Intro a la Probabilidad y estadística

Martes y Jueves Aula B17
Dra Ana Georgina Flesia

Muestras apareadas

En los estudios apareados:

1. Los sujetos se asignan en pares y los resultados se comparan con su compañero del mismo par.
2. El investigador puede tirar una moneda para determinar qué sujeto va al tratamiento y cuál va al grupo de control en cada par.
3. Una situación de comparación apareada es la de mediciones antes y después en el mismo sujeto.

Muestras apareadas:Ejemplo

- El Fondo de apoyo a las humanidades apoya cursos de verano para mejorar los conocimientos de los profesores de idiomas extranjeros.
- Presentamos aquí datos de un instituto que recibió a 20 profesores de francés durante 4 semanas.
- En el comienzo del período, los profesores tomaron un test de comprensión del francés hablado.
- Después de 4 semanas de inmersión en francés, dentro y fuera de clase, se les aplicó un nuevo test, modificado para que el hecho de haber tomado el primer test no les diera ventaja sobre el segundo.
- La siguiente tabla presenta los valores de las calificaciones del primer y del segundo test.
- El máximo valor posible de las calificaciones de cada test es 36.

Muestras apareadas:Ejemplo

Para analizar estos datos, primero restamos las calificaciones del primer test de las del segundo test para obtener la mejora de cada estudiante. Estas diferencias forman una sola muestra.

Docente	1er test	2do test	dif	docente	1er test	2do test	dif
1	32	34	2	11	30	36	6
2	32	31	0	12	20	26	6
3	29	35	6	13	24	27	3
4	10	16	6	14	24	24	0
5	30	33	3	15	31	32	1
6	33	36	3	16	30	31	1
7	22	24	2	17	15	15	5
8	25	28	3	18	32	34	2
9	32	26	-6	19	23	26	3
10	20	26	6	20	23	26	3

Table: Tabla de diferencias en las calificaciones de los test de idioma francés.

Muestras apareadas:Ejemplo

- Para determinar si el curso de verano produjo una mejoría en los niveles de comprensión del francés hablado, se debe realizar un test de hipótesis:

$$H_0 : \mu = 0 \qquad \mu_a > 0$$

- El parámetro μ representa la media de las calificaciones de la población completa de profesores de francés que asistieron a los cursos de verano.
- La hipótesis nula postula que no se produce ninguna mejoría, mientras que la hipótesis alternativa postula que las calificaciones medias del segundo test son mayores en promedio.

Muestras apareadas:Ejemplo

- Las 20 diferencias tienen

$$\overline{x} = 2.5 \qquad y \qquad s = 2.89$$

- El estadístico de test t_obse es

$$t_{obse} = \frac{\overline{x} - 0}{s/\sqrt{n}} = \frac{2.5}{2.89/\sqrt{20}} = 3.87$$

- El P-valor obtenido, suponiendo una distribución t con 19 grados de libertad, es de $P = 0.000515$.
- No es muy probable que se observe, solo por casualidad , una mejoría en las calificaciones de los profesores, lo que evidencia que asistir a cursos de verano mejora la comprensión del francés hablado.

Resumiendo, cuando tenemos muestras apareadas, que es una muestra bidimensional $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), ..., (X_n, Y_n)$ con distribución desconocida, se definen $D_i = X_i - Y_i$, estas D_i constituyen una muestra aleatoria y si n es grande:

Hipótesis nula: $H_0 : \mu_D = \Delta_0$

Valor de estadístico de prueba: $t = \sqrt{n}\ \bar{d}/s_d$

Hipótesis alternativa	Región de rechazo para un nivel α aproximado
$H_A : \mu_D > \Delta_0$	$t > z_\alpha$
$H_A : \mu_D < \Delta_0$	$t < -z_\alpha$
$H_A : \mu_D \neq \Delta_0$	$t > z_{\alpha/2}$ o $t < -z_{\alpha/2}$

Resumiendo este caso, cuando tenemos muestras apareadas, que es una muestra bidimensional, $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), ..., (X_n, Y_n)$, con distribución normal conjunta, definiendo $D_i = X_i - Y_i$, estas D_i constituyen una muestra aleatoria de una distribución $\mathrm{N}(\mu_D, \sigma_D^2)$, entonces:

Hipótesis nula: $H_0 : \mu_D = \Delta_0$

Valor de estadístico de prueba: $t = \sqrt{n}\,(\bar{d} - \Delta_0)/s_d$

Hipótesis alternativa	Región de rechazo para un nivel α
$H_A : \mu_D > \Delta_0$	$t > t_\alpha$
$H_A : \mu_D < \Delta_0$	$t < -t_\alpha$
$H_A : \mu_D \neq \Delta_0$	$t > t_{\alpha/2}$ o $t < -t_{\alpha/2}$

grados de libertad $= n - 1$

Los siguientes son ejemplos de comparación de poblaciones

- Un médico investigador está interesado en estudiar el efecto de agregar calcio a la dieta sobre la presión arterial. Se realiza un experimento de comparación aleatorizado, en el que uno de los grupos recibe un suplemento de calcio y otro toma un placebo.
- Un psicólogo desarrolla un test que mide la habilidad intuitiva con la que un sujeto obtiene información general sobre otras personas. El investigador quiere comparar dichas habilidades de percepción en hombres y mujeres y, para ello, les administra el test a dos grandes grupos de estudiantes universitarios: uno de hombres y otro de mujeres.
- Un educador considera que ciertas actividades extracurriculares de lectura mejoran la comprensión lectora de los niños de segundo grado. Para evaluar esta hipótesis, planea realizar un estudio con dos grupos de niños, en los cuales uno de ellos va a recibir el currículo general y el otro va a tener las actividades extracurriculares en estudio.

Problemas de dos muestras

- La estadística inferencial de dos poblaciones consiste en comparar las respuestas a estímulos entre dos grupos.
- Cada grupo debe considerarse una muestra aleatoria de las posibles respuestas de la población.
- Las respuestas de cada grupo son independientes de las del otro grupo.

Problemas de dos muestras

- Un problema de dos muestras puede surgir de un experimento aleatorizado que divide aleatoriamente a los sujetos en dos grupos y expone a cada grupo a un tratamiento diferente.
- La comparación de dos muestras independientes, seleccionadas de dos poblaciones, también es un problema de dos muestras.
- La diferencia con las muestras apareadas radica principalmente en que ambas muestras son independientes entre sí.
- En el caso apareado, no lo son y, por ello, se realiza una inferencia a partir de una sola muestra.

Problemas de dos muestras

- Para realizar inferencia, hay que tener alguna idea de la distribución de la población para decidir qué estadístico usar y la distribución muestral.
- En el caso de que la distribución de las poblaciones sea simétrica, y especialmente cuando son normales, la inferencia se realizará mediante la estimación de la media de ambas poblaciones.
- Las poblaciones normales difieren si sus medias y/o varianzas difieren.

El z-test para dos muestras: σ_1 y σ_2 conocidos

- Queremos testear

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

lo cual es equivalente a decir que

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$$

- El estadístico natural para estimar $\mu_1 - \mu_2$ es $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$.
- Las muestras son independientes, por lo que las variables $\overline{X}_1$ y $\overline{X}_2$ también lo son.
- La varianza de $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ es

$$Var(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) = Var(\overline{X}_1) + Var(\overline{X}_2) = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

El z-test para dos muestras: σ_1 y σ_2 conocidos

- Si las distribuciones poblacionales son normales, entonces la distribución de $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ también lo es, con parámetros $\mu_1 - \mu_2$ y $\sqrt{\frac{\sigma_1}{n_1} + \frac{\sigma_2}{n_2}}$.
- En el caso de que las muestras no sean normales, pero n_1 y n_2 sean grandes para que valga la aproximación dada por el TCL, cada uno de los promedios muestrales será aproximadamente normal e independiente entre sí, por lo cual $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ también tendrá una distribución normal aproximada, con parámetros $\mu_1 - \mu_2$ y $\sqrt{\frac{\sigma_1}{n_1} + \frac{\sigma_2}{n_2}}$.

Intervalo de confianza para $\mu_1 - \mu_2$

- Supongamos que tenemos dos muestras aleatorias simples e independientes entre sí, de dos poblaciones supuestamente distintas, con medias μ_1 y μ_2 y varianzas σ_1^2 y σ_2^2.
- Entonces un intervalo de confianza para la diferencia de medias de nivel $(1-\alpha)$ puede obtenerse usando el hecho de que el estadístico

$$Z = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

tiene distribución Normal patrón.
- Esta distribución es aproximada si las muestras no son normales y n_1 y n_2 son suficientemente grandes, y exacta si las muestras son normales.
- El intervalo de confianza de nivel $(1-\alpha)$ es

$$\left[(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\, z_{(1-\alpha/2)}, (\overline{X}_1 - \overline{X}_2) + \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\, z_{(1-\alpha/2)} \right]$$

Dos poblaciones:Ejemplo

- El test de un agujero mide la facilidad de los aspirantes a un trabajo manual para manipular objetos pequeños.
- El test requiere que el aspirante tome un alfiler, lo introduzca en un agujero, lo inserte y vuelva con otro alfiler.
- El puntaje del test es el número de alfileres insertados correctamente en un intervalo de tiempo fijo.
- En un estudio, mujeres trabajadoras expertas de una compañía se comparan con estudiantes varones universitarios.
- Supongamos que los puntajes históricos de las trabajadoras tienen media 120 cada 5 minutos, con una desviación estándar de $\sigma_1 = 28$, y que los jóvenes universitarios tienen un puntaje medio de 105 alfileres cada 5 minutos, con una desviación estándar de $\sigma_2 = 35$.

Dos poblaciones:Ejemplo

- Si se seleccionan 10 trabajadoras al azar, y 12 jóvenes universitarios, y se comparan los puntajes medios de cada muestra, el estadístico $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ va a tener media

$$\mu_1 - \mu_2 = 120 - 105 = 15$$

  y varianza

$$Var(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) = \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2} = \frac{28^2}{10} + \frac{35^2}{12} = 180.48$$

- La desviación estándar de la diferencia de las medias muestrales es

$$\sigma(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) = \sqrt{180.48} = 13.43$$

- ¿Cuál es la probabilidad de que 10 muchachos seleccionados tengan una media mayor que la de las 12 mujeres seleccionadas?

Dos poblaciones:Ejemplo

- Si los puntajes varían normalmente, la diferencia es también normal y estandarizando

$$
\begin{aligned}
P((\overline{X}_1 - \overline{X}_2) < 0) &= P\left[\frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - 15}{13.43} < \frac{0 - 15}{13.43}\right] \\
&= P(Z < -1.12) = 0.1314
\end{aligned}
$$

Dos poblaciones:Ejemplo

- Supongamos que un sociólogo duda de que la diferencia de medias sea solo de 15 alfileres y planea un estudio grande, con 750 estudiantes y 412 trabajadoras.
- Obtiene como resultados los siguientes valores

Grupo	n	$\overline{x}$	s
Trabajadoras	412	186.60	29.15
Estudiantes	750	175.50	31.55

Dos poblaciones:Ejemplo

- Como los valores difieren de los históricos, tanto en media como en desviación estándar muestral, es razonable establecer un intervalo de confianza para la diferencia de medias usando las desviaciones estándar muestrales en lugar de las históricas.
- El problema es que la distribución del estadístico deja de ser normal si alguna de las muestras es pequeña.

Dos poblaciones:Ejemplo

- Pero en este caso, la muestra más chica tiene tamaño 412, y el teorema central del límite puede aplicarse, y es razonable considerar al estadístico
$$Z = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$
con distribución normal patrón.
- El intervalo de confianza para la diferencia de medias del 99% es
$$\begin{aligned} & \left[(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - z_{(1-\alpha/2)}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}, (\overline{X}_1 - \overline{X}_2) + z_{(1-\alpha/2)}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} \right] \\ = \quad & [6.357, 15.842] \end{aligned}$$
- Vemos que no deja afuera el valor 15, con una confianza alta, por lo cual no habría razón para pensar que los valores históricos no siguen valiendo.

Dos poblaciones: Z-test

- Si se tienen muestras independientes de poblaciones con varianza conocida, y media desconocida, para testear la hipótesis $H_0 : \mu_1 = \mu_2$, se computa el valor del estadístico en las muestras

$$z_{obse} = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$$

.

- En términos del estadístico Z, con distribución normal patrón, el P-valor con respecto a

$$H_a : \mu_1 > \mu_2 \qquad es \qquad P(Z \geq z_{obse})$$

$$H_a : \mu_1 < \mu_2 \qquad es \qquad P(Z \leq z_{obse})$$

$$H_a : \mu_1 \neq \mu_2 \qquad es \qquad P(|Z| \geq |z_{obse}|)$$

- Estos P-valores son exactos si la distribución es normal y aproximados para n grande en otros casos.

Dos poblaciones: Z-test

- Los test de nivel α para testear la hipótesis $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ rechazan en favor de la alternativa

$$H_a : \mu_1 > \mu_2 \qquad si \qquad z_{obse} \geq z_{(1-\alpha)}$$

$$H_a : \mu_1 < \mu_2 \qquad es \qquad z_{obse} \leq z_{\alpha}$$

$$H_a : \mu_1 \neq \mu_2 \qquad es \qquad |z_{obse}| \geq z_{(1-\alpha/2)})$$

Sean $X_1, X_2, ..., X_{n_1}$ una muestra aleatoria de una distribución $\mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ y $Y_1, Y_2, ...Y_{n_2}$ una muestra aleatoria de una distribución $\mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ e independientes entre si.

Un estimador para $\mu_1 - \mu_2$ es $\overline{X} - \overline{Y}$ y sabemos que $\overline{X} - \overline{Y}$ tiene distribución $\mathrm{N}(\mu_1 - \mu_2\ ,\ \sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2)$, entonces si deseamos contrastar hipótesis sobre $\mu_1 - \mu_2$, donde $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$ el estadístico de prueba será:

$$\frac{\overline{X} - \overline{Y} - \Delta_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n2}}} \sim \mathrm{N}(0,1) \text{ cuando } H_0 \text{ es verdadera}$$

Entonces, reumiendo como aneriormente:

Hipótesis nula: $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$

Valor de estadístico de prueba: $z = (\overline{x} - \overline{y} - \Delta_0)/\sqrt{\sigma_1^2/n_1 + \sigma_2^2/n_2}$

Hipótesis alternativa	Región de rechazo para un nivel α
$H_A : \mu_1 - \mu_2 > \Delta_0$	$z > z_\alpha$
$H_A : \mu_1 - \mu_2 < \Delta_0$	$z < -z_\alpha$
$H_A : \mu_1 - \mu_2 \neq \Delta_0$	$z > z_{\alpha/2}$ o $z < -z_{\alpha/2}$

El test t para dos muestras: $\sigma_1 = \sigma_2$ desconocido

- Supongamos que las poblaciones bajo estudio tienen una distribución normal con la misma varianza, σ^2.
- Si queremos hacer inferencia sobre las poblaciones, como las poblaciones normales se caracterizan por media y varianza, la diferencia entre las poblaciones se reflejará en la diferencia de medias, $\mu_1 - \mu_2$.
- Un estimador natural para esta diferencia es la diferencia entre medias muestrales $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$, que también tiene distribución normal con media $\mu_1 - \mu_2$ y varianza $Var(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) = \sigma^2(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})$.
- Si σ es desconocido, debe estimarse a partir de las muestras.

El test t para dos muestras: $\sigma_1 = \sigma_2$ desconocido

- Como ambas muestras tienen la misma varianza σ^2, es más razonable estimarlo a partir de la muestra conjunta por

$$S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

- El estimador

$$T = \left[\frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{S_p \sqrt{\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} \right]$$

Tiene una distribución t de Student con $n_1 + n_2 - 2$ grados de libertad.

El test t para dos muestras: $\sigma_1 = \sigma_2$ desconocido

- Supongamos que se obtiene una muestra aleatoria de una población normal con media μ_1 y que otra muestra, independiente de la anterior, se obtiene de otra población normal con media desconocida μ_2.
- Si suponemos también que las dos poblaciones tienen la misma desviación estándar σ, entonces un intervalo de confianza de nivel $(1-\alpha)$ para la diferencia de medias $\mu_1 - \mu_2$ es

$$\left[(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - t_{(1-\alpha/2)} S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}, (\overline{X}_1 + \overline{X}_2) - t_{(1-\alpha/2)} S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right]$$

donde $t_{(1-\alpha/2)}$ es el percentil $(1-\alpha/2)$ de la distribución t con $n_1 + n_2 - 2$ grados de libertad.

El test t para dos muestras: $\sigma_1 = \sigma_2$ desconocido

- Para testear hipótesis $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ se computa el valor observado t_{obse} del estadístico

$$T = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

que tiene distribución t con $n_1 + n_2 - 2$ grados de libertad, y el P-valor del test de H_0 versus

$$H_a : \mu_1 > \mu_2 \qquad es \qquad p^* = P(T \geq t_{obse})$$

$$H_a : \mu_1 < \mu_2 \qquad es \qquad p^* = P(T \leq t_{obse})$$

$$H_a : \mu_1 \neq \mu_2 \qquad es \qquad p^* = P(|T| \geq |t_{obse}|)$$

Y se rechaza la hipótesis nula con nivel α a favor de

$$H_a : \mu_1 > \mu_2 \qquad si \qquad t_{obse} \geq t_{(1-\alpha)}$$

$$H_a : \mu_1 < \mu_2 \qquad si \qquad t_{obse} \leq t_{\alpha}$$

$$H_a : \mu_1 \neq \mu_2 \qquad es \qquad |t_{obse}| \geq t_{(1-\alpha/2)})$$

Resumiendo este caso de comparación de medias. Sean $X_1, X_2, ..., X_{n_1}$ e $Y_1, Y_2, ...Y_{n_2}$ dos muestras independientes de distribuciones $\mathrm{N}(\mu_1, \sigma^2)$ y $\mathrm{N}(\mu_2, \sigma^2)$ respectivamente (el σ es el mismo), entonces:

Hipótesis nula: $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \Delta_0$

Valor de estadístico de prueba: $t = \left(\overline{x} - \overline{y} - \Delta_0\right) / s_p \sqrt{1/n_1 + 1/n_2}$

Hipótesis alternativa	Región de rechazo para un nivel α
$H_A : \mu_1 - \mu_2 > \Delta_0$	$t > t_\alpha$
$H_A : \mu_1 - \mu_2 < \Delta_0$	$t < -t_\alpha$
$H_A : \mu_1 - \mu_2 \neq \Delta_0$	$t > t_{\alpha/2}$ o $t < -t_{\alpha/2}$

grados de libertad $= n_1 + n_2 - 2$

Dos poblaciones:Ejemplo

- Se quieren comparar dos procedimientos diferentes de templado del metal: uno en agua salada y otro en aceite, respecto a la dureza (o grado de temple) obtenida. Para ello, se recopilan los siguientes datos experimentales,

Templado	En agua salada	en aceite
	144.98	145.02
	145.04	144.94
	145.02	144.98
	145.04	144.97
	145.03	144.97
	145.03	145.03
	145.04	144.95
	144.97	144.97
	145.05	
	145.03	
	145.02	
	145	
	145.02	
Promedio	145.021	144.979
s	0.02396	0.03137
n	13	8

Table: Dureza de metal de acuerdo al templado.

Dos poblaciones:Ejemplo

- Entonces $\overline{X}_1 = 145.021$, $\overline{X}_2 = 144.979$ y

$$s_p^2 = \frac{12 \times s_1^2 + 7 \times s_2^2}{19} = 0.007178$$

por lo cual $s_p = 0.027$, y $s_p\sqrt{\frac{1}{13} + \frac{1}{8}} = 0.012$.

- Un intervalo de confianza del 95% para la diferencia de medias sería

$$\left[(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - t_{(1-\alpha/2)} S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}, (\overline{X}_1 + \overline{X}_2) - t_{(1-\alpha/2)} S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right]$$

$$= [0.015, 0.065]$$

pues $t_{0.975} = 2.093$ con 19 grados de libertad.

- Observemos que 0 no pertenece al intervalo de confianza calculado, por lo que, a nivel de $\alpha = 0.05$, se rechaza la hipótesis de igualdad de medias.

Dos poblaciones:Ejemplo

- Con un nivel menor $\alpha = 0.01$, las hipótesis son

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \qquad H_a : \mu_1 \neq \mu_2.$$

  El valor observado

$$|t_{obse}| = \left| \frac{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2)}{S_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \right| = 3.33$$

  y el percentil $t_{0.995} = 2.861$, con 19 grados de libertad, es más chico que el valor observado 3.33, por lo cual la hipótesis de igualdad de medias se rechaza aún con nivel 0.01.
- Hay muy poca duda de que los métodos de templado producen una dureza distinta en el metal.

El test t para dos muestras: σ_1 y σ_2 desconocidos

- Supongamos ahora que las desviaciones estándar poblacionales son diferentes y desconocidas.
- Siguiendo el razonamiento del caso de una muestra, deberíamos sustituir las desviaciones estándar poblacionales por las muestrales, lo cual resultaría en el estadístico

$$T = \frac{\overline{T}_1 - \overline{T}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S^2}{n_2}}}$$

- Pero, lamentablemente, aun bajo la suposición de normalidad de las poblaciones, este estadístico no sigue una distribución t de Student. Pero puede verse que su distribución se aproxima a una t de Student con grados de libertad estimados a partir de los datos.

El test t para dos muestras: σ_1 y σ_2 desconocidos

- Si se tienen muestras independientes de poblaciones con varianza y media desconocidas, para testear la hipótesis $H_0 : \mu_1 = \mu_2$, se computa el valor del estadístico en las muestras

$$t_{obse} = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

.

- El estadístico T tiene una distribución aproximada t con gl grados de libertad

$$gl = \frac{\left(\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S^2}{n_2}\right)^2}{\frac{1}{n_1-1}\left(\frac{S_1^2}{n_1}\right)^2 + \frac{1}{n_2-1}\left(\frac{S^2}{n_2}\right)^2}$$

- Si este número no es entero, se aproxima a su entero más próximo.

El test t para dos muestras: σ_1 y σ_2 desconocidos

- En términos del estadístico T, con distribución t aproximada, el P-valor con respecto a

$$H_a : \mu_1 > \mu_2 \qquad es \qquad P(T \geq t_{obse})$$

$$H_a : \mu_1 < \mu_2 \qquad es \qquad P(T \leq t_{obse})$$

$$H_a : \mu_1 \neq \mu_2 \qquad es \qquad P(|T| \geq |t_{obse}|)$$

- Los test de nivel α para testear la hipótesis $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ rechazan en favor de la alternativa

$$H_a : \mu_1 > \mu_2 \qquad si \qquad t_{obse} \geq t_{(1-\alpha)}$$

$$H_a : \mu_1 < \mu_2 \qquad es \qquad t_{obse} \leq t_{\alpha}$$

$$H_a : \mu_1 \neq \mu_2 \qquad es \qquad |t_{obse}| \geq t_{(1-\alpha/2)})$$

Ejemplo

- El pesticida DDT causa temblores y convulsiones al ingerirse por humanos y por mamíferos y se busca entender por qué se producen las convulsiones.
- En un experimento comparativo aleatorio, 6 ratas blancas son envenenadas con DDT y comparadas con el grupo control de 6 ratas no envenenadas.
- Las mediciones eléctricas de la actividad nerviosa son las principales pistas para deducir cómo actúa el envenenamiento por DDT. Cuando un nervio es estimulado, su respuesta nerviosa presenta un pico agudo, seguido de otro mucho menor.
- En las ratas envenenadas, el segundo pico era mucho mayor que en las normales.
- Esta observación es importante para entender cómo el DDT causa los temblores.

Ejemplo

- Los investigadores midieron la amplitud del segundo pico como porcentaje del primer pico cuando se estimuló un nervio de una pata de la rata. Para las ratas envenenadas, los valores fueron

$$12.207 \quad 16.869 \quad 25.050 \quad 22.429 \quad 8.456 \quad 20.589$$

- En el grupo control, los datos fueron

$$11.074 \quad 9.686 \quad 12.064 \quad 9.351 \quad 8.182 \quad 6.642$$

- La diferencia entre las medias es bastante grande, pero en estas muestras tan pequeñas la media muestral es muy variable.

Ejemplo

- Un test de significación ayudaría a confirmar que lo observado es un efecto real. Como el incremento en el segundo pico no era un efecto previsto, sino que se observó en este experimento, es mejor realizar un test a dos colas.
$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \qquad H_a : \mu_1 \neq \mu_2$$
- Los datos parecen bastante normales (tanto como seis datos pueden serlo).
- El valor del estadístico t_{obse} es de 2.99, y el P-valor, calculado con una distribución t con $5.9 \sim 6$ grados de libertad, es de
$$P(|T| \geq 2.99) = 0.03$$
Bastante pequeño.
- Por lo cual hay evidencia sólida de que el tamaño medio del segundo pico difiere entre el grupo envenenado y el grupo control.