Ходисалар ва улар устида амаллар. Эҳтимол тушунчаси. Эҳтимолнинг таърифлари. Эҳтимолнинг хоссалари.

Эҳтимоллар назариясининг асосий тушунчаларидан бири тасодифий ходисадир.

Натижасини олдиндан айтиб бериш мумкин бўлган ходиса детерминистик (аниқланган) ходиса (тажриба) дейилади.

Натижасини олдиндан тахмин қилиб бўлмайдиган ходиса (тажриба) тасодифий (стохастик, эҳтимолли) ходиса деб аталади.

Тасодифий ходиса (тажриба)нинг хар қандай натижаси элементар ходиса дейилади. Элементар ходисалар тўплами элементар ходисалар фазоси ёки танланма фазо дейилади ва "Ω" орқали белгилаймиз.

Хар бир элементар ходисани "ω" орқали белгилаймиз.

Мисол 1. Ходиса (тажриба) бир жинсли симметрик танга ташлашдан иборат бўлсин.

Агар рақамни "г" ва гербни "д" орқали белгиласак, у ҳолда элементар ходисалар

$$\omega_1 = д \quad ва \quad \omega_2 = г$$

ҳамда элементар ходисалар фазоси

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$$

тўпламдан иборат бўлади.

Misol 2.

Ҳодиса (тажриба) ёқлари 1 дан 6 гача номерланган бир жинсли кубни ташлашдан иборат бўлсин. Бунда элементар ҳодисалар

$$\omega_1 = 1,\ \omega_2 = 2,\ \omega_3 = 3,\ \omega_4 = 4,\ \omega_5 = 5,\ \omega_6 = 6$$

ва элементар ҳодисалар фазоси

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

тўпламдан иборат бўлади.

Ҳодисалар элементар ҳодисалардан ташкил топган т-м/ бўлиб, улар одатда A, B, C, ... ҳарфлар билан белгиланади.

Кузатиш натижасида албатта рўй берадиган ҳодисага муқаррар ҳодиса дейилади.

Ҳеч қачон рўй бермайдиган (яъни бирорта ҳам элементар ҳодисани ўз ичига олмаган) ҳодисага мумкин бўлмаган ёки бажарилмайдиган ҳодиса дейилади ва $\emptyset$ орқали белгиланади.

A ҳодисага тескари (қарама-қарши) ҳодиса деб A ҳодиса рўй бермаганда (бажарилмаганда) рўй берадиган ҳодисага айтилади ва $\bar{A}$ каби белгилаймиз.

A ва B ҳодисаларнинг йиғиндиси:

$$A + B \quad \text{ёки} \quad A \cup B.$$

A ёки B ҳодиса, ёки иккаласи ҳам рўй берадиган ҳодиса.

$$A + \bar{A} = \Omega \rightarrow \text{муқаррар ҳодиса}$$

А ва В ҳодисаларнинг кўпайтмаси (кесишмаси):

$$A \cdot B \quad \text{ёки} \quad A \cap B.$$

А ва В ҳодисалар биргаликда рўй берганда бажариладиган ҳодиса.

Агар $A \cdot B = A \cap B = \varnothing$ бўлса, А ва В ҳодисалар биргаликда бўлмаган (ёки биргаликда бажарилмайдиган) ҳодисалар дейилади.

$$A \cap \bar{A} = \varnothing \quad \text{мумкин бўлмаган ҳодиса.}$$

А ва В ҳодисаларнинг айирмаси деб, А ҳодиса рўй бериб, В ҳодиса рўй бермаганда, бажариладиган (содир бўладиган) ҳодисага айтилади ва $A \setminus B$ ёки $A - B$ каби белгиланади.

Худди шунингдек, $A \subset B$ ёки $A = B$ тушунчаларни киритишимиз мумкин.

<u>Мисол 3.</u> Тажриба симметрик бир жинсли тангани 3 марта ташлашдан иборат бўлсин. Бунда элементар ҳодисалар:

$\omega_1 = \{g, g, g\}$, $\omega_2 = \{g, g, r\}$, $\omega_3 = \{g, r, g\}$, $\omega_4 = \{r, g, g\}$

$\omega_5 = \{r, r, g\}$, $\omega_6 = \{r, g, r\}$, $\omega_7 = \{g, r, r\}$, $\omega_8 = \{r, r, r\}$

ва элементар ходисалар фазоси

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_8\}$ тўпламдан иборат бўлади.

$A \to$ 2 марта герб тушадиган ҳодиса ва

$B \to$ камида 2 марта рақам тушишидан иборат ходиса бўлса

унда,

$$A = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}, \quad B = \{\omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}$$

$$A + B = A \cup B = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8\}, \quad A \cap B = \varnothing,$$

$$A \setminus B = A, \quad B \setminus A = B, \quad \bar{A} = B \cup \{\omega_1\}, \quad \bar{B} = A \cup \{\omega_1\}$$

Энди Ω — элементар ҳодисалар фазоси, E — Ω тўпламнинг қисм тўпламларидан иборат бирор бўш бўлмаган система (оила) бўлсин.

Таъриф: Агар E система саноқли бирлашма ва тўлдирувчига нисбатан ёпиқ бўлса, яъни

1) $A_n \in E,\ n=1,2,\ldots \Rightarrow \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in E$

2) $A \in E \Rightarrow \bar{A} \in E$

бўлса, E система σ алгебра дейилади.

Эслатма: Doim $\varnothing \in E$, $\Omega \in E$ ўринли.

Ҳақиқатдан ҳам агар E системанинг бўш эмаслигини эътиборга олсак, яъни шундай $A \subset \Omega$ қисм тўплам мавжуд-ки $A \in E$ бўлишини эътиборга олсак, 2) шартдан $\bar{A} \in E$ эканлиги ва 1) шартдан $A \cup \bar{A} = \Omega \in E$ эканлиги ҳамда яна 2) шартдан $\varnothing = \bar{\Omega} \in E$ эканлиги келиб чиқади.

Таъриф: Агар $P: E \to [0;1]$ акслантириш қуйидаги шартларни

К.1. $\forall A \in E$ учун $P(A) \geq 0$

К.2. $P(\Omega) = 1$

К.3. $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$ (жуфт-жуфти билан кесишмайдиган ходисалар) учун
$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

қаноатлантирса E система (σ алгебра)да эҳтимол киритилган ва P — эҳтимоллик ўлчови дейилади.

Эҳтимолнинг асосий хоссалари:

1. $P(\varnothing)=0$

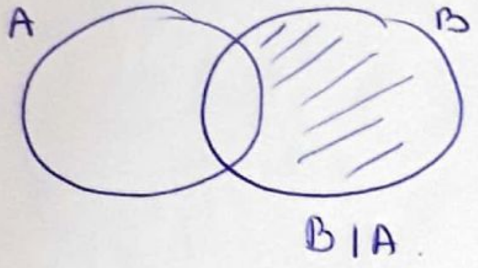
Исбот: $\varnothing \cup \Omega = \Omega \Rightarrow P(\varnothing \cup \Omega) = P(\varnothing) + P(\Omega)$

$$P(\Omega) = P(\varnothing) + P(\Omega) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(\varnothing) = 0.$$

2. Агар $A \subset B$ бўлса, у ҳолда $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.

Исбот: $B = A \cup (B \setminus A)$ ва $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$ эканлигини эътиборга олсак,



$$P(B) = P(A \cup (B \setminus A)) =$$

$$= P(A) + P(B \setminus A) \Rightarrow$$

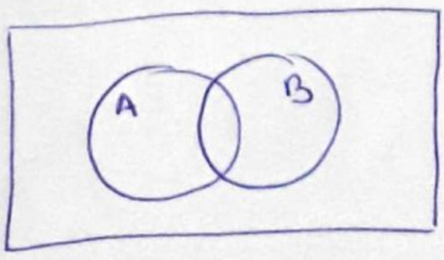
$$\Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A).$$

Натижа: Агар $A \subset B$ бўлса, у ҳолда $P(A) \le P(B)$

3. Агар $A, B \in E$ бўлса, у ҳолда $A \cup B,\ A \cap B \in E$ бўлиб

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ тенглик ўринли бўлади.

Исбот: $A, B \in E$ (σ алгебра) бўлганда $A \cup B \in E$ бўлиши равшан, $A \cap B \in E$ эканлиги эса.



$$A, B \in E \Rightarrow \bar{A}, \bar{B} \in E \Rightarrow \bar{A} \cup \bar{B} \in E \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{(\bar{A} \cup \bar{B})} \in E \Rightarrow$$

$\Rightarrow A \cap B = \overline{(\bar{A} \cup \bar{B})} \in E$ дан келиб чиқади.

Ω

Шунингдек,

$A \cup B = A \cup (B \setminus (A \cap B))$ ва $A \cap (B \setminus (A \cap B)) = \varnothing$ эканлигини эътиборга олсак $P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus (A \cap B)) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ келиб чиқади.

5. $\forall A \in E$ учун $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ тенглик бажарилади.

Исбот: $A \cap \bar{A} = \varnothing$, $A \cup \bar{A} = \Omega$ дан

$P(A \cup \bar{A}) = P(\Omega) = 1$ ва

$P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = 1$ дан

$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ эканлиги келиб чиқади.

6. Агар $A_n \in E$, $n = 1, 2, \dots$ бўлса, у ҳолда

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$ тенглик ўринли бўлади.

Исбот: $A_n \in E$, $n = 1, 2 \dots \Rightarrow \bar{A}_n \in E$, $n = 1, 2, \dots$

бу тўпламлар ёрдамида қуйидаги жуфт-жуфти билан ўзаро кесишмайдиган қуйидаги тўпламларни тузамиз.

$B_1 = A_1$

$B_2 = \bar{A}_1 \cap A_2$

$B_3 = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3$

$- - - - -$

$B_n = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_{n-1} \cap A_n$, $n = 2, 3, \dots$,

Бу тўпламлар учун (ҳодисалар учун)

$$\left.\begin{array}{l} B_i \cap B_j = \varnothing \quad (i \ne j), \\ B_n \in E, \quad B_n \subset A_n \\ \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \text{ тенгликлар ўринли.} \end{array}\right\} \text{Вазифа (мустақил исботланг)}$$

Демак $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

Теорема: Агар P E-σ algebrada киритилган чекли аддитив эҳтимол бўлса, у ҳолда қуйидагилар бир-бирига эквивалент.

1. P - эҳтимоллик ўлчови.
2. P - юқоридан узлуксиз.

E σ-алгебрадан олинган,

$A_n \subseteq A_{n+1}$, $n=1,2\ldots$ $\forall \{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ кетма-кетлик учун $A_n \uparrow$

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

3. P - қуйидан узлуксиз.

яъни, E σ-алгебрадан олинган

$A_{n+1} \subseteq A_n$, $n=1,2\ldots$ ни қаноатлантирувчи

$\forall \{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ҳодисалар кетма-кетлиги учун $A_n \downarrow$.

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

4. P - нолда узлуксиз.

яъни $A_{n+1} \subseteq A_n$, $n=1,2,\ldots$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$ шартни

қаноатлантирувчи $\forall \{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ кетма-кетлик учун

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0. \qquad A_n \downarrow \emptyset$$

Isbot: 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ 1) isbotlasak, teorema isbotlangan bo'ladi.

1) $\Rightarrow$ 2) Isboti:

P эҳтимоллик ўлчови ва $\forall A_n \uparrow$ бўлсин.

$B_1 = A_1$, $B_2 = A_2 \setminus A_1$, $B_3 = A_3 \setminus A_2$, ..., $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$, $n=2,3,\ldots$

деб олсак, $B_i \cap B_j = \emptyset$, $i \neq j$ ва $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ бўлади ва

$$P\left(\bigcup_{n\geq 1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n\geq 1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) =$$

$$= P(B_1) + P(B_2) + \dots + P(B_n) + \dots =$$

$$= P(A_1) + P(A_2 \setminus A_1) + \dots + P(A_n \setminus A_{n-1}) + \dots =$$

$$= P(A_1) + [P(A_2) - P(A_1)] + \dots + [P(A_n) - P(A_{n-1})] + \dots =$$

$$= P(A_1) + \sum_{n=2}^{\infty} [P(A_n) - P(A_{n-1})] =$$

$$= P(A_1) + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=2}^{n} [P(A_k) - P(A_{k-1})] =$$

$$= P(A_1) + \lim_{n\to\infty} (P(A_n) - P(A_1)) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

2) $\Rightarrow$ 3)

$\forall \{A_n\} \downarrow$ берилган бўлсин. $A_{n+1} \subseteq A_n$.

$B_1 = \emptyset$, $B_2 = A_1 \setminus A_2$, $B_3 = A_2 \setminus A_3$, ..., $B_n = A_1 \setminus A_n$,

$n = 1, 2, \dots$

$$A_{n+1} \subseteq A_n \Rightarrow B_n = A_1 \setminus A_n \subseteq B_{n+1} = A_1 \setminus A_{n+1} \Rightarrow B_n \uparrow$$

$$\lim_{n\to\infty} P(B_n) = P\left(\bigcup_{n\geq 1}^{\infty} B_n\right)$$ ва

$$\bigcup_{n\geq 1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n\geq 1}^{\infty} (A_1 \setminus A_n) = A_1 \setminus \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} P(B_n) = P\left(\bigcup_{n\geq 1}^{\infty} B_n\right) = P\left(A_1 \setminus \bigcap_{n\geq 1}^{\infty} A_n\right) = P(A_1) - P\left(\bigcap_{n\geq 1}^{\infty} A_n\right)$$

$$B_n = A_1 \setminus A_n \Rightarrow A_n = A_1 \setminus B_n$$

$$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_1 \setminus B_n) = \lim_{n\to\infty} (P(A_1) - P(B_n)) = P(A_1) - \lim_{n\to\infty} P(B_n) =$$

$$= P(A_1) - \left[P(A_1) - P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)\right] = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

3) ⇒ 4) Табиий ҳолат.

4) ⇒ 1) ни исботлаймиз.

Ихтиёрий жуфт-жуфти билан ўзаро кесишмайдиган $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ ҳодисалар кетма-кетлиги берилган бўлсин. P-чекли аддитив эҳтимол бўлганлиги учун

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) + P\left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k\right)$$

тенглик ўринли бўлади.

$$B_n = \bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k \text{ деб олсак, } B_n \downarrow \emptyset \text{ бўлади}$$

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) - P\left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k\right) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) - P(B_n)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} P(A_k) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) - P(B_n)\right] =$$

$$= P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) - \lim_{n\to\infty} P(B_n) = P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)$$

Теорема тўлиқ исботланди.

Эҳтимолнинг классик таърифи:

Ω - элементар ҳодисалар фазоси саноқли тўпламдан иборат бўлсин.

$$\sum_{\omega \in \Omega} {}_{\omega} = 1$$ шартни қаноатлантирувчи $p_\omega \geq 0$

сонлар берилган бўлсин.

А ҳодиса эҳтимолини қуйидагича аниқлаймиз

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega$$

Бу йиғинди эҳтимоллик таърифини қаноатлантиришини кўрсатамиз.

<u>К.1</u> $P(A) \geq 0$

$$p_\omega \geq 0 \Rightarrow \sum_{\omega \in A} p_\omega \geq 0 \Rightarrow P(A) \geq 0.$$

<u>К.2</u> $P(\Omega) = 1.$

$$P(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$$

<u>К.3</u> $$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n), \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j.$$

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{\omega \in \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n} p_\omega = \sum_{\omega \in A_1} p_\omega + \sum_{\omega \in A_2} p_\omega + \ldots + \sum_{\omega \in A_n} p_\omega + \ldots =$$

$$= P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

p_ω sonlar bir xil bo'lsin, $p_\omega = p, \ \forall \omega$

$$\left.\begin{aligned} P(A) &= \sum_{\omega \in A} p_\omega = \sum_{\omega \in A} p = p \cdot N(A) \\ 1 &= \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = \sum_{\omega \in \Omega} p = p \cdot N(\Omega) \Rightarrow p = \frac{1}{N(\Omega)} \end{aligned}\right\} \Rightarrow P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

Мисол: 2 та номерланган куб ташланганда тушган очколар йиғиндиси 7 га тенг бўлган ҳодиса эҳтимолини топинг.

11	21	31	41	51	61
12	22	32	42	52	62
13	23	33	43	53	63
14	24	34	44	54	64
15	25	35	45	55	65
16	26	36	46	56	66

$\omega_1 = \{1,1\}$ $\omega_7 = \{2,1\}$ $\omega_{31} = \{6,1\}$

$\omega_2 = \{1,2\}$ $\omega_8 = \{2,2\}$ $\omega_{32} = \{6,2\}$

$\omega_3 = \{1,3\}$ $\omega_9 = \{2,3\}$ $\vdots$

$\vdots$

$\omega_6 = \{1,6\}$ $\omega_{12} = \{2,6\}$ $\omega_{36} = \{6,6\}$

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{36}\}$ elementar hodisalar fazosi.

$A = \{\omega_6, \omega_{11}, \omega_{16}, \omega_{21}, \omega_{26}, \omega_{31}\}$

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$