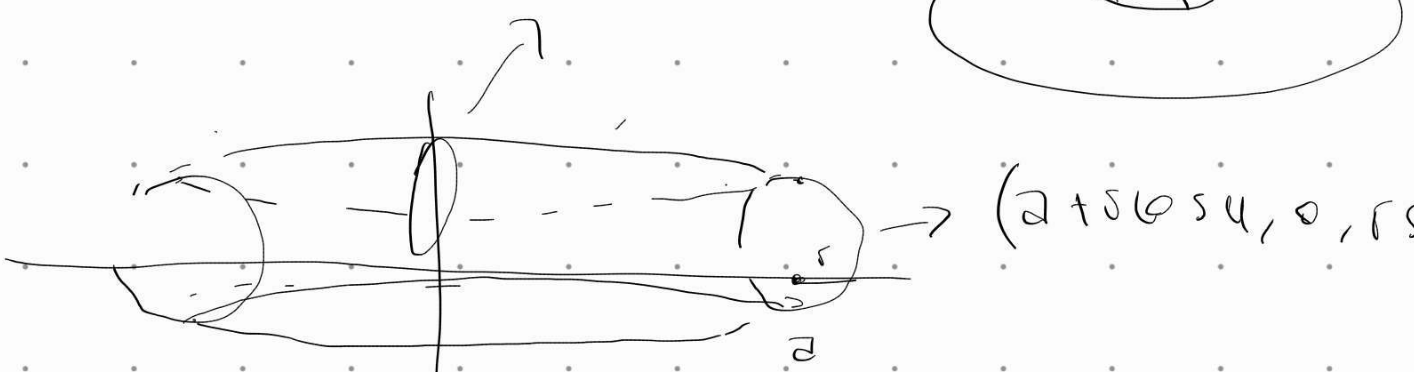
Ejemplo (Toro)

$(0, a+r\cos u, r\,\text{sen}\,u)$



$\to (a+r\cos u, 0, r\,\text{sen}\,u)$

revolucionamos esto aplicando matriz rotación

$(a>r)\,(r>0, a>0)$

$$\varphi(u,v) = ((a+r\cos u)\cos v, (a+r\cos u)\,\text{sen}\,v, r\,\text{sen}\,u)$$

$$\varphi_u(u,v) = (-r\,\text{sen}\,u\cos v, -r\,\text{sen}\,v\,\text{sen}\,u, r\cos v)$$

$$\varphi_v(u,v) = (-(a+r\cos u)\,\text{sen}\,v, (a+r\cos u)\cos v, 0)$$

$$\varphi_{uu}(u,v) = (-r\cos u\cos v, -r\cos u\,\text{sen}\,v, -r\,\text{sen}\,u)$$

$$\varphi_{vv}(u,v) = (-(a+r\cos u)\cos v, -(a+r\cos u)\,\text{sen}\,v, 0)$$

$$\varphi_{uv}(u,v) = (r\,\text{sen}\,u\,\text{sen}\,v, -r\,\text{sen}\,u\cos v, 0)$$

$\Rightarrow E = r^2 \quad F = 0 \quad G = (a+r\cos u)^2$

Ahora $e = \langle N, \varphi_{uu} \rangle = \left\langle \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\| \varphi_u \times \varphi_v \|}, \varphi_{uu} \right\rangle$

$$= \frac{\langle \varphi_u \times \varphi_v, \varphi_{uu} \rangle}{\sqrt{EG - F^2}}$$

$$= \frac{\det(\varphi_u, \varphi_v, \varphi_{uu})}{\sqrt{EG - F^2}}$$

$= r$ (en este caso)

de manera similar

$f = 0$ y $g = \cos u \,(a + r \cos u)$

Notación si Π es el plano que pasa por p con normal N, denotamos

$$\Pi^+ = \{q \in \mathbb{R}^3 / \langle q-p, N \rangle > 0\}$$

$$\Pi^- = \{q \in \mathbb{R}^3 / \langle q-p, N \rangle < 0\}$$

Prop Sea S una sup regular y $p \in S$

(i) Si p es un punto elíptico entonces existe V entorno de p en S tal que $V - \{p\} \subseteq T_pS^+$ ó $V - \{p\} \subseteq T_pS^-$

ii) Si p es un punto hiperbólico entonces en cada entorno de V en p $V \cap T_pS^+ \neq \emptyset$ y $V \cap T_pS^- \neq \emptyset$

dem Sea $\varphi: U \to S$ una param de p tal que $\varphi(0,0) = p$ y $N = \dfrac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}$

queremos analizar el signo de

$$h(u,v) = \langle \varphi(u,v) - p, N(p) \rangle$$

h recibe (u,v) y te devuelve un número real que te dice si $\varphi(u,v)$ está en T_pS^+ o T_pS^-

Usando taylor en $(0,0)$

$$\varphi(u,v) = \varphi(0,0) + \varphi_u(0,0)u + \varphi_v(0,0)v$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\varphi_{uu}(0,0)u^2 + 2\varphi_{uv}(0,0)uv + \varphi_{vv}(0,0)v^2\right)$$
$$+ \bar{R}(u,v)$$

$$\text{con} \lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{\bar{R}(u,v)}{\|(u,v)\|^2} = 0$$

$$\Rightarrow h(u,v) = \frac{1}{2}\Big(\overbrace{\langle \varphi_{uu}, N \rangle}^{e} u^2 + 2\overbrace{\langle \varphi_{uv}, N \rangle}^{f} uv$$
$$+ \underbrace{\langle \varphi_{vv}, N \rangle}_{g} v^2\Big) + \underbrace{\langle \bar{R}, N \rangle}_{R}$$

$$\Rightarrow h(u,v) = \frac{1}{2} \mathrm{II}_p(w) + R$$

con $w \in T_pS$ y $w = u\varphi_u(0,0) + v\varphi_v(0,0)$

con $\displaystyle\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{R}{\|w\|^2} = 0$ $\boxed{\text{ejercicio}}$

en particular para $(u,v) \simeq (0,0)$ el signo de $h(u,v)$ coincide con el signo de $\mathrm{II}_p(w)$

(es decir $\exists\ \tilde{U} \subseteq U$ abierto tq $(0,0) \in \tilde{U}$ y h y II_p tienen mismo signo)

(i) Si p es elíptico

$\Rightarrow \mathrm{II}_p$ no cambia el signo

$\Rightarrow h(u,v)$ no cambia signo en $\tilde{U}$, luego si $V = \varphi(\tilde{U})$ entonces $V - \{p\} \subseteq T_pS^+$ ó $V - \{p\} \subseteq T_pS^-$

(ii) Si p hiperbólico, $\exists\ w^+, w^- \in T_pS$ tq $\mathrm{II}_p(w^+) > 0$ $\mathrm{II}_p(w^-) < 0$

$\Rightarrow w^+ = u^+\varphi_u + v^+\varphi_v$ $\Rightarrow h(u^+,v^+) > 0$

$w^- = u^-\varphi_u + v^-\varphi_v$ $h(u^-,v^-) < 0$

$\varphi(u^+,v^+) \in T_pS^+$ $\varphi(u^-,v^-) \in T_pS^-$

esto se puede repetir p/ cualquier entorno de p

<u>Nota</u> No hay resultado análogo para parabólicos, ni planares

pensar ejemplos