Ejercicios del tema y su valor:
1- sin pivoteo (1p), 2-pivoteo parcial (2p), 3-pivoteo total (3p), 4-Gauss-Jordan (3p), 5-Inversión (3p), 6-LU (4p), 7- Gauss-Seidel (1p)
Entrega: un ejercicio obligatorio: el nº 1, un ejercicio optativo: a elegir entre los restantes

Sistema de ecuaciones lineales.

A un conjunto de N ecuaciones con N incógnitas del tipo

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1N}x_N &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2N}x_N &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{N1}x_1 + a_{N2}x_2 + \cdots + a_{1NN}x_N &= b_N \end{aligned} \tag{1}$$

se le conoce como *sistema de ecuaciones lineales*, donde $a_{i,j}$ son los coeficientes, x_i las incógnitas y b_j los términos independientes.
En notación compacta el sistema (1) se expresa en la forma

$$Ax = b \tag{2}$$

donde A es la matriz de coeficientes, x el vector solución y b el vector de términos independientes.

Métodos de resolución

- **Eliminación gaussiana sin pivoteo**
  El objetivo de este método es construir un sistema triangular superior equivalente.[1]

  EJEMPLO 1: Utilizando el método de eliminación gaussiana sin pivoteo, resolver el sistema de ecuaciones lineales (3)

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 7 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned} \tag{3}$$

  Construimos la matriz ampliada formada por la matriz de coeficientes y el vector de términos independientes

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right) \tag{4}$$

  y a continuación realizaremos sobre ella una serie de operaciones que no cambian el conjunto de soluciones del sistema de ecuaciones lineal.

  En primer lugar, utilizamos la primera fila para eliminar los elementos de la primera columna por debajo de la diagonal principal. En este paso, esta primera fila es la *fila pivote* y su elemento a_{11} es el *elemento pivote*. El proceso es el siguiente:

$$\begin{cases} \text{a la segunda fila se le resta el producto de } \frac{a_{21}}{a_{11}} \text{ por la primera fila} \\ \text{a la tercera fila se le resta el producto de } \frac{a_{31}}{a_{11}} \text{ por la primera fila} \end{cases}$$

[1] Dos sistemas de orden NxN son **equivalentes** cuando tienen el mismo conjunto de soluciones

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0.5 & 2.5 & 8.5 \\ 0 & 2.5 & -1.5 & 0.5 \end{array}\right) \tag{5}$$

A continuación, usamos la segunda fila (*fila pivote*) para para eliminar los elementos de la segunda columna. Teniendo en cuenta que a_{22} es ahora el *elemento pivote*,

$$\left\{\text{a la tercera fila se le resta el producto de } \tfrac{a_{32}}{a_{22}} \text{ por la segunda fila}\right.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0.5 & 2.5 & 8.5 \\ 0 & 0 & -14 & -42 \end{array}\right) \tag{6}$$

La ecuación (6) representa el sistema triangular superior.

Para obtener la solución de (6), realizamos una sustitución regresiva

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{a_{34}}{a_{33}} = \frac{-42}{-14} = 3 \\ x_2 &= \frac{a_{24} - a_{23}x_3}{a_{22}} = \frac{8.5 - 2.5 \cdot 3}{0.5} = 2 \\ x_1 &= \frac{a_{14} - a_{12}x_2 - a_{13}x_3}{a_{11}} = \frac{3 - 1 \cdot 2 - 1 \cdot 3}{2} = 1 \end{aligned} \tag{7}$$

EJERCICIO 1:
Implementar un programa que resuelva un sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 7 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}$$

por el método de eliminación de Gauss sin pivoteo y cálculo de las soluciones por sustitución regresiva.

RESULTADO:

```
Matriz triangular superior Ab

Ab =

    2.0000   -1.0000    1.0000    3.0000
         0    0.5000    2.5000    8.5000
         0         0  -14.0000  -42.0000

solución: sustitución regresiva
x(1)= 1.000000
x(2)= 2.000000
x(3)= 3.000000
```

- **Eliminación gaussiana con pivoteo parcial**

La estrategia de ***pivoteo parcial*** consiste en que antes de proceder a la eliminación gaussiana por el elemento de la diagonal principal a_{kk}, busquemos el elemento a_{jk} de mayor valor absoluto situado en la misma columna y por debajo de él ($|a_{jk}| > |a_{kk}|$). Si existe, procedemos al intercambio de la fila j por la fila k.

EJEMPLO 2: Utilicemos el método de eliminación gaussiana con pivoteo parcial para resolver el sistema de ecuaciones lineales (8)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 25 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 &= -5 \end{aligned} \tag{8}$$

Construimos la matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 25 \\ 3 & -1 & -2 & -5 \end{array}\right) \tag{9}$$

y comenzamos con $a_{1,1}$. El elemento de mayor valor absoluto de la columna 1 por debajo de la fila 1 es $a_{3,1} = 3$, por lo tanto intercambiamos la fila 1 con la fila 3.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -2 & -5 \\ 2 & 4 & 5 & 25 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right) \tag{10}$$

Ahora procedemos a la eliminación de Gauss por el pivote $a_{1,1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & \frac{14}{3} & \frac{19}{3} & \frac{85}{3} \\ 0 & \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{11}{3} \end{array}\right) \tag{11}$$

Continuamos ahora con el elemento $a_{2,2}$. Buscamos el elemento $a_{k,2}$ de mayor valor absoluto por debajo de $a_{2,2}$ y como no lo hay, procedemos a la eliminación de Gauss por el elemento $a_{2,2}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & \frac{14}{3} & \frac{19}{3} & \frac{85}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{7}{2} & -\frac{21}{2} \end{array}\right) \tag{12}$$

Resolviendo mediante sustitución regresiva, resulta

$$
\begin{aligned}
x_3 &= \frac{\frac{21}{2}}{\frac{7}{2}} = 3 \\
x_2 &= \frac{\frac{85}{3} - 3 \cdot \frac{19}{3}}{\frac{14}{3}} = 2 \\
x_1 &= \frac{-5 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3}{3} = 1
\end{aligned}
\tag{13}
$$

EJERCICIO 2:

Implementar un programa que resuelva un sistema de ecuaciones lineales

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\
2x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 25 \\
3x_1 - x_2 - 2x_3 &= -5
\end{aligned}
$$

por el método de eliminación de Gauss con pivoteo parcial y cálculo de las soluciones por sustitución regresiva.

RESULTADO:

```
Método eliminación de Gauss con pivoteo parcial y sustitución regresiva

matriz ampliada inicial
     1     2    -1     2
     2     4     5    25
     3    -1    -2    -5

intercambio filas 1 y 3
     3    -1    -2    -5
     2     4     5    25
     1     2    -1     2

eliminación de Gauss por pivote a(1,1)
    3.0000   -1.0000   -2.0000   -5.0000
         0    4.6667    6.3333   28.3333
         0    2.3333   -0.3333    3.6667

eliminación de Gauss por pivote a(2,2)
    3.0000   -1.0000   -2.0000   -5.0000
         0    4.6667    6.3333   28.3333
         0         0   -3.5000  -10.5000

Matriz triangular superior Ab
```

```
Ab =

    3.0000   -1.0000   -2.0000   -5.0000
         0    4.6667    6.3333   28.3333
         0         0   -3.5000  -10.5000

solución: sustitución regresiva
x(1)= 1.000000
x(2)= 2.000000
x(3)= 3.000000
```

- **Eliminación gaussiana con pivoteo total**

El ***pivoteo total*** consiste en el intercambio de filas y columnas con el propósito de usar como pivote el elemento de mayor magnitud (en valor absoluto) y, una vez colocado en la diagonal principal, usarlo para eliminar los restantes elementos de su columna que están por debajo de él.

Mientras que un intercambio entre filas deja invariable las soluciones del sistema, el intercambio de columnas produce un reordenamiento del vector solución.

EJERCICIO 3:
Implementar un programa que resuelva un sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 25 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 &= -5 \end{aligned}$$

por el método de eliminación de Gauss con pivoteo total y cálculo de las soluciones por sustitución regresiva.

RESULTADO:

```
Método eliminación de Gauss con pivoteo total y sustitución regresiva

matriz ampliada inicial
     1     2    -1     2
     2     4     5    25
     3    -1    -2    -5

intercambio filas 1 y 2
     2     4     5    25
     1     2    -1     2
     3    -1    -2    -5

intercambio columnas 1 y 3
     5     4     2    25
    -1     2     1     2
    -2    -1     3    -5
```

```
orden solución
     3     2     1

eliminación de Gauss por pivote a(1,1)
    5.0000    4.0000    2.0000   25.0000
         0    2.8000    1.4000    7.0000
         0    0.6000    3.8000    5.0000

intercambio filas 2 y 3
    5.0000    4.0000    2.0000   25.0000
         0    0.6000    3.8000    5.0000
         0    2.8000    1.4000    7.0000

intercambio columnas 2 y 3
    5.0000    2.0000    4.0000   25.0000
         0    3.8000    0.6000    5.0000
         0    1.4000    2.8000    7.0000

orden solución
     3     1     2

eliminación de Gauss por pivote a(2,2)
    5.0000    2.0000    4.0000   25.0000
         0    3.8000    0.6000    5.0000
         0         0    2.5789    5.1579

solución
    3.0000
    1.0000
    2.0000

ordenar la solución
    1.0000
    2.0000
    3.0000

solución: sustitución regresiva
x(1)= 1.000000
x(2)= 2.000000
x(3)= 3.000000
```

- **Eliminación de Gauss-Jordan**
  El método de eliminación de Gauss-Jordan es una variación del método de eliminación de Gauss con pivoteo total.

  EJEMPLO 3: Utilizando el método de eliminación Gauss-Jordan, resolver el sistema de ecuaciones lineales (14)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 25 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 &= -5 \end{aligned} \tag{14}$$

  Construimos la matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 25 \\ 3 & -1 & -2 & -5 \end{array}\right) \tag{15}$$

y a continuación procedemos a realizar las siguientes operaciones:

Con el objeto de utilizar el pivote máximo, se intercambia la fila 1 con la 2 y a continuación la columna 1 con la 3 (esto significa que el orden de las soluciones es x_3, x_2, x_1)

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 5 & 4 & 2 & 25 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 & -5 \end{array}\right) \tag{16}$$

$$\begin{cases} \text{a la segunda fila se le resta el producto de } \frac{a_{21}}{a_{11}} \text{ por la primera fila} \\ \text{a la tercera fila se le resta el producto de } \frac{a_{31}}{a_{11}} \text{ por la primera fila} \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 4 & 2 & 25 \\ 0 & \dfrac{14}{5} & \dfrac{7}{5} & 7 \\ 0 & \dfrac{3}{5} & \dfrac{19}{5} & 5 \end{array}\right) \tag{17}$$

ahora intercambiamos la fila 2 con la 3 y a continuación la columna 2 con la 3 (esto significa que el orden de las soluciones es x_3, x_1, x_2)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 4 & 25 \\ 0 & \dfrac{19}{5} & \dfrac{3}{5} & 5 \\ 0 & \dfrac{7}{5} & \dfrac{14}{5} & 7 \end{array}\right) \tag{18}$$

$$\begin{cases} \text{a la tercera fila se le resta el producto de } \frac{a_{32}}{a_{22}} \text{ por la segunda fila} \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 4 & 25 \\ 0 & \dfrac{19}{5} & \dfrac{3}{5} & 5 \\ 0 & 0 & \dfrac{245}{95} & \dfrac{98}{19} \end{array}\right) \tag{19}$$

$$\begin{cases} \text{dividimos la tercera fila por el elemento } a_{33} \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 4 & 25 \\ 0 & \dfrac{19}{5} & \dfrac{3}{5} & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \tag{20}$$

Utilizamos ahora la tercera fila para eliminar los elementos de la tercera columna por encima de la diagonal principal

$$\begin{cases} \text{a la primera fila se le resta el producto de } \frac{a_{13}}{a_{33}} \text{ por la tercera fila} \\ \text{a la segunda fila se le resta el producto de } \frac{a_{23}}{a_{33}} \text{ por la tercera fila} \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 0 & 17 \\ 0 & \frac{19}{5} & 0 & \frac{19}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \tag{21}$$

$$\Big\{\text{dividimos la segunda fila por el elemento } a_{22}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 0 & 17 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \tag{22}$$

A continuación, usamos la segunda fila para para eliminar los elementos de la segunda columna por encima de la diagonal principal

$$\Big\{\text{a la primera fila se le resta el producto de } \tfrac{a_{12}}{a_{22}} \text{ por la segunda fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \tag{23}$$

Por último,

$$\Big\{\text{dividimos la primera fila por el elemento } a_{11}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \tag{24}$$

Como podemos ver, la solución del sistema (en el orden x_3, x_1, x_2) se corresponde con la columna $a_{N+1,N+1}$ de la matriz ampliada.

EJERCICIO 4:

Implementar un programa que resuelva un sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 25 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 &= -5 \end{aligned}$$

por el método de eliminación de Gauss-Jordan.

RESULTADO:

```
Método eliminación de Gauss Jordan con pivoteo total

orden solución
     3     1     2
```

```
    1.0000         0         0    3.0000
         0    1.0000         0    1.0000
         0         0    1.0000    2.0000

solución: Eliminación Gauss Jordan
x(1)= 1.000000
x(2)= 2.000000
x(3)= 3.000000
```

- **Inversión matricial de Gauss-Jordan**
  El método de inversión matricial de Gauss-Jordan es una variación del método de eliminación de Gauss con pivoteo total.

  EJEMPLO 4: Utilizando el método de inversión matricial Gauss-Jordan, resolver el sistema de ecuaciones lineales (25)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 25 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 &= -5 \end{aligned} \tag{25}$$

Construimos la matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \tag{26}$$

y realicemos las siguientes operaciones:

Para utilizar el pivote máximo, se intercambia la fila 1 con la 2 y a continuación la columna 1 con la 3 (el orden de las columnas es: col 3, col 2, col 1)

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 5 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \tag{27}$$

$$\begin{cases} \text{a la segunda fila se le resta el producto de } \frac{a_{21}}{a_{11}} \text{ por la primera fila} \\ \text{a la tercera fila se le resta el producto de } \frac{a_{31}}{a_{11}} \text{ por la primera fila} \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{14}{5} & \dfrac{7}{5} & 0 & \dfrac{1}{5} & 0 \\ 0 & \dfrac{3}{5} & \dfrac{19}{5} & 0 & \dfrac{2}{5} & 1 \end{array}\right) \tag{28}$$

ahora intercambiamos la fila 2 con la 3 y a continuación la columna 2 con la 3 (el orden de las columnas es: col 3, col 1, col 2)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{19}{5} & \dfrac{3}{5} & 0 & \dfrac{2}{5} & 1 \\ 0 & \dfrac{7}{5} & \dfrac{14}{5} & 0 & \dfrac{1}{5} & 0 \end{array}\right) \tag{29}$$

$$\Big\{\text{a la tercera fila se le resta el producto de } \tfrac{a_{32}}{a_{22}} \text{ por la segunda fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{19}{5} & \dfrac{3}{5} & 0 & \dfrac{2}{5} & 1 \\ 0 & 0 & \dfrac{245}{95} & 1 & \dfrac{5}{95} & -\dfrac{7}{19} \end{array}\right) \tag{30}$$

$$\Big\{\text{dividimos la tercera fila por el elemento } a_{33}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{19}{5} & \dfrac{3}{5} & 0 & \dfrac{2}{5} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{95}{245} & \dfrac{5}{245} & -\dfrac{35}{245} \end{array}\right) \tag{31}$$

Utilizamos la tercera fila para eliminar los elementos de la tercera columna por encima de la diagonal principal

$$\begin{cases} \text{a la primera fila se le resta el producto de } \tfrac{a_{13}}{a_{33}} \text{ por la tercera fila} \\ \text{a la segunda fila se le resta el producto de } \tfrac{a_{23}}{a_{33}} \text{ por la tercera fila} \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 2 & 0 & -\dfrac{380}{245} & \dfrac{225}{245} & \dfrac{140}{245} \\ 0 & \dfrac{19}{5} & 0 & -\dfrac{57}{245} & \dfrac{95}{245} & \dfrac{266}{245} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{95}{245} & \dfrac{5}{245} & -\dfrac{35}{245} \end{array}\right) \tag{32}$$

$$\Big\{\text{dividimos la segunda fila por el elemento } a_{22}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 2 & 0 & -\dfrac{380}{245} & \dfrac{225}{245} & \dfrac{140}{245} \\ 0 & 1 & 0 & -\dfrac{57}{931} & \dfrac{95}{931} & \dfrac{266}{931} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{95}{245} & \dfrac{5}{245} & -\dfrac{35}{245} \end{array}\right) \tag{33}$$

Ahora, usamos la segunda fila para para eliminar los elementos de la segunda columna por encima de la diagonal principal

$$\Big\{\text{a la primera fila se le resta el producto de } \tfrac{a_{12}}{a_{22}} \text{ por la segunda fila}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & -\dfrac{65170}{45619} & \dfrac{32585}{45619} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\dfrac{57}{931} & \dfrac{95}{931} & \dfrac{266}{931} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{95}{245} & \dfrac{5}{245} & -\dfrac{35}{245} \end{array}\right) \tag{34}$$

$$\Big\{ \text{dividimos la primera fila por el elemento } a_{11}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\dfrac{13034}{45619} & \dfrac{6517}{45619} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\dfrac{57}{931} & \dfrac{95}{931} & \dfrac{266}{931} \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{95}{245} & \dfrac{5}{245} & -\dfrac{35}{245} \end{array}\right) \tag{35}$$

Si en la matriz de la derecha de (35) restituimos el orden de las filas según (3, 1, 2) obtenemos la matriz inversa

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\dfrac{57}{931} & \dfrac{95}{931} & \dfrac{266}{931} \\ \dfrac{95}{245} & \dfrac{5}{245} & -\dfrac{35}{245} \\ -\dfrac{13034}{45619} & \dfrac{6517}{45619} & 0 \end{pmatrix} \tag{36}$$

Ahora podemos obtener la solución del sistema simplemente realizando el producto de $A^{-1}b$

$$x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} -\dfrac{57}{931} & \dfrac{95}{931} & \dfrac{266}{931} \\ \dfrac{95}{245} & \dfrac{5}{245} & -\dfrac{35}{245} \\ -\dfrac{13034}{45619} & \dfrac{6517}{45619} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 25 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{37}$$

EJERCICIO 5:

Implementar un programa que resuelva un sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 25 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 &= -5 \end{aligned}$$

por el método de inversión matricial de Gauss-Jordan.

RESULTADO:

```
Método inversión de Gauss Jordan con pivoteo total

matriz inversa: método Gauss Jordan
   -0.0612    0.1020    0.2857
    0.3878    0.0204   -0.1429
   -0.2857    0.1429         0

solución del sistema
x(1)= 1.000000
x(2)= 2.000000
x(3)= 3.000000
```

- **Factorización LU**
La factorización LU permite escribir una matriz dada A como el producto de una matriz triangular inferior L (cuyos elementos de la diagonal principal son todos iguales a 1) por una matriz triangular superior (cuyos elementos diagonales son distintos de cero)

$$A = LU \tag{38}$$

Por lo tanto, un sistema lineal AX=b puede escribirse de forma equivalente

$$LUx = b \tag{39}$$

Si denominamos

$$Ux = y \tag{40}$$

la ecuación (39) adopta la forma

$$Ly = b \tag{41}$$

Para resolver el sistema lineal, primero se calcula y por la ecuación (41) mediante un proceso sustitución progresiva, y despues, se calcula x por la ecuación (40) mediante un proceso sustitución regresiva.

Dado que en el proceso de factorización se utiliza el método de eliminación de Gauss con pivoteo parcial [2] cabe preguntarse como se ven afectadas las matrices L y U. Si P es la matriz de permutación [3] que contiene información de los intercambios realizados en la matriz de coeficientes A durante el proceso de eliminación gaussiana, podemos escribir

$$PAx = Pb \tag{42}$$

y por consiguiente, si

$$PA = LU \tag{43}$$

resulta

$$LUx = Pb \tag{44}$$

de forma que

$$Ux = y \tag{45}$$

$$Ly = Pb \tag{46}$$

EJEMPLO 5: Utilizando el método de factorización LU, resolver el sistema de ecuaciones lineales (47)

[2] La función PYTHON lu que pruduce la factorización LU, utiliza pivoteo parcial.
[3] P es una matriz NxN tal que en cada fila y en cada columna solo tiene un elemento igual a 1 siendo todos los demás iguales a 0. Las filas de P son una permutación de ma matriz identidad.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 25 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 &= -5 \end{aligned} \tag{47}$$

Inicialmente construimos las matrices: U (matriz de coeficientes), L (matriz de ceros) y P (matriz identidad)

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{48}$$

Para llevar a cabo el proceso de pivoteo parcial nos fijamos en la matriz U. Como puede verse, procederemos a intercambiar la fila 1 con la 3, y este cambio se realiza tambien en las matrices L y P

$$U = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{49}$$

Y ahora comenzamos el proceso de eliminación por el pivote U_{11}:

- construimos el multiplicador $m_{21} = \frac{U_{21}}{U_{11}} = \frac{2}{3}$ y sustituimos los elementos de la segunda fila, U_{2c}, por $U_{2c} - m_{21}U_{1c}$ (c=1, 2, 3)
- construimos el multiplicador $m_{31} = \frac{U_{31}}{U_{11}} = \frac{1}{3}$ y sustituimos los elementos de la tercera fila, U_{3c}, por $U_{3c} - m_{31}U_{1c}$ (c=1, 2, 3)
- en la matriz L sustituimos los elementos L_{21} por m_{21} y L_{31} por m_{31}

$$U = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & \dfrac{14}{3} & \dfrac{19}{3} \\ 0 & \dfrac{7}{3} & -\dfrac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{2}{3} & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{50}$$

Ahora como $U_{22} > U_{32}$ no hace falta realizar pivoteo, con lo que a continuación realizamos el proceso de eliminación por el pivote U_{22}:

- construimos el multiplicador $m_{32} = \frac{U_{32}}{U_{22}} = \frac{1}{2}$ y sustituimos los elementos de la tercera fila, U_{3c}, por $U_{3c} - m_{32}U_{2c}$ (c=2, 3)
- en la matriz L sustituimos los elementos L_{32} por m_{32}

$$U = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & \dfrac{14}{3} & \dfrac{19}{3} \\ 0 & 0 & -\dfrac{7}{2} \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{2}{3} & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{51}$$

Finalizado el proceso de eliminación, tenemos ya las matrices U y P dadas por (51), mientras que en L añadiremos 1 en la diagonal principal

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \tag{52}$$

Para resolver el sistema de ecuaciones (46), calculemos en primer lugar el término Pb

$$Pb = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 25 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 25 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{53}$$

y a continuación planteamos $Ly = Pb$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 25 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{54}$$

que puede resolverse mediante un proceso de sustitución progresivo

$$\begin{aligned} y_1 &= -\frac{5}{1} = -5 \\ y_2 &= 25 + \frac{2}{3} \cdot 5 = \frac{85}{3} \\ y_3 &= 2 + \frac{1}{3} \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot \frac{85}{3} = -\frac{63}{6} \end{aligned} \tag{55}$$

Ahora, de acuerdo con (45), podemos escribir

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & \frac{14}{3} & \frac{19}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{7}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ \frac{85}{3} \\ -\frac{63}{6} \end{pmatrix} \tag{56}$$

y mediante un proceso de sustitución regresiva

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{63}{6} \cdot \frac{2}{7} = 3 \\ x_2 &= \left(\frac{85}{3} - \frac{19}{3} \cdot 3 \right) \cdot \frac{3}{14} = 2 \\ x_1 &= \frac{-5 + 2 + 2 \cdot 3}{3} = 1 \end{aligned} \tag{57}$$

que representa la solución del sistema.

EJERCICIO 6:

Implementar un programa que resuelva un sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 25 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 &= -5 \end{aligned}$$

por el método de factorización LU.

RESULTADO:

```
Método factorización LU con pivoteo parcial

matriz triangular inferior L
    1.0000         0         0
    0.6667    1.0000         0
    0.3333    0.5000    1.0000

matriz triangular superior U
    3.0000   -1.0000   -2.0000
         0    4.6667    6.3333
         0         0   -3.5000

matriz de permutación P
     0     0     1
     0     1     0
     1     0     0

solución: factorización LU
x(1)= 1.000000
x(2)= 2.000000
x(3)= 3.000000
```

- **Método iteractivo de Gauss-Seidel**

  Los métodos iteractivos para obtener las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales no son aplicables a todos los casos en general.
  En los casos en que el número de ecuaciones es grande y la matriz de coeficientes contiene muchos ceros, resulta más adecuado utilizar un método iteractivo.
  Consideremos el sistema

$$Ax = b$$

la condición suficiente para que el método iteractivo converja a la solución es que la matriz de coeficientes A de orden NxN sea *diagonal estrictamente dominante*, es decir

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{N} |a_{ij}| \qquad \textit{para todo } i \tag{58}$$

Partiendo de una aproximación inicial de la solución, el método de iteracción de Gauss-Seidel permite calcular la solución en la iteracción (k) en función de la iteracción $(k-1)$ mediante la expresión

$$x_i^{(k)} = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{N} a_{ij} x_j^{(k-1)}}{a_{ii}} \tag{59}$$

EJERCICIO 7:

Implementar un programa que resuelva un sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + x_3 &= 7 \\ 4x_1 - 8x_2 + x_3 &= -21 \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 &= 15 \end{aligned}$$

por el método iteractivo de Gauss-Seidel.

RESULTADO:

```
=============================================
método iteración Gauss Seidel

precisión en la solución= 1e-07

aproximación inicial: [ 0.  0.  0.]

    i    x1           x2           x3
    1    1.75000000   3.50000000   3.00000000
    2    1.87500000   3.93750000   2.96250000
    3    1.99375000   3.99218750   2.99906250
    4    1.99828125   3.99902344   2.99950781
    5    1.99987891   3.99987793   2.99997598
    6    1.99997549   3.99998474   2.99999325
    7    1.99999787   3.99999809   2.99999953
    8    1.99999964   3.99999976   2.99999990
    9    1.99999996   3.99999997   2.99999999
   10    1.99999999   4.00000000   3.00000000
=============================================
>>>
```