Clase 7 - Interpolación polinomial

El problema

Dada una tabla de $(n+1)$ puntos: $(x_0,y_0),(x_1,y_1),\ldots,(x_ny_n)$ donde $x_0,x_1,\ldots,x_n$ son distintos, se desea determinar un polinomio p, con el **menor grado posible**, tal que

$$p(x_i) = y_i \quad \text{para} \quad i = 0,\ldots,n.$$

En este caso se dice que tal polinomio p **interpola** el conjunto de puntos dados. Ver Figura 1.

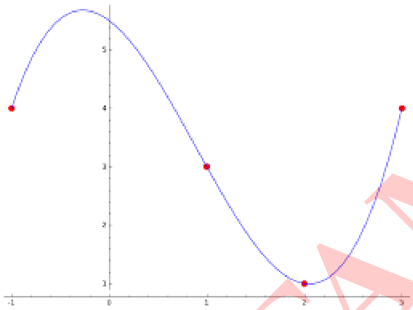

Figura 1: Interpolación polinomial.

A continuación veremos un resultado de existencia y unicidad del polinomio interpolante.

Teorema 1. *Dados $x_0,x_1,\ldots,x_n$ números reales distintos con valores asociados $y_0,y_1,\ldots,y_n$ entonces existe un único polinomio p_n de grado menor o igual a n tal que $p_n(x_i) = y_i$, para $i = 0,\ldots,n$.*

Demostración.

Existencia: probaremos la existencia del polinomio interpolante p por inducción.

Para $n = 0$, es el caso obvio pues el polinomio constante $p_0(x) = y_0$ satisface que tiene grado (menor o) igual a 0 y que $p_0(x_0) = y_0$.

Ahora supongamos, por hipótesis inductiva que se tiene un polinomio p_{k-1} de grado $\leq k-1$ con $p_{k-1}(x_i) = y_i$ para $i = 0,\ldots,k-1$. Vamos a construir el polinomio p_k de grado $\leq k$, tal que $p_k(x_i) = y_i$ para $i = 0,\ldots,k$, de la forma

$$p_k(x) = p_{k-1}(x) + c(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1}),$$

donde c es una constante a determinar. Notar que este polinomio tiene grado $\leq k$. Además p_k interpola los primeros k puntos que interpola p_{k-1} pues

$$p_k(x_i) = p_{k-1}(x_i) = y_i, \qquad i = 0,\ldots,k-1.$$

El coeficiente c se determina usando la condición de interpolación $p_k(x_k) = y_k$, es decir:

$$p_k(x_k) = p_{k-1}(x_k) + c(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1}) = y_k,$$

de donde se deduce que

$$c = \frac{y_k - p_{k-1}(x_k)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})}.$$

El coeficiente c está bien definido porque los números $x_0, x_1, \ldots x_n$ son distintos y el denominador nunca se anula. Esto prueba la existencia del polinomio interpolante p_k.

Unicidad: supongamos que existen dos polinomios interpolantes p_n y q_n de grado $\leq n$, esto es, $p_n(x_i) = y_i$ y $q_n(x_i) = y_i$ para $i = 0, \ldots, n$.

Sea $h = p_n - q_n$. Claramente h es un polinomio de grado $\leq n$. Además, $h(x_i) = 0$ para $i = 0, \ldots, n$, por lo tanto h es un polinomio de grado $\leq n$ y tiene $(n+1)$ raíces reales. Luego, por el Teorema Fundamental del Álgebra, $h(x) = 0$ para todo x y por lo tanto $p_n = q_n$.

$\square$

Forma de Newton del polinomio interpolante

Si bien el polinomio interpolante es único, puede escribirse de diferentes formas. La forma de Newton se obtiene inductivamente, como se hizo en la prueba de la existencia del teorema anterior, agregando un nuevo término al polinomio interpolante de un grado menor.

Si n = 0: vimos que es suficiente definir el polinomio constante $p_0(x) = c_0 = y_0$.

Si n = 1: dados los puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1)$, se construye p_1 tal que $p_1(x) = c_0 + c_1(x - x_0)$ y $p_1(x_0) = c_0 = y_0$. Usando que $p_1(x_1) = y_1$, entonces $y_1 = c_0 + c_1(x_1 - x_0)$ y por lo tanto, $c_1 = \dfrac{y_1 - c_0}{x_1 - x_0}$.

Si n = k: tenemos que

$$p_k(x) = p_{k-1}(x) + c_k(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{k-1}),$$

y por recurrencia obtenemos que

$$p_k(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + c_k(x - x_0) \ldots (x - x_{k-1}).$$

La forma de Newton compacta del polinomio interpolante resulta en

$$p_k(x) = \sum_{i=0}^{k} c_i \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j).$$

Aquí se adopta la convención que $\displaystyle\prod_{j=0}^{m} (x - x_j) = 1$ si $m < 0$.

Para evaluar $p_k(x)$, una vez calculados los coeficientes c_k, es conveniente usar el algoritmo de Horner de multiplicación encajada.

Forma de Lagrange del polinomio interpolante

Veremos otra forma alternativa de expresar el polinomio interpolante p_n, de grado $\leq n$, asociado a los puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots (x_n, y_n)$ donde $x_0, x_1, \ldots, x_n$ son distintos.

Primero se definen los polinomios básicos de Lagrange asociado a los puntos distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$:

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \quad \text{para} \quad i = 0, \ldots, n.$$

Así, por ejemplo, para $i = 0$, se tiene $l_0(x) = \prod_{j=1}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_0 - x_j)}$.

Es claro que el grado de $l_i(x)$ es igual n para $i = 0, \ldots, n$ y que

$$l_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Ahora definimos la **forma de Lagrange** del polinomio interpolante por

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x).$$

Es claro que p_n es un polinomio de grado $\leq n$ y que $p_n(x_i) = y_i$, para $i = 0, \ldots, n$.

Ejercicio: probar que $\sum_{i=0}^{n} l_i(x) = 1$.

Sea $p(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x)$. Es claro que p tiene grado $\leq n$. Sea $h(x) = p(x) - 1$, un polinomio de grado $\leq n$. Además, $h(x_k) = 0$ para $k = 0, \ldots, n$, es decir, h es polinomio de grado $\leq n$ y tiene $n+1$ raíces. Luego $h(x) = 0$ para todo x, y por lo tanto, $p(x) = 1$ para todo x.

Esto también puede ser generalizado a $\sum_{i=0}^{n} x_i^m l_i(x) = x^m$, si $m \leq n$.

Error en el polinomio interpolante

Ahora veremos un resultado sobre el error que se comete al reemplazar una función por un polinomio que la interpola en algunos puntos dados. Primero veremos dos observaciones muy simples que serán útiles en el teorema siguiente.

Observación 1: si p es un polinomio de grado igual a 0 entonces $p'(x) \equiv 0$;
si p es un polinomio de grado igual a 1 entonces $p''(x) \equiv 0$;
si p es un polinomio de grado igual a 2 entonces $p'''(x) \equiv 0$; y en general,
si p es un polinomio de grado igual a n entonces $p^{(n+1)}(x) \equiv 0$.

Observación 2: si f es una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Si además, $f(a) = f(b)$ entonces existe $\alpha \in (a,b)$ tal que $f'(\alpha) = 0$ (Teorema de Rolle). En particular, si $f(a) = f(b) = 0$ entonces existe $\alpha \in (a,b)$ tal que $f'(\alpha) = 0$. Más aún, si $f(a) = f(b) = f(c) = 0$ entonces existen $\alpha \in (a,b)$ y $\beta \in (b,c)$ tal que $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$.

Teorema 2. *Sea f una función en $C^{n+1}[a,b]$ y p un polinomio de grado $\leq n$ que interpola a f en $(n+1)$ puntos distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ en $[a,b]$. Entonces para cada $x \in [a,b]$ existe un $\xi = \xi_x \in (a,b)$ tal que*

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

Demostración. Si $x = x_i$ para $i = 0, 1, \ldots, n$, la igualdad es trivialmente cierta, pues p interpola a f en esos puntos, por hipótesis.

Ahora supongamos que $x \neq x_0, x_1, \ldots, x_n$, y definimos

$$\begin{aligned} w(t) &= \prod_{i=0}^{n}(t-x_i) && \text{(polinomio en } t\text{)} \\ c &= \frac{f(x)-p(x)}{w(x)} && \text{(constante, pues } x \text{ está fija)} \\ \varphi(t) &= f(t)-p(t)-cw(t) && \text{(función en } t\text{),} \end{aligned}$$

la constante c está bien definida pues $w(x) \neq 0$ si $x \neq x_i$ para $i = 0, \ldots, n$.

Notar que si $t = x_0, x_1, \ldots, x_n$ entonces $\varphi(t) = 0$, pues p interpola a f en esos puntos y porque w se anula allí.

Además, por las definiciones de w, c y φ es fácil ver que si $t = x$ entonces $\varphi(t) = 0$.

Luego, $\varphi(t)$ tiene (al menos) $(n+2)$ raíces: $x_0, x_1, \ldots, x_n, x$, y por el Teorema de Rolle (y la Observación 2) tenemos que:

$\varphi'(t)$ tiene (al menos) $(n+1)$ raíces en (a,b).

$\varphi''(t)$ tiene (al menos) n raíces en (a,b).

$\varphi'''(t)$ tiene (al menos) $(n-1)$ raíces en (a,b).

$\vdots$

$\varphi^{(n+1)}(t)$ tiene (al menos) 1 raíz en (a,b). Sea $\xi = \xi_x \in (a,b)$ tal raíz de $\varphi^{(n+1)}(t)$.

Luego,

$$0 = \varphi^{(n+1)}(\xi) = f^{(n+1)}(\xi) - p^{(n+1)}(\xi) - cw^{(n+1)}(\xi). \tag{1}$$

Como $\prod_{i=0}^{n}(t-x_i) = t^{n+1} + \textit{términos de orden menor}$, entonces $w^{(n+1)}(\xi) = (n+1)!$. Además, como p es un polinomio de grado menor o igual que n entonces, por la Observación 1, $p^{(n+1)}(x) = 0$ para todo x, en particular para $x = \xi$.

Finalmente de (1) y de la definición de c,

$$0 = f^{(n+1)}(\xi) - c(n+1)! = f^{(n+1)}(\xi) - \frac{f(x)-p(x)}{w(x)}(n+1)!,$$

y por lo tanto,

$$f(x)-p(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i).$$

$\square$

Ejemplo: dar una estimación del error que se comete al interpolar la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ por un polinomio interpolante de grado 9, que interpola a f en 10 puntos en el intervalo $[0,1]$.

Como el polinomio interpolante tiene grado $n = 9$ es claro que se requieren 10 puntos. Por el teorema anterior, para poder acotar la expresión del teorema se necesita una cota de $f^{(10)}(\xi)$. Como $f(x) = \operatorname{sen} x$, es fácil deducir que $|f^{(10)}(\xi)| \leq 1$.

Además, si bien no se conocen los puntos de interpolación, sabemos que todos ellos pertenecen al intervalo $[0,1]$, por lo tanto $\prod_{i=0}^{9}|x-x_i| \leq 1$.

Entonces

$$|\operatorname{sen} x - p(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} \left| \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right| \leq \frac{1}{10!} < 2.8\,10^{-7}.$$

Convergencia uniforme de los polinomios de interpolación

El teorema anterior da una expresión, para cada punto x, del error que se comete al interpolar una función f por un polinomio interpolante p.

Ahora bien, si se construyen polinomios interpolantes p_n utilizando cada vez más puntos, o equivalentemente de grado cada vez más alto, sería natural esperar que estos polinomios convergieran uniformemente a la función f en el intervalo $[a,b]$. Es decir, esperaríamos

$$\|f - p_n\|_\infty = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - p_n(x)| \to 0 \quad \text{si} \quad n \to \infty.$$

Lamentablemente, para la mayoría de las funciones continuas no ocurre esto debido al comportamiento inestable de los polinomios de grado alto. Ver Figura 2.

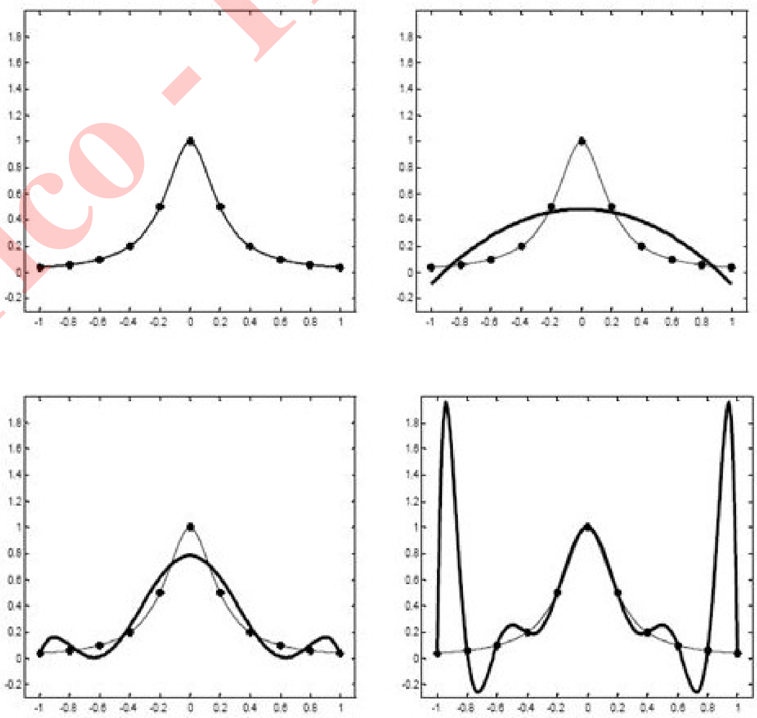

Figura 2: Ejemplo de no convergencia uniforme de los polinomios interpolantes.

Como puede verse en la figura, a medida que se aumenta el grado del polinomio, y por lo tanto la cantidad de puntos de interpolación, el gráfico del polinomio tiende a comportarse muy diferente al gráfico de la función.