Análisis Funcional - Teóricos 1 y 2

1. Teórico 1: Espacios Normados y Espacios de Banach

Lema 1.1 (Todo normado es métrico)**.** *Sea X espacio vectorial con norma $\|\cdot\|$. Sea $d : X \times X \to \mathbb{R}$ por $d(x,y) = \|x-y\|$ entonces*

$$(X,d) \text{ es métrico}$$

Equivalentemente todo X espacio vectorial normado es métrico con la métrica estándar.

Teorema 1.2. *Sea X espacio vectorial con norma $\|\cdot\|$. Sea $x_n \to x$, $y_n \to y$ con $\{\alpha_n\} \subseteq \mathbb{F}$ y $\alpha_n \to \alpha$ entonces:*

1. $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x-y\|$
2. $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$
3. $\lim_{n\to\infty} x_n + y_n = x + y$
4. $\lim_{n\to\infty} \alpha_n x_n = \alpha x$

Demostración. Sale todo usando 1. y 1. sale usando $\|x\| \leq \|x-y\| + \|y\|$. □

Observación 1.3. Esto nos dice que en un espacio vectorial normado, la norma, la suma y producto por escalar son continuas.

Definición 1.4 (Equivalencia de normas)**.** Sea X espacio vectorial y $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ normas en X decimos que son equivalentes si

$$\exists\, m, M > 0 \quad / \quad m\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M\|x\|_1$$

Observación 1.5. La equivalencia de normas es una relación de equivalencia.

Lema 1.6. *Let X be a vector space with $\|\cdot\|, \|\cdot\|_1$ and d, d_1 associated metrics. Suppose $\exists k > 0$ such that $\|x\| \leq k\|x\|_1 \quad \forall x \in X$. Let $\{x_n\} \subseteq X$, then:*

1. $x_n \to x$ *in* $(X, d_1) \Longrightarrow x_n \to x$ *in* (X, d)
2. $\{x_n\}$ *is Cauchy in* $(X, d_1) \Longrightarrow \{x_n\}$ *is Cauchy in* (X, d)

Demostración. Trivial using the inequality. □

Corolario 1.7. *Sea X espacio vectorial $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_1$ normas equivalentes en X con d, d_1 métricas asociadas. Sea $\{x_n\} \subseteq X$ entonces:*

1. $x_n \to x$ *en* $(X, d) \iff x_n \to x$ *en* (X, d_1)
2. $\{x_n\}$ *es de Cauchy en* $(X, d) \iff \{x_n\}$ *es de Cauchy en* (X, d_1)
3. (X, d) *es completo* $\iff (X, d_1)$ *es completo*

Demostración. Usando el lema anterior y que equivalencia de normas. □

Teorema 1.8 (Continua en compacto tiene máximo y mínimo)**.** *Sea* (X, d) *métrico compacto y* $f : M \to \mathbb{F}$ *continua entonces* $\exists c > 0 \,/\, |f(x)| \quad \forall x \in M$ *(*f *acotada). En particular si* $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ *los números*

$$a = \sup\{|f(x)| : x \in M\}$$
$$b = \text{ínf}\{|f(x)| : x \in M\}$$

Existen y son finitos. Más aun

$$\exists\, x, y \in M \quad f(x) = a \quad \wedge \quad f(y) = b$$

Teorema 1.9. *Sea* X *espacio vectorial normado de dim finita con norma* $\|\cdot\|$*. Sea* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *base para* $x = \sum \alpha_j e_j$ *y sea* $\|x\|_1 = (\sum |\alpha_j|^2)^{\frac{1}{2}}$ *entonces* $\|\cdot\|_1$ *y* $\|\cdot\|$ *son equivalentes.*

Demostración.
1. $M = (\sum \|e_j\|^2)^{\frac{1}{2}} > 0$
2. $\|x\| = \|\sum \alpha_j e_j\| \le \sum \|\alpha_j e_j\| = \sum |\alpha_j| \|e_j\| \le (\sum |\alpha_j|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum \|e_j\|^2)^{\frac{1}{2}} = \|x\|_1 M$
3. $f : \mathbb{F}^n \to \mathbb{R} \quad f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \|\sum \alpha_j e_j\| = \|x\|$
4. Ver que es continua
5. $S = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) : \sum |\alpha_j|^2 = 1\}$ es compacto
6. Existe $m = f(u_1, \ldots, u_n)$ mínimo
7. $m > 0$ porque $\{e_j\}$ es base
8. Si $\|x\|_1 = 1 \iff \sum |\alpha_j|^2 = 1 \Rightarrow (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in S$
9. $m\|x\|_1 = m \le f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \|x\|$ por ser m mínimo
10. Si no $\left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\| = 1$ luego $m \le \left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\|$ por el caso de arriba

□

Corolario 1.10. *En dimensión finita todas las normas son equivalentes.*

Demostración. Equivalencia de normas es relación de equivalencia entonces es transitiva. □

Observación 1.11 (Contraejemplo II). Esto no vale en dimensión infinita $X = C^1[0, \pi]$ tenemos dos normas no equivalentes

$$\|\cdot\|_\infty \quad \text{y} \quad \|u\| = \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty$$

Considerando la función $u_n(x) = \sin(nx)$ se puede ver fácilmente.

Lema 1.12. *X espacio vectorial de dim finita y $\|\cdot\|_1 = (\sum |\alpha_j|^2)^{\frac{1}{2}}$ y d_1 la métrica asociada, entonces (X, d_1) es completo (Banach).*

Demostración.

1. Ya sabemos que es métrico (dim finita N)
2. $\{x^n\} \subseteq X$ suc de Cauchy
3. $x^n \in X, \quad x^n = \sum_j^N \alpha_j^n e_j \quad \alpha_j^n \in \mathbb{F}$
4. $\exists m_0 \in \mathbb{N}$ tq $\sum |\alpha_j^k - \alpha_j^m|^2 = \|x^k - x^m\|_1^2 \leq \epsilon^2$
5. Fijando $j \in \mathbb{N}$ tenemos $|\alpha_j^k - \alpha_j^m| \leq \epsilon^2 \quad \forall k, m \geq m_0$
6. $\{\alpha_j^n\}$ es de Cauchy en un completo tiene límite α_j (vale para cada j)
7. $\exists n_j \in \mathbb{N}$ tq $|\alpha_j^n - \alpha_j| < \frac{\epsilon^2}{N} \quad \forall n \geq n_j$
8. $\tilde{n} = \text{máx}\{n_0, \ldots, n_N\}$ y $x = \sum_{j=1}^N \alpha_j e_j$ ($x \in X$ por ser combinación lineal de elementos de la base)
9. para $m \geq \tilde{n}$ sucede $\|x^n - x\|_1^2 = \sum_j^N |\alpha_j^n - \alpha_j|^2 \leq \epsilon^2$
10. $\{x^n\}$ converge por lo tanto X es de completo

□

Corolario 1.13. *Todo espacio vectorial de dim finita es completo con la métrica asociada a cualquier norma.*

Demostración. (X, d) completa $\iff$ (X, d_1) completa por equivalencia de normas y d_1 completa. □

Teorema 1.14. *Sea (M, d) métrico y $A \subseteq M$ entonces:*

1. *A completo $\Rightarrow$ A cerrado*
2. *M completo $\Rightarrow$ (A completo $\iff$ A cerrado)*
3. *Si A es compacto $\Rightarrow$ A es cerrado y acotado*
4. *Cerrado y acotado en $\mathbb{F}^n$ $\Rightarrow$ compacto*

Corolario 1.15. *Si Y subespacio vectorial de dim finita $\Rightarrow$ Y es cerrado.*

Demostración.

1. Por ser Y espacio vectorial es normado (norma estándar) por ser espacio vectorial normado es métrico
2. Por dim finita es completo
3. Cerrado por el teorema anterior

□

Observación 1.16 (Contraejemplo I). El corolario anterior no es cierto si la dimensión es infinita.

Demostración.

1. $S = \left\{ \{x_n\} \subseteq \ell^\infty : \exists n_0 \in \mathbb{N} \,/\, x_n = 0 \, \forall n \leq n_0 \right\}$

2. S subespacio de dim infinita de ℓ^∞

3. $x_n = (1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, 0, \dots, 0, \dots) \in S$

4. Sea $x = \left(1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots\right) \in (\ell^\infty \setminus S)$

5. $\|x - x_n\|_\infty = \frac{1}{n+1} \to 0$ o lo mismo $\lim_{n\to\infty} x_n = x$

6. S no es cerrado

$\square$

Lema 1.17. *X espacio vectorial normado, S subespacio de X entonces $\overline{S}$ es subespacio vectorial de X.*

Demostración.

1. $x, y \in \overline{S}$, $\alpha \in \mathbb{F}$

2. Por ser clausura existen $x_n \to x$, $y_n \to y$ en S

3. S subesp $x_n + y_n \in S$

4. $x_n + y_n \to x + y$ entonces $x + y \in \overline{S}$

5. Análogo αx_n

$\square$

Definición 1.18 (Span). $E \subseteq X$ normado:

$$\mathrm{Sp}(E) = \{\text{Todas las combinaciones lineales finitas de elementos de } E\}$$

$$\overline{\mathrm{Sp}}(E) = \{\text{Todas las intersecciones de subespacios cerrados que contienen a } E\}$$

Lema 1.19. *X espacio vectorial normado $\emptyset \neq E \subseteq X$ entonces:*

1. *$\overline{Sp}(E)$ es un cerrado de X que contiene a E*

2. *$\overline{Sp}(E) = \overline{Sp(E)}$*

Demostración.

1. Intersección de cerrados es cerrados y intersección de subespacios es subespacio

2. $\overline{\mathrm{Sp}(E)}$ es subespacio cerrado y contiene a E por definición

   - ($\subseteq$) $\overline{\mathrm{Sp}}(E)$ es subespacio que contiene a E entonces está en la intersección $\mathrm{Sp}(E) \subseteq \overline{\mathrm{Sp}}(E)$
   - ($\supseteq$) Como $\overline{\mathrm{Sp}}(E)$ es cerrado y contiene a $\mathrm{Sp}(E)$ luego $\overline{\mathrm{Sp}}(E) \supseteq \overline{\mathrm{Sp}(E)}$

$\square$

Lema 1.20 (Riesz). *Sea X normado, Y subespacio cerrado con $Y \neq X$. Sea $\alpha \in (0,1)$. Entonces $\exists x_\alpha \in X$ con $\|x_\alpha\| = 1$ tal que $\|x_\alpha - y\| > \alpha \quad \forall y \in Y$.*

Demostración.

1. $d = \inf\{\|x - z\| : z \in Y\} > 0$

2. $0 < \alpha < 1 \Rightarrow d < d\alpha^{-1}$

3. (Def ínfimo) $\|x - z\| < d\alpha^{-1}$

4. $x_\alpha = \frac{x-z}{\|x-z\|} \quad \|x_\alpha\| = 1$

5. $\|x_\alpha - y\| = \left\| \frac{x-z}{\|x-z\|} - y \right\| = \frac{1}{\|x-z\|} \|x - (z + \|x-z\| y)\| > \frac{d}{d\alpha^{-1}}$

$\square$

Teorema 1.21. *Sea X espacio vectorial dimensión infinita*

$$D = \{x \in X : \|x\| \leq 1\} \quad K = \{x \in X : \|x\| = 1\}$$

no son compactos.

Demostración.

1. $x_1 \in K$ como dim infinita $\mathrm{Sp}(\{x_1\}) \neq X$ (Sp cerrado por ser de dim finita)

2. Por lema de Riesz $\exists x_2 \in K$ tal que $\|x_1 - x_2\| \geq \frac{1}{2}$

3. Generalizando $\exists x_n \in K$ tal que $\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2} \quad \forall n \neq m$

4. Así armamos una sucesión que no puede tener sub convergente porque si fuese convergente sería de Cauchy

$\square$

Observación 1.22. D y K son compactos $\Rightarrow X$ dim finita.

Definición 1.23 (Espacio de Banach)**.** Un espacio de Banach es un espacio normado que es completo con la métrica asociada a la norma.

Teorema 1.24.

1. *Todo normado de dim finita es Banach*

2. *Si X es métrico completo $C_{\mathbb{F}}$ es Banach*

3. *Si (X, Σ, μ) subespacio medible $\Rightarrow L^p\,(1 \leq p \leq \infty)$ son Banach. (En particular $\ell^p\,(1 \leq p \leq \infty)$ son Banach)*

4. *X Banach, Y subespacio entonces Y Banach $\iff$ Y cerrado*

Demostración.

1. Visto arriba

2. Se asume visto en Reales

3. Se asumen visto en Reales

4. Por teorema anterior

$\square$

Teorema 1.25. *Sea X de Banach $\{x_n\} \subseteq X$ si la serie $\sum \|x_n\|$ converge entonces $\sum x_k$ converge.*

Demostración.

1. $|\sum^m \|x_k\| - \sum^n \|x_k\|| = \sum_{k=n+1}^m \|x_k\| \leq \epsilon \quad \forall m \geq n \geq n_0$ (por ser convergente la serie las sumas parciales son de Cauchy)

2. Sea $S_n = \sum^n x_k$ entonces $\|S_m - S_n\| \leq \left\|\sum_{k=n+1}^m x_k\right\| \leq \sum_{k=n+1}^m \|x_k\| \leq \epsilon$

3. Como X completo S_n converge

$\square$

2. Teórico 2: Espacios con Producto Interno y Espacios de Hilbert

Proposición 2.1. *X e.v.pi $x, y \in X$ entonces:*

1. $|(x,y)| \leq (x,x)(y,y)$
2. *La función* $\|\cdot\| X \to \mathbb{R}$ *dada por* $\|x\| = (x,x)^{\frac{1}{2}}$ *es norma en* X

Teorema 2.2 (Regla Paralelogramo e identidades de polarización)**.** *Sea X e.v.pi con norma inducida $\|\cdot\|$ entonces $\forall x, y \in X$ vale:*

1. $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ *(Regla Paralelogramo)*
2. *Si* $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ $\qquad 4(x,y) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2$
3. *Si* $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ $\qquad 4(x,y) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2$

Proposición 2.3 (Continuidad del producto interno)**.** *Sea X e.v.pi. $\{x_n\}, \{y_n\} \subseteq X$ con $x_n \to x, \quad y_n \to y$ en X entonces*

$$(x_n, y_n) \to (x, y)$$

2.1. Ortogonalidad

Definición 2.4 (Espacio de Hilbert)**.** Un espacio con producto interno completo con respecto a la métrica asociada a la norma inducida por el producto interno se dice espacio de Hilbert.

Ejemplo 2.5 (Contraejemplo I)**.** $A = \{\{x_n\} \,/\, x_n \neq 0$ solo en finitos n$\}$ es fácil ver que $(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$ es producto interno con norma inducida $\|\{x_n\}\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Restaría ver que no es completo.

Proposición 2.6 (Subespacio cerrado es Hilbert)**.** *Sea $\mathcal{H}$ Hilbert, $Y \subset H$ sub espacio entonces*

$$Y \textit{ Hilbert} \iff Y \textit{ es cerrado en } \mathcal{H}$$

Lema 2.7. *X e.v.pi $A \subseteq X$ subconjunto entonces:*

1. $0 \in A^{\perp}$
2. *Si* $0 \in A \in A \Rightarrow A \cap A^{\perp} = \{0\}$ *si no* $A \cap A^{\perp} = \emptyset$
3. $\{0\}^{\perp} = X \quad \wedge \quad X^{\perp} = \{0\}$
4. *Si A contiene una bola $B_a(r)$ para algún $r > 0$ y $a \in A \Rightarrow A^{\perp} = \{0\}$. (Si A abierto no vacío $\Rightarrow A^{\perp} = \{0\}$)*
5. $B \subseteq A \Rightarrow A^{\perp} \subseteq B^{\perp}$
6. $A^{\perp}$ *es una sub cerrado de* X
7. $A \subseteq (A^{\perp})^{\perp} = A^{\perp\perp}$

Proposición 2.8 ($x \in Y^{\perp} \iff \|x-y\| \geq \|x\|$)**.** *Sea Y subespacio de X e.v.pi entonces $x \in Y^{\perp} \iff \|x-y\| \geq \|x\|$.*