

## Topic III 坐标变换理论

### I. 综合矢量

#### 1. 综合矢量的概念

一般化电机表示任何电机，多变量、强耦合、时变系统。为了将磁场解耦可以将其他的电机等效成一个一般化电机（实际上就是  $d-q$  轴表示方法）。

为了实现变换通常可以选用一个特定的标准，一种称为恒相幅值变换，即变化前后相幅值不变，另一种称为恒功率变换，即变化前后功率（转矩保持不变）。

除此之外需要保证坐标变换一定是一种单值双向的变换。变换的基本性质就是一种线性变换，满足上述要求只需要变换矩阵为满秩的：

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_2 \end{pmatrix}, \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{C}\mathbf{X}, \mathbf{X} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{Y}$$

为了让表示简便，须要引入一个向量，表示电流（磁链）的空间方向。

在恒相幅值情况下，三相轴线  $a, b, c$ ，互差  $120^\circ$ 。每相轴线上有一矢量，其模分别是  $\vec{x}_a, \vec{x}_b, \vec{x}_c$ 。正值表示矢量的正方向与轴线方向一致。此三个矢量的合成矢量的  $2/3$ ，称为综合矢量。

其中， $\vec{x}_a, \vec{x}_b, \vec{x}_c$  均是指瞬时值，而不是有效值或幅值，这些变量不一定是正弦变量。

在恒功率变换情况下，只需要将上述的常数变更为  $\sqrt{2/3}$ 。

假设原先坐标为  $a, b, c$  坐标，那么综合矢量（以电流为例）为：

$$i = i_a \vec{x}_a + i_b \vec{x}_b + i_c \vec{x}_c$$

此时电流将具有的性质包括

$$\|\vec{x}\| \cos \alpha = \frac{2}{3} \left( x_a - \frac{x_b}{2} - \frac{x_c}{2} \right) = x'_a$$

$$\|\vec{x}\| \sin \alpha = \frac{2}{3} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} x_b - \frac{\sqrt{3}}{2} x_c \right) = x'_a \tan \alpha$$

$$i_0 = \frac{1}{3} (i_a + i_b + i_c)$$

#### 2. 综合矢量的相位关系

综合矢量形成的图为时空向量图，表征超前关系是：沿正方向走得更多。

### II. 坐标系统变换

#### 1. 坐标系统分类

常见坐标系统具有如下几种常见类型，实数坐标系统的本质含义就在于可以实现绕组等效，但是复数坐标系统其并没有本质的物理意义，只是实现了一种数学变换。

坐标轴位置	实数坐标系统	复数坐标系统
放在定子上	$\alpha - \beta - 0$	$1 - 2 - 0$
放在转子上	$d - q - 0$	$F - B - 0$
以同步速转动	$d_c - q_c - 0$	$F_c - B_c - 0$
以任意速转动	$x - y - 0$	$N/A$

坐标变换下满足如下的变换关系：

$$\mathbf{I}' = (\mathbf{C})\mathbf{I} \leftrightarrow \mathbf{I} = (\mathbf{C})^{-1}\mathbf{I}'$$

## 2. 静止相坐标与静止坐标的变换 $abc \leftrightarrow \alpha\beta$

进行绕组等效时可以使用如下矩阵：

正变换 $abc \rightarrow \alpha\beta$

$$\mathbf{C} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

反变换 $\alpha\beta \rightarrow abc$

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

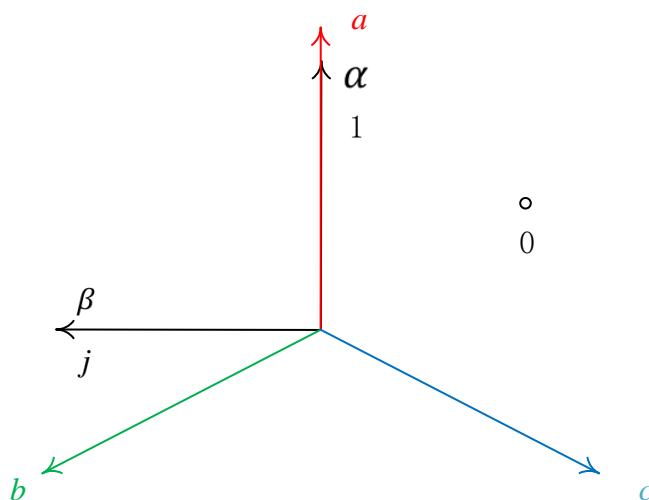


图 1 静止相坐标与静止坐标的变换示意图

对应的复数形式定义为：取 $\alpha$ 轴为实轴，超前 $90^\circ$ 为虚轴，取向量为：

$$\begin{cases} i_1 = \frac{1}{2}(i_\alpha + j i_\beta) \\ i_2 = i_1^* = \frac{1}{2}(i_\alpha - j i_\beta) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} i_\alpha = i_1 + i_2 \\ i_\beta = -j(i_1 - i_2) \end{cases}$$

可以得到120坐标和 $\alpha\beta$ 坐标之间的变换关系为：

正变换 $\alpha\beta \rightarrow 120$

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & j \\ 1 & -j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{pmatrix}$$

反变换 $120 \rightarrow \alpha\beta$

$$\begin{pmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -j & j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

1-2-0坐标系统和 $a-b-c$ 坐标系统之间的变换可以通过下面的矩阵实现：

正变换 $abc \rightarrow 120$

$$\mathbf{C} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & e^{j\frac{2\pi}{3}} & e^{j\frac{4\pi}{3}} \\ 0 & e^{j\frac{4\pi}{3}} & e^{j\frac{2\pi}{3}} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

反变换 $120 \rightarrow abc$

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e^{j\frac{4\pi}{3}} & e^{j\frac{2\pi}{3}} & 1 \\ e^{j\frac{2\pi}{3}} & e^{j\frac{4\pi}{3}} & 1 \end{pmatrix}$$

### 3. 静止相坐标与旋转坐标的变换 $abc \leftrightarrow dq$

正变换 $abc \leftrightarrow dq$

$$\mathbf{C} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} \cos \theta & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ -\sin \theta & -\sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

上式中

$$\theta = \int_0^t \omega dt$$

反变换 $dq \leftrightarrow abc$

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 1 \\ \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & 1 \\ \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & 1 \end{pmatrix}$$

功率变换：

$$P_{dq0} = \frac{2}{3} (u'_a i'_a + u'_b i'_b + u'_c i'_c) + u_0 i_0$$

当使用变频器驱动同步电机时此时 $dq$ 坐标实际上就是 $d_c q_c$ 坐标。

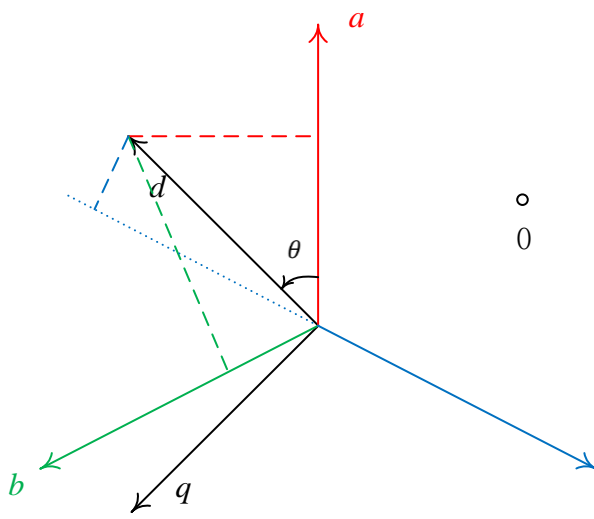


图 2 静止坐标与旋转坐标变换图示

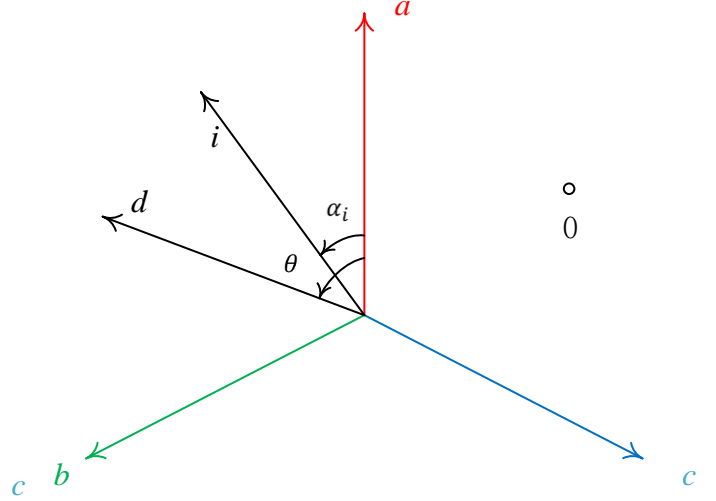


图 3 复数形式下FB坐标的表示

对应的复数坐标系，通常适用于分析椭圆磁场， $F-B-0$ 坐标系定义如下：

$$\begin{cases} i_F = \frac{\sqrt{2}}{2} i = \frac{\sqrt{2}}{2} i_d + j \frac{\sqrt{2}}{2} i_q = \frac{\sqrt{2}}{2} I e^{j(\alpha_i - \theta)} \\ i_F^* = i_F^* = \frac{\sqrt{2}}{2} i_d + j \frac{\sqrt{2}}{2} i_q = \frac{\sqrt{2}}{2} I e^{j(\alpha_i + \theta)} \end{cases}$$

$FB0$ 坐标系和 $abc$ 坐标系下的相互转化：

正变换 $abc \rightarrow FB0$

反变换 $FB0 \rightarrow abc$

$$\mathbf{C} = \frac{\sqrt{2}}{3} \begin{pmatrix} e^{-j\theta} & e^{j(\frac{2\pi}{3}-\theta)} & e^{j(\frac{4\pi}{3}-\theta)} \\ e^{j\theta} & e^{j(\frac{4\pi}{3}+\theta)} & e^{j(\frac{2\pi}{3}+\theta)} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{j\theta} & e^{-j\theta} & \sqrt{2} \\ e^{j(\frac{4\pi}{3}+\theta)} & e^{j(\frac{2\pi}{3}-\theta)} & \sqrt{2} \\ e^{j(\frac{2\pi}{3}+\theta)} & e^{j(\frac{4\pi}{3}-\theta)} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

#### 4. 静止坐标和旋转坐标之间的变换 $\alpha\beta \leftrightarrow dq$

静止坐标和旋转坐标之间的变化可以用下面的式子表达：

正变换 $dq \rightarrow \alpha\beta$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

反变换 $\alpha\beta \rightarrow dq$

$$\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}^T = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

用图示可以表达为：

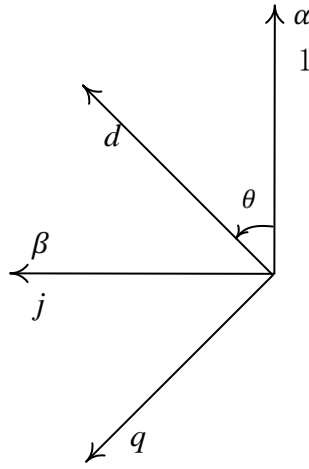


图 4 静止坐标和旋转坐标之间的关系

此处的变换也是一种恒功率变换，满足矩阵正交的条件。

#### 5. 静止相坐标与同步旋转坐标

假设在初始状态下，同步坐标系和转子的直轴、交轴重合，如图 5 所示，静止相坐标和同步旋转坐标之间的变换矩阵为：

正变换 $abc \leftrightarrow d_c q_c$ ：

$$\mathbf{C} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} \cos(\theta_0 + \omega_0 t) & \cos\left(\omega_0 t + \theta_0 - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\omega_0 t + \theta_0 + \frac{2\pi}{3}\right) \\ -\sin(\omega_0 t + \theta_0) & -\sin\left(\omega_0 t + \theta_0 - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\omega_0 t + \theta_0 + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

反变换 $d_c q_c \leftrightarrow abc$ ：

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_0 + \omega_0 t) & -\sin(\theta_0 + \omega_0 t) & 1 \\ \cos\left(\theta_0 + \omega_0 t - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta_0 + \omega_0 t - \frac{2\pi}{3}\right) & 1 \\ \cos\left(\theta_0 + \omega_0 t + \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta_0 + \omega_0 t + \frac{2\pi}{3}\right) & 1 \end{pmatrix}$$

通常还有一种更加普适的变换方法，使用  $d_c - q_c - 0$  坐标系统和  $d - q - 0$  坐标系统之间的变换。定义  $\Delta\theta = (\omega_0 t + \theta_0) - \theta$  为同步轴领先转子轴的角度，那么可以定义两坐标系之间的变换为：

$$\begin{pmatrix} i_{d_c} \\ i_{q_c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Delta\theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \Delta\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Delta\theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \Delta\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{d_c} \\ i_{q_c} \end{pmatrix}$$

可以看到此时的变换仍是一个恒功率变换。

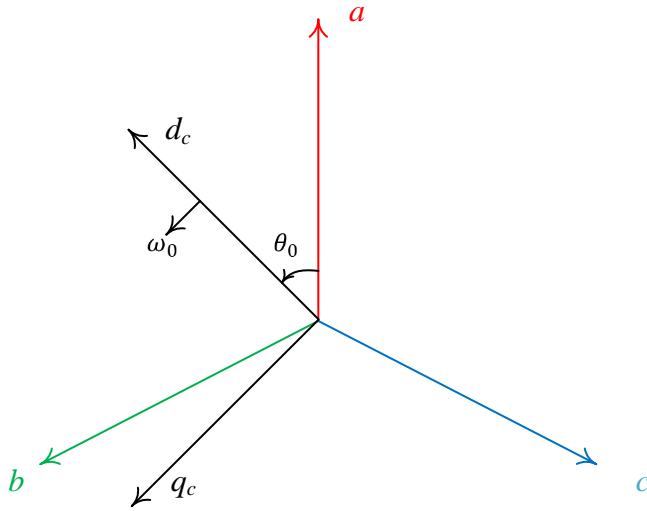


图 5 初始状态

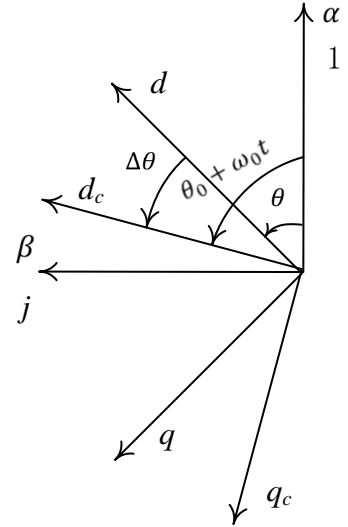


图 6 旋转坐标与同步旋转坐标

在复数情况下，同步速旋转坐标系满足的关系为：

$$i = i_{d_c} + j i_{q_c} = I e^{j(\alpha_i - \theta')}$$

此时可以定义同步正反转坐标系为：

$$i_{F_c} = \frac{\sqrt{2}}{2} i = \frac{\sqrt{2}}{2} i_{d_c} + j \frac{\sqrt{2}}{2} i_{q_c}$$

$$i_{B_c} = i_{F_c}^* = \frac{\sqrt{2}}{2} i_{d_c} - j \frac{\sqrt{2}}{2} i_{q_c}$$

## 6. 坐标系变换的选用原则

基本思想：（解耦）坐标变换将相互耦合的  $a, b, c$  三个绕组变换成在空间上相互正交的、互相间无耦合的两个绕组，从而电感矩阵变成对角阵，便于分析。

$$\begin{pmatrix} \psi_x \\ \psi_y \end{pmatrix} = \mathbf{C} \begin{pmatrix} L_{xx} & M_{xy} \\ M_{yx} & L_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_x \\ i_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_{xx} & 0 \\ 0 & L_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_x \\ i_y \end{pmatrix}$$

各种变换中的  $0$  轴分量基本上是相同的。这个分量相当于零序分量，通常等于  $0$ ，因此在分析中可以不用此分量。这样相当于把平面上相差  $120$  度的  $a, b, c$  三个绕组变换成平面上相隔  $90$  度的两个绕组。

各种变换的不同之处在于除了  $0$  轴分量外的其它两个分量。在不同的坐标系统中这两个分量可以是实数的，或是复数的，坐标轴可以以不同的转速旋转。

同一问题可以用几种不同的坐标系统来求得解答。但用某些坐标系统时求解更加方便些，而用另一些坐标系统则求解过程要繁琐一些。因此应掌握不同坐标系统的特点及它们间的转换关系，善于根据问题的性质和具体条件选择最合适的坐标系统。通常对于同步电机和异步电机都可以使用  $dq0$  坐标系，对于异步电机通常也可以使用  $\alpha\beta$  坐标系。

一般地说，假定定子和转子中某一方的电路或磁路是对称的，而另一方是非对称的，则选择把坐标轴固定在不**对称的一方上**，这样的坐标系有利于简化求解过程。

坐标变换矩阵前的系数可以是任意的。在实际中常用的选择系数的方法有两种：一是保持变换前后各相变量的**幅值不变**，即恒相幅值变换；二是保持变换前后的**功率不变**，即恒功率变换。

恒相幅值变换时，除了需要进行**功率补偿**，还要进行**转矩补偿**。

### III. 凸极同步电机的 $dq0$ 模型

#### 1. 不同坐标系下同步电机的模型

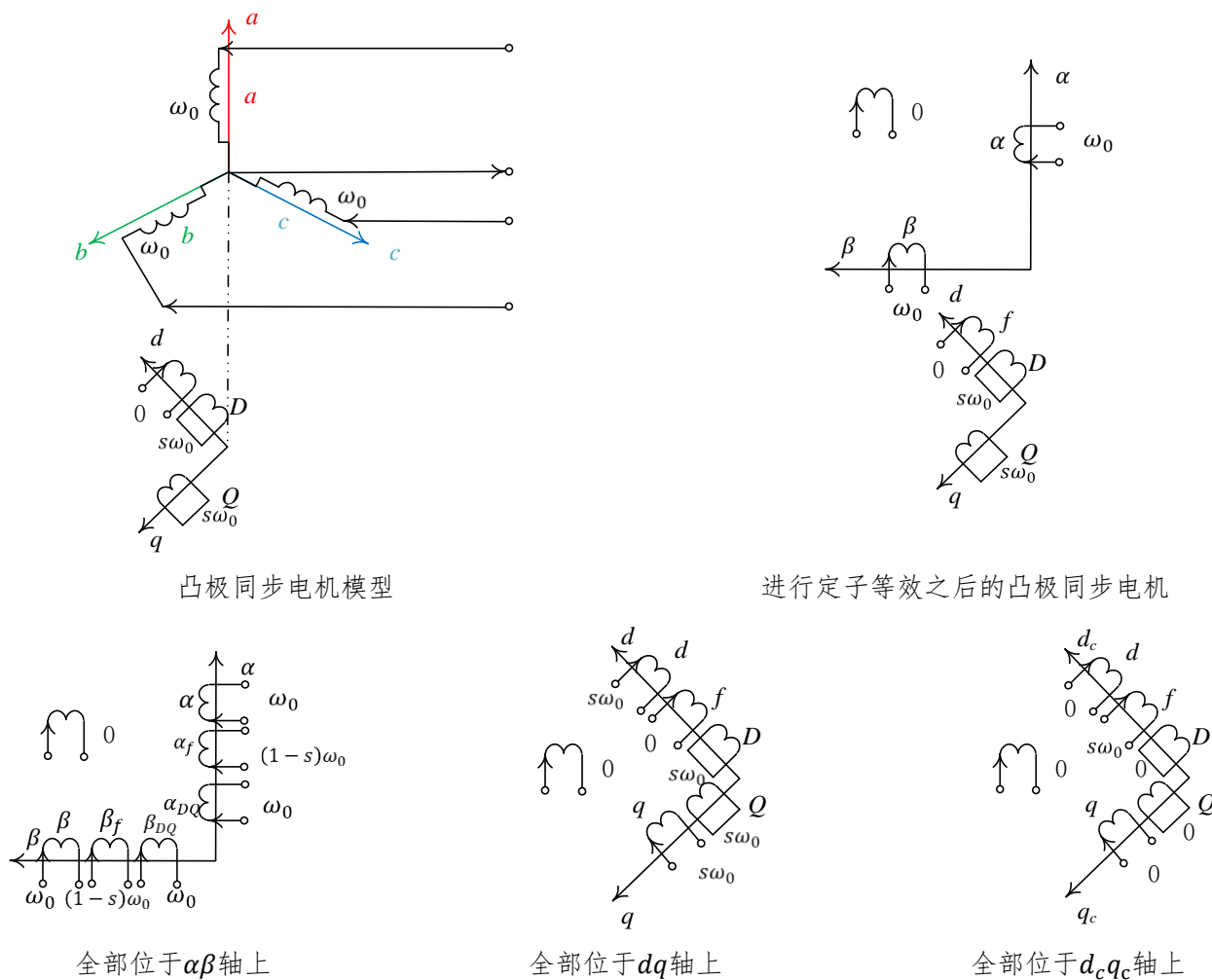


图 7 凸极同步电机的各种绕组等效形式

对于最通用的凸极同步电机模型（也可以直接去掉励磁当成异步电机），可以进行如图 7 所示的等效，其每一个线圈的电流交变频率都标注在图中，需要关注线圈是静止线圈还是伪静止线圈。

静止线圈表示等效之后的线圈和等效之前的实际线圈之间可以保持相对静止，伪静止线圈表示等效之后的线圈与等效之前的线圈存在相对运动关系。

#### 2. $dq$ 轴下的凸极同步电机模型

实际应用过程中，对于凸极同步电机及其衍生机型都是使用 $dq0$ 对其进行控制的。对于凸极同步电机只需要将

其定子绕组等效到转子上即可。

等效前凸极同步电机方程为：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_{abc} \\ \mathbf{u}_{fDQ} \end{pmatrix} = \mathcal{P} \left\{ \begin{pmatrix} \boldsymbol{\psi}_{abc} \\ \boldsymbol{\psi}_{fDQ} \end{pmatrix} \right\} + \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{abc} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{fDQ} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i}_{abc} \\ \mathbf{i}_{fDQ} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\psi}_{abc} \\ \boldsymbol{\psi}_{fDQ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_s & L_{sr} \\ L_{rs} & L_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i}_{abc} \\ \mathbf{i}_{fDQ} \end{pmatrix}$$

等效后方程相应为：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_{dq0} \\ \mathbf{u}_{fDQ} \end{pmatrix} = \mathcal{P} \left\{ \begin{pmatrix} \boldsymbol{\psi}_{dq0} \\ \boldsymbol{\psi}_{fDQ} \end{pmatrix} \right\} + \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{dq0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{fDQ} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i}_{dq0} \\ \mathbf{i}_{fDQ} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\psi}_{dq0} \\ \boldsymbol{\psi}_{fDQ} \end{pmatrix} = (\mathbf{L}) \begin{pmatrix} \mathbf{i}_{dq0} \\ \mathbf{i}_{fDQ} \end{pmatrix}$$

### 3. 电压方程

变换矩阵为：

$$\mathbf{C} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} \cos \theta & \cos \left( \theta - \frac{2\pi}{3} \right) & \cos \left( \theta + \frac{2\pi}{3} \right) \\ -\sin \theta & -\sin \left( \theta - \frac{2\pi}{3} \right) & -\sin \left( \theta + \frac{2\pi}{3} \right) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

则物理量变换的对应关系为：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i}_{dq0} \\ \mathbf{i}_{fDQ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i}_{abc} \\ \mathbf{i}_{fDQ} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{\psi}_{dq0} \\ \boldsymbol{\psi}_{fDQ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\psi}_{abc} \\ \boldsymbol{\psi}_{fDQ} \end{pmatrix}$$

电压方程可以化简为：

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{dq0} \\ \mathbf{u}_{fDQ} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{abc} \\ \mathbf{u}_{fDQ} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{pmatrix} \left( \mathcal{P} \left\{ \begin{pmatrix} \boldsymbol{\psi}_{abc} \\ \boldsymbol{\psi}_{fDQ} \end{pmatrix} \right\} + \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{abc} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{fDQ} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i}_{abc} \\ \mathbf{i}_{fDQ} \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{pmatrix} \mathcal{P} \left\{ \begin{pmatrix} \boldsymbol{\psi}_{abc} \\ \boldsymbol{\psi}_{fDQ} \end{pmatrix} \right\} + \begin{pmatrix} \mathbf{C} \mathbf{R}_s \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{fDQ} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i}_{abc} \\ \mathbf{i}_{fDQ} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{pmatrix} \mathcal{P} \left\{ \begin{pmatrix} \boldsymbol{\psi}_{abc} \\ \boldsymbol{\psi}_{fDQ} \end{pmatrix} \right\} + \begin{pmatrix} \mathbf{R}_s \mathbf{E} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{fDQ} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i}_{abc} \\ \mathbf{i}_{fDQ} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{pmatrix} \mathcal{P} \left\{ \begin{pmatrix} \boldsymbol{\psi}_{abc} \\ \boldsymbol{\psi}_{fDQ} \end{pmatrix} \right\} + \begin{pmatrix} \mathbf{R}_s \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{fDQ} \end{pmatrix} (\mathbf{C} \mathbf{i}_{abc}) \\ &= \boxed{\begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{pmatrix} \mathcal{P} \left\{ \begin{pmatrix} \boldsymbol{\psi}_{abc} \\ \boldsymbol{\psi}_{fDQ} \end{pmatrix} \right\} + \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{dq0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{fDQ} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i}_{dq0} \\ \mathbf{i}_{fDQ} \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

由上可知等效前后的绕组电阻不变：

$$\mathbf{R}_{abc} = \mathbf{R}_{dq0} = \mathbf{R}_s \mathbf{E}$$

下面分析磁链项的关系：

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{pmatrix} \mathcal{P} \left\{ \begin{pmatrix} \boldsymbol{\psi}_{abc} \\ \boldsymbol{\psi}_{fDQ} \end{pmatrix} \right\} &= \mathcal{P} \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\psi}_{abc} \\ \boldsymbol{\psi}_{fDQ} \end{pmatrix} \right\} - \mathcal{P} \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\psi}_{abc} \\ \boldsymbol{\psi}_{fDQ} \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{P} \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\psi}_{abc} \\ \boldsymbol{\psi}_{fDQ} \end{pmatrix} \right\} - \begin{pmatrix} \mathcal{P} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\psi}_{abc} \\ \boldsymbol{\psi}_{fDQ} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= p \left\{ \begin{pmatrix} \psi_{dq0} \\ \psi_{fDQ} \end{pmatrix} \right\} - \begin{pmatrix} p\mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{abc} \\ \psi_{fDQ} \end{pmatrix}$$

其中,

$$p\mathbf{C} = \frac{2}{3}\omega_0 \begin{pmatrix} \sin(\theta_0 + \omega_0 t) & \sin\left(\omega_0 t + \theta_0 - \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\omega_0 t + \theta_0 + \frac{2\pi}{3}\right) \\ -\cos(\omega_0 t + \theta_0) & -\cos\left(\omega_0 t + \theta_0 - \frac{2\pi}{3}\right) & -\cos\left(\omega_0 t + \theta_0 + \frac{2\pi}{3}\right) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以上式可以进一步化简得到:

$$p \left\{ \begin{pmatrix} \psi_{dq0} \\ \psi_{fDQ} \end{pmatrix} \right\} - \begin{pmatrix} p\mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{abc} \\ \psi_{fDQ} \end{pmatrix} = p \left\{ \begin{pmatrix} \psi_{dq0} \\ \psi_{fDQ} \end{pmatrix} \right\} + \begin{bmatrix} -\omega\psi_q \\ \omega\psi_d \\ 0 \\ \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix}$$

综上所述可以得到经过变换之后的凸极同步电机模型为:

$$\begin{pmatrix} u_d \\ u_q \\ u_0 \\ u_f \\ u_D \\ u_Q \end{pmatrix} = p \left\{ \begin{pmatrix} \psi_d \\ \psi_q \\ \psi_0 \\ \psi_f \\ \psi_D \\ \psi_Q \end{pmatrix} \right\} + \begin{pmatrix} -\omega\psi_q \\ \omega\psi_d \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \\ i_f \\ i_D \\ i_Q \end{pmatrix}$$

#### 4. 磁链关系

由于在等效之后这些电感的位置关系确定, 因此在电感矩阵中的所有量均为定值。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \psi_{dq0} \\ \psi_{fDQ} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{abc} \\ \psi_{fDQ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}\psi_{abc} \\ \psi_{fDQ} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{C}\mathbf{L}_s & \mathbf{C}\mathbf{L}_{sr} \\ \mathbf{L}_{rs} & \mathbf{L}_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{C}^{-1}\mathbf{i}_{dq0} \\ \mathbf{i}_{fDQ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}\mathbf{L}_s\mathbf{C}^{-1} & \mathbf{C}\mathbf{L}_{sr} \\ \mathbf{L}_{rs}\mathbf{C}^{-1} & \mathbf{L}_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i}_{dq0} \\ \mathbf{i}_{fDQ} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

接下来逐部分求解以上方阵中的项目:

##### 1) 第一项

$$\mathbf{C}\mathbf{L}_s\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C} \begin{pmatrix} L_{aa0} + L_{aa2} \cos 2\theta & -M_{ab0} + L_{aa2} \cos 2\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & -M_{ab0} + L_{aa2} \cos 2\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ -M_{ab0} + L_{aa2} \cos 2\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & L_{bb0} + L_{bb2} \cos 2\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & -M_{ab0} + L_{aa2} \cos \theta \\ -M_{ab0} + L_{aa2} \cos 2\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & -M_{ab0} + L_{aa2} \cos \theta & L_{cc0} + L_{cc2} \cos 2\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \end{pmatrix} \mathbf{C}^{-1}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{3} \begin{pmatrix} \cos \theta & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ -\sin \theta & -\sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{aa0} & -M_{ab0} & -M_{ab0} \\ -M_{ab0} & L_{bb0} & -M_{ab0} \\ -M_{ab0} & -M_{ab0} & L_{cc0} \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} L_{aa2} \cos 2\theta & L_{aa2} \cos 2\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & L_{aa2} \cos 2\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ L_{aa2} \cos 2\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & L_{bb2} \cos 2\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & L_{aa2} \cos \theta \\ L_{aa2} \cos 2\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & L_{aa2} \cos \theta & L_{cc2} \cos 2\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \end{pmatrix} \\
&\quad \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 1 \\ \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & 1 \\ \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & 1 \end{pmatrix} \\
&= \mathbf{C} \begin{pmatrix} L_{aa0} & -M_{ab0} & -M_{ab0} \\ -M_{ab0} & L_{bb0} & -M_{ab0} \\ -M_{ab0} & -M_{ab0} & L_{cc0} \end{pmatrix} \mathbf{C}^{-1} \\
&\quad + \mathbf{C} \begin{pmatrix} L_{aa2} \cos 2\theta & L_{aa2} \cos 2\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & L_{aa2} \cos 2\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ L_{aa2} \cos 2\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & L_{bb2} \cos 2\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & L_{aa2} \cos \theta \\ L_{aa2} \cos 2\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & L_{aa2} \cos \theta & L_{cc2} \cos 2\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \end{pmatrix} \mathbf{C}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} L_{aa0} + M_{ab0} & 0 & 0 \\ 0 & L_{aa0} + M_{ab0} & 0 \\ 0 & 0 & L_{aa0} - 2M_{ab0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2}L_{aa2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2}L_{aa2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\triangleq \begin{pmatrix} L_d & 0 & 0 \\ 0 & L_q & 0 \\ 0 & 0 & L_0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

其中,

$$L_{aa0} = \frac{L_{aad} + L_{aaq}}{2} + L_{aal}$$

$$L_{aa2} = \frac{L_{aad} - L_{aaq}}{2}$$

$$M_{ab0} = \frac{L_{aad} + L_{aaq}}{4} + L_{aal}$$

$$M_{ab2} = L_{aa2} = \frac{L_{aad} - L_{aaq}}{2}$$

那么可以导出, 上式中新定义的三个参数为:

直轴同步电感 $L_d$ , 交轴同步电感 $L_q$ , 直轴电枢反应电感 $L_{ad}$ , 交轴电枢反应电感 $L_{aq}$ 漏电感 $L_\sigma$ , 满足如下关系:

$$L_d = L_{ad} + L_\sigma$$

$$= \frac{3}{2}L_{aad} + (L_{aal} + M_{aal})$$

$$L_q = L_{aq} + L_\sigma$$

$$= \frac{3}{2}L_{aaq} + (L_{aal} + M_{aal})$$

$$L_0 = L_{aal} - 2M_{abl}$$

2) 第二项

$$\begin{aligned} \mathbf{C}\mathbf{L}_{sr} &= \frac{2}{3} \begin{pmatrix} \cos \theta & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ -\sin \theta & -\sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &\quad \cdot \begin{pmatrix} M_{af1} \cos \theta & M_{ad1} \cos \theta & -M_{aq1} \sin \theta \\ M_{af1} \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & M_{ad1} \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & -M_{aq1} \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ M_{cf1} \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & M_{ad1} \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & -M_{aq1} \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \end{pmatrix} \\ &= \frac{2}{3} \begin{pmatrix} \frac{3}{2}M_{af1} & \frac{3}{2}M_{ad1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2}M_{aq1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} M_{af1} & M_{ad1} & 0 \\ 0 & 0 & M_{aq1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

其中计算过程中需要使用如下几个等式：

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta + \cos^2\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + \cos^2\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) &= \frac{3}{2} \\ \sin^2 \theta + \sin^2\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin^2\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) &= \frac{3}{2} \\ \sin \theta \cos \theta + \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) &= 0 \end{aligned}$$

3) 第三项

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{rs}\mathbf{C}^{-1} &= \begin{pmatrix} M_{af1} \cos \theta & M_{af1} \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & M_{af1} \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ M_{ad1} \cos \theta & M_{ad1} \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & M_{ad1} \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ -M_{aq1} \sin \theta & -M_{aq1} \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & -M_{aq1} \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 1 \\ \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & 1 \\ \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & -\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{2}M_{af1} & 0 & 0 \\ \frac{3}{2}M_{ad1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}M_{aq1} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

#### 4) 总结：磁链方程

$$\begin{pmatrix} \psi_{dq0} \\ \psi_{fDQ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_d & 0 & 0 & M_{af1} & M_{aD1} & 0 \\ 0 & L_q & 0 & 0 & 0 & M_{aQ1} \\ 0 & 0 & L_0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2}M_{af1} & 0 & 0 & L_f & M_{fD} & 0 \\ \frac{3}{2}M_{aD1} & 0 & 0 & M_{Df} & L_D & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}M_{aQ1} & 0 & 0 & 0 & L_Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{dq0} \\ i_{fDQ} \end{pmatrix}$$

从 $a-b-c$ 变换到 $d-q-0$ 后，电枢绕组的自感和互感系数由时变系数变为与 $\theta$ 角无关的常数。

坐标变换使具有相互电磁耦合的 $a, b, c$ 相绕组变为没有耦合关系的假想的 $d$ 轴、 $q$ 轴绕组，达到解耦的作用，便于分析与控制。

假想的 $d, q$ 绕组与转子绕组间的互感系数不可逆，使用起来有些不方便。可以用标么值系统加以解决。

#### 5. 功率（转矩）关系

##### 1) 功率相互关系

在相坐标情况下功率的表达式：

$$P_{abc} = (u_a \quad u_b \quad u_c) \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{pmatrix}$$

在转子坐标情况下的功率表达式：

$$\begin{aligned} P_{dq0} &= (u_d \quad u_q \quad u_0) \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{2}{3} (u'_a i'_a + u'_b i'_b + u'_c i'_c) + u_0 i_0 \\ &= \frac{2}{3} (u_a i_a + u_b i_b + u_c i_c) - u_0 i_0 \\ &= \frac{2}{3} P_{abc} - u_0 i_0 \end{aligned}$$

从中可以反解得到功率表达式：

$$\begin{aligned} P_{abc} &= \frac{3}{2} (P_{dq0} + u_0 i_0) \\ &= \frac{3}{2} (u_d \quad u_q \quad 2u_0) \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

##### 2) 功率输入分析

与一般化电机类似，此处给出基于能量守恒的输入功率分析，从而给出输出电磁转矩的方程：

$$P_{in} = \frac{3}{2} \begin{pmatrix} p\psi_d - \omega\psi_q + R_s i_d \\ p\psi_q + \omega\psi_d + R_s i_q \\ 2(p\psi_0 + R_s i_0) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p\psi_f + R_f i_f \\ p\psi_D + R_D i_D \\ p\psi_Q + R_Q i_Q \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} i_f \\ i_D \\ i_Q \end{pmatrix} - \Omega T_e + \Omega B \Omega + \Omega J p \Omega$$

$$= \frac{I^T L' p I}{\text{电磁储能}} + \frac{\Omega J p \Omega}{\text{机械储能}} + \frac{\left( \frac{3}{2} R_s (i_d^2 + i_q^2 + 2i_0^2) + R_f i_f^2 + R_D i_D^2 + R_Q^2 \right)}{\text{电磁损耗}} + \frac{B \Omega^2}{\text{机械损耗}} + \frac{\frac{3}{2} \omega (\psi_d i_q - \psi_q i_d) + \Omega T_e}{\text{应当抵消}}$$

可以导出电磁转矩的方程：

$$T_e = \frac{3}{2} p (\psi_d i_q - \psi_q i_d)$$

也即，当进入稳态之后电磁转矩应当为常数，但是实际情况由于一下三条原因让稳态下转矩并不能保持为一个稳定的常数：①由于 cogging torque 的存在导致实际输出不平稳，②由于铁芯产生的饱和产生的脉动，③由于  $L_d, L_q$  并非常数，还有 4, 6 等高次分量。

## IV. 稳态情况下的凸极同步电机

### 1. 凸极同步电机的稳态模型

在之前的分析中，凸极同步电机始终处于瞬态工作状态，并没有要求其工作在三相对称的正弦电流下，但是下面将会推导电机工作在实际应用场景中更可能出现的情况，也就是三相对称正弦系统的情况。

当凸极电机进行了  $d-q-0$  等效之后，其各个物理量都可以通过向量来表示如下，然后将  $d$  轴作为实轴， $q$  轴作为虚轴，并且运行在稳态情况下就会形成相量图：

$$\vec{u} = u_d \vec{d} + u_q \vec{q} := \vec{U}$$

$$\vec{E} = E_d \vec{d} + E_q \vec{q} = 0 \vec{d} + E_m \vec{q} := j E_m$$

$$\vec{i} = i_d \vec{d} + i_q \vec{q} := \vec{i}$$

由电压关系可以得到：

$$\vec{U} = \vec{E} + R_s \vec{i} + j X_q i_q + j X_d i_d$$

图中， $\delta$  为功角， $\varphi$  为功率因数角， $\varphi_i$  为内功率因数角。

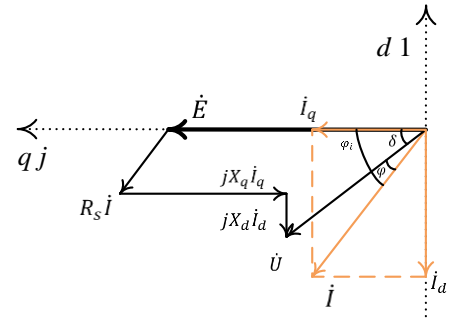


图 8 凸极电机稳态模型

当  $R_s \ll x_d, x_q$  时，有如下的关系可以定义出电流大小

$$i_d = -\frac{E_m - U_m \cos \delta}{x_d}$$

$$i_q = \frac{U_m \sin \delta}{x_q}$$

由于  $i_q$  恒为正数，调节励磁可以调节旋转电势，可以改变  $i_d$  的大小与正负，因而可以影响电流向量和电压向量之间的关系，进而实现调整功率因数的目标。当同步电机欠励的情况下将会成为一个感性负载，当同步电机过励时将会成为一个容性负载（相对于电网而言），但是感应电机时钟都是一个感性负载。电网上传输无功电流时仍然有铜耗，所以希望在电网上能够实现比较合理（接近 1）的功率因数角。同步调相机可以放在负载侧抵消无功功率，提升功率因数。

将上式代入凸极同步电机的转矩方程中可以得到：

$$T_e = \frac{3}{2} p (\psi_d i_q - \psi_q i_d) = \frac{3}{2} p (\psi_f - \psi_q i_d)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{3p}{2\omega} \left( \frac{E_m U_m \sin \delta}{x_d} + \frac{U_m^2}{2} \left( \frac{1}{x_q} - \frac{1}{x_d} \right) \sin 2\delta \right) \\
&= \frac{3}{2} p \left( (M_{af1} i_f) i_q + (L_d - L_q) i_d i_q \right)
\end{aligned}$$

其中第一项成为基本电磁转矩 (PM torque, mutual torque, 定转子磁场相互作用产生的), 第二项称为磁阻转矩。同时可以推论得到电磁功率表达式:

$$P_e = \frac{3}{2} \left( \frac{E_m U_m \sin \delta}{x_d} + \frac{U_m^2}{2} \left( \frac{1}{x_q} - \frac{1}{x_d} \right) \sin 2\delta \right)$$

表达式相比于电机学中的表达式多了一项  $\frac{1}{2}$  这是因为电机学中使用的值都是有效值, 而此处的值都是幅值。

在一般电机中当  $L_d > L_q$  时, 将会呈现图中所示的图像, 在永磁凸极电机中, 通常  $L_q > L_d$ , 峰值将会出现在  $\frac{\pi}{2}$  右侧。

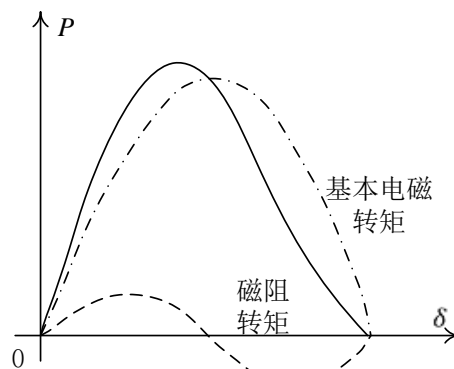


图 9 凸极同步电机的电磁转矩图像

所以可以看到, 当对外输出功率确定之后将会确定功角  $\delta$ , 然后得到功角之后可以计算出各个电流分量的大小。

在现代电机设计过程中, 为了让电机的转矩尽可能大, 所以在铁心不饱和的情况下尽可能提升转子永磁体的磁性, 另一方面希望将磁阻转矩也发挥其作用, 所以尽可能地加大凸极率, 在电动车电机中磁阻转矩通常会占到 30%~40% 的比例。

凸极电机的绕组一旦短路将等效为一个短路的发电机, 同时将会产生一个非常大的制动力, 这里制动力将会非常大。应用在新能源汽车和磁悬浮列车中一旦出现短路问题制动力可能会非常危险。

同步电机启动过程: 分为异步启动和迁入同步两个过程。异步启动时, 转子励磁绕组不接励磁电压, 而是通过一个约为 10 被励磁绕组的电阻短路。当异步启动接近同步速时, 励磁绕组改接到励磁电压, 电机将会迁入同步。

在前面所述的三相凸极同步电机和感应电机的数学模型中, 电压  $u_a, u_b, u_c$  都是指加在电机绕组上的相电压, 并以此作坐标变换。

以星形接法为例, 如果采用三相四线制, 则  $u_a, u_b, u_c$  都是已知的。如果采用三相三线制, 则  $u_a, u_b, u_c$  都是未知的, 就不能直接用  $a-b-c$  坐标下的数学模型求解。不能保证  $m$  与  $n$  等电位。  $u_a = u'_a, u_b = u'_b, u_c = u'_c$  不成立, 如图

10

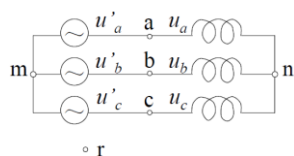


图 10 三角形接法的电机情况

将电源电压作坐标变换等效于将电机相电压作坐标变换, 差别仅在于 0 轴分量。0 轴分量不需考虑, 因为无 0 轴电流。所以经过坐标变换之后可以直接求解。从  $a-b-c$  坐标变换到某种两相正交坐标, 变换矩阵是  $C$ 。

$$C \begin{pmatrix} u_{ar} \\ u_{br} \\ u_{cr} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} u_{nr} \\ u_{nr} \\ u_{nr} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} u'_a \\ u'_b \\ u'_c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_{mn} \end{pmatrix}$$

如果一定要使用 $abc$ 坐标求解，那么可以列下面的方程，结合电流关系就可以求解，但是求解方法会比较困难。

$$\begin{cases} u_a = p\psi_a + R_s i_a \\ u_b = p\psi_b + R_s i_b \\ u_c = p\psi_c + R_s i_c \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_a - u_c = u_{ac} \\ u_b - u_c = u_{bc} \\ i_a + i_b + i_c = 0 \end{cases}$$

## 2. 凸极同步电机控制策略概述

直接转矩控制（DTC）：通过变频器给电机供电，调节输给电机的电压和功角实现对于电机的转矩控制。

最大转矩电流比控制（MTPA, *Maximum Torque Per Ampere*）：电流的方向和 $d$ 轴励磁的电流的叉积就是电机输出的转矩，因此可以通过控制电流的方向来控制电机的转矩输出，目标希望单位电流产生的转矩最大化。当仅仅考虑基本电磁转矩时，在理想的情况下，定子电流最好落在 $q$ 轴上，退化成 $i_d = 0$ 控制，这样可以产生最大的电磁转矩。当考虑

## 3. 基于凸极同步电机的衍生电机概述

同步磁阻电机（SynRM），仅有凸极转子，没有转子励磁，其转子冲片通常做成下面的形式。这种电机通常比同功率的异步电机小，而且能效等级更高。但是这样的电机存在功率因数小的问题，可以通过在其中加很小的励磁，称为永磁辅助的同步磁阻电机，永磁体用来提升整体的功率因数。

开关磁阻电机（SRM），最大的问题就是转矩脉动很大，噪声会很大，但是控制、结构简单。

磁滞电机：隐极、转子无励磁的情况下。转子使用的材料必须要使用磁滞效应非常大的材料，这样的电机功率和效率并不高。当电机堵转之后仍然不会产生非常大的转矩。

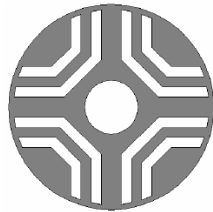


图 11 同步磁阻电机的转子

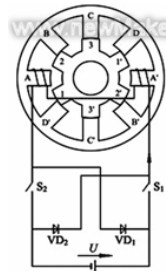


图 12 开关磁阻电机

直流无刷电机（BLDC），使用方波控制，典型的波形为梯形波。

永磁同步电机（PMSM），实际上就是永磁同步电机。

## V. 参考资料

### § 1-7 座标变换

座标变换亦即变量的转换在研究电机的瞬变过程中具有重要的意义。通过这种方法，使我们有可能找到一种比较简便的途径去解决所需要研究的问题。在实际工作中常会碰到这种

情况，在原座标系统中各变量间具有复杂的关系，而在新的座标系统中变量间关系却相当简明，并易于求得结果。在此情况下，我们就把原来的一些变量用新的变量来替代，当问题在新的变量系统中得到解决后，再把原来的变量求出来。

#### 一、变换系数

座标变换问题在于确定变换系数。假定在原座标系统中的变量为  $x_1, x_2, \dots, x_n$ （它们可以是电流，也可以是电压或磁链等），如果令

$$Y = CX \quad (1-180)$$

其中

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad (1-181)$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (1-182)$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix} \quad (1-183)$$

则由此而确定了在新系统中的变量  $y_1, y_2, \dots, y_n$ 。式中  $c$  为变换系数，可以取为常数（实数或复数），也可取为时间  $t$  的函数，在线性变换中，这些系数与变量  $x$  及  $y$  无关。

由代数学的基本知识可知，为了使上述的变换得以实现，并使原变量和新变量间存在单值对应关系，则转换矩阵  $C$  应该是满秩的，即其行列式不为零：

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (1-184)$$

在此情况下，反变换可写成下式：

$$X = C^{-1}Y \quad (1-185)$$

其中  $C^{-1}$  是矩阵  $C$  的逆矩阵。

满足式 (1-184) 要求的变换系数的选择方法很多，然而，为了使计算简化，在实际工作

中得到应用的也不过数种。为了便于理解和记忆这类变换系数的确定方法和座标系统的相互转化,有时引用了综合矢量的概念。下面我们将以三相系统为例来说明这一问题。

## 二、综合矢量

对三相系统三个变量而言,所谓综合矢量是这样定义的:把三个变量 $x_1$ 、 $x_2$ 和 $x_3$ 看成是三个矢量的模,它们的位置分别处于三相绕组的轴线上,当变量为正时,矢量的方向与各自的轴线方向相同,反之,则取相反方向;然后把

三个矢量相加并取其合成矢量的 $\frac{2}{3}$ 倍(如果为

$m$ 相系统则取合成矢量的 $\frac{2}{m}$ 倍),此矢量即为

综合矢量。具体说来,参阅图1-13,设三个变量为三相电流 $i_a$ 、 $i_b$ 及 $i_c$ ,则综合矢量

$$I = \frac{2}{3}(i_a + i_b + i_c) = \frac{2}{3}(i_a \mathbf{a} + i_b \mathbf{b} + i_c \mathbf{c}) \quad (1-186)$$

其中  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 、 $\mathbf{c}$  分别为轴线 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 上的单位矢量。

为了求得综合矢量 $i$ 的大小和位置,假设把轴线 $a$ 作为实轴,领前 $90^\circ$ 为虚轴,则根据定义,矢量在复平面内为

$$i = \frac{2}{3}[i_a + i_b e^{j120^\circ} + i_c e^{j240^\circ}] = i e^{j\alpha} \quad (1-187)$$

其中

$$\begin{aligned} i &= \frac{2}{3} \sqrt{\left(i_a - \frac{1}{2}i_b - \frac{1}{2}i_c\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}i_b - \frac{\sqrt{3}}{2}i_c\right)^2} \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{(i_a^2 + i_b^2 + i_c^2) - (i_a i_b + i_b i_c + i_c i_a)} \\ &= \sqrt{\frac{2}{3} [(i_a^2 + i_b^2 + i_c^2) - 3i_0^2]} \\ &= \sqrt{\frac{2}{3} [(i_a - i_0)^2 + (i_b - i_0)^2 + (i_c - i_0)^2]} \\ &= \sqrt{\frac{2}{3} (i_a'^2 + i_b'^2 + i_c'^2)} \end{aligned} \quad (1-188)$$

$$\alpha = \cos^{-1} \frac{i_a'}{\sqrt{\frac{2}{3} (i_a'^2 + i_b'^2 + i_c'^2)}} \quad (1-189)$$

式中  $i_0 = \frac{1}{3}(i_a + i_b + i_c)$  为三相系统中的零轴电流;

$i_a' = i_a - i_0$ ,  $i_b' = i_b - i_0$ ,  $i_c' = i_c - i_0$  分别为扣除零轴电流后三相电流的瞬时值。

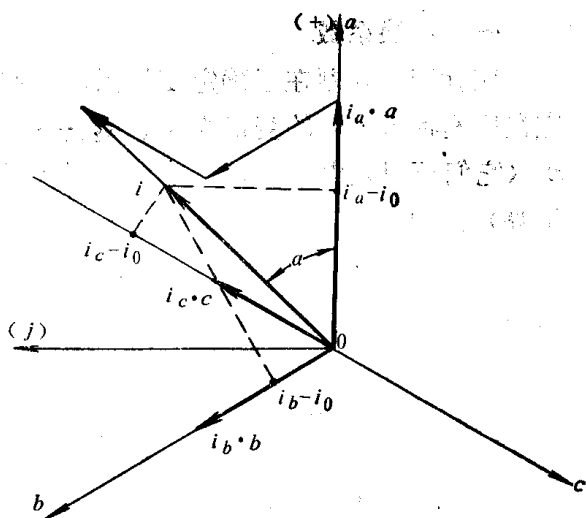


图 1-13 综合矢量



对  $m$  相系统而言, 上述公式仍可应用, 只需将  $\frac{2}{3}$  改为  $\frac{2}{m}$  即可。

由上式可见, 零轴电流不产生综合矢量。根据定义, 这是应该的, 因为零轴电流大小相等, 而三相线圈的轴线在空间互差  $120^\circ$ , 因而零轴电流的空间矢量也互差  $120^\circ$ , 它们的合成矢量为零。由于这种缘故, 综合矢量又常写成下式:

$$\mathbf{i} = \frac{2}{3} [i'_a + i'_b e^{j120^\circ} + i'_c e^{j240^\circ}] \quad (1-190)$$

参阅图1-13和式(1-187)及(1-189), 综合矢量  $\mathbf{i}$  在三相轴线上的投影值分别为:

$$\left. \begin{aligned} i \cos \alpha &= i_a - i_0 = i'_a \\ i \cos \left( \alpha - \frac{2\pi}{3} \right) &= i_b - i_0 = i'_b \\ i \cos \left( \alpha + \frac{2\pi}{3} \right) &= i_c - i_0 = i'_c \end{aligned} \right\} \quad (1-191)$$

由此可见, 综合矢量在各相绕组轴线上的投影值再加上零轴分量给出了各相变量的瞬时值; 另外, 综合矢量在各相绕组轴线上的投影值与综合矢量在该轴线上的分量(矢量)的数值是不同的, 后者的数值为  $\frac{2}{3}i_a$ ,  $\frac{2}{3}i_b$  及  $\frac{2}{3}i_c$ , 这种差异是由于三相绕组的轴线在空间并非正交而是互差  $120^\circ$  所引起的, 只有在轴线互为正交时, 两者才有相同的数值。

由于各相电流产生的磁势幅值与各相电流的大小成比例, 而这些磁势在气隙中又按正弦规律分布, 且其合成磁势可以通过矢量合成方法而得到, 因之, 就电流的综合矢量而言, 它实际上反映了合成磁势的大小, 其值与合成磁势的幅值成比例。

除了电流外, 电压和磁链按同样的方法也可得到相应的综合矢量。

采用综合矢量的好处在于三相绕组中的变量可以同时被考虑到, 这也就是说, 一旦综合矢量确定了, 三相绕组中的变量(零轴分量除外)也就确定了。这一结果不仅对正序分量和负序分量适合, 对直流分量也同样适用。另外, 综合矢量还可以在其它一些轴线上投影, 其值则表示具有该轴线的线圈中的变量的瞬时值。由于座标轴线可以有不同的取法, 因而综合矢量在各轴线上的投影值也各不相同, 它们之间的关系和变换系数, 在轴线确定后可以简便地求得。通常座标系统可以分为三大类:

1. 座标轴线放在定子上的静止座标系统, 即  $a, b, c$ ,  $\alpha, \beta, 0$  以及  $1, 2, 0$  座标系统;
2. 座标轴线放在转子上的随转子一起旋转的座标系统, 即  $d, q, 0$  及  $F, B, 0$  座标系统;
3. 座标轴线在空间以同步转速旋转的同步恒速座标系统, 即  $d_c, q_c, 0$  及  $F_c, B_c, 0$  座标系统。

下面我们就根据综合矢量以电流为例来确定这些座标系统间的转换关系, 至于在各座标系统中的电机基本方程式, 将分别在以后有关章节中阐述。

### 三、座标变换

#### 1. $d, q, 0$ 座标系统

如果把座标轴线放在转子上,  $d$  轴为直轴, 交轴  $q$  领先  $90^\circ$ 。参阅图1-14, 把综合矢量  $\mathbf{i}$  在  $d, q$  两轴上分解, 得分量  $i_d d$  及  $i_q q$ , 其中  $d$  及  $q$  为沿  $d, q$  两轴线方向上的单位矢量。由于

在图1-14~1-18中，三相在时间上的顺序是a-b-c-a，在空间分布上a、b、c三相逆时针排列，所以 $\omega$ 、 $\omega_0$ 的转向均为逆时针方向。

$d, q$ 两轴互相垂直，因而这两分量的数值分别为综合矢量 $i$ 在这两轴线上的投影值。矢量 $i$ 在 $a, b, c$ 三轴线上的投影为 $i_a = i \cos \theta$ ， $i_b = i \cos(\theta - \frac{2\pi}{3})$ 和 $i_c = i \cos(\theta + \frac{2\pi}{3})$ ，因之，利用 $i_d$ 及 $i_q$ 来求 $i_a, i_b, i_c$ 时，则有

$$\left. \begin{aligned} i_a &= i_d \cos \theta - i_q \sin \theta \\ i_b &= i_d \cos \left( \theta - \frac{2\pi}{3} \right) - i_q \sin \left( \theta - \frac{2\pi}{3} \right) \\ i_c &= i_d \cos \left( \theta + \frac{2\pi}{3} \right) - i_q \sin \left( \theta + \frac{2\pi}{3} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1-192)$$

$$\left. \begin{aligned} i_a &= i_d \cos \theta - i_q \sin \theta + i_0 \\ i_b &= i_d \cos \left( \theta - \frac{2\pi}{3} \right) - i_q \sin \left( \theta - \frac{2\pi}{3} \right) + i_0 \\ i_c &= i_d \cos \left( \theta + \frac{2\pi}{3} \right) - i_q \sin \left( \theta + \frac{2\pi}{3} \right) + i_0 \end{aligned} \right\} \quad (1-193)$$

由于矢量 $i$ 在 $a, b, c$ 轴上的分量为 $\frac{2}{3} i_a a, \frac{2}{3} i_b b$ 及 $\frac{2}{3} i_c c$ ，因而利用它们在 $d, q$ 轴上的

投影来求 $i_d$ 及 $i_q$ 时，则有

$$\left. \begin{aligned} i_d &= \frac{2}{3} \left[ i_a \cos \theta + i_b \cos \left( \theta - \frac{2\pi}{3} \right) + i_c \cos \left( \theta + \frac{2\pi}{3} \right) \right] \\ i_q &= -\frac{2}{3} \left[ i_a \sin \theta + i_b \sin \left( \theta - \frac{2\pi}{3} \right) + i_c \sin \left( \theta + \frac{2\pi}{3} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (1-194)$$

考虑到零轴电流关系式，并把上两式表以矩阵形式，则有

$$\begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 1 \\ \cos \left( \theta - \frac{2\pi}{3} \right) & -\sin \left( \theta - \frac{2\pi}{3} \right) & 1 \\ \cos \left( \theta + \frac{2\pi}{3} \right) & -\sin \left( \theta + \frac{2\pi}{3} \right) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{bmatrix} \quad (1-195)$$

及

$$\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos \left( \theta - \frac{2\pi}{3} \right) & \cos \left( \theta + \frac{2\pi}{3} \right) \\ -\sin \theta & -\sin \left( \theta - \frac{2\pi}{3} \right) & -\sin \left( \theta + \frac{2\pi}{3} \right) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \quad (1-196)$$

## 2. $\alpha, \beta, 0$ 座标系统

如果把座标轴放在定子上，且使 $\alpha$ 轴线与 $a$ 轴线重合， $\beta$ 轴线领先 $90^\circ$ ，综合矢量在各轴线上的投影如图1-15所示。不难看出，这种座标系统与 $\theta=0$ 时的 $d, q, 0$ 座标系统相同，因之， $\alpha, \beta, 0$ 系统与 $a, b, c$ 系统间的关系为

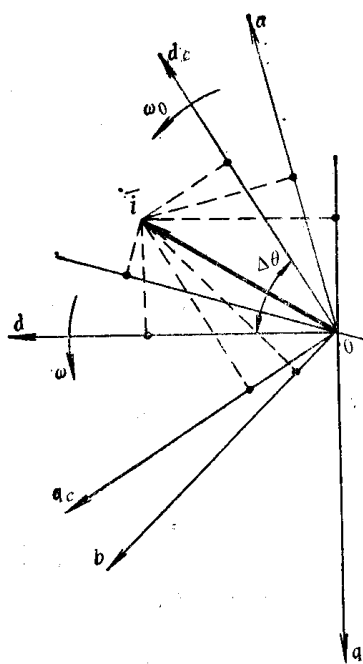


图 1-14 坐标变换

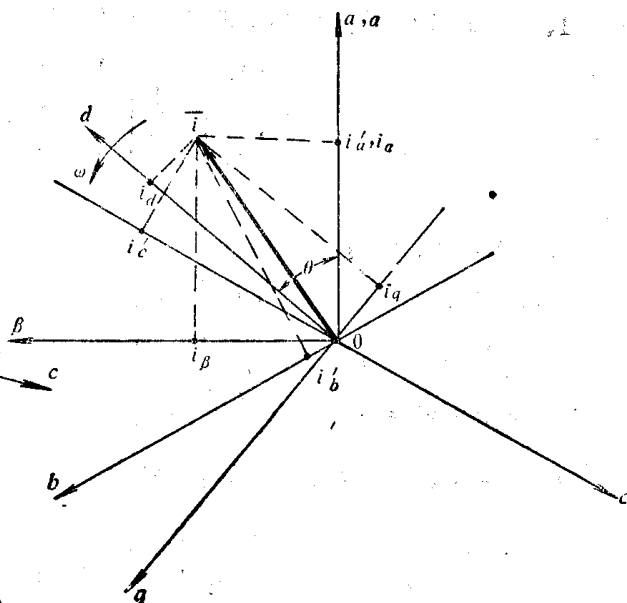


图 1-15 坐标变换

此图实际  
是图 1-18。

图 1-14 在书

上图 1-18 处。

$$\begin{bmatrix} i_a \\ i_\beta \\ i_0 \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{bmatrix} \quad (1-197)$$

和

$$\begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \\ i_0 \end{bmatrix} \quad (1-198)$$

$\alpha, \beta$  与  $d, q$  两系统间的关系为

$$\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} \quad (1-199)$$

和

$$\begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} \quad (1-200)$$

3. 1、2、0 座标系统 (与正逆序系统类似)

如图 1-16 所示, 取  $\alpha$  轴为实轴, 领先  $90^\circ$  为虚轴, 并以综合矢量本身之半  $i_1$  为变量,  $i_2$  为其共轭复数。根据综合矢量在轴线上的投影和综合矢量在各轴线上分量之间的关系, 不难由

图得知:

1、2、0 与  $a$ 、 $b$ 、 $c$  两坐标系间关系为

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \quad (1-201)$$

和

此轴此通叶, 把用中向  
 $\alpha$ . 模值用  $i_1, i_2$   
 表示, 且  $i_a' = i_1 \cos \alpha, i_b' = i_1 \cos(\alpha - \frac{2\pi}{3}), i_c' = i_1 \cos(\alpha + \frac{2\pi}{3})$ . 即得。

$$\begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_0 \end{bmatrix} \quad (1-202)$$

其中  $a = e^{j120^\circ} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$  为复数算子。

1、2 与  $\alpha$ 、 $\beta$  两坐标系间关系为

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & j \\ 1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} \quad (1-203)$$

(手用)  $\begin{cases} i_1 = (i_\alpha + j i_\beta) / \sqrt{2} \\ i_2 = (i_\alpha - j i_\beta) / \sqrt{2} \end{cases}$

和

$$\begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -j & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad (1-204)$$

$\begin{cases} i_\alpha = i_1 \cos \alpha + i_2 \sin \alpha \\ i_\beta = i_1 \sin \alpha - i_2 \cos \alpha \end{cases}$

1、2 与  $d$ 、 $q$  两坐标系间关系为

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{j\theta} & je^{j\theta} \\ e^{-j\theta} & -je^{-j\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} \quad (1-205)$$

$\begin{cases} i_1 = (i_d + j i_q) / \sqrt{2} \\ i_2 = (i_d - j i_q) / \sqrt{2} \end{cases}$

和

$$\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-j\theta} & e^{j\theta} \\ -je^{-j\theta} & je^{j\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad (1-206)$$

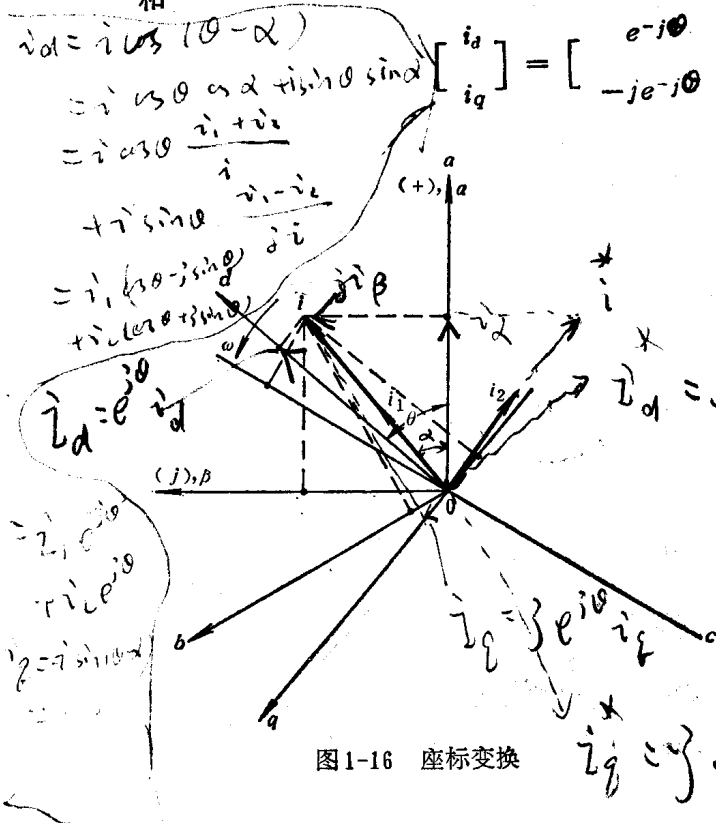


图 1-16 坐标变换

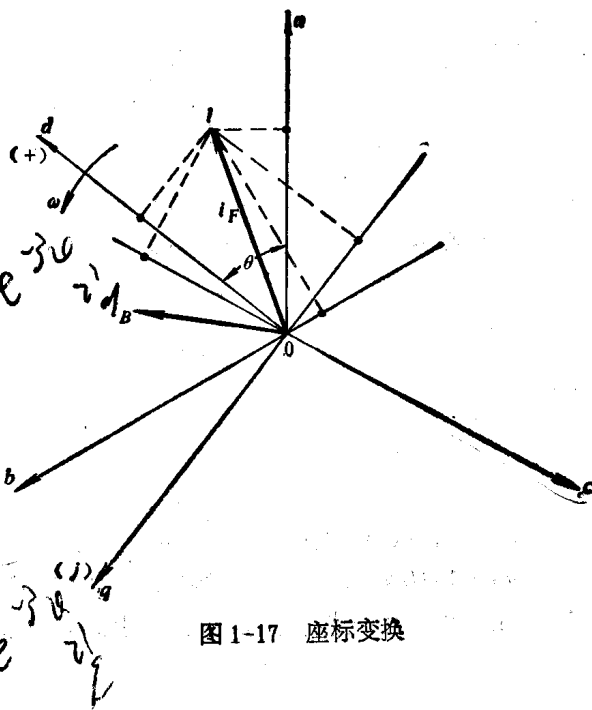


图 1-17 坐标变换

#### 4. $F$ 、 $B$ 、 $0$ 座标系统

1, 2座标系统是把复数座标轴放在定子上的, 如果把复数座标轴放在转子上, 则为  $F$ ,  $B$  座标系统。如图 1-17 所示, 以综合矢量的  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  倍  $i_F$  为变量,  $i_B$  为其共轭复数, 根据综合矢量在各轴线上的分量及投影值的关系, 可得  $F$ 、 $B$ 、 $0$  与  $a$ 、 $b$ 、 $c$  两座标系统间的关系为

$$\begin{bmatrix} i_F \\ i_B \\ i_0 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{3} \begin{bmatrix} e^{-j\theta} & ae^{-j\theta} & a^2e^{-j\theta} \\ ej\theta & a^2ej\theta & aej\theta \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \quad (1-207)$$

和

$$\begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} ej\theta & e^{-j\theta} & \sqrt{2} \\ a^2ej\theta & ae^{-j\theta} & \sqrt{2} \\ aej\theta & a^2e^{-j\theta} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_F \\ i_B \\ i_0 \end{bmatrix} \quad (1-208)$$

$F$ 、 $B$  与 1、2 两座标系统间关系为

$$\left. \begin{aligned} i_F &= \sqrt{2} i_1 e^{-j\theta} \\ i_B &= \sqrt{2} i_2 ej\theta \end{aligned} \right\} \quad (1-209)$$

$F$ 、 $B$  与  $d$ 、 $q$  两座标系统间关系为

$$\begin{bmatrix} i_F \\ i_B \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & j \\ 1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} \quad (1-210)$$

和

$$\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -j & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_F \\ i_B \end{bmatrix} \quad (1-211)$$

#### 5. $d_c$ 、 $q_c$ 、 $0$ 座标系统

这种座标系统的轴线在空间以同步速度  $\omega_0$  旋转, 参阅图 1-18, 设  $t=0$  时, 同步轴  $d_c$  及  $q_c$  分别与转子直轴及交轴重合, 且  $\theta_0$  为直轴与轴线  $a$  之间的初始角, 则  $d_c$ 、 $q_c$ 、 $0$  与  $a$ 、 $b$ 、 $c$  两座标系统间的关系为

$$\begin{bmatrix} i_{d_c} \\ i_{q_c} \\ i_0 \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos(\omega_0 t + \theta_0) & \cos(\omega_0 t + \theta_0 - \frac{2\pi}{3}) & \cos(\omega_0 t + \theta_0 + \frac{2\pi}{3}) \\ -\sin(\omega_0 t + \theta_0) & -\sin(\omega_0 t + \theta_0 - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\omega_0 t + \theta_0 + \frac{2\pi}{3}) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \quad (1-212)$$

和

$$\begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega_0 t + \theta_0) & -\sin(\omega_0 t + \theta_0) & 1 \\ \cos(\omega_0 t + \theta_0 - \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\omega_0 t + \theta_0 - \frac{2\pi}{3}) & 1 \\ \cos(\omega_0 t + \theta_0 + \frac{2\pi}{3}) & -\sin(\omega_0 t + \theta_0 + \frac{2\pi}{3}) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{d_c} \\ i_{q_c} \\ i_0 \end{bmatrix} \quad (1-213)$$

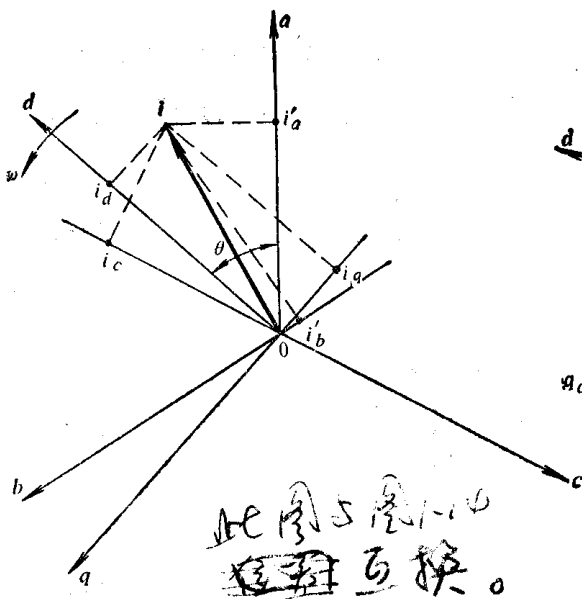


图 1-18 座标变换

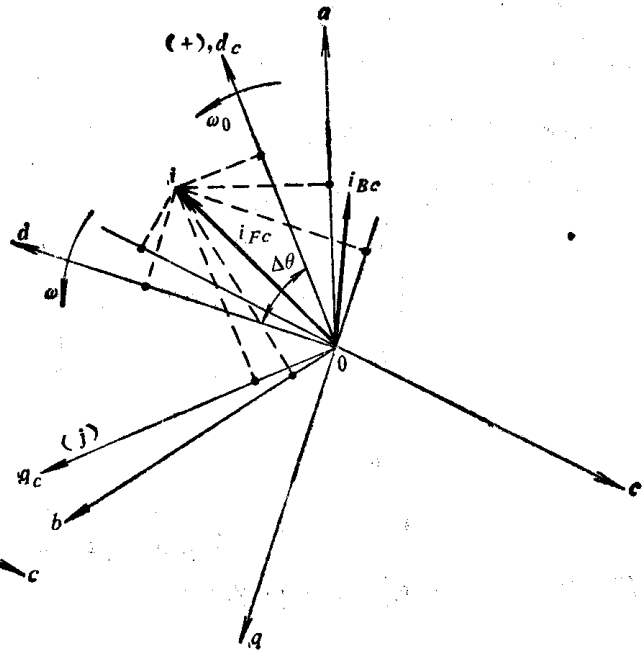


图 1-19 座标变换

$d_e, q_c$  与  $d, q$  两坐标系统间关系为

$$\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Delta\theta & -\sin \Delta\theta \\ \sin \Delta\theta & \cos \Delta\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{d_c} \\ i_{q_c} \end{bmatrix} \quad (1-214)$$

和

$$\begin{bmatrix} i_{d_c} \\ i_{q_c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \Delta\theta & \sin \Delta\theta \\ -\sin \Delta\theta & \cos \Delta\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} \quad (1-215)$$

其中  $\Delta\theta = \theta - (\omega_0 t + \theta_0)$  为转子轴线领前同步轴的角度。

#### 6. $F_c, B_c, 0$ 座标系统

这种坐标系统是把复数坐标轴放在同步轴上，因之，它是一种以同步速度旋转的座标系统。如图1-19所示，以同步轴  $d_c$  为实轴，虚轴领前  $90^\circ$ ，并以综合矢量的  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  倍的复数  $i_{F_c}$  为变量， $i_{B_c}$  为其共轭复数。假设  $t=0$  时， $d_c$  轴与  $d$  轴重合，且与轴线  $a$  的夹角为  $\theta_0$ ，则  $F_c, B_c, 0$  与  $a, b, c$  两系统间的关系为

$$\begin{bmatrix} i_{F_c} \\ i_{B_c} \\ i_0 \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{3} \begin{bmatrix} e^{-j(\omega_0 t + \theta_0)} & ae^{-j(\omega_0 t + \theta_0)} & a^2 e^{-j(\omega_0 t + \theta_0)} \\ ej(\omega_0 t + \theta_0) & a^2 ej(\omega_0 t + \theta_0) & aej(\omega_0 t + \theta_0) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \quad (1-216)$$

和

$$\begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} ej(\omega_0 t + \theta_0) & e^{-j(\omega_0 t + \theta_0)} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ a^2 ej(\omega_0 t + \theta_0) & ae^{-j(\omega_0 t + \theta_0)} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ aej(\omega_0 t + \theta_0) & a^2 e^{-j(\omega_0 t + \theta_0)} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{F_c} \\ i_{B_c} \\ i_0 \end{bmatrix} \quad (1-217)$$

$F_c, B_c$  与  $d_c, q_c$  两系统间关系为

$$\begin{bmatrix} i_{F_1} \\ i_{Bc} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & j \\ 1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} \quad (1-218)$$

和

$$\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -j & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{F_1} \\ i_{Bc} \end{bmatrix} \quad (1-219)$$

各种座标系统各有其优缺点，选用这种或那种座标系统取决于以下的一些条件：

- (1) 所需结果的准确程度及计算方法的简便等；
- (2) 被研究问题的条件：稳定的还是瞬变的，对称的还是不对称的，恒速的还是变速的，加速的还是振荡的；
- (3) 解决问题时利用的工具：数学计算分析，还是实验模型设备；数字计算机，还是模拟计算机等。

同一问题常可以用数种方法求得解答，其中有的方法用起来较为简便，或所得结果较为准确，而另一些方法则较繁杂，或所得结果不够准确。同样，同一方法在某些情况下应用起来容易得出结果，而在另一些情况下利用它时就较为复杂。因此，研究者应该掌握各种座标变换方法，并善于根据情况加以运用。一般说来，如果定子或转子的某一方面为对称而另一方面为不对称时，则较合适的方法是利用把座标轴放在不对称的那一方面的座标系统。例如同步电机的转子方面是不对称的，则在定子方面对称的条件下，利用座标系统  $d$ 、 $q$ 、 $0$  或  $F$ 、 $B$ 、 $0$  就比较方便。再如异步电机的转子方面在正常情况下是对称的，因此，在分析其定子方面不对称的运行问题时，利用座标系统  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $0$  或  $1$ 、 $2$ 、 $0$  就比较方便。假如电机的定子及转子两方面均不对称时，即使电机的转速为恒速时，利用任何一种座标系统表示的基本方程式将为变系数方程式，并需利用相应的近似方法来求解。

## 一、磁链方程式

将  $a$ 、 $b$ 、 $c$  坐标系统中的磁链方程式 (1-12) 转换为  $d$ 、 $q$ 、 $0$  坐标系统中的磁链方程式如下

$$\begin{bmatrix} \Psi_{dq0} \\ \Psi_{fDQ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_{abc} \\ \Psi_{fDQ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{ss} & L_{sr} \\ L_{rs} & L_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{abc} \\ I_{fDQ} \end{bmatrix}$$

式中  $\Psi_{dq0}$ ——电枢  $d$ 、 $q$ 、 $0$  轴绕组的磁链矩阵表达式， $\Psi_{dq0} = [\psi_d \ \psi_q \ \psi_0]^T$ ；

$\Psi_{fDQ}$ ——转子绕组  $f$ 、 $D$ 、 $Q$  磁链矩阵表达式， $\Psi_{fDQ} = [\psi_f \ \psi_D \ \psi_Q]^T$ ；

$E$ ——单位矩阵。

将电流的逆变换式 (2-6) 代入上式得

$$\begin{bmatrix} \Psi_{dq0} \\ \Psi_{fDQ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{ss} & L_{sr} \\ L_{rs} & L_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{dq0} \\ I_{fDQ} \end{bmatrix} \quad (2-7)$$

将绕组的自感系数、互感系数，即式 (1-14)、式 (1-15)、式 (1-18) 和式 (1-19)、式

(1-20) 中的基波分量, 以及式 (2-5) 的变换矩阵  $C$  与式 (2-6) 的逆矩阵  $C^{-1}$  代入式 (2-7), 经矩阵的乘法运算, 结果为

$$\begin{bmatrix} \psi_d \\ \psi_q \\ \psi_0 \\ \psi_f \\ \psi_D \\ \psi_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_d & 0 & 0 & M_{af0} & M_{aD0} & 0 \\ 0 & L_q & 0 & 0 & 0 & M_{aQ0} \\ 0 & 0 & L_0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2}M_{af0} & 0 & 0 & L_f & M_{fD} & 0 \\ \frac{3}{2}M_{aD0} & 0 & 0 & M_{Df} & L_D & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}M_{aQ0} & 0 & 0 & 0 & L_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \\ i_f \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} \quad (2-8)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} L_d &= L_{aal} + M_{abl} + \frac{3}{2}L_{aad} = L_l + L_{ad} \\ L_q &= L_{aal} + M_{abl} + \frac{3}{2}L_{aaq} = L_l + L_{aq} \\ L_0 &= L_{aal} - 2M_{abl} \end{aligned} \right\} \quad (2-9)$$

从变换到 d、q、0 坐标系统的磁链方程式 (2-9) 可看出:

(1)  $L_d$  与  $L_q$  分别是假想的电枢 d 轴绕组和 q 轴绕组的自感系数。它包括不通过气隙的漏磁链所对应的自漏感系数  $L_l = L_{aal} + M_{abl}$  及通过气隙的主磁场所对应的电感系数  $L_{ab} = \frac{3}{2}L_{aad}$  及  $L_{aq} = \frac{3}{2}L_{aaq}$ 。 $L_0$  是变换后假想的电枢零轴绕组的自感系数, 它仅由漏感系数组成。

(2) 电枢绕组从 a、b、c 相绕组轴线转换为与转子同速旋转的 d、q 轴及独立的零轴后, 电枢绕组的自感系数及互感系数均由时变系数变为与  $\theta$  角无关的常数, 达到了预期的目的。

(3) 坐标变换使具有相互电磁耦合的 a、b、c 相绕组变为没有耦合关系的假想的电枢 d 轴、q 轴绕组, 达到解耦的作用。对电机控制系统来说, 解耦后便于获得良好的控制性能。

(4) 用式 (2-5) 变换矩阵变换后, 假想的电枢 d、q 绕组与转子绕组间的互感系数变为不可逆, 使用起来有些不方便。这个问题将在下一节标么值系统中加以解决。

## 二、电压方程式

d、q、0 坐标系统中的电压方程式可采用同样的变换矩阵从相坐标系统的电压方程式 (1-10) 转换过来, 即

$$\begin{bmatrix} U_{dq0} \\ U_{fDQ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{abc} \\ U_{fDQ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p\Psi_{abc} \\ p\Psi_{fDQ} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{abc} & 0 \\ 0 & R_{fDQ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{abc} \\ I_{fDQ} \end{bmatrix} \quad (2-10)$$

式中  $U_{dq0}$ ——电枢 d、q、0 绕组端的电压矩阵,  $U_{dq0} = [u_d \ u_q \ u_0]^T$ 。

等式 (2-10) 右侧的第一项

$$\begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p\Psi_{abc} \\ p\Psi_{fDQ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(p\Psi_{abc}) \\ p\Psi_{fDQ} \end{bmatrix} \quad (2-11)$$

根据定义



$$\Psi_{dq0} = C \Psi_{abc}$$

故

$$p \Psi_{dq0} = (pC) \Psi_{abc} + C(p \Psi_{abc})$$

可得

$$C(p \Psi_{abc}) = p \Psi_{dq0} - (pC) \Psi_{abc} \quad (2-12)$$

可以证明其中

$$-(pC) \Psi_{abc} = -(pC)C^{-1} \Psi_{dq0} = \omega \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_d \\ \psi_q \\ \psi_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega\psi_q \\ \omega\psi_d \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2-13)$$

式中  $\omega$ ——转子的瞬时转速， $\omega = p\theta$ 。

式 (2-10) 右侧的第二项，即电阻压降可以写成

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{abc} & 0 \\ 0 & R_{fdQ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{abc} \\ I_{fdQ} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{abc} & 0 \\ 0 & R_{fdQ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{dq0} \\ I_{fdQ} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} R_{abc} & 0 \\ 0 & R_{fdQ} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{dq0} \\ I_{fdQ} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2-14)$$

将式 (2-11) ~ 式 (2-14) 代入式 (2-10)，可以得到 d、q、0 坐标系下的电压方程式

$$\begin{bmatrix} u_d \\ u_q \\ u_0 \\ u_f \\ u_D \\ u_Q \end{bmatrix} = p \begin{bmatrix} \psi_d \\ \psi_q \\ \psi_0 \\ \psi_f \\ \psi_D \\ \psi_Q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \\ i_f \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\omega\psi_q \\ \omega\psi_d \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2-15)$$

同步电机在 d、q、0 坐标系中的电压方程式 (2-15) 已导出，显然，假想的电枢 d、q 轴绕组的电压方程中，与 a、b、c 绕组的“静止绕组”相比，除  $p\psi$  仅表示变压器电动势外，故另有正比于角速度的运动电动势  $\omega\psi$  项存在。

因为在 d、q、0 坐标系中重新选取了电枢绕组的轴线，使 d、q 轴线以  $\omega$  转速旋转，而构成 d、q 绕组的线圈元件仍为静止的，因而线圈元件与磁链间存在相对运动，产生了运动电动势  $\omega\psi$ 。这种绕组轴线与构成该绕组的线圈元件间存在相对运动的绕组称为“伪静止绕组”。

### 三、同步电机的派克 (Park) 方程

式 (2-8) 与式 (2-15) 组成了同步电机在 d、q、0 坐标系中描述电机基本电磁关系的一组定常系数的微分方程，通常称为派克 (Park) 方程。利用这组定常系数的微分方程，就可用解析方法求解恒速运转时电机的瞬态和稳态运行问题。