

Topic I 一般化电机理论

电子邮箱: javnson@zju.edu.cn

I. 常微分方程的数值解法

1. 欧拉法

欧拉法解决的问题是实现对于一个有初始条件的常微分方程 (the well-posed initial-value problem) 进行求解:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), a \leq t \leq b, y(a) = \alpha$$

通过将区间 $[a, b]$ 进行剖分的方法可以得到常微分方程在特定数值点上的近似解。

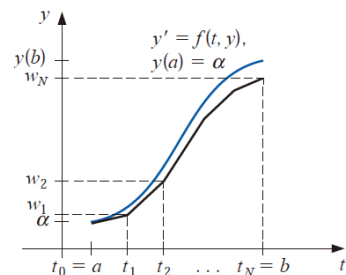


图 1 常微分方程求解法

实际求解的时候可以通过函数的 *Taylor* 展开:

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + y'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + \frac{1}{2}y''(x_n)(x_{n+1} - x_n)^2 + \cdots + \frac{1}{p!}y^{(p)}(x_n)(x_{n+1} - x_n)^p + \cdots + h.o.t.$$

取步长 $h = x_{n+1} - x_n$ 化简得到,

$$y_{n+1} = y_n + hT_p(y_n)$$

其中:

$$T_p(y_n) = f(x_n, y(x_n)) + \frac{h}{2}f'(x_n, y(x_n)) +$$

现, 取 $p = 1$

$$T_p(y_n) = f(x_n, y(x_n))$$

1) 欧拉法的积分推导

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x) dx$$

使用数值积分左矩形公式:

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x) dx = (x_{n+1} - x_n)y'(x_n) = hy''$$

可以得到近似

$$y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + hy'_n = y(x_n) + hf(x_n, y_n)$$

相似地, 有后退欧拉法 (使用右矩形欧拉公式)

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1})$$

2) 梯形法

使用梯形公式带入计算，可以得到：

$$y_{n+1} = y_n + h \frac{y'_n + y'_{n+1}}{2}$$

梯形法和后退欧拉方法都是“隐式”方法，但是很多情况下很难做到分离，从而难以简单迭代。

欧拉法的精度为 n 。（线性）

2. 改进的欧拉公式，预报·校正格式

用欧拉法计算得到 y_{n+1} 的近似值，用这个近似值带入梯形公式中，可以得到改进的欧拉公式，称为预报（欧拉法）·校正（梯形法）公式：

$$y_{n+1}^{(0)} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + h \frac{y'_n + y'_{n+1}}{2}$$

使用这样的方法可以帮助欧拉法解决“隐式”问题，但是精度仍然是二阶。

3. 龙格库塔法

实现目标：保证足够高的精度求解常微分方程。

思想：从 (x_n, y_n) 点出发，以某一斜率沿直线到达 (x_{n+1}, y_{n+1}) 点。欧拉法及其各种变式所能达到的最高精度为2阶。

3) 二阶龙格库塔

首先推广改进的欧拉公式，随意考察区间 (x_n, x_{n+1}) 内一点：

$$x_{n+p} = x_n + ph, 0 < p \leq 1$$

我们希望使用 x_n, x_{n+p} 两点斜率 k_1 和使用尾端点的斜率 k_2 加权平均得到平均斜率

$$y^* = y_n + h[(1 - \lambda)k_1 + \lambda k_2]$$

将 k 作为 x_n 的函数进行泰勒展开：

$$k_1 = y'(x_n)$$

$$k_2 = y'(x_n) + phy''(x_n) + O(h^2)$$

带入整理：

$$y_{n+1} = y(x_n) + hy'(x_n) + \lambda ph^2 y''(x_n) + O(h^3)$$

另外，将 y 进行泰勒展开：

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2} y''(x_n) + O(h^3)$$

对比系数得到：

$$\boxed{\lambda p = \frac{1}{2}}$$

得到，二阶龙格·库塔公式。

现在取 $p = 1 \rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$ ，得到公式称为改进欧拉公式：

$$\begin{aligned}k_1 &= f(x_n, y_n) \\k_2 &= f(x_n + h, y_n + hk_1) \\y_{n+1} &= y_n + h \left[\frac{k_1 + k_2}{2} \right]\end{aligned}$$

取 $p = \frac{1}{2} \rightarrow \lambda = 1$ 得到变形的欧拉公式：

$$\begin{aligned}k_1 &= f(x_n, y_n) \\k_2 &= f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1\right) \\y_{n+1} &= y_n + hk_2\end{aligned}$$

几何意义：用一般欧拉法来预测中间点的位置，进而“修正”得到步进点。

二阶龙格库塔法，在区间内通过两个点来确定斜率，精度为 2 阶。需要得到更高进度的数值方法，就必须增加点数。

4) 三阶龙格库塔法（常用龙格·库塔法）

$$\begin{aligned}k_1 &= f(x_n, y_n) \\k_2 &= f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1\right) \\k_3 &= f(x_n + h, y_n - hk_1 + 2hk_2) \\y_{n+1} &= y_n + h \left[\frac{1}{6}k_1 + \frac{4}{6}k_2 + \frac{1}{6}k_3 \right]\end{aligned}$$

此时精度为 3 阶。

5) 四阶龙格·库塔法（经典龙格·库塔法）

$$\begin{aligned}k_1 &= f(x_n, y_n) \\k_2 &= f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1\right) \\k_3 &= f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_2\right) \\k_4 &= f(x_n + h, y_n + hk_3) \\y_{n+1} &= y_n + h \left[\frac{1}{6}k_1 + \frac{2}{6}k_2 + \frac{2}{6}k_3 + \frac{1}{6}k_4 \right]\end{aligned}$$

每一步，计算四次，获得 4 阶精度。

4. 数值计算的稳定性

影响稳定性的因素：数值计算方法（选用合理的算法）、系统特性（根据系统的特性选择步长）、计算步长（在必要的时候考虑使用变步长计算）。

II. 一般化电机理论概述

1. 电机的多样性

一般电机具有多样性，主要包括：
形式差异：电刷、滑环、励磁形式等
运行方式有差异：伺服、动力输出形式
运行形式有差异：旋转电机、直线电机

2. 电机的共性

但是所有的电机都具有以下共性：
电机的构成相似：都有定子和转子（动子）构成。
定子磁场和转子产生相互作用时产生转矩的关键。（一般化电机的理论关键）
定子和转子的核心要素都是电枢和励磁

	直流电机	感应电机	同步电机
定子	励磁	电枢	电枢
转子	电枢	励磁（由电枢感应得到）	励磁

永磁开关磁链电机：将励磁和电枢整合在一起，但是两个部分仍然都在。

3. 电机仿真方法概述

系统建模于分析通常使用仿真研究的方法，更详细地分为物理仿真和**数学仿真**两个方面。一般电机使用的仿真方法为数学仿真。

数学仿真为用数学的语言描述系统的特性（建模），通过数学运算来求解系统的性能（分析）。数学有三种常用的形式，解析计算、数值计算（**数字仿真**）、混合仿真。

数字仿真的基本方法为：①确定研究对象的实体（组成系统的个体）、属性（实体的特性）、活动（个体随着时间推移而发生的属性变化）三要素和系统环境；②建立描述系统的数学模型；③经二次模型化建立仿真模型；④编程（使用软件）；⑤仿真、修改模型迭代；⑥整理分析结果。数字仿真的几个考虑因素：仿真速度、仿真精度、稳定性。

电机及其驱动系统的仿真主要分为一下几个方面：

1) 磁性能仿真

面向：磁场分布（气隙磁场、定转子铁心磁场）、电磁损耗、感应电势（反电势，基波、谐波、幅值）、电磁转矩、齿槽定位力矩（Cogging Torque）等。

通常可以使用磁路法手工计算，但是精度低；或者直接使用有限元软件分析。

2) 机械性能仿真

面向：应力机械强度、振动与动力学问题。

对于应力和结构强度可以通过定性分析和解析计算进行粗略分析；也可以使用实验研究，但是通常较困难；或者使用有限元仿真（精确、快速、方便）。

振动模态、固有频率、噪声：很难定性分析或者解析计算、实验研究（复杂、可测固有频率、很难测定模态）、有限元仿真（精确直观）。

3) 温度场仿真（流体场仿真）

面向：温度场的分布、温升、局部过热情况、冷却等。

对于温度场分析，只能使用有限元法。特别地，影响电机输出功率的最主要因素就是电机温升。进行温度场分析的核心目标在于采取合理的冷却措施，进而避免局部过热。

4) 机电性能仿真（本课程核心）

面向：电机参数、电压、电流、转矩、转速、转角等。

建模的主要内容包括电机的数学模型、电力电子驱动装置的数学模型、负载的数学模型、控制策略的数学模型。

1. 一般化电机

一般化电机的构建基础绕组时可以等效的。在等效的过程中，电压、电流、电感都需要进行调整，等效的方法称为坐标变换。一般地，等效的方法有很多种，但是为了应用方便一律从简。综上所述，一般化电机是基于电机的共性，结合绕组等效形成的。

2. 一般化电机的必要假设

为了得到一般化电机的理论结果，需要做如下的假设：

磁路不饱和（具有线性），可以使用叠加定理。

不计剩磁、涡流、磁滞效应。在有特殊需要的场合可以使用恒值励磁电流代表剩磁，用等值的短路线圈代表物流。

气隙磁通密度按照正弦规律分布。其中要求忽略高次谐波，气隙径向磁密正比于磁动势和气隙磁导的乘积。在接下来的分析过程中仅仅考虑时间谐波，不考虑空间谐波。理论上可以通过对于绕组的改良实现在槽内的气隙磁场按照空间正弦的规律发生脉振。

电枢的漏磁忽略不计，一般电机都有漏磁，但是将其忽略并不会带来很大的误差。

正交解耦，实际上很可能存在正交的耦合性。但是在接下来的分析中认为 d 轴和 q 轴之间是解耦的。

3. 一般化电机的正方向

对于工业来说，通常将顺时针方向作为旋转正方向，但是学术角度通常使用**逆时针方向**作为旋转正方向，与角度规定的方向相同。

一般化电机的正方向规定，一般地对于特定的线圈可以规定一套规范，对于电机学来说，一共有两种规范供选择。

1) 电动机原则：

线圈轴线的正方向就是线圈磁链的正方向。（找到磁链正方向）

正电流产生正磁链。（找到电流正方向）

电压、电流方向符合电动机法则，也就是从外侧向内看，电压的正方向和电流的正方向相同，从能量的角度上认为电动机是一种消耗能量的设备。（找到电压正方向）

2) 发电机原则：

线圈轴线的正方向就是线圈磁链的正方向；（磁链方向并不发生变化）

正电流产生负磁链；（找到电流方向，和电动机规定中电流方向相反）

电压正方向与电流正方向符合发电机法则的规定，即，从线圈端头向外接负载看去时，电压正方向和电流正方向一致，线圈的输出功率为正值。（找到电压方向）

3) 实质体现

以上两条规则的本质就是调换了电流的方向。体现在实际书写方程的过程中将会改变磁链的符号和电流项的方向。

为了详细表输出电机的电气性能，通常通过磁链方程、电压平衡方程、法拉第电磁感应定律来衡量。

1> 磁链平衡方程

$$\Psi_k = \boxed{\pm} L_{kk} i_k + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \boxed{\pm} M_{kj} i_j + \Psi_{km}$$

其中，上面公式中框出的正负号由使用的正方向决定，该项的激励是电动机线圈时取+，该项的激励是发电机线圈时取-。

考虑到可能存在额外的永磁体，使用 Ψ_{km} 来表示可能存在的永磁体带来的磁链。

特别关注：线圈使用右手绕法还是左手绕法，还是两种混合的绕发是无关变量。

2> 电压平衡方程

$$U_k = e_k \boxed{\pm} R_k i_k$$

其中电压平衡方程式由电感电势和电阻消耗两项构成。由于不同的正方向选择对于电流的方向有影响，所以，当线圈是电动机线圈时+，当线圈是发电机线圈时-。

3> 法拉第电磁感应定律

$$e_k = \frac{d\Psi_k}{dt}$$

在这种正方向规定的条件下，法拉第电磁感应定律的符号恒为正。

4> 选用原则

对于耗能的线圈，比如电动机中所有的线圈，发电机中的励磁线圈都推荐使用电动机线圈。对于产生能量的线

圈，比如发电机中的电枢线圈都推荐使用发电机线圈。

实际上只要建立了电机的模型，无论发电机还是电动机都可以直接使用分析。

III. 一般化电机的电气部分模型

对于如图 2 所示的一般化电机（发电机情形）在存在正交解耦的情况下进行电机建模。

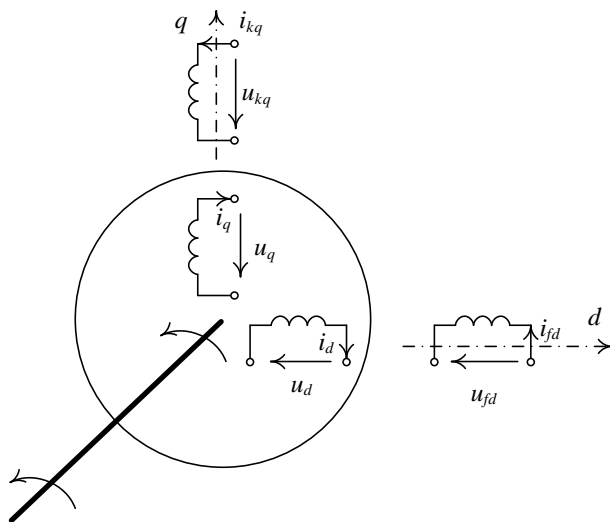


图 2 一般化电机模型

1. 电压方程

首先可以得到电压方程（其中电流和电压的正方向标注已经明确阐述了不同线圈使用的模型）

直轴励磁线圈：（静止线圈，电动机线圈）

$$u_{fd} = p\psi_{fd} + R_{fd}i_{fd}$$

其中， fd 为*field direct*，意为产生磁场的分量。

交轴励磁线圈：（静止线圈，电动机线圈）

$$u_{kq} = p\psi_{kq} + R_{kq}i_{kq}$$

其中， kq 为*quadrature*，意为交轴分量。

直轴分量线圈：（伪静止线圈，发电机线圈）

$$u_d = e_{dt} + e_{dr} - R_d i_d = p\psi_d \boxed{-k_q \omega \phi_q} - R_d i_d$$

$e_{dt} = p\psi_d$ 为变压器电势（*Transformer potential*）， $e_{dr} = -k_q \omega \phi_q$ 为旋转电势（*Rotational potential*）， $R_d i_d$ 为电阻压降。

交轴分量线圈：（伪静止线圈，发电机线圈）

$$u_q = e_{qt} + e_{qr} - R_q i_q = p\psi_q \boxed{+k_d \omega \phi_d} - R_q i_q$$

对于以上两个式子中的旋转电动势，两个方程通过关系式 $e = C_e \Phi n := k\phi\omega$ 给出。特别关注，可以记忆为，由于伪静止效应使得直轴和交轴之间产生了“交流”。

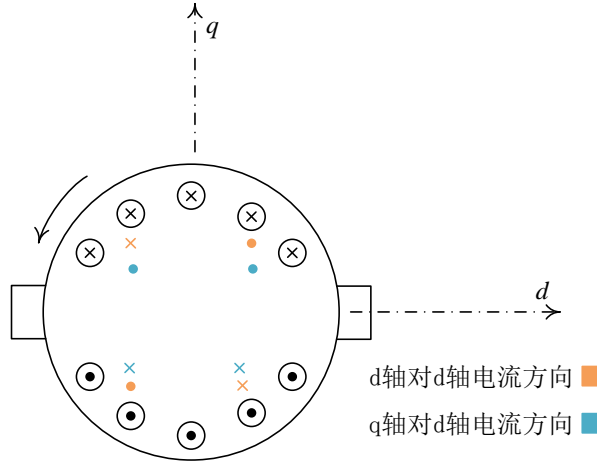


图 3 电枢反应图示

考虑上图所示的真实发电机的 d 轴，其在旋转过程中将会切割 d 轴和 q 轴的磁通，但是由于 d 轴磁通左右半边将会相互抵消，所以最终产生效应的就只有 q 轴磁通。通过右手定则可以判定得到产生的感应电动势方向和线圈中的电流方向相反，因此为负号。同理可以判定得到 d 轴将会在 q 轴产生一个正向激励。

对于以上各式，可以整理成矩阵形式：

$$\begin{pmatrix} u_d \\ u_q \\ u_{fd} \\ u_{kq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -R_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{fd} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{kq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ i_{fd} \\ i_{kq} \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} \psi_d \\ \psi_q \\ \psi_{fd} \\ \psi_{kq} \end{pmatrix} + \omega \begin{pmatrix} k_q \phi_q \\ -k_d \phi_d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1

$$\mathbf{U} = (\mathbf{R})\mathbf{I} + p\boldsymbol{\psi} + \dots$$

2. 磁链方程

对于其磁链可以写出如下的方程组：

$$\psi_d = -L_d i_d + M_{afd} i_{fd}$$

$$\psi_q = -L_q i_q + M_{akq} i_{kq}$$

上式中， a 表示电枢 *armature*，由于正交解耦，所以仅分析单轴分量。

$$\psi_{fd} = L_{fd} i_{fd} - M_{fad} i_d$$

$$\psi_{kq} = L_{kq} i_{kq} - M_{kaq} i_q$$

其中，由于互异性，存在等价关系 $M_{fad} = M_{afd}$, $M_{akq} = M_{kaq}$

对于磁链可以整理出方程：

$$\begin{pmatrix} \psi_d \\ \psi_q \\ \psi_{fd} \\ \psi_{kq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L_d & 0 & M_{afd} & 0 \\ 0 & -L_q & 0 & M_{akq} \\ -M_{fad} & 0 & L_{fd} & 0 \\ 0 & -M_{kaq} & 0 & L_{kq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ i_{fd} \\ i_{kq} \end{pmatrix} \triangleq \boldsymbol{\psi} = (\mathbf{L})\mathbf{I}$$

2

对于一个给定的电机，其电感矩阵 (\mathbf{L}) 为常数。

下面分析旋转电势的来源，首先旋转电势的磁通量来源很明确

$$\begin{cases} \phi_d = m_1 i_{fd} - m_2 i_d \\ \phi_q = n_1 i_{kq} - n_2 i_q \end{cases}$$

其中上式表明磁通量的来源由不同的电流提供，同时 m, n 为电感量纲的常量。将上式代入旋转电势项中，并进

行整理可以得到：

$$\begin{cases} k_d \phi_d = k_d m_1 i_{fd} - k_d m_2 i_d \triangleq G_{afd} i_{fd} - G_{ad} i_d \\ k_q \phi_q = k_q n_1 i_{kq} - k_q n_2 i_q \triangleq G_{akq} i_{kq} - G_{aq} i_q \end{cases}$$

因此，

$$\omega \begin{pmatrix} k_q \phi_q \\ -k_d \phi_d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} 0 & G_{aq} & 0 & -G_{akq} \\ -G_{ad} & 0 & G_{afd} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ i_{fd} \\ i_{kq} \end{pmatrix} = \omega(\mathbf{G})(\mathbf{I}) \quad 3$$

此时，将 2，3 带入 1 中可以得到：

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= (\mathbf{R})\mathbf{I} + p\psi + \omega(\mathbf{G})\mathbf{I} \\ &= (\mathbf{R})\mathbf{I} + p\{(\mathbf{L})\mathbf{I}\} + \omega(\mathbf{G})\mathbf{I} \\ &= (\mathbf{R})\mathbf{I} + (\mathbf{L})p\mathbf{I} + \omega(\mathbf{G})\mathbf{I} \\ &= \{(\mathbf{R}) + (\mathbf{L})p + \omega(\mathbf{G})\}\mathbf{I} \end{aligned}$$

将上面整理得到的结果称为电压平衡方程：

$$\mathbf{U} = \{(\mathbf{R}) + (\mathbf{L})p + \omega(\mathbf{G})\}\mathbf{I} \quad 4$$

下面分析矩阵 (\mathbf{G}) 的具体数值：

其总体思路为，分析计算 d 绕组中的变压器电势

✓ 计算 d 绕组中的变压器电势

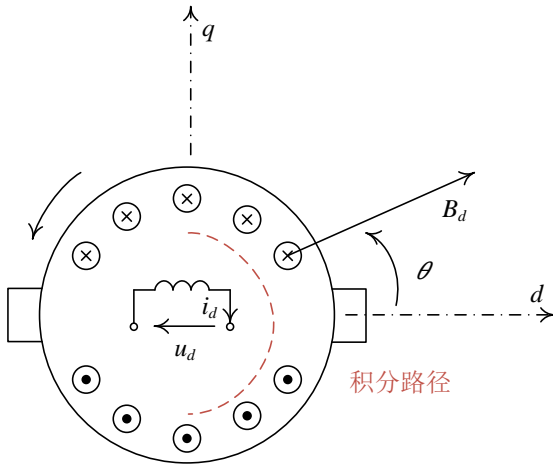


图 4 变压器电势的积分计算路径

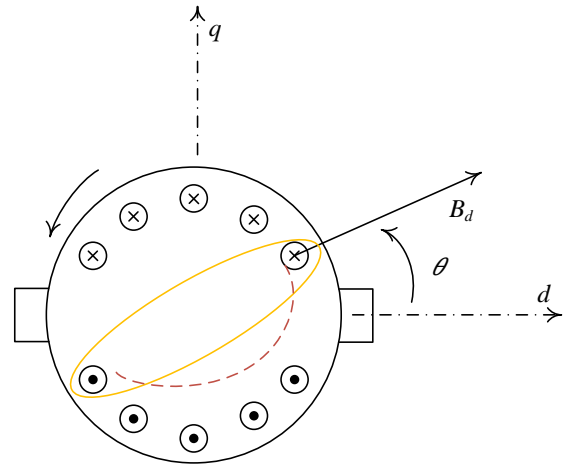


图 5 考虑一匝的情况

首先分析单个线圈的磁通，如图 4 假设单个线圈与中轴线之间夹角为 θ ，那么其磁通可以表示为：

$$B_d = B_{dm} \cos \theta$$

那么可以通过将磁通对于面积积分得到 d 轴方向总的磁通：

$$\phi_d = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} B_d l (r d\theta) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} B_{dm} l r \cos \theta d\theta = 2B_{dm} l r$$

其中，半径为 r ，轴向长度（深度）为 l 。

考虑其中任意一匝线圈，如图 5（其实怎么取都行，这里只是取最易说明的一种），如上图所示，其磁通为：

$$\phi_{d1} = \int_{-\theta-\pi}^{\theta} B_d l (r d\theta) = \phi_d \sin \theta$$

此时可以得到单匝线圈的变压器电势为：

$$e_{dt1} = \frac{d\psi}{dt} = \frac{d\phi}{dt} = p\{\phi_d \sin \theta\}$$

为了方便计算，将全部线圈的功效等效在整个外周上，假设在单位弧度中，有 z 根导体。那么可以通过积分得到整个 d 轴的变压器电势为：

$$e_{dt} = \int_0^\pi e_{dt1} \left[\frac{z}{2} \right] d\theta = \frac{1}{2} \int_0^\pi p\{\phi_d \sin \theta\} z d\theta = \frac{1}{2} p \left\{ \int_0^\pi \phi_d \sin \theta z d\theta \right\} = p\{z\phi_d\}$$

其中，需要特别关注，并联支路对数最少都是 1，在本例中恰好也就是 1，也就是并不是所有的导体都是串联的，而是存在一个并联的支路，所以有上式中方框的结论。

这里的变压器电势与我们之前推导得到的变压器电势应当相等，也即：

$$p\psi_d = p\{z\phi_d\} \rightarrow \psi_d = z\phi_d$$

从单纯的理解的角度上说，上式应当成立。因为磁链与等效的磁通之间存在着等效的导线密度关系。那么，类似地也有：

$$\psi_q = z\psi_q$$

5

现在我们考虑 q 轴上的旋转电势：

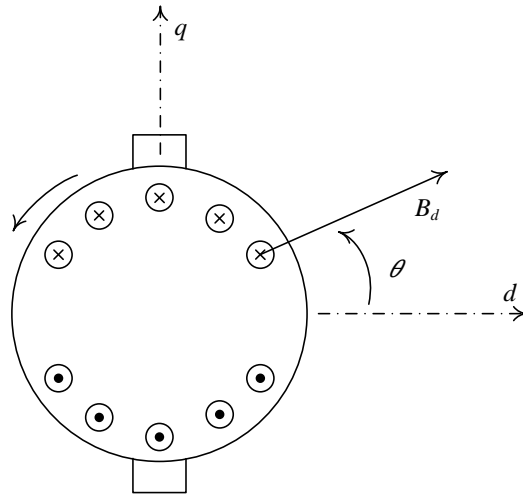


图 6 旋转电势计算

此时的对于图中的一匝线圈（两根导体）其旋转电势为：

$$e_{qr1} = 2B_d l r \omega$$

此处对于一般化电机其 $p = 1$ ，所以此处 $\Omega = \omega$ 。

那么全部 q 绕组中的电势总和为：

$$e_{qr} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e_{qr1} \frac{z}{2} d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} B_d l r d\theta \omega z = \phi_d z \omega$$

由于两种情况计算得到的旋转电动势应当相等，所以有

$$k_d \phi_d = \phi_d z = \psi_d$$

6

同理可以对证得到：

$$e_{dr} = -\phi_q z \omega = -k_q \phi_q \rightarrow k_q \phi_q = \psi_q$$

因此旋转矩阵可以写成：

$$\omega(\mathbf{G})\mathbf{I} = \omega \begin{pmatrix} \psi_q \\ \psi_d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} 0 & L_q & 0 & -M_{akq} \\ -L_d & 0 & M_{afd} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ i_{fd} \\ i_{kq} \end{pmatrix} \quad 7$$

将以上各式整理可以得到电压平衡方程为：

$$\mathbf{pI} = (\mathbf{L})^{-1}\{\mathbf{U} - (\mathbf{R})\mathbf{I} - \omega(\mathbf{G})\mathbf{I}\} \quad 8$$

IV. 一般化电机的机械部分

机械部分应当满足转矩方程和功率方程，首先是转矩平衡方程：

$$T_m = T_e + T_D + T_J$$

其中， T_m 为机械输入转矩， T_e 为电磁转矩， $T_D = B\Omega$ 为摩擦损耗， T_J 为惯量转矩。

对于功率平衡，应当有：

电磁输入功率 P_{dq} +机械输入功率 P_m =电磁储能功率+机械储能功率+电磁损耗+机械损耗。

下面分别计算以上各个部分的具体数值：

电磁输入功率：

$$\begin{aligned} P_{dq} &= -u_d i_d - u_q i_q + u_{fd} i_{fd} + u_{kq} i_{kq} \\ &= \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ i_{fd} \\ i_{kq} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -u_d \\ -u_q \\ u_{fd} \\ u_{kq} \end{pmatrix} = \mathbf{I}^T \mathbf{U}' \\ &= \mathbf{I}^T \{(\mathbf{R}')\mathbf{I} + (\mathbf{L}')\mathbf{pI} + \omega(\mathbf{G}')\mathbf{I}\} \end{aligned}$$

其中上式中的 prime 项仅仅改变了前两行的符号。

输入的机械能量：

$$P_m = \Omega T_m = \omega(T_e + T_D + T_J)$$

注意上式中 $\omega = \Omega$ 。

因此，将以上两项的总的输入功率计算出来

$$\begin{aligned} P_{dq} + P_m &= \mathbf{I}^T(\mathbf{R}')\mathbf{I} + \mathbf{I}^T(\mathbf{L}')\mathbf{pI} + \mathbf{I}^T\omega(\mathbf{G}')\mathbf{I} + \omega T_e + \omega T_D + \omega T_J \\ &= \frac{\mathbf{I}^T(\mathbf{L}')\mathbf{pI}}{\text{电磁储能功率}} + \frac{\omega T_J}{\text{机械储能功率}} + \frac{\mathbf{I}^T(\mathbf{R}')\mathbf{I}}{\text{电磁损耗}} + \frac{\omega T_D}{\text{机械损耗}} + \boxed{\frac{\mathbf{I}^T\omega(\mathbf{G}')\mathbf{I} + \omega T_e}{\text{应当为 } 0}} \end{aligned}$$

其中， $T_J = Jp\omega$ ， $T_D = B\omega$ 。电磁储能功率其本质为**变压器电势**。

从上式中可以导出一个等式：

$$T_e = -\mathbf{I}^T(\mathbf{G}')\mathbf{I} = -\begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ i_{fd} \\ i_{kq} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & -L_q & 0 & M_{akq} \\ L_d & 0 & -M_{afd} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ i_{fd} \\ i_{kq} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ i_{fd} \\ i_{kq} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \psi_q \\ -\psi_d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \psi_d i_q - \psi_q i_d = \frac{1}{\omega} (e_{qr} i_q + e_{dr} i_d)$$

其中 $e_{dr} = -\omega \psi_q$, $e_{qr} = \omega \psi_d$, 上式为瞬时电磁转矩的计算方法, 在代入计算式应当使用**瞬时角速度**、**瞬时电势**、**瞬时电流**。

对机械部分的方程进行联立, 得到最终的机械状态方程:

$$\begin{cases} T_m = T_e + T_D + T_J \\ T_e = \psi_d i_q - \psi_q i_d \\ T_J = J p \omega \\ T_D = B \omega \\ \omega = p \theta \end{cases} \rightarrow p \omega = \frac{T_m - (\psi_d i_q - \psi_q i_d) - B \omega}{J}$$

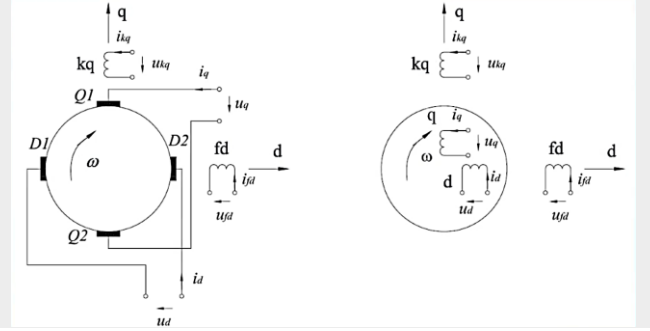
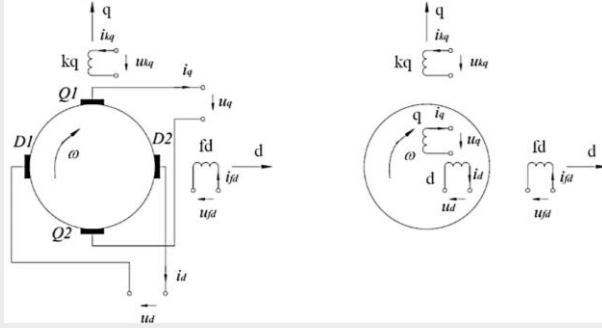
V. 结果汇总

基于以上内容可以将应用于发电机的模型和应用于电动机的模型方程整理出来，如下：

发电机工况

电动机工况

图示



电气
状态
方程

$$\begin{pmatrix} u_d \\ u_q \\ u_{fd} \\ u_{kq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -R_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{fd} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{kq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ i_{fd} \\ i_{kq} \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} \psi_d \\ \psi_q \\ \psi_{fd} \\ \psi_{kq} \end{pmatrix} + \omega \begin{pmatrix} -\psi_q \\ \psi_d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_d \\ u_q \\ u_{fd} \\ u_{kq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{fd} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{kq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ i_{fd} \\ i_{kq} \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} \psi_d \\ \psi_q \\ \psi_{fd} \\ \psi_{kq} \end{pmatrix} + \omega \begin{pmatrix} -\psi_q \\ \psi_d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

磁链
状态
方程

$$\begin{pmatrix} \psi_d \\ \psi_q \\ \psi_{fd} \\ \psi_{kq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L_d & 0 & M_{afd} & 0 \\ 0 & -L_q & 0 & M_{akq} \\ -M_{fad} & 0 & L_{fd} & 0 \\ 0 & -M_{kaq} & 0 & L_{kq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ i_{fd} \\ i_{kq} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \psi_d \\ \psi_q \\ \psi_{fd} \\ \psi_{kq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_d & 0 & M_{afd} & 0 \\ 0 & L_q & 0 & M_{akq} \\ M_{fad} & 0 & L_{fd} & 0 \\ 0 & M_{kaq} & 0 & L_{kq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \\ i_{fd} \\ i_{kq} \end{pmatrix}$$

机械
状态
方程

$$T_m = T_e + B\Omega + Jp\Omega$$

$$T_e = \psi_d i_q - \psi_q i_d$$

$$p\theta = \omega$$

$$T_e = T_l + B\Omega + Jp\Omega$$

$$T_e = \psi_d i_q - \psi_q i_d$$

$$p\theta = \omega$$

差异仅仅在于只需要将原先与电流项目相关的项目全部反符号即可。

VI. 附录材料

§ 1-6 一般化电机

一、一般化电机的模型

电机的型式多种多样,运行的方式及条件也各不相同,在实际工作中,根据不同的对象和需要解决的问题进行具体的分析研究是完全必要的,也是合理的。然而,各类电机也有其共性,在此基础上对各类电机进行概括,建立一种统一的理论,同样是很有意义的。

从结构上来看,不论旋转电机属于何种型式,总是由两部分组成,静止的部分称为定子,旋转的部分称为转子,中间为气隙隔开。电机的绕组形式各有不同,但就作用原理而言,电机的运行可以看成是定子和转子的磁场相互作用的结果。一定形态的磁场可以由不同

型式的绕组在不同的情况下来建立,因之,在一定条件下,把一种型式的绕组代之以另一种型式的绕组是可行的,并通常称之为互相等效的。随着一种型式绕组代替另一种型式绕组,绕组中的变量如电压、电流及磁链等,和参数如电阻及电感等,也应作相应的变动,并与原绕组的量保持一定的关系,这种变量间的相互转化关系称为座标的变换。如果通过座标变换及改变参数把各类电机代之以一种型式的电机,这样我们就建立了所谓的“一般化电机”。当然,无论是“一般化电机”或是“等效绕组”这都是在一定范畴内而言的,各类电机或绕组除了它们之间具有共同点外,毕竟有其本身的特点,因此,它的一切方面不可能由另一种电机或绕组完全代替。

作为模拟装置的一般化电机的模型可以具有不同的型式。我们这里介绍的是通常采用的型式,它如图 1-7 所示是一个整流子式电机,形式上与一般直流电机相同,但是比一般直流电机多了一对电刷,在定子上除了直轴线圈 fd 外,在交轴上也安置了线圈 Kq ,两对电刷 D_1-D_2 和 Q_1-Q_2 把电枢绕组分成了两个轴线相互垂直的电枢回路,与直轴重合的称为直轴电枢回路表以 D ,与交轴重合的称为交轴电枢回路表以 Q ,由于它们互差 90° ,对直轴及交轴而言又是对称的,因此可以把它们看成两个相互独立的绕组。就一般情况而言,一般化电机的线圈数可以是任意的,可能多于四个,也可能少于四个,这要看被研究的电机的具体情况而决定。

由于多对极电机与一对极电机没有本质的区别,为简便计,一般化电机通常是一对极的。它可以是一个交流整流子电机,也可以是一个直流整流子电机,这完全取决于所加电压的性质。

当实际电机为整流子电机时,一般化电机的绕组与实际电机的绕组有明显的对应关系。例如实际电机为一直流电机时,其励磁绕组和电枢绕组分别与图 1-7 中 fd 绕组和 Q 绕组相对应,图 1-7 中的 D 绕组和 Kq 绕组则为开路。如果实际电机不止一个励磁绕组,例如同时具有他激和串激绕组,并在交轴方向有补偿绕组及换向极绕组时,则在一般化电机图 1-7 中,于直轴及交轴方向尚需补以相应的线圈,并根据具体情况决定它们之间的联接方法。当实际电机为交流电机,例如为同步电机时,一般化电机的定子与同步电机的转子相对应。这种对应关系是不难理解的,因为重要的是定转子间的相对运动,当我们置身于转子轴线上来观察同步电机时,则相当于转子静止,而定子是运动的。因之,同步电机的励磁绕组与一般化电机定子方面的直轴绕组 fd 对应。如果同步电机转子上还有短接的直轴和交轴阻尼绕组的话,那末在一般化电机中,于定子直轴和交轴方向还需补以相应的短接绕组。一般化电机的转子与同步电机的定子之间没有明显的对应关系,这是因为前者转子上的绕组是两个线圈 D 及 Q 而后者定子上有三个线圈 A 、 B 、 C 。另外,前者 D 、 Q 的线圈的轴线分别位于 d 、 q 轴上,而后者三个轴线相对转子 d 、 q 轴在运动。因此,只有经过座标变换,把 a 、 b 、 c 系统中的量转换为 d 、 q 轴上的量后,它们之间相互对应的关系才显示出来。

为了简便起见,图 1-7 常画成图 1-8 的样子。由直轴轴线上的一对电刷所决定的电枢线圈 D ,和由交轴轴线上的一对电刷所决定的电枢线圈 Q ,分别画在直轴及交轴轴线上。由于这两个电路的轴线为电刷所规定,在空间静止不动,而组成这两个电路的元件或导体在空间以 ω 速度旋转,因此我们把 D 及 Q 线圈称为“伪静止线圈”。这种线圈具有特殊的性能:(1)线圈中的电流各自在空间产生轴线静止的磁场;(2)除了磁场变化会引起变压器电压外,由于转子旋转的缘故,还会在“伪静止线圈”中产生旋转电压,如同直流电机电枢绕组切割磁

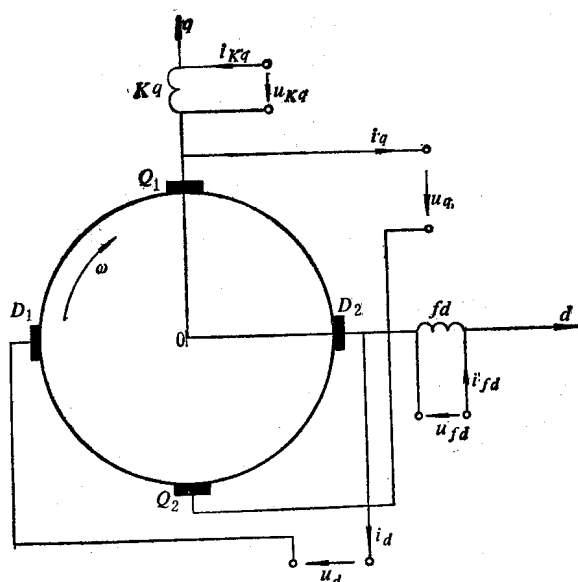


图 1-7 一般化电机模型

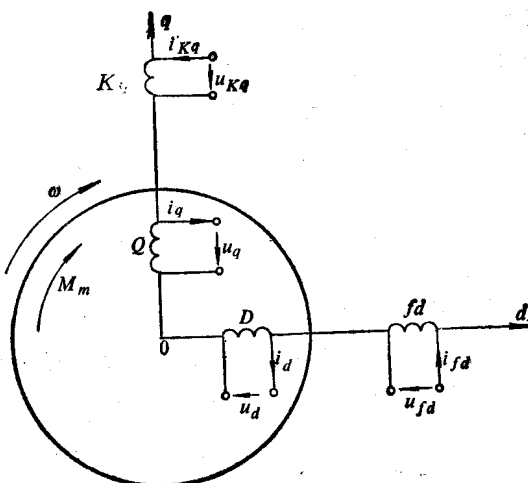


图 1-8 一般化电机

力线而发生电压一样。

二、一般化电机的基本方程式

1. 基本假设

为了便于分析和建立一般化电机的模型，假设：（1）磁路不饱和，且不计剩磁、涡流、磁滞等效应；（2）气隙磁密按正弦规律分布；（3）电枢的漏磁不计。

磁路的饱和效应使微分方程式变成非线性，求解这样的方程式是困难的。因此，在电机的理论分析中，不计饱和效应或作适当的线性化是通常惯用的手法。在此情况下，虽然求得的结果是近似的，但大大地简化了计算，并可采用迭加原理，使得分析研究有可能得到解析的结果。在实际工作中，磁路饱和的影响还可通过选择适当的参数来加以考虑，以便得到满意的结果。鉴于上述原因，在讨论一般化电机时认为磁路不饱和，这一假定是合理的。在一般情况下，剩磁、涡流及磁滞等影响不大，也可不计。必要时，剩磁的影响可以利用恒值激磁电流加以考虑，涡流效应可以利用等值短路线圈加以考虑。

一般化电机应具有较广泛的通用性，它不仅适用于直流电机，也适用于交流电机，不仅可以用来分析稳态运行，也可以用来分析瞬变过程。然而，对此适应性的物理模型，在其结构及参数方面也有一定的要求，第二和第三假定也是为了适应这种要求而提出的。

认为电枢无漏磁是不符合事实的，并在模型中是难以实现的。不过漏磁毕竟不大，它的影响是次要的。认为气隙磁密按正弦规律分布这一假定也与实际有些出入。这实际上是只考虑气隙中磁场的基波成分，而忽略了高次谐波磁密。然而对设计良好的模型来说，可以尽量地减少其高次谐波成分，从而使气隙磁密与正弦波相近。

气隙磁密与气隙磁势及磁导有关，从理论上来说，气隙磁密按正弦规律分布的一般化电机的物理模型可以具有通常的直流电机的结构形式，并近似地认为电枢导体在圆周上均匀分布，且气隙分布合理，使气隙磁密分布符合要求；也可以认为它具有均匀的气隙，直轴和交

轴上的诸线圈在气隙表面按正弦规律分配它们的匝数。不过这种匝数分布状态对定子线圈而言尚可近似实现，但对电枢而言，由于它是旋转的，作正弦分布则不可能。因此，电枢导体只能近似认为均匀分布于电枢表面，并在分析研究时取基波成分。

2. 正方向的规定

一定的方程式总是和规定的正方向相对应，因此在列写有关方程式时，必须先规定正方向。参阅图 1-7 及 1-8，^①对电枢绕组而言，我们规定： q 轴及 d 轴方向分别为 Q 绕组和 D 绕组磁链正方向；当各线圈通过正值电流时，产生正值磁链；线圈内电势正方向取与电流正方向相同；电压正方向与电流正方向符合发电机法则的规定，即从线圈端头向负载看去，电流正方向与电压正方向一致。^②对定子方面的绕组 Kq 及 fd 等而言，我们规定： q 轴及 d 轴方向分别为 Kq 和 fd 绕组的磁链正方向；当各线圈通过正值电流时产生正值磁链；线圈内的电势正方向取与电流正方向相同；电压正方向与电流正方向符合电动机法则的规定，即向线圈端头看去时，电流正方向与电压正方向一致。^③转轴上外部作用的转矩的正方向取与转子的转向同向，而其它转矩如电磁转矩、惯性转矩和摩擦转矩等的正方向取与转子转向相反的方向。

应该指出，正方向可以任意选定，可以按发电机原则规定，也可按电动机原则来规定。在研究异步电动机的运行时，通常按电动机原则来确定定子方面物理量的正方向，那时定子电流取与上述相反的方向为正值，因之，相应的在方程式中定子电流的符号相反。

3. 电压、磁链方程式

根据规定的正方向，参阅图 1-7、1-8，可列写电压平衡式如下：

$$\left. \begin{aligned} u_d &= p\psi_d - K_d \omega \phi_d - R_d i_d \\ u_q &= p\psi_q + K_d \omega \phi_d - R_q i_q \\ u_{fd} &= p\psi_{fd} + R_{fd} i_{fd} \\ u_{kq} &= p\psi_{kq} + R_{kq} i_{kq} \end{aligned} \right\} \text{generator} \quad (1-107)$$

式中 R 为电阻， ψ 为磁链，下标字母表示所属线圈， ω 为转子旋转角速度。

在主电路中除 $p\psi$ 项为变压器电压外，还有 $K\omega\phi$ 项为旋转电压。直轴和交轴磁通 ϕ_d 和 ϕ_q 分别在另一轴向线圈 Q 及 D 中产生旋转电压，其值与磁通及旋转速度的乘积成正比， K_d 及 K_q 分别为比例常数，其值与绕组结构及气隙磁场形态有关。旋转电压前面的正负号不难根据右手定则和相应的电势、电压的正方向来决定。

把各线圈的磁链用相应的电流及电感系数来表示时则有：

$$\left. \begin{aligned} \psi_d &= -L_d i_d + M_{fd} i_{fd} \\ \psi_q &= -L_q i_q + M_{kq} i_{kq} \\ \psi_{fd} &= L_{fd} i_{fd} - M_{fd} i_d \\ \psi_{kq} &= L_{kq} i_{kq} - M_{kq} i_q \end{aligned} \right\} \quad (1-108)$$

式中 L 为自感系数， M 为互感系数，下标表示相应的线圈。此外，线圈 fd 及 D 间的互感和线圈 Kq 及 Q 间的互感都是可逆的，即 $M_{fad} = M_{afd}$ ， $M_{kq} = M_{qk}$ 。由于 ϕ_d 及 ϕ_q 分别为直轴及交轴磁通，在不计饱和情况下，显然与相应的电流具有比例关系。因此可写出下式：

$$\left. \begin{aligned} \phi_d &= m_1 i_{fd} - m_2 i_d \\ \phi_q &= n_1 i_{kq} - n_2 i_q \end{aligned} \right\} \quad (1-109)$$

其中 m_1 、 m_2 、 n_1 、 n_2 分别为比例系数。把上式分别乘以 K_d 及 K_q 后则得

$$\left. \begin{aligned} K_d \phi_d &= G_{afd} i_{fd} - G_{ad} i_d \\ K_q \phi_q &= G_{akq} i_{kq} - G_{aq} i_q \end{aligned} \right\} \quad (1-110)$$

式中 $G_{afd} = K_d m_1$, $G_{ad} = K_d m_2$, $G_{akq} = K_q n_1$, $G_{aq} = K_q n_2$, 分别为比例常数, 它们有类似电感的性质, 故称之为旋转电感系数。

把式 (1-110) 和 (1-108) 代入式 (1-107) 得

$$\begin{bmatrix} u_d \\ u_q \\ u_{fd} \\ u_{kq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_d - L_d p & G_{aq} \omega & M_{afd} p & -G_{akq} \omega \\ -G_{ad} \omega & -R_q - L_q p & G_{afd} \omega & M_{akq} p \\ -M_{fad} p & 0 & R_{fd} + L_{fd} p & 0 \\ 0 & -M_{kq} p & 0 & R_{kq} + L_{kq} p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_{fd} \\ i_{kq} \end{bmatrix} \quad (1-111)$$

或

$$u = [R + Lp + \omega G] i \quad (1-112)$$

其中

$$u = \begin{bmatrix} u_d \\ u_q \\ u_{fd} \\ u_{kq} \end{bmatrix} \quad (1-113)$$

$$i = \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_{fd} \\ i_{kq} \end{bmatrix} \quad (1-114)$$

$$R = \begin{bmatrix} -R_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -R_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{fd} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{kq} \end{bmatrix} \quad (1-115)$$

$$L = \begin{bmatrix} -L_d & 0 & M_{afd} & 0 \\ 0 & -L_q & 0 & M_{akq} \\ -M_{fad} & 0 & L_{fd} & 0 \\ 0 & -M_{kq} & 0 & L_{kq} \end{bmatrix} \quad (1-116)$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 & G_{aq} & 0 & -G_{akq} \\ -G_{ad} & 0 & G_{afd} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1-117)$$

上式具有普遍的意义, 对一切具有直轴及交轴线圈的整流子式电机都能适用。下面我们将在一般化电机所作的假定下, 讨论其结果。

首先讨论电枢中的变压器电压。

在式 (1-107) 中, 直轴线圈 D 中的变压器电压为

$$u_{d1} = p\psi_d \quad (1-118)$$

直轴电枢磁链 ψ_d 与直轴磁密对应, 因之计算 ψ_d 及 u_{d1} 可从磁密着手进行。当不计漏磁和直

轴磁密作正弦分布时，参阅图 1-9(图中+，符号表示直轴电枢回路中电流及电势的正方向)，电枢表面任一点 θ 处的直轴磁密为

$$B = B_m \cos \theta \quad (1-119)$$

式中 B_m 为直轴磁密的幅值，发生在 $\theta=0$ 处。直轴磁通为

$$\phi_d = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} B l r d\theta = 2 B_m l r \quad (1-120)$$

其中 r 为电枢半径，

l 为电枢铁心长。

当一匝线圈的线圈边分别处于 θ 及 $(\pi+\theta)$ 时，与直轴磁通相应的磁链为

$$\int_{\pi+\theta}^{\theta} B l r d\theta = \int_{\pi+\theta}^{\theta} B_m \cos \theta l r d\theta = 2 B_m l r \sin \theta = \phi_d \sin \theta \quad (1-121)$$

由此磁链在该匝线圈中感应的电势为

$$e_{dt} = -\frac{d}{dt} (\phi_d \sin \theta) \quad (1-122)$$

在上述正方向规定下，感应电势与电压大小及符号相同，因而直轴两电刷间总的变压器电压亦即线圈 D 的变压器电压为

$$u_{dt} = \int_0^\pi \frac{d}{dt} (\phi_d \sin \theta) \frac{Z}{2} d\theta = \frac{d}{dt} (\phi_d Z) \quad (1-123)$$

其中 Z 为电枢表面单位弧度上的导体数，在这里我们假定导体在电枢表面上的分布是均匀的，因而 Z 为一常数。

把式(1-123)与式(1-118)比较可知，在此情况下的直轴磁链为

$$\psi_d = \phi_d Z \quad (1-124)$$

交轴具有类似的情况，当不计漏磁且交轴磁密作正弦分布和导体分布均匀时，交轴电枢回路中的变压器电压及磁链为：

$$u_{qt} = p \psi_q \quad (1-125)$$

$$\psi_q = \phi_q Z \quad (1-126)$$

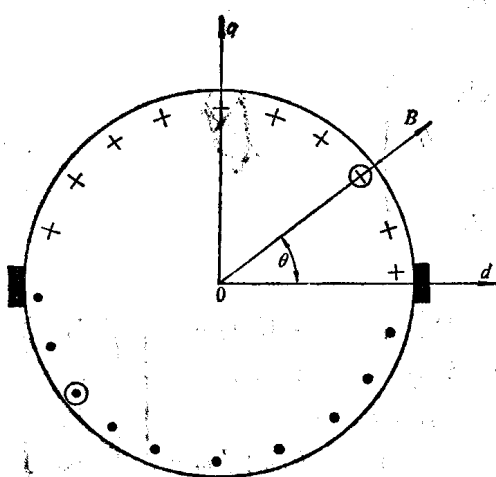


图 1-9 直轴磁密及变压器电势

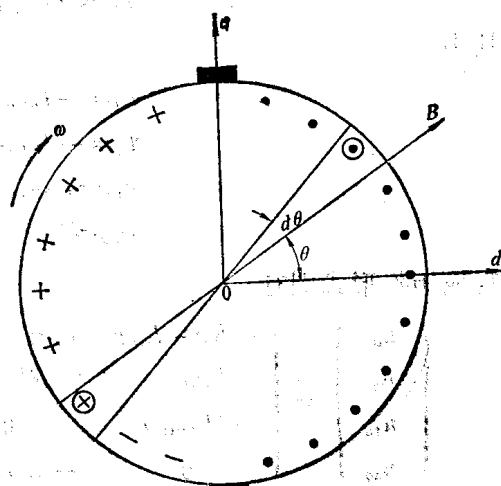


图 1-10 直轴磁密及旋转电势

再讨论电枢中的旋转电压。

不论磁密的分布状态如何，直轴磁通总可写成

$$\phi_d = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} Blr d\theta \quad (1-127)$$

参阅图1-10，直轴磁通在 $d\theta$ 范围内的导体中产生的旋转电势为

$$de_{qr} = Blr\omega Z d\theta$$

故交轴电刷间总的旋转电压亦即线圈Q的旋转电压为

$$u_{qr} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} Blr\omega Z d\theta = \omega Z \phi_d \quad (1-128)$$

根据同样的道理，线圈D中的旋转电压为

$$u_{dr} = -\omega Z \phi_q \quad (1-129)$$

从上述的推导过程可见，式(1-128)及(1-129)具有普遍的意义，与磁密的分布状态无关。另外，当我们把 Z 认为常量，即认为导体均匀分布时，按上式求出的旋转电压实际上为平均值，电压的脉振分量被忽略了。

因此，在磁密按正弦规律分布和导体分布均匀情况下，由式(1-128)、(1-129)及式(1-124)、(1-126)可得

$$\left. \begin{aligned} u_{qr} &= \omega \psi_d \\ u_{dr} &= -\omega \psi_q \end{aligned} \right\} \quad (1-130)$$

这是一个有意义的结果，同时为建立一般化电机模型所必需，在利用座标变换研究交流电机时，可以应用。

把式(1-107)中的一 $K_q\omega\phi_q$ 及 $K_d\omega\phi_d$ 分别代之以 $-\omega\psi_q$ 及 $\omega\psi_d$ ，则有

$$\left. \begin{aligned} u_d &= p\psi_d - \omega\psi_q - R_d i_d \\ u_q &= p\psi_q + \omega\psi_d - R_q i_q \\ u_{fd} &= p\psi_{fd} + R_{fd} i_{fd} \\ u_{hq} &= p\psi_{hq} + R_{hq} i_{hq} \end{aligned} \right\} \quad (1-131)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \psi_d &= -L_d i_d + M_{fd} i_{fd} \\ \psi_q &= -L_q i_q + M_{hq} i_{hq} \\ \psi_{fd} &= L_{fd} i_{fd} - M_{fd} i_d \\ \psi_{hq} &= L_{hq} i_{hq} - M_{hq} i_q \end{aligned} \right\} \quad (1-132)$$

写成矩阵形式则有

$$\begin{bmatrix} u_d \\ u_q \\ u_{fd} \\ u_{hq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_d - L_d p & L_q \omega & M_{afd} p & -M_{akq} \omega \\ -L_d \omega & -R_q - L_q p & M_{afd} \omega & M_{akq} p \\ -M_{fad} p & 0 & R_{fd} + L_{fd} p & 0 \\ 0 & -M_{haq} p & 0 & R_{hq} + L_{hq} p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_{fd} \\ i_{hq} \end{bmatrix} \quad (1-133)$$

把式(1-133)与式(1-111)比较可知，在此情况下，则有

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & G_{aq} & 0 & -G_{akq} \\ -G_{ad} & 0 & G_{afd} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & L_q & 0 & -M_{akq} \\ -L_d & 0 & M_{afd} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1-134)$$

上列诸式中各量可以是实在值，也可以是标么值，为简便计，表示标么值的符号 * 通常不再写出。

4. 功率及转矩方程式

参阅图1-8, 外界作用在转轴上的机械转矩 M_m 为三种转矩所平衡, 它们是电磁转矩 M_e , 旋转部分的摩擦而产生的转矩 M_D , 以及因转速变化而引起的惯性转矩 M_J 。在前述的规定的转矩正方向情况下, 这些转矩的关系式为

$$M_m = M_e + M_D + M_J$$

对电动机状态, $M_e = M_m + M_D + M_J$
 过励磁运行, $M_e = M_m + M_D + M_J$
 石炭中, $M_e = M_m + M_D + M_J$

从能量平衡的观点来看, 由电机各对电端头输入的电功率与由轴端头输入的机械功率的总和, 应与电机内贮能的增长率和损耗功率的总和相平衡。这里所说的贮能主要是磁场的贮能和转动部分的贮能, 电机绕组的电容效应及其电场能量甚微, 可以不计。所说的损耗则包括电阻上的电损耗和转动部分的摩擦损耗, 它们转化为热能, 提高了电机的温升, 并向周围介质中散去。按上述的平衡关系, 则有

$$P_{dq} + P_m = \text{贮能功率} + \text{损耗功率} \quad (1-136)$$

其中 P_{dq} 为全部输入的电功率, 参阅图1-8及式(1-111)~(1-117), 可得

$$P_{dq} = -u_d i_d - u_q i_q + u_{fd} i_{fd} + u_{kq} i_{kq} = i^t u' = i^t [R' + L' p + \omega G'] i \quad (1-137)$$

其中

$$u' = \begin{bmatrix} -u_d \\ -u_q \\ u_{fd} \\ u_{kq} \end{bmatrix} \quad (1-138)$$

$$R' = \begin{bmatrix} R_d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{fd} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{kq} \end{bmatrix} \quad (1-139a)$$

$$L' = \begin{bmatrix} L_d & 0 & -M_{afd} & 0 \\ 0 & L_q & 0 & -M_{akq} \\ -M_{fad} & 0 & L_{fd} & 0 \\ 0 & -M_{kq} & 0 & L_{kq} \end{bmatrix} \quad (1-139b)$$

$$G' = \begin{bmatrix} 0 & -G_{aq} & 0 & G_{akq} \\ G_{ad} & 0 & -G_{afd} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1-139c)$$

P_m 为转轴上输入的机械功率, 其值为

$$P_m = \omega M_m = \omega (M_e + M_D + M_J) \quad (1-140)$$

将式(1-137)及(1-140)代入式(1-136)得

$$i^2 R' i + i L' p i + i \omega G' i + \omega M_J + \omega M_D + \omega M_e = \text{贮能功率} + \text{损耗功率} \quad (1-141)$$

比较上式左右两方可知:

$$i L' p i + \omega M_J = \text{贮能功率} \quad (1-142)$$

$$i^2 R' i + \omega M_D = \text{损耗功率} \quad (1-143)$$

其中 $i L' p i$ 为磁场贮能功率;

$\omega M_J = \omega J \frac{d\omega}{dt}$ 为转动部分动能增加率, J 为转动惯量;

$i^2 R' i$ 为电阻损耗;

ωM_D 为转动部分的机械损耗。

式(1-141)中其余两项之和为零, 即

$$i \omega G' i + \omega M_e = 0 \quad (1-144)$$

或

$$M_e = -i G' i = (G_{afd} i_{fd} - G_{ad} i_d) i_q - (G_{ahq} i_{hq} - G_{aq} i_q) i_d \quad (1-145)$$

在一般化电机中, 因[参阅式(1-134)]

$$G_{aq} = L_q, \quad G_{ahq} = M_{ahq}$$

$$G_{ad} = L_d, \quad G_{afd} = M_{afd}$$

故

$$M_e = (M_{afd} i_{fd} - L_d i_d) i_q - (M_{ahq} i_{hq} - L_q i_q) i_d = \psi_d i_q - \psi_q i_d \quad (1-146)$$

由上式可见, M_e 由两个分量组成, 一个分量是电枢直轴磁链与交轴电流相互作用产生的, 另一个分量是电枢交轴磁链与直轴电流相互作用产生的, 它们的符号不难根据左手定则得到说明。

在上式中令

$$P_e = i \omega G' i = \omega (\psi_q i_d - \psi_d i_q) = -(u_{dr} i_d + u_{qr} i_q) \quad (1-147)$$

则 P_e 为输入功率中未参与贮存和损耗的那部分功率, 即跨越气隙实现机电能量转换的功率, 它分别是电枢旋转电压与相应电流的乘积之和。因此电磁转矩又常写成

$$M_e = -\frac{P_e}{\omega} \quad (1-148)$$

倘若 P_e 为正值, 则求得的 M_e 为负值, 这意味着此时 M_e 的方向与转向相同, 转子由此转矩的驱动而旋转, 因而电机作电动机运行, 并将电能转化为机械能; 反之, 若 P_e 为负值, 则 M_e 为正值, 电机作发电机运行。

在上面的叙述中, 我们是针对如图1-8所示的在直轴及交轴上各有一对线圈而言的。在一般情况下, 当电机的线圈数多于或少于上述数目时, 上述的分析方法仍然适用, 只不过在计算 P_e 及 M_e 时, 应根据具体情况决定其旋转电压及其与相应电流的乘积之和。