Elementos de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Universidad Complutense de Madrid

Facultad de Ciencias Matemáticas

Doble Grado en Matemáticas e Ingeniería Informática

Javier Pellejero

Curso 2016-2017

Debemos dividir nuestro tiempo entre política y ecuaciones. Pero las ecuaciones son más importantes para mí, porque la política es para el momento actual y una ecuación es para la eternidad.

Albert Einstein

Prefacio

Aquí va el prefacio, evidentemente

Índice general

Capítulo 1

Sistemas lineales de primer orden

1.1. Introducción. Propiedades de estructura

Definición 1.1.1. Planteemos la formulación de un sistema lineal.

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R},\ t \in [\alpha, \beta]$, n^2 coeficientes $a_{ij}(t)$ con $a_{ij} \in \mathcal{C}([\alpha, \beta]; \mathbb{K})$ con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ y $1 \leq i, j \leq n$.
Denotamos $A(t) = \big(a_{ij}(t)\big)_{1 \leq i,j \leq n}$ a la matriz de coeficintes a_{ij} continuas en $[\alpha, \beta]$

Sean $b_j \in \mathcal{C}([\alpha, \beta]; \mathbb{K})$ con $1 \leq n$, denotamos $B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix} = \big(b_1(t) \dots b_n(t)\big)^t$.

Por último, definimos nuestro sistema lineal de primer orden como $u' = A(t)u + B(t)$ donde $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \big(u_1 \dots u_n\big)^t$ es una incógnita.

Definición 1.1.2. Decimos que $u \in \mathcal{C}^1([\alpha, \beta]; \mathbb{K}^n)$ es solución si $u_j \in \mathcal{C}^1([\alpha, \beta]; \mathbb{K})$, $u_j' \in \mathcal{C}([\alpha, \beta]; \mathbb{K})$ $\forall 1 \leq j \leq n$ y se cumple que:

$$u'(t) = A(t)u(t) + B(t)\ \forall t \in [\alpha, \beta]$$

Denotamos $\Sigma_B = \{u \in \mathcal{C}^1([\alpha, \beta]; \mathbb{K}^n) \mid u \text{ es solución de } u' = Au + B \text{ en } [\alpha, \beta]\}$.

Definición 1.1.3. Sea $u = A(t)u + B(t)$ un sistema de lineal de primer orden, definimos el **sistema homogéneo asociado** como $u' = A(t)u$ que puede ser representado como la función $f(t, u) = A(t)u$. Además, $f(t, \lambda u) = A(t)\lambda u = \lambda f(t, u)$. Denotamos
$\Sigma_0 = \{h \in \mathcal{C}^1([\alpha, \beta]; \mathbb{K}^n) \mid h \text{ es solución de } u' = Au \text{ en } [\alpha, \beta]\}$

Proposición 1.1.4. Propiedades de estructura.

1) Principio de superposición (o combinación lineal). Sean $h_1, h_2 \in \Sigma_0, \lambda, \mu \in \mathbb{K} \implies \implies \lambda h_1(t) + \mu h_2(t) \in \Sigma_0$. Esto es, Σ_0 es una variedad vectorial $\mathcal{C}^1([\alpha, \beta]; \mathbb{K})$.

2) Sean $u_1, u_2 \in \Sigma_B$ entonces $u_1 - u_2 \in \Sigma_0$ y sean $h \in \Sigma_0$ y $u \in \Sigma_B$ entonces $u + h \in \Sigma_B$. Esto es, Σ_B es una variedad afín en la dirección de Σ_0, es decir, paralela a Σ_0.

Demostración.

1) $(\lambda h_1 + \mu h_2)' = \lambda h_1' + \mu h'2 = \lambda A h_1 + \mu A h_2 = A(\lambda h_1 + \mu h_2) \implies (\lambda h_1 + \mu h_2) \in \Sigma_0$

2) Tenemos $(u_1 - u_2)' = u_1' - u_2' = (Au_1 + B) - (Au_2 + B) = A(u_1 - u_2) \implies (u_1 - u_2) \in \Sigma_0$. Para acabar, $(u + h)' = u' + h' = Au + B + Ah = A(u + h) + B \implies (u + h) \in \Sigma_B$.

$\square$

1.2. Ecuaciones lineales escalares

Definición 1.2.1. Sea una ecuación escalar, es decir, si el problema se trata en $n = 1$, o sea en $\mathbb{K}$, tenemos: $\begin{cases} u' = a(t)u + b(t) \text{ con } a, b \in \mathcal{C}([\alpha, \beta]; \mathbb{K}) \\ u(t_0) = u_0 \in \mathbb{K},\ t_0 \in [\alpha, \beta] \end{cases}$
A este problema lo denotamos como **problema de los valores iniciales** (P.V.I) o **problema de *Cauchy***.

Teorema 1.2.2. *Para cada $u_0 \in \mathbb{K}$ y $t_0 \in [\alpha, \beta]$, el P.V.I.* $\begin{cases} u' = au + b \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$ *tiene una única solución y viene dada por* $u(t; t_0, u_0) = e^{\int_{t_0}^t a} u_0 + \int_{t_0}^t e^{\int_s^t a} b(s) ds$.

Demostración.
Sea el problema homogéneo $h' = a(t)h$ entonces $h(t) = e^{\int_{t_0}^t a}$, luego $h(t_0) = 1$. Sea $v(t)$ tal que $u(t) := h(t)v(t)$, esto es $\begin{cases} h'v + hv' = ahv + b \overset{h'v = ahv}{\Longrightarrow} hv' = b \\ u_0 = u(t_0) = h(t_0)v(t_0) \overset{h(t_0)=1}{=} v(t_0) \end{cases}$ Tenemos además que $h^{-1}(t) = e^{-\int_{t_0}^t a}$ luego $\begin{cases} v'(s) = b(s) e^{-\int_{t_0}^t a} \\ v(t_0) = u_0 \end{cases}$ con $s \in [\alpha, \beta]$ Por tanto,
$v(t) = \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^t a} b(s) ds + u_0$. Por último $u(t) = h(t)v(t) = e^{\int_{t_0}^t a} \left(u_0 + \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^s a} b(s) ds \right) =$
$= e^{\int_{t_0}^t a} u_0 + \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^t a - \int_{t_0}^s a} b(s) ds \overset{\int_{t_0}^t a = \int_s^t a + \int_{t_0}^s a}{=} e^{\int_{t_0}^t a} u_0 + \int_{t_0}^t e^{\int_s^t a} b(s) ds.$ $\square$

Definición 1.2.3. Al cambio de variable $u(t) = h(t)v(t)$ realizado en la demostración anterior y a su posterior desarrollo se le denomina **fórmula de la variación de los coeficientes de *Lagrange***.

Corolario 1.2.4. Entonces tenemos:
$(P) \begin{cases} u' = a(t)u + b(t) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$ tiene solución única y es $u(t; t_0, u_0) = e^{\int_{t_0}^t a} u_0 + \int_{t_0}^t e^{\int_s^t a} b(s) ds$
$(P_h) \begin{cases} u' = a(t)u \\ u(t_0) = u_0) \end{cases}$ tiene solución única y es $h(t; t_0, u_0) = e^{\int_{t_0}^t a} u_0$

Observamos además que $u(t;t_0,0) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} e^{\int_s^t a} b(s)ds$ es única solución de $\begin{cases} u' = a(t)u + b(t) \\ u(t_0) = 0 \end{cases}$ de lo que se extrae que $u(t;t_0,u_0) = h(t;t_0,u_0) + u(t;u_0,0)$

Teorema 1.2.5.

1) El operador solución $\underset{x \mapsto h(t;t_0,x) = e^{\int_{t_0}^t a} x}{S_0 \colon \mathbb{K} \longrightarrow \Sigma_0}$ *es isomorfismo vectorial.*

2) El operador solución $\underset{x \mapsto u(t;t_0,x)}{S_B \colon \mathbb{K} \longrightarrow \Sigma_B}$ *es isomorfismo afín.*

En particular, $\dim \Sigma_0 = \dim \Sigma_B = 1$.

Demostración.

1) Probemos la linealidad. Sean $x, y, \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $S_0(\lambda x + \mu y) = e^{\int_{t_0}^t a}(\lambda x + \mu y) = \lambda e^{\int_{t_0}^t a} x + {} + \mu e^{\int_{t_0}^t a} y = \lambda S_0(x) + \mu S_0(y)$, luego es lineal. Tenemos además que $S_0(x) = 0 \iff e^{\int_{t_0}^t a} x = 0 \implies x = 0$ luego S_0 es inyectiva.
   Para acabar, si $h \in \Sigma_0$ tenemos que $h = h(t;t_0,h(t_0)) = S_0(h(t_0)$ luego es sobreyectiva, y por tanto isomorfismo vectorial.

2) Tenemos que $S_B(x) = u(t;t_0,u_0) = h(t;t_0,u_0) + u(t;t_0,u_0) = S_0(x) + u(t;t_0,0) \in S_B$ es isomorfismo afín por ser un isomorfismo vectorial más un punto afín.

$\square$

Observación. Podemos observar que la variedad vectorial originada por una ecuación escalar $\Sigma_0 = L\left[e^{\int_{t_0}^t a}\right]$ y por tanto la solución general o conjunto de soluciones de $h' = a(t)h$ viene determinado por $e^{\int_{t_0}^t a} x$ con $x \in \mathbb{K}$ lo que denominamos como ecuaciones paramétricas de Σ_0.

Por otro lado, el conjunto de soluciones de Σ_B viene determinado por las ecuaciones paramétricas $e^{\int_{t_0}^t a} x + p(t)$ con $x \in \mathbb{K}$ y $p(t)$ cualquier solución de Σ_B, en particular podemos elegir $p(t) = u(t;t_0,0)$.

Ejemplo 1.2.6. Sea $u' = au + b$ con $a, b \in \mathbb{C}$ ó $\mathbb{R}$
Tenemos como una solución particular $u = -\dfrac{b}{a}$ y solución de la homogénea $h' = ah$, $h = e^{at}$.
Luego la solución general es $e^{at}x - \dfrac{b}{a}$.

Ejemplo 1.2.7. Sea $\begin{cases} u' = au + b \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$ con $a, b \in \mathbb{C}$ ó $\mathbb{R}$

Tenemos, por el ejemplo anterior, que la solución general de u es $e^{at}x - \dfrac{b}{a}$, luego

$u_0 = e^{at_0} - \frac{b}{a} \implies x = e^{-at_0}\left(u_0 + \frac{b}{a}\right)$. Por lo que $u(t;t_0,u_0) = e^{at}e^{-at_0}\left(u_0 + \frac{b}{a}\right) - \frac{b}{a} =$
$= e^{a(t-t_0)}\left(u_0 + \frac{b}{a}\right) - \frac{b}{a}$.

Ejemplo 1.2.8. Hagamos un ejemplo más específico. Sea $u' = au + e^{wt}$, distingamos casos:

- Si $w \neq a$.
  Sabemos que la solución del problema tendrá esta forma $e^{at}x + p(t)$ siendo $p(t) = me^{wt}$ una solución particular. Entonces metamos $p(t)$ en la ecuación y hallemos cuanto tiene que valer m. Luego $mwe^{wt} = ame^{wt} + e^{wt} \implies m(w-a) = 1$ y despejando $m = \dfrac{1}{w-a}$.
  Por tanto la solución general es $u(t) = e^{at}x + \dfrac{e^{wt}}{w-a}$.
- Si $w = a$.
  Entonces el sistema queda como $u' = au + e^{at}$. Para resolverlo en este caso variemos coeficientes. $u(t) = e^{at}v(t) \implies ae^{at}v(t) + e^{at}v'(t) = ae^{at}v(t) + e^{at} \implies e^{at}v'(t) = e^{at} \implies v'(t) = 1 \implies v(t) = t + x$ con $x \in \mathbb{C}$. Por tanto la solución general es $u(t) = e^{at}x + te^{at}$.

Ejemplo 1.2.9. Sea $\begin{cases} u' = u + b(t) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$ con $b(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \geq 0 \\ 0 \text{ si } t < 0 \end{cases}$.
En este caso observamos que la solución u no puede ser una función de clase $\mathcal{C}^1$ porque la derivada u' no es continua ya que $b(t)$ no lo es. Veamos cual es la solución:
Aplicando la fórmula de la variación de las constantes, tenemos que
$u(t) = e^t u_0 + \int_t^0 e^{t-s}b(s)ds = \begin{cases} e^t u_0 + \int_t^0 e^{t-s}ds \text{ si } t > 0 \\ e^t u_0 \text{ si } t < 0 \end{cases}$ con lo que, calculando la integral, llegamos a que $u(t) = \begin{cases} e^t u_0 + e^t - 1 \ si \ t > 0 \\ e^t u_0 \ si \ t < 0 \end{cases}$.
Obligamos a que la u sea al menos continua ya que $u(0) = u_0$ por izquierda y derecha.

Observación. Observamos que si la función $a(t)$ en $u' = au + b$ no es $\mathcal{C}^1$ entonces no se puede garantizar la unicidad de la solución. Por ejemplo, sea:

$\begin{cases} u' = \dfrac{u}{t} \\ u(0) = 0 \end{cases}$ con $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tenemos que tanto $u_1 = 0$ y $u_2 = t$ son soluciones del sistema.

1.3. Teorema de unicidad

Lema 1.3.1. Sea $u \in \mathcal{C}([\alpha,\beta];\mathbb{K}^n)$ y sea $(P) = \begin{cases} u' = a(t)u + b(t) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1) $u \in \mathcal{C}^1([\alpha,\beta];\mathbb{K}^n)$ y resuelve (P).

2) $u(t) = u_0 + \int_t^{t_0} a(s)u(s) + b(s)ds \ \forall t \in [\alpha,\beta]$. A esta ecuación se la denomina, ecuación integral asociada a (P).

Demostración.

- $(1) \implies (2)$
  Supongamos que se cumple (1), entonces sabemos que u resuelve $(P) \implies u' =$
  $= A(t)u + B(t) \implies \int_t^{t_0} u'(s)ds = \int_t^{t_0} A(s)u(s) + B(s)ds \implies u(t) - u(t_0) =$
  $= \int_t^{t_0} A(s)u(s) + B(s)ds \overset{u(t_0)=u_0}{\implies} u(t) = u_0 + \int_t^{t_0} A(s)u(s) + B(s)ds.$

- $(2) \implies (1)$
  Supongamos ahora que se cumple (2), tenemos que $s \mapsto A(s)u(s) + B(s)$ es una función continua, luego $\dfrac{d}{dt}\int_t^{t_0} A(s)u(s) + B(s)ds \overset{\text{T. fund. cálculo}}{=} A(t)u(t) + B(t)$. Con lo que $u(t) \in \mathcal{C}^1([\alpha,\beta];\mathbb{K}^n)$ ya que derivando la ecuación integral observamos que $\dfrac{d}{dt}u = \dfrac{d}{dt}u_0 + \dfrac{d}{dt}\int_t^{t_0} A(s)u(s) + B(s)ds \implies u'(t) = A(t)u(t) + B(t)$. Esto nos da que $u'(t)$ es una función continua porque las otras 3 lo son, además $u(t_0) = u_0$ con lo que u resuelve (P).

□

Definición 1.3.2. Llamamos operador integral a $K \colon \mathcal{C}([\alpha,\beta];\mathbb{K}^n) \underset{h \mapsto u_0 + \int_t^{t_0} A(s)h(s)+B(s)ds}{\longrightarrow} \mathcal{C}([\alpha,\beta];\mathbb{K}^n)$.

Podemos observar que $u(t) = u_0 + \int_t^{t_0} \big(A(s)u(s) + B(s)\big)ds \implies u = Ku \iff u$ es un punto fijo de K.

Definición 1.3.3. Sea $u \in \mathcal{C}([[\alpha,\beta]];\mathbb{K}^n)$ con norma $||\cdot||$, definimos la norma infinito $||u||_\infty = \max\limits_{t\in[[\alpha,\beta]]} ||u(t)||$. Además, tenemos que $f \colon \mathcal{C}([[\alpha,\beta]];\mathbb{K}^n) \underset{t\mapsto ||u(t)||}{\longrightarrow} \mathbb{R}$ es continua y que:

1) $||u||_\infty \geq 0 \ \forall u \in \mathcal{C}([\alpha,\beta];\mathbb{K}^n)$. Además. $||u||_\infty = 0 \iff u = 0$.

2) $||\lambda u||_\infty = |\lambda| ||u||_\infty \ \forall u \in \mathcal{C}([\alpha,\beta];\mathbb{K}^n), \ \forall \lambda \in \mathbb{K}$.

3) $||u_1 + u_2||_\infty \leq ||u_1||_\infty + ||u_2||_\infty \ \forall u_1, u_2 \in \mathcal{C}([\alpha,\beta];\mathbb{K}^n)$.

Definición 1.3.4. Definimos espacio de *Banach* al espacio vectorial normado de funciones $\big(\mathcal{C}([\alpha,\beta];\mathbb{K}^n), ||\cdot|| \infty\big)$.

Denotaremos como $X = (\mathcal{C}([\alpha,\beta];\mathbb{K}^n), ||\cdot||_\infty)$ a dicho espacio de *Banach*.

Proposición 1.3.5. Sea X espacio de *Banach*, entonces es de dimensión infinita.

Demostración. Sea $e \in \mathbb{K}^n$, con $e \neq 0$ y sea $t^n e, \ n \geq 0$ y $t \in [\alpha,\beta]$.
Si $c_0 e + c_1 te + c_2 t^2 e + ... + c_n t^n e = 0 \iff e \sum\limits_{i=0}^{n} c_i t^i = 0$ para ciertos c_i. Como $e \neq 0 \implies$

$\implies \sum_{i=0}^{n} c_i t^i = 0 \implies \left(\sum_{i=0}^{n} c_i t^i\right)^{n)} = 0 \implies c_n n! = 0 \implies c_n = 0 \implies$
$\implies \sum_{i=0}^{n-1} c_i t^i = 0 \overset{\text{por recursión}}{\implies} = c_i = 0 \ \forall 1 \leq i \leq n \implies \{e, te, ..., t^n e\}$ son linealmente independientes. □

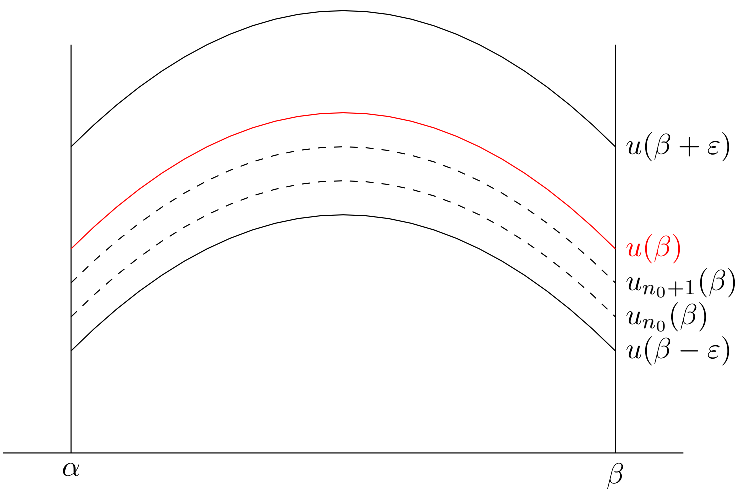
Proposición 1.3.6. Sea X es un espacio de *Banach*, entonces es completo; Es decir, cualquier sucesión de *Cauchy* es convergente.

Demostración.
Sea $\{u_n\}_{n\geq 1}$ de Cauchy en X entonces $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $||u_{n+m} - u_n||_\infty \leq \varepsilon \ \forall n \geq n_0$ y $m \geq 1$.
X es completo, si $\exists u \in X$ tal que $\lim_{n\to\infty} u_n = u$ en $X \iff \lim_{n\to\infty} ||u_n - u||_\infty = 0$.
Entonces, si $||u_{n+m} - u_n||_\infty \leq \varepsilon \implies ||u_{n+m}(t) - u_n(t)|| \leq \varepsilon \ \forall n \geq n_0(\varepsilon) \ m \geq 1$, $t \in [\alpha, \beta] \implies \{u_n(t)\}_{n\geq 1}$ es de Cauchy $\forall t \in [\alpha, \beta]$. Por tanto como $\{u_n(t)\}_{n\geq 1}$ viven en $\mathbb{K}^n$ y sabemos que $\mathbb{K}^n$ es completo, entonces podemos asegurar que todas esas sucesiones son convergentes porque son de Cauchy en un espacio completo. Por lo que $\exists \lim_{n\to\infty} u_n(t) = = u(t) \implies ||u(t) - u_n(t)||_\infty \leq \varepsilon \ n \geq n_0 \ t \in [\alpha, \beta]$.

Veamos ahora que u es continua y así la convergencia es uniforme. Observemos que:
$||u(t+h) - u(t)|| \leq ||u(t+h) - u_{n_0}(t+h)|| + ||u_{n_0}(t+h) - u_{n_0}(t)|| + ||u_{n_0}(t) - u(t)|| \leq$
$\leq 2\varepsilon + ||u_{n_0}(t+h) - u_{n_0}(t)|| \leq 3\varepsilon$ para un cierto $t, t+h \in [\alpha, \beta]$ y cogiendo un $|h| \leq \delta$ siendo δ de la continuidad uniforme en compactos de las funciones u_{n_0}. Entonces u es continua y además uniformemente continua ya que $[\alpha, \beta]$ es un compacto. Por tanto $||u - u_n||_\infty \leq \varepsilon$, con $n \geq n_0$, con lo que $\lim_{n\to\infty} u_n - u = 0 \iff u_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} u$ en $X = (\mathcal{C}([\alpha, \beta]; \mathbb{K}^n), ||\cdot||_\infty)$. Con lo que X es completo. □

En la siguiente figura podemos ver un esquema de la aproximación de u_n a u.

Figura 1.3.7.



Definición 1.3.8. Sea $u \in X$ con X el espacio de Banach definido anteriormente. Definimos la norma Bielecky $||u||_B = \max\limits_{t\in[\alpha,\beta]}\{\mathrm{e}^{-B|t-t_0|}\,||u(t)||\}$ para un $B>0$ y un $t_0 \in [\alpha,\beta]$.

Observación. Las dos normas que hemos defnido, la norma infinito $||\cdot||_\infty$ y la norma Bielecky $||\cdot||_B$ son equivalentes. Para verlo basta comprobar que $||\cdot||_B \leq ||\cdot||_\infty \leq \mathrm{e}^{(\beta-\alpha)}\,||\cdot||_B$

Teorema 1.3.9. *Teorema de la aplicación contractiva.*
Sea X espacio de Banach, y sea $K\colon X \longrightarrow X$ tal que $||Kx-Ky|| \leq \theta\,||x-y||$ $\forall x,y \in X, \theta \in [0,1)$ entonces $\exists! x^* \in X$ tal que $Kx^* = x^*$.
Además para cada $x_0 \in X$ el esquema iterativo $x_n = Kx_{n-1}$ para $n \geq 1$, converge a x^*.
La prueba de este teorema fue vista en la asignatura de Cálculo diferencial.

Teorema 1.3.10. *Teorema de la solución única.*
Sean $a_{ij}, b_j \in \mathcal{C}([\alpha,\beta];\mathbb{K})$ y $A = \big(a_{ij}\big)_{1\leq i,j\leq n}, B = (b_j)_{1\leq j\leq n}$, entonces $\forall t_0 \in [\alpha,\beta]$ y $u_0 \in \mathbb{K}^n$, el problema de valores iniciales $\begin{cases} u' = A(t)u + B(t) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$ tiene una única solución en $[\alpha,\beta]$.

Demostración.
Sea $\underset{h\mapsto u_0+\int_{t_0}^t \left(A(s)h(s)+B(s)\right)ds}{K\colon \mathcal{C}([\alpha,\beta];\mathbb{K}^n) \longrightarrow \mathcal{C}([\alpha,\beta];\mathbb{K}^n)}$, probemos que es contractiva; Es decir, probemos que $||Ku-Kv||_B \leq \theta||u-v||_B$ con $\theta \in (0,1)$.

Tenemos $e^{-B|t-t_0|}\,||Ku(t)-Kv(t)|| \overset{||x||\leq C_1||x||_1}{\leq} C_1 e^{-B|t-t_0|}\,||Ku(t)-Kv(t)||_1 =$
$= e^{-B|t-t_0|}\left|\left|\int_{t_o}^t A(s)\big(u(s)-v(s)\big)ds\right|\right|_1 (*)$.

Por otro lado, $\left|\left|\int_{t_0}^t \begin{pmatrix} x_1(s) \\ \vdots \\ x_n(s)\end{pmatrix} ds\right|\right|_1 = \sum\limits_{j=1}^n \left|\int_{t_0}^t x_j(s)ds\right| \leq \sum\limits_{j=1}^n \int_{\min\{t,t_0\}}^{\max\{t,t_0\}} |x_j(s)|\,ds =$

$$= \int_{\min\{t,t_0\}}^{\max\{t,t_0\}} \sum_{j=1}^n |x_j(s)|\,ds = \int_{\min\{t,t_0\}}^{\max\{t,t_0\}} \left|\left|\begin{pmatrix} x_1(s) \\ \vdots \\ x_n(s)\end{pmatrix}\right|\right|_1 ds.$$

Luego tenemos que $(*) \leq C_1 e^{-B|t-t_0|}\int_{\min\{t,t_0\}}^{\max\{t,t_0\}} \big|\big|A(s)\big(u(s)-v(s)\big)\big|\big|_1\,ds \leq$

$$\overset{||x||\leq C_2||x||_1}{\leq} C_1C_2e^{-B|t-t_0|}\int_{\min\{t,t_0\}}^{\max\{t,t_0\}} \big|\big|A(s)\big(u(s)-v(s)\big)\big|\big|\,ds(**).$$

Nota. Hagamos una pausa para recordar la norma de una matriz.
Sea $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \sim \mathbb{K}^{n^2} \sim \mathfrak{L}(\mathbb{K}^n)$, definimos norma de A como:
$||A|| = ||A||_{\mathfrak{L}(K^n)} = \max\{||Ax|| : ||x|| = 1\}$. De aquí obtenemos que $||Ax|| = \left|\left|\,||x||\,A\dfrac{x}{||x||}\right|\right| =$
$= ||x||\left|\left|A\dfrac{x}{||x||}\right|\right| \leq ||A||\,||x||\;\; \forall x \in \mathbb{K}^n$.

Por esto último $(**) \leq C_1 C_2 e^{-B|t-t_0|} \int_{\text{mín}\{t,t_0\}}^{\text{máx}\{t,t_0\}} ||A(s)||_{\mathfrak{L}(K^n)} ||u(s)-v(s)|| \, ds (***)$

Ahora tenemos que $||A(s)||_{\mathfrak{L}(K^n)} \leq C_3 ||A(s)||_1 = C_3 \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}(s)| \leq C_3 \sum_{i,j=1}^{n} ||a_{ij}||_\infty$. Luego

$(***) \leq \underbrace{\boxed{C_1 C_2 C_3 \sum_{i,j=1}^{n} ||a_{ij}||_\infty}}_{=L} e^{-B|t-t_0|} \int_{\text{mín}\{t,t_0\}}^{\text{máx}\{t,t_0\}} ||u(s)-v(s)|| \, ds =$

$= L e^{-B|t-t_0|} \int_{\text{mín}\{t,t_0\}}^{\text{máx}\{t,t_0\}} e^{B|s-t_0|} e^{-B|s-t_0|} ||u(s)-v(s)|| \, ds \leq$

$L e^{-B|t-t_0|} \int_{\text{mín}\{t,t_0\}}^{\text{máx}\{t,t_0\}} e^{B|s-t_0|} ds ||u-v||_B (****)$. Finalizando tenemos:

Si $t > t_0$, entonces $\int_{\text{mín}\{t,t_0\}}^{\text{máx}\{t,t_0\}} e^{B|s-t_0|} ds = \int_{t_0}^{t} e^{B(s-t_0)} ds = \frac{e^{B(t-t_0)}-1}{B} = \frac{e^{B|t-t_0|}-1}{B}$.

Si $t < t_0$, entonces $\int_{\text{mín}\{t,t_0\}}^{\text{máx}\{t,t_0\}} e^{B|s-t_0|} ds = \int_{t}^{t_0} e^{-B(s-t_0)} ds = \frac{e^{-B(t-t_0)}-1}{B} = \frac{e^{B|t-t_0|}-1}{B}$.

De forma que $(****) = L e^{-B|t-t_0|} \frac{e^{B|t-t_0|}-1}{B} ||u-v||_B \leq L e^{-B|t-t_0|} \frac{e^{B|t-t_0|}}{B} ||u-v||_B =$
$= \frac{L}{B} ||u-v||_B$. Luego $||Ku-Kv||_B \leq \theta ||u-v||_B$ con $\theta = \frac{L}{B}$ tomando $B > L$. □

Corolario 1.3.11. Iteraciones de *Picard-Lindelöf.*
Para cualquier $h_0 \in \mathcal{C}([\alpha,\beta];\mathbb{K}^n)$, el esquema iterativo $h_n = K h_{n-1} = K^n h_0$ con $n \geq 1$, es decir, $(h_0, Kh_0, K^2 h_0 ...)$ converge a una única solución de $\left\{ \begin{array}{l} u' = A(t)u + B(t) \\ u(t_0) = u_0 \end{array} \right.$.

Ejemplo 1.3.12. Sea $\left\{ \begin{array}{l} h' = h \\ u(t_0) = u_0 \end{array} \right.$ entonces $Kh(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} h(s) ds.$
Sea $h_0 \equiv u_0$ (cte.), tenemos:
$h_1(t) = Kh_0(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} h_0(s) ds = u_0 + u_0(t-t_0) = u_0(1+t-t_0)$. $h_2(t) = Kh_1(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} u_0(1+s-t_0) ds = u_0(1+t-t_0+\frac{(t-t_0)^2}{2})$. $h_3(t) = Kh_2(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} u_0(1+s-t_0+\frac{(s-t_0)^2}{2}) ds = u_0(1+t-t_0+\frac{(t-t_0)^2}{2}) + \frac{(t-t_0)^3}{3!})$. Entonces $h_n(t) = u_0(1+t-t_0+\frac{(t-t_0)^2}{2}) + \frac{(t-t_0)^3}{3!} + ... + \frac{(t-t_0)^n}{n!}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{(t-t_0)} u_0$ de manera uniforme en $[\alpha,\beta]$.

Corolario 1.3.13. Bajo las condiciones del teorema fundamental, el operador solución $\underset{x \mapsto S_0(x) = h(t;t_0,x)}{S_0 \colon \mathbb{K}^n \longrightarrow \Sigma_0}$, que determina una única solucion de $\left\{ \begin{array}{l} h' = A(t)h \\ h(t_0) = x \end{array} \right.$, es isomorfismo vectorial.
Por tanto, el operador solución $\underset{x \mapsto S_B(x) = u(t;t_0,x)}{S_B \colon \mathbb{K}^n \longrightarrow \Sigma_B}$, que determina una única solucion de

$\begin{cases} u' = A(t)u + B(t) \\ u(t_0) = x \end{cases}$, es isomorfismo afín. Por ello, $\dim \Sigma_0 = \dim \Sigma_B = n$. Además puesto que S_0 envía bases de $\mathbb{K}^n$ en bases de Σ_0, si $\mathbb{K}^n$ está generado por $(e_1, ..., e_n) \implies \Sigma_0 = L[h(t; t_0, e_1), ..., h(t; t_0, e_n)]$.

Demostración.
Comprobemos que S_0 es lineal.

Sea $\lambda, \mu \in \mathbb{K},\ x, y \in \mathbb{K}^n$. Entonces, $S_0(\lambda x + \mu y) = h(t; t_0, \lambda x + \mu y) = \lambda h(t; t_0, x) + + \mu h(t; t_0, y) = \lambda S_0(x) + \mu S_0(y)$. Veamos que es inyectiva.

$S_0(x) = 0 \implies x = h(t; t_0, x) = 0 \implies x = 0$. Además $S_0(x) = S_0(y) \iff \iff S_0(x - y) = 0 \iff x = y$. También es fácil comprobar que es suprayectiva. En efecto:

Si $h \in \Sigma_0,\ h(t) = h\big(t; t_0, h(t_0)\big)$, por el *Teorema de unicidad* $\exists! h(t) = S_0(h(t_0))$.
Luego S_0 es isomorfismo vectorial y $\dim \mathbb{K}^n = \dim \Sigma_0 = n$. □

1.4. Variación de coeficientes

Definición 1.4.1. Diremos que $\Phi(t) = \begin{pmatrix} h_{11}(t) & \dots & h_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1}(t) & \dots & h_{nn}(t) \end{pmatrix}$ es una matriz de soluciones de $h' = A(t)h$ cuando sus columnas resuelven $h' = A(t)h$ es decir $\Phi'(t) = (h'_{ij}(t)) = \big(h'_1(t) \dots h'_n(t)\big) = \big(A(t)h_1(t) \dots A(t)h_n(t)\big) = A(t)\big(h_1(t) \dots h_n(t)\big) = A(t)\Phi(t)$ o lo que es lo mismo, $\Phi(t)$ resuelve el sistema.

Definición 1.4.2. $\Phi(t)$ es una matriz fundamental de soluciones (M.F.S.) cuando sus columnas son una base de Σ_0.

Ejemplo 1.4.3. Sea $h' = Ah$ entonces $\Phi(t) = \mathrm{e}^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{A^n t^n}{n!}$ es una matriz fundamental de soluciones.

Teorema 1.4.4. *Sean $h_1, \dots, h_n \in \Sigma_0$ y sea $\Phi = \big(h_1 \dots h_n\big)$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$\Phi(t)$ es M.F.S. $\big(\Sigma_0 = L[h_1, ..., h_n]\big)$.*

2. *$\exists t_0 \in [\alpha, \beta]$ tal que $\det \Phi(t_0) \neq 0$.*

3. *$\det \Phi(t) \neq 0\ \forall t \in [\alpha, \beta]$.*

Demostración.
Supongamos que $\exists t_0 \in [\alpha, \beta]$ tal que $\det \Phi(t_0) = 0 \implies \exists c_1, \dots, c_n \in \mathbb{K}$ tal que $c_1 h_1(t_0) + c_2 h_2(t_0) + ... + c_n h_n(t_0) = 0$ con $(c_1, ..., c_n) \neq (0, ..., 0)$. Por tanto, sea $h(t) = c_1 h_1(t_0) + c_2 h_2(t_0) + \dots + c_n h_n(t_0) = 0\ \forall t \in [\alpha, \beta]$, $h \in \Sigma_0$ y $h(t_0) = 0 \implies \implies h = 0 \implies \{h_1, \dots, h_n\}$ es linealmente dependiente (esto prueba, por contrarrecíproco, que (1) $\implies$ (3)). Por lo que $\det \Phi(t) = 0\ \forall t \in [\alpha, \beta]$ ((2) $\implies$ (1)). Para acabar, es evidente que ((3) $\implies$ (2)). □

Proposición 1.4.5. El determinante de una M.F.S. Φ viene también determinado por la fórmula de Jacobi-Louiville: $\det \Phi(t) = \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} tr(A(s))ds} det\Phi(t_0)$ con $t, t_0 \in [\alpha, \beta]$. Es decir, obtenemos cualquier determinante de $\Phi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ dado el valor del determinante de un punto t_0 cualquiera.

Observación. Hallemos la solución general de $u' = A(t)u(t) + B(t)$. Sea $\Phi(t) = \begin{pmatrix} h_1 & \dots & h_n \end{pmatrix}$