Isometrías

ejemplo: Π plano que pasa por p_0 y está generado por $\{v_1, v_2\}$ ortonormales
una param de Π es

$$\psi : \mathbb{R}^2 \to \Pi \qquad \psi(u,v) = u v_1 + v v_2 + p_0$$

$$\Rightarrow E = 1 \qquad F = 0 \qquad G = 0$$

Sea C cilindro $\quad C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2+y^2 = 1\}$

con $\quad U = (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \qquad \varphi : U \to C$

$$\varphi(u,v) = (\cos u, \sin v, v)$$

$$\Rightarrow \tilde{E} = 1 \qquad \tilde{F} = 0 \qquad \tilde{G} = 1$$

Queremos una isometría I

$C \qquad \psi : \to \Pi$

Sea $F = \psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \Pi$

$d F \circ \varphi = d\psi$

∘) Veamos que es isometría

Dado $w \in T_p C$, $w = w_1 \varphi_u + w_2 \varphi_v$

$p \in \varphi(U)$ $(\varphi(u_0,v_0) = p)$

$$\underline{dF_p(w)} = w_1 \underline{dF_p(\varphi_u)} + w_2 dF_p(\varphi_v)$$

$$= w_1 \psi_u + w_2 \psi_v$$

$dF_p(\varphi_u) = \frac{d(F\circ\varphi)}{du}\Big|_{(u_0,v_0)} = \frac{d\psi}{du}\Big|_{(u_0,v_0)}$

$$\Rightarrow I_{F(p)}(dF_p(w)) = w_1^2 E + 2 w_1 w_2 F + w_2^2 G$$

$$= w_1^2 \tilde{E} + 2 w_1 w_2 \tilde{F} + w_2^2 \tilde{G}$$

$$= I_p(w)$$

$\Rightarrow F$ preserva primera forma y

$F : \varphi(U) \to \psi(U)$ es difeo

pq $\varphi : U \to S_1$ es difeo

$\Rightarrow \varphi^{-1}$ tmb

y $\psi : U \to S_2$ es difeo

$\Rightarrow F$ es isometría local en p $(\forall p \in \varphi(U))$

Repitiendo el argumento con

$$V = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 / -\pi < u < \pi \ , \ v \in \mathbb{R}\}$$

obtenemos una isometría local $\forall q \in \varphi(V)$

Luego el cilindro es localmente isométrico al plano

<u>Comentario</u>: No se puede extender a una isometría en todo el cilindro.

<u>Prop</u> Supongamos que existen parametriza $\varphi : U \to S$ y $\tilde{\varphi} : U \to \tilde{S}$ tales que

$$E = \tilde{E} \qquad F = \tilde{F} \qquad G = \tilde{G}$$

Entonces el mapa $F = \tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \tilde{S}$ es una isometría local en p $\forall p \in \varphi(U)$

demo $p \in \varphi(U)$. $w \in T_pS$

$w = \alpha'(0) \qquad \alpha(t) = \varphi(u(t), v(t))$

$\varphi(\overset{q}{u_0, v_0}) = p$

$w = u'(0)\, \varphi_u(q) + v'(0)\, \varphi_v(q)$

$\Rightarrow \; dF_p(w) = \dfrac{d}{dt}\Big|_0 F(\alpha(t))$

$= \dfrac{d}{dt}\Big|_0 \tilde{\varphi}(u(t), v(t))$

$= u'(0)\, \tilde{\varphi}_u(q) + v'(0)\, \tilde{\varphi}_v(q)$

$\quad \overset{\shortparallel}{(u(0), v(0))}$

Sea S sup regular con orientación N

$\varphi: U \to S$ una param compatible con N $\left(\frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|} \right)$

$\rightsquigarrow \{\varphi_u, \varphi_v, N\}$ Base de $\mathbb{R}^3$

estudiamos sus derivadas

$$\varphi_{uu} = \Gamma_{11}^1 \varphi_u + \Gamma_{11}^2 \varphi_v + L_1 N$$

$$\varphi_{uv} = \Gamma_{12}^1 \varphi_u + \Gamma_{12}^2 \varphi_v + L_2 N$$

$$\varphi_{vv} = \Gamma_{22}^1 \varphi_u + \Gamma_{22}^2 \varphi_v + L_3 N$$

$e = \langle \varphi_{uu}, N \rangle = L_1$

$f = \langle \varphi_{uv}, N \rangle = L_2$

$g = \langle \varphi_{vv}, N \rangle = L_3$

Γ_{ij}^k son funciones diferenciables y se las llama símbolos de Christoffel

-) $\langle \varphi_{uu}, \varphi_u \rangle = \Gamma_{11}^1 E + \Gamma_{11}^2 F$

-) $\langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle = \Gamma_{11}^1 F + \Gamma_{11}^2 G$ $\Rightarrow \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 \\ \Gamma_{11}^2 \end{pmatrix}$

Por otro lado

$$\langle \varphi_{uu}, \varphi_u \rangle = \frac{1}{2} \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle_u = \frac{1}{2} E_u$$

$$\langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle = \langle \varphi_{uu}, \varphi_v \rangle + \langle \varphi_u, \varphi_{vu} \rangle - \langle \varphi_u, \varphi_{uv} \rangle$$

$$= \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle_u - \frac{1}{2} \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle_v$$

$$= F_u - \frac{1}{2} E_v$$

Luego tenemos

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^1 \\ \Gamma_{11}^2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} E_u \\ F_u - \frac{1}{2} E_v \end{bmatrix}$$

De manera análoga

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_{12}^1 \\ \Gamma_{12}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} E_v \\ \frac{1}{2} G_u \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{22}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_v - \frac{1}{2} G_u \\ \frac{1}{2} G_v \end{bmatrix}$$

luego como $EG - F^2 > 0$
$\left(\det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \right)$

$\Rightarrow \Gamma_{ij}^k$ puede expresarse en términos de E, F, G y sus derivadas parciales