# Densidad de suma de v.a. abs continuas

def Sean $X$ e $Y$ v.a. abs cont con densidad conjunta $f_{XY}$

$$Z = X+Y = g(X,Y)$$

$$(Z \leq z) = (g(X,Y) \leq z) = ((X,Y) \in A_z)$$

$$A_z = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \leq z\}$$

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z-x} f_{X,Y}(x,y)\,dy\,dx$$

$v = x+y$

$y = v-x$

$dv = dy$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{z} f_{X,Y}(x, v-x)\,dv\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{z} \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, v-x)\,dx\right]}_{= f_V} dv$$

Notar que $\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, v-x)\,dx\right) dv = 1$

$$\Rightarrow f_V(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, v-x)\, dx$$

$\Rightarrow f_V$ es función densidad

$\Rightarrow$ es función densidad de $Z$

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, z-x)\, dx$$

Si además $X$ e $Y$ son indeptes entonces

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot f_Y(z-x)\, dx$$

---

**Prop** Sean $X$ e $Y$ v.a continuas indeptes continuas tal que

$$X \sim \Gamma(\alpha_1, \lambda) \quad e \quad Y \sim \Gamma(\alpha_2, \lambda)$$

$$\Rightarrow X+Y \sim \Gamma(\alpha_1+\alpha_2, \lambda)$$

dem $f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\, dx$

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\lambda^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)} x^{\alpha_1 - 1} e^{-\lambda x} \cdot \dfrac{\lambda^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2)} y^{\alpha_2 - 1} e^{-\lambda y} & x > 0 \\ & y > 0 \\ 0 & cc \end{cases}$$

$$= \frac{\lambda^{\alpha_1 + \alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} x^{\alpha_1 - 1} y^{\alpha_2 - 1} e^{-\lambda(x+y)} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x) \, \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y)$$

$$f_{XY}(x, z-x) = \frac{\lambda^{\alpha_1 + \alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} x^{\alpha_1 - 1} (z-x)^{\alpha_2 - 1} e^{-\lambda z} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x) \, \mathbb{1}_{(0,\infty)}(z-x)$$

$\Rightarrow$

$$f_{X+Y}(z) = \frac{\lambda^{\alpha_1 + \alpha_2} e^{-\lambda z}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_{-\infty}^{\infty} x^{\alpha_1 - 1} (z-x)^{\alpha_2 - 1} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x) \, \mathbb{1}_{(0,\infty)}(z-x) \, dx$$

$z > x > 0$

$y > 0$

$$= \frac{\lambda^{\alpha_1 + \alpha_2} e^{-\lambda z} z^{\alpha_2 - 1}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_0^z x^{\alpha_1 - 1} \left(1 - \frac{x}{z}\right)^{\alpha_2 - 1} dx$$

$u = \frac{x}{z} \Rightarrow x = zu$

$du = \frac{dx}{z}$

$$z^{\alpha_2 - 1} \frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2} e^{-\lambda z}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \int_0^1 (zu)^{\alpha_1 - 1}(1-u)^{\alpha_2 - 1} z\, du$$

$$u^{\alpha_1 - 1} \cdot z^{\alpha_1} (1-u)^{\alpha_2 - 1}$$

$$z^{\alpha_1+\alpha_2-1} \cdot \frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2} e^{-\lambda z}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} = \int_0^1 u^{\alpha_1 - 1}(1-u)^{\alpha_2 - 1}\, du \quad := c$$

Se puede ver que $c = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}$

pues $f_{X+Y}$ es función densidad

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f_{x+y}(z) = 1$$

$$1 = \int_0^{\infty} \lambda^{\alpha_1+\alpha_2} e^{-\lambda z} z^{\alpha_1+\alpha_2-1} \cdot c\, dz$$

$$= \lambda^{\alpha_1+\alpha_2} c \int_0^{\infty} e^{-\lambda z} z^{\alpha_1+\alpha_2-1}\, dz$$

$u = \lambda z$

$du = \lambda dz$

$$= \cancel{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}} c \int_0^{\infty} e^{-u} \left(\frac{u}{\cancel{\lambda}}\right)^{\alpha_1+\alpha_2-1} \frac{du}{\cancel{\lambda}}$$

$$= c \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-u} u^{\alpha_1+\alpha_2-1}\, du}_{= \Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}$$

siguiendo la demo de antes

$$f_{X+Y}(z) = \frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2} e^{-\lambda z} z^{\alpha_1+\alpha_2-1}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}$$

$\Rightarrow X+Y \sim \Gamma(\alpha_1+\alpha_2, \lambda)$

---

Prop Si X e Y son v.a continuas indeptes tal que $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$

$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

$\Rightarrow X+Y \sim N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$

dem Supongamos $\mu_1 = 0 = \mu_2$ i.e

$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ $\quad Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{y^2}{2\sigma_2^2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\left(\frac{x^2}{2\sigma_1^2}+\frac{y^2}{2\sigma_2^2}\right)}$$

$$\Rightarrow f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi \sigma_1 \sigma_2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2} + \frac{(z-x)^2}{2\sigma_2^2}} dx$$

$$= \frac{e^{-\frac{z^2}{2\sigma_2^2}}}{2\pi \sigma_1 \sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}\right) + \frac{zx}{\sigma_2^2}} dx$$

$$= \frac{e^{-\frac{z^2}{2\sigma_2^2}}}{2\pi \sigma_1 \sigma_2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}\left(\frac{\sigma_2^2 + \sigma_1^2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2}\right) + \frac{zx}{\sigma_2^2}} dx$$

$$= \frac{e^{-\frac{z^2}{2\sigma_2^2}}}{2\pi \cancel{\sigma_1 \sigma_2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left(-\frac{u^2}{2} + \frac{z}{\sigma_2^2} u \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}\right)} \frac{\cancel{\sigma_1 \sigma_2}}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} du$$

$$u = x\sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2}} \qquad dx = \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} du$$

$$= \frac{e^{-\frac{z^2}{2\sigma_2^2}}}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \cdot 2\pi} \int e^{-\frac{1}{2}\left(u^2 - 2u\, \overset{K}{z \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sigma_2^2 \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}}\right)} du$$

$$\frac{e^{-\frac{z^2}{2\sigma_2^2}}}{2\pi \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(u-K)^2 + \frac{K^2}{2}} du$$

$$\frac{e^{-\frac{z^2}{2\sigma_2^2} + \frac{K^2}{2}}}{2\pi \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(u-K)^2} du$$

$$\sqrt{2\pi}\,\frac{e^{-\frac{z^2}{2\sigma_2^2}+\frac{K^2}{2}}}{2\pi\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\frac{1}{2}(u-K)^2}}{\sqrt{2\pi}}\,du$$

$= 1$ por ser función densidad de $N(K,1)$

$$= \frac{e^{-\frac{z^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}$$

$\Delta$) $X+Y \sim N(0, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$

Ejercicio resta var $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$

$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \tilde{X} &= X-\mu_1 \sim N(0,\sigma_1^2) \\ \tilde{Y} &= Y-\mu_2 \sim N(0,\sigma_2^2) \end{aligned}$$

ayuda $F_{\tilde{X}}(x) = P(\tilde{X} \leq x)$

$= P(X-\mu_1 \leq x)$

$= P(X \leq x+\mu_1)$

$= F_X(x+\mu_1)$

$$\Rightarrow f_{\tilde{X}}(x) = f_X(x+\mu_1) = \dots$$

Finalmente usando todo lo que tenemos hasta ahora

$$\underbrace{(X-\mu_1)}_{\sim N(0,\sigma_1^2)} + \underbrace{(Y-\mu_2)}_{\sim N(0,\sigma_2^2)} \sim N(0,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$$

$$\| $$

$$(X+Y)-(\mu_1+\mu_2) \sim N(0,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$$

$$\Rightarrow X+Y \sim N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$$

$\downarrow$

ejercicio

$$P(X+Y-(\mu_1+\mu_2) \leq x)$$

$$= P(X+Y \leq x+\mu_1+\mu_2)$$

$$= F_X(x+\mu_1+\mu_2)$$

# Densidad condicional

Sean $X$ e $Y$ v.a discretas con funciones de densidad discreta $f_X$ y $f_Y$ respectivamente y $f_{X,Y}$ función densidad conjunta. Si $x \in \mathbb{R}$ tal que $P(X=x) > 0$

$$\Rightarrow P(Y=y \mid X=x) = \frac{P(X=x, Y=y)}{P(X=x)} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

$$\therefore \quad P(Y=y \mid X=x) = \frac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)}$$

Definimos una función $f_{Y|X} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \dfrac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} & \text{si } f_X(x) > 0 \\ 0 & \text{c c} \end{cases}$$

·) Dicha función se llama función de densidad condicional de X dado Y

Si ahora fijo $x \in \mathbb{R}$ / $P(X=x) > 0$

se define la función $f_{Y|X=x} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

como $f_{Y|X=x}(y) = f_{Y|X}(y|x) \quad \forall y \in \mathbb{R}$

y la llamamos función densidad condicional de $Y$ dado $X=x$

Notar: $f_{Y|X=x}$ es función densidad discreta

•) $f_{Y|X=x}(y) \geq 0$

•) $\displaystyle\sum_{y \in \mathbb{R}} f_{Y|X=x}(y) = \sum_{y \in \mathbb{R}} \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$

$$= \frac{1}{f_X(x)} \sum_{y \in \mathbb{R}} \underbrace{f_{XY}(x,y)}_{\text{densidad marginal sumo columna } X=x}$$

$$= \frac{f_X(x)}{f_X(x)} = 1$$

Sean $X$ e $Y$ v.a <u>continua</u> con funciones de densidad discreta $f_X$ y $f_Y$ respectivamente y $f_{X,Y}$ función densidad conjunta.

Definimos una función $f_{Y|X}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} \dfrac{f_{XY}(x,y)}{f_X(x)} & \text{si } f_X(x) > 0 \\ 0 & \text{c.c} \end{cases}$$

y si fijamos un $x \in \mathbb{R}$ se define la densidad condicional de $Y$ dado $X = x$ $f_{Y|X=x}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

como $f_{Y|X=x}(y) = f_{Y|X}(y|x)$

<u>obs 1</u> $f_{Y|X=x}$ es función densidad

·) $f_{Y|X=x}(y) \geq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$

·) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_{Y|X=x}(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_{XY}(x,y)\,dy}{f_X(x)}$

$$= \frac{f_X(x)}{f_X(x)} = 1$$

<u>obs 2</u>: Si $X, Y$ v.a continuas independientes con densidad conjunta $f_{XY}$ entonces

$\forall x \in \mathbb{R}$ tq $f_X(x) \neq 0$

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} \underset{\substack{\downarrow \\ X,Y \text{ indeptes}}}{=} \frac{f_X(x)\, f_Y(y)}{f_X(x)} = f_Y(y)$$