Intro a la Probabilidad y estadistica

Martes y Jueves Aula B17

Dra Ana Georgina Flesia

Distribuciones Conocidas

Distribución Degenerada

Degenerada: $X \equiv \delta_c$

Una variable aleatoria X tiene **distribución degenerada en el punto c** si tiene toda la probabilidad concentrada en dicho punto

Función de masa:

$$P(X = c) = 1, \qquad P(X \neq c) = 0$$

$$E[X] = c, \qquad V(X) = c^2 - c^2 = 0$$

Distribución Uniforme Discreta

Uniforme discreta: $X \equiv Unif\{x_1, ..., x_n\}$

Una variable aleatoria X tiene una **distribución uniforme discreta** sobre el conjunto de números $\{x_1, ..., x_n\}$ si la probabilidad de que tome cualquiera de estos valores es la misma

Función de masa:

$$P(X = x_i) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{si } i = 1, ..., n \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$E[X] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad V(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2$$

Distribución Bernoulli

Pruebas de Bernouilli

Experimento aleatorio con dos resultados posibles, “éxito”, E y “fracaso”, F, con probabilidades $P(E) = p$ y $P(F) = 1 - p = q$.

- “Observar un chip al azar de los producidos en una fábrica” $\rightarrow$ $E =$“el chip no es defectuoso” y $F =$“el chip es defectuoso”.
- “Lanzar una moneda dos veces” $\rightarrow$ nos puede interesar sacar el mismo resultado las dos veces $\rightarrow$ $E = \{CC, ++\}$ y $F = \{C+, +C\}$.
- “Elegir al azar un número entre 0 y 1” $\rightarrow$ podemos considerar $\rightarrow$ $E = [0, 0{,}3]$ y $F = (0{,}3, 1]$.

Bernuilli: $X \equiv Bern(p)$

La variable aleatoria X obtenida al realizar una prueba de Bernouilli con $P(E) = p$ tiene distribución $Bern(p)$

$$X = \begin{cases} 1, & \text{si obtenemos } E \\ 0, & \text{si obtenemos } F \end{cases}$$

Función de masa:

$$P(X = x) = p^x(1-p)^{1-x} = p^x q^{1-x},\ x = 0, 1$$

$$E[X] = p, \qquad V(X) = p(1-p) = pq$$

- **SUMA:** la suma de v.a.'s independientes $Bern(p)$ da lugar a otro tipo de v.a. denominada Binomial, de la que la Bernouilli es un caso particular.

Distribución Binomial

Distribución Binomial

La distribución binomial es una distribución discreta muy importante que surge en muchas aplicaciones bioestadísticas.

Fue obtenida por Jakob Bernoulli (1654-1705) y publicada en su obra póstuma Ars Conjectandi en 1713.

Binomial: $X \equiv B(n,p)$

- se genera por la repetición de n pruebas de Bernouilli independientes
- X="número de éxitos obtenidos en las n pruebas de Bernouilli"
- puede escribirse como la suma de n v.a. $Bern(p)$, independientes:

$$X = X_1 + ... + X_n,$$

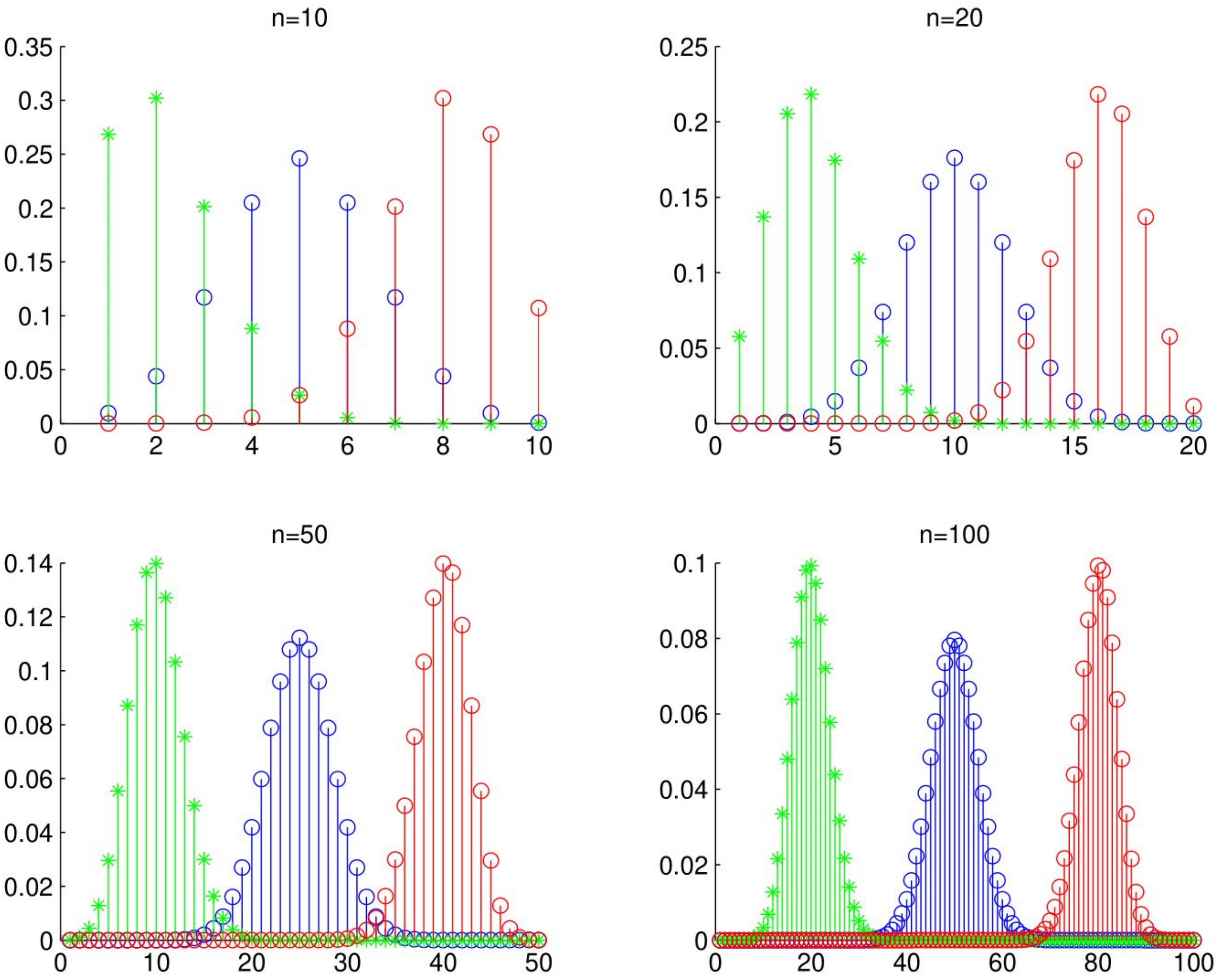
con

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{si obtenemos } E \text{ en la } i\text{-ésima prueba} \\ 0, & \text{si obtenemos } F \text{ en la } i\text{-ésima prueba} \end{cases} \quad (X_i \equiv Bern(p), i = 1, ..., n)$$

Función de masa:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, x = 0, 1, ..., n$$

$$E[X] = np, \qquad V(X) = npq$$


n=10
n=20
n=50
n=100

Binomial:Ejemplo

En 1693, Samuel Pepys (a quien hoy se recuerda mejor por su diario) escribió una carta a Isaac Newton preguntándole acerca de una apuesta que Pepys planeaba hacer. Pepys quería saber cuál de los siguientes eventos tenía la mayor probabilidad de ocurrir.

1. $A = \{$Se lanzan 6 dados y al menos 1 es un seis$\}$
2. $B = \{$Se lanzan 12 dados y al menos 2 son seis$\}$
3. $C = \{$Se lanzan 18 dados y al menos 3 son seis$\}$

Pepys pensó que el tercero tenía la mayor probabilidad, pero Newton no estaba de acuerdo.

Binomial: $P(A)$

La probabilidad de l evento A es sencilla de calcular.

$$\begin{aligned} P(\text{al menos un seis en seis tiradas}) &= 1 - P(\text{0 seis en seis tiradas}) \\ &= 1 - \frac{5^6}{6^6} \\ &\approx .665 \end{aligned}$$

Sin embargo, las probabilidades de los otros dos eventos son más complicadas de calcular.
Por ejemplo, no es obvio cómo contar el número de formas de obtener exactamente 2 seis en 18 tiradas de dados.

Binomial: $P(B)$

1. Definamos como éxito E obtener un seis en una tirada de dados y fracaso F no observar un seis en la misma tirada. La probabilidad de éxito es $p = 1/6$ y la de fracaso $q = 5/6$.
2. Este es un experimento Bernoulli.
3. Si lo repetimos 12 veces en forma independiente (tiramos 12 dados o tiramos un dado 12 veces en forma consecutiva), y definimos a X como el número de éxitos en los 12 experimentos, esta variable tiene distribución binomial de parámetros $n = 12$ y $p = 1/6$.
4. $P(B) = P(X \geq 2)$

Binomial: $P(B)$

$$\begin{aligned}
P(X \geq 2) &= 1 - P(X \leq 1) \\
&= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] \\
&= 1 - \binom{12}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^{12} - \binom{12}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^{11} \\
&= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{12} - 12\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{11} \\
&= \approx .6187.
\end{aligned}$$

Binomial: $P(C)$

1. Sea Y el número de seis en 18 tiradas de un dado. Y es una variable binomial con parámetros $p = 1/6$ y $n = 18$.

$$
\begin{aligned}
P(Y \geq 3) &= 1 - P(Y \leq 2) \\
&= 1 - [P(Y = 0) + P(Y = 1) + P(Y = 2)] \\
&= 1 - \binom{18}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^{18} - \binom{18}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^{17} \\
&\quad - \binom{18}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{16} \\
&\approx 0.5973.
\end{aligned}
$$

¿quien ganó?

Distribución Poisson

Distribución de Poisson

La distribución de Poisson debe su nombre al matemático francés Simeón Denis Poisson (1781-1840), aunque ya había sido introducida en 1718 por Abraham De Moivre (1667-1754) como una forma límite de la distribución binomial que surge cuando se observa un evento raro después de un número grande de repeticiones [12].

Poisson: $X \equiv \mathbb{P}(\lambda)$

- expresa la probabilidad de que ocurran un número x de sucesos en un tiempo fijo, si ocurren con una tasa media conocida, λ, y son independientes del tiempo transcurrido desde el último suceso
- se aplica a sucesos con probabilidad muy baja de ocurrir (sucesos "raros")

Función de masa:

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}, \qquad x = 0, 1, \ldots$$

$$E[X] = V[X] = \lambda$$

- **SUMA:** si $X_i \equiv \mathbb{P}(\lambda_\mathbf{i})$ son independientes, $\Rightarrow$ la v.a. $\sum_i X_i \equiv \mathbb{P}(\sum_\mathbf{i} \lambda_\mathbf{i})$

Poisson

1. Estás en una habitación con n personas.
2. Cada persona en la sala ha contribuido con \$1000 a una colecta.
3. El dinero recolectado se redistribuirá de vuelta a las personas en la sala, de la siguiente manera: cada billete de mil pesos tiene la misma probabilidad de ir a cualquiera de los n personas, independientemente de los otros billetes recolectados.
4. Esto significa que algunas personas podrían recibir más de \$1000, mientras que otras se quedan con nada.

Poisson

1. A medida que n tiende a infinito ¿Cuál es la probabilidad de que termines sin dinero?
2. Hay dos corrientes de pensamiento comunes:

2.1 A medida que n tiende a infinito , el número de billetes en la colecta aumenta hasta el infinito, así que parece que la probabilidad de que termines con al menos uno de esos billetes debería acercarse a 1, es decir, la probabilidad de que termines sin dinero se aproxima a 0.

2.2 La probabilidad de que ganes un billete de 1000 es $1/n$ y medida que n tiende a infinito, esa probabilidad disminuye a 0, por lo que parece que la probabilidad de que termines sin dinero se aproxima a 1.

Poisson

1. Vamos a definir la variable X como el número de billetes que recibes de la colecta de n billetes. La variable X tiene distribución binomial de parámetros $(n, 1/n)$, por lo cual la probabilidad de no recibir ningún billete es

$$\begin{aligned} P(X=0) &= \binom{n}{0}\left(\frac{1}{n}\right)^0\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \\ &= \left(1-\frac{1}{n}\right)^n. \end{aligned}$$

2. Cual es el límite cuando n tiende a infinito? Es un límite famoso en matemática, un límite notable.

Poisson

1. Para calcularlo, se toma el logaritmo (natural) para bajar la n del exponente y aplica la regla de L'Hôpital:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \log\left(1-\frac{1}{n}\right)^n &= \lim_{n\to\infty} n \log\left(1-\frac{1}{n}\right) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\log(1-x)}{x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}\log(1-x)}{\frac{d}{dx}x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{1-x}}{1} \\
&= -1.
\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}.$$

2. La probabilidad de no recibir ningún dinero es $1/e \approx 0.368$ cuando $n \to \infty$

Poisson

1. Si X es una variable Binomial de parámetros $(n, p =$ λ/n $)$, la función de masa de X converge a la función de masa de una variable Poisson con parámetro �� cuando n tiende a infinito.

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}p_n^k(1-p_n)^{n-k} &= \lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}\\
&= \frac{\lambda^k}{k!}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)
\end{aligned}
$$

$$p_Y(k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

Ejemplo Poisson

1. El número de errores en un artículo de investigación cuando llega al editor final es una variable con distribución Poisson con $\mu = 4.6$. ¿Cual es la probabilidad de que haya 2 o mas errores en un artículo seleccionado al azar?

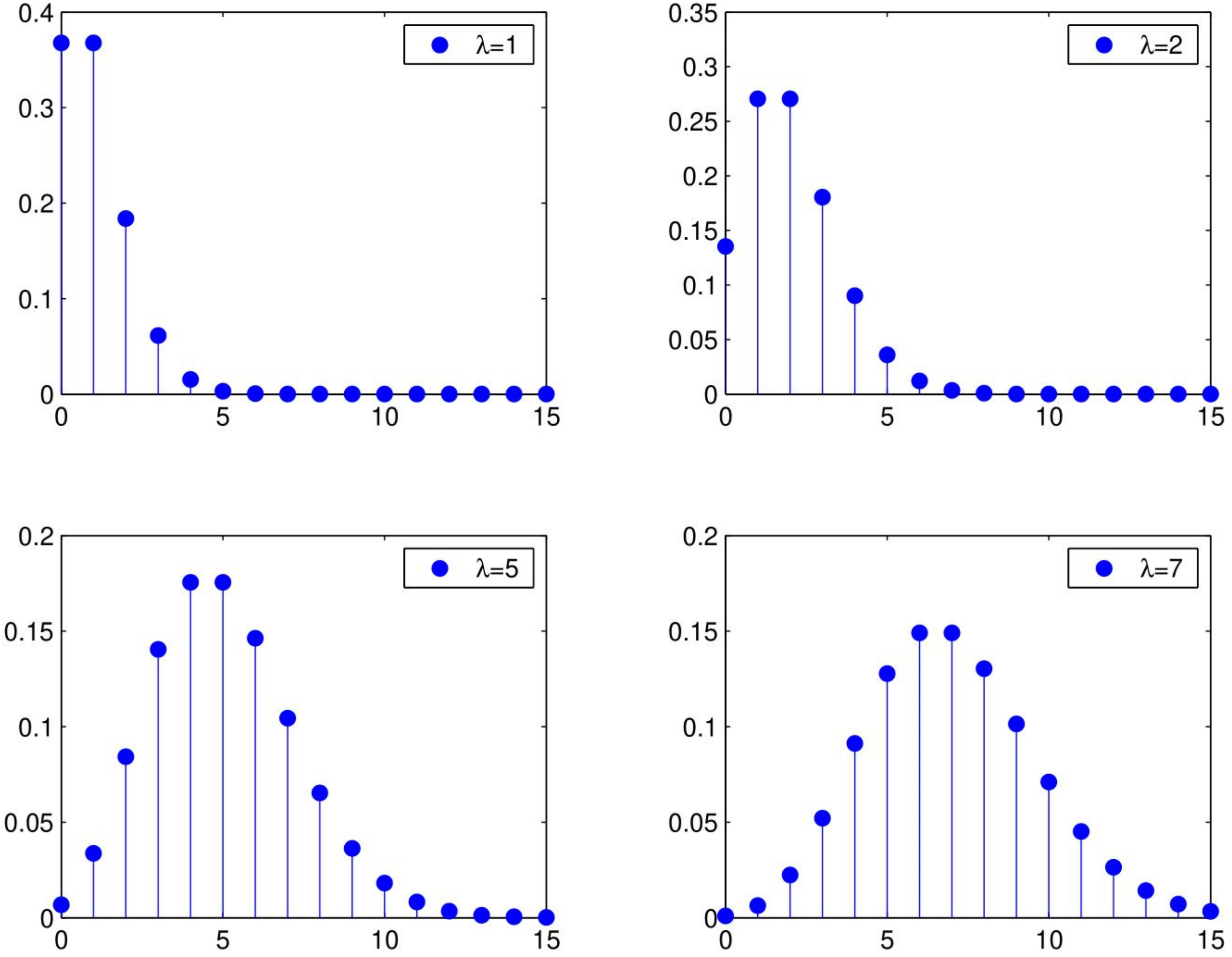
$$
\begin{aligned}
P(X \geq 2) &= 1 - P(X < 2) \\
&= 1 - f(0) - f(1) \\
&= 1 - e^{-4.6}\frac{4.6^0}{0!} - e^{-4.6}\frac{4.6^1}{1!} \\
&= 1 - e^{-4.6} - 4.6e^{-4.6} \\
&\approx .944.
\end{aligned}
$$

Ejemplo Poisson

1. ¿Por qué podría ser razonable utilizar la distribución de Poisson como modelo para el número de errores tipográficos?
2. Cada artículo científico tiene muchas palabras (por ejemplo, $n = 1000$).
3. Hay una pequeña probabilidad de que cada palabra tenga un error tipográfico (por ejemplo, $p = 0.0046$).
4. Si los errores tipográficos son independientes entre palabras, entonces el número de errores tipográficos sigue una distribución binomial.
5. Dado que n es grande y p es pequeño, esta distribución binomial se puede aproximar a una distribución Poisson ($\mu = np = 4.6$).

Ejemplo Poisson

1. Sin embargo, todo esto es conjetura.
2. No se nos dice cuántas palabras tiene el artículo de opinión, ni la probabilidad de que cada palabra tenga un error tipográfico.
3. Simplemente asumimos que el número de errores tipográficos sigue una distribución de Poisson.
4. En la práctica, el modelo de Poisson se utiliza a menudo para datos de conteo, incluso cuando no hay un modelo binomial subyacente.


λ=1
λ=2
λ=5
λ=7

Experimento hipergeométrico

- Consideremos una población de r objetos, de los cuales r_1 son de un tipo y $r_2 = r - r_1$ son de otro tipo.
- Supongamos que extraemos un subconjunto de objetos $\{x_1, \ldots, x_n\}$ de tamaño n de la población.
- La extracción de un subconjunto de una población se realiza seleccionando elementos al azar sin reponerlos a la población, sin considerar el orden de extracción.

Variable hipergeométrica $\mathcal{H}(r_1, r, n)$

- Sea X el número de los objetos del primer tipo en la muestra. Entonces X es una variable aleatoria cuyos valores posibles son $0, 1, \ldots, n$.
- Calculemos su función de densidad discreta.

Función de masa hipergeométrica $\mathcal{H}(r_1, r, n)$

Observemos que

1. Todas las posibles muestras son equiprobables, pues son elegidas al azar, así que la probabilidad de elegir una muestra particular es

$$P(\{x_1, \ldots, x_n\}) = \frac{1}{\binom{r}{n}}$$

2. El evento $(X = x)$ contiene todas las muestras (subconjuntos) con x elementos del tipo 1, y $r - x$ elementos del tipo 2.
3. Hay $\binom{r_1}{x}$ formas de elegir los x elementos del tipo 1 y $\binom{r - r_1}{n - x}$ formas de elegir los elementos del tipo 2 entre $r - x$ elementos.

Función de masa hipergeométrica $\mathcal{H}(r_1, r, n)$

1. Entonces

$$p_X(x) = P(X = x) = \frac{\begin{pmatrix} r_1 \\ x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r - r_1 \\ n - x \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} r \\ n \end{pmatrix}}$$

Una variable X con esta distribución se dice que tiene densidad Hipergeométrica de parámetros (r_1, r, n).

Esperanza de una variable $\mathcal{H}(r_1, r, n)$

Si X tiene distribución hipergeométrica $\mathcal{H}(r_1, r, n)$ entonces

$$E(X) = \frac{nr_1}{r} \qquad Var(X) = \frac{r_1 n(r - r_1)(r - n)}{r^2(r-1)}$$

Ejemplo de una variable $\mathcal{H}(r_1, r, n)$

La cámara legislativa de cierta ciudad está compuesta por 30 concejales de los cuales 18 pertenecen al partido A y los otros 12 al partido B. Se elige al azar una comisión de 5 concejales.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que todos los miembros de la comisión elegida sean del mismo partido?
2. ¿Cuál es la probabilidad de que la mayoría de los miembros de la comisión pertenezcan al partido A?

Ejemplo de una variable $\mathcal{H}(r_1, r, n)$

- Consideremos la variable aleatoria X número de concejales del partido A de la comisión, es una variable hipergeométrica de parámetros $r_1 = 18$, $r = 30$ y $n = 5$.
- La probabilidad de que todos los concejales elegidos sean de un mismo partido es $P(X = 5) + P(X = 0)$ pues ocurre que los 5 pertenecen al partido A o bien los 5 no pertenecen al partido A.

$$P(X = 5) + P(X = 0) = \frac{\binom{18}{5}\binom{12}{0}}{\binom{30}{5}} + \frac{\binom{18}{0}\binom{12}{5}}{\binom{30}{5}}$$

- La probabilidad de que la mayoría de los concejales sea del partido A es $P(X \geq 3)$, y se calcula

$$P(X \geq 3) = \frac{\binom{18}{3}\binom{12}{2}}{\binom{30}{5}} + \frac{\binom{18}{4}\binom{12}{1}}{\binom{30}{5}} + \frac{\binom{18}{5}\binom{12}{0}}{\binom{30}{5}}$$