Cálculo

Universidad Complutense de Madrid

Facultad de Ciencias Matemáticas

Doble Grado en Matemáticas e Ingeniería Informática

Javier Pellejero

Curso 2015-2016

Un matemático que no es en algún sentido un poeta no será nunca un matemático completo.

Karl Weierstraß

Prefacio

El cálculo diferencial es la herramienta del análisis matemático que estudia la transformación de las funciones cuando sus variables cambian. El cálculo integral por su parte nos proporciona las herramientas para la resolución de cálculos infinitesimales y el cálculo de áreas y volúmenes de regiones y sólidos de revolución. El desarrollo de dichas herramientas en este curso nos permitirá, entre otras cosas, resolver problemas de funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ que se alejan de la asignatura de análisis de variable real de primer curso.

Para cursar estas asignaturas es necesario tener una base en el análisis de una variable. Algunas proposiciones de estos apuntes no están demostradas, bien porque ya que fueron vistas en el curso pasado, o bien porque no han sido demostradas en clase. Pese a ello han sido añadidas algunas de las anteriores en base a otros apuntes y/o bibliografía. Por ello recomiendo revisar los apuntes de David Peñas de *Análisis de variable real* si fuere necesario.

Estos apuntes están basados en las clases de *Cálculo diferencial* de doña María del Pilar Cembranos Díaz y en las clases de *Cálculo integral* de don José Javier de Mendoza Casas durante el curso 2015-2016, en los apuntes de Daniel Azagra de *Cálculo Integral* y en el libro *Marsden, J. and Hoffman, M. (1998). Análisis clásico elemental.*

Por último quiero agradecer a Álvaro Rodríguez por la ayuda prestada con LaTeXy a Miguel Pascual y Luis Aguirre por aguantarnos los unos a los otros y hacer de esta complicada carrera algo más ameno.

Índice general

Capítulo 1

Espacios métricos, normados y con producto escalar

1.1. Espacios métricos

Definición 1. Un espacio métrico (M, d) es un conjunto M con una función $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$ que cumple:

1) $d(x, y) \geq 0 \ \forall x, y \in M$

2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

3) $d(x, y) = d(y, x) \ \forall x, y \in M$

4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z) \ \forall x, y, z \in M$

Ejemplo.

1) En $\mathbb{R}$ con $d(x, y) = |x - y| \ \forall x, y \in \mathbb{R}$

2) En $\mathbb{R}^n$ con $d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}$

3) En $\mathbb{R}^n$ con $d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$

4) En $\mathbb{R}^n$ con $d_\infty(x, y) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$

5) En $\mathbb{R}^n$ si $p \in (1, +\infty)$ con $d_p(x, y) = (\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|)^{1/p}$

6) En un conjunto arbitrario con

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

7) En $C = \{f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ ॥ f continua en $[0, 1]$con $d_\infty(f, g) = \max\limits_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|\}$

8) Si $M = \{0,1\}^n = \{(\theta_1, \theta_2, ...\theta_n) \shortparallel \theta_i = 1 \text{ ó } 0, \text{ para } 1 \leq i \leq n\}$ con $d((\theta_1...\theta_n), (t_1...t_n)) =$ número de coordenadas distintas.

9) Sea (M, d) un espacio métrico podemos definir la métrica p que es acotada: $p(x, y) =$ $= \dfrac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$ $\forall x, y \in M$

Definición 2. Sea (M, d) un espacio métrico y sea $A \subset M$ definimos el diámetro de A como $\text{diam}(A) = \sup\{d(x, y) \shortparallel x, y \in A\}$

Definición 3. Decimos que $A \subset M$ es acotado si tiene diámetro finito.

Ejemplo.

1) $\mathbb{N}$ en $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ no es acotado.

2) $\mathbb{N}$ en $(\mathbb{R}, \partial)$, siendo ∂ la métrica discreta, es acotado.

1.2. Espacios normados

Definición 4. Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ una norma en E es una aplicación $||\cdot|| \colon E \to \mathbb{R}$ con las siguienetes propiedades:

1. $||x|| \geq 0$ $\forall x \in E$
2. $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
3. $||\lambda x|| = |\lambda|\, ||x||$ $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in E$
4. $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ $\forall x, y \in E$ **(Desigualdad triangular)**.

Nota. - Un espacio normado $(E, ||\cdot||)$ es un espacio vectorial junto con la norma $||\cdot||$

Ejemplo.

1) En $\mathbb{R} ||t|| = |t|$ $\forall t \in \mathbb{R}$

2) En $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||_2)$ donde $||x||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$

3) En $\mathbb{R}^n$ con $||x||_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$

4) En $\mathbb{R}^n$ con $||x||_{p\ \ 1<p<+\infty} = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{1/p}$

5) En $\mathbb{R}^n$ con $||x||_\infty = \max |x_i|$

6) En $C([0, 1])$ con:

   I) $||f||_\infty = \max |f(x)|$ $\forall f \in C$

II) $||f||_1 = \int_0^1 |f(x)|dx \ \forall f \in C$

III) $||f||_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2 dx} \ \forall f \in C$

Proposición 1. Sea $(E, ||\cdot||)$ un espacio normado, entonces la aplicación $d\colon E \times E \to \mathbb{R}$ definida por $d(x,y) = ||x-y|| \ \forall x, y \in E$ es una métrica en E (que llamamos métrica inducida por la norma).

1.3. Espacios vectoriales

Definición 5. Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, un producto escalar (o producto interno) en E es una aplicación $<,>\colon E \times E \to \mathbb{R}$ que cumple:

1) $< x, x > \geq 0 \ \forall x \in E$

2) $< x, x > = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \forall x \in E$

3) $< x+y, z > = < x, z > + < y, z > \ \ \forall x, y, z \in E$

4) $< \lambda x, y > = \lambda < x, y > \ \ \forall x, y \in E, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

5) $< x, y > = < y, x > \ \ \forall x, y \in E$

Ejemplo.

1) En $\mathbb{R}$ $< t, s > = t \cdot s \ \forall t, s \in \mathbb{R}$

2) En $\mathbb{R}^n$ $< x, y > = \sum_{i=1}^n x_i y_i \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

3) En $C([0,1])$ $< f, g > = \int_0^1 f(x)g(x)dx$

Corolario 1. Consecuencias de la definición.
Si $<,>$ es un producto escalar en un espacio vectorial E se tiene:

1) $< \lambda x + \mu y, z > = \lambda < x, z > + \mu < y, z >$

2) $< x, \lambda y + \mu z > = \lambda < x, y > + \mu < x, z >$

3) $< x, \lambda y > = \lambda < x, y >$

4) $< x, 0 > = < 0, x > = 0$

- $\forall x, y, z \in E, \ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Teorema 1. ***Desigualdad de Cauchy - Schwarz.***
Si $<,>$ es un producto escalar en E (sobre $\mathbb{R}$) entonces:

$$| < x, y > | \leq \sqrt{< x, x >}\sqrt{< y, y >} \ \forall x, y \in E$$

Demostración. Sean $x, y \in E$

- Si $y = 0$

$$\left.\begin{array}{l} |<x,y>| = |<x,0>| = 0 \\ |<y,y>| = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow |<x,0>| = \sqrt{<x,x>}\sqrt{0}$$

- Si $y \neq 0$
  Tenemos $<y,y> > 0$ y $\left(x - \frac{<x,y>}{<y,y>}y\right) \in E$
  $0 \leq <x - \frac{<x,y>}{<y,y>}y, x - \frac{<x,y>}{<y,y>}y> =$
  $= <x,x> - \frac{<x,y>}{<y,y>} <x,y> - \frac{<x,y>}{<y,y>} <x,y> + \left(\frac{<x,y>}{<y,y>}\right)^2 <y,y> =$
  $= <x,x> - \frac{(<x,y>)^2}{<y,y>} \geq 0 \implies \frac{(<x,y>)^2}{<y,y>} \leq <x,x> \implies$
  $\implies (<x,y>)^2 \leq <x,x><y,y> \implies |<x,y>| \leq \sqrt{<x,x>}\sqrt{<y,y>}$

□

Observación. En particular si en $\mathbb{R}^n$ $<x,y> = \sum_{i=1}^n x_i y_i$

$$\left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

Definición 6. Si $(E, <,>)$ es un espacio con un producto escalar, definimos en E la norma:

$$||x|| = \sqrt{<x,x>}$$

Teorema 2. ***Igualdad del paralelogramo.***
Sea $(E, <,>)$ un espacio vectorial con producto escalar y $||x|| = \sqrt{<x,x>}$ $\forall x, y \in E$ entonces:

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2) \ \forall x, y \in E$$

Observación. No toda norma proviene de un producto escalar, por ejemplo $||\cdot||_\infty$ en $\mathbb{R}^2$

Proposición 2. Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ y sea $||\cdot||$ una norma en E entonces $||\cdot||$ proviene de un producto escalar $\iff$ se cumple la igualdad del paralelogramo.

Demostración.

- ($\implies$) trivial.
- ($\impliedby$) Si definimos $<x,y> = \frac{1}{\mu}(||x+y||^2 - ||x-y||^2)$ $\forall x, y \in E$
  Se comprueba que $<,>$ es un producto escalar en E y la norma que genera es la definida.

□

Capítulo 2

Topología de Espacios métricos

2.1. Conjuntos abiertos y cerrados

Nota. Sea (M, d) un espacio métrico recordamos que si $N \subset M$ entonces $(N, d|_{N\times N})$ es un espacio métrico.

Definición 7. Sea $a \in M$ y $r > 0$

- $B(a, r) = \{x \in M \shortparallel d(x, a) < r\}$ Bola abierta de centro a y radio r.
- $\overline{B}(a, r) = \{x \in M \shortparallel d(x, a) \leq r\}$ Bola cerrada de centro a y radio r.

Definición 8. Sea (M, d) y sea $A \subset M$ decimos que:

- A es abierto si $\forall a \in A\ \exists r > 0 \shortparallel B(a, r) \subset A$
- A es cerrado si $A^c (= M \setminus A)$ es abierto.
- Sea $a \in M$, decimos que $U \subset M$ es entorno de a si $\exists r > 0 \mid B(a, r) \subset U$

Proposición 3. A es abierto $\iff$ A es entorno de a, $\forall a \in A$

Proposición 4. Propiedades de los subconjuntos abiertos de M

1) M, $\emptyset$ Son abiertos.

2) La unión de abiertos es abierta.

3) La intersección de una familia finita de abiertos es un subconjunto abierto.

Corolario 2. Por las leyes de Morgan obtenemos las siguientes propiedades de subconjuntos cerrados de M:

1) M, $\emptyset$ Son cerrados.

2) La intersección de cerrados es cerrada.

3) La unión de una familia finita de cerrados es un subconjunto cerrado.

2.2. Topología básica

Definición 9. Sea $A \subset M$ y sea $x \in M$

- Decimos que x es punto interior de A si $\exists r > 0 \shortparallel B(x,r) \subset A$
- Decimos que x es punto de acumulación de A si $\forall r > 0 \shortparallel (B(x,r) - \{x\} \cap A) \neq \emptyset$
- Decimos que x es punto adherente de A si $\forall r > 0 \shortparallel B(x,r) \cap A \neq \emptyset$
- Decimos que x es punto frontera de A si

$$\forall r > 0 \begin{cases} B(x,r) \cap A \neq \emptyset \\ B(x,r) \cap A^c \neq \emptyset \end{cases}$$

- Decimos que x es punto aislado de A si $\exists r > 0 \shortparallel B(x,r) \cap A = \{x\}$
- Decimos que x es punto exterior de A si $\exists r > 0 \shortparallel B(x,r) \subset A^c$

- $\mathring{A}$ = puntos interiores de A

- A' = puntos de acumulación de A

- $\overline{A}$ = puntos adherentes de A

- $\mathrm{Fr}(A)$ = puntos frontera de A

- $\mathrm{Ais}(A)$ = puntos aislados de A

Proposición 5.

1) $\mathring{A}$ es el mayor abierto contenido en A

$$\mathring{A} = \cup\{G \subset M \shortparallel G \text{ es abierto y } G \subset A\}$$

2) $\overline{A}$ es el menor cerrado que contiene a A

$$\overline{A} = \cap\{F \subset M \shortparallel F \text{ es cerrado y } A \subset F\}$$

Proposición 6.

- A es abierto $\iff A = \mathring{A}$
- A es cerrado $\iff A = \overline{A}$

Nota. Ser "abierto" o "cerrado" dependen del espacio ambiente.

Ejemplo. $(0,1]$ es cerrado en $\mathbb{R}^+$ y no lo es en $\mathbb{R}$

Proposición 7.

- $\overline{A} = A \cup \mathrm{Fr}(A) = A \cup A' = \mathrm{Ais}(A) \cup A'$
- $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A}$

Definición 10. Una métrica d en un conjunto M genera una topología que es la colección de los conjuntos abiertos. La denotamos así:

$$\tau_d = \{A \subset M \shortparallel A \text{ es abierto}\}$$

Definición 11. Sean d_1 y d_2 métricas en un conjunto M, diremos que son equivalentes si generan la misma topología; es decir:

$$\tau_{d_1} = \tau_{d_2}$$

Proposición 8. Sean d_1 y d_2 métricas en M, $d_1 \equiv d_2 \iff \forall x \in M,\ \forall r > 0$ $\exists \gamma_1 > 0 \shortparallel B_{d_1}(x, \gamma_1) \subset B_{d_2}(x, r)$ y $\exists \gamma_2 > 0 \shortparallel B_{d_2}(x, \gamma_2) \subset B_{d_1}(x, r)$

- Una condición suficiente para que dos métricas d_1 y d_2 en M sean equivalentes es que $\exists c, C > 0$ de manera que:

$$cd_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq Cd_1(x,y)\ \forall x, y \in M \implies d_1 \equiv d_2$$

-Sin embargo esta condición no es necesaria generalmente
-Si la métricas d_1 y d_2 provienen de una norma, esta condición se hace entonces necesaria además de suficiente para que dichas métricas sean equivalentes; es decir:

$$\text{Si } d_1, d_2 \text{ provienen de una norma :}$$

$$d_1 \equiv d_2 \iff \exists c, C > 0 \shortparallel cd_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq Cd_1(x,y)\ \forall x, y \in M$$

Definición 12. Decimos que dos normas son equivalentes en un espacio E si $||\cdot||$ y $||\cdot||'$ generan la misma topología.

Proposición 9. $||\cdot||$ y $||\cdot||'$ son equivalentes $\iff \exists m, M > 0$ tal que $m||x|| \leq ||x||' \leq M||x||\ \forall x \in E$

Ejemplo. En $(\mathbb{R}^2, d_2)$, sea $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \shortparallel x > 0, y > 0, xy > 1\}$ A es abierto?

En efecto A es abierto:

Demostración. Probaremos que $\forall (a,b) \in A,\ \exists r > 0 \shortparallel B((a,b),r) \subset A$

$$\text{Sabemos} \left\{ \begin{array}{l} a > 0 \\ b > 0 \\ ab > 1 \end{array} \right\}$$

Supongamos que $(x,y) \in B((a,b),r) \implies \{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = d((x,y),(a,b))\} \implies$

$$\implies \left\{ \begin{array}{l} |x-a| < r \\ |y-b| < r \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} a-r < x < a+r \\ b-r < y < b+r \end{array} \right\} \implies xy > (a-r)(b-r) =$$

$$= ab - r(a+b) + r^2 > ab - r(a+b) \geq 1 \iff ab - 1 \geq r(a+b) \iff \frac{ab-1}{a+b} \geq r > 0$$

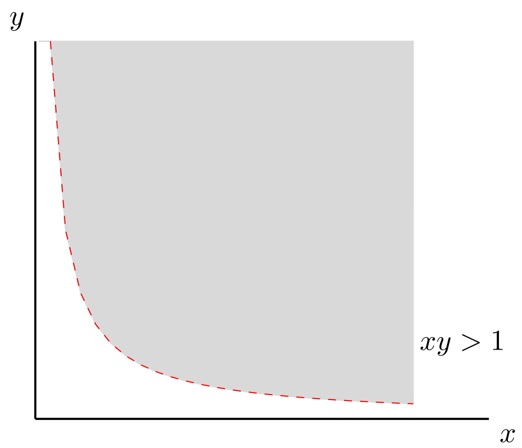
Por tanto para $0 < r \leq \dfrac{ab-1}{a+b}$, $xy > 1$. Veamos por ultimo que $x, y > 0$

$$x > a - r \geq a - \frac{ab-1}{a+b} = \frac{a(a+b) - ab + 1}{a+b} = \frac{a^2+1}{a+b} > 0$$

$$y > b - r \geq b - \frac{ab-1}{a+b} = \frac{b(a+b) - ab + 1}{a+b} = \frac{b^2+1}{a+b} > 0$$

□

Figura 1.



Capítulo 3

Congruencia en Espacios métricos

3.1. Sucesiones, sucesiones de Cauchy y espacios métricos completos

Definición 13. Sea (M, d) un espacio métrico:
Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en M, y sea $x \in M$, diremos que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x si $\forall \varepsilon > 0 \ \exists k \in \mathbb{N} \shortparallel d(x_n, x) < \varepsilon \ \forall n \geq k$
Si es así denotamos a x límite de la sucesión. Y lo denotamos $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ ó $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$.

Proposición 10. Si el límite de una función existe, este es único.

Definición 14. Diremos que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge si tiene límite. En caso contrario diremos que diverge.

Observación. Si d y d' son métricas equivalentes en M y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es sucesión en M, entonces:

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ converge en } (M, d) \iff \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ converge en } (M, d')$$

Ejemplo.

- En $(\mathbb{R}, d_2)$: $\{c\}_{n=1}^{\infty}$ con $c \in \mathbb{R}$, $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$, $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$
- En $(\mathbb{R}^2, d_2)$: $\left\{\frac{1}{n}, \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ (que converge a $(0, e)$).

Proposición 11. Sea (M, d) espacio métrico, $A \subset M$ y $x \in M$, se cumple:

1) $x \in A' \iff \exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \shortparallel x_n \in A - \{x\} \ \forall n \in \mathbb{N}$, convergente a x.

2) $x \in \overline{A} \iff \exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \shortparallel x_n \in A \ \forall n \in \mathbb{N}$ convergente a x.

3) $x \in Fr(A) \iff \exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \shortparallel x_n \in A \ \forall n \in \mathbb{N}$ y $\exists \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \shortparallel y_n \in A^c \ \forall n \in \mathbb{N}$, convergentes a x.

4) A es cerrado $\iff \forall a' \in A', a' \in A \iff \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \shortparallel x_n \in A \ \forall n \in \mathbb{N}$, convergente, cumple que: $\lim_{n\to\infty} x_n \in A$

Definición 15. . Sea (M, d) espacio métrico y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en M, decimos que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ <u>es de Cauchy</u> si $\forall \varepsilon > 0 \ \exists k \in \mathbb{N} \shortparallel d(x_p, x_q) < \varepsilon \ \forall p, q \geq k$.

Proposición 12. . Sea (M, d) un espacio métrico:

I) Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergente $\overset{(\not\Leftarrow)}{\Longrightarrow}$ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es sucesión de Cauchy.

II) Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión de Cauchy $\overset{(\not\Leftarrow)}{\Longrightarrow}$ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada.

Observación. Veamos, en efecto, que las anteriores propiedades no son equivalentes.

- Una sucesión de Cauchy no tiene por qué converger; es el caso de $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy en $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ pero no converge.
- $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ acotada $\not\Longrightarrow$ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy; Por ejemplo: $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$

Definición 16. Un espacio métrico <u>es completo</u> si toda sucesión de Cauchy es convergente.

<u>Ejemplo</u>.

- Completos: $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, $(\mathbb{R}^2, d_1)$, $(\mathbb{N}, |\cdot|)$.
- No completos: $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$, $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, |\cdot|)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, |\cdot|)$.

Definición 17. Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión y $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión estrictamente creciente en $\mathbb{N}$ decimos que $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} = \{x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3} ...\}$ <u>es una subsucesión</u> de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Proposición 13. . Sea (M, d) espacio métrico y sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en M que converge a x, entonces cualquier subsucesión de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge también a x.

Demostración.
Sea $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ subsucesión de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, comprobemos que $x_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} x$
Dado $\varepsilon > 0$, como $x_n \xrightarrow{k\to\infty} x$, $\exists n_0 \in \mathbb{N} \shortparallel d(x_n, x) < \varepsilon \ \forall n \geq n_0$. Ahora, si $k \geq n_0$ entonces $n_k \geq n_{n_0} \geq n_0$. Luego $d(x_{n_k}, x) < \varepsilon$ □

Corolario 3.

1) Si una sucesión tiene dos subsucesiones que convergen a distinto límite, entonces la sucesión diverge.

2) Sean d y d' métrcias equivalentes en M:

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ converge en } (M,d) \iff \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ converge en } (M,d')$$

Nota. En general (M,d) y (M,d') NO tienen las mismas sucesiones de Cauchy.

Ejemplo. Sean $(\mathbb{R},|\cdot|)$ y $(\mathbb{R},d)$ siendo $d(x,y)=|arctg(x)-arctg(y)|$ son equivalentes pero no tienen las mismas sucesiones de Cauchy.

Proposición 14. . Si d y d' provienen de una misma norma, entonces (M,d) y (M,d') tienen las mismas sucesiones de Cauchy.

Demostración. Por provenir d y d' de una misma norma, $\exists\alpha,\beta>0$ tal que $\alpha d(x,y)\leq d'(x,y)\leq\beta d(x,y)$ $\forall x,y\in M$ □

3.2. Compacidad de conjuntos

Definición 18. . Sea (M,d) espacio métrico y $A\subset M$. Entonces definimos un recubrimiento de A como la familia $\{G_\alpha:\alpha\in\Gamma\}$ de conjuntos abiertos tal que:

$$\cup_{\alpha\in\Gamma}G_\alpha\supset K$$

Definición 19. . Sea (M,d) un espacio métrico y sea $K\subset M$, diremos que K es compacto si todo recubrimiento abierto de K posee un subrecubrimiento finito; es decir, para cada familia $\{G_\alpha,\alpha\in\Gamma\}$ de conjuntos abiertos tal que $\cup_{\alpha\in\Gamma}G_\alpha\supset K$, $\exists\sigma\subset\Gamma,\sigma$ finito, tal que:

$$\cup_{\alpha\in\sigma}G_\alpha\supset K$$

Ejemplo. Ejemplos de conjuntos compactos:

- Cualquier conjunto finito.
- Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergente en M a x_0, entonces $\{x_0\}\cup\{x_n \shortparallel n\in\mathbb{N}\}$ es compacto.

Proposición 15. Propiedades de los compactos.
Sea (M,d) espacio métrico y $K\subset M$:
-K es compacto en (M,d) $\iff$ K es compacto en $(K,d|_{K\times K})$.

1) Si K es compacto $\implies$ K es cerrado y acotado.

Demostración.

- Veamos primero que compacto $\implies$ acotado.
  Sea $M\neq\emptyset$, sea $a\in M$ como $M=\cup_{n=1}^{\infty}B(a,n)$
  Así $\{B(a,n) \shortparallel n\in\mathbb{N}\}$ es un recubrimiento por abiertos de K, y por ser K compacto $\exists n_1,n_2,...n_k \shortparallel K\subset\cup_{i=1}^{k}B(a,n_i)=B(a,m)$ con $m=max\{n_1,...n_k\}$, por tanto K es acotado.

- Veamos ahora que compacto $\Longrightarrow$ cerrado.
  Veamos que K^c es abierto. Sea $b \in K^c$ $\forall x \in K$, como $x \neq b$, $\exists r_x > 0 \shortparallel B(x, r_x) \cap B(b, r_x) = \emptyset$.
  Entonces $\{B(x, r_x) \shortparallel x \in K\}$ es un recubrimiento de abiertos tal que $\cup_{x \in K} B(x, r_x) \supset K$. Luego por ser K compacto $\exists x_1, x_2, ...x_m \in K \shortparallel K \subset \cup_{i=1}^{m} B(x_i, r_{x_i})$.
  Tomemos $r = min\{r_{x_1}, r_{x_2}, ...r_{x_m}\}$, tenemos que $B(b, r) \subset K^c$ ya que $(B(b,r) \cap K) \subset (B(b,r) \cap (\cup_{i=1}^{m} B(x_i, r_{x_i}))) = \cup_{i=1}^{m} (B(b,r) \cap B(x_i, r_{x_i})) \subset \cup_{i=1}^{m} (B(b, r_{x_i}) \cap B(x_i, r_{x_i})) = \emptyset \Longrightarrow K$ es cerrado. □

□

2) Si $K \subset M$ es compacto, entonces K es precompacto (también llamado "totalmente acotado"), si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x_1, x_2...x_n \in K \shortparallel K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$

   Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, basta tener en cuenta que $\{B(x, r) \shortparallel x \in K\}$ es recubrimiento por abiertos de K por ser K compacto posee un subrecubrimiento finito. □

3) Sea K compacto $\subset M$ y sea $C \subset K \shortparallel C$ es cerrado $\Longrightarrow$ C es compacto.

   Demostración. Sea $\{G_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ una familia de abiertos en $M \shortparallel$
   $\cup_{\alpha \in \Gamma} G_\alpha \supset C$
   Como C es cerrado, entonces C^c es abierto y $M \supset K = C^c \cup (\cup_{\alpha \in \Gamma} G_\alpha)$. Así $\{C^c\} \cup \{G_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ es un recubrimiento por abiertos de K. Como K es compacto $\exists \alpha_1, \alpha_2...\alpha_k \in \Gamma \shortparallel K \subset C^c \cup (\cup_{i=1}^{k} G_{\alpha_i})$
   Entonces, como $C \subset K$, tenemos $C \subset \cup_{i=1}^{k} G_{\alpha_i} \Longrightarrow C$ es compacto. □

Proposición 16. En $\mathbb{R}^n$ con la métrica usual, sea $A \subset \mathbb{R}^n$, entonces A es acotado $\Longleftrightarrow$ A es precompacto.

Observación. En otros espacios métricos, en general, no es cierta la proposición:
Ejemplo: En $\mathbb{R}$ con la métrica discreta, $(0, 1)$ es acotado pero no precompacto. Sea $\varepsilon_0 = 0,5$ entonces $(0,1) = \bigcup\limits_{x \in (0,1)} B(x, \varepsilon)$ y en $(0, 1)$ hay infinitos puntos.

Teorema 3. ***Teorema de Bolzano-Weierstrass***
Sea (M, d) espacio métrico y sea $K \subset M$, entonces son equivalentes:

(a) K compacto.

$$\Longleftrightarrow$$

(b) Todo subconjunto infinito de K posee un punto de acumulación contenido en K

$$\Longleftrightarrow$$

(c) Toda sucesión en K posee una subsucesión convergente a un elemento de K

Demostración.

- (1) $\implies$ (2)
  Sea K compacto. Sea $S \subset K$, S infinito, probemos que $\exists x \in S' \cap K$
  Supongamos que no, que no hay ningún punto de K que pertenezca a S'
  Entonces $\forall x \in K\ \exists \gamma_x > 0 \shortparallel (B(x, \gamma_x) \setminus \{x\}) \cap S = \emptyset$ $(*)$
  Tenemos que $\{B(x, \gamma_x) \shortparallel x \in K)$ es un recubrimiento por abiertos de K y por ser K compacto $\exists x_1, x_1 ... x_m \in K \shortparallel K \subset \cup_{i=1}^m B(x_i, \gamma x_i)$. Como $S \subset K$, tenemos $S \subset \cup_{i=1}^m B(x_i, \gamma x_i)$
  Por $(*)$ $S \subset \{x_1, x_2 ... x_m\}$ y esto es absurdo pues S es infinito. Por tanto existe $x_0 \in K \shortparallel x_0 \in S'$

- (2) $\implies$ (3)
  Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión en K, veamos que tiene una subsucesión convergente. Entonces, sea S el rango de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, es decir, $S = \{x_n \shortparallel n \in \mathbb{N}\}$. Si:

  - S finito. Existe un elemento que se repite infinitas veces y por tanto existe una subsucesión constante y por tanto convergente en un elemento de K
  - S infinito $\implies$ por (2), $\exists x_0 \in S' \cap K$. Construyamos la subsucesión:
    Como $x_0 \in S'$ $\forall \varepsilon > 0 (B(x_0, \varepsilon) \setminus \{x_0\}) \cap S \neq \emptyset \implies$ la intersección $B(x_0, \varepsilon) \cap S$ es infinita. Así, $(B(x_0, 1) \setminus \{x_0\}) \cap S \neq \emptyset \implies \exists n_1 \in \mathbb{N} \shortparallel x_{n_1} \in B(x_0, 1)$
    Como $(B(x_0, 1/2) \setminus \{x_0\}) \cap S$ es infinito $\implies \exists n_2 > n_1 \shortparallel x_{n_2} \in B(x_0, 1/2)$
    ...
    $(B(x_0, 1/k) \setminus \{x_0\}) \cap S$ es infinito $\implies \exists n_k > n_{k-1} \shortparallel x_{n_k} \in B(x_0, 1/k)$. Y por tanto $\exists \{n_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ y creciente $\shortparallel x_{n_k} \in B(x_0, 1/k)\ \forall k \in \mathbb{N}$. Es claro que $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ es subsucesión de $\{x_n\}$ y como $0 < d(x_0, x_{n_k}) \leq 1/k\ \forall k \in \mathbb{N}$, tenemos que
    $d(x_{n_k}, x_0) \xrightarrow{k \to \infty} 0 \iff x_{n_k} \xrightarrow{k \to \infty} x_0$

- (3) $\implies$ (1)
  Veamos primero que K es precompacto.
  Supongamos que no. Si K no es precompacto $\implies \exists \varepsilon_0 > 0 \shortparallel K$ no está contenido en la unión de un número finito de bolas centradas en puntos de K y radio ε_0
  Sea $x_1 \in K$. Como $K \not\subset B(x_1, \varepsilon_0) \implies \exists x_2 \in K \setminus B(x_1, \varepsilon_0)$
  $K \not\subset (B(x_1, \varepsilon_0) \cup B(x_2, \varepsilon_0)) \implies \exists x_3 \in K \setminus (B(x_1, \varepsilon_0) \cup B(x_2, \varepsilon_0))$
  ...
  Obtenemos $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset K \shortparallel \forall n \in \mathbb{N} x_{n+1} \in K \setminus (\cup_{i=1}^n B(x_i, \varepsilon_0)) \implies \{x_n\}$ no es de Cauchy pues $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon_0\ \forall n, m; n \neq m$. Es más, de aquí podemos deducir que ninguna subsucesión de $\{x_n\}$ es de Cauchy $\implies$ ninguna convergente $\implies$ contradice (3)
  Por lo tanto ya sabemos que K es precompacto. Veamos ahora que es compacto:
  Sea $\{G_\alpha\ | \alpha \in \Gamma\}$ recubrimiento por abiertos de K. Veamos que
  $\exists r > 0 \shortparallel \forall x \in K\ \exists \alpha_x \in \Gamma \shortparallel B(x, r) \subset G_{\alpha_x}$:
  Si no, $\forall \varepsilon > 0\ \exists x_\varepsilon \in K \shortparallel B(x_\varepsilon, \varepsilon) \not\subset G_\alpha\ \forall \alpha \in \Gamma$

Luego, $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in K \shortparallel B(x_n, \frac{1}{n}) \not\subset G_\alpha\ \forall \alpha \in \Gamma$
Tenemos así $\{x_n\}$ sucesión en K y por la hipótesis (3) $\exists \{x_{n_j}\}_{j=1}^{\infty}$ subsucesión $\shortparallel x_{n_j} \xrightarrow[j\to\infty]{} x_0 \in K$
Como $x_0 \in K \subset \cup_{\alpha\in\Gamma} G_\alpha\ \exists \alpha_0 \in \Gamma \shortparallel x_0 \in G_{\alpha_0}$. Como este es abierto, $\exists \delta > 0 \shortparallel B(x_0, \delta) \subset G_{\alpha_0}$. Como $x_{n_j} \xrightarrow[j\to\infty]{} x_0$ y $\frac{1}{n_j} \xrightarrow[j\to\infty]{} 0$; para $\frac{\delta}{2} > 0$, $\exists m \in \mathbb{N} \shortparallel d(x_{n_m}, x_0) < \frac{\delta}{2}$ y $\frac{1}{n_m} < \frac{\delta}{2}$.
Entonces $B(x_{n_m}, \frac{1}{n_m}) \subset B(x_0, \delta)$ con lo que llegamos a una contradicción.
Visto ahora que $\exists r > 0 \shortparallel \forall x \in K\ \exists \alpha_x \in \Gamma \shortparallel B(x, r) \subset G_{\alpha_x}$ y sabiendo que es precompacto:
K precompacto $\Longrightarrow\ \exists y_1, ..., y_m \in K \shortparallel K \subset \cup_{i=1}^{m} B(y_i, r) \subset \cup_{i=1}^{m} G_{\alpha_{y_i}} \Longrightarrow$ hemos extraído un subrecubrimiento finito.

□

Proposición 17. Consecuencia del teorema.
Si K es compacto $\Longrightarrow$ K es completo.

Proposición 18. Si K es compacto $\Longrightarrow$ K es precompacto.

Teorema 4. Teorema de Heine Borel.
Sea $n \in \mathbb{N}$, $(\mathbb{R}^n, d_2)$ espacio métrico y sea $A \subset \mathbb{R}^n$ compacto $\Longleftrightarrow$ A es cerrado y acotado.

Demostración.

- " $\Longrightarrow$ " Se cumple para todo espacio métrico.
- " $\Longleftarrow$ " Supongamos que $A \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado y acotado. Probemos que A es compacto. Por *Bolzano-Weierstrass* basta probar que toda sucesión en A posee una subsucesión convergente a un elemento de A.
  Sea $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} = \{(x_1^k, x_2^k, ..., x_n^k)\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión en A, como A es acotado, entonces $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ es acotado en $\mathbb{R}^n$. Así cada sucesión $\{x_i^k\}_{k=1}^{\infty}$;
  $1 \le i \le n$, es acotada en $\mathbb{R}$. Como $\{x_1^k\}_{k=1}^{\infty}$ es acotada, $\exists \sigma_1 \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente $\shortparallel \{x_1^{\sigma_1(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ converge.
  Como $\{x_2^{\sigma_1(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ es acotada, $\exists \sigma_2 \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente $\shortparallel \{x_2^{\sigma_2(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ converge. Repitiendo esto n-veces , tenemos que $\exists \sigma_n \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente $\shortparallel \{x_n^{\sigma_n(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ converge y también $\{x_i^{\sigma_n(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ con $1 \le i \le n$, $\Longrightarrow$ Sea $x_i = \lim_{k\to\infty} x_i^{\sigma_n(k)}$ y tenemos que $\{x^{\sigma_n(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ subsucesión que converge a $(x_1, x_2, ..., x_n)$
  Como $x^{\sigma_n(k)} \in A$, $\forall k \in \mathbb{N}$ entonces $x^{\sigma_n(k)} \xrightarrow[k\to\infty]{} (x_1, x_2, ..., x_n)$; y ahora, como A es cerrado $(x_1, x_2, ..., x_n) \in A$

□

Capítulo 4

Conjuntos conexos en espacios métricos

4.1. Conjuntos conexos

Definición 20. Sea (M, d) espacio métrico y sea $A \subset M$ diremos que <u>A es conexo</u> si no existen dos abietos U y $V \in M$ tal que:

- $U \cap A \neq \emptyset$
- $V \cap A \neq \emptyset$
- $A \cap U \cap V = \emptyset$
- $(U \cap A) \cup (V \cap A) = A \quad (\iff U \cup V \supset A)$

Nota. Podemos definirlo coloquialmente como no poder partir el conjunto en dos abiertos relativos no triviales.

<u>**Ejemplo.**</u>

- CONEXOS.
  1) Conjuntos unitarios.
- NO CONEXOS.
  1) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$
  2) Si $card(A) \geq 2$ y tiene al menos un punto aislado.

Proposición 19. Sea (M,d) espacio métrico y $A \subset M$. Son equivalentes:

a) A es conexo

b) No existen dos cerrados F y $H \in M$ tal que:

   1) $F \cap A \neq \emptyset$
   2) $H \cap A \neq \emptyset$
   3) $H \cap F \cap A = \emptyset$
   4) $(F \cap A) \cup (H \cap A) = A \ \ (\iff F \cup H \supset A)$

c) Los únicos subconjuntos de A que son a la vez abiertos y cerrados relativos son $\emptyset$ y A.

Observación. En general A y B conexos:

- $\not\Longrightarrow A \cup B$ conexo.
- $\not\Longrightarrow A \cap B$ conexo.
- $\mathring{A}$ conexo.

Proposición 20. Sea (M,d) espacio métrico y sea $A \subset M$ conexo, entonces $\overline{A}$ es conexo. Más aún, si $B \subset M$ ॥ $A \subset B \subset \overline{A} \subset M$, B es conexo.

Demostración. Sea B tal que $A \subset B \subset \overline{A}$ veamos que B es conexo. Sean F y H dos cerrados en M tales que $H \cap F \cap B = \emptyset$ y $(F \cap B) \cup (H \cap B) = B$, veamos que bien $F \cap B = \emptyset$ o bien $H \cap B = \emptyset$. En efecto:
Como $A \subset B \implies \boxed{(F \cap A) \cup (H \cap A) = A \cap B = A}$ **(*)** Tenemos además que
$(A \cap F) \cap (A \cap H) = \emptyset$
Supongamos $A \neq \emptyset$
Si $A \cap F \neq \emptyset \overset{\text{Por ser A conexo}}{\Longrightarrow} A \cap H = \emptyset \overset{(*)}{\Longrightarrow} A \subset F$
Y tenemos $\left.\begin{array}{c} A \subset F \\ F \text{ cerrado} \end{array}\right\} \implies \overline{A} \subset F \implies \overline{A} \cap H = \emptyset \implies B \cap H = \emptyset$
Análogamente si $A \cap H \neq \emptyset \implies B \cap F = \emptyset$ y entonces que bien $B \cap F = \emptyset$ o bien $B \cap H = \emptyset$
. Por tanto B es conexo. $\square$

Proposición 21. Si A y B son conexos y $A \cap B \neq \emptyset \implies A \cup B$ es conexo.

Demostración. Llamemos $C = A \cup B$ Sean U, V abiertos en M tales que $U \cap V \cap C = \emptyset$ y $(U \cap C) \cup (H \cap C) = C$, veamos que bien $C \cap U = \emptyset$ o bien $C \cap V = \emptyset$. En efecto:

$$\text{Como} \quad \left.\begin{array}{c} A \subset C \\ B \subset C \end{array}\right\} \text{tenemos} \quad \begin{array}{l} (U \cap A) \cup (V \cap A) = C \cap A = A \\ (U \cap B) \cup (V \cap B) = C \cap B = B \end{array}$$

$$\text{Ademas} \quad \begin{array}{l} (U \cup A) \cap (V \cup A) = \emptyset \\ (U \cup B) \cap (V \cup B) = \emptyset \end{array}$$

Como $A \cap B \neq \emptyset \implies \exists x_0 \in A \cap B \subset C \subset U \cup V \implies x_0 \in U$ ó $x_0 \in V$

$$\text{Si } x_0 \in U \overset{x_0 \in A \cap B}{\Longrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} x_0 \in A \cap U \implies A \cap U \neq \emptyset \overset{A \text{ conexo}}{\Longrightarrow} A \cap V = \emptyset \\ x_0 \in B \cap U \implies B \cap U \neq \emptyset \overset{B \text{ conexo}}{\Longrightarrow} B \cap V = \emptyset \end{array} \right\} \implies$$

$$\implies (A \cap V) \cup (B \cap V) = C \cap V = \emptyset$$

Análogamente si $x_0 \in V$, entonces $C \cap U = \emptyset$. Esto implica que bien $C \cap U = \emptyset$ o bien $C \cap V = \emptyset$, por tanto C es conexo. $\square$

Corolario 4. En consecuencia:
Si A y B son conexos y $\overline{A} \cap B \neq \emptyset \implies A \cup B$ es conexo.

Demostración. $\overline{A} \cap B \neq \emptyset \implies \exists x_0 \in \overline{A} \cap B$, como $A \subset A \cup \{x_0\} \subset \overline{A} \implies \implies A \cup \{x_0\}$ es conexo.

$$\left. \begin{array}{l} A \cup \{x_0\} \text{ es conexo} \\ B \text{ es conexo} \end{array} \right\} \overset{\text{por prop. anterior}}{\Longrightarrow} (A \cup \{x_0\}) \cup B = A \cup B$$

y $A \cup B$ es conexo pues $x_0 \in B$ $\square$

Teorema 5. *Teorema del pivote.*
Sea (M, d) espacio métrico y sean C y $C_\alpha, \alpha \in \Gamma$ una familia de subconjuntos de M conexos. Si $C \cap C_\alpha \neq \emptyset$ $\forall \alpha \in \Gamma$ entonces $C \cup (\bigcup_{\alpha \in \Gamma} C_\alpha)$ es un conjunto conexo.

Demostración.
Llamemos $D = C \cup (\bigcup_{\alpha \in \Gamma} C_\alpha)$ y llamemos $D_\alpha = C \cup C_\alpha$ para cada $\alpha \in \Gamma$

$$\left. \begin{array}{l} C \text{ conexo} \\ C_\alpha \text{ conexo} \\ C \cap C_\alpha \neq \emptyset \end{array} \right\} \overset{\text{Por proposicion 21}}{\Longrightarrow} D_\alpha = C \cup C_\alpha \text{ es conexo.}$$

Sea $D = C \cup (\bigcup_{\alpha \in \Gamma} C_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} D_\alpha$ e $\bigcap_{\alpha \in \Gamma} D_\alpha \neq \emptyset$ pues $C \subset D_\alpha$ $\forall \alpha \in \Gamma$
Sean U y V abiertos en M tal que $(D \cap U) \cup (C \cap V) = D$ y $(D \cap U) \cap (D \cap V) = \emptyset$
Como $\bigcap_{\alpha \in \Gamma} D_\alpha \neq \emptyset \implies \exists x_0 \in \bigcap_{\alpha \in \Gamma} D_\alpha$
Tenemos ahora que $\forall \alpha$
$(D_\alpha \cap U) \cup (D_\alpha \cap V) = D_\alpha \cap D = D_\alpha$
$(D_\alpha \cap U) \cap (D_\alpha \cap V) \subset (D \cap U) \cap (D \cap V) = \emptyset$
$x_0 \in \bigcap_{\alpha \in \Gamma} D_\alpha \subset D \subset U \cup V \implies$ bien $x_0 \in U$ o bien $x_0 \in V$
Si $x_0 \in U \implies D_\alpha \cap V = \emptyset$ $\forall \alpha \in \Gamma$ (por ser D_α conexo $\forall \alpha \in \Gamma$). $\implies \bigcup_{\alpha \in \Gamma}(V \cap D_\alpha) =$
$= V \cap D = \emptyset$
Análogamente si $x_0 \in V \implies \bigcup_{\alpha \in \Gamma}(U \cap D_\alpha) = U \cap D = \emptyset$. Por tanto, bien $U \cap D = \emptyset$ o bien $V \cap D = \emptyset$. Luego D es conexo. $\square$

4.2. Intervalos, segmentos, convexidad y poligonales

Definición 21. Conexos de $\mathbb{R}$: Intervalos.
Sea $A \subset \mathbb{R}$, A es un intervalo si es equivalente a una de estas formas:

- $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \;{\scriptscriptstyle ||}\; a < x < b\}$
- $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \;{\scriptscriptstyle ||}\; a \leq x \leq b\}$
- $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \;{\scriptscriptstyle ||}\; a < x \leq b\}$
- $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \;{\scriptscriptstyle ||}\; a \leq x < b\}$
- $[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \;{\scriptscriptstyle ||}\; a \leq x\}$
- $(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \;{\scriptscriptstyle ||}\; a < x\}$
- $(-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} \;{\scriptscriptstyle ||}\; x \leq b\}$
- $(-\infty,b) = \{x \in \mathbb{R} \;{\scriptscriptstyle ||}\; x < b\}$
- $(-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$
- ó es $\emptyset$

Lema. Luego A es un intervalo si para cada par de elementos $x, y \in A$ $(x < y)$, se tiene $[x,y] \subset A$

Teorema 6.
Sea $A \subset \mathbb{R}$, entonces A es conexo $\Longleftrightarrow$ A es intervalo.

Demostración.

- ($\Longrightarrow$) Por contrarrecíproco
  Si A no es intervalo $\overset{por\ Lema\ anterior}{\Longrightarrow} \exists x, y \in A,\ x < y \;{\scriptscriptstyle ||}\; [x,y] =$
  $= \{t \in \mathbb{R} \;{\scriptscriptstyle ||}\; x \leq t \leq y\} \not\subset A \implies \exists t_0 \in [x,y] \;{\scriptscriptstyle ||}\; t_0 \notin A$, luego sea$(-\infty, t_0)$ y $(t_0, +\infty)$ son abiertos de $\mathbb{R}$ tal que:
  $$\left.\begin{array}{l} ((-\infty,t_0)\cap A)\cup((t_0,+\infty)\cap A) = A \\ ((-\infty,t_0)\cap A)\cap((t_0,+\infty)\cap A) = \emptyset \end{array}\right\} \Longrightarrow$$
  $$\Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl} x \in ((-\infty,t_0)\cap A) & \Longrightarrow & (-\infty,t_0)\cap A \neq \emptyset \\ y \in ((t_0,+\infty)\cap A) & \Longrightarrow & (t_0,+\infty)\cap A \neq \emptyset \end{array}\right\} \Longrightarrow A \text{ no es conexo.}$$
- ($\Longleftarrow$) Supongamos que A es intervalo no conexo y llegaremos a una contradicción.
  $$\text{Supongamos que } \exists U, V \text{ abiertos en } R \text{ tal que } \left\{\begin{array}{l} (U\cap A)\cup(V\cap A) = A \ (1) \\ (U\cap A)\cap(V\cap A) = \emptyset \ (2) \\ U\cap A \neq \emptyset \\ V\cap A \neq \emptyset \end{array}\right.$$

Entonces $\left.\begin{array}{l} U\cap A\neq\emptyset \implies \exists a\in U\cap A \\ V\cap A\neq\emptyset \implies \exists b\in V\cap A \end{array}\right\} \overset{(2)}{\implies} a\neq b$

Supongamos $a<b$ entonces, $\left.\begin{array}{l} a\in A \\ b\in A \end{array}\right\} \implies [a,b]\subset A$

Llamemos $\left\{\begin{array}{l} G_1=U\cap[a,b] \\ G_2=V\cap[a,b] \end{array}\right.$ tenemos que:

$G_1\cup G_2=[a,b]$
$G_1\cap G_2=(U\cap V)\cap[a,b]\subset(U\cap V)\cap A=\emptyset$
$\left.\begin{array}{l} G_1\neq\emptyset \text{ pues } a\in G_1 \\ G_1 \text{ esta acotado superiormente (pues } G_1\subset[a,b]) \end{array}\right\} \exists\alpha=sup\ G_1$

$\left.\begin{array}{l} G_1 \text{ acotado superiormente por } b \implies \alpha\leq b \\ a\in G_1 \implies a\leq\alpha \end{array}\right\} \implies \alpha\in[a,b]$

Veamos que en realidad $\alpha\in(a,b)$
Como $b\in V$ y V es abierto $\implies \exists r<b-a(>0) \shortparallel (b-r,b+r)\subset V \implies$
$\implies (b-r,b]\subset V \implies (b-r,b]\cap G_1=\emptyset \implies G_1\subset[a,b-r] \implies$
$\underset{\alpha=sup\ G_1}{\implies} \alpha\leq b-r<b \implies \alpha<b$

Como $\left.\begin{array}{l} a\in U \\ U \text{ abierto} \end{array}\right\} \implies \exists r'<b-a(>0) \shortparallel (a-r,a+r)\subset U \implies$
$\implies [a,a+r)\subset U \implies a+\dfrac{r}{2}\in U\cap[a,b]=G_1 \underset{\alpha=sup\ G_1}{\implies} \alpha<a+\dfrac{r}{2}\leq\alpha \implies a<\alpha$
Por tanto $\alpha\in(a,b)$. Veamos ahora que $\alpha\notin G_1$ y $\alpha\notin G_2$

$\alpha\notin G_1=U\cap[a,b]$. En efecto: Si $\alpha\in G_1$, como U es abierto $\exists r>0 \shortparallel (\alpha-r,\alpha+r)\subset U\cap[a,b]$ pero esto contradice que $\alpha=sup\ U\cap[a,b]$ por tanto $\alpha\notin G_1$

$\alpha\notin G_2=V\cap[a,b]$. En efecto: Si $\alpha\in G_2$ por ser V abierto y $\alpha\in(a,b)$ $\exists r>0 \shortparallel (\alpha-r,\alpha+r)\subset V\cap(a,b) \implies (\alpha-r,\alpha]\subset V\cap(a,b) \implies (\alpha-r,\alpha]\cap U=\emptyset \implies$
$\implies U\cap[a,b]\subset[a,\alpha-r]$ y contradice $\alpha=sup\ (U\cap[a,b])$ por tanto $\alpha\notin G_2$
Por lo que α no pertenece ni a G_1 ni a G_2 y esto es absurdo $\implies$ A conexo.

□

Definición 22. Conexos en $(\mathbb{R}^n,d_2)$, y en general en cualquier espacio normado.
Sea E espacio vectorial y sean $x,\ y\in E$ se define el segmento de extremos x e y al conjunto $[x,y]=\{(1-t)x+ty:0\leq t\leq 1\}$

Proposición 22. En un espacio normado E los segmentos son conjuntos conexos.

Demostración.
Muy parecida a la demostración del teorema anterior. Sean x e $y\in E$, $x\neq y$. Sean U y V abiertos tal que $[x,y]\subset U\cup V$ y $[x,y]\cap U\cap V=\emptyset$. Consideramos que $x\in U$ y definamos $A=\{t\in[0,1] \shortparallel (1-t)x+yt\in U\}$, y ahora procederíamos como en la demostración anterior, tomamos $\alpha=sup\ A$ y suponemos que $V\cap[x,y]\neq\emptyset$ llegando a una contradicción. □

Proposición 23. En E normado, las bolas son conjuntos conexos.

Demostración.
Sea $x_0 \in E$ y $r > 0$
$B(x_0, r) = \{x \in E \shortparallel d(x, x_0) < r\} = \{x_0\} \cup \left(\bigcup_{x=B(x_0,r)} [x_0, x]\right)$ Por la proposición anterior los segmentos $[x, x_0]$ con $x \in B(x_0, r)$ son conexos, $\{x_0\}$ es conexo y $\{x_0\} \cap [x_0, x] \neq \emptyset$
$\forall x \in B(x_0, r) \overset{\text{Por el T. del pivote}}{\Longrightarrow} \{x_0\} \cup \left(\bigcup_{x=B(x_0,r)} [x_0, x]\right)$ es conexo $\Longrightarrow$ $B(x, r)$ es conexo y $\overline{B}(x_0, r) = \{x \in E \shortparallel d(x, x_0) \leq r\} = \overline{B(x_0, r)}$ es conexo. □

Definición 23. Sea E espacio vectorial y sea $A \subset E$, A es <u>convexo</u> si $\forall x, y \in A$, $[x, y] \subset A$

Proposición 24. En un espacio normado convexo $\Longrightarrow$ conexo.

Demostración.
Por el Teorema del Pivote. □

Definición 24. Sea E es un espacio normado, definimos <u>una poligonal</u> en E es un conjunto $= [x_1, x_2] \cup [x_2, x_3] \cup ... \cup [x_{n-1}, x_n]$

Proposición 25. En un espacio normado, poligonal $\Longrightarrow$ conexo.

Demostración.
Inducción sobre el número de segmentos que conforman la poligonal. □

Observación. En un espacio métrico en general no toda bola es convexa.

Definición 25. Sea E un espacio normado y sea $A \subset E$, A es <u>conexo por poligonales</u> si $\forall x, y \in A$ $\exists$ una poligonal $\Gamma \subset A$ donde x e y son los extremos de dicho poligonal.

Proposición 26. Sea E un espacio normado y sea $A \subset E$. Si A es conexo por poligonales $\Longrightarrow$ A es conexo.

Demostración.
Si $A = \emptyset$ ya está.
Si $A \neq \emptyset \Longrightarrow \exists a \in A$, entonces $\forall x \in A \setminus \{a\}$, por hipótesis $\exists \Gamma_x$ (poligonal)$\subset A$ de extremos x y a. Así $A = a \cup \left(\bigcup_{x \in A \setminus \{a\}} \Gamma_x\right) \Longrightarrow A$ es conexo. □

Observación. Conexo por poligonales $\not\Longleftarrow$ conexo

<u>**Ejemplo.**</u> Circunferencia en $\mathbb{R}^2$

Proposición 27. Sea E un espacio normado y $G \subset E$ abierto. Entonces G es conexo $\Longleftrightarrow$ G es conexo por poligonales.

Demostración.

- ($\Longleftarrow$) Ya demostrado.
- ($\Longrightarrow$)
  Sea G conexo veamos que es conexo por poligonales.
  Si $G = \emptyset$, ya está.
  Si $G \neq \emptyset$, entonces $\exists x_0 \in G$
  Sea $A = \{x \in G \shortparallel \exists\Gamma$ (poligonal) $\subset G$ que une x y $x_0\}$, $x_0 \in A \implies A \neq \emptyset$ Veamos que A es abierto: Si $x \in A$, entonces $\exists\Gamma_x$ (poligonal) $\subset A \shortparallel$ une x y x_0 y como $x \in A \subset G$ y G es abierto $\Longrightarrow \exists r > 0 \shortparallel B(x,r) \in G$
  Entonces, si $y \in B(x,r) \setminus \{x\}$, tenemos que $\Gamma_x \cup [x,y] \subset A \cup B(x,r) \subset G \cup G = G$
  Como $\Gamma_x \cup [x,y]$ es una poligonal que une x_0 con y y $\Gamma_x \cup [x,y] \subset G$ tenemos que $y \in A$, luego $B(x,r) \subset A \implies A$ es abierto.

  Veamos ahora que A es cerrado (en G). Para ello veamos que $G \setminus A$ es abierto. Si $y \in G \setminus A$ entonces $\nexists\Gamma_y$ que una x_0 e y. Como $y \in G$ abierto, $\exists r > 0 \shortparallel B(y,r) \subset G$. Ningún punto de $B(y,r)$ se puede unir con x_0 mediante una poligonal contenida en G (porque entonces estaría en A). Luego $B(y,r) \subset G \setminus A$. Así $G \setminus A$ es abierto en $G \implies A$ es cerrado en G.
  Como $A \neq \emptyset$ y A es abierto y cerrado en G y G es conexo $\implies A = G \implies G$ conexo por poligonales.

$\square$

Observación. En $\mathbb{R}$, sea $A \subset \mathbb{R}$:

$$A \text{ conexo} \iff A \text{ intervalo} \iff A \text{ convexo}$$

En general A conexo $\not\Longrightarrow \mathring{A}$ conexo, pero en $\mathbb{R}$ esto sí se cumple.

Capítulo 5

Límites y continuidad

5.1. Límites

Definición 26. Sea (M, d) y (M', d') espacios métricos, sea $D \subset M$ y sea $f\colon D \longrightarrow M'$
Sea $x_0 \in D'$ (punto de acumulación) y sea $L \in M$, diremos que L es <u>límite de f en x_0</u> si:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \shortparallel \text{ si } x \in D \cap (B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}) \text{ entonces } f(x) \in B(L, \varepsilon)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \shortparallel \text{ si } x \in D \text{ y } 0 < d(x, x_0) < \delta \text{ entonces } d'(f(x), L) < \varepsilon$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \shortparallel f(D \cap (B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\})) \subset B(L, \varepsilon)$$

Lo denotamos como $L = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

Proposición 28. Si el existe el límite de f en x_0 este es único.

Demostración.
Sean L' y L'' límites de f cuando tiende a x_0 , entonces $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta', \delta'' > 0 \shortparallel$ si $x \in D$ y $0 < d(x, x_0) < \delta'$ entonces $d'(f(x), L') < \varepsilon$ y $x \in D$ y $0 < d(x, x_0) < \delta''$ entonces $d'(f(x), L'') < \varepsilon$
Tomemos ahora $\delta = \text{ínf}(\{\delta', \delta''\})$ Entonces $0 < d(x, x_0) < \delta \implies d'(f(x), L') < \varepsilon$ y $d'(f(x), L'') < \varepsilon \implies L' = L''$ $\square$

Proposición 29. En las condiciones anteriores:

$$L = \lim_{x \to x_0} f(x) \iff \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D \setminus \{x_0\} \text{ convergente a } x_0 \text{ se tiene que } \{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \text{ converge a } L$$

<u>**Ejemplo.**</u> No existe $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}$
Para probarlo basta con tener una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergente a 0 y que $\dfrac{1}{\{x_n\}_{n=1}^{\infty}}$ diverja.

Entonces, sea $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ que converge a 0.
Tenemos que $\left\{f\left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\dfrac{n}{(-1)^n}\right\}_{n=1}^{\infty} = \{-1, 2, -3, 4, -5, 6...\}$ que diverge.

Proposición 30. Si existen dos sucesiones $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D\setminus\{x_0\}$ convergentes a x_0 tales que $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) \implies$ no existe el límite de f en x_0.

Corolario 5. En consecuencia.
Si $(M', d') = (\mathbb{R}, ||\cdot||)$ tenemos lo siguiente:
Sean $f, g\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in D'$. Si $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L_1$ y $\exists \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L_2 \implies$ Existe el límite en x_0 de $f+g,\ f-g,\ f\cdot g$ y $\alpha f,\ \alpha\in\mathbb{R}$ y si además $L_2 \neq 0$ también existe el límite en x_0 de $\dfrac{f}{g}$. Además:

- $\lim\limits_{x\to x_0} (f+g)(x) = L_1 + L_2$
- $\lim\limits_{x\to x_0} (f-g)(x) = L_1 - L_2$
- $\lim\limits_{x\to x_0} (f\cdot g)(x) = L_1 \cdot L_2$
- $\lim\limits_{x\to x_0} (\alpha f)(x) = \alpha L_1$
- Si $L_2 \neq 0,\ \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{L_1}{L_2}$

Proposición 31. Sea (M, d) y (M', d') espacios métricos, sea $D \subset M$ y sea $f\colon D \longrightarrow M'$ Sea $x_0 \in D'$ (punto de acumulación) y sea $L \in M$. Sea $B \subset D$ y $x_0 \in B'$ (punto de acumulación), entonces:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \implies \lim_{x\to x_0} (f|_B)(x) = L$$

<u>Ejemplo.</u>

$$f\colon D \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}\ \forall (x,y) \in D = \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$$

¿$\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

$$\text{Sea } B = \{(x, \lambda x) \shortparallel x \in \mathbb{R}\} \text{ veamos entonces el } \lim_{(x,y)\to(0,0)} f|_B(x,y)$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=\lambda x}} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f|_B(x, \lambda x) = \lim_{x\to 0} \frac{x(\lambda x)}{x^2 + (\lambda x)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\lambda x^2}{x^2(\lambda+1)} = \frac{\lambda}{1+\lambda^2}$$

Como el límite depende de λ, deducimos que no existe el límite.

5.2. Continuidad

Definición 27. Sean (M, d) y (M', d') espacios métricos, $D \subset M$ y $f\colon D \longrightarrow M'$
Sea $x_0 \in D$ Diremos que f es continua en x_0 si:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Bien } x_0 \in \operatorname{Ais}(D) \\ x_0 \in D' \text{ y } \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)\end{array}\right\}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \shortparallel \text{ si } x \in D \cap B(x_0, \delta) \text{ entonces } f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon\ \exists \delta > 0 \shortparallel f(B(x_0, \delta) \cap D) \subset B(f(x_0), \varepsilon)$$

$$\Longleftrightarrow$$

Para cada sucesion $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D$ convergente a $x_0 \implies \{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $f(x_0)$

Decimos que f es continua en $A \subset D$ si f es continua en a, $\forall a \in A$

Proposición 32. Sean (M, d) y (M', d') espacios métricos, $D \subset M$ y sea $f\colon D \longrightarrow M'$ una función, son equivalentes:

1) f continua en D

2) f transforma sucesiones convergentes en D en sucesiones convergentes; es decir, sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D$ convergente en $x_0 \in D$ se tiene que $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge.

3) $\forall U$ abierto en M' se tiene que $f^{-1}(U)$ es abierto relativo de D

4) $f^{-1}(H)$ es cerrado relativo en D, $\forall H$ cerrado en M'

Observación. En el caso particular $(M', d') = (\mathbb{R}^m, d_2)$
Sea $\underset{x \to f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))}{f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}^m}$ y el hecho de que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergente a $x \in \mathbb{R}^m \iff x_{n_i} \xrightarrow[n \to \infty]{} x_i$, $\forall 1 \leq i \leq m$ tenemos que f es continua en $D \iff f_1, f_2, \dots, f_m$ son continuas en D.

Proposición 33. Funciones con valores en $\mathbb{R}$.
Sea (M, d) espacio métrico, sea $D \subset M$, sean $f, g\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ y sea $x_0 \in D$. Si f y g son continuas en x_0, entonces $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, y αf, con $\alpha \in \mathbb{R}$, son continuas en x_0. Además si $g(x_0) \neq 0$, entonces $\dfrac{f}{g}$ también es continua en x_0

Proposición 34. Composición de funciones continuas.
Sean (M, d), (M', d'), (M'', d'') espacios métricos, sea $D \subset M$ y $B \subset M'$ y sean $f\colon D \longrightarrow M'$ y $g\colon B \longrightarrow M''$ tales que $f(D) \subset B$.
Sea $x_0 \in D$, si f es continua en x_0 y g es continua en $f(x_0)$ entonces $g \circ f$ es continua en x_0

Proposición 35. Sean (M, d) y (M', d') espacios métricos, sea $D \subset M$ y sea $f\colon D \longrightarrow M'$ continua en D

a) Si $A \subset D$ es compacto, entonces $f(A)$ es compacto.

b) Si $A \subset D$ es conexo, entonces $f(A)$ es conexo.

Demostración.

a) Supongamos A compacto, probemos que $f(A)$ es compacto. Sea $\{U_i : i \in \Gamma\}$ un recubrimiento por abiertos de $f(A)$. Como f es continua en D y $\forall i \in \Gamma$, U_i es abierto en M', tenemos que $f^{-1}(U_i)$ es abierto relativo en D.
Por tanto $\exists G_i$ abierto en M ‖ $f^{-1}(U_i) = G_i \cap D$
Como $f(A) \subset \bigcup_{i\in\Gamma} U_i \implies A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(\bigcup_{i\in\Gamma} U_i) = \bigcup_{i\in\Gamma} f^{-1}(U_i)$
Tenemos así que $\{G_i : i \in \Gamma\}$ es un recubrimiento por abiertos de A. Por ser A compacto, podemos extraer un subrecubrimiento finito, es decir, $\exists \sigma \in \Gamma$ tal que $A \subset \bigcup_{i\in\sigma} G_i \implies A = A \cap D \subset (\bigcup_{i\in\sigma} G_i) \cap D = \bigcup_{i\in\sigma}(G_i \cap D) =$
$= \bigcup_{i\in\sigma}(f^{-1}(U_i)) = f^{-1}\left(\bigcup_{i\in\sigma} U_i\right) \implies f(A) \subset f(f^{-1}(\bigcup_{i\in\sigma} U_i)) = \bigcup_{i\in\sigma} U_i$
Como $\{U_i : i \in \sigma\}$ es subrecubrimiento finito de $f(A) \implies f(A)$ es compacto.

b) Si $f(A)$ no es conexo, probemos que A tampoco lo es.

Si $f(A)$ no es conexo $\exists U, V$ abiertos en M' tal que $\begin{cases} U \cap f(A) \neq \emptyset \\ V \cap f(A) \neq \emptyset \\ U \cap V \cap (A) = \emptyset \\ (U \cap f(A)) \cup (V \cap f(A)) = f(A) \end{cases}$

Como f es continua:
U abierto $\implies f^{-1}(U)$ es abierto relativo de $D \implies \exists G_1$ abierto en M ‖ $G_1 \cap D = f^{-1}(U)$

V abierto $\implies f^{-1}(V)$ es abierto relativo de $D \implies \exists G_2$ abierto en M ‖ $G_2 \cap D = f^{-1}(V)$
Entonces:
$U \cap f(A) \neq \emptyset \implies \exists y \in U \cap f(A) \implies \exists x \in A$ ‖ $y = f(x) \in U \cap f(A) \implies$
$\implies x \in f^{-1}(U) \cap A \implies f^{-1}(U) \cap A \neq \emptyset \implies G_1 \cap A \neq \emptyset$
Análogamente tenemos que como $V \cap f(A) \neq \emptyset$ entonces $f^{-1}(V) \cap A \neq \emptyset \implies G_2 \cap A \neq \emptyset$
Ahora tenemos que $(U \cap f(A)) \cup (V \cap f(A)) = f(A) \implies f^{-1}(U \cap f(A)) \cup f^{-1}(V \cap f(A)) = f(f^{-1}(A)) \implies A \subset f(f^{-1}(A)) = f^{-1}(U \cap f(A)) \cup f^{-1}(V \cap f(A)) \subset f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) \subset G_1 \cup G_2 \implies A \subset G_1 \cup G_2 \implies A = (G_1 \cup G_2) \cap A = (G_1 \cap A) \cup (G_2 \cap A)$
Por último veamos que $(G_1 \cap A) \cap (G_2 \cap A) = \emptyset$. En efecto:
Como $U \cap V \cap f(A) = \emptyset \implies f^{-1}(U \cap V \cap f(A)) = \emptyset \implies f^{-1}(U \cap V \cap f(A)) =$
$= f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) \cap f^{-1}(f(A)) = (G_1 \cap D) \cap (G_2 \cap D) \cap f^{-1}(f(A)) \supset$
$\supset (G_1 \cap A) \cap (G_2 \cap A) \cap f^{-1}(f(A)) = (G_1 \cap A) \cap (G_2 \cap A) = \emptyset.$

Con esto hemos demostrado que si $f(A)$ no es conexo $\implies$ A no es conexo. Por tanto, A conexo $\implies$ $f(A)$ conexo.

$\square$

Teorema 7. *Teorema del Máximo y del Mínimo*
Sea (M,d) espacio métrico, sea $D \subset M$ y sea $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en D. Si $K \subset D$ es compacto, entonces f alcanza su máximo y su mínimo en K, esto es $\exists x_1, x_2 \in K$ tal que $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ $\forall x \in K$.

Demostración.
f es continua en K puesto que f es continua en D y $K \subset D$
Como f es continua en K y K es compacto $\implies$ $f(K)$ es compacto en $\mathbb{R}$ $\implies$ $f(K)$ es cerrado y acotado. $\left.\begin{array}{l} K \neq \emptyset \implies f(K) \neq \emptyset \\ f(K) \text{ acotado en } \mathbb{R} \end{array}\right\} \implies f(K)$ posee supremo e ínfimo $\implies$
$\implies$ por ser $f(K)$ cerrado, el supremo y el ínfimo pertencen a $f(K)$ $\implies$ $\exists x_1, x_2 \in K \shortparallel f(x_1) = \min\limits_{x\in K}(f(x)) \leq f(x) \leq \max\limits_{x \in K}(f(x)) = f(x_2),\ \forall x \in K$ $\square$

Observación. Si K no es compacto ó f no es continua en todo K, el resultado, en general, no es cierto.
Ejemplo: $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $(0,1) \rightarrow$ continua pero no compacto, no alcanza ni mínimo ni máximo.
Ejemplo: $f(x) = \left\{\begin{array}{l} x^2 \text{ si } x \in [0,1) \\ 0 \text{ si } x = 1 \end{array}\right.$ $\rightarrow$ compacto pero discontinua en $x = 1$, alcanza mínimo pero no máximo.

Teorema 8. *Teorema de los valores intermedios*
Sea (M,d) espacio métrico, sea $D \subset M$ y sea $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en D.
Sea $A \subset D$ conexo y $f(a) < f(b)$ para un par de puntos $a, b \in A$, entonces $\forall \alpha \in \mathbb{R} \shortparallel f(a) < \alpha < f(b)$ tenemos que $\exists x \in A \shortparallel f(x) = \alpha$

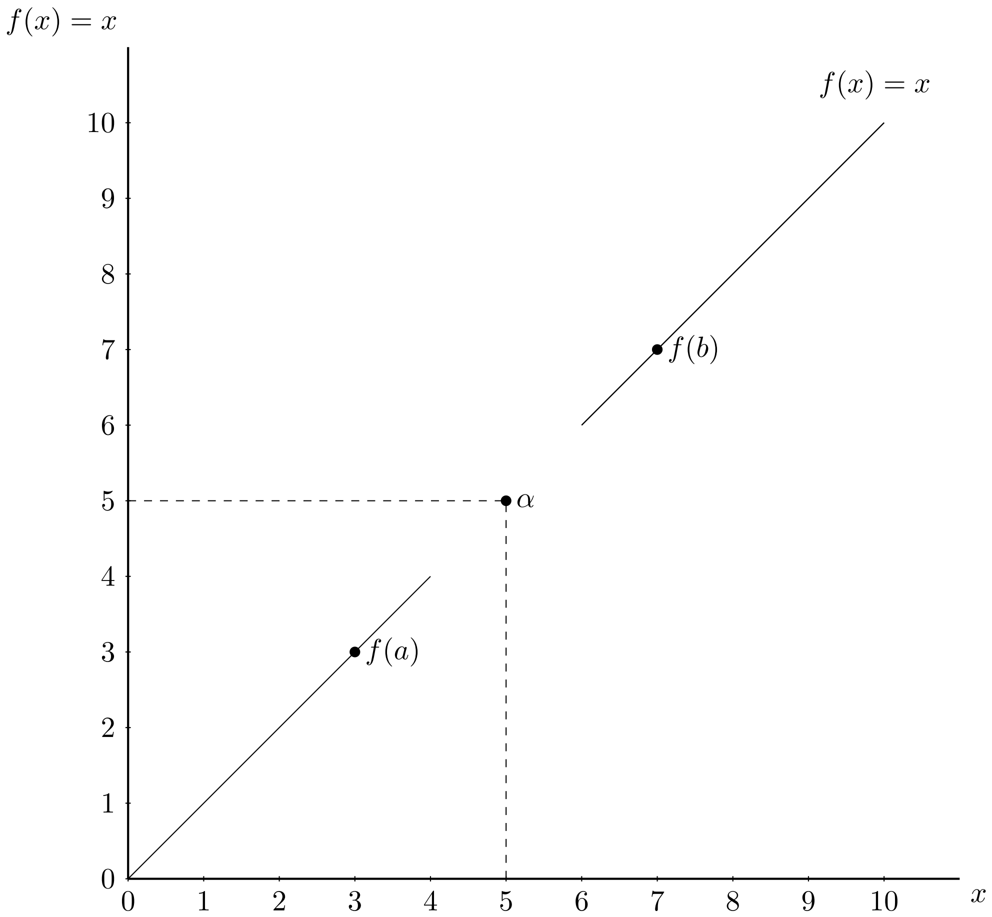
Demostración.
f es continua en A, ya que D es continua y $A \subset D$
Como A es conexo y f es continua en A $\implies$ $f(A)$ es conexo $\overset{f(A)\subset\mathbb{R}}{\implies} f(A)$ es un intervalo de $\mathbb{R}$.
$\left.\begin{array}{l} f(a) \in f(A) \\ f(b) \in f(A) \\ f(A) \text{ es un intervalo} \end{array}\right\} \implies [f(a), f(b)] \subset f(A) \overset{\alpha\in(f(a),f(b))\subset[f(a),f(b)]\subset f(A)}{\implies} \alpha \in f(A) \implies$
$\implies \exists x \in A \shortparallel f(x) = \alpha$

$\square$

Nota. Si el conjunto no es conexo, el resultado en general no es cierto.

Sea $A = [1,4] \cup [6,10]$, sea $f(x) = x$ y sean $f(a) = 3$ y $f(b) = 7$, $\nexists x \in A \;/\!/\; f(x) = 5$

Figura 2.



Observación. "Tener límite en un punto" y "ser continua en un punto" son propiedades locales de una función. Es decir, si f y g coinciden en $B(x_0, r) \setminus \{x_0\}$, entonces $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \iff \exists \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L$ y equivalentemente, f es continua en $x_0 \iff g$ es continua en x_0.

5.3. Homeomorfismos, continuidad uniforme y funciones lipschitzianas

Definición 28. Sean (M,d) y (M',d') espacios métricos. Diremos que $f\colon M \longrightarrow M'$ es un homeomorfismo si es biyectiva, continua, con inversa f^{-1} también continua.
Diremos que dos espacios métricos son homeomorfos si existe un homeomorfismo entre ellos.

Observación.

1. f es homeomorfismo $\iff$ f^{-1} es homeomorfismo.
2. Sea $f\colon (M,d) \longrightarrow (M',d')$ homeomorfismo, sea $A \subset M$ entonces:

$$A \text{ es} \begin{cases} \text{abierto} \\ \text{cerrado} \\ \text{compacto} \\ \text{conexo} \end{cases} \iff f(A) \text{ es} \begin{cases} \text{abierto} \\ \text{cerrado} \\ \text{compacto} \\ \text{conexo} \end{cases} \text{Y además, sea } B \subset M' :$$

$$B \text{ es} \begin{cases} \text{abierto} \\ \text{cerrado} \\ \text{compacto} \\ \text{conexo} \end{cases} \iff f^{-1}(B) \text{ es} \begin{cases} \text{abierto} \\ \text{cerrado} \\ \text{compacto} \\ \text{conexo} \end{cases}$$

Ejemplo.

1) $\mathbb{R}$ y $(0,1)$ son homeomorfos pues $\exists \varphi\colon \underset{t \to (\frac{\pi}{2} + \arctan t)\frac{1}{\pi}}{\mathbb{R} \to (0,1)}$

2) $(0,1)$ y $(a,b) \subset \mathbb{R}$ son homeomorfos.

3) $(0,1)$ y $[0,1]$ NO son homeomorfos pues $[0,1]$ es compacto y $(0,1)$ no lo es.

4) $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^2$ no son homeomorfos, ya que sea una aplicación $\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, entonces $\varphi(0) = x \in \mathbb{R}^2$. Sea $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ no conexo.
$\varphi(A) = \varphi(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \overset{\text{biyectiva}}{=} \mathbb{R}^2 \setminus \{\varphi(0)\}$ que es conexo, por lo que no son homeomorfos.

5) $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ son homeomorfos $\iff$ $n = m$
Supongamos $m > n$ y veamos que no son homeomorfos. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un hiperplano (dimensión $n-1$) y sea $B = \mathbb{R}^n \setminus A$, B no es conexo.
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ entonces $\varphi(B) = \varphi(\mathbb{R}^n \setminus A) \overset{\text{biyectiva}}{=} \mathbb{R}^m \setminus \{\varphi(A)\}$ que es conexo, y por tanto no son homeomorfos.

Definición 29. Continuidad Uniforme.
Sean (M, d) y (M', d') espacios métricos, sea $A \subset M$ y sea $f\colon A \longrightarrow M'$. Diremos que f es uniformemente continua en A si $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta \shortparallel$ si $x, y \in A$ y $d(x, y) < \delta$ entonces $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$

Proposición 36. Si f es uniformemente continua en $A \overset{\not\Leftarrow}{\Longrightarrow} f$ es continua en A.

Demostración.
Sea $x_0 \in A$ tenemos que $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \shortparallel$ si $d(x_0, y) < \delta$, con $y \in A$, $\Longrightarrow d'(f(x_0), f(y)) < \varepsilon$. Luego $\forall y \in B(x_0, \delta) \subset (B(x_0, \delta) \cap A) \Longrightarrow f(y) \in B(f(x_0), \varepsilon) \Longrightarrow f$ continua en A. $\square$

Observación.

$$f \text{ no es uniformemente continua en } A$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\exists \varepsilon_0 \shortparallel \forall \delta > 0\ \exists x_\delta, y_\delta \text{ con } d(x_\delta, y_\delta) < \delta \text{ y } d'(f(x_\delta), f(y_\delta)) \geq \varepsilon_0$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\exists \varepsilon_0 > 0 \text{ y } \exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A \shortparallel d(x_n, y_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ y } d'(f(x_n), f(y_n) \geq \varepsilon_0$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A \shortparallel d(x_n, y_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ pero } d'(f(x_n), f(y_n)) \overset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$$

<u>**Ejemplo.**</u> $f(x) = \dfrac{1}{x}$ no es uniformemente continua en $(0, +\infty)$.
Sean $x_n = \dfrac{1}{n}$ e $y_n = \dfrac{1}{n+1}$, tenemos que $d(x_n, y_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, pues $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right| =$
$= \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{1}{n^2+n}\right| = 0$
Además tenemos que $d'(f(x_n), f(y_n)) = -1$ puesto que $\lim\limits_{n\to\infty} \left|f\left(\dfrac{1}{n}\right) - f\left(\dfrac{1}{n+1}\right)\right| =$
$= \lim\limits_{n\to\infty} |n - (n+1)| = -1$. Por tanto $f(x)$ no es uniformemente continua.

Proposición 37. Sean (M, d) y (M', d') espacio métricos, sea $A \subset M$ compacto y sea $f\colon A \longrightarrow M'$ continua en A. Entonces f es uniformemente continua en A

Demostración.
Sea $\varepsilon > 0$ y $x \in A$. Como f es continua en x, entonces $\exists \delta_x > 0 \shortparallel f(B(x, \delta_x)) \subset B(f(x), \dfrac{\varepsilon}{2})$.
Como $A \subset \bigcup\limits_{x\in A} B\left(x, \dfrac{\delta_x}{2}\right) \Longrightarrow A$ es compacto $\exists m \in \mathbb{N} \shortparallel x_1, x_2, ..., x_m \in A \subset$
$\subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} B\left(x_i, \dfrac{\delta_{x_i}}{2}\right)$ y sea $\delta = \text{mín}\left\{\dfrac{\delta_{x_i}}{2} : 1 \leq i \leq m\right\} > 0$.
Si $x, y \in A \shortparallel d(x, y) < \delta$, veamos que $\exists i \in \{1, ..., m\} \shortparallel x, y \in B(x_i, \delta_{x_i})$. Como $x \in A \Longrightarrow$
$\Longrightarrow \exists i \shortparallel x \in B(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{2}) \Longrightarrow d(y, x_i) \leq d(x, y) + d(x, x_i) < \delta + \dfrac{\delta x_i}{2} \leq \delta_{x_i}$.
Entonces: $d'(f(x), f(y)) \leq d'(f(x), f(x_i)) + d'(f(x_i), f(y)) \leq \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ $\square$

Definición 30. Sean (M, d) y (M', d') espacios métricos, sea $D \subset M$ y sea $f\colon D \longrightarrow M'$. Diremos que f es lipschitziana en D si $\exists \mathcal{C} > 0 \shortparallel d'(f(x), f(y)) \leq \mathcal{C} d(x, y)\ \forall x, y \in D$

Nota. Si f es lipschitziana, denominamos a $\mathcal{C}$ como constante de Lipschitz.

Proposición 38. En las condiciones anteriores, f lipschitziana en $D \implies f$ uniformemente continua en D.

Demostración.
Supongamos $\mathcal{C} > 0 \shortparallel d'(f(x), f(y)) \leq \mathcal{C} d(x, y)\ \forall x, y \in D$.
Dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta = \dfrac{\varepsilon}{\mathcal{C}} > 0 \shortparallel$ si $x, y \in D$ con $d(x, y) < \delta$, entonces $d'(f(x), f(y)) \leq \mathcal{C} d(x, y) <$
$< \mathcal{C} \cdot \delta = \mathcal{C} \cdot \dfrac{\varepsilon}{\mathcal{C}} = \varepsilon$. □

Proposición 39. Propiedades de las funciones uniformemente continuas.
Sean (M, d) y (M', d') espacios métricos, sea $D \subset M$ y sea $f\colon D \longrightarrow M'$.

1) Si f es uniformemente continua en D, entonces f transforma sucesiones de Cauchy en sucesiones de Cauchy.

   Demostración.
   Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D$ una sucesión de Cauchy, veamos que $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy. Dado $\varepsilon > 0$, como f es uniformemente continua en D, $\exists \delta > 0 \shortparallel$ si $x, y \in D$ y $d(x, y) \leq \delta$ entonces $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$
   Ahora, como $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy, para $\varepsilon' = \delta > 0$, $\exists N \in \mathbb{N} \shortparallel d(x_p, x_q) < \varepsilon'(=$
   $= \delta)$, $\forall p, q \geq N$. Así, si $p > q \geq N$, como $d(x_p, x_q) < \delta \implies d'(f(x_p), f(x_q)) < \varepsilon$. Esto nos dice que que $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy. □

2) Si f es uniformemente continua en D y (M', d') es completo, entonces $\exists \widetilde{f}\colon \overline{D} \longrightarrow M'$ tal que $\widetilde{f}|_D \equiv f$ y además $\widetilde{f}$ es uniformemente continua en $\overline{D}$.

   Demostración.
   Sea $x \in \overline{D} \setminus D$ como $x \in \overline{D}$, $\exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D \shortparallel x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$. Como $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge, es de Cauchy.
   Por la propiedad 1, $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es sucesión de Cauchy en (M', d') completo, entonces $\exists L = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$. Definamos $\widetilde{f}(x) = L$. Veamos que L no depende de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ covergente a x.
   En efecto: Si $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ es otra sucesion en D convergente a x, entonces $0 \leq d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(y_n, x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Luego $d(x_n, y_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Como f es uniformemente continua en D, tenemos que $d'(f(x_n), f(y_n)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, por tanto, $0 \leq d'(f(y_n), L) \leq d'(f(y_n), f(x_n)) + d'(f(x_n), L)$ deducimos que $d'(f(y_n), L) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Luego $\widetilde{f}$ está bien definida. Veamos ahora que $\widetilde{f}$ está bien definida en D.
Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D \shortparallel d(x_n, y_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Probemos que $d'(\widetilde{f}(x_n), \widetilde{f}(y_n)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
Como x_n e $y_n \in \overline{D}$ y por definición de $\widetilde{f}(x_n)$ y $\widetilde{f}(y_n)$ $\exists a_n,\ b_n \in D$ tal que:
$d(a_n, x_n) < \frac{1}{n},\ d'(f(a_n), \widetilde{f}(x_n)) < \frac{1}{n}$
$d(b_n, y_n) < \frac{1}{n},\ d'(f(b_n), \widetilde{f}(y_n)) < \frac{1}{n}$
Así tenemos que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ son sucesiones en D y $d(a_n, b_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (pues $d(a_n, b_n) \leq$ $\leq d(a_n, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, b_n)$). Por ser f uniformemente continua en D tenemos que $d'(f(a_n), f(b_n)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Con lo cual $d'(\widetilde{f}(x_n), \widetilde{f}(y_n)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ ya que $\forall n \in \mathbb{N}$
$0 \leq d'(\widetilde{f}(x_n), \widetilde{f}(y_n)) \leq d'(\widetilde{f}(x_n), f(a_n)) + d'(f(a_n), f(b_n)) + d'(f(b_n), \widetilde{f}(y_n)) \leq$
$\leq \frac{1}{n} + d'(f(a_n), f(b_n)) + \frac{1}{n}$. □

5.4. Funciones contractivas. Teorema del punto fijo

Definición 31. Sea (M, d) y (M', d') espacios métricos, sea $D \subset M$ y sea $f\colon D \longrightarrow M'$. Diremos que f es contractiva en D si f es lipschitziana en D con constante de Lipschitz menor que 1. Es decir, si $\exists \mathcal{C} \in (0,1) \shortparallel d'(f(x), f(y)) \leq \mathcal{C} \cdot d(x,y)\ \forall x, y \in D$.

Teorema 9. *Teorema del punto fijo.*
Sea (M, d) espacio métrico completo y sea $f\colon M \longrightarrow M$ contractiva en M, entonces existe un único punto fijo; Es decir, $\exists! x_0 \in M \shortparallel f(x_0) = x_0$.

Demostración.
Como f es contractiva, $\exists \mathcal{C} \in (0,1) \shortparallel d(f(x), f(y)) \leq \mathcal{C} \cdot d(x,y)\ \forall x, y \in M$.
Sea $x_1 \in M$ y consideremos la sucesión $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} = (f(x_1), f(f(x_1)), f(f(f(x_1))), ...)$
Veamos que $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ es sucesión de Cauchy.
$d(y_2, y_1) = d(f(f(x_1)), f(x_1)) \leq \mathcal{C} d(f(x_1), x_1) = \mathcal{C}\alpha$.
Si $\alpha = 0$, entonces x_1 es punto fijo.
Si $\alpha > 0$, entonces $d(y_3, y_2) = d(f(f(f(x_1))), f(f(x_1)) \leq \mathcal{C} d(f(f(x_1)), f(x_1)) \leq \mathcal{C}^2\alpha$.
por inducción se prueba que $d(y_{n+1}, y_n) \leq \mathcal{C}^n\alpha\ \forall n \in \mathbb{N}$.
Así, si $p > q$, entonces $d(y_p, y_q) \leq d(y_q, y_{q+1}) + d(y_{q+1}, y_{q+2}) + ... + d(y_{p-1}, y_p) \leq$
$\leq \mathcal{C}^q\alpha + \mathcal{C}^{q+1}\alpha + ... + \mathcal{C}^{p-1}\alpha = \alpha\mathcal{C}^q(1 + \mathcal{C} + \mathcal{C}^2 + ... + \mathcal{C}^{p-q}) \leq \alpha\mathcal{C}^q \left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{C}^n\right) \overset{0<\mathcal{C}<1}{=} \alpha\mathcal{C}^q \dfrac{1}{1-\mathcal{C}}$
Así, dado $\varepsilon > 0$, como $\mathcal{C}^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, (pues $0 < \mathcal{C} < 1$). Sea $\varepsilon' = \dfrac{(1-\mathcal{C})\varepsilon}{\alpha}$, $\exists N \in \mathbb{N} \shortparallel$
$\mathcal{C}^n < \varepsilon'\ \forall n \geq N$. Ahora si $p > q \geq N$, se tiene $d(y_p, y_q) \leq \alpha \cdot \mathcal{C}^q \dfrac{1}{1-\mathcal{C}} \leq \dfrac{\alpha \cdot \varepsilon'}{1-\mathcal{C}} = \varepsilon$
Como (M, d) es completo, $\exists x_0 \in M \shortparallel x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ y tenemos $f(x_0) = f(\lim\limits_{n\to\infty} y_n \overset{f \text{ continua}}{=}$
$= \lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} y_{n+1} = x_0$.
Y este es el único punto fijo, ya que si $y_0 \neq x_0$ fuera punto fijo.
$0 < d(x_0, y_0) = d(f(x_0), f(y_0)) \leq \mathcal{C} \cdot d(x_0, y_0) < d(x_0, y_0)$ y esto es absurdo. □

Capítulo 6

Transformaciones diferenciables

6.1. Derivadas direccionales

Definición 32. Sea $G \subset \mathbb{R}^n$ abierto, sea $a \in G$ y sea $u \in \mathbb{R}^n$ con $||u|| = 1$. Definimos la <u>derivada direccional</u> de f según la dirección del vector u en a, como $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(a+tu) - f(a)}{t}$ siempre que exista dicho límite y lo denotamos como $D_u f(a)$.

Observación. Si $\exists D_u f(a)$, entonces $D_u f(a) = \varphi'(0)$ para $\varphi(t) = f(a+tu)$. En efecto: $\varphi'(0) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(a+tu) - f(a)}{t} = D_u f(a)$.

<u>**Ejemplo.**</u> Sea $f(x,y) = \sqrt{|x^2 + y^2|}\ \forall x, y \in \mathbb{R}^2$

¿En qué direcciones $u\ \exists D_u f((0,0))$?
Sea $u \in \mathbb{R}^2$, $||u|| = 1$, podemos escribir $u = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ con $\theta \in [0, 2\pi]$
Entonces $\dfrac{f((0,0)+tu) - f(0,0)}{t} = \dfrac{f(0 + t\cos\theta, 0 + t\operatorname{sen}\theta) - f(0,0)}{t} =$

$= \dfrac{f(t\cos\theta, t\operatorname{sen}\theta) - f(0,0)}{t} = \dfrac{\sqrt{|t^2\cos^2\theta - t^2\operatorname{sen}^2\theta|} - 0}{t} = \dfrac{\sqrt{t^2(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta)}}{t} =$

$= \dfrac{|t|\sqrt{\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta}}{t}$.

$$\begin{cases} \text{Si } \sqrt{\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta} = 0 \text{ entonces } \exists \lim\limits_{t\to 0} \frac{|t|}{t}\sqrt{\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta} = 0 \implies \exists D_{(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)} f(0,0) = 0 \\ \text{Si } \sqrt{\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta} \neq 0 \text{ entonces } \nexists \lim\limits_{t\to 0} \frac{|t|}{t}\sqrt{\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta} = 0 \implies \nexists D_{(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)} f(0,0) = 0 \end{cases}$$

Lo denotaremos el límite $D_u f(a)$

$\sqrt{\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta} = 0 \iff \cos^2\theta = \operatorname{sen}^2\theta \iff \theta = \left\{\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}\right\}$

Así $\exists D_u f(0,0) \iff u \in \left\{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$

¿Qué relación hay entre $D_u f(a)$ y $D_{-u} f(a)$?

Supongamos que $\exists D_u f(a) \iff \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(a+tu)-f(a)}{t}$, entonces,
¿existe $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(a-tu)-f(a)}{t}$? Sí, pues $D_{-u}f(a) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{-(f(a-tu)-f(a))}{-t} =$
$= -\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(a-tu)-f(a)}{-t} = -D_u f(a)$.

6.2. Derivabilidad y diferenciabilidad

Definición 33. Sea $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Se define la derivada de f en a según el vector v como

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t}$$

Nota. No confundir con la derivada direccional de f en a según la dirección de v.

Nota. En $\mathbb{R}^n$ denotamos por $e_i = (0,0,...,\overset{i}{\smile}{1},..,0)$ para $1 \leq i \leq n$ a las derivadas direccionales de f en a según los vectores e_i, se les llama derivadas parciales de f en a y se denota por $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ ó $D_i f(a)$.

Observación. Puede ocurrir que f tenga todas las derivadas direccionales en un punto a y no ser continua en a.

Definición 34. Si f tiene derivadas parciales en a llamaremos vector gradiente de f en a y lo denotamos $\bigtriangledown f(a)$, al vector $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a), ..., \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$.

<u>Ejemplo.</u> Sea $f(x,y) = 3x^2 + y^3$ el vector gradiente de f en un punto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ es $\bigtriangledown f(x,y) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = (6x, 3y^2)$.

Observación. Sea $D \subset \mathbb{R}$, si $f\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable en a, se tiene:
$f'(a) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \implies 0 = \lim\limits_{h\to 0} \left(\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'(a)\right) =$
$= \lim\limits_{h\to 0} \left(\dfrac{f(a+h)-f(a)-f'(a)h}{h}\right)$ y observamos que la aplicación $h \longrightarrow f'(a)h$ es una aplicación lineal de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ $\iff \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)-f'(a)h}{|h|} = 0$

Definición 35. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, sea $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ y sea $a \in U$, diremos que f es <u>diferenciable</u> en a si existe una aplicación lineal $L\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)-L(h)}{||h||} = 0 \iff \lim_{h\to 0} \frac{|f(a+h)-f(a)-L(h)|}{||h||} = 0 \iff$$
$$\iff \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)-L(x-a)}{||x-a||} = 0$$

Nota. Si existe tal aplicación lineal L, entonces es única. Será consecuencia de la siguiente proposición.

Proposición 40. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, sea $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ y sea $a \in U$. Si f es diferenciable en a, entonces existen todas las derivadas direccionales de f en a. Además, si L es una aplicación lineal que cumple $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)-L(h)}{||h||} = 0$, se tiene que $D_u f(a) = L(u)$ $\forall u \in \mathbb{R}^n$ con $||u|| = 1$.

Demostración.
Por hipótesis $\exists L\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ lineal tal que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)-L(h)}{||h||} = 0$.
Sea $u \in \mathbb{R}^n$ y $||u|| = 1$. Por lo anterior $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(a+tu)-f(a)-L(tu)}{||tu||} =$
$= \lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h=tu}} \dfrac{f(a+h)-f(a)-L(h)}{||h||} \implies \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(a+tu)-f(a)-tL(u)}{|t|} = 0 \implies$
$\implies \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(a+tu)-f(a)-tL(u)}{t} = 0 \implies \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(a+tu)-f(a)}{t} - L(u) = 0 \implies$
$\implies \exists \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(a+tu)-f(a)}{t} = L(u) \iff \exists D_u f(a) = L(u)$ □

Corolario 6. $L(a_i) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, para $1 \leq i \leq n$, como L es lineal, está unívocamente determinado por sus valores en los vectores en la base cánonica de $\mathbb{R}^n$.
Así que si f es diferenciable en a, la aplicación lineal $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es la que tiene por matriz asociada $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a), ..., \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$ y $L(h) = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a)h_2 + ... + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(a)h_n =$
$=< \bigtriangledown f(a), h >$

Si f es diferenciable en a a la aplicación L anterior le llamamos diferencial de f en a y la denotamos $df(a)$. Por tanto $df(a)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es lineal y se tiene que $df(a)(h) =< \bigtriangledown f(a), h >$ $\forall h \in \mathbb{R}^n$

Proposición 41. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, sea $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ y sea $a \in U$. Si f es diferenciable en $a \implies f$ es continua en a.

Demostración.
Por hipótesis $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)- < \bigtriangledown f(a), h >}{||h||} = 0$
Para $\varepsilon_0 = 1$ $\exists r > 0$ $_{\shortparallel}$ si $h \in B(\overline{0}, r) \setminus \{\overline{0}\}$ se tiene $\dfrac{f(a+h)-f(a)- < \bigtriangledown f(a), h >}{||h||} < 1$
Queremos probar que f es continua en a; es decir, que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a) \iff \lim\limits_{h\to 0} f(a+h)-f(a) = 0 \iff \lim\limits_{h\to 0} ||f(a+h)-f(a)|| = 0$
$\forall x \in B(a, r) \setminus \{a\}$ tenemos $0 \leq |f(x)-f(a)| =$

$$= ||x-a|| \left| \frac{f(x)-f(a)- < \triangledown f(a), x-a >}{||x-a||} + \frac{< \triangledown f(a), x-a >}{||x-a||} \right| \leq$$
$$\leq ||x-a|| \left| \left(\frac{f(x)-f(a)- < \triangledown f(a), x-a >}{||x-a||} \right) \right| + |< \triangledown f(a), x-a >| \leq$$
$$\underset{\text{por Cauchy-Schwarz}}{\overset{\text{por } 0 \leq ||x-a|| \leq r}{\leq}} ||x-a|| + ||\triangledown f(a)|| \, ||x-a|| = ||x-a|| \, (1 + ||\triangledown f(a)||)$$

Es decir, $0 \leq |f(x)-f(a)| \leq ||x-a|| \, (1+||\triangledown f(a)||) \; \forall x \in B(a,r) \setminus \{a\}$.
Como $\lim\limits_{x \to a} ||x-a|| \, (1+||\triangledown f(a)||) = 0$, por el criterio de compresión deducimos que $\lim\limits_{x \to a} (f(x)-f(a)) = 0$. Esto es $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a) \implies f$ continua en a. □

Observación. Existen funciones con todas las derivadas direccionales en un punto a y no son diferenciables en a.

Lema. Importante. Si f es diferenciable en a, entonces:

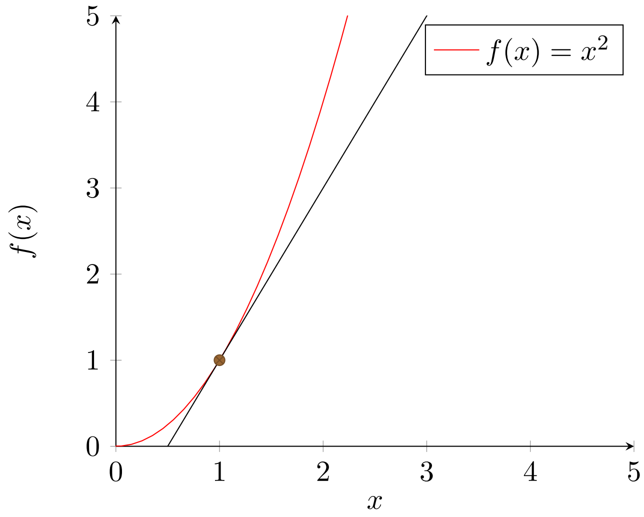
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)-df(a)(h)}{||h||} = 0 \iff \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-(f(a)+df(a)(h))}{||h||} = 0$$

Esto es que "cerca de 0" tenemos que $f(a+h)$ es "aproximadamente" $f(a)+df(a)(h)$; o equivalentemente, "cerca de a", el valor de $f(x)$ es "aproximadamente" $f(a)+df(a)(x-a)$.

A la gráfica de la función $g(x) := f(a) + df(a)(x-a)$, le llamamos recta, plano o hiperplano (según la dimensión de $\mathbb{R}^n$) tangente en la gráfica de f en el punto $(a, f(a))$.
Esto es el plano tangente a la gráfica de f en $(a, f(a))$ correspondiente con el conjunto
$$T := \left\{ x = (x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\shortparallel\; x_{n+1} = f(a_1, a_2, ..., a_n) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i) \right\}$$

En la siguiente gráfica de la función $f(x) = x^2$, tenemos la recta tangente al punto $a = 1$

Figura 3.



Ejemplo. Probar que $f(x,y) = x^2 + y^3 - 2x - y + 5$ es diferenciable en $(0,0)$ y hallar el plano tangente a dicho punto.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - 2 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = -2 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -1 \end{array}$$

¿f es diferenciable en $(0,0)$? $\Longleftrightarrow$ ¿$\exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y) - f(0,0) - < \triangledown f(0,0), (x-0, y-0) >}{||(x-0, y-0)||} =$

$= 0 \iff \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y) - f(0,0) - (-2x + (-y))}{||(x,y)||} = 0$?

Entonces, $0 \leq \dfrac{|f(x,y) - f(0,0) + 2x + y|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{|x^2 + y^3 - 2x - y + 5 - 5 + 2x + y|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{|x^2+y^3|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq$

$\leq \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{|y|y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = |x|\sqrt{\dfrac{|x|^2}{x^2+y^2}} + y^2\sqrt{\dfrac{|y|^2}{x^2+y^2}} \leq |x| + |y|^2 \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |x| + |y|^2 = 0$, por el criterio de compresión,

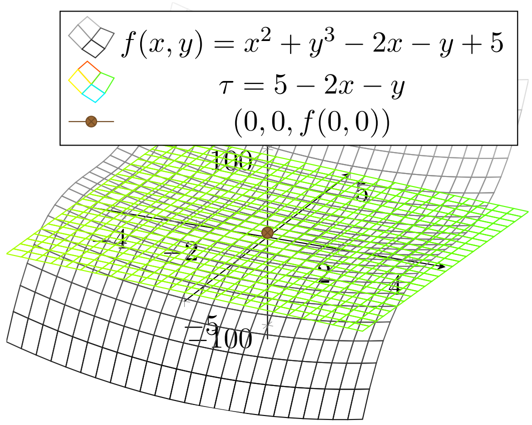
$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y) - f(0,0) - (-2x + (-y))}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ luego f es diferenciable en $(0,0)$ y

$df(0,0)\colon \underset{(h,k)\to -2h-k}{\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}}$

Entonces $df(0,0)(h,k) = -2h - k \ \forall h,k \in \mathbb{R}^2$. El plano tangente en la gráfica de f en $(0,0,5) = (0,0,f(0,0))$ tiene por ecuación:

$\tau = f(0,0) + df(0,0)((x-0),(y-0)) = 5 + df(0,0)(x,y) = 5 - 2x - y$

Figura 4.



Observación. Como consecuencia del ejercicio anterior:

$f(x) = f(a) + df(a)(x-a) + \varphi(x)$ donde φ cumple $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{||x-a||} = 0$

<u>Ejemplo.</u> Aproximar $(0,99 \cdot \mathrm{e}^{0,02})^8$
Consideramos la función $f(x,y) = (x\mathrm{e}^y)^8 = x^8\mathrm{e}^{8y}$. Calculemos $f(0'99, 0'02)$
$(0,99 \cdot \mathrm{e}^{0,02})^8 = f(0'99, 0'02) \approx f(1,0) + df(1,0)(0'99-1, 0'02-0) =$
$= 1 + < \bigtriangledown f(1,0), (-0'01, 0'02) >= 1 + < (8,8), (-0'01, 0'02) >= 1 + 8(-0'01 + 0'02) = 1,08$

Proposición 42. Condición suficiente de diferenciabilidad.
Sea $U \in \mathbb{R}^n$ abierto, sea $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ y sea $a \in U$. Si $\exists r > 0$ ‖ en $B(a,r)$ existen las derivadas parciales de f y son continuas en a, entonces f es diferenciable en a.

Demostración.
Queremos probar que $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i)}{||x-a||} = 0$
Sea $x \in B(a,r) \setminus \{a\}$, entonces, $f(x_1, x_2, ..., x_n) - f(a_1, a_2, ..., a_n) =$
$= f(x_1, x_2, ..., x_n) - f(a_1, x_2, ..., x_n) + f(a_1, x_2, ..., x_n) - f(a_1, a_2, x_3, ..., x_n) + f(a_1, a_2, x_3, ..., x_n) +$

$+ ... - f(a_1, a_2, ..., a_{n-1}, x_n) + f(a_1, a_2, ..., a_{n-1}, x_n) - f(a_1, a_2, ..., a_n)$
Para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$ podemos aplicar el teorema del valor medio a la función $\varphi_i(t) =$
$= f(a_1, a_2, ..., t_i, x_{i+1}, ..., x_n)$ y obtenemos que $\exists t_i$ entre x_i y a_i tal que $\varphi_i'(t_i) = \dfrac{\varphi(x_i) - \varphi(a_i)}{x_i - a_i} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \varphi(x_i) - \varphi(a_i) = \varphi_i'(t_i)(x_i - a_i) = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a_1, a_2, ..., t_i, x_{i+1}, ..., x_n)(x_i - a_i)$
Por tanto, sea $U_i = (a_1, a_2, ..., t_i, x_{i+1}, ..., x_n)$ tenemos que $||U_i - a|| \leq ||x - a||$
$f(x) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} (\varphi_i(x_i) - \varphi_i(a_i)) \stackrel{\text{TVM}}{=} \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(U_i)(x_i - a_i)$, veamos que tiende a 0.
Por tanto: $0 \leq \dfrac{1}{||x-a||} \left| f(x) - f(a) - \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i) \right| =$
$= \dfrac{1}{||x-a||} \left| \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(U_i)(x_i - a_i) - \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i) \right| \leq$
$\leq \dfrac{1}{||x-a||} \sum_{i=1}^{n} \left| \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(U_i) - \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right| |x_i - a_i| \leq \dfrac{1}{||x-a||} \cdot ||x-a|| \sum_{i=1}^{n} \left| \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(U_i) - \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right| =$
$= \sum_{i=1}^{n} \left| \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(U_i) - \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right|$
Así, dado $\varepsilon > 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ es continua en a $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$, entonces $\exists \delta_1, \delta_2, ..., \delta_n > 0$ tal que:
$\left| \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x) - \dfrac{f}{x_i}(a) \right| < \dfrac{\varepsilon}{n}$ $\forall x \in B(a, \delta_i)$. Tomemos $\delta = \mathrm{mín}\{\delta_1, ..., \delta_n\} > 0$.
Ahora, si $x \in B(a, \delta) \setminus \{a\}$ tenemos que:
$0 \leq \dfrac{1}{||x-a||} \left| f(x) - f(a) - \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i) \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \left| \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(U_i) - \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\varepsilon}{n} = \varepsilon$ □

Observación. Como consecuencia de la proposición anterior, si $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene derivadas parciales y son continuas en $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, entonces f es diferenciable en u $\forall u \in U$.

Ejemplo. Estudia la diferenciabilidad de:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

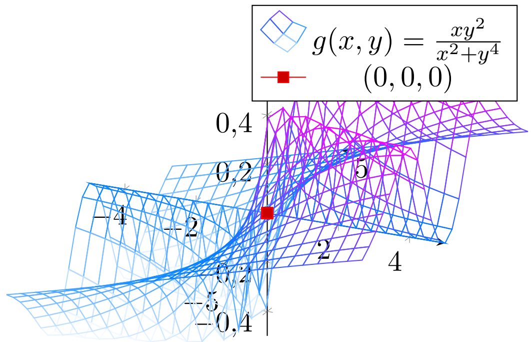
Es claro que $g(x) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ tiene derivadas parciales y son continuas en todo su dominio, $D_g = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ y $f \equiv g$ en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Entonces f tiene derivadas parciales y son continuas en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Por la proposición anterior, tenemos que f es diferenciable en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Veamos que ocurre en $(0,0)$. Podemos comprobar que f tiene todas las derivadas direccionales en $(0,0)$, pero f no es diferenciable en $(0,0)$ entre otras cosas porque no es continua en dicho punto. De hecho $\nexists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. En efecto:

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = 0$$

$$\lim_{x\to 0} f(x^2,x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2x^2}{x^4+x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2} \neq 0$$

Figura 5.



Observación.

Sea $\left.\begin{array}{l} g \text{ diferenciable en } B \\ f \equiv g \text{ en } B \end{array}\right\} \Longrightarrow f$ es diferenciable en $\mathring{B}$ y $df(a) = dg(a)\ \forall a \in \mathring{B}$

Observación. Si f es diferenciable en a, entonces f es continua en a y tiene todas las derivadas parciales de f en a. Además $D_u f(a) =< \bigtriangledown f(a), u > \ \forall u \in \mathbb{R}^n$ con $||u|| = 1$

Como $< \bigtriangledown f(a), u >= ||\bigtriangledown f(a)||\ ||u|| \cos(\bigtriangledown f(a), u) = ||\bigtriangledown f(a)|| \cos(\bigtriangledown f(a), u)$.

Por tanto la derivada direccional maximal de f en a se alcanza en la dirección del vector gradiente $\bigtriangledown f(a) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a), ..., \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$ y su valor es $||\bigtriangledown f(a)||$.

6.3. Diferenciabilidad en funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$

Nota. Antes de continuar conviene leer el Apéndice A. Repaso de aplicaciones lineales.

Definición 36. Sea $U \in \mathbb{R}^n$ abierto, $\underset{x\to(f_1(x),f_2(x),\ldots,f_m(x))}{f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^m}$ y sea $a \in U$. Diremos que f es **diferenciable en** a si $\exists L\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ lineal tal que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)-L(h)}{||h||} = \overline{0} \in \mathbb{R}^m$ o equivalentemente, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)-L(x-a)}{||x-a||} = \overline{0} \iff \lim\limits_{x\to a} \dfrac{||f(x)-f(a)-L(x-a)||_{\mathbb{R}^m}}{||x-a||_{\mathbb{R}^n}} =$
$= 0$.

Observación. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)-L(h)}{||h||} = \overline{0} \in \mathbb{R}^m \iff \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f_i(a+h)-f_i(a)-L_i(h)}{||h||} =$
$= 0 \in \mathbb{R}$, para $1 \le i \le m \iff L_i = df_i(a)$ para $1 \le i \le m$.

Veamos ahora que si existe dicha L, ha de ser $L = (L_,L_2,\ldots,L_m) = (df_1(a), df_2(a),\ldots,df_m(a))$. Por tanto si existe L, es única, la llamamos diferencial de f en a y la denotamos por $df(a)$.

Observación. $f = (f_1, f_2, f_3, .., f_m)$ es diferenciable en $a \iff f_1, f_2, .., f_m$ son diferenciables en a. Además $df(a) = (df_1(a), df_2(a), \ldots, df_m(a))$
Así tenemos que f diferenciable en $a \implies f$ continua en a ya que, f diferenciable en $a \implies f_1, f_2, \ldots, f_m$ diferenciables en $a \implies f_1, f_2, \ldots, f_m$ continuas en $a \implies f$ es continua en a.

Definición 37. A la matriz asociada a $df(a)$ la denominamos **matriz jacobiana de f en** a y la denotamos por $J_f(a)$.

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \ldots & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1f_1(a) & D_2f_1(a) & \ldots & D_nf_1(a) \\ D_1f_2(a) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ D_1f_m(a) & \ldots & \ldots & D_mf_n(a) \end{pmatrix}$$

<u>**Ejemplo.**</u> $\underset{(x,y,z)\to(x^2y,3zy^3)}{f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2}$
f es diferenciable en todo $\mathbb{R}^3$ pues $f_1(x,y,z) = x^2y$ y $f_2(x,y,z) = 3zy^3$ tienen derivadas parciales y son continuas en $\mathbb{R}^3$ luego son diferenciables en $\mathbb{R}^3$
$J_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 & 0 \\ 0 & 9zy^2 & 3y^3 \end{pmatrix}$ en particular $J_f(1,0,2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$df(1,0,2)\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ donde $(h_1,h_2,h_3) \to \left(J_f(1,0,2) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \right)^t = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} \right)^t =$

$$= \begin{pmatrix} h_2 \\ 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} h_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo. $\underset{t \to (\cos t, \operatorname{sen} t, t)}{f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3}$

f_1, f_2, f_3 son continuas en $\mathbb{R}$, luego f es diferenciable en $\mathbb{R}$ y tenemos:

$$J_f(t) = \begin{pmatrix} f_1'(t) \\ f_2'(t) \\ f_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen}(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix}$$

6.4. Propiedades de la diferenciabilidad de funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$

Proposición 43. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, sean f y $g\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ y sea $a \in U$. Si f y g son diferenciables en a entonces $(f+g)$, $(f-g)$ y αf (con $\alpha \in \mathbb{R}$) son diferenciables en a y además:

- $d(f+g)(a) = df(a) + dg(a)$
- $d(f-g)(a) = df(a) - dg(a)$
- $d(\alpha f)(a) = \alpha df(a)$

Demostración.
A partir de la definición de diferenciabilidad y de la proposición de los límites. □

Teorema 10. ***Regla de la cadena.***
Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, sea $V \subset \mathbb{R}^m$ abierto, sea $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^m$, sea $g\colon V \longrightarrow \mathbb{R}^k$ tal que $f(U) \subset V$ y sea $a \in U$. Si f es diferenciable en a y g es diferenciable en $f(a)$, entonces $g \circ f$ es diferenciable en a y $d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a)$ y por tanto $J_{g\circ f}(a) = J_g(f(a)) \cdot J_f(a)$.

Ejemplo. Sean $f(x,y,z) = (x^2y, y+z)$ y $g(u,v) = u \cdot v$ ($\mathbb{R}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}$)
$J_{g\circ f}(x,y,z) = J_g(f(x,y,z)) \cdot J_f(x,y,z)$

Demostración.
Por hipótesis, sea $L = df(a)$ y $S = dg(f(a))$, tenemos:

a) $\dfrac{f(x) - f(a) - L(x-a)}{||x-a||} \overset{x \to a}{\longrightarrow} 0$ $(\in \mathbb{R}^m)$

b) $\dfrac{g(y) - g(f(a)) - S(y - f(a))}{||y - f(a)||} \overset{y \to f(a)}{\longrightarrow} 0$ $(\in \mathbb{R}^k)$

Queremos probar:

$$\frac{g(f(x)) - g(f(a)) - S \circ L(x-a)}{||x-a||} \overset{x \to a}{\longrightarrow} 0 \ (\in \mathbb{R}^k)$$

Entonces:

Por a), para $\varepsilon_0 = 1 \ \exists r > 0 \ \shortparallel \ \dfrac{||f(x) - f(a) - L(x-a)||}{||x-a||} < 1 \ \forall x \in B(a,r) \setminus \{a\} \implies$
$\implies ||f(x) - f(a) - L(x-a)|| \leq ||x-a|| \ \forall x \in B(a,r) \implies ||f(x) - f(a)|| \leq$
$\leq ||f(x) - f(a) - L(x-a)|| + ||L(x-a)|| \leq ||x-a|| + ||L|| \, ||x-a|| = (1 + ||L||) \, ||x-a|| \ \forall x \in B(a,r)$

Así tenemos f diferenciable en $a \implies \exists r > 0 \ \exists M > 0 \ \shortparallel \ ||f(x) - f(a)|| \leq M \, ||x-a|| \ \forall x \in B(a,r)$

Dado $\varepsilon > 0$, buscamos $\delta > 0 \ \shortparallel \ \dfrac{||g(f(x)) - g(f(a)) - S \circ L(x-a)||}{||x-a||} < \varepsilon \ \forall x \in B(a,\delta) \setminus \{a\}$

Para $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2(||S|| + 1)} > 0$, por a), tenemos que $\exists \delta_1 > 0$ tal que:

$$\boxed{\frac{||f(x) - f(a) - L(x-a)||}{||x-a||} < \varepsilon' \ \forall x \in B(a,\delta_1) \setminus \{a\}}^{(*)}$$

Para $\varepsilon'' = \dfrac{\varepsilon}{2M} > 0 \ \exists \delta_2 > 0 \ \shortparallel \ \dfrac{||g(y) - g(f(a)) - S(y - f(a))||}{||y - f(a)||} < \varepsilon'' \ \forall y \in B(f(a),\delta_2) \setminus \{f(a)\}$

$$\implies \boxed{||g(y) - g(f(a)) - S(y - f(a))|| < \varepsilon'' \, ||y - f(a)|| \ \forall y \in B(f(a),\delta_2)}^{(**)}$$

Sea $\delta = \text{mín}\{r, \delta_1, \delta_2\} > 0$. Ahora si $x \in B(a,\delta) \setminus \{a\}$; es decir, $0 < ||x-a|| < \delta$ tenemos:

$$\frac{||g(f(x)) - g(f(a)) - S \circ L(x-a)||}{||x-a||} \underset{+\text{ des. triangular}}{\overset{\pm S(f(x)-f(a))}{\leq}} \frac{||g(f(x)) - g(f(a)) - S(f(x) - f(a))||}{||x-a||} +$$

$+ \dfrac{||S(f(x) - f((a)) - S \circ L(x-a)||}{||x-a||}$ y ahora por (**) y como $||x-a|| < \delta \leq r \implies$
$\implies ||f(x) - f(a)|| < M \, ||x-a|| \leq M\delta \leq M\delta_2$ tenemos que:

$$\frac{||g(f(x)) - g(f(a)) - S(f(x) - f(a))||}{||x-a||} + \frac{||S(f(x) - f(a)) - S \circ L(x-a)||}{||x-a||} \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon'' \, ||f(x) - f(a)||}{||x-a||} + \left|\left| S\left(\frac{f(x) - f(a) - L(x-a)}{||x-a||}\right)\right|\right| \underset{\implies ||f(x)-f(a)|| \leq M||x-a||}{\overset{x \in B(a,r) \implies}{\leq}}$$

$$\leq \frac{\varepsilon'' M \, ||x-a||}{||x-a||} + ||S|| \left|\left| \frac{f(x) - f(a) - L(x-a)}{||x-a||} \right|\right| \underset{||x-a|| < \delta \leq \delta_1}{\overset{\text{Por } (*)}{<}} \varepsilon'' M + ||S|| \, \varepsilon' \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \square$$

Observación. Como hemos visto antes $J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a)) \cdot J_f(a)$

Escribamos esto matricialmente:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial (g \circ f)_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \dfrac{\partial (g \circ f)_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial (g \circ f)_k}{\partial x_1}(a) & \dots & \dfrac{\partial (g \circ f)_k}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(f(a)) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m}(f(a)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_1}(f(a)) & \dots & \frac{\partial g_k}{\partial x_m}(f(a)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(f(a)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(f(a)) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(f(a)) \end{pmatrix}$$

También podemos expresar $(g \circ f)(a)$ como:

$$\frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_j}(a) = \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial g_i(f(a))}{\partial x_l} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\ \forall 1 \leq i \leq k,\ \forall 1 \leq j \leq n$$

Proposición 44. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, sean f y $g \colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ y sea $a \in U$

a) Si f y g son diferenciables en a entonces $f \cdot g$ es diferenciable en a y $d(f \cdot g)(a) = f(a) \cdot dg(a) + g(a) \cdot df(a)$.

b) Si f y g son diferenciables en a y $g(a) \neq 0$ entonces $\frac{f}{g}$ es diferenciable en a y $d\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{1}{(g(a))^2} \cdot (g(a) \cdot df(a) - f(a) \cdot dg(a))$.

Demostración.
Demostraremos solo el apartado b).
g diferenciable en $a \implies g$ continua en a

$$\left.\begin{array}{l} g \text{ continua en } a \\ g(a) \neq 0 \end{array}\right\} \implies \exists r > 0 \shortparallel g(x) \neq 0\ \forall x \in B(a, r)$$

Luego $\frac{f}{g}$ está bien definida en $B(a, r)$. Sean:

$H \colon \underset{x \longrightarrow (f(x), g(x))}{B(a, r) \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \shortparallel x \in \mathbb{R}\}}$ y

$\Phi \colon \underset{(f(x), g(x)) \longrightarrow \frac{f(x)}{g(x)}}{\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \shortparallel x \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}}$

Entonces $\frac{f}{g} = \Phi \circ H$. H es diferenciable en a (pues sus componentes f y g son diferenciables en a). Φ es diferenciable en todo su dominio.
Por la regla de la cadena $\frac{f}{g} = \Phi \circ H$ es diferenciable en a y $d(\frac{f}{g})(a) = d\Phi(H(a)) \circ dH(a) =$
$= d\Phi(f(a), g(a)) \circ dH(a)$. Ahora:

$$J_{\frac{f}{g}}(a) = J_{\Phi}(f(a), g(a)) \cdot J_H(a) = \begin{pmatrix} \frac{1}{g(a)} & -\frac{f(a)}{(g(a))^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 f(a) & D_2 f(a) & \dots & D_n f(a) \\ D_1 g(a) & D_2 g(a) & \dots & D_n g(a) \end{pmatrix}$$

Luego $d(\frac{f}{g})(a) = \frac{1}{g(a)} \cdot df(a) - \frac{f(a)}{(g(a))^2} \cdot dg(a) = \frac{1}{(g(a))^2} \cdot (g(a) \cdot df(a) - f(a) \cdot dg(a))$ □

6.5. Derivabilidad en funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^n$

Observación. Sea $\varphi\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ con $I \subset \mathbb{R}$ intervalo, y sea $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t))$

Si $\varphi_1, ..., \varphi_n$ son derivables en $t_0 \in \mathring{I}$, entonces φ es diferenciable en t_0 y $J_\varphi(t_0) = \begin{pmatrix} \varphi_1'(t_0) \\ \vdots \\ \varphi_n'(t_0) \end{pmatrix}$

Observemos que tiene sentido preguntarse si ¿$\exists \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\varphi(t_0+h)-\varphi(t_0)}{h}$?

Definición 38. Se dice que $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ es derivable en t_0 si $\exists \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\varphi(t_0+h)-\varphi(t_0)}{h}$. Si existe será un vector de $\mathbb{R}^n$ y lo denotaremos por $\varphi'(t_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\varphi(t_0+h)-\varphi(t_0)}{h} =$
$= \left(\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\varphi_1(t_0+h)-\varphi_1(t_0)}{h}, \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\varphi_2(t_0+h)-\varphi_2(t_0)}{h}, \ ... \ , \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\varphi_n(t_0+h)-\varphi_n(t_0)}{h}\right) =$
$= (\varphi_1'(t_0), \varphi_2'(t_0), ..., \varphi_n'(t_0))$

Observación. Por tanto tenemos que φ es derivable en $t_0 \iff \varphi_i$ es derivable en t_0 $\forall\ 1 \leq i \leq n$

Definición 39. Si φ es continua en $I \subset \mathbb{R}$ decimos que $\Gamma := \varphi(I)$ es una curva en $\mathbb{R}^n$ parametrizada por φ. Además, si φ es derivable en $t_0 \in I$, la recta tangente a Γ en $\varphi(t_0)$ es la recta que pasa por dicho punto y tiene como vector director $\varphi'(t_0)$.

Observación. Sea $I \subset \mathbb{R}$ y sea $\varphi\colon I \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Si φ es derivable en t_0, ya hemos visto que $\varphi'(t_0) = (\varphi_1'(t_0), \varphi_2'(t_0), ..., \varphi_n'(t_0))$. Entonces:

$J_\varphi(t_0) = \begin{pmatrix} \varphi_1'(t_0) \\ \varphi_2'(t_0) \\ \vdots \\ \varphi_n'(t_0) \end{pmatrix}$ y por tanto, $\underset{h\to h(\varphi_1'(t_0),...,\varphi_n'(t_0))=h\varphi'(t_0)}{d\varphi(t_0)\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n}$

Proposición 45. Caso particular de la regla de la cadena para funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^n$.
Sea $I \subset \mathbb{R}$, sea $\varphi\colon I \longrightarrow R^n$ diferenciable en $t_0 \in \mathring{I}$, sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto tal que $\varphi(I) \subset U$ y sea $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en $\varphi(t_0)$.
Sea $g(t) := f(\varphi(t))$ $\forall t \in I$ es derivable en t_0 y $g'(t_0) =< \bigtriangledown f(\varphi(t_0)), \varphi'(t_0) >$ ya que

$$g'(t_0) \equiv J_g(t_0) = J_f(\varphi(t_0)) \cdot J_\varphi(t_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(\varphi(t_0)) & \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(\varphi(t_0)) & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(\varphi(t_0)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1'(t_0) \\ \varphi_2'(t_0) \\ \vdots \\ \varphi_n'(t_0) \end{pmatrix} =$$

$$=< \bigtriangledown f(\varphi(t_0)), (\varphi_1'(t_0), ..., \varphi_n'(t_0)) >=< \bigtriangledown f(\varphi(t_0)), \varphi'(t_0) >$$

6.6. Teorema del valor medio. Teorema de los incrementos finitos

Teorema 11. ***Teorema del valor medio (de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$)***
Si $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) entonces $\exists c \in (a,b)$ tal que $f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$.

Observación. ¿Se cumple el siguiente "teorema del valor medio" de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$?
Sea $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, si f es diferenciable en U y $a,b \in U$.
¿$\exists c \in U \shortparallel f(b)-f(a) = df(c)(b-a)$? ó ¿$\exists c \in [a,b] \setminus \{a,b\} \shortparallel f(b)-f(a) = df(c)(b-a)$?
En general no.

Ejemplo. Sea $\underset{t\to(1-t^2,1-t^3)}{\varphi\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2}$
Tenemos $\varphi(1)-\varphi(0) = (0,0)-(1,1) = (-1,-1)$
Además $\varphi'(t) = (-2t,-3t^2) \implies d\varphi(c)(b-a) = \varphi'(c)(1-0) = (-2c,-3c^2)$ y tenemos que $\nexists c \in (0,1) \shortparallel (-1,-1) = (-2c,-3c^2)$.

Nota. Si el espacio de llegada es $\mathbb{R}^m$ com $m > 1$, el teorema del valor medio, en general, no se cumple.

Observación. Nos preguntamos ahora:
Sea $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en U (abierto contenido en $\mathbb{R}^n$) y $a,b \in U$.
¿$\exists c \in U \shortparallel f(b)-f(a) = df(c)(b-a)$?
En general no.

Ejemplo. Sea $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \shortparallel x \le 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$
$$(x,y)\to\begin{cases} x^2 \text{ si } x<0,\ y<0 \\ 0 \text{ en resto de casos}\end{cases}$$
f es diferenciable en su dominio.
Tenemos que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0\ \forall (x,y) \in \text{Dom } f$ Entonces $f(-1,1)-f(-1,-1) = 0-1 = -1$
$$df(c_1,c_2)((-1,1)-(-1,-1)) =< \bigtriangledown f(c_1,c_2),(0,2) >=< \left(\frac{\partial f}{\partial x}(c), \frac{\partial f}{\partial y}(c)\right),(0,2) >=$$
$= 0 \neq -1\ \forall c \in \text{Dom } f$

Teorema 12. ***Teorema del valor medio en funciones de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$***
Sea $U \subset R^n$ abierto, sea $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en U y sean $a,b \in U$ tales que $[a,b] \subset U$. Entonces $\exists c \in [a,b] \setminus \{a,b\}$ tal que $f(b)-f(a) = df(c)(b-a)$

Demostración.
Definamos $\underset{t\to f((1-t)a+tb)}{g\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}}$
Observamos que $g(t) = f((1-t)a_1+tb_1,(1-t)a_2+tb_2,\ \dots\ ,(1-t)a_n+tb_n) = (f\circ\varphi)(t)$
donde $\underset{t\to(1-t)a+tb}{\varphi\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n}$

Como $\varphi([0,1]) = [a,b] \subset U$, φ es diferenciable en $[0,1]$ y f es diferenciable en $U \stackrel{\text{por la regla de la cadena}}{\Longrightarrow}$

$\Longrightarrow$ tenemos que g es diferenciable en $(0,1)$ y continua en $[0,1]$ pues φ y f lo son.
Por el teorema del valor medio (de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$) aplicado a g, sabemos que existe $t_0 \in (0,1)$ tal que $g(1) - g(0) = g'(t_0)(1-0) = g'(t_0)$
Como $g(1) - g(0) = f(b) - f(a) = g'(t_0) = (f \circ \varphi)'(t_0) =< \bigtriangledown f(\varphi(t_0)), \varphi'(t_0) >$
Llamemos $c = \varphi(t_0) = (1-t_0)a + t_0 b \in [a,b] \setminus \{a,b\}$
Tenemos que $\varphi(t) = (1-t)a + tb \implies \varphi'(t) = b - a \ \forall t \in (0,1)$ y por tanto:
$f(b) - f(a) =< \bigtriangledown f(c), \varphi'(t_0) >=< \bigtriangledown f(c), b-a >= df(c)(b-a)$ □

Teorema 13. ***Teorema de los incrementos finitos***
Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y sea $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable en U. Si $a,b \in U$ tal que $[a,b] \subset U$ entonces $||f(b) - f(a)|| \leq \sup\limits_{x\in[a,b]} ||df(x)||\,||b-a||$

Corolario 7. Antes de demostrar el teorema veamos el siguiente corolario:
Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable en U y sea $v \in \mathbb{R}^m$. Si $a,b \in U$, con $a \neq b$ tales que $[a,b] \subset U$, entonces $\exists c \in [a,b] \setminus \{a,b\}$ ॥ $< v, f(b) - f(a) >=< v, df(c)(b-a) >$

Demostración.
Definamos $g\colon U \underset{x \to <v,f(x)>}{\longrightarrow} \mathbb{R}$
Si $v = (v_1, v_2, ..., v_m)$, tenemos que $g(x) = v_1 f_1(x) + v_2 f_2(x) + \ ... \ + v_m f_m(x) \ \forall x \in U$. Como f es diferenciable en $U \implies f_1, f_2, ..., f_m$ es diferenciable en $U \implies g$ es diferenciable en U por ser combinación lineal de funciones diferenciables en U.
Por el Teorema del valor medio aplicado a g tenemos que $\exists c \in [a,b] \setminus \{a,b\}$ tal que
$g(b) - g(a) = dg(c)(b-a)$ y por tanto: $g(b) - g(a) =< v, f(b) > - < v, f(a) >=$
$=< v, f(a) - f(b) >= dg(c)(b-a) = \sum\limits_{i=1}^{m} v_i df_i(c)(b-a) =$
$=< (v_1, v_2, ..., v_m), (df_1(c), df_2(c), ..., df_m(c))(b-a) >=< v, df(c)(b-a) >$ □

Demostración. Demostremos ahora el Teorema de los incrementos finitos.
Sean $a,b \in U$, $a \neq b$ con $[a,b] \subset U$. Si $\{||df(x)|| : x \in [a,b]\}$ no es acotado, entonces la desigualdad del enunciado no dice nada (porque no hay supremo).
Si es acotado, entonces tiene supremos en $\mathbb{R}$
Si $f(a) = f(b)$ trivial. si $f(a) \neq f(b) \implies ||f(b) - f(a)|| > 0$. Tomamos $v = \dfrac{f(b) - f(a)}{||f(b) - f(a)||}$ $(\in R^m)$ y $||v|| = 1$. Por el corolario anterior $\exists c \in [a,b] \setminus \{a,b\}$ tal que
$< \dfrac{f(b) - f(a)}{||f(b) - f(a)||}, f(b) - f(a) >=< v, df(c)(b-a) >$. Luego $||f(b) - f(a)|| =$
$=< v, df(c)(b-a) > \leq | < v, df(c)(b-a) > | \stackrel{\text{desigualdad Cauchy−Schwarz}}{\leq} ||v||\,||df(c)(b-a)|| =$
$= ||df(c)(b-a)|| \leq ||df(c)||\,||b-a|| \leq \sup\limits_{x\in[a,b]} ||df(x)||\,||b-a||$ □

Corolario 8. Veamos las siguientes consecuencias.

1) Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y <u>conexo</u> y $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable en U. Si $df(x) = 0$ $\forall x \in U \implies f$ es constante en U.

   Demostración.
   Por el *Teorema de los incrementos finitos* y la hipótesis tenemos que f es constante en los segmentos contenidos en U y por tanto en los poligonales de U. Fijemos $x_0 \in U$, por ser U conexo $\implies U$ es conexo por poligonales. Así $\forall x \in U \setminus \{x_0\}$ $\exists \Gamma_x$ poligonal en U que une x y x_0, luego $f(x) = f(x_0) \implies f$ constante en U. □

2) Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y <u>convexo</u> y sea $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ diferenciable en U. Si $\exists M > 0 \shortparallel ||df(x)|| \leq M \ \forall x \in U \implies ||f(y) - f(x)|| \leq M\,||y - x|| \ \forall x, y \in U$.

   Demostración.
   Sean $x, y \in U, x \neq y$. Como U es convexo tenemos $[x, y] \subset U$ y por el *Teorema de los incrementos finitos* tenemos, $||f(y) - f(x)|| \leq \sup\limits_{z\in[x,y]} ||df(z)||\,||y - x|| \leq M\,||y - x||$ □

6.7. Derivadas parciales de orden superior

Definición 40. Derivadas parciales de orden superior.
Sea $U \subset \mathbb{R}^m$ abierto y $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ si f tiene derivadas parciales en U podemos considerar las funciones $\underset{x\to D_i f(x)}{D_i f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}}$.
En el caso de que una de estas funciones $D_i f$ tenga derivadas parciales en $a \in U$, denominamos a estas **derivadas parciales segundas** de f en a y las denotamos por:

$$D_j(D_i f)(a) \quad \text{ó} \quad D_{ji} f(a) \quad \text{ó} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial_{x_j} \partial_{x_i}(a)}$$

Además, si $j = i$, solemos escribir $D_{ii} f(a)$ ó $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} f(a)$.
Por recurrencia definimos las derivadas parciales terceras, cuartas, ... y k-ésimas.

<u>**Ejemplo.**</u> Sea $f(x, y, z) = 3x^2y^3z$, sus derivadas parciales son:

$$D_1 f = 6xy^3z,\ D_2 f = 9x^2y^2z,\ D_3 f = 3x^2y^3$$

Mientras que sus derivadas parciales segundas son:

$$D_{11} f = 6y^3z,\ D_{21} f = 18xy^2z,\ D_{31} f = 6xy^3$$

$$D_{12} f = 18xy^2z,\ D_{22} f = 18x^2yz,\ D_{32} f = 9x^2y^2$$

$$D_{13} f = 6xy^3,\ D_{23} f = 9x^2y^2,\ D_{33} f = 0$$

Definición 41. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y sea $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$. Decimos que f es de *clase 1* en U y escribimos $f \in C^1(U)$ ó f es C^1 en U si posee todas las derivadas parciales y son continuas en U.
Además, decimos que f es de *clase 2* en U y escribimos $f \in C^2(U)$ ó f es C^2 en U si posee todas las derivadas parciales segundas y son continuas en U.
Por recursión definimos que f es de *clase k* en U y escribimos $f \in C^k(U)$ ó f es C^k en U si posee todas las derivadas parciales k-ésimas y son continuas en U. Si $f \in C^k(U)$ $\forall k \in \mathbb{N}$ escribimos $f \in C^\infty(U)$.
Por último, sea $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ con $f = (f_1, f_2, ..., f_m)$, decimos que $f \in C^k(U)$ si $f_i \in C^k(U) \quad \forall 1 \leq i \leq m$.

Observación. Si $f \in C^1(U)$, entonces f es diferenciable en U y $df\colon U \longrightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ es continua.

Teorema 14. *Teorema de Schwarz*
Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y sea $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$, si $f \in C^2(U)$ entonces $D_{ij}f(a) = D_{ji}f(a)$
$\forall a \in U, \quad \forall i, j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Demostración.
Sea $a \in U$, sean $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$, si $i = j$ trivial.
Si $i \neq j$, como $a \in U$ y U es abierto, $\exists r_0 > 0 \shortparallel B(a, r_0) \subset U$.
$\boxed{\text{Probemos que } \forall r \in \left(0, \frac{r_o}{2}\right) \ \exists x_r, y_r \in B(a, 2r) \shortparallel D_{ij}f(x_r) = D_{ji}f(y_r)}$ **(*)**
Una vez probado esto tenemos que $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n, y_n \in B\left(a, \frac{r_o}{n}\right) \shortparallel D_{ij}f(x_n) = D_{ji}f(y_n)$
Así, $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ e $y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ y como $D_{ij}f$ y $D_{ji}f$ son continuas en a, tenemos:
$D_{ij}f(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} D_{ij}f(a)$ y $D_{ji}f(y_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} D_{ji}f(a)$ y como $D_{ij}f(x_n) = D_{ji}f(y_n)$ $\forall n \in N$, tenemos que $D_{ij}f(a) = D_{ji}f(a)$.
Probemos ahora **(*)**. Definamos las funciones,
$\Phi_1(t) = f(a + re_j + te_i) - f(a + te_i)$ $\forall t \in [0, r]$
$\Phi_2(t) = f(a + re_i + te_j) - f(a + te_j)$ $\forall t \in [0, r]$
Tenemos que $\Phi_1(r) - \Phi_1(0) = \Phi_2(r) - \Phi_2(0)$, ya que:
$\Phi_1(r) - \Phi_1(0) = f(a + re_j + re_i) - f(a + re_i) - f(a + re_j) + f(a)$
$\Phi_2(r) - \Phi_2(0) = f(a + re_i + re_j) - f(a + re_j) - f(a + re_i) + f(a)$
Observamos que el cuadrado de vértices a, $a + re_i$, $a + re_j$ y $a + re_i + re_j$ está contenido en $B(a, 2r) \subset B(a, r_0) \subset U$.
Por *la regla de la cadena* Φ_1 y Φ_2 son derivables en $[0, r]$ y por el *teorema del valor medio aplicado* a Φ_1 en $[0, r]$ tenemos que $\exists \alpha \in (0, r)$ tal que:
$\Phi_1(r) - \Phi_1(0) = \Phi_1'(\alpha)(r - 0) = r(< \bigtriangledown f(a + re_j + \alpha e_i)\ ,\ e_i > - < \bigtriangledown f(a + \alpha e_i)\ ,\ e_i >) =$
$= r(D_i f(a + re_j + \alpha e_i) - D_i f(a + \alpha e_i))$.
Aplicando de nuevo el *teorema del valor medio* en $\varphi_1(t) = D_i f(a + \alpha e_i + te_j)$ $\forall t \in [0, r]$ tenemos que $\exists \beta \in (0, r) \shortparallel \varphi_1(r) - \varphi_1(0) = \varphi_1'(\beta) r = r(D_{ji}f(a + \alpha e_1 + \beta e_j))$.
Por tanto $\Phi_1(r) - \Phi_1(0) = r^2(D_{ji}f(a + \alpha e_i + \beta e_j))$.
Razonando análogamente con Φ_2 tenemos que $\exists \widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in (0, r)$ tal que:

$\Phi_2(r) - \Phi_2(0) = r^2(D_{ij}f(a + \tilde{\alpha} e_i + \tilde{\beta} e_j))$. Y ahora:
$\Phi_1(r) - \Phi_1(0) = \Phi_2(r) - \Phi_2(0)$ y $r > 0 \implies D_{ji}f(a + \alpha e_1 + \beta e_j) = D_{ij}f(a + \tilde{\alpha} e_i + \tilde{\beta} e_j)$
Luego llamando $x_r = a+\tilde{\alpha} e_i+\tilde{\beta} e_j$ e $y_r = a+\alpha e_1+\beta e_j \implies x_r, y_r \in B(a, 2r)$ y $D_{ij}f(x_r) =$
$= D_{ji}f(y_r)$. □

Corolario 9. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y sea $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$. Si $f \in C^3(U)$, entonces
$D_{ijk}f(a) = D_{\sigma(i)\sigma(j)\sigma(k)}f(a)\ \forall a \in U,\ \forall i, j, k \in \{1, 2, ..., n\},\ \forall \sigma : \{i, j, k\} \longrightarrow \{i, j, k\}$ biyectiva (o permutación).

Demostración.
Sean $i, j, k \in \{1, 2, ..., n\}$, supongamos que $\sigma(i) = j$, $\sigma(j) = k$, $\sigma(k) = i$ y sea $a \in U$:
$D_{\sigma(i)\sigma(j)\sigma(k)}f(a) = D_{jki}f(a) = D_j(D_{ki}f(a)) \overset{\text{T. de Schwarz}}{=} D_j(D_{ik}f(a)) = D_{jik}f(a) =$
$= D_{ji}(D_kf(a)) \overset{\text{T. de Schwarz}}{=} D_{ij}(D_kf(a)) = D_{ijk}f(a)$.
Análogamente para el resto de permutaciones. □

Corolario 10. Así, por inducción:
Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y sea $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$. Si $f \in C^k(U)$, entonces:
$D_{i_1 i_2 ... i_k}f(a) = D_{\sigma(i_1)\sigma(i_2)...\sigma(i_k)}f(a)\ \forall a \in U,\ \forall i_1, i_2, ..., i_k \in \{1, 2, ..., n\}$,
$\forall \sigma : \{i_1, i_2, ..., i_k\} \longrightarrow \{i_1, i_2, ..., i_k\}$ biyectiva (o permutación).

6.8. Teorema de Taylor

Nota. No hay *Teorema de Taylor* para funciones que llegan a $\mathbb{R}^m$ con $m > 1$.

Observación. Recordemos que sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en U, sea $a \in U$ y $h \in \mathbb{R}^n \shortparallel [a, a + h] \subset U$ y llamamos:
$\varphi : \underset{t \to a+th}{[0, 1]} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, con $\varphi'(t) = (h_1, h_2, ..., h_n)$ y $\varphi''(t) = 0\ \forall t \in [0, 1]$.

Por la regla de la cadena $\dfrac{d}{dt}(f \circ \varphi)(t) =< \nabla f(\varphi(t)), \varphi'(t) >=< \nabla f(a + th), h >$

Teorema 15. *Teorema de Taylor (funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$).*
Sea $g : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $g \in C^{k+1}(I)$ y sea $a \in I$, entonces $\forall x \in I \setminus \{0\}$ $\exists c$ entre x y a $(\in I)$ tal que:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + ... + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k + \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k + 1)!}(x - a)^{k+1}$$

O escrito de otro modo, fijado $a \in I$, $\forall h \in \mathbb{R} \shortparallel a + h \in I$, $\exists c$ entre a y $a + h$ tal que:

$$f(a + h) = \underbrace{f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + ... + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}h^k}_{P_{k,a}(h)} + \frac{f^{(k+1)}(c)}{(k + 1)!}h^{k+1}$$

Observación. $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - P_{k,a}(h)}{h^k} = 0$

Teorema 16. *Teorema de Taylor.*
Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, sea $k \in \mathbb{N}$, sea $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f \in C^{k+1}(U)$ y sea $a \in U$. Entonces $\forall h \in \mathbb{R}^n$ tal que $[a, a+h] \subset U$, $\exists c \in [a, a+h] \setminus \{a, a+h\}$ tal que: $f(a+h) =$

$$= \underbrace{f(a) + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j!} \left(\sum_{i_1,\dots,i_j=1}^{n} h_{i_1} \cdots h_{i_j} D_{i_1 \dots i_j} f(a) \right)}_{\text{Polinomio de Taylor de } f \text{ de orden } k \text{ en } a \ (P_{k,a})} + \underbrace{\frac{1}{(k+1)!} \sum_{i_1,\dots,i_{k+1}=1}^{n} h_{i_1} \cdots h_{i_{k+1}} D_{i_1 \dots i_{k+1}} f(c)}_{\text{Resto de Taylor } (\mathrm{R_{k,a}})}$$

Demostración.
Sea $\varphi(t) = a + th$, sabemos que $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$. Como U es abierto y φ es continua, entoces $A := \varphi^{-1}(U)$ es abierto en $\mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{l} \varphi\colon A \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ es } C^\infty \text{ en } A \\ f\colon U \longrightarrow \mathbb{R} \text{ es } C^{k+1} \text{ en } U \end{array}\right\} \overset{\text{Regla de la cadena}}{\Longrightarrow} f \circ \varphi \text{ es } C^{k+1} \text{ en } A.$$

Llamemos $g = f \circ \varphi; g\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(1) = f(\varphi(1)) = f(a+h)$ y $g(0) = f(\varphi(0)) = f(a)$.
Por el *por el teorema de Taylor en* $\mathbb{R}$ aplicado a g, $\exists \theta \in (0,1)$ tal que:

$$g(1) = g(0) + \frac{g'(0)}{1!}(1-0) + \frac{g''(0)}{2!}(1-0)^2 + ... + \frac{g^{(k)}(0)}{k!}(1-0)^k + \frac{g^{k+1}(\theta)}{(k+1)!}(1-0)^{k+1} =$$

$$= g(0) + \frac{g'(0)}{1!} + \frac{g''(0)}{2!} + ... + \frac{g^{(k)}(0)}{k!} + \frac{g^{k+1}(\theta)}{(k+1)!} = \textbf{(*)}.$$ Veamos ahora:

$$g'(t) = \frac{d}{dt}(f \circ \varphi)(t) =< \bigtriangledown f(\varphi(t)), \varphi'(t) >=< \bigtriangledown f(a+th), h >= \sum_{i=1}^{n} h_i D_i f(a+th).$$

$$g''(t) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} h_i D_i f(a+th)\right) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{d}{dt}(D_i f(a+th)) = \sum_{i=1}^{n} h_i \left(\sum_{j=1}^{n} h_j D_{ji} f(a+th)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_i h_j D_{ji} f(a+th) \overset{\text{T. Schwarz}}{=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_i h_j D_{ij} f(a+th).$$ Y así por inducción tenemos:

$$g^{(k)} = \sum_{i_1,i_2,\dots i_k=1}^{n} h_{i_1} h_{i_2} \cdots h_{i_k} D_{i_1 i_2 \dots i_k} f(a+th).$$ Y ahora, para acabar:

$f(a+h) =$**(*)**$=$

$$= f(a) + \frac{\sum_{i=1}^{n} h_i D_i f(a)}{1!} + \frac{\sum_{i,j=1}^{n} h_i h_j D_{ij} f(a)}{2!} + ... + \frac{\sum_{i_1,i_2,\dots i_k=1}^{n} h_{i_1} h_{i_2} \cdots h_{i_k} D_{i_1 i_2 \dots i_k} f(a)}{k!} +$$

$$+ \frac{\sum_{i_1,i_2,\dots i_k=1}^{n} h_{i_1} h_{i_2} \cdots h_{i_{k+1}} D_{i_1 i_2 \dots i_{k+1}} f(a+\theta h)}{(k+1)!}$$

$\square$

Nota. Sabiendo que $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ entonces $(\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n)^k = \sum_{i_1,\dots,i_k=1}^{n} \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_k}$, se usa la siguiente notación:

$\sum_{i_1,i_2,\dots i_k=1}^{n} h_{i_1} h_{i_2} \dots h_{i_k} D_{i_1 i_2 \dots i_k} f(a) = (h_1 D_1 + h_2 D_2 + ... + h_n D_n)^k f(a)$ y con esta notación tenemos que $P_{k,a} = f(a) + \sum_{j=1}^{k} \frac{(h_1 D_1 + h_2 D_2 + ... + h_n D_n)^j f(a)}{j!}$

<u>**Ejemplo.**</u> Sea $f(x,y) = \mathrm{e}^x y$, halla $P_{3,(0,1)}$.

$P_{3,(0,1)} = f(0,1) + \dfrac{h_1 D_1 f(0,1) + h_2 D_2 f(0,1)}{1!} + \dfrac{h_1^2 D_{11} f(0,1) + 2h_1h_2 D_{12} f(0,1) + h_2^2 D_{22} f(0,1)}{2!} +$

$+ \dfrac{h_1^3 D_{111} f(0,1) + 3h_1^2 h_2 D_{112} f(0,1) + 3h_1 h_2^2 D_{122} f(0,1) + h_2^3 D_{222} f(0,1)}{3!}$

$$\begin{cases} D_1 f = \mathrm{e}^x y \begin{cases} D_{11} f = e^x y \begin{cases} D_{111} f = e^x y \\ D_{211} f = e^x \end{cases} \\ D_{21} f = e^x \{ D_{221} f = 0 \end{cases} \\ D_2 f = e^x \{ D_{22} f = 0 \end{cases}$$

Luego $P_{3,(0,1)}(h_1,h_2) = \overbrace{\underbrace{1 + (h_1 + h_2)}_{P_{1,(0,1)}} + \dfrac{h_1^2 + 2h_1h_2}{2}}^{P_{2,(0,1)}} + \dfrac{h_1^3 + 3h_1^2 h_2}{6}$

Observación. El *teorema de Taylor* nos dice que si $f \in C^{k+1}(U)$ entonces $\forall h \in \mathbb{R}^n$ tal que $[a, a+h] \subset U$, $\exists c_h \in [a, a+h] \shortparallel f(a+h) = P_{k,a}(h) + \boxed{\dfrac{(h_1 D_1 + ... + h_n D_n)^{k+1} f(c_h)}{(k+1)!}}$. A esta último polinomio se le llama *resto de Taylor* de orden k de f en a y se denota por $R_{k,a}(h)$, es decir, $R_{k,a}(h) = f(a+h) - P_{k,a}(h)$.
Si cambiamos $x = a + h$ nos queda:
$f(x) = P_{k,a}(x-a) + \dfrac{((x_1 - a_1)D_1 + ... + (x_n - a_n)D_n)^{k+1} f(c_x)}{(k+1)!}$.
Observemos que si $f \in C^{k+1}(U)$ y tomamos $r > 0 \shortparallel \overline{B}(a,r) \subset U$, entonces $\forall h \in \mathbb{R}^n$ con $||h|| < r$ tenemos que $\exists c_h \in ()$ tal que:

$$|f(a+h) - P_{k,a}(h)| = |R_{k,a}(h)| = \frac{\left| \sum\limits_{i_1 \ldots i_{k+1}=1}^{n} h_{i_1} \ldots h_{i_{k+1}} D_{i_1 \ldots i_{k+1}} f(c_h) \right|}{(k+1)!} \leq \frac{M(|h_1| + ... + |h_n|)}{(k+1)!} \leq$$

$\leq \dfrac{M}{(k+1)!}(\sqrt{n}\,||h||)^{k+1}$, donde $M =$ máx. de derivadas de orden $k+1$ de f en $\overline{B}(a,r)$. Así, tenemos $\dfrac{|f(a+h) - P_{k,a}(h)|}{||h||^k} \leq \dfrac{Mn^{\frac{k+1}{2}}}{(k+1)!} ||h|| \;\; \forall h \in \mathbb{R}^n$ con $||h|| < r$. Luego $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - P_{k,a}(h)}{||h||^k} = 0$ y es $P_{k,a}$ el único polinomio de grado $\leq k$ que cumple el anterior límite.

Capítulo 7

Extremos relativos

7.1. Extremos relativos

Definición 42. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, sea $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ y sea $a \in U$, diremos que a es:

- Punto máximo relativo de f si $\exists r > 0 \shortparallel f(x) \leq f(a)\ \forall x \in B(a,r)$.
- Punto mínimo relativo de f si $\exists r > 0 \shortparallel f(x) \geq f(a)\ \forall x \in B(a,r)$.
- Punto de extremo relativo de f si es un punto máximo o mínimo relativo.

Proposición 46. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, sea $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ y sea $a \in U$. Si f tiene un extremo relativo en a, y f es diferenciable en a, entonces $df(a) = 0$ (ó equiv. $\bigtriangledown f(a) = \overline{0}$).

Demostración.
Por hipótesis $\exists r > 0 \shortparallel f(a)$ es máx. o mín. de f en $B(a,r)$. Fijado un $i \in \{1, 2, ..., n\}$, la función $\varphi(t) = f(a + te_i)$ tiene máx. o mín. relativo en $t = 0$. Sea $\Phi(t) = a + te_i \shortparallel \varphi = f \circ \Phi$. Por la *regala de la cadena* φ es diferenciale en $t = 0$ y por el *teorema del extremo interior* tenemos que $\varphi'(0) = 0$, luego $0 = \varphi'(0) =< \bigtriangledown f(\Phi(0)), \Phi'(0) >=< \bigtriangledown f(a), e_i >=$
$= D_i f(a)$. Luego $D_i f(a) = 0\ \forall i \in \{1, 2, ..., n\} \implies \bigtriangledown f(a) = 0$ y por ser f diferenciable en a, $D_u f(a) = 0\ \forall u \in \mathbb{R}^n$ con $||u|| = 1$. $\square$

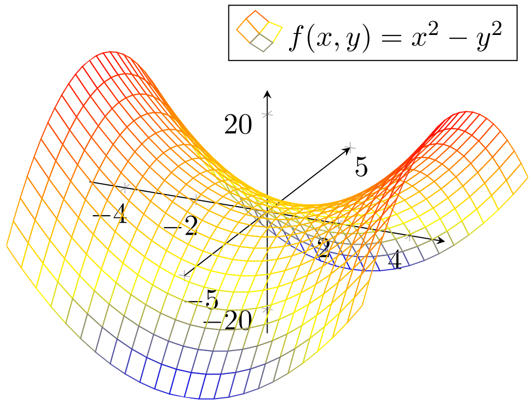
Definición 43. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y sea $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$. Diremos que $a \in U$ es punto crítico de f si $df(a) = 0$ (ó equiv. $\bigtriangledown f(a) = \overline{0}$).

Observación. a punto crítico de $f \;\not\Longrightarrow\; a$ punto de extremo relativo de f.

Ejemplo. 0 en $f(x) = x^3$ es punto crítico pero no relativo.

Nota. Sea $f\colon U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, si $n \geq 2$, a los puntos críticos que no son puntos relativos los denominamos puntos de silla.

Figura 6.



Punto de silla en $f(0,0)=0$.

Proposición 47. Una aplicación del *teorema de Taylor* es que nos aporta información sobre cuando un punto crítico es punto de extremo relativo.
Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, sea $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$, con $f \in C^2(U)$ y sea $a \in U$. Si a es punto crítico de f ($df(a)=0$), tenemos (si $B(a,r) \subset U$) que $\forall x \in B(a,r)\ \exists c_x \in [a,x] \shortparallel f(x) =$

$$= \underbrace{f(a) + df(a)(x-a)}_{P_{1,a}(x-a)} + \underbrace{\frac{1}{2!}\left(\sum_{i,j=1}^{n}(x_i-a_i)(x_j-a_j)D_{ij}f(c_x)\right)}_{R_{1,a}(x-a)} \overset{df(a)=0}{=}$$

$$= f(a) + \frac{1}{2!}\left(\sum_{i,j=1}^{n}(x_i-a_i)(x_j-a_j)D_{ij}f(c_x)\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow f(x) - f(a) = \frac{1}{2!}\left(\sum_{i,j=1}^{n}(x_i-a_i)(x_j-a_j)D_{ij}f(c_x)\right).$$

Si a es punto de máximo relativo de f, entonces $\exists \delta > 0$ ($\delta \leq r$) $\shortparallel f(x) - f(a) \leq 0$ $\forall x \in B(a,\delta)$. Y por tanto, $\sum_{i,j=1}^{n}(x_i-a_i)(x_j-a_j)D_{ij}f(c_x) \leq 0\ \forall x \in B(a,\delta)$. Y así, como $D_{ij}f$ e continua en a tenemos que $\sum_{i,j=1}^{n}(x_i-a_i)(x_j-a_j)D_{ij}f(a) \leq 0$ puesto que $c_x \xrightarrow{x \to a} a$.
Tenemos ahora:
$\sum_{i,j=1}^{n} h_i h_j D_{ij}f(a) \leq 0$ con $||h|| < \delta$. Y de aquí deducimos que $\sum_{i,j=1}^{n}(th_i)(th_j)D_{ij}f(a) =$

$$= t^2\left(\sum_{i,j=1}^{n} h_i h_j D_{ij}f(a)\right) \leq 0\ \forall t \in \mathbb{R} \Longrightarrow \sum_{i,j=1}^{n} h_i h_j D_{ij}f(a) \leq 0\ \forall h \in \mathbb{R}^n.$$

Definición 44. La matriz $\begin{pmatrix} D_{11}f(a) & D_{21}f(a) & \dots & D_{n1}f(a) \\ D_{12}f(a) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ D_{1n}f(a) & \dots & \dots & D_{nn}f(a) \end{pmatrix}$ es la matriz de derivadas parciales segundas de f en a. La denominamos matriz *Hessiana* de f en a y la denotamos por $H_f(a) = (D_{ij}f(a))_{i,j=1}^n$.

Observación.

$$\sum_{i,j=1}^n h_i h_j D_{ij}f(a) = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_{11}f(a) & D_{21}f(a) & \dots & D_{n1}f(a) \\ D_{12}f(a) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ D_{1n}f(a) & \dots & \dots & D_{nn}f(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

Nota. Antes de continuar conviene leer el Apéndice B. Repaso de formas cuadráticas.

Proposición 48. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, sea $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2(U)$ y sea $a \in U$ punto crítico de f. Entonces:

1) a es punto de máximo relativo $\Longrightarrow$ $Q_{H_f(a)}$ es semidefinida negativa.

2) a es punto de mínimo relativo $\Longrightarrow$ $Q_{H_f(a)}$ es semidefinida positiva.

3) $Q_{H_f(a)}$ es indefinida $\Longrightarrow$ a es punto de silla.

El recíproco no se cumple.

Proposición 49. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, sea $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^2(U)$ y sea $a \in U$ punto crítico de f. Entonces:

1) Si $Q_{H_f(a)}$ es definida negativa $\Longrightarrow$ a es punto de mínimo relativo.

2) Si $Q_{H_f(a)}$ es definida positiva $\Longrightarrow$ a es punto de máximo relativo.

Demostración. Veamos lo que ocurre cuando $Q_{h_f(a)}$ es definida positiva.
Sea $\lambda > 0$ y $\exists u \in S_{\mathbb{R}^n}$ de manera que $Q_{H_f(a)}(u) \geq \lambda > 0$. Entonces, si $f \in C^2(U)$, sea $a \in U$ y tomando $\varepsilon_0 = \dfrac{\lambda}{2n^2}$, entonces $\exists \delta_\lambda > 0$ tal que $|D_{ij}f(x) - D_{ij}f(a)| < \varepsilon_0$
$\forall x \in B(a, \delta_\lambda)$ $\forall i, j \in \{1, 2, ..., n\}$. Hemos elegido de esta forma ε_0 por lo siguiente:
$Q_{H_f(x)}(u) = \sum\limits_{i,j=1}^n u_i u_j D_{ij}f(x) = \sum\limits_{i,j=1}^n u_i u_j (D_{ij}f(x) - D_{ij}f(a)) + Q_{H_f(a)}(u) \geq$
$\geq Q_{H_f(a)}(U) - \sum\limits_{i,j=1}^n |u_i||u_j||D_{ij}f(x) - D_{ij}f(a)| \geq \lambda - n^2\varepsilon_0 = \lambda - \dfrac{\lambda}{2} = \dfrac{\lambda}{2} > 0$
En definitiva, hemos probado que si $\exists u \in \mathbb{R}^n$ con $||u|| = 1$,, $Q_{H_f(a)}(u) \geq \lambda$, entonces $\exists \delta > 0$,, $Q_{H_f(x)}(tu) \geq 0$ $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\forall x \in B(a, \delta)$.
Ahora, si a es punto crítico de f, por el *teorema de Taylor*, $\forall x \in [a, a + \delta u]$, $\exists c_x \in [a, x]$ tal

que:
$f(x) - f(a) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} (x_i - ai)(x_j - a_j) D_i j f(c_x) = \frac{1}{2} Q_{H_f(c_x)}(x - a) \geq 0.$
Y por tanto $f(x) \geq f(a)\ \forall x \in [a, a + \delta u]$. Ahora, si $Q_{H_f(a)}$ es definida positiva, podemos elegir $\lambda = \text{mín}\{Q_{H_f(a)}(u) \shortparallel u \in S_{\mathbb{R}^n}\} > 0$ y por lo anterior $\exists \delta > 0 \shortparallel f(x) \geq f(a)\ \forall x \in [a, a + \delta u] \forall u \in S - \mathbb{R}^n$ y entonces $f(x) \geq f(a)\ \forall x \in B(a, \delta)$. Luego a es punto de mínimo relativo.
La demostración es análoga para puntos de máximo relativo. $\square$

Ejemplo. Hallar los extremos relativos de $f(x, y) = 2y^2 - x(x - 1)^2$.
Tenemos $\begin{cases} D_1 f = (x - 1)(1 - 3x) \\ 4y \end{cases} \implies$ Son puntos críticos las soluciones del sistema
$\left.\begin{array}{l} (x - 1)(1 - 3x) = 0 \\ 4y = 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 1, y = 0 \\ x = 1/3, y = 0 \end{array}\right\}$

Tenemos que $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} -6x + 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{cases} H_f(1, 0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ punto de silla} \\ H_f(1/3, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ punto de minimo relativo} \end{cases}$

Capítulo 8

Teoremas de la función inversa e implícita

8.1. Teorema de la función inversa

Teorema 17. *Teorema de la función inversa.*
Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ *abierto, sea* $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(U)$ *y sea* $a \in U$. *Si* $\det(J_f(a)) \neq 0$, *entonces* $\exists V$ *abierto* $_{||}$ $a \in V \subset U$ *tal que:*

1) $f|_V$ *es inyectiva y* $W := f(V)$ *es un abierto.*

2) La función $g = (f|_V)^{-1}\colon W \longrightarrow V$ *es* C^1 *en* W.

Además, si $f \in C^k(U)$, *entonces* $g \in C^k(W)$.

Observación. Antes de proseguir con la demostración, veamos los siguientes comentarios al respecto.

1) $f \in C^1$ con $\det(J_f(x)) \neq 0 \ \forall x \in U \ \not\Longrightarrow \ f$ inyectiva en U si $n \geq 2$.

   Ejemplo. Sea $f(x,y) = (e^x \cos y, e^x \operatorname{sen} y)$, $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.
   $J_f(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \operatorname{sen} y \\ e^x \operatorname{sen} y & e^x \cos y \end{pmatrix} \Longrightarrow \det(J_f(x,y)) = e^{2x} > 0 \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.
   Pero f no es inyectiva pues $f(0,0) = f(0,2\pi) = (1,0)$.

2) Por la *regla de la cadena*, como $(g \circ f)(x) = x \ \forall x \in V$ y f es diferenciable en a y g es diferenciable en $f(a)$, tenemos que:
   $\mathrm{id} = d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a) \Longrightarrow dg(f(a)) = (df(a))^{-1}$ y $J_g(f(a)) = (J_f(a))^{-1}$.

3) Es necesario que f sea C^1, no es suficiente con que sea sólo diferenciable.

   Ejemplo. En $\mathbb{R}$ hay funciones con derivada positiva en un punto que no son inyectivas en ningún entorno de ese punto.

En $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$ es derivable en $x = 0$ y $f'(0) = \frac{1}{2}$, pero $\nexists r > 0 \shortparallel f$ sea inyectiva en $(-r, r)$.

Demostración. Demostración del *teorema de la función inversa*. Lo haremos en 4 pasos, dividiéndolo en las siguientes proposiciones.

1) $\exists V$ entorno abierto de a tal que $f|_V$ es inyectiva y $\det(J_f(x)) \neq 0 \ \forall x \in V$.

2) $W := f(V)$ es abierto.

3) $g := (f|_V)^{-1} \colon W \longrightarrow V$ es diferenciable en W.

4) $g \in C^k(W)$ siempre que $f \in C^k(U)$.

Proposición *(Teorema de la función inversa)* 1. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, sea $f \colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(U)$ y sea $a \in U \shortparallel \det(J_f(a)) \neq 0$. Entonces $\exists V \subset U$ entorno abierto de a tal que $f|_V$ es inyectiva y $\det(J_f(x)) \neq 0 \ \forall x \in V$.

Demostración.
La aplicación $\Phi \colon U \underset{x \to \det(J_f(x))}{\longrightarrow} \mathbb{R}$ es una función continua en U. Como $\Phi(a) \neq 0$, $\exists r_0 > 0 \shortparallel \Phi(x) \neq 0$ $\forall x \in B(a, r_0)$.
$f \in C^1(U) \implies f$ es diferenciable en U y $df \colon U \longrightarrow \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ es continua.
Como $\det(J_f(a)) \neq 0 \implies df(a) \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es invertible. Llamemos $L = df(a)$.
Consideremos la función $\varphi(x) = f(x) - f(a) - L(x - a) \ \forall x \in U$. Tenemos que $\varphi(x) =$
$= f(x) - f(a) - L(x) + L(a) = f(x) - L(x) + \text{cte} \ \forall x \in U$.
Como $\varphi \in C^1(U) \implies d\varphi(x) = df(x) - (dL)(x) = df(x) - L \ \forall x \in U$. En particular $d\varphi(a) = df(a) - L = L - L = 0$. Tenemos ahora:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(x) = f(x) - f(a) - L(x - a) \\ \varphi(y) = f(y) - f(a) - L(y - a) \end{array}\right\} \implies \varphi(x) - \varphi(y) = f(x) - f(y) - L(x - y) \implies$$

$\implies f(x) - f(y) = \varphi(x) - \varphi(y) + L(x - a)$.
Como $d\varphi$ es continua en a, para $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2\,||L - 1||} > 0$, $\exists r > 0$ (con $r < r_0$) tal que $||d\varphi(x) - d\varphi(a)|| = ||d\varphi(x) - 0|| = ||d\varphi(x)|| < \varepsilon_0 \ \forall x \in B(a, r)$.
Así, como $B(a, r)$ es conexo, $\forall x, y \in B(a, r)$ por el *teorema de los incrementos finitos* tenemos $||\varphi(x) - \varphi(y)|| \leq \left(\sup\limits_{z \in [x,y]} ||d\varphi(z)|| \right) ||x - y|| \leq \varepsilon_0 \, ||x - y||$.
Veamos además que $||h|| = \left|\left|L^{-1}(L(h))\right|\right| \leq \left|\left|L^{-1}\right|\right| \, ||L(h)|| \ \ \forall h \in \mathbb{R}^n$.
Ahora, si $x, y \in B(a, r)$ tenemos $||f(x) - f(y)|| = ||\varphi(x) - \varphi(y) - L(x - a)|| \geq$
$||2(x - y)|| - ||\varphi(x) - \varphi(y)|| \geq \dfrac{1}{||L^{-1}||} \, ||x - y|| - \varepsilon_0 \, ||x - y|| = \dfrac{1}{2\,||L^{-1}||} \, ||x - y|| > 0 \implies$
$\implies f$ inyectiva en $B(a, r) \implies f$ inyectiva en V. $\square$

Proposición ***(Teorema de la función inversa)*** **2.** Sea $V \subset \mathbb{R}^n$ abierto, sea $f\colon V \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(V)$, inyectiva en V y con $\det(J_f(x)) \neq 0\ \forall x \in V$, entonces f es abierto, (esto es $f(G)$ abierto $\forall G \in V$, G abierto).

Demostración.
Sea $G \subset V$, G abierto, queremos probar que $f(G)$ es abierto.
Sea $y_0 \in f(G)$ tenemos que demostrar que $\exists r > 0 \shortparallel B(y_0, r) \subset f(G)$. Como $y_0 \in f(G) \Longrightarrow$ $\Longrightarrow \exists x_0 \in G \shortparallel f(x_0) = y_0$. $x_0 \in G$ y G abierto $\Longrightarrow \exists r_0 > 0 \shortparallel B(x_0, r) \subset G$.
Tomemos ahora $r' \in (0, r_0)$, entonces $\overline{B}(x_0, r') \subset B(x_0, r_0) \subset G$.
La función $\varphi(x) = ||f(x) - y_0||$ es continua $\forall x \in G$, y sea $S_{x_0,r'} = \{x \in \mathbb{R}^n \shortparallel ||x - x_0|| = r'\}$ es un compacto, luego $\exists x_1 \in S_{x_0,r'} \shortparallel ||f(x_1) - y_0|| = \varphi(x_1) = \min\limits_{x \in S_{x_0,r'}} \varphi(x) =$
$= \min\limits_{x \in S_{x_0,r'}} ||f(x) - y_0||$.

$\left.\begin{array}{l} x_0 \neq x_1 \\ f \text{ inyectiva} \end{array}\right\} \Longrightarrow f(x_0) \neq f(x_1) \Longrightarrow \varphi(x_1) > 0$. Tomemos ahora $r = \dfrac{\varphi(x_1)}{2} > 0$, comprobemos que $B(y_0, r) \subset f(G)$.
Sea $y \in B(y_0, r) \Longrightarrow ||y - y_0|| < r$. Definimos $\Phi(x) = ||f(x) - y||\ \forall x \in \overline{B}(x_0, r')$, entonces Φ es continua y $\overline{B}x_0, r'$ es compacto, luego Φ alcanza el mínimo en un punto $c \in \overline{B}(a, r')$.
Veamos que $c \notin Fr(\overline{B}(x_0, r')) = S_{x_0,r'}$:
Si $||x - x_0|| = r'$ entonces $\Phi(x) = ||f(x) - y|| = ||f(x) - y_0 + y_0 - y|| \geq$
$\geq ||f(x) - y_0|| - ||y_0 - y|| > \varphi(x_1) - ||y_0 - y|| > \varphi(x_1) - r = \dfrac{\varphi(x_1)}{2} = r > ||y - y_0|| =$
$= ||y - f(x_0)|| \geq ||y - f(c)|| = \Phi(c)$.
Luego $c \in \mathring{\overline{B}}(x_0, r') = B(x_0, r')$. Ahora:
$\left.\begin{array}{l} \Phi >\geq 0 \\ \Phi(c) \leq \Phi(x)\ \forall x \in \overline{B}(x_0, r') \end{array}\right\} \Longrightarrow \Phi^2(c) \leq \Phi^2(x)\ \forall x \in \overline{B}(x_0, r')$.
Como Φ^2 tiene un mínimo relativo en el punto c perteneciente al interior de $\overline{B}(x_0, r')$ y Φ^2 es diferenciable en c, tenemos que $\bigtriangledown\Phi^2(c) = \overline{0} \in \mathbb{R}^n$.
Como $\Phi^2(x) = ||f(x) - y||^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} (f_i(x) - y_i)^2 \Longrightarrow \overline{0} = (0, 0, ..., 0) = \bigtriangledown\Phi^2(c) =$
$= (D_1\Phi^2(c), D_2\Phi^2(c), ..., D_n\Phi^2(c)) =$
$= \left(\sum\limits_{i=1}^{n} 2(f_i(c) - y_i)D_1 f_i(c), ..., \sum\limits_{i=1}^{n} 2(f_i(c) - y_i)D_n f_i(c)\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} 2(f_i(c) - y_i) \bigtriangledown f_i(c)$.
Tenemos así una combinación lineal de vectores $\bigtriangledown f_i(c)$ (cuyas coordenadas son las filas de la matriz) y como $\det(J_f(c)) \neq 0$, esos vectores son lienalmente independientes. Como esa combinación lineal es $\overline{0}$, sus coeficientes han de ser todos 0, es decir,
$2(f_i(c) - y_i) = 0\ \forall 1 \leq i \leq n$. Con lo cual $f(c) = (f_1(c), f_2(c), ..., f_n(c)) = y = (y_1, y_2, ..., y_n)$.
Por tanto $y \in f(B(x_0, r')) \subset f(G)$. □

Proposición ***(Teorema de la función inversa)*** **3.** Sean $V, W \subset \mathbb{R}^n$ abiertos, sea $f\colon V \longrightarrow W$ biyectiva con inversa $g\colon W \longrightarrow V$ continua en W. Si f es diferenciable en $x_0 \in V$ y $\det(J_f(x_0)) \neq 0$ entonces g es diferenciable en $f(x_0)$.

Demostración.
f es diferenciable en x_0 y $\det(J_f(x_0) \neq 0 \implies L := df(x_0)$ es invertible; queremos probar que $L^{-1} = dg(f(x_0))$ o equivalentemente, que $\dfrac{g(f(x_0)+k) - g(f(x_0)) - L^{-1}(k)}{||k||} \xrightarrow{k\to 0} 0$.

Sabemos por hipótesis que $\dfrac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{||h||} \xrightarrow{h\to 0} 0$. Definamos:

$$\varphi(h) := \begin{cases} \dfrac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{||h||}, \text{ si } h \neq 0 \ (a+h \in V) \\ 0, \text{ si } h = 0 \end{cases}$$

Tenemos que φ es continua en 0. $\forall k \neq 0 \shortparallel f(x_0) + k \in W$ llamamos $h(k) = \boxed{g(f(x_0)+k) - x_0}$**(*)**$(= g(f(x_0)+k) - g(f(x_0))$). Como f es inyectiva y por tanto g, tenemos que si $k \neq 0 \implies h(k) \neq 0$. Además, como g es continua en $f(x_0)$, $\lim\limits_{k\to 0} h(k) = \lim\limits_{k\to 0} (g(f(x_0)+k) - g(f(x_0))) = 0$, y por la continuidad de φ en 0, tenemos $\lim\limits_{k\to 0} \varphi(h(k)) = \varphi(0) = 0$.

Por **(*)**, $h(k) + x_0 = g(f(x_0)+k) \implies f(h(k)+x_0) = f(g(f(x_0+k)) = f(x_0) + k \implies$
$\implies \boxed{k = f(x_0 + h(k)) - f(x_0)}$**(**)**.

Así, si $k \neq 0 \shortparallel f(x_0) + k \in W$, tenemos:

$$\frac{g(f(x_0)+k) - g(f(x_0)) - L^{-1}(k)}{||k||} = \frac{h(k) - L^{-1}(k)}{||k||} \overset{(**)}{=} \frac{h(k) - L^{-1}(f(x_0 + h(k)) - f(x_0))}{||k||} =$$

$$= \frac{h(k) - L^{-1}(\ ||h(k)||\,\varphi(h(k)) + L(h(k))\ )}{||k||} = \frac{h(k) - ||h(k)||\,L^{-1}(\varphi(h(k))) - L^{-1}(L(h(k)))}{||k||} =$$

$= \dfrac{||h(k)||}{||k||} L^{-1}(\varphi(h(k)))$. Como $\lim\limits_{k\to 0} L^{-1}(\varphi(h(k))) = L^{-1}(\varphi(0)) = L^{-1}(0) = 0$, sólo nos queda probar que $\dfrac{||h(k)||}{||k||}$ está acotado en un entorno de $k = 0$.

Como $||k|| = ||f(x_0 + h(k)) - f(x_0)|| = ||\,||h(k)||\,\varphi(h(k)) + L(h(k))|| =$

$$= ||h(k)|| \left|\left|\varphi(h(k)) + L\left(\frac{h(k)}{||h(k)||}\right)\right|\right| \geq ||h(k)|| \left(\left|\left|L\left(\frac{h(k)}{||h(k)||}\right)\right|\right| - ||\varphi(h(k))||\right) \implies$$

$\implies \dfrac{||h(k)||}{||k||} \leq \dfrac{1}{\left|\left|L\left(\dfrac{h(k)}{||h(k)||}\right)\right|\right| - ||\varphi(h(k))||}$. Como L es invertible y continua:

$\min\limits_{u \in S_{\mathbb{R}^n}} ||L(u)|| = ||L(u_0)|| = \alpha > 0$, y como $\lim\limits_{k\to 0} \varphi(h(k)) = 0$, para $\varepsilon_0 = \dfrac{\alpha}{2} > 0$,

$\exists \delta > 0 \shortparallel ||\varphi(h(k))|| < \varepsilon_0 = \dfrac{\alpha}{2}\ \forall k \in B(0,\delta)$. Luego $\dfrac{||h(k)||}{||k||} \leq \dfrac{1}{L\left(\dfrac{h(k)}{||h(k)||}\right) - ||\varphi(h(k))||} \leq$

$\leq \dfrac{1}{\alpha - \dfrac{\alpha}{2}} = \dfrac{2}{\alpha}\ \forall k \in B(0,\delta) \setminus \{0\} \implies \dfrac{||h(k)||}{||k||}$ está acotado en un entorno de $k = 0 \implies$

$\implies \lim\limits_{k\to 0} \dfrac{g(f(x_0)+k) - g(f(x_0)) - L^{-1}(k)}{||k||} = 0 \implies g$ es diferenciable en $f(x-0)$. $\square$

Proposición *(Teorema de la función inversa)* 4. Sean V y $W \subset \mathbb{R}^n$ abiertos, sea $f\colon V \longrightarrow W$ biyectiva, diferenciable V, con $\det(J_f(x)) \neq 0$ $\forall x \in V$ y con $g := f^{-1}\colon W \longrightarrow V$ continua en W. Si $k \in \mathbb{N}$ y $f \in C^k(V)$, entonces $g \in C^k(W)$.

Demostración.
Por la *proposición 3* g es diferenciable en W y por la *regla de la cadena*, $dg(f(x)) = (df(x))^{-1}$ $\forall x \in V$ (pues $\mathrm{id}_V = (f \circ g)$). O escrito de otra forma, $dg(y) = (df(g(y))^{-1}$ $\forall y \in W$ con lo cual $J_g(y) = (J_f(g(y)))^{-1}$.
Podemos identificar cada elemento de la matriz $n \times n$ con un elemento de $\mathbb{R}^{n^2}$. El conjunto $\mathcal{U} = \left\{(a_{ij})_{i,j=1}^n \shortparallel \det\left((a_{ij})_{i,j=i}^n\right) \neq 0\right\} \subset \mathbb{R}^{n^2}$ es un abierto de $\mathbb{R}^{n^2}$, pues la aplicación $\underset{(a_{ij})_{i,j=1}^n \to det\left((a_{ij})_{i,j=i}^n\right)}{\det\colon \mathbb{R}^{n^2} \longrightarrow \mathbb{R}}$ es un polinomio, por lo tanto continuo, $\mathcal{U} = \det^{-1}((-\infty,0)\cup(0,+\infty))$ y $((-\infty,0)\cup(0,+\infty))$ es un abierto de $\mathbb{R}$, por tanto $\mathcal{U}$ es abierto.
La aplicación $\underset{A=(a_{ij})_{i,j=1}^n \to A^{-1}}{\phi\colon \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}}$ es C^∞ en $\mathcal{U}$, pues cada componente es un cociente de polinomios cuyo denominador no se anula nunca.
Llamemos J_f a la función $\underset{x \to J_f(x)}{J_f\colon V \longrightarrow \mathbb{R}^{n^2}}$ y para cada $1 \leq i,j \leq n$ llamemos $\underset{(a_{kl})_{k,l=1}^n \to a_{ij}}{\Pi_{ij}\colon \mathbb{R}^{n^2} \longrightarrow \mathbb{R}}$.
Tenemos que $\Pi_{ij} \in C^\infty(\mathbb{R}^{n^2})$.
$\forall 1 \leq i,j \leq n$ tenemos que $D_j g_i$ es $D_j g_i\colon \underset{y}{W} \overset{g}{\longrightarrow} \underset{g(y)}{V} \overset{J_f}{\longrightarrow} \underset{J_f(g(y))}{\mathcal{U}} \overset{\Phi}{\longrightarrow} \underset{(J_f(g(y)))^{-1}}{\mathcal{U}} \overset{\Pi_{ij}}{\longrightarrow} \underset{\Pi_{ij}((J_f(g(y)))^{-1})}{\mathbb{R}}$
y $\Pi_{ij}\left((J_f(g(y)))^{-1}\right) = \Pi_{ij}(J_g(y)) = D_j g_i(y)$, o sea:
$D_j g_i = \Pi_{ij} \circ \Phi \circ J_f \circ g$. Ahora si $f \in C^1(V)$ entonces J_f es continua y por tanto (por ser g continua y Φ, Π_{ij} son C^∞) tenemos que $D_j g_i$ es continua en W.
$D_j g_i$ continua en W $\forall i,j \in \{1,2,...,n\} \iff g \in C^1(W)$.
Ahora si $f \in C^2(V) \implies \begin{cases} f \in C^1(V) \implies g \in C^1(W) \\ J_f \in C^1(V) \end{cases}$
g, J_f, Φ y Π_{ij} son C^1, luego $D_j g_i$ es $C^1(W)$ y si $D_j g_i \mathbb{C}^1(W)$ $\forall i,j \in \{1,2,...,n\} \implies$
$\implies g \in C^2(W)$ y por inducción sobre k tenemos que si $f \in C^k(V) \implies g \in C^k(W)$. □

Demostramos ahora el *teorema de la función inversa.*
Por la *proposición 1*, $\exists V$ entorno abierto de a, $V \subset U \shortparallel f|_V$ es inyectiva y $J_f(x_0) \neq 0$ $\forall x \in V$. Por la *proposición 2*, sea $W := f(V)$ abierto y $f|_V$ es abierto por lo que $g := (f\_{V})^{-1}\colon W \longrightarrow V$ es continua. Por la *proposición 3* g es diferenciable en W y por la *proposición 4*, como $f \in C^1(U)$, tenemos que $g \in C^1(W)$ y además si $f \in C^k(U) \implies$
$\implies g \in C^k(W)$. □

Observación. De las *proposiciones 1* y *2* se deduce fácilmente lo siguiente:
Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, sea $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(U)$ con $\det(J_f(x)) \neq 0$ $\forall x \in U$. Entonces f es abierto (*Teorema de la aplicación abierta).*

Definición 45. Un difeomorfismo entre dos abiertos U y W de $\mathbb{R}^n$ es una aplicación biyectiva $f\colon V \longrightarrow W$ tal que f y f^{-1} son diferenciables y, además, si f y f^{-1} son de clase k, diremos que f (ó f^{-1}) es un C^k-difeomorfismo entre V y W.

El *teorema de la función inversa* nos dice que si $f\colon V \longrightarrow W$ es una aplicación biyectiva entre dos abiertos V y $W \subset \mathbb{R}^n$, entonces la condición necesaria y suficiente para que f sea C^1-difeomorfismo es que $\det(J_f(x)) \neq 0 \ \forall x \in V$.
A los difeomorfismos se les llama a veces *cambios de variable* o *aplicaciones regulares*.
Diremos que f es un difeomorfismo local en a si existe un entorno abierto V de a tal que $f|_V$ es difeomorfismo sobre su imagen.

Ejemplo. Ejemplo de difeomorfismo:

$$\begin{array}{rcl} f\colon (0,+\infty)\times(0,2\pi) & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \shortparallel x \geq 0\} \\ (\rho,\theta) & \longrightarrow & (\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta) \end{array}$$

8.2. Teorema de la función implícita

Teorema 18. *Teorema de la función implícita en $\mathbb{R}^2$.*
Sea $U \subseteq \mathbb{R}^2$ abierto y sea $F\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 en U y sea $(x_0,y_0) \in U \shortparallel F(x_0,y_0) = 0$. Si $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$ entonces existe un entrono abierto V de (x_0,y_0), existe un entorno abierto $A \subseteq \mathbb{R}$ de x_0 y existe una única función $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $F(x,f(x)) = 0 \ \forall x \in A$ (y $\{(x,y) \in V \shortparallel F(x,y) = 0\} = \{(x,f(x)) \shortparallel x \in A\}$). Además, f es C^1 en A. Más aún, si $F \in C^k(U)$, $f \in C^k(A)$.

Ejemplo. La ecuación $x^2 + y^2 = 1$ define a y como función implícita de x en un entorno de $(0,1)$.
Sea $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$, $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Tenemos $x^2 + y^2 = 1 \iff F(x,y) = 0$.
Así, $(0,1)$ es solución, pues $F(0,1) = 0^2 + 1^2 - 1 = 0$ y $\dfrac{\partial F}{\partial y}(0,1) = 2y|_{(0,1)} = 2 \neq 0$. Luego $\exists V$ entorno abierto de $(0,1)$, $\exists I \subset \mathbb{R}$ intervalo abierto que contiene a 0 y $\exists f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$, C^∞ en $I \shortparallel \{(x,y) \in V \shortparallel F(x,y) = 0\} = \{(x,f(x)) \shortparallel x \in I\}$.

Definición 46. Sea $U \subset \mathbb{R}^{n+m}$ abierto y sea $F\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^m$, diremos que la ecuación $F(x,y) = 0$ con $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ y $y = (y_1, y_2, ..., y_m)$, define a la variable y como función implícita de la variable x en un entorno de solución (a,b) (o sea, $F(a,b) = 0$) si existe un entorno abierto $V \subset \mathbb{R}^{n+m}$ de (a,b), existe un entorno abierto $A \subset \mathbb{R}^n$ de x_0 y existe una función $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $\{(x,y) \in V \shortparallel F(x,y) = 0\} = \{(x,f(x)) \shortparallel x \in A\}$. En particular $f(a) = b$.

Teorema 19. *Teorema de la función implícita.*
Sea $U \subset \mathbb{R}^{n+m}$ abierto, sea $F\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ de clase C^1 en U y sea $(a,b) =$ $= (a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_m) \in U$ tal que $F(a,b) = 0$. Si $\det\left(\left(\dfrac{\partial F_i}{\partial y_j}\right)_{1\leq i,j\leq m}(a,b)\right) \neq 0$.
Entonces la ecuación $F(x,y) = 0$ (con $x = (x_1, ..., x_n)$ y $y = (y_1, ..., y_m)$) define a la variable y como la función implícita de la variable x en un entorno de (a,b), es decir, existe $V \subset \mathbb{R}^{n+m}$ entorno abierto de (a,b), existe $A \subset \mathbb{R}^n$ entorno abierto de a y existe $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tal que $\{(x,y) \in V \shortparallel F(x,y) = 0\} = \{(x,f(x)) \shortparallel x \in A\}$. Además, f es C^1 en A. Más aún, si $F \in C^k(U)$, entonces $f \in C^k(A)$.

Demostración.
Definamos $\underset{(x,y)\to(x,F(x,y))=(x_1,...,x_n,F_1(x,y),...,F_m(x,y))}{\Phi\colon U\longrightarrow\mathbb{R}^{n+m}}$. Como $F\in C^1(U)$ tenemos que $\Phi\in C^1(U)$ y $\det(J_\Phi(x,y))=$

$$=\left|\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
\hline
D_1F_1 & D_2F_1 & \dots & D_nF_1 & D_{n+1}F_1 & D_{n+2}F_1 & \dots & D_{n+m}F_1\\
D_1F_2 & D_2F_2 & \dots & D_nF_n & D_{n+1}F_2 & D_{n+2}F_2 & \dots & D_{n+m}F_2\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
D_1F_m & D_2F_m & \dots & D_nF_m & D_{n+1}F_m & D_{n+2}F_m & \dots & D_{n+m}F_m
\end{array}\right|=$$

$$=\begin{vmatrix}
D_{n+1}F_1 & D_{n+2}F_1 & \dots & D_{n+m}F_1\\
D_{n+1}F_2 & D_{n+2}F_2 & \dots & D_{n+m}F_2\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
D_{n+1}F_m & D_{n+2}F_m & \dots & D_{n+m}F_m
\end{vmatrix}=\det\left(\left(\frac{\partial F_i}{\partial y_j}\right)_{1\le i,j\le m}(a,b)\right)\neq 0.$$

Así, por el *teorema de la función inversa* $\exists V$ entorno abierto de (a,b) tal que $W=\Phi(V)$ es abierto de $\mathbb{R}^{n+m}$ y $\Phi|_V: V\longrightarrow W$ es C^1 difeomorfismo.
Sea $A=\{x\in\mathbb{R}^n \shortparallel (x,0)\in W\}$ abierto de $\mathbb{R}^n$ pues $A=h^{-1}(W)$ con $h(x)=(x,0)$.
A es abierto y $a\in A$ (pues $(a,0)=(a,F(a,b))=\Phi(a,b)\in W$).
Sea $g=(\Phi|_V)^{-1}: W\longrightarrow V$ con $g=(g_1,g_2,...,g_{n+m})$ definimos
$f(x)=(g_{n+1}(x,0),g_{n+2}(x,0),...,g_{n+m}(x,0))\ \forall x\in A$. Como $g\in C^1(W),\ h\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $f(x)=(g_{n+1}(x,0),...,g_{n+m}(x,0))$ tenemos que $f\in C^1(A)$. Más aún, si F es $C^k(U)$ entonces g también lo es y por lo tanto $f\in C^k(A)$.
Probemos ahora que $\{(x,y)\in V \shortparallel f(x,y)=0\}=\{(x,F(x)) \shortparallel x\in A\}$.

- Probemos $\{(x,y)\in V \shortparallel F(x,y)=0\}\subset\{(x,f(x)) \shortparallel x\in A\}$
  Si $(x,y)\in V$ y $F(x,y)=0 \implies \left\{\begin{array}{l}\Phi(x,y)\in W\\ \Phi(x,y)=(x,F(x,y))=(x,0)\end{array}\right\} \implies$
  $\implies (x,0)\in W \implies x\in A$.
  Por otro lado, si $(x,y)\in V,\ (x,y)=g(\Phi(x,y))=g(x,F(x,y))=g(x,0)=$
  $=(g_1(x,0),...,g_n(x,0),g_{n+1}(x,0),...,g_{n+m}(x,0))=$
  $=(x_1,x_2,...,x_n,f_1(x),f_2(x),...,f_m(x))=(x,f(x))$. Luego $(x,y)=(x,f(x))$ con $x\in A$.

- Probemos $\{(x,y)\in V \shortparallel F(x,y)=0\}\supset\{(x,F(x)) \shortparallel x\in A\}$
  Si $x\in A$, probemos que $(x,f(x))\in V$ y $F(x,f(x))=0$.
  $x\in A \iff (x,0)\in W \implies g(x,0)\in V$ y $g(x,0)=(x,f(x))\in V$. Para acabar, $(x,0)\in W \implies (x,0)=\Phi(g(x,0))=\Phi(x,f(x))=(x,F(x,f(x))) \implies$
  $\implies F(x,f(x))=0.$

□

Observación. El hecho de que $\{(x,y) \in V \mid F(x,y) = 0\} = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}$ nos dice:

1) Para cada $x \in A$ $\exists ! y \mid (x,y) \in V$ y $F(x,y) = 0$. Ese y es justo al que llamamos $f(x)$.

2) Como $(a,b) \in V$ y $F(a,b) = 0$ entonces $b = f(a)$.

3) $F(x, f(x)) = 0$ $\forall x \in A$.

Esto nos dice que la función $h(x) = F(x, f(x))$ es idénticamente nula en A (entorno de a), con lo cual, sus derivadas parciales de todas sus componentes valen 0 en a. Esto nos permite calcular las derivadas parciales de los componentes de f en a.

Ejemplo. Sea $z^3 + x(y-1) = 1$. ¿Define z como función implícita de x e y en un entorno de $(0,1,1)$?
Sea $F(x,y,z) = z^3 + x(y-1) - 1$, $F \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$, $F\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$.
Tenemos que $F(0,1,1) = 0$ y $\dfrac{\partial F}{\partial z} = 3z^2|_{(0,1,1)} = 3 \neq 0$.
Luego por el *teorema de la función implícita*, $\exists V$ entorno abierto de $(0,1,1)$, $\exists A \subset \mathbb{R}^2$ entorno abierto de $(0,1)$ y $\exists f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f \in C^\infty(A)$. Tenemos además que $F(x,y,f(x,y)) =$ $= 0$ $\forall (x,y) \in A$, $\{(x,y,z) \in V \mid F(x,y,z) = 0\} = \{(x,y,f(x,y) \mid (x,y) \in A\}$ y $f(0,1) = 1$.
$F(x,y,f(x,y)) = 0$ $\forall (x,y) \in A$.

Capítulo 9

Extremos condicionados y variedades diferenciables

9.1. Extremos condicionados

Definición 47. Sea $D \subset \mathbb{R}^n$, sea $f \colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ y sea $M \subset D$. Diremos que $p \in M$ es punto de extremo relativo de f condicionado a M si es punto de extremo relativo de $f|_M$; Es decir, $\exists r > 0$ tal que, bien $f(p) \leq f(x)$ $\forall x \in M \cap B(p, r)$, o bien $f(p) \geq f(x)$ $\forall x \in M \cap B(p, r)$.

Definición 48. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y sea $f \colon U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ de clase C^1 en U. Diremos que $a \in U$ es punto regular de f si $\mathrm{rg}(J_f(a))$ es máximo.

Observación. Si $n > m$, que a sea punto regular de f se simplifica que $\mathrm{rg}(J_f(a)) = m$. Como $J_f(a) = \begin{pmatrix} \bigtriangledown f_1(a) \\ \bigtriangledown f_2(a) \\ \vdots \\ \bigtriangledown f_m(a) \end{pmatrix}$ esto es equivalente a que los vectores $\bigtriangledown f_1(a), \bigtriangledown f_2(a), ..., \bigtriangledown f_m(a)$ sean linealmente independientes.
En cambio, si $n < m$, como $J_f(a) = \begin{pmatrix} D_1 f_1(a) & \cdots & D_n f_1(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 f_m(a) & \cdots & D_n f_m(a) \end{pmatrix}$, entonces son los vectores columna los que han de ser linealmente independientes.
Diremos que f es regular en U si $f \in C^1(U)$ y $\mathrm{rg}(J_f(x))$ es máximo $\forall x \in U$.

9.2. Variedades diferenciables

Observación. Sea $U \in \mathbb{R}^n$ abierto. Si $f \colon U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ es regular en U y $n > m$ el conjunto $M = \{x \in U \shortparallel F(x) = \overline{0}\} = \bigcap_{i=1}^{m} \{x \in U \shortparallel F_i(x) = 0\}$. Cada $\{x \in U \shortparallel F_i(x) = 0\}$ es un conjunto de nivel de la función $F_i \colon U \longrightarrow \mathbb{R}$. Por tanto, si $p \in U$ y $\bigtriangledown F_i(p)$ es ortogonal a

$\{x \in U \shortparallel F_i(x) = 0\}$, el hiperplano tangente a este conjunto en p es el que pasa por p y tiene vector ortogonal $\bigtriangledown F_i(p)$. Entonces, el espacio afín tangente a M en p es la intersección de los hiperplanos tangentes anteriores; Es decir, sea H_i el hiperplano tangente a cada conjunto $\{x \in U \shortparallel F_i(x) = 0\}$ en p, el espacio afín tangente a M en p sería $\bigcap\limits_{i=1}^{m} H_i$.

Definición 49. Sea $M \subset \mathbb{R}^n$. Diremos que M es una variedad diferenciable o variedad regular de dimensión $k < n$ si se cumple alguna de las siguientes condiciones equivalentes:

1) $\forall p \in M,\ \exists W \subset \mathbb{R}^n$ entorno abierto de p y $\exists F\colon W \longrightarrow \mathbb{R}^m$ con $m = n - k$ regular, tal que $M \cap W = \big\{x \in W \shortparallel F(x) = \overline{0}\big\}$.

2) $\forall p \in M,\ \exists W \subset \mathbb{R}^n$ entorno abierto de $p = (\overbrace{p_1, p_2, ...p_k}^{a}, \overbrace{p_{k+1}, ..., p_n}^{b})$, $\exists V \in \mathbb{R}^k$ entorno abierto de a y $\exists g\colon V \longrightarrow \mathbb{R}^m,\ g \in C^1(V)$ tal que $M \cap W = \{(x, g(x)) \shortparallel x \in V\}$ (salvo permutación de variables).

3) $\forall p \in M,\ \exists W \subset \mathbb{R}^n$ entorno abierto de p tal que $M \cap W$ admite una parametrización regular; Esto es, $\exists G \subset \mathbb{R}^k$ abierto y $\exists \varphi\colon G \longrightarrow \mathbb{R}^n$ regular tal que $\varphi(G) = M \cap W$ y $i \circ \varphi\colon G \longrightarrow M \cap W$ es homeomorfismo.

Nota. El *teorema de la función inversa* y el *teorema de la función implícita* nos dicen que las anteriores condiciones son equivalentes.

Ejemplo.

- Son variedades regulares de dimensión 1 (curvas regulares) las circunferencias, elipses, parábolas y gráficas de $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f \in C^1(I)$ e I intervalo abierto.
- La hélice $\varphi(t) = (\cos t, \sin t, t)$.
- Son variedades regulares de dimensión 2 (superficies regulares) la esfera unidad, los elipsoides y las gráficas de $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f \in C^1(U)$ y $U \subset \mathbb{R}^2$ abierto.
- $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \shortparallel z^2 = x^2 + y^2\}$ (conos con vértice común en $(0, 0, 0)$) no es una variedad regular, pero $M \setminus \{(0, 0, 0)\}$ sí lo es.

Proposición 50. Sea $F\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ con $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $n > m$. Si F es regular en U (esto es, $F \in C^1(U)$ y $\mathrm{rg}(J_f(x))$ es máximo, o sea m, $\forall x \in U$), entonces $M = \{x \in U \shortparallel F(x) = \overline{0}\}$ es variedad regular.

Ejemplo. Sea $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$.
Tenemos que $F \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Tenemos además que $J_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}$ luego $\mathrm{rg}(J_f(x, y, z)) \neq 1$ (máximo) $\iff$ $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Por lo que tenemos que F es regular en $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$. Por último, por la proposición anterior, tenemos que $M = \{(x, y, z) \shortparallel F(x, y, z) = 0\} \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ es una variedad regular de dimensión $3 - 1 = 2$.

Proposición 51. Veamos un caso particular de la proposición anterior:
Sea $F\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ con $U \subset \mathbb{R}^n$*abierto* y $n > m$ y $F \in C^1(U)$. Sea $M = x \in U \shortparallel F(x) = \overline{0}\}$, entonces, si cada $p \in M$ es punto regular de F, tenemos que M es variedad regular de dimensión $n - m$.

Ejemplo. Sea $f\colon V \longrightarrow \mathbb{R}^m$ con $V \subset \mathbb{R}^k$ abierto y $\in C^1(V)$, entonces su gráfica $M = \{(x, f(x,) \shortparallel x \in V\} \subset \mathbb{R}^{k+m}$ es una variedad regular de dimensión k.
En efecto, definamos $F\colon \underset{(x,y)\to(y-f(x))}{V \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m}$
Tenemos que $V \times \mathbb{R}^m$ es abierto en $\mathbb{R}^{k+m}$, $F \in C^1(V \times \mathbb{R}^m)$ y
$M = \{(x, y) \in V \times \mathbb{R}^m \shortparallel F(x, y) = 0\}$. Además si $(x, y) \in V \times \mathbb{R}^m$, tenemos:

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} -D_1f1(x) & -D_2f_1(x) & \cdots & -D_kf_1(x) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -D_1f2(x) & -D_2f_2(x) & \cdots & -D_kf_2(x) & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -D_1fm(x) & -D_2f_m(x) & \cdots & -D_kf_m(x) & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \text{ y por tanto}$$

$\mathrm{rg}(J_f(x, y)) = m \ \forall (x, y) \in V \times \mathbb{R}^m$.

Ejemplo. Sea $f(x, y) = x^2 + y^2 \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, tenemos que "gráfica de f":=
$= \{(x, y, f(x, y)) \shortparallel (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \{(x, y, f(x, y)) \shortparallel (x, y) \in \mathbb{R}^2\} =$
$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \shortparallel z = x^2 + y^2\}$, que es una paraboloide y es una variedad regular de dimensión 2.

Ejemplo. Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ es una variedad regular de dimensión $k < n$ y $M = \{x \in U \shortparallel F(x) = 0\}$ con $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $F\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ regular en U (donde $m = n - k$).
Fijado $p \in M$, como $\mathrm{rg}J_f(p) = m$, por el *teorema de la función implícita* la ecuación $F(x) = 0$ define a sus variables (que suponemos sin pérdida de generalidad que son las últimas) como función implícita de las k primeras en un entorno de $p = (p_1, p_2, ..., p_k, p_{k+1}, ..., p_{k+m})$;
Es decir, $\exists W$ entorno abierto de p, $\exists V$ entorno abierto de a y $\exists! f\colon V \longrightarrow \mathbb{R}^m,\ f \in C^1(V)$ tal que $F(\widetilde{x}, f(\widetilde{x})) = 0 \ \forall \widetilde{x} = (x_1, x_2, ..., x_k) \in V$ y $f(a) = b$.
Si definimos $\Phi\colon \underset{\widetilde{x}\to(\widetilde{x},f(\widetilde{x}))}{V \longrightarrow \mathbb{R}^{k+m=n}}$, tenemos que Φ es parametrización regular de $M \cap W$ pues $\phi(V) = \{(\widetilde{x}, f(\widetilde{x})) \shortparallel \widetilde{x} \in V\} = M \cap W$. Por último vemos que $\Phi \in C^1(V),\ \Phi$ es regular en V y $\Phi\colon V \longrightarrow M \cap W$ es homeomorfismo.

Observación. Si $M \subset \mathbb{R}^n$ es variedad regular de dimensión $k < n \implies M \cap G$ es variedad regular de dimensión k si G es abierto de $\mathbb{R}^n$ con $M \cap G \neq \emptyset$

9.3. Teorema de multiplicación de Lagrange

Teorema 20. *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, sea $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ de C^1 en U y sea $M \in U$ variedad regular de dimensión $k < n$. Si $M = \{x \in U \shortparallel F(x) = \overline{0}\}$ para una cierta función $F\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ regular en U, entonces, una condición necesaria para que un punto $p \in M$ sea punto de extremo relativo condicionado de f en M es que*
$\bigtriangledown f(p) \in [\{\bigtriangledown F_1(p), \bigtriangledown F_2(p), ..., \bigtriangledown F_m(p)\}]$ *(espacio vectorial engendrado por estos vectores);*

Es decir, $\exists \lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_m \in \mathbb{R}$ *tal que* $\bigtriangledown f(p) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \bigtriangledown F_i(p)$. *A estos* λ_i *se les llama multiplicadores de Lagrange.*

Demostración.
Como p es un punto de extremo relativo condicionado de f (supongamos que p es punto de máximo relativo condicionado) y $p \in M$ es variedad regular, $\exists W \subset U$, W entorno abierto de $p = (\overbrace{p_1, p_2, ..., p_k}^{a}, \overbrace{p_{k+1}, ..., p_{k+m}}^{b}) = (a, b)$, $\exists V$ entorno abierto de a y $\exists ! g \colon V \longrightarrow \mathbb{R}^m$ con $g \in C^1(V)$ tal que $f(x, y) \leq f(p)\ \forall (x, y) \in W \cap M$, donde $W \cap M = \{(x, g(x)) \shortparallel x \in V\}$.
Tenemos así que $g(a) = b$ y $F(x, g(x)) = 0\ \forall x \in V$.
Así la función $\Phi \colon \underset{x \to (x, g(x))}{V \longrightarrow \mathbb{R}^n}$ es una parametrización regular de $M \cap W$. Tenemos
$f(x, y) \leq f(p)\ \forall (x, y) \in M \cap W \iff f(\Phi(x)) \leq f(\Phi(a))\ \forall x \in V \iff a$ es un punto de máximo relativo de $f \circ \Phi$ (que es $C^1(U)$), luego $\bigtriangledown f \circ \Phi(a) = 0 \iff \overline{0} = J_{f \circ \Phi}(a) =$

$$= J_f(\Phi(a)) J_\Phi(a) = \begin{pmatrix} D_1 f(p) & D_2 f(p), ..., D_n f(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1\Phi_1(a) & \cdots & D_k\Phi_1(a) \\ D_1\Phi_2(a) & \cdots & D_k\Phi_2(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1\Phi_n(a) & \cdots & D_k\Phi_n(a) \end{pmatrix}.$$

Esto nos dice que $\bigtriangledown f(p)$ es ortogonal a los vectores columna de $J_\phi(a)$ (que son $k-$vectores lienealmente independientes).
Ahora, como $F(x, g(x)) = 0\ \forall x \in V$ (V entorno abierto de a), esto es, $(F \circ \Phi)(x) = 0\ \forall x \in V$.
Luego, $\overline{0} = J_{F \circ \Phi}(a) = J_F(\Phi(a)) J_\Phi(a) =$

$$= \begin{pmatrix} D_1F_1(p) & D_2F_1(p) & \cdots & D_nF_1(p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1F_m(p) & D_2F_m(p) & \cdots & D_nF_m(p) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1\Phi_1(a) & \cdots & D_k\Phi_1(a) \\ D_1\Phi_2(a) & \cdots & D_k\Phi_2(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1\Phi_n(a) & \cdots & D_k\Phi_n(a) \end{pmatrix}$$

Por tanto los vectores $\bigtriangledown F_1(p), \bigtriangledown F_2(p), ..., \bigtriangledown F_m(p)$ son ortogonales a los vectores columnas de la matriz $J_\phi(a)$. Estos últimos vectores son linealmente independientes (pues Φ es regular) y si llamamos E al subespacio vectorial engendrado por ellos, tenemos que $\bigtriangledown f(p), \bigtriangledown F_1(p), ..., \bigtriangledown F_m(p) \in E^\perp$. Como $\dim(E^\perp) = n - k = m$ y los vectores $\bigtriangledown F_1(p), ..., \bigtriangledown F_m(p) \in E^\perp$ son linealmente independientes (pues p es punto regular de F), tenemos que $\bigtriangledown f(p) \in [\{\bigtriangledown F_1(p), ..., \bigtriangledown F_m(p)\}] = E^\perp$. □

Nota. A los puntos $p \in M$ tales que $\exists \lambda_1, ..., \lambda_m \in \mathbb{R}$ con $\bigtriangledown f(p) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \bigtriangledown F_i(p)$ se les llama puntos críticos condicionados de f en M.

Si p es punto crítico condicionado de f en M, las condiciones suficientes para determinar si es punto de máximo (o mínimo) relativo condicionado nos las da el estudio de la matriz *hessiana* de $f \circ \Phi$ en p (donde Φ es parametrización regular de M en un entorno de p).

Si f es continua en K compacto ($K \subset \mathbb{R}^n$, $f \colon K \longrightarrow \mathbb{R}$), sabemos que f alcanza el máximo y el mínimo en K. Supongamos que $f \in C^1(U)$ con $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y $K \subset U$, entonces los puntos de extremo absoluto de f en K se encuentran entre los puntos críticos de f en $\mathring{K}$ y los puntos de extremo condicionados de f en $\mathrm{Fr}(K)$.

Capítulo 10

Funciones integrables de varias variables

10.1. Particiones. La integral de Riemann en $\mathbb{R}^n$

Definición 50. Definimos un rectángulo R en $\mathbb{R}^n$ como el producto de n intervalos acotados y cerrados de $\mathbb{R}$. Es decir:

$$R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ ... \ \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$$

Definición 51. Definimos el volumen de un rectángulo R como:

$$v(R) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

Definición 52. Sea $R \subset \mathbb{R}^n$ un rectángulo, definimos una partición P de R como el conjunto finito de subrectángulos de la forma:
para todo intervalo $[a_i, b_i]$ tomamos una partición (de $\mathbb{R}$)
$p_i = \{x_j^i\}_{j=0}^{m_i}$ donde $a_i = x_0^i < x_1^i < \ ... \ < x_{m_i}^i = b_i$ y por tanto:

$$P = \{[x_{j_1-1}^1, x_{j_1}^1] \times [x_{j_2-1}^2, x_{j_2}^2] \times \ ... \ \times [x_{j_n-1}^n, x_{j_n}^n] : 1 \leq j_i \leq m_i \text{ y } 1 \leq i \leq n\}$$

Al conjunto de todas las particiones de R lo denotamos $\pi(R)$

Definición 53. Sea $R \subset \mathbb{R}^n$ rectángulo, sea P una partición de R y sea $f \colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada definimos:

I) la suma inferior de f respecto de P como:

$$s(f, P) := \sum_{S \in P} v(S) \cdot \inf\{f(x) : x \in S\}$$

II) la suma superior de f respecto de P como:

$$S(f,P) := \sum_{S\in P} v(S)\cdot \sup\{f(x) : x \in S\}$$

Proposición 52. Sea $R \subset \mathbb{R}^n$ rectángulo, sea P una partición de R y sea $f\colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada tenemos:

$$s(f,P) \leq S(f,P)\ \forall P \in R$$

Definición 54. Sea $R \subset \mathbb{R}^n$ rectángulo, y $P, Q \in \pi(R)$ tal que:

$$\begin{array}{l} P = \{p_i\}\ i \in \{1,...,n\} \text{ donde } p_i \text{ es una partición en } \mathbb{R} \\ Q = \{q_i\}\ i \in \{1,...,n\} \text{ donde } q_i \text{ es una partición en } \mathbb{R} \end{array}$$

entonces diremos que Q es es más fina que P $(P \leq Q) \iff p_i \leq q_i\ \forall 1 \leq i \leq n$
(En $\mathbb{R}$, $p_i \leq q_i \implies p_i \subset q_i$)

Proposición 53. Sea $R \subset \mathbb{R}^n$ rectángulo, y $P, Q \in \pi(R)$ tal que P $\leq$ Q entonces:

a) $s(f,P) \leq s(f,Q)$

Demostración.

$$s(f,P) = \sum_{S_P\in P} v(S_P)\inf\{f(x) : x \in S_P\} = \sum_{S_P\in P}\left(\sum_{\substack{S_Q\subset S_P\\ S_Q\in Q}} v(S_Q)\inf\{f(x) : x\in S_P\}\right) \leq$$

$$\leq \sum_{S_P\in P}\left(\sum_{\substack{S_Q\subset S_P\\ S_Q\in Q}} v(S_Q)\inf\{f(x) : x \in S_Q\}\right) = \sum_{S_Q\in Q} v(S_Q)\inf\{f(x) : x\in S_Q\} = s(f,Q)$$

□

b) $S(f,Q) \leq S(f,P)$

Demostración.

$$s(f,Q) = \sum_{S_Q\in Q} v(S_Q)\sup\{f(x) : x \in S_Q\} = \sum_{S_P\in P}\left(\sum_{\substack{S_Q\subset S_P\\ S_Q\in Q}} v(S_Q)\sup\{f(x) : x\in S_Q\}\right) \leq$$

$$\leq \sum_{S_P\in P}\left(\sum_{\substack{S_Q\subset S_P\\ S_Q\in Q}} v(S_Q)\sup\{f(x) : x \in S_P\}\right) = \sum_{S_P\in P} v(S_P)\sup\{f(x) : x\in S_P\} = s(f,P)$$

□

Proposición 54. Sea $R \subset \mathbb{R}^n$ rectángulo, y $P, Q \in \pi(R)$, entonces:

$$s(f,P) \leq S(f,Q)$$

Demostración.
Tomemos $P' \in \pi(R)$ tal que $P \leq P'$ y $Q \leq P'$, tenemos:
$s(f,Q) \overset{\text{prop. 2}}{\leq} s(f,P') \leq S(f,P') \overset{\text{prop. 2}}{\leq} S(f,P) \implies s(f,Q) \leq S(f,P)$ □

Definición 55.

I) Definimos la integral inferior de f en R como:

$$\underline{\int_R} f = \sup\{s(f,P) : P \in \pi(R)\}$$

II) Definimos la integral superior de f en R como:

$$\overline{\int_R} f = \inf\{S(f,P) : P \in \pi(R)\}$$

Observación. Supongamos que $f(x) \leq M \ \forall x \in R$ entonces,

$$s(f,P) \leq \underline{\int_R} f \leq \overline{\int_R} f \leq M \cdot v(R) \ \forall P \in \pi(R)$$

Análogamente, si $m \leq f(x) \ \forall x \in R$ entonces:

$$m \cdot v(R) \leq \underline{\int_R} f \leq \overline{\int_R} f \leq S(f,P) \ \forall P \in \pi(R)$$

Definición 56. Diremos que f es integrable si $\underline{\int_R} f = \overline{\int_R} f$, y en ese caso tenemos:

$$\int_R f = \underline{\int_R} f = \overline{\int_R} f$$

Ejemplo.

a) Las constantes son integrables: $\int_R c = c \cdot v(R)$

b) $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \to \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

f no es integrable ya que $\begin{cases} s(f,P) = 0 \\ S(f,P) = 1 \end{cases} \ \forall P \in \pi([0,1]) \implies \overline{\int_{[0,1]}} f \neq \underline{\int_{[0,1]}} f$

Observación.

1) f es integrable $\iff \overline{\int_R} f \leq \underline{\int_R} f$

2) f no es integrable $\iff \underline{\int_R} f < \overline{\int_R} f$

3) f es integrable $\implies \exists! \alpha \in R \,_{||}\, s(f,P) \leq \alpha \leq S(f,P) \; \forall P \in \pi(R)$

10.2. Condición de Riemann. Teorema de Darboux

Teorema 21. *Condición de Riemann*
Sea $f\colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ *acotada,* f *es integrable* $\iff \forall \varepsilon \; \exists P_\varepsilon \in \pi(R)$ *tal que* $S(f,P_\varepsilon) - s(f,P_\varepsilon) < \varepsilon$

Demostración.

- ($\implies$)
  Probemos que si f es integrable, entonces cumple la *condición de Riemann.*
  Fijado un $\varepsilon > 0$, por la definición de integrabilidad, sabemos que existen dos particiones P_1 y P_2 tales que:
  $$S(f,P_1) - \int_R f < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad \int_R f - s(f,P_2) < \frac{\varepsilon}{2}$$
  Tomemos ahora una partición P, tal que $P_1 \leq P$ y $P_2 \leq P$. Tenemos:
  $$S(f,P) - \int_R f < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad \int_R f - s(f,P) < \frac{\varepsilon}{2}$$
  Ahora, sumando las desigualdades anteriores nos queda:
  $$S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$$

- ($\impliedby$)
  Tenemos que $0 \leq \overline{\int_R} f - \underline{\int_R} f \leq S(f,P_\varepsilon) - s(f,P_\varepsilon) < \varepsilon \; (\forall \varepsilon > 0) \implies$
  $\implies \overline{\int_R} f - \underline{\int_R} f < \varepsilon \; \forall \varepsilon > 0 \implies \overline{\int_R} f - \underline{\int_R} f = 0 \implies \overline{\int_R} f = \underline{\int_R} f = \int_R f \implies$
  $\implies f$ integrable.

□

Corolario 11. Sea $f\colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada, f es integrable si sólo si $\exists \, \{P_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \pi(R)$ sucesión tal que $\lim_{n\to\infty} S(f,P_n) - s(f,P_n) = 0$.
Probemos que, en este caso, $\{S(f,P_n)\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{s(f,P_n)\}_{n=1}^{\infty}$ son sucesiones convergentes y $\lim_{n\to\infty} S(f,P_n) = \lim_{n\to\infty} s(f,P_n) = \int_R f$.

Demostración.
$0 \leq S(f,P_n) - \int_R f \leq S(f,P_n) - s(f,P_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \implies S(f,P_n) - \int_R f \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \implies$
$\boxed{S(f,P_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_R f} \implies \boxed{s(f,P_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_R f}$ □

Ejemplo. Sea $f\colon \underset{x \longrightarrow x}{[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}}$

Tomemos $Pn = \{0 = \frac{0}{n} < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \ \dots \ < \frac{n}{n} = 1\}$. Tenemos:

$S(f,P_n) = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right| \sup\left\{f(x) : x \in \left[\frac{i}{n} - \frac{i-1}{n}\right]\right\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\frac{i}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} =$
$= \frac{n+1}{2n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$

$s(f,P_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{i-1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i - 1 = \frac{1}{n^2}\frac{(n-1)n}{2} = \frac{n-1}{2n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$

Nota: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

Teorema 22. *Teorema de Darboux.*
Sea $f\colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada, entonces f es integrable si solo si $\exists I \in \mathbb{R}$ de modo que $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tal que si $P \in \pi(R)$ y $|P| < \delta$ ($|P|\delta \equiv$ $\forall S \in P$ sus lados tienen longitud menor que δ), y para cualesquiera $x_S \in S$ $\forall S \in P$ se cumple que $|I - S(f,P,\{x_S\})| < \varepsilon$ donde $S(f,P,\{x_S\}) = \sum_{S\in P} v(S)f(x_S)$. Además $I = \int_R f$. Llamamos a esta condición, condición de Darboux (D).

Demostración.

- ($\implies$)
  Por ser f integrable tenemos que $\forall \varepsilon$ $\exists P_1, P_2 \in \pi(R)$ tal que $\int_R f - s(f,P_1) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $S(f,P_2) - \int_R f < \frac{\varepsilon}{2}$. Sea ahora $P' \in \pi(R)$ más fina que P_1 y P_2 tenemos:
  $\int_R f - s(f,P') < \frac{\varepsilon}{2}$ y $S(f,P') - \int_R f < \frac{\varepsilon}{2}$.
  Ahora, por ser f acotada, $\exists M \shortparallel |f(x)| \leq M$ $\forall x \in R$. Por la *proposición 4*, demostrada a continuación tenemos que para un $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2M}$, $\exists \delta > 0 \shortparallel \forall P \in R(\pi)$ con $|P| < \delta$ la suma de los volúmenes de los subrectángulos de P que no están contenidos en ningún subrectángulo de P' es menor que ε'.
  Sean S^k el conjunto de los subrectángulos de P contenidos en algún otro de P' y S^n los subrectángulos de P que no están contenidos en ninguno otro de P'. Entonces, para cualquier $x_S \in S \subset P$, tenemos:
  $\sum_{S\subset P} f(x_S)v(S) = \sum_{S\in S^k} f(x_S)v(S) + \sum_{S\in S^n} f(x_S)v(S) \leq S(f,P') + M\varepsilon' \leq \int_R f + \varepsilon$

Análogamente $\sum\limits_{S\subset P} f(x_S)v(S) \geq s(f,P) - M\varepsilon' \geq \int_R f - \varepsilon$.

Por tanto tenemos $\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{S\subset P} f(x_i)v(S_i') - \int_R f \leq \varepsilon \\ \sum\limits_{S\subset P} f(x_i)v(S_i') - \int_R f \geq -\varepsilon \end{array}\right\} \implies \left|\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i)v(S_i') - \int_R f\right| \leq \varepsilon.$

Donde $I = \int_R f$.

- ($\Longleftarrow$)
  Supongamos que se cumple la *condición de Darboux*. Veamos que f cumple la condición de Riemann. Dado $\varepsilon > 0$, como f cumple dicha condición para todo ε, entonces lo cumple para $\frac{\varepsilon}{2} > 0$.
  Podemos tomar $P \in \pi(R)$ que cumpla la *condición de Darboux*, con $|P| < \delta,\ P = P\varepsilon$ buscada.
  $I - \frac{\varepsilon}{2} < \sum\limits_{S\in P} f(x_S)v(S) < I + \frac{\varepsilon}{2}\ \forall x_S \in S\ \forall S \in P$
  Tomando supremos $(f(x_S) \to \sup\{f(x) : x \in S\})$:
  $S(f,P) = \sum\limits_{S\in P} \sup\{f(x) : x \in S\}v(s) < I + \frac{\varepsilon}{2}$
  Análogamente tomamos ínfimos $(f(x_S) \to \inf\{f(x) : x \in S)$:
  $I - \frac{\varepsilon}{2} < \sum\limits_{S\in P} \inf\{f(x) : x \in S\}v(s) = s(f,P) \implies S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$

$\square$

Proposición 55. Sea $R \subset \mathbb{R}^n$ rectángulo, sea P partición de R, entonces $\forall\varepsilon > 0\ \ \exists\delta > 0$ tal que sea una partición P' con $|P| \leq \delta$, entonces $\sum\limits_{\substack{S'\subset P' \\ S'\not\subset S\ \forall S\in P}} v(S') \leq \varepsilon$

Demostración.
El siguiente resultado nos muestra la suma de las áreas de las caras (hiperplanos) de todos los subrectángulos de P:

$$T = \sum_{S\in P}\left(\sum_{i=1}^{n} 2\left(\prod_{\substack{i=1\\ j\neq i}}^{n}(b_i - a_i)\right)\right)$$

Ahora, sea $S' \in P'\ _{\shortparallel}\ S' \not\subset S\ \forall S \in P$, entonces S' corta a alguna de estos hiperplanos. Como $v(S) \leq \delta^n$ y S corta a alguno de los hiperplanos cuyas áreas suman $T \implies$
$\implies \sum\limits_{\substack{S'\subset P' \\ S'\not\subset S\ \forall S\in P}} v(S') \leq T \cdot \delta.$

Por tanto si tomamos $\delta = \frac{\varepsilon}{2T}$, entonces $\sum\limits_{\substack{S'\subset P' \\ S'\not\subset S\ \forall S\in P}} v(S') \leq T \cdot \frac{\varepsilon}{2T} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ $\square$

Nota. Podemos tomar un δ mayor pues estamos contando caras de subrectángulos contiguos como dos distintas cuando en realidad son coincidentes y por tanto el mismo hiperplano.

10.3. Medibilidad de conjuntos

Definición 57. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ acotado, diremos que A es medible-Jordan si existe un rectángulo R con $A \subset R$ tal que la función característica de A, χ_A es integrable en R

$$\text{donde } \chi_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases}$$

Entonces $v(A) = \displaystyle\int_R \chi_A$

Ejemplo.

1) $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ no es medible-Jordan.

2) $\mathbb{Q}^2 \cap [0,1] \times [0,1]$ no es medible-Jordan.

3) $(\mathbb{Q} \times \mathbb{R}) \cap [0,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ no es medible-Jordan.

4) Los rectángulos y los conjuntos finitos son medibles-Jordan. En el primer caso $v(R) = \displaystyle\int_R \chi_R$. En el segundo caso $v(F) = 0$ siendo F un conjunto finito.

Observación. Veamos que forma tienen las sumas superiores e inferiores de χ_A:

- $S(f,P) = \sum\limits_{S \in P} \sup\{f(x) : x \in S\} \cdot v(S) = \sum\limits_{\substack{S \in P \\ S \cap A \neq \emptyset}} v(S)$
- $s(f,P) = \sum\limits_{S \in P} \inf\{f(x) : x \in S\} \cdot v(S) = \sum\limits_{\substack{S \in P \\ S \subset A}} v(S)$

Definición 58. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ acotado, diremos que A tiene contenido nulo si A es medible-Jordan y $v(A) = 0$.

Proposición 56. Tenemos que $0 \leq \underline{\displaystyle\int_R} \chi_A \leq \overline{\displaystyle\int_R} \chi_A$, entonces $A \subset \mathbb{R}^n$ tiene contenido nulo $\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists P \in \pi(R) \shortparallel \sum\limits_{\substack{S \in P \\ S \cap A \neq \emptyset}} v(S) < \varepsilon \equiv S(\chi_A, P) < \varepsilon$

Teorema 23. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ acotado, $A \neq \emptyset$, A tiene contenido nulo $\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \{R_i\}_{i \in F}$ colección finita de rectángulos tales que $A \subset \bigcup\limits_{i \in F} R_i$ y además $\sum\limits_{i \in F} v(R_i) < \varepsilon$*

Demostración.

- ($\Longrightarrow$)
  Visto por la proposición anterior.

- ($\Longleftarrow$)
  Veamos antes la siguiente observación:

  Observación. Si se cumple la hipótesis, entonces se cumple $\forall\varepsilon > 0\ \exists\{Q_i\}_{i\in F}$ colección finita de rectángulos tales que $A \subset \bigcup\limits_{i\in F} \mathring{Q}_i$ y además $\sum\limits_{i\in F} v(Q_i) < \varepsilon$
  Veamos que esto se cumple. En efecto:
  Dado $\varepsilon > 0$ si la hipótesis se cumple $\forall\varepsilon > 0$, en particular se cumple para $\dfrac{\varepsilon}{2}$. por tanto existe $\{R_i\}_{i\in F}$ colección finita de rectángulos tales que $A \subset \bigcup\limits_{i\in F} R_i$ y además $\sum\limits_{i\in F} v(R_i) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Y ahora, $\forall i \in F$ podemos tomar un rectángulo $Q_i \shortparallel R_i \subset \mathring{Q}_i$ y además $\sum\limits_{i\in F} v(Q_i) < \varepsilon$.

  Probada la observación continuemos con la demostración. Ahora, por hipótesis se cumple la observación anterior.
  Tomemos R rectángulo tal que $A \subset R$. Queremos que dado $\varepsilon > 0$, se cumple que $\overline{\int_R} \chi_A < \varepsilon$.
  Dado $\varepsilon > 0$ por la observación tenemos que $\exists\{Q_i\}_{i\in F}$ colección finita de rectángulos tal que $A \subset \bigcup\limits_{i\in F} \mathring{Q}_i$ y además $\sum\limits_{i\in F} v(Q_i) < \varepsilon$
  Tomemos una partición $P \in \pi(R)$ de manera que:

  $$\text{Si } S \in P \implies \begin{cases} S \cap \left(\bigcup\limits_{i\in F} \mathring{Q}_i\right) = \emptyset \\ \text{o} \\ \exists i \in F \shortparallel S \subset Q_i \end{cases}$$

  Tenemos que $S(\chi_A, P) = \sum\limits_{\substack{S\in P \\ S\cap A\neq\emptyset}} v(S) \leq \sum\limits_{i\in F} v(Q_i) < \varepsilon$, puesto que para cada $S \in P$ tal que $S \cap A \neq \emptyset \overset{A\subset\cup Q_i}{\Longrightarrow} \exists j \shortparallel S \subset Q_j$.
  Por último, si $S(\chi_A, P) < \varepsilon \implies \overline{\int_R} \chi_A < \varepsilon$.

□

Definición 59. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ (no necesariamente acotado) no vacío, diremos que A tiene <u>medida nula</u> si $\forall\varepsilon > 0\ \ \exists\{R_m\}_{m=1}^{\infty}$ sucesión de rectángulos tal que $A \subset \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} R_m$ y además $\sum\limits_{m=1}^{\infty} v(R_m) < \varepsilon$.

Observación. Si A tiene contenido nulo $\implies$ A tiene medida nula.

Ejemplo.

1) Los conjuntos numerables tienen medida nula.

2) Los hiperplanos tienen medida nula.

Observación.

1) Si $A \subset B$ y B tiene contenido nulo $\implies$ A tiene contenido nulo.
   Además si B tiene medida nula $\implies$ A tiene medida nula.

2) Si A, B tienen contenido nulo $\implies$ $A \cup B$ tiene contenido nulo.
   Además si A, B tienen medida nula $\implies$ $A \cup B$ tiene medida nula.
   Por tanto sea $\{A_k\}_{k=1}^{m}$ un conjunto finito de contenido nulo (respectivamente medida nula) $\implies$ $\bigcup\limits_{k=1}^{m} A_k$ tiene contenido nulo (respectivamente medida nula).

Proposición 57. Sea $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos de medida nula $\implies$ $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ tiene medida nula.

Demostración.
Sea $\varepsilon > 0$ $\exists \{R_m^k\}_{m\in\mathbb{N}}$ $\forall k \in \mathbb{N}$ ॥ $A_k \subset \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} R_m^k$ y además $\sum\limits_{m=1}^{\infty} v(R_m^k) < \dfrac{\varepsilon}{2^k}$ $\forall k \in \mathbb{N}$ □

Observación. El teorema anterior no se cumple para contenido nulo.

Observación. Si A es medible-Jordan, entonces A tiene medida nula $\overset{\left(\overset{\text{siempre}}{\Longleftarrow}\right)}{\Longleftrightarrow}$ tiene contenido nulo.

Capítulo 11

Teorema de Lebesgue

11.1. Teorema de Lebesgue y aplicaciones de medibilidad

Teorema 24. *Teorema de Lebesgue.*
Sea $f\colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ *acotada, entonces* f *es integrable de Riemann* $\Longleftrightarrow$ $D(f) = \{x \in R : f \text{ no es continua en } x\}$ *tiene medida nula.*

Observación.

1) Si $D(f)$ tiene contenido nulo $\Longrightarrow$ f es integrable.

2) Las funciones continuas son integrables.

3) Las funciones continuas excepto en un número finito de puntos son integrables.

4) Las funciones continuas excepto en una cantidad numerable de puntos son integrables.

Corolario 12. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ acotado, entonces A es medible-Jordan $\Longleftrightarrow$ $D(\chi_A)$ tiene medida nula.
En concreto $D(\chi_A) = Fr(A)$, por tanto A es medible-Jordan $\Longleftrightarrow$ $Fr(A)$ tiene medida nula $\overset{Fr(A) \text{ es compacto}}{\Longleftrightarrow}$ $Fr(A)$ tiene contenido nulo.

Proposición 58. Sea $f\colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable y supongamos que $\{x \in R : f(x) \neq 0\}$ tiene medida nula, entonces $\displaystyle\int_R f = 0$

Demostración.
Veamos que $\displaystyle\overline{\int_R} f \geq 0$
Sea $P \in \pi(R)$, tenemos que $S(f,P) = \sum_{s\in P} \sup\{f(x) : x \in S\} v(S)$
$S \not\subset \{x : f(x) \neq 0\}$ $\forall S \in P$, pues este último conjunto tiene medida nula y S es un subrectángulo $\Longrightarrow$ $\exists x \in S \,_{\shortparallel}\, f(x) = 0$ $\forall S \in P$ $\Longrightarrow$ $\sum_{s\in P} \sup\{f(x) : x \in S\} v(s) \geq 0$ $\Longrightarrow$

$\implies S(f,P) \geq 0 \implies \overline{\int_R} f \geq 0$

Análogamente, veamos que $\underline{\int_R} f \leq 0$

Como hemos visto antes, sea $P \in \pi(R)$, $\forall S \in P\ \exists x \in S \shortparallel f(x) = 0 \implies$

$\implies \sup\{f(x) : x \in S\} v(S) \leq 0\ \forall S \in P \implies s(f,P) \leq 0 \implies \underline{\int_R} f \leq 0$

Como $\underline{\int_R} f = \overline{\int_R} f \implies \int_R f = 0$ □

Proposición 59. Sea $f\colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable y $f(x) \geq 0\ \forall x \in R$. Supongamos que $\int_R f = 0$, entonces $\{x \in R : f(x) \neq 0\}$ tiene medida nula.

Demostración.
Supongamos que $f\colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable, $f \geq 0$ y $\int_R f = 0$.
Veamos que $\{x \in R : f(x) \neq 0\}$ tiene medida nula.
Tenemos que $\{x \in R : f(x) \neq 0\} = \{x \in R : f(x) > 0\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \left\{x \in R : f(x) \geq \frac{1}{m}\right\}$
Hemos demostrado que la unión de los elementos de una sucesión de conjuntos de medida nula tiene medida nula, por lo tanto basta con probar que $\left\{x \in R : f(x) \geq \frac{1}{m}\right\}$ tiene medida nula $\forall m \in \mathbb{N}$ (de hecho tiene contenido nulo). Veamos esto último:
Sea $A_m = \left\{x \in R : f(x) \geq \frac{1}{m}\right\}$ tiene medida nula $\forall m \in \mathbb{N}$, dado $\varepsilon > 0$, tenemos
$0 = \int_R f = \overline{\int_R} f = \inf\{S(f,P) : P \in \pi(R)\}$ por tanto existe $P_0 \in \pi(R) \shortparallel \frac{\varepsilon}{m} > S(f,P_0) =$
$\sum_{S \in P_0} v(S) \sup\{f(x) : s \in S\} \geq \sum_{\substack{S \in P_0 \\ S \cap A_m \neq \emptyset}} v(S) \sup\{f(x) : x \in S\} \geq \sum_{\substack{S \in P_0 \\ S \cap A_m \neq \emptyset}} v(S) \frac{1}{m}$
Por tanto: $\sum_{\substack{S \in P_0 \\ S \cap A_m \neq \emptyset}} v(S) < \varepsilon \implies A_m \subset \bigcup_{\substack{S \in P_0 \\ S \cap A_m \neq \emptyset}} S \implies A_m$ tiene contenido nulo $\implies A_m$ tiene medida nula $\forall m \in \mathbb{N}$ □

11.2. Integrabilidad en conjuntos distintos de rectángulos

Definición 60. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ acotado, $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ definimos $\int_A f = \int_R \overline{f}$,

donde $\begin{array}{rl} \overline{f}\colon R \longrightarrow \mathbb{R} & \\ x \to \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases} \end{array}$ con R rectángulo tal que $A \subset R$.

Entonces tenemos $\int_A f = \int_R \chi_A f$

Observación. Sea $f\colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable y sea $A \subset R$ medible-Jordan $\implies$ f es integrable en A. La prueba de esto es que f integrable en $A \equiv f\chi_A$ es integrable en R. Veamos que $D(f\chi_A)$ tiene medida nula. Es fácil ver que $D(f\chi_A) \subset D(f) \cup Fr(A)$ que tienen medida nula, por tanto $D(f\chi_A)$ tiene medida nula $\implies$ A integrable.

11.3. Propiedades de las integrales

Proposición 60. Linealidad de la integral.
Sea $R \subset \mathbb{R}^n$ rectángulo, sea $A \subset R$ y sea $f, g\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ integrables entonces $\alpha f + \beta g$ es integrable en A y $\displaystyle\int_A \alpha f + \beta g = \alpha \int_A f + \beta \int_A g$.

Demostración.
Extendamos f y g a R haciéndolas cero fuera de A. Tomemos $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ sucesión de particiones de R tales que $||P_n|| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Ahora, para cualesquiera $x_S \in S$ con $S \in P_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ tenemos por el *teorema de Darboux*:

$$\int_A f = \lim_{n\to\infty} \sum_{S\in P_n} f(x_S)v(S)$$

$$\int_A g = \lim_{n\to\infty} \sum_{S\in P_n} g(x_S)v(S)$$

Y ahora como $\forall n \in \mathbb{N}$ tenemos que $\sum\limits_{S\in P_n} (\alpha f + \beta g)(x_S)v(S) = \sum\limits_{S\in P_n} (\alpha f(x_S) + \beta g(x_S))v(S) =$
$\alpha \sum\limits_{S\in P_n} f(x_S)v(S) + \beta \sum\limits_{S\in P_n} g(x_S)v(S)$
Por tanto $\alpha f + \beta g$ es integrable en A y $\displaystyle\int_A \alpha f + \beta g = \alpha \int_A f + \beta \int_A g$. □

Proposición 61. Monotonía de la integral.
Sea $R \subset \mathbb{R}^n$ rectángulo, sea $A \subset R$ y sea $f, g\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ integrables, si $f \leq g$ entonces $\displaystyle\int_A f \leq \int_A g$.

Demostración.
Extendamos de la manera habitual f y g a R haciéndola nula fuera de A. Tenemos que $g - f \geq 0$. Sea $P \in \pi(R)$, tenemos que $s(g - f, P) \geq 0$.
Por la proposición anterior tenemos que $g-f$ es integrable, por tanto tenemos que $\displaystyle\int_A (g-f) =$

$= \displaystyle\underline{\int_A} (g - f) = \sup\{s(g - f, P) : P \in \pi(R)\}$. Como $s(g - f, P) \geq 0 \implies$

$\implies 0 \leq \displaystyle\int_A (g - f) \overset{\text{por prop. 1}}{=} \int_A g - \int_A f \implies \int_A f \leq \int_A g$. □

Proposición 62. Aditividad respecto del conjunto de integración.
Sean A, B conjuntos acotados, sea $f\colon A \cup B \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada, y $A \cap B$ medida nula. Si f es integrable en A, en B y en $A \cap B$, entonces f es integrable en $A \cup B$ y $\displaystyle\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f$

Demostración.
Sea R rectángulo tal que $A \cup B \subset R$, sea

$$\overline{f}\colon R \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \to \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in A \cup B \\ 0 \text{ si } x \notin A \cup B \end{cases}$$

$\overline{f} = \overline{f}\chi_{A\cup B} \overset{\chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B} = \chi_{A\cup B}}{=} \overline{f}\chi_A + \overline{f}\chi_B - \overline{f}\chi_{A\cap B} \implies f$ integrable en $A \cup B$.
Tenemos:

$$\int_{A\cup B} f = \int_R \overline{f}\chi_{A\cup B} = \int_R \overline{f}\chi_A + \int_R \overline{f}\chi_B - \underbrace{\int_R \overline{f}\chi_{A\cap B}}_{\substack{\shortparallel \\ 0 \text{ en casi todo punto}}} = \int_A f + \int_B f \qquad \square$$

Observación. Si A y B son medibles-Jordan, entonces f es integrable en $A \cup B \iff f$ es integrable en A y en B, además si esto ocurre, f es integrable en $A \cap B$.

Corolario 13. Consecuencias inmediatas de las propiedades anteriores.

1) f integrable en $A \implies |f|$ integrable en A y además $\displaystyle\left|\int_A f\right| \leq \int_A |f|$.

2) Si f es integrable en A medible-Jordan, y $|f(x)| \leq M \ \forall x \in A$, entonces $\displaystyle\left|\int_A f\right| \leq M \cdot v(A)$.

Demostración.

1) f integrable en $A \implies |f|$ integrable en A.
Ahora tenemos $-|f|(x) = -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| = |f|(x) \ \forall x \in A \overset{\text{por monotonia}}{\implies}$

$$\implies \int_A -|f| \leq \int_A f \leq \int_A |f| \overset{\text{por linealidad}}{\implies} -\int_A |f| \leq \int_A f \leq \int_A |f| \implies \left|\int_A f\right| \leq \int_A |f|$$

2) Tenemos que $\displaystyle\left|\int_A f\right| \overset{\text{por 1)}}{\leq} \int_A |f| \leq \int_A M\chi_A \overset{\text{por linealidad}}{=} M\int_A \chi_A = Mv(A)$

$\square$

Proposición 63. Teorema del valor medio para integración.
Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ medible-Jordan, conexo y compacto, sea $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, entonces $\exists x_0 \in A$ tal que:

$$f(x_0) = \frac{1}{v(A)}\int_A f \ \left(\text{si } v(A) \neq 0, \ \text{en general llegamos a } f(x_0)v(A) = \int_A f\right).$$

Demostración.
Por ser A compacto $\Longrightarrow \exists x_1, x_2 \in A \shortparallel f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)\ \forall x \in A$
Tenemos ahora $f(x_1)v(A) \leq \displaystyle\int_A f \leq f(x_2)v(A)$
Supongamos $v(A) > 0$, entonces $f(x_1) \leq \dfrac{1}{v(A)} \displaystyle\int_A f \leq f(x_2) \overset{f \text{continua en } A}{\underset{A \text{ conexo}}{\Longrightarrow}} \exists x_0 \in A \shortparallel f(x_0) =$
$= \dfrac{1}{v(A)} \displaystyle\int_A f$. Si $v(A) = 0$ se cumple trivialmente para cualquier $x_0 \in A$ $\square$

Nota. A $\dfrac{1}{v(A)} \displaystyle\int_A f$ se le llama “valor promedio” o “valor medio” de f en A.

Capítulo 12

Teorema de Fubini

12.1. Teorema de Fubini

Teorema 25. *Teorema de Fubini para* $\mathbb{R}^2$.
Sea $f\colon [a,b]\times[c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ *integrable.*
Supongamos que $\forall x \in [a,b]$ *la función* $\underset{y\to f(x,y)}{f_x\colon [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}}$ *es integrable en* $[c,d]$*, entonces la función* $\underset{x\to \int_c^d f_x = \int_c^d f(x,y)dy}{\varphi\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}}$ *es integrable y* $\displaystyle\int_{[a,b]\times[c,d]} f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right) dx$

Demostración.
Definamos la función $\underset{y\to f(x,y)}{f_x\colon [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}}$ $\forall x \in [a,b]$, tenemos que f_fgx es integrable. Podemos definir ahora $F\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \mid F(x) = \displaystyle\int_c^d f_x = \int_c^d f(x,y)dy$.

Probemos que F es integrable y que $\displaystyle\int_a^b F = \int_{[a,b]\times[c,d]} f$.

Supongamos que se cumple la hipótesis. Sea $\varepsilon > 0$, $\exists p = (p_1, p_2) \in \pi([a,b]\times[c,d])$ tal que $p_1 = \{a = t_0, t_1, ..., t_n = b\}$ (con $[t_{i-1}, t_i] = I_i$) y $p_2\{c = s_0, s_1, ..., s_m = d\}$ (con $[S_{j-1}, s_j] = = J_j$). Tenemos $\displaystyle\int_{[a,b]\times[c,d]} f - \varepsilon \leq s(f,p) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} \text{ínf}\{f(x,y) \mid x \in I_i,\ y \in J_j\}\cdot v(I_i)\right) v(J_j)$

Fijemos i_0 y $x_0 \in I_{i_0}$, tenemos:

$\displaystyle\sum_{j=1}^{m} \text{ínf}\{f(x,y) \mid x \in I_0,\ y \in J_j\} v(J_j) \leq \sum_{j=1}^{m} \in \{f(x_0,y) \mid y \in J_j\} v(J_j) = s(f_{x_0}(y), p_2) \implies$

$\displaystyle\implies s(f_{x_0}(y), p_2) \leq \int_c^d f_{x_0} = F(x_0).$

Por lo tanto tenemos que $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} \text{ínf}\{f(x,y) \mid x \in I_{i_0},\ y \in J_j\} v(J_j) \leq F(t)\ \forall t \in I_{i_0} \implies$

$\Longrightarrow \sum_{j=1}^{m} \text{ínf}\{f(x,y) \mid x \in I_{i_0},\ y \in J_j\}v(J_j) \leq \text{ínf}\{F(t) \mid t \in I_{i_0}\}$, por tanto,

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \text{ínf}\{f(x,y) \mid x \in I_i,\ y \in J_j\}v(J_j)\right) v(I_i) \leq \text{ínf}\{F(t) \mid t \in I_i\}v(I_i)\ \forall i \in \{1,..,n\}$$

. Volviendo a la primera desigualdad, $\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m} \text{ínf}\{f(x,y) \mid x \in I_i,\ y \in J_j\}v(J_j)\right) v(I_i) \leq$

$\leq \sum_{i=1}^{n} \text{ínf}\{F(x) \mid x \in I_i\}v(I_i) = s(F,p_1) \leq S(F,p_1) \leq \int f + \varepsilon.$ □

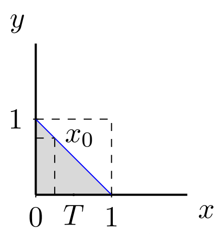
Teorema 26. *Teorema de Fubini generalizado para* $\mathbb{R}^{n+m}$.
Sean R_1, R_2 *rectángulos,* $R_1 \subset \mathbb{R}^n, R_2 \subset \mathbb{R}^m$ *y sea* $R = R_1 \times R_2 \subset \mathbb{R}^{n+m}$. *Sea* $f\colon R \longrightarrow \mathbb{R}$ *integrable, supongamos que* $\forall x \in R_1$ *la función* $\begin{array}{l} f_x\colon R_2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad y \to f(x,y)\end{array}$ *es integrable en* R_2*, entonces*

$$\begin{array}{l} \varphi\colon R_1 \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \to \int_{R_2} f_x = \int_{R_2} f(x,y)dy \end{array} \quad \textit{es integrable en } \mathbb{R} \textit{ y } \int_R f = \int_{R_1}\left(\int_{R_2} f(x,y)dy\right)dx$$

Observación. Podemos intercambiar el papel de las variables.

Ejemplo.

Figura 7.



Calcular la integral de $\begin{array}{l} f\colon T \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad (x,y) \to x\end{array}$

$$\int_T xdxdy = \int_T f(x,y)dxdy = \int_{[0,1]\times[0,1]} \overline{f}(x,y)dxdy \overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^1\left(\int_0^1 \overline{f}(x,y)dy\right)dx$$

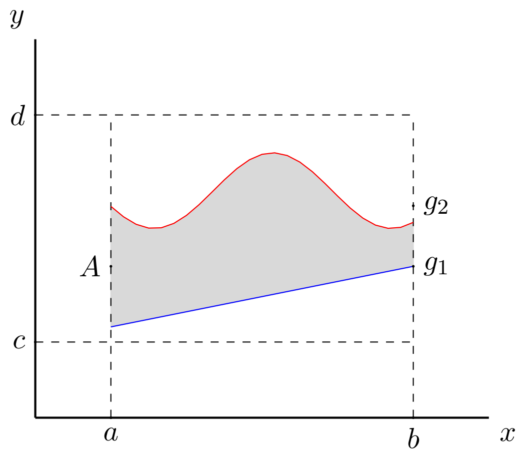
Tenemos:

$$\int_0^1 \overline{f}_{x_0} = \int_0^{1-x_0} \underset{f(x_0,y)}{\underset{\shortparallel}{\overline{f}_{x_0}}} + \int_{1-x_0}^1 \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\overline{f}_{x_0}}} = \int_0^{1-x_0} f(x_0,y)dy \Longrightarrow \int_T f(x,y)dxdy =$$

$$= \int_0^1\left(\int_0^{1-x} f(x,y)dy\right)dx = \int_0^1\left(\int_0^{1-x} xdy\right)dx = \int_0^1 x(1-x)dx = \left.\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

Ejemplo.

Figura 8.



Sean $g_1, g_2 \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continuas, tal que $g_1(x) \leq g_2(x)$ $\forall x \in [a,b]$ y sea $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b], g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$. Calcular la integral de $f \colon A \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$\int_A f(x,y)dxdy = \int_{[a,b]\times[c,d]} \overline{f}(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d \overline{f}(x,y)dy \right) dx$$

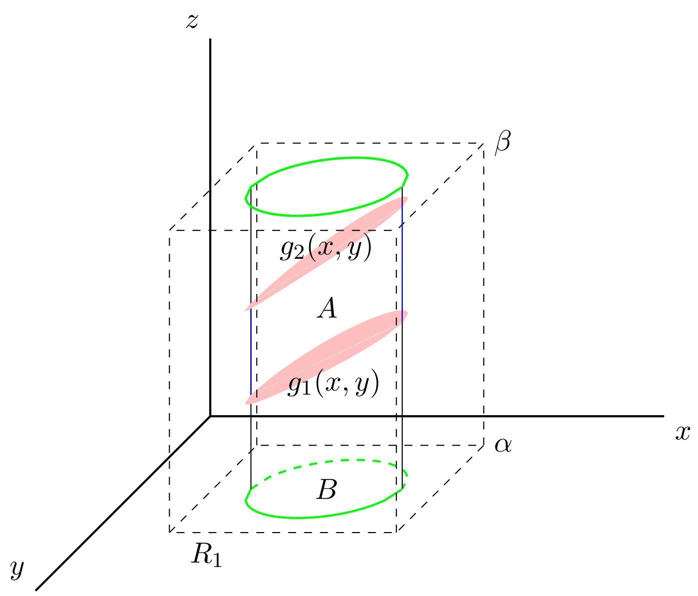
Tenemos que $\displaystyle\int_c^d \overline{f}(x_0,y)dy = \int_c^{g_1(x_0)} \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\overline{f}(x_0,y)}dy + \int_{g_1(x_0)}^{g_2(x_0)} \overline{f}(x_0,y)dy + \int_{g_2(x_0)}^{d} \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\overline{f}(x_0,y)}dy =$

$$= \int_{g_1(x_0)}^{g_2(x_0)} f(x_0,y)dy$$

$$\Longrightarrow \int_A f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

Ejemplo.

Figura 9.



Sea $B \subset \mathbb{R}^2$, sean $g_1, g_2 \colon B \longrightarrow \mathbb{R}$ cumpliendo $g_1 \leq g_2$. Sea $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in B, g_1(x,y) \leq z \leq g_2(x,y)\}$. Calcular la integral de $f \colon A \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$\int_A f = \underset{R=R_1\times[\alpha,\beta]}{\int_R \overline{f}} \overset{\text{T. Fubini}}{=} \int_{R_1} \left(\int_\alpha^\beta \overline{f}(x,y,z)dz \right) dxdy =$$

$$= \int_B \left(\int_\alpha^\beta \overline{f}(x,y,z)dz \right) dxdy + \int_{R_1\setminus B} \underbrace{\left(\int_\alpha^\beta \overline{f}(x,y,z)dz \right)}_{0} dxdy =$$

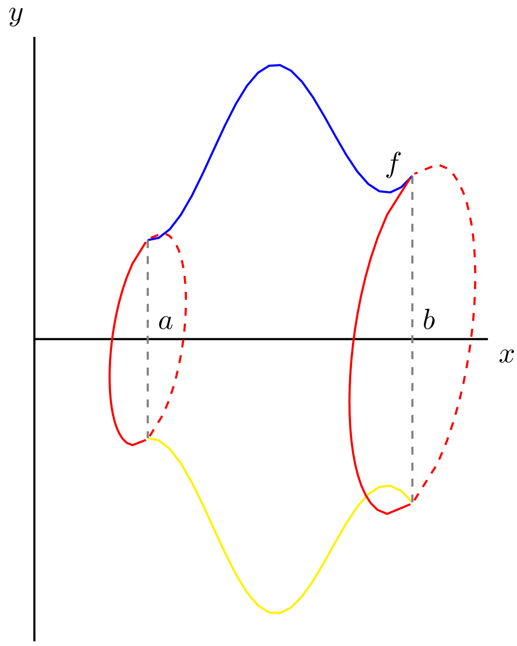
$$= \int_B \left(\int_\alpha^\beta \overline{f}(x,y,z)dz \right) dxdy =$$

$$= \int_B \left(\underbrace{\int_\alpha^{g_1(x,y)} \overline{f}(x,y,z)dz}_{0} + \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} \overline{f}(x,y,z)dz + \underbrace{\int_\alpha^\beta \overline{f}(x,y,z)dz}_{0} \right) dxdy =$$

$$= \boxed{\int_B \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} \overline{f}(x,y,z)dz \right) dxdy}$$

Ejemplo. Volumen de revolución de la gráfica de una función f al girarla sobre el eje OX.

Figura 10.



$$\text{Volumen}(V) = \int_a^b \text{Área}(V_x)dx = \int_a^b \pi f(x)^2 dx = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

Capítulo 13

Teorema del cambio de variables

13.1. Teorema del cambio de variables

Teorema 27. *Teorema del cambio de variable.*
Sean A, $B \subset \mathbb{R}^n$, abiertos y medibles-Jordan, y sea $g\colon \underset{s \longrightarrow x}{B \longrightarrow A}$ C^1-difeomorfismo. Entonces:

$$\int_A f(x)dx = \int_B f(g(s))|\det g'(s)|ds$$

Además $\exists m, M > 0 \shortparallel m \leq |\det g'(s)| \leq M \ \forall s \in B$

Nota. g es C^1-difeormorfismo $\iff$ $\det(g'(s) \neq 0)\ \forall s \in B$.

13.2. Coordenadas polares

Proposición 64. Una aplicación del *Teorema del cambio de variables* es la evaluación de integrales por medio de las coordenadas polares. Tomamos la función que pasa de coordenadas polares a rectangulares como $g(r, \theta) = (r \operatorname{sen} \theta, r \cos \theta)$ definida en $\{(r\theta) \shortparallel r > 0, 0 < \theta < 2\pi\}$. El determinante jacobiano viene dado por:

$$J_g(r, \theta) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\operatorname{sen}^2\theta = r$$

<u>**Ejemplo.**</u> Sea $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \shortparallel 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$, calcula $\displaystyle\int_B \frac{1}{(x^2+y^2)^3}$.
Tenemos que B es la imagen de $A = \{(r, \theta) \shortparallel 0 < \theta < 2\pi, 1 < r < 2\}$ bajo la transformación de coordenadas polares. Entonces tenemos:

$$\int_B \frac{1}{(x^2+y^2)^3} = \int_A \frac{1}{r^3}|J_g|drd\theta = \int_A \frac{1}{r^3} r drd\theta = \int_A \frac{1}{r^2}drd\theta = \int_0^{2\pi}\int_1^2 \frac{1}{r^2}drd\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta = \pi$$

13.3. Coordenadas esféricas

Proposición 65. Otra aplicación del *Teorema del cambio de variables* es la aplicación de coordenadas esféricas. Sea $g(r,\varphi,\theta) = (r \operatorname{sen}\varphi\cos\theta, r\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta, r\cos\varphi)$ definida en $\{(r,\varphi,\theta) \shortparallel r > 0, 0 < \theta < 2\pi, 0 < \varphi < \pi\}$ con determinante jacobiano:

$$J_g(r,\varphi,\theta) = \begin{vmatrix} \operatorname{sen}\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta & r\cos\varphi\operatorname{sen}\theta & r\operatorname{sen}\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -r\operatorname{sen}\varphi & 0 \end{vmatrix} = r^2\operatorname{sen}\varphi$$

<u>**Ejemplo.**</u> Integra la función $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ sobre el conjunto $B = \{(x,y,z) \shortparallel x^2+y^2+z^2 < 1\}$.
Tenemos que B es la imagen de $A = \{(r,\varphi,\theta) \shortparallel 0 < r < 1, 0 < \theta < 2\pi, 0 < \varphi < \pi\}$. Por tanto:

$$\int_B (x^2+y^2+z^2)dxdydz = \int_A r^2|J_g|drd\varphi d\theta = \int_A r^2r^2\operatorname{sen}\varphi drd\varphi d\theta =$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 r^4\operatorname{sen}\varphi drd\varphi d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\operatorname{sen}\varphi}{5}d\varphi d\theta = \frac{2}{5}\int_0^{2\pi}d\theta = \frac{4}{5}\pi$$

13.4. Coordenadas cilíndricas

Proposición 66. Por último veamos la aplicación de las coordenadas cilíndricas. La transformación adecuada es$g(r,\theta,z) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z)$ definida en $\{(r,\theta,z) \shortparallel r > 0, 0 < \theta < 2\pi\}$ con determinante jacobiano:

$$J_g(r,\theta,z) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -rsen\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

<u>**Ejemplo.**</u> Integra la función $f(x,y,z) = z\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$ sobre la región $R = \{(x,y,z) \shortparallel x^2+y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$.
Tenemos que R es la imagen de $A = \{(r,\theta,z) \shortparallel 0 < r < 1, 0 < \theta < 2\pi, 0 < z < 1\}$. Por tanto:

$$\int_R z\mathrm{e}^{-x^2-y^2}dxdydz = \int_A z\mathrm{e}^{-r^2}|J_g|drd\theta dz = \int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^1 z\mathrm{e}^{-r^2}rdrd\theta dz =$$
$$= -\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^{2\pi} z(e^{-1}-1)d\theta dz = -\pi(e^{-1}-1)\int_0^1 zdz = \frac{\pi}{2}(1-e^{-1})$$

Capítulo 14

Integrales impropias

14.1. Integrales impropias

Definición 61. Integrales impropias.
Sea $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f \geq 0$, supongamos que $\forall k \in N,\ f$ es integrable y acotada en $[-k,k]^n$. Diremos que f es integrable en $\mathbb{R}^n$ si $\exists \lim\limits_{k\to+\infty} \displaystyle\int_{[-k,k]^n} f\ (\in \mathbb{R})$ y en ese caso, tenemos que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f = \lim_{k\to+\infty} \int_{[-k,k]^n} f.$

Definición 62. Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ usa sucesión de conjuntos medibles-Jordan en $\mathbb{R}^n$, diremos que es **exhaustiva** si $\forall k \in \mathbb{N}\ \exists m_k \in \mathbb{N} \shortparallel [-k,k] \subset A_{m_k}$

Proposición 67. Sea $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \geq 0$ y f integrable en $[-k,k]^n\ \forall k \in \mathbb{N}$, son equivalentes:

I) f es integrable en $\mathbb{R}^n$

II) Para cada sucesión $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ exhaustiva, existe $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_{A_n} f$

III) $\exists \{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ exhaustiva de manera que $\exists \lim \displaystyle\int_{A_n} f$. Además, en este caso, tenemos: $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f = \lim \int_{A_n} f$ para cualquier función exhaustiva $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Demostración.

- $i) \implies ii)$
  Dado $k \in \mathbb{N}$, A_k medible-Jordan $\implies A_k$ acotado $\implies \exists R > 0 \shortparallel A_k \subset B(0,R) \implies$
  $\implies \displaystyle\int_{A_k} f \leq \int_{B(0,R)} f \leq \int_{\mathbb{R}^n} f$. Por tanto $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f$ es cota superior de $\left\{\displaystyle\int_{A_k} f\right\}_{k=1}^{\infty}$.

Sea $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ exhaustiva. La sucesión $\left\{\int_{A_n} f\right\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona no decreciente (Recordemos $f \geq 0$). Ahora, dado $n \in \mathbb{N}$, $\exists k_0 \in \mathbb{N} \,_{\shortparallel}\, A_n \subset [-k_0, k_0]^n$.
Por tanto: $\int_{A_n} f \leq \int_{[-k_0,k_0]^n} f \leq \lim\limits_{n\to\infty} \int_{[-k_0,k_0]^n} f = \int_{\mathbb{R}^n} f$

- $ii) \implies iii)$ Evidente.
- $iii) \implies i)$
  Supongamos $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ exhaustiva tal que $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \int_{A_n} f$.
  Veamos que $\int_{[-k,k]^n}$ es convergente creciente y está acotada superiormente.
  $\forall k \in \mathbb{N}\ \exists m_k \in \mathbb{N} \,_{\shortparallel}\, [-k,k]^n \subset A_{m_k}$. Por tanto $\int_{[-k,k]} f \leq \int_{A_{m_k}} \leq \lim\limits_{n\to\infty} \int_{A_n} f$

$\square$

Corolario 14. Propiedades elementales de la integral.

1) Sean $f, g\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ f, g \geq 0$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f + g = \int_{\mathbb{R}^n} f + \int_{\mathbb{R}^n} g$$

2) Sean $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ f \geq 0$ y $\alpha \geq 0$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \alpha f = \alpha \int_{\mathbb{R}^n} f$$

3) Sean $f, g\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ 0 \leq f \leq g$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \leq \int_{\mathbb{R}^n} g$$

4) Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$ con $A \cap B$ medida nula:

$$\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f$$

5) Sean f, g continuas en casi todo punto y acotadas

- Si $0 \leq f \leq g$, entonces: g es integrable en $\mathbb{R}^n \implies f$ es integrable en $\mathbb{R}^n$
- $\int_{\mathbb{R}^n} g < +\infty \implies \int_{\mathbb{R}^n} f < +\infty$
- $\int_{\mathbb{R}^n} f \leq \int_{\mathbb{R}^n} g$

6) Sea $A \subset \mathbb{R}^n$, entonces:

$$\int_A f = \int_{\mathbb{R}^n} f\chi_A$$

Definición 63. Sea $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \geq 0$, f no acotado.
Para cada $M > 0$ definimos

$$f_M\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \rightarrow \begin{cases} f(x) \text{ si } f(x) \leq M \\ 0 \text{ si } f(x) > M \end{cases}$$

Es claro que $0 \leq f_M$ y f_M es acotada. Supongamos que f_M es integrable en $\mathbb{R}^n$ $\forall M > 0$ y que $\exists \lim\limits_{M\to\infty} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f_M$. Entonces decimos que f es integrable en $\mathbb{R}^n$ y tenemos que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f = \lim_{M\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_M$.

Definición 64. Definamos ahora integración pero sin necesidad de que f sea positiva.
Sea $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, llamamos $f^+(x)$ y $f^-(x)$ a las funciones:

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } f(x) \geq 0 \\ 0 \text{ si } f(x) < 0 \end{cases}$$

$$f^-(x) = \begin{cases} -f(x) \text{ si } f(x) \leq 0 \\ 0 \text{ si } f(x) > 0 \end{cases}$$

Entonces $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$. Decimos que f es integrable si f^+ y f^- lo son, y en este caso tenemos $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f = \int_{\mathbb{R}^n} f^+ - \int_{\mathbb{R}^n} f^-$

Proposición 68. f es integrable $\iff$ f es continua en casi todo punto y $|f|$ es integrable.

Demostración.

- ($\Longrightarrow$)
  f integrable $\Longrightarrow$ f continua en casi todo punto y f^+, f^- integrables $\overset{\text{por prop. elem.}}{\Longrightarrow} f^+ + f^- = |f|$ es integrable.
- ($\Longleftarrow$)

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq f^+ \leq |f| \overset{\text{por prop. elem.}}{\Longrightarrow} f^+ \text{ es integrable} \\ 0 \leq f^- \leq |f| \overset{\text{por prop. elem.}}{\Longrightarrow} f^- \text{ es integrable} \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ es integrable.}$$

□

Observación. Veamos que se cumple la propiedad de linealidad.
Sean $f, g\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ integrables $\Longrightarrow$ $f + g$ es integrable y $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f + g = \int_{\mathbb{R}^n} f + \int_{\mathbb{R}^n} g$

Demostración.
Tenemos que $f+g$ es continua en casi todo punto. Además $|f+g| \leq |f|+|g| \implies |f+g|$ integrables $\implies f+g$ integrables.
Ahora veamos que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f+g = \int_{\mathbb{R}^n} f + \int_{\mathbb{R}^n} g$.
$f+g=(f+g)^+-(f+g)^- = f^+-f^-+g^+-g^- \implies (f+g)^++f^-+g^- = (f+g)^-+f^++g^+$
Tenemos ahora que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}(f+g)^+ + \int_{\mathbb{R}^n} f^- + \int_{\mathbb{R}^n} g^- = \int_{\mathbb{R}^n} f^+ + \int_{\mathbb{R}^n} g^+ + \int_{\mathbb{R}^n}(f+g)^- \implies$
$\displaystyle\implies \int_{\mathbb{R}^n}(f+g)^+ - \int_{\mathbb{R}^n}(f+g)^- = \int_{\mathbb{R}^n} f^+ - \int_{\mathbb{R}^n} f^- + \int_{\mathbb{R}^n} g^+ - \int_{\mathbb{R}^n} g^- \implies$
$\displaystyle\implies \int_{\mathbb{R}^n} f+g = \int_{\mathbb{R}^n} f + \int_{\mathbb{R}^n} g$ □

Definición 65. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ y sean $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ y f funciones reales definidas en A, diremos que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ <u>converge uniformemente</u> a f en A si:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \shortparallel \forall n \geq n_\varepsilon\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\ \forall x \in A$$

Nótese que la definición de convergencia puntual es:

$$\forall x \in A,\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N} \shortparallel \forall n \geq n_{\varepsilon,x}\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Luego es claro ver que convergencia uniforme $\implies$ convergencia puntual.

Proposición 69. Si $\{f_n\} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ uniformemente en A y f_n continua en A $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces f es continua en A.

Observación.

Como consecuencia de la proposición, x^n no converge uniformemente en $[0,1]$ ya que x^n es continua en $[0,1]$ $\forall n \in \mathbb{N}$ pero el límite no lo es.

Teorema 28. *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ medible-Jordan, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ y f funciones reales definidas en A. Supongamos que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente a f en A y que f_n es integrable $\forall n \in \mathbb{N}$. Entonces f es integrable y:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n = \int_A f$$

Teorema 29. *Sea $f\colon [a,b]\times[c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua, definimos:*
$\displaystyle F(x) = \int_c^d f(x,y)dy$ (es decir $F\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$).
Entonces F es continua en $[a,b]$.

Nota. Podemos sustituir $f\colon [a,b]\times[c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$ por $f\colon K\times K_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ con $K \in \mathbb{R}^m$ compacto y medible-Jordan y $K_0 \in \mathbb{R}^n$ compacto.

Demostración.
Supongamos que se cumple la hipótesis. ¿F es continua en $[a,b]$?
Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [a,b] \shortparallel x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0$ comprobemos que $F(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} F(x_0)$.
$\displaystyle\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim$ □

Apéndice A

Cálculo de límites

Veamos las siguientes propiedades y consejos para calcular límites.

1) Uso de las propiedades algebraicas y de composición de funciones continuas.

   Ejemplo. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2\operatorname{sen} x \tan y}{xy} = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2\operatorname{sen} x}{x}\dfrac{\tan y}{y}$, tenemos ahora que:

   $$\begin{cases} \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2\operatorname{sen} x}{x} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2\cos x}{1} = 2 \\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\tan y}{y} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1}{\cos^2 y} = \dfrac{1}{1} = 1 \end{cases}$$

   Luego $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2\operatorname{sen} x}{x}\dfrac{\tan y}{y} = 2 \cdot 1 = 2$

2) Uso de la siguiente igualdad: $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} f(a+h, b+k)$.

3) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L \iff \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} (f(x,y) - L) = 0 \iff \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} |f(x,y) - L| = 0$.

4) Calcular los límites a través de rectas.

   Ejemplo. Calculemos $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

   Sea $y = \lambda x$, tenemos que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} f(x, \lambda x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(\lambda x)}{x^2 + (\lambda x)^2} =$
   $= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\lambda x^2}{x^2(1+\lambda^2)} = \dfrac{\lambda}{1+\lambda^2}$. Por tanto, como el límite depende de $\lambda \implies$ no existe el límite.

5) Hallando los límites iterados.

Ejemplo. Calculemos $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x-y}{x+y}$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-y}{x+y}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{x-y}{x+y}\right) = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{-y}{y} = -1 \end{array}\right\} \Longrightarrow 1 \neq -1 \Longrightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y}.$$

6) Uso del *criterio de compresión*:
Si $g(x,y) \leq f(x,y) \leq h(x,y)$ $\forall (x,y) \in B((a,b),r) \setminus \{(a,b)\}$ para un cierto r, entonces, si $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} g(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} h(x,y) = L \Longrightarrow \exists \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$.

Ejemplo. Calculemos $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(x+y)\operatorname{sen} y}{y(x^2+2)}$.

$0 \leq \left|\dfrac{(x+y)\operatorname{sen} y}{y(x^2+2)}\right| \leq \left|\dfrac{\operatorname{sen} y}{y}\right|\left|\dfrac{x+y}{x^2+2}\right| \leq 1\left|\dfrac{x+y}{x^2+2}\right| \leq \dfrac{1}{2}|x+y| \leq \dfrac{1}{2}(|x|+|y|)$. Como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1}{2}(|x|+|y|) = 0 \overset{\text{C. compresión}}{\Longrightarrow} \exists \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(x+y)\operatorname{sen} y}{y(x^2+2)} = 0$.

7) Cuando el límite es del tipo $(x,y) \to (0,0)$, podemos hacer uso del cambio de variable a polares.

Ejemplo. Calculemos $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

$\lim\limits_{r\to 0^+} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \lim\limits_{r\to 0^+} \dfrac{(r\cos\theta)(r\sin\theta)}{\sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}} = \lim\limits_{r\to 0^+} \dfrac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r} = \lim\limits_{r\to 0^+} r\cos\theta\sin\theta =$
$= 0$. Veamos que la convergencia es uniforme en $\theta \in [0, 2\pi]$:
$0 \leq |f(r\cos\theta, r\sin\theta)| = r|\cos\theta\sin\theta| \leq r$. Así, dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta = \varepsilon > 0$ tal que si $0 < r < \delta$ entonces $|f(r\cos\theta, r\sin\theta)| \leq r < \delta = \varepsilon$ $\forall \theta \in [0, 2\pi]$.

Nota. Si el límite no es uniforme en θ, el límite de partida puede no existir.

Apéndice B

Repaso de aplicaciones lineales

Proposición 70. Si E y F son espacios normados y $L\colon E \longrightarrow F$ es una aplicación lineal, entonces son equivalentes:

a) L es continua en E

b) L es continua en 0.

c) $\exists M > 0 \,\shortparallel\, ||L(x)||_F \leq M\,||x||_E \;\; \forall x \in E$

d) $L(B_E)$ es acotado en F (donde B_E es la bola de centro el origen y radio 1).

Observación. En el cojunto $\mathfrak{L}(E,F)$ de aplicaciones lineales y continuas podemos definir una norma de la siguiente manera. Si $L \in \mathfrak{L}(E,F)$, se define $||L|| = \sup\limits_{||x||_E \leq 1} ||L(x)||_F$
Se comprueba que $\sup\limits_{||x||_E \leq 1} ||L(x)||_F = \sup\limits_{||x||_E} ||L(x)||_F = \inf\{M > 0\colon\; ||L(x)||_F \leq M\,||x||_E$ $\forall x \in E\}$. Como consecuencia de lo anterior, si E es de dimensión finita, toda aplicación lineal $L\colon E \longrightarrow F$ es continua.

Observación. Si $L\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ y para cada $1 \leq i \leq n$ llamamos $\alpha_i = L(e_i)$ tenemos que $||L(e)|| = ||\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n||_2 = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + ... + \alpha_n^2}$
Toda aplicación lineal $L\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tiene una matriz asociada $A_{L\;m\times n}$ donde
$L(h) = L(h_1, h_2, ..., h_n) = (u_1, u_2, ..., u_n)$ si solo si $A_L \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$.
Sea $L = (L_1, L_2, ..., L_n) \,\shortparallel\, L_i\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $A_L = \underset{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}{(a_{ij})}$ donde $a_{ij} = L_i(e_j)$.

Ahora, sea $\mathbb{R}^n \xrightarrow{L} \mathbb{R}^m \xrightarrow{S} \mathbb{R}^k$ si L y S son lineales, entonces: $A_{S\circ L} = A_S \cdot A_L$

Apéndice C

Repaso de formas cuadráticas

Definición 66. Dada una matriz $n \times n$, $A = (\alpha_{ij})_{i,j=1}^n$, se llama forma cuadrática asociada a la matriz A a la aplicación $\begin{array}{rl} Q_A \colon \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R} \\ h & \longrightarrow hAh^t \end{array}$. Es decir $Q_A(h) = \sum\limits_{i,j=1}^n h_i h_j \alpha_{ij}$.

Definición 67. Sea Q una forma cuadrática, la denominamos:

- Semidefinida positiva si $Q(h) \geq 0 \ \forall h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
- Semidefinida negativa si $Q(h) \leq 0 \ \forall h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
- Definida positiva si $Q(h) > 0 \ \forall h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
- Definida negativa si $Q(h) < 0 \ \forall h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
- Indefinida si $\exists h, \widetilde{h} \in \mathbb{R}^n \shortparallel Q(h) < 0 < Q(\widetilde{h})$.

Proposición 71. Sea A una matriz simétrica y sea Q_A la forma cuadrática asociada a A, se tiene que:

- Q_A es semidefinida positiva $\iff$ sus autovalores son ≥ 0.
- Q_A es semidefinida negativa $\iff$ sus autovalores son ≤ 0.
- Q_A es definida positiva $\iff$ sus autovalores son > 0.
- Q_A es definida negativa $\iff$ sus autovalores son < 0.

Proposición 72. Criterio de *Sylvester*.
Sea Q la matriz cuadrática asociada a la matriz simétrica $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ y sea $A_k =$
$= \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}$ con $k \in \{1, 2, ..., n\}$. Entonces:

I) Q es definida positiva $\iff$ $A_k > 0 \ \forall k \in \{1, 2, ..., n\}$.

II) Q es definida negativa $\iff (-1)^k A_k > 0 \ \forall k \in \{1, 2, ..., n\}$.

III) Q es semidefinida positiva $\iff A_k \geq 0 \ \forall k \in \{1, 2, ..., n\}$.

IV) Q es semidefinida negativa $\iff (-1)^k A_k \geq 0 \ \forall k \in \{1, 2, ..., n\}$.

V) Si $\exists k_0 \shortparallel A_{k_0} < 0 \implies Q$ es indefinida.

Observación. Sea $Q(x) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} x_i x_j a_{ij} \ \forall x \in \mathbb{R}^n$:
Si $Q(x) > 0 \implies Q(tx) = t^2(Q(x)) > 0 \ \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Si $Q(x) < 0 \implies Q(tx) = t^2(Q(x)) < 0 \ \forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.