

Ejercicio 1: Test de Hipótesis para el Tiempo de Recorrido

Parte a) Plantear un test de hipótesis

1. Definición de Variables Involucradas

Sea X la variable aleatoria que representa el tiempo en recorrer un trayecto. Se asume que X sigue una distribución normal con media μ y desviación estándar $\sigma = 2$ horas. Consideremos una muestra aleatoria de n observaciones independientes X_1, X_2, \dots, X_n del tiempo de recorrido.

- μ : Media poblacional del tiempo de recorrido (parámetro desconocido).
- σ : Desviación estándar poblacional del tiempo de recorrido, conocida y $\sigma = 2$ horas.
- n : Tamaño de la muestra.
- α : Nivel de significación del test, $\alpha = 0,05$.

2. Hipótesis a Testear

Se desea verificar si hay evidencia de que el tiempo de recorrido es en realidad menor a 15 horas. Por lo tanto, las hipótesis nula (H_0) y alternativa (H_1) se plantean de la siguiente manera:

$$H_0 : \mu = 15 \text{ horas}$$

$$H_1 : \mu < 15 \text{ horas}$$

Este es un test de hipótesis unilateral (cola izquierda).

3. Estadístico del Test

Dado que la población sigue una distribución normal y la desviación estándar poblacional σ es conocida, el estadístico del test apropiado es el estadístico Z . Sea $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ la media muestral. El estadístico del test se define como:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$$

donde $\mu_0 = 15$ es el valor de la media bajo la hipótesis nula.

4. Distribución del Estadístico bajo la Hipótesis Nula

Bajo la hipótesis nula $H_0 : \mu = 15$, el estadístico Z sigue una distribución normal estándar:

$$Z \sim N(0, 1)$$

5. Región de Rechazo

Para un nivel de significación $\alpha = 0,05$ y dado que la hipótesis alternativa es $H_1 : \mu < 15$ (test de cola izquierda), la región de rechazo (RR) se define como:

$$RR = \{z \in \mathbb{R} : z < z_\alpha\}$$

donde z_α es el cuantil de orden α de la distribución normal estándar, es decir, $P(Z \leq z_\alpha) = \alpha$. Para $\alpha = 0,05$, el valor crítico $z_{0,05}$ se busca en las tablas de la distribución normal estándar o se calcula, resultando aproximadamente:

$$z_{0,05} \approx -1,645$$

Por lo tanto, la región de rechazo es:

$$RR = \{z \in \mathbb{R} : z < -1,645\}$$

Esto significa que se rechazará la hipótesis nula H_0 si el valor observado del estadístico Z es menor que $-1,645$.