

Ejercicios de Geometría Diferencial de Curvas y Superficies



Universidad Complutense de Madrid

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

DOBLE GRADO EN MATEMÁTICAS E INGENIERÍA INFORMÁTICA

Javier Pellejero
Curso 2017-2018

El propio Dios geometriza.

Platón

Prefacio

Aquí va el prefacio, evidentemente

Índice general

1. Curvas parametrizadas y longitud de un arco de curva	1
---	---

Capítulo 1

Curvas parametrizadas y longitud de un arco de curva

Ejercicio 1. Hallar una curva parametrizada α cuya traza es el círculo $x^2 + y^2 = 1$, con $\alpha(t)$ recorriéndolo en el sentido de las agujas del reloj y con $\alpha(0) = (0, 1)$.

Una solución a este ejercicio $\alpha(t) = (\sin t, \cos t)$. Es claro que $\alpha(0) = (\sin 0, \cos 0) = (0, 1)$ y que al avanzar, por ejemplo a $\alpha(\frac{\pi}{2}) = (\sin \frac{\pi}{2}, \cos \frac{\pi}{2}) = (1, 0)$ es en el sentido de las agujas del reloj.

Ejercicio 2. Sea $\alpha(t)$ una curva que no pasa por el origen. Si $\alpha(t_0)$ es el punto de la traza de α más cercano al origen y $\alpha'(t_0) \neq 0$, demostrar que el vector posición $\alpha(t_0)$ es ortogonal a $\alpha'(t_0)$.

Definimos la función $D(t) := \alpha^2(t) = \alpha(t)\alpha(t) = \|\alpha(t)\|^2$ que mide el cuadrado de la distancia de los puntos de la curva al origen.

t_0 es un punto relativo de dicha función por ser el punto más cercano al origen, entonces $D'(t_0) = 0 \implies 2\alpha(t_0)\alpha'(t_0) = 0 \implies \alpha(t_0) \perp \alpha'(t_0)$.

Ejercicio 3. Sea $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una curva y $v \in \mathbb{R}^3$ un vector dado. Si $\alpha'(t)$ es ortogonal a v para todo $t \in I$, y si $\alpha(0)$ también lo es, demuestre que $\alpha(t)$ es ortogonal a v para todo $t \in I$.

Definimos $f(t) := \alpha(t)v = \alpha_1(t)v_1 + \alpha_2(t)v_2 + \alpha_3(t)v_3$. Tenemos que $f'(t) = \alpha'(t)v = 0 \forall t \in I$. Luego $f(t) = c \in \mathbb{R}$, $\forall t \in I$. Como en particular $f(0) = \alpha(0)v = 0 \implies c = 0 \implies \alpha(t) \perp v$.

Ejercicio 4. Si $\alpha: I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ es una curva regular, demuestre que $\|\alpha(t)\|$ es constante (diferente de cero) si y sólo si $\alpha(t) \perp \alpha'(t)$ para todo $t \in I$.

■ (\implies). $\|\alpha(t)\|^2 = \alpha(t)\alpha(t) = c^2$. Derivando, $2\alpha(t)\alpha'(t) = 0 \implies \alpha(t) \perp \alpha'(t)$.

$$\begin{aligned} \blacksquare \quad (\Leftarrow) \cdot \alpha(t)\alpha'(t) = 0 &\implies \frac{1}{2}(\alpha(t)\alpha(t))' = 0 \xrightarrow{\text{Integrando}} \alpha(t)\alpha(t) = c \implies \\ &\implies \|\alpha(t)\|^2 = c \implies \|\alpha(t)\| \text{ es constante.} \end{aligned}$$

Ejercicio 5. Si $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ es una curva, y $M: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un movimiento rígido, demostrar que las longitudes de α y $M \circ \alpha$ entre a y b coinciden.

$$\begin{aligned} L_a^b M \circ \alpha(t) &= \int_a^b \|(M \circ \alpha)'\| = \int_a^b \|M'(\alpha(s))\alpha'(s)\| ds = \int_a^b \|\vec{M}\alpha'(s)\| ds \text{ por ser mov. rígido} \\ &= \int_a^b \|\alpha'(s)\| ds = L_a^b \alpha. \end{aligned}$$

Ejercicio 6. Demuestre que las líneas tangentes a la curva $\alpha(t) = (3t, 3t^2, 2t^3)$ forman un ángulo constante con la recta $y = 0, z = x$.

Tenemos que $\alpha'(t) = (3, 6t, 6t^2)$. La recta $r \equiv \begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases}$ tiene como vector director $v := (1, 0, 1)$. El ángulo θ que forman v y $\alpha'(t)$ viene determinado por $\theta = \arccos_{[0, \pi)} \frac{\alpha'(t)v}{\|\alpha'(t)\|\|v\|} =$

$$= \arccos_{[0, \pi)} \frac{3 + 6t^2}{\sqrt{9 + 36t^2 + 36t^4}\sqrt{2}} = \arccos_{[0, \pi)} \frac{3 + 6t^2}{(3 + 6t^2)\sqrt{2}} = \arccos_{[0, \pi)} \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ que es constante.}$$

Ejercicio 7. La curva engendrada por un punto P de una circunferencia de radio r que rueda sin deslizar por una recta fija se llama **cicloide**. Tomando dicha recta como eje de las X , y como parámetro t el ángulo orientado \widehat{MCP} (C es el centro de la circunferencia y M el punto de contacto con el eje), probar que la posición de P para cada t es

$$\alpha(t) = (rt - r \sin t, r - r \cos t)$$

Se ha supuesto que en $t = 0$, P coincide con M , y con el origen de coordenadas. Determine los puntos t donde $\alpha(t) = 0$ (llamados de retroceso). (Nota: “sin deslizar” significa a efectos prácticos que la longitud del arco MP coincide con la longitud del segmento OM).

