

Ejercicios del tema y su valor:

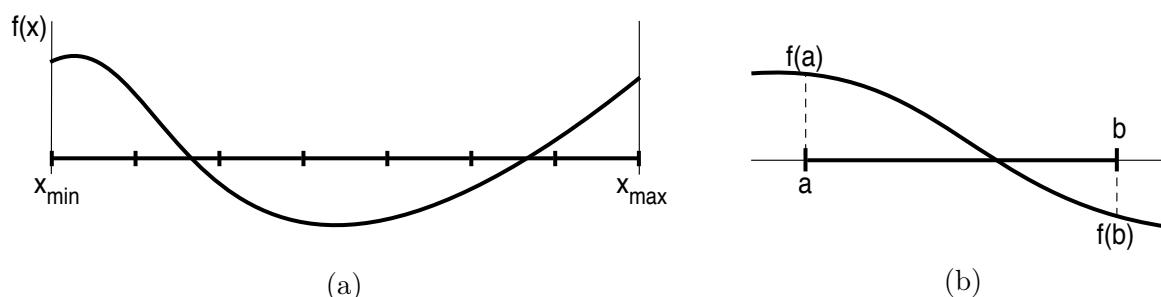
1-bisección (1p), 2-regula falsi (1p), 3-Newton (1p)

Entrega: un ejercicio obligatorio: a elegir**Resolución de ecuaciones no lineales.**Encontrar las raíces reales de $f(x)=0$ en un intervalo (x_{min}, x_{max}) dado.**Localización de raíces**

Muchos de los métodos que se utilizan para calcular las raíces de una ecuación $f(x)=0$, precisan de la localización previa de la raíz en un intervalo (a,b) que la contenga

Supongamos que desemos obtener las raíces de la función $f(x)=0$ en el intervalo $x_{min} \leq x \leq x_{max}$.

El procedimiento a seguir consiste en dividir el intervalo inicial (x_{min}, x_{max}) en un número n de intervalos más pequeños (figura 1a). A continuación se analiza cada uno de estos subintervalos (a,b) , examinando el signo de la función en los extremos del mismo para determinar si la función $f(x)$ tiene una raíz en él (figura 1b)

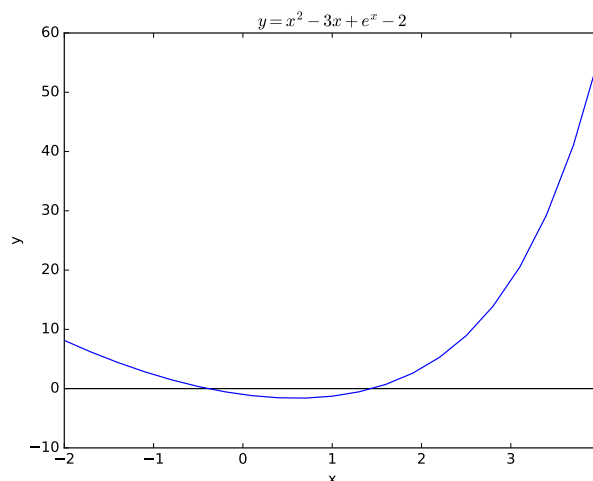
**Fig. 1**

$$Si \begin{cases} signo f(a) \neq signo f(b) & \text{hay solución en el intervalo (a,b)} \\ signo f(a) = signo f(b) & \text{no hay solución en el intervalo (a,b)} \end{cases} \quad (1)$$

EJERCICIO 1:

Dada la función $f(x) = x^2 - 3x + e^x - 2 = 0$, analizar la existencia de raíces en el intervalo $-2 \leq x \leq 4$ (figura 2).

Dividir el intervalo inicial en 20 subintervalos y determinar en cuales de ellos se encuentran sus raíces.

**Fig. 2**

RESULTADO:

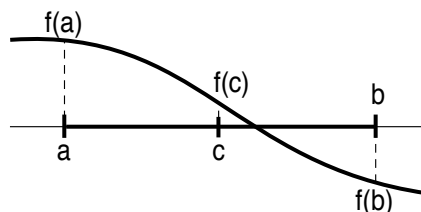
$$\begin{cases} \text{primera raíz} & -0.5 \leq x \leq -0.2 \\ \text{segunda raíz} & 1.3 \leq x \leq 1.6 \end{cases}$$

Bisección.

Supongamos que la raíz que deseamos calcular está contenida en el intervalo (a,b) .

Se obtiene el punto medio del intervalo

$$c = \frac{a+b}{2} \quad (2)$$

**Fig. 3**

y se calcula $f(c)$. Si $f(c)=0$ (o $f(c) \leq$ precisión deseada) significa que c es la raíz buscada. En caso contrario, se comprueba

$$\text{Si el } \begin{cases} \text{signo } f(c) = \text{signo } f(a) & \text{hay una raíz en el intervalo } (c,b) \\ \text{signo } f(c) = \text{signo } f(b) & \text{hay una raíz en el intervalo } (a,c) \end{cases}$$

a continuación se toma el nuevo intervalo y se vuelve a dividir a la mitad, procediendo de esta manera hasta alcanzar la solución con la precisión buscada.

EJERCICIO 2:

Calcular, por el método de la bisección, las raíces de la función $f(x) = x^2 - 3x + e^x - 2 = 0$, en el intervalo $-2 \leq x \leq 4$.

RESULTADO:

Método de la bisección

Soluciones en el intervalo $(-2.000000, 4.000000)$

$x_1 = -0.390274$ $f(x_1) = 0.000007$

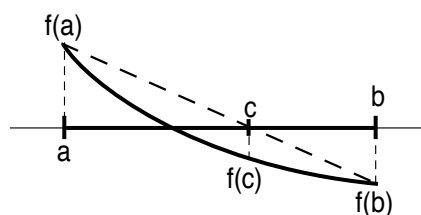
$x_2 = 1.446237$ $f(x_2) = -0.000006$

Régula falsi.

Supongamos que la raíz que deseamos calcular está contenida en el intervalo (a,b) .

La ecuación de la recta que une los puntos $[a, f(a)]$ y $[b, f(b)]$ es

$$f(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) \quad (3)$$

**Fig. 4**

dicha recta corta al eje $f(x)=0$ en el punto c , dado por

$$c = a - f(a) \frac{b - a}{f(b) - f(a)} \quad (4)$$

Si $f(c)=0$ (o $f(c) \leq$ precisión deseada) significa que c es la raíz buscada. En caso contrario, se comprueba

$$\text{Si el } \begin{cases} \text{signo } f(c) = \text{signo } f(a) & \text{hay una raíz en el intervalo } (c,b) \\ \text{signo } f(c) = \text{signo } f(b) & \text{hay una raíz en el intervalo } (a,c) \end{cases}$$

se toma el nuevo intervalo y se repite el proceso hasta alcanzar la solución.

EJERCICIO 3:

Calcular, por el método de la regla falsi, las raíces de la función $f(x) = x^2 - 3x + e^x - 2 = 0$, en el intervalo $-2 \leq x \leq 4$.

RESULTADO:

Método de la regla falsi

Soluciones en el intervalo $(-2.000000, 4.000000)$

$x_1 = -0.390274$ $f(x_1) = 0.000008$

$x_2 = 1.446237$ $f(x_2) = -0.000008$

Newton-Raphson.

La aplicación de este método presupone que la función $f(x)$ tiene primera derivada, $f'(x)$.

La figura 5 muestra el proceso a seguir. Se parte de una primera aproximación de la raíz x_1 (obtenida por cualquier método anterior). Para x_1 se calcula $f(x_1)$ y $f'(x_1)$. La recta tangente a la curva $f(x)$ en el punto x_1 cruza al eje x en el punto x_2 , que será la nueva aproximación de la raíz

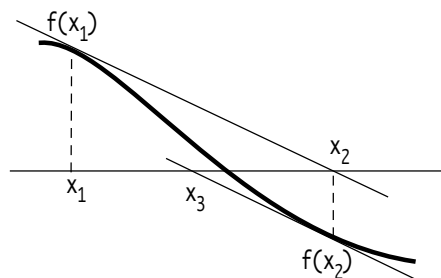


Fig. 5

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad (5)$$

Análogamente se obtienen las aproximaciones sucesivas x_3 , etc. Generalizando la expresión anterior, podemos escribir

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (6)$$

La raíz buscada, x_{k+1} , será aquella para la que $f(x_{k+1})=0$ (o $f(x_{k+1}) \leq$ precisión deseada).

EJERCICIO 4:

Calcular, por el método de Newton-Raphson, las raíces de la función $f(x) = x^2 - 3x + e^x - 2 = 0$, en el intervalo $-2 \leq x \leq 4$.

RESULTADO:

Método Newton-Rapson

Soluciones en el intervalo (-2.000000,4.000000)

x1= -0.390272 f(x1)= 0.000001

x2= 1.446239 f(x2)= 0.000000