

# 統計諮詢 - 作業 6

國立成功大學統計學系暨數據科學研究所

廖傑恩 (RE6094028)

2021-05-28

## 1 Exercise 14.3

### 1.1 問題敘述

Barnett 與 Mead (1956), 以及 Johnson 與 Leone (1967) 等人先後討論了放射性除汙的問題, 探討 4 種不同因子與放射性之關聯。每種因子皆只有高、低兩種水準, 在 4 個集區 (block) 上做  $2^4/2 = 8$  次實驗, 其後檢測殘留的汙染以了解去汙狀況。

### 1.2 資料介紹

資料共有 32 列、個變項, 每一列為一次試驗的結果。變項說明如下表:

- Y: 以  $\alpha$  活動性量測之放射性, 依變項
- block: 區集, 有 1、2、3 與 4 四個
- B: 氯化鋇 (barium chloride), 有高與低兩水準
- A: 硫酸鋁 (aluminum sulfate), 有高與低兩水準
- C: 碳 (carbon), 有高與低兩水準
- P: 酸鹼值 (final pH), 有高與低兩水準

#### 1.2.1 實驗設計

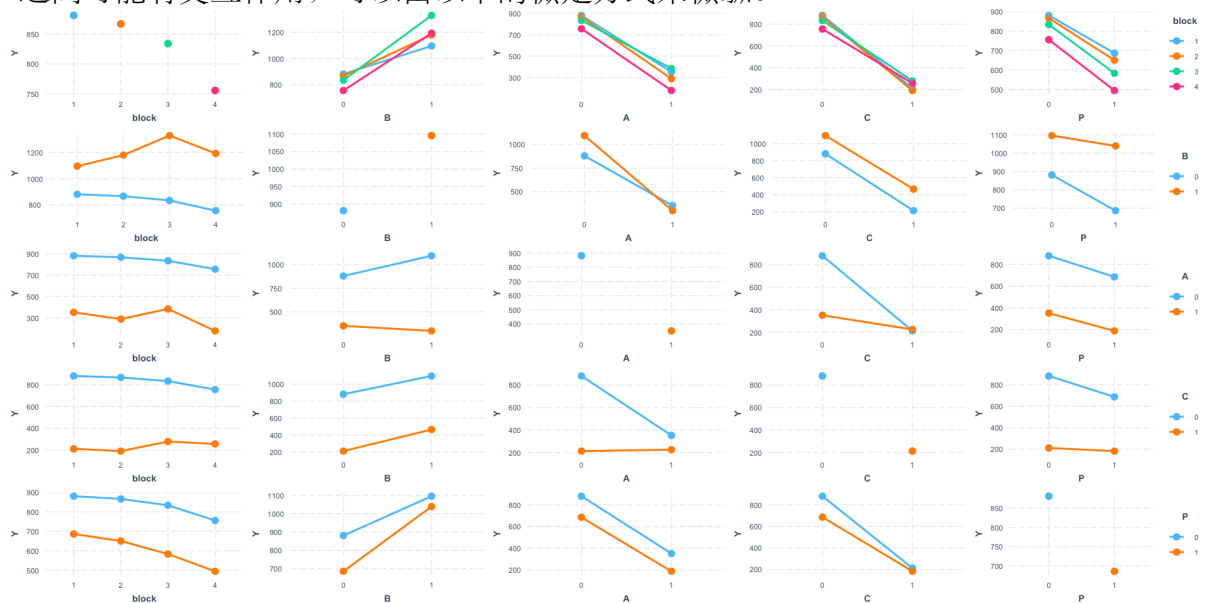
處理／區集	1	2	3	4
1	X	A	X	A
2	AB	B	AB	B
3	AC	C	AC	C
4	AP	P	AP	P

處理／區集	1	2	3	4
5	BC	ABC	BC	ABC
6	BP	ABP	BP	ABP
7	CP	BCP	CP	BCP
8	ABCP	ACP	ABCP	ACP

上表中，X 表示所有因子皆為低水準；A 表示只有 A 因子為高水準，其他因子為低水準；AB 表示 A 與 B 兩因子為高水準，其他為低水準；以此類推。以四個因子的交互作用為混淆因子（confounding factor）來做為區集的分群，由上表可知，區集 1 與 3 中，有每個處理有偶數個因子（0、2、4）；區集 2 與 4 中，每個處理有奇數個因子（1、3）。假定所有三階因子的交互作用可以忽略。

### 1.3 資料探索

下圖是各因子兩兩交互作用圖的矩陣，由圖可看出因子 A 與因子 B、A 與 C、P 與 B 之間可能有交互作用，可以由以下的檢定方式來檢驗。



### 1.4 資料分析

我們使用  $2^k$  重覆因子分析 ( $2^k$  Fractional Factorial Designs) 來檢定各因子以及兩兩因子間的交互作用與放射性物質之去除有無顯著關聯。

#### 1.4.1 變數與模型定義

$$Y_{ijkmn} = \mu + \tau_i + \beta_j + \alpha_k + \gamma_m + \rho_n + (\beta\alpha)_{jk} + (\beta\gamma)_{jm} + (\beta\rho)_{jn} + (\alpha\gamma)_{km} + (\alpha\rho)_{kn} + (\gamma\rho)_{mn} + \epsilon_{ijkmn}$$

$$\epsilon_{ijkmn} \sim N(0, \sigma_{ijkmn}^2), \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad j = 0, 1, \quad k = 0, 1, \quad m = 0, 1, \quad n = 0, 1$$

各變數意義如下表：

變數	意義
$\mu$	總體平均
$\tau_i$	區集效果
$\beta_j$	因子 B（氯化鋇）的效果
$\alpha_k$	因子 A（硫酸鋁）的效果
$\gamma_m$	因子 C（碳）的效果
$\rho_n$	因子 P（酸鹼值）的效果
$(\beta\alpha)_{jk}$	因子 B 與因子 A 的交互作用效果
$(\beta\gamma)_{jm}$	因子 B 與因子 C 的交互作用效果
$(\beta\rho)_{jn}$	因子 B 與因子 P 的交互作用效果
$(\alpha\gamma)_{km}$	因子 A 與因子 C 的交互作用效果
$(\alpha\rho)_{kn}$	因子 A 與因子 P 的交互作用效果
$(\gamma\rho)_{mn}$	因子 C 與因子 P 的交互作用效果
$\epsilon_{ijkmn}$	殘差

#### 1.4.2 檢查前提假設

##### 1. 各組樣本依變項獨立

此分析中，不同處理之間互不影響彼此。

##### 2. 變異數同質（homogeneity of variance）：各區集依變項的變異數必須相等。

我們使用 Levene 檢定來檢驗，檢定假設為： $H_0 : \sigma_{i=1}^2 = \sigma_{i=2}^2 = \sigma_{i=3}^2 = \sigma_{i=4}^2$  v.s.  $H_1 : \text{Not } H_0$ ，令顯著水準為 0.05。檢定結果如下：

檢定方法	顯著水準	檢定統計量	p 值
Levene 檢定	0.05	$F = 0.0605$	0.9801

p 值大於顯著水準 0.05，故我們不拒絕虛無假設，通過變異數同質性檢驗。

#### 1.4.3 變異數分析結果

因子	自由度	誤差平方和	誤差均方	F 檢定量	p 值
集區	3	28262.50	9420.83	1.15	0.357
因子 B	1	700336.13	700336.13	85.35	3.0e-8
因子 A	1	1444150.13	1444150.13	176.00	9.9e-11
因子 C	1	297992.00	297992.00	36.32	1.1e-5
因子 P	1	48050.00	48050.00	5.86	0.026
因子 B 與因子 A 的交互作用	1	252050.00	252050.00	30.72	2.9e-5
因子 B 與因子 C 的交互作用	1	22366.13	22366.13	2.73	0.116
因子 B 與因子 P 的交互作用	1	24531.13	24531.13	2.99	0.101
因子 A 與因子 C 的交互作用	1	570846.13	570846.13	69.57	1.4e-7
因子 A 與因子 P 的交互作用	1	15.13	15.13	0.002	0.966
因子 C 與因子 P 的交互作用	1	13944.5	13944.5	1.70	0.209
殘差	18	147699.75	8205.54	-	-

變異數分析結果如上表。由此表可知：

1. 不同的集區對於放射性物質的去除沒有顯著差異。
2. 因子 B、因子 A、因子 C 與因子 P 對去除放射性皆有顯著效果。
3. 因子 B 與因子 A 的交互作用以及因子 A 與因子 C 的交互作用有顯著效果。

我們移除不顯著的因子與交互作用項，保留集區，再進行一次變異數分析，結果如下表：

因子	自由度	誤差平方和	誤差均方	F 檢定量	p 值
集區	3	28262.50	9420.83	0.994	0.414
因子 B	1	700336.13	700336.13	73.88	1.8e-8
因子 A	1	1444150.13	1444150.13	152.34	2.3-11
因子 C	1	297992.00	297992.00	31.43	1.2e-5
因子 P	1	48050.00	48050.00	5.07	0.035
因子 B 與因子 A 的交互作用	1	252050.00	252050.00	26.59	3.6e-5
因子 A 與因子 C 的交互作用	1	570846.13	570846.13	60.22	9.8-e
殘差	22	208556.63	9479.85	-	-

顯著性結果同上一次變異數分析，差別在於殘差自由度上升。

#### 1.4.4 殘差檢定

- 我們以 Shapiro-Wilk 常態檢定法對殘差進行顯著水準為 0.05 的常態檢定，檢定的假說為： $H_0$ ：殘差服從常態分配 v.s.  $H_1$ ：殘差不服從常態分配。
- 我們以 NCV 變異數同質檢定法對殘差進行顯著水準為 0.05 的檢定，檢定的假說

為：  $H_0$ ：殘差具同質性 v.s.  $H_1$ ：殘差不具同質性。

檢定結果如下表：

檢定方法	顯著水準	檢定統計量	p 值
Shapiro-Wilk	0.05	$W0.9661$	0.3983
NCV	0.05	$C = 2.1817$	0.1397

兩檢定顯示模型通過殘差診斷。

## 1.5 結論

不同的集區對於放射性物質的去除沒有顯著差異。氯化鋇、硫酸鋁、碳與酸鹼值對於去除放射性皆有顯著效果。氯化鋇、硫酸鋁的交互作用以及硫酸鋁、碳的交互作用有顯著效果,。