,n\}\}$, calcular la norma de $A - A_k$, donde A_k es la aproximación hasta el valor singular k de A.
   - Detener este proceso si se consigue que $\|A - A_k\|_\infty$ sea menor que `tol` (Nota: Este número puede no ser pequeño).
   - Mostrar ambas matrices en pantalla como imágenes (usar `plt.imshow`).
   - Probar la función implementada con la matriz en `p5e5.txt`, con `tol`$= 2000$.

6. **Reducción de Dimensionalidad para Visualización:** El archivo `iris.data` contiene un conjunto de datos de plantas de la familia Iris, donde la última columna indica a qué variedad de Iris pertenece la planta estudiada (0-setosa, 1-versicolour o 2-virginica). Para cada planta se obtuvieron 4 atributos (longitud y ancho del sépalo, longitud y ancho del pétalo, respectivamente). Conseguir la descomposición SVD de la matriz de los datos (sin la columna de la clase) y graficar los puntos formados por las primeras dos columnas de U (un punto por fila). Colorear cada punto de acuerdo a la clase que le corresponde.

7. **Implemente** una función llamada `autjacobi`, que utilice el método de Jacobi para hallar los autovalores de una matriz simétrica A. La función debe tener como entrada A, una tolerancia ϵ y una cantidad máxima de iteraciones m (por defecto, $\epsilon = 10^{-10}$ y $m = 500$).

8. **Implemente** una función llamada `dvsingulares` que utilice la función del ejercicio 7 y la descomposición QR con permutación de columnas para obtener la descomposición en valores singulares de una matriz A. Debe retornar U, Σ y V.

9. **Implemente** la siguientes funciones para encontrar un autovalor ρ con su autovector q utilizando método de las potencias. Deben tener como entrada una matriz A, un vector inicial q^0, una tolerancia ϵ y una cantidad máxima de iteraciones m (por defecto, $\epsilon = 10^{-10}$ y $m = 500$).

a) `autpotenciasinf` que utilice norma infinito.

b) `autpotencias2` que utilice norma 2.

c) `autrayleigh` que utilice la iteración del cociente de Rayleigh.

10. **Dinámica Poblacional.** Sea n_i^t la cantidad de individuos en la faja etaria i al final del año t, s_i la porción de individuos de la faja i que pasan anualmente a la faja $i+1$ y f_i la tasa de fecundidad per cápita de la faja i. Entonces la dinámica de la población cumple con las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} n_1^{t+1} &= f_1 n_1^t + \ldots + f_p n_p^t \\ n_i^{t+1} &= s_i n_{i-1}^t \qquad \text{para } i = 2, \ldots, p. \end{aligned}$$

De manera vectorial esta dinámica puede escribirse como $n^{t+1} = Ln^t$ donde L es llamada matriz de Leslie. Con el autovalor dominante λ_1 de esta matriz se obtiene que si $\lambda_1 < 1$ la población decrece exponencialmente, $\lambda_1 > 1$ la población crece exponencialmente y $\lambda_1 = 1$ la población es estable e igual al autovector asociado.

Determine el comportamiento de la población de esta especie:

edad	0-2	2–4	4–6	6–8	8–10	10–12	12–14
f_i	0.0	0.2	0.9	0.9	0.9	0.8	0.3
s_i	0.3	0.7	0.9	0.9	0.9	0.6	0.0
n_i^0	10	2	8	5	12	0	1

11. Sea p un polinomio tal que $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Demuestre que las raíces de p son los autovalores de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \end{bmatrix}.$$

12. Sea H Hessenberg superior tal que $H = Q^T AQ$. Demuestre que si A es simétrica entonces H es tridiagonal.

13. **Implemente** una función llamada `fhess` que retorne la forma de Hessenberg de una matriz. Debe tener como entrada una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $p \in \{0, 1\}$. Como salida Q ortogonal y H Hessenberg superior tal que $H = Q^T AQ$. Si $p = 0$ reflexiones de Householder (por defecto), si $p = 1$ se usarán rotaciones de Givens.

14. **Implemente** una función llamada `autqr`, que ejecute el método de iteraciones QR para hallar los autovalores de $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, comenzando con una reducción en su forma de Hessenberg y utilizando luego rotaciones de Givens. Debe tener como entrada una matriz A, una tolerancia ϵ y una cantidad máxima de iteraciones m (por defecto, $\epsilon = 10^{-10}$ y $m = 500$).