ÁLGEBRA III - 2021
Práctico 5

Descomposición en sumas directas invariantes. Descomposición primaria.

1. Encontrar una proyección E que proyecte $\mathbb{R}^2$ sobre el subespacio generado por $(1,-1)$ según el subespacio generado por $(1,2)$, es decir según $\mathcal{N}u(E) = \langle (1,2) \rangle$.

2. Si N y R son subespacios de $V = R \oplus N$ y E es la proyección sobre R según N, entonces $I - E$ es la proyección sobre N según R.

3. Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

   (a) Si E_1 y E_2 son proyecciones sobre subespacios independientes, entonces $E_1 + E_2$ es una proyección.

   (b) Si $T \in L(V)$ es diagonalizable y sus únicos autovalores son 0 y 1, entonces T es una proyección.

4. Sea $\mathbb{F}$ un cuerpo, con $\operatorname{car} \mathbb{F} = 0$. Probar que si $E_1, \ldots, E_k$ son proyecciones de un $\mathbb{F}$-espacio vectorial tales que $E_1 + \cdots + E_k = I$, entonces $E_i E_j = 0$ para todo $i \neq j$.

5. Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $E \in L(V)$ idempotente. Probar que $I + E$ es inversible y hallar su inversa

6. Sea T el operador lineal en $\mathbb{R}^2$ cuya matriz en la base canónica es $\left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Sea W_1 el subespacio generado por $e_1 = (1,0)$. Probar que:

   (a) W_1 es T-invariante.

   (b) No existe ningún subespacio W_2 complementario a W_1 que sea T-invariante.

7. Sea T un operador lineal en un espacio vectorial de dimensión finita V. Sea R la imagen de T y N el núcleo de T. Probar que R y N son independientes si y sólo si $V = R \oplus N$.

8. Sea T un operador lineal en V. Supongamos $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$, donde cada W_j es T-invariante. Para cada j, $1 \leq j \leq k$, sea T_j el operador restricción a W_j.

   (a) Probar que $\det(T) = \det(T_1) \cdots \det(T_k)$.

   (b) Probar que el polinomio característico de T es el producto de los polinomios característicos de $T_1, \ldots, T_k$, es decir $p_T = p_{T_1} \cdots p_{T_k}$.

   (c) Probar que el polinomio minimal de T es el mínimo común múltiplo de los polinomios minimales de $T_1, \ldots, T_k$, es decir $m_T = m.c.m.\{m_{T_1}, \ldots, m_{T_k}\}$.

9. Sea T el operador lineal sobre $\mathbb{R}^3$ representado en la base canónica por

$$\begin{pmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

   y sean W_1, W_2 los autoespacios de T. Hallar las proyecciones E_1 y E_2 asociadas a la descomposición $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$ y escribir $T = c_1 E_1 + c_2 E_2$.

10. Sea
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Hallar las matrices E_1, E_2, E_3 tales $A = c_1E_1 + c_2E_2 + c_3E_3$, $E_1 + E_2 + E_3 = I$ y $E_iE_j = 0$, si $i \neq j$.

11. Sea T el operador lineal sobre $\mathbb{R}^3$ representado en la base canónica por
$$\begin{pmatrix} 6 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 10 & -5 & -3 \end{pmatrix}.$$
   (a) Expresar el polinomio minimal m_T de T en la forma p_1p_2, donde p_1 y p_2 son polinomios mónicos irreducibles sobre los números reales.
   (b) Sea $W_i = \mathcal{N}u(p_i(T))$ y T_i el operador restricción de T a W_i. Encontrar una base $\mathcal{B}_i$ del espacio W_i y la matriz de T_i en esa base.
   (c) Hallar la matriz de T en la base $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$.

12. Sea V el espacio de los polinomios de grado menor o igual que n sobre un cuerpo $\mathbb{F}$. Probar que el operador derivación es nilpotente.

13. Sea T un operador nilpotente en un espacio de dimensión finita n. Probar que el polinomio característico de T es x^n.

14. Sea T el operador sobre $\mathbb{R}^3$ representado en la base canónica por la matriz
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$
   (a) Demostrar que existen un operador diagonalizable D y uno nilpotente N sobre $\mathbb{R}^3$ tales que $T = D + N$ y $DN = ND$. [**Ayuda:**
      i. Descomponer el polinomio minimal m_T de T en factores coprimos p_1, p_2 y hallar polinomios h_1, h_2 tales que $1 = p_1h_1 + p_2h_2$.
      ii. Sean $E_1 = p_2h_2(T)$, $E_2 = p_1h_1(T)$. Mostrar que $D = c_1E_1 + c_2E_2$ y $N = T - D$ satisfacen lo requerido.
      iii. Mostrar que E_i es la proyección al subespacio $W_i = \mathcal{N}u(p_i(T))$.]
   (b) Hallar las matrices de D y N en la base canónica.

15. Sea T un operador sobre V con polinomio característico $p_T = (x-c_1)^{d_1} \cdots (x-c_k)^{d_k}$ y polinomio minimal $m_T = (x-c_1)^{r_1} \cdots (x-c_k)^{r_k}$. Sea $W_i := \mathcal{N}u((T - c_iI)^{r_i})$.
   (a) Probar que W_i es el conjunto de todos los vectores $v \in V$ tales que $(T - c_iI)^\ell v = 0$ para algún natural ℓ (que dependerá de cada $v \in W_i$).
   (b) Mostrar que $(T - c_iI)$ es nilpotente en W_i. Si $n_i := \dim W_i$, entonces ¿cuál es el polinomio característico de $(T - c_iI)_{|W_i}$ (usar el Ejercicio 13) y cuál el de $T_{|W_i}$?
   (c) Usar el Ejercicio 8 (b) para mostrar que $\dim W_i = d_i$.

16. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre $\mathbb{C}$. Sea T un operador lineal en V y sea D la parte diagonalizable de T. Probar que si g es un polinomio sobre $\mathbb{C}$, entonces la parte diagonalizable de $g(T)$ es $g(D)$.

17. Sea T un operador lineal sobre V que conmuta con todo operador lineal diagonalizable. Probar que T es un múltiplo escalar del operador identidad.

18. Dar un ejemplo de dos matrices nilpotentes 4×4 que tengan el mismo polinomio minimal (por lo tanto, el mismo polinomio característico) pero que no sean semejantes.

19. Sea T un operador lineal en un espacio vectorial V de dimension finita. Sea $m_T = p_1^{e_1} \dots p_k^{e_k}$ el polinomio minimal de T y $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$ la descomposición primaria de T, i. e. $W_i = \mathcal{N}u(p_i^{e_i}(T))$. Probar que si W es un subespacio T-invariante de V, entonces

$$W = \big(W \cap W_1\big) \oplus \big(W \cap W_2\big) \cdots \oplus \big(W \cap W_k\big).$$