Intro a la Probabilidad y estadística

Martes y Jueves Aula B17

Dra Ana Georgina Flesia

Ejemplo

- Es usual modelar el número de autos que entra al estacionamiento de un aeropuerto con una distribución de Poisson. ¿Qué distribución tendría el tiempo hasta el primer arribo?

- Esta es una variable aleatoria, pero de diferente tipo. Puede valer 10 minutos, 3 minutos 8 segundos, 1 minuto 20s segundos, $\sqrt{2}$ minuto o π minutos.
- En realidad, cualquier número mayor que cero puede ser un valor posible de una variable relacionada con el TIEMPO.

Ejemplo

- Para ser concretos, si el número de autos es Poisson con media $\lambda = 0.8$ autos POR MINUTO, representemos el tiempo hasta el primer arribo con la variable T.
- Podemos calcular la probabilidad de que el primer auto llegue después de dos minutos reescribiendo esta probabilidad en términos del número de arribos

$$P(T > 2) = P(\text{ 0 autos entre 0 y 2 minutos})$$

Ejemplo

- Sabemos que Y el número de autos entre 0 y 2 minutos tiene distribución Poisson $(\mu = 0.8 \times 2)$ por lo cual podemos evaluar la función de masa de Y en $x = 0$

$$
\begin{aligned}
P(T > 2) &= P(\text{ 0 autos entre 0 y 2 minutos}) \\
&= e^{-0.8 \cdot 2} \frac{(0.8 \cdot 2)^0}{0!} \\
&= e^{-1.6} \approx .202.
\end{aligned}
$$

Ejemplo

- Tambien podemos calcular la probabilidad que el primer auto en llegar este entre 2 y 3 minutos, como

$$P(2 < T < 3) = P(T > 2) - P(T > 3)$$

- Calculamos $P(T > 3)$ en la misma forma que calculamos $P(T > 2)$ arriba

$$P(T > 3) = e^{-0.8 \cdot 3} \frac{(0.8 \cdot 3)^0}{0!} = e^{-2.4} \approx .091.$$

- Por lo cual

$$P(2 < T < 3) = e^{-1.6} - e^{-2.4} \approx .111.$$

Observación

- Si bien calculamos probabilidades especificas acerca de T , como podemos describir su distribución? En particular:
  1. Cual es su función de distribución acumulada?
  2. Cual es su función de densidad?

Función de distribución del primer arribo

- Recordemos que la función de distribución acumulada se define como

$$F(t) = P(T \leq t) = 1 - P(T > t).$$

- Supongamos ahora que el número de arribos en $[0, t]$ tiene distribución Poisson con media $\mu = 0.8t$. Como vimos antes, la probabilidad de que no arribe ningún auto en ese intervalo es

$$\begin{aligned} P(T > t) &= P(\text{Ningun auto llega hasta el tiempo } t) \\ &= e^{-0.8 \cdot t} \frac{(0.8 \cdot t)^0}{0!} \\ &= e^{-0.8t}. \end{aligned}$$

  con $t \geq 0$

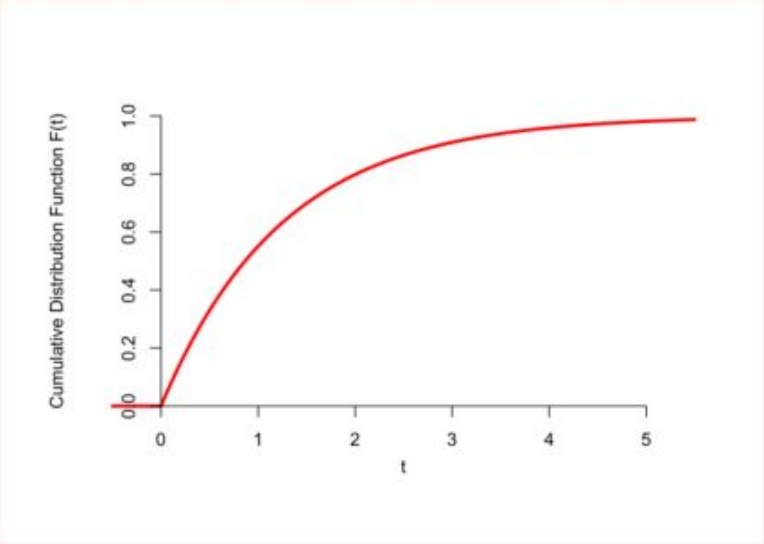
- Por otra parte, el tiempo es siempre positivo, por lo cual si $t < 0$,

$$P(T > t) = 1$$

Función de distribución del primer arribo

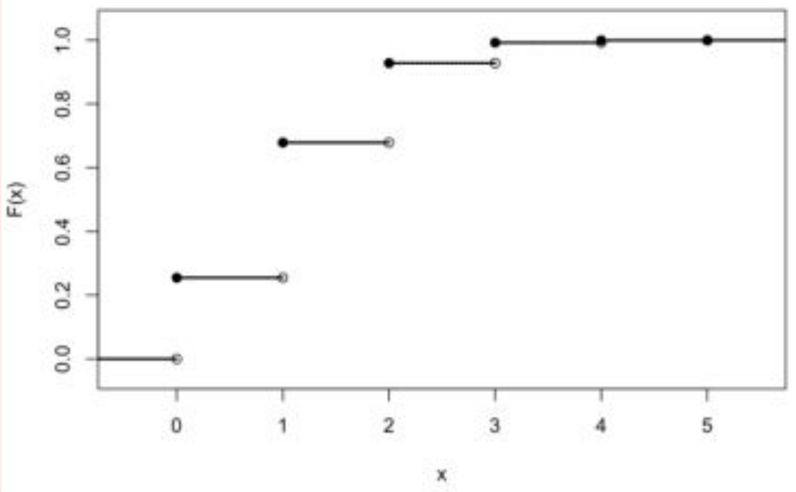
- Poniendo todo junto queda

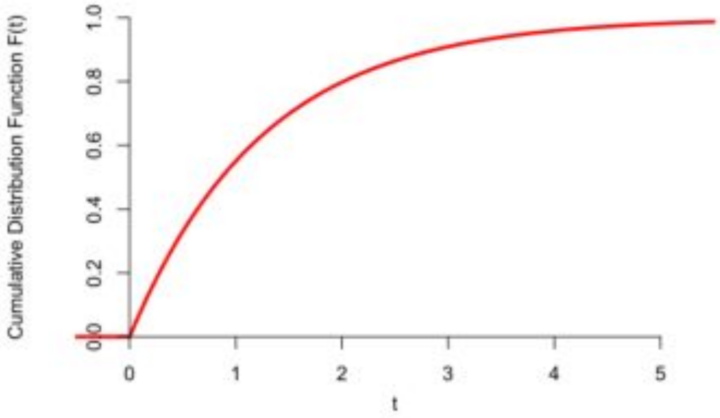
$$F(t) = 1 - P(T > t) = \begin{cases} 1 - e^{-0.8t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}.$$



-

Distribuciones acumuladas





Definicion de variable continua

Variable aleatoria continua

Una variable aleatoria se llama continua si su función de distribución acumulada es una función continua.

Ejemplo: $P(T = 2)$

- ¿Cual es la probabilidad de $P(T = 2)$?

- Consideremos la probabilidad de que el primer arribo sea en el intervalo $(2-\epsilon, 2+\epsilon)$. Esta probabilidad va a ser siempre mayor que $P(T=2)$ porque el intervalo contiene mas puntos.

Poisson con parámetro $\mu = 0.8 \times 2\epsilon$ por lo cual

$$\begin{aligned} P(\text{al menos un arribo en el intervalo}) &= 1 - P(\text{ningún arribo en el intervalo}) \\ &= 1 - e^{-0.8\cdot 2\epsilon}\frac{(0.8\cdot 2\epsilon)^0}{0!} \\ &= 1 - e^{-1.6\epsilon}. \end{aligned}$$

- Si hacemos a ϵ arbitrariamente chico, $e^{-1.6\epsilon}$ es cada vez mas cercana a uno y la probabilidad de que el primer arribo sea exactamente en 2 minutos es cero.

Densidad de probabilidad

Definición

Se dice que f es una densidad de probabilidad de la variable X con distribución F si se cumple que $f \geq 0$ y

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx$$

Propiedades

- La densidad f no es única.
- En los puntos donde F es derivable, $f(t) = F'(t)$ es una densidad.
- Si f es una función no negativa tal que

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

entonces f es una densidad para la distribución F

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx$$

Ejemplo: función de densidad y función de distribución

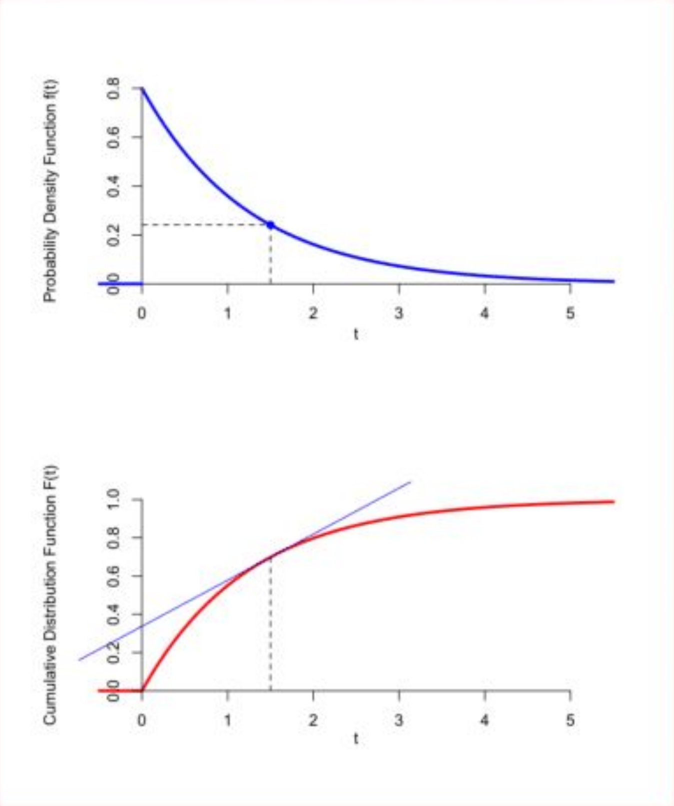
- En el ejemplo del tiempo de arribo del primer auto, vimos que

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-0.8t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}.$$

- Entonces, derivando para $t > 0$ y $t < 0$, podemos definir una densidad como

$$f(t) = F'(t) = \begin{cases} 0.8e^{-0.8t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}.$$

Ejemplo



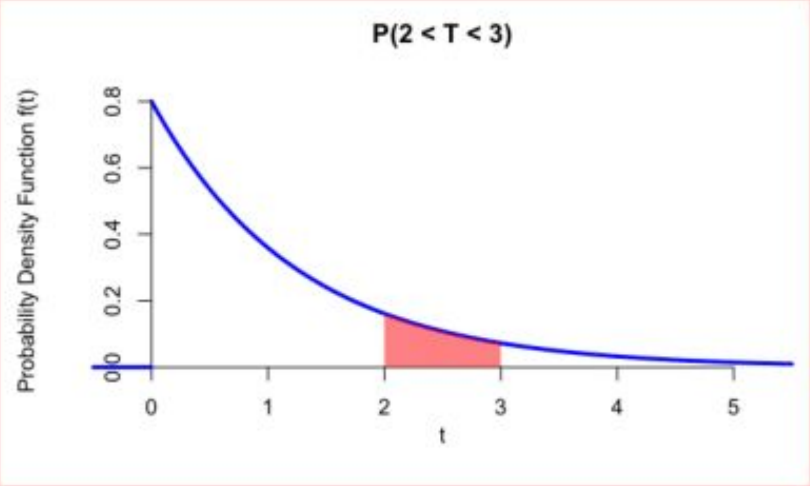
Probability Density Function f(t)
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
0
1
2
3
4
5
t
Cumulative Distribution Function F(t)
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0
1
2
3
4
5
t

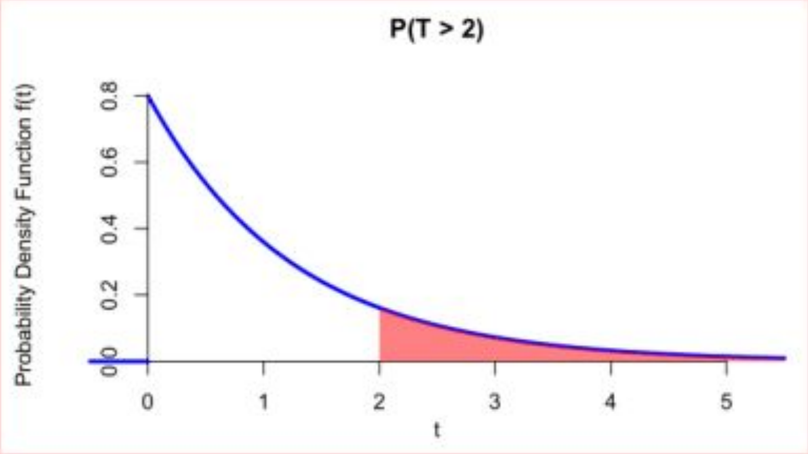
Propiedades

Si X es una variable continua con distribución F y densidad f,

- Entonces
$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$
pues
$$P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$
- $P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b)$

Ejemplo





$$P(2 < T < 3) = \int_2^3 f(t)\,dt = \int_2^3 0.8e^{-0.8t}\,dt = .111,$$

$$P(T > 2) = \int_2^\infty f(t)\,dt = \int_2^\infty 0.8e^{-0.8t}\,dt = .202.$$

Ejemplo

Sea g la siguiente función.

$$g(x) = \begin{cases} x(1-x) & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Encuentre una función densidad f_X que coincida con g salvo una constante.

Resolución

- La función densidad debe ser no negativa y tener integral igual a 1, por lo cual una candidata es

$$f(x) = \frac{1}{c} g(x) \qquad c = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx$$

- Entonces

$$c = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)dx = \int_{0}^{1} x(1-x)dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

- y la densidad f_X resulta

$$f_X(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejemplo 1: *Calcular la función de distribución de la variable aleatoria X con función de densidad*

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & x \in (0,1] \\ \\ \dfrac{3}{4} & x \in (1,2) \\ \\ 0 & x \notin (0,2). \end{cases}$$

Ejemplo 1: *Calcular la función de distribución de la variable aleatoria X con función de densidad*

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & x \in (0,1] \\ \dfrac{3}{4} & x \in (1,2) \\ 0 & x \notin (0,2). \end{cases}$$

A partir de la expresión $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$, calculamos la función de distribución por trozos:

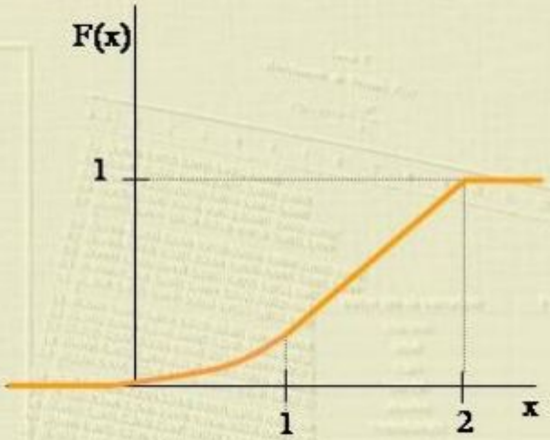
- Si $x < 0$, $f_X(t) = 0$, $\forall t \in (-\infty, x]$ y, por tanto, $F_X(x) = 0$.

Ejemplo 1: *Calcular la función de distribución de la variable aleatoria X con función de densidad*

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & x \in (0,1] \\ \frac{3}{4} & x \in (1,2) \\ 0 & x \notin (0,2). \end{cases}$$

- Si $x \geq 0$, puesto que $f_X(t) = 0$, $\forall t \in (-\infty, 0]$, se tiene $F_X(x) = \int_0^x f_X(t)dt$; así:
  - Si $0 \leq x < 1$, $F_X(x) = \int_0^x \frac{t}{2}dt = \frac{x^2}{4}$.
  - Si $1 \leq x < 2$, $F_X(x) = \int_0^1 \frac{t}{2}dt + \int_1^x \frac{3}{4}dt = \frac{1}{4} + \frac{3(x-1)}{4}$.
  - Si $x \geq 2$, $F_X(x) = \int_0^1 \frac{t}{2}dt + \int_1^2 \frac{3}{4}dt + \int_2^x 0dt = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ \dfrac{x^2}{4} & x \in [0, 1) \\ \dfrac{3x-2}{4} & x \in [1, 2) \\ 1 & x \in [2, +\infty). \end{cases}$$



Ejemplo 2: *Calcular la función de densidad de una variable aleatoria con función de distribución*

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-\infty, 0) \\ \dfrac{x^2}{4} & x \in [0, 1) \\ \dfrac{1}{4} & x \in [1, 2) \\ \dfrac{3x^2 - 7}{20} & x \in [2, 3) \\ 1 & x \in [3, +\infty). \end{cases}$$

Observamos que esta función es continua y, además, derivable en $\mathbb{R} - \{0, 1, 2, 3\}$.

Por lo tanto, F_X puede expresarse como $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt, \ \ \forall x \in \mathbb{R}$, sin más que definir

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}, \ \forall x \in \mathbb{R} - \{0, 1, 2, 3\}$$

y con valores arbitrarios en el conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$.

Entonces, la variable X es de tipo continuo, y su función de densidad es

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & x \in (0, 1) \\ \\ \dfrac{3x}{10} & x \in (2, 3) \\ \\ 0 & x \notin (0, 1) \cup (2, 3). \end{cases}$$

■

La función de densidad de una variable continua tiene un papel similar al de la función masa de probabilidad de una variable discreta. De hecho, al determinar la función de distribución, determina también la distribución de probabilidad de la variable.

Ejemplo

- Sea X una variable aleatoria continua con densidad f y sean a y $b \neq 0$ números reales, entonces la variable $Y = a + bX$ tiene densidad

$$f_Y(y) = \frac{1}{|b|} f(\frac{y-a}{b})$$

y $f_Y(y) = 0$ en otro lado.

Resolución

- Supongamos que $b > 0$, entonces $g(y) = \frac{y-a}{b}$ es una función creciente y

$$P(Y \leq y) = P(X \leq \frac{y-a}{b}) = F_X(\frac{y-a}{b})$$

por lo cual

$$f_Y(y) = \frac{1}{b} f(\frac{y-a}{b})$$

Resolución

- Si $b < 0$, entonces $g(y) = \frac{y-a}{b}$ es una función decreciente y

$$P(Y \leq y) = P(X \geq \frac{y-a}{b}) = 1 - F_X(\frac{y-a}{b})$$

- por lo cual

$$f_Y(y) = -\frac{1}{b} f(\frac{y-a}{b})$$

Resolución

- Resumiendo, si $b \neq 0$

$$f_Y(y) = \frac{1}{|b|} f(\frac{y-a}{b})$$

Distribución condicional

Definición

Si A y B son subconjuntos de $\mathbf{R_X}$ entonces

$$P(X \in A/X \in B) = \frac{P(X \in A \cap B)}{P(X \in B)} = \frac{\int_{A\cap B} f(y)dy}{\int_B f(y)dy}$$

Esperanza y varianza

Observación

- Recordemos que si X era una variable aleatoria discreta, tal que $\sum_x |x| p_X(x) < \infty$ entonces X tenía esperanza y

$$E(X) = \sum_x x p_X(x)$$

- En forma análoga, definimos esperanza de variables aleatorias continuas de la siguiente forma.

Definición

Sea X un variable aleatoria continua con densidad f. Decimos que X tiene esperanza finita si

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx < \infty$$

y en ese caso se define la esperanza como

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx < \infty$$

y la varianza como

$$V(X) = E[(X - E(X))^2] = E(X^2) - E(X)^2$$

La desviación estándar es la raiz cuadrada positiva de la varianza, $\sigma = \sqrt{V(X)}$.