Intro a la Probabilidad y estadística

Martes y Jueves Aula B17
Dra Ana Georgina Flesia

Ejemplo

Cierta marca de focos son anunciados que poseen un tiempo de vida medio de 750 horas. Un cliente potencial ha estado evaluando su compra, previo convenio de compra, y sólo dará marcha atrás si se demuestra en forma concluyente que el tiempo de vida medio (μ) es menor a lo anunciado. Se seleccionó una muestra aleatoria de 50 focos y se determinó el tiempo de vida para cada uno de ellos, obteniéndose un promedio y desvío estándar muestral de 738,44 y 38,20 horas, respectivamente.

a) Determinar las hipótesis pertinentes.

b) Dar el estadístico de prueba y su distribución bajo hipótesis nula.

c) Determinar la región de rechazo de H_0 al 5% ¿ cual sería su recomendación?

d) Considerando $\alpha = 0,01$, ¿Cuál sería su recomendación?

Resolución

Podemos aplicar el Teorema Central del Límite (TCL) para este caso, ya que se trata de una muestra de tamaño suficiente (n = 50) y la distribución del tiempo de vida de los focos se puede considerar aproximadamente normal.

a) Hipótesis pertinentes

Hipótesis nula $(H_0) : (\mu = 750)$ Hipótesis alternativa $(H_1) : (\mu < 750)$

b) Estadístico de prueba y su distribución bajo hipótesis nula

Según el TCL, cuando la muestra es lo suficientemente grande, la distribución de la media muestral $\bar{X}$ se distribuye normalmente:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Donde σ es la desviación estándar de la población. En este caso, utilizamos la desviación estándar de la muestra $s = 38.20$ como una aproximación a σ:

$$\sqrt{50}\left(\frac{\bar{X} - 750}{38.20}\right) \sim N(0, 1)$$

Resolución

Region de rechazo cola izquierda es

$$RR = \{z | z_{obs} < -z_\alpha\}$$

Calculamos el error estándar:

$$\text{Error estándar} = \frac{38.20}{\sqrt{50}} \approx \frac{38.20}{7.071} \approx 5.4$$

Ahora, el estadístico de prueba se calcula como:

$$z_{obs} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\text{Error estándar}} = \frac{738.44 - 750}{5.4} \approx \frac{-11.56}{5.4} \approx -2.14$$

Resolución

c) Región de rechazo de H_0 al 5%

Para un nivel de significación $\alpha = 0.05$ en una prueba cola izquierda, buscamos el valor crítico en la distribución normal estándar z:

- Valor crítico $z_{0.95} = -z_{0.05} \approx -1.645$.

La región de rechazo es:

$$z < -1.645$$

d) Recomendación considerando $\alpha = 0.01$

Para $\alpha = 0.01$:

- Valor crítico $z_{0.99} = -z_{0.01} \approx -2.33$.

La región de rechazo es:

$$z_{obs} < -2.33$$

Recomendación final

- Al 5% de significación: $z \approx -2.14$ cae en la región de rechazo pues $(-2.14 < -1.645)$, por lo que rechazamos H_0.

- Al 1% de significación: $z \approx -2.14$ no cae en la región de rechazo pues $(-2.14 > -2.33)$, por lo que no rechazamos H_0.

Conclusión: Hay suficiente evidencia para concluir que el tiempo de vida medio de los focos es menor a 750 horas con un nivel del 5% pero no la suficiente cuando se pide un nivel de 1% de significación. Estudiando el $p - valor$

$$p - valor = P(Z < 2.14) \sim 0.016$$

No se recomendaría al cliente proceder con la compra, aún cuando no alcance el error de tipo I al 1%, el error es del 1.6%.

CASO C:

Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de distribución $N\left(\mu, \sigma^2\right)$ con σ^2 desconocido. Bajo estos supuestos sabemos que

$$\frac{(\bar{X}-\mu)\sqrt{n}}{S_{n-1}} \sim t_{n-1}$$

Hipótesis Nula:

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

Estadístico de Prueba:

$$T = \frac{(\bar{X}-\mu)\sqrt{n}}{S_{n-1}} \sim t_{n-1} \quad \text{bajo } H_0$$

Region de rechazo

H_α	RR_α
$\mu < \mu_0$	$t \leq -t_{\alpha;n-1}$
$\mu > \mu_0$	$z \geq t_{\alpha;n-1}$
$\mu \neq \mu_0$	$\lvert t\rvert \geq t_{\alpha/2;n-1}$

CASO C:

En este caso no se dará la expresión de la probabilidad de cometer el Error Tipo II (ya que aparece una distribución t-student no central) y por ende, tampoco se determinará el valor de n como hacíamos en el caso distribución normal.

Ejemplo

En cierta marca de aceite vegetal hidrogenado se anuncia que el producto tiene un punto de fusión de 95. Se ha determinado el punto de fusión en cada una de 16 muestras de esta marca de aceite vegetal hidrogenado y los resultados obtenidos fueron: $\bar{x} = 94,32$ y $s_{n-1} = 1,20$. Si se puede suponer que el tiempo de fusión en aceite vegetal tiene distribución normal entonces:

a) Obtener un intervalo de confianza del 95% para el punto de fusión medio para este aceite hidrogenado.

b) Planteadas las hipótesis $H_0 : \mu = 95$ vs. $H_a : \mu \neq 95$ concluir al 5%.

c) Comparar los resultados obtenidos en los items anteriores.

Resolución

Vamos a resolver el problema paso a paso.

a) Intervalo de confianza del 95% para el punto de fusión medio

Para calcular el intervalo de confianza, utilizamos la fórmula:

$$\bar{x} \pm t_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Donde:

- $\bar{x} = 94.32$ (promedio de las muestras)
- $s = 1.20$ (desviación estándar muestral)
- $n = 16$ (tamaño de la muestra)
- $t_{0.025,15}$ es el valor crítico de t para $n - 1 = 15$ grados de libertad al 95% de confianza.

Resolución

- Cálculo del valor crítico t
  Consultando una tabla de distribución t de Student para $\alpha/2 = 0.025$ y 15 grados de libertad, obtenemos:

$$t_{0.025,15} \approx 2.131$$

- Cálculo del error estándar

$$\text{Error estándar} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{1.20}{\sqrt{16}} = \frac{1.20}{4} = 0.30$$

- Cálculo del intervalo de confianza

$$IC = 94.32 \pm 2.131 \times 0.30$$

- Calculamos el margen de error:

$$\text{Margen de error} = 2.131 \times 0.30 \approx 0.6393$$

- Por lo tanto, el intervalo de confianza es:

$$IC = 94.32 \pm 0.6393 \Rightarrow (93.6807, 94.9593)$$

Resolución

b) Plantear las hipótesis y concluir al 5%

Hipótesis nula $(H_0) : (\mu = 95)$ Hipótesis alternativa $(H_1) : (\mu \neq 95)$

- Cálculo del estadístico de prueba
  Utilizamos la prueba t de Student:

$$t_{obs} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{94.32 - 95}{1.20/\sqrt{16}} = \frac{94.32 - 95}{0.30}$$

  Calculando:

$$t_{obs} = \frac{-0.68}{0.30} \approx -2.267$$

- Comparar con el valor crítico
  Para un nivel de significación $\alpha = 0.05$ en una prueba bilateral (dos colas), el valor crítico para $n - 1 = 15$ grados de libertad es aproximadamente:

$$t_{0.025,15} \approx \pm 2.131$$

Resolución

- Región de rechazo . Si $|t_{obs}| > t_{0.025,15}$, rechazamos H_0.
- Entonces, como $|t_{obs}| \approx 2.267 > 2.131$, concluimos que hay evidencia para rechazar H_0, lo que sugiere que el punto de fusión medio del aceite no es igual a 95.

c) Comparar los resultados obtenidos en los ítems anteriores

- Intervalo de confianza del 95%: $(93.6807, 94.9593)$
- Prueba de hipótesis: Rechazamos H_0 y la hipótesis nula es un valor de μ que no pertenece al intervalo de confianza.

Dualidad Intervalo de confianza y test bilateral

- Supongamos que tenemos el muestreo $X_1, \ldots, X_n$ de una distribución normal con media μ desconocida, un intervalo de confianza de nivel $(1-\alpha)$ para μ es

$$I\alpha = \left[\overline{X}_n - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

- Consideremos el siguiente TdH de nivel α:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = \mu_0 \\ H_A : \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

- La región de "aceptación" al nivel de significación, es

$$R_\alpha = \left[-z_{\alpha/2}, z_{\alpha/2}\right] \text{ si consideramos } z_{obs}.$$

$$R_\alpha = \left[\mu_0 - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \mu_0 + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \text{ si consideramos } \overline{x}_{obs}$$

Esto quiere decir que si $\overline{x}_{obs} \in R_\alpha$, entonces no rechazamos H_0 y consideramos a μ_0 como un valor creíble.

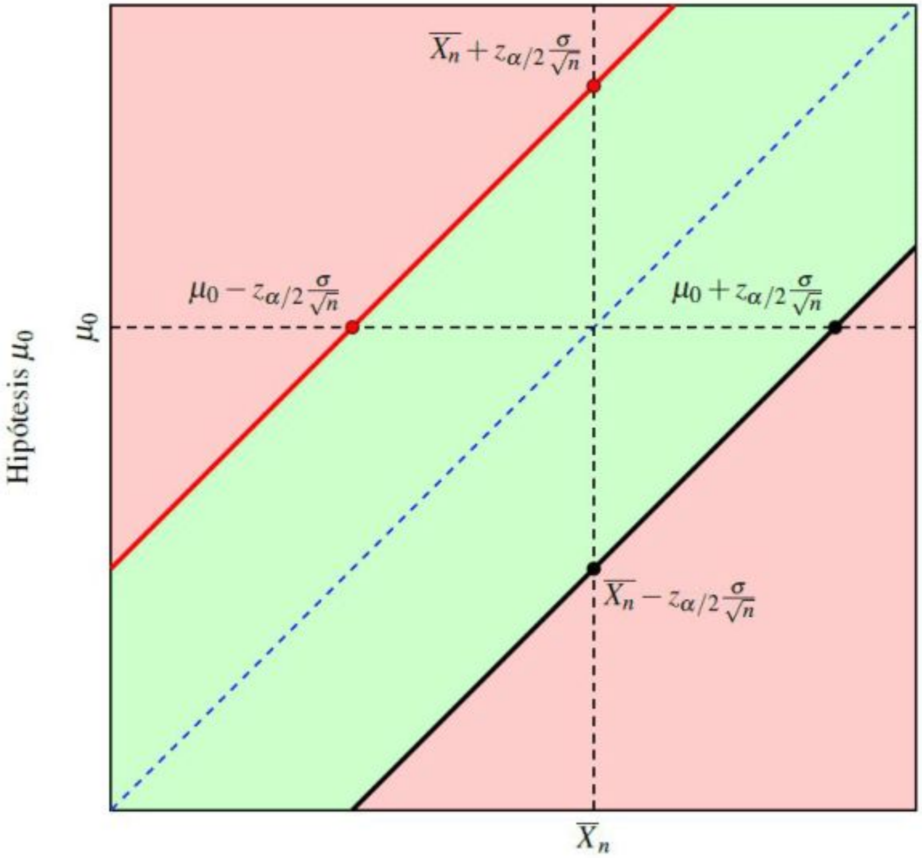
Dualidad Intervalo de confianza y test bilateral

- Pero observemos que

$$\overline{x}_{obs} \in R_\alpha \Leftrightarrow \left|\bar{X}_n - \mu_0\right| \leq z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow \mu_0 \in I_\alpha.$$

- Es decir que los valores creíbles de μ_0 son exactamente aquellos que pertenecen al intervalo I_α.
- Dicho de otro modo, el intervalo de confianza I_α coincide con el intervalo de valores creíbles de μ.

Dualidad Intervalo de confianza y test bilateral



Dualidad Intervalo de confianza y test bilateral

La linea azul representa el estimador de máxima verosimilitud para μ, que en este caso es el promedio $\bar{X}$. Por eso divide a la figura en dos partes iguales. Esta figura hace evidente la dualidad existente entre los IdC y los TdH:

1. Para cada hipótesis nula μ_0, si trazamos una linea horizontal por μ_0, la intersección de ésta con la zona verde indica la región de aceptación R_α.
2. Para cada valor observado del promedio $\bar{X}$, si trazamos una linea vertical por $\bar{X}$, la intersección de ésta con la zona verde representa el intervalo de confianza I_α, constituido por los valores creíbles de μ_0.

Prueba de hipótesis para la varianza poblacional

- Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria con distribución $N\left(\mu, \sigma^2\right)$. Bajo estas condiciones sabemos

$$\frac{(n-1)S_{n-1}^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$$

- Este resultado nos servirá para obtener la región de rechazo para la prueba de hipótesis.
- Hipótesis Nula:

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$$

- Estadístico de Prueba:

$$\frac{(n-1)S_{n-1}^2}{\sigma_0^2} \sim \chi_{n-1}^2, \quad \text{bajo } H_0$$

Prueba de hipótesis para la varianza poblacional

- Fijado un nivel de significación α y considerando la hipótesis alternativa

$$H_a : \sigma^2 > \sigma_0^2$$

- H_0 será rechazada para valores de s_{n-1}^2 que sean mayores que una constante k_α, o sea una región de rechazo razonable sería

$$RR_\alpha = \left\{ s_{n-1}^2 : s_{n-1}^2 \geq k_\alpha \right\}$$

- ¿Cómo determinar el valor de la constante k_a ?

$$\alpha = P\left(S_{n-1}^2 \geq k_\alpha ; \sigma_0^2\right) = P\left(\frac{(n-1)S_{n-1}^2}{\sigma_0^2} \geq \frac{(n-1)k_\alpha}{\sigma_0^2} \right)$$

- Luego, buscando en la tabla de una distribución χ_{n-1}^2 se tiene que

$$\chi_{\alpha;n-1}^2 = \frac{(n-1)k_\alpha}{\sigma_0^2}$$

Ejemplo

Por lo tanto,

$$RR_\alpha = \left\{ s^2_{n=1} : s^2_{n-1} \geq k_\alpha = \frac{\chi^2_{\alpha,n-1}\sigma_0^2}{n-1} \right\}$$

es una región de rechazo tal que la prueba para σ^2 tiene un nivel de significación α.
Trabajando de forma similar se puede hallar la RR_α para las otras dos posibles hipótesis alternativas.

H_a	RR_α
$\sigma^2 > \sigma_0^2$	$x^2 \geq \chi^2_{\alpha;n-1}$
$\sigma^2 < \sigma_0^2$	$x^2 \leq \chi^2_{1-\alpha;n-1}$
$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$x^2 \leq \chi^2_{1-\alpha/2;n-1}$ ó $x^2 \geq \chi^2_{\alpha/2;n-1}$

donde $x^2 = \frac{(n-1)x^2_{n-1}}{\sigma_0^2}$.

Ejemplo

Un investigador afirma que su equipo de medición tiene una variabilidad dada por una desviación estándar igual a 2.

Una muestra aleatoria de $n = 16$ observaciones, provenientes de una distribución normal, arrojó una varianza muestral $s^2_{n=1} = 6,1$.

¿Contradicen los datos lo que afirma el investigador? Justifique usando un $\alpha = 0,05$.

Resolución

Para determinar si los datos contradicen la afirmación del investigador sobre la desviación estándar del equipo de medición, utilizaremos una prueba de hipótesis sobre la varianza.

- Planteamiento del problema

  - Hipótesis nula (H_0): $\sigma^2 = 4$ (La varianza poblacional es igual a 2^2).

  - Hipótesis alternativa (H_1): $\sigma^2 \neq 4$ (La varianza poblacional es diferente de 2^2).

- Datos

  - Varianza muestral $s^2 = 6.1$

  - Tamaño de la muestra $n = 16$

  - Grados de libertad $df = n - 1 = 15$

  - Nivel de significación $\alpha = 0.05$

Resolución

- Cálculo del estadístico de prueba
  Usaremos la prueba chi-cuadrado para la varianza:
  $$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$$
  Donde:
  - $s^2 = 6.1$ (varianza muestral)
  - $\sigma_0^2 = 4$ (varianza bajo H_0)
- Sustituyendo los valores:
  $$\chi^2 = \frac{(16-1)\cdot 6.1}{4} = \frac{15\cdot 6.1}{4} = \frac{91.5}{4} = 22.875$$
- Cálculo de los valores críticos
  Para un nivel de significancia $\alpha = 0.05$ y una prueba bilateral, buscamos los valores críticos de la distribución chi-cuadrado con $df = 15$.
  - Valor crítico inferior $\chi^2_{0.025,15} \approx 6.262$
  - Valor crítico superior $\chi^2_{0.975,15} \approx 27.488$

Resolución

- Comparación del estadístico de prueba con los valores críticos
  - Si $\chi^2 < 6.262$ o $\chi^2 > 27.488$, rechazamos H0.
  - En nuestro caso:

$$\chi^2 = 22.875$$

- Conclusión

  Dado que $6.262 < 22.875 < 27.488$, **no rechazamos H0**.
- Justificación final

  Los datos no contradicen la afirmación del investigador sobre la variabilidad de su equipo de medición, ya que no hay suficiente evidencia para afirmar que la desviación estándar es diferente de 2 al nivel de significación $\alpha = 0.05$.

p-valor para una prueba de Hipótesis

- Recordemos que se llama p-valor o nivel de significación alcanzado, al mínimo nivel de significación a partir del cual rechazaría la hipótesis nula para un conjunto dado.
- ¿Cómo concluir un test de nivel a usando el p-valor?

  - Si p-valor $\leq \alpha$ entonces rechazar H_0 a un nivel α

  - Si $p-$ valor $> \alpha$ entonces diremos que no hay evidencia suficiente para rechazar H_0 a un nivel α.
- ¿Cómo calcular el p-valor?

p-valor para una prueba de Hipótesis

Distribución	Hipótesis Alternativa	p - valor
$Z \sim N(0,1)$	Cola superior	$1-\Phi\left(z_{obs}\right)$
	Cola inferior	$\Phi\left(z_{obs}\right)$
	Bilateral	$2\left(1-\Phi\left(\lvert z_{obs}\rvert\right)\right)$
$T \sim t_{n-1}$	Cola superior	$P\left(T > t_{obs}\right)$
	Cola inferior	$P\left(T < t_{obs}\right)$
	Bilateral	$2P\left(T > \lvert t_{obs}\rvert\right)$
$x^2 \sim \chi^2_{n-1}$	Cola superior	$P\left(\chi^2 > \chi^2_{obs}\right)$
	Cola inferior	$P\left(\chi^2 < \chi^2_{obs}\right)$
	Bilateral	$2\min\{P\left(\chi^2 < \chi^2_{obs}\right), P\left(\chi^2 > \chi^2_{obs}\right)$

Pruebas de Hipótesis para la Proporción poblacional

Sea $X_1, X_2, \cdots, X_n$ una m.a. de distribución Bernoulli de parámetro p, entonces la variable $X = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim B(n, p)$.

Queremos diseñar test de hipótesis para la proporción poblacional p.

Aquí tendremos dos casos a considerar:

i) Si n es suficientemente grande.

ii) Si n es pequeño.

CASO i): n es suficientemente grande

- Si n es suficientemente grande para poder aplicar el TCL, entonces

$$\hat{p} = \frac{X}{n} \sim N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$$

- Hipótesis Nula:

$$H_0 : p = p_0$$

- Estadístico de Prueba:

$$Z = \frac{(\hat{p} - p_0)\sqrt{n}}{\sqrt{p_0(1-p_0)}} \dot{\sim} N(0,1), \quad \text{bajo } H_0$$

Región de rechazo, Potencia

H_a	RR_α	$\beta(p)$
$p < p_0$	$z \leq -z_\alpha$	$1 - \Phi\left(-z_\alpha\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{p(1-p)}} + \frac{(p_0-p)\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right)$
$p > p_0$	$z \geq z_\alpha$	$\Phi\left(z_{\alpha\alpha}\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{p(1-p)}} + \frac{(p_0-p)\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right)$
$p \neq p_0$	$\lvert z\rvert \geq z_{\alpha/2}$	$\Phi\left(z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{p(1-p)}} + \frac{(p_0-p)\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right) -$ $-\Phi\left(-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{p(1-p)}} + \frac{(p_0-p)\sqrt{n}}{\sqrt{p(1-p)}}\right)$

Tamaño de muestra necesaria

- Si $np_0 \geq 10$ y $n(1-p_0) \geq 10$ Para este caso, si la prueba de hipótesis es unilateral, el mínimo tamaño de muestra necesario para que una prueba de nivel α sea tal que $\beta(p') \leq \beta_0$ es

$$n \geq \left[\frac{\left(z_{\beta_0} \sqrt{p'(1-p')} + z_{\alpha} \sqrt{p_0(1-p_0)} \right)}{(p_0 - p')} \right]^2$$

- Si la prueba de hipótesis es bilateral, el mínimo tamaño de muestra necesario para que una prueba de nivel α sea tal que $\beta(p') \leq \beta_0$ es

$$n \geq \left[\frac{\left(z_{\beta_0} \sqrt{p'(1-p')} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{p_0(1-p_0)} \right)}{(p_0 - p')} \right]^2$$

Ejemplo

Los registros de la Dirección de vehículos del automotor indican, que de todos las vehículos que fueron sometidos a una prueba de emisión de gases, el 70% pasaron la prueba en el año 2011. Para mejorar las condiciones del medio ambiente se realizó, en cierta ciudad durante el año 2012, una campaña de difusión para aumentar este porcentaje. Se tomó una muestra aleatoria en el año 2013 de 200 automóviles, de esta ciudad, de los cuales 156 pasaron la prueba de emisión de gases.

a) Determinar las hipótesis pertinentes.

b) Dar el estadístico de prueba y su distribución bajo hipótesis nula.

c) Determinar la región de rechazo de H_0 al 2% y cuál seria su conclusión respecto al éxito de la campaña de difusión?

Resolución

Vamos a resolver el problema paso a paso.

a) Hipótesis pertinentes

- **Hipótesis nula (H_0)**: $p = 0.70$ (El porcentaje de vehículos que pasan la prueba de emisión de gases es igual al 70%).

- **Hipótesis alternativa (H_1)**: $p > 0.70$ (El porcentaje de vehículos que pasan la prueba de emisión de gases es mayor al 70%).

b) Estadístico de prueba y su distribución bajo hipótesis nula

El estadístico de prueba observado para proporciones se calcula con la fórmula:

$$z_{obs} = \frac{\hat{p}_{obs} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}}$$

Donde: - $\hat{p}_{obs} = \frac{x_{obs}}{n}$ es la proporción muestral, donde x_{obs} es el número de éxitos (vehículos que pasan) y n es el tamaño de la muestra.

- $p_0 = 0.70$ es la proporción bajo H_0.

- $n = 200$ es el tamaño de la muestra.

Resolución

- Calculamos $\hat{p}_{obs}$:

$$\hat{p}_{obs} = \frac{156}{200} = 0.78$$

- Ahora, sustituimos en la fórmula del estadístico de prueba:

$$z_{obs} = \frac{0.78 - 0.70}{\sqrt{\frac{0.70(1-0.70)}{200}}}$$

- Calculamos el denominador:

$$\sqrt{\frac{0.70 \times 0.30}{200}} = \sqrt{\frac{0.21}{200}} = \sqrt{0.00105} \approx 0.0324$$

- Ahora, sustituimos en la fórmula de z:

$$z_{obs} = \frac{0.08}{0.0324} \approx 2.47$$

Resolución

c) Determinar la región de rechazo de H_0 al 2%

Para un nivel de significación $\alpha = 0.02$ y siendo una prueba cola a derecha, buscamos el cuantil $z(1-\alpha)$ en la tabla de la distribución normal estándar:

- Valor crítico $z_{0.02} = z(1-\alpha) \approx 2.05$.

La región de rechazo es:

$$z > 2.05$$

- Conclusión respecto al mérito de la campaña de difusión

  - Nuestro estadístico de prueba es $z \approx 2.47$.

  - Dado que $2.47 > 2.05$, **rechazamos H0**.

- Conclusión final

  Hay suficiente evidencia al 2% de significación para concluir que el porcentaje de vehículos que pasan la prueba de emisión de gases ha aumentado en comparación con el 70% registrado en 2011, lo que sugiere que la campaña de difusión fue efectiva.

CASO ii): n es pequeño

Si n es pequeño la prueba estadística estará basada en una distribución Binomial de parámetros n y p.

- Hipótesis Nula:

$$H_0 : p = p_0$$

- Estadístico de Prueba:

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim B\left(n, p_0\right), \quad \text{bajo } H_0$$

Ejemplo

Una empresa está evaluando la posibilidad de establecerse para prestar servicio de TV por cable, en cierto pueblo de la provincia. Sea X el número de familias que estarían interesadas en solicitar este servicio en una muestra aleatoria de 25 y p la proporción verdadera de familias interesadas en solicitar tal servicio. Considere las siguientes hipótesis:

$$H_0 : p = 0,5 \text{ us. } H_a : p > 0,5$$

a) ¿Cuál es la distribución del estadístico de prueba X bajo H_0 ?

b) ¿Cuáles de estas regiones de rechazo es la más adecuada para las hipótesis planteadas? ¿y por qué?

$$RR_1 = \{x : x \leq 7 \text{ o } x \geq 18\}$$
$$RR_2 = \{x : x \leq 8\}$$
$$RR_3 = \{x : x \geq 18\}$$

Ejemplo

c) Para la región de rechazo seleccionada en el item b), calcular el nivel de significación de la prueba.

d) Calcular la probabilidad de cometer un error tipo II para $p = 0,6$ y para $p = 0,8$, para la región de rechazo seleccionada en el item b.

e) Usando la región de rechazo seleccionada en el item b, ¿cuál sería su conclusión si 20 de las 25 familias estarían interesadas en solicitar este servicio de TV por cable?

Resolución

a) Distribución del estadístico de prueba X bajo H_0

Bajo la hipótesis nula $H_0 : p = 0.5$, la variable aleatoria X (número de familias interesadas) sigue una distribución binomial:

$$X \sim \text{Binomial}(n = 25, p = 0.5)$$

La media y la varianza de esta distribución son:

- **Media**: $\mu = np = 25 \times 0.5 = 12.5$

- **Varianza**: $\sigma^2 = np(1 - p) = 25 \times 0.5 \times 0.5 = 6.25$

b) Región de rechazo más adecuada

Las hipótesis son de una cola:

- **Hipótesis nula (H0)**: $p = 0.5$

- **Hipótesis alternativa (H1)**: $p > 0.5$

Dado que estamos interesados en valores de p que son mayores que 0.5, la región de rechazo debe incluir valores grandes de X.

Resolución

- Análisis de las regiones de rechazo:
  - **$R_1 = \{x : x \leq 7$ o $x \geq 18\}$**: Incluiría tanto valores bajos como altos. No es adecuada porque queremos probar si p es mayor.
  - **$R_2 = \{x \leq 8\}$**: Incluye solo valores bajos. No es adecuada.
  - **$R_3 = \{x \geq 18\}$**: Incluye solo valores altos. **Es la más adecuada**, ya que estamos probando si p es mayor.

c) Calcular el nivel de significación de la prueba para R_3

El nivel de significación se calcula como la probabilidad de rechazar H_0 cuando es verdadera. Esto es:

$$\alpha = P(X \geq 18 | H_0)$$

Usamos la distribución binomial:

$$\alpha = P(X \geq 18) = 1 - P(X \leq 17)$$

Resolución

- Calculamos $P(X \leq 17)$ utilizando la función de distribución acumulativa (CDF) de la binomial:

$$P(X \leq 17) = \sum_{x=0}^{17} P(X = x) = \sum_{x=0}^{17} \binom{25}{x} (0.5)^x (0.5)^{25-x} = \sum_{x=0}^{17} \binom{25}{x} (0.5)^{25}$$

- Usando una calculadora o software, podemos obtener:

$$P(X \leq 17) \approx 0.9783 \Rightarrow \alpha = 1 - 0.9783 = 0.0216$$

d) Calcular la probabilidad de cometer un error tipo II para $p = 0.6$ y $p = 0.8$

La probabilidad de cometer un error tipo II (β) se calcula como:

$$\beta = P(\text{no rechazar } H_0 | H_0 \text{ es falsa})$$

Resolución

- Para $p = 0.6$:

$$X \sim \text{Binomial}(n = 25, p = 0.6)$$

$$\beta = P(X < 18 | p = 0.6) = P(X \leq 17 | p = 0.6)$$

- Calculamos:

$$P(X \leq 17) = \sum_{x=0}^{17} \binom{25}{x} (0.6)^x (0.4)^{25-x}$$

- Usando software:

$$\beta = P(X \leq 17) \approx 0.8464$$

Resolución

- Para $p = 0.8$:

$$X \sim \text{Binomial}(n = 25, p = 0.8)$$

$$\beta = P(X < 18|p = 0.8) = P(X \leq 17|p = 0.8) = \sum_{x=0}^{17} \binom{25}{x} (0.8)^x (0.2)^{25-x}$$

- Calculamos:

$$\beta = P(X \leq 17) \approx 0.1091$$

e) Si 20 de las 25 familias están interesadas
Dado que $X = 20$ y $R_3 = \{x \geq 18\}$:
- $20 \geq 18$ así que **rechazamos H_0**.

Ejemplo

Se necesita para cierto uso que el hierro contenga 0.85 g de silicio por cada 10 g de hierro. Si esta condición no se cumple el hierro no se podrá utilizar. Se determino el contenido de silicio en 15 muestras seleccionadas al azar para este uso y los resultados fueron:

$$1.057\ 0.731\ 0.682\ 0.914\ 0.645\ 0.817$$

$$0.882\ 0.979\ 0.801\ 0.931\ 0.940\ 0.991\ 1.016\ 0.922\ 0.832$$

a) Obtener un intervalo de confianza del 95% para el valor medio de silicio por cada 10 g de hierro.

b) Plantear la hipótesis de interés en esta situación.

c) ¿Qué conclusión se puede alcanzar para las hipótesis planteadas en a) a un nivel de significación de 0.05 ? Justifique su respuesta.

d) Compare los resultados obtenidos en el item a) y c).

e) ¿Cuáles son los supuestos para que la prueba tenga sentido?

Resolución

a) Obtener un intervalo de confianza del 95% para el valor medio de silicio por cada 10 g de hierro

Supongamos que los datos de silicio en las 15 muestras son los siguientes (se debe proporcionar los datos para hacer los cálculos, pero asumiremos que ya se tienen los datos):

- Muestras de silicio: $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{15}\}$

Calculemos la media $\bar{x}$ y la desviación estándar s:

1) **Media**:

$$\bar{x} = \frac{1}{15} \sum_{i=1}^{15} x_i = 0.876$$

2) **Desviación estándar**:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{15} (x_i - \bar{x})^2} = 0.1225$$

Resolución

3) **Error estándar**:

$$\text{Error estándar} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{s}{\sqrt{15}} = 0.0316$$

4) **Valor crítico t** para $n - 1 = 14$ grados de libertad al 95
   - Buscamos $t_{0.025,14}$ en la tabla de la distribución t, que es aproximadamente 2.145.

5) **Cálculo del intervalo de confianza**:

$$IC = \bar{x} \pm t_{0.025} \times \text{Error estándar} = 0.876 \pm 0.0678 = [0.8082, 0.9438]$$

Resolución

b) Plantear la hipótesis de interés en esta situación

- **Hipótesis nula (H0)**: $\mu = 0.85$ g (El contenido medio de silicio es igual a 0.85 g por cada 10 g de hierro).

- **Hipótesis alternativa (H1)**: $\mu \neq 0.85$ g (El contenido medio de silicio es diferente de 0.85 g por cada 10 g de hierro).

Resolución

c) Conclusión para las hipótesis planteadas a un nivel de significación de 0.05

1) Calcular el estadístico de prueba:

$$t = \frac{\bar{x} - 0.85}{\frac{s}{\sqrt{15}}} = 0.8227$$

2) Comparar el valor calculado de t con el valor crítico $t_{0.025,14}$:
- Si $|t| > t_{0.025,14}$, rechazamos H0.
- Como 0.8227< 2.145 no hay evidencia en la muestra para rechazar H0

3) Conclusión:
- Si se rechaza H0, esto indica que el contenido medio de silicio es significativamente diferente de 0.85 g.
- Si no se rechaza H0, no hay suficiente evidencia para concluir que el contenido medio de silicio es diferente de 0.85 g.

Resolución

d) Comparar los resultados obtenidos en el ítem a) y c)

   1) **Intervalo de confianza**: El intervalo de confianza incluye el valor 0.85, es un valor aceptable para μ con nivel de confianza del 95%.
   2) **Prueba de hipótesis**: La hipótesis no se puede rechazar con un nivel $\alpha = 0.05$. La conclusión de la prueba se alinea la obtenida a partir del intervalo de confianza.

Resolución

e) Supuestos para que la prueba tenga sentido

1) **Distribución Normal**: Los datos deben seguir una distribución normal, especialmente en muestras pequeñas ($n < 30$).
2) **Independencia**: Las muestras deben ser independientes entre sí.
3) **Homogeneidad de varianza**: Se debe asumir que la varianza de la población es constante.
4) **Muestras aleatorias**: Las muestras deben ser seleccionadas de manera aleatoria.