Espacio normado

Definición 0.1 (Espacio normado)**.** Sea X un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$). Una norma en X es una función $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ tal que para todo $x, y \in X$ y $\alpha \in \mathbb{F}$ se cumple:

(1) $\|x\| \geq 0$.

(2) $\|x\| = 0 \iff x = 0$.

(3) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$.

(4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (desigualdad triangular).

Ejemplos de normas

Ejemplo 0.2. Sea $\mathbb{F}^n$. La norma estándar es

$$\|x\|_2 = (\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2)^{1/2},$$

que es una norma en $\mathbb{F}^n$.

Ejemplo 0.3. Sea X un e.v. de dimensión finita con base $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Para $x = \sum \lambda_j e_j$ y $y = \sum \mu_j e_j$ definimos

$$\|x\| = \Big(\sum |\lambda_j|^2 \Big)^{1/2}.$$

Se verifica (1)–(3) fácilmente; para (4) se usa que

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 = \sum |\lambda_j + \mu_j|^2 &= \sum \big(|\lambda_j|^2 + 2\mathrm{Re}(\lambda_j \overline{\mu_j}) + |\mu_j|^2 \big) \\ &\leq \sum |\lambda_j|^2 + 2 \sum |\lambda_j||\mu_j| + \sum |\mu_j|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2, \end{aligned}$$

por Hölder (caso $p = q = 2$).

Ejemplo 0.4. Sea M un espacio métrico compacto y $C_{\mathbb{F}}(M)$ el espacio de funciones continuas (omito detalles).

Ejemplo 0.5. Sea (X, Σ, μ) un espacio medible y considere $L^p(X)$, $1 \leq p \leq \infty$:

(a) Si $1 \leq p < \infty$, $\|f\|_p = (\int |f|^p)^{1/p}$ es una norma.

(b) Si $p = \infty$, $\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} |f|$ es norma en $L^\infty(X)$.

Ejemplo 0.6. Caso particular: $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu_c)$ con la medida de contar. Toda función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{F}$ se identifica con la sucesión $\{a_n\}$, $a_n = f(n)$. Entonces f integrable respecto a μ_c es equivalente a $\sum_{n=1}^\infty |a_n| < \infty$ y

$$\int_{\mathbb{N}} f \, d\mu_c = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Definimos ℓ^p como el conjunto de sucesiones $x = (x_n)$ tales que $\sum |x_n|^p < \infty$ $(1 \leq p < \infty)$, y ℓ^∞ como el conjunto de sucesiones acotadas. Las normas son

$$\|x\|_p = (\sum |x_n|^p)^{1/p}, \qquad \|x\|_\infty = \sup_n |x_n|.$$

Por Hölder, para $1/p + 1/q = 1$ se tiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n y_n| \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

Ejemplo 0.7. Si X es un ev con norma $\| \cdot \|$ y $S \subset X$ subespacio, la restricción de la norma a S es una norma en S.

Ejemplo 0.8. Si X, Y son espacios normados con normas $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$, entonces $Z = X \times Y$ con

$$\|(x, y)\|_Z = \|x\|_1 + \|y\|_2$$

es un espacio normado.

Remark 0.9. Un espacio vectorial con una norma se llama espacio vectorial normado. Un vector x con $\|x\| = 1$ se dice unitario.

Lema 0.10. *Todo espacio normado es un espacio métrico: si definimos $d(x, y) = \|x - y\|$ entonces (X, d) es métrico.*

Proof. Verificación directa de axiomas de métrica usando propiedades de la norma. $\square$

Remark 0.11. No toda métrica proviene de una norma. Si la métrica es homogénea $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x, y)$ y es invariante por traslación $d(x, y) = d(x + z, y + z)$, entonces existe una norma con $d(x, y) = \|x - y\|$.

Teorema 0.12 (Continuidad de norma, suma y producto). *Sea X espacio vectorial normado. Si $x_n \to x$, $y_n \to y$ y $\alpha_n \to \alpha$ entonces:*

(1) $|\,\|x\| - \|y\|\,| \le \|x - y\|$.

(2) $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$.

(3) $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y$.

(4) $\lim_{n\to\infty} \alpha_n x_n = \alpha x$.

Remark 0.13. En un espacio normado, la norma, la suma y el producto por escalar son funciones continuas.

Definición 0.14 (Equivalencia de normas). Sean $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ normas en X. Decimos que son equivalentes si existen constantes $m, M > 0$ tales que

$$m\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le M\|x\|_1 \qquad \forall x \in X.$$

Corolario 0.15 (Propiedades de normas equivalentes). *Si $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_1$ son equivalentes con métricas asociadas d, d_1, entonces para toda sucesión x_n en X:*

(1) $x_n \to x$ *en* $(X, d) \iff x_n \to x$ *en* (X, d_1).

(2) $\{x_n\}$ *es de Cauchy en* $(X, d) \iff$ *es de Cauchy en* (X, d_1).

(3) (X, d) *es completo* $\iff (X, d_1)$ *es completo.*

Teorema 0.16 (Función continua en compacto tiene máximo y mínimo). *Sea (M, d) compacto y $f : M \to \mathbb{F}$ continua. Entonces f es acotada y alcanza su supremo e ínfimo; en particular existen $x, y \in M$ con $f(x) = \sup |f|$ y $f(y) = \inf |f|$.*

Teorema 0.17 (Equivalencia a la norma 1). *Sea X espacio vectorial normado de dimensión finita con norma $\|\cdot\|$. Sea $\{e_j\}_{j=1}^n$ una base y defina*

$$\|x\|_1 = \Big(\sum |\alpha_j|^2\Big)^{1/2} \quad \textit{si } x = \sum \alpha_j e_j.$$

Entonces $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|$ son equivalentes.

Proof. Sea $M = \big(\sum_{j=1}^n \|e_j\|^2\big)^{1/2} > 0$. Para $x = \sum \alpha_j e_j$ tenemos

$$\|x\| = \Big\|\sum \alpha_j e_j\Big\| \le \sum_j |\alpha_j|\,\|e_j\| \le \Big(\sum_j |\alpha_j|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_j \|e_j\|^2\Big)^{1/2} = M\|x\|_1.$$

Por tanto existe $M > 0$ con $\|x\| \leq M\|x\|_1$ para todo x. Para la cota inferior consideramos la aplicación

$$f : \mathbb{F}^n \to \mathbb{R}, \qquad f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \Big\| \sum_j \alpha_j e_j \Big\|.$$

La función f es continua y el conjunto

$$S = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) : \sum_j |\alpha_j|^2 = 1\}$$

es compacto en $\mathbb{F}^n$. Por compacidad f alcanza un mínimo positivo $m > 0$ en S (no puede ser cero porque la familia $\{e_j\}$ es base). Si $\|x\|_1 = 1$ entonces $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in S$ y por tanto $m \leq f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \|x\|$. Para un x arbitrario tomamos $x' = x/\|x\|_1$ y obtenemos

$$m\|x\|_1 = m\|x'\|_1 \leq \|x'\| = \frac{\|x\|}{\|x\|_1},$$

de donde existe $m > 0$ con $m\|x\|_1 \leq \|x\|$ para todo x. Esto muestra la equivalencia de normas. □

Corolario 0.18. *En dimensión finita todas las normas son equivalentes.*

Proof. Sea $\|\cdot\|$ una norma cualquiera en X. Por el teorema anterior $\|\cdot\|$ es equivalente a la norma euclidiana $\|\cdot\|_1$ asociada a cualquier base; de ello se sigue por transitividad que cualquier par de normas en X son equivalentes. □

Remark 0.19 (Contraejemplo II)**.** Esto no vale en dimensión infinita: por ejemplo en $C^1[0,\pi]$ las normas $\|\cdot\|_\infty$ y $\|u\| = \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty$ no son equivalentes.

Lema 0.20. *Si X es de dimensión finita y $\|\cdot\|_1$ la norma euclidiana asociada a una base, entonces (X, d_1) es completo (Banach).*

Proof. Sea $\{x^n\}$ sucesión de Cauchy. Escribir cada $x^n = \sum_{j=1}^N \alpha_j^n e_j$. Las coordenadas forman sucesiones de Cauchy en $\mathbb{F}$, por completitud convergen a límites α_j, y entonces $x = \sum \alpha_j e_j$ es límite en la norma $\|\cdot\|_1$. □

Corolario 0.21. *Todo espacio vectorial de dimensión finita es completo para cualquier norma.*

Proof. Por el teorema anterior todas las normas en X son equivalentes, luego la completitud es independiente de la norma: si una norma produce un espacio completo entonces todas lo hacen. Como $\|\cdot\|_1$ (la norma euclidiana) hace a X completo (producto de campos completos), se concluye que X es completo para cualquier norma. $\square$

Teorema 0.22 (Resultados en métricos)**.** *Sea (M, d) métrico y $A \subset M$. Entonces:*

(1) Si A es completo entonces A es cerrado.

(2) Si M es completo, A es completo $\iff$ A es cerrado.

(3) Si A es compacto entonces A es cerrado y acotado.

(4) En $\mathbb{F}^n$, cerrado y acotado $\Rightarrow$ compacto.

Corolario 0.23. *Todo subespacio vectorial de dimensión finita es cerrado.*

Remark 0.24 (Contraejemplo I)**.** No es cierto en dimensión infinita: hay subespacios de dimensión infinita que no son cerrados (ejemplos en ℓ^∞).

Lema 0.25. *La clausura de un subespacio es subespacio.*

Proof. Si $x_n \to x$ y $y_n \to y$ con $x_n, y_n \in S$, entonces $x_n + y_n \to x + y$ y $\alpha x_n \to \alpha x$, por lo que $x + y, \alpha x \in \overline{S}$. $\square$

Definición 0.26 (Span)**.** Para $E \subset X$ definimos

$$\mathrm{Sp}(E) = \{\text{combinaciones lineales finitas de elementos de } E\}, \qquad \overline{\mathrm{Sp}}(E) = \bigcap\{M : M \text{ subespacio cerra}$$

Lema 0.27. *Se cumple $\overline{\mathrm{Sp}}(E) = \overline{\mathrm{Sp}(E)}$ y otras propiedades estándar.*

Lema 0.28 (Lema de Riesz)**.** *Sea X normado y $Y \subset X$ subespacio cerrado, $Y \neq X$. Para $\alpha \in (0, 1)$ existe $x_\alpha \in X$ con $\|x_\alpha\| = 1$ y $\|x_\alpha - y\| > \alpha$ para todo $y \in Y$.*

Proof. Tomar $x \in X \setminus Y$, definir $d = \inf_{z \in Y} \|x - z\| > 0$ y elegir $z \in Y$ con $d < \|x - z\| < d/\alpha$. Poner $x_\alpha = (x - z)/\|x - z\|$. $\square$

Teorema 0.29. *Si X es de dimensión infinita, los conjuntos*

$$D = \{x : \|x\| \leq 1\}, \qquad K = \{x : \|x\| = 1\}$$

no son compactos.

Proof. Construir una sucesión en K sin sub-sucesión convergente usando el lema de Riesz iterativamente; produce puntos mutuamente separados por al menos 1/2. $\square$

Definición 0.30 (Espacio de Banach)**.** Un espacio de Banach es un espacio normado completo.

Teorema 0.31. *(1) Todo espacio normado de dimensión finita es Banach.*

(2) Si X es métrico completo, $C_{\mathbb{F}}(X)$ es Banach.

(3) Si (X, Σ, μ) es espacio de medida, $L^p(X)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ son Banach.

(4) Si X es Banach y Y subespacio, entonces Y es Banach $\iff$ Y es cerrado.

Teorema 0.32. *Sea X Banach y $\{x_n\} \subset X$. Si $\sum \|x_n\|$ converge, entonces $\sum x_n$ converge (absoluta implica convergencia en Banach).*

Proof. Las sumas parciales forman una sucesión de Cauchy: $\| \sum_{k=n+1}^{m} x_k\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|x_k\|$, y como la serie de normas converge, las sumas parciales son Cauchy; por completitud convergen. $\square$