**线性代数**

原点其实就是无数个0向量相加

一维度数轴其实就是2个共线二维向量乘以不同的标量相加。

平面就是2个不共线二维向量乘以不同的标量相加。

向量时又方向性的。但是他们都从原点出发。因此只需要填写终点的坐标即可表示。即终点表示向量。

不共线的2个二维向量乘以不同的标量构成的张成空间时平面

不共线的2个三维向量乘以不同的标量构成的张成空间时立体空间

如果一个向量落在另外向量组成的张成空间中则称之为线性相关。即u=a\*v+b\*w。如果一个向量为原来的向量增加了空间维度则称之为线性无关。

向量线性变化就是输入一个向量让他变成另外一个同维向量。需要用到向量乘法。只需要变化每个维的基向量，各维基向量构成一个方形矩阵。因为时同空间一个基向量也必须具有相同的维度。计算时把基向量矩阵放在前面，输入向量分别乘以自己的新基向量后再相加。输出了新的向量。

计算基向量矩阵的行列式结果称之为det（determinant）结果就是计算基向量改变后面积时初始面积（1）的几倍。如果2维度基向量压缩到一条值线上则det结果为0。意义时这个平面中所有的图形是原来面积的det倍数。Det为负数表示空间翻转了。三维空间中det表示体积倍数。每一列基向量在一个平面上代表列线性相关。其实就可以降维成二维空间，正的det表示，右手拇指是K帽，食指是i，中指是j。负的det 是左手情况。

二维行列式和dataframe的区别就是前者点是竖着的。后者是横着的。

二维行列式的公式：交叉相乘后相减。三维公式，第一列第一个系数-第二列系数+第三列系数

行列式解线性方程组：系数就是基向量变化矩阵A，xyz就是原来的向量点，方程右边常数就是现在的点。这种倒解就是A的逆。记录为^-1,A与A^-1的乘积是一个标准基向量,表示什么都没做，那么方程右边的常数项乘以A^-1就是xyz的值。 det（A）不等于0，肯定能找到解。如果det（A）等于0，变化把二维空间压成直线，除非常数结果向量点正好在这跟直线上，会有很多解。

秩称之为变化后空间的维度，二维称之为2，三维空间可以变成秩为3，或2或1，一个向量被矩阵变化的所有输出向量结果（可能降维）称之为列空间。二维空空间下降成1维其实就是变化矩阵的行列式结果为0，几何意义是矩阵的2个基向量落在了一条直线上。两个基向量线性相关，一个乘以常数就得到另外一个。

零空间或核：满秩变化只有一个0向量变化后成0向量，非满秩变化则无数个向量会便变成0向量。这些向量构成0空间。三维变二维零空间是平面，二维变一维零空间是直线。

非方正变化，一个3\*2的矩阵是表示一个二维基向量在三维空间的表示。

点积是两个等长向量点，各元素相乘后相加。点积解释（不重要）是一个向量点在另一个向量上的投影相乘。所以两个互相垂直的向量点积为0。无关顺序。本质意义：其中一个等长的向量打横后其实是降维了的i和j在直线上的投影长度（ux、uy），他们相乘后求得的结果就是原向量被降维变化后的一维数值，也是这个向量在直线上的投影长度。所以一个方形矩阵乘以一个非方形矩阵。非方形矩阵可以理解为降维后的基向量矩阵。2\*2维矩阵被降维成一个1\*2的矩阵

叉积：可以类比就是det，就是把每个基向量写成乘积的模式（右向左乘）。乘积顺序改变则积取反（左向右乘）。一个基向量乘以n，其实就是整个叉集乘以n。但是和det（三维变化围城的体积）不同是他是任意两个三维向量可以相乘，结果为新的原点出发垂直与平面三维向量的长度。指向哪个方向用右手定则判断。食指指向第一个向量，中指第二个向量，拇指就是第三个向量的方向。计算方法依然是交叉相减，但是按照第一列或者第一行中的元素各自乘以非本行本列的2\*2矩阵。

叉积和点积的共同点就是点积就是一个包含了第二个向量的3\*3行列式的det体积。

逆就是用变化后的网络的度量来衡量变化前的正方形网络的基向量。我们的坐标乘以逆矩阵才是杰尼弗坐标表示的我们的向量。

**微积分**

函数特性

偶函数是y轴对称

奇函数原点对称函数

反函数是基于y=x的对称

均值定理： 如果属于正实数那么且仅各值相等等号成立。

这四种平均数满足Hn≤Gn≤An≤Qn 即:调和平均数≤几何平均数≤算术平均数≤平方平均数

a1、a2、… 、an∈R +，当且仅当a1=a2= … =an时取“=”号

均值不等式的一般形式：设函数D(r)=[（a1^r+a2^r+...an^r）/n]^(1/r）（当r不等于0时）；

（a1a2...an)^(1/n）（当r=0时）（即D(0)=(a1a2...an)^(1/n））

则 [1]当注意到Hn≤Gn≤An≤Qn仅是上述不等式的特殊情形，即D(-1）≤D(0）≤D⑴≤D⑵

由以上简化，有一个简单结论，中学常用2/(1/a+1/b）≤√ab≤（a+b)/2≤√[(a^2+b^2)/2]

**微积分**

极限的定义，在x0左右有定义（x0处可以无定义），当x左右趋近x0是，函数无线接近于同一个常数。反过来存在极限，则左右极限均相等。极限和在某点的取值无关系，所以有极限并不代表连续。连续肯定有极限。计算原始极限应该与初等基础函数图像结合。分段函数分不同表达式用原始法求极限。

如果是初等函数定义域内，不用考虑左右极限。定义域上直接代入计算即可。初等函数定义域外断点上的极限，结合基础函数的图形，计算左右极限来确定。

基础初等函数的有限次四则运算和复合运算得到的函数极限，就是基础初等函数极限的四则运算和复合运算。条件满足也会出现无法直接计算的不定事，需要变形成约去无穷小量，或者除以无穷大量来计算，或者靠两个特殊极限。分子/分母必须是0/0，无穷大/无穷大 不定式也可以用洛必达法则计算极限 ，前提是切换为导数后分母不为0。通过定义计算导数（Δy/Δx趋近于0的极限）也可以用洛必达。

连续函数：连续定义是某点函数值等于极限值

基础初等函数定义域可能不是连续的（如1/x），但是所有的基本初等函数在其连续的定义域内都是连续的（注意未必可导）。基本初等函数的有限次四则运算和复合运算后是初等函数，在其连续的定义域内肯定是连续函数。（即定义域要注意除数不取零。）

连续函数的性质定理：比做绳子，必然有界，两端符号为反必然过0点，不过0点，符号必然相同。

可导函数：

有极限的函数+函数值等于极限值=连续的函数

连续函数+ 导数值存在且不为无穷量=可导的函数。

不可导的情况1.原函数间断点（定义域断开或者形状断开）的导数肯定间断不存在的(曲线形态断开或者定义域不能取)，2.还可形成类似于针尖形态，常形成于偶次方造成的对称。。一阶导数值不存在同理二阶导数值不存在。

数理理解：可以证明连续函数=全域有极限且取值等于极限=deltax趋近于0，deltaY的极限为0。但求导数值公式是求0/0极限的不定式，极限可能为无穷大量，或者导函数分母为0。比如x^1/3在0处的导数值是正无穷大。

导数定义计算是求Δy/Δx（0/0型不定式）的极限。

初等函数的导数计算，可以听过公式分解成求基础函数的导数，再计算基础函数的导数。整个导函数分母为0整个函数导数不存在。某点分母为0，则这点导数不存在。

反函数求导数：反函数导数为原单调函数的导数的倒数。

拉格朗日定理（可导连续函数取值与导数关系）ab开区间内连续，闭区内被可导，必存在一点导数等于(f(a)-f(b))/(a-b).

导数和原函数的特殊关系：

函数的导数恒为0=函数为常数。

导数有多个相差为常数的原函数：两个可导函数导数恒相等=两函数相差一个常数。（相减组成大的可导函数的倒数恒为0）

函数的某点切线和法线方程：切线方程斜率为某点导数，法线的斜率为负导数分之1。

函数的单调性，凹凸性，驻点，极值点，拐点的判断。

导数判断单调函数：函数的导数恒为非负或者非正，则是单调增加或者减少函数。

导数判断原函数极值点：一阶导数值为0的点为驻点。一阶导数值为0或者不可导的点把连续函数分成不同的单调区间（导数恒为正或者负）。任意抽取左右一个点的导数值是否同号或者异号判断是否极值点以及是否极大值极小值。因为一阶导数值非负原函数为单调增函数，为非正则原函数为单调减函数。从而确定极值点。

可以直接计算驻点处的二阶导数值，如果二阶导数值存在且不等于0，符号为负驻点就是极大值，符号为正驻点就是极小值。

函数的最值点

连续函数只有一个驻点或者不可导点的话，如果是极大值则该点就是最大值，如果是极小值该点就是最小值。如果多个驻点或者不可导点，最值要在极值点和两个端点处取值比较出最大值。

二阶导函数值在区间内恒＞0，则该原函数在此区间内是凹的，反之在此区间内是凸的。

二阶导函数值等于0，如果左右两侧二阶导数值异号则是拐点。二阶导数值不存在的点即使左右二阶导数异号是凹凸分界点，也会因为其原函数不连续而不是拐点。二阶导数不存在但三阶倒数存在也可以是拐点

不定积分求原函数，原函数有相差常数的无数个。不定积分是对微分（导函数的微小面积）的累计。不定积分，微分是导数乘以最小变化x。不定积分和微分互为抵消逆运算

不定积分运算

简单基础函数不定积分直接通过导数变化公式，求原函数记得加常数。

不定积分的基本规则，两个导函数想加（减）的不定积分等于各自导函数的不定积分的和（差）

不定积分第一换元法则，第一种情况：导数为复合函数，并且外层函数是基础导函数，直接凑微分计算原函数。基础函数与复合函数（外层函数是基础导函数）相乘，利用基础函数和dx凑出复合函数的微分。

有理分式（多项式相除），化成多项式+第一换元法则可处理的函数。或者换成两个第一换元法则可处理的函数。

第二换元法则，对x的高次方根，换为中间函数t，用t表示x，化成dt，再用第一换元法则求解。

可分部积分法则。换元法则无效的式子使用，原则是对数，反三角函数直接按照乘法原则拆开计算原函数。

需要积两部的，x^n \* e^x或sinx， cosx先计算非x的项的微分。x^n \*lnx，arctanx等无法先计算非x部分的微分先计算含x项的微分。

为什么积分要求导函数连续，因为积分是求比封闭区间的面积。可以拓展到有限间断点的有界函数。

定积分的计算

定积分依然支持分部积分

定积分等于不定积分求的某一个原函数的值相减。变上限定积分函数，就是一个原函数减去常数，他的导数就是可积函数。定积分为一个原函数固定取值相减，是一个常数，所以它的导数是0。它的导数就是可积函数。

原函数的ab区间内累计增量，等于导函数在ab区间内的面积陈。称为定积分，x被称为积分变量，导函数被称为被积函数。微分被称为被积表达式。

定积分具有方向性，ab ba互为负，ab内某一点的定积分为0，ab内等于分段积分相加。

在以0为中心对称的上下限中奇导数函数的定积分为0。

tan的导数和arctan导数是否互为倒数。

二元函数的一阶偏导数，对即使在同一点（x0，y0）上，对于自变量x，y的偏导数和导数值不一样。是因为在同一点x，y方向上的斜率是不一样的。

二重积分 其实就是先按y方向累计函数的面积，再按方向累计函数体积。

级数

n趋向于无穷大的数列之后称之为无穷级数，也成为级数。数列的一般表达式称之为一般项。

级数主要考察敛散性。收敛指Sn极限是常数。从本身性质来考察，n趋近无穷大，一般项Yn的极限是0，才可能收敛。最终判断还需要出归纳求和公式Sn，取n趋近于无穷大的极限是否为常数。

特例几何级数（等比数列）求和项归纳为a （1-q^n）/ (1-q)，当|q|<1时，极限为a/（1-q）收敛。>=1时发散。

收敛+-收敛级数等于收敛，

正项级数看yn-1/yn极限是否小于1，等于1，提取一个比他大或者小的级数去夹逼它。调和级数去夹逼。

其他级数如果绝对值收敛，级数收敛。

正项级数 达朗贝尔判别法 比较判别法

特殊类别是调和级数

交错级数 绝对值判别法（正项级数判别），莱布尼茨判别法

函数项级数，特例幂级数 ，幂函数构成一般项。

普通一阶微分方程 分离变量，写成 x，y，c的式子。

一阶段线性微分方程用齐次和非齐次公式可以直接求出y的表达式。代入初始x，y还可以求出c的特解。

**统计学**

**钟型分布的经验法则：**

约68%的数据项与平均数的距离在1个标准差之内。

约95%的数据项与平均数的距离在2个标准差之内。

几乎所有的数据项与平均数的距离在3个标准差之内。

**样本均值对总体均值区间估计：**

**样本均值方差：**

总体满足正态分布，则随机抽样也满足正态分布，样本均值也满足正态分布。

当总体是有限的时候样本均值的标准差可用下面公式，

当N是无限的或者n/N<0.05时不要修正系数。

可以用样本方差s作为总体方差σ的估计。

1当总体分布不确定时，根据中心极限定理，只要样本量够大（n>=30）,则样本均值也呈现正态分布。

2.当总体分布为正态分布时，无论样本容量如何，样本均值的抽样分布都是正态的。

2.1在大样本（n>=30）容量下:

2.1.1如果总体标准差σ已知可正态分布用： 对总体均值区间估计，表示标准正态概率分布上的侧面积为α/2的z值

2.1.2当σ未知时用样本标准差s代替

样本方差公式：

2.2在小样本（n<30）容量下:

2.2.1 当总体标准差σ已知时，可继续用2.1.1的公式计算正态分布的区间估计。

2.2.2当σ未知时用样本标准差s代替，不同的时采用t分布而非正态分布来区间估计总体标准差。

式中为自由度为n-1时，时t分布的上侧面积为α/2的值。

**样本比率对总体比率区间估计：**

n\*p≥5,n\*(1-p)≥5时样本比率满足正态分布：

当N是无限的或者n/N<0.05时可以不要修正系数。可以用样本比率作为总体比率计算标准差。

**样本方差对总体方差的区间估计和假设检验：**

若总体服从正态分布则，则，

的抽样分布为自由度为n-1的卡方（）分布

假设检验判断样本是否来自这个总体。

区间估计总体方差的范围

当样本容量为和的独立简单随机样本分别取自两个方差相等的正态总体时，

的抽样分布为分子自由度为-1，分母自由度为-1的F分布。

假设检验判断两个样本是否来自方差相同的总体。

**样本方差**

服从F分布

来自两个总体样本方差推算两个总体的方差