



Universidad Nacional  
de Entre Ríos

---

# Modelo Biomecánico 3D para el Análisis del Movimiento Humano

---

## **PARTE 1**

### **Versión 2.0**

**Cátedra:** Biomecánica

**Facultad de Ingeniería – UNER**  
**Oro Verde. Entre Ríos. Argentina**

# ÍNDICE

<b>1</b>	<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
<b>1.1</b>	<b>Funcionamiento de un laboratorio de biomecánica</b>	<b>1</b>
1.1.1	Instrumentos más frecuentes	1
1.1.2	Variables obtenidas en los registros	6
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTOS DE MODELOS BIOMECÁNICOS</b>	<b>8</b>
<b>2.1</b>	<b>Modelo de segmentos rígidos articulados</b>	<b>8</b>
2.1.1	Características de un modelo de segmentos articulados	8
2.1.2	Características inerciales de los segmentos	10
2.1.3	Orientación en el tiempo de cada segmento	11
<b>2.2</b>	<b>Ángulos articulares</b>	<b>13</b>
<b>2.3</b>	<b>Cinemática lineal de los segmentos</b>	<b>14</b>
2.3.1	Velocidad lineal	14
2.3.2	Aceleración lineal	15
<b>2.4</b>	<b>Herramientas matemáticas necesarias para el análisis tridimensional</b>	<b>16</b>
2.4.1	Matrices de rotación	16
2.4.2	Ángulos de Euler	19
2.4.3	Representación de vectores en distintos sistemas coordenados	22
2.4.4	Transformación directa entre el sistema coordenado global y local	25
<b>2.5</b>	<b>Cinemática angular de los segmentos</b>	<b>27</b>
<b>2.6</b>	<b>Cantidad de movimiento angular</b>	<b>29</b>
<b>2.7</b>	<b>Análisis dinámico de un segmento de cuerpo rígido</b>	<b>30</b>
2.7.1	Fuerzas actuantes en un modelo de segmentos articulados	30
2.7.2	Fuerzas	31
2.7.3	Momentos	33
2.7.4	Convención de ejes articulares	35
<b>2.8</b>	<b>Normalización de variables</b>	<b>36</b>
<b>3</b>	<b>RESOLUCIÓN DE MODELO BIOMECÁNICO</b>	<b>39</b>
<b>3.1</b>	<b>Marcadores y Sistema coordenado global del laboratorio</b>	<b>39</b>
<b>3.2</b>	<b>Definición de los segmentos</b>	<b>40</b>
3.2.1	Centros Articulares	40
3.2.2	Sistemas coordenados de los segmentos	44
<b>3.3</b>	<b>Parámetros de los segmentos</b>	<b>47</b>

3.3.1	Masa, Matrices de inercia y centros de masa	47
<b>3.4</b>	<b>Cinemática</b>	<b>52</b>
3.4.1	Velocidad y aceleración lineal del segmento	52
3.4.2	Ángulos articulares	53
<b>3.5</b>	<b>Dinámica</b>	<b>73</b>
3.5.1	Fuerzas articulares	74
<b>4</b>	<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>75</b>

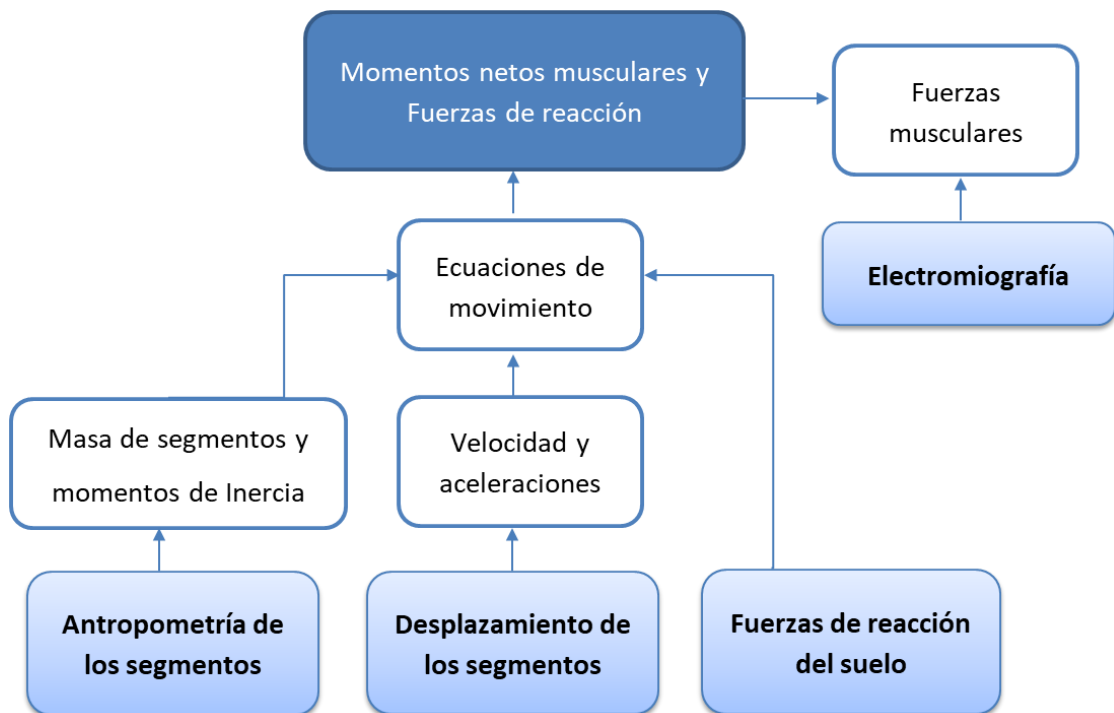


# 1 INTRODUCCIÓN

## 1.1 FUNCIONAMIENTO DE UN LABORATORIO DE BIOMECÁNICA

Para el estudio del movimiento humano es necesario contar con instrumentos para obtener distintas variables que permitan caracterizar el gesto a analizar. Los trabajos de biomecánica, en su mayoría, disponen de un conjunto de instrumentos comunes que permiten obtener registros funcionales para describir los distintos gestos.

Un laboratorio de biomecánica es entonces un espacio físico controlado donde se dispone de instrumentos que permiten medir variables de interés para estudiar y analizar el movimiento de los seres vivos. En este desarrollo se explica cómo se puede cuantificar variables cinemáticas y dinámicas a partir de las posiciones de un conjunto de marcadores reflectantes en el espacio, variables antropométricas y datos dinámicos (de plataforma de fuerza). En la **Figura 1.1** se presenta un diagrama esquemático de la evaluación del modelo de segmentos articulados en el que se observan las variables de entrada y los parámetros estimados.



**FIGURA 1.1 - DIAGRAMA ESQUEMÁTICO DE LA EVALUACIÓN DEL MODELO DE SEGMENTOS ARTICULADOS DONDE SE OBSERVAN LAS VARIABLES DE ENTRADA Y LOS PARÁMETROS ESTIMADOS [1].**

### 1.1.1 INSTRUMENTOS MÁS FRECUENTES

Existe una gran diversidad de instrumentos en el mercado que permiten medir variables biomecánicas. En el análisis del movimiento se suele incluir un estudio cinemático y un estudio cinético. La cinemática se encarga de la determinación de parámetros de posición, velocidades y aceleraciones, tanto lineales como angulares. Una de las alternativas de registro utiliza distintos sistemas de cámaras y marcadores de posición. El estudio cinético, tiene como fin determinar las fuerzas y momentos internos o externos actuantes y relacionarlos con el gesto analizado. Para ello, se utilizan instrumentos como las

plataformas de fuerza u otros dispositivos que integran sensores de fuerza y presión. Además, en este área disciplinar se suelen utilizar registros de electromiografía que permiten observar la actividad eléctrica muscular, y a menudo es aconsejable realizarla de forma sincronizada al registro cinemático y cinético [2].

#### 1.1.1.1 SISTEMAS DE CAPTURA CINEMÁTICA

Existen muchas tecnologías disponibles que se utilizan para cuantificar el movimiento. Sin embargo, las recientes innovaciones en sistemas de captura óptica de movimiento han añadido capacidades sin precedentes, posibilitando generar resultados que permitan:

- A los **entrenadores** brindar retroalimentaciones en la técnica de sus atletas.
- A los **médicos** evaluar la recuperación de la lesión de sus pacientes o planificar mejor una cirugía.
- A los **ingenieros** utilizar modelos para evaluar cómo interactúan los pacientes y atletas con los implementos<sup>1</sup>.
- A los **investigadores** estudiar la biomecánica de los movimientos, así como acciones de fuerza de alta velocidad [3].

Muchos sistemas para el registro permiten cuantificar el movimiento global humano, entre estos se encuentran los sistemas optoeléctricos, videografía, goniometría, acelerometría y sistemas de captura por ultrasonidos. Cada uno de estos métodos posee sus propias fortalezas y debilidades. Sin embargo, en la última década, los métodos optoeléctricos se consolidaron como la herramienta más utilizada para los registros biomecánicos. El motivo de éxito de este método fue, principalmente, la excepcional exactitud de la medida y la gran diversidad de equipos de captura de imagen con buen rendimiento.

##### **Set de cámaras**

Los sistemas cuentan con un conjunto de cámaras infrarrojas que detectan marcadores reflectantes ubicados en posiciones estratégicas según el tipo de movimiento que se desea registrar. Los marcadores se consiguen en el mercado en formas variadas, normalmente son discos, semiesferas o esferas que están cubiertas con revestimientos reflectantes. En la mayoría de los casos se insertan en una base plástica (Figura 1.3) que mide entre 0,5 y varios centímetros. Estas bases con las esferas/semiesferas se colocan sobre la piel, la ropa del sujeto a estudiar en lugares correspondientes a accidentes óseos indicados mediante un protocolo de medición o implementos<sup>1</sup>. Los dispositivos que utilizan esta tecnología capturan el movimiento con celdas especializadas de gran resolución, usan procesadores para identificar los marcadores reflectantes y así calculan las posiciones de los mismos en la imagen. Las cámaras cuentan con anillos de LEDs infrarrojos (Figura 1.2) cerca de su lente. La luz infrarroja se refleja en los marcadores y contrasta con el fondo, permitiéndole al sistema detectar las posiciones de los marcadores en tiempo real con gran exactitud. En las aplicaciones más comunes se consta de cuatro o más cámaras que cubren un volumen de captura definido. Con cada cámara se registran las coordenadas 2D de los marcadores en el plano de su imagen. Un ordenador, a partir de un software, reconstruye en tiempo real las coordenadas 3D de los marcadores colocados en el sujeto con la información de las cámaras [3].

---

<sup>1</sup> Los implementos pueden ser ortesis, accesorios deportivos, prótesis, entre otros.



FIGURA 1.2 – CÁMARAS FLEX 13 DE ©NATURAL POINT CON ARREGLO DE LEDs INFRARROJO PARA REALIZAR REGISTROS DE VIDEOGRAFÍA.



FIGURA 1.3 – MARCADORES Y SUS BASES PLÁSTICAS.

#### 1.1.1.2 PLATAFORMAS DE FUERZA

Para medir la fuerza del cuerpo sobre el suelo u otro cuerpo se utilizan transductores de fuerza como: galgas extensiométricas, dispositivos piezorresistivos, piezoeléctricos, capacitivos u otros. El principio de medición consiste en que la fuerza aplicada genera una pequeña deformación en el transductor que luego se utiliza como señal electrónica [4].

La fuerza más común en el estudio biomecánico del movimiento humano es la fuerza de reacción del piso, la cual está presente en la caminata, postura de parado, carrera, entre otras [4]. Es por esto que los laboratorios de biomecánica cuentan frecuentemente con plataformas de fuerzas que permiten medir en el tiempo esta variable.

Esta fuerza es un vector de tres componentes, la fuerza vertical y las dos fuerzas de corte. Una cuarta variable a obtener es la posición del centro de presión del vector reacción del piso. El pie se apoya sobre el suelo por medio de una superficie de área variable en el tiempo y diferentes presiones en cada punto, el centro de presión es el punto donde se pueden concentrar todas las fuerzas aplicadas en esa superficie.

La quinta variable es el Momento ejercido sobre la plataforma.

La plataforma de fuerza es un instrumento común en los laboratorios de biomecánica que se utiliza para medir la fuerza de reacción del suelo. Los datos dinámicos obtenidos a partir de estas plataformas, junto con los datos de captura de movimiento registrados por las cámaras, permiten a los usuarios realizar un análisis del movimiento sobre el cuerpo completo [3].

#### 1.1.1.3 ELECTROMIOGRAFÍA

La electromiografía (EMG) es un registro de la actividad eléctrica muscular, y por tanto constituye un complemento del examen físico y prueba la integridad del sistema motor. Este método permite recoger la señal eléctrica de cada músculo en un cuerpo sometido a esfuerzos musculares, tanto de carácter postural (estático) como en movimiento [2].

Mediante la electromiografía es habitual considerar dos tipos de datos:

- El tiempo de activación del músculo, su inicio y final en relación a la posición articular.
- El grado de actividad muscular, que refleja el nivel de esfuerzo muscular pero que no se debe confundir con el nivel de fuerza muscular, considerando que la señal eléctrica detectada está en función de la concentración iónica existente en el músculo, entre otras muchas variables.

La EMGS (Electromiografía de superficie) nos facilita tareas como la de definir la participación muscular en un determinado gesto u observar la activación de la musculatura de un segmento en respuesta a la movilización de otros segmentos. Estos aspectos son relevantes en áreas como la rehabilitación, la medicina del deporte, la medicina laboral y, cada vez más, en los estudios ergonómicos [2].

#### 1.1.1.4 ELEMENTOS DE MEDICIÓN ANTROPOMÉTRICA CONVENCIONALES

Adicionalmente a los elementos mencionados anteriormente, se dispone de elementos de medición de longitud y peso. Los más frecuentes son:

**Tallímetro (ó estadiómetro):** Se utiliza para medir la altura del sujeto y la talla sentado. Puede ser una cinta métrica apoyada en la pared que consta de un cursor deslizante donde se indica el valor medido, o bien un dispositivo diseñado específicamente para esta medición. Es recomendable que su precisión sea de, al menos,  $1[mm]$  [5].





FIGURA 1.4 – TALLÍMETRO.

**Balanza:** Sirve para cuantificar el peso<sup>2</sup> y debe constar de un rango entre 0 y 150[Kg]. Existen tanto mecánicas como digitales. Sin importar que tipo de balanza se utilice, se debe constar con una precisión de 100[gr] aunque es recomendable que tenga una precisión de 50[gr][5].

**Antropómetro:** Es una barra, usualmente metálica, con un cursor deslizante que indica la medición. Normalmente estos pueden extenderse gracias a una serie de ramas desmontables. Se utiliza para medir longitudes y tiene una precisión de 1[mm]. El rango de estos dispositivos va de pocos centímetros hasta 2[mts] aproximadamente. Por lo tanto, se puede medir desde diámetros a longitudes y alturas[5].

---

<sup>2</sup> El valor del peso se corresponde con masa corporal a los efectos de cálculo del modelo.



FIGURA 1.5 – BALANZA.



FIGURA 1.6 – ANTROPÓMETRO.

**Cinta Antropométrica:** Es utilizada para medir perímetros y localizar los puntos medios de los segmentos corporales. Es de un material flexible y no extensible con un ancho máximo de 7[mm]. Es recomendable que la graduación no comience exactamente en el extremo de la misma para facilitar la medición de los perímetros. La precisión debe ser de 1[mm][5].

**Plicómetro (ólipómetro):** Es una pinza que se utiliza para medir el panículo adiposo. Los rangos de precisión oscilan entre los 0,2 a 1 milímetros. Estos dispositivos deben constar con un rango de medición de al menos entre los 0 y los 48[mm]. Los brazos del plicómetro deben tener una presión constante igual a 10[gr/mm<sup>2</sup>][5].



FIGURA 1.7 – CINTA ANTROPOMÉTRICA.



FIGURA 1.8 – PLICÓMETRO.

**Gran compás:** Se utiliza para medir con mayor comodidad los diámetros del tronco (diámetro transversal del tórax, anteroposterior del tórax, biacromial y biileocrestal). Los brazos curvos permiten adaptarse a la forma del cuerpo y realizar el registro más cómodamente. La precisión del dispositivo es de 1[mm][5].

### 1.1.2 VARIABLES OBTENIDAS EN LOS REGISTROS

Un conjunto de variables físicas son obtenidas luego de realizar el registro de un sujeto en un laboratorio de biomecánica. Mencionados los instrumentos más frecuentes que se utilizan en un laboratorio, se puede intuir las variables que se obtienen en el mismo cuando se pretende realizar la evaluación de un gesto. Se puede clasificar estas variables en dos grandes grupos, las variables propias del sujeto, que son fundamentalmente antropométricas, y las variables registradas durante el gesto. Se

podría suponer que las primeras son constantes para cada sujeto en todo el estudio, y que los parámetros como masa corporal, altura, diámetro de segmentos y largo de segmentos permanecen invariables durante todo el gesto.



**FIGURA 1.9 – GRAN COMPÁS.**

Las variables registradas del gesto incluyen, entre otras, a las posiciones de los marcadores, la actividad electromiográfica, el centro de presión, la fuerza y momento de reacción reportado por la plataforma. Estas variables toman valores distintos a lo largo del gesto y son característicos del gesto en particular. Es por esto que las mismas suelen ser registros vectoriales en función del tiempo, en donde se reporta el valor medido en cada instante de tiempo. Estos registros en el tiempo son digitales, por lo tanto discretos en el tiempo y se trabajan posteriormente con estrategias de procesamiento digital de señales.

En este apunte se desarrolla la metodología para el cálculo de variables cinemáticas (como el ángulo de determinadas articulaciones) y cinéticas (como las fuerzas en la articulación, los momentos netos musculares y la potencia en la articulación).

Para ello, necesitamos en primera instancia presentar un modelo que permita simplificar la fisiología del cuerpo y así calcular las variables mencionadas.

## **2 FUNDAMENTOS DE MODELOS BIOMECÁNICOS**

---

### **2.1 MODELO DE SEGMENTOS RÍGIDOS ARTICULADOS**

Para resolver un problema biomecánico es necesario desarrollar modelos que nos permitan calcular las variables de interés. Esto implica buscar una estrategia para poder estimar con la información de los registros las variables cinemáticas y dinámicas. Los métodos más utilizados debido a su relación entre la complejidad y la calidad de los resultados son los modelos de segmentos rígidos articulados [1], [4], [6]–[9]. Estos constan de una serie de simplificaciones que permiten calcular las fuerzas y momentos involucrados en cada segmento con relativa sencillez mediante las leyes de Newton. En la Figura 2.1 se esquematiza el proceso necesario para resolver un modelo, en ésta se observan las distintas etapas que llevan a obtener el resultado final. En el desarrollo de este apartado se detallan los métodos para obtener todas las variables expuestas en el esquema.

La validez de cualquier evaluación es tan buena como el modelo en sí mismo. La precisión en la medida de la masa de los segmentos, centros de masa (CMs), centros articulares y los momentos de inercia es fundamental. Esta información puede ser obtenida de tablas estadísticas que se basan en la altura de la persona, peso y, en algunos casos, el sexo. Un número limitado de variables pueden ser medidas directamente, pero algunas técnicas consumen demasiado tiempo y tienen limitada precisión [4].

#### **2.1.1 CARACTERÍSTICAS DE UN MODELO DE SEGMENTOS ARTICULADOS**

En un modelo de segmentos rígidos articulados se realizan, como se mencionó anteriormente, algunas simplificaciones. Winter [4] modela los segmentos con las siguientes características:

- 1- Cada segmento tiene una masa constante que puede suponerse fija en el centro de masa del segmento.
- 2- La localización de cada centro de masa del segmento permanece fija (relativa al segmento) durante el movimiento.
- 3- Las articulaciones son consideradas como bisagra o ball and socket, es decir que articulan en un punto fijo respecto a los segmentos que constituyen la articulación.
- 4- El momento de inercia respecto del centro de masa (o cualquiera de los extremos) permanece constante durante el movimiento.
- 5- La longitud de cada segmento permanece constante durante el movimiento.

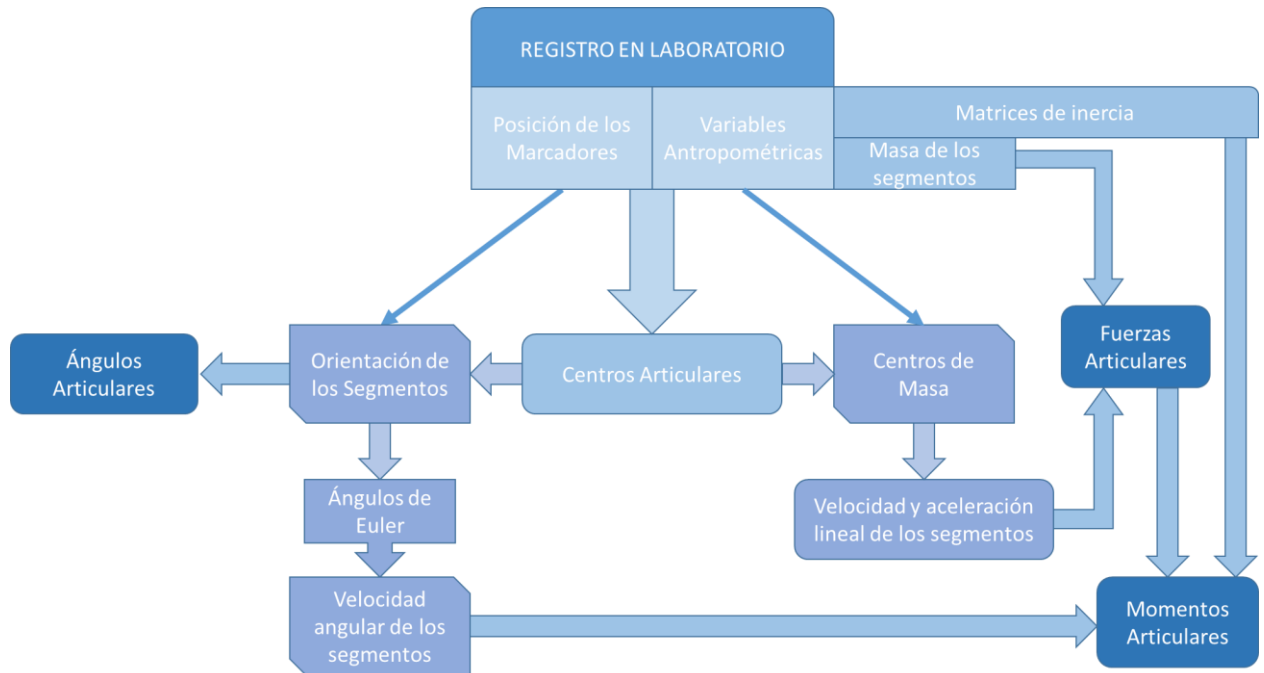


FIGURA 2.1 – PROCESO PARA RESOLVER MODELOS DE SEGMENTOS ARTICULADOS.

#### 2.1.1.1 ESTIMACIÓN DE LOS CENTROS ARTICULARES

Los centros articulares en un modelo de segmentos rígidos articulados son puntos donde se unen dos segmentos. Son considerados los extremos de los segmentos en la mayoría de los modelos y se deben aproximar lo más posible a la posición real donde los dos segmentos a modelar articulan entre sí.

Existen muchas estrategias cuyo fin es identificar las posiciones de los centros articulares, algunos autores obtienen la posición de los centros articulares a partir de imágenes de Rayos x, tomografías, ultrasonido o resonancias [10]–[14]. Éste método es considerado el más preciso actualmente pero resulta de aplicación muy compleja, tanto por su costo como por el tiempo requerido.

Otra opción es utilizar ecuaciones regresivas obtenidas a partir de estudios de una gran población en la que se reportaron, en función de algunas variables antropométricas, la posición de los centros articulares y la orientación de los segmentos [15]–[20]. La relación de compromiso que existe entre la dificultad de los métodos de estimación y la necesidad de exactitud suele posicionar a los métodos de estimación por ecuaciones regresivas como los más convenientes para realizar estudios del movimiento humano en el deporte y la clínica.

Una alternativa a las dos anteriores es ubicar el centro articular de forma dinámica o funcional. Esto consiste en encontrar mediante alguna estrategia de cálculo el punto que se conserva equidistante a cualquier punto de los dos segmentos que se articulan entre sí, como por ejemplo en método SCoRE [21]–[23]. Este punto se define entonces como el centro articular entre los dos segmentos. Lo más probable es que no se ubique una posición exacta en el espacio debido a que el centro articular en realidad no es un punto fijo relativo a los dos segmentos, sino que el mismo se desplaza levemente con el movimiento. Por lo tanto se estima una posición que minimice el error en la resolución del modelo con los desplazamientos reales del centro articular [4].

## 2.1.2 CARACTERÍSTICAS INERCIALES DE LOS SEGMENTOS

### 2.1.2.1 CENTRO DE MASA

El término centro de masa y centro de gravedad son utilizados con frecuencia de la misma manera. El término más general es, en realidad, centro de masa, considerando que el centro de gravedad refiere al centro de masa solo en un eje, el definido por la dirección de la gravedad. En los dos ejes horizontales, el término centro de masa puede ser usado [4].

A medida que aumenta la masa del cuerpo total, aumenta la masa de cada uno de los segmentos. Por lo tanto es posible expresar la masa de cada segmento como un porcentaje de la masa total del cuerpo. La ubicación del centro de masa está también dada como un porcentaje de la longitud de cada segmento medida desde el extremo distal o proximal. En estudios cadavéricos, es relativamente simple de localizar el centro de masa simplemente determinando el centro de balance de cada segmento. Para calcular en centro de masa *in vivo*, se necesita conocer la distribución del volumen y de la densidad del segmento [4].

Generalmente, durante una evaluación biomecánica, se utilizan estudios estadísticos cuya muestra posea características similares a la del estudio a realizar para estimar los centros de masa a partir de variables antropométricas.

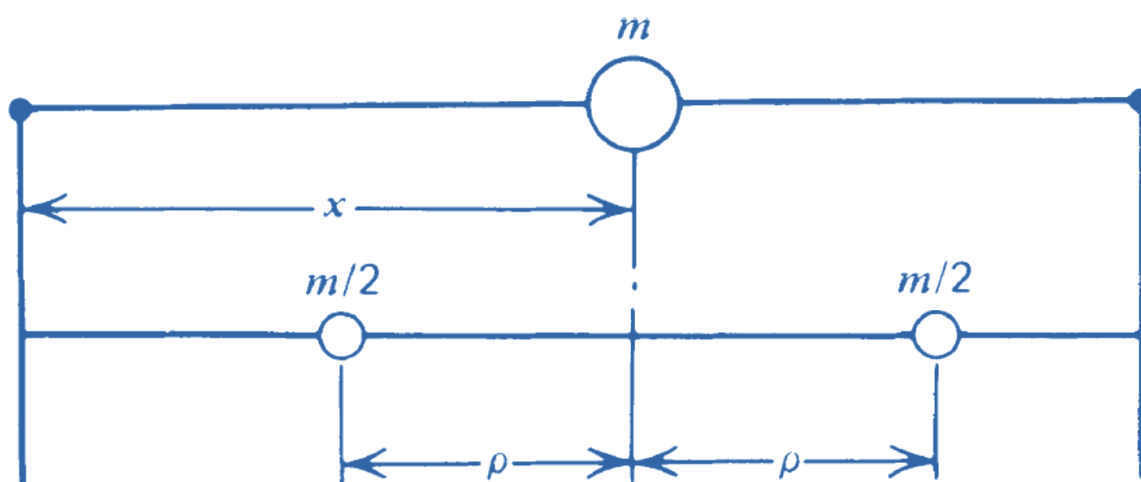


FIGURA 2.2 – RADIO DE GIRO DE UN SEGMENTO RELATIVO A LA UBICACIÓN DEL CENTRO DE MASA ORIGINAL DEL SISTEMA [4].

### 2.1.2.2 MOMENTOS DE INERCIA Y RADIO DE GIRO

La ubicación del centro de masa de cada segmento es necesaria para el análisis del movimiento de translación a través del espacio. Si la aceleración está involucrada, se necesita conocer la resistencia inercial a cada movimiento. En el sentido lineal, la fuerza  $F$  es proporcional a la variación de cantidad de movimiento lineal, es decir  $F = d(m \cdot v)/dt$  que con masa constante se resume a  $F = m \cdot a$ . En el sentido rotacional, el momento  $M$  es proporcional a la variación de cantidad de movimiento angular  $I \cdot \omega$ , donde  $I$  es la matriz de inercia y  $\omega$  la velocidad angular. Entonces  $M = d(I \cdot \omega)/dt$ . Para comprender el sentido físico de la matriz de inercia, se puede reducir el análisis a un plano, donde  $I$  se vuelve una constante y la derivada en el tiempo de  $I \cdot \omega$  es simplemente  $I \cdot \alpha$  (siendo  $\alpha$  la aceleración angular). Por lo que  $I$  es la constante de proporcionalidad que mide la habilidad del segmento a resistirse a los

cambios de velocidad angular. El valor de  $I$  depende del punto donde se realiza la rotación y es mínima cuando la rotación es respecto al centro de masa [4].

Considerando un cuerpo de masa  $m$  con un momento de inercia  $I_0$  en el centro de masa, existe un valor  $\rho_0$  tal que si se divide la masa  $m$  en dos partes iguales y se las coloca concentradas en dos puntos separados entre sí a una distancia de  $2 \cdot \rho_0$  unidos por un alambre sin masa como se muestra en la Figura 2.2 el valor de  $I_0$  es igual a que posee el cuerpo en su distribución original de masa cuerpo original. Este valor,  $\rho_0$ , se define como radio de giro y su relación matemática con  $I_0$  es:

$$I_0 = m \cdot \rho_0^2$$

Existen varios estudios que reportan las matrices de radios de giro para estimar la matriz de inercia [12], [20], [24]–[27]. Debido a que el radio de giro de un segmento es dependiente de su longitud, la mayoría de los reportes normalizan este valor con la longitud del segmento  $L_{segmento}$ .

$$\rho_N = \frac{\rho_0}{L_{segmento}}$$

Conociendo el radio de giro (o la matriz de radios de giro) normalizado de un segmento y la longitud del segmento de nuestro sujeto es posible conocer el valor del momento de inercia (o la matriz de inercia) del segmento en estudio.

$$I_0 = m \cdot (\rho_N \cdot L_{segmento})^2$$

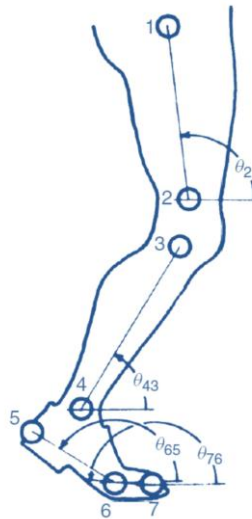


FIGURA 2.3 – ORIENTACIÓN DE LOS SEGMENTOS EN EL PLANO SAGITAL [4].

### 2.1.3 ORIENTACIÓN EN EL TIEMPO DE CADA SEGMENTO

Para estimar las velocidades angulares de los segmentos, aceleraciones angulares y momentos involucrados en las articulaciones se parte de la orientación de los segmentos en cada instante de tiempo.

En el plano sagital Winter define la orientación del segmento como el ángulo comprendido entre el plano horizontal y la línea recta que une los dos extremos (centros articulares) del segmento (Figura 2.3), aunque claramente esto es solo una aproximación considerando que no siempre el plano sagital coincide con el plano en el que se obtienen las coordenadas 2D para el correspondiente cálculo. El

movimiento es realmente tridimensional por lo que más allá de la mayor complejidad el registro es más real.

En tres dimensiones (3D) el problema es más complejo debido a que la orientación de los segmentos se manifiesta en 3 planos, por lo que un simple ángulo no es información suficiente para estimar la orientación del segmento. En estos casos existen distintos protocolos desarrollados para definir la orientación del segmento [1], [7], [8], [28]–[31] cuya estrategia general consiste en definir tres versores ortonormales y definir un sistema coordenado que rote solidario al segmento. Para esto se deben ubicar puntos conocidos del segmento, al menos tres, que sirvan para definir estos versores. Generalmente los extremos del segmento (centros articulares) son puntos que definen alguno de los tres versores del sistema coordenado local del segmento.

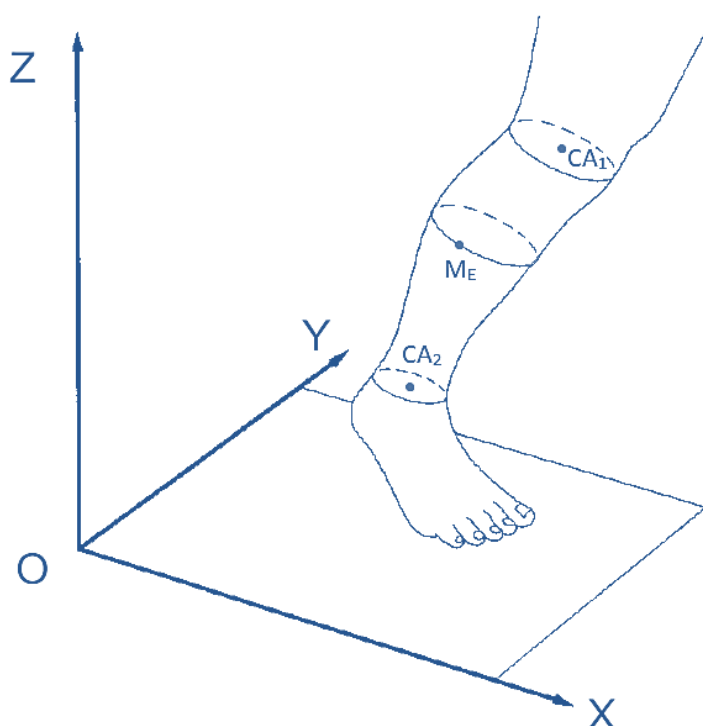


FIGURA 2.4 – PUNTOS DEL SEGMENTO PIERNA UTILIZADOS PARA ESTIMAR EL CENTRO ARTICULAR, ADAPTADO DE [1].

Suponiendo que se tiene un segmento del que se le conocen sus extremos  $CA_1$  y  $CA_2$ , y se dispone de un marcador externo  $M_E$  cuya posición es conocida (Figura 2.4) los versores que describen la orientación del segmento se pueden calcular como:

$$\vec{j} = \frac{CA_1 - CA_2}{|CA_1 - CA_2|}$$

$$\vec{i} = \frac{(M_E - CA_1) \times (CA_2 - CA_1)}{|(M_E - CA_1) \times (CA_2 - CA_1)|}$$

$$\vec{k} = \vec{i} \times \vec{j}$$

De esta manera se obtienen tres vectores de módulo unitario perpendiculares entre sí (Figura 2.5). Existen, como se mencionó anteriormente, varias propuestas para definir estos vectores. En el presente trabajo se exponen las orientaciones de los segmentos bajo el protocolo propuesto por Davis,



modificado por Vahugan [1]. En el apartado 3.2.2 se desarrolla con detalle el cálculo de los versores de cada segmento.

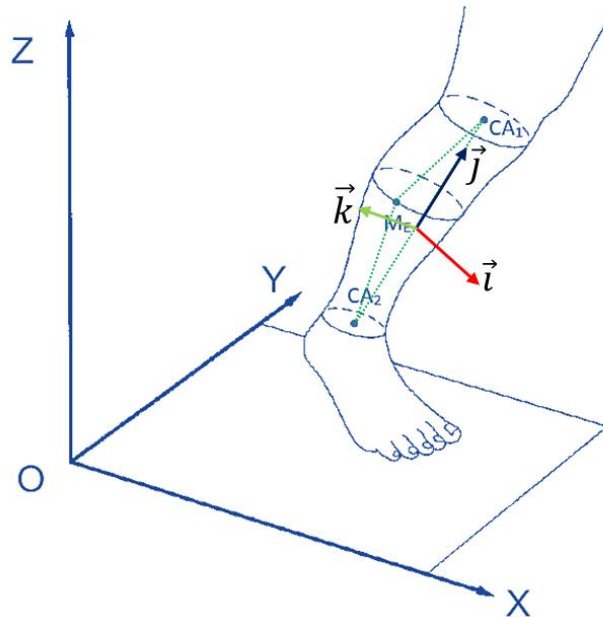


FIGURA 2.5 – VECTORES UNITARIOS QUE DEFINEN LA ORIENTACIÓN DE UN SEGMENTO, ADAPTADO DE [1].

## 2.2 ÁNGULOS ARTICULARES

Un primer análisis para caracterizar un gesto particular con frecuencia es conocer como los segmentos se articulan entre sí. Los ángulos obtenidos de una muestra permiten caracterizar el gesto y pueden tener valor en su comparación con otros sujetos que ejecutan el mismo gesto, tanto en la clínica como en el deporte.

Los ángulos entre articulaciones, al igual que los centros articulares, se reportan bajo algún protocolo particular. Como regla general los ángulos articulares se obtienen cuantificando cuanto rota un segmento respecto al otro, esto se realiza comparando la orientación de los sistemas coordenado locales de cada segmento[1], [7], [8].

La elección de los vectores a utilizar para comparar entre cada segmento está definida en los distintos protocolos. En este trabajo se exponen las propuestas realizadas por la Davis [1] modificado por Vahugan. En el apartado 3.4.2 se desarrolla con detalle el método utilizado para calcular los ángulos articulares.

Los protocolos desarrollados para los cálculos articulares definen también la forma de reportar los valores calculados. Es decir que estos sugieren en qué posición establecer el 0° articular y el sentido de rotación positivo y negativo. Esta convención tiene como principal finalidad tener un estándar y permitir la comparación de resultados entre estudios realizados por distintos investigadores. Por regla general se consideran los 0° articulares a la posición que tienen las articulaciones cuando el sujeto a estudiar se encuentra en posición anatómica[1], [4], [7], [8]. Además, existen convenciones que identifican como positivos los valores de flexión, aducción y rotación interna.

Los protocolos establecen los sentidos de giro de la articulación mediante la definición de versores. Generalmente se definen tres versores cuya orientación están relacionadas a los vectores orientación (sistemas coordenados locales) de los segmentos que articulan entre sí. Respecto a estos versores articulares no solo se reportan los ángulos, sino que también se reportan las velocidades angulares de las articulaciones, las fuerzas articulares y los momentos articulares.

## 2.3 CINEMÁTICA LINEAL DE LOS SEGMENTOS

Conocidas las posiciones de los centros articulares y de los centros de masa de los segmentos en cada instante de tiempo, se puede obtener con sencillez las variables cinemáticas lineales como la velocidad y aceleración de los segmentos y/o articulaciones.

### 2.3.1 VELOCIDAD LINEAL

Para calcular la velocidad a partir de los datos de posición, solo se requiere de una herramienta matemática, la derivada discreta por el método de Euler. Por ejemplo, para determinar la velocidad en la dirección  $x$ , se calcula  $\Delta x / \Delta t$ , donde  $\Delta x = x_{i+1} - x_i$ , y  $\Delta t$  es el tiempo entre las muestras adyacentes  $x_{i+1}$  y  $x_i$ . La velocidad calculada de esta manera no representa la velocidad en alguna de los dos tiempos de muestra ( $i$  o  $i + 1$ ). Más bien, representa la velocidad de un punto en el tiempo a mitad de camino entre las dos muestras. Esto puede provocar errores más adelante cuando se trata de relacionar la información derivada de la velocidad con los datos de posición, porque ambos resultados no ocurren en el mismo instante. Una forma de evitar este problema es calcular la velocidad y las aceleraciones sobre la base de  $2\Delta t$  en lugar de  $\Delta t$ . Por lo tanto, la velocidad en la  $i$ -ésima muestra es:

$$v_{x_i} = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2\Delta t} [m/s]$$

La velocidad entonces se encuentra en un punto intermedio entre las dos muestras, como se muestra en la Figura 2.6. Se asume que la línea que une  $x_{i-1}$  a  $x_{i+1}$  tiene la misma pendiente que la línea tangente a la curva en  $x_i$  [4].

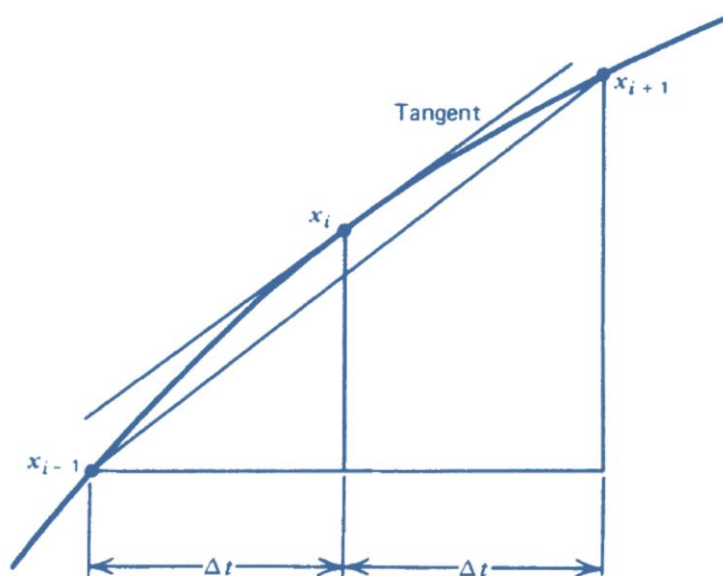


FIGURA 2.6—MÉTODO DE EULER PARA CALCULAR LA PENDIENTE DE UNA CURVA EN EL  $i$ -ÉSIMO PUNTO DE MUESTRA [4].

### 2.3.2 ACELERACIÓN LINEAL

Este método se puede utilizar para cualquier derivada que se desee calcular con señales digitales. La aceleración lineal se puede calcular de la misma manera partiendo de los datos obtenidos de velocidad para todas las muestras:

$$a_{x_i} = \frac{v_{x_{i+1}} - v_{x_{i-1}}}{2\Delta t} [m/s^2]$$

Nótese que se ejemplificó para facilitar la comprensión como calcular la velocidad y la aceleración en la dirección  $x$ . En tres dimensiones esto se debe realizar para cada componente  $[x, y, z]$  y así obtener las componentes del vector velocidad o aceleración. Este procedimiento se puede realizar directamente sobre los vectores de tres componentes como se ejemplifica a continuación con dos vectores velocidad.

#### Ejemplo de derivada discreta con dos vectores

Disponiendo de los vectores velocidad en los instantes de tiempo  $i - 1$  e  $i + 1$

$$\vec{v}_{i+1} = v_{x_{i+1}}\vec{i} + v_{y_{i+1}}\vec{j} + v_{z_{i+1}}\vec{k}$$

$$\vec{v}_{i-1} = v_{x_{i-1}}\vec{i} + v_{y_{i-1}}\vec{j} + v_{z_{i-1}}\vec{k}$$

Se puede aplicar la técnica de Euler para obtener el vector aceleración  $\vec{a}_i = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})[m/s^2]$ :

$$\vec{a}_i = \frac{\vec{v}_{i+1} - \vec{v}_{i-1}}{2\Delta t} [m/s^2]$$

$$\vec{a}_i = \frac{(v_{x_{i+1}}\vec{i} + v_{y_{i+1}}\vec{j} + v_{z_{i+1}}\vec{k}) - (v_{x_{i-1}}\vec{i} + v_{y_{i-1}}\vec{j} + v_{z_{i-1}}\vec{k})}{2\Delta t} [m/s^2]$$

$$\vec{a}_i = \frac{(v_{x_{i+1}} - v_{x_{i-1}})\vec{i} + (v_{y_{i+1}} - v_{y_{i-1}})\vec{j} + (v_{z_{i+1}} - v_{z_{i-1}})\vec{k}}{2\Delta t} [m/s^2]$$

Donde

$$a_{x_i} = \frac{(v_{x_{i+1}} - v_{x_{i-1}})}{2\Delta t} [m/s^2]$$

$$a_{y_i} = \frac{(v_{y_{i+1}} - v_{y_{i-1}})}{2\Delta t} [m/s^2]$$

$$a_{z_i} = \frac{(v_{z_{i+1}} - v_{z_{i-1}})}{2\Delta t} [m/s^2]$$

Se puede observar que realizando la derivada discreta por Euler entre dos vectores se obtiene el mismo resultado que si se realizan las derivadas por cada componente. Esta herramienta sirve para calcular la derivada de cualquier señal discreta y en el desarrollo de este trabajo se utiliza con frecuencia.

## 2.4 HERRAMIENTAS MATEMÁTICAS NECESARIAS PARA EL ANÁLISIS TRIDIMENSIONAL

Para la resolución del modelo en tres dimensiones existen consideraciones cuya complejidad matemática merece ser desarrollada para facilitar la comprensión de los cálculos posteriores.

Debido a que la información de las matrices de inercia que se reportan en los estudios estadísticos está en función de los ejes anatómicos de los segmentos, que corresponden a ejes definidos en forma ortogonal a partir direcciones internas al segmento (Dumas 2008) más que ejes definidos por posiciones de marcadores como los ejes del sistema coordenado local obtenido en 2.1.3. En este sentido los cálculos que involucran las matrices de inercia se realizan en términos de estos sistemas coordenados ejes de ejes anatómicos de los segmentos locales de cada segmento. Esto implica que los resultados obtenidos, como el vector de momento muscular articular, están expresados en función del sistema coordenado local del segmento.

Si se quiere utilizar un vector calculado en un segmento como variable de entrada para el segmento adyacente se debe conocer la representación de este en función del sistema coordenado del nuevo segmento. En la Figura 2.7 se ejemplifica un mismo vector  $M$  representado a través de dos sistemas coordenados que se encuentran rotados uno respecto al otro. En nuestro problema se encuentra, repetidas veces, la necesidad de representar un vector que se define en un sistema coordenado en función de otro sistema coordenado. Por ejemplo, cuando habiendo obtenido los momentos netos musculares en la articulación del tobillo, se utilizan los mismos valores de momento muscular (pero ahora expresados en función del sistema coordenado local de la pierna) para calcular el momento neto en la rodilla. Se presenta el desarrollo el método para realizar esta transformación.

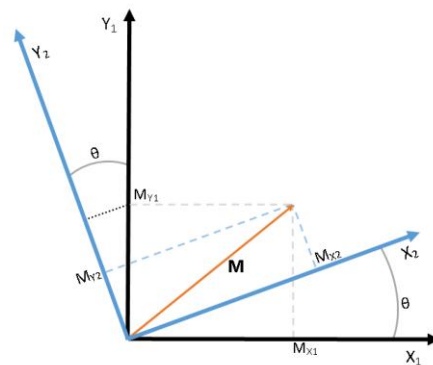


FIGURA 2.7 – VECTOR  $M$  REPRESENTADO EN FUNCIÓN DE DOS SISTEMAS COORDENADOS ROTADOS ENTRE SÍ  $\theta$  GRADOS.

### 2.4.1 MATRICES DE ROTACIÓN

Lo primero que se debe comprender al querer representar un vector en función de otro sistema coordenado, es el método en el que se realizan las rotaciones de un vector mediante matrices de rotación.

La matriz de rotación tiene dos interpretaciones posibles: la primera, que utilizará en este trabajo, considera a la matriz de rotación  $M1a2$  como una matriz de cambio de base que transforma las componentes de un vector referidas al sistema 1 en componentes referidas al sistema 2. La segunda interpretación tiene un sentido más físico y considera a la matriz  $M1a2$  como una transformación de

vectores, capaz de llevar un vector desde una posición inicial hasta una posición final mediante una rotación [32].

Las siguientes matrices de rotación realizan rotaciones de vectores alrededor de los ejes  $x$ ,  $y$ , o  $z$ , en el espacio de tres dimensiones:

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cada una de estas tres rotaciones básicas rota al vector en sentido horario alrededor del eje o rota a los ejes en sentido anti-horario respecto al vector, también alrededor del eje (siempre considerando sistemas dextrógiros)[33].

Las matrices de rotación  $M1a2$  y  $M2a1$  poseen tres propiedades:

1. Son ortogonales, es decir, su inversa coincide con su transpuesta.
2. La inversa de  $M1a2$  es  $M2a1$ . Por tanto, al transponer o invertir una matriz de rotación sus índices 1 y 2 se permutan.
3. Las columnas de la matriz  $M1a2$  son los vectores unitarios del sistema de referencia 2 expresados en el sistema de referencia 1.

### Ejemplo de rotación sobre el eje Z

Si se tiene el vector  $\vec{M}_1$ , representado en la Figura 2.7, con componentes  $M_{x1}$ ,  $M_{y1}$  y  $M_{z1}$  del sistema 1 y deseamos representarlo en función del sistema 2 con componentes  $M_{x2}$ ,  $M_{y2}$  y  $M_{z2}$  se debe realizar una rotación, de  $\theta$  grados, del mismo respecto al eje perpendicular al plano de la hoja, que llamaremos eje Z.

Para esto se utiliza la matriz de rotación sobre el eje Z que se expuso anteriormente premultiplicando al vector  $M_1$ . Entonces

$$\vec{M}_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \vec{M}_1$$

$$\begin{bmatrix} M_{x2} \\ M_{y2} \\ M_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} M_{x1} \\ M_{y1} \\ M_{z1} \end{bmatrix}$$

Si se desarrolla este producto se obtienen las siguientes expresiones:

$$M_{x2} = \cos \theta \cdot M_{x1} + \sin \theta \cdot M_{y1}$$

$$M_{y2} = -\sin \theta \cdot M_{x1} + \cos \theta \cdot M_{y1}$$

$$M_{z2} = 1 \cdot M_{z1}$$

El primer análisis que se puede realizar de este desarrollo es que la componente del vector coincidente con el eje a rotar,  $Z$  en este caso, permanece invariante. Ahora se procede a explicar de forma gráfica cómo varían las otras dos componentes a partir de las expresiones encontradas. En la Figura 2.8 se resalta en color amarillo el segmento que representa a  $M_{x1} \cdot \cos \theta$  y el segmento que representa a  $M_{y1} \cdot \sin \theta$ . Se puede observar entonces que la suma de ambos ( $\cos \theta \cdot M_{x1} + \sin \theta \cdot M_{y1}$ ) es coincidente con el valor que tiene la componente  $M_{x2}$  en la misma figura.

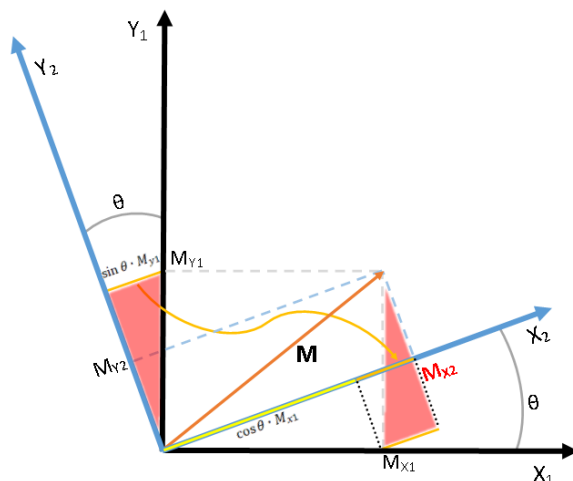


FIGURA 2.8 – REPRESENTACIÓN DE  $M_{x2}$  OBTENIDA A PARTIR DE UNA ROTACIÓN  $\theta$  DEL SISTEMA COORDENADO 1 RESPECTO AL EJE  $Z$ .

En la Figura 2.9 se realiza un análisis similar, en color marrón se observa el segmento que representa  $M_{x1} \cdot \sin \theta$  y de color amarillo el segmento que representa a  $M_{y1} \cdot \cos \theta$ . Acá se hace evidente que la resta de ambos ( $-\sin \theta \cdot M_{x1} + \cos \theta \cdot M_{y1}$ ) es igual a  $M_{y2}$ .

Entonces se puede decir que una vez aplicada la rotación del vector  $M_1 = M_{x1} \cdot \vec{i}_1 + M_{y1} \cdot \vec{j}_1 + M_{k1} \cdot \vec{k}_1$ , que está definido en el sistema 1, mediante la premultiplicación con la matriz de rotación  $R_z(\theta)$ , se obtiene el vector  $M_2 = M_{x2} \cdot \vec{i}_2 + M_{y2} \cdot \vec{j}_2 + M_{k2} \cdot \vec{k}_2$ . Siendo este último el mismo vector, pero expresado en función de otro sistema coordenado, el 2.

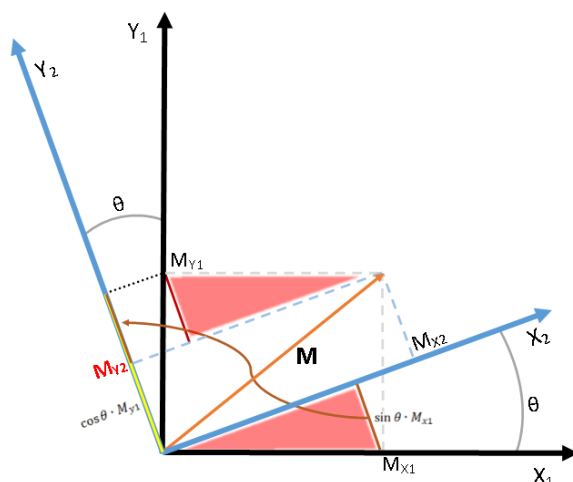


FIGURA 2.9 – REPRESENTACIÓN DE  $M_{y2}$  OBTENIDA A PARTIR DE UNA ROTACIÓN  $\theta$  DEL SISTEMA COORDENADO 1 RESPECTO AL EJE  $Z$ .

### 2.4.2 ÁNGULOS DE EULER

Como se expresó anteriormente, se considera a la matriz de rotación  $M1a2$  como una matriz de cambio de base que transforma las componentes de un vector referidas al sistema 1 en componentes referidas al sistema 2. En los ejemplos anteriores, vimos al sistema 2, como un sistema rotado un ángulo  $\theta$  alrededor del eje  $z$ . Es decir que el plano  $x_2y_2$  está rotado un ángulo  $\theta$  respecto al  $x_1y_1$ . Sin embargo también es posible que el sistema 2, tenga diferentes rotaciones  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  respecto a los ejes del sistema 1.

En este contexto, los ángulos de Euler constituyen este conjunto de tres coordenadas angulares que sirven para especificar la orientación de un sistema de referencia de ejes ortogonales, normalmente móvil, respecto a otro sistema de referencia de ejes ortogonales normalmente fijos [34].

Dados dos sistemas de coordenadas  $xyz$  y  $XYZ$  con origen común, es posible especificar la posición de un sistema en términos del otro usando tres ángulos  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ . La definición matemática es estática y se basa en escoger dos planos, uno en el sistema de referencia y otro en el triedro rotado. En la Figura 2.10 se observan los planos seleccionados en este caso:  $xy$  y  $XY$ .

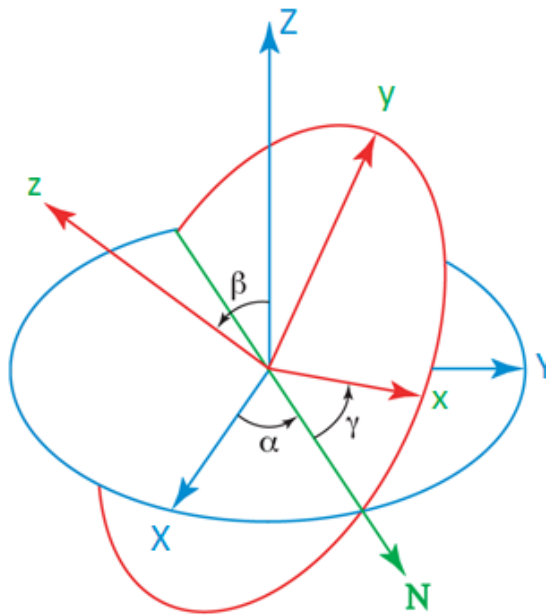


FIGURA 2.10 – REPRESENTACIÓN DE LOS ÁNGULOS DE EULER DONDE SE OBSERVAN QUE ÁNGULOS SE DEBEN UTILIZAR EN LAS MATRICES DE ROTACIÓN PARA REPRESENTAR CUALQUIER VECTOR DE UN SISTEMA EN FUNCIÓN DEL OTRO [34].

La intersección de los planos coordenados  $xy$  y  $XY$  escogidos se llama línea de nodos, y se usa para definir los tres ángulos:

- $\alpha$  es el ángulo entre el eje  $X$  y la línea de nodos .
- $\beta$  es el ángulo entre el eje  $z$  y el eje  $Z$ .
- $\gamma$  es el ángulo entre la línea de nodos  $N$  y el eje  $x$ .

Para poder realizar rotaciones o transformaciones entre dos sistemas es necesario conocer los ángulos  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  de Euler que sirven para especificar la orientación de un sistema de referencia de ejes ortogonales respecto a otro. En biomecánica normalmente se desea representar vectores, que se encuentran expresados en términos del sistema coordenado global, en función del sistema coordenado

local de algún segmento. También suele ser necesario realizar el proceso inverso, es decir pasar del sistema coordenado local a global. Si se conoce como está definido el sistema coordenado local de un segmento (apartado 2.1.3), se puede conocer con relativa sencillez los ángulos de Euler y así realizar los cambios de representación de cualquier vector definido en alguno de los dos sistemas coordenados al otro.

En la Figura 2.10 se observan los dos sistemas con sus ejes definidos y los ángulos que se deben encontrar. Primero es necesario definir un vector  $\overrightarrow{LN}$  que sea coincidente a la línea de nodos. Esto se obtiene fácilmente realizando el siguiente producto:

$$\overrightarrow{LN} = \frac{\vec{K} \times \vec{k}}{|\vec{K} \times \vec{k}|}$$

Donde  $\vec{k}$  es el versor coincidente al eje z y  $\vec{K}$  es el versor correspondiente al eje Z, ambos expresados en términos del sistema XYZ. Es decir,  $\vec{K} = 0\vec{I} + 0\vec{J} + 1\vec{K}$  mientras que

$$\vec{k} = a\vec{I} + b\vec{J} + c\vec{K}$$

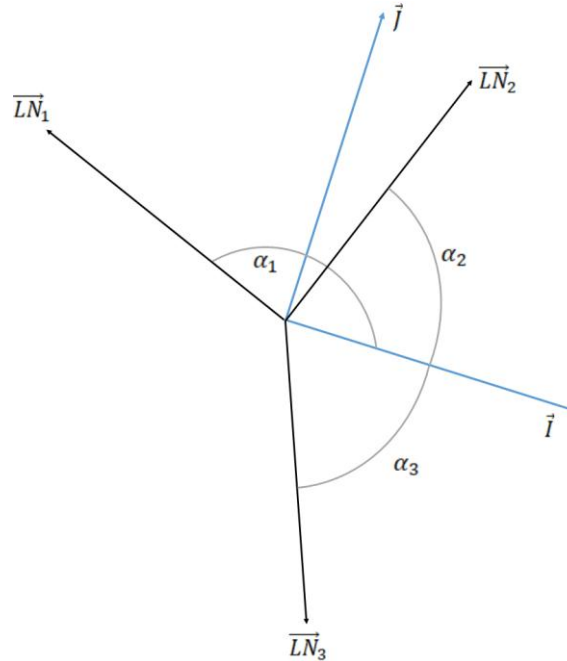


FIGURA 2.11 – TRES ORIENTACIONES POSIBLES DE LA LÍNEA DE NODOS RESPECTO AL VERSOR  $\vec{I}$  EN EL PLANO  $XY$  DONDE SE OBSERVAN LOS ÁNGULOS.

Conocido esto se puede encontrar el ángulo  $\alpha$  de la siguiente manera.

$$\alpha = \frac{\vec{J} \cdot \overrightarrow{LN}}{|\vec{J} \cdot \overrightarrow{LN}|} \cdot \cos^{-1}(\vec{I} \cdot \overrightarrow{LN})$$

Donde  $\vec{I}$  es el versor coincidente al eje X y  $\vec{J}$  el versor asociado al eje Y. El producto interno entre los versores  $\vec{I}$  y  $\overrightarrow{LN}$  es equivalente a:

$$\vec{I} \cdot \overrightarrow{LN} = |\vec{I}| |\overrightarrow{LN}| \cdot \cos(\vec{I} \wedge \overrightarrow{LN})$$

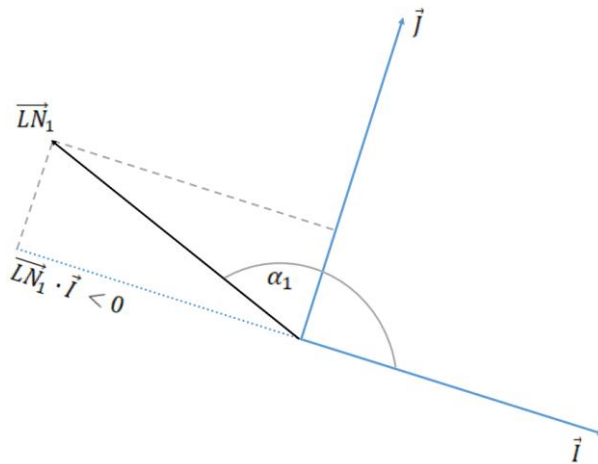
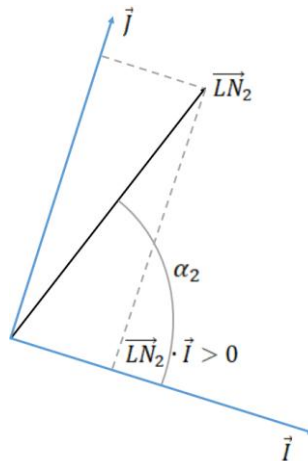


Donde  $\vec{I} \wedge \vec{LN}$  es el ángulo comprendido entre los dos vectores. Como los dos vectores poseen modulo unitario, el producto interno resulta ser simplemente  $\cos(\vec{I} \wedge \vec{LN})$ . Aplicado en el cálculo de  $\alpha$  el  $\cos^{-1}(\vec{I} \cdot \vec{LN})$  se obtiene entonces el ángulo  $\vec{I} \wedge \vec{LN}$  que en la Figura 2.10 se define como  $\alpha$ .

Los resultados posibles del producto interno  $\vec{I} \cdot \vec{LN}$  están comprendidos en el intervalo  $[-1; 1]$  y la función  $\cos^{-1}(x)$  es una función que varía entre  $180^\circ$  a  $0^\circ$  si se recorre desde  $-1$  a  $1$  tomando el valor  $90^\circ$  para  $x = 0$ . Debido a que el ángulo  $\alpha$  puede variar  $360^\circ$  se debe encontrar una forma de cuantificar esta variación. En la Figura 2.11 se muestra el plano donde se ubican los vectores  $\vec{I}$  y  $\vec{LN}$  y se muestran tres configuraciones posibles de  $\vec{LN}$  respecto a  $\vec{I}$  y  $\vec{J}$  para comprender el valor que se obtiene del  $\cos^{-1}$ .

Si se analiza  $\alpha_1$  (Figura 2.12) se puede observar que el producto  $\vec{LN}_1 \cdot \vec{I}$  es menor a cero debido a que la proyección de  $\vec{LN}_1$  sobre  $\vec{I}$  se encuentra en el sentido opuesto al versor  $\vec{I}$ . Por ende el ángulo encontrado al aplicar  $\cos^{-1}$  es mayor a  $90^\circ$ .

Observando la Figura 2.13 se ve que el producto  $\vec{LN}_2 \cdot \vec{I}$  es mayor a cero debido a que la proyección de  $\vec{LN}_2$  sobre  $\vec{I}$  se encuentra en el mismo sentido del versor  $\vec{I}$ . Por ende el ángulo encontrado es menor a  $90^\circ$ .


 FIGURA 2.12 – ÁNGULO  $\alpha_1$  EN EL PLANO XY.

 FIGURA 2.13 - ÁNGULO  $\alpha_2$  EN EL PLANO XY.

Finalmente si se realiza un análisis sobre el ángulo  $\alpha_3$  (Figura 2.14) se observa que  $\overrightarrow{LN_2} \cdot \vec{I} = \overrightarrow{LN_3} \cdot \vec{I}$ , por lo que el valor encontrado al realizar  $\cos^{-1}(\overrightarrow{LN_3} \cdot \vec{I})$  sería igual a  $\alpha_2$ . Para poder distinguir estos dos ángulos se emplea en el cálculo de  $\alpha$ , el término:

$$\frac{\vec{J} \cdot \overrightarrow{LN}}{|\vec{J} \cdot \overrightarrow{LN}|}$$

Este término toma valores de 1 o  $-1$  dependiendo de la orientación del versor  $\overrightarrow{LN}$  respecto al versor  $\vec{J}$ . De este modo  $\alpha_2 = -\alpha_3$  y de esta forma  $\alpha$  puede tomar valores desde  $180^\circ$  a  $-180^\circ$ , es decir, que tiene un rango de  $360^\circ$ .

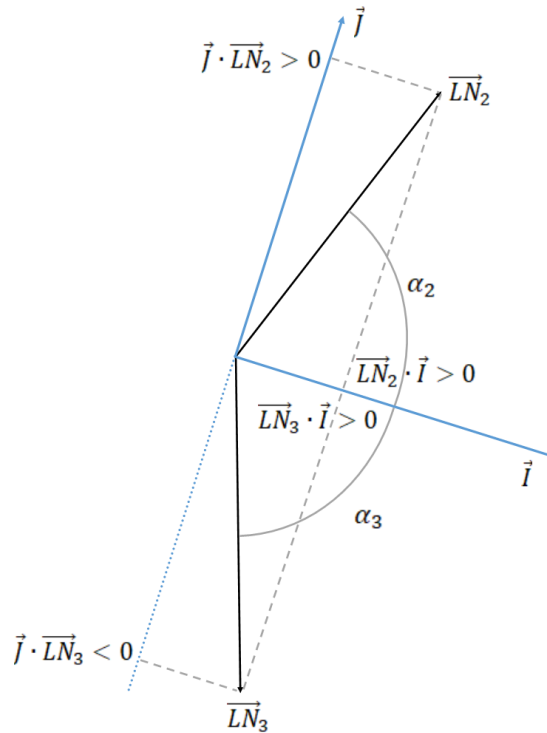


FIGURA 2.14 – ÁNGULO  $\alpha_2$  Y  $\alpha_3$  EN EL PLANO XY.

$\beta$  queda definido como

$$\beta = \cos^{-1}(\vec{K} \cdot \vec{k})$$

Finalmente  $\gamma$  se puede calcular como:

$$\gamma = -\frac{\vec{J} \cdot \overrightarrow{LN}}{|\vec{J} \cdot \overrightarrow{LN}|} \cdot \cos^{-1}(\vec{I} \cdot \overrightarrow{LN})$$

Donde  $\vec{i}$  y  $\vec{j}$  son los versores coincidente a los ejes  $x$  y  $y$  respetivamente.

Con un análisis similar al realizado con  $\alpha$  se puede interpretar con sencillez el método empleado para calcular  $\beta$  y  $\gamma$ .

#### 2.4.3 REPRESENTACIÓN DE VECTORES EN DISTINTOS SISTEMAS COORDENADOS

Si es necesario representar cualquier vector  $\vec{V}$  del sistema  $XYZ$  en términos del sistema  $xyz$  (que ha se encuentra rotado en sus tres direcciones respecto al sistema  $XYZ$ ) y conociendo los ángulos

de Euler  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  es posible realizar tres rotaciones sucesivas utilizando estos mismos. Estas rotaciones se realizan generalmente como se ilustra en la Figura 2.10. Primero se rota sobre el eje Z un ángulo  $\alpha$  premultiplicando a  $\vec{V}$  con la matriz de rotación  $R_z(\alpha)$ .

$$\vec{v}'' = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \vec{V}$$

Realizada esta rotación se obtiene el vector representado en un primer sistema coordenado intermedio que se denomina  $x''y''z''$ . Este sistema tiene al eje  $z''$  coincidente al eje Z del primer sistema y al eje  $x''$  coincidente con la línea de nodos (Figura 2.15). Esta rotación es similar al que presentamos en la Sección 2.4.1.

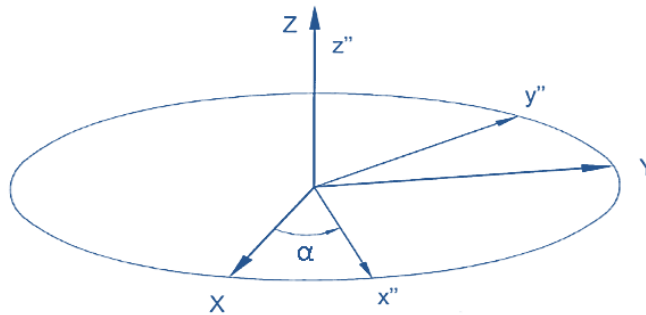


FIGURA 2.15 – REPRESENTACIÓN DEL SISTEMA COORDENADO  $x''y''z''$  RESPECTO AL SISTEMA  $XYZ$  AL REALIZAR UNA ROTACIÓN DE  $\alpha$  GRADOS RESPECTO AL EJE  $z''$ , ADAPTADO DE [1].

Posteriormente se rota el vector  $\vec{v}''$  en  $\beta$  grados respecto al eje  $x''$  que es equivalente a la línea de nodos (ver Figura 2.15 y Figura 2.16). Para esto se realiza el producto entre la matriz de rotación  $R_x(\beta)$  y el vector  $\vec{v}''$ :

$$\vec{v}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \cdot \vec{v}''$$

Con esto se obtiene un vector  $\vec{v}'$  equivalente a  $\vec{v}''$  pero representado en función del segundo sistema coordenado intermedio  $x'y'z'$ . Este segundo sistema conserva el eje  $x' = x''$ , es decir, coincidente a la línea de nodos y el eje  $z'$  es coincidente al eje z (Figura 2.16).

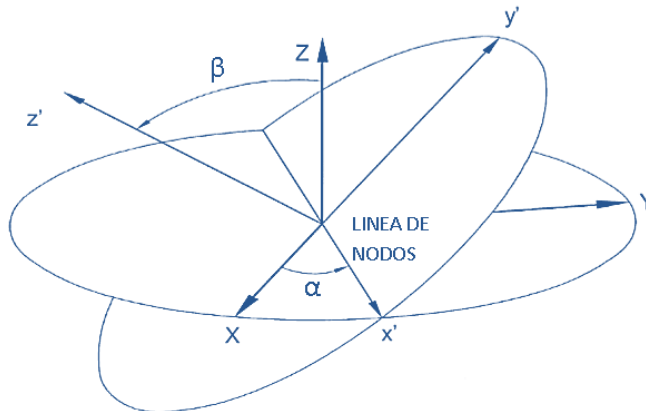


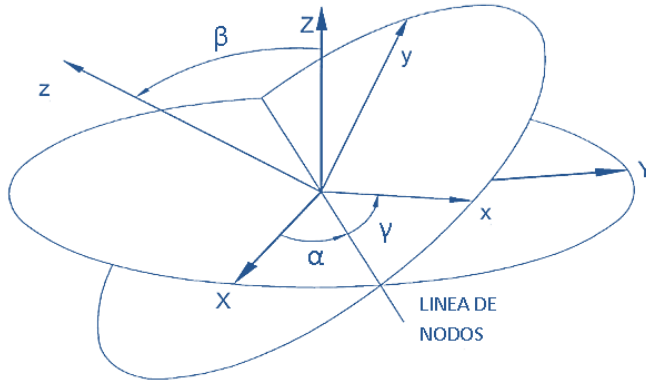
FIGURA 2.16 -REPRESENTACIÓN DEL SISTEMA COORDENADO  $x'y'z'$  RESPECTO AL SISTEMA  $XYZ$  AL REALIZAR UNA ROTACIÓN DE  $\beta$  GRADOS RESPECTO AL EJE  $x'$ , ADAPTADO DE [1].

Finalmente, rotando al vector  $\vec{v}'$  respecto al eje  $z'$  en  $\gamma$  grados de la siguiente manera:

$$\vec{v} = R_z(\gamma) \cdot \vec{v}'$$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \vec{v}'$$

se obtiene el vector  $\vec{v}$  que se expresa en términos del sistema coordenado  $xyz$  (Figura 2.17).



**FIGURA 2.17 - REPRESENTACIÓN DEL SISTEMA COORDENADO  $xyz$  RESPECTO AL SISTEMA  $XYZ$  AL REALIZAR UNA ROTACIÓN DE  $\gamma$  GRADOS RESPECTO AL EJE  $Z$ , ADAPTADO DE [1].**

Estas tres rotaciones sucesivas se pueden realizar simplemente mediante la multiplicación de las tres matrices de rotación, sin descuidar el orden en el que se realizan las multiplicaciones.

$$\vec{v} = R_z(\gamma) \cdot R_x(\beta) \cdot R_z(\alpha) \cdot \vec{V}$$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \vec{V}$$

Y debido a la propiedad de ortonormalidad de las matrices de rotación, la transpuesta de la matriz resultante al realizar el producto nos permite realizar la transformación inversa.

$$\vec{V} = \left[ \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right]' \cdot \vec{v}$$

Que es equivalente a transponer todas las matrices de rotación e invertir el orden de multiplicación:

$$\vec{V} = R_z'(\alpha) \cdot R_x'(\beta) \cdot R_z'(\gamma) \cdot \vec{v}$$

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}' \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}' \cdot \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}' \cdot \vec{v}$$

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \vec{v}$$

## 2.4.4 TRANSFORMACIÓN DIRECTA ENTRE EL SISTEMA COORDENADO GLOBAL Y LOCAL

En el caso de que no se requieran de sistemas intermedios para la resolución del problema existe un método sencillo para estimar, a partir de los versores  $\vec{i}, \vec{j}$  y  $\vec{k}$ , las matrices de rotación para representar un vector en términos del sistema global o local.

Definido el sistema coordenado global como

$$\vec{I} = [1 \ 0 \ 0]$$

$$\vec{J} = [0 \ 1 \ 0]$$

$$\vec{K} = [0 \ 0 \ 1]$$

Y el sistema coordenado local expresado en términos del sistema coordenado global como:

$$\vec{i} = a_1 \vec{I} + b_1 \vec{J} + c_1 \vec{K}$$

$$\vec{j} = a_2 \vec{I} + b_2 \vec{J} + c_2 \vec{K}$$

$$\vec{k} = a_3 \vec{I} + b_3 \vec{J} + c_3 \vec{K}$$

Donde cada versor posee módulo 1, es decir:

$$1 = \sqrt{a_i^2 + b_i^2 + c_i^2}$$

Si al vector  $\vec{v}_L$ , con componentes  $v_x$ ,  $v_y$  y  $v_z$ , representado en el sistema local, se le realiza el producto diádico con el sistema coordenado local expresado en términos del sistema coordenado global se obtiene:

$$\vec{V}_G = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}$$

$$\vec{V}_G = v_x(a_1 \vec{I} + b_1 \vec{J} + c_1 \vec{K}) + v_y(a_2 \vec{I} + b_2 \vec{J} + c_2 \vec{K}) + v_z(a_3 \vec{I} + b_3 \vec{J} + c_3 \vec{K})$$

$$\vec{V}_G = (v_x a_1 \vec{I} + v_x b_1 \vec{J} + v_x c_1 \vec{K}) + (v_y a_2 \vec{I} + v_y b_2 \vec{J} + v_y c_2 \vec{K}) + (v_z a_3 \vec{I} + v_z b_3 \vec{J} + v_z c_3 \vec{K})$$

$$\vec{V}_G = (v_x a_1 + v_y a_2 + v_z a_3) \vec{I} + (v_x b_1 + v_y b_2 + v_z b_3) \vec{J} + (v_x c_1 + v_y c_2 + v_z c_3) \vec{K}$$

$$\vec{V}_G = V_X \vec{I} + V_Y \vec{J} + V_Z \vec{K}$$

En términos matriciales, el desarrollo anterior es equivalente a:

$$\begin{bmatrix} V_X \\ V_Y \\ V_Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$$

Donde

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

Termina siendo la matriz de rotación del sistema coordenado local a global, es decir:

$$\begin{bmatrix} \vec{I} \\ \vec{J} \\ \vec{K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{bmatrix}$$

Si se desea pasar del sistema *global* a *local* partiendo del vector  $\vec{V}_G$ ; con componentes  $V_X$ ,  $V_Y$  y  $V_Z$ ; puedo obtener las magnitudes  $v_x$ ,  $v_y$  y  $v_z$  realizando el producto interno entre el momento  $\vec{V}_G$  y los versores  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  y  $\vec{k}$  expresados en términos del sistema coordenado global.

$$v_x = \vec{V}_G \cdot \vec{i}$$

$$v_x = (V_X\vec{i} + V_Y\vec{j} + V_Z\vec{k}) \cdot (a_1\vec{i} + b_1\vec{j} + c_1\vec{k})$$

$$v_x = V_X \cdot a_1 + V_Y \cdot b_1 + V_Z \cdot c_1$$

$$v_y = \vec{V}_G \cdot \vec{j}$$

$$v_y = (V_X\vec{i} + V_Y\vec{j} + V_Z\vec{k}) \cdot (a_2\vec{i} + b_2\vec{j} + c_2\vec{k})$$

$$v_y = V_X \cdot a_2 + V_Y \cdot b_2 + V_Z \cdot c_2$$

$$v_z = \vec{V}_G \cdot \vec{k}$$

$$v_z = (V_X\vec{i} + V_Y\vec{j} + V_Z\vec{k}) \cdot (a_3\vec{i} + b_3\vec{j} + c_3\vec{k})$$

$$v_z = V_X \cdot a_3 + V_Y \cdot b_3 + V_Z \cdot c_3$$

Entonces se puede expresar

$$\vec{v}_L = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

Como

$$\vec{v}_L = (V_X \cdot a_1 + V_Y \cdot b_1 + V_Z \cdot c_1)\vec{i} + (V_X \cdot a_2 + V_Y \cdot b_2 + V_Z \cdot c_2)\vec{j} + (V_X \cdot a_3 + V_Y \cdot b_3 + V_Z \cdot c_3)\vec{k}$$

En términos matriciales, el desarrollo anterior es equivalente a:

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_X \\ V_Y \\ V_Z \end{bmatrix}$$

Donde

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$$

Termina siendo la matriz de rotación del sistema coordenado global a local, que de hecho resulta ser la matriz inversa a la de rotación del sistema coordenado local a global, es decir:

$$\begin{bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{I} \\ \vec{J} \\ \vec{K} \end{bmatrix}$$

Esto significa que el sistema coordenado global expresado en términos del sistema coordenado local es:

$$\vec{I} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

$$\vec{j} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$$

$$\vec{K} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$$

Demostrado esto, si al vector momento  $\vec{V}_G$ , con componentes  $V_X$ ,  $V_Y$  y  $V_Z$  y representado en el sistema global, se le realiza el producto diádico con el sistema coordenado global expresado en términos del sistema coordenado local también se puede obtener la expresión del vector en el sistema coordenado local  $\vec{v}_L$ :

$$\vec{v}_L = V_X\vec{i} + V_Y\vec{j} + V_Z\vec{k}$$

$$\vec{v}_L = V_X(a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) + V_Y(b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) + V_Z(c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k})$$

$$\vec{v}_L = (V_Xa_1\vec{i} + V_Xa_2\vec{j} + V_Xa_3\vec{k}) + (V_Yb_1\vec{i} + V_Yb_2\vec{j} + V_Yb_3\vec{k}) + (V_Zc_1\vec{i} + V_Zc_2\vec{j} + V_Zc_3\vec{k})$$

$$\vec{v}_L = (V_Xa_1 + V_Yb_1 + V_Zc_1)\vec{i} + (V_Xa_2 + V_Yb_2 + V_Zc_2)\vec{j} + (V_Xa_3 + V_Yb_3 + V_Zc_3)\vec{k}$$

$$\vec{v}_L = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

Nótese que este último desarrollo arroja el mismo resultado que el procedimiento anterior, en el que se realizó producto interno entre el momento  $\vec{V}_G$  y los versores  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  y  $\vec{k}$  expresados en términos del sistema coordenado global.

## 2.5 CINEMÁTICA ANGULAR DE LOS SEGMENTOS

Conocido como se realizan los cambios de base de los vectores para poder representarlos en distintos sistemas, es posible calcular la cinemática angular de los segmentos. Esto se refiere principalmente a la velocidad angular  $\vec{\omega}$  y a la aceleración angular  $\vec{\alpha}$ .

Disponiendo de los versores  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  y  $\vec{k}$  que determinan la orientación del segmento en cada instante de tiempo se puede conocer como los segmentos rotan. Debido a que la posición de los marcadores en cada instante de tiempo son conocidas y a partir de los mismos obtenemos la orientación de los segmentos, también para cada instante de tiempo, es posible calcular cuánto rotan los segmentos muestra a muestra. Esto se realiza calculando los ángulos de Euler para cada instante de tiempo. Recordando que los ángulos Euler constituyen un conjunto de tres coordenadas angulares que sirven para especificar la orientación de un sistema de referencia de ejes ortogonales, normalmente móvil, respecto a otro sistema de referencia de ejes ortogonales normalmente fijos.

Conocidos los ángulos de Euler  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  para cada instante de tiempo de un segmento (ver apartado 2.4.2) se puede calcular la derivada de cada uno de estos ángulos mediante la derivada discreta (método desarrollado en el apartado 2.3.1) y obtener la magnitud de las velocidades angulares:

$$\omega_\alpha = \frac{\alpha_{i+1} - \alpha_{i-1}}{2\Delta t}$$

$$\omega_\beta = \frac{\beta_{i+1} - \beta_{i-1}}{2\Delta t}$$

$$\omega_\gamma = \frac{\gamma_{i+1} - \gamma_{i-1}}{2\Delta t}$$

Si se observa la dirección de giro  $\alpha$  en la Figura 2.15 comprenderemos que  $\omega_\alpha$  es una velocidad angular respecto al eje  $z''$ , es decir que se puede expresar vectorialmente como:

$$\vec{\omega}_\alpha'' = 0\vec{i}'' + 0\vec{j}'' + \omega_\alpha\vec{k}''$$

O

$$\vec{\omega}_\alpha'' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_\alpha \end{bmatrix}$$

En la Figura 2.16 se evidencia  $\omega_\beta$  es una rotación respecto al  $x'$ , es decir que esta escrito en términos de un sistema coordenado intermedio. Al igual que lo sucedido con  $\omega_\alpha$  se puede intuir que esta magnitud deberá ser expresada posteriormente en términos de algún sistema de mayor utilidad debido a que los sistemas intermedios no reflejan las orientaciones reales del segmento. En el sistema intermedio  $x'y'z'$  esta velocidad angular queda expresada entonces como:

$$\vec{\omega}_\beta' = \omega_\beta\vec{i}' + 0\vec{j}' + 0\vec{k}'$$

O

$$\vec{\omega}_\beta' = \begin{bmatrix} \omega_\beta \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Finalmente,  $\omega_\gamma$  es la rapidez de giro respecto al eje  $z$  de la Figura 2.17. Éste eje ya corresponde al sistema coordenado local del segmento, por lo que este vector no deberá ser representado en términos de otro sistema. El vector  $\vec{\omega}_\gamma$  se define entonces como:

$$\vec{\omega}_\gamma = 0\vec{i} + 0\vec{j} + \omega_\gamma\vec{k}$$

O

$$\vec{\omega}_\gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_\gamma \end{bmatrix}$$

Obtenido estos vectores se deben expresar todos estos en términos del sistema coordenado de interés. Como se desea utilizar la velocidad angular para estimar la cantidad de movimiento angular, y las matrices de inercia se reportan en función de los sistemas coordenados de los segmentos, es recomendable expresar todas las variables involucradas en términos del sistema coordenado del segmento.

Entonces se procede a rotar los vectores  $\vec{\omega}_\alpha''$  y  $\vec{\omega}_\beta'$  con las matrices de rotación correspondientes:

$$\vec{\omega}_\alpha = R_z(\gamma) \cdot R_x(\beta) \cdot \vec{\omega}_\alpha''$$

$$\vec{\omega}_\alpha = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \cdot \vec{\omega}_\alpha''$$

y

$$\vec{\omega}_\beta = R_z(\gamma) \cdot \vec{\omega}_\beta'$$



$$\vec{\omega}_\beta = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \vec{\omega}_\beta'$$

Obtenidos entonces  $\vec{\omega}_\alpha$ ,  $\vec{\omega}_\beta$  y  $\vec{\omega}_\gamma$  disponemos de la información suficiente para conocer la velocidad angular del segmento  $\vec{\omega}_{Segmento}$  en coordenadas locales.

$$\vec{\omega}_{Segmento} = \vec{\omega}_\alpha + \vec{\omega}_\beta + \vec{\omega}_\gamma$$

$$\vec{\omega}_{Segmento} = (\omega_{\alpha_x} \vec{i} + \omega_{\alpha_y} \vec{j} + \omega_{\alpha_z} \vec{k}) + (\omega_{\beta_x} \vec{i} + \omega_{\beta_y} \vec{j} + \omega_{\beta_z} \vec{k}) + (\omega_{\gamma_x} \vec{i} + \omega_{\gamma_y} \vec{j} + \omega_{\gamma_z} \vec{k})$$

$$\vec{\omega}_{Segmento} = (\omega_{\alpha_x} + \omega_{\beta_x} + \omega_{\gamma_x}) \vec{i} + (\omega_{\alpha_y} + \omega_{\beta_y} + \omega_{\gamma_y}) \vec{j} + (\omega_{\alpha_z} + \omega_{\beta_z} + \omega_{\gamma_z}) \vec{k}$$

$$\vec{\omega}_{Segmento} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$$

La aceleración angular  $\vec{\alpha}_{Segmento}$  se puede estimar simplemente mediante la derivada discreta de la velocidad angular  $\vec{\omega}_{Segmento}$ .

$$\vec{\alpha}_{Segmento} = \frac{\vec{\omega}_{Segmento_{i+1}} - \vec{\omega}_{Segmento_{i-1}}}{2\Delta t}$$

## 2.6 CANTIDAD DE MOVIMIENTO ANGULAR

Conocida la velocidad angular de los segmentos se puede calcular cantidad de movimiento angular  $\vec{H}$ . Este se define como el producto entre la matriz de inercia de un segmento  $I$  y la velocidad angular del mismo  $\vec{\omega}_{segmento}$ . Como  $\vec{\omega}_{segmento}$  es la velocidad angular respecto a ejes anatómicos del segmento, se necesita el valor de la matriz de inercia respecto a los mismos ejes. Esta se define como matriz de inercia respecto al centro de masa  $I_0$  y con la orientación de los ejes anatómicos del segmento.

$$\vec{H}_{segmento} = I_0 \cdot \vec{\omega}_{segmento}$$

Como se explicó en el apartado 2.1.2.2 la matriz de inercia  $I_0$  se puede obtener a partir de las matrices de radios de giro normalizados reportados por distintos estudios antropométricos. En este trabajo se eligen los datos reportados por Dumas et al. [20]. Para un segmento se utiliza su matriz de radios de giro normalizado de la siguiente manera:

$$I_{0Segmento} = m_{Segmento} \cdot \begin{bmatrix} (\rho_{N_{xx}} \cdot L_{Segmento})^2 & (\rho_{N_{xy}} \cdot L_{Segmento})^2 & (\rho_{N_{xz}} \cdot L_{Segmento})^2 \\ (\rho_{N_{yx}} \cdot L_{Segmento})^2 & (\rho_{N_{yy}} \cdot L_{Segmento})^2 & (\rho_{N_{yz}} \cdot L_{Segmento})^2 \\ (\rho_{N_{zx}} \cdot L_{Segmento})^2 & (\rho_{N_{zy}} \cdot L_{Segmento})^2 & (\rho_{N_{zz}} \cdot L_{Segmento})^2 \end{bmatrix}$$

Y así se obtiene la matriz de inercia  $I_{0Segmento}$ . Es importante entender que esta matriz está expresada en términos del sistema coordenado del segmento, por lo que sus valores son independientes a la orientación del segmento. El producto  $I_{0Segmento} \cdot \vec{\omega}_{segmento}$ , con  $\vec{\omega}_{segmento}$  también expresado en función del sistema coordenado local, arroja una cantidad de movimiento angular  $\vec{H}_{Segmento}$  expresada en términos del mismo sistema.

Conocida la cantidad de movimiento angular de un segmento  $\vec{H}_{segmento}$  es posible obtener su derivada  $d\vec{H}_{segmento}/dt$ , mediante el método de Euler para derivar, y realizar el cálculo de momentos que se desarrolla en el apartado 2.7.3 mediante el planteo de la sumatoria de momentos:

$$\sum \vec{M}_i = \frac{d\vec{H}_{segmento}}{dt}$$

## 2.7 ANÁLISIS DINÁMICO DE UN SEGMENTO DE CUERPO RÍGIDO

Unas de las variables de mayor interés en el estudio del movimiento humano son las fuerzas y los momentos articulares netos. Se han desarrollado transductores que se pueden implantar quirúrgicamente para medir la fuerza ejercida por un músculo en el tendón. Sin embargo, tales técnicas tienen aplicaciones solo en experimentos con animales y, aun así, solo de forma limitada. Por lo tanto, se debe calcular estas fuerzas indirectamente utilizando datos cinemáticos y antropométricos fácilmente disponibles. El proceso por el cual se calculan las fuerzas de reacción y los momentos musculares se denomina modelado de segmentos articulados. Si se tiene una descripción completa de la cinemática, medidas antropométricas precisas y las fuerzas externas, se pueden calcular las fuerzas de reacción de la articulación y los momentos musculares. Esta predicción se denomina solución inversa y es una herramienta muy poderosa para obtener información sobre la suma neta de toda la actividad muscular en cada articulación [4].

### 2.7.1 FUERZAS ACTUANTES EN UN MODELO DE SEGMENTOS ARTICULADOS

Para poder resolver el problema inverso, primero se deben identificar las fuerzas que actúan sobre un segmento. De esta manera se pueden estimar las faltantes mediante la aplicación de la segunda ley de Newton. En la Figura 2.2 se esquematizan las fuerzas, momentos y aceleraciones que actúan en un segmento.

- Fuerzas gravitacionales: Las fuerzas de la gravedad actúan hacia abajo a través del centro de masa de cada segmento y son iguales a la magnitud de la masa multiplicada por la aceleración debida a la gravedad (normalmente  $9,8 [m/s^2]$ ).
- Reacción en el suelo o fuerzas externas: Cualquier fuerza externa debe medirse con un transductor de fuerza. Tales fuerzas se distribuyen en un área del cuerpo (como las fuerzas de reacción del suelo debajo del área de pisada del pie). Para representar tales fuerzas como vectores, se debe considerar que actúan en un punto que generalmente se llama centro de presión (CofP por sus siglas en inglés). Una plataforma de fuerza construida adecuadamente, por ejemplo, produce señales a partir de las cuales se puede calcular el CofP.
- Fuerzas musculares y ligamentosas: El efecto neto de la actividad muscular en una articulación se puede calcular en términos de los momentos musculares netos. Si se produce una cocontracción en una articulación determinada, el análisis obtiene solo el efecto neto de los músculos agonistas y antagonistas. Además, cualquier efecto de fricción en las articulaciones o dentro del músculo no puede separarse de este valor neto. El aumento de la fricción simplemente reduce el momento "muscular" efectivo; los elementos contráctiles del músculo en realidad están creando momentos más altos que los analizados en el tendón. Sin embargo, el error a velocidades de movimiento bajas y moderadas suele ser solo un pequeño porcentaje. En el rango extremo de movimiento de cualquier articulación, entran

en juego estructuras pasivas como ligamentos para contener el rango. Los momentos generados por estos tejidos se sumarán o restarán a los generados por los músculos. Por lo tanto, a menos que el músculo esté en completamente relajado, es imposible determinar la contribución de estas estructuras pasivas[4].

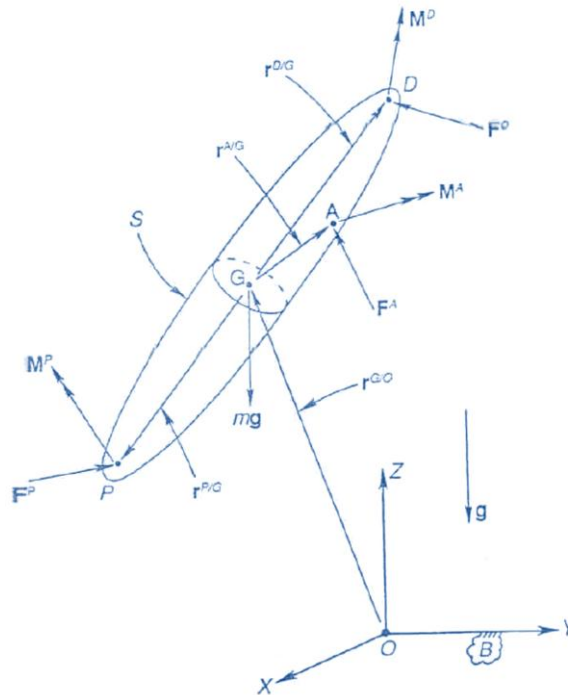


FIGURA 2.18 – FUERZAS, MOMENTOS Y ACELERACIONES ACTUANTES SOBRE UN SEGMENTO RÍGIDO. ADAPTADO DE [35].

### 2.7.2 FUERZAS

Si se requiere conocer entonces las fuerzas articulares en un segmento se debe aplicar la segunda ley de Newton.

$$\sum \vec{F} = \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} = m\vec{a}$$

$$\vec{F}_D + \vec{F}_P + m\vec{g} + \vec{F}_A = m\vec{a}$$

Donde  $\vec{F}_D$  es la fuerza en el extremo distal,  $\vec{F}_P$  en el extremo proximal,  $m$  es la masa del segmento,  $\vec{g}$  la gravedad,  $\vec{a}$  la aceleración del centro de masa del segmento y  $\vec{F}_A$  es una fuerza externa actuando sobre el segmento (Figura 2.18). Las fuerzas distales y proximales son aquellas fuerzas de acción y reacción con segmentos adyacentes. Es posible que las fuerzas distales de algunos segmentos sean nulas, como en la mano o el pie, debido a que no existe un segmento más distal es decir están libres en su extremo. Esto reduce en número de fuerzas que participan en el modelo y permite comenzar con la resolución del problema desde estos segmentos. En el caso de que el segmento distal pie este en contacto con el suelo, se debe tener en cuenta que existe una fuerza del pie  $\vec{F}_A$  actuante sobre el piso. En ese caso se requiere un transductor que permita registrar la fuerza  $\vec{F}_A$  actuante sobre el piso en cada instante. Normalmente se utiliza una plataforma de fuerzas para registrar la fuerza de reacción  $\vec{F}_A$  actuante sobre el pie en contacto con la plataforma.

Entonces conocida la aceleración y la masa del segmento se puede estimar la única incógnita de la ecuación, la fuerza proximal  $\vec{F}_p$ .

La resolución del modelo de segmentos articulados se denomina solución inversa, porque se estiman las variables físicas que debieron haber existido para generar el movimiento que se registró. Se resuelve, por necesidad, desde los segmentos más distales a los proximales porque se conoce que la fuerza distal  $\vec{F}_D$  es cero, y cuando existe se registra la fuerza  $\vec{F}_A$ , porque si está libre el segmento (mano o pie en vuelo) esta fuerza distal  $\vec{F}_A$  es cero en la ecuación. Si es distinta de cero se debe registrar como se menciona arriba y en consecuencia es un dato conocido para cada instante de tiempo de muestreo. De esta manera la segunda ley de Newton aplicada a un segmento distal 1 queda:

$$\vec{F}_{P_1} + m_1\vec{g} + \vec{F}_{A_1} + \vec{F}_{D_1} = m_1\vec{a}_1$$

$$\vec{F}_{P_1} = m_1\vec{a}_1 - m_1\vec{g} - \vec{F}_{A_1} - \vec{F}_{D_1}$$

La tercera ley de Newton establece que siempre que un objeto ejerce una fuerza sobre un segundo objeto, este ejerce una fuerza de igual magnitud y dirección pero en sentido opuesto sobre el primero[36]. Esto sucede en segmentos adyacentes, por lo que la fuerza distal del segmento adyacente 2 ( $\vec{F}_{D_2}$ ) es  $-\vec{F}_{P_1}$ . De esta manera es posible calcular la fuerza proximal  $\vec{F}_{P_2}$  para este nuevo segmento:

$$\vec{F}_{P_2} + \vec{F}_{D_2} + m_2\vec{g} + \vec{F}_{A_2} = m_2\vec{a}_2$$

$$\vec{F}_{P_2} = m_2\vec{a}_2 - \vec{F}_{D_2} - m_2\vec{g} - \vec{F}_{A_2}$$

$$\vec{F}_{P_2} = m_2\vec{a}_2 + \vec{F}_{P_1} - m_2\vec{g} - \vec{F}_{A_2}$$

Por ejemplo, los segmentos 1 y 2 pueden ser el pie y la pierna, o la mano y el antebrazo. Continuando de manera similar se pueden seguir estimando las fuerzas que actúan sobre los segmentos más proximales siempre que se pueda cuantificar las fuerzas externas participantes. Es importante destacar que habitual que en análisis de marcha, carrera y saltos entre otros es común que las únicas fuerzas externas  $\vec{F}_A$  diferente de cero corresponda a la fuerza de reacción del piso por lo que el modelo puede ser resuelto normalmente con los instrumentos mencionados.

Para resolver este problema todos los valores se pueden trabajar expresados en términos del sistema coordinado global, por lo que su resolución no presenta mayores dificultades y sus resultados quedan expresados en función de este sistema.

Sin embargo en este punto se debe considerar que en ausencia otras de fuerzas externas, las fuerzas de reacción del piso medida no son más que la suma algebraica de todos los productos masa por aceleración de todos los segmentos del cuerpo, para N-segmentos,

$$\vec{F}_{APiso} = \sum_{i=1}^N m_i (a_i + g)$$

Donde  $m_i$  = masa del  $i$ ésimo segmento.

$g$  aceleración de la gravedad

$a_i$  aceleración del centro de masa del  $i$ ésimo segmento

Con una persona parada en una situación idealmente estática la fuerza de reacción  $\vec{F}_{APiso}$  debería ser el peso del cuerpo, y en la dirección vertical estrictamente. En este contexto ideal, sería posible discriminar la fuerza correspondiente a cada segmento si se determina con precisión la aceleración del centro de masa y la masa precisa de cada uno de los segmentos del cuerpo, con una estimación exacta de los puntos 3D de vínculo entre segmentos (centros articulares). Con el modelos de segmentos articulados rígidos se podría iniciar la resolución desde los segmentos con sus extremos libres (cabeza y manos en todos los casos y eventualmente el o los pies si se encuentran en vuelo) e ir evaluando la fuerza en cada centro articular y finalmente llegar al punto de contacto de un pie o de los dos pies y poder estimar el valor de fuerza acción sobre el piso. Claramente este método descripto no se usa por el arrastre de errores en la estimación de centros articulares, centros de masa, masa e inercia correspondiente a los segmentos y finalmente la imprecisión que se requiere para estimar cuanto peso se descarga en cada uno de los miembros inferiores cuando ambos están en contacto con el piso. Es por esto que cobra vital importancia poder registrar la fuerza de reacción  $\vec{F}_{APiso}$  en la resolución precisa del modelo de segmentos articulados.

### 2.7.3 MOMENTOS

El cálculo de momentos representa una complejidad mayor que el cálculo de fuerzas debido a que deben tenerse algunos cuidados con el trabajo en coordenadas locales y globales.

Como se mencionó anteriormente es necesario plantear la siguiente sumatoria para poder estimar nuestras incógnitas:

$$\sum \vec{M}_i = \frac{d\vec{H}_{segmento}}{dt}$$

$$\vec{M}_D + \vec{M}_P + \vec{M}_A + \vec{r}_D \times \vec{F}_D + \vec{r}_P \times \vec{F}_P + \vec{r}_A \times \vec{F}_A = \frac{d\vec{H}_{segmento}}{dt}$$

Donde  $\vec{M}_i$  son los momentos distales  $D$ , proximales  $P$  y externos  $A$ ;  $\vec{F}_i$  las fuerzas distales  $D$ , proximales  $P$  y externas  $A$ ; y  $\vec{r}_i$  los vectores con origen en el centro de masa y fin en los puntos de aplicación de las fuerzas  $A, P$  y  $D$ . Es importante remarcar que el modelo de segmentos articulados basa su resolución en considerar segmentos rígidos, por lo que las fuerzas actúan en un punto. Aunque es sabido que la acción de la fuerza sobre los segmentos es realmente distribuida, esta aproximación es útil para la estimación de las fuerzas actuantes brinda un adecuado realismo en la resolución del problema.

De forma equivalente a la resolución de la sumatoria de fuerzas, para los segmentos más distales, los momentos distales  $\vec{M}_D$  son nulos como en el caso del pie o la mano. El momento externo  $\vec{M}_A$  es nulo para el segmento pie cuando está en vuelo pero cuando está pisando puede ser evaluado por una plataforma de fuerza.

Para un segmento distal 1, como el pie, consideradas las últimas aclaraciones, la sumatoria de momentos queda expresada de la siguiente manera:

$$\vec{M}_{P_1} + \vec{r}_{D_1} \times \vec{F}_{D_1} + \vec{r}_{P_1} \times \vec{F}_{P_1} + \vec{r}_{A_1} \times \vec{F}_{A_1} + \vec{M}_{A_1} = \frac{d\vec{H}_{segmento_1}}{dt}$$

De la expresión anterior se deben tener algunos cuidados en su resolución. Recordando lo desarrollado en el apartado 2.6, la magnitud  $d\vec{H}_{segmento_1}/dt$  está expresada en términos del sistema

coordinado local del segmento debido a que las matrices de inercia se reportan para ese sistema. Entonces para resolver la expresión anterior es necesario expresar todos los vectores en función del mismo sistema.

Los momentos resultantes por las fuerzas y momentos externos ( $\vec{r}_D \times \vec{F}_D + \vec{r}_P \times \vec{F}_P + \vec{r}_A \times \vec{F}_A + \vec{M}_{A_1}$ ) se expresan en función del sistema coordinado global, por lo que se pueden operar juntos y obtener un momento residual  $\vec{M}_R$  para manipular con mayor facilidad. Entonces, definido

$$\vec{M}_{R_1} = \vec{r}_{D_1} \times \vec{F}_{D_1} + \vec{r}_{P_1} \times \vec{F}_{P_1} + \vec{r}_{A_1} \times \vec{F}_{A_1} + \vec{M}_{D_1}$$

donde  $\vec{M}_{R_1}$  es el momento residual del segmento 1 en términos del sistema coordinado global, es posible realizar la siguiente rotación

$$\vec{M}_{R_{1Local}} = MGaL_1 \cdot \vec{M}_{R_1}$$

Donde  $MGaL_1$  es la matriz de rotación desde el sistema coordinado global a local del segmento 1 y se calcula como se desarrolló en el apartado 2.4.4.

Obtenido  $\vec{M}_{R_{1Local}}$  se dispone de todos los datos de la ecuación a resolver en términos del sistema coordinado local y es posible estimar el momento proximal, también en función del sistema coordinado local del segmento.

$$\begin{aligned} \vec{M}_{P_1} + \vec{M}_{R_{1Local}} &= \frac{d\vec{H}_{Segmento1}}{dt} \\ \vec{M}_{P_1} &= \frac{d\vec{H}_{Segmento1}}{dt} - \vec{M}_{R_{1Local}} \end{aligned}$$

Para un segmento intermedio el procedimiento es similar, se considera la tercera ley de Newton que por acción y reacción entre segmentos que el momento distal  $\vec{M}_D$  de un segmento tiene la misma magnitud y es opuesto al momento proximal  $\vec{M}_P$  del segmento distal al que se vincula. No obstante, no es correcto plantear directamente la igualdad  $\vec{M}_{D_2} = -\vec{M}_{P_1}$  y reemplazar en la ecuación de la sumatoria porque habitualmente, como se resolvió arriba el  $\vec{M}_P$  del segmento distal esta expresado respecto de las coordenadas locales de ese segmento distal.

El momento  $\vec{M}_{D_2}$  se debe expresar en términos del sistema coordinado local del segmento 2, por lo que se debe realizar el siguiente procedimiento:

$$\vec{M}_{D_2} = MGaL_2 \cdot MLaG_1 \cdot (-\vec{M}_{P_1})$$

Donde  $MGaL_2$  es la matriz de rotación que transformación de coordenadas desde el sistema coordinado global al sistema coordinado local del segmento 2, y  $MLaG_1$  realiza la transformación de coordenadas desde el sistema coordinado local del segmento 1 al sistema coordinado global.

La sumatoria de momentos del segmento 2 resulta entonces:

$$\vec{M}_{P_2} + \vec{M}_{D_2} + \vec{M}_{R_{2Local}} = \frac{d\vec{H}_{Segmento2}}{dt}$$

Donde  $\vec{M}_{R_{2Local}}$  es igual a

$$\vec{M}_{R_{2Local}} = MGaL_2 \cdot (\vec{r}_{D_2} \times \vec{F}_{D_2} + \vec{r}_{P_2} \times \vec{F}_{P_2} + \vec{r}_{A_2} \times \vec{F}_{A_2})$$

Entonces,

$$\vec{M}_{P_2} = \frac{d\vec{H}_{Segmento_2}}{dt} - \vec{M}_{D_2} - \vec{M}_{R_{2Local}}$$

$\vec{M}_{P_2}$  es finalmente el momento sobre la articulación proximal del segmento expresada en términos del sistema coordenado local. Los segmentos posteriores se resuelven utilizando la misma estrategia.

#### 2.7.4 CONVENCION DE EJES ARTICULARES

Con el procedimiento empleado, los momentos articulares  $\vec{M}_{P_i}$  y  $\vec{M}_{D_i}$  están expresados en términos del sistema coordenado local del segmento  $i$  y las fuerzas  $\vec{F}_{P_i}$  y  $\vec{F}_{D_i}$  se encuentran expresadas en términos del sistema coordenado global. En el apartado 2.2 se mencionó que se definen ejes articulares para poder expresar variables de manera estándar e independiente al segmento desde el que se están observando. Estos ejes pretenden poder identificar o dividir que grupos musculares intervienen en los distintos movimientos, de modo que los resultados obtenidos brinden información sobre la contribución muscular. Este objetivo generalmente produce que los versores obtenidos para definir los ejes articulares no sean ortogonales.

Para expresar cualquier magnitud en términos de los ejes articulares, denominados  $e_{1_i}$ ,  $e_{2_i}$  y  $e_{3_i}$  para la articulación  $i$ , definidos en términos del sistema coordenado global como:

$$\vec{e}_{1_i} = e_{x1_i}\vec{I} + e_{y1_i}\vec{J} + e_{z1_i}\vec{K}$$

$$\vec{e}_{2_i} = e_{x2_i}\vec{I} + e_{y2_i}\vec{J} + e_{z2_i}\vec{K}$$

$$\vec{e}_{3_i} = e_{x3_i}\vec{I} + e_{y3_i}\vec{J} + e_{z3_i}\vec{K}$$

se puede realizar el producto interno entre estos versores y los vectores que se quieren expresar en función de los ejes articulares, siempre que los vectores que se pretenden identificar se estén expresados en términos del sistema coordenado global.

Si se quiere expresar, por ejemplo la fuerza  $\vec{F}_{P_i}$ , que está representada en términos del sistema coordenado global, en función de los ejes articulares se puede realizar lo siguiente:

$$F_{Pe_{1_i}} = \vec{F}_{P_i} \cdot \vec{e}_{1_i}$$

$$F_{Pe_{2_i}} = \vec{F}_{P_i} \cdot \vec{e}_{2_i}$$

$$F_{Pe_{3_i}} = \vec{F}_{P_i} \cdot \vec{e}_{3_i}$$

Donde  $F_{Pe_{1_i}}$ ,  $F_{Pe_{2_i}}$  y  $F_{Pe_{3_i}}$  son las componentes del vector fuerza  $F_{P_i}$  en el sistema de ejes articulares. En la Figura 2.19 se muestra una proyección del vector  $F_{P_i}$  en el plano comprendido por los versores  $\vec{e}_{1_i}$  y  $\vec{e}_{2_i}$  y se evidencia como la proyección determinada por el producto interno permite obtener los valores de  $F_{Pe_{1_i}}$ ,  $F_{Pe_{2_i}}$ .

Para expresar los momentos obtenidos en función de los ejes articulares, se debe premultiplicar el valor de  $\vec{M}_{P_i}$  o  $\vec{M}_{D_i}$  por la matriz de rotación  $MLaG_i$  para tener expresado estos vectores en términos del sistema coordenado global. Posteriormente es posible proceder de la misma manera que lo realizado con la fuerza  $\vec{F}_{P_i}$ . Por ejemplo:

$$M_{Pe_{1i}} = (MLaG_i \cdot \vec{M}_{P_i}) \cdot \vec{e}_{1i}$$

$$M_{Pe_{2i}} = (MLaG_i \cdot \vec{M}_{P_i}) \cdot \vec{e}_{2i}$$

$$M_{Pe_{3i}} = (MLaG_i \cdot \vec{M}_{P_i}) \cdot \vec{e}_{3i}$$

En este caso  $M_{Pe_{1i}}$ ,  $M_{Pe_{2i}}$  y  $M_{Pe_{3i}}$  son las componentes del vector momento  $M_{P_i}$  en el sistema de ejes articulares. En general se reporta tanto las fuerzas como los momentos musculares netos en una articulación en términos del segmento distal, claramente el valor respecto del segmento proximal tiene la misma magnitud pero sentido opuesto.

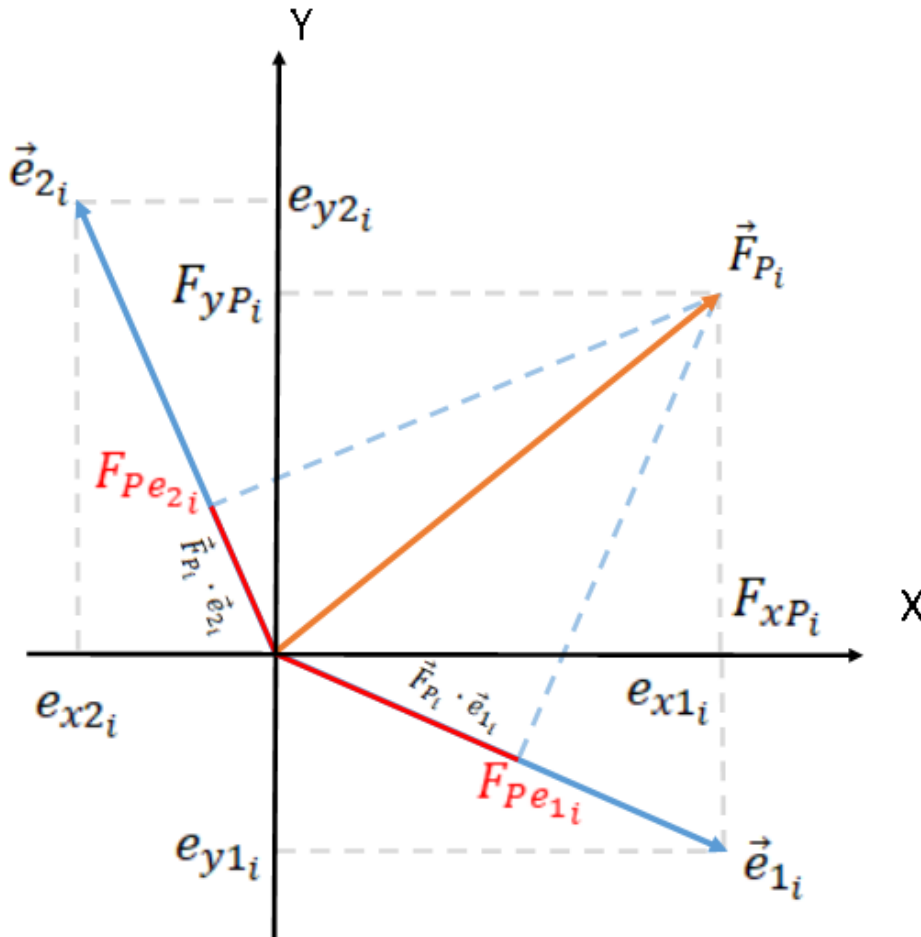


FIGURA 2.19 – PROYECCIÓN DEL VECTOR  $\vec{F}_{P_i}$  EN LOS EJES ARTICULARES AL REALIZAR EL PRODUCTO INTERNO.

## 2.8 NORMALIZACIÓN DE VARIABLES

Conocidas todas las variables cinemáticas y dinámicas de interés para cada instante de tiempo, es necesario normalizarlas de modo que sean comparables con los resultados obtenidos para los distintos sujetos estudiados.



Las variables de distancia suelen reportarse como porcentaje de alguna distancia característica de los sujetos estudiados. Lo más frecuente es la normalización respecto a la altura del sujeto, pero es posible realizarlo también respecto a la longitud de algún segmento.

Las fuerzas también se normalizan con frecuencia dividiendo el valor de las mismas con el peso del sujeto de estudio y el momento se expresa dividido por el producto peso  $\times$  altura del sujeto.

Se supone que los valores obtenidos de esta manera, si el gesto tiene poca variabilidad y se puede caracterizar con una distribución normal, se pueden extrapolar a cualquier sujeto que ejecute el mismo dentro de los parámetros estándares conociendo su peso y altura.

Por último, debido a que la ejecución de un gesto para dos sujetos distintos sugiere un tiempo de ejecución distinto, es necesario encontrar la forma de que los distintos instantes del gesto sean comparables entre sí. Esto se lleva a cabo identificando eventos en el gesto fáciles de observar y que son comunes a todos los ejecutantes.

Conocido el instante de tiempo en el que suceden los eventos se divide el gesto en fases y cada variable expresada en función del tiempo se expresa en función del porcentaje de la fase. Hecho esto es posible comparar, independientemente del tiempo en el que se efectúa el gesto, distintas ejecuciones.



### 3 RESOLUCIÓN DE MODELO BIOMECÁNICO

Uno de los protocolos más utilizados para la resolución del modelo de segmentos articulados es el Protocolo de Davis, que se desarrolla en este documento. Alternativamente existen otros protocolos como el de Helen Hayes o el de la Sociedad Internacional de Biomecánica (ISB por sus siglas en inglés) que también modelan los segmentos del cuerpo a partir de un conjunto de marcadores ubicados en puntos anatómicos de interés.

#### 3.1 MARCADORES Y SISTEMA COORDENADO GLOBAL DEL LABORATORIO

Davis propone el uso de 15 marcadores que se pueden observar en la Figura 3.1.A y la Figura 3.1.B. También se detalla en ambas figuras la posición del origen del sistema coordenado global en el vértice de una de las dos plataformas de fuerzas. Adicionalmente se muestran los sentidos y direcciones de los ejes coordenados. El eje  $Z$  es aquel coincidente a la dirección de la gravedad (normal al suelo), el eje  $X$  es coincidente con la dirección de avance y perpendicular a  $Z$ , y finalmente el eje  $Y$  es perpendicular a los dos anteriores conformando un sistema coordenado dextrógiro (cumple con la regla de la mano derecha).

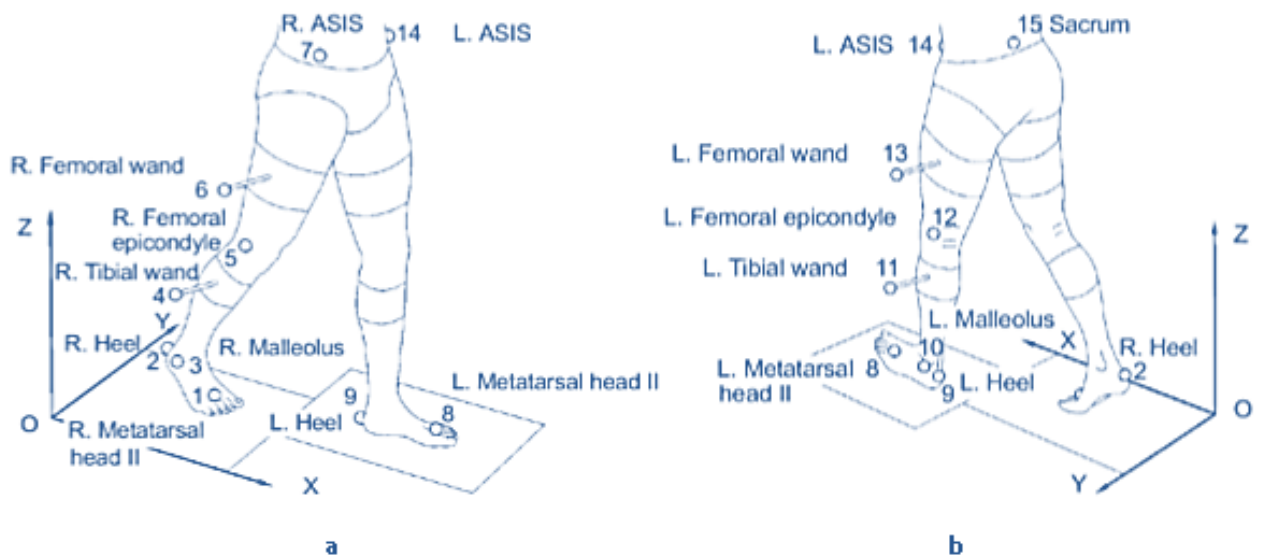


FIGURA 3.1 – MARCADORES Y SISTEMA COORDENADO GLOBAL DEL LABORATORIO [1].

En la Tabla 3.1 se detallan los marcadores propuestos por Davis para la resolución del modelo de segmentos articulados del miembro inferior. En esta se puede observar el número asignado a cada marcador, sus nombres en el idioma original, su traducción, y la forma reducida de referencia para el resto del documento.

TABLA 3.1 – MARCADORES PROPUESTO POR DAVIS [1].

Numero de marcador	Nombre en Ingles	Nombre en Español	Abreviatura
1	Rightmetatarsal head V	Cabeza del 5to metatarsiano derecho	R_META
2	Rightheel	Talón derecho	R_HEEL
3	Right lateral malleolus	Maléolo lateral derecho	R_MAL

4	Right tibial wand	Banda tibial derecha	R_TIB_WAND
5	Right Femoral epicondyle	Epicóndilo femoral derecho	R_LFE
6	Right femoral wand	Banda femoral derecha	R_FEM_WAND
7	Right ASIS	EIAS derecha	R_ASIS
8	Leftmetatarsal head V	Cabeza del 5to metatarsiano izquierdo	L_META
9	Leftheel	Talón izquierdo	L_HEEL
10	Left lateral malleolus	Maléolo lateral izquierdo	L_MAL
11	Left tibial wand	Banda tibial izquierda	L_TIB_WAND
12	Left Femoral epicondyle	Epicóndilo femoral izquierdo	L_LFE
13	Left femoral wand	Banda femoral izquierda	L_FEM_WAND
14	Left ASIS	EIAS izquierda	L_ASIS
15	Sacrum	Sacro	SACRUM

## 3.2 DEFINICIÓN DE LOS SEGMENTOS

### 3.2.1 CENTROS ARTICULARES

#### 3.2.1.1 CADERAS

Davis define tres versores  $\vec{u}_{pelvis}$ ,  $\vec{v}_{pelvis}$  y  $\vec{w}_{pelvis}$  (Figura 3.2) cuya dirección depende de la posición de tres puntos anatómicos (R\_ASIS, L\_ASIS y el SACRUM). Luego propone desplazamientos en estas tres direcciones desde el SACRUM a distancias proporcionales al ancho entre crestas ilíacas ( $|R\_ASIS - L\_ASIS|$ ) para encontrar el centro articular de las caderas.

El versor  $\vec{v}_{pelvis}$  se define paralelo a la línea formada entre los marcadores L\_ASIS y R\_ASIS. El mismo se puede definir mediante la siguiente expresión:

$$\vec{v}_{pelvis} = \frac{L\_ASIS - R\_ASIS}{|L\_ASIS - R\_ASIS|}$$

$\vec{w}_{pelvis}$  se define como el versor perpendicular al plano conformado por los tres marcadores de la pelvis de la siguiente manera:

$$\vec{w}_{pelvis} = \frac{(R\_ASIS - SACRUM) \times (L\_ASIS - SACRUM)}{|(R\_ASIS - SACRUM) \times (L\_ASIS - SACRUM)|}$$

Finalmente  $\vec{u}_{pelvis}$  es el versor perpendicular a los dos anteriores

$$\vec{u}_{pelvis} = \vec{v}_{pelvis} \times \vec{w}_{pelvis}$$

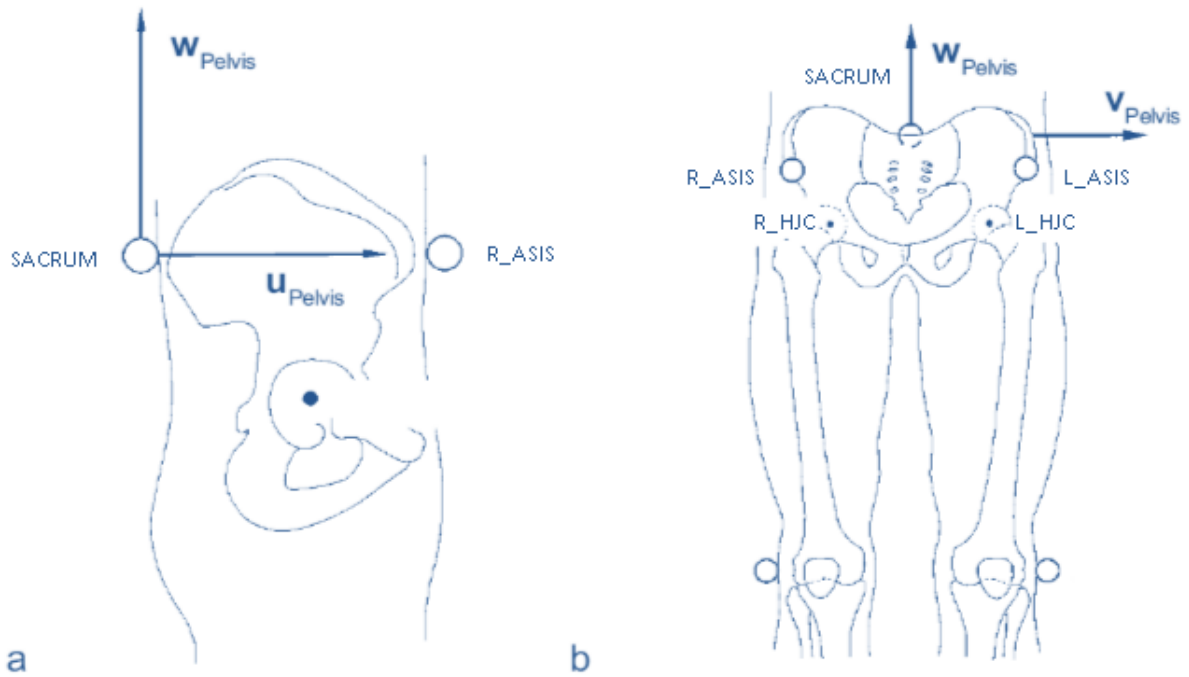


FIGURA 3.2 – VERSORES  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  Y  $\vec{w}$  DE LA PELVIS PARA DETERMINAR LOS CENTROS ARTICULARES DE LA CADERA DERECHA (R\_HJC) E IZQUIERDA (L\_HJC) [1].

Definido estos versores, se parte de la posición del SACRUM para estimar la posición de los centros articulares de la cadera derecha (R\_HJC) e izquierda (L\_HJC) utilizando las siguientes ecuaciones de regresión:

$$R\_HJC = SACRUM + |L\_ASIS - R\_ASIS| \cdot (0,598 \cdot \vec{u}_{pelvis} - 0,344 \cdot \vec{v}_{pelvis} - 0,29 \cdot \vec{w}_{pelvis})$$

$$L\_HJC = SACRUM + |L\_ASIS - R\_ASIS| \cdot (0,598 \cdot \vec{u}_{pelvis} + 0,344 \cdot \vec{v}_{pelvis} - 0,29 \cdot \vec{w}_{pelvis})$$

### 3.2.1.2 RODILLA

La propuesta por Davis para el cálculo del centro articular de la rodilla es realizar nuevamente el cálculo de tres versores  $\vec{u}_{knee}$ ,  $\vec{v}_{knee}$  y  $\vec{w}_{knee}$ . Para la rodilla derecha estos vectores unitarios se definen de la siguiente manera:

El versor  $\vec{v}_{knee}$  se define paralelo a la línea formada entre los marcadores R\_LM y R\_LFE. El mismo se puede definir mediante la siguiente expresión:

$$\vec{v}_{knee_R} = \frac{R\_LM - R\_LFE}{|R\_LM - R\_LFE|}$$

$$\vec{v}_{knee_L} = \frac{L\_LM - L\_LFE}{|L\_LM - L\_LFE|}$$

$\vec{u}$  se define como el versor perpendicular al plano conformado por los marcadores LFE, TIB\_BAND y LM apuntando anteriormente de la siguiente manera:

$$\vec{u}_{knee_R} = \frac{(R\_TIB\_WAND - R\_LFE) \times (R\_LM - R\_LFE)}{|(R\_TIB\_WAND - R\_LFE) \times (R\_LM - R\_LFE)|}$$

$$\vec{u}_{knee_L} = \frac{(L_{LM} - L_{LFE}) \times (L_{TIB\_WAND} - L_{LFE})}{|(L_{LM} - L_{LFE}) \times (L_{TIB\_WAND} - L_{LFE})|}$$

y finalmente  $\vec{w}$  es perpendicular a los dos anteriores

$$\vec{w}_{knee_R} = \vec{u}_{knee_R} \times \vec{v}_{knee_R}$$

$$\vec{w}_{knee_L} = \vec{u}_{knee_L} \times \vec{v}_{knee_L}$$

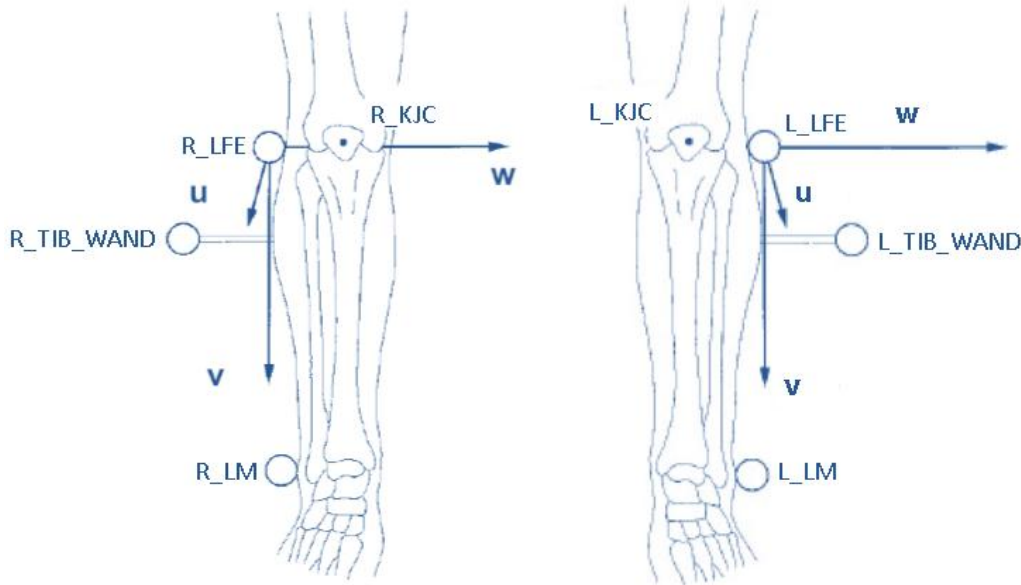


FIGURA 3.3 – ESQUEMA DE LOS VERSORES  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  Y  $\vec{w}$  UTILIZADOS PARA ESTIMAR LOS CENTROS ARTICULARES DE LAS RODILLAS [1].

En la Figura 3.3 se pueden ver esquematizados los versores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  utilizados para estimar el centro articular de la rodilla derecha e izquierda. Obtenidos estos vectores, Davis propone desplazarse desde el epicóndilo lateral del fémur en la dirección de  $\vec{w}$  la mitad del diámetro de la rodilla ( $KD/2$ ) para estimar el centro articular de la rodilla ( $KJC$ ). El diámetro de la rodilla ( $KD$ ) es una variable antropométrica que se mide durante el registro.

Entonces, de acuerdo al protocolo de Davis, los centros articulares de la rodilla se definen como:

$$R_{KJC} = R_{LFE} + 0 \cdot \vec{u}_{knee_R} + 0 \cdot \vec{v}_{knee_R} + 0,5 \cdot KD \cdot \vec{w}_{knee_R}$$

$$L_{KJC} = L_{LFE} + 0 \cdot \vec{u}_{knee_L} + 0 \cdot \vec{v}_{knee_L} - 0,5 \cdot KD \cdot \vec{w}_{knee_L}$$

### 3.2.1.3 TOBILLO

Para ambos tobillos Davis también calcula versores  $\vec{u}_{ankle}$ ,  $\vec{v}_{ankle}$  y  $\vec{w}_{ankle}$  que permiten definir la dirección de desplazamiento desde los maléolos laterales ( $LMs$  por sus siglas en inglés) hasta los centros articulares de los tobillos ( $AJCs$  por sus siglas en inglés).

Para el tobillo derecho estos versores se definen como:

$$\vec{u}_{ankle_R} = \frac{R_{META} - R_{HEEL}}{|R_{META} - R_{HEEL}|}$$

$$\vec{w}_{ankle_R} = \frac{(R_{META} - R_{LM}) \times (R_{HEEL} - R_{LM})}{|(R_{META} - R_{LM}) \times (R_{HEEL} - R_{LM})|}$$

$$\vec{v}_{ankle_R} = \vec{w}_{ankle_R} \times \vec{u}_{ankle_R}$$

Y para el izquierdo:

$$\vec{u}_{ankle_L} = \frac{L_{META} - L_{HEEL}}{|L_{META} - L_{HEEL}|}$$

$$\vec{w}_{ankle_L} = \frac{(L_{META} - L_{LM}) \times (L_{HEEL} - L_{LM})}{|(L_{META} - L_{LM}) \times (L_{HEEL} - L_{LM})|}$$

$$\vec{v}_{ankle_L} = \vec{w}_{ankle_L} \times \vec{u}_{ankle_L}$$

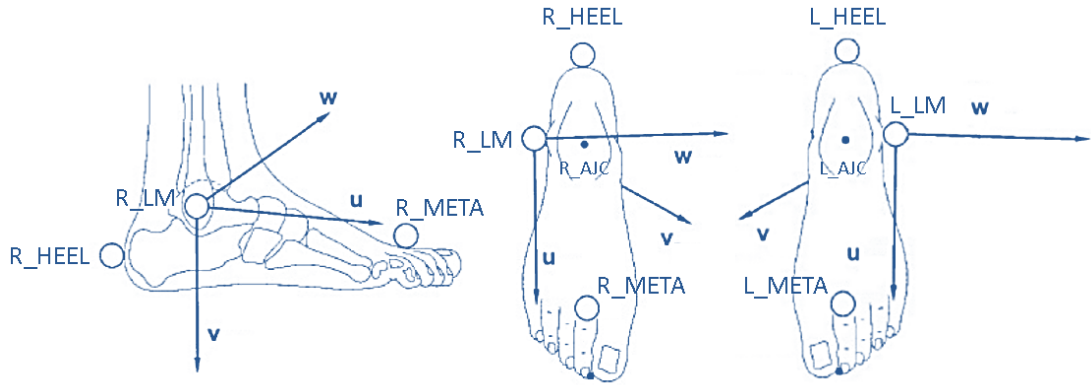


FIGURA 3.4 - ESQUEMA DE LOS VECTORES  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  Y  $\vec{w}$  UTILIZADOS PARA ESTIMAR LOS CENTROS ARTICULARES DE LOS TOBILLOS[1].

En la Figura 3.4 se pueden observar los vectores obtenidos para ambos tobillos y los marcadores de referencia.

Obtenidos estos vectores se procede al uso de la siguiente ecuación de regresión en la que se pueden estimar ambos centros articulares ( $R_{AJC}$  y  $L_{AJC}$ ):

$$R_{AJC} = R_{MAL} + 0,016 \cdot FL \cdot \vec{u}_{ankle_R} + 0,392 \cdot ML \cdot \vec{v}_{ankle_R} + 0,478 \cdot MW \cdot \vec{w}_{ankle_R}$$

$$L_{AJC} = L_{MAL} + 0,016 \cdot FL \cdot \vec{u}_{ankle_L} + 0,392 \cdot ML \cdot \vec{v}_{ankle_L} - 0,478 \cdot MW \cdot \vec{w}_{ankle_L}$$

Donde  $FL$  es el largo del pie,  $ML$  es la altura del maléolo al piso y  $MW$  es el ancho entre maléolos (derecho o izquierdo según corresponda). Estas variables antropométricas son medidas en el sujeto durante el registro.

#### 3.2.1.4 PUNTA DEL PIE

La punta del pie ( $TOE$ ) no es estrictamente un centro articular, pero nos permite definir un extremo del segmento pie. Una forma sencilla de obtenerlo sería colocando un marcador en este punto y registrarlo mediante videografía. En el protocolo de Davis este marcador no se coloca y se estima de forma virtual mediante otra ecuación de regresión con el fin de reducir el número total de marcadores.

Utilizando los versores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  definidos anteriormente para encontrar el centro articular del tobillo, se estima la punta del pie ( $TOE$ ) con las siguientes ecuaciones de regresión:

$$R_{TOE} = R_{MAL} + 0,742 \cdot FL \cdot \vec{u}_{ankle_R} + 1,074 \cdot MH \cdot \vec{v}_{ankle_R} - 0,187 \cdot FW \cdot \vec{w}_{ankle_R}$$

$$L_{TOE} = L_{MAL} + 0,742 \cdot FL \cdot \vec{u}_{ankle_L} + 1,074 \cdot MH \cdot \vec{v}_{ankle_L} - 0,187 \cdot FW \cdot \vec{w}_{ankle_L}$$

Donde  $MH$  es la altura del maléolo y  $FW$  es el ancho del pie (distancia entre cabezas de primer a quinto metatarso). Estas variables antropométricas son medidas en el sujeto durante el registro.

### 3.2.2 SISTEMAS COORDENADOS DE LOS SEGMENTOS

Davis propone utilizar la posición de los centros articulares y la posición de marcadores externos para generar sistemas de referencia de los segmentos, los cuales se pueden anclar en los centros de masa de los mismos segmentos. Estos sistemas de referencia de los segmentos se exponen como vectores expresados como proporciones en el sistema de referencia Global  $\vec{I}\vec{J}\vec{K}$ . Los versores  $\vec{I}\vec{J}\vec{K}$  corresponden a los versores solidarios a los ejes  $XYZ$  descrito en el apartado 3.1 (también representados en la Figura 3.1).

#### 3.2.2.1 SISTEMA COORDENADO DE LA PELVIS[7]

El sistema coordenado de la pelvis se estima simplemente mediante las siguientes igualdades:

$$\vec{l}_{pelvis} = \vec{w}_{pelvis}$$

$$\vec{j}_{pelvis} = \vec{u}_{pelvis}$$

$$\vec{k}_{pelvis} = \vec{v}_{pelvis}$$

En la Figura 3.5.A y Figura 3.5.B se puede ver representado el sistema coordenado del segmento pelvis.

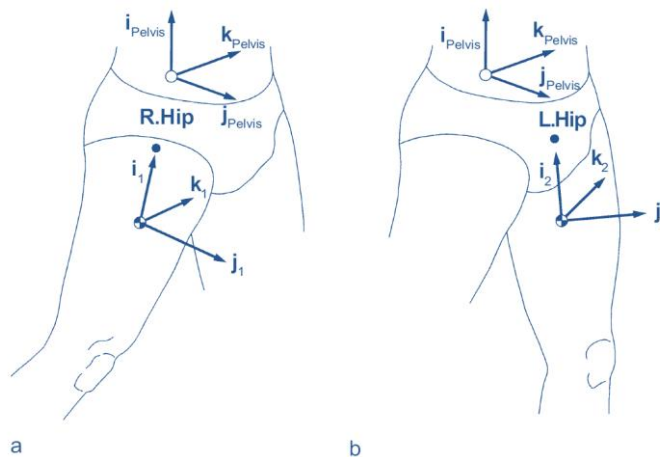


FIGURA 3.5 – SISTEMA COORDENADO DE LA PELVIS Y LOS MUSLOS DERECHO (A) E IZQUIERDO (B)[1].

#### 3.2.2.2 SISTEMA COORDENADO DEL MUSLO [7]

Para el cálculo del sistema coordenado de los segmentos muslos se utilizan los centros articulares estimados de la rodilla y la cadera en conjunto con la posición del marcador auxiliar “FEM\_WAND” de la siguiente manera:

El versor  $\vec{l}_{Muslo}$ , tanto izquierdo como derecho, se estima como el vector unitario con dirección coincidente a la línea comprendida entre los puntos  $HJC$  (centro articular de la cadera) y  $KJC$  (centro articular de la rodilla) con sentido proximal.

$$\vec{l}_{Muslo_R} = \frac{R_{HJC} - R_{KJC}}{|R_{HJC} - R_{KJC}|}$$



$$\vec{i}_{Muslo_L} = \frac{L_{HJC} - L_{KJC}}{|L_{HJC} - L_{KJC}|}$$

El versor  $\vec{j}_{Muslo}$ , tanto izquierdo como derecho, se estima como el vector unitario perpendicular al plano comprendido entre los puntos  $HJC$  (centro articular de la cadera),  $KJC$  (centro articular de la rodilla) y  $FEM\_WAND$  con sentido anterior.

$$\vec{j}_{Muslo_R} = \frac{(R_{FEM\_WAND} - R_{HJC}) \times (R_{KJC} - R_{HJC})}{|(R_{FEM\_WAND} - R_{HJC}) \times (R_{KJC} - R_{HJC})|}$$

$$\vec{j}_{Muslo_L} = \frac{(L_{KJC} - L_{HJC}) \times (L_{FEM\_WAND} - L_{HJC})}{|(L_{KJC} - L_{HJC}) \times (L_{FEM\_WAND} - L_{HJC})|}$$

Finalmente, el versor  $\vec{k}_{Muslo}$ , tanto izquierdo como derecho, se estima como el vector unitario perpendicular a los dos anteriores. Si el sujeto se encuentra en posición anatómica este versor se orienta hacia la izquierda del mismo.

$$\vec{k}_{Muslo_R} = \vec{i}_{Muslo_R} \times \vec{j}_{Muslo_R}$$

$$\vec{k}_{Muslo_L} = \vec{i}_{Muslo_L} \times \vec{j}_{Muslo_L}$$

En la Figura 3.5.A y Figura 3.5.B se pueden ver representados los sistemas coordenados del segmento muslo derecho e izquierdo respectivamente.

### 3.2.2.3 SISTEMA COORDENADO DE LA PIERNA[7]

El cálculo del sistema coordenado del segmento pierna utiliza de sus extremos articulares (rodilla y tobillo) en conjunto con el marcador del epicóndilo femoral.

El versor  $\vec{i}_{Pierna}$ , tanto izquierdo como derecho, se estima como el vector unitario con dirección coincidente a la línea comprendida entre los puntos  $KJC$  (centro articular de la rodilla) y  $AJC$  (centro articular de tobillo) con sentido proximal.

$$\vec{i}_{Pierna_R} = \frac{R_{KJC} - R_{AJC}}{|R_{KJC} - R_{AJC}|}$$

$$\vec{i}_{Pierna_L} = \frac{L_{KJC} - L_{AJC}}{|L_{KJC} - L_{AJC}|}$$

El versor  $\vec{j}_{Pierna}$ , tanto izquierdo como derecho, se estima como el vector unitario perpendicular al plano comprendido entre los puntos  $KJC$  (centro articular de la rodilla),  $AJC$  (centro articular de tobillo) y  $LFE$  (epicóndilo femoral lateral) con sentido anterior.

$$\vec{j}_{Pierna_R} = \frac{(R_{LFE} - R_{KJC}) \times (R_{AJC} - R_{KJC})}{|(R_{LFE} - R_{KJC}) \times (R_{AJC} - R_{KJC})|}$$

$$\vec{j}_{Pierna_L} = \frac{(L_{AJC} - L_{KJC}) \times (L_{LFE} - L_{KJC})}{|(L_{AJC} - L_{KJC}) \times (L_{LFE} - L_{KJC})|}$$

Finalmente, el versor  $\vec{k}_{Pierna}$ , tanto izquierdo como derecho, se estima como el vector unitario perpendicular a los dos anteriores. Si el sujeto se encuentra en posición anatómica este versor se orienta hacia la izquierda del mismo.

$$\vec{k}_{Pierna_R} = \vec{l}_{Pierna_R} \times \vec{j}_{Pierna_R}$$

$$\vec{k}_{Pierna_L} = \vec{l}_{Pierna_L} \times \vec{j}_{Pierna_L}$$

En la Figura 3.6 se pueden observar los versores del segmento pierna (versores con subíndices 3 y 4).

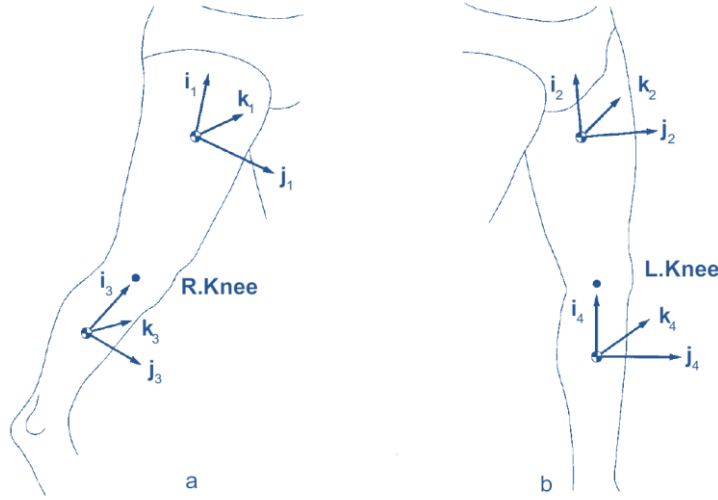


FIGURA 3.6 – SISTEMAS COORDENADOS DE: (A) MUSLO (1) Y PIERNA DERECHAS (3); (B) MUSLO (2) Y PIERNA IZQUIERDAS (4) [1].

#### 3.2.2.4 SISTEMA COORDENADO DEL PIE [7]

El versor  $\vec{l}_{Pie}$ , tanto izquierdo como derecho, se estima como el vector unitario con dirección coincidente a la línea comprendida entre los puntos *HEEL* (marcador del talón) y *TOE* (punta del pie) con sentido hacia el talón.

$$\vec{l}_{Pie_R} = \frac{R\_HEEL - R\_TOE}{|R\_HEEL - R\_TOE|}$$

$$\vec{l}_{Pie_L} = \frac{L\_HEEL - L\_TOE}{|L\_HEEL - L\_TOE|}$$

El versor  $\vec{j}_{Pie}$ , tanto izquierdo como derecho, se estima como el vector unitario perpendicular al plano comprendido entre los puntos *HEEL* (marcador del talón), *AJC* (centro articular de tobillo) y *TOE* (punta del pie) con sentido hacia la izquierda del sujeto si el mismo se encuentra en posición anatómica.

$$\vec{k}_{Pie_R} = \frac{(R\_AJC - R\_HEEL) \times (R\_TOE - R\_HEEL)}{|(R\_AJC - R\_HEEL) \times (R\_TOE - R\_HEEL)|}$$

$$\vec{k}_{Pie_L} = \frac{(L\_AJC - L\_HEEL) \times (L\_TOE - L\_HEEL)}{|(L\_AJC - L\_HEEL) \times (L\_TOE - L\_HEEL)|}$$

Finalmente, el versor  $\vec{k}_{Pierna}$ , tanto izquierdo como derecho, se estiman como el vector unitario perpendicular a los dos anteriores con sentido al dorso del pie.

$$\vec{j}_{Pie_R} = \vec{k}_{Pie_R} \times \vec{l}_{Pie_R}$$

$$\vec{j}_{Pie_L} = \vec{k}_{Pie_L} \times \vec{l}_{Pie_L}$$

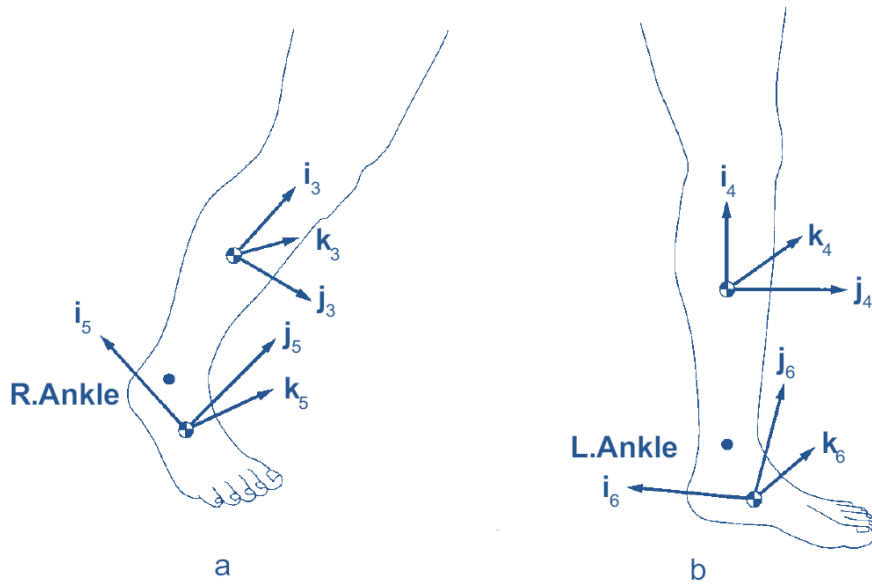


FIGURA 3.7 – SISTEMA COORDENADO DEL: PIE (5) Y PIERNA (3) DERECHA (A); Y DEL PIE (6) Y PIERNA (4) IZQUIERDA (B) [1].

### 3.3 PARÁMETROS DE LOS SEGMENTOS

Existen varias propuestas para estimar los parámetros de los segmentos. A continuación, se desarrollan las propuestas de distintos autores para obtener los parámetros antropométricos de los segmentos.

#### 3.3.1 MASA, MATRICES DE INERCIA Y CENTROS DE MASA

En 3D, dado un objeto rígido compuesto por  $N$  masas puntuales  $m_k$ , la matriz Momento de Inercia tiene componentes:

$$I = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix}$$

Donde  $I_{11} = I_{xx}$ ,  $I_{22} = I_{yy}$ ,  $I_{33} = I_{zz}$ .  $I_{ii}$  representa el momento de Inercia alrededor del eje  $i$ , cuando el objeto rota alrededor del eje  $i$  y queda definido como (para el caso en que  $i = x$ ):

$$I_{xx} = \sum_{k=1}^N m_k (y_k^2 + z_k^2)$$

Además,  $I_{12} = I_{xy}$ ,  $I_{13} = I_{xz}$ ,  $I_{23} = I_{yz}$ ,  $I_{12} = I_{21}$ ,  $I_{13} = I_{31}$ ,  $I_{23} = I_{32}$ .  $I_{ij}$  representa el Momento de Inercia alrededor del eje  $j$ , cuando el objeto rota alrededor del eje  $i$ .  $I_{ij}$  queda definido como (en el caso en que  $i = x$  y  $j = y$ ):

$$I_{xy} = - \sum_{k=1}^N m_k x_k y_k$$

Seleccionando un eje coordenado adecuado, se puede llegar a que  $I_{ij} = 0$  y la matriz Momento de Inercia, sea exclusivamente una matriz diagonal. En este caso, los ejes coordenados se llamarán Ejes Principales del Objeto, en nuestro caso ejes principales de un segmento del cuerpo.

Diversas investigaciones han intentado obtener estimaciones de los parámetros inerciales del cuerpo humano a partir del conocimiento de diferentes variables (masa de la persona, estatura, ancho de rodilla, ancho de cadera, etc.) utilizando técnicas de medidas directas o indirectas.

Dentro de estas investigaciones se encuentran los trabajos realizados por Zalsiorsky y Seluyanov [27] basados en escaneo por rayos gama para la determinación de la masa y de las características inerciales de los segmentos del cuerpo. Para la determinación de los parámetros, los investigadores propusieron ecuaciones de regresión múltiple del tipo:

$$y = B_0 + B_1x_1 + B_2x_2$$

Donde  $x_1$  es la masa del cuerpo [Kg],  $x_2$  es la altura del cuerpo [cm] y  $y$  es el parámetro estimado del segmento de interés.

Para la estimación de la masa se utilizan los coeficientes de la Tabla 3.2, por lo que el valor de  $y$  en la ecuación de regresión anterior representa el valor de la masa del segmento de interés.

TABLA 3.2 - COEFICIENTES PARA LA ECUACIÓN DE REGRESIÓN MÚLTIPLE PARA ESTIMACIÓN DE LA MASA DE LOS SEGMENTOS.

Segmento	B <sub>0</sub>	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	R	SD
Pie	-0,829	0,0077	0,0073	0,703	0,101
Pierna	-1,592	0,0362	0,0121	0,872	0,219
Pelvis	-2,649	0,1463	0,0137	0,891	0,721
Mano	-0,1165	0,0036	0,00175	0,516	0,063
Antebrazo	0,3185	0,01445	-0,00114	0,786	0,101
Brazo	0,250	0,03012	-0,0027	0,837	0,178
Cabeza	1,296	0,0171	0,0143	0,591	0,322
Torso superior	8,2144	0,2234	-0,0663	0,828	1,238
Torso medio	7,181	0,2234	-0,0663	0,828	1,238
Torso inferior	-7,498	0,0976	0,04896	0,743	1,020

La Tabla 3.3 contiene los coeficientes propuestos por Zalsiorsky y Seluyanov para estimar el centro de masa de los distintos segmentos del modelo. En este caso el valor de  $y$  en la ecuación de regresión representa la distancia del centro de masa respecto al extremo proximal a lo largo del eje longitudinal del segmento.

TABLA 3.3 - COEFICIENTES PARA LA ECUACIÓN DE REGRESIÓN MÚLTIPLE PARA ESTIMACIÓN DEL CENTRO DE MASA DE LOS SEGMENTOS A LO LARGO DEL EJE LONGITUDINAL.

Segmento	B <sub>0</sub>	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	R	SD
Pie	3,767	0,065	0,033	0,530	1,1
Pierna	-6,05	-0,039	0,142	0,510	1,25
Pelvis	-2,42	0,038	0,135	0,600	1,31
Mano	4,11	0,026	0,033	0,383	1,12
Antebrazo	0,192	-0,028	0,093	0,371	1,14
Brazo	1,67	0,03	0,054	0,368	1,4

<b>Cabeza</b>	8,357	-0.0025	0,023	0,288	0,69
<b>Torso superior</b>	3,32	0,0076	0,047	0,258	1,19
<b>Torso medio</b>	1,398	0,0058	0,045	0,437	1,18
<b>Torso inferior</b>	1,182	0,0018	0,0434	0,320	1,0

En la Tabla 3.4 y la Tabla 3.5 se exponen los coeficientes que permiten estimar, mediante la ecuación de regresión, el momento de inercia principal alrededor del eje antero-posterior y transversal respectivamente.

**TABLA 3.4 - COEFICIENTES PARA LA ECUACIÓN DE REGRESIÓN MÚLTIPLE PARA ESTIMACIÓN DEL MOMENTO DE INERCIA PRINCIPAL ALREDEDOR DEL EJE ANTERO-POSTERIOR [ $kg \cdot cm^2$ ].**

Segmento	B <sub>0</sub>	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	R	SD
<b>Pie</b>	-100	0,480	0,626	0,75	6,8
<b>Pierna</b>	-1105	4,59	6,63	0,85	48,6
<b>Pelvis</b>	-3557	31,7	18,61	0,84	248
<b>Mano</b>	-19,5	0,17	0,116	0,50	3,7
<b>Antebrazo</b>	-64	0,95	0,34	0,71	10,2
<b>Brazo</b>	-250,7	1,56	1,512	0,62	27,6
<b>Cabeza</b>	-78	1,171	1,519	0,40	42,5
<b>Torso superior</b>	81,2	36,73	-5,97	0,73	297
<b>Torso medio</b>	618,5	39,8	-12,87	0,81	237
<b>Torso inferior</b>	-1568	12	7,741	0,69	156

**TABLA 3.5 - COEFICIENTES PARA LA ECUACIÓN DE REGRESIÓN MÚLTIPLE PARA ESTIMACIÓN DEL MOMENTO DE INERCIA PRINCIPAL ALREDEDOR DEL EJE TRANSVERSAL [ $kg \cdot cm^2$ ].**

Segmento	B <sub>0</sub>	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	R	SD
<b>Pie</b>	-97,09	0,414	0,614	0,77	5,77
<b>Pierna</b>	-1152	4,594	6,815	0,85	49
<b>Pelvis</b>	-3690	32,02	19,24	0,85	244
<b>Mano</b>	-13,68	0,088	0,092	0,43	2,7
<b>Antebrazo</b>	-67,9	0,855	0,376	0,71	9,6
<b>Brazo</b>	-232	1,525	1,343	0,62	26,6
<b>Cabeza</b>	-112	1,43	1,73	0,49	40
<b>Torso superior</b>	367	18,3	-5,73	0,66	171
<b>Torso medio</b>	263	26,7	-8,0	0,78	175
<b>Torso inferior</b>	-934	11,8	3,44	0,73	117

TABLA 3.6 - COEFICIENTES PARA LA ECUACIÓN DE REGRESIÓN MÚLTIPLE PARA ESTIMACIÓN DEL MOMENTO DE INERCIA PRINCIPAL ALREDEDOR DEL EJE LONGITUDINAL [ $kg \cdot cm^2$ ].

Segmento	B <sub>0</sub>	B <sub>1</sub>	B <sub>2</sub>	R	SD
Pie	-15,48	0,144	0,088	0,55	2,7
Pierna	-70,5	1,134	0,3	0,47	22
Pelvis	-13,5	11,3	-2,28	0,89	49
Mano	-6.26	0,0762	0,0347	0,43	1,8
Antebrazo	5.66	0,306	-0,088	0,66	2,9
Brazo	-16,9	0,662	0,0435	0,44	12,5
Cabeza	61,6	1,72	0,0814	0,42	35,6
Torso superior	561	36,03	-9,98	0,81	212
Torso medio	1501	43,14	-19,8	0,87	188
Torso inferior	-775	14,7	1,685	0,78	116

Chandler et. al. (1975) propusieron un método para predecir los parámetros de los segmentos del cuerpo basándose en un modelo geométrico para cada segmento y en 20 datos antropométricos medibles de cada sujeto (descritos en la Tabla 3.7) [37].

TABLA 3.7 - DATOS ANTROPOMÉTRICOS PROPUESTOS POR CHANDLER PARA ESTIMAR PARÁMETROS COMO LA MASA Y LAS PROPIEDADES INERCIALES DE LOS SEGMENTOS [37].

Parámetro	Medida
A <sub>1</sub>	Masa Corporal Total
A <sub>2</sub>	Distancia entre Crestas Ilíacas Superiores Ant.
A <sub>3</sub>	Longitud Muslo Derecho
A <sub>4</sub>	Longitud Muslo Izquierdo
A <sub>5</sub>	Circunferencia Muslo Derecho (Máxima Circunf)
A <sub>6</sub>	Circunferencia Muslo Izquierdo (Máxima Circunf)
A <sub>7</sub>	Longitud Pierna Derecha
A <sub>8</sub>	Longitud Pierna Izquierda
A <sub>9</sub>	Circunferencia Pierna Derecha (Máxima Circunf)
A <sub>10</sub>	Circunferencia Pierna Izquierda (Máxima Circunf)
A <sub>11</sub>	Diámetro Rodilla Derecha
A <sub>12</sub>	Diámetro Rodilla Izquierda
A <sub>13</sub>	Longitud Pie Derecho (desde talón a punta del pie)
A <sub>14</sub>	Longitud Pie Izquierdo (desde talón a punta del pie)

$A_{15}$	Altura Maléolo Derecho (la persona debe estar parada)
$A_{16}$	Altura Maléolo Izquierdo (la persona debe estar parada)
$A_{17}$	Ancho Maléolo Derecho (Ancho máximo de maléolo lat a medial)
$A_{18}$	Ancho Maléolo Izquierdo (Ancho máximo de maléolo lat a medial)
$A_{19}$	Ancho Pie Derecho (Distancia entre primer y quinto metatarso)
$A_{20}$	Ancho Pie Izquierdo (Distancia entre primer y quinto metatarso)

Los modelos geométricos utilizados como estimación de los segmentos son cilindros, para el caso del muslo y la pierna, y pirámide para el caso del pie.

Con estos parámetros, Chandler et al. sugieren el cálculo de las masas de los segmentos (Tabla 3.8), la posición del Centro de Masa (Tabla 3.9) y los Momentos de Inercia (Tabla 3.10).

Considerando los siguientes ejes de referencias, se llega a las ecuaciones de la Tabla 3.8, Tabla 3.9 y Tabla 3.10 para los parámetros inerciales:

Eje z: representa movimientos de flexión / extensión

Eje y: representa movimientos de aducción / abducción

Eje x: representa movimientos de rotación interna / externa.

TABLA 3.8 - ECUACIONES PARA PREDECIR LA MASA DEL MUSLO, PIERNA Y PIE [37].

**Masa Muslo Derecho**

$$= (0,1032) \times A_1 + (12,76) \times A_3 \times A_5 \times A_5 - 1,023$$

$$\text{Masa Muslo Izquierdo} = (0,1032) \times A_1 + (12,76) \times A_4 \times A_6 \times A_6 - 1,023$$

$$\text{Masa Pierna Derecha} = (0,0226) \times A_1 + (31,33) \times A_7 \times A_9 \times A_9 + 0,016$$

**Masa Pierna Izquierda**

$$= (0,0226) \times A_1 + (31,33) \times A_8 \times A_{10} \times A_{10} + 0,016$$

$$\text{Masa Pie Derecho} = (0,0083) \times A_1 + (254,5) \times A_{13} \times A_{15} \times A_{17} - 0,065$$

$$\text{Masa Pie Izquierdo} = (0,0083) \times A_1 + (254,5) \times A_{14} \times A_{16} \times A_{18} - 0,065$$

TABLA 3.9 - RADIOS PARA ESTIMACIÓN DE LA POSICIÓN DEL CENTRO DE MASA [37].

$$\text{Radio del Muslo} = 0,39$$

$$\text{Radio de la Pierna} = 0,42$$

$$\text{Radio del Pie} = 0,44$$

TABLA 3.10 - ECUACIONES PARA ESTIMACIÓN DEL MOMENTO DE INERCIA PARA EL MUSLO, LA PIERNA Y EL PIE [37].

$$I_{flex/ext} \text{ muslo derecho} = 0,00762 \times A_1 \times A_3 \times A_3 + 0,076 \times A_5 \times A_5 + 0,01153$$

$$I_{flex/ext} \text{ muslo izquierdo} = 0,00762 \times A_1 \times A_4 \times A_4 + 0,076 \times A_6 \times A_6 + 0,01153$$

**I aduc/abduc muslo derecho**

$$= 0,00762 \times A_1 \times A_3 \times A_3 + 0,076 \times A_5 \times A_5 + 0,01186$$

**I aduc/abduc muslo izquierdo**

$$= 0,00762 \times A_1 \times A_4 \times A_4 + 0,076 \times A_6 \times A_6 + 0,01186$$

$$I \text{ rot int/ext muslo derecho} = 0,00151 \times A_1 \times A_5 \times A_5 + 0,00305$$

$$I \text{ rot int/ext muslo izquierdo} = 0,00151 \times A_1 \times A_6 \times A_6 + 0,00305$$

$$I \text{ flex/ext pierna derecha} = 0,00347 \times A_1 \times A_7 \times A_7 + 0,076 \times A_9 \times A_9 + 0,00511$$

$$I \text{ flex/ext pierna izquierda} \\ = 0,00347 \times A_1 \times A_8 \times A_8 + 0,076 \times A_{10} \times A_{10} + 0,00511$$

$$I \text{ aduc/abduc pierna derecha} \\ = 0,00387 \times A_1 \times A_7 \times A_7 + 0,076 \times A_9 \times A_9 + 0,00138$$

$$I \text{ aduc/abduc pierna izquierda} \\ = 0,00387 \times A_1 \times A_8 \times A_8 + 0,076 \times A_{10} \times A_{10} + 0,00138$$

$$I \text{ rot int/ext pierna derecha} = 0,00041 \times A_1 \times A_9 \times A_9 + 0,00012$$

$$I \text{ rot int/ext pierna izquierda} = 0,00041 \times A_1 \times A_{10} \times A_{10} + 0,00012$$

$$I \text{ flex/ext pie derecho} = 0,00023 \times A_1 \times 4 \times A_{15} \times A_{15} + 3 \times A_{13} \times A_{13} + 0,00022$$

$$I \text{ flex/ext pie izquierdo} = 0,00023 \times A_1 \times 4 \times A_{16} \times A_{16} + 3 \times A_{14} \times A_{14} + 0,00022$$

$$I \text{ aduc/abduc pie derecho} \\ = 0,00021 \times A_1 \times 4 \times A_{19} \times A_{19} + 3 \times A_{13} \times A_{13} + 0,00067$$

$$I \text{ aduc/abduc pie izquierdo} \\ = 0,00021 \times A_1 \times 4 \times A_{20} \times A_{20} + 3 \times A_{14} \times A_{14} + 0,00067$$

$$I \text{ rot int/ext pie derecho} = 0,00141 \times A_1 \times A_{15} \times A_{15} + A_{19} \times A_{19} - 0,00008$$

$$I \text{ rot int/ext pie izquierdo} = 0,00141 \times A_1 \times A_{16} \times A_{16} + A_{20} \times A_{20} - 0,00008$$

### 3.4 CINEMÁTICA

#### 3.4.1 VELOCIDAD Y ACELERACIÓN LINEAL DEL SEGMENTO

Conocida la posición del centro de masa de cada segmento para cada cuadro se puede estimar la velocidad y aceleración de cada segmento utilizando la derivada discreta explicada en los apartados 2.3.1 y 2.3.2. Se ejemplifica el cálculo solamente para el muslo derecho debido a que para todos los segmentos se procede de la misma forma.

$$\vec{v}_{MusloR_i} = \frac{CM_{MusloR(i+1)} - CM_{MusloR(i-1)}}{2\Delta t}$$

Donde  $CM_{MusloR(i+1)}$  y  $CM_{MusloR(i-1)}$  es la posición del centro de masa del muslo derecho para el cuadro  $i+1$  e  $i-1$  respectivamente, y  $\vec{v}_{MusloR_i}$  es la velocidad del muslo derecho en el cuadro  $i$ .

Conocidas las velocidades para todos los cuadros se obtiene la aceleración en el instante  $i$  de la siguiente manera:

$$\vec{a}_{MusloR_i} = \frac{\vec{v}_{MusloR(i+1)} - \vec{v}_{MusloR(i-1)}}{2\Delta t}$$



Donde  $\vec{v}_{MusloR(i+1)}$  y  $\vec{v}_{MusloR(i-1)}$  es la velocidad del muslo derecho para el cuadro  $i + 1$  e  $i - 1$  respectivamente.

### 3.4.2 ÁNGULOS ARTICULARES

Ha habido cierto debate sobre el método más apropiado para definir ángulos articulares para que tengan sentido desde un punto tradicional, anatómico. Vauhgan propone utilizar el método desarrollado por Chao (1980) y Grood y Suntay (1983) [38], [39]. Considerando los sistemas de referencia de segmento que se definieron en la sección 3.2.2 (Figura 3.8), cada articulación tiene un sistema de referencia en los segmentos proximal y distal (para la articulación de la cadera, esto es la pelvis y el muslo; para la articulación de la rodilla, el muslo y la pierna; para la articulación del tobillo, la pierna y el pie). Los ángulos articulares se definen como una rotación del segmento distal en relación con el segmento proximal. Las rotaciones se pueden definir, en general, de la siguiente manera:

- La flexión y la extensión (más la dorsiflexión y la flexión plantar) tienen lugar alrededor del eje mediolateral del segmento proximal (es decir, los ejes  $z$  en la Figura 3.8).
- La rotación interna y externa tiene lugar alrededor del eje longitudinal del segmento distal (es decir, los ejes  $x$  en la Figura 3.8).
- La abducción y la aducción tienen lugar alrededor de un eje flotante que está en ángulo recto con los ejes de flexión / extensión y de rotación interna / externa.

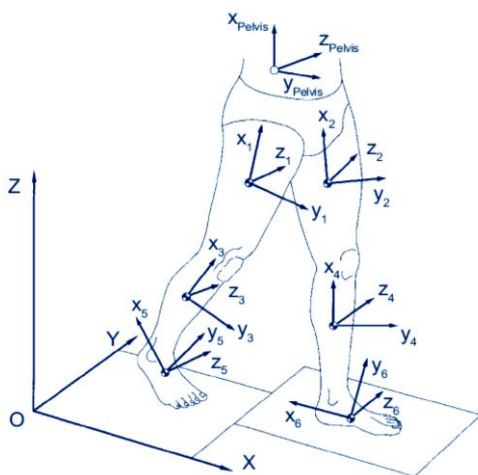


FIGURA 3.8 - LOS SISTEMAS LOCALES DEL SEGMENTO (XYZ) ANCLADOS EN LOS CENTROS DE MASA DE CADA SEGMENTO [1].



Estas definiciones de ángulos pueden entenderse un poco más fácilmente refiriéndose a Figura 3.9, que ilustra la rodilla izquierda. En la figura se observan los sistemas de referencia proximal y distal a la izquierda, mientras que los ejes se resaltan a la derecha. Hay tres rangos de movimiento separados: la flexión y la extensión se producen alrededor del eje medio-lateral del muslo izquierdo ( $z_2$ ); las rotaciones internas y externas se realizan alrededor del eje longitudinal de la pierna izquierda ( $x_4$ ); y la abducción y la aducción tienen lugar alrededor de un eje que es perpendicular tanto a  $z_2$  como a  $x_4$ . Estos tres ejes no cumplen con la regla de la mano derecha, porque  $z_2$  y  $x_4$  no están necesariamente perpendiculares entre sí [1].

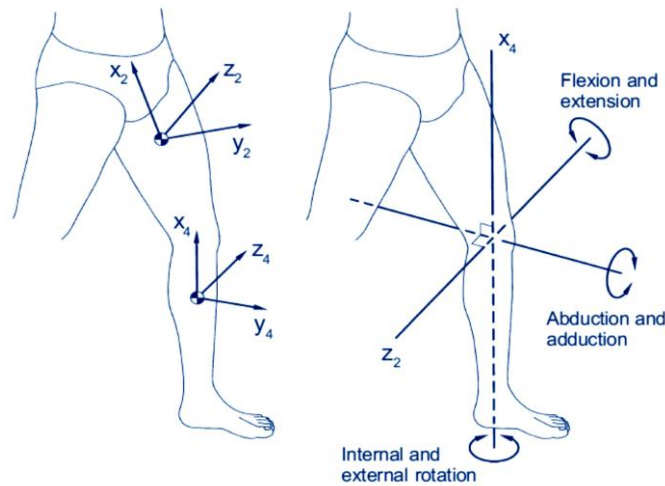


FIGURA 3.9 - EJES DE ROTACIÓN DE LA RODILLA IZQUIERDA [1].

Considerando los sistemas de referencias de segmento definidos en la Figura 3.8. Las extremidades inferiores están divididas en seis pares de segmentos donde se encuentra una articulación entre cada par. Las siguientes convenciones se aplican a las seis articulaciones:

$$k_{Proximal} = \text{eje de flexión/extensión}$$

$$i_{Distal} = \text{eje de rotación interna/externa}$$

$$l_{Articulación} = \text{eje abducción/aducción}$$

$$I_{Articulacion} = \frac{k_{proximal} \times i_{distal}}{|k_{proximal} \times i_{distal}|}$$

En donde

$$\alpha = \text{ángulo de flexión/extensión}$$

$$\beta = \text{ángulo de abducción/aducción}$$

$$\gamma = \text{ángulo de rotación interna/externa}$$

La flexión, abducción y rotación interna se definen positivas y sus contras partes, extensión, aducción y rotación externa, se definen negativas.

Utilizando estas convenciones se pueden definir los ángulos articulares.

### 3.4.2.1 ÁNGULOS ARTICULARES DE LAS CADERAS

En la articulación de la cadera ( $HJC$ ) el segmento proximal es la pelvis y el segmento distal es el muslo (Figura 3.10). El  $I_{R\_HJC}$  y  $I_{L\_HJC}$  están definidos como

$$I_{R\_HJC} = \frac{k_{pelvis} \times i_1}{|k_{pelvis} \times i_1|}$$

$$I_{L\_HJC} = \frac{k_{pelvis} \times i_2}{|k_{pelvis} \times i_2|}$$

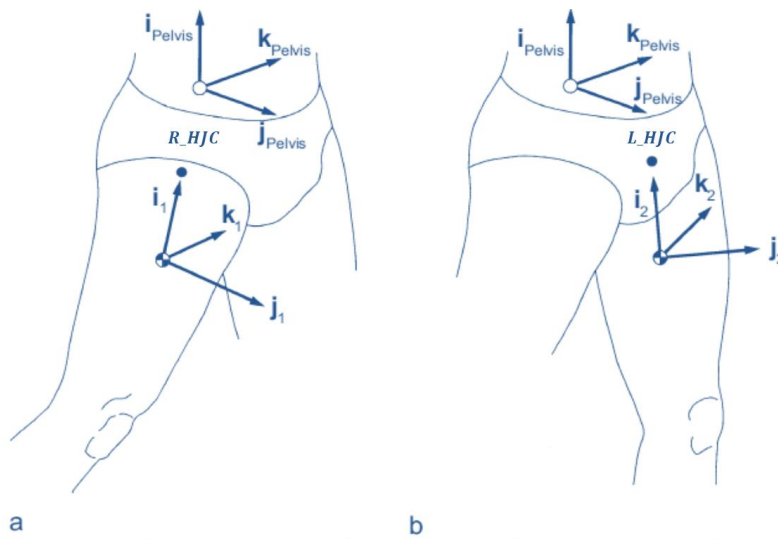


FIGURA 3.10 – ARTICULACIONES DE LAS CADERAS [1].

El ángulo  $\alpha$  para las caderas se definen, para cumplir con la convención, de la siguiente manera:

$$\alpha_{R\_HJC} = \sin^{-1}(I_{R\_HJC} \cdot i_{pelvis})$$

$$\alpha_{L\_HJC} = \sin^{-1}(I_{L\_HJC} \cdot i_{pelvis})$$

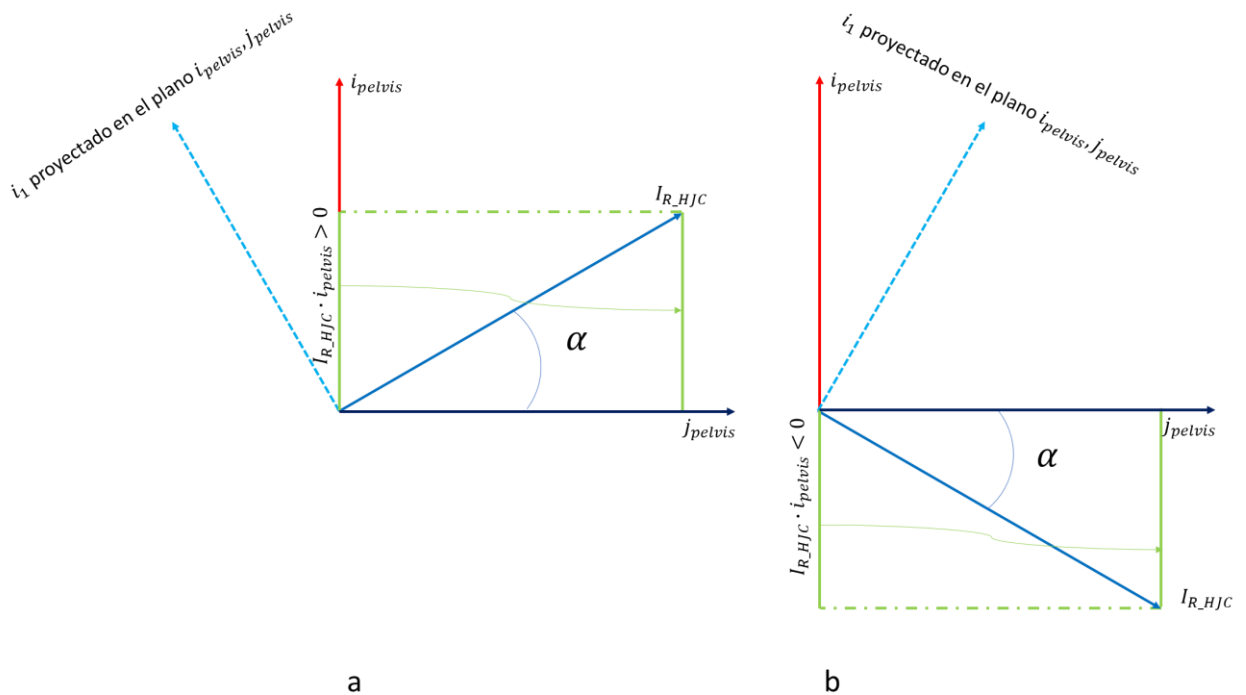


FIGURA 3.11 – ÁNGULO  $\alpha$  EN CASOS DE FLEXIÓN (A) Y EXTENSIÓN (B) PARA LA CADERA DERECHA (VISTA LATERAL DERECHA DE LA PELVIS).

En la Figura 3.11 se pueden observar las orientaciones de los vectores involucrados en el cálculo para un caso de flexión de cadera (a) y extensión de cadera (b) derecha. Como se puede observar, el vector  $I_{R\_HJC}$  está contenido en el plano  $i_{pelvis}$  y  $j_{pelvis}$  debido a que es perpendicular a  $k_{pelvis}$ . Esto sucede porque el vector resultante de un producto vectorial es perpendicular a los dos vectores involucrados en la operación. Por esto último el vector  $I_{R\_HJC}$  también es perpendicular a  $i_1$ .

En la Figura 3.11.a se muestra un caso de flexión. En este se observa que la proyección obtenida del producto  $I_{R\_HJC} \cdot i_{pelvis}$  es positiva y que al realizar el arcoseno es posible obtener el valor de  $\alpha$ , también positivo.

La Figura 3.11.b es un caso de extensión. En este se observa que la proyección obtenida del producto  $I_{R\_HJC} \cdot i_{pelvis}$  es negativa y que al realizar el arcoseno se puede obtener el valor de  $\alpha$ , también negativo.

El  $\alpha$  para la cadera izquierda tiene el mismo comportamiento, un análisis similar al que se realiza la cadera derecha con la Figura 3.12 permitiría llegar a la misma conclusión.

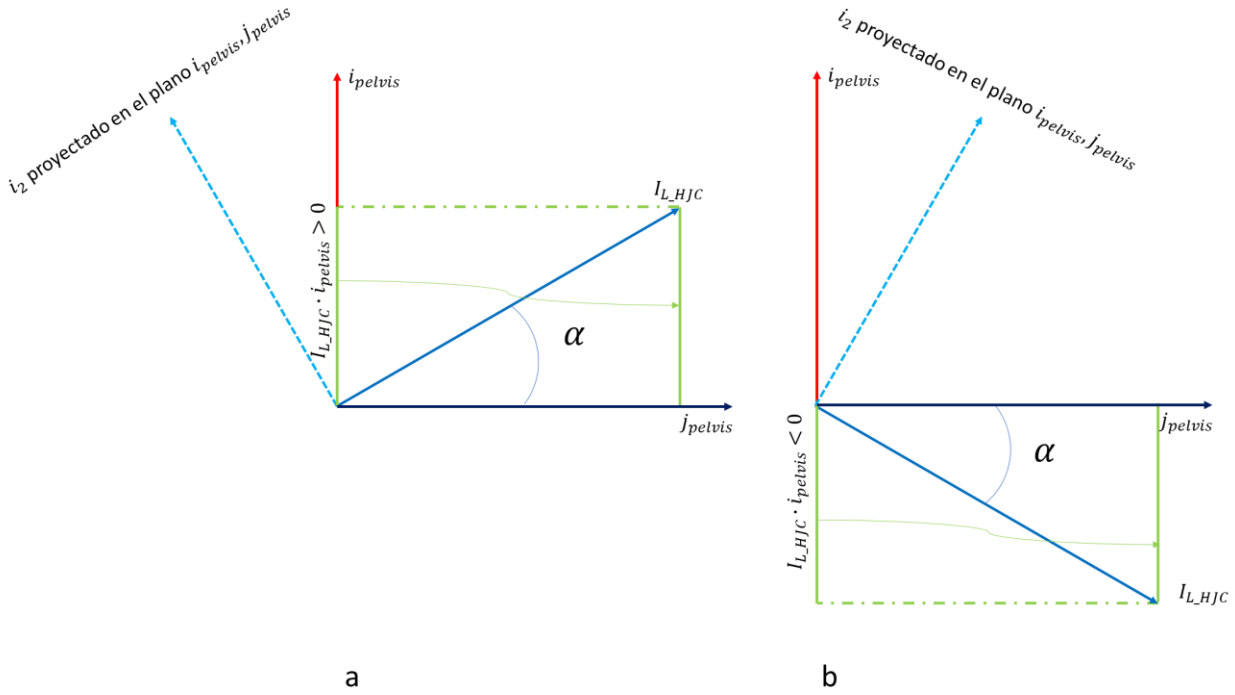


FIGURA 3.12 - ÁNGULO  $\alpha$  EN CASOS DE FLEXIÓN (A) Y EXTENSIÓN (B) PARA LA CADERA IZQUIERDA (VISTA LATERAL DERECHA DE LA PELVIS).

Los ángulo  $\beta$  de las caderas se calculan como se muestra en las siguientes expresiones:

$$\beta_{R_{HJC}} = \sin^{-1}(k_{pelvis} \cdot i_1)$$

$$\beta_{L_{HJC}} = -\sin^{-1}(k_{pelvis} \cdot i_2)$$

En la Figura 3.13 se puede ver para la cadera derecha los vectores involucrados en el cálculo de  $\beta$ . Estos vectores se encuentran contenidos en el plano perpendicular al  $I_{R_{HJC}}$ , el cual, según la convención, es el eje de abducción/aducción.

Cuando la cadera derecha está en abducción (Figura 3.13.a) el vector  $i_1$  y  $k_{pelvis}$  forman un ángulo menor a  $90^\circ$  por lo que su producto interno es positivo y su arcoseno también. El ángulo que se obtiene a partir del arcoseno representa cuanto, en sentido de abducción, el muslo se “desalinea” de la pelvis en el plano perpendicular a  $I_{R_{HJC}}$ . En la Figura 3.13.a se puede interpretar como el ángulo comprendido entre  $i_1$  e  $i_{pelvis}$  proyectado en el plano perpendicular a  $I_{R_{HJC}}$ .

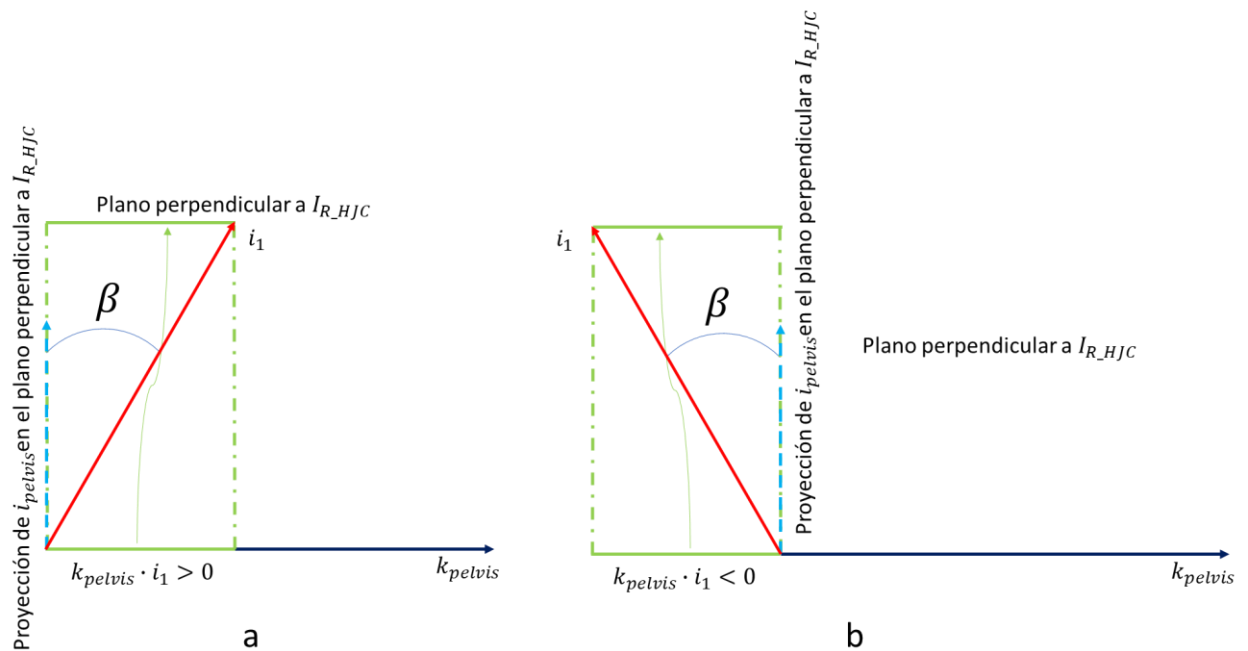


FIGURA 3.13 - ÁNGULO  $\beta$  EN CASOS DE ABDUCCIÓN (A) Y ADUCCIÓN (B) PARA LA CADERA DERECHA (VISTA DESDE EL FRENTE DEL SUJETO).

En el caso de aducción en la Figura 3.13.b se puede observar esta situación. Se puede observar que el ángulo  $\beta$  es negativo debido al valor del producto interno.

Los valores obtenidos de  $\beta$  cumplen de esta manera con la convención de signos. En donde la abducción es positiva y la aducción negativa.

En el caso de la cadera izquierda cuando existe una abducción los vectores se orientan como en la Figura 3.14.a, se puede observar que es muy similar al caso de aducción de la cadera derecha. El producto interno arroja un valor negativo y el arcoseno de este último también. La convención establece que la abducción es positiva, motivo por el cual la expresión de la cadera izquierda para el cálculo del ángulo  $\beta$  posee un signo negativo.

En la aducción sucede lo mismo (Figura 3.14.b), el producto interno entre  $i_2$  y  $k_{pelvis}$  es positivo y el ángulo obtenido a partir del arcoseno también. Por lo que se requiere del signo negativo para respetar la convención.

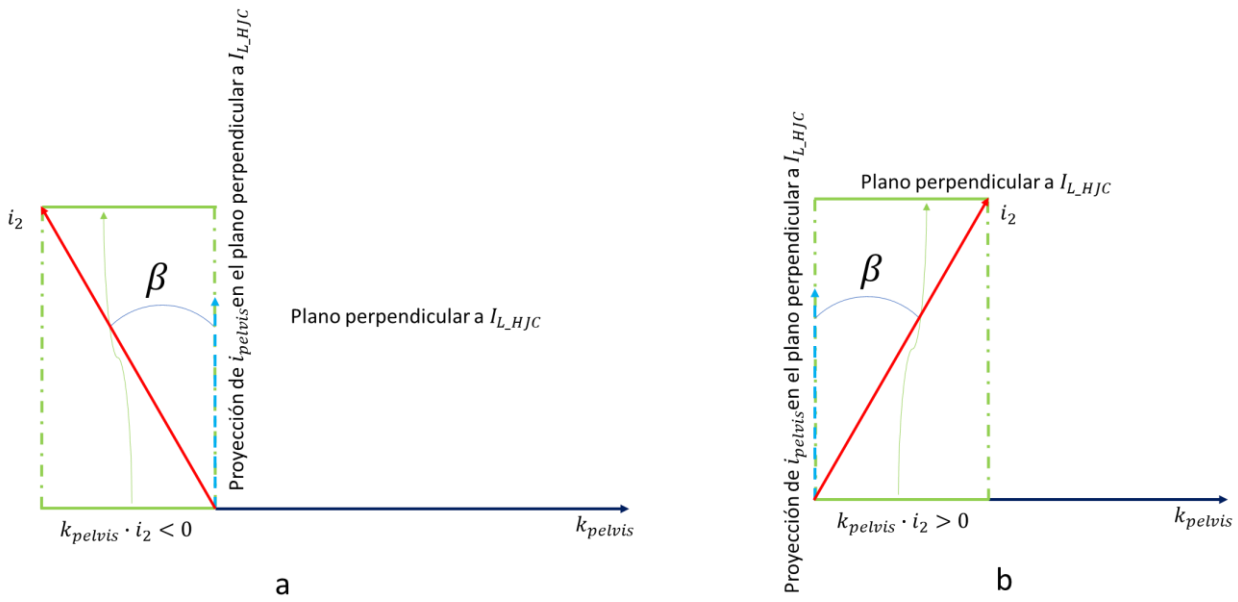


FIGURA 3.14 - ÁNGULO  $\beta$  EN CASOS DE ABDUCCIÓN (A) Y ADUCCIÓN (B) PARA LA CADERA IZQUIERDA (VISTA DESDE EL FRENTE DEL SUJETO).

El ángulo  $\gamma$  se obtiene mediante las siguientes expresiones para las caderas derecha e izquierda:

$$\gamma_{R\_HJC} = -\sin^{-1}(I_{R\_HJC} \cdot k_1)$$

$$\gamma_{L\_HJC} = \sin^{-1}(I_{L\_HJC} \cdot k_2)$$

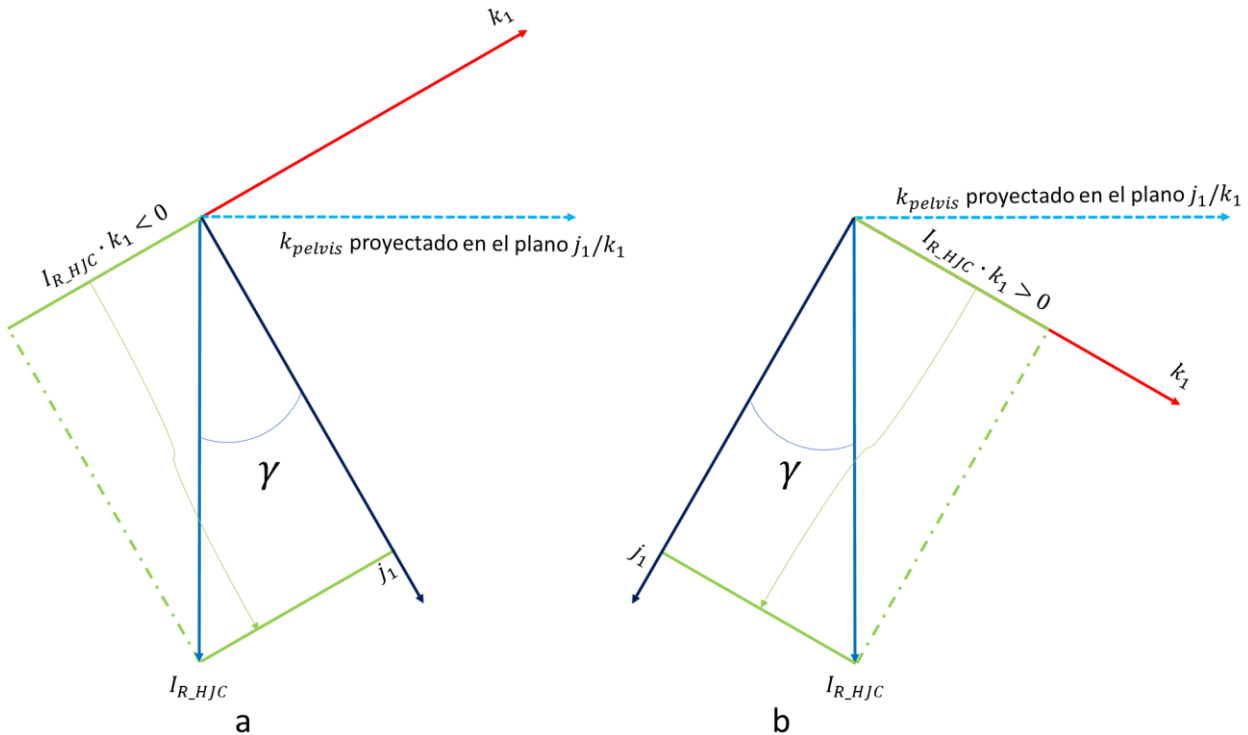


FIGURA 3.15 - ÁNGULO  $\gamma$  DE LA CADERA DERECHA EN ROTACIÓN INTERNA (A) Y ROTACIÓN EXTERNA (B) (VISTA SUPERIOR DEL MUSLO DERECHO).

En la Figura 3.15 se observan los vectores involucrados en la rotación interna y externa en el plano  $i_1, j_1$  desde la vista superior del muslo. Si la cadera no se encontrara rotada, el vector  $j_1$  y  $I_{R\_HJC}$



se encontrarían alineados y el valor de rotación arrojado por la expresión mostrada anteriormente sería nulo. En el caso de rotación interna (Figura 3.15.a) el vector  $j_1$  se aleja del vector  $I_{R\_HJC}$  y el producto interno de  $I_{R\_HJC}$  con  $k_1$  es negativo. Al realizar el arcoseno se encuentra el valor del ángulo  $\gamma$  que representa el ángulo entre los versores  $I_{R\_HJC}$  y  $j_1$ . Debido a que la rotación interna es positiva por convención y el arcoseno de este producto interno arroja un valor negativo, se le adiciona un signo negativo a la expresión.

En el caso de rotación externa (Figura 3.15.b), la situación es similar. El vector  $j_1$  se aleja del vector  $I_{R\_HJC}$  en el otro sentido de rotación y el producto interno de  $I_{R\_HJC}$  con  $k_1$  es positivo. Al realizar el arcoseno se encuentra el valor del ángulo  $\gamma$  que representa el ángulo entre los versores  $I_{R\_HJC}$  y  $j_1$ . Debido a que la rotación externa es negativa por convención y el arcoseno de este producto interno arroja un valor positivo para esta situación, se le adiciona un signo negativo a la expresión.

Para la cadera izquierda, la situación de rotación interna/externa es similar al de la cadera derecha. Se distingue únicamente en el sentido de giro. Mientras en la Figura 3.15.a se observa una rotación interna de la cadera derecha como un giro en sentido antihorario, en la cadera izquierda una rotación interna se manifiesta en un sentido de giro horario (Figura 3.16.a). Esto implica un cambio de signo en el producto interno. El producto  $I_{L\_HJC} \cdot k_2$  es entonces positivo para la situación de rotación interna (Figura 3.16.a), y negativo cuando hay una rotación externa de la cadera izquierda (Figura 3.16.b). Por lo tanto, el ángulo obtenido al realizar el arcoseno respeta la convención y no es necesario adicionar el cambio de signo en la expresión.

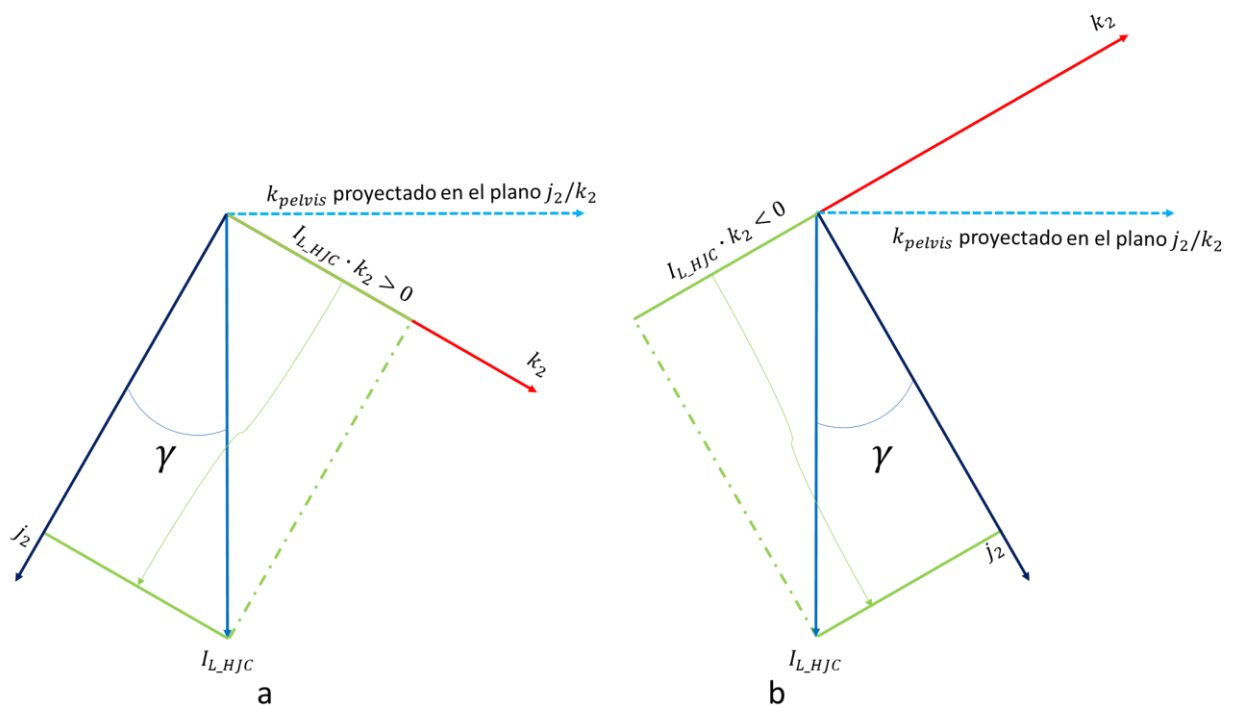


FIGURA 3.16 - ÁNGULO  $\gamma$  DE LA CADERA IZQUIERDA EN ROTACIÓN INTERNA (A) Y ROTACIÓN EXTERNA (B) (VISTA SUPERIOR DEL MUSLO IZQUIERDO).

#### 3.4.2.2 ÁNGULOS ARTICULARES DE LAS RODILLAS

En la articulación de la rodilla ( $KJC$ ) el segmento proximal es el muslo y el segmento distal es la pierna (Figura 3.17). El  $I_{R\_KJC}$  y  $I_{L\_KJC}$  están definidos como

$$I_{R\_KJC} = \frac{k_1 \times i_3}{|k_1 \times i_3|}$$

$$I_{L\_KJC} = \frac{k_2 \times i_4}{|k_2 \times i_4|}$$

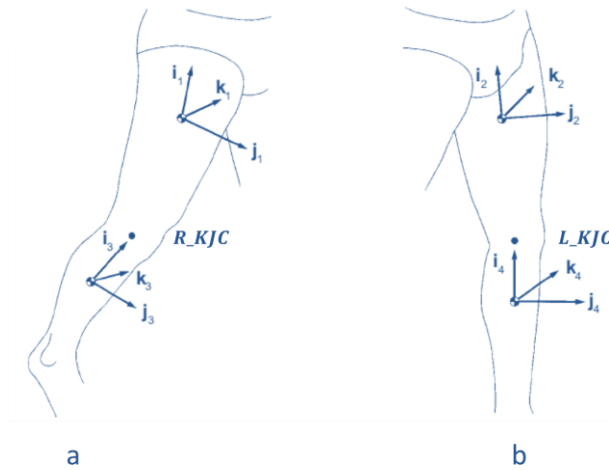
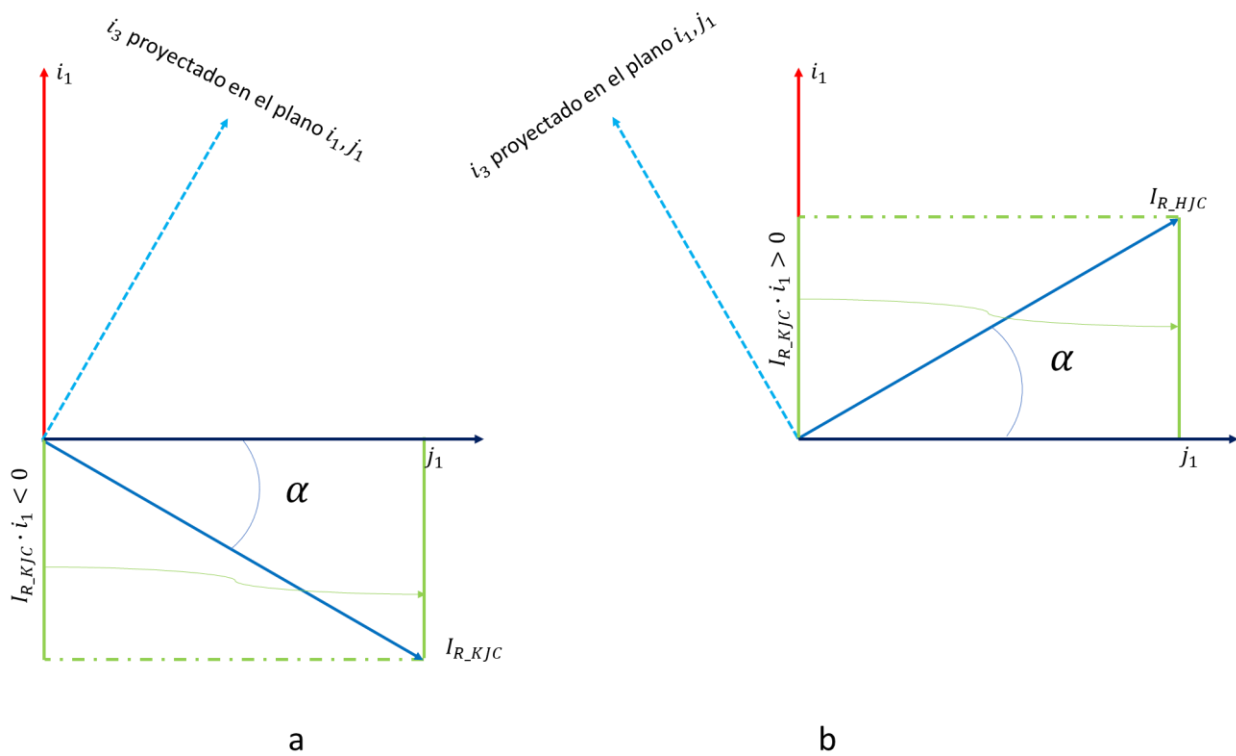


FIGURA 3.17 – ARTICULACIONES DE LAS RODILLAS [1].

El ángulo  $\alpha$  para las rodillas se definen, para cumplir con la convención, de la siguiente manera:

$$\alpha_{R\_KJC} = -\sin^{-1}(I_{R\_KJC} \cdot i_1)$$

$$\alpha_{L\_HJC} = -\sin^{-1}(I_{L\_KJC} \cdot i_2)$$


 FIGURA 3.18 – ÁNGULO  $\alpha$  EN CASOS DE FLEXIÓN (A) E HIPEREXTENSIÓN (B) PARA LA RODILLA DERECHA (VISTA LATERAL DERECHA DEL MUSLO DERECHO).

En la Figura 3.18 se pueden observar las orientaciones de los vectores involucrados en el cálculo para un caso de flexión de rodilla(a) e hiperextensión de rodilla (b) derecha. Como se puede observar, el vector  $I_{R\_KJC}$  está contenido en el plano  $i_1$  y  $j_1$  debido a que es perpendicular a  $k_1$ . Esto sucede porque el vector resultante de un producto vectorial es perpendicular a los dos vectores involucrados en la operación. Por esto último el vector  $I_{R\_KJC}$  también es perpendicular a  $i_3$ .

En la Figura 3.18.a se muestra un caso de flexión. En este se observa que la proyección obtenida del producto  $I_{R\_KJC} \cdot i_1$  es negativa y que al realizar el arcoseno es posible obtener el valor del ángulo entre  $I_{R\_KJC}$  y  $j_1$  negativo. Como la convención establece que la flexión es positiva la expresión se multiplica por  $-1$  para adecuarse a la misma.

La Figura 3.18.b es un caso de hiperextensión. En este se observa que la proyección obtenida del producto  $I_{R\_HJC} \cdot i_{pelvis}$  es positiva y que al realizar el arcoseno se puede obtener el valor de del ángulo entre  $I_{R\_KJC}$  y  $j_1$ , también positivo. Nuevamente el signo menos en la expresión del cálculo de ángulo permite que se adecúe a la convención.

El  $\alpha$  para la rodilla izquierda tiene el mismo comportamiento, un análisis similar al que se realiza la rodilla derecha con la Figura 3.19 permitiría llegar a la misma conclusión.

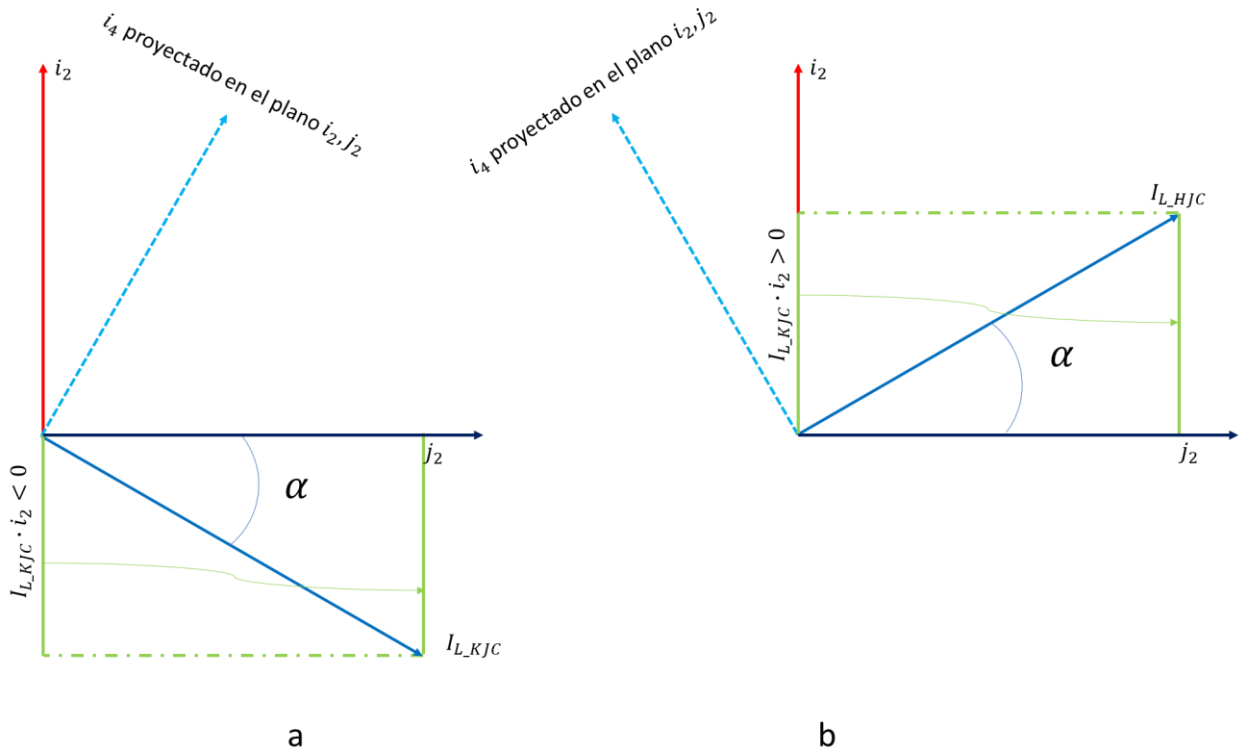


FIGURA 3.19 - ÁNGULO  $\alpha$  EN CASOS DE FLEXIÓN (A) Y EXTENSIÓN (B) PARA LA RODILLA IZQUIERDA (VISTA LATERAL DERECHA DEL MUSLO IZQUIERDO).

Los ángulos  $\beta$  de las rodillas se calculan como se muestra en las siguientes expresiones:

$$\beta_{R\_KJC} = \sin^{-1}(k_1 \cdot i_3)$$

$$\beta_{L\_KJC} = -\sin^{-1}(k_2 \cdot i_4)$$

En la Figura 3.13 se puede ver para la rodilla derecha los vectores involucrados en el cálculo de  $\beta$ . Estos vectores se encuentran contenidos en el plano perpendicular al  $I_{R\_KJC}$ , el cual, según la

convención, es el eje de abducción/aducción. En el caso de la rodilla, estas angulaciones se definen como valgo y varo. El valgo es análogo a la abducción y al varo a la aducción (Figura 3.20).

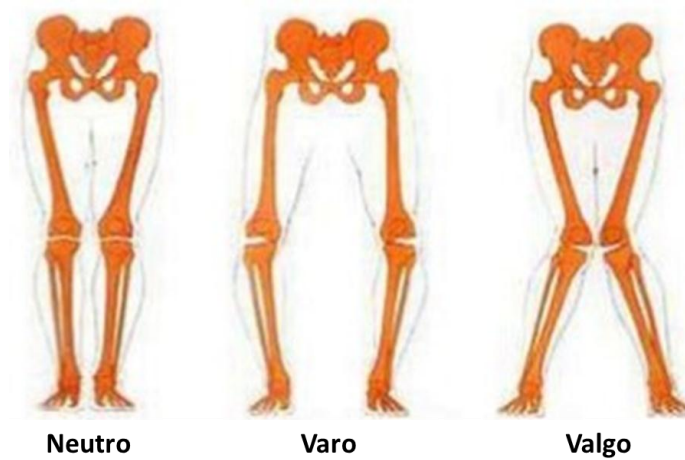


FIGURA 3.20 – ESQUEMATIZACIÓN DEL VARO Y VALGO DE RODILLA.

Cuando la rodilla derecha está en valgo (Figura 3.21.a) el vector  $i_3$  y  $k_1$  forman un ángulo menor a  $90^\circ$  por lo que su producto interno es positivo y su arcoseno también. El ángulo que se obtiene a partir del arcoseno representa cuanto, en sentido de abducción, la pierna se “desalinea” del muslo en el plano perpendicular a  $I_{R\_KJC}$ . En la Figura 3.21.a se puede interpretar como el ángulo comprendido entre  $i_3$  e  $i_1$  proyectado en el plano perpendicular a  $I_{R\_KJC}$ .

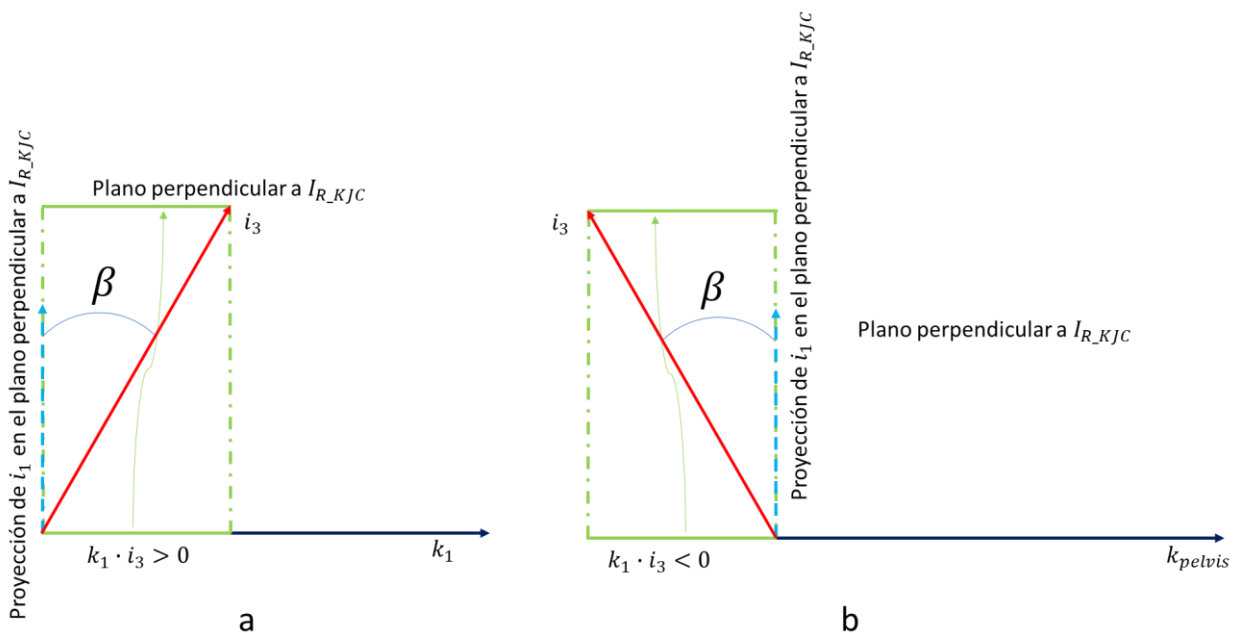


FIGURA 3.21 - ÁNGULO  $\beta$  EN CASOS DE VALGO (A) Y VARO (B) PARA LA RODILLA DERECHA (VISTA DESDE EL FRENTE DEL SUJETO).

En el caso de aducción en la Figura 3.21.b se puede observar esta situación. Se puede observar que el ángulo  $\beta$  es negativo debido al valor del producto interno.

Los valores obtenidos de  $\beta$  cumplen de esta manera con la convención de signos. En donde la abducción es positiva y la aducción negativa.

En el caso de la rodilla izquierda cuando existe un valgo los vectores se orientan como en la Figura 3.22.a, se puede observar que es muy similar al caso de valgo de la rodilla derecha. El producto interno arroja un valor negativo y el arcoseno de este último también. La convención establece que el valgo es positivo, motivo por el cual la expresión de la rodilla izquierda para el cálculo del ángulo  $\beta$  posee un signo negativo.

En el varo sucede lo mismo (Figura 3.22.b), el producto interno entre  $i_4$  y  $k_2$  es positivo y el ángulo obtenido a partir del arcoseno también. Por lo que se requiere del signo negativo para respetar la convención.

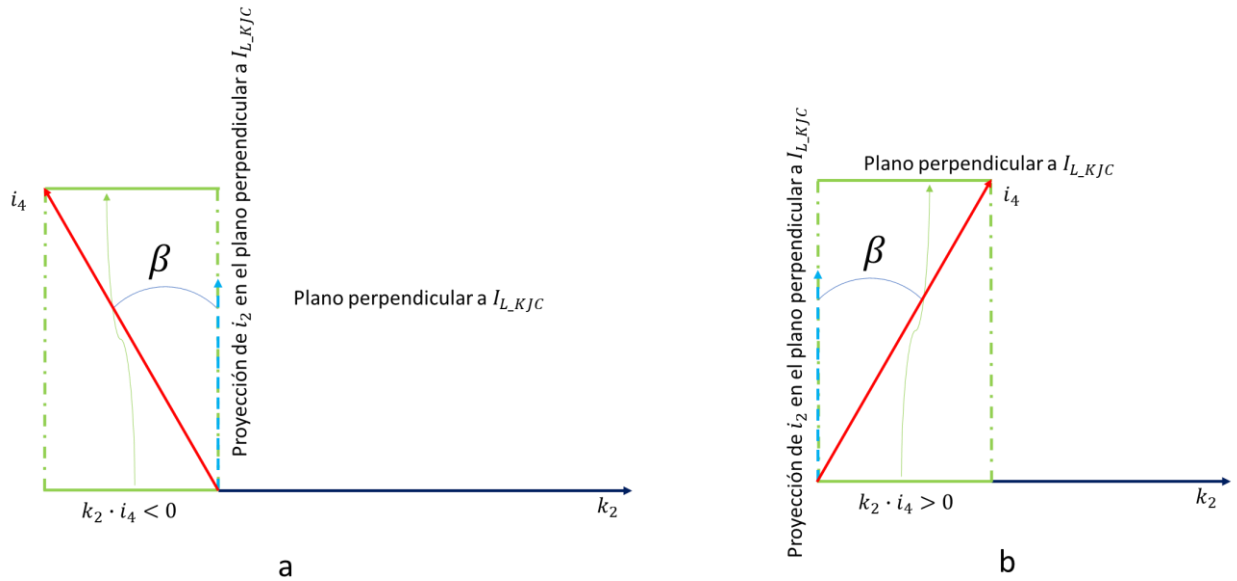


FIGURA 3.22 - ÁNGULO  $\beta$  EN CASOS DE VALGO (A) Y VARO (B) PARA LA RODILLA IZQUIERDA (VISTA DESDE EL FRENTE DEL SUJETO).

El ángulo  $\gamma$  se obtiene mediante las siguientes expresiones para las rodillas derecha e izquierda:

$$\gamma_{R\_KJC} = -\sin^{-1}(I_{R\_KJC} \cdot k_3)$$

$$\gamma_{L\_KJC} = \sin^{-1}(I_{L\_KJC} \cdot k_4)$$

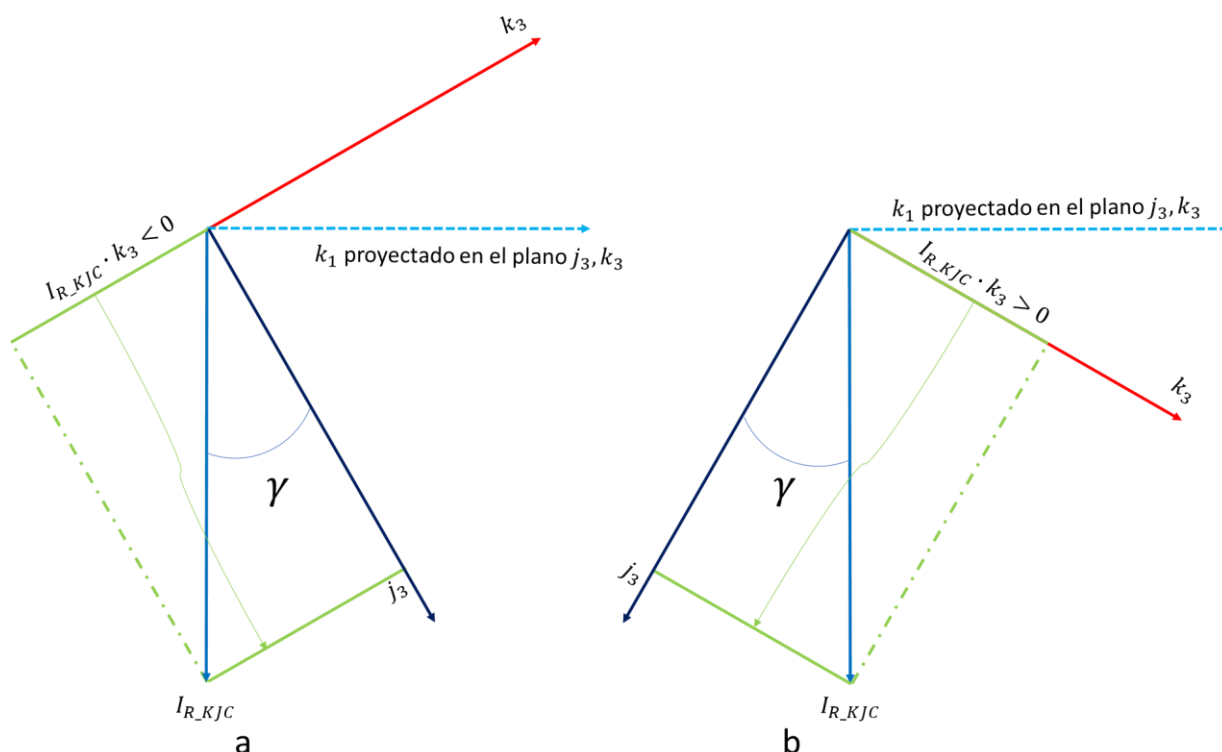


FIGURA 3.23 – ÁNGULO  $\gamma$  DE LA RODILLA DERECHA EN ROTACIÓN INTERNA (A) Y ROTACIÓN EXTERNA (B) (VISTA SUPERIOR DE LA PIERNA DERECHA).

En la Figura 3.23 se observan los vectores involucrados en la rotación interna y externa en el plano  $i_3, j_3$  desde la vista superior de la pierna derecha. Si la rodilla no se encontrara rotada, el vector  $j_3$  y  $I_{R\_KJC}$  se encontrarían alineados y el valor de rotación arrojado por la expresión mostrada anteriormente sería nulo. En el caso de rotación interna (Figura 3.23.a) el vector  $j_3$  se aleja del vector  $I_{R\_KJC}$  y el producto interno de  $I_{R\_KJC}$  con  $k_3$  es negativo. Al realizar el arcoseno se encuentra el valor del ángulo  $\gamma$  que representa el ángulo entre los versores  $I_{R\_KJC}$  y  $j_3$ . Debido a que la rotación interna es positiva por convención y el arcoseno de este producto interno arroja un valor negativo, se le adiciona un signo negativo a la expresión.

En el caso de rotación externa (Figura 3.23.b), la situación es similar. El vector  $j_3$  se aleja del vector  $I_{R\_KJC}$  en el otro sentido de rotación y el producto interno de  $I_{R\_KJC}$  con  $k_3$  es positivo. Al realizar el arcoseno se encuentra el valor de  $\gamma$  que representa el ángulo entre los versores  $I_{R\_KJC}$  y  $j_3$ . Debido a que la rotación externa es negativa por convención y el arcoseno de este producto interno arroja un valor positivo es necesario el signo negativo en la expresión.

Para la rodilla izquierda, la situación de rotación interna/externa es similar al de la rodilla derecha. Se distingue únicamente en el sentido de giro. Mientras en la Figura 3.23.a se observa una rotación interna de la rodilla derecha como un giro en sentido antihorario, en la rodilla izquierda una rotación interna se manifiesta en un sentido de giro horario (Figura 3.24.a). Esto implica un cambio de signo en el producto interno. El producto  $I_{L\_KJC} \cdot k_4$  es entonces positivo para la situación de rotación interna (Figura 3.24.a), y negativo cuando hay una rotación externa de la rodilla izquierda (Figura 3.24.b). Por lo tanto, el ángulo obtenido al realizar el arcoseno respeta la convención y no es necesario adicionar el cambio de signo en la expresión.

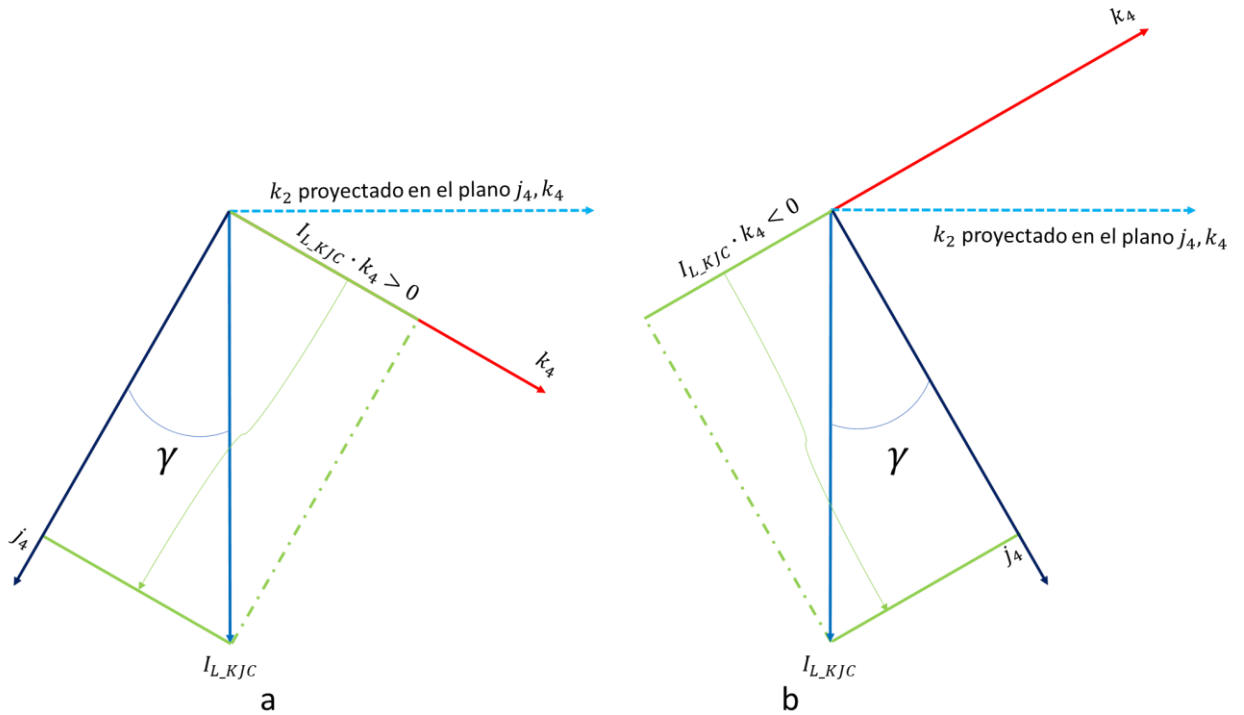


FIGURA 3.24 - ÁNGULO  $\gamma$  DE LA RODILLA IZQUIERDA EN ROTACIÓN INTERNA (A) Y ROTACIÓN EXTERNA (B) (VISTA SUPERIOR DE LA PIERNA IZQUIERDA).

### 3.4.2.3 ÁNGULOS ARTICULARES DE LOS TOBILLOS

En la articulación de los tobillos ( $AJC$ ) el segmento proximal es la pierna y el segmento distal es el pie (Figura 3.25). Para esta articulación aplica la siguiente convención:

$\alpha$  = dorsiflexión (+) /ángulo de plantarflexión (-)

$\beta$  = Progresión Externa o Abducción (+)/Progresión Interna o Aducción (-)

$\gamma$  = ángulo de inversión (+)/eversión (-)

El  $I_{R_AJC}$  y  $I_{L_AJC}$  están definidos como

$$I_{R_AJC} = \frac{k_3 \times i_5}{|k_3 \times i_5|}$$

$$I_{L_AJC} = \frac{k_4 \times i_6}{|k_4 \times i_6|}$$

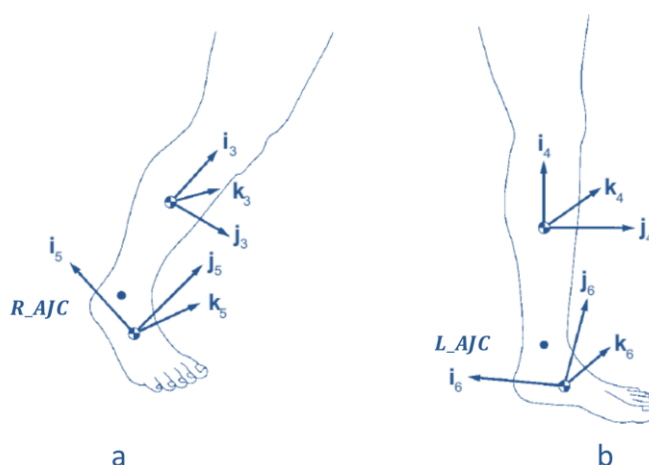
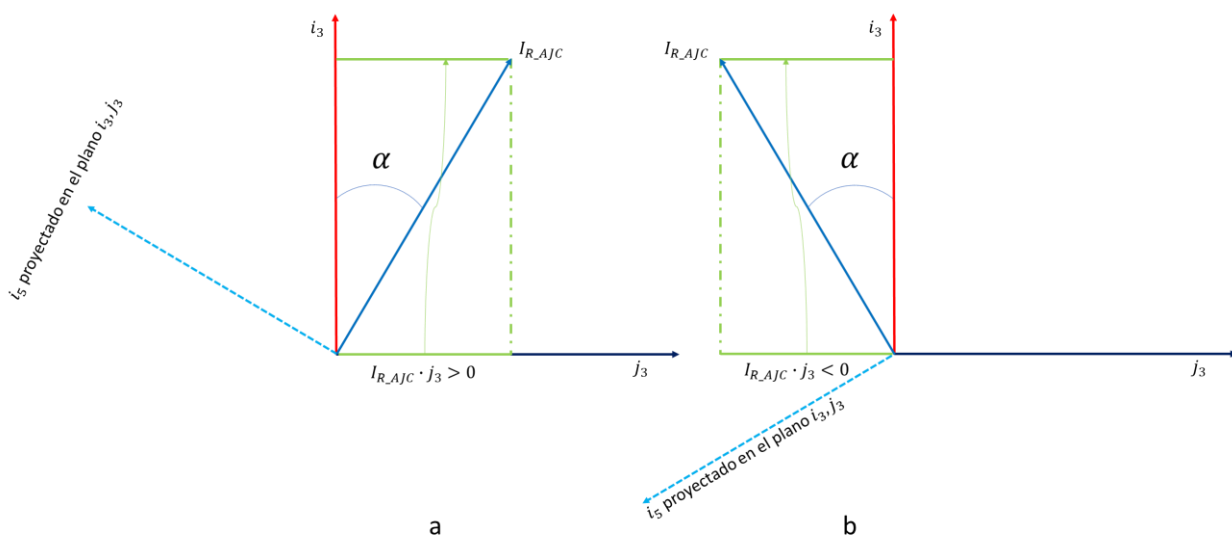


FIGURA 3.25 – ARTICULACIONES DE LOS TOBILLOS [1].

El ángulo  $\alpha$  para los tobillos se definen, para cumplir con la convención, de la siguiente manera:

$$\alpha_{R\_AJC} = -\sin^{-1}(I_{R\_AJC} \cdot j_3)$$

$$\alpha_{L\_AJC} = -\sin^{-1}(I_{L\_AJC} \cdot j_4)$$


 FIGURA 3.26 – ÁNGULO  $\alpha$  EN CASOS DE PLANTAR-FLEXIÓN (A) Y DORSI-FLEXIÓN (B) PARA EL TOBILLO DERECHO (VISTA LATERAL DERECHA DE LA PIERNA DERECHA).

En la Figura 3.26 se pueden observar las orientaciones de los vectores involucrados en el cálculo para un caso de plantar-flexión de tobillo (a) y dorsi-flexión de tobillo (b) derecho. Como se puede observar, el vector  $I_{R\_AJC}$  está contenido en el plano  $i_3$  y  $j_3$  debido a que es perpendicular a  $k_3$ . Esto sucede porque el vector resultante de un producto vectorial es perpendicular a los dos vectores involucrados en la operación. Por esto último el vector  $I_{R\_AJC}$  también es perpendicular a  $i_5$ .

En la Figura 3.26.a se muestra un caso de plantar-flexión. En este se observa que la proyección obtenida del producto  $I_{R\_AJC} \cdot j_3$  es positiva y que al realizar el arcoseno es posible obtener el valor de  $\alpha$ , también positivo.



La Figura 3.26.b es un caso de dorsi-flexión. En este se observa que la proyección obtenida del producto  $I_{R\_AJC} \cdot j_3$  es negativa y que al realizar el arcoseno se puede obtener el valor de  $\alpha$ , también negativo. En ambos casos la expresión es coincidente con la convención y permite obtener la desviación angular en el plano sagital del segmento distal respecto al proximal.

El  $\alpha$  para el tobillo izquierdo tiene el mismo comportamiento, un análisis similar al que se realiza el tobillo derecho con la Figura 3.12 permitiría llegar a la misma conclusión.

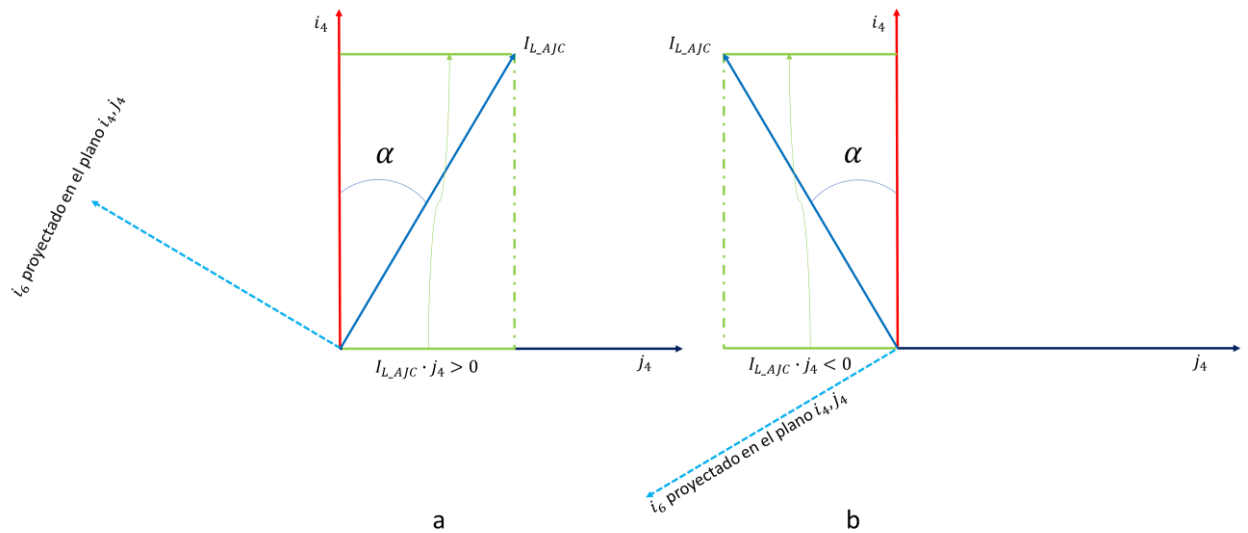


FIGURA 3.27 - ÁNGULO  $\alpha$  EN CASOS DE PLANTAR-FLEXIÓN (A) Y DORSI-FLEXIÓN (B) PARA EL TOBILLO IZQUIERDO (VISTA LATERAL DERECHA DE LA PIERNA IZQUIERDA).

Los ángulos  $\beta$  de los tobillos se calculan como se muestra en las siguientes expresiones:

$$\beta_{R\_AJC} = \sin^{-1}(k_3 \cdot i_5)$$

$$\beta_{L\_AJC} = -\sin^{-1}(k_4 \cdot i_6)$$

En la Figura 3.28 se puede ver para el tobillo derecho los vectores involucrados en el cálculo de  $\beta$ . Estos vectores se encuentran contenidos en el plano perpendicular a  $I_{R\_AJC}$ , el cual, según la convención, es el eje de varo/valgo.

Cuando el tobillo derecho está en varo (Figura 3.28.a) el vector  $i_5$  y  $k_3$  forman un ángulo menor a  $90^\circ$  por lo que su producto interno es positivo y su arcoseno también. El ángulo que se obtiene a partir del arcoseno representa cuanto se abre en sentido lateral la punta del pie respecto a la posición neutral en el plano perpendicular a  $I_{R\_AJC}$ .

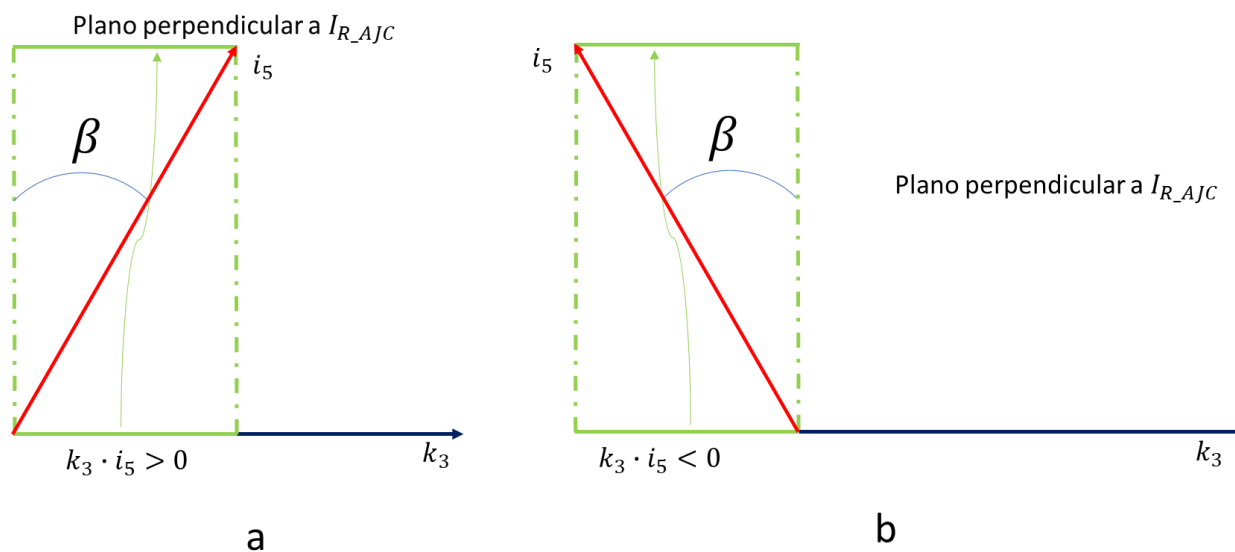


FIGURA 3.28 - ÁNGULO  $\beta$  EN CASOS DE VARO (A) Y VALGO (B) PARA EL TOBILLO DERECHO (VISTA DESDE ARRIBA DEL SUJETO).

En el caso de valgo, en la Figura 3.28.b se puede observar esta situación. Se puede observar que el ángulo  $\beta$  es negativo debido al valor del producto interno.

Los valores obtenidos de  $\beta$  cumplen de esta manera con la convención de signos. En donde el varo es positivo y el valgo negativo.

En el caso del tobillo, cuando existe un varo, los vectores se orientan como en la Figura 3.29.a, se puede observar que es muy similar al caso de valgo del tobillo derecho. El producto interno arroja un valor negativo y el arcoseno de este último también. La convención establece que el varo es positivo, motivo por el cual la expresión del tobillo izquierdo para el cálculo del ángulo  $\beta$  posee un signo negativo.

En el valgo sucede lo mismo (Figura 3.29.b), el producto interno entre  $i_6$  y  $k_4$  es positivo y el ángulo obtenido a partir del arcoseno también. Por lo que se requiere del signo negativo para respetar la convención. Por lo que la expresión, que contiene el signo negativo, respeta la convención.

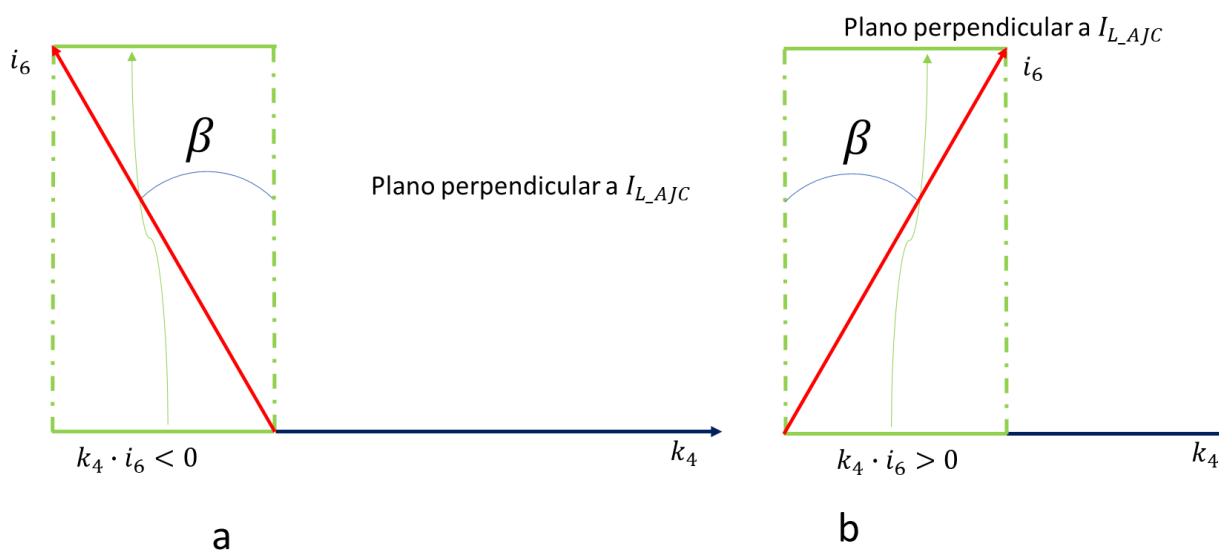


FIGURA 3.29 - ÁNGULO  $\beta$  EN CASOS DE VARO (A) Y VALGO (B) PARA EL TOBILLO IZQUIERDO (VISTA DESDE ARRIBA DEL SUJETO).

El ángulo  $\gamma$  se obtiene mediante las siguientes expresiones para los tobillos derecho e izquierdo:

$$\gamma_{R\_AJC} = \sin^{-1}(I_{R\_AJC} \cdot k_5)$$

$$\gamma_{L\_AJC} = -\sin^{-1}(I_{L\_AJC} \cdot k_6)$$

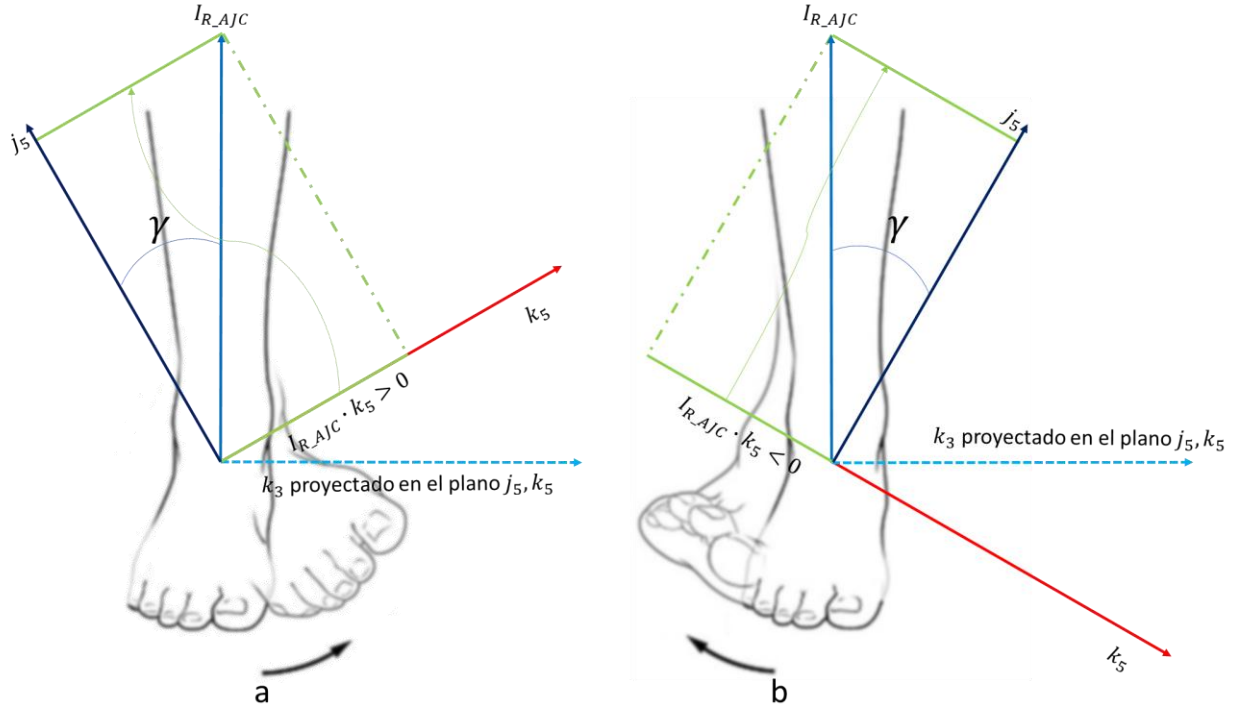


FIGURA 3.30 – ÁNGULO  $\gamma$  DEL TOBILLO DERECHO EN INVERSIÓN (A) Y EVERSIÓN (B) (VISTA ANTERIOR DEL PIE DERECHO).

En la Figura 3.30 se observan los vectores involucrados en la inversión y evasión en el plano  $j_5, k_5$  desde la vista anterior del pie derecho. Si el pie no se encontrara rotado, el vector  $j_5$  y  $I_{R\_AJC}$  se encontrarían alineados y el valor de inversión/eversión arrojado por la expresión mostrada anteriormente sería nulo. En el caso de inversión (Figura 3.30.a) el vector  $j_5$  se aleja del vector  $I_{R\_AJC}$  y el producto interno de  $I_{R\_AJC}$  con  $k_5$  es positivo. Al realizar el arcoseno se encuentra el valor del ángulo  $\gamma$  que representa el ángulo entre los versores  $I_{R\_AJC}$  y  $j_5$ .

En el caso de rotación externa (Figura 3.30.b), la situación es similar. El vector  $j_5$  se aleja del vector  $I_{R\_AJC}$  en el otro sentido de rotación y el producto interno de  $I_{R\_AJC}$  con  $k_5$  es negativo. Al realizar el arcoseno se encuentra el valor del ángulo  $\gamma$  que representa el ángulo entre los versores  $I_{R\_AJC}$  y  $j_5$ .

Para el tobillo izquierdo, la situación de inversión/eversión es similar al del tobillo derecho. Se distingue únicamente en el sentido de giro. Mientras en la Figura 3.30.a se observa una inversión del tobillo derecho como un giro en sentido horario, en el tobillo izquierdo una inversión se manifiesta en un sentido de giro antihorario (Figura 3.31.a). Esto implica un cambio de signo en el producto interno. El producto  $I_{L\_AJC} \cdot k_6$  es entonces negativo para la situación de inversión (Figura 3.31.a), y positivo cuando hay una evasión del tobillo (Figura 3.31.b). Por lo tanto, el ángulo obtenido al realizar el arcoseno requiere de su multiplicación por  $-1$  para respetar la convención.

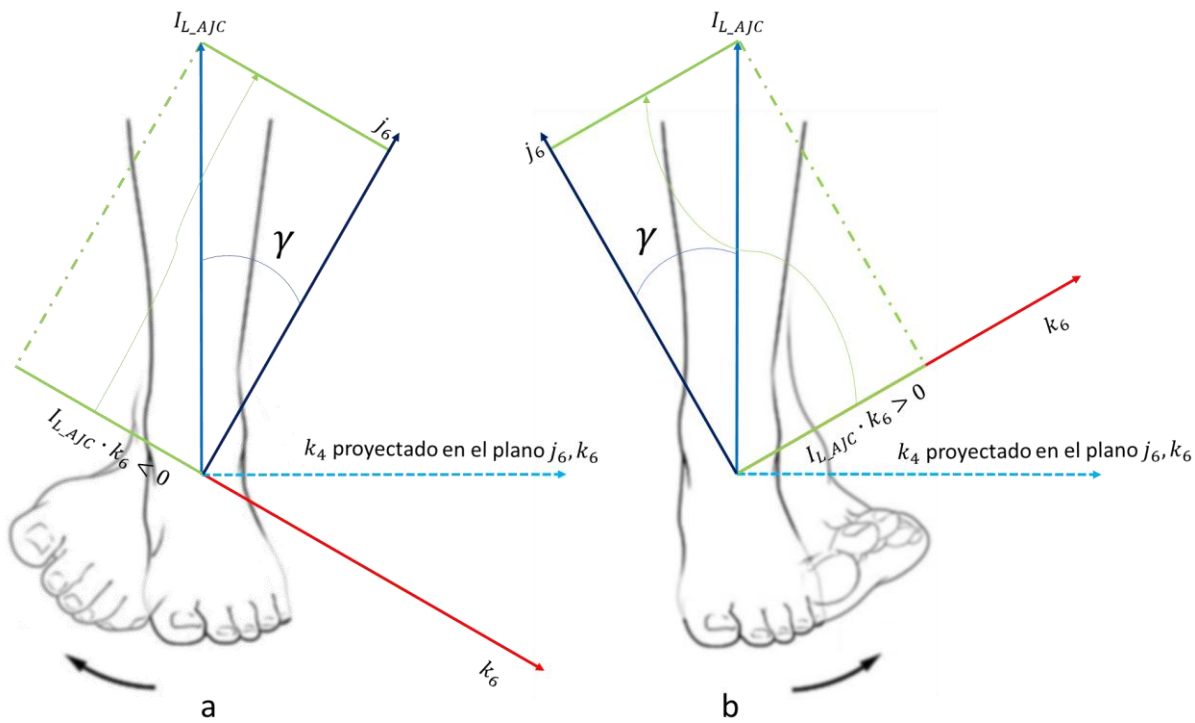


FIGURA 3.31 – ÁNGULO  $\gamma$  DEL TOBILLO IZQUIERDO EN INVERSIÓN (A) Y EVERSIÓN (B) (VISTA ANTERIOR DEL PIE IZQUIERDO).

#### 3.4.2.4 ÁNGULOS ARTICULARES CON EXCURSIÓN DE $360^\circ$

La propuesta de Vaughan para el cálculo de ángulos posee una limitante propia del arcoseno. Esta función arroja valores desde  $-90^\circ$  a  $90^\circ$  para las entradas posibles que son entre  $-1$  y  $1$ . En el caso de que un ángulo de flexión/extensión de cadera estuviese fuera del rango de  $-90^\circ$  a  $90^\circ$ , la expresión no permite obtener el valor real de flexión/extensión. Para un ángulo de cadera de  $110^\circ$  de flexión, con la expresión desarrollada se obtiene un valor de  $80^\circ$ , debido a que el valor del producto interno entre los vectores  $I_{R_HJC}$  e  $i_{pelvis}$  son iguales para ambos casos (ver Figura 3.32)

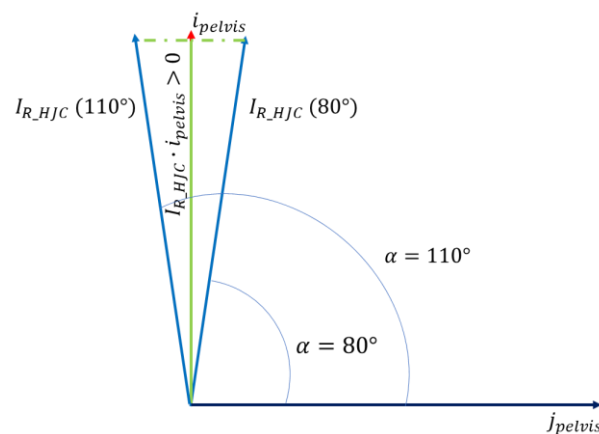


FIGURA 3.32 – PRODUCTOS INTERNOS IGUALES PARA EL CASO DE UNA FLEXIÓN DE CADERA DE  $110^\circ$  Y  $80^\circ$ .

Una solución a esta limitante es resolver el cálculo de ángulos con la misma estrategia que se calculan los ángulos de Euler en el apartado 2.4.2. Aquí se utiliza la función arco-coseno, debido a que esta excursiona entre  $0^\circ$  y  $180^\circ$  con entradas de  $1$  a  $-1$ . Esta función tiene el problema de que no

distingue positivos y negativos, pero es posible solucionarlo si se define la polaridad con una expresión auxiliar de manera análoga al cálculo de  $\alpha$  en el apartado 2.4.2.

A continuación, se definen los ángulos articulares de flexión y extensión; y de rotación interna y externa para las 6 articulaciones de los miembros inferiores con una excursión de 360°. Los ángulos de aducción y abducción rara vez superan los 90° para la mayoría de los gestos.

$$\alpha_{R\_HJC} = \cos^{-1}(I_{R\_HJC} \cdot j_{pelvis}) \cdot \left( \frac{I_{R\_HJC} \cdot i_{pelvis}}{|I_{R\_HJC} \cdot i_{pelvis}|} \right)$$

$$\gamma_{R\_HJC} = -\cos^{-1}(I_{R\_HJC} \cdot j_1) \cdot \left( \frac{I_{R\_HJC} \cdot k_1}{|I_{R\_HJC} \cdot k_1|} \right)$$

$$\alpha_{L\_HJC} = \cos^{-1}(I_{L\_HJC} \cdot j_{pelvis}) \cdot \left( \frac{I_{L\_HJC} \cdot i_{pelvis}}{|I_{L\_HJC} \cdot i_{pelvis}|} \right)$$

$$\gamma_{L\_HJC} = \cos^{-1}(I_{L\_HJC} \cdot j_2) \cdot \left( \frac{I_{L\_HJC} \cdot k_2}{|I_{L\_HJC} \cdot k_2|} \right)$$

$$\alpha_{R\_KJC} = -\cos^{-1}(I_{R\_KJC} \cdot j_1) \cdot \left( \frac{I_{R\_KJC} \cdot i_1}{|I_{R\_KJC} \cdot i_1|} \right)$$

$$\gamma_{R\_KJC} = -\cos^{-1}(I_{R\_KJC} \cdot j_3) \cdot \left( \frac{I_{R\_KJC} \cdot k_3}{|I_{R\_KJC} \cdot k_3|} \right)$$

$$\alpha_{L\_KJC} = -\cos^{-1}(I_{L\_KJC} \cdot j_2) \cdot \left( \frac{I_{L\_KJC} \cdot i_2}{|I_{L\_KJC} \cdot i_2|} \right)$$

$$\gamma_{L\_KJC} = \cos^{-1}(I_{L\_KJC} \cdot j_4) \cdot \left( \frac{I_{L\_KJC} \cdot k_4}{|I_{L\_KJC} \cdot k_4|} \right)$$

$$\alpha_{R\_AJC} = -\cos^{-1}(I_{R\_AJC} \cdot i_3) \cdot \left( \frac{I_{R\_AJC} \cdot j_3}{|I_{R\_AJC} \cdot j_3|} \right)$$

$$\gamma_{R\_AJC} = \cos^{-1}(I_{R\_AJC} \cdot j_5) \cdot \left( \frac{I_{R\_AJC} \cdot k_5}{|I_{R\_AJC} \cdot k_5|} \right)$$

$$\alpha_{L\_AJC} = -\cos^{-1}(I_{L\_AJC} \cdot i_4) \cdot \left( \frac{I_{L\_AJC} \cdot j_4}{|I_{L\_AJC} \cdot j_4|} \right)$$

$$\gamma_{L\_AJC} = -\cos^{-1}(I_{L\_AJC} \cdot j_6) \cdot \left( \frac{I_{L\_AJC} \cdot k_6}{|I_{L\_AJC} \cdot k_6|} \right)$$

### 3.5 DINÁMICA

Establecidos los sistemas coordenados locales de cada segmento a través de los versores  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  y  $\vec{k}$  se pueden calcular los ángulos de Euler como se explicó en el apartado 2.4.2 y a partir de los mismos calcular la velocidad angular  $\omega_{segmento}$  de cada segmento como se desarrolló en la sección 2.5.

Debido a que se dispone de las aceleraciones lineales, velocidades angulares, masas, centros de masa, matrices de inercia y posiciones de los centros articulares es posible realizar un análisis dinámico como el desarrollado en el apartado 2.7.

### 3.5.1 FUERZAS ARTICULARES

Con la misma estrategia explicada en la sección 2.7.2 se procede a calcular las fuerzas articulares de nuestro modelo. Es importante recordar que se define al vector gravedad  $\vec{g}$  de la siguiente manera:

$$\vec{g} = (0\vec{i} + 0\vec{j} - 9,8\vec{k})[m/s^2]$$

## 4 BIBLIOGRAFÍA

- [1] C. L. Vaughan, B. L. Davis, and J. C. O'Connor, *The Three-Dimensional and Cyclic Nature of Gait*, Second Ed. Cape Town: Kiboho, 1999.
- [2] N. Massó, F. Rey, D. Romero, G. Gual, L. Costa, A. Germán, and A. Germán, "Aplicaciones de la electromiografía de superficie en el deporte," *Apunt. Med. l'esport*, vol. 45, no. 165, pp. 127–136, 2010.
- [3] G. R. Suárez, *Biomecánica deportiva y control del entrenamiento*. Medellín: Universidad de Antioquia, 2009.
- [4] D. A. Winter, *Biomechanics as an interdisciplinary*, Fourth Ed. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc, 2009.
- [5] M. Sillero Quintana, "Las medidas antropométricas," in *Curso 2005-06*, Madrid: I.N.E.F, 2005, pp. 7–42.
- [6] G. Wu and P. R. Cavanagh, "ISB RECOMMENDATIONS IN THE REPORTING FOR STANDARDIZATION OF KINEMATIC DATA," *J. Biomech.*, vol. 28, no. 10, pp. 1257–1261, 1995.
- [7] G. Wu, S. Siegler, P. Allard, C. Kirtley, A. Leardini, D. Rosenbaum, M. Whittle, D. D. D'Lima, L. Cristofolini, H. Witte, O. Schmid, and I. Stokes, "ISB recommendation on definitions of joint coordinate system of various joints for the reporting of human joint motion—part I: ankle, hip, and spine," *J. Biomech.*, vol. 35, no. 4, pp. 543–548, 2002.
- [8] G. Wu, F. C. T. Van Der Helm, H. E. J. Veeger, M. Makhsous, P. Van Roy, C. Anglin, J. Nagels, A. R. Karduna, K. McQuade, X. Wang, F. W. Werner, and B. Buchholz, "ISB recommendation on definitions of joint coordinate systems of various joints for the reporting of human joint motion - Part II: Shoulder, elbow, wrist and hand," *J. Biomech.*, vol. 38, no. 5, pp. 981–992, 2005.
- [9] P. R. Cavenagh, *Biomechanics of Distance Running*, 1era ed. Champaign: Human Kinetics Publishers, 1990.
- [10] M. Calderone, "IN VIVO EVALUATION OF THE TRANSLATIONS OF THE GLENO-HUMERAL JOINT USING MAGNETIC RESONANCE IMAGING," Universi, 2014.
- [11] A. Peters, R. Baker, M. E. Morris, and M. Sangeux, "A comparison of hip joint centre localisation techniques with 3-DUS for clinical gait analysis in children with cerebral palsy," *Gait Posture*, vol. 36, no. 2, pp. 282–286, 2012.
- [12] K. J. Ganley and C. M. Powers, "Determination of lower extremity anthropometric parameters using dual energy X-ray absorptiometry : the influence on net joint moments during gait," *Clin. Biomech.*, vol. 19, no. 1, pp. 50–56, 2004.
- [13] R. N. Kirkwood, E. G. Culham, and P. Costigan, "Radiographic and non-invasive determination of the hip joint center location: effect on hip joint moments," *Clin. Biomech.*, vol. 14, no. 4, pp. 227–235, 1999.
- [14] M. K. Lee, N. S. Le, A. C. Fang, and M. T. H. Koh, "Measurement of body segment parameters using dual energy X-ray absorptiometry and three-dimensional geometry : An application in gait analysis," *J. Biomech.*, vol. 42, no. 3, pp. 217–222, 2009.
- [15] A. J. Murphy, A. M. J. Bull, and A. H. McGregor, "Predicting the lumbosacral joint centre location from palpable anatomical landmarks," *J. Eng. Med.*, vol. 225, no. 11, pp. 1078–1083, 2011.
- [16] J. Peng, J. Panda, S. Van Sint Jan, and X. Wang, "Methods for determining hip and lumbosacral joint centers in a seated position from external anatomical landmarks," *J. Biomech.*, vol. 48, no. 2,

pp. 396–400, 2015.

- [17] G. S. Fleisig, R. F. Escamilla, J. R. Andrews, T. Matsuo, Y. Satterwhite, and S. W. Barrentine, "Kinematic and kinetic comparison between baseball pitching and football passing," *J. Appl. Biomech.*, vol. 12, no. 2, pp. 207–224, 1996.
- [18] C. G. M. Meskers, F. C. T. Van Der Helm, L. A. Rozendaal, and P. M. Rozing, "In vivo estimation of the glenohumeral joint rotation center from scapular bony landmarks by linear regression," *J. Biomech.*, vol. 31, no. 1, pp. 93–96, 1997.
- [19] M. Sangeux, A. Peters, and R. Baker, "Hip joint centre localization: Evaluation on normal subjects in the context of gait analysis," *Gait Posture*, vol. 34, no. 3, pp. 324–328, 2011.
- [20] R. Dumas, L. Chèze, and J. P. Verriest, "Adjustments to McConville et al. and Young et al. body segment inertial parameters," *J. Biomech.*, vol. 40, no. 3, pp. 543–553, 2007.
- [21] R. M. Ehrig, W. R. Taylor, G. N. Duda, and M. O. Heller, "A survey of formal methods for determining the centre of rotation of ball joints," *J. Biomech.*, vol. 39, no. 15, pp. 2798–2809, 2006.
- [22] T. Monnet, E. Desailly, M. Begon, C. Vallée, and P. Lacouture, "Comparison of the SCoRE and HA methods for locating in vivo the glenohumeral joint centre," *J. Biomech.*, vol. 40, no. 15, pp. 3487–3492, 2007.
- [23] M. O. Heller, S. Kratzstein, R. M. Ehrig, G. Wassilew, G. N. Duda, and W. R. Taylor, "The weighted optimal common shape technique improves identification of the hip joint center of rotation in vivo," *J. Orthop. Res.*, vol. 29, no. 10, pp. 1470–1475, 2011.
- [24] M. J. Pavol, T. M. Owings, and M. D. Grabiner, "Body segment inertial parameter estimation for the general population of older adults," *J. Biomech.*, vol. 35, no. 5, pp. 707–712, 2002.
- [25] J. L. Durkin, J. J. Dowling, and D. M. Andrews, "The measurement of body segment inertial parameters using dual energy X-ray absorptiometry," *J. Biomech.*, vol. 35, no. 12, pp. 1575–1580, 2002.
- [26] P. de Leva, "ADJUSTMENTS TO ZATSIORSKY-SELUYANOV'S SEGMENT INERTIA PARAMETERS," *J. Biomech.*, vol. 29, no. 9, pp. 1223–1230, 1996.
- [27] V. Zatsiorsky, V. Seluyanov, and L. Chugunova, "In Vivo Body Segment Inertial Parameters Determination Using A Gamma Scanner Method," in *Biomechanics of Human Movement: Applications in Rehabilitation, Sports and Ergonomics*, 1990, pp. 186–202.
- [28] M. P. Kadaba, H. K. Ramakrishnan, and M. E. Wootten, "Measurement of Lower Extremity Kinematics During Level Walking," *J. Orthop. Res.*, vol. 8, no. 3, pp. 383–392, 1990.
- [29] M. P. Kadaba, H. K. Ramakrishnan, M. E. Wootten, J. Gainey, G. Gorton, and G. V. B. Cochran, "Repeatability of Kinematic , Kinetic , and Electromyographic Data in Normal Adult Gait," *J. Orthop. Res.*, vol. 7, no. 6, pp. 849–860, 1989.
- [30] R. B. Davis III, S. Öunpuu, D. Tybursky, and J. R. Gage, "A gait analysis data collection and reduction technique," *Hum. Mov. Sci.*, vol. 10, pp. 575–587, 1991.
- [31] S. Öunpuu, R. B. Davis, and P. A. Deluca, "Joint kinetics : methods , interpretation and treatment decision-making in children with cerebral palsy and myelomeningocele," *Gait Posture*, vol. 4, pp. 62–78, 1996.
- [32] A. Avello, *Teoría de Máquinas*, 2nda ed. San Sebastián: Tecnun (Universidad de Navarra), 2014.
- [33] J. J. Rodríguez Padilla, "El Algebra y la Geometría de los Cuaternios y Algunas de sus Aplicaciones," Universidad de Sonora, 2010.



- [34] colaboradores de Wikipedia, "Ángulos de Euler," *Wikipedia, La enciclopedia libre*, 2017. [Online]. Available: [https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Ángulos\\_de\\_Euler&oldid=101316452](https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Ángulos_de_Euler&oldid=101316452). [Accessed: 18-Jan-2018].
- [35] A. Paul, S. Ian, and B. Jean-Pierre, *Three-Dimensional Analysis of Human Movements*. Human Kinetics, 1995.
- [36] R. A. Serway, "Las leyes del movimiento," in *Física Tomo I*, 4ta ed., Mexico D.F.: Mc Graw Hill, 1997, pp. 105–144.
- [37] R. F. Chandler, C. E. Clauser, J. T. McConville, H. M. Reynolds, and J. W. Young, "Investigation of Inertial Properties of the Human Body," Fort Belvoir, 1975.
- [38] E. Y. S. Chao, "Justification of triaxial goniometer for the measurement of joint rotation," *J. Biomech. Biomech.*, vol. 13, pp. 989–1006, 1980.
- [39] E. S. Grood and W. J. Suntay, "A Joint Coordinate System for the Clinical Description of Three-Dimensional Motions: Application to the Knee," *J. Biomech. Eng.*, vol. 105, no. 2, pp. 136–144, 1983.