

# Ejercicios de Geometría Diferencial de Curvas y Superficies



Universidad Complutense de Madrid

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

DOBLE GRADO EN MATEMÁTICAS E INGENIERÍA INFORMÁTICA

**Javier Pellejero**  
Curso 2017-2018



*El propio Dios geometriza.*

Platón

# Prefacio

Aquí va el prefacio, evidentemente

# Índice general

1. Curvas parametrizadas y longitud de un arco de curva	1
---	---

## Capítulo 1

# Curvas parametrizadas y longitud de un arco de curva

**Ejercicio 1.** Hallar una curva parametrizada  $\alpha$  cuya traza es el círculo  $x^2 + y^2 = 1$ , con  $\alpha(t)$  recorriéndolo en el sentido de las agujas del reloj y con  $\alpha(0) = (0, 1)$ .

Una solución a este ejercicio  $\alpha(t) = (\sin t, \cos t)$ . Es claro que  $\alpha(0) = (\sin 0, \cos 0) = (0, 1)$  y que al avanzar, por ejemplo a  $\alpha(\frac{\pi}{2}) = (\sin \frac{\pi}{2}, \cos \frac{\pi}{2}) = (1, 0)$  es en el sentido de las agujas del reloj.

**Ejercicio 2.** Sea  $\alpha(t)$  una curva que no pasa por el origen. Si  $\alpha(t_0)$  es el punto de la traza de  $\alpha$  más cercano al origen y  $\alpha'(t_0) \neq 0$ , demostrar que el vector posición  $\alpha(t_0)$  es ortogonal a  $\alpha'(t_0)$ .

**Ejercicio 3.** Sea  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  una curva y  $v \in \mathbb{R}^3$  un vector dado. Si  $\alpha'(t)$  es ortogonal a  $v$  para todo  $t \in I$ , y si  $\alpha(0)$  también lo es, demuestre que  $\alpha(t)$  es ortogonal a  $v$  para todo  $t \in I$ .

**Ejercicio 4.** Si  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una curva regular, demuestre que  $|\alpha(t)|$  es constante (diferente de cero) si y sólo si  $\alpha(t) \perp \alpha'(t)$  para todo  $t \in I$ .

**Ejercicio 5.** Si  $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una curva, y  $M: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es un movimiento rígido, demostrar que las longitudes de  $\alpha$  y  $M \circ \alpha$  entre  $a$  y  $b$  coinciden.

**Ejercicio 6.** Demuestre que las líneas tangentes a la curva  $\alpha(t) = (3t, 3t^2, 2t^3)$  forman un ángulo constante con la recta  $y = 0, z = x$ .