Tema 4
Ecuación Difusión Multidimensional

Ecuación de Difusión 2D. Métodos explícitos e implícitos. Método ADI.

Referencias del Capítulo:

- Numerical Recipes. W.H. Press, B.P. Flannery, S.A. Teukolsky and W.T. Vetterling. Cambridge University Press (1988).
- Computational Techniques for Fluid Dynamics. C.A.J. Fletcher. Springer-Verlag (1991).

M4: Ecuación Difusión 2D.

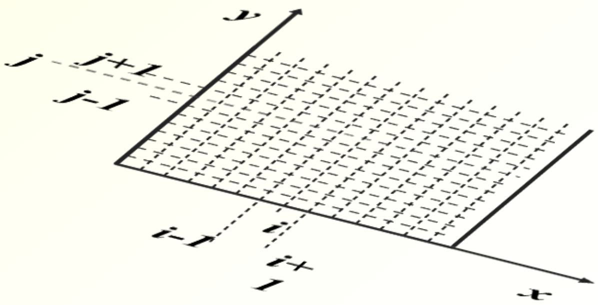
En dos dimensiones, la ecuación de difusión tiene la forma:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \alpha_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \alpha_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

donde ahora T(x,y,t) es la variable a estudiar (p.e.: temperatura) que se difunde con una difusividad α_x en la dirección del eje OX y α_y en la dirección OY.

Condiciones de frontera (Dirichlet) :

$$T(x=0,y,t) = a(y,t)$$
$$T(x=L,y,t) = b(y,t)$$
$$T(x,y=0,t) = c(x,t)$$
$$T(x,y=L,t) = d(x,t)$$



Condiciones iniciales: $T(x,y,t=0) = T_o(x,y)$

M4: Ec. Difusión 2D. Métodos Explícitos

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \alpha_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \alpha_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

Esquema FTCS:

$$\frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n}}{\Delta t} = \alpha_x \frac{T_{i-1,j}^{n} - 2T_{i,j}^{n} + T_{i+1,j}^{n}}{\Delta x^2} + \alpha_y \frac{T_{i,j-1}^{n} - 2T_{i,j}^{n} + T_{i,j+1}^{n}}{\Delta y^2}$$

$$\Rightarrow T_{i,j}^{n+1} = T_{i,j}^{n} + \frac{\alpha_x \Delta t}{\Delta x^2}\left(T_{i-1,j}^{n} - 2T_{i,j}^{n} + T_{i+1,j}^{n}\right) + \frac{\alpha_y \Delta t}{\Delta y^2}\left(T_{i,j-1}^{n} - 2T_{i,j}^{n} + T_{i,j+1}^{n}\right)$$

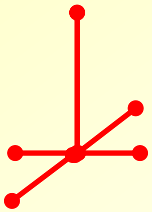
Error de consistencia:

$$E_{i,j}^{n} = O(\Delta t, \Delta x^2, \Delta y^2)$$

Condiciones de Estabilidad:

_n+1_

_n_



$$\frac{\alpha_x \Delta t}{\Delta x^2} + \frac{\alpha_y \Delta t}{\Delta y^2} \leq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad s_x + s_y \leq \frac{1}{2}$$

si $\alpha_x = \alpha_y = \alpha$ y $\Delta x = \Delta y \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\alpha \, \Delta t}{\Delta x^2} \leq \dfrac{1}{4}$

M4: Ec. Difusión 2D. Métodos Implícitos

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \alpha_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \alpha_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

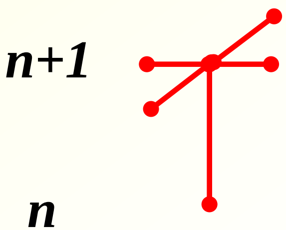
Esquema Completamente Implícito:

$$\frac{T_{i,j}^{n+1} - T_{i,j}^{n}}{\Delta t} = \alpha_x \frac{T_{i-1,j}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i+1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} + \alpha_y \frac{T_{i,j-1}^{n+1} - 2T_{i,j}^{n+1} + T_{i,j+1}^{n+1}}{\Delta y^2}$$

$$\Rightarrow -s_x T_{i-1,j}^{n+1} + \left(1 + 2s_x + 2s_y\right) T_{i,j}^{n+1} - s_x T_{i+1,j}^{n+1} - s_y T_{i,j-1}^{n+1} - s_y T_{i,j+1}^{n+1} = T_{i,j}^{n}$$

$$j \in (1, \ldots, N-1)$$
$$i \in (1, \ldots, N-1)$$

Error de consistencia: $E_{i,j}^{n} = O(\Delta t, \Delta x^2, \Delta y^2)$



Condiciones de Estabilidad: incondicionalmente estable.

Problemas: las matrices son mucho más complicadas de construir y los algoritmos son mucho más lentos.

M4: Ec. Difusión 2D. Métodos ADI

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \alpha_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \alpha_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

Método ADI (alternating direction implicit):

•Implícito en la dirección OX y explícito en OY

$$\frac{T^*_{i,j} - T^n_{i,j}}{\Delta t/2} = \alpha_x \frac{T^*_{i-1,j} - 2T^*_{i,j} + T^*_{i+1,j}}{\Delta x^2} + \alpha_y \frac{T^n_{i,j-1} - 2T^n_{i,j} + T^n_{i,j+1}}{\Delta y^2}$$

•Explícito en la dirección OX e implícito en OY

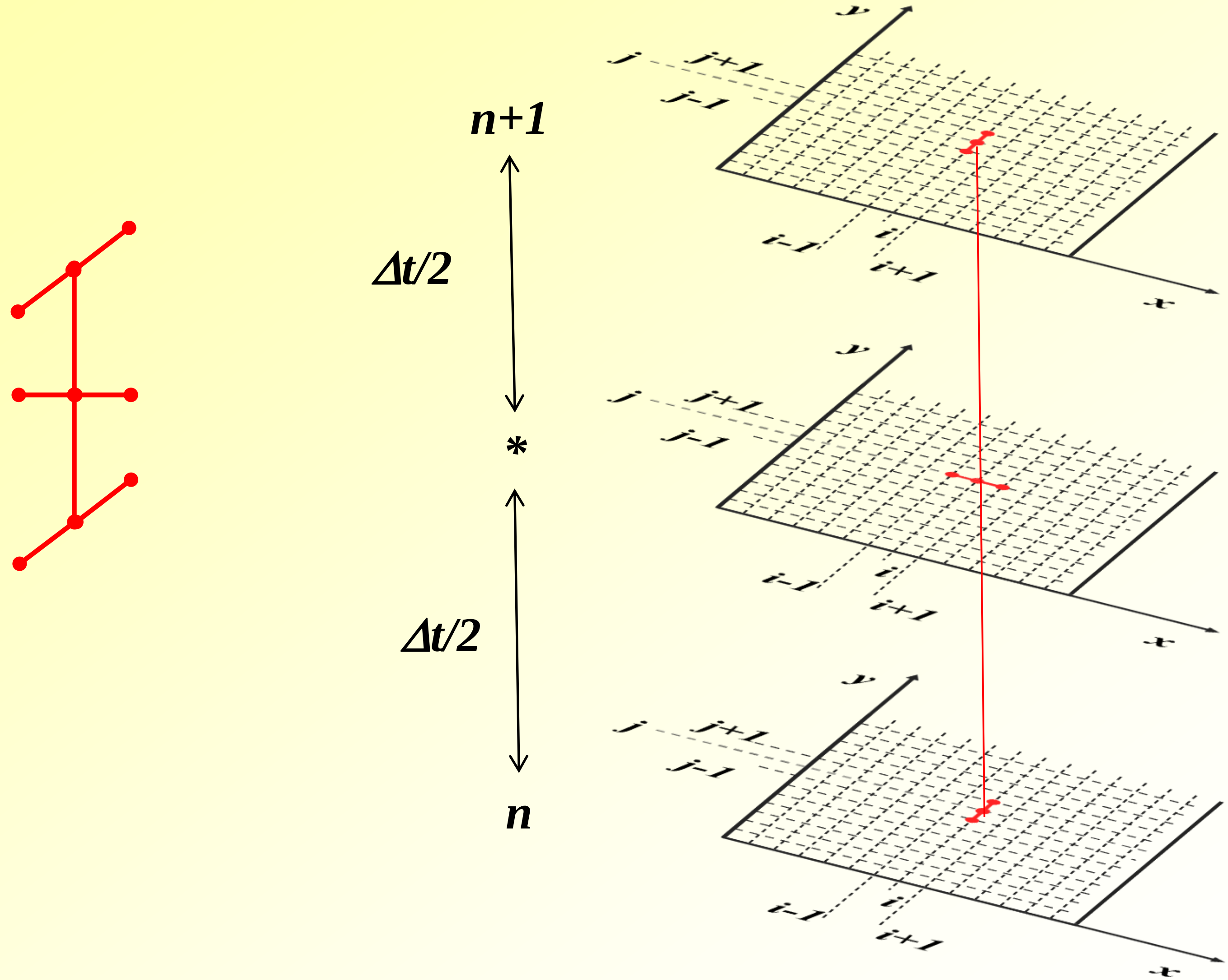
$$\frac{T^{n+1}_{i,j} - T^*_{i,j}}{\Delta t} = \alpha_x \frac{T^*_{i-1,j} - 2T^*_{i,j} + T^*_{i+1,j}}{\Delta x^2} + \alpha_y \frac{T^{n+1}_{i,j-1} - 2T^{n+1}_{i,j} + T^{n+1}_{i,j+1}}{\Delta y^2}$$

Error de consistencia: $E^n_{i,j} = O(\Delta t^2, \Delta x^2, \Delta y^2)$

Condiciones de Estabilidad: incondicionalmente estable.

M4: Ec. Difusión 2D. Métodos ADI

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \alpha_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \alpha_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$



Boletín ejercicios

Ecuaciones Multidimensionales. Método ADI

12.- Emplear el método explícito FTCS para integrar la ecuación de transporte bidimensional.

13.- Emplear el método semiimplícito ADI para integrar la ecuación de difusión bidimensional.