

# Ejercicios de Geometría Diferencial de Curvas y Superficies



Universidad Complutense de Madrid

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

DOBLE GRADO EN MATEMÁTICAS E INGENIERÍA INFORMÁTICA

**Javier Pellejero**  
Curso 2017-2018



*El propio Dios geometriza.*

Platón

# Prefacio

Aquí va el prefacio, evidentemente

# Índice general

1. Curvas parametrizadas y longitud de un arco de curva	1
---------------------------------------------------------	---

# Capítulo 1

## Curvas parametrizadas y longitud de un arco de curva

**Ejercicio 1.** Hallar una curva parametrizada  $\alpha$  cuya traza es el círculo  $x^2 + y^2 = 1$ , con  $\alpha(t)$  recorriéndolo en el sentido de las agujas del reloj y con  $\alpha(0) = (0, 1)$ .

Una solución a este ejercicio  $\alpha(t) = (\sin t, \cos t)$ . Es claro que  $\alpha(0) = (\sin 0, \cos 0) = (0, 1)$  y que al avanzar, por ejemplo a  $\alpha(\frac{\pi}{2}) = (\sin \frac{\pi}{2}, \cos \frac{\pi}{2}) = (1, 0)$  es en el sentido de las agujas del reloj.

**Ejercicio 2.** Sea  $\alpha(t)$  una curva que no pasa por el origen. Si  $\alpha(t_0)$  es el punto de la traza de  $\alpha$  más cercano al origen y  $\alpha'(t_0) \neq 0$ , demostrar que el vector posición  $\alpha(t_0)$  es ortogonal a  $\alpha'(t_0)$ .

Definimos la función  $D(t) := \alpha^2(t) = \alpha(t)\alpha(t) = \|\alpha(t)\|^2$  que mide el cuadrado de la distancia de los puntos de la curva al origen.

$t_0$  es un punto relativo de dicha función por ser el punto más cercano al origen, entonces  $D'(t_0) = 0 \implies 2\alpha(t_0)\alpha'(t_0) = 0 \implies \alpha(t_0) \perp \alpha'(t_0)$ .

**Ejercicio 3.** Sea  $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$  una curva y  $v \in \mathbb{R}^3$  un vector dado. Si  $\alpha'(t)$  es ortogonal a  $v$  para todo  $t \in I$ , y si  $\alpha(0)$  también lo es, demuestre que  $\alpha(t)$  es ortogonal a  $v$  para todo  $t \in I$ .

Definimos  $f(t) := \alpha(t)v = \alpha_1(t)v_1 + \alpha_2(t)v_2 + \alpha_3(t)v_3$ . Tenemos que  $f'(t) = \alpha'(t)v = 0 \forall t \in I$ . Luego  $f(t) = c \in \mathbb{R}$ ,  $\forall t \in I$ . Como en particular  $f(0) = \alpha(0)v = 0 \implies c = 0 \implies \alpha(t) \perp v$ .

**Ejercicio 4.** Si  $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$  es una curva regular, demuestre que  $\|\alpha(t)\|$  es constante (diferente de cero) si y sólo si  $\alpha(t) \perp \alpha'(t)$  para todo  $t \in I$ .

■ (  $\implies$  ).  $\|\alpha(t)\|^2 = \alpha(t)\alpha(t) = c^2$ . Derivando,  $2\alpha(t)\alpha'(t) = 0 \implies \alpha(t) \perp \alpha'(t)$ .

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad (\Leftarrow) \cdot \alpha(t)\alpha'(t) = 0 &\implies \frac{1}{2}(\alpha(t)\alpha(t))' = 0 \xrightarrow{\text{Integrando}} \alpha(t)\alpha(t) = c \implies \\ &\implies \|\alpha(t)\|^2 = c \implies \|\alpha(t)\| \text{ es constante.} \end{aligned}$$

**Ejercicio 5.** Si  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una curva, y  $M: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es un movimiento rígido, demostrar que las longitudes de  $\alpha$  y  $M \circ \alpha$  entre  $a$  y  $b$  coinciden.

$$\begin{aligned} L_a^b M \circ \alpha(t) &= \int_a^b \|(M \circ \alpha)'\| = \int_a^b \|M'(\alpha(s))\alpha'(s)\| ds = \int_a^b \|\vec{M}\alpha'(s)\| ds \text{ por ser mov. rígido} \\ &= \int_a^b \|\alpha'(s)\| ds = L_a^b \alpha. \end{aligned}$$

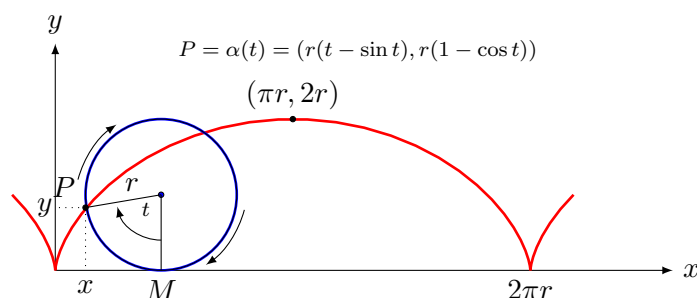
**Ejercicio 6.** Demuestre que las líneas tangentes a la curva  $\alpha(t) = (3t, 3t^2, 2t^3)$  forman un ángulo constante con la recta  $y = 0, z = x$ .

$$\begin{aligned} \text{Tenemos que } \alpha'(t) &= (3, 6t, 6t^2). \text{ La recta } r \equiv \begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases} \text{ tiene como vector director} \\ v &:= (1, 0, 1). \text{ El ángulo } \theta \text{ que forman } v \text{ y } \alpha'(t) \text{ viene determinado por } \theta = \arccos_{[0, \pi)} \frac{\alpha'(t)v}{\|\alpha'(t)\| \|v\|} = \\ &= \arccos_{[0, \pi)} \frac{3 + 6t^2}{\sqrt{9 + 36t^2 + 36t^4}\sqrt{2}} = \arccos_{[0, \pi)} \frac{3 + 6t^2}{(3 + 6t^2)\sqrt{2}} = \arccos_{[0, \pi)} \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ que es constante.} \end{aligned}$$

**Ejercicio 7.** La curva engendrada por un punto  $P$  de una circunferencia de radio  $r$  que rueda sin deslizar por una recta fija se llama **cicloide**. Tomando dicha recta como eje de las  $X$ , y como parámetro  $t$  el ángulo orientado  $\widehat{MCP}$  ( $C$  es el centro de la circunferencia y  $M$  el punto de contacto con el eje), probar que la posición de  $P$  para cada  $t$  es

$$\alpha(t) = (rt - r \sin t, r - r \cos t)$$

Se ha supuesto que en  $t = 0$ ,  $P$  coincide con  $M$ , y con el origen de coordenadas. Determine los puntos  $t$  donde  $\alpha(t) = 0$  (llamados de retroceso). (Nota: “sin deslizar” significa a efectos prácticos que la longitud del arco  $MP$  coincide con la longitud del segmento  $OM$ ).



**Ejercicio 8.** Pruebe que la recta tangente a la cicloide por un punto  $P$  regular cualquiera viene determinada por los puntos  $P$  y  $M$ , siendo  $M$  el simétrico de  $M$  respecto a  $C$ .

CAPÍTULO 1. CURVAS PARAMETRIZADAS Y LONGITUD DE UN ARCO DE CURVA 3

**Ejercicio 9.** Determine la longitud del arco de cicloide entre dos puntos consecutivos de retroceso, en función del radio de la circunferencia rodante.

**Ejercicio 10.** La *espiral logarítmica*  $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$