BESHINCHI AMALIY MASHG‘ULOT.

MAVZU: BOG‘LIQMAS SINOVLAR KETMA – KETLIGI. BENULLI FORMULASI.

Reja

1.Bog‘liqmas sinovlar ketma – ketligi
2. Bernulli formulasi.

Bog‘liqmas sinovlar ketma – ketligi. Takrorlanadigan sinovlardan har birining u yoki bu natijasining ehtimolligi boshqa sinovlarda qanday natijalar bo‘lganligiga bog‘liq bo‘lmasa, ular *bog‘liqmas sinovlar ketma –ketligini* hosil qildi deyiladi.

Bernulli formulasi. Har bir hodisaning ro‘y berish ehtimoli p $(0 < p < 1)$ o‘zgarmasga teng bo‘lgan n ta erkli sinovda hodisaning (qaysi tartibda bo‘lishidan qat’iy nazar) rosa k marta ro‘y berish ehtimoli

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \text{ yoki } \qquad P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \quad (5.1)$$

ga teng, bu yerda $q = 1 - p$. (5.1) formulaga *Bernulli formulasi* deyiladi.

n marta sinashda hodisaning: 1) kamida k_1 marta; 2) ko‘pi bilan k_1 gacha ro‘y berish; 3) k_1 bilan k_2 oralig‘ida ro‘y berish ehtimollari mos holda quyidagi formulalar bo‘yicha hisoblanadi:

1) $P_n(k \geq k_1) = P_n(k_1) + P_n(k_1 + 1) + ... + P_n(n)$;

2) $P_n(k < k_1) = P_n(0) + P_n(1) + ... + P_n(k_1 - 1)$;

3) $P_n(k_1 \leq k \leq k_2) = P_n(k_1) + P_n(k_1 + 1) + ... + P_n(k_2)$.

n ta tajriba seriyasida A hodisa ro‘y berishlarining ehtimoli eng katta bo‘lgan k_0 soni A hodisaning n ta tajribada ro‘y berishining eng ehtimolli soni deyiladi. Bu son

$$k_0 = [np + q] \quad (5.2)$$

formula bo‘yicha topiladi. Bu yerda $[x]$ simvol orqali x sonining butun qismi belgilangan. Uni topish uchun x sonining kasr qismi tashlab yuboriladi. Masalan, agar $np + q$ son butun bo‘lsa, u holda $k_0 - 1$ son ham o‘sha $P_n(k_0)$ ehtimol bilan eng ehtimolli son bo‘ladi.

5.1-misol. Bitta o‘q uzishda nishonga tegish ehtimoli $p=0{,}8$ ga teng. 10 ta o‘q uzishda nishonga etti marta tegish ehtimolini toping.

Yechilishi. Bu yerda $n=10,\ k=7,\ p=0{,}8,\ q=0{,}2$ .Bernulli formulasi (5.1) ga ko‘ra:

$$P_{10}(7)=\frac{10!}{7!(10-7)!}\cdot(0{,}8)^2\cdot(0{,}2)^{10-7}=\frac{10!}{7!3!}\cdot(0{,}8)^7\cdot(0{,}2)^3=0{,}2.$$

5.2-misol. Ishchi ishlov berayotgan detallar orasida o‘rtacha 4% i nostandart bo‘ladi. Sinash uchun olingan 30 ta detaldan ikkitasi nostandart bo‘lish ehtimolini toping. Qaralayotgan 30 ta detaldan iborat tanlanmada nostandart detallarning eng ehtimolli soni qancha va uning ehtimoli qancha?

Yechilishi. Bu yerda tajriba 30 ta detalning har biri sifatidan iborat. A hodisa – nostandart detal chiqish hodisasi; uning ehtimoli $p=0{,}04$, u holda $q=0{,}96$. Bu yerdan Bernulli formulasi bo‘yicha

$$P_{30}(2)=C_{30}^2(0{,}04)^2(0{,}96)^2\approx 0{,}202$$

ni topamiz. Berilgan tanlanmadagi nostandart detallarning eng ehtimolli son (5.2) formula bo‘yicha topiladi:

$$k_0=[30\cdot 0{,}04]=[1{,}24]=1,$$

uningehtimoliesa

$$P_{30}(1)=C_{30}^1\cdot 0{,}04^1\cdot(0{,}96)^{29}\approx 0{,}305.$$

5.3-misol. Bittao‘quzilgandanishongategishehtimoli 0,8 gateng. To‘rttao‘quzishseriyasida 1) kamidabirmartanishongategish; 2) nishongakamidauchmartategish; 3) nishongako‘pibilanbirmartategishehtimolinitoping.

Yechilishi. Buyerda $n=4,\ p=0{,}8, q=0{,}2$. 1) qaramaqarshihodisa – 4 tao‘quzishseriyasidabirmartahamnishongategmaslikehtimolitopamiz:

$$P_4(0)=C_4^0p^0q^4=0{,}2^4=0{,}016.$$

Buyerdankamidabirmartanishongatekkizishehtimolinitopamiz:

$$P_4(k\geq 1)=1-0{,}0016=0{,}9984.$$

2) 4 tao‘quzishseriyasidakamidauchmartanishongategishdaniborat B hodisayouchmartanishongatekkizishni (Chodisa), yokito‘rtmartanishongatekkizishni (D hodisa) bildiradi, ya’ni $B = C + D$. Bundan $P(B) = P(C) + P(D)$, demak,

$$P_4(k \geq 3) = P_4(3) + P_4(4) = C_4^3 p^3 q^1 + C_4^4 p^4 q^0 = 4 \cdot 0,8^3 \cdot 0,2 + 0,8^4 = 0,8192 .$$

3) nishongako‘pibilanbirmartategishehtimolishungao‘xshashtopiladi:

$$P_4(k \leq 1) = P_4(0) + P_4(1) = 0,016 + C_4^1 p^1 q^3 = 0,0016 + 4 \cdot 0,8 \cdot 0,2^3 = 0,2576 .$$

5.4-misol. Har bir detalning standart bo‘lish ehtimolligi $p = 0,8$ bo‘lsa, tavakkaliga olingan 5 ta detaldan rosa 2 tasining standart bo‘lish ehtimolini toping.

Yechilishi. Izlanayotgan ehtimollikni $n = 5, m = 2, p = 0,8$ va $q = 0,2$ da (5.1) Bernulli formulasidan quyidagini topamiz:

$$P_5(2) = C_5^2 \cdot 0,8^2 \cdot 0,2^3 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot 0,00512 = 0,0512.$$

5.5-misol. Har bir otilgan o‘qning nishonga tegish ehtimoli $p = 2/3$. Otilgan 10 ta o‘qdan 3tasining nishonga tegish ehtimolini toping.

Yechilishi. Masala shartidan $n = 10,\ k = 3,\ p = 2/3,\ q = 1/3$ ni olamiz. U holda Bernulli formulasi (5.1) ga asosan:

$$P_{10}(3) = C_{10}^3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^7 .$$

5.6-misol. Ikki teng kuchli shaxmatchi shaxmat o’ynashmoqda: to’rt partiyadan ikkitasini yutish ehtimoli kattami yoki olti partiyadan uchtasini yutish ehtimoli kattami (durang natijalar hisobga olinmaydi)?

Yechilishi. Teng kuchli shaxmatchilar o’ynashmoqda, shu sababli o‘yinchining har bir partiyada yutish ehtimoli $p = 1/2$, demak, partiyani yutqazish ehtimoli q ham 1/2 ga teng. Hamma partiyalarda yutish ehtimoli o‘zgarmas va partiyalarni qaysi tartibda yutishning farqi yo’qligi sababli Bernulli formulasi (5.1) ni qo’llash mumkin.

O‘yinchining to‘rt partiyadan ikki partiyada yutish ehtimolini topamiz:

$$P_4(2) = C_4^2 p^2 q^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{16} .$$

Olti partiyadan uch partiyada yutish ehtimolini topamiz:

$$P_6(3) = C_6^3 p^3 q^3 = \frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}\ .$$

$P_4(2) > P_6(3)$ boʻlgani uchun olti partiyadan uchtasida yutishdan koʻra toʻrt partiyada ikki marta yutishning ehtimoli kattaroq.

Mustaqil ishlash uchun misol va masalalar

1. Ikki teng kuchli raqib shaxmat oʻynashmoqda. Qaysi birining yutish ehtimoli kattaroq: 1) ikki partiyadan bir partiyani yutishmi yoki toʻrt partiyadan ikkitasini yutishmi; 2) toʻrt partiyadan kamida ikkitasida yutishmi yoki besh partiyadan kamida uchtasida yutishmi? Durang natijalar e'tiborga olinmaydi.

Javobi. 1) Ikki partiyadan bittasini yutish ehtimoli kattaroq: $P_2(1) = 1/2;\ P_4(2) = 3/8;$ 2) toʻrt partiyadan kamida ikkitasini yutish ehtimoli kattaroq: $P_4(2) + P_4(3) + P_4(4) = 1 - P_4(0) + P_4(1) = 11/16;\ P_5(3) + P_5(4) + P_5(5) = 8/16 = 1/2.$

2. Tanga 5 marta tashlanadi. «Gerbli» tomon 1) ikki martadan kam tushish; 2) kamida ikki marta tushish ehtimolini toping.

Javobi. 1) $P = P_5(0) + P_5(1) = 3/16;$ 2) $Q = 1 - [P_5(0) + P_5(1)] = 13/16.$

3. Agar bir marta sinashda A hodisaning roʻy berish ehtimoli $0{,}4$ ga teng boʻlsa, u holda toʻrt marta erkli sinashda A hodisaning kamida uch marta roʻy berish ehtimolini toping.

Javobi. $P_4(3) + P_4(4) = 0{,}1792.$

4. A hodisa kamida toʻrt marta roʻy bergan holda B hodisa roʻy beradi. Agar har bir sinashda A hodisaning roʻy berish ehtimoli $0{,}8$ ga teng boʻlgan 5 ta erkli sinash oʻtkaziladigan boʻlsa, B hodisaning roʻy berish ehtimolini toping.

Javobi. $P_5(4) + P_5(5) = 0{,}74.$

5. Oilada 5 ta farzand bor. Bu bolalar orasida : 1) ikkita oʻgʻil bola; 2) koʻpi bilan oʻgʻil bola 3) ikkitadan ortiq; 4) kamida ikkita va koʻpi bilan uchta oʻgʻil bolalar boʻlish ehtimolini toping. Oʻgʻil bolalar tugʻilish ehtimolini $0{,}51$ ga teng deb olinadi.

Javobi. 1) $0{,}31;$ 2) $0{,}48;$ 3) $0{,}52;$ 4) $0{,}62.$

6. Uzunligi 15 sm bo‘lgan AB kesma C nuqta orqali $2:1$ kabi nisbatda bo‘lingan. Bu kesmaga tavakkaliga 4 ta nuqta tashlangan. Bu nuqtalardan ikkitasi C nuqtadan chapga, ikkitasi esa undan o‘ngga tushish ehtimolini toping. Nuqtaning kesmaga tushish ehtimoli kesmaning uzunligiga proporsional bo‘lib, uning joylashishiga esa bog‘liq emas deb faraz qilinadi.

Javobi. $P_4(2) = C_4^2 (2/3)^2 (1/3)^2 = 8/27.$