Ejercicios del tema y su valor:
1-regla trapecio (1p), 2-Simpson 1/3 (2p), 3-Simpson 3/8 (2p), 4-recursiva trapecio (3p), 5-recursiva Simpson 1/3 (3p), 6-Romberg (4p)
Entrega: un ejercicio obligatorio: el nº 1, un ejercicio optativo: a elegir entre los restantes

Integración numérica.

El objetivo es aproximar la integral definida de una función *f(x)* en un intervalo [a,b] a partir del conocimiento de un número finito, n, de pares $x_i, f(x_i)$

$$\int_a^b f(x)dx \approx a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + \cdots + a_n f(x_n) \tag{1}$$

a la ecuación (1) se le llama fórmula de **integración numérica** o de **cuadratura**, a los valores x_i se le llaman **nodos de integración** o **nodos de cuadratura** y los valores a_i se denominan **pesos** de la fórmula.

La deducción de las fórmulas de cuadratura pueden hacerse utilizando un polinomio interpolador $P_n(x)$. Cuando usamos este polinomio para aproximar la función $f(x)$ en *[a,b]*, y luego aproximamos la integral de $f(x)$ por la integral de $P_n(x)$, la fórmula resultante se llama **fórmula de cuadratura de Newton-Cotes**. Si el primer nodo es $x_1 = a$ y el último es $x_n = b$, entonces se dice que la fórmula de Newton-Cotes es **cerrada**.

1. Como aproximar la integral de una función de la que se conoce su forma analítica.

   Supondremos que los N nodos x_k que utilicemos son equidistantes ($x_k = x_1 + (k-1)h, \quad k = 1, 2, \cdots n$) y sea $f_k = f(x_k), \quad k = 1, 2, \cdots N$.

   - **regla del trapecio**

     La regla del trapecio aproxima la función $f(x)$ por un polinomio interpolador lineal $P(x)$ que pasa por los nodos x_1 *y* x_2

     $$P(x) = f_1 \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + f_2 \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \tag{2}$$

     de forma que la integral en el intervalo [a,b]

     $$\int_a^b f(x)dx \approx \int_{x_1}^{x_2} P(x)dx = \frac{h}{2}(f_1 + f_2) \tag{3}$$

     con $x_1 = a,\ x_2 = b$ y $h = x_2 - x_1$.
     Para aproximar la integral de forma más precisa, podemos dividir el intervalo [a,b] en n subintervalos $[x_k,\ x_{k+1}]$ de anchura común h=(b-a)/n y aplicar la regla del trapecio a cada subintervalo (**regla compuesta del trapecio)**

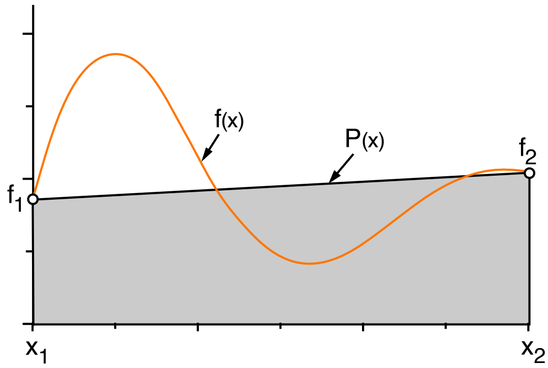

Fig. 1

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \int_a^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx + \cdots + \int_{x_n}^{b} f(x)dx \\
&\approx \sum_{k=1}^{n} \int_{x_k}^{x_{k+1}} P_k(x)dx \qquad (4)\\
&= \frac{h}{2}\left(f_a + f_b\right) + h\sum_{k=2}^{n} f_k
\end{aligned}$$

con $f_1 = f_a,\ f_{n+1} = f_b,\ f_k = f(x_k),\ x_k = a + (k-1)h$.

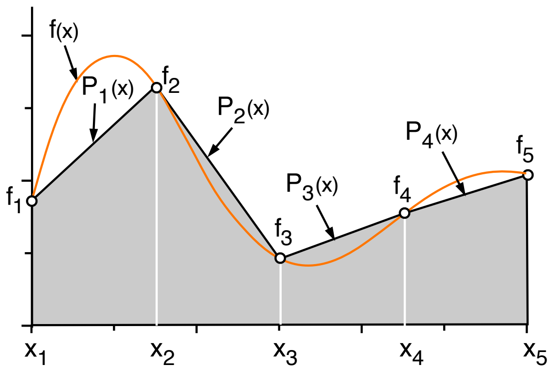

Fig. 2

El número adecuado de subintervalos que deberemos utilizar dependerá de la precisión deseada.

EJERCICIO 1:
Implementar un programa que realice la integral de una función $f(x)$ en un intervalo [a,b], utilizando la regla del trapecio.
Aplicarlo al caso: $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$, a=0 y b=1.35

RESULTADO:

```
Regla del trapecio

Precisión: 1.000000e-05
La integral entre a= 0.000000 y b= 1.350000 es:  1.508750586
```

- **regla de Simpson 1/3**

En este caso, la función $f(x)$ se aproxima por un polinomio $P(x)$ de segundo grado, que debe ser determinado en tres nodos consecutivos $x_1,\ x_2\ y\ x_3$

$$P(x) = f_1 \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} + f_2 \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + f_3 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \tag{5}$$

La integral en el intervalo [a,b] se calcula por la expresión

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_{x_1}^{x_3} P(x)dx = \frac{h}{3}\left(f_1 + 4f_2 + f_3\right) \tag{6}$$

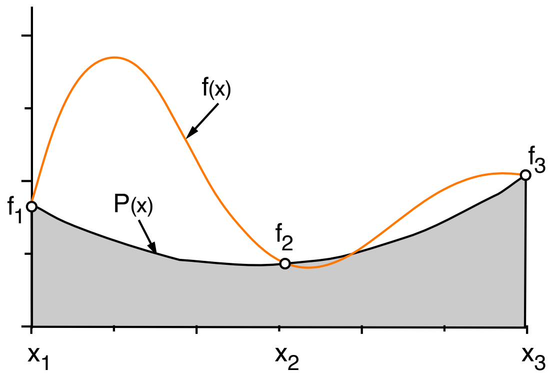

Fig. 3

Supongamos que dividimos [a,b] en 2n subintervalos $[x_k,\ x_{k+1}]$ de la misma anchura h=(b-a)/(2n) mediante una partición de nodos equidistantes $x_k = a + (k-1)h$, para $k = 1, 2, \cdots, 2n+1$. La **regla compuesta de Simpson 1/3** se puede expresar por

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \int_a^{x_3} f(x)dx + \int_{x_3}^{x_5} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{2n-1}}^{b} f(x)dx \\ &\approx \frac{h}{3}\left(f_a + f_b\right) + \frac{2h}{3}\sum_{k=1}^{n-1} f_{2k+1} + \frac{4h}{3}\sum_{k=1}^{n} f_{2k}\end{aligned} \tag{7}$$

EJERCICIO 2:
Implementar un programa que realice la integral de una función $f(x)$ en un intervalo [a,b], utilizando la regla de Simpson 1/3.
Aplicarlo al caso: $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$, a=0 y b=1.35

RESULTADO:

```
Regla de Simpson 1/3

Precisión: 1.000000e-05
La integral entre a= 0.000000 y b= 1.350000 es:  1.508751562
```

- **regla de Simpson 3/8**

Se utiliza un polinomio $P(x)$ de tercer grado para aproximar a la función $f(x)$, determinado en cuatro nodos consecutivos $x_1,\ x_2,\ x_3\ y\ x_4$

$$
\begin{aligned}
P(x) = f_1 \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)} + f_2 \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)} \\
+ f_3 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)} + f_4 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_4-x_1)(x_4-x_2)(x_4-x_3)}
\end{aligned} \tag{8}
$$

La integral en el intervalo [a,b] se calcula por la expresión

$$
\int_a^b f(x)dx \approx \int_{x_1}^{x_4} P(x)dx = \frac{3h}{8}\left(f_1 + 3f_2 + 3f_3 + f_4\right) \tag{9}
$$

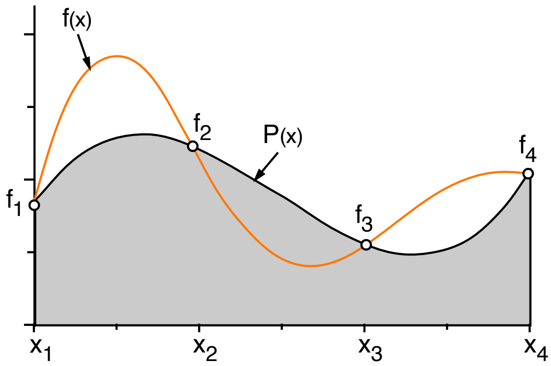

Fig. 4

Para aplicar la **regla compuesta de Simpson 3/8** dividimos el intervalo [a,b] en 3n subintervalos $[x_k,\ x_{k+1}]$ de la misma anchura h=(b-a)/(3n) mediante una partición de nodos equidistantes $x_k = a + (k-1)h$, para $k = 1, 2, \cdots, 3n+1$. se puede expresar por

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_4} f(x)dx + \int_{x_4}^{x_7} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{3n21}}^{b} f(x)dx \\
\approx \frac{3h}{8}\left(f_a + f_b\right) + \frac{6h}{8}\sum_{k=1}^{n-1} f_{3k+1} + \frac{9h}{8}\sum_{k=1}^{n}\left(f_{3k-1} + f_{3k}\right)
\end{aligned} \tag{10}
$$

EJERCICIO 3:
Implementar un programa que realice la integral de una función $f(x)$ en un intervalo [a,b], utilizando la regla de Simpson 3/8.
Aplicarlo al caso: $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$, a=0 y b=1.35

RESULTADO:

```
Regla de Simpson 3/8

Precisión: 1.000000e-05
La integral entre a= 0.000000 y b= 1.350000 es:  1.508751562
```

- **reglas recursivas**

  Consisten en el proceso secuencial de tomar un intervalo, luego dos, luego cuatro, luego ocho y así hasta que alcancemos la precisión deseada.

  - **regla recursiva del trapecio**

    Para integrar la función *f(x)* en el intervalo [a,b], comenzamos evaluando el primer término de la serie, *T(1)*, por

    $$T(1) = \frac{b-a}{2}(f_a + f_b) \tag{11}$$

    que se corresponde con con la regla del trapecio con incremento h=b-a.

    Para las sucesivas aproximaciones, {T(j)} con $j = 2, 3, \ldots$, se divide el intervalo [a,b] en 2^{j-1}=2n subintervalos del mismo tamaño h=(b-a)/2^{j-1}, estando la fórmula recursiva dada por

    $$T(j) = \frac{T(j-1)}{2} + h\sum_{k=1}^{n} f_{2k-1} \tag{12}$$

    siendo $f_{2k-1} = f(x_{2k-1})$ y $x_{2k-1} = a + (2k-1)h$.

    La serie {T(j)} converge al valor de la integral, de forma que el último valor de j será aquel que nos proporcione la solución con la precisión deseada.

    EJERCICIO 4:
    Implementar un programa que realice la integral de una función $f(x)$ en un intervalo [a,b], utilizando la regla recursiva del trapecio.
    Aplicarlo al caso: $f(x) = (x^2 + x + 1)cos(x)$, a=0 y b=$\pi/2$

    RESULTADO:

    ```
    Regla recursiva del trapecio

    Precisión: 1.000000e-08
    La integral entre a= 0.000000 y b= 1.570796 es: 2.038197425911
    ```

  - **regla recursiva de Simpson 1/3**

    Sea {T(j)} la sucesión de aproximaciones obtenidas con la regla recursiva del trapecio. Construimos la sucesión {S(j)}, con $j = 2, 3, \ldots$, definida por

    $$S(j) = \frac{4T(j) - T(j-1)}{3} \tag{13}$$

    La serie {S(j)} converge al valor de la integral, de forma que el último valor de j será aquel que nos proporcione la solución con la precisión deseada.

    EJERCICIO 5:
    Implementar un programa que realice la integral de una función $f(x)$ en un intervalo [a,b], utilizando la regla recursiva de Simpson 1/3.

Aplicarlo al caso: $f(x) = (x^2 + x + 1)cos(x)$, a=0 y b=$\pi/2$

RESULTADO:

```
Regla recursiva de Simpson 1/3

Precisión: 1.000000e-08
La integral entre a= 0.000000 y b= 1.570796 es: 2.038197427324
```

- **regla de integración de Romberg**

A partir de las aproximaciones obtenidas con la regla recursiva del trapecio, {T(j)}, vamos a construir la matriz R de Rombreg de sucesivas mejoras de la siguiente forma:

La primera columna de R es la serie del trapecio

$$R(j,1) = T(j) \qquad j = 1, 2, \ldots, N \tag{14}$$

las siguientes columnas se obtienen por la siguiente regla recursiva

$$R(j,k) = \frac{4^{k-1}R(j,k-1) - R(j-1,k-1)}{4^{k-1}-1} \qquad j \geq k \tag{15}$$

el valor de la integral vendrá dada por R(N,N), de forma que determinaremos el N a utilizar de acuerdo con la precisión que se desee obtener.

EJEMPLO 1:
Utilizar el método de integración de Romberg para calcular las sucesivas aproximaciones a la integral definida $\int_0^{\pi/2}(x^2 + x + 1)cos(x)dx$[1].

En la tabla siguiente se muestran las distintas mejoras obtenidas hasta j=5.

j	R(j,1) regla del trapecio	R(j,2) regla de Simpson	R(j,3) tercera mejora	R(j,4) cuarta mejora	R(j,5) quinta mejora
1	0.78539816339				
2	1.72681265675	2.04061748787			
3	1.96053416656	2.03844133649	2.03829625974		
4	2.01879394807	2.03821387524	2.03819871116	2.03819716277	
5	2.03334734180	2.03819847304	2.03819744623	2.03819742615	2.03819742718

EJERCICIO 6:
Implementar un programa que realice la integral de una función $f(x)$ en un intervalo [a,b], utilizando la regla de Romberg.
Aplicarlo al caso: $f(x) = (x^2 + x + 1)cos(x)$, a=0 y b=$\pi/2$

RESULTADO:

```
Regla recursiva de Romberg

Precisión: 1.000000e-08
La integral entre a= 0.000000 y b= 1.570796 es: 2.038197427067
```

[1] la solución analítica es : $-2 + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{4} = 2.038197427067\ldots$