Derivación del Test Z a partir del Cociente de Verosimilitud

Problema

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria i.i.d. tal que $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, con σ^2 conocido. Se desea testear el problema de hipótesis:

$$H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$$

1. Definición de Espacios de Parámetros

- El espacio de parámetros completo es $\Theta = \{(\mu, \sigma^2) : \mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 \text{ conocida}\}$.
- El espacio de parámetros bajo la hipótesis nula es $\Theta_0 = \{(\mu, \sigma^2) : \mu = \mu_0, \sigma^2 \text{ conocida}\}$.

La función de densidad conjunta (o función de verosimilitud) para la muestra $x = (x_1, \ldots, x_n)$ es:

$$p(x, \mu) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2\right)$$

Nótese que σ^2 es un valor fijo y conocido, no un parámetro a estimar.

2. Construcción de los Estimadores de Máxima Verosimilitud (EMV)

a) EMV de μ en Θ ($\hat{\mu}$)

Para encontrar el EMV de μ en el espacio completo Θ, maximizamos $p(x, \mu)$ con respecto a μ. Esto es equivalente a minimizar el exponente de la función de densidad, es decir, minimizar $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$. La solución a este problema de minimización es la media muestral:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}$$

b) EMV de μ en Θ_0 ($\hat{\mu}_0$)

Bajo la hipótesis nula $H_0 : \mu = \mu_0$, el parámetro μ está restringido a ser μ_0. Por lo tanto, el EMV de μ bajo H_0 es simplemente:

$$\hat{\mu}_0 = \mu_0$$

3. Cálculo del Cociente de Verosimilitud Generalizado ($\lambda(x)$)

El cociente de verosimilitud generalizado se define como $\lambda(x) = \frac{p(x,\hat{\mu})}{p(x,\hat{\mu}_0)}$. Sustituyendo los EMV obtenidos:

$$\lambda(x) = \frac{\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2\right)}{\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2\right)}$$

Los términos $(2\pi\sigma^2)^{n/2}$ se cancelan, resultando en:

$$\lambda(x) = \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2 - \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2\right]\right)$$

Utilizamos la identidad algebraica $\sum_{i=1}^n (x_i - c)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2 + n(\bar{X} - c)^2$. Aplicando esta identidad para $c = \mu_0$:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_0)^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2 + n(\bar{X} - \mu_0)^2$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación de $\lambda(x)$:

$$\lambda(x) = \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2 - \left(\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2 + n(\bar{X} - \mu_0)^2\right)\right]\right)$$

$$\lambda(x) = \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left[-n(\bar{X} - \mu_0)^2\right]\right)$$

$$\lambda(x) = \exp\left(\frac{n(\bar{X} - \mu_0)^2}{2\sigma^2}\right)$$

4. Derivación del Estadístico del Test y Región de Rechazo

El test de cociente de verosimilitud rechaza H_0 si $\lambda(x)$ es "grande", es decir, si $\lambda(x) > k$ para alguna constante k. Dado que la función exponencial es una función estrictamente creciente, la condición $\exp\left(\frac{n(\bar{X}-\mu_0)^2}{2\sigma^2}\right) > k$ es equivalente a:

$$\frac{n(\bar{X} - \mu_0)^2}{2\sigma^2} > \log(k)$$

Multiplicando por 2 y dividiendo por n:

$$\frac{(\bar{X}-\mu_0)^2}{\sigma^2/n} > \frac{2\log(k)}{n}$$

Tomando la raíz cuadrada de ambos lados (y considerando que es un test bilateral, por lo que nos interesan desviaciones en ambas direcciones):

$$\left|\frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right| > \sqrt{\frac{2\log(k)}{n}}$$

Definimos el estadístico $Z = \frac{\bar{X}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$. Bajo la hipótesis nula H_0, este estadístico sigue una distribución normal estándar: $Z \sim N(0,1)$. Por lo tanto, la regla de rechazo se convierte en:

$$\text{Rechazar } H_0 \text{ si } |Z| > c$$

donde $c = \sqrt{\frac{2\log(k)}{n}}$. Para un nivel de significación α, queremos que la probabilidad de rechazar H_0 cuando es verdadera sea α:

$$P(|Z| > c \mid H_0) = \alpha$$

Como $Z \sim N(0,1)$, esto implica que $P(Z < -c \text{ o } Z > c) = \alpha$. Debido a la simetría de la distribución normal estándar, $P(Z > c) = \alpha/2$. Por lo tanto, c es el cuantil $z_{1-\alpha/2}$ de la distribución normal estándar.

Así, el test de cociente de verosimilitud para el problema $H_0 : \mu = \mu_0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \mu \neq \mu_0$ con σ^2 conocido es equivalente al test Z bilateral:

$$\varphi(X_1, ..., X_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } \left|\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n-\mu_0)}{\sigma}\right| > z_{1-\alpha/2} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$