

Topic II 三相凸极同步电机理论

I. 三相凸极同步电机的研究对象

1. 电机的多样性

对于交流电机，常见的种类有异步电机（绕线式、鼠笼式）、同步电机（凸极电机、隐极电机），但是其本质都相似。三相凸极同步电机最具代表性，隐极同步电机和感应电机都可认为是凸极同步电机的特例。本节分析的目标为三相凸极同步电动机。

2. 三相凸极同步电机模型

对于下图 1 中所示的三相同步电机，其等效模型为图 2。

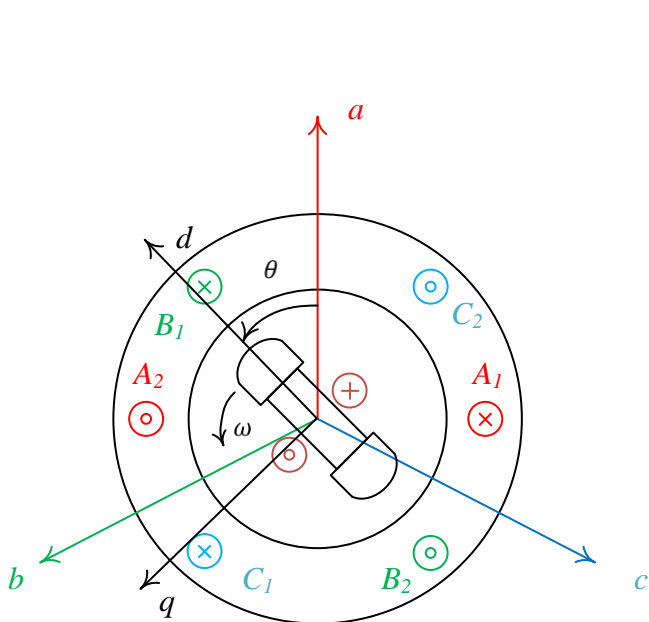


图 1 三相同步电机模型

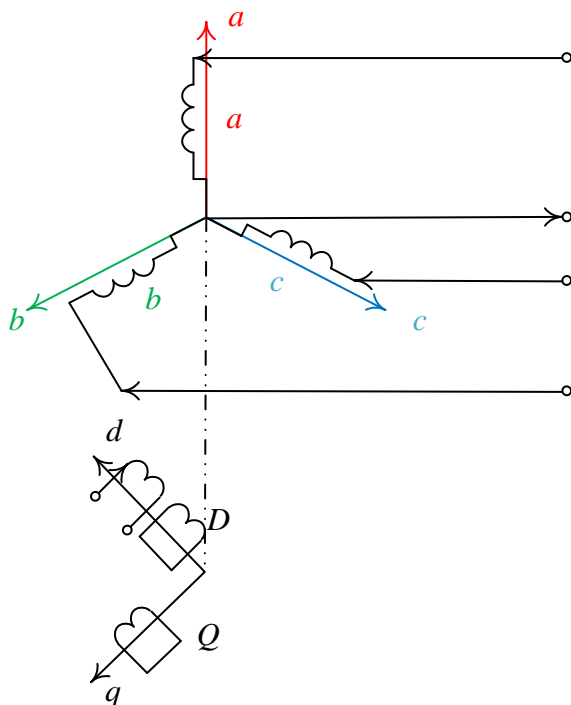


图 2 三相同步电机的模型

整个结构中有六个线圈，除了 D 绕组和 Q 绕组，相互紧密耦合。由于以上线圈全部以电动机参考方向为准，所以图中仅标出线圈名称。

实际电机，须考虑极对数。但是此处仅考虑一对凸极的简化情况，故后续用电弧度（电角度）、电角速度、电周期描述模型。

伪静止线圈：就是等效之后和其本体之间存在相对运动的线圈。相对概念：静止线圈。

3. 模型要求

此处讨论的电机必定是无槽的，即使有槽影响也很小，对于此处的建模分析基本上可以忽略不计。

忽略的铁心的饱和可以让电机尽可能简化。

II. 三相凸极电动机的电气方程

对于定子绕组，可以通过下面的式子表述其电气方程：

$$u_a = p\psi_a + R_a i_a$$

$$u_b = p\psi_b + R_b i_b$$

$$u_c = p\psi_c + R_c i_c$$

在通常情况下，三相电机的三相电阻都相等，所以，通常可以应用条件 $R_a = R_b = R_c = R_s$ 。

对于励磁绕组，通常有：

$$u_f = p\psi_f + R_f i_f$$

对于永磁励磁的情况，可以直接省略该方程，并认为永磁体提供了恒定磁链 ψ_m ，磁链与转子转角 θ 之间的关系为：

$$\psi_{am} = \psi_m \cos \theta$$

对于阻尼绕组可以进行等效，最终的电气方程可以概括为：

$$0 = p\psi_D + i_D R_D$$

$$0 = p\psi_Q + i_Q R_Q$$

将以上的电气方程划分成两组，一组为定子，另一组为转子，将以上全部的方程整合起来可以得到：

$$U = \begin{pmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \\ u_f \\ u_D \\ u_Q \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{abc} \\ \mathbf{u}_{fDQ} \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_f \\ i_D \\ i_Q \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{i}_{abc} \\ \mathbf{i}_{fDQ} \end{pmatrix}, \Psi = \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \\ \psi_f \\ \psi_D \\ \psi_Q \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} \boldsymbol{\psi}_{abc} \\ \boldsymbol{\psi}_{fDQ} \end{pmatrix}$$

电阻矩阵可以写为：

$$R = \begin{pmatrix} R_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_Q \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{abc} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{fDQ} \end{pmatrix},$$

$$L = \begin{pmatrix} L_a & M_{ab} & M_{ac} & M_{af} & M_{aD} & M_{aQ} \\ M_{ba} & L_b & M_{bc} & M_{bf} & M_{bD} & M_{bQ} \\ M_{ca} & M_{cb} & L_c & M_{cf} & M_{cD} & M_{cQ} \\ M_{fa} & M_{fb} & M_{fc} & L_f & M_{fD} & 0 \\ M_{Da} & M_{Db} & M_{Dc} & M_{Df} & L_D & 0 \\ M_{Qa} & M_{Qb} & M_{Qc} & 0 & 0 & L_Q \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} \mathbf{L}_s & \mathbf{L}_{sr} \\ \mathbf{L}_{rs} & \mathbf{L}_r \end{pmatrix}$$

从电机的物理性质上可以发现电机应当满足，对称矩阵： $L = L^T$

可以将上式改写为：

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{abc} \\ \mathbf{u}_{fDQ} \end{pmatrix} &= p \begin{pmatrix} \boldsymbol{\psi}_{abc} \\ \boldsymbol{\psi}_{fDQ} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{abc} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{fDQ} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i}_{abc} \\ \mathbf{i}_{fDQ} \end{pmatrix} \\ &= p \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{L}_s & \mathbf{L}_{sr} \\ \mathbf{L}_{rs} & \mathbf{L}_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i}_{abc} \\ \mathbf{i}_{fDQ} \end{pmatrix} \right\} + \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{abc} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{fDQ} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i}_{abc} \\ \mathbf{i}_{fDQ} \end{pmatrix} \\ &= p \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{L}_s & \mathbf{L}_{sr} \\ \mathbf{L}_{rs} & \mathbf{L}_r \end{pmatrix} \right\} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{i}_{abc} \\ \mathbf{i}_{fDQ} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{L}_s & \mathbf{L}_{sr} \\ \mathbf{L}_{rs} & \mathbf{L}_r \end{pmatrix} \cdot p \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{i}_{abc} \\ \mathbf{i}_{fDQ} \end{pmatrix} \right\} + \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{abc} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{fDQ} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i}_{abc} \\ \mathbf{i}_{fDQ} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \omega \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \begin{pmatrix} L_s & L_{sr} \\ L_{rs} & L_r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i_{abc} \\ i_{fDQ} \end{pmatrix} \right\} + \begin{pmatrix} L_s & L_{sr} \\ L_{rs} & L_r \end{pmatrix} \cdot p \left\{ \begin{pmatrix} i_{abc} \\ i_{fDQ} \end{pmatrix} \right\} + \begin{pmatrix} R_{abc} & 0 \\ 0 & R_{fDQ} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_{abc} \\ i_{fDQ} \end{pmatrix}$$

可以发现虽然上面的线圈都是符合静止线圈的书写规范，没有含 ω 的旋转电动势项目，但是通过计算仍然可以出现类似“旋转电动势”的项目。这样在形式上没有出现旋转电动势项目的表达式称为“伪静止线圈”。

下面将会分成几种不同的情况分别讨论电感矩阵中各项的计算方法（具体表达）。

1. 定子绕组的自感参数

1) 第一种描述方法

根据电感的定义来描述电感参数，自感和互感的定义

$$L \propto W^2 \lambda_s, M \propto W_1 W_2 \lambda_m$$

对于一个特定的线圈自感正比于线圈匝数的平方和自己产生磁链匝链过程中的磁导率（*self*）（相当于一个全路径中的平均磁导概念）。

相似地，互感正比于两个线圈匝数的乘积，正比于匝链了两个线圈的磁链的磁导率（*mutual*）。

在转子位置角（*d*轴和*a*轴之间的夹角 θ ）发生变化的过程中，电感大小将会随之发生变化。

在一个四极凸极电机旋转过程中，将有如下图所示的过程， λ_s 将会随之变大然后再减小。每转一个电周期，自感将会变化两个周期。

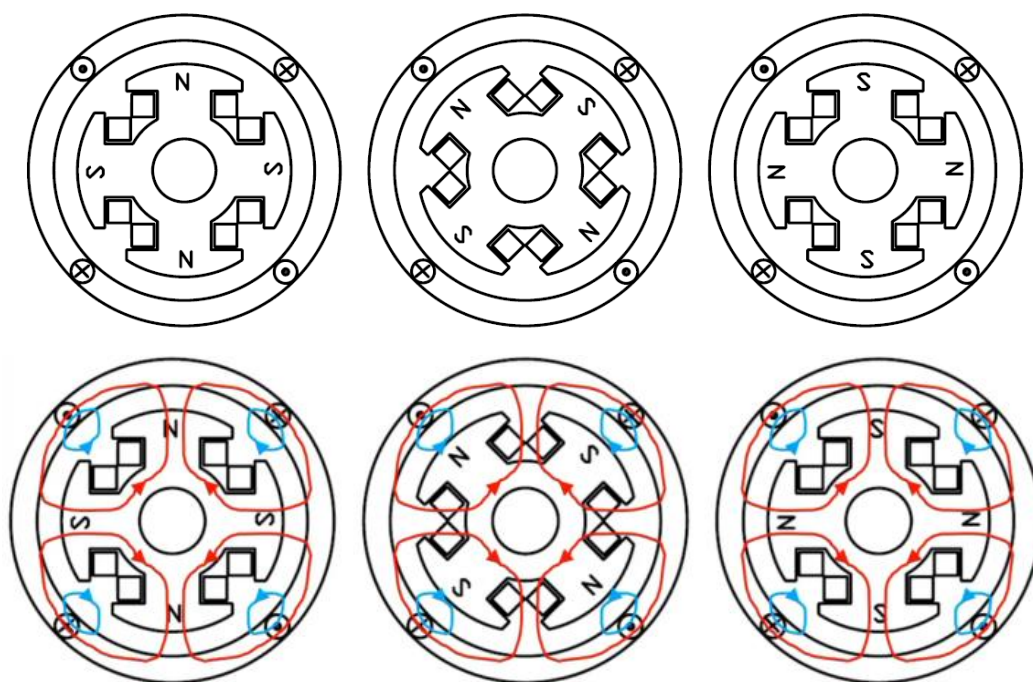


图 3 在电机旋转过程中磁力线发生的变化

图 3 中蓝色的圈（小环）为漏磁链的匝链路径，一般情况下可以将其视为常数，记为 L_{aal} 。

对于不同的电机设计情况，电感的波形将会有不同的表示，在半边对称的情况下，波形仅有偶次分量。但是在一些特殊情况特殊设计下，奇次谐波是可能出现的，其原因包括，极靴形状、材质不对称，或者严重饱和造成极靴的特性不对成，那么电感的表达式中将会出现奇次谐波。

$$L_{aa} = L_{aa0} + L_{aa2} \cos 2\theta + L_{aa4} \cos 4\theta + \dots$$

$$L_{bb} = L_{bb0} + L_{bb2} \cos 2\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + L_{bb4} \cos 4\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + \dots$$

$$L_{cc} = L_{cc0} + L_{cc2} \cos 2\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + L_{cc4} \cos 4\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + \dots$$

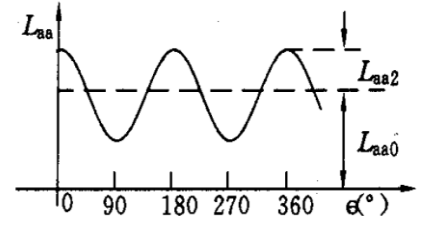


图 4 自感波形的变化关系

在实际分析过程中，通常仅仅取其中的两项。

2) 分析电感的实际物理意义

从电感的计算角度上，以a相的自感为例，可以先计算a相的自己对自己产生的磁链。自己对于自己产生的磁链可以分为两个部分，一个部分为通过气隙匝链的漏磁链 ψ_{aal} ，和通过主磁路匝链的气隙磁链 ψ_{aad} 。

通常认为气隙匝链的漏磁链为常数。通过主磁路匝链的气隙磁链应当满足下面的表达：

$$\begin{aligned} \psi_{aad} &= W\phi_{aad} = i_a L_{aad} \\ &= W(\phi_{ad\delta} \cos \theta - \phi_{aq\delta} \sin \theta) = W(F_{ad}\lambda_d \cos \theta - F_{aq}\lambda_q \sin \theta) \\ &= W(F_a \cos \theta \lambda_d \cos \theta + F_a \sin \theta \lambda_q \sin \theta) = W^2 i_a (\lambda_d \cos^2 \theta + \lambda_q \sin^2 \theta) \\ &= i_a (L_{aad} \cos^2 \theta + L_{aaq} \sin^2 \theta) \end{aligned}$$

从上面的推导过程中，可以看出出现在式子中的两个物理量 L_{aad} 和 L_{aaq} 的物理意义（测量方法）为：

$$\begin{cases} L_{aaq} = L_{aad}|_{\theta=0} \\ L_{aad} = L_{aaq}|_{\theta=\frac{\pi}{2}} \end{cases}$$

进一步化简：

$$\begin{aligned} L_{aa\delta} &= L_{aad} \cos^2 \theta + L_{aaq} \sin^2 \theta \\ &= L_{aad} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} + L_{aaq} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \\ &= \frac{1}{2}(L_{aad} + L_{aaq}) + \frac{L_{aad} - L_{aaq}}{2} \cos 2\theta \end{aligned}$$

综上，定子绕组的自感为：

$$\begin{aligned} L_{aa} &= \frac{1}{2}(L_{aad} + L_{aaq} + 2L_{aal}) + \frac{L_{aad} - L_{aaq}}{2} \cos 2\theta \\ &\triangleq L_{aa0} + L_{aa2} \cos 2\theta \end{aligned}$$

参数关系为：

$$\begin{cases} L_{aa0} = L_{aal} + \frac{1}{2}(L_{aad} + L_{aaq}) \\ L_{aa2} = \frac{L_{aad} - L_{aaq}}{2} \end{cases}$$

从上式中可以看到，对于凸极电机 $\cos 2\theta$ 项目的系数不为0，对于隐极电机存在关系 $L_{aad} = L_{aaq}$ ，因此 $\cos 2\theta$ 项目前面的系数为0。

因此，可以得知，所有的定子自感都应满足如下关系：

$$L_{aa} = L_{aa0} + L_{aa2} \cos 2\theta$$

$$L_{bb} = L_{bb0} + L_{bb2} \cos 2\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$L_{cc} = L_{cc0} + L_{cc2} \cos 2\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)$$

2. 定子绕组的互感参数

对于 $M_{ba\delta}$ 需要分别考虑 $\phi_{ad\delta}$ 和 $\phi_{aq\delta}$ 对其产生的影响。在上面定子绕组自感分析过程中已经得到了其关系：

$$\phi_{ad\delta} = F_{ad}\lambda_d = F_a \cos \theta \lambda_d = W_a i_a \lambda_d \cos \theta$$

$$\phi_{aq\delta} = F_{aq}\lambda_q = -F_a \sin \theta \lambda_q = -W_a i_a \lambda_q \sin \theta$$

接下来计算匝链两个线圈的磁链：

$$\begin{aligned} \psi_{ba\delta} &= W \left(\phi_{ad\delta} \cos \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) - \phi_{aq\delta} \sin \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) \right) \\ &= i_a \left(L_{aad} \cos \theta \cos \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) + L_{aaq} \sin \theta \sin \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) \right) \\ &= i_a \left(\frac{L_{aad}}{2} \left(\cos \frac{2\pi}{3} + \cos \left(2\theta - \frac{2\pi}{3} \right) \right) + \frac{L_{aaq}}{2} \left(\cos \frac{2\pi}{3} - \cos \left(2\theta - \frac{2\pi}{3} \right) \right) \right) \\ &= i_a \left(-\frac{L_{aad} + L_{aaq}}{4} + \frac{L_{aad} - L_{aaq}}{2} \cos \left(2\theta - \frac{2\pi}{3} \right) \right) \\ &= i_a \left(-\frac{L_{aad} + L_{aaq}}{4} + \frac{L_{aad} - L_{aaq}}{2} \cos \left(2\theta + \frac{4\pi}{3} \right) \right) \\ &= i_a \left(-\frac{L_{aad} + L_{aaq}}{4} + \frac{L_{aad} - L_{aaq}}{2} \cos \left(2\left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) \right) \right) \end{aligned}$$

这样可以得到主互感表达为：

$$M_{ba} = -\frac{L_{aad} + L_{aaq}}{4} + \frac{L_{aad} - L_{aaq}}{2} \cos \left(2\left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) \right)$$

加上漏电感部分，可以得到：

$$\begin{aligned} M_{ba} &= -M_{abl} - \frac{L_{aad} + L_{aaq}}{4} + \frac{L_{aad} - L_{aaq}}{2} \cos \left(2\left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) \right) \\ &\triangleq -M_{ab0} + L_{aa2} \cos 2\left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

其中，

$$\begin{cases} M_{ab0} = M_{abl} + \frac{L_{aad} + L_{aaq}}{4} \\ L_{aa2} = \frac{L_{aad} - L_{aaq}}{2} \end{cases}$$

如果忽略漏电感，那么可以发现，直流分量的大小几乎是自感的一半，而二次交变分量的幅值大小是一样的但是产生了一个相位差。相似地，可以顺推到：

$$M_{ab} = -M_{ab0} + L_{aa2} \cos 2 \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$M_{bc} = -M_{ab0} + L_{aa2} \cos 2\theta$$

$$M_{ca} = -M_{ab0} + L_{aa2} \cos 2 \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right)$$

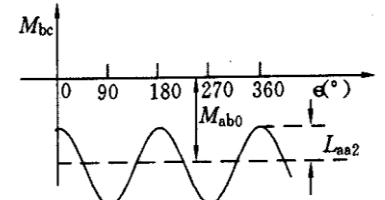


图 5 定子绕组互感波形

3. 定子绕组和转子励磁绕组之间的互感

此时，定子绕组和转子励磁绕组之间的关系可以通过其耦合关系得到

$$M_{af} = M_{fa} = M_{af1} \cos \theta$$

$$M_{bf} = M_{fb} = M_{bf1} \cos \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$M_{cf} = M_{fc} = M_{cf1} \cos \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right)$$

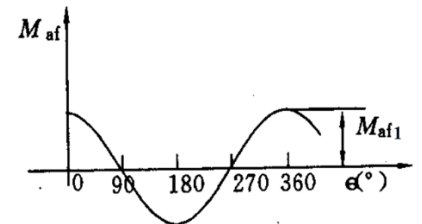


图 6 定子绕组和转子励磁绕组的互感

特别关注，定子绕组和转子励磁绕组之间的仅有主电感，没有漏电感（因为一个线圈在定子上，一个线圈在转子上，所以必须经过气隙），而且每个电周期仅交变一次。

4. 定子绕组和转子阻尼绕组的互感系数

定子绕组与转子绕组之间的关系同上面叙述定子绕组和转子励磁绕组之间的互感相同，只需要简单变更符号即可。

✓ 定子绕组和转子 D 轴阻尼绕组

$$M_{aD} = M_{Da} = M_{aD1} \cos \theta$$

$$M_{bD} = M_{Db} = M_{aD1} \cos \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$M_{cD} = M_{Dc} = M_{aD1} \cos \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right)$$

✓ 定子绕组和转子 Q 轴阻尼绕组

由于 D 绕组和 Q 绕组之间互差90°角度，因此可以调整如下：

$$M_{aQ} = M_{Qa} = -M_{aQ1} \sin \theta$$

$$M_{bQ} = M_{Qb} = -M_{aQ1} \sin \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$M_{cQ} = M_{Qc} = -M_{aQ1} \sin \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right)$$

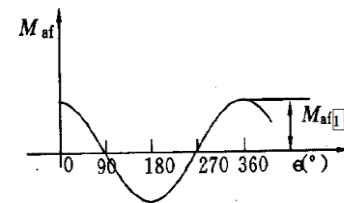


图 7 定转子之间的互感系数

此处定子绕组和转子阻尼绕组之间的互感仍然仅有交变分量，没有漏磁分量。

5. 转子绕组的自感系数

转子绕组上的自感仍然具有漏感和自感，但是匝链过程相同，为常数

$$L_f = L_{f1} + L_{f\delta}$$

6. 转子绕组之间的互感系数

其匝链的方式相同，因此电感为常数，而且可以划分漏电感和主电感两个部分：

$$M_{fD} = M_{Df} = M_{fD1} + M_{fD\delta}$$

转子上的电感都是不随着电感位置发生变化的。

III. 同步电机的机械状态方程

对于同步电机仍然应当满足力矩平衡，如下：

$$p\omega = \frac{d\omega}{dt} = \frac{p}{J}(T_e - T_l - T_D) = \frac{p}{J}\left(T_e - T_l - \frac{B}{p}\omega\right)$$

其次，角度应当满足关系：

$$p\theta = \omega$$

下面需要解决的核心问题就是需要写出电磁转矩的公式：

✓ 第一种方法，使用虚位移法求解：

首先考虑单个线圈中的磁共能：

$$W_k = \frac{1}{2}\psi_k i_k \neq \frac{1}{2}L_k i_k^2 \quad (\text{磁链的来源很多})$$

全部磁共能：

$$W = \sum \frac{1}{2}\psi_k i_k = \frac{1}{2}\mathbf{I}^T \mathbf{L} \mathbf{I}$$

那么转矩为：

$$T_e = \frac{\partial W}{\partial \theta} = p \frac{\partial W}{\partial \theta} = \boxed{\frac{p}{2} \mathbf{I}^T \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \theta} \mathbf{I}}$$

其中，

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \theta} = \begin{pmatrix} \frac{\partial L_s}{\partial \theta} & \frac{\partial L_{sr}}{\partial \theta} \\ \frac{\partial L_{rs}}{\partial \theta} & 0 \end{pmatrix}$$

代入上式中进行化简，可以得到凸极电机转矩表达式中具体各个项目的物理意义：

$$\begin{aligned} T_e &= \frac{p}{2} \mathbf{I}^T \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \theta} \mathbf{I} \\ &= \frac{p}{2} (\mathbf{i}_{abc}^T \quad \mathbf{i}_{fDQ}^T)^T \begin{pmatrix} \frac{\partial L_s}{\partial \theta} & \frac{\partial L_{sr}}{\partial \theta} \\ \frac{\partial L_{rs}}{\partial \theta} & 0 \end{pmatrix} (\mathbf{i}_{abc} \quad \mathbf{i}_{fDQ}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{p}{2} (\mathbf{i}_{abc}^T \quad \mathbf{i}_{fdQ}^T)^T \begin{pmatrix} \frac{\partial L_s \mathbf{i}_{abc}}{\partial \theta} + \frac{\partial L_{sr} \mathbf{i}_{fdQ}}{\partial \theta} \\ \frac{\partial L_{rs} \mathbf{i}_{abc}}{\partial \theta} \end{pmatrix} \\
&= \frac{p}{2} \left(\boxed{\frac{\mathbf{i}_{abc}^T \partial (L_s \mathbf{i}_{abc})}{\partial \theta}} + \boxed{\frac{\mathbf{i}_{abc}^T \partial (L_{sr} \mathbf{i}_{fdQ})}{\partial \theta}} + \boxed{\frac{\mathbf{i}_{fdQ}^T \partial (L_{rs} \mathbf{i}_{abc})}{\partial \theta}} \right)
\end{aligned}$$

以上，三项的物理意义在于：磁阻转矩（由于凸极产生的转矩）；旋转电势与定子电流作用，形成基本电磁转矩；滑差转矩，将会脉振，当同步电机进入同步速时将不会出现，并不会产生一个有效的转矩。

✓ 第二种方法，使用能量的观点

从功率守恒的角度来思考，输入的电功率为：

$$\begin{aligned}
P_e &= \mathbf{I}^T \mathbf{U} = \mathbf{I}^T (\mathbf{R}\mathbf{I} + p\{\mathbf{L}\}\mathbf{I} + \mathbf{L}p\{\mathbf{I}\}) \\
&= \mathbf{I}^T \mathbf{R}\mathbf{I} + p\Omega \frac{\mathbf{I}^T \partial \mathbf{L}}{\partial \theta} \mathbf{I} + \mathbf{I}^T \mathbf{L} p\{\mathbf{I}\} \\
&= \underbrace{\frac{\mathbf{I}^T \mathbf{R}\mathbf{I}}{\text{电磁损耗}}} + \underbrace{\frac{1}{2} p\Omega \frac{\mathbf{I}^T \partial \mathbf{L}}{\partial \theta} \mathbf{I}}_{\text{产生转矩}} + \underbrace{\frac{1}{2} p\Omega \frac{\mathbf{I}^T \partial \mathbf{L}}{\partial \theta} \mathbf{I}}_{\text{机械储能功率}} + \underbrace{\frac{\mathbf{I}^T \mathbf{L} p\mathbf{I}}{\text{电磁储能功率}}}
\end{aligned}$$

整个绕组中的储能

$$W = \frac{1}{2} \mathbf{I}^T \boldsymbol{\psi} = \frac{1}{2} \mathbf{I}^T \mathbf{L} \mathbf{I}$$

整个绕组储能的功率为：

$$\begin{aligned}
P &= \frac{\partial W}{\partial t} \\
&= \frac{1}{2} (p\{\mathbf{I}^T\} \mathbf{L} \mathbf{I} + \mathbf{I}^T p\{\mathbf{L}\} \mathbf{I} + \mathbf{I}^T \mathbf{L} p\{\mathbf{I}\}) = \frac{1}{2} ((p\{\mathbf{I}^T\} \mathbf{L} \mathbf{I})^T + \mathbf{I}^T p\{\mathbf{L}\} \mathbf{I} + \mathbf{I}^T \mathbf{L} p\{\mathbf{I}\}) \\
&= \mathbf{I}^T \mathbf{L} p\{\mathbf{I}\} + \frac{1}{2} \mathbf{I}^T p\{\mathbf{L}\} \mathbf{I}
\end{aligned}$$

可见总的储能功率中包括 $\frac{1}{2} \mathbf{I}^T p\{\mathbf{L}\} \mathbf{I}$ 的项目。

输出的机械功率为：

$$P_m = -\Omega T_l = -\Omega T_e + \Omega B \Omega + \Omega J p \Omega$$

最终可以得到结论：

$$\boxed{T_e = \frac{p}{2} \mathbf{I}^T \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \theta} \mathbf{I}}$$

IV. 结果汇总

1. 三相凸极同步电机相坐标方程组

电压状态方程：

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_{abc} \\ \mathbf{u}_{fDQ} \end{pmatrix} = \omega \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{L}_s & \mathbf{L}_{sr} \\ \mathbf{L}_{rs} & \mathbf{L}_r \end{pmatrix} \right\} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{i}_{abc} \\ \mathbf{i}_{fDQ} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{L}_s & \mathbf{L}_{sr} \\ \mathbf{L}_{rs} & \mathbf{L}_r \end{pmatrix} \cdot \mathcal{P} \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{i}_{abc} \\ \mathbf{i}_{fDQ} \end{pmatrix} \right\} + \begin{pmatrix} \mathbf{R}_{abc} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{fDQ} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{i}_{abc} \\ \mathbf{i}_{fDQ} \end{pmatrix}$$

电感矩阵的形式为：

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_s & \mathbf{L}_{sr} \\ \mathbf{L}_{rs} & \mathbf{L}_r \end{pmatrix}$$

其中，

$$\mathbf{L}_s = \begin{pmatrix} L_{aa0} + L_{aa2} \cos 2\theta & -M_{ab0} + L_{aa2} \cos 2\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & -M_{ab0} + L_{aa2} \cos 2\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ -M_{ab0} + L_{aa2} \cos 2\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & L_{bb0} + L_{bb2} \cos 2\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & -M_{ab0} + L_{aa2} \cos 2\theta \\ -M_{ab0} + L_{aa2} \cos 2\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & -M_{ab0} + L_{aa2} \cos 2\theta & L_{cc0} + L_{cc2} \cos 2\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \end{pmatrix}$$

其中满足关系：

$$\begin{cases} L_{aa0} = L_{aal} + \frac{1}{2}(L_{aad} + L_{aaq}) \\ L_{aa2} = \frac{L_{aad} - L_{aaq}}{2} \\ M_{ab0} = M_{abl} + \frac{L_{aad} + L_{aaq}}{4} \end{cases}$$

交变次数为 2 次每电周期。

$$\mathbf{L}_{rs} = \mathbf{L}_{sr}^T = \begin{pmatrix} M_{af1} \cos \theta & M_{af1} \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & M_{af1} \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ M_{ad1} \cos \theta & M_{ad1} \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & M_{ad1} \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ -M_{aq1} \sin \theta & -M_{aq1} \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & -M_{aq1} \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \end{pmatrix}$$

交变次数为 1 次每电周期。

$$\mathbf{L}_r = \begin{pmatrix} L_{f1} + L_{f\delta} & M_{fD1} + M_{fD\delta} & 0 \\ M_{fD1} + M_{fD\delta} & L_{f1} + L_{f\delta} & 0 \\ 0 & 0 & L_{f1} + L_{f\delta} \end{pmatrix}$$

以上数值都是常数，不随转子位置较发生变化。

机械状态方程：

$$\begin{cases} p\omega = \frac{p}{J}(T_e - T_l - T_D) = \frac{p}{J}\left(T_e - T_l - \frac{B}{p}\omega\right) \\ T_e = \frac{p}{2} \mathbf{I}^T \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \theta} \mathbf{I} \\ p\theta = \omega \end{cases}$$

第一章 交流电机在相坐标系统中的方程式

第一节 概 述

交流电机是将机械能转换为电能（发电机）或将电能转换为机械能（电动机），以实现机电能量转换的主要设备。在交流电机中，三相同步电机和三相感应电机的应用最普遍。从结构上看，这两类电机的定子没有什么区别，三相绕组对称地分布在由环形铁心构成的定子圆周上，绕组轴线互差 120° 电角度，从磁路方面看也是对称的。感应电机的转子是圆柱形，定、转子间形成均匀气隙，在转子槽中或放置着多相对称的鼠笼条，或放置着三相对称的绕线式绕组，从绕组和磁路两方面而言均构成了对称系统。同步电机的转子有两种：一种是凸极式的，其转子与定子间形成不均匀气隙，在转子磁极上装有集中式的励磁绕组，在磁极表面，通常还有用导条和端环构成的阻尼绕组，转子结构从绕组和磁路两方面看，只是分别对直轴和交轴而言才是对称的。另一种是圆柱形（隐极式）的，定、转子间气隙均匀，通常励磁绕组嵌在转子槽中，绕组轴线在直轴上，可以由实心转子起到阻尼绕组的作用，也可以另装阻尼绕组。转子结构从电路方面看，分别对转子直轴和交轴对称，从磁路方面看，由于气隙均匀，可近似认为对任意轴线都是对称的。

从电路观点看，电机是由具有电磁耦合关系的绕组组成的，如定子的相绕组、转子的励磁绕组和阻尼绕组，均可视为电路中的一个回路。因此，可用电路的基尔霍夫定律写出相应回路的电压方程式进行分析和计算。与静止电路相比，由于电机的定、转子回路间存在着相对运动，使部分回路的电感值随转子位置的不同而改变，是转子位置角的函数，也是时间的函数；另外，由于转子是旋转的，要完整地描述电机的运行状态和行为，除了电路方程外，还必须考虑反映转子运动状态的转子运动方程式。这样一套包括电压方程式、转子运动方程式的微分方程组能够正确描述电机中的变量，如电压、电流、磁链、转矩和转速等及其相互联系、相互制约的关系。这些方程式具有特别重要的作用，它是我们研究各种运行状态和行为的基础。

基于上述考虑，在研究交流电机的电磁关系时，本书把具有一般结构特性的凸极式同步电机作为重点讨论对象，其它结构的电机可作为凸极式同步电机的特例来处理。本章主要讨论三相凸极同步电机的基本电磁关系，首先从实际的 a 、 b 、 c 相坐标系统建立电机的电压方程式，得到一组时变系数的微分方程组，再建立电机的转子运动方程式，与电压方程式一起构成相坐标系统中的基本方程式。本章还对电感系数进行了必要的讨论。

第二节 凸极同步电机在相坐标系统中的电压方程式

交流电机的电路是具有铁心，且定、转子电路间有相对运动的电路，但在研究电磁关

系时，许多研究和分析静止电路的基本定律和法则仍是适用的。

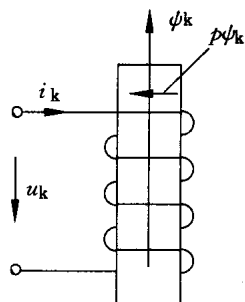


图 1-1 电路中 ψ_k 、 i_k 、 u_k 正方向的规定

现以一个最简单的电路来阐明如何根据最基本的电磁感应定律、基尔霍夫定律列写电路的基本方程式。众所周知，电路中电流、电压正方向的规定不同，得出的磁链、电压方程式中各项的符号亦不同，特别在研究电机瞬态问题的有关书籍和文献中，常有不同的正方向规定。因此，必须掌握在规定的正方向下，用最基本的定律来正确地列写电路方程式的方法。现以图 1-1 的电路为例加以说明。

根据惯例，一个线圈轴线的正向即是该线圈磁场轴线的正方向，如果电流、电压的正方向规定方法为：①产生正向磁链的电流方向为电流的正方向；②回路两端的电压正方向与电流正方向如图 1-1 所示，即符合电动机惯例。根据上述正方向的规定，可写出该回路的磁链方程式为

$$\psi_k = L_k i_k \quad (1-1)$$

从最基本的电磁感应定律可知，当磁链 ψ_k 正向增长时，感生电动势 $p\psi_k$ 的方向是阻止磁链增长的，其方向如图 1-1 所示，这是电位升高的方向（如果画出电压降落的方向则应相反），也即与电流正方向相反，因此可画出其等效电路图如图 1-2 所示。根据基尔霍夫第二定律可写出其电压方程式为

$$u_k = p\psi_k + i_k r_k \quad (1-2)$$

式中 u_k 、 ψ_k 、 r_k 、 i_k ——回路端电压、磁链、电阻和电流；

p ——算子， $p = \frac{d}{dt}$ 。

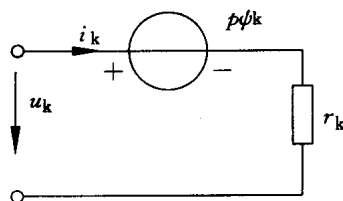
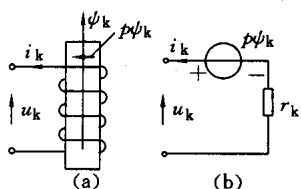


图 1-2 等效电路



(a)

图 1-3 ψ_k 、 i_k 、 u_k 正方向的规定及等效电路之一

(a) ψ_k 、 i_k 、 u_k 正方向的规定；

(b) 等效电路图

如果改变电流正方向的规定，即规定产生负值磁链的电流方向为正方向，而电压正方向仍按电动机惯例加以规定，如图 1-3 (a) 所示，则磁链方程式 (1-1) 将变为

$$\psi_k = -L_k i_k \quad (1-3)$$

根据电磁感应定律可知，当 ψ_k 正向增长时，感生电动势 $p\psi_k$ 的方向仍是阻止磁链增长，如图 1-3 (a) 所示，但因电流正方向已改变，故电动势的方向与电流的正方向相同，画出其等效电路图如图 1-3 (b) 所示。根据基尔霍夫第二定律可写出电压方程式

$$u_k = -p\psi_k + i_k r_k \quad (1-4)$$

分别比较磁链方程式 (1-1) 与式 (1-3) 及电压方程式 (1-2) 和式 (1-4) 可知：当改变电流正方向的规定而仍按电动机惯例规定电压的正方向时，磁链与电流间关系式的符号将改变，电压方程式中与磁链有关的项即磁链变化率项的符号也将发生改变。

如果电流的正方向规定不变，仍如图 1-1 所示，即产生正向磁链的电流方向规定为电

流的正方向, 仅改变电压正方向的规定, 即回路电压正方向与电流正方向改为如图 1-4 (a) 所示, 即符合电源 (发电机) 惯例。与图 1-1 相比, 仅改变了电压正方向的规定, 显然, 该回路的磁链方程式不变, 仍为式 (1-1)。此时相应的等效电路图则如图 1-4 (b) 所示。根据基尔霍夫第二定律写出的电压方程为

$$u_k = -p\psi_k - i_k r_k \quad (1-5)$$

比较电压方程式 (1-2) 与式 (1-5) 可知: 当电流的正方向不变, 仅改变电压正方向的规定时, 电压方程式等式右边各项的符号均改变。

以上讨论了在规定的电流、电压正方向下, 根据电磁感应定律和基尔霍夫第二定律列写磁链方程式、电压方程式的方法。

在分析凸极同步电机运行问题时, 首先需要列出定子和转子绕组的电压方程式和磁链方程式。在列写方程式前, 为了简化分析, 作出如下假定:

- (1) 电机铁磁部分的磁路为线性, 即不计饱和、剩磁、磁滞和涡流的影响;
- (2) 电机的定、转子齿槽效应应用气隙的卡氏系数表征, 即认为定、转子表面光滑, 只是气隙增大了一些;
- (3) 定子三相绕组对称, 转子结构分别对直轴和交轴对称。

由于假定磁路为线性, 可应用叠加原理, 即某绕组交链的总磁链等于各绕组电流分别产生并与之交链的磁链的代数和。实际电机饱和的影响, 可根据电机的运行条件, 近似地采用选择适当参数值的方法加以修正。

一、凸极同步电机的电压方程式

在列写方程式之前, 必须规定有关各量的正方向。图 1-5 示出一台三相凸极同步电机, 图中标出了各量的正方向。

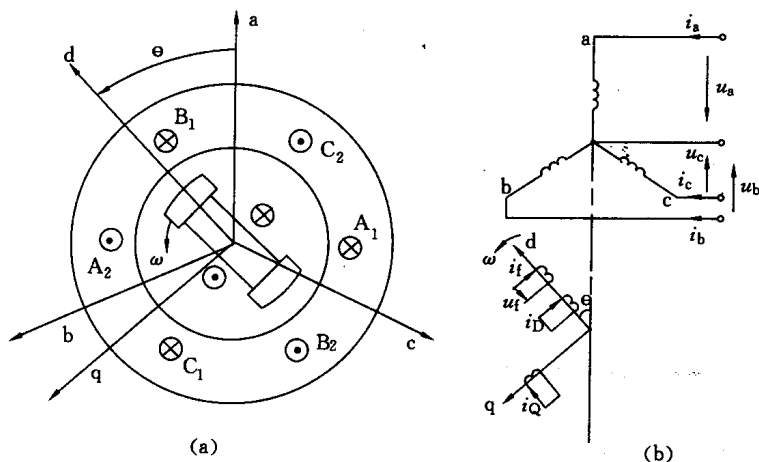


图 1-5 凸极同步电机各量正方向的规定

(a) 同步电机绕组轴线、电流的正方向; (b) 同步电机各量的正方向

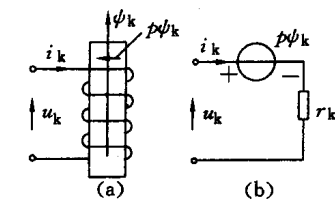


图 1-4 ψ_k 、 i_k 、 u_k 正方向规定
及等效电路之二
(a) ψ_k 、 i_k 、 u_k 正方向的规定;
(b) 等效电路图

(一) 定子绕组

如图 1-5 所示, a、b、c 轴线分别表示定子 a、b、c 三相实际绕组轴线的正方向, 也即各相绕组磁链的正方向; 产生正向磁链的电流方向为电流的正方向; 电压正方向与电流正方向符合电动机惯例。

在上述规定的正方向下, 如前所述可写出定子 a、b、c 三相绕组的电压方程式为

$$\left. \begin{aligned} u_a &= p\psi_a + r_s i_a \\ u_b &= p\psi_b + r_s i_b \\ u_c &= p\psi_c + r_s i_c \end{aligned} \right\} \quad (1-6)$$

式中 u 、 ψ 、 i ——端电压、磁链、电流的瞬时值;

a、b、c——表示 a 相、b 相、c 相绕组量的下标;

r_s ——定子绕组相电阻。

(二) 励磁绕组

选择转子磁极中心线为直轴 (纵轴) d 轴, 其正方向如图 1-5 (a) 所示, 交轴 (横轴) q 轴沿转子旋转方向领先直轴 $\pi/2$ 弧度。d 轴的正方向也即励磁绕组的磁链的正方向; 规定产生正向磁链的电流方向为励磁绕组电流的正方向; 端电压的正方向符合电动机惯例, 如图 1-5 (b) 所示。

根据上面所规定的各量的正方向, 可写出励磁绕组的电压方程式

$$u_f = p\psi_f + r_f i_f \quad (1-7)$$

式中 u_f 、 ψ_f 、 i_f ——励磁绕组的端电压、磁链、电流的瞬时值;

r_f ——励磁绕组的电阻。

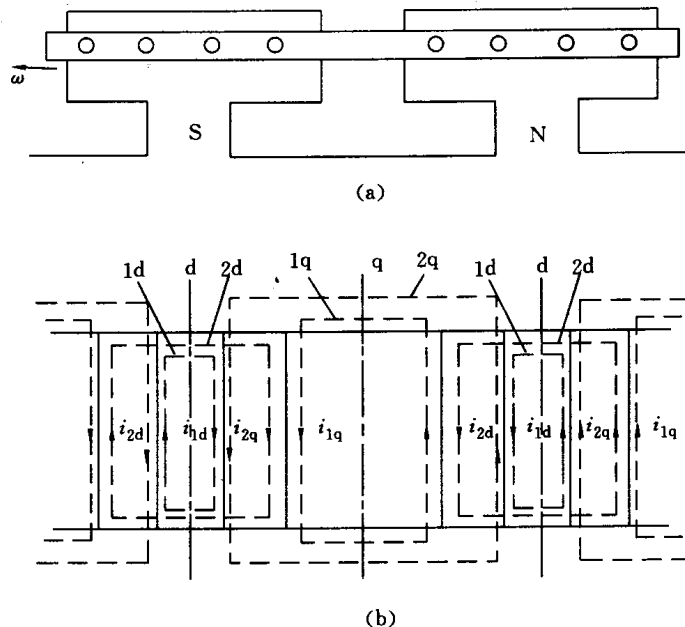


图 1-6 凸极同步电机的阻尼绕组

(a) 阻尼绕组结构图; (b) 阻尼绕组电流回路图

(三) 阻尼绕组

凸极同步电机的阻尼绕组一般由安装在磁极极靴上的阻尼条和阻尼环组成，阻尼条由阻尼环部分短接或全部短接起来，阻尼条的分布对直轴或交轴而言通常都是对称的。这些阻尼条形成一个网状的电路，其中，电流回路的选择方法可以是任意的，但为了方便起见，电流回路的选取一般均对称于直轴或交轴。图 1-6 表示每极有四根阻尼条的阻尼绕组，其中回路 1d、2d 对称于直轴，其回路电流分别为 i_{1d} 、 i_{2d} ，回路 1q、2q 对称于交轴，其回路电流分别为 i_{1q} 、 i_{2q} ，阻尼条中的实际电流为相应的直轴和交轴回路电流的代数和。当只考虑气隙磁场空间分布的基波时，这种划分电流回路的优点是由于直轴回路及交轴回路在空间位置上互差 $\pi/2$ 电弧度，而转子结构对直轴或交轴又是对称的，因而在直轴回路及交轴回路之间没有互感及互电阻，进而可把实际的阻尼绕组看成是两组假想的阻尼绕组，即直轴阻尼绕组及交轴阻尼绕组。

在实际的凸极同步电机中，常具有多个阻尼条，对应地也有多个直轴阻尼回路 1d, 2d, ..., nd 和多个交轴阻尼回路 1q, 2q, ..., mq 等。按前述励磁绕组各量正方向的规定方法来规定阻尼绕组的正方向，则直轴及交轴阻尼绕组的电压方程式为

$$\left. \begin{aligned} 0 &= p\psi_{1d} + r_{11d}i_{1d} + r_{12d}i_{2d} + \dots + r_{1nd}i_{nd} \\ 0 &= p\psi_{2d} + r_{21d}i_{1d} + r_{22d}i_{2d} + \dots + r_{2nd}i_{nd} \\ &\vdots \\ 0 &= p\psi_{nd} + r_{n1d}i_{1d} + r_{n2d}i_{2d} + \dots + r_{nnd}i_{nd} \\ 0 &= p\psi_{1q} + r_{11q}i_{1q} + r_{12q}i_{2q} + \dots + r_{1mq}i_{mq} \\ 0 &= p\psi_{2q} + r_{21q}i_{1q} + r_{22q}i_{2q} + \dots + r_{2mq}i_{mq} \\ &\vdots \\ 0 &= p\psi_{mq} + r_{m1q}i_{1q} + r_{m2q}i_{2q} + \dots + r_{mmq}i_{mq} \end{aligned} \right\} \quad (1-8)$$

式中

ψ 、 i ——回路的磁链和电流的瞬时值；

1d、2d、...、nd、1q、2q、...、mq——表示所属回路；

r_{ij} ——当 $i=j$ 时，为 i 回路的电阻；当 $i \neq j$ 时，为 i 回路与 j 回路的互电阻。

上述方法是根据阻尼条的实际分布情况来划分阻尼回路的。根据式 (1-8) 可将各阻尼回路的电流、磁链都分别计算出来，进一步可给出每一根阻尼条的实际电流，但是计算工作量较大。在不需研究阻尼绕组内部情况的条件下，可将实际的直轴及交轴的多个回路的阻尼绕组分别用一个直轴及交轴的等效阻尼绕组 D 和 Q 来代替，从而大为简化分析计算工作。这样虽会给计算带来一些误差，但在工程计算中是允许的，也是常用的一种方法。简化的直轴及交轴等效阻尼绕组的电压方程式为

$$\left. \begin{aligned} 0 &= p\psi_D + r_D i_D \\ 0 &= p\psi_Q + r_Q i_Q \end{aligned} \right\} \quad (1-9)$$

式中 ψ 、 i 、 r ——磁链、电流及电阻；

D、Q——表示所属回路

将三相凸极同步电机在 a、b、c 相坐标系下的电压方程式 (1-6)、式 (1-7) 及式

(1-9) 用矩阵形式表示为

$$U = p\Psi + RI \quad (1-10)$$

式中

$$\begin{aligned} U &= [u_a \ u_b \ u_c \ | \ u_f \ 0 \ 0]^T = [U_{abc} \ U_{fDQ}]^T \\ I &= [i_a \ i_b \ i_c \ | \ i_f \ i_D \ i_Q]^T = [I_{abc} \ I_{fDQ}]^T \\ \Psi &= [\psi_a \ \psi_b \ \psi_c \ | \ \psi_f \ \psi_D \ \psi_Q]^T = [\Psi_{abc} \ \Psi_{fDQ}]^T \\ R &= \begin{bmatrix} r_s & & & & & \\ & r_s & & & & \\ & & r_s & & & \\ \hline & & & r_f & & \\ & & & & r_D & \\ & & & & & r_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{abc} & 0 \\ 0 & R_{fDQ} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

从上述绕组的电压方程式可看出，每个电压方程式均由两项构成，一项为与绕组交链的总磁链随时间变化而产生的感应电动势 $p\psi$ ；另一项为电流通过绕组电阻产生的电阻压降 ri 。上述绕组的特点是不管绕组本身是旋转的或静止的，但绕组的轴线与构成该绕组的线圈元件间相对静止。这类绕组轴线与构成该绕组的线圈元件间相对静止的绕组称为“静止绕组”。

二、磁链方程式

上面电压方程式中，与每个绕组交链的总磁链为绕组自身电流产生的磁通与该绕组自身相交链的自感磁链，及其他绕组电流产生的磁通与该绕组相交链的互感磁链的代数和。这些磁链与电流及电感系数的关系用矩阵形式表示为

$$\begin{bmatrix} \psi_a \\ \psi_b \\ \psi_c \\ \hline \psi_f \\ \psi_D \\ \psi_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{aa} & M_{ab} & M_{ac} & M_{af} & M_{aD} & M_{aQ} \\ M_{ba} & L_{bb} & M_{bc} & M_{bf} & M_{bD} & M_{bQ} \\ M_{ca} & M_{cb} & L_{cc} & M_{cf} & M_{cD} & M_{cQ} \\ \hline M_{fa} & M_{fb} & M_{fc} & L_f & M_{fD} & 0 \\ M_{Da} & M_{Db} & M_{Dc} & M_{Df} & L_D & 0 \\ M_{Qa} & M_{Qb} & M_{Qc} & 0 & 0 & L_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ \hline i_f \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} \quad (1-11)$$

式中 L 为自感系数， M 为互感系数，各下标字母分别表示所属绕组。相应的互感系数是可逆的，即

$$\begin{aligned} M_{ab} &= M_{ba}, & M_{bc} &= M_{cb}, & M_{ca} &= M_{ac}, \\ M_{af} &= M_{fa}, & M_{bf} &= M_{fb}, & M_{cf} &= M_{fc}, \\ M_{aD} &= M_{Da}, & M_{bD} &= M_{Db}, & M_{cD} &= M_{Dc}, \\ M_{aQ} &= M_{Qa}, & M_{bQ} &= M_{Qb}, & M_{cQ} &= M_{Qc}, \\ M_{fD} &= M_{Df} \end{aligned}$$

式 (1-11) 可写成

$$\begin{bmatrix} \Psi_{abc} \\ \Psi_{fDQ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{ss} & L_{sr} \\ L_{rs} & L_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{abc} \\ I_{fDQ} \end{bmatrix} \quad (1-12)$$

式中 L_{ss} 、 L_{rr} ——定、转子电感系数矩阵；

L_{sr} 、 L_{rs} ——定、转子互感系数矩阵。

此外，由于交轴阻尼绕组 Q 与直轴阻尼绕组 D 和励磁绕组 f 的轴线在空间上相差 $\pi/2$ 电弧度，因而交轴阻尼绕组 Q 与直轴阻尼绕组 D 及励磁绕组 f 间的互感系数为零。

式 (1-11) 中的各个自感及互感系数是研究其运行状态和行为的重要依据，了解它们的物理意义和特征十分重要，下面将分别对各类电感系数进行讨论。

第三节 凸极同步电机的自感系数和互感系数

从电机学中可知，线圈的自感系数为线圈内通过单位电流所产生的自感磁链，其大小与该线圈匝数的平方及自感磁通所经磁路磁导的乘积成正比；两个线圈之间的互感系数为线圈1内通过单位电流所产生的与线圈2相交链的互感磁链，其大小与两线圈匝数的乘积成正比，并与互感磁通所经磁路的磁导成正比。在凸极同步电机中，当转子旋转时，由于部分绕组之间的相对位置或对应磁路的磁导随转子位置改变而变化，因之，相应的自感系数或互感系数将是转子位置角 θ 的函数，即是时间 t 的函数。下面以凸极同步电机为例，具体分析各绕组自感系数和互感系数的变化规律。

一、定子绕组自感系数

首先分析定子 a 相绕组的自感系数 L_{aa} 。当绕组匝数一定时， L_{aa} 的大小主要决定于磁路磁导的大小。当 a 相绕组轴线与磁极轴线 d 轴重合，即 $\theta=0$ 时， a 相绕组磁场对应磁路的磁导最大，因而自感系数亦达到最大值 L_{aad} ；当转子旋转到 $\theta=\pi/2$ 电弧度时， a 相轴线与转子 q 轴重合，对应磁路的磁导最小，自感系数为最小值 L_{aaq} ；当转子位置角 $\theta=\pi$ 电弧度时，对应磁路的磁导和自感系数又达到最大值。由于转子分别对 d 轴、 q 轴对称，自感系数 L_{aa} 以 π 电弧度为一个周期，因此， a 相绕组自感系数随 θ 角的变化用余弦级数形式表达如下

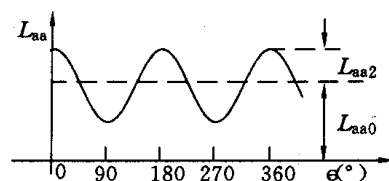


图1-7 a 相绕组自感系数

$$\left. \begin{aligned} L_{aa} &= L_{aa0} + L_{aa2}\cos 2\theta + L_{aa4}\cos 4\theta + \dots \\ \text{同理可得} \quad L_{bb} &= L_{aa0} + L_{aa2}\cos 2\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + L_{aa4}\cos 4\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + \dots \\ L_{cc} &= L_{aa0} + L_{aa2}\cos 2\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + L_{aa4}\cos 4\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (1-13)$$

上式说明自感系数的计算是很复杂的，详细的计算方法可参考有关文献。就通常设计的电机而言，只需考虑气隙的基波磁动势和气隙的基波磁场，这样可使电感系数计算大为简化，带来的误差在工程计算中是允许的。下面进一步分析仅考虑基波磁动势和基波磁场时 a 相自感系数 L_{aa} 的表达式。

a 相绕组的自感系数 L_{aa} 由与不通过气隙的漏磁场对应的漏电感 L_{aal} 和与通过气隙的主磁场对应的主电感 L_{aa0} 构成。 L_{aal} 仅与漏磁场的分布情况及磁路性质有关，而与转子位置无

关，一般是一常数。主电感 $L_{aa\delta}$ 由于 a 相主磁场磁路的磁导随转子位置改变而变化，因而是位置角 θ 的函数。在计算自感磁链时，需按以下步骤进行：

当 a 相绕组有效匝数为 W 时，通过单位电流产生的基波磁动势为 $F_{a1}=W$ ，其轴线即为 a 轴，首先将磁动势分解到磁导为恒值的直轴和交轴上，即 $F_{a1d}=W\cos\theta$ ； $F_{a1q}=-W\sin\theta$ 。由于直轴、交轴磁导为恒值，分别为 Λ_d 、 Λ_q ，则 a 相磁动势在直轴及交轴产生的基波磁通大小分别为

$$\phi_d = F_{a1d}\Lambda_d = W\Lambda_d\cos\theta; \phi_q = F_{a1q}\Lambda_q = -W\Lambda_q\sin\theta$$

它们与 a 相绕组交链的自感磁链等于相绕组的有效匝数 W 与直轴、交轴磁通在 a 轴上的分量乘积的代数和，即

$$\Psi_{aa\delta} = W(\phi_d\cos\theta - \phi_q\sin\theta) = W^2\Lambda_d\cos^2\theta + W^2\Lambda_q\sin^2\theta$$

a 相绕组通过单位电流时产生的通过气隙的自感磁链即主电感的表达式为

$$L_{aa\delta} = L_{aad}\cos^2\theta + L_{aaq}\sin^2\theta = \frac{1}{2}(L_{aad} + L_{aaq}) + \frac{1}{2}(L_{aad} - L_{aaq})\cos 2\theta$$

a 相绕组的自感系数 L_{aa} 为漏电感 L_{aal} 与主电感 $L_{aa\delta}$ 之和，即

$$\left. \begin{aligned} L_{aa} &= L_{aal} + L_{aa\delta} = L_{aa0} + L_{aa2}\cos 2\theta \\ L_{bb} &= L_{aa0} + L_{aa2}\cos 2\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ L_{cc} &= L_{aa0} + L_{aa2}\cos 2\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned} \right\} \quad (1-14)$$

式中

$$L_{aa0} = L_{aal} + \frac{1}{2}(L_{aad} + L_{aaq})$$

$$L_{aa2} = \frac{1}{2}(L_{aad} - L_{aaq})$$

比较式 (1-14) 与式 (1-13) 可知，当只考虑空间基波磁场时，凸极同步电机三相定子绕组的自感系数只有常数项和位置角 θ 的二次项，其他高次谐波项不存在，这将给以后的分析计算带来很大的方便（参阅第二章）。a 相绕组自感系数 L_{aa} 随 θ 角的变化曲线如图 1-7 所示。

隐极同步电机和感应电机都具有均匀的空气隙，故有

$$L_{aad} = L_{aaq}, L_{aa} = L_{bb} = L_{cc} = L_{aa0}$$

即各相绕组的自感系数与位置角无关，为一恒值常数。

二、定子两相绕组间的互感系数

定子三相绕组结构相同，但绕组轴线在空间上互差 $2\pi/3$ 电弧度，a 相绕组通过单位电流所产生的与 b 相绕组相交链的互感磁链，即为 a、b 相的互感系数 M_{ab} 。互感系数也由两部分构成，一部分为与不通过气隙的漏磁通相对应的互漏感系数 $-M_{abl}$ ；另一部分为与通过气隙的主磁通相对应的互感系数 M_{abb} 。前者为恒值常数，后者随转子位置改变而变化。上面已求出仅考虑空间基波磁场分布时，由 a 相绕组单位电流产生的直轴磁通 ϕ_d 及交轴磁通 ϕ_q ，它们与 b 相绕组相交链的互感磁链，等于相绕组有效匝数 W 与它们在 b 轴上分量乘积的代数和，即

$$\begin{aligned}\psi_{ab\delta} &= W \left[\phi_d \cos \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) \right] - W \left[\phi_q \sin \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) \right] \\ &= W^2 \Lambda_d \cos \theta \cos \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) + W^2 \Lambda_q \sin \theta \sin \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right)\end{aligned}$$

所以, a 相绕组通过单位电流时产生的通过气隙的磁通与 b 相绕组相交链的互感磁链, 即 a、b 相间的互感系数

$$\begin{aligned}M_{ab\delta} &= L_{aad} \cos \theta \cos \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) + L_{aaq} \sin \theta \sin \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) \\ &= -\frac{L_{aad} + L_{aaq}}{4} + \frac{L_{aad} - L_{aaq}}{2} \cos \left(2\theta - \frac{2\pi}{3} \right)\end{aligned}$$

a、b 相间的互感系数 M_{ab} 应为互漏电感系数 $-M_{abl}$ 与互电感系数 $M_{ab\delta}$ 之和, 即

$$\left. \begin{aligned}M_{ab} &= -M_{abl} - \frac{L_{aad} + L_{aaq}}{4} + \frac{L_{aad} - L_{aaq}}{2} \cos \left(2\theta - \frac{2\pi}{3} \right) \\ &= -M_{ab0} + L_{aa2} \cos 2 \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) \\ M_{bc} &= -M_{ab0} + L_{aa2} \cos 2\theta \\ M_{ca} &= -M_{ab0} + L_{aa2} \cos 2 \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right)\end{aligned} \right\} \quad (1-15)$$

同理可得

$$\text{式中 } M_{ab0} = M_{abl} + \frac{L_{aad} + L_{aaq}}{4} \approx \frac{L_{aa0}}{2}。$$

由于三相绕组轴线间夹角为 $2\pi/3$ 电弧度, 其值大于 $\pi/2$ 电弧度, 两相间互感磁链为负值, 故互感系数均为负值。定子绕组 b、c 相间的互感系数 M_{bc} 随 θ 角变化的曲线如图 1-8 所示。 $\theta=0$ 时, b、c 相间的互感系数的绝对值最小; $\theta=\pi/2$ 电弧度时, 互感系数的绝对值最大。定子两相间的互感系数的变化周期与定子相绕组自感系数的周期一样, 为 π 电弧度。

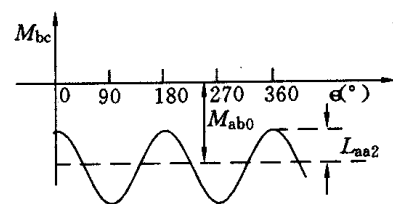


图 1-8 b、c 相绕组间的互感系数

当考虑气隙空间磁场的高次谐波时, 除 2θ 的余弦项外, 尚存在 4θ , 6θ ... 等的余弦项, 即

$$\left. \begin{aligned}M_{ab} &= -M_{ab0} + M_{ab2} \cos 2 \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) + M_{ab4} \cos 4 \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) + \dots \\ M_{bc} &= -M_{ab0} + M_{ab2} \cos 2\theta + M_{ab4} \cos 4\theta + \dots \\ M_{ca} &= -M_{ab0} + M_{ab2} \cos 2 \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) + M_{ab4} \cos 4 \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) + \dots\end{aligned} \right\} \quad (1-16)$$

三、定、转子绕组间的互感系数

(一) 定子绕组与励磁绕组间的互感系数

励磁绕组通过单位电流时所产生的与定子 a 相绕组交链的互感磁链即为定子绕组与励磁绕组间的互感系数 M_{af} 。当励磁绕组 d 轴与 a 相绕组轴线重合 ($\theta=0$) 时, 互感磁链为正的最大值; 转子 d 轴旋转 $\pi/2$ 电弧度后, 即 $\theta=\pi/2$ 电弧度时, 两轴线正交, 互感磁链为零; 当 $\theta=\pi$ 电弧度时, 互感磁链为负的最大值; $\theta=3\pi/2$ 电弧度时, 互感磁链又为零。因此, 在一般情况下有

$$\left. \begin{aligned} M_{af} &= M_{fa} = M_{af1}\cos\theta + M_{af3}\cos3\theta + \dots \\ M_{bf} &= M_{fb} = M_{af1}\cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + M_{af3}\cos3\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + \dots \\ M_{cf} &= M_{fc} = M_{af1}\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + M_{af3}\cos3\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (1-17)$$

当只考虑基波磁通时，显然互感系数只有基波分量，因此，可写成

$$\left. \begin{aligned} M_{af} &= M_{fa} = M_{af1}\cos\theta \\ M_{bf} &= M_{fb} = M_{af1}\cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ M_{cf} &= M_{fc} = M_{af1}\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned} \right\} \quad (1-18)$$

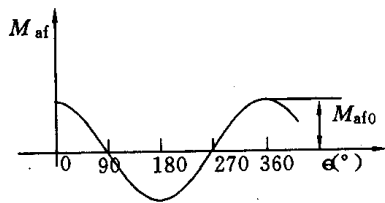


图 1-9 定子 a 相绕组与励磁绕组间的互感系数

及式 (1-18) 类似，即

$$\left. \begin{aligned} M_{aD} &= M_{Da} = M_{aD1}\cos\theta + M_{aD3}\cos3\theta + \dots \\ M_{bD} &= M_{Db} = M_{aD1}\cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + M_{aD3}\cos3\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + \dots \\ M_{cD} &= M_{Dc} = M_{aD1}\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + M_{aD3}\cos3\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (1-19)$$

式中 M_{aD1} ——定子 a 相绕组轴线与直轴阻尼绕组 D 轴线重合时，所具有的最大互感系数。

当气隙磁场为正弦分布时互感系数只有基波分量。

(三) 定子绕组与交轴阻尼绕组间的互感系数

由于交轴在直轴前 $\pi/2$ 电弧度，以 $\theta + \pi/2$ 代换式 (1-19) 中的 θ 角，并考虑到直轴与交轴的磁导不同，则得定子绕组与交轴阻尼绕组间的互感系数为

$$\left. \begin{aligned} M_{aQ} &= M_{Qa} = \left(M_{aQ1}\sin\theta + M_{aQ3}\sin3\theta + \dots \right) \\ M_{bQ} &= M_{Qb} = \left(M_{aQ1}\sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + M_{aQ3}\sin3\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + \dots \right) \\ M_{cQ} &= M_{Qc} = \left(M_{aQ1}\sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + M_{aQ3}\sin3\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + \dots \right) \end{aligned} \right\} \quad (1-20)$$

式中 M_{aQ1} ——定子 a 相绕组轴线与交轴阻尼绕组 Q 轴线重合时所具有的最大互感系数。

当气隙磁场为正弦分布时，互感系数只有基波分量。

四、转子绕组的自感系数

转子绕组通过单位电流时产生的自感磁链即为转子绕组的自感系数。由于定子铁心为圆环形，转子上各绕组产生的自感磁链大小与转子位置无关，均为恒值。励磁绕组自感系数由两部分组成，即

$$L_f = L_{fl} + L_{f\delta} \quad (1-21)$$

式中 L_{fl} ——对应于励磁绕组漏磁通的漏电感系数；

$L_{f\delta}$ ——对应于励磁绕组气隙磁通的主电感系数。

直轴阻尼绕组和交轴阻尼绕组的自感系数分别为

$$\left. \begin{aligned} L_D &= L_{Dl} + L_{D\delta} \\ L_Q &= L_{Ql} + L_{Q\delta} \end{aligned} \right\} \quad (1-22)$$

式中 L_{Dl} 、 L_{Ql} ——对应于 D 、 Q 绕组漏磁通的漏电感系数；

$L_{D\delta}$ 、 $L_{Q\delta}$ ——对应于 D 、 Q 绕组气隙磁通的主电感系数。

五、转子绕组间的互感系数

由于转子分别对直轴和交轴对称，且两轴正交，故交轴阻尼绕组 Q 与直轴阻尼绕组 D 、励磁绕组 f 间的互感系数为零。绕组 D 与绕组 f 同在直轴上，它们之间的互感系数为恒值

$$M_{fD} = M_{Df} = M_{fDl} + M_{fD\delta} \quad (1-23)$$

式中 M_{fDl} ——与互漏磁通对应的互漏感系数；

$M_{fD\delta}$ ——与气隙磁通对应的互感系数。

以上讨论的凸极同步电机电感系数，从变化规律上看，可分为三种类型：

(1) 定子绕组的自感系数和互感系数。如式 (1-14)、式 (1-15) 所示，其变化周期为 π ，引起这类电感系数变化的原因是转子直轴和交轴的磁导不同。当电机转子为圆柱形时，如隐极同步电机及感应电机，转子直轴和交轴的磁导相同，则电感系数 $L_{aad} = L_{aaq}$ ，定子绕组的自感系数和互感系数均为常数，与转子位置角 θ 无关。

(2) 定子与转子绕组间的互感系数。如式 (1-18)、式 (1-19)、式 (1-20) 所示，其变化周期为 2π 。引起这类电感系数变化的原因是定子绕组轴线与转子绕组轴线间有相对运动，导致互感磁链周期性变化。因此，即使在隐极同步电机和感应电机中，这类互感系数仍是转子位置角 θ 的函数。

(3) 转子绕组的自感系数与互感系数。由于定子铁心为圆环形，对转子直轴或交轴而言，磁导是不变的，且转子绕组轴线间无相对运动。上述引起电感系数变化的两个原因均不存在，故转子绕组的自感系数与互感系数均为常数。

第四节 交流电机在相坐标系中的状态方程式

将磁链方程式 (1-11) 代入电压方程式 (1-10)，即可得出交流电机在相坐标系中的电压方程式：

$$\begin{bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_c \\ u_f \\ u_D \\ u_Q \end{bmatrix} = p \begin{bmatrix} L_{aa} & M_{ab} & M_{ac} & M_{af} & M_{aD} & M_{aQ} \\ M_{ba} & L_{bb} & M_{bc} & M_{bf} & M_{bD} & M_{bQ} \\ M_{ca} & M_{cb} & L_{cc} & M_{cf} & M_{cD} & M_{cQ} \\ M_{fa} & M_{fb} & M_{fc} & L_f & M_{fD} & 0 \\ M_{Da} & M_{Db} & M_{Dc} & M_{Df} & L_D & 0 \\ M_{Qa} & M_{Qb} & M_{Qc} & 0 & 0 & L_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_f \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} r_s & & & & \\ & r_s & & & \\ & & r_s & & \\ & & & r_f & \\ & 0 & & & r_D \\ & & & & & r_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_f \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix}$$

即

$$U = p(LI) + RI \quad (1-24)$$

式中各绕组的自感系数、互感系数见式 (1-13)、式 (1-16)、式 (1-17)、式 (1-19) ~ 式 (1-23)。

这是一组表述电机基本电磁关系的时变系数的微分方程组，在已知电感系数和电阻的情况下，利用这组方程就可以求解恒速运转时电机的瞬态和稳态运行问题。由于定子绕组电感系数和定、转子绕组间的互感系数均为位置角 θ 的函数，即为时间的函数，因此，在求解电压方程式 (1-24) 时，不能采用解析方法，需采用数值解法。用数值法求解微分方程组，可将式 (1-24) 改写为状态方程组。状态方程是一组一阶的微分方程式。在电机分析中利用状态变量法时，一般可选取各绕组回路中的电流或磁链作为状态变量，这些变量都是不能突变的量。这里选取定子三相电流 i_a 、 i_b 、 i_c ，及转子绕组电流 i_f 、 i_D 、 i_Q 为状态变量，则电压方程式 (1-24) 可写成

$$U = pLI + RI = (pL)I + LpI + RI \quad (1-25)$$

式中 pL ——电感系数矩阵的导数。

将上式用状态方程组的标准形式表示如下

$$\dot{I} = AI + BU \quad (1-26)$$

式中

$$A = -L^{-1}[D + R]$$

$$D = pL$$

$$B = L^{-1}$$

\dot{I} ——电流对时间的导数。

当需要考虑电感系数的高次谐波项时，由于定子绕组的自感系数和互感系数，及定、转子绕组间的互感系数均为位置角 θ 的无穷三角级数，系数矩阵 L 及其导数 D 的计算工作量很大，用手工计算是不可能的，因而随着计算机技术的发展和广泛应用，可利用计算机求解上述状态方程组的数值解。

相坐标系下导出的凸极同步电机的电压方程式，只要作相应的变化，就可适用于隐极同步电机和感应电机。隐极同步电机与凸极同步电机的差别是隐极同步电机的气隙为均匀的。感应电机与隐极同步电机相比，定子结构都是相同的，气隙也是均匀的，只是感应电机转子绕组中没有励磁绕组，感应电机的短路转子绕组相当于同步电机的阻尼绕组。所以从凸极同步电机入手推导的方程式，只需作很小的变动，就可以方便地用于隐极同步电机和感应电机。

相坐标系统下交流电机的电压方程式的特点是可以考虑空间气隙磁场谐波，适用于计算磁场谐波很强的电机。利用这些方程，可求解恒速运转时的电机瞬态和稳态运行问题。如果再加上电机的电磁转矩和转子运动方程，电机变速运转时的机电过渡过程也可求解。下节将对电机的电磁转矩和转子运动方程加以讨论。

第五节 交流电机电磁转矩和转子运动方程式

电磁转矩是电机进行机电能量转换的关键量，也是表征电机性能的重要量。而转子运动方程是根据牛顿定律写出的作用在电机转子上的转矩之间的平衡方程式。当考虑转子转速变化时，除上述电压方程式外，尚需增加转子运动方程式联立求解。下面先讨论交流电机的电磁转矩。

设交流电机的定子绕组有 m 个回路，以下标“sm”表示定子第 m 个回路；转子绕组有 n 个回路，以下标“rn”表示转子绕组的第 n 个回路。由于假定磁路为线性，则电机的总磁场能量为

$$W_m = \frac{1}{2}(\psi_{s1}i_{s1} + \psi_{s2}i_{s2} + \cdots + \psi_{sm}i_{sm} + \psi_{r1}i_{r1} + \psi_{r2}i_{r2} + \cdots + \psi_{rn}i_{rn}) \quad (1-27)$$

式中 W_m ——总磁场能量；

ψ 、 i ——回路磁链、电流的瞬时值。

式中各回路的磁链分别为

$$\left. \begin{aligned} \psi_{s1} &= L_{s1}i_{s1} + \cdots + M_{s1sm}i_{sm} + M_{s1r1}i_{r1} + \cdots + M_{s1rn}i_{rn} \\ &\vdots \\ \psi_{sm} &= M_{sms1}i_{s1} + \cdots + L_{sm}i_{sm} + M_{smr1}i_{r1} + \cdots + M_{smrn}i_{rn} \\ \psi_{r1} &= M_{r1s1}i_{s1} + \cdots + M_{r1sm}i_{sm} + L_{r1}i_{r1} + \cdots + M_{r1rn}i_{rn} \\ &\vdots \\ \psi_{rn} &= M_{rns1}i_{s1} + \cdots + M_{rnsn}i_{sn} + M_{rnrl}i_{r1} + \cdots + L_{rn}i_{rn} \end{aligned} \right\} \quad (1-28)$$

式中 L 、 M ——回路自感系数、回路间互感系数。

用矩阵形式表示则为

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{2} [i_{s1} \cdots i_{sm} i_{r1} \cdots i_{rn}] \begin{bmatrix} L_{s1} & \cdots & M_{s1sm} & M_{s1r1} & \cdots & M_{s1rn} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_{sms1} & \vdots & L_{sm} & M_{smr1} & \vdots & M_{smrn} \\ M_{r1s1} & \vdots & M_{r1sm} & L_{r1} & \vdots & M_{r1rn} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ M_{rns1} & & M_{rnsn} & M_{rnrl} & \cdots & L_{rn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{s1} \\ \vdots \\ i_{sm} \\ i_{r1} \\ \vdots \\ i_{rn} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} I^T L I \end{aligned} \quad (1-29)$$

根据虚位移原理，当保持各回路电流不变时，有

$$f = \left. \frac{\partial W_m}{\partial g} \right|_{i=\text{const}} \quad (1-30)$$

式中 f ——广义力；
 g ——广义位移。

若视广义位移为转子绕组参考轴线领先于定子绕组参考轴线的机械角度 γ ，则广义力即为电机的电磁转矩 T_{em} ，有

$$T_{em} = \left. \frac{\partial W_m}{\partial \gamma} \right|_{i=\text{const}} = \left. \frac{\partial \left(\frac{1}{2} I^T L I \right)}{\partial \gamma} \right|_{i=\text{const}} = \frac{1}{2} I^T \frac{\partial L}{\partial \gamma} I \quad (1-31)$$

若电机的极对数为 p ， θ 为转子绕组参考轴线领先于定子绕组参考轴线的电角度， γ 为同步电机即为 d 轴领先于 a 轴的位置角，则机械角度 γ 与电角度 θ 间的关系有

$$\gamma = \theta / p \quad (1-32)$$

因而电机的电磁转矩又可写为

$$T_{em} = \frac{p}{2} I^T \frac{\partial L}{\partial \theta} I \quad (1-33)$$

在建立转子运动方程时，按电动机惯例选用电磁转矩的正方向，它的正方向与转子正常旋转方向一致；如图1-10所示。其中 T_{em} 为电动机的电磁转矩，是驱动转矩； T_m 为负载的机械转矩，是制动转矩；剩余转矩 $T_{em} - T_m$ 则为加速转矩。由此可得转子运动方程为

$$J \frac{d\Omega}{dt} = T_{em} - T_m \quad (1-34)$$

式中 J ——转动惯量， kgm^2 ；

Ω ——电机转子的机械角速度， $\Omega = \frac{d\gamma}{dt}$ ；

$\frac{d\Omega}{dt}$ ——机械角加速度， $\frac{d\Omega}{dt} = \frac{d^2\gamma}{dt^2}$ 。

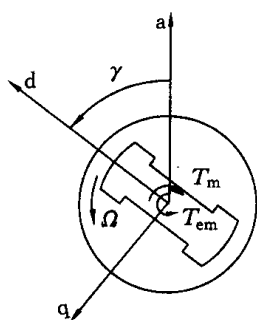


图 1-10 建立转子运动方程用图

电机中常采用电弧度来表示角度，即以式 (1-32) 代入式 (1-34)，则电机的转子运动方程为

$$J \frac{1}{p} \times \frac{d\omega}{dt} = J \frac{1}{p} \times \frac{d^2\theta}{dt^2} = T_{em} - T_m \quad (1-35)$$

式中 ω ——转子转速，电弧度/s， $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ ；

t ——时间，s；

T_{em} ——电动机的电磁转矩，Nm；

T_m ——电动机的负载转矩，Nm。

如转动部分的飞轮转矩为 GD^2 ，工程上常采用的单位为吨·米²，即 tm^2 ，则

$$J = \frac{1}{4} GD^2 \times 10^3 \text{ kgm}^2$$

选转速 ω 、位置角 θ 为状态变量，将式 (1-35) 转换为状态方程，得

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &= \frac{p}{J} (T_{em} - T_m) \\ \frac{d\theta}{dt} &= \omega \end{aligned} \right\} \quad (1-36)$$

当求解变速问题, 即 $\omega \neq$ 常数时, 需通过联立求解状态方程式 (1-26) 与式 (1-36) 得到各状态变量, 这时 $\theta \neq \omega t + \theta_0$, 需通过式 (1-36) 中的第二式求出 θ 。

实用上, 转子运动方程式常用标么值形式, 下面导出用标么值形式表示的方程。转矩的基值一般选为

$$T_b = \frac{S_N \times 10^3}{\frac{2\pi n}{60}}$$

式中 T_b ——转矩的基值, Nm;

S_N ——电机的额定视在功率, kVA;

n ——同步转速, r/min。

时间的基值一般选为 $\tau_b = \frac{1}{2\pi f}$, s。它相当于同步电机转子在同步转速时转动一个电弧度所需的时间。用转矩基值除转子运动方程式 (1-35) 的两边, 等式左边分子、分母同时除以时间基值的平方, 可得等式

$$\left[\frac{1}{p} \times \frac{GD^2}{S_N} 2\pi^3 f^2 \left(\frac{n}{60} \right) \right] \frac{d^2\theta}{d\left(\frac{t}{\tau_b}\right)^2} = \frac{T_{em}}{T_b} - \frac{T_m}{T_b} \quad (1-37)$$

即转子运动方程的标么值形式 (标么值用 * 表示) 为

$$H \frac{d^2\theta}{dt^{*2}} = H \frac{d\omega^*}{dt^*} = T_{em}^* - T_m^* \quad (1-38)$$

$$\text{其中} \quad H = \frac{1}{p} \times \frac{GD^2}{S_N} 2\pi^3 f^2 \left(\frac{n}{60} \right) = 2\pi^3 f \times \frac{GD^2}{S_N} \left(\frac{n}{60} \right)^2 \quad (1-39)$$

H 称为惯性常数, 它与时间的标么值之间具有以下的简单关系, 由式 (1-38) 可得

$$dt^* = \frac{H d\omega^*}{T_{em}^* - T_m^*}$$

设剩余转矩 $T_{em}^* - T_m^* = 1$, 电机转速由零上升到同步转速 ($\omega^* = 1$) 时所需的时间为 τ , 则

$$\tau = \int_0^1 dt^* = \int_0^1 H d\omega^* = H \quad (1-40)$$

由此可见, 在原来静止的电机转子上加上标么值为 1 的恒值剩余转矩后, 转速由零上升到同步转速所需的时间标么值等于 H 。

时间的标么值本来不具有物理单位, 但习惯上说它的单位为电弧度。因之, 本来没有单位的惯性常数 H , 有时也就说它的单位为电弧度。

小 结

本章讨论了交流电机在相坐标系中的电压方程式和转子运动方程式。这一组微分方

程能够正确描述电机中的变量如电压、电流、磁链、转矩、转速和转角等的相互联系、相互制约的关系，是我们研究交流电机运行性能和行为的基础。

首先，以一个最简单的电路为例讨论了如何根据电磁感应定律和基尔霍夫定律列写电路的基本方程式，特别是各量正方向的规定，对方程式中各项符号的影响。其次，讨论了凸极同步电机在相坐标系下的电压方程式，其中每个回路的电压方程式均由两项构成，一项为与绕组交链的总磁链随时间变化而产生的感应电动势 $p\psi$ ；另一项为绕组的电阻压降 ri 。这里定子、转子绕组均为“静止绕组”，即绕组轴线与构成绕组的线圈元件间相对静止。

本章还讨论了凸极同步电机的磁链方程式，特别说明了其中的自感系数与互感系数的变化规律。在只考虑基波磁动势及基波磁场的情况下，定子绕组自感、互感系数及定、转子绕组间的互感系数将得到简化。

最后给出了交流电机的电磁转矩表达式及转子运动方程式。

本章导出的相坐标系下的交流电机电压方程式、转子运动方程式是一组时变系数的非线性微分方程式，它能够反映高次磁场谐波。求解时一般需改写为状态方程式，用计算机求数值解。

习 题

1.1 凸极同步电机的哪些电感系数随转子位置变化？其原因是什么？

1.2 一台旋转电机，定、转子上各有一个绕组，两个绕组轴线重合时互感系数为 M_0 ，若定子绕组通入电流 i ，转子绕组开路，转子以 ω_r 速度旋转（只计基波磁势和基波磁场）。试求：

(1) 当 $i = I_m \cos \omega_1 t$ 时，导出转子绕组感应电势 e 的表达式，并分别求出 $\omega_r = 0$ ， $\omega_r = \omega_1$ 时 e 的表达式；

(2) 若 $i = I$ （直流），导出 e 的表达式。

1.3 一台两相凸极同步电机，其定子为两相对称正交绕组，转子上只有一个励磁绕组。试写出在相坐标系中的电压、磁链方程式，以及相应的电感系数表达式。

1.4 一台无换向极他励直流发电机，其正方向规定方法为：电枢绕组采用正电流产生负磁链，电流电压的正方向符合发电机惯例；励磁绕组采用正电流产生正磁链，电流电压的正方向符合电动机惯例。

(1) 画出其物理模型；

(2) 试写出适用于瞬态分析的各回路电压、磁链方程式；

(3) 写出各回路电感系数表达式。

第五节 同步电机的物理模型

前面几节采用线性变换方法，将电机 a 、 b 、 c 坐标系下的各物理量及基本方程式，转换为 d 、 q 、 0 坐标系下的物理量和方程式，其物理意义可视为将轴线互差 $2\pi/3$ 电角度的 a 、 b 、 c 三相绕组转换为轴线正交的 d 、 q 两相绕组及一个在电磁方面独立的零轴绕组，其中电枢 d 轴与励磁绕组 d 轴线同方向，且同速旋转。由式 (2-32) 可见，电枢 d 、 q 绕组的电压方程式中，除有 d 、 q 绕组轴磁链变化引起的变压器电动势 $p\psi$ 外，尚存在与之正交绕组磁链因旋转而引起的旋转电动势 $\omega\psi$ 。

本节直接从三相交流电机的物理模型，通过重新选取两相轴线为正交的绕组，逐步变换为 d 、 q 、 0 坐标系下的电机物理模型。根据前面的正方向选择，可画出三相电机的物理模型如图 2-13 (a) 所示。

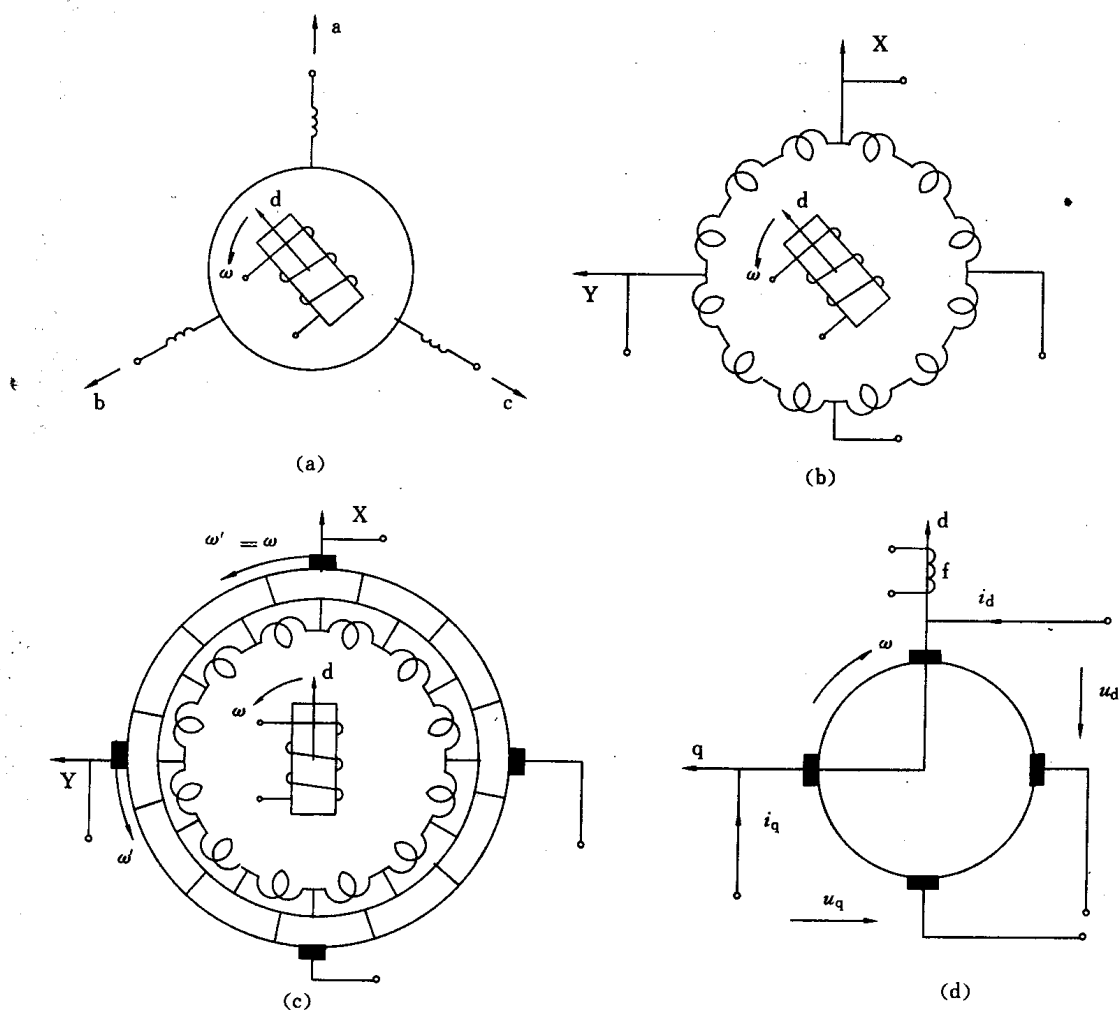


图 2-13 从 a、b、c 到 d、q、0 坐标系统的物理模型变换
 (a) 三相电机；(b) 两相电机；(c) 转极式电机；(d) 转枢式电机

这里定子三相绕组轴线在空间为静止的，且互差 $2\pi/3$ 电弧度。由于定子三相绕组对称，可重新选取正交的 X、Y 轴线的绕组及一单独的零轴绕组代替三相绕组，其中 X、Y 两相绕组的连接方法如图 2-13 (b) 所示。为能方便地只改变 X、Y 绕组轴线的旋转速度，而保持绕组中线圈元件的情况不变，即仍为静止的，可将定子绕组外接换向器，并在换向器原 X、Y 轴线位置上分别放置两对电刷，这时 X、Y 绕组的轴线即在电刷的连线上，如图 2-13 (c) 所示。当电刷不动时，X、Y 绕组轴线亦为静止的，与图 2-13 (b) 所示的绕组轴线相同。现将两对电刷沿转子旋转方向以 ω' 的角速度旋转，即 X、Y 绕组轴线以 ω' 的角速度旋转，但构成绕组的线圈元件仍为静止的。当电刷的旋转速度 $\omega' = \omega$ ，且取 X 轴与转子励磁绕组 d 轴重合，Y 轴与转子交轴 q 重合，那么，从物理模型上已完成了从定子三相静止的 a、b、c 绕组轴线向与转子同速旋转的 d、q 绕组轴线的变换，如图 2-13 (c) 所示。实际上该电机已变成了转极式的，在直轴和交轴方向各有一对电刷的直流电机的物理模型，不过电枢和换向器是静止的，而电刷与磁极是同速旋转的。为了变成惯用的转枢式直流电机的

物理模型，可保持转动部分和静止部分的相对关系不变，而将磁极与电刷取为静止的，则电枢与换向器将反向旋转，即顺时针方向旋转，然后，再将外转子（电枢绕组）改为内转子，静止的磁极放置在转子外面，即得到常用转枢式直流电机的物理模型，如图 2-13 (d) 所示。

从上面交流电机物理模型转变为直流电机物理模型的过程中可看出，电枢绕组 a、b、c 坐标系变换为 d、q、0 坐标系，是重新选取了电枢绕组的轴线 d、q，该轴线与转子同速旋转，即从静止的 a、b、c 轴变为与转子同速旋转的 d、q 轴，且电枢绕组 d 轴与转子励磁绕组 d 轴重合，而构成电枢绕组的线圈元件情况不变。这种换向器式绕组，其电枢绕组的轴线与构成该绕组的线圈元件间存在相对运动，从 X、Y 电刷引出的绕组电动势或电流频率与线圈元件内的频率不同。这种绕组从电机学的分析和方程式 (2-12) 中也可看出，电压方程式中存在有旋转电动势 $\omega\psi$ 。对于绕组轴线与构成该绕组的线圈元件间存在相对运动的换向器式的绕组称之为“伪静止绕组”。因此，静止绕组与伪静止绕组物理本质上的区别不是绕组是否静止或旋转，而是绕组轴线与构成该绕组的线圈元件间是相对静止的，还是存在相对运动，表现在电压方程式上的区别是有无旋转电动势。

根据给定的正方向假设和最基本的电磁感应定律和右手定则，可以方便地从 d、q、0 坐标系统的电机物理模型中得出电枢绕组各项电动势的方向，再用基尔霍夫定律可写出电压方程式。按照前面给出的电流、电压正方向假设，产生正磁链的电流方向为电流的正方向，根据右手螺旋定则可得电枢 d、q 绕组电流的正方向；电压正方向与电流正方向的关系符合电动机惯例，如图 2-14 (a) 所示。根据电磁感应定律，可定出 $p\psi$ 的方向。当磁链 ψ_d 正向

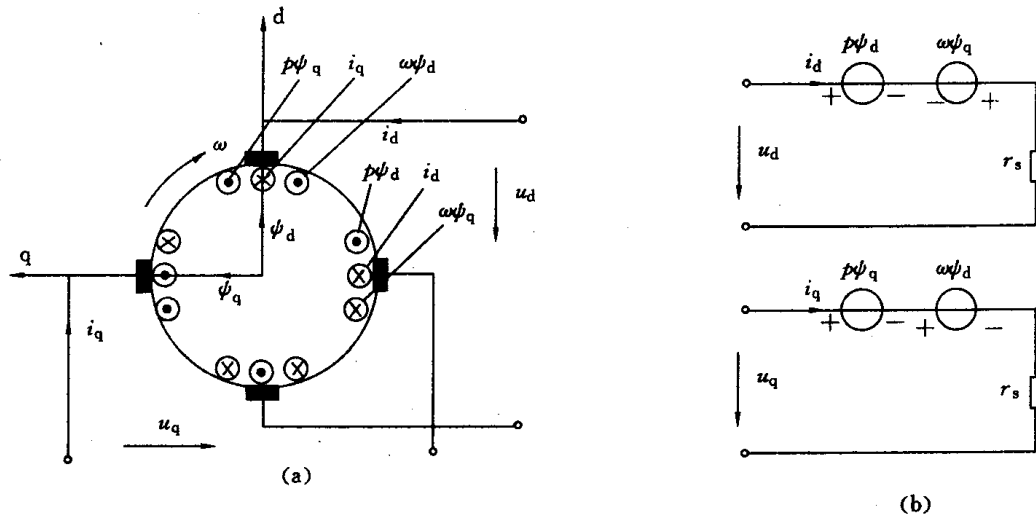


图 2-14 电机物理模型中电动势 $p\psi$ 、 $\omega\psi$ 的方向与电流正方向的关系

(a) 电机电枢模型的示意图；(b) d、q 轴绕组的等效电路

增长时，感生变压器电动势 $p\psi_d$ 的方向是阻止磁链增长的，其方向与电流正方向相反。根据右手定则可定出 $\omega\psi$ 的方向，其中交轴磁链 ψ_q 在 d 绕组中产生旋转电动势 $\omega\psi_q$ 的方向，与电流 i_d 的正方向相同，如图 2-14 (a) 所示。定出各项电动势的方向与电流正方向的关系后，可画出电枢 d 绕组的电路如图 2-14 (b) 所示，图中 $p\psi$ 、 $\omega\psi$ 的方向为电压降落的方向，与

图 2-14 (a) 中电动势的方向相反，其电压方程式依照电路的基尔霍夫第二定律写出如下

$$u_d = p\psi_d - \omega\psi_q + r_s i_d$$

同理可得 q 绕组的电压方程式为

$$u_q = p\psi_q + \omega\psi_d + r_s i_q$$

显然，用电机物理模型和最基本的定律得出的电压方程式各项的符号与前面推导的式 (2-32) 一致。当改变正方向假设时，有些相应项的符号也会改变。同样，用左手定则不难得出电磁转矩各量的方向，其中交轴电枢电流 i_q 与直轴磁链 ψ_d 产生的电磁转矩 $i_q\psi_d$ 的方向与旋转方向一致，而直轴电枢电流 i_d 与交轴磁链 ψ_q 产生的电磁转矩 $i_d\psi_q$ 的方向与旋转方向相反，如图 2-15 所示。

根据电动机惯例，电磁转矩为驱动转矩，其正方向与旋转方向一致，由图 2-15 可写出电磁转矩表达式为

$$T_{em} = i_q\psi_d - i_d\psi_q$$

与前面推导的电磁转矩表达式 (2-66) 符号一致。

综上所述，电机物理模型的变换仅是重新选择了绕组轴线，但保持构成绕组的线圈元件情况不变。用电机物理模型和最基本的定律，可以正确迅速地写出不同的正方向假设下电机的电压方程式和电磁转矩表达式。这种方法很实用，不仅适合 d 、 q 、 0 坐标系统，也适合其他坐标系统。

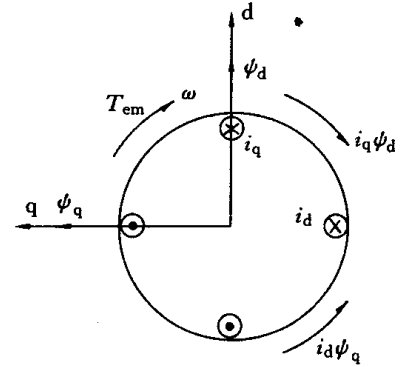


图 2-15 用左手定则决定电磁转矩的方向