**偏微分方程总结**

使用说明：

考试的绝大多数范围集中在下面所述的内容中，请大家注重关注一下是否明确了下面积累题型的概念。在明确概念的基础上自己推导（至少）一遍，这样基本上已经能够达到80分的水平了。如果能够自己思考一下，每一步如何得到，为什么，而且能想通，那我先恭喜您即将满绩啦！

Creator: js([3141037347@qq.com](mailto:3141037347@qq.com)，一位期待大家满绩的人)

目录

[几种方程标准型求解方法、公式 2](#_Toc61720812)

[椭圆型方程 2](#_Toc61720813)

[双曲型方程 3](#_Toc61720814)

[抛物型方程 8](#_Toc61720815)

[Fourier变换 10](#_Toc61720816)

[特殊函数： 11](#_Toc61720817)

# 几种方程标准型求解方法、公式

## 椭圆型方程

**上半平面的Laplace方程的第一边值问题（其中u是有界函数）**

关于x做Flourier变换，可以得到如下的结果：

转换得到一个常微分方程，解得：

由于具有有界性，因此定义：

所以有：

求解的Flourier反变换可以得到：

由卷积的性质，可以得到：

**自然边界条件：**

圆的Poisson积分：

求解过程：

令自变量做如下的变换：

原方程可以化简得到：

令代入原方程中变量分离得到如下两个分离后的方程：

对于变换后得到的方程可以获得一个自然补充的周期性条件：

可以得到解，如下：

带入上周期性条件可以得到，带入方程得到欧拉方程。

令有，最终解为：

由于R的有界性，，由叠加定理可以写出最终解为：

其中，r=1可以退化为傅里叶级数：

可以利用傅里叶展开得到最终的系数。

## 双曲型方程

**无界弦振动方程**

D’Alembert公式：

求解过程：

原方程对应的特征方程为：（注意求特征项时一次项如果存在必须变号，此处不存在）

可以做如下变量代换：

方程化简为：

**无界弦的强迫振动方程：**

Kirchhoff公式：

求解过程：

转化为叠加问题，转化为无界弦振动方程和以下方程的两个方程叠加：

由Duhamel原理，设是下初值问题的解：

解得：

则，原方程的解可以记为：

得到，基尔霍夫解的重积分项。

**非齐次边界条件的定解问题：**

Js结论：

推导过程：

齐次化边界条件：

带入原方程中：

为了求解以上通过转化得到的方程，可以拆分成两个方程：

对于v1对应的齐次方程，设出解为：

带入整理：

对于其中的：

可以发现当且仅当时，有非平凡解：

由常数变异法，可以得到：

带入原方程中有，并进行Fourier级数展开：

其中，将t视为参数，对进行Fourier展开：

转化为下二阶非齐次常系数常微分方程的求解：

由常数变异法可以知道，该常微分方程的解为：

其中，和满足如下条件：

对于v2对应的方程，可以使用以下解法：

带入整理：

对于其中的：

有解：

对于：

有解：

所以原方程的解可以写为：

带入边界条件可以得到如下的表达式：

综上所述，最终解可以写为：

**现在考虑一种更加简单的（常考的）形式**进行讨论：（特征，原方程中为常数，和为常数）

令其中应当满足如下的常微分方程：

利用上式可以得到之后原方程将会转化为：

更加容易解决。

## 抛物型方程

**一维直线上的热传导方程：**

热传导方程的基本解：

令：

则解可以记为：

求解过程：

将偏微分方程进行Flourier变换得到的结果如下：

解常微分方程可以得到：

现在求的Flourier逆变换：

由卷积性质可以得到：

**二维有限平面上的热传导方程：**

设带入原方程中可以得到：

对上式中含的项目继续进行分离变量得到：

对于有

解得：，其中

对于有（易错，此处应当使用m作为新的计数变量）

解得：，其中，即

对于有：

解得

由于方程都是线性齐次的，进行叠加之后可以得到：

由于将此式拆分成和两个部分

两个部分分别进行Flourier展开可以得到和，进而得到最终的结果。

# Fourier变换

Fourier变换的三个基本公式：

Fourier变换的性质：

1. 线性性质：
2. 正反微分性质：
3. 平移性质：
4. 伸缩公式：

Fourier变换的必背公式：

设其中则

广义Fourier变换基本公式：

Flourier展开公式和特殊形式：

有如下系数公式：（其中积分区间为给定的区间，另外记为积分区间长度）

这种求积分的方式同样可以推广到更加复杂的Flourier级数展开式：

如果已知需要展开成：的Flourier级数，首先常数项的表达式不变，可以将变换成之后对系数进行求解。

# 特殊函数：

Bessel函数：

解决的问题：常微分方程的基本形式

解决的方案：使用广义幂级数进行求解，广义幂级数的定义如下：

其中为常数。将广义幂级数带入原式可以得到：

Legendre多项式：

Sturm-Liouville本征值问题：

Green函数：