Ejercicios de Geometría Diferencial de Curvas y Superficies

Universidad Complutense de Madrid

Facultad de Ciencias Matemáticas

Doble Grado en Matemáticas e Ingeniería Informática

Javier Pellejero

Curso 2017-2018

El propio Dios geometriza.

Platón

Prefacio

Aquí va el prefacio, evidentemente

Índice general

Capítulo 1

Curvas parametrizadas y longitud de un arco de curva

Ejercicio 1. Hallar una curva parametrizada α cuya traza es el círculo $x^2 + y^2 = 1$, con $\alpha(t)$ recorriéndolo en el sentido de las agujas del reloj y con $\alpha(0) = (0, 1)$.

Una solución a este ejercicio $\alpha(t) = (\sin t, \cos t)$. Es claro que $\alpha(0) = (\sin 0, \cos 0) = (0, 1)$ y que al avanzar, por ejemplo a $\alpha(\frac{\pi}{2}) = (\sin \frac{\pi}{2}, \cos \frac{\pi}{2}) = (1, 0)$ es en el sentido de las agujas del reloj.

Ejercicio 2. Sea $\alpha(t)$ una curva que no pasa por el origen. Si $\alpha(t_0)$ es el punto de la traza de α más cercano al origen y $\alpha'(t_0) \neq 0$, demostrar que el vector posición $\alpha(t_0)$ es ortogonal a $\alpha'(t_0)$.

Definimos la función $D(t) := \alpha^2(t) = \alpha(t)\alpha(t) = ||\alpha(t)||^2$ que mide el cuadrado de la distancia de los puntos de la curva al origen.
t_0 es un punto relativo de dicha función por ser el punto más cercano al origen, entonces $D'(t_0) = 0 \implies 2\alpha(t_0)\alpha'(t_0) = 0 \implies \alpha(t_0) \perp \alpha'(t_0)$.

Ejercicio 3. Sea $\alpha \colon I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva y $v \in \mathbb{R}^3$ un vector dado. Si $\alpha'(t)$ es ortogonal a v para todo $t \in I$, y si $\alpha(0)$ también lo es, demuestre que $\alpha(t)$ es ortogonal a v para todo $t \in I$.

Definimos $f(t) := \alpha(t)v = \alpha_1(t)v_1 + \alpha_2(t)v_2 + \alpha_3(t)v_3$.
Tenemos que $f'(t) = \alpha'(t)v = 0 \ \forall t \in I$. Luego $f(t) = c \in \mathbb{R}, \ \forall t \in I$. Como en particular $f(0) = \alpha(0)v = 0 \implies c = 0 \implies \alpha(t) \perp v$.

Ejercicio 4. Si $\alpha \colon I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una curva regular, demuestre que $||\alpha(t)||$ es constante (diferente de cero) si y sólo si $\alpha(t) \perp \alpha'(t)$ para todo $t \in I$.

- ($\implies$). $||\alpha(t)||^2 = \alpha(t)\alpha(t) = c^2$. Derivando, $2\alpha(t)\alpha'(t) = 0 \implies \alpha(t) \perp \alpha'(t)$.

- $(\Longleftarrow).\alpha(t)\alpha'(t)=0 \implies \frac{1}{2}(\alpha(t)\alpha(t))'=0 \overset{\text{Integrando}}{\implies} \alpha(t)\alpha(t)=c \implies$
  $\implies ||\alpha(t)||^2=c \implies ||\alpha(t)||$ es constante.

Ejercicio 5. Si $\alpha\colon I\longrightarrow\mathbb{R}^3$ es una curva, y $M\colon\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3$ es un movimiento rígido, demostrar que las longitudes de α y $M\circ\alpha$ entre a y b coinciden.

$$L_a^b M\circ\alpha(t)=\int_a^b \left|\left|(M\circ\alpha)'\right|\right| = \int_a^b \left|\left|M'(\alpha(s))\alpha'(s)\right|\right| ds = \int_a^b \left|\left|\overrightarrow{M}\alpha'(s)\right|\right| ds \overset{\text{por ser mov. rigido}}{=}$$
$$=\int_a^b \left|\left|\alpha'(s)\right|\right| ds = L_a^b\alpha.$$

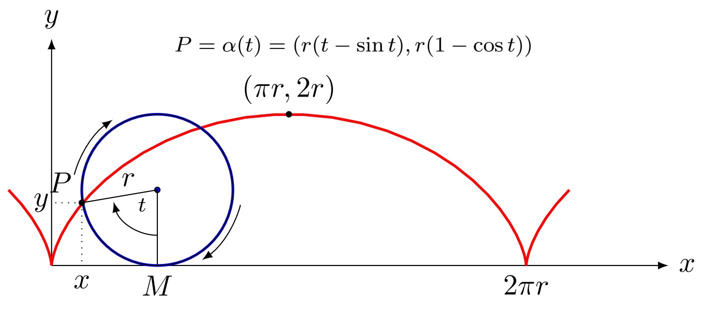
Ejercicio 6. Demuestre que las líneas tangentes a la curva $\alpha(t)=(3t,3t^2,2t^3)$ forman un ángulo constante con la recta $y=0,\ z=x$.

Tenemos que $\alpha'(t)=(3,6t,6t^2)$. La recta $r\equiv\left\{\begin{array}{l} y=0 \\ x=z\end{array}\right.$ tiene como vector director $v:=(1,0,1)$. El ángulo θ que forman v y $\alpha'(t)$ viene determinado por $\theta=\underset{[0,\pi)}{\arccos}\frac{\alpha'(t)v}{||\alpha'(t)||\,||v||}=$
$=\underset{[0,\pi)}{\arccos}\frac{3+6t^2}{\sqrt{9+36t^2+36t^4}\sqrt{2}}=\underset{[0,\pi)}{\arccos}\frac{3+6t^2}{(3+6t^2)\sqrt{2}}=\underset{[0,\pi)}{\arccos}\frac{\sqrt{2}}{2}$ que es constante.

Ejercicio 7. La curva engendrada por un punto P de una circunferencia de radio r que rueda sin deslizar por una recta fija se llama **cicloide**. Tomando dicha recta como eje de las X, y como parámetro t el ángulo orientado $\widehat{MCP}$ (C es el centro de la circunferencia y M el punto de contacto con el eje), probar que la posición de P para cada t es

$$\alpha(t)=(rt-r\sin t, r-r\cos t)$$

Se ha supuesto que en $t=0$, P coincide con M, y con el origen de coordenadas. Determine los puntos t donde $\alpha(t)=0$ (llamados de retroceso). (Nota:"sin deslizar" significa a efectos prácticos que la longitud del arco MP coicide con la longitud del segmento OM).



Ejercicio 8. Pruebe que la recta tangente a la cicloide por un punto P regular cualquiera viene determinada por los puntos P y M, siendo M el simétrico de M respecto a C.

Ejercicio 9. Determine la longitud del arco de cicloide entre dos puntos consecutivos de retroceso, en función del radio de la circunferencia rodante.

Ejercicio 10. Sea $\alpha\colon(-1,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}^2$ la curva

$$\alpha(t)=\left(\frac{3at}{1+t^3},\frac{3at^2}{1+t^3}\right),\ a>0$$

Se pide demostrar:

- La tangente a α en $t=0$ es el eje OX.
- Cuando $t\to\infty,\ \alpha(t)\to(0,0)$ y $\alpha'(t)\to(0,0)$.
- Si se toma la curva con la orientación opuesta, demuestre que cuando $t\to-1,\ \alpha(t)$ y su tangente se acecan a la recta $x+y+a=0$.

- $\alpha(t)=\left(\frac{3at}{1+t^3},\frac{3at^2}{1+t^3}\right)=\frac{3at}{1+t^3}(1,t)\implies\alpha'(t)=\frac{3a(1+t^3)-3t^2(3at)}{(1+t^3)^2}(1,t)+$ $+\frac{3at}{1+t^3}(0,1)=\frac{3a}{1+t^3}\left(\frac{1-2t^3}{1+t^3},\frac{t-2t^4}{1+t^3}+t\right)=\frac{3a}{1+t^3}\left(\frac{1-2t^3}{1+t^3},\frac{2t-t^4}{1+t^3}\right)=$ $=\frac{3a}{(1+t^3)^2}(1-2t^3,2t-t^4)\xrightarrow{t\to0}(3a,0)$.
- $\lim_{t\to\infty}\alpha(t)=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{3at}{1+t^3},\frac{3at^2}{1+t^3}\right)\overset{\text{L'Hôpital}}{=}\lim_{t\to\infty}\left(\frac{3a}{3t^2},\frac{6a}{6t}\right)=(0,0)$.
  $\lim_{t\to\infty}\alpha'(t)=\lim_{t\to\infty}\frac{3a}{(1+t^3)^2}(1-2t^3,2t-t^4)=(0,0)$.
-