Ejercicios del tema y su valor:
1-integral 1 (1p), 2-integral 2 (1p), 3-área circulo (2p), 4-centro masas (4p), 5-volumen esfera (3p), 6-volumen toro (3p)
Entrega: un ejercicio obligatorio: el nº 1, un ejercicio optativo: a elegir entre los restantes

Números aleatorios y método de Monte Carlo.

Vamos a analizar ahora un método para evaluar integrales definidas utilizando números aleatorios, método que es muy poderoso sobre todo cuando se trata de resolver integrales en múltiples dimensiones.

El teorema básico de Monte Carlo permite estimar integrales definidas multidimensionales de la forma

$$I = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} dx_2 \cdots \int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_n = \int_V f(\vec{x}) d^n x \tag{1}$$

mediante la expresión

$$I \approx V \langle f \rangle \pm V \sqrt{\frac{\langle f^2 \rangle - \langle f \rangle^2}{N}} \tag{2}$$

con

$$\langle f \rangle \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f(x_i) \qquad \langle f^2 \rangle \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f^2(x_i) \tag{3}$$

siendo V el volumen multidimensional, $f(x_i)$ el valor de la función en cada uno de los N puntos x_i aleatoriamente distribuidos en V.

El término que aparece después del $\pm$ en la ecuación (2) representa una estimación del error de la integral.

- **Cálculo de integrales de linea**

  EJERCICIO 1:

  Implementar un programa que calcule la integral

  $$I = \int_0^1 (1 - x^2)^{1.5} dx$$

  mediante el método de Monte Carlo.[1]

  RESULTADO:

  Obtener un conjunto N de números aleatorios x_i en el intervalo [0,1] y, de acuerdo con la ecuación (2), aproxime la integral mediante la expresión

  $$I \approx V\langle f \rangle \equiv \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} f(x_i) \qquad (V = 1 - 0) \tag{4}$$

  En la tabla siguiente se da el valor de la integral para distintos números de puntos aleatorios.

[1] La solución exacta es $\frac{3\pi}{16} \approx 0.58904862260\ldots$

N	I	Error
100	0.542766011609	3.15e-02
1,000	0.596106490640	1.04e-02
10,000	0.589884472906	3.29e-03
100,000	0.589156327124	1.05e-03
1,000,000	0.588452115452	3.32e-04
10,000,000	0.588974322757	1.05e-04
100,000,000	0.589047857125	3.32e-05

EJERCICIO 2:
Implementar un programa que calcule la integral

$$I = \int_0^\infty e^{-x} dx$$

mediante el método de Monte Carlo. [2]

RESULTADO:
Hagamos el siguiente cambio de variable

$$y = \frac{1}{x+1}$$

con lo que

$$x = \frac{1}{y} - 1, \qquad dx = -\frac{dy}{y^2}$$

y como cuando $x = 0 \Rightarrow y = 1$ y para $x = \infty \Rightarrow y = 0$, nos queda finalmente

$$I = \int_0^\infty e^{-x} dx = \int_0^1 \frac{1}{y^2} e^{-(\frac{1}{y}-1)} dy$$

Obteniendo un conjunto N de números aleatorios y_i en el intervalo [0,1] podemos aproximar la integral por la ecuación (4). En la siguiente tabla se da la integral para distintos valores de puntos aleatorios.

N	I	Error
100	0.908366745442	5.57e-02
1,000	0.991364933854	1.59e-02
10,000	1.009085861080	4.93e-03
100,000	0.999059706743	1.58e-03
1,000,000	1.000329142065	5.00e-04
10,000,000	1.000022080063	1.58e-04
100,000,000	1.000005711056	5.00e-05

- <u>**Cálculo de integrales de superficie**</u>

  EJERCICIO 3:

$$I = \int_{-R}^{R} dx \int_{-R}^{R} f(x,y) dy \approx V \langle f \rangle \tag{5}$$

[2] La solución exacta es $e^{1-\frac{1}{x}}$

Implementar un programa que calcule, mediante el método de Monte Carlo, el área de un circulo de radio R=1.5 cuyo centro se encuentra en el origen de coordenadas.

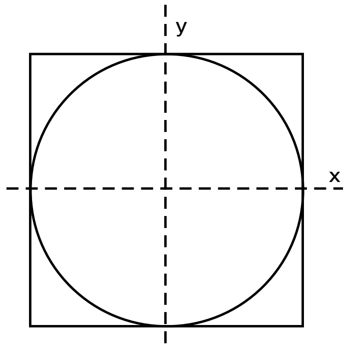

Fig. 1

RESULTADO:
Inscribamos el círculo en un cuadrado de lado 2R como muestra la figura 1. La ecuación (1) adopta la forma

donde $V = (R+R)(R+R) = 4R^2$ representa el área del cuadrado. Definamos *f(x,y)* de tal forma que

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & si\ x^2+y^2 \le R^2 \\ 0 & si\ x^2+y^2 > R^2 \end{cases}$$

Se trazan N pares de puntos aleatorios de coordenadas x_i, y_i tales que $-R < x_i < R$ e $-R < y_i < R$ y se obtiene el área del circulo por

$$S_{cir} = 4R^2 \langle f \rangle = \frac{4R^2}{N} \sum_{i=1}^{N} f(x_i, y_i)$$

En la siguiente tabla se da el valor del área del circulo para diferentes valores de N

N	S	Error
100	7.200000000000	3.60e-01
1,000	7.110000000000	1.16e-01
10,000	7.049700000000	3.71e-02
100,000	7.061940000000	1.17e-02
1,000,000	7.074495000000	3.69e-03
10,000,000	7.066345500000	1.17e-03
100,000,000	7.068223620000	3.70e-04
valor	real 7.068583470577...	

EJERCICIO 4:

Implementar un programa que calcule, mediante el método de Monte Carlo, el centro de masas de la figura 2 supuesta homogénea.

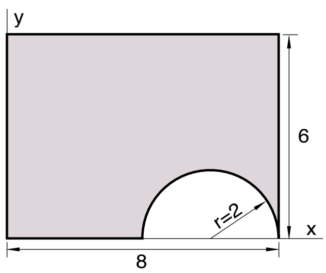

Fig. 2

RESULTADO:
Las coordenadas del centro de masas viene dado por

$$x_G = \frac{\int xdm}{\int dm}, \quad y_G = \frac{\int ydm}{\int dm}$$

siendo $dm = \rho dxdy$

En la siguiente tabla se dan los resultados obtenidos para diferentes valores de N

N	x_G	Error	y_G	Error
100	3.322788417	2.75e-01	3.390963979	2.28e-01
1,000	3.436734471	1.01e-01	3.238444091	8.25e-02
10,000	3.759905273	3.15e-02	3.337816926	2.47e-02
100,000	3.715825414	1.01e-02	3.325536089	7.95e-03
1,000,000	3.694471614	3.19e-03	3.323785383	2.51e-03
10,000,000	3.698428933	1.01e-03	3.323793502	7.95e-04
100,000,000	3.698447315	3.19e-04	3.324003108	2.52e-04
Real:	$x_G = 3.698769\ldots$		$y_G = 3.323999\ldots$	

- **Cálculo de integrales de volumen**

EJERCICIO 5:

Implementar un programa que calcule, mediante el método de Monte Carlo, el volumen de una esfera de radio R=1.5 cuyo centro se encuentra en el origen de coordenadas.

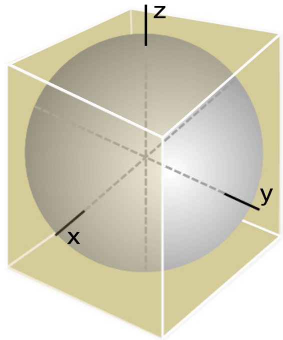

Fig. 3

RESULTADO:
Inscribamos la esfera en un cubo de lado 2R como muestra la figura 3. La ecuación (1) adopta la forma

$$I = \int_{-R}^{R} dx \int_{-R}^{R} dy \int_{-R}^{R} f(x,y,z)dz \approx V_{cub}\langle f \rangle \quad (6)$$

donde V_{cub} representa el volumen del cubo. Definamos *f(x,y,z)* de tal forma que

$$f(x,y,z) = \begin{cases} 1 & si\ x^2+y^2+z^2 \leq R^2 \\ 0 & si\ x^2+y^2+z^2 > R^2 \end{cases}$$

Si trazamos N pares de puntos aleatorios de coordenadas x_i, y_i, z_i tal que $-R < x_i < R$, $-R < y_i < R$ y $-R < z_i < R$, obteniendo cuantos de ellos, N_{int}, caen dentro de la esfera, resulta que

$$V_{esf} = V_{cub}\langle f \rangle = V_{cub}\frac{N_{int}}{N}$$

En la siguiente tabla se da el valor del volumen de la esfera para diferentes valores de N

N	V	Error
100	16.470000000000	1.32e+00
1,000	13.878000000000	4.27e-01
10,000	14.253300000000	1.35e-01
100,000	14.135310000000	4.26e-02
1,000,000	14.124915000000	1.35e-02
10,000,000	14.136473700000	4.26e-03
100,000,000	14.137902270000	1.35e-03
valor	real 14.137166941154...	

EJERCICIO 6:

RESULTADO:

La ecuación de un toro circular centrado en el origen de coordenadas y de eje de revolución el eje z es

Implementar un programa que calcule, mediante el método de Monte Carlo, el volumen del trozo de toro circular representado en la figura 4.

La región de interés se encuentra contenida entre los planos $x = 1$ y $x = 4$, $y = -3$ e $y = 4$, $z = -1$ y $z = 1$.

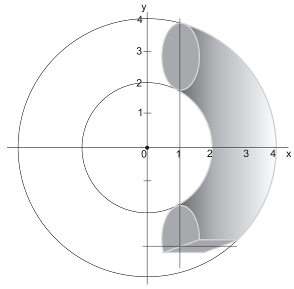

Fig. 4

$$\left(\sqrt{x^2+y^2}-R\right)^2 + z^2 = r^2$$

En la siguiente tabla se da el valor del volumen para diferentes valores de N

N	V	Error
100	24.360000000000	2.07e+00
1,000	21.042000000000	6.64e-01
10,000	22.016400000000	2.10e-01
100,000	22.027740000000	6.63e-02
1,000,000	22.062852000000	2.10e-02
10,000,000	22.096582200000	6.63e-03
100,000,000	22.098762420000	2.10e-03