

Probabilidad y Estadística - Introducción a la Probabilidad y Estadística 2025

GUÍA DE EJERCICIOS N° 6. INTERVALOS DE CONFIANZA BASADOS EN UNA SOLA MUESTRA
--

Intervalos de Confianza para la Media con Varianza Conocida

- 1. Se desea un intervalo de confianza para la media verdadera μ de pérdida de carga para cierto tipo de motor de inducción(en watts), cuando la corriente de línea se mantiene en 10 amps para una velocidad de 1500 rpm. Suponga que la pérdida de carga está normalmente distribuida con $\sigma = 3$.
- a) Calcular un intervalo de confianza del 95 % para μ cuando $n = 25$ y $\bar{x} = 58,3$
 - b) Calcular un intervalo de confianza del 95 % para μ cuando $n = 100$ y $\bar{x} = 58,3$. Compare la longitud de este intervalo con la del obtenido en el inciso (a).
 - c) Calcular un intervalo de confianza del 99 % para μ cuando $n = 100$ y $\bar{x} = 58,3$. Compare la longitud de este intervalo con la del obtenido en el inciso (b).
 - d) ¿Qué tan grande debería ser n para que la longitud del intervalo de confianza del 99 % para μ sea a lo sumo 1?
- 2. La frecuencia de resonancia (en Hz) de las raquetas de tenis de cierto tipo tienen distribución normal con media μ y varianza σ^2 conocida. Se toma una muestra aleatoria de tamaño n .
- a) ¿Cuál es el nivel de confianza del intervalo $\bar{x} \pm 2,81\sigma/\sqrt{n}$?
 - b) ¿Cuál es el valor de $z_{\alpha/2}$ que corresponde a un intervalo de confianza para μ del 99.7 %?
 - c) Con la muestra dada se obtuvieron los siguientes intervalos de confianza para μ : (114,4,115,6) y (114,1,115,9).
 - . i) ¿Cuál es el valor de la media muestral?
 - . ii) ¿Cuál de estos intervalos tiene mayor nivel de confianza?

Intervalos de Confianza para Medias y Proporciones, con Varianza Desconocida

- 3. Un artículo analiza el uso de fotografía infrarroja en color para la identificación de árboles normales en bosques de pino de Oregon. Para una muestra de 69 árboles sanos, la media muestral de densidad de la capa de tinte fue de 1.028 y la desviación estándar muestral (s_{n-1}) de 0.163.
- a) Calcular un intervalo de confianza de nivel aproximado 0.95 para la media poblacional de la densidad de capa de tinte μ para estos pinos.
 - b) Suponga que los investigadores habían hecho una estimación de 0.16 para el valor de s_{n-1} antes de reunir los datos, ¿qué tamaño muestral sería necesario para obtener un intervalo de longitud a lo sumo 0.05 y con un nivel de confianza del 95 %?
- 4. Se seleccionó una muestra aleatoria de 539 sujetos pertenecientes a cierta ciudad. Se determinó que 133 de ellos poseían por lo menos un arma de fuego.
- a) Determinar un intervalo de confianza de nivel aproximado 0.98 para la verdadera proporción de propietarios de armas en esa ciudad.
 - b) ¿Qué tamaño de muestra sería necesario para obtener un intervalo de longitud a lo sumo 0.10 y con un nivel de confianza aproximado de 0.98, independiente del \hat{p} ?
- 5. Se quiere analizar si las determinaciones del contenido de un ácido que realiza un laboratorio son aceptables. Se tomó una muestra de alimento conteniendo 78 mg/kg de este ácido y se analizaron las siguientes determinaciones independientes obtenidas por el laboratorio:

80 81 77 80 77 74 77 79 81 79

Suponga que el contenido del ácido tiene distribución normal.

- a) Determinar un intervalo de 95 % de confianza para el contenido medio del ácido según el laboratorio y a partir del mismo concluir si las mediciones del laboratorio son aceptables.
- b) ¿Cuál sería su conclusión en el inciso a) si el contenido real del ácido en la muestra de alimento fuera de 82mg/kg ?

Intervalos de Confianza para la Varianza

- 6. Un triatlón es una competencia deportiva que incluye pruebas de natación, ciclismo y carrera. Un artículo reporta una investigación donde participaron triatletas hombres. Se registraron las máximas pulsaciones del corazón (latidos/minutos) durante la actuación en cada uno de los tres eventos. En natación, la media y la desviación estándar muestrales fueron $\bar{x} = 188,0$ y $s_{n-1} = 7,2$, respectivamente. Se supone que la distribución del ritmo cardíaco es aproximadamente normal.
- a) Si participaron 40 atletas:
- . i) Determinar un intervalo de confianza del 98 % para la media poblacional del ritmo cardíaco en la prueba de natación.
 - . ii) Determinar un intervalo de confianza del 98 % para la varianza poblacional del ritmo cardíaco en la prueba de natación.
- b) Si participaron 9 atletas:
- . i) Determinar un intervalo de confianza del 95 % para la media poblacional del ritmo cardíaco en la prueba de natación.
 - . ii) Determinar un intervalo de confianza del 95 % para la varianza poblacional del ritmo cardíaco en la prueba de natación.
- 7. El intervalo de confianza del 95 % para la media poblacional de una distribución normal con varianza desconocida fue $(229,764, 233,504)$, para una muestra de tamaño 5. Si ahora usted considera que es mejor un intervalo de confianza del 99 %, ¿cuáles son las cotas de este intervalo?
- 8. El tiempo de reacción (TR) ante un estímulo es el período que comienza con la presentación de un estímulo y termina con el primer movimiento discernible de cierto tipo. Un artículo reporta que la media muestral del TR para 16 nadadores, al arranque con un disparo fue de $\bar{x} = 0,214'$ y la desviación estándar muestral fue de $s_{n-1} = 0,036'$. Suponiendo que el TR tiene aproximadamente distribución normal, obtener:
- a) un intervalo de confianza del 90 % para la verdadera media del TR de los nadadores.
- b) un intervalo de confianza del 90 % para la desviación estándar del TR de los nadadores.

Intervalos de Confianza para Distribuciones Especiales

- * 9. Sea X_1, X_2, \dots, X_n una muestra aleatoria de una distribución uniforme en el intervalo $[0, \theta]$. Si $Y = \max(X_i)$, se puede demostrar que la función densidad $U = Y/\theta$ está dada por:

$$f_U(u) = \begin{cases} nu^{n-1} & 0 \leq u \leq 1 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

- a) Probar que

$$P\left((\alpha/2)^{1/n} \leq \frac{Y}{\theta} \leq (1 - \alpha/2)^{1/n}\right) = 1 - \alpha$$

Utilizar este resultado para hallar un intervalo de confianza para θ del $(1 - \alpha)100\%$

- b) Probar que:

$$P(\alpha^{1/n} \leq \frac{Y}{\theta} \leq 1) = 1 - \alpha$$

y utilizar este resultado para hallar un intervalo de confianza para θ del $(1 - \alpha)100\%$

- c) ¿Cuál de los dos intervalos es más corto?

d) Si el tiempo de espera de un autobús por la mañana está uniformemente distribuido y los tiempos de espera observados son: 4.2, 3.5, 1.7, 1.2 y 2.4, deducir un intervalo de confianza del 95 % para θ usando el más corto.