Ejercicios del tema y su valor:
1-Jacobi (1p)
Entrega: un ejercicio obligatorio: el nº 1

Autovalores y autovectores.

Dada la matriz cuadrada **A** de dimensión $n \times n$, nos planteamos la búsqueda de los escalares λ para los que exista un vector no nulo **X** tal que

$$AX = \lambda X \tag{1}$$

Cuando esto ocurre, se dice que **X** es un *autovector* correspondiente al *autovalor* λ y juntos forman un *autopar* (λ, **X**) de **A**[1].

La matriz identidad **I** puede usarse para expresar la ecuación (1) como **AX**=λ **I** **X** que, a su vez puede escribirse en la forma de un sistema lineal homogéneo

$$(A - \lambda I)X = 0 \tag{2}$$

Este sistema tiene soluciones no triviales si, y sólo si, la matriz **A**-λ **I** es singular, es decir

$$det(A - \lambda I) = 0 \tag{3}$$

Este determinante puede escribirse en la forma

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{4}$$

que al desarrollarlo, se forma un polinomio de grado n que se denomina *polinomio característico* de la matriz **A**

$$\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + c_2\lambda^{n-2} + \cdots + c_{n-1}\lambda + c_n = 0 \tag{5}$$

Todo polinomio de grado n tiene exactamente n raíces (no necesariamente distintas). Al sustituir cada una de las raíces λ en la ecuación (3), obtenemos un sistema de ecuaciones subdeterminado que tiene una solución no trivial **X**.

EJEMPLO 1: Calcular los autovalores y autovectores de la matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \tag{6}$$

mediante su polinomio característico.

Empezamos por plantear el determinante

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{7}$$

que al resolver, nos proporciona el polinomio característico

$$\lambda^3 - 8\lambda^2 + 19\lambda - 12 = 0 \tag{8}$$

[1] En general, el escalar λ y las componentes del vector **X** son números complejos. En lo que sigue trabajaremos con matrices **A** reales y simétricas para las cuales tanto λ como las componentes de **X** son números reales.

Las soluciones de (8) son los autovalores correspondientes: $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 4$.

1. Autovector correspondiente a $\lambda_1 = 1$
   De acuerdo la (2), podemos escribir

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

   y realizando el producto, resulta

$$\begin{array}{rrrcl} 2x_1 & -x_2 & & = & 0 \\ -x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 0 \\ & -x_2 & +2x_3 & = & 0 \end{array}$$

   Como una las ecuaciones anteriores es combinación de las otras dos (la suma de la primera más dos veces la segunda nos da la tercera), el sistema se reduce a dos ecuaciones con tres incógnitas

$$\begin{array}{rrrcl} 2x_1 & -x_2 & & = & 0 \\ -x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 0 \end{array}$$

   Si tomamos arbitrariamente $x_1 = a$, resultan $x_2 = 2a$ y $x_3 = a$. Por tanto, al autovalor $\lambda_1 = 1$ le corresponde el autovector $V = a[1, 2, 1]^T$ o bien normalizado $V = [0.4082, 0.8165, 0.4082]^T$

2. Autovector correspondiente a $\lambda_2 = 3$
   Tendremos en este caso

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

   y realizando el producto, resulta

$$\begin{array}{rrrcl} & -x_2 & & = & 0 \\ -x_1 & -x_2 & -x_3 & = & 0 \\ & -x_2 & & = & 0 \end{array}$$

   que es equivalente a

$$\begin{array}{rrrcl} & -x_2 & & = & 0 \\ -x_1 & -x_2 & -x_3 & = & 0 \end{array}$$

   tomando $x_1 = b$, tenemos que $x_2 = 20$ y $x_3 = -b$. Entonces, para $\lambda_2 = 3$ el autovector es $V = b[1, 0, -1]^T$ y normalizado $V = [0.7071, 0, -0.7071]^T$

3. Autovector correspondiente a $\lambda_3 = 4$
   Tendremos ahora que

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

y operando

$$\begin{array}{rrrcl} -x_1 & -x_2 & & = & 0 \\ -x_1 & -2x_2 & -x_3 & = & 0 \\ & -x_2 & -x_3 & = & 0 \end{array}$$

o bien

$$\begin{array}{rrrcl} -x_1 & -x_2 & & = & 0 \\ -x_1 & -2x_2 & -x_3 & = & 0 \end{array}$$

Y si $x_1 = c$, nos queda $x_2 = -c$ y $x_3 = c$. Al autovalor $\lambda_3 = 4$ le corresponde el autovector $V = c[1, -1, 1]^T$ o normalizado $V = [0.5774, -0.5774, 0.5774]^T$

Método de Jacobi para el cálculo de autovalores y autovectores

Éste método permite calcular todas las parejas autovalor-autovector de una matriz simétrica real $\mathbf{A}$ de dimensión $n \times n$.

Empezamos construyendo las matrices $\mathbf{D}$ y $\mathbf{V}$, que inicialmente tienen los valores $\mathbf{D}_0$=$\mathbf{A}$ y $\mathbf{V}_0$=$\mathbf{I}$.

El método iterativo es el siguiente. En primer lugar hay que elegir la fila p y la columna q de manera que el elemento $D_{p,q}$, fuera de la diagonal principal, tenga el mayor valor absoluto. A continuación se calculan los parámetros siguientes

$$\theta = \frac{D_{q,q} - D_{p,p}}{2D_{p,q}} \tag{9}$$

$$t = \frac{signo(\theta)}{|\theta| + \sqrt{\theta^2 + 1}} \tag{10}$$

siendo $signo(\theta) = 1$ cuando $\theta \geq 0$ y $signo(\theta) = -1$ cuando $\theta < 0$,

$$c = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} \tag{11}$$

$$s = ct \tag{12}$$

Ahora construimos la matriz $\mathbf{R}$=$\mathbf{I}$ y cambiamos los elementos $R_{p,p} = c$, $R_{p,q} = s$, $R_{q,p} = -s$ y $R_{q,q} = c$

$$R = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & col\ p & & col\ q & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & c & \cdots & s & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & -s & \cdots & c & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow\ fila\ p \\ \\ \leftarrow\ fila\ q \\ \\ \\ \end{array} \tag{13}$$

y se calculan las matrices siguientes

$$D_{k+1} = R' D_k R \tag{14}$$

$$V_{k+1} = V_k R \tag{15}$$

y se repite el proceso iterativo. Cuando la solución converja (los elementos de **D** como los de **V** no varíen con la precisión deseada), la matriz diagonal **D** contiene los autovalores, mientras que la matriz **V** contiene, en forma de columnas, los correspondientes autovectores.

EJERCICIO 1:
Implementar un programa que calcule los autovalores y los autovectores de la matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

mediante el método de Jacobi

RESULTADO:

```
Método de Jacobí

precisión: 1e-07

Autovalores
  4.00000000     1.00000000     3.00000000

Autovectores
  0.57735027     0.40824829    -0.70710678
 -0.57735027     0.81649658     0.00000000
  0.57735027     0.40824829     0.70710678
```