Práctico 8

1. Sea $\phi : S_1 \to S_2$ una isometría local entre dos superficies y sea $\gamma : (a, b) \to S_1$ una geodésica en S_1. Entonces $\phi \circ \gamma$ es una geodésica de S_2.

2. Considerar una geodésica en el hiperboloide de revolución $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ que empieza en un punto p con $z > 0$ y forma un ángulo θ con el paralelo que pasa por p, con $\cos\theta = 1/r$ donde r es la distancia de p al eje z. Probar que esta geodésica se aproxima asintóticamente al paralelo $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$. Comparar con la situación análoga en el paraboloide elíptico.

3. Sea S una superficie regular orientada, y $\alpha : I \to S$ una curva parametrizada por longitud de arco. En el punto $p = \alpha(s)$ se consideran tres vectores unitarios (el *triedro de Darboux*) $T(s) = \alpha'(s)$, $N(s)$ el vector normal a S en p, y $V(s) = N(s) \times T(s)$. Probar que

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} = 0 + aV + bN,$$
$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}s} = -aT + 0 + cN,$$
$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}s} = -bT - cV + 0,$$

   donde $a = a(s)$, $b = b(s)$, $c = c(s)$, $s \in I$. Probar además que:

   (a) $c = -\langle \mathrm{d}N/\mathrm{d}s, V\rangle$; concluir que $\alpha(I) \subseteq S$ es una línea de curvatura si y sólo si $c \equiv 0$ (c es llamada la *torsión geodésica* de α).

   (b) b es la curvatura normal de la curva en p.

   (c) a es la curvatura geodésica de la curva en p.

4. Probar que las ecuaciones de las geodésicas en coordenadas polares geodésicas ($E = 1, F = 0$) están dadas por:

$$\rho'' - \frac{1}{2}G_\rho(\theta')^2 = 0,$$
$$\theta'' + \frac{G_\rho}{G}\rho'\theta' + \frac{1}{2}\frac{G_\theta}{G}(\theta')^2 = 0.$$

5. Sea C el cono $x^2 + y^2 = z^2, z > 0$. Usando que existe una isometría de dicho cono menos un meridiano con una porción de círculo contenida en un plano, probar que todo par de puntos $p, q \in C$ pueden ser unidos por una geodésica minimal en C. Probar que, sin embargo, C no es completa.

6. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular. Una sucesión $\{p_n\}$ de puntos en S es una sucesión de Cauchy con la distancia (intrínseca) d si dado $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que si $n, m \geq n_0$ entonces $d(p_n, p_m) < \varepsilon$. Probar que S es completa si y sólo si toda sucesión de Cauchy en S converge a un punto de S.

7. Sean S y $\bar{S}$ superficies regulares, y $\phi : S \to \bar{S}$ un difeomorfismo. Supongamos que $\bar{S}$ es completa y que existe una constante $c > 0$ tal que

$$I_p(v) \geq c\, \bar{I}_{\phi(p)}(d\phi_p(v)),$$

para todo $p \in S$ y para todo $v \in T_p(S)$, donde I e $\bar{I}$ denotan las primeras formas fundamentales de S y $\bar{S}$, respectivamente. Probar que S es completa.

8. Sean $S_1 \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regular completa y conexa, y S_2 una superficie regular conexa tal que cualesquiera dos puntos de S_2 pueden ser unidos por una *única* geodésica. Sea $\phi : S_1 \to S_2$ una isometría local. Probar que ϕ es una isometría global.

Ejercicios extras

9. Probar que en una superficie de curvatura constante, los círculos geodésicos tienen curvatura geodésica constante.

10. Sea (ρ, θ) un sistema de coordenadas polares geodésicas ($E = 1, F = 0$) en una superficie S, y sea $\gamma(\rho(s), \theta(s))$ una geodésica que forma un ángulo $\varphi(s)$ con las curvas $\theta = cte$. Probar que

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s} + \left(\sqrt{G}\right)_\rho \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} = 0.$$

11. Si p es un punto de una superficie regular S, probar que

$$K(p) = \lim_{r \to 0} \frac{12}{\pi} \frac{\pi r^2 - A}{r^4},$$

donde $K(p)$ es la curvatura Gaussiana de S en p, r es el radio de un círculo geodésico $S_r(p)$ centrado en p, y A es el área de la región acotada por $S_r(p)$.