Probabilidad y Estadística -
Introducción a la Probabilidad y Estadística
2025

Guía de ejercicios N^o 5. Estimación puntual. Métodos de estimación puntual

Estimación de Parámetros con Distribuciones Concretas

▶ **1.** Se examinan 150 piezas recién fabricadas y se registra el número de imperfecciones por pieza (se supone que las piezas no deben tener imperfecciones) resultando los siguientes datos:

N∘ de imperf. por pieza	0	1	2	3	4	5	6	7
Frecuencia observada	18	37	42	30	13	7	2	1

Sea X el número de imperfecciones en una pieza seleccionada al azar y suponga que X tiene distribución Poisson de parámetro λ.

a) Encuentre un estimador insesgado de λ y calcule la estimación para los datos anteriores.
b) ¿Cuál es la desviación estándar de este estimador? Calcule una estimación del error estándar del estimador.
c) Considere los siguientes estimadores de λ, basados en una muestra aleatoria $X_1, ..., X_n$:

$$\hat{\lambda_1} = \bar{X}, \quad \hat{\lambda_2} = (X_1 + X_n)/2 \quad \text{y} \quad \hat{\lambda_3} = (X_1 + 2X_2 + X_n)/3, \quad \text{con } n \geq 3$$

¿Cuáles son estimadores insesgados para λ?
d) Entre los estimadores insesgados para λ del ítem c), ¿cuál tiene menor varianza?

▶ **2.** X_1 , ... , X_m es una muestra aleatoria de una distribución de resistencia de vigas de concreto con media μ_1 y desviación estándar σ_1 e $Y_1, ..., Y_n$ es una muestra aleatoria de una distribución de resistencia de cilindros de concreto con media μ_2 y desviación estándar σ_2. Suponga que $X_1, ..., X_m$ e $Y_1, ..., Y_n$ son muestras aleatorias independientes entre sí. Se obtuvieron las siguientes observaciones:
Resistencias de vigas de concreto:

5,9 7,2 7,3 6,3 8,1 6,8 7,0 7,6 6,8 6,5 7,0 6,3 7,9 9,0 8,2 8,7 7,8 9,7 7,4 7,7

Resistencias de cilindros de concreto:

6,1 5,8 7,8 7,1 7,2 9,2 6,6 8,3 7,0 8,3 7,8 8,1 7,4 8,5 8,9 9,8 9,7 14,1 12,6 11,2

a) Calcule una estimación para μ_1, μ_2, σ_1, σ_2
b) Dé un estimador insesgado de $\mu_1 - \mu_2$. Calcule una estimación de dicha diferencia.
c) Obtenga la varianza y la desviación estándar (error estándar) del estimador del inciso b)
d) Calcule una estimación puntual de la relación σ_1/σ_2.

▶ **3.** Se seleccionan al azar n_1 fumadores (hombres) y n_2 fumadoras. Sean X_1 y X_2 variables aleatorias independientes que denotan, respectivamente, el número de fumadores y fumadoras que fuman cigarrillos con filtro. Denotamos con p_1 y p_2 las respectivas probabilidades de que un hombre y una mujer seleccionados al azar fumen cigarrillos con filtro.
a) Demuestre que $(X_1/n_1) - (X_2/n_2)$ es un estimador insesgado para $p_1 - p_2$.
b) ¿Cuál es el error estándar del estimador del inciso a)?
c) Si $n_1 = n_2 = 200$, $x_1 = 127$ y $x_2 = 176$, obtenga una estimación de $p_1 - p_2$.
d) Con los datos del inciso c) obtenga una estimación del error estándar del estimador de $p_1 - p_2$.

Estimadores Insesgados

► **4.** Sea $X_1, ..., X_n$ una muestra aleatoria, donde cada X_i tiene media μ y varianza σ^2.
a) Demuestre que $\bar{X}^2$ no es un estimador insesgado para μ^2
b) ¿Para qué valor de k es el estimador $\hat{X}^2 - kS_{n-1}^2$ insesgado para μ^2?

► **5.** Sea $X_1, ..., X_n$ una muestra aleatoria de la función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}5(1+\theta x) & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

donde $-1 \leq \theta \leq 1$ (esta distribución aparece en física de partículas). Demuestre que $\hat{\theta} = 3\bar{X}$ es un estimador insesgado de θ y calcule su varianza.

Estimación por Métodos de Momentos y Máxima Verosimilitud

► **6.** Se denota con X la proporción de tiempo que un estudiante, seleccionado al azar, emplea trabajando en cierta prueba de aptitud. Se supone que X tiene función de densidad dada por:

$$f(x) = \begin{cases} (\theta+1)x^\theta & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

donde $-1 < \theta$.
a) Obtenga por el método de los momentos un estimador de θ.
b) Se toma una muestra aleatoria de 10 estudiantes obteniéndose las siguientes observaciones:

0,91 0,79 0,90 0,65 0,86 0,47 0,73 0,97 0,94 0,77

Calcule con esta información una estimación de θ, usando el estimador obtenido en el inciso a).

► **7.** Se supone que el espesor de pintura de baja viscosidad (X) tiene distribución normal. Se observaron las siguientes observaciones de espesores de pintura de baja viscosidad:

0,83 0,88 0,88 1,04 1,09 1,12 1,29 1,31 1,48 1,49 1,59 1,62 1,65 1,71 1,76 1,83

a) Calcule una estimación puntual de la media de la distribución del espesor de pintura por el método de los momentos.
b) Calcule una estimación puntual de la mediana de la distribución del espesor de pintura por el método de máxima verosimilitud (MV).
c) Calcule una estimación del percentil 90 de la distribución del espesor de pintura por el método de MV.
d) Estime $P(X < 1{,}5)$ por el método de MV.
e) ¿Cuál es el error estándar del estimador usado en el inciso a)?

► **8.** El tiempo de respuesta X (en segundos) de cierta terminal de computadoras tiene distribución exponencial de parámetro $\lambda > 0$.
a) Obtenga el estimador de máxima verosimilitud de λ.
b) Se hacen 10 observaciones resultando los valores:

3,11 0,64 2,55 2,20 5,44 3,42 10,39 8,93 17,82 1,30

Calcule, con estos datos, una estimación para λ usando el estimador obtenido en el inciso a).

► **9.** Se supone que la resistencia al corte de soldaduras eléctricas (lb/plg^2) tiene distribución normal. Se determina la resistencia al corte de 10 soldaduras eléctricas obteniéndose:

392 376 401 367 389 362 409 415 358 375

a) Estime el verdadero promedio y la desviación estándar de la resistencia al corte, usando los estimadores de máxima verosimilitud.
b) Estime el percentil 95 de la distribución (use la propiedad de invarianza del estimador por MV).
c) Estime $P(X \leq 400)$ usando la propiedad de invarianza del estimador por MV.

► **10.** **a)** Sea $X_1, ..., X_n$ una muestra aleatoria de una distribución uniforme en el intervalo $[0, \theta]$. El estimador de máxima verosimilitud de θ es $\hat{\theta} = Y = \text{máx}(X_i)$. Obtenga la distribución acumulada de Y utilizando el hecho de que

$$Y \leq y \text{ si y sólo si cada } X_i \leq y$$

y demuestre que la función de densidad de Y es:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{ny^{n-1}}{\theta^n} & 0 \leq y \leq \theta \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

b) Utilice el resultado de la parte a) para demostrar que el estimador de máxima verosimilitud de θ es sesgado pero que $(n+1)\text{máx}(X_i)/n$ es insesgado.
c) Probar que $2\bar{X}$ es un estimador insesgado para θ.
d) Entre los estimadores insesgados dados en los ítems b) y c), ¿cuál elegiría?