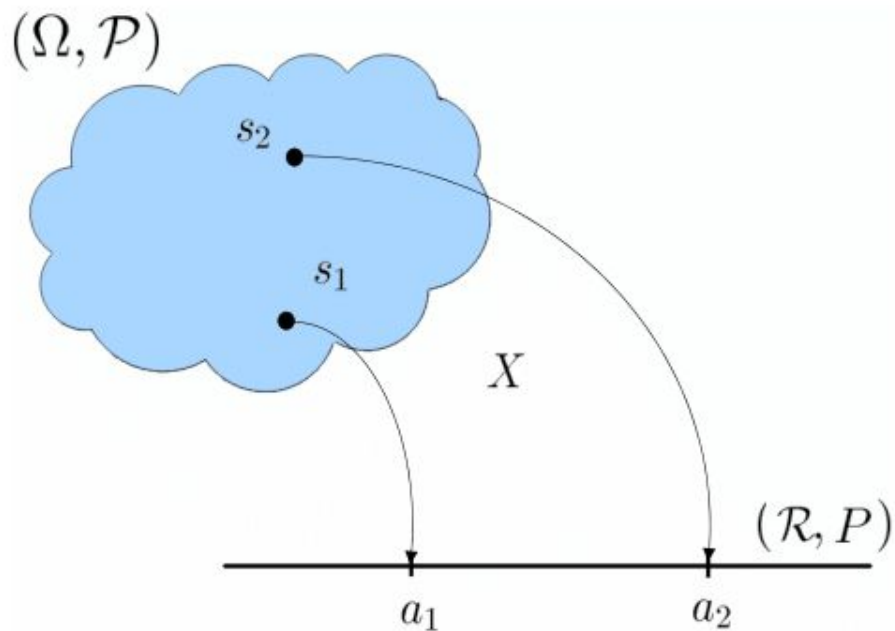


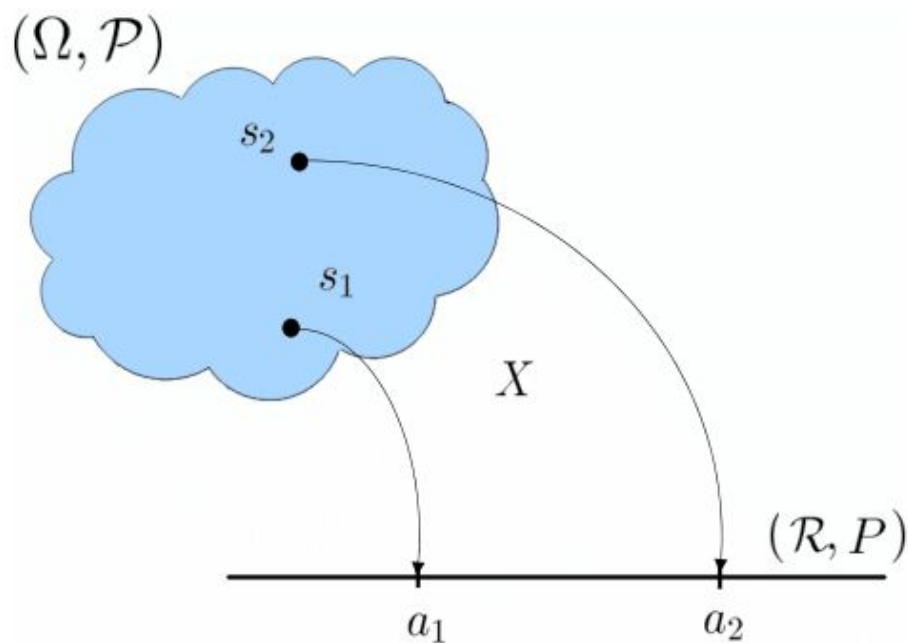
# **Introducción a la Probabilidad y la Estadística**



Martes y Jueves Aula B17  
Dra Ana Georgina Flesia

Si en un experimento aleatorio, a cada suceso elemental del espacio  $(\Omega, \mathcal{P})$  le asignamos un valor numérico obtenemos una variable que “hereda” de  $\Omega$  la probabilidad  $\mathcal{P}$ , y que denominamos **variable aleatoria**.





La probabilidad  $P$  de que  $X$  tome un valor concreto  $a$ ,  $P(X = a)$ , es la probabilidad que corresponde a la unión de los sucesos aleatorios elementales a los que hemos asignado ese valor  $a$ .

## Ejemplo 1:

Experimento aleatorio: “lanzar un dado”.

- v.a. más natural  $X$ : asignar a cada cara del dado su valor numérico  $\Rightarrow$   $X$  toma seis valores, del 1 al 6, con probabilidad

$$P(X = a) = \frac{1}{6}, a = 1, \dots, 6$$

- v.a. (no tan natural)  $Y$ : asignar el valor 1 a las caras que son múltiplos de tres y el valor 0 a las que no lo son,

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{con probabilidad } p = \frac{1}{3} \\ 0, & \text{con probabilidad } p = \frac{2}{3} \end{cases}$$

### Ejemplo 2:

**Vamos a realizar un experimento aleatorio que consiste en “seleccionar una persona al azar”. Para cada persona observamos el número de hermanos que tiene y su peso.**

Podemos usar las v.a.'s:

- $X$  para el número de hermanos, cuyos valores serán *números enteros* a partir de cero,
- $Y$  para el peso; con rango de valores *todos los posibles entre los límites naturales*; entre dos valores posibles de  $Y$  se podrían obtener infinitos valores intermedios (si utilizáramos aparatos con suficiente precisión).

Estos infinitos valores en el **rango** de la variable es lo que diferencia a las variables **continuas** ( $Y$ ) de las **discretas** ( $X$ ).

### Definición:

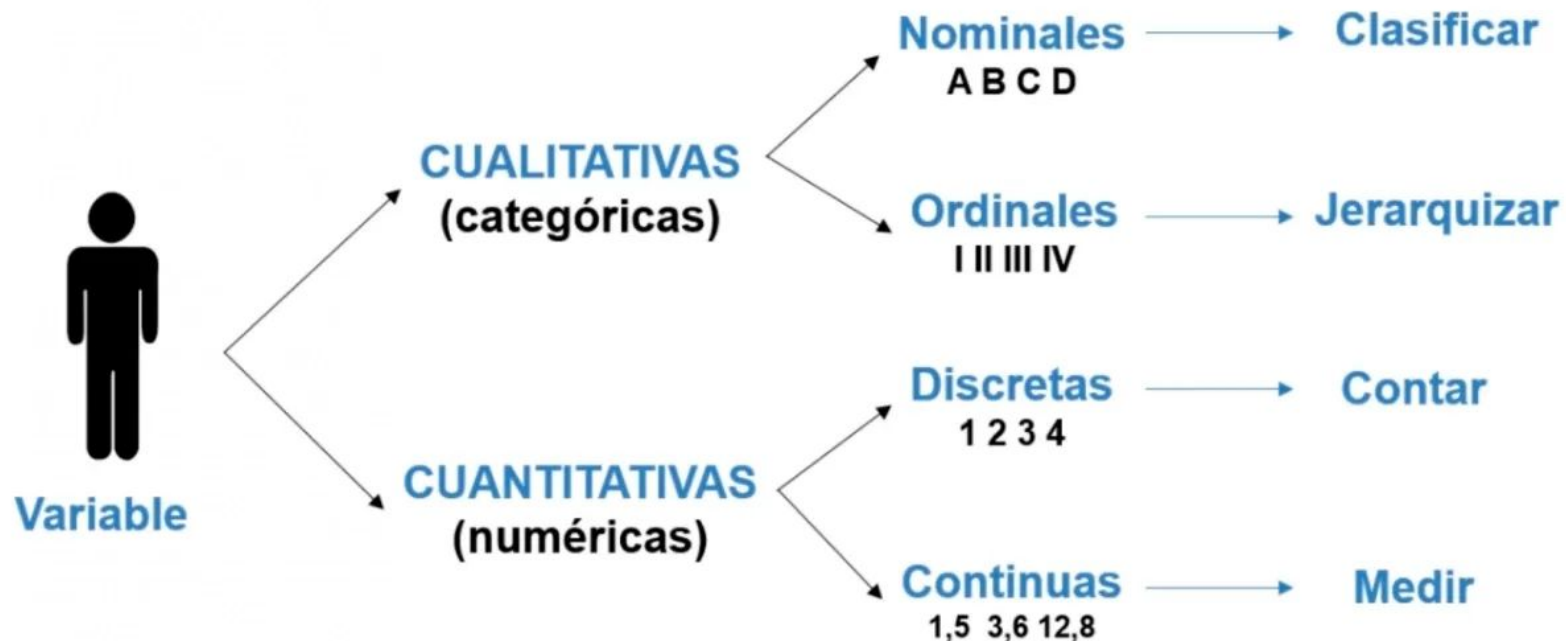
Una **variable aleatoria**  $X$  es una función  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , que a cada elemento del espacio muestral le hace corresponder un número real.

- El conjunto de valores reales que tienen asociado algún elemento del espacio muestral se denomina **rango** de la v.a.:

$$\Omega_X = \{x \in \mathbb{R} : \exists s \in \Omega, X(s) = x\}$$

- Si  $\Omega_X$  es un conjunto finito o numerable, entonces la variable aleatoria se denomina **discreta**.
- En caso de que  $\Omega_X$  sea un intervalo, finito o infinito, entonces la variable aleatoria se denomina **continua**.





# Ejemplos

- Cualitativa Nominal  $\rightarrow X(\Omega) = \{\text{banana, manzana, pera, uva}\}$
- Cualitativa Ordinal  $\rightarrow X(\Omega) = \{\text{chico, mediano, grande, extra grande}\}$
- Cuantitativa Discreta  $\rightarrow X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Cuantitativa continua  $\rightarrow X(\Omega) = [0, 1]$

## Población: Alumnado de clase



## Variable estadística: Lugar de viaje



## Variable estadística: Dinero a gastar



## Variable estadística: Noches de hotel



¿Cómo asignamos una probabilidad  $P$  a los valores del rango de una v.a.?  
(¿cómo hereda la variable  $X$  la función de probabilidad  $\mathcal{P}$  del espacio  $\Omega$ ?)

Dado  $A \subset \mathbb{R}$ , la probabilidad de  $A$  viene dada por

$$P(A) = P(X \in A) = \mathcal{P}(s \in \Omega : X(s) \in A)$$

La función de  $\left\{ \begin{array}{l} \text{masa (v.a. discreta)} \\ \text{densidad (v.a. continua)} \end{array} \right\}$  **caracteriza**  $P$  (inducida por  $\mathcal{P}$ )

- ¿qué significa? que conocida la función de masa/densidad de  $X$  podemos calcular la probabilidad de cualquier subconjunto  $A \subset \mathbb{R}$
- ¿por qué usarlas? porque son más fáciles de calcular y de manipular

## Función de masa (v.a.discreta)

Es una función que representa la probabilidad de que  $X$  tome cada uno de los posibles valores (discretos)  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n, \dots$ :

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R} &\rightarrow [0, 1] \\ x_i &\rightarrow p(x_i) = P(X = x_i) = \\ &= \mathcal{P}(s \in \Omega : X(s) = x_i) \end{aligned}$$

## Propiedades:

1.  $0 \leq p(x) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$
2.  $\sum_i p(x_i) = 1$
3. Dado  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $P(X \in A) = \sum_{x_i \in A} p(x_i)$

## Función de distribución

Otra función  $F$  que **caracteriza** la función de probabilidad  $P$  de una v.a.  $X$ :

$$F(x) = P(-\infty, x] = P(s \in \Omega : X(s) \leq x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

## Propiedades:

1.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$
2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$
3.  $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$  (monótona no decreciente)
4.  $F(x^+) = \lim_{h \rightarrow 0^+} F(x + h) = F(x)$  (continua por la derecha)

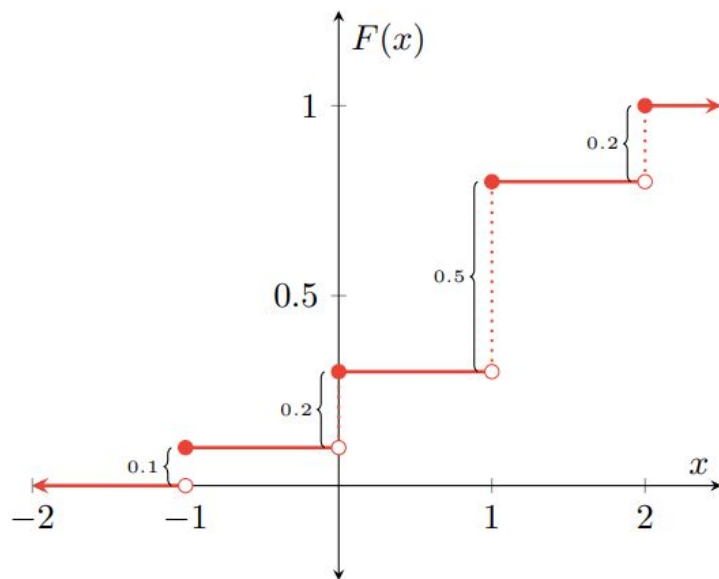
## Como consecuencia:

- $P(a, b] = P(-\infty, b] - P(-\infty, a] = F(b) - F(a)$

## Función de distribución de una v.a. discreta

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i)$$

- es una función continua a trozos (función en escalera)



## Ejemplo

En un ítem de una prueba aplicada a niños pequeños, se les pide que hagan corresponder cada uno de los tres dibujos de animales con la palabra que identifica a ese animal.

Si un niño asigna aleatoriamente las tres palabras a los tres dibujos,

1. encuentre la función densidad discreta
2. la función de distribución acumulada de  $Y$ , el número de aciertos.
3. Encuentre  $P(1 < X \leq 6)$ .



## Resolución

Si la posición en el vector  $(x, y, z)$  denota el dibujo y  $d_1, d_2, d_3$  denotan los nombres de los animales, el espacio muestral del experimento es

$$\Omega = \{(d_1, d_2, d_3), (d_2, d_1, d_3), (d_3, d_2, d_1), (d_1, d_3, d_1), (d_3, d_1, d_2), (d_2, d_3, d_1)\}$$

y es equiprobable, con  $P(\{\omega\}) = \frac{1}{6}$ .

La variable  $Y$  toma 3 valores con probabilidad diferente de cero por lo cual  $\mathbf{R}_Y = \{0, 1, 3\}$ . La función  $p_Y$  toma los valores

$$p_Y(0) = P(Y = 0) = P(\{\text{ningún acierto}\})$$

$$= P(\{(d_2, d_3, d_1), (d_3, d_1, d_2)\}) = \frac{2}{6}$$

$$p_Y(1) = P(Y = 1) = P(\{\text{exactamente un acierto}\})$$

$$= P(\{((d_1, d_3, d_2), (d_3, d_2, d_1), (d_2, d_1, d_3))\}) = \frac{3}{6}$$

$$p_Y(2) = P(Y = 2) = P(\{\text{exactamente dos aciertos}\}) = 0$$

$$p_Y(3) = P(Y = 3) = P(\{\text{exactamente tres aciertos}\})$$

$$= P(\{((d_1, d_2, d_3))\}) = \frac{1}{6}$$

## Resolución

y  $F_Y$  resulta

$$F_Y(t) = P(Y \leq t) = 0 \quad t < 0$$

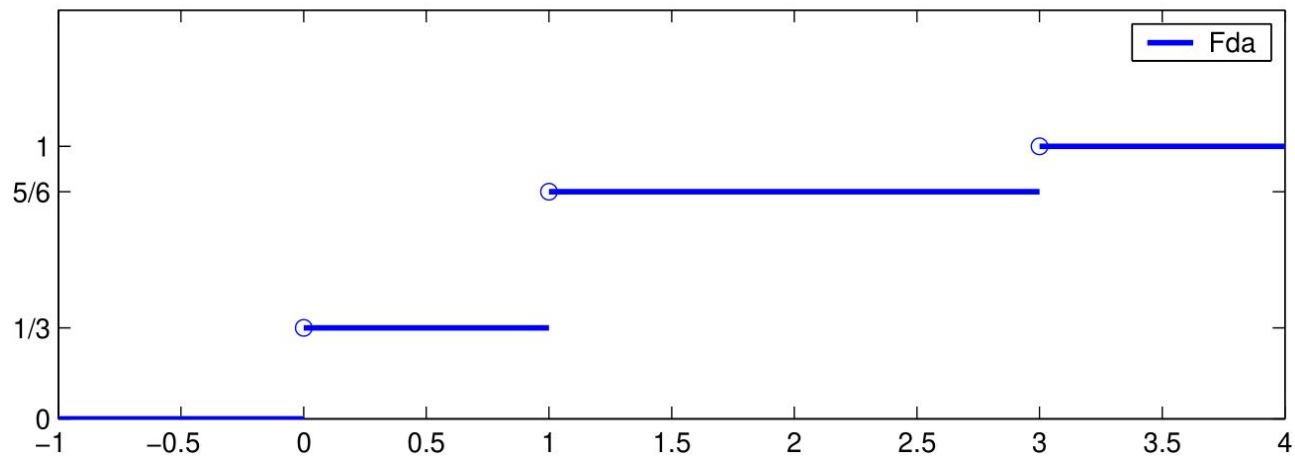
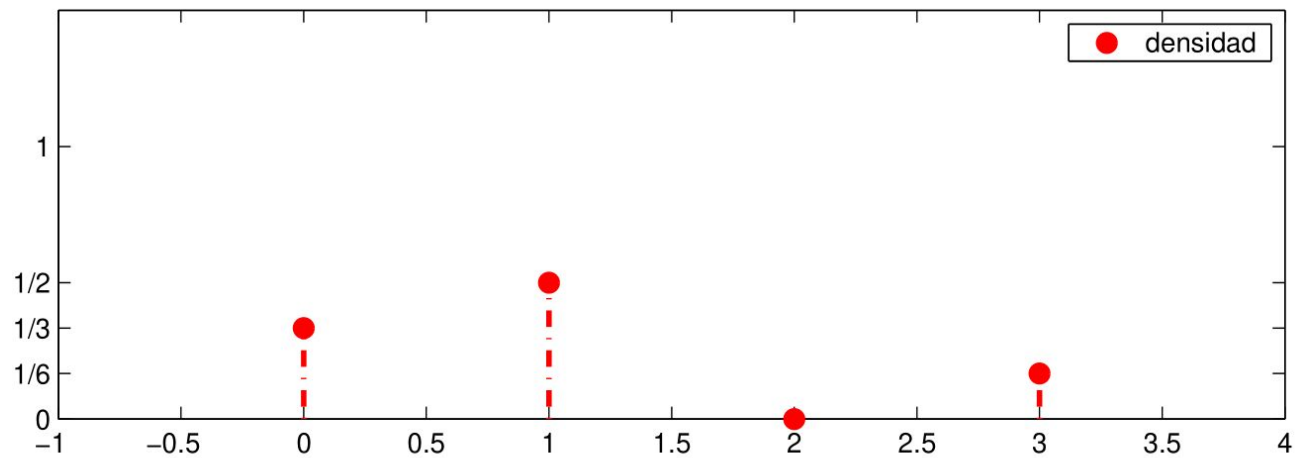
$$F_Y(t) = P(Y \leq t) = p_Y(0) = \frac{2}{6} \quad 0 \leq t < 1$$

$$F_Y(t) = P(Y \leq t) = p_Y(0) + p_Y(1) = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} \quad 1 \leq t < 2$$

$$F_Y(t) = P(Y \leq t) = p_Y(0) + p_Y(1) + p_Y(2) = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + 0 \quad 2 \leq t < 3$$

$$\begin{aligned} F_Y(t) &= P(Y \leq t) = p_Y(0) + p_Y(1) + p_Y(2) + p_Y(3) = P(Y = 3) \\ &= \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + 0 + \frac{1}{6} = 1 \quad 3 \leq t \end{aligned}$$

$$P(1 < X \leq 6) = F_X(6) - F_X(1) = 1 - 5/6 = 1/6$$



## Experimento aleatorio: lanzar cuatro veces una moneda equilibrada.

Espacio muestral:

$$\Omega = \{CCCC, CCC+, CC + C, C + CC, +CCC, CC + +, C + C+, C + +C, +CC+, +C + C, ++CC, +++C, ++C+, +C ++, C +++ , + + ++\}$$

- Ningún punto del espacio tiene mayor probabilidad de ocurrir
- Probabilidad de Laplace asociada al espacio  $\Omega$
- $P(\omega) = 1/\#\Omega = 1/16$

**Experimento aleatorio: lanzar cuatro veces una moneda equilibrada.**

Espacio muestral:

$$\Omega = \{CCCC, CCC+, CC + C, C + CC, +CCC, CC + +, C + C+, C + +C, +CC+, +C + C, ++CC, +++C, ++C+, +C ++, C +++ , ++++\}$$

**Variable aleatoria X**

**Recolecta el número de cruces obtenidas en una realización del experimento**

**¿Qué valores puede tomar la variable? ¿Con qué probabilidad?**

Espacio muestral:

$$\Omega = \{CCCC, CCC+, CC + C, C + CC, +CCC, CC + +, C + C+, C + +C, +CC+, +C + C, ++CC, +++C, ++C+, +C ++, C +++ , + + + +\}$$

$X$  v.a. que expresa el número de cruces obtenidas; toma el valor 0 cuando el resultado es  $\{CCCC\}$ , el valor 1 si ocurre el suceso  $\{CCC+, CC + C, C + CC, +CCC\}$ , el valor 2 si aparece  $\{CC + +, C + C+, C + +C, +CC+, +C + C, ++CC\}$ , el valor 3 para los resultados  $\{+++C, ++C+, +C ++, C +++\}$ , y el valor 4 si sale  $\{++++\}$ .

$$P(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{16} & x_i = 0 \\ \frac{4}{16} & x_i = 1 \\ \frac{6}{16} & x_i = 2 \\ \frac{4}{16} & x_i = 3 \\ \frac{1}{16} & x_i = 4 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{16} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{5}{16} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{11}{16} & 2 \leq x < 3 \\ \frac{15}{16} & 3 \leq x < 4 \\ \frac{16}{16} = 1 & x \geq 4 \end{cases}$$



**Se quiere hallar la probabilidad de que aparezcan más de dos cruces:**

$$P(X > 2) = P(X = 3) + P(X = 4) = \frac{4}{16} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$$

o también:

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - F(2) = \frac{5}{16}$$

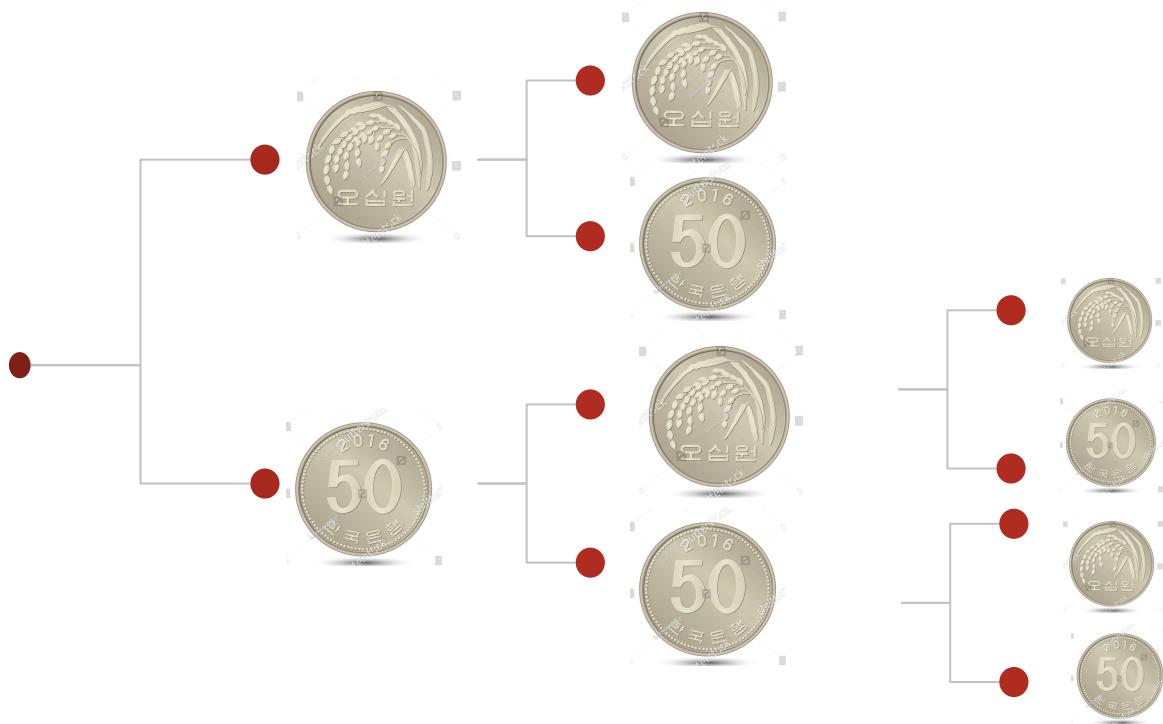
Se quiere calcular la probabilidad de que el número de cruces sea más de 1 y menos de 4:

$$P\{1 < X < 4\} = P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{4}{16} + \frac{6}{16} = \frac{10}{16}$$

## Ejemplo

Una moneda honesta se tira una vez. Si sale cara se tira una segunda vez y si sale cruz se tira 2 veces más.

Hallar la función densidad discreta de  $X$  el número total de caras obtenidas.



## Resolución

La variable  $X$  toma los valores 0,1,2. No puede tomar el valor 3 pues nunca se tira tres veces si salió cara la primera vez.

Definamos  $Y$  la variable que vale 1 si salió cara la primera vez, y 0 si no.

Entonces, si  $Y = 0$  tenemos el experimento condicional con espacio muestral equiprobable

$$\Omega_0 = \{(s, s, s), (s, c, s), (s, s, c), (s, c, c)\}$$

y si  $Y = 1$ , tenemos el experimento condicional con espacio muestral equiprobable

$$\Omega_1 = \{(c, s), (c, c)\}$$

por lo tanto

## Resolución

$$\begin{aligned}p_X(0) &= P(X = 0/Y = 0)P(Y = 0) + P(X = 0/Y = 1)P(Y = 1) \\&= P(\{(s, s, s)\})P(\text{cruz en la primera}) + P(\emptyset)P(\text{cara en la primera}) \\&= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \\p_X(1) &= P(X = 1/Y = 0)P(Y = 0) + P(X = 1/Y = 1)P(Y = 1) \\&= P(\{(s, c, s), (s, s, c)\})P(\text{cruz en la primera}) + \\&\quad + P(\{(c, s)\})P(\text{cara en la primera}) \\&= \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\p_X(2) &= P(X = 2/Y = 0)P(Y = 0) + P(X = 2/Y = 1)P(Y = 1) \\&= P(\{(s, c, c)\})P(\text{cruz en la primera}) + \\&\quad + P(\{(c, c)\})P(\text{cara en la primera}) \\&= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}\end{aligned}$$

# Transformación de variables aleatorias

Dadas una variable aleatoria  $X$  y una función real de variable real  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  queremos estudiar la distribución de la variable aleatoria transformada por  $g$  de  $X$ ,  $Y = g(X)$

- Basta con calcular la función de distribución de  $Y$  ( $P$  está caracterizada por  $F$ )

$$F_Y(y) = P_Y(Y \leq y) = P_Y(g(X) \leq y) = P_X(X \in A_y),$$

donde  $A_y = \{x : g(x) \leq y\}$  (en muchos casos es sencillo de calcular)

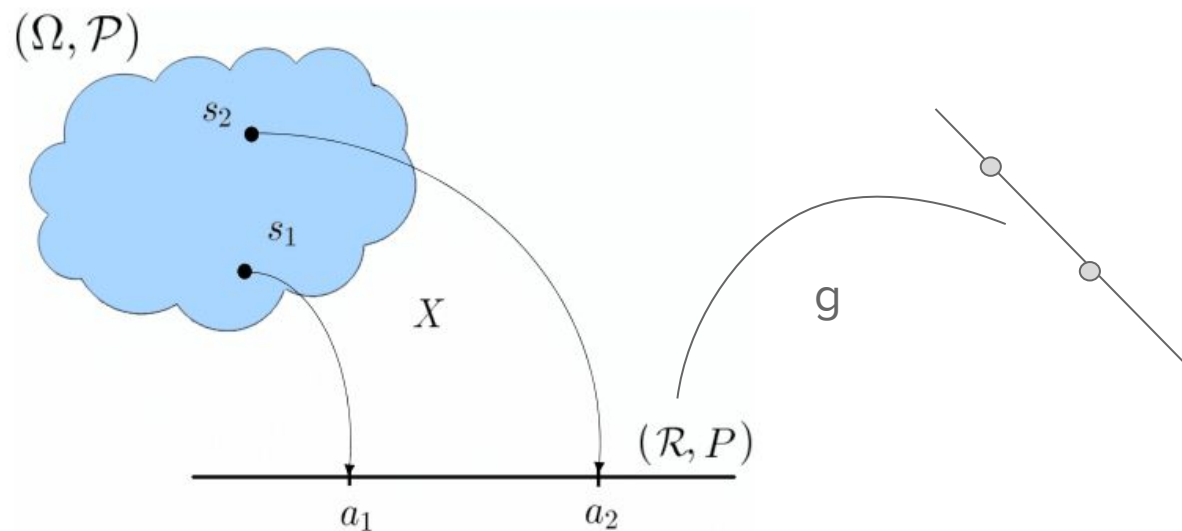
## Transformación de una v.a. discreta

- Función de distribución:

$$F_Y(y) = P_X(X \in A_y) = \sum_{x_i \in A_y} p_X(x_i) = \sum_{g(x_i) \leq y} p_X(x_i)$$

- Función de masa:

$$p_Y(y) = P_Y(Y = y) = P_Y(g(X) = y) = \sum_{g(x_i)=y} p_X(x_i)$$





## Ejemplo

En el ejemplo de  $Y$  el número de aciertos al corresponder el nombre de un animal con su dibujo al azar, se define la variable  $Z = Y^2$ . Entonces  $Z$  toma valores  $0^2$  y  $1^2$  y  $3^2$ , con probabilidades

$$p_Z(0) = P(Y^2 = 0) = P(Y = 0) = \frac{2}{6}$$

$$p_Z(1) = P(Y^2 = 1) = P(Y = 1) = \frac{3}{6}$$

$$p_Z(9) = P(Y^2 = 9) = P(Y = 3) = \frac{1}{6}$$



## Ejemplo

En el ejemplo de  $Y$  el número de aciertos al corresponder el nombre de un animal con su dibujo al azar, se define la variable  $Z = (Y - 1)^2$ . Entonces  $Z$  toma valores 0 y 1 y 4, con probabilidades

$$p_Z(0) = P((Y - 1)^2 = 0) = P(Y = 1) = \frac{3}{6}$$

$$p_Z(1) = P((Y - 1)^2 = 1) = P(Y = 0) = \frac{2}{6}$$

$$p_Z(4) = P((Y - 1)^2 = 4) = P(Y = 3) = \frac{1}{6}$$

## Ejemplo

En el ejemplo de  $Y$  el número de aciertos al corresponder el nombre de un animal con su dibujo al azar, suponga que defina otra variable  $Z$  que otorga un caramelo si acierta uno o mas veces y no da ningún caramelo si no le acierta a ninguno. Entonces  $Z$  toma valores 0 y 1, con probabilidades

$$P(Z = 0) = P(Y = 0) = 1/3$$

$$P(Z = 1) = P(Y = 1) + P(Y = 2) + P(Y = 3) = 2/3$$