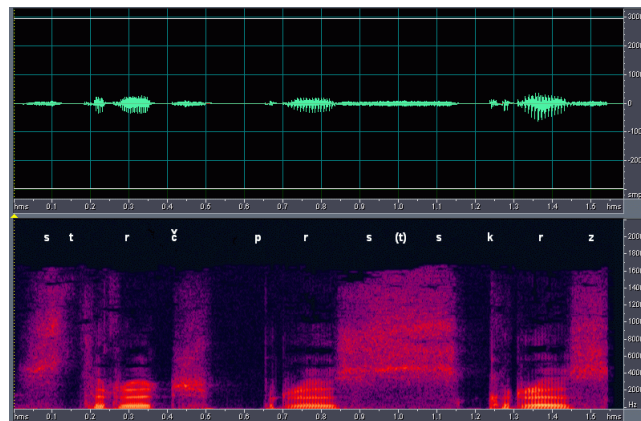

Análisis teórico de los métodos de Fourier y su aplicación en el tratamiento de señales

Por
Montserrat Sacie Alcázar
Javier Navalón Carrasco



Asignatura de Análisis Numérico
FACULTAD DE INFORMÁTICA
UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

Profesor:
Dr. Félix del Teso

MADRID, 2020

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Contexto histórico	2
1.2. Objetivos del proyecto	4
1.3. Contenido de la memoria	4
 I Análisis teórico de los métodos de Fourier	 7
2. Series de Fourier	9
2.1. Conceptos teóricos previos sobre funciones trigonométricas	9
2.2. Definiciones y observaciones	11
2.3. Ejemplo de construcción de una serie de Fourier	12
2.3.1. Implementación y representación gráfica de la onda de sierra y su serie de Fourier	14
3. Convergencia de las series de Fourier	17
3.1. Definición de Convergencia puntual de las series de Fourier	17
3.1.1. Teorema 1 de convergencia	18
3.1.2. Núcleo de Dirichlet	18
3.1.3. Lema de Riemann-Lebesgue	19
3.1.4. Demostración del Teorema 1 de convergencia	20
3.1.5. Teorema de Dirichlet	20
4. Transformada de Fourier	23
4.1. Introducción	23
4.2. Deducción de la T.F a partir de las S.F	23
4.3. Definiciones de la transformada de Fourier	27
4.4. Propiedades de la transformada Fourier	27
4.4.1. Existencia	27
4.4.2. Linealidad	28
4.4.3. Escalonamiento o cambio de escala	28
4.4.4. Desplazamiento en el tiempo	29
4.4.5. Desplazamiento en la frecuencia	29
4.4.6. Convolución	29
4.5. Ejemplos para el cálculo de la T.F continua	30
4.5.1. Función exponencial decreciente	30
4.5.2. Función delta	31
4.5.3. Función constante	31
4.5.4. Función pulso rectangular	31

II	Análisis de Fourier aplicado al tratamiento de señales	33
5.	Caso práctico: tratamiento de señales de voz y sonido	35
5.1.	Introducción	35
5.1.1.	Transformada Discreta de Fourier (DFT)	36
5.1.2.	Transformada Rápida de Fourier	37
5.2.	Aplicación 1: Grabación y modificación de un audio de voz	37
5.3.	Aplicación 2: Filtrado de una canción mediante la eliminación de frecuencias altas	40
6.	Conclusiones y Agradecimientos	45
6.1.	Conclusiones	45
6.1.1.	Conclusiones de la primera parte	45
6.1.2.	Conclusiones de la segunda parte	45
6.1.3.	Conclusiones de la asignatura	46
6.2.	Agradecimientos	46
16.	Bibliografía y enlaces de referencia	49

Capítulo 1

Introducción

En el ámbito de la ingeniería se han empleado a lo largo de la historia métodos de análisis numérico que tratan de reducir la complejidad matemática de los problemas planteados. Estas técnicas se basan en general en la transformación matemática de las ecuaciones que resuelven el problema en ecuaciones simplificadas cuyo proceso de análisis es más sencillo y cuyo resultado se aproxima al resultado del problema original (4). Un ejemplo claro de técnica de transformación numérica ampliamente usado es el uso del logaritmo como se puede ver en la figura 1.1.

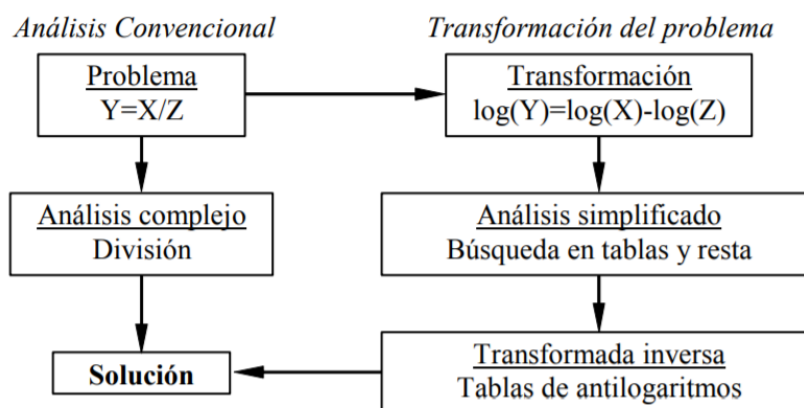


Figura 1.1. Esquema de transformación del problema de cálculo de una división en un problema de aplicación de logaritmos. Imagen obtenida de www.ugr.es

En este proyecto final de la asignatura de Análisis Numérico presentamos el estudio de una de las transformaciones numéricas más significativas utilizadas en ámbitos como el de tratamiento de señales: La Transformada de Fourier.

Antes de comenzar con el análisis teórico de los métodos de Fourier, describiremos brevemente quién fue Fourier así como el contexto histórico en el que desarrolló sus estudios que le llevaron a crear los métodos aquí descritos: las series de Fourier, el cálculo de coeficientes de Fourier y la transformada. En los apartados posteriores aclararemos los objetivos que motivan el desarrollo de este proyecto así como la distribución del contenido de esta memoria.

1.1. Contexto histórico

Jean Baptiste Joseph Fourier nació en el 21 de marzo de 1768 en Auxerre, Francia. En 1789 entró en la Ecole Royale Militaire de Auxerre donde descubrió su pasión por las matemáticas. A lo largo de su recorrido profesional destacan hechos como la presentación de un trabajo sobre ecuaciones algebraicas en la Real Academia de las Ciencias en París en 1787 o su admisión en 1795 en la Ecole Normale de esa misma ciudad, donde fue alumno de Lagrange y Laplace.



Figura 1.2. Retrato de Jean-Baptiste Joseph Fourier realizado por el pintor y dibujante francés Louis Léopold Boilly. Imagen obtenida de www.wikipedia.es

La historia del Análisis de Fourier tiene más de 200 años y sus orígenes se encuentran unos 60 años antes de que J. Fourier presentara la primera versión de su trabajo sobre la teoría de la conducción del calor a la Academia de París en 1807. (9)

En el siglo *XVIII* se empezaron a desarrollar poderosas nuevas teorías sobre la mecánica celeste y la mecánica del continuo motivado por la publicación del Cálculo de Leibnitz y Newton. El cálculo se había convertido en la herramienta principal para estudiar y modelizar la Naturaleza. El foco de los estudios se centraban en representar la evolución de un fenómeno natural por medio de una ecuación diferencial que relacionara las distintas magnitudes implicadas en dicho fenómeno. Esta ecuación se obtenía a partir de un análisis del fenómeno a escala infinitesimal mediante la aplicación de leyes naturales que se iban descubriendo (9). Los fenómenos que podían describirse en términos de una sola variable estaban determinados por ecuaciones diferenciales ordinarias que relacionaban la función incógnita con sus derivadas. Estos cálculos eran posibles ya tras los desarrollos planteados desde comienzos del siglo *XVII*. Sin embargo, cuando el fenómeno estudiado venía dado por dos o más variables significativas, su modelización se expresaba mediante una ecuación con derivadas parciales, cuyo cálculo era mucho más complejo. En esta línea destaca el problema planteado de “la cuerda vibrante” o ecuación de ondas en cuyo

estudio se encontraban inmersos los matemáticos y físicos de la época como D'Alembert y posteriormente Leonard Euler.

El problema de la cuerda vibrante se enuncia a continuación:

Supongamos que tenemos una cuerda flexible fijada en los extremos $(0,0)$ y $(\pi,0)$ (por conveniencia) de manera que quede tensa. Ahora tiramos de ella formando una curva $y = f(x)$ y seguidamente la soltamos. Suponiendo que los desplazamientos de la cuerda son en el mismo plano y el vector del desplazamiento es perpendicular al eje de abscisas. ¿Qué función $u(x,t)$ describiría el movimiento de dicha cuerda? Siendo $x \in [0,\pi]$, eje de abscisas, y el tiempo $t \geq 0$, se pretende obtener $u(x,t)$ a partir de $f(x)$

D'Alembert planteó primero una serie de condiciones que debía cumplir la función u en las que incluía la ecuación de ondas (ecuación en derivadas parciales de segundo orden) y posteriormente Euler publicó uno de sus 15 libros dedicados a este estudio, en el que coincidía con D'Alembert en sus teorías excepto en la definición de las funciones iniciales f . Mientras D'Alembert consideraba que f debía ser una expresión analítica o fórmula concreta, Euler discrepaba afirmando que la función f podía venir dada por expresiones diferentes. La función inicial admitida por Euler era lo que conocemos hoy por una función continua a trozos. Aproximándonos al punto de partida de Fourier, el físico, matemático y músico Daniel Bernoulli propuso en 1753 que la posición general de la cuerda se obtenía a partir de la superposición de ondas más sencillas de la forma

$$u_n(x,t) = \sin(nx) \cos(nt) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

al igual que el sonido que emite una cuerda vibrante de un instrumento musical está formado por la superposición de armónicos. Tanto Euler como D'Alembert rechazaron la idea de que una función periódica pudiera representarse por una serie trigonométrica.

Durante la Revolución Industrial, con la invención de la máquina de vapor se buscó desarrollar una teoría matemática para explicar la conductividad del calor. En esta línea Joseph Fourier, apoyándose en los resultados de Bernoulli para el problema de la cuerda vibrante, presentó en su trabajo un método para el cálculo explícito de soluciones de las ecuaciones diferenciales implicadas en el análisis del fenómeno de transmisión de calor. Durante su estudio, Fournier y Bernoulli se plantearon si sería posible obtener una expresión formada por superposición de soluciones sencillas para cualquier $f = u(x,t)$ dada, de la forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-n^2 t) \sin(nx)$$

Fourier finalmente no solo lo afirmó, sino que proporcionó una expresión explícita para los coeficientes a_n que pasaron a ser conocidos como Coeficientes de Fourier:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

Este fue uno de los mayores logros de Fourier aunque inicialmente fue duramente cuestionado y puesto en duda por la Academia Francesa a la que Fourier presentó su estudio en un concurso en 1801. El motivo de no ser completamente aceptadas sus teorías era la falta de demostraciones del proceso que le condujo a la obtención de sus resultados así como la validez de los mismos. Fourier presentó únicamente los resultados empíricos de

varios problemas resueltos con la aplicación de sus ecuaciones.

El primero que planteó un conjunto de condiciones suficientes para la convergencia de las series de Fourier y por tanto se acercó a demostrar su validez fue Dirichlet. Durante el siglo *XIX* se continuó estudiando distintos tipos de las convergencias de las series de Fourier produciéndose grandes avances. Así los métodos de Fourier han ido ganando peso y el apoyo de la comunidad científica hasta nuestros días pues los encontramos incluidos en infinitud de aplicaciones como el estudio y tratamiento del sonido y la luz; la teoría de números; la física de plasmas y semiconductores; el procesamiento de señales; la propagación de ondas o incluso el cálculo de mareas.

1.2. Objetivos del proyecto

Este proyecto nace de la búsqueda de un método de análisis numérico existente que se aplique en la actualidad y que nos permita aplicar algunos conocimientos aprendidos en la asignatura de Análisis Numérico como son el estudio de los diversos errores para demostrar la convergencia de una función y su cálculo aproximado.

Nuestro interés por desarrollar este proyecto sobre las series y la transformada de Fourier surge tras haber aplicado estos métodos en las asignaturas de Redes de las carreras de Ingeniería informática e Ingeniería del Software, sin haber tenido oportunidad de realizar un análisis teórico y comprender mejor su funcionamiento.

Así una vez escogido el tema, los objetivos de este proyecto son:

- Estudiar y comprender el cálculo de las Series de Fourier.
- Calcular las series de Fourier para una función de onda no demasiado compleja apoyándonos en la herramienta Matlab y estudiar el error de las series así como representar los resultados obtenidos en gráficas que nos facilite su comprensión.
- Estudiar y demostrar la convergencia de las series de Fourier.
- Comprender la relación entre las series de Fourier y la transformada de Fourier.
- Estudiar y comprender la Transformada de Fourier y la Transformada de Fourier inversa para funciones de ondas continuas.
- Aplicar las expresiones del cálculo de la transformada de Fourier en algunos ejemplos de funciones de onda.
- Desarrollar en Matlab un programa para el tratamiento de señales de sonido apoyándonos en el uso de la transformada de Fourier y su transformada inversa.

1.3. Contenido de la memoria

Esta memoria consta de 6 capítulos:

- En el primer capítulo introductorio tratamos de relatar brevemente el contexto histórico en el que se enmarca el estudio realizado por Fourier así como por otros matemáticos que llevan a Fourier a la obtención de sus métodos. Además planteamos los objetivos que se pretenden alcanzar con este proyecto.
- El capítulo 2 está dedicado a la definición de las series de Fourier así como de conceptos matemáticos necesarios para su comprensión y un apartado práctico en el que calculamos las series de la función onda de sierra.
- En el capítulo 3 se estudia la Convergencia puntual de las series de Fourier y se presentan los principales teoremas planteados y demostraciones.
- El capítulo 4 está dedicado a la Transformada de Fourier. Primero se explica la relación de las series y la transformada de Fourier. A continuación se definen la transformada y la transformada inversa de Fourier para luego presentar una serie de propiedades que afectan a su cálculo y terminar con una aplicación práctica: el cálculo de la T.F sobre las funciones constante, exponencial decreciente, delta y pulso rectangular.
- El quinto capítulo pertenece a la segunda parte de la memoria. Este está dedicado a la explicación detallada de dos aplicaciones prácticas desarrolladas, relacionadas con el tratamiento de señales de audio y el análisis de Fourier.
- En el sexto y último capítulo se presentan las conclusiones personales de los autores, así como opiniones respecto al desarrollo del trabajo y una última sección de agradecimientos.

Parte I

Análisis teórico de los métodos de Fourier

Capítulo 2

Series de Fourier

2.1. Conceptos teóricos previos sobre funciones trigonométricas

Cuando nos encontramos ante el cálculo de las Series de Fourier, resultará útil conocer y comprender las siguientes relaciones trigonométricas (3):

Relaciones trigonométricas de la función seno

Sea la función $f(x) = \sin(x)$. Esta función es continua y periódica de periodo $T = 2\pi$ cuya representación gráfica en el intervalo $[-4\pi, 4\pi]$ del eje x es la siguiente:

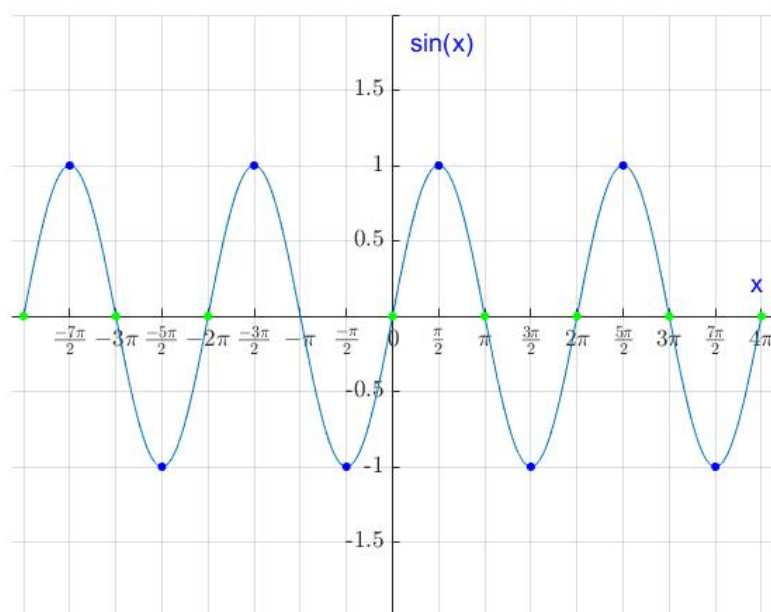


Figura 2.1. Representación de la función $f(x) = \sin(x)$, los ceros de la función representados con puntos verdes y los máximos y mínimos de la función con puntos azules

Conociendo que $\sin(x) = \sin(x + 2\pi)$ y $\sin(0) = 0$, observamos que los ceros de la función $\sin(x)$ se alcanzan en $x = k\pi$ donde $k \in \mathbb{N}$, es decir, $\sin(k\pi) = 0$

Observando los máximos y mínimos de la función $\sin(x)$ en la figura 2.1, deducimos que:

- $\sin(x) = 1$ si y solo si $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ donde $k \in \mathbb{N}$
- $\sin(x) = -1$ si y solo si $x = \frac{-\pi}{2} + 2k\pi$ donde $k \in \mathbb{N}$

Relaciones trigonométricas de la función coseno

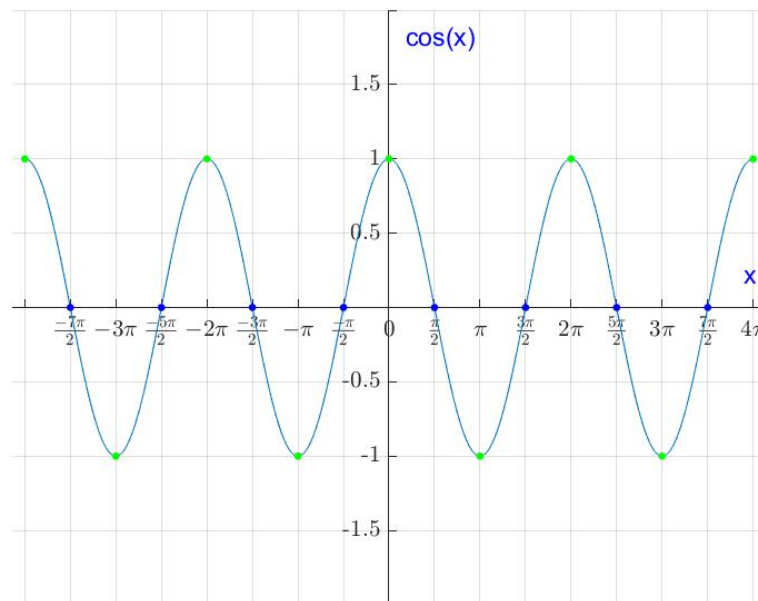


Figura 2.2. Representación de la función $\cos(x)$, los ceros de la función representados con puntos azules y los máximos y mínimos como puntos verdes

Sea la función $f(x) = \cos(x)$ y considerando que $\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$, observamos que los ceros de la función se alcanzan en $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ donde $k \in \mathbb{N}$

Del mismo modo, considerando los máximos y mínimos de la función $\cos(x)$ afirmamos:

- $\cos(x) = 1$ si y solo si $x = 2k\pi$ donde $k \in \mathbb{N}$
- $\cos(x) = -1$ si y solo si $x = (2k - 1)\pi$ donde $k \in \mathbb{N}$

Integrales de funciones trigonométricas

Considerando las áreas bajo la curva de las funciones seno y coseno (ver imagen 2.3), apreciamos que el área bajo $f(x)$ en el periodo T es 0, es decir:

$$\int_0^{2\pi} \sin(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) dx = A_1 + A_2 = A_1 - A_1 = 0$$

La conclusión es la misma para la función $\cos(x)$:

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \cos(x)dx = 0$$

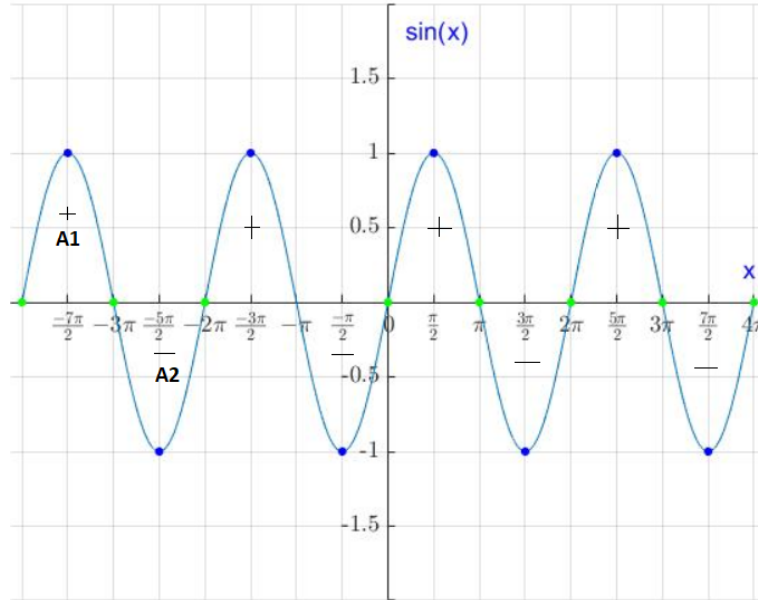


Figura 2.3. Representación de la función $\sin(x)$ con las áreas que deja la curva positivas y negativas bajo ella señaladas.

2.2. Definiciones y observaciones

Definición 2.1

Sea $f(x)$ una función periódica para $x \in \mathbb{R}$ en un intervalo $[\alpha, \alpha + T]$ e integrable en dicho intervalo, se define **las series de Fourier de $f(x)$** como una suma de sinusoidales de la forma:

$$S(f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)) \quad (2.1)$$

donde ω recibe el nombre de frecuencia fundamental siendo $\omega = \frac{2\pi}{T}$ y los números $\{a_n, n = 0, 1, \dots\}$ y $\{b_n, n = 1, 2, \dots\}$ se les conoce como coeficientes de Fourier (ver definición 2.2).

Observación: podemos calcular una aproximación de las series de Fourier de una función continua truncando el sumatorio de la ecuación (2.1) a un número natural N (2).

Definición 2.2

Dada una función f integrable y periódica en un intervalo $[\alpha, \alpha + T]$, los coeficientes $\{a_n, n = 0, 1, \dots\}$ y $\{b_n, n = 1, 2, \dots\}$ con los que construimos las series trigonométricas de

Fourier de f se llaman **coeficientes de Fourier**.

Estos coeficientes vienen dados por las siguientes expresiones:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) dt$$

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) \cos(n\omega t) dt \quad (2.2)$$

$$b_n = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) \sin(n\omega t) dt \quad (2.3)$$

Definición 2.3

La serie de Fourier de una función se puede escribir de forma compleja como sigue:

$$S(f)(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (c_n e^{in\omega x})$$

donde c_n son coeficientes complejos llamados coeficientes de Fourier expresados de forma compleja como sigue:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) e^{-in\omega t} dt$$

2.3. Ejemplo de construcción de una serie de Fourier

Una onda muy utilizada en sintetizadores musicales es la de **sierra**, la cuál usaremos de ejemplo. Es utilizada para recrear los sonidos típicos de instrumentos de cuerda, ya que el fenómeno de stick-slip que se produce en el arco al rozar con la cuerda tiene la misma forma. Se trata de una función periódica, luego es posible representarla mediante su serie de Fourier.

Numéricamente, esta es la fórmula de la onda para amplitud 1, siendo $[t]$ la parte entera de t :

$$x(t) = t - [t]$$

Tal y como vimos en la sección anterior, podemos ir calculando los coeficientes de la serie que forman la onda.

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} (t - [t]) \cos(2\pi t \frac{n}{T}) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} (t - [t]) \sin(2\pi t \frac{n}{T}) dt$$

Se ha escogido para su representación la onda de sierra con periodo $T = 1$. Escogemos el intervalo $[0, 1]$ luego:

$$a_n = 2 \int_0^1 t \cos(2\pi t \frac{n}{T}) dt$$

Función onda de sierra de periodo T = 1

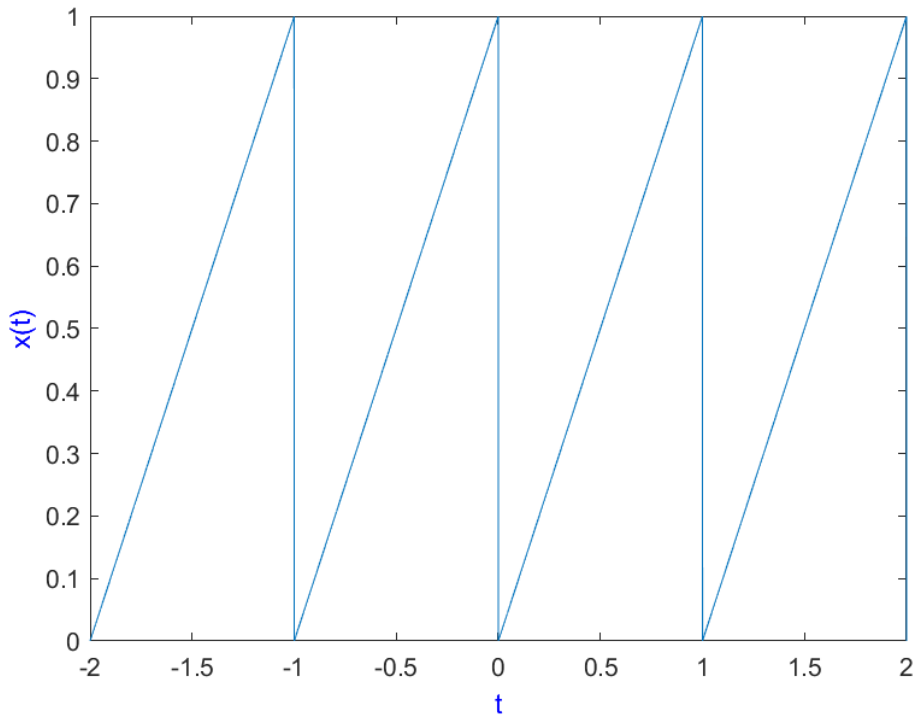


Figura 2.4. Representación de la onda de sierra

$$b_n = 2 \int_0^1 t \sin(2\pi t \frac{n}{T}) dt$$

Nótese que $[t] = 0$ en el intervalo $[0, 1)$.

Aplicando integración por partes:

$$a_n = 2[\frac{t}{2\pi n} \sin(2\pi t n) \Big|_0^1 - \frac{1}{2\pi n} \int_0^1 \sin(2\pi t n) dt]$$

$$b_n = 2[\frac{-t}{2\pi n} \cos(2\pi t n) \Big|_0^1 + \frac{1}{2\pi n} \int_0^1 \cos(2\pi t n) dt]$$

Sabiendo que $\cos(2\pi n) = 1$ y $\sin(2\pi n) = 0 \forall n \in 1, 2, \dots$

$$a_n = 2[\frac{1}{2\pi n} \sin(2\pi n) + \frac{1}{(2\pi n)^2} \cos(2\pi n t) \Big|_0^1] = 0$$

$$b_n = 2[\frac{-1}{2\pi n} \cos(2\pi n) + \frac{1}{(2\pi n)^2} \sin(2\pi n) \Big|_0^1] = \frac{-1}{\pi n}$$

Necesitamos calcular también a_0 :

$$a_0 = 2 \int_0^1 t dt = 1$$

Por lo tanto la serie correspondiente es:

$$S(f)(t) = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n} \sin(2\pi n t)$$

2.3.1. Implementación y representación gráfica de la onda de sierra y su serie de Fourier

Con el fin de visualizar la función onda de sierra (figura 2.4) así como las Series de Fourier de dicha función, hemos implementado en Matlab una función que calcula las Series de Fourier de la onda de sierra (5) de ordenes $n = 1, 2, \dots, N$ en un conjunto de puntos x . (ver función 2.5).

```
function [Sx] = serieFourier(x, N)
%SERIEFOURIER en los puntos x , de orden N

xRep = repmat(x,N,1);
n = 1:1:N;
n = n';
nRep = repmat(n,1,size(xRep,2));
den = pi*nRep;
if N == 1
    Sx = 1/2 - (1./den .* sin(2*pi*nRep .*xRep));
else
    Sx = 1/2 - sum(1./den .* sin(2*pi*nRep .*xRep));
    Sx = Sx';
end
end
```

Figura 2.5. Código implementado para el cálculo de las series de Fourier de la onda de Sierra dado el orden de la serie N y un array de puntos x

A continuación representamos en un plot para un conjunto de puntos t los valores que toma la onda de Sierra $x(t)$ y los valores que toma $S(f)(t)$ para $N = 1, 2, 3, 4$.

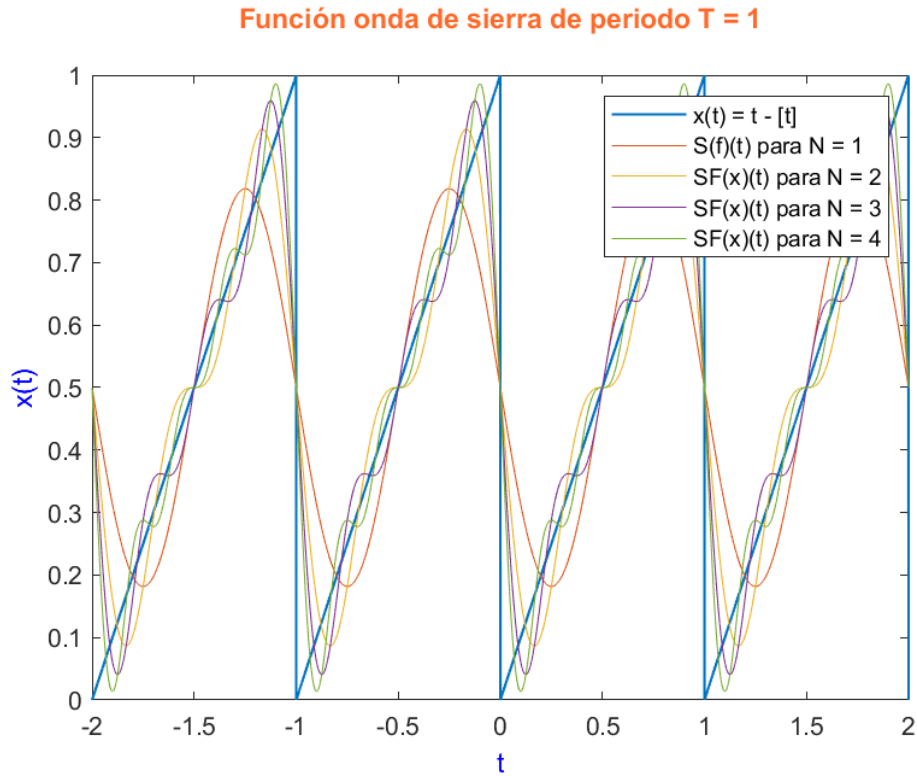


Figura 2.6. Representación gráfica de $x(t)$ y $S(f)(t)$ para $N = 1, 2, 3, 4$

En la figura anterior observamos como las Series de Fourier de órdenes crecientes se aproximan más a la función $x(t)$.

A continuación calculamos las Sf_N para diferentes valores de $N = 2^j$ para $j = 1, 2, 3, 4, 5, \dots, 12$ sobre un conjunto de puntos $t \in (0, 1)$ y calculamos el error cometido por Sf_N en el espacio L^∞ y L^1 de la siguiente forma:

$$E(L^\infty)(Sf_N) = \max(Sf_N(t) - f(t))$$

$$E(L^1)(Sf_N) = \sum (Sf_N(t) - f(t)) * h$$

donde h es la distancia que separa a dos puntos del conjunto de puntos t .

Resumimos los resultados obtenidos en la siguiente tabla:

Errores de la Serie de Fourier		
N	Error en L^∞	Error en L^1
1	0.4700	0.0955
2	0.4501	0.0643
4	0.4104	0.0413
8	0.3327	0.0230
16	0.1891	0.0119
32	0.0667	0.0058
64	0.0564	0.0032
128	0.0187	0.0015
256	0.0185	$8,77 \times 10^{-4}$

512	0.0072	$3,98 \times 10^{-4}$
1024	0.0025	$1,88 \times 10^{-4}$
2048	0.0025	$1,09 \times 10^{-4}$
4096	0.0012	$5,35 \times 10^{-5}$

A continuación representamos gráficamente los errores anteriores en Matlab (ver código 2.7).

```
clf;
N = [1 2 4 8 16 32 64 128 256 512 1024 2048 4096];
loglog(N, eLinf, '-or', N, eL1, '-og', N, 1./N, '--ob')
legend('Error en Linf', 'Error en L1', 'f(N) = 1/N');
```

Figura 2.7. Código para representar los errores en función del orden N de $S_N f$ y una curva que represente el descenso de orden 2 del error (para cada valor N del eje x le corresponde un valor $1/N$ del eje y)

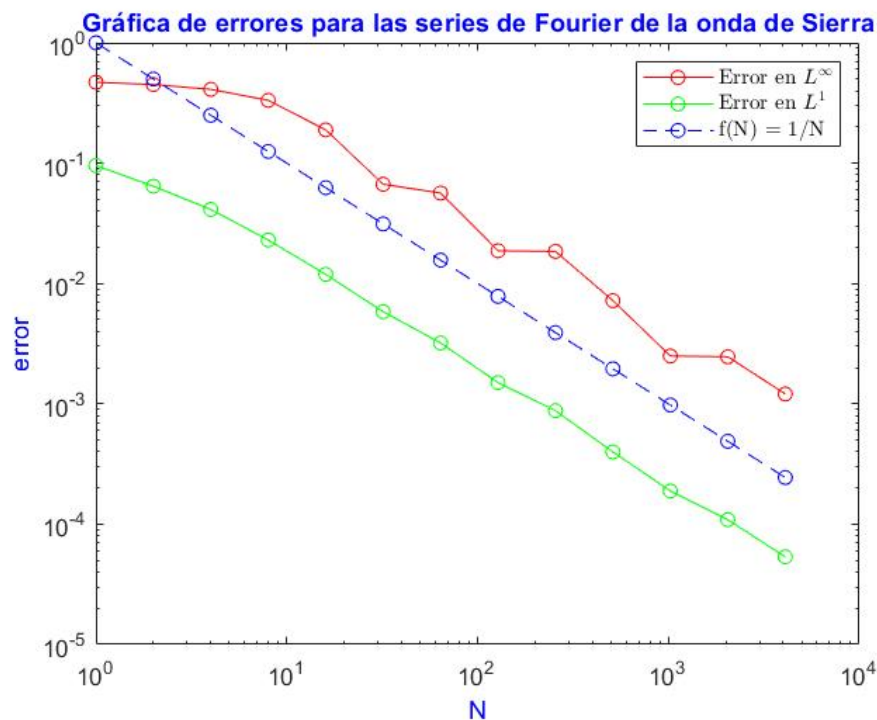


Figura 2.8. Gráfica del error de las Series de Fourier $S_N f$ de la función onda de sierra, en función del valor de N

Analizando los valores que toma el error en la tabla para un $N = 2^j$ y el siguiente error calculado consecutivo para $N = 2^{j+1}$ así como observando las pendientes de las curvas de errores en la gráfica anterior; concluimos que la gráfica del error en L^∞ o error máximo decrece con un orden 1 aproximadamente. En cuanto al error en L^1 o error dado por la diferencia de áreas entre f y $S_N f$, también es decreciente de orden 1 aunque dicha gráfica se sitúa muy por debajo de la gráfica del error máximo.

Capítulo 3

Convergencia de las series de Fourier

Sea f una función definida para todo $x \in \mathbb{R}$ y de periodo 2π y sea $S(f)$ su serie de Fourier, queremos conocer cuando convergen así como demostrar dicha convergencia y por tanto probar que $S(f)(x)$ es una buena aproximación de $f(x)$ (2).

El problema que nos encontramos, por tanto, se puede formular del siguiente modo:

Encontrar condiciones suficientes sobre la función f que aseguren la convergencia de la serie de Fourier.

3.1. Definición de Convergencia puntual de las series de Fourier

Definición 3.1

Sea $S_N f$ la suma parcial N -ésima de la serie de Fourier de f , es decir,

$$S_N f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$$

decimos que $S_N f$ y f convergen en un punto x_0 si

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(x_0) = f(x_0) \quad (3.1)$$

Definición 3.2

El error cometido por la serie de Fourier de orden N de f en un punto x_0 respecto al valor exacto $f(x_0)$ lo definimos como el valor absoluto de la diferencia entre la serie de Fourier de f en x_0 y el valor de la función en x_0 , donde $x_0 \in \mathbb{R}$, es decir:

$$E(S_N f)(x_0) = |S_N f(x_0) - f(x_0)| \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

Conociendo la expresión del error, podemos re-definir el criterio de convergencia expresado en la definición 3.1 en función del mismo:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E(S_N f)(x_0) = 0$$

3.1.1. Teorema 1 de convergencia

Teorema 3.1

Sea f una función integrable en $[\alpha, \alpha + T]$ para $T = 2\pi$ que tiene derivada en el punto x_0 . Entonces, podemos afirmar que la serie de Fourier de $f(x)$ converge a $f(x_0)$ en x_0 .

Para poder demostrar este teorema abordaremos en las siguientes secciones una serie de teoremas y lemas sobre los que se apoya dicha demostración.

3.1.2. Núcleo de Dirichlet

La función Núcleo de Dirichlet de orden N , $D_N(x)$ viene definida por la siguiente expresión

$$D_N(x) = \frac{1}{2} + \cos(x) + \cos(2x) + \dots + \cos(Nx) \quad (3.2)$$

Queremos aplicar dicha expresión en la suma parcial $S_N f(x)$ para conseguir que $S_N f$ alcance una forma similar a la expresada en el teorema de Dirichlet (ver ecuación (3.7)). Desarrollamos $S_N f(x)$ sustituyendo a_n y b_n por las expresiones (2.2) y (2.3) respectivamente:

$$\begin{aligned} S_N f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t) dt + \sum_{n=1}^N \left[\frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t) \cos(nt) dt \cos(nx) \right. \\ \left. + \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t) \sin(nt) dt \sin(nx) \right] \end{aligned}$$

Aplicando la propiedad de suma de integrales, introduciendo los factores $\cos(nx)$ y $\sin(nx)$ en la integral y sacando factor común $\frac{1}{\pi}$ queda la expresión:

$$S_N f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^N \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t) [\cos(nt) \cos(nx) + \sin(nt) \sin(nx)] dt$$

Aplicamos la relación trigonométrica $\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$, eliminando así las funciones $\sin(nt)$ y $\sin(nx)$ de la expresión:

$$S_N f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^N \cos(n(x-t)) \right] dt$$

Finalmente podemos aplicar la definición del Núcleo de Dirichlet (3.2) sustituyendo en el lugar de x , $x-t$:

$$S_N f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t) D_N(x-t) dt$$

Una vez hemos conseguido incluir el núcleo de Dirichlet en la integral de la expresión de $S_N f$, buscamos expresar el $D_N(t)$ en función de $\sin(t)$. Este desarrollo será útil para aplicar el Lema de Riemann-Lebesgue (3.5) explicado más adelante.

La relación trigonométrica

$$\sin(x) \cos(y) = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

para $x = nt$ y $y = \frac{t}{2}$ y multiplicada por 2 da lugar a:

$$2 \cos(nt) \sin(\frac{t}{2}) = \sin(\frac{n+1}{2}t) - \sin(\frac{n-1}{2}t)$$

Aplicando la relación trigonométrica anterior y multiplicando por $\sin(\frac{t}{2})$ podemos expresar el núcleo de Dirichlet de la siguiente forma

$$D_N(t) = \frac{\sin(N + \frac{1}{2}t)}{2 \sin(\frac{t}{2})}$$

Algunas de las propiedades del núcleo de Dirichlet que pueden ser de utilidad se exponen a continuación.

Propiedades

1. D_N es una función periódica de periodo 2π puesto que está compuesto por un sumatorio de $\cos(ix)$ para $i = 1, 2, \dots, N$ y $\cos(ix)$ es una función 2π periódica. Esta propiedad permite cambiar el intervalo de integración a cualquier intervalo de longitud 2π .

2. D_N es una función par, es decir, $D_N(-t) = D_N(t)$ ya que $\cos(t) = \cos(-t)$ y por tanto $D_N(t) = \frac{1}{2} + \cos(it) = \frac{1}{2} + \cos(-it) = D_N(-t)$, $i = 1, 2, 3, \dots, N$

3. $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) dt = 1$. Si lo desarrollamos podemos comprobar esta igualdad:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) dt = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{k \neq 0} n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt) \right] = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

La propiedad 1 permite cambiar el intervalo de integración a cualquier otro de longitud 2π y como f tiene también $T = 2\pi$ se puede expresar

$$S_N(f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_N(t) dt. \quad (3.3)$$

Por otro lado, si cambiamos t por $-t$ en el intervalo $(-\pi, 0)$ y utilizamos la segunda propiedad obtenemos la expresión

$$S_N(f)(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [f(x+t) + f(x-t)] D_N(t) dt. \quad (3.4)$$

3.1.3. Lema de Riemann-Lebesgue

Lema 3.1

Si f es integrable y λ real

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t) \sin(\lambda t) dt = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(t) \cos(\lambda t) dt = 0 \quad (3.5)$$

En particular se deduce que los coeficientes de Fourier de una función integrable tienden a cero.

La demostración del lema está disponible en la bibliografía (2).

3.1.4. Demostración del Teorema 1 de convergencia

Queremos demostrar que $S_N f(x_0) - f(x_0)$ tiende a 0 cuando N tiende a infinito. Para ello, partimos de la propiedad 3 del núcleo de Dirichlet y la igualdad (3.3) obtenida por la propiedad 1 para escribir:

$$\begin{aligned} S_N f(x_0) - f(x_0) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x_0 + t) - f(x_0)] \frac{\sin(N + \frac{1}{2})t}{2 \sin(\frac{t}{2})} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t} \frac{t}{2 \sin(\frac{t}{2})} \sin(N + \frac{1}{2}) dt \end{aligned} \quad (3.6)$$

Para poder aplicar el lema de Riemann-Lebesgue a (3.6), tenemos que demostrar que $\frac{f(x_0+t)-f(x_0)}{t} \frac{t}{\sin(\frac{t}{2})}$ es integrable en el intervalo $(-\pi, \pi)$, y que $\sin(N + \frac{1}{2})$ es igual a $\sin(\lambda t)$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$, (que es trivial porque $N + \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$). Como sabemos que f es derivable en x_0 , sabemos que

$$\frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t}$$

es integrable en el intervalo $(-\pi, \pi)$.

Por otro lado $\frac{t}{\sin(\frac{t}{2})}$ es una función continua salvo en $t = 0$, que es una discontinuidad evitable, luego también es integrable en el intervalo.

Como el producto de dos funciones integrables en el mismo intervalo es integrable, podemos aplicar el lema de Riemann-Lebesgue y

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(x_0) - f(x_0) = 0$$

o lo que es lo mismo, el error de la serie N -ésima de Fourier en x_0 tiende a 0 cuando N tiende a infinito, llegando a converger en $f(x_0)$.

3.1.5. Teorema de Dirichlet

Si f es continua a trozos (existen un número finito de discontinuidades en el intervalo) tenemos una generalización del resultado que hará que f converja a $\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$

A partir del núcleo de Dirichlet, obtenemos una nueva forma de escribir $S_N f(x)$, siendo f 2π -periódica

$$S_N f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x + s) D_N(s) ds \quad (3.7)$$

Si además f es continua a trozos con primera derivada continua a trozos llegamos al:

Teorema 3.2 o teorema de Dirichlet para convergencia de series de Fourier

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

Demostración

Demostraremos que $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(x) - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = 0$

Reescribimos $\lim_{N \rightarrow \infty} S_N f(x) - \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$ como

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x_0 + t) - f(x_0^+) + f(x_0 - t) - f(x_0^-)] \frac{\sin(\frac{1}{2} + N)t}{2 \sin(\frac{t}{2})} dt$$

usando la propiedad 3 del núcleo de Dirichlet. De la misma forma que en el teorma 1, usando el lema de Riemann-Lebesgue vemos que

$$\frac{[f(x_0 + t) - f(x_0^+) + f(x_0 - t) - f(x_0^-)]}{2 \sin(\frac{t}{2})}$$

es integrable en el intervalo por ser el producto de dos funciones integrables.

Vemos también que $\sin(\frac{N+1}{2})t = \sin(\lambda t)$ con $\lambda = N + \frac{1}{2}$, luego

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [f(x_0 + t) - f(x_0^+) + f(x_0 - t) - f(x_0^-)] \frac{\sin(\frac{1}{2} + N)t}{2 \sin(\frac{t}{2})} dt = 0$$

Lo que nos sirve para poder aplicar el criterio de convergencia a funciones con puntos de discontinuidad evitables.

Capítulo 4

Transformada de Fourier

4.1. Introducción

Ya conocemos las series de Fourier (S.F) y sus aplicaciones. Sabemos cómo convertir una serie periódica a una suma de senos y cosenos con unos coeficientes conocidos. Ahora bien, ¿qué pasa si la señal no es periódica? Para ello tenemos la transformada de Fourier (T.F), que esencialmente transforma cualquier señal en el dominio de los números reales a un espectro de frecuencias similar al obtenido por las series para una función periódica.

4.2. Deducción de la T.F a partir de las S.F

Observemos las series de Fourier:

$$S_N f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)) \quad (4.1)$$

La serie de Fourier nos permite obtener una representación en el dominio de la frecuencia de funciones periódicas $f(t)$.

Tomamos como ejemplo la función onda de sierra general para cualquier periodo T con amplitud A dada por la siguiente expresión:

$$x(t) = \frac{-2A}{\pi} \times \arctan(\cot(\frac{x\pi}{T}))$$

En el capítulo 2 ya calculamos la serie de Fourier de la onda de sierra de amplitud $A = 1$ y periodo $T = 1$. En este caso consideramos las series de Fourier de la onda de sierra con $A = 1$ y un periodo cualquiera T (13):

$$S(f)(t) = \frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi n} \sin(\frac{2\pi n t}{T}) \quad (4.2)$$

donde los coeficientes de Fourier son:

$$a_0 = 1$$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{-1}{\pi n}$$

El conjunto de coeficientes de la serie de Fourier de una función f , c_n , representan su espectro de frecuencia.

Conocidos la función $x(t)$, los coeficientes de Fourier c_n de su serie de Fourier y $n\omega_0 = n\frac{2\pi}{T}$ representamos la gráfica de $x(t)$ para los periodos $T = 1$, $T = 2$ y $T = 3$ junto al espectro de frecuencia de $x(t)$ para cada periodo:

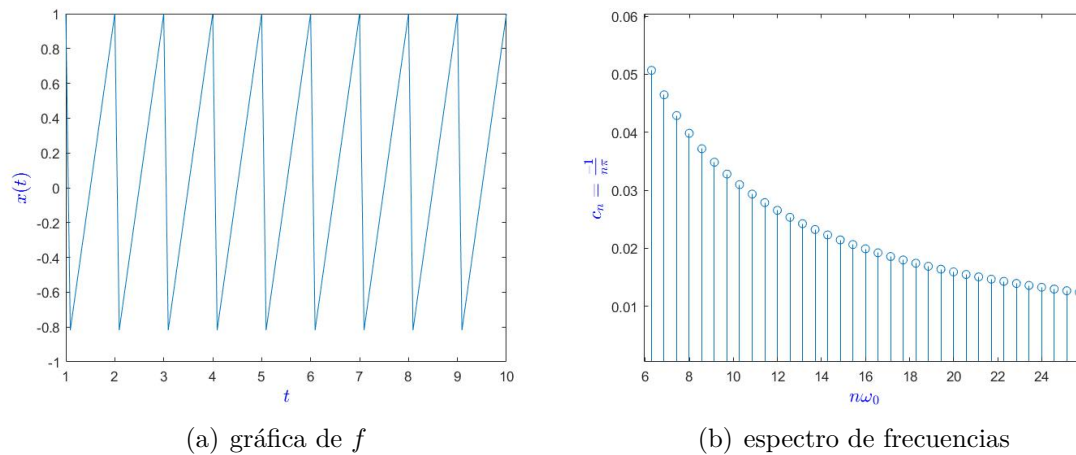


Figura 4.1. Onda con periodo $T = 1$

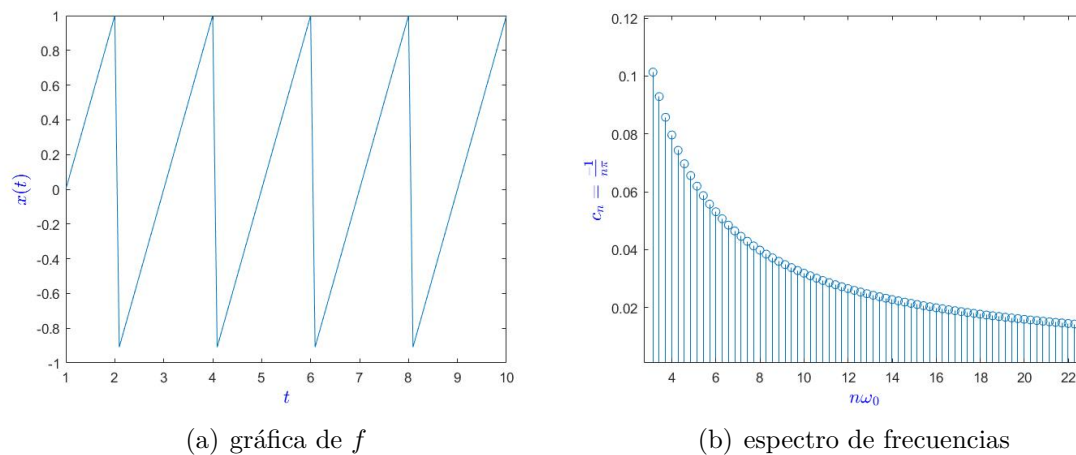


Figura 4.2. Onda con periodo $T = 2$

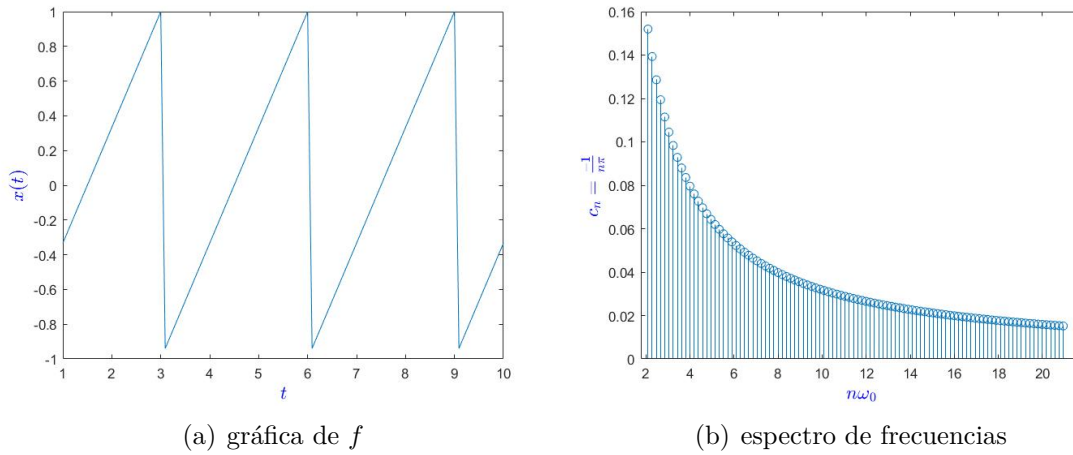


Figura 4.3. Onda con periodo $T = 3$

En las gráficas anteriores vemos que al aumentar el periodo T (o disminuir la frecuencia) de la función, el espectro de frecuencias se densifica. Si hacemos infinito el periodo (la onda no es periódica) el espectro de frecuencias será continuo.

A continuación, consideramos otro ejemplo de función periódica para representar la transformación producida en las series de Fourier si ampliamos el periodo T haciendo que este tienda a infinito. La función periódica tren de pulsos de periodo T , amplitud $A = 1$ y ancho del pulso p viene definida por:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\frac{T}{2} \leq t \leq -\frac{p}{2} \\ 1 & \text{si } -\frac{p}{2} \leq t \leq \frac{p}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{p}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \end{cases}$$

Cuya gráfica tiene la siguiente forma:

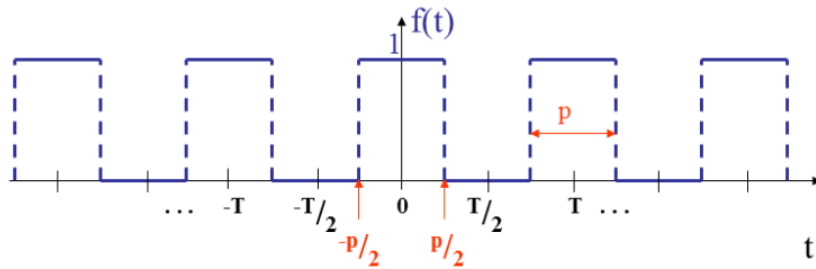


Figura 4.4. Gráfica del tren de pulsos de periodo T , ancho de pulso p y amplitud 1. Imagen obtenida de www.monografias.com

y su serie de Fourier calculada a continuación para $-\frac{T}{2} \leq x \leq \frac{T}{2}$:

$$S(f)(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt \right] e^{in\omega_0 x} \quad (4.3)$$

Una de las ideas en que se sustenta las series de Fourier es la capacidad de obtener una onda periódica de frecuencia $f = \frac{1}{T}$ mediante una suma discreta de ondas con distintas

frecuencias $f_1 = \frac{1}{T_1}$, $f_2 = \frac{1}{T_2}$, ..., $f_n = \frac{1}{T_n}$.

Sin embargo para reproducir una onda no periódica, se necesitará la suma de ondas de todas las frecuencias posibles. Cada una de estas ondas tendrá una amplitud muy pequeña. Cuando una suma infinita de ondas con amplitudes infinitamente pequeñas se suman, el resultado obtenido es una onda medible. Si representamos en una gráfica las frecuencias y la densidad de cada onda correspondiente a cada frecuencia en la onda resultado (ver figura 4.5) obtenemos una gráfica muy densa que tiene forma de una onda continua. Esto es lo que se le llama espectro de frecuencias de una forma de onda, ya graficado para la función onda de sierra anteriormente.

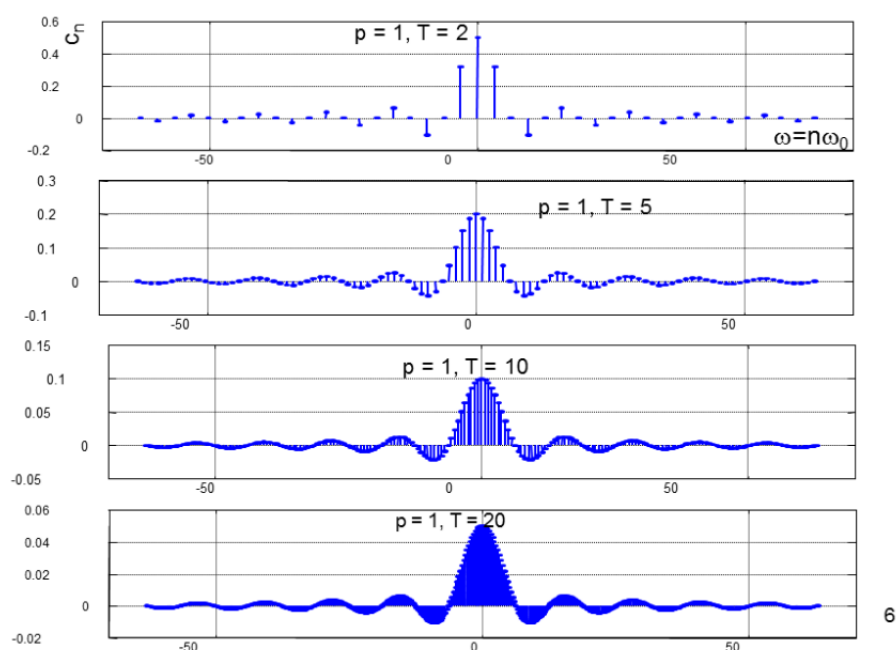


Figura 4.5. Espectros de frecuencias de la función tren de pulsos para periodos cada vez mayores $T = 2, 5, 10$ y 20 .
Imagen obtenida de www.monografias.com

El razonamiento anterior nos lleva a considerar la expresión de una función f no periódica en el dominio de la frecuencia, no como una suma de armónicos de frecuencia f (término $n\omega_0 = n2\pi f$ discreto), sino como una función continua de frecuencia (variable continua ω). Volviendo al ejemplo anterior de la onda de tren de pulsos con periodo T , ancho p y amplitud 1; si consideramos que $T \rightarrow \infty$ y por consiguiente $n\omega_0 \rightarrow \omega$; el sumatorio de la ecuación (4.3) se convierte en una integral:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right] e^{i\omega x} d\omega$$

La integral enmarcada entre corchetes en la expresión anterior es lo que llamamos la transformada de Fourier.

4.3. Definiciones de la transformada de Fourier

Definición 4.1. Transformada de Fourier

Sea una función integrable $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, se define su transformada de Fourier $\mathcal{F}(f) = F$ como:

$$\mathcal{F}[f] : \omega \rightarrow F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt$$

Definición 4.2. Transformada inversa de Fourier

Sea la transformada de Fourier de una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ integrable, se define la transformada inversa de Fourier \mathcal{F}^{-1} como

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{+i\omega t} d\omega$$

Por el **teorema de inversión de Fourier** sabemos que dada la transformada de Fourier de una función f , la transformada inversa de Fourier nos permite conocer f a partir de $\mathcal{F}[f]$:

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]$$

La variable t corresponde al tiempo mientras que la variable ω depende de la frecuencia. Se dice que $f(t)$ está en el dominio temporal y $F(\omega)$ está en el dominio frecuencial.

Como se ha expuesto en la definición 4.1, $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$ es compleja y por tanto

$$F(\omega) = \mathcal{R}(\omega) + i\mathcal{X}(\omega) = |F(\omega)|e^{i\phi(\omega)}$$

A $|F(\omega)|$ se le conoce como espectro de amplitud de $f(t)$ y $\phi(\omega)$ es el espectro de fase de $f(t)$.

Observaciones

Sea $f(t)$ una función real observamos

- a $\mathcal{R}(\omega)$ y $\mathcal{X}(\omega)$ son funciones par e impar de ω
- b $|F(\omega)|$ y $\phi(\omega)$ son funciones par e impar de ω

4.4. Propiedades de la transformada Fourier

Las siguientes propiedades son aplicables tanto a la transformada de Fourier como a la transformada inversa, pues solo difieren en el coeficiente multiplicativo que acompaña a i (11).

4.4.1. Existencia

La propiedad de existencia afirma que la transformada de Fourier de una función f definida en \mathbb{R} existe si se cumplen las dos condiciones siguientes:

1. f es continua a trozos en \mathbb{R}

2. f es absolutamente integrable en \mathbb{R} , es decir:

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt \leq \infty$$

Las propiedades expuestas a continuación son aplicables si y solo si se da la propiedad de existencia.

4.4.2. Linealidad

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ y f y g funciones integrables en \mathbb{R} cuyas transformadas de Fourier existen, se cumple

$$\mathcal{F}[af(t) + bg(t)](\omega) = a\mathcal{F}[f(t)](\omega) + b\mathcal{F}[g(t)](\omega)$$

Demostración

La demostración viene dada por la propiedad de linealidad de la integral de modo que desarrollamos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[af(t) + bg(t)](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} (af(t) + bg(t))e^{-i\omega t} dt \\ &= a \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt + b \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\omega t} dt \\ &= a\mathcal{F}[f(t)](\omega) + b\mathcal{F}[g(t)](\omega). \end{aligned}$$

4.4.3. Escalonamiento o cambio de escala

Sean $a \geq 0$ y f una función continua y absolutamente integrable entonces

$$\mathcal{F}[f(at)](\omega) = \frac{1}{|a|} \mathcal{F}[f(t)]\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

Demostración

Desarrollamos la transformada de Fourier para $f(at)$ haciendo un cambio de variable $at = s$ y por consiguiente $adt = ds$. (6)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(at)](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(at)e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-i\omega \frac{s}{a}} \frac{ds}{a} \\ &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-i\frac{\omega}{a}s} ds \\ &= \frac{1}{a} \mathcal{F}[f(s)]\left(\frac{\omega}{a}\right) \end{aligned}$$

Como $a > 0$ tenemos que

$$t \rightarrow +\infty \Rightarrow s = at \rightarrow +\infty$$

$$t \rightarrow -\infty \Rightarrow s = at \rightarrow -\infty$$

por tanto concluimos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(at)](\omega) &= \frac{1}{a} \mathcal{F}[f(at)]\left(\frac{\omega}{a}\right) \\ &= \frac{1}{a} \mathcal{F}[f(t)]\left(\frac{\omega}{a}\right) \end{aligned}$$

4.4.4. Desplazamiento en el tiempo

Sea $\mathcal{F}[f(t)](\omega)$ la transformada de Fourier de $f(t)$ entonces

$$\mathcal{F}[f(t - t_0)](\omega) = \mathcal{F}[f(t)](\omega)e^{it_0\omega}$$

Demostración

Aplicando la definición de la transformada de Fourier y sustituyendo $u = t - t_0$ y por tanto $du = dt$, tenemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(t - t_0)](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0)e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega(u+t_0)} du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega u}e^{-i\omega t_0} du \\ &= e^{-i\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\omega u} du \\ &= e^{-i\omega t_0} \mathcal{F}[f(u)](\omega)\end{aligned}$$

Planteando un razonamiento similar al aplicado en la demostración de la propiedad de escalonamiento, observamos que para una constante t_0 se cumple:

$$t \rightarrow +\infty \Rightarrow u = (t - t_0) \rightarrow +\infty$$

$$t \rightarrow -\infty \Rightarrow u = (t - t_0) \rightarrow -\infty$$

Así terminamos de demostrar el desplazamiento en el tiempo de la transformada de Fourier

$$\mathcal{F}[f(t - t_0)](\omega) = e^{-i\omega t_0} \mathcal{F}[f(u)](\omega) = e^{-i\omega t_0} \mathcal{F}[f(t)](\omega)$$

4.4.5. Desplazamiento en la frecuencia

Sea f una función cuya transformada de Fourier existe, afirmamos entonces

$$\mathcal{F}[f(t)e^{i\omega_0 t}](\omega) = \mathcal{F}[f(t)](\omega - \omega_0)$$

Demostración Aplicamos la definición de transformada al primer término de la igualdad anterior

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(t)e^{i\omega_0 t}](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_0 t} f(t)e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i(\omega - \omega_0)t} dt \\ &= \mathcal{F}[f(t)](\omega - \omega_0)\end{aligned}$$

4.4.6. Convolución

La convolución de dos funciones f y g , notada por $f * g$ se define por la función

$$f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(t - u) du$$

Sean f y g dos funciones continuas a trozos, acotadas y absolutamente integrables y sean $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$ y $G(\omega) = \mathcal{F}[g(t)]$; podemos afirmar que la transformada de Fourier de la convolución de f y g corresponde a la multiplicación de sus transformadas de Fourier expresada como

$$\mathcal{F}[f * g](\omega) = F(\omega)G(\omega)$$

Demostración

Partimos de la multiplicación de las Transformadas de Fourier de f y g desarrolladas a continuación:

$$\begin{aligned} F(\omega)G(\omega) &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(s)e^{-i\omega s} ds \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(s)e^{-i\omega(t+s)} dt ds \end{aligned}$$

haciendo ahora el cambio de variable $t + s = x$ tenemos

$$\begin{aligned} F(\omega)G(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-s)g(s)e^{-i\omega x} dx ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-s)g(s) ds \right) e^{-i\omega x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)e^{-i\omega x} dx \\ &= \mathcal{F}[f * g](\omega) \end{aligned}$$

El objetivo principal de calcular el producto de convolución en lugar de las transformada de Fourier es que estas operaciones son menos costosas computacionalmente que el cálculo de integrales.

4.5. Ejemplos para el cálculo de la T.F continua

A continuación calculamos la transformada de Fourier para una serie de funciones (12):

- Función constante
- Función delta
- Función exponencial decreciente
- y Función pulso rectangular

4.5.1. Función exponencial decreciente

Se define la exponencial decreciente como

$$\exp(t) = e^{-at}, \quad 0 < a < 1$$

Calculamos su transformada de Fourier:

$$\mathcal{F}[\exp(w)] = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+i\omega)t} dt = \frac{-1}{a+i\omega} [e^{-(a+i\omega)t}]_0^{\infty} = \frac{1}{a+i\omega}$$

Utilizando la primitiva de la exponencial.

4.5.2. Función delta

Definimos la función delta como una función que cumple que

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

Y una función que cumple lo anterior es la siguiente:

$$\delta(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} dx$$

Calculamos entonces su serie de Fourier. Conocemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - A) f(x) dx = f(A)$$

Luego

$$\mathcal{F}(\delta) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - 0) e^{iwx} dx = e^0 = 1$$

Por lo tanto

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ipx} dx\right) = 1$$

4.5.3. Función constante

Comprobamos que la transformada de la función constante es una transformación de la función delta. Recordamos la función delta:

$$\delta(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dt$$

Y la función constante es la siguiente:

$$K(x) = K$$

Comprobamos finalmente que:

$$\mathcal{F}[K] = K \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} dt = 2\pi K \delta(\omega)$$

4.5.4. Función pulso rectangular

La función de la onda de pulso rectangular de ancho 6 y centrada en 0 en el eje x , viene definida por

$$x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < 3 \\ 0 & |t| > 3 \end{cases}$$

Así, procedemos a calcular la transformada de Fourier para esta función

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[x(t)](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{-3} x(t)e^{-i\omega t} dt + \int_{-3}^3 x(t)e^{-i\omega t} dt + \int_3^{\infty} x(t)e^{-i\omega t} dt\end{aligned}$$

y como la onda de pulso rectangular solo toma valor distinto a 0 en el intervalo $[-3, 3]$, resolvemos la integral correspondiente a ese intervalo

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[x(t)](\omega) &= \int_{-3}^3 e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{-e^{-i\omega 3}}{\omega i} + \frac{e^{i\omega 3}}{\omega i} \\ &= \frac{1}{\omega i}(e^{i\omega 3} - e^{-i\omega 3}) \\ &= \frac{1}{\omega i}[\cos(\omega 3) + i\sin(\omega 3) - \cos(-\omega 3) - i\sin(-\omega 3)] \\ &= \frac{1}{\omega i}(2i\sin(\omega 3)) \\ &= 2\frac{\sin(\omega 3)}{\omega}\end{aligned}$$

Parte II

Análisis de Fourier aplicado al tratamiento de señales

Capítulo 5

Caso práctico: tratamiento de señales de voz y sonido

5.1. Introducción

El **Procesamiento de las Señales** es una disciplina de la Ingeniería que desarrolla técnicas de procesamiento, análisis e interpretación de señales (11). Algunas de estas técnicas son el control, filtrado o compresión de la señal cuyo objetivo fundamental es permitir su almacenamiento, reproducción o transmisión considerando los márgenes y limitaciones de los sistemas físicos utilizados para dicho tratamiento de la señal (1).

La **Teoría de Señales** es la rama matemática que estudia las señales y los sistemas que las transmiten o herramientas involucradas en el tratamiento de las mismas. Así, una de las subaplicaciones en las que se enfoca el estudio de la Teoría de Señales es el tratamiento de señales de voz y sonido, continuamente utilizado por todos nosotros cuando nos enviamos audios en Whatsapp o cuando escuchamos canciones y las almacenamos en un dispositivo mp3, por ejemplo.

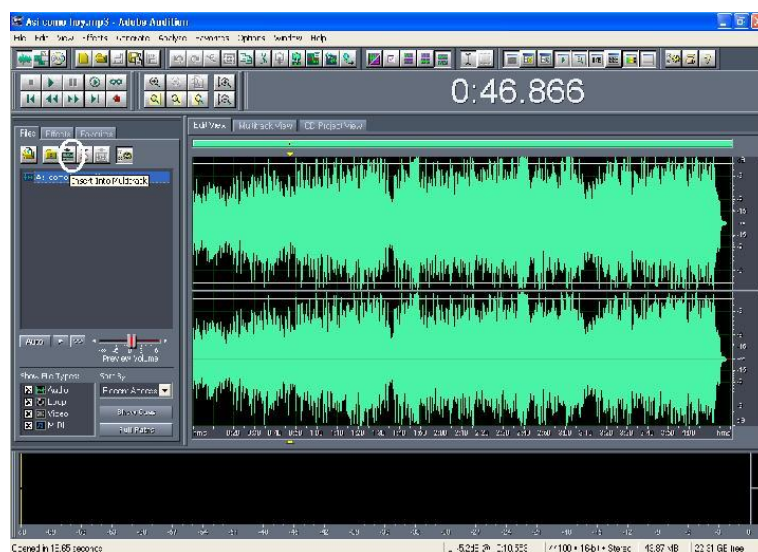


Figura 5.1. Herramienta Adobe Audition, utilizada para el tratamiento y modificación de sonidos digitales. Imagen recuperada de www.biblioguias.ulpgc.es

En capítulos anteriores ya hemos aplicado las series de Fourier y la transformada para expresar matemáticamente algunas funciones de ondas conocidas como superposición de ondas de base o armónicos. En este capítulo damos un paso más y nos proponemos capturar una señal de sonido, realizarle ciertas modificaciones con ayuda de la transformada y transformada inversa de Fourier y observar (o escuchar) los resultados obtenidos.

En esta línea, se han desarrollado dos programas en Matlab para tratar señales de sonido:

1. El primer programa desarrollado es capaz de grabar un audio de voz, mostrar las gráficas de la onda generada, su diagrama de fase y el diagrama de frecuencias, invertir la matriz de frecuencias de la señal, reconvertir esa sucesión de frecuencias en una señal de audio y reproducir el audio tras su modificación.
2. El segundo programa consiste en un filtro de canciones que deja pasar las frecuencias bajas (dando lugar a una onda con frecuencias muy bajas y una canción resultante que contiene solo los tonos graves). (8)

Para realizar estos programas se necesita aplicar la transformada de Fourier ya explicada. Sin embargo, como la complejidad computacional que supone el cálculo de la transformada de Fourier es alta; en Matlab nos encontramos con la posibilidad de utilizar en su lugar la **transformada rápida de Fourier**. Antes de dar paso a la explicación de la aplicación práctica, explicamos en qué consiste la transformada rápida de Fourier utilizada y la transformada discreta de Fourier en la que está basada la transformada rápida.

5.1.1. Transformada Discreta de Fourier (DFT)

Cuando queremos computar el resultado de una transformada de Fourier de una señal, no necesitamos conocer todas las frecuencias en el dominio continuo de la misma, sino las frecuencias en un conjunto de puntos que nos aporten la suficiente información dando lugar a un resultado aproximado. Es posible discretizar el dominio continuo de la función en puntos y aplicar la transformada punto a punto, lo que resulta intuitivamente en la transformada discreta de Fourier.

Dada una función $f(x)$, tomamos la función en el conjunto de puntos

$$X = X_1, X_2, \dots, X_n$$

cuyas imágenes vienen dadas por la sucesión

$$f(x_n) \equiv f_n$$

Decimos que la transformada discreta se aplica en el conjunto de puntos X

Definición 5.1

La transformada discreta (DFT) para la función f y el conjunto de puntos X , es la transformación de la sucesión de números reales X en otra de números complejos $\mathcal{F} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que

$$\mathcal{F}(f_n) = \mathcal{F}_n = \sum_{k=0}^{N-1} f_k e^{2\pi i k \frac{n}{N}}$$

Para estudiar la DFT en profundidad, consultar la bibliografía (Jones).

5.1.2. Transformada Rápida de Fourier

Calcular la DFT de una sucesión de números implica realizar N operaciones (con N siendo el tamaño de la sucesión) para cada índice de la sucesión, luego el orden del cálculo directo sería cuadrático. Sin embargo, es posible calcular la DFT en menor orden, exactamente en $O(n \log(n))$, para lo que se usa la Transformada Rápida de Fourier o FFT. Se basa en dividir el cálculo de la transformada en cálculos de menor tamaño de forma que desarrollamos el cálculo de la DDF:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_k &= \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{2\pi i \frac{kn}{N}} = \sum_{k=0}^{N/2-1} f_{2k} e^{2\pi i 2k \frac{n}{N}} + \sum_{k=0}^{N/2-1} f_{2k+1} e^{2\pi i (2k+1) \frac{n}{N}} \\ &= \sum_{k=0}^{N/2-1} f_{2k} e^{2\pi i kn/(N/2)} + e^{\pi i 2k/N} \sum_{k=0}^{N/2-1} f_{2k+1} e^{2\pi i 2kn/(N/2)}\end{aligned}$$

En el esquema de la figura 5.11 podemos observar el funcionamiento del algoritmo FFT. Para conocer en detalle el algoritmo FFT, consultar la bibliografía (10).

$$\begin{aligned}\frac{N}{2} &\longrightarrow 2\left(\frac{N}{2}\right)^2 + N = \frac{N^2}{2} + N \\ \frac{N}{4} &\longrightarrow 2\left(2\left(\frac{N}{4}\right)^2 + \frac{N}{2}\right) + N = \frac{N^2}{4} + 2N \\ \frac{N}{8} &\longrightarrow 2\left(2\left(2\left(\frac{N}{8}\right)^2 + \frac{N}{4}\right) + \frac{N}{2}\right) + N = \frac{N^2}{8} + 3N \\ &\vdots \\ \frac{N}{2^p} &\longrightarrow \frac{N^2}{2^p} + pN = \frac{N^2}{N} + (\log_2 N)N = N + (\log_2 N)N \\ &\sim O(N + N \log_2 N) \sim O(N \log_2 N)\end{aligned}$$

Figura 5.2. Esquema que representa como algoritmo FFT divide un problema en subproblemas de menor tamaño. Imagen recuperada de towardsdatascience.com, escrito por Cory Maklin

Tal y como se muestra en la figura, vemos que el orden converge a $O(n \log(n))$.

5.2. Aplicación 1: Grabación y modificación de un audio de voz

El primer programa desarrollado en Matlab (*programa1.m*) consiste en un transformador de notas de audio o voz capaz de invertir dicha señal de audio.

La primera parte del fichero *.m* nos permite grabar un audio de voz de 5 segundos de duración (ver figura 5.3) y guardarlo en un objeto de extensión *.wav* (Waveform Audio Format) como vemos en la imagen 5.4. Al grabar el audio en Matlab se está produciendo

la transformación de la señal analógica de nuestra voz que llega al micrófono a una señal digital, establecidas previamente la frecuencia de muestreo (número de muestras capturadas por segundo) a 44100 Hz y el número de bits que se utilizan para cuantificar cada muestra a 8 bits.

```
%Grabación del audio
% 8 bits, 2 canales (estéreo) o 1
audio = audiorecorder(fs,8,2);
audio.StartFcn = 'disp("Comienza a hablar. Se está grabando")';
audio.StopFcn = 'disp("Fin de la grabación.")';
recordblocking(audio,5);
```

Figura 5.3. Fragmento del código que permite grabar un audio de 5 segundos de duración

```
%Captura de la señal generada
signal = getaudiodata(audio);
audiowrite('audioOriginal.wav',signal ,fs);
```

Figura 5.4. Código para guardar en el directorio el audio grabado en formato .wav

Cuando modificamos una señal de audio o voz, lo que estamos haciendo realmente es trabajar en un dominio (de tiempo, de frecuencia u otra magnitud) con las muestras de la señal de audio provenientes del conversor analógico/digital (ADC).

Partimos de una señal de audio continua en el dominio del tiempo y aplicando la transformada de Fourier rápida o FFT (5.5) obtenemos la señal representada en el dominio de la frecuencia. Esto nos permite modificar las frecuencias de la señal, de forma que podemos eliminar el ruido, aplicar un filtro o como es el caso, invertir la señal de audio. Para invertir el audio, hemos invertido el vector de muestras. Una vez tenemos la señal en el dominio de frecuencias modificada, le hemos aplicado la transformada inversa de Fourier (invocación a *ifft*) para obtener la señal en el dominio original del tiempo (ver figura 5.6).

```
%Cálculo de la transformada para obtener las frecuencias de la canción
SIGN = fft(signal);
%Obtenemos info para el plot
t = linspace(0,5, length(signal));
f = linspace(0, fs, length(SIGN));
fase = unwrap(angle(SIGN));
magn = abs(SIGN);
```

Figura 5.5. Aplicación de la FFT a la señal original y obtención de la fase y magnitud de la señal

```
%Invertimos el vector SIGN y obtenemos la señal en el dominio original (t)
SIGN = flipud(SIGN);
signal2 = real(ifft(SIGN));
```

Figura 5.6. *Modificación de la señal y aplicación de la IFFT o FFT inversa*

Por último podemos comparar la gráfica de muestras, el diagrama de fase y el diagrama de magnitud de la señal original del audio frente a dichas gráficas para la señal transformada. Observamos que la gráfica de la señal transformada y su diagrama de fase aparecen invertidos (ver imagen 5.8) respecto a las gráficas del audio original (ver figura 5.7).

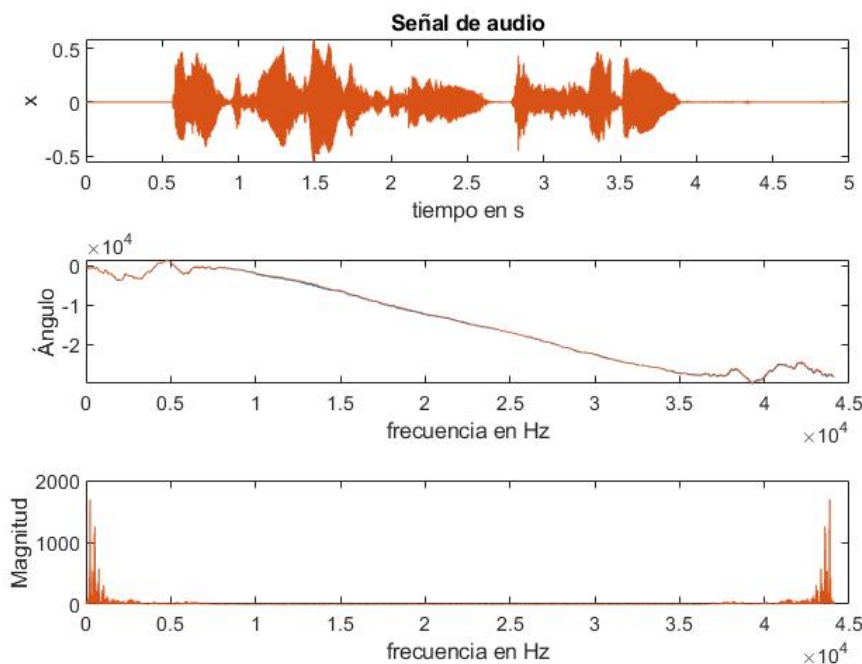


Figura 5.7. *Gráfica de muestras, diagrama de fase y diagrama de magnitud de la señal original de audio de ejemplo audioOriginal.wav grabado durante la ejecución del programa*

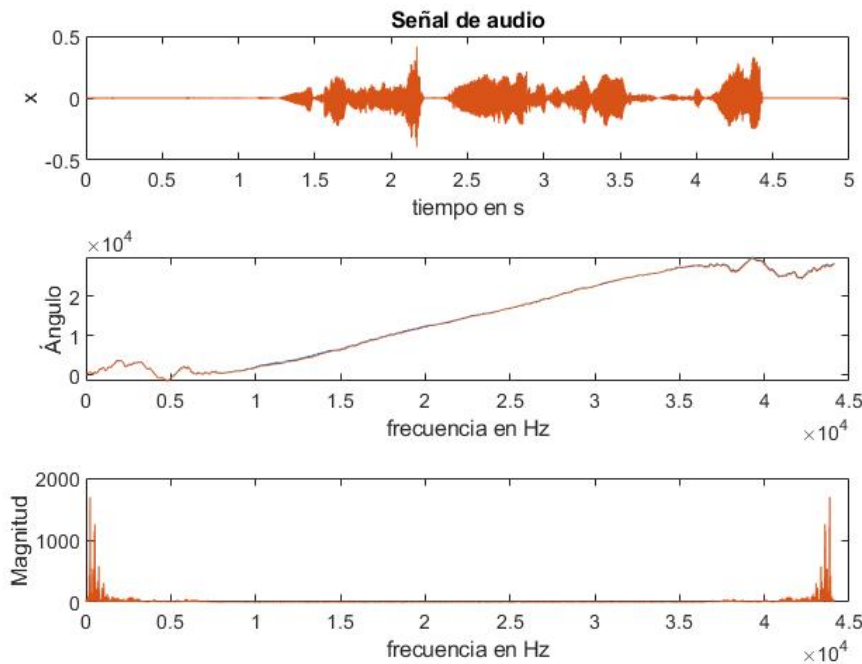


Figura 5.8. Gráfica de muestras, diagrama de fase y diagrama de magnitud de la señal invertida del audio `audioOriginal.wav` incluido en la carpeta del código como `audio2.wav`

5.3. Aplicación 2: Filtrado de una canción mediante la eliminación de frecuencias altas

Frecuentemente se suelen utilizar ecualizadores para mejorar la calidad de las canciones que escuchamos. En esta aplicación realizaremos una función muy común de los ecualizadores que es anular las frecuencias altas para eliminar sonidos no deseables, o lo que es también conocido como **filtro low-pass**. Primero transformamos el audio en una sucesión de puntos y aplicamos la FFT en estos puntos. Después, aplicamos la ecualización, que consiste en eliminar frecuencias más altas que un cierto umbral, y finalmente aplicamos la transformación inversa para obtener el audio ecualizado.



Figura 5.9. Espectro de frecuencias desde el punto de vista de la ecualización. Imagen recuperada de blog.landr.com

```

%% Aplicación 2 - Filtramos una canción, dejando pasar frecuencias bajas de la misma
[cancion, Fs] = audioread('breakFree.mp3');

%Cogemos un trozo de la canción para su procesamiento
cancionSeq = cancion(44100*40:44100*60); %desde el segundo 40 al 60
cancionSeq = cancionSeq';

%Gráfica de la señal
plot(cancionSeq)

fprintf('Pulsa para reproducir el trozo de canción original\n');
pause;

sound(cancionSeq, 44100);
%para parar el sonido -> escribir en la ventana de comandos: clear sound

fprintf('Pulsa para filtrar frecuencias bajas de la canción\n');
pause;

%Transformaciones
SIGN = fft(cancionSeq);
f = linspace(0, Fs, length(SIGN));
Mono = SIGN(:,1);

```

Figura 5.10. Código implementado para el filtro donde se carga el audio de la canción, se grafica la señal, se reproduce el audio original y se aplica la FFT

La canción de prueba se convierte en una señal mediante **audioread**, se escoge los segundos 40 al 60 de la señal y se muestra gráficamente. Las transformaciones comienzan cuando se guarda en **SIGN** la FFT de la señal, realizada por una función propia de Matlab.

```

%filtro para frecuencias bajas -> sonido graves
faltos = zeros([length(Mono),1]);

for a=1:length(Mono)
    if f(1,a) < 250
        fbajos(a,1) = Mono(a,1);
    else
        fbajos(a,1) = 0;
    end
end

breaka = ifft(fbajos);

fprintf('Pulsa para escuchar la canción modificada\n');
pause;
sound(real(breaka), Fs);

```

Figura 5.11. Fragmento del código en el que se recorre la matriz de frecuencias y se eliminan las frecuencias mayores a 250 Hz

Después, se recorre mediante un bucle `for` la señal, y cuando la frecuencia es mayor que la frecuencia umbral (en este caso 250 Hz) se sustituye por 0. Realizamos la transformación inversa (**ifft**) y obtenemos el audio sin frecuencias superiores a la umbral. Cuando escuchamos la señal de sonido resultante, oímos solo sonidos graves pues los agudos (frecuencias altas) han sido eliminados por el filtro.

Capítulo 6

Conclusiones y Agradecimientos

6.1. Conclusiones

6.1.1. Conclusiones de la primera parte

La primera parte de este trabajo dedicada al análisis teórico de los métodos de Fourier ha sido fundamental para conocer cuáles eran estos métodos además de comprender cómo funcionan y qué otros teoremas y demostraciones están relacionados con el Análisis de Fourier.

El trabajo realizado puramente matemático ha sido útil y divertido aunque algo complejo, habiendo tratado temas muy distintos tales como integrales y series de números complejos, convergencias de series o aplicado algunos resultados de trigonometría algo distintos a lo habitual para los cálculos de las series de Fourier y Transformada de Fourier de algunas funciones propuestas como ejemplo. El desarrollo de este trabajo ha sido en definitiva muy satisfactorio y poco a poco hemos ido completando esta parte teórica que ha abarcado la mayor parte del tiempo dedicado al proyecto.

Aunque se puede profundizar mucho más en los métodos aquí tratados cuya base matemática es bastante más amplia y compleja, nos hemos sentido realizados al poder abordar y entender las demostraciones matemáticas fundamentales planteadas en este proyecto.

6.1.2. Conclusiones de la segunda parte

La parte del trabajo práctico en Matlab ha sido más entretenida e interactiva.

Durante la investigación realizada en el desarrollo del análisis teórico ya habíamos adquirido algunas nociones acerca de la utilidad de los métodos de Fourier. Sin embargo, al preparar los casos prácticos hemos descubierto que en la mayoría de aplicaciones donde se transforman señales de sonido, se requiere del uso de la Transformada de Fourier y su inversa. Desconocíamos la gran importancia de estos métodos que Fourier demostró hace varios siglos y que hoy día son ampliamente utilizados en el campo de Tratamiento de señales. Este tema es realmente interesante y nos proporciona una nueva perspectiva sobre las ondas; que al final son imprescindibles para entender todo lo que oímos y vemos. Cuando queremos manipularlas, los resultados de Fourier nos ofrecen formas sencillas y extremadamente útiles de poder hacerlo con un computador.

El hecho de haber podido experimentar directamente con las frecuencias de un audio y realizar esas transformaciones nosotros mismos para después comprobar sus efectos escuchando las señales ha sido seguramente la mejor parte.

6.1.3. Conclusiones de la asignatura

La asignatura optativa **Análisis Numérico** impartida en la facultad de Informática de la UCM ha cumplido con creces nuestras expectativas iniciales.

Las carreras en las que estamos matriculados los autores de la memoria son Ingeniería Informática (Javier) e Ingeniería del Software (Montse). En ellas, las asignaturas de matemáticas se imparten esencialmente en el primer y segundo año del grado. Dado que son matemáticas muy aplicadas a la informática estas se acercan más a los campos de cálculo y álgebra básica, lógica, estructuras de datos o análisis de complejidad de los algoritmos entre otros.

El cálculo numérico aproximado lo forma un conjunto de técnicas muy concreto que no se imparte como tal en las asignaturas obligatorias, si bien hemos aplicado algunos conceptos conforme se han necesitado a lo largo de nuestra carrera.

La asignatura de Análisis Numérico se centra en todas esas técnicas y profundiza en el Análisis Numérico sin llegar a ser excesivamente compleja o inabarcable como si podría serlo una asignatura de Análisis Numérico de la carrera de Matemáticas puras.

Por último, el proyecto ha sido una buena forma de afianzar algunos conceptos vistos en la asignatura y estudiar un tema que nosotros hemos podido escoger. Ha sido sin duda mucho más enriquecedor que un examen final, aunque también conlleve dedicar un poco más de tiempo a su desarrollo.

6.2. Agradecimientos

Para cerrar la memoria, nos parecía muy necesario dar las gracias a nuestro profesor, **Dr. Félix del Teso**, por impartir la asignatura de forma entretenida y amena sin dejar de explicar la teoría de forma precisa; además de darnos libertad para programar los algoritmos vistos en clase en Matlab y presentarlos frente a los compañeros.

Estamos aún más agradecidos si cabe por su atención y seguimiento semanal del proyecto, además de estar siempre disponible vía gmail, Skype o reunión en Collaborate para resolver nuestras dudas incluso durante este difícil periodo de confinamiento social sufrido por la pandemia del COVID-19, lo cual es admirable. Nos ha facilitado el desarrollo del proyecto y nos ha motivado a ser precisos y persistentes en la consecución de los resultados aquí expuestos. Muchas gracias.

Índice de figuras

1.1.	Esquema de transformación del problema de cálculo de una división en un problema de aplicación de logaritmos. Imagen obtenida de www.ugr.es	1
1.2.	Retrato de Jean-Baptiste Joseph Fourier realizado por el pintor y dibujante francés Louis Léopold Boilly. Imagen obtenida de www.wikipedia.es	2
2.1.	Representación de la función $f(x) = \sin(x)$, los ceros de la función representados con puntos verdes y los máximos y mínimos de la función con puntos azules	9
2.2.	Representación de la función $\cos(x)$, los ceros de la función representados con puntos azules y los máximos y mínimos como puntos verdes	10
2.3.	Representación de la función $\sin(x)$ con las áreas que deja la curva positivas y negativas bajo ella señaladas.	11
2.4.	Representación de la onda de sierra	13
2.5.	Código implementado para el cálculo de las series de Fourier de la onda de Sierra dado el orden de la serie N y un array de puntos x	14
2.6.	Representación gráfica de $x(t)$ y $S(f)(t)$ para $N = 1, 2, 3, 4$	15
2.7.	Código para representar los errores en función del orden N de $S_N f$ y una curva que represente el descenso de orden 2 del error (para cada valor N del eje x le corresponde un valor $1/N$ del eje y)	16
2.8.	Gráfica del error de las Series de Fourier $S_N f$ de la función onda de sierra, en función del valor de N	16
4.1.	Onda con periodo $T = 1$	24
4.2.	Onda con periodo $T = 2$	24
4.3.	Onda con periodo $T = 3$	25
4.4.	Gráfica del tren de pulsos de periodo T , ancho de pulso p y amplitud 1. Imagen obtenida de www.monografias.com	25
4.5.	Espectros de frecuencias de la función tren de pulsos para periodos cada vez mayores $T = 2, 5, 10$ y 20 . Imagen obtenida de www.monografias.com	26
5.1.	Herramienta Adobe Audition, utilizada para el tratamiento y modificación de sonidos digitales. Imagen recuperada de www.biblioguias.ulpgc.es	35
5.2.	Esquema que representa como algoritmo FFT divide un problema en sub-problemas de menor tamaño. Imagen recuperada de towardsdatascience.com , escrito por Cory Maklin	37
5.3.	Fragmento del código que permite grabar un audio de 5 segundos de duración	38
5.4.	Código para guardar en el directorio el audio grabado en formato <i>.wav</i>	38
5.5.	Aplicación de la FFT a la señal original y obtención de la fase y magnitud de la señal	38

5.6.	Modificación de la señal y aplicación de la IFFT o FFT inversa	39
5.7.	Gráfica de muestras, diagrama de fase y diagrama de magnitud de la señal original de audio de ejemplo <i>audioOriginal.wav</i> grabado durante la ejecución del programa	39
5.8.	Gráfica de muestras, diagrama de fase y diagrama de magnitud de la señal invertida del audio <i>audioOriginal.wav</i> incluido en la carpeta del código como <i>audio2.wav</i>	40
5.9.	Espectro de frecuencias desde el punto de vista de la ecualización. Imagen recuperada de blog.landr.com	41
5.10.	Código implementado para el filtro donde se carga el audio de la canción, se grafica la señal, se reproduce el audio original y se aplica la FFT . . .	42
5.11.	Fragmento del código en el que se recorre la matriz de frecuencias y se eliminan las frecuencias mayores a 250 Hz	42

Bibliografía

- [1] Broadcast, T. (2008). . Último acceso el 07-06-2020.
- [2] Duoandikoetxea, J. (2003). Lecciones sobre las series y transformadas de Fourier. *Recuperado de www.ugr.es*.
- [3] FisicayMates (2018). www.youtube.com/seriesDeFourier/conceptosBasicos. Último acceso el 20-05-2020.
- [4] González, C. J. C. (2003). *Fundamentos del análisis de Fourier*. GAMESAL.
- [5] Hawkins, J. (2010a). www.wallawalla.edu/Exercise:Sawtooth_Wave_Fourier_Transform. Último acceso el 20-05-2020.
- [6] Hawkins, J. (2010b). www.dmae.upt.es/Series_y_Transformada_de_Fourier.pdf. Último acceso el 20-05-2020.
- [Jones] Jones, D. L. <https://cnx.org/contents/0sbTkzWQ@2.2:AePPYjup@5/DFT-Definition-and-Properties>. Último acceso el 10-06-2020.
- [8] Jorge Gallo (2016). <https://www.youtube.com/watch?v=ivivESBhPyU>. Último acceso el 07-06-2020.
- [9] López, M. O. (2016). Una perspectiva histórica de los métodos de Fourier. Trabajo de fin de grado, Universidad de Granada, Dpto. de Análisis Matemático.
- [10] Maklin, C. (2019). <https://towardsdatascience.com/fast-fourier-transform-937926e591cb>. Último acceso el 10-06-2020.
- [11] Medina, J. (2011). Análisis de Fourier para el tratamiento de señales. *Recuperado de <https://es.slideshare.net/docdigitus/analisis-de-fourier-para-seales>*. Último acceso el 20-05-2020.
- [12] Universitat Politècnica de València - UPV (2011). www.youtube.com/Transformada_De_Fourier_De_Tiempo_Continuo_De_Transformadas. Último acceso el 20-05-2020.
- [13] Wikipedia (2020). https://en.wikipedia.org/wiki/Sawtooth_wave. Último acceso el 08-06-2020.