Clase 9 - Interpolación polinomial (3)

Repaso

El problema: Dada una tabla de $(n+1)$ puntos: $(x_0,y_0),(x_1,y_1),\ldots,(x_ny_n)$ donde $x_0,x_1,\ldots,x_n$ son distintos, se desea determinar un polinomio p, con el **menor grado posible**, tal que:

$$p(x_i) = y_i \quad \text{para} \quad i = 0,\ldots,n.$$

En este caso se dice que tal polinomio p **interpola** el conjunto de puntos dados.
- Existencia y unicidad del polinomio interpolante.
- Forma de Lagrange.
- Forma de Newton.
- Error en el polinomio interpolante.
- Convergencia de los polinomios de interpolación.
- Diferencias divididas.
- Polinomios de Hermite.

Splines

Antes de introducir el concepto de splines vamos a considerar el caso simple de interpolación lineal que será muy útil en lo que sigue.

Sea f una función definida en el intervalo $[x_0,x_1]$ 2 veces continuamente diferenciable. El polinomio de grado ≤ 1 que interpola a f en los puntos x_0,x_1 es:

$$p(x) = f[x_0] + f[x_0,x_1](x-x_0),$$

y el error está dado por

$$e(x) = f[x_0,x_1,x](x-x_0)(x-x_1) = \frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)(x-x_1),$$

para $x,\xi \in (x_0,x_1)$.

Sea $M>0$ una constante tal que $|f''(x)| \leq M$ para todo $x \in [x_0,x_1]$.

Sea $\varphi(x) = (x-x_0)(x-x_1)$, una función cuadrática, cuyo gráfico es una parábola con las ramas hacia arriba, sus raíces son x_0 y x_1 y su mínimo se alcanza en $x_m = (x_0+x_1)/2$.

Por lo tanto

$$\begin{aligned} |\varphi(x)| \leq |(x_m-x_0)(x_m-x_1)| &= \left|\left(\frac{x_0+x_1}{2}-x_0\right)\left(\frac{x_0+x_1}{2}-x_1\right)\right| \\ &= \left|\frac{(x_1-x_0)}{2}\frac{(x_0-x_1)}{2}\right| = \frac{|x_1-x_0|^2}{4}. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$|e(x)| \leq \frac{M}{8}|x_1-x_0|^2. \tag{1}$$

Supongamos que se desea interpolar una función f por un polinomio interpolante p_n. Usar pocos puntos de interpolación podría generar un polinomio que no aproxime bien a la función. Por otro lado, como se comentó anteriormente, y contrariamente a lo que podría esperarse, aumentar la cantidad de puntos de interpolación no mejora la convergencia uniforme del polinomio interpolante p_n a la función f. Esto es conocido como fenómeno de Runge.

Una idea que trata de conciliar estos conceptos opuestos es aplicar interpolación con polinomios de grado bajo por subintervalos. Esto es conocido como **interpolación polinomial por partes** o **interpolación segmentaria** o simplemente **splines**.

Definición 1. *Una función* **spline** *está formada por polinomios definidos en subintervalos, los cuales se unen entre sí obedeciendo ciertas condiciones de continuidad.*

Más formalmente, dados $n+1$ puntos tales que $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, que denominaremos **nodos**, *y un entero $k \geq 0$, un* **spline de grado k** *es una función S definida en $[x_0, x_n]$ que satisface:*

- S es un polinomio de grado $\leq k$ en cada subintervalo $[x_i, x_{i+1})$, para $i = 0, \ldots, n-1$;

- las derivadas $S^{(i)}$ son continuas en $[x_0, x_n]$, para $i = 0, \ldots, k-1$.

Veremos con un poco más de detalles los splines lineales y cúbicos, esto es, de grado 1 y 3.

Splines lineales

Dados los $n+1$ nodos tales que $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, un **spline lineal** ($k = 1$) es una función S definida en $[x_0, x_n]$ que satisface:

- S es un polinomio de grado ≤ 1 (recta) en cada subintervalo $[x_i, x_{i+1})$, para $i = 0, \ldots, n-1$;

- la función S es continua en $[x_0, x_n]$.

Es decir,

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a_0 x + b_0, & x \in [x_0, x_1) \\ S_1(x) = a_1 x + b_1, & x \in [x_1, x_2) \\ \quad\vdots & \quad\vdots \\ S_{n-1}(x) = a_{n-1} x + b_{n-1}, & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases},$$

donde los $2n$ coeficientes a_i, b_i, para $i = 0, \ldots, n-1$ son las incógnitas a ser determinadas. Para eso, se deben tener $2n$ condiciones.

Notar que la segunda condición significa que los polinomios de grado ≤ 1 *se pegan bien* en los $(n-1)$ nodos interiores $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Las $(n+1)$ condiciones faltantes corresponden a las $(n+1)$ condiciones de interpolación $S(x_i) = f(x_i)$ para $i = 0, \ldots, n$. Ver Figura 1.

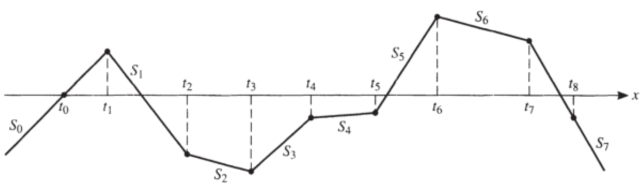

Figura 1: Gráfico de spline lineal (k = 1)

Dado un i fijo, se pueden determinar los coeficientes a_i, b_i, para $i = 0, \ldots, n-1$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} a_i x_i + b_i &= S_i(x_i) = f(x_i) \\ a_i x_{i+1} + b_i &= \lim_{x \to x_{i+1}} S_i(x) = S_{i+1}(x_{i+1}) = f(x_{i+1}) \end{aligned}$$

Restando la segunda ecuación menos la primera obtenemos $a_i(x_{i+1} - x_i) = f(x_{i+1}) - f(x_i)$, y por lo tanto

$$a_i = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{(x_{i+1} - x_i)}, \qquad b_i = f(x_i) - a_i x_i.$$

Observación: supongamos que f es 2 veces continuamente diferenciable en $[a,b]$ y $x_k = a + kh$, $k = 0, \ldots, n$, con $h = (b-a)/n$.

Si S es un spline lineal, en cada intervalo $[x_k, x_{k+1}]$ se tiene un polinomio de grado ≤ 1. Entonces el error de interpolación para cada $x \in [a,b]$ está dado por:

$$|e(x)| \leq \frac{M}{8} h^2,$$

donde $|f''(x)| \leq M$ para todo $x \in [a,b] = [x_0, x_n]$.

Splines cúbicos

Dados los $n+1$ nodos tales que $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, un **spline cúbico** ($k = 3$) es una función S definida en $[x_0, x_n]$ que satisface:

- S es un polinomio de grado ≤ 3 en cada subintervalo $[x_i, x_{i+1})$, para $i = 0, \ldots, n-1$;
- las funciones S, S' y S'' son continuas en $[x_0, x_n]$.

Es decir,

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a_0 x^3 + b_0 x^2 + c_0 x + d_0, & x \in [x_0, x_1) \\ S_1(x) = a_1 x^3 + b_1 x^2 + c_1 x + d_1, & x \in [x_1, x_2) \\ \quad \vdots & \vdots \\ S_{n-1}(x) = a_{n-1} x^3 + b_{n-1} x^2 + c_{n-1} x + d_{n-1}, & x \in [x_{n-1}, x_n] \end{cases},$$

donde los $4n$ coeficientes a_i, b_i, c_i, d_i, para $i = 0, \ldots, n-1$ son las incógnitas a ser determinadas. Para eso, se deben tener $4n$ condiciones.

$$\begin{array}{lll} S(x_i) = f(x_i), & i = 0, \ldots, n & \text{((n+1) condiciones de interpolación)} \\ S_i(x_{i+1}) = \lim_{x \to x_{i+1}} S_i(x) = S_{i+1}(x_{i+1}), & i = 0, \ldots, n-2 & \text{((n-1) condiciones de continuidad de } S\text{)} \\ S'_i(x_{i+1}) = \lim_{x \to x_{i+1}} S'_i(x) = S'_{i+1}(x_{i+1}), & i = 0, \ldots, n-2 & \text{((n-1) condiciones de continuidad de } S'\text{)} \\ S''_i(x_{i+1}) = \lim_{x \to x_{i+1}} S''_i(x) = S''_{i+1}(x_{i+1}), & i = 0, \ldots, n-2 & \text{((n-1) condiciones de continuidad de } S''\text{)} \end{array}$$

Esto da un total de $(n+1) + 3(n-1) = 4n - 2$ condiciones. Para poder determinar una única solución se deben imponer dos condiciones adicionales:

$$S''(x_0) = S''_0(x_0) = 0 \quad \text{y} \quad S''(x_n) = S''_{n-1}(x_n) = 0.$$

En este caso, se denomina **spline con condiciones naturales** o simplemente **spline natural**.

Otras veces se suele utilizar

$$S'(x_0) = S_0'(x_0) = f'(x_0) \quad \text{y} \quad S'(x_n) = S_{n-1}'(x_n) = f'(x_n).$$

En este caso, se denomina **spline con condiciones correctas**.

Estas condiciones suelen estar asociadas a características del problema y son indicadas en el problema o proporcionadas por quien presenta el problema.