



射频电路设计——理论与应用笔记

RF Circuit Design: Theory and Application Notes

作者: ZXY & HHX

组织: HUST IC

时间: December, 2025

版本: 1.0



射频请再爱我一次吧!

目录

| | |
|-------------------------------|-----------|
| 第 1 章 引言 | 1 |
| 1.1 射频电路设计的重要性 | 1 |
| 1.2 量纲与单位 | 1 |
| 1.3 频谱 | 3 |
| 1.4 无源器件的射频特性 | 4 |
| 1.4.1 趋肤效应 | 4 |
| 1.4.2 高频电阻 | 5 |
| 1.5 高频电容 | 7 |
| 1.6 高频电感 | 9 |
| 1.7 贴片元件及电路板 | 10 |
| 第 2 章 ElegantBook 设置说明 | 12 |
| 2.1 语言模式 | 12 |
| 2.2 设备选项 | 12 |
| 2.3 颜色主题 | 12 |
| 2.4 封面 | 13 |
| 2.4.1 封面个性化 | 13 |
| 2.4.2 封面图 | 13 |
| 2.4.3 徽标 | 14 |
| 2.4.4 自定义封面 | 14 |
| 2.5 章标题 | 14 |
| 2.6 数学环境简介 | 14 |
| 2.6.1 定理类环境的使用 | 15 |
| 2.6.2 修改计数器 | 15 |
| 2.6.3 其他环境的使用 | 15 |
| 2.7 列表环境 | 16 |
| 2.8 参考文献 | 16 |
| 2.9 添加序章 | 16 |
| 2.10 目录选项与深度 | 16 |
| 2.11 章节摘要 | 17 |
| 2.12 章后习题 | 17 |
| 第 2 章 练习 | 17 |
| 2.13 旁注 | 18 |
| 第 3 章 字体选项 | 19 |
| 3.1 数学字体选项 | 19 |
| 3.2 使用 newtx 系列字体 | 19 |
| 3.2.1 连字符 | 19 |
| 3.2.2 宏包冲突 | 19 |
| 3.3 中文字体选项 | 20 |
| 3.3.1 方正字体选项 | 20 |
| 3.3.2 其他中文字体 | 20 |

| | |
|-------------------------------|-----------|
| 第 4 章 ElegantBook 写作示例 | 22 |
| 4.1 Lebesgue 积分 | 22 |
| 4.1.1 积分的定义 | 22 |
| 第 4 章 练习 | 24 |
| 第 5 章 常见问题集 | 25 |
| 第 6 章 版本更新历史 | 26 |
| 附录 A 基本数学工具 | 29 |
| A.1 求和算子与描述统计量 | 29 |

第1章 引言

内容提要

- 射频电路设计的重要性
- 量纲与单位
- 频谱
- 无源器件的射频特性
- 贴片元件及电路板
- 射频电路制方法

1.1 射频电路设计的重要性

定义 1.1 (集中参数理论)

电路元件的空间分布尺度为零 (点状)。



定义 1.2 (分布参数理论)

电路元件相对于工作波长，具有有限的空间分布尺度。



如下图所示的是一个典型的射频系统框图：

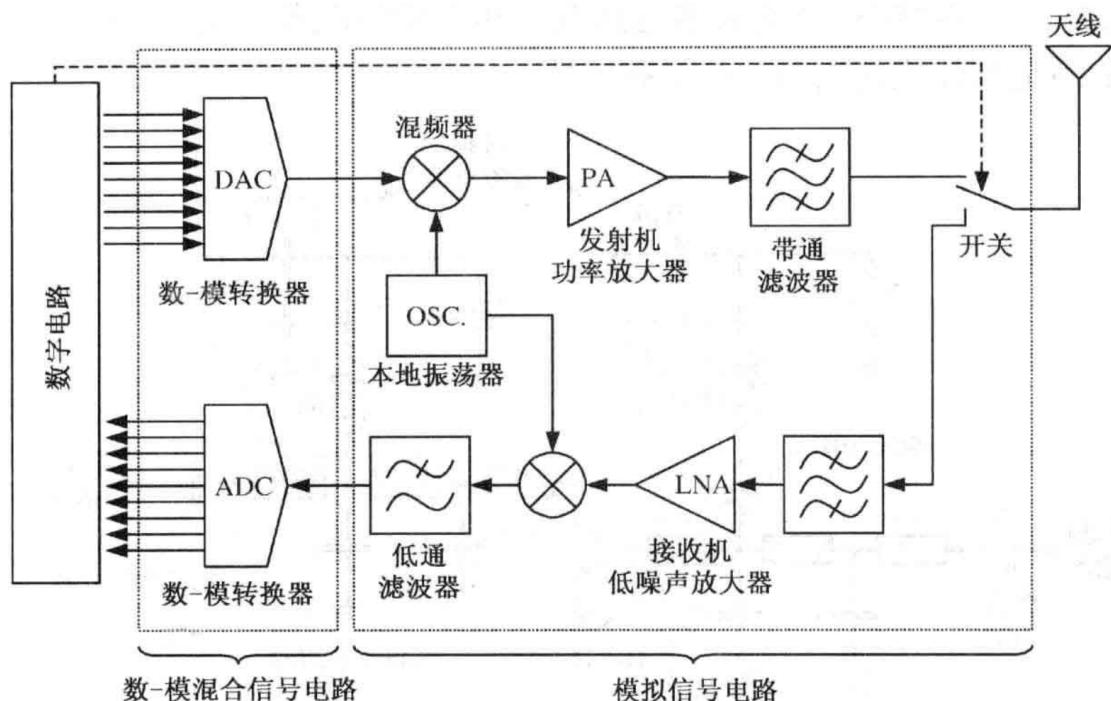


图 1.1: 射频系统框图

1.2 量纲与单位

对于电磁波在自由空间中沿 z 轴正方向的传播的平面电磁，可以用正弦波的形式表示为：

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_x &= E_{0x} \cos(\omega t - \beta z) \\ \mathbf{H}_y &= H_{0y} \cos(\omega t - \beta z)\end{aligned}\tag{1.1}$$

其中, E_{0x} 与 H_{0y} 分别为电场和磁场的幅值, ω 为角频率, β 为传播常数。

定义 1.3 (传播常数)

传播常数 β 定义为: 电磁波相对于波长 λ 在空间的延伸程度

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (1.2)$$

引理 1.1 (复数形式的电磁波)

谐波信号可以用复数形式表示为:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}}_x &= \operatorname{Re} \left\{ E_{0x} e^{j(\omega t - \beta z)} \right\} \\ \tilde{\mathbf{H}}_y &= \operatorname{Re} \left\{ H_{0y} e^{j(\omega t - \beta z)} \right\}\end{aligned} \quad (1.3)$$

其中, 与经典电路理论不同的是, 相位因子 $E_{0x}e^{-j\beta z}$ 与空间参数有关。

定义 1.4 (特征阻抗)

特征阻抗 Z_0 定义为电磁波中电场与磁场的比值:

$$Z_0 = \frac{E_x}{H_y} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}} = 377\Omega \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} \quad (1.4)$$

磁导率 μ 与介电常数 ε 分别表示介质的电磁特性, 与材料有关, μ_0 与 ε_0 分别为自由空间的磁导率与介电常数, μ_r 与 ε_r 分别为介质的相对磁导率与相对介电常数。

笔记

- 自由空间中, 特征阻抗 $Z_0 = 377\Omega$ 。
- 特征阻抗 Z_0 只与介质的电磁特性有关。同时也被称为波阻抗或者本征阻抗。

注 需要指出的是, 本书中所讨论的电磁波均为 TEM 模式电磁波, 即电场与磁场均垂直于传播方向。

TEM模式: 这种模式对应于自由空间或微波传输线中的电磁波传播, 其传播速度取决于介质的电磁特性或者传输线的几何结构。

TE模式和TM模式: 这些模式通常出现在微波波导或光纤中, 其传播速度不仅取决于介质的电磁特性, 还受到波导的几何结构和工作频率的影响。如果工作频率低于 TE 或 TM 模式的截止频率, 则这些模式无法传播。传输 TEM 模式的传输线也可以支持 TE 和 TM 模式的传播, 但是他们的截止频率通常远远高于系统的工作频率。

定理 1.1 (电磁波的基本性质)

在非磁性介质中 ($\mu_r = 1$) 电磁波的相速度 v_p 可以表示为:

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}} \quad (1.5)$$

其中, c 为光速, $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} \approx 3 \times 10^8 m/s$ 。

注 由上式可知, 电磁波在介质中的传播速度小于光速, 并且随着介质的介电常数 ε_r 的增大而减小。自由空间中, 电磁波的传播速度等于光速。

例题 1.1 分别计算自由空间中和介电常数 $\epsilon_r = 4.6$ 的介质中电磁波的本征波阻抗、相速度与波长。频率 $f = 30\text{MHz}, 3\text{GHz}$ 。

解

根据特征阻抗的定义式，可得：

$$Z_0 = 377\Omega \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \quad (1.6)$$

因为介质均为非磁性介质，所以 $\mu_r = 1$ ，因此可得：

- 自由空间中， $\epsilon_r = 1$ ，所以 $Z_0 = 377\Omega$ ；
- 介电常数 $\epsilon_r = 4.6$ 的介质中， $Z_0 = 377\Omega/\sqrt{4.6} = 175.7\Omega$ 。

根据电磁波的基本性质定理，可得：

$$v_p = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad (1.7)$$

因此可得：

- 自由空间中， $\epsilon_r = 1$ ，所以 $v_p = c = 3 \times 10^8 \text{m/s}$ ；
- 介电常数 $\epsilon_r = 4.6$ 的介质中， $v_p = c/\sqrt{4.6} = 1.4 \times 10^8 \text{m/s}$ 。

根据波长与频率的关系式，可得：

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi v_p}{w} = \frac{v_p}{f} \quad (1.8)$$

因此可得：

- 自由空间中， $\epsilon_r = 1$ ，所以当 $f = 30\text{MHz}$ 时， $\lambda = 10\text{m}$ ；当 $f = 3\text{GHz}$ 时， $\lambda = 10\text{cm}$ ；
- 介电常数 $\epsilon_r = 4.6$ 的介质中，当 $f = 30\text{MHz}$ 时， $\lambda = 4.67\text{m}$ ；当 $f = 3\text{GHz}$ 时， $\lambda = 4.7\text{cm}$ 。

结论

- 电磁波的特征阻抗只与介质的电磁特性有关。
- 电磁波的波长与频率成反比，与传播速度成正比。随着频率的升高，波长将减小到可与电路元件的尺寸相当，从而使得分布参数效应变得显著。

1.3 频谱

如下表所示的是常用的频谱划分及其用途：

表 1.1 频段划分及其用途

| 频 段 | 频 率 | 典 型 应 用 |
|----------|-----------------|-----------------|
| VHF(甚高频) | 88 ~ 108 MHz | 调频广播 |
| UHF(特高频) | 824 ~ 894 MHz | CDMA 移动电话服务 |
| | 810 ~ 956 MHz | GMS 移动电话服务 |
| UHF(特高频) | 2400 MHz | 无线局域网 |
| SHF(超高频) | 5000 ~ 5850 MHz | 不必审批的美国国家信息基础设施 |
| SHF(超高频) | 6425 ~ 6523 MHz | 有线电视传输 |
| SHF(超高频) | 3700 ~ 4200 MHz | 卫星通信固定地面站 |
| X 波段 | 8 ~ 12.5 GHz | 海上、空中雷达 |
| Ku 波段 | 12.5 ~ 18 GHz | 遥感探测雷达 |
| K 波段 | 18 ~ 26.5 GHz | 雷达 |
| Ka 波段 | 26.5 ~ 40 GHz | 遥感探测雷达 |

1.4 无源器件的射频特性

内容提要

- | | |
|--|--|
| <input type="checkbox"/> 趋肤效应 <input type="checkbox"/> 高频电阻 | <input type="checkbox"/> 高频电容 <input type="checkbox"/> 高频电感 |
|--|--|

定义 1.5 (电抗)

根据传统的交流电路分析, 电阻 R 与频率无关, 而电感 L 与电容 C 的阻抗与频率有关, 其电抗 X_L 与 X_C 分别表示为:

$$X_L = \omega L, \quad X_C = -\frac{1}{\omega C} \quad (1.9)$$

对于电容和电感的电抗, 其遵循基本的电压电流关系, 一般用复数表示为:

$$V_L = j\omega LI = jX_L I, \quad V_C = \frac{I}{j\omega C} = jX_C I \quad (1.10)$$



注 需要注意的是, 电感的电抗 X_L 为正值, 而电容的电抗 X_C 为负值。

1.4.1 趋肤效应

对于一个半径为 a , 长度为 l , 电导率为 σ_{cond} 的圆柱形导体, 其直流电阻 R_{dc} 可以表示为:

$$R_{dc} = \frac{l}{\sigma_{cond}\pi a^2} \quad (1.11)$$

在直流状态下, 电流均匀分布在导体的横截面上, 但是在交流状态下, 电流趋向于分布在导体的表面, 这种现象称为趋肤效应。随着频率的升高, 电流越来越集中在导体的表面, z 方向的电流密度 J_z 可以表示为:

$$J_z \approx \frac{pI}{2\pi a j \sqrt{r}} \exp\left(-(1+j)\frac{a-r}{\delta}\right) \quad (1.12)$$

其中, $p^2 = -j\omega\mu\sigma_{cond}, I$ 是在导体中流动的总电流, r 为距离导体中心的径向距离, δ 为导体的趋肤深度, 其定义为:

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma_{cond}}} \quad (1.13)$$

它描述电流密度作为频率 f , 磁导率 μ 与电导率 σ_{cond} 的函数在导体中的衰减程度。这可以等效为厚度是 δ 的, 均匀分布的一层电流, 从而简化阻抗的计算。因此在高频状态 ($f \geq 500MHz$) 下, 导体的归一化电阻 R 和内部电感 L_{in} 可以表示为:

$$\frac{R}{R_{dc}} \approx \frac{a}{2\delta} \quad (1.14)$$

$$\frac{\omega L_{in}}{R_{dc}} \approx \frac{a}{2\delta} \quad (1.15)$$

笔记

- 内部电感 L_{in} 是由于导体内部的磁场引起的电感。
- 为使得上式能够成立, 导体的半径 a 应远大于趋肤深度 δ 。
- 一般导体的相对磁导率 $\mu_r \approx 1$, 所以趋肤深度 δ 主要与频率 f 与电导率 σ_{cond} 有关。其反比于频率的平方根, 所以低频时趋肤深度较大。

注

1. 趋肤深度有明确的物理意义, 即电流密度衰减到其表面值的 $1/e$ 处的深度。
2. 尽管内部电感 L_{in} 随着频率的升高而增大, 但是由于趋肤效应的存在, 电流主要分布在导体的表面, 所以内部电感 L_{in} 对总电感的影响可以忽略不计。在实际设计中, 电路元件的电感主要由外部电感 L_{ex} 决定。对

于一个半径为 a , 长度为 l 的圆柱形导体, 其外部电感 L_{ex} 可以近似表示为:

$$L_{ex} \approx \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left[\ln \left(\frac{2l}{a} \right) - 1 \right] \quad (1.16)$$

例题 1.2

内部电感由携带电流的导体内部产生的磁场引起, 而外部电感则由导体周围的磁场引起。两者之和为导体的总电感。

在大多数电路中, 还需要考虑电感之间的耦合, 即某电感的磁场引起周围一个或多个电感电流变化即互感效应。

内部电感与外部电感的对比:

一段 AWG 26 铜线的长度是 2cm 求在 100MHz, 2GHz 和 5GHz 下的内部电感和外部电感。

解 已知 AWG 26 铜线的直径为 16mil, 所以其半径:

$$a = 8\text{ mil} = 8 \times (2.54 \times 10^{-5})\text{ m} = 2.032 \times 10^{-4}\text{ m} = 0.2032\text{ mm} \quad (1.17)$$

。铜的电导率 $\sigma_{cond} = 6.45 \times 10^7 \text{ S/m}$, 真空的磁导率 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$ 。

然后利用公式计算内部电感与外部电感:

$$L_{in} \approx \frac{R_{dc}a}{2\omega\delta} \quad (1.18)$$

$$L_{ex} \approx \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left[\ln \left(\frac{2l}{a} \right) - 1 \right] \quad (1.19)$$

其中, 直流电阻 R_{dc} 为:

$$R_{dc} = \frac{l}{\sigma_{cond}\pi a^2} = \frac{0.02}{6.45 \times 10^7 \times \pi \times (2.032 \times 10^{-4})^2} = 2.39\text{ m}\Omega \quad (1.20)$$

计算趋肤深度:

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma_{cond}}} \quad (1.21)$$

计算结果如下表所示:

| 频率 (f) | 趋肤深度 (δ) | 内部电感 (L_{in}) | 外部电感 (L_{ex}) | $\frac{L_{in}}{L_{ex}}$ |
|--------|--------------------|-------------------|-------------------|-------------------------|
| 100MHz | $6.266\mu\text{m}$ | 0.0617 nH | 17.1 nH | 3.60×10^{-3} |
| 2GHz | $1.40\mu\text{m}$ | 0.0138 nH | 17.1 nH | 8.05×10^{-4} |
| 5GHz | $0.886\mu\text{m}$ | 0.00872 nH | 17.1 nH | 5.09×10^{-4} |

1.4.2 高频电阻

在射频与微波电路中, 主要使用薄膜贴片式电阻。其具有良好的射频特性, 尺寸可以做得比较小。

对于高频下的电阻, 我们常用看两种模型, 一种用来描述标称组织为 R 的高频电阻, 一种用来描述线绕电阻。

对于标称电阻, 电路模型如图所示, 其引入了引线长度和寄生电容进行修正: 其中, 两个电感 L 表示引线

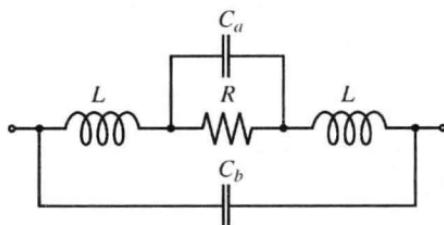


图 1.2: 高频电阻的等效电路模型

的电感， C_a 模拟电荷分离效应， C_b 模拟内部引线电容。

对于线绕电阻，其等效电路模型如图所示：此处多引入了电阻线圈的电感 L_1 ，以及线圈之间的寄生电容 C_1 。

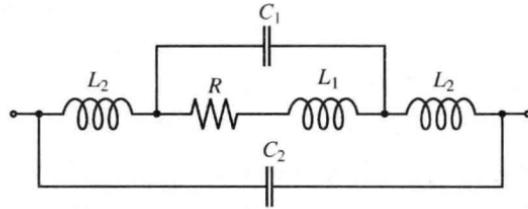


图 1.3: 高频线绕电阻的等效电路模型

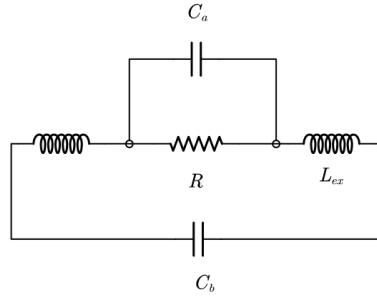
而内部引线电容 C_2 （或上个模型中的 C_b ）通常远小于线圈之间的寄生电容 C_1 ，可以忽略。

例题 1.3 求出用长 2.5cm , AWG 26 铜线连接的 $2\text{k}\Omega$ 的金属膜电阻的高频阻抗特性，寄生电容 C_a 为 5pF 。设铜的电导率 $\sigma_{Cu} = 6.45 \times 10^7 \text{S/m}$ 。

解 已知 AWG 26 铜线的直径为 16mil ，所以其半径：

$$a = 8\text{mil} = 8 \times (2.54 \times 10^{-5})\text{m} = 2.032 \times 10^{-4}\text{m} = 0.2032\text{mm} \quad (1.22)$$

。铜的电导率 $\sigma_{cond} = 6.45 \times 10^7 \text{S/m}$ ，真空的磁导率 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{H/m}$ 。使用下图所示的电路模型，其中 C_b 很小，一般忽略：



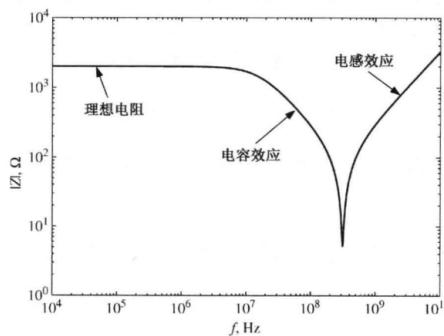
根据外部电感近似计算公式可得引线电感 L_{ex} 为（注意： $l = 2 \times$ 单根线长度，对应于两根连接导线的总长度）：

$$L_{ex} \approx \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left[\ln \left(\frac{2l}{a} \right) - 1 \right] = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 0.05}{2\pi} \left[\ln \left(\frac{0.1}{2.032 \times 10^{-4}} \right) - 1 \right] = 52.0\text{nH} \quad (1.23)$$

高频电阻的阻抗 Z 可以表示为：

$$Z = j\omega L_{ex} + \left(\frac{1}{R} + j\omega C_a \right)^{-1} \quad (1.24)$$

将各个参数代入上式，可得在不同频率下的高频电阻阻抗如下图所示：



1.5 高频电容

贴片式电容在滤波器调谐、匹配网络、类似晶体管的有源器件的偏置网络中得到了广泛的应用，常规电路分析理论对平行板电容器的定义如下：

$$C = \frac{\epsilon A}{d} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d} \quad (1.25)$$

其中， A 是平板的表面积， d 是平板的间隔。理想情况下，平板间没有电流，但是在高频情况下，电介质变得有损耗了，即有传导电流存在，所以电容器的阻抗必须表示为电导 G_e 和电纳 ωC 的并联组合：

$$Z = \frac{1}{G_e + j\omega C} \quad (1.26)$$

在这个表达式中，直流电流起源于电导 $G_e = \sigma_{diel} \frac{A}{d}$ ，其中 σ_{diel} 是电介质的电导率。

定义 1.6 (损耗角正切)

损耗角正切 $\tan \Delta$ 定义为：

$$\tan \Delta = \frac{G_e}{\omega C} = \frac{\sigma_{diel}}{\omega \epsilon} \quad (1.27)$$

其表示了电容器的损耗程度。同时，损耗角正切也可以被定义为等效串联电阻 (ESR) 与电容电抗的比值 ESR 的阻值由下式给出：

$$ESR = \frac{\tan \Delta}{\omega C} \quad (1.28)$$

这说明当损耗角正切 $\tan \Delta$ 增大时，等效串联电阻也会增大。当损耗角正切 $\tan \Delta$ 趋于零时，等效串联电阻也趋于零，此时电容器可以被视为理想电容器。

将损耗角正切的定义代入电容器的阻抗表达式中，可以得到：

$$G_e = \frac{\sigma_{diel} A}{d} = \frac{\omega \epsilon A}{d} \tan \Delta = \omega C \tan \Delta \quad (1.29)$$

对于实际电路中的高频电容等效电路，通常还需要考虑引线电感 L 和引线电阻 R_s ，以及介质损耗电阻 R_e 的影响，如下图所示：

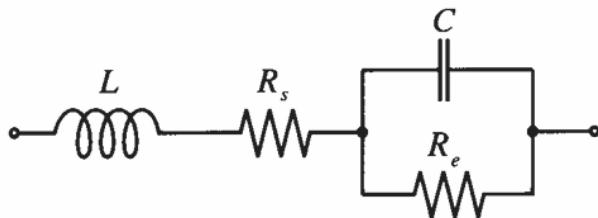


图 1.4: 高频电容的等效电路模型

其中，介质损耗电阻 $R_e = \frac{1}{G_e}$ 。

例题 1.4 计算一个标称值为 $10pF$ 的电容器的高频阻抗，电容器的介质是损耗角正切为 $\tan \Delta = 10^{-4}$ 的氧化铝，电容器的引线是长 $1.25cm$ 的 AWG 26 铜线。 $(\sigma_{Cu} = 6.4516 \times 10^7 S/m)$

解 已知 AWG 26 铜线的直径为 $16mil$ ，所以其半径：

$$a = 8mil = 8 \times (2.54 \times 10^{-5})m = 2.032 \times 10^{-4}m = 0.2032mm \quad (1.30)$$

铜的电导率 $\sigma_{cond} = 6.45 \times 10^7 S/m$ ，真空的磁导率 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} H/m$ 。使用下图所示的电路模型，其中 R_e 由损耗角正切给出：根据外部电感近似计算公式可得引线电感 L_{ex} 为（注意： $l = 2 \times$ 单根线长度，对应于两根连接导线的总长度）：

$$L_{ex} \approx \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left[\ln \left(\frac{2l}{a} \right) - 1 \right] = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 0.025}{2\pi} \left[\ln \left(\frac{0.05}{2.032 \times 10^{-4}} \right) - 1 \right] = 22.5nH \quad (1.31)$$

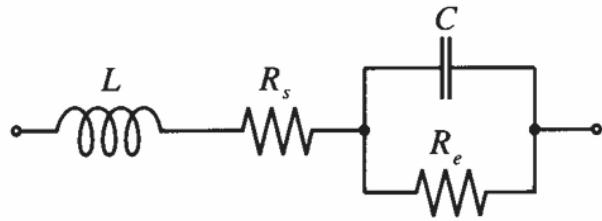


图 1.5: 高频电容的等效电路模型

根据高频电阻的定义式可得引线电阻 R_s 为：

$$R_s = R_{dc} \cdot \frac{a}{2\delta} = \frac{l}{\sigma_{Cuu}\pi a^2} \cdot \frac{a}{2\delta} = \frac{l}{2\pi a \sigma_{Cu} \delta} = \frac{l}{2\pi a \sigma_{Cu}} \sqrt{\pi f \mu_0 \sigma_{Cuu}} = \frac{l}{2a} \sqrt{\frac{f \mu_0}{\pi \sigma_{Cu}}} \quad (1.32)$$

将各个参数代入上式，可得：

$$R_s = \frac{0.025}{2 \times 2.032 \times 10^{-4}} \sqrt{\frac{f \times 4\pi \times 10^{-7}}{\pi \times 6.4516 \times 10^7}} = 4.84 \times 10^{-6} \sqrt{\frac{f}{\text{Hz}}} (\Omega) = 4.84 \sqrt{\frac{f}{\text{Hz}}} (\mu\Omega) \quad (1.33)$$

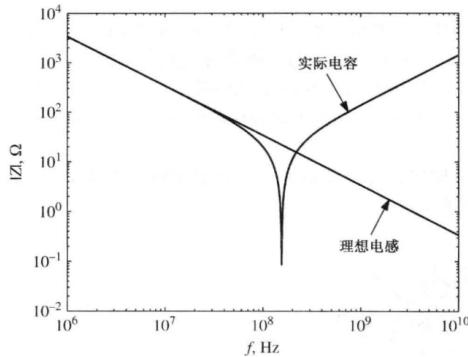
根据损耗角正切的定义式可得介质损耗电阻 R_e 为：

$$R_e = \frac{1}{G_e} = \frac{1}{2\pi f \times C \tan \Delta} = \frac{1}{2\pi f \times 47pF \times 10^{-4}} = \frac{3.39 \times 10^7}{f(\text{Hz})} (\text{M}\Omega) \quad (1.34)$$

高频电容的阻抗 Z 可以表示为：

$$Z = j\omega L_{ex} + R_s + \left(\frac{1}{R_e} + j\omega C \right)^{-1} \quad (1.35)$$

将各个参数代入上式，可得在不同频率下的高频电容阻抗如下图所示：



1.6 高频电感

高频电感器常用于晶体管的偏置网络，可作为射频扼流圈将晶体管与直流电压相连接。因为线圈通常是由导线绕制而成的，所以高频电感器的等效电路模型需要考虑与频率有关的电阻，电感，以及相邻导线之间的分布电容。

其等效电路模型如图所示，并联寄生电容 C_s 模拟了相邻导线之间的分布电容，串联电阻 R_s 模拟了导线的高频电阻，串联电感 L 模拟了导线的高频电感：

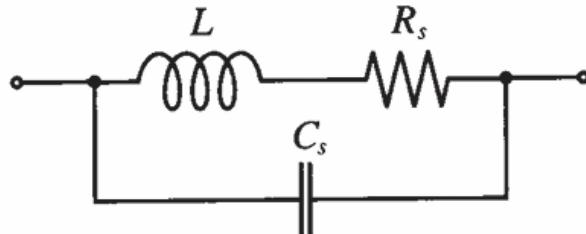


图 1.6: 高频电感的等效电路模型

高频电感的阻抗 Z 可以表示为：

$$Z = \frac{1}{(R_s + j\omega L)^{-1} + j\omega C_s} \quad (1.36)$$

例题 1.5 射频扼流圈的射频阻抗响应

已知：射频扼流圈的直径为 0.1 英寸（空气芯）， $N=3.5$ 匝，线径为 AWG 36 铜线。假设线圈的长度为 0.05 英寸，这个射频扼流圈的并联寄生电容为 $0.3pF$ 求出该射频扼流圈的高频阻抗特性。

解

已知 AWG 36 铜线的直径为 $5mil$ ，所以其半径：

$$a = 2.5mil = 2.5 \times (2.54 \times 10^{-5})m = 6.35 \times 10^{-5}m = 0.0635mm = 63.5\mu m \quad (1.37)$$

线圈的长度 $l = 0.05inch = 0.00127m$ ，线圈的半径 $r = 0.1inch/2 = 0.00127m$ 。铜的电导率 $\sigma_{cond} = 6.45 \times 10^7 S/m$ ，真空的磁导率 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} H/m$ 。

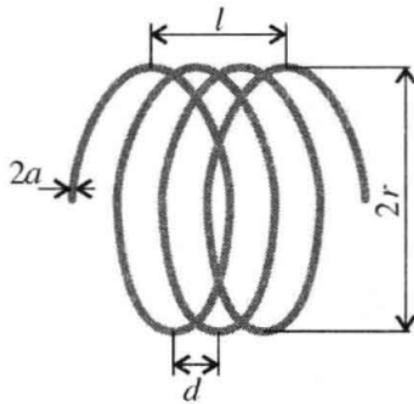


图 1.7: 射频扼流圈的结构示意图

估算线圈的电感通常有两个公式，一个是空气芯长线圈的近似公式，一个是短线圈的近似公式：

$$L \approx \frac{\mu_0 N^2 A}{l} \quad (\text{长线圈})(r \ll l) \quad (1.38)$$

$$L \approx \frac{\mu_0 N^2 A}{l + 0.9r} \quad (\text{短线圈}) \quad (1.39)$$

其中, $A = \pi r^2$ 是线圈的截面积, l 是线圈的长度, r 是线圈的半径。带入计算可得:

$$L \approx \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 3.5^2 \times \pi \times (0.00127)^2}{0.00127 + 0.9 \times 0.00127} = 32.3nH \quad (1.40)$$

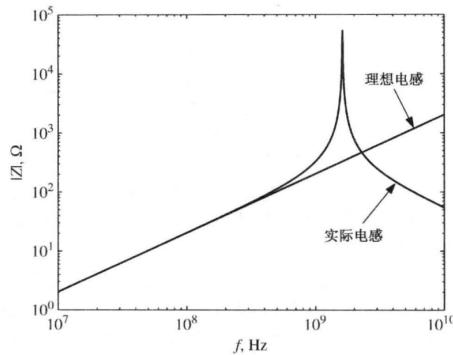
根据高频电阻的定义式可得引线电阻 R_s 为:

$$R_s = R_{dc} \cdot \frac{a}{2\delta} = \frac{l}{\sigma_{Cu} \pi a^2} \cdot \frac{a}{2\delta} = \frac{l}{2\pi a \sigma_{Cu} \delta} = \frac{l}{2\pi a \sigma_{Cu}} \sqrt{\pi f \mu_0 \sigma_{Cu}} = \frac{l}{2a} \sqrt{\frac{f \mu_0}{\pi \sigma_{Cu}}} \quad (1.41)$$

将各个参数代入上式, 并忽略趋肤效应, 可得:

$$R_s = 0.034\Omega \quad (1.42)$$

故可以得到射频扼流圈的阻抗的频率响应曲线如下图所示:



注 从上图可以看出, 在高频频段, 射频扼流圈的特性偏离了理想电感的特性, 主要原因是寄生电容 C_s 的存在。使得在高频下, 当工作频率接近谐振点时, 射频扼流圈的阻抗迅速增大。当工作频率继续增高时, 由于 C_s 的影响占据主导, 阻抗开始下降。

定义 1.7 (品质因数)

假如高频电感的串联电阻 R_s 为零, 那么谐振时电感的阻抗将趋于无穷大。实际上, 由于导线的电阻以及其他损耗的存在, 高频电感的阻抗在谐振时是有限的。为了衡量高频电感的损耗情况, 引入了品质因数 Q 的概念

高频电感的品质因数 Q 定义为:

$$Q = \frac{|X|}{R_s} = \frac{\omega L}{R_s} \quad (1.43)$$

其中, $|X|$ 是电感的电抗, R_s 是电感的等效串联电阻。



1.7 贴片元件及电路板

常用的贴片元件有贴片电阻, 贴片电容, 表面安装电感器等。它们的封装尺寸通常以英寸为单位进行标识, 封装尺寸如下表所示:

| 封装尺寸代码 | 长度 $L(\text{mil})$ | 宽度 $W(\text{mil})$ |
|--------|--------------------|--------------------|
| 0201 | 20 | 10 |
| 0402 | 40 | 20 |
| 0603 | 60 | 30 |
| 0805 | 80 | 50 |
| 1206 | 120 | 60 |
| 1812 | 180 | 120 |

 **笔记** $1\text{ mil} = 0.001 \text{ inch} = 2.54 \times 10^{-5} \text{ m}$

第 2 章 ElegantBook 设置说明

本模板基于基础的 book 文类，所以 book 的选项对于本模板也是有效的（纸张无效，因为模板有设备选项）。默认编码为 UTF-8，推荐使用 TeX Live 编译。

2.1 语言模式

本模板内含两套基础语言环境 `lang=cn`、`lang=en`。改变语言环境会改变图表标题的引导词（图，表），文章结构词（比如目录，参考文献等），以及定理环境中的引导词（比如定理，引理等）。不同语言模式的启用如下：

```
\documentclass[en]{elegantbook}
\documentclass[lang=cn]{elegantbook}
```

除模板自带的两套语言设定之外，由网友提供的其他语言环境设置如下：

- 由 VincentMVV 提供的意大利语翻译 `lang=it`，相关讨论见 [Italian translation](#)；
- 由 abfek66 提供的法语翻译 `lang=fr`，相关讨论见 [Italian translation](#)；
- 由 inktvis75 提供的荷兰语翻译 `lang=nl`，相关讨论见 [Dutch Translation](#)；
- 由 palkotamas 提供的匈牙利语翻译 `lang=hu`，相关讨论见 [Hungarian translation](#)；
- 由 Lisa 提供的德语翻译 `lang=de`，相关讨论见 [Deutsch translation](#)；
- 由 Gustavo A. Corradi 提供的西班牙语的翻译 `lang=es`，相关讨论见 [Spanish translation](#)；
- 由 Altantssooj 提供的蒙古语的翻译 `lang=mn`，相关讨论见 [Mongolian translation](#)；
- 由 inusturbo 提供的日本语的翻译 `lang=jp`，相关讨论见 [Japanese Translation](#)。

注 以上各个语言的设定均为网友设定，我们未对上述翻译进行过校对，如果有问题，请在对应的 issue 下评论。并且，只有中文环境 (`lang=cn`) 才可以输入中文。

2.2 设备选项

最早我们在 ElegantNote 模板中加入了设备选项 (`device`)，后来，我们觉得这个设备选项的设置可以应用到 ElegantBook 中¹，而且 Book 一般内容比较多，如果在 iPad 上看无需切边，放大，那用户的阅读体验将会得到巨大提升。你可以使用下面的选项将版面设置为 iPad 设备模式²

```
\documentclass[pad]{elegantbook} %or
\documentclass[device=pad]{elegantbook}
```

2.3 颜色主题

本模板内置 5 组颜色主题，分别为 `green`³、`cyan`、`blue`（默认）、`gray`、`black`。另外还有一个自定义的选项 `nocolor`。调用颜色主题 `green` 的方法为

```
\documentclass[green]{elegantbook} %or
\documentclass[color=green]{elegantbook}
```

¹不过因为 ElegantBook 模板封面图片的存在，在修改页面设计时，需要对图片进行裁剪。

²默认为 normal 模式，也即 A4 纸张大小。

³为原先默认主题。

表 2.1: ElegantBook 模板中的颜色主题

| | green | cyan | blue | gray | black | 主要使用的环境 |
|-----------|-------|------|------|------|-------|-----------------------------|
| structure | | | | | | chapter section subsection |
| main | | | | | | definition exercise problem |
| second | | | | | | theorem lemma corollary |
| third | | | | | | proposition |

如果需要自定义颜色的话请选择 `nocolor` 选项或者使用 `color=none`, 然后在导言区定义 `structurecolor`、`main`、`second`、`third` 颜色, 具体方法如下:

```
\definecolor{structurecolor}{RGB}{0,0,0}
\definecolor{main}{RGB}{70,70,70}
\definecolor{second}{RGB}{115,45,2}
\definecolor{third}{RGB}{0,80,80}
```

2.4 封面

2.4.1 封面个性化

从 3.10 版本开始, 封面更加弹性化, 用户可以自行选择输出的内容, 包括 `\title` 在内的所有封面元素都可为空。目前封面的元素有

表 2.2: 封面元素信息

| 信息 | 命令 | 信息 | 命令 | 信息 | 命令 |
|----|-------------------------|-----|------------------------|----|-----------------------|
| 标题 | <code>\title</code> | 副标题 | <code>\subtitle</code> | 作者 | <code>\author</code> |
| 机构 | <code>\institute</code> | 日期 | <code>\date</code> | 版本 | <code>\version</code> |
| 箴言 | <code>\extrainfo</code> | 封面图 | <code>\cover</code> | 徽标 | <code>\logo</code> |

另外, 额外增加一个 `\bioinfo` 命令, 有两个选项, 分别是信息标题以及信息内容。比如需要显示 User Name: 111520, 则可以使用

```
\bioinfo{User Name}{111520}
```

封面中间位置的色块的颜色可以使用下面命令进行修改:

```
\definecolor{customcolor}{RGB}{32,178,170}
\colorlet{coverlinecolor}{customcolor}
```

2.4.2 封面图

本模板使用的封面图片来源于 pixabay.com⁴, 图片完全免费, 可用于任何场景。封面图片的尺寸为 1280×1024, 更换图片的时候请严格按照封面图片尺寸进行裁剪。推荐一个免费的在线图片裁剪网站 fotor.com。用户 QQ 群

⁴感谢 ChinaTeX 提供免费图源网站, 另外还推荐 pexels.com。

内有一些合适尺寸的封面，欢迎取用。

2.4.3 徽标

本文用到的 Logo 比例为 1:1，也即正方形图片，在更换图片的时候请选择合适的图片进行替换。

2.4.4 自定义封面

另外，如果使用自定义的封面，比如 Adobe illustrator 或者其他软件制作的 A4 PDF 文档，请把 `\maketitle` 注释掉，然后借助 `pdfpages` 宏包将自制封面插入即可。如果使用 `titlepage` 环境，也是类似。如果需要 2.x 版本的封面，请参考 `etitlepage`。

2.5 章标题

本模板内置 2 套章标题显示风格，包含 `hang`（默认）与 `display` 两种风格，区别在于章标题单行显示（`hang`）与双行显示（`display`），本说明使用了 `hang`。调用方式为

```
\documentclass[hang]{elegantbook} %or
\documentclass[titlestyle=hang]{elegantbook}
```

在章标题内，章节编号默认是以数字显示，也即第 1 章，第 2 章等等，如果想要把数字改为中文，可以使用

```
\documentclass[chinese]{elegantbook} %or
\documentclass[scheme=chinese]{elegantbook}
```

2.6 数学环境简介

在我们这个模板中，我们定义了两种不同的定理模式 `mode`，包括简单模式（`simple`）和炫彩模式（`fancy`），默认为 `fancy` 模式，不同模式的选择为

```
\documentclass[simple]{elegantbook} %or
\documentclass[mode=simple]{elegantbook}
```

本模板定义了四大类环境

- 定理类环境，包含标题和内容两部分，全部定理类环境的编号均以章节编号。根据格式的不同分为 3 种
 - `definition` 环境，颜色为 `main`；
 - `theorem`、`lemma`、`corollary`、`axiom`、`postulate` 环境，颜色为 `second`；
 - `proposition` 环境，颜色为 `third`。
- 示例类环境，有 `example`、`problem`、`exercise` 环境（对应于例、例题、练习），自动编号，编号以章节为单位，其中 `exercise` 有提示符。
- 提示类环境，有 `note` 环境，特点是：无编号，有引导符。
- 结论类环境，有 `conclusion`、`assumption`、`property`、`remark`、`solution` 环境⁵，三者均以粗体的引导词为开头，和普通段落格式一致。

⁵ 本模板还添加了一个 `result` 选项，用于隐藏 `solution` 和 `proof` 环境，默认为显示（`result=answer`），隐藏使用 `result=noanswer`。

2.6.1 定理类环境的使用

由于本模板使用了 `tcolorbox` 宏包来定制定理类环境，所以和普通的定理环境的使用有些许区别，定理的使用方法如下：

```
\begin{theorem}{theorem name}{label}
The content of theorem.
\end{theorem}
```

第一个必选项 `theorem name` 是定理的名字，第二个必选项 `label` 是交叉引用时所用到的标签，交叉引用的方法为 `\ref{thm:label}`。请注意，交叉引用时必须加上前缀 `thm:`。

在用户多次反馈下，4.x 之后，引入了原生定理的支持方式，也就是使用可选项方式：

```
\begin{theorem}[theorem name] \label{thm:theorem-label}
The content of theorem.
\end{theorem}
% or
\begin{theorem} \label{thm:theorem-without-name}
The content of theorem without name.
\end{theorem}
```

其他相同用法的定理类环境有：

表 2.3: 定理类环境

| 环境名 | 标签名 | 前缀 | 交叉引用 |
|-------------|-------|-----|------------------------------|
| definition | label | def | <code>\ref{def:label}</code> |
| theorem | label | thm | <code>\ref{thm:label}</code> |
| postulate | label | pos | <code>\ref{pos:label}</code> |
| axiom | label | axi | <code>\ref{axi:label}</code> |
| lemma | label | lem | <code>\ref{lem:label}</code> |
| corollary | label | cor | <code>\ref{cor:label}</code> |
| proposition | label | pro | <code>\ref{pro:label}</code> |

2.6.2 修改计数器

当前定理等环境计数器按章计数，如果想修改定理类环境按节计数，可以修改计数器选项 `thmcnt`：

```
\documentclass[section]{elegantbook} %or
\documentclass[thmcnt=section]{elegantbook}
```

2.6.3 其他环境的使用

其他三种环境没有选项，可以直接使用，比如 `example` 环境的使用方法与效果：

```
\begin{example}
This is the content of example environment.
\end{example}
```

这几个都是同一类环境，区别在于

- 示例环境（`example`）、练习（`exercise`）与例题（`problem`）章节自动编号；
- 注意（`note`），练习（`exercise`）环境有提醒引导符；
- 结论（`conclusion`）等环境都是普通段落环境，引导词加粗。

2.7 列表环境

本模板借助于 `tikz` 定制了 `itemize` 和 `enumerate` 环境，其中 `itemize` 环境修改了 3 层嵌套，而 `enumerate` 环境修改了 4 层嵌套（仅改变颜色）。示例如下

- first item of nesti;
 - second item of nesti;
 - first item of nestii;
 - second item of nestii;
 - first item of nestiii;
 - second item of nestiii.
- 1. first item of nesti;
 - 2. second item of nesti;
 - (a). first item of nestii;
 - (b). second item of nestii;
 - I. first item of nestiii;
 - II. second item of nestiii.

2.8 参考文献

文献部分，本模板调用了 `biblatex` 宏包，并提供了 `biber`（默认）和 `bibtex` 两个后端选项，可以使用 `bibend` 进行修改：

```
\documentclass[bibtex]{elegantbook}
\documentclass[bibend=bibtex]{elegantbook}
```

关于文献条目（bib item），你可以在谷歌学术，Mendeley，Endnote 中取，然后把它们添加到 `reference.bib` 中。在文中引用的时候，引用它们的键值（bib key）即可。

为了方便文献样式修改，模板引入了 `bibstyle` 和 `citestyle` 选项，默认均为数字格式（numeric），参考文献示例：[cn1, en2, en3] 使用了中国一个大型的 P2P 平台（人人贷）的数据来检验男性投资者和女性投资者在投资表现上是否有显著差异。

如果需要设置为国标 GB7714-2015，需要使用：

```
\documentclass[citestyle=gb7714-2015, bibstyle=gb7714-2015]{elegantbook}
```

如果需要添加排序方式，可以在导言区加入

```
\ExecuteBibliographyOptions{sorting=ynt}
```

启用国标之后，可以加入 `sorting=gb7714-2015`。

2.9 添加序章

如果你想在第一章前面添序章，不改变原本章节序号，可以在第一章内容前面使用

```
\chapter*{Introduction}
\markboth{Introduction}{Introduction}
The content of introduction.
```

2.10 目录选项与深度

本模板添加了一个目录选项 `toc`，可以设置目录为单栏（`onecol`）和双栏（`twocol`）显示，比如双栏显示可以使用

```
\documentclass[twocol]{elegantbook}
\documentclass[toc=twocol]{elegantbook}
```

默认本模板目录深度为 1，你可以在导言区使用

```
\setcounter{tocdepth}{2}
```

将其修改为 2 级目录（章与节）显示。

2.11 章节摘要

模板新增了一个章节摘要环境（introduction），使用示例

```
\begin{introduction}
    \item Definition of Theorem
    \item Ask for help
    \item Optimization Problem
    \item Property of Cauchy Series
    \item Angle of Corner
\end{introduction}
```

效果如下：

内容提要

- | | |
|--|--|
| <input type="checkbox"/> Definition of Theorem <input type="checkbox"/> Ask for help <input type="checkbox"/> Optimization Problem | <input type="checkbox"/> Property of Cauchy Series <input type="checkbox"/> Angle of Corner |
|--|--|

环境的标题文字可以通过这个环境的可选参数进行修改，修改方法为：

```
\begin{introduction}[Brief Introduction]
...
\end{introduction}
```

2.12 章后习题

前面我们介绍了例题和练习两个环境，这里我们再加一个，章后习题（problemset）环境，用于在每一章结尾，显示本章的练习。使用方法如下

```
\begin{problemset}
    \item exercise 1
    \item exercise 2
    \item exercise 3
\end{problemset}
```

效果如下：

第 2 章 练习

1. exercise 1
2. exercise 2
3. exercise 3

4. 测试数学公式

$$a^2 + b^2 = c_{2_i}(1, 2)[1, 23] \quad (2.1)$$

注 如果你想把 `problemset` 环境的标题改为其他文字，你可以类似于 `introduction` 环境修改 `problemset` 的可选参数。另外，目前这个环境会自动出现在目录中，但是不会出现在页眉页脚信息中（待解决）。

解 如果你想把 `problemset` 环境的标题改为其他文字，你可以类似于 `introduction` 环境修改 `problemset` 的可选参数。另外，目前这个环境会自动出现在目录中，但是不会出现在页眉页脚信息中（待解决）。

2.13 旁注

在 3.08 版本中，我们引入了旁注设置选项 `marginpar=margintrue` 以及测试命令 `\elegantpar`，但是由此带来一堆问题。我们决定在 3.09 版本中将其删除，并且，在旁注命令得到大幅度优化之前，不会将此命令再次引入书籍模板中。对此造成各位用户的不方便，非常抱歉！不过我们保留了 `marginpar` 这个选项，你可以使用 `marginpar=margintrue` 获得保留右侧旁注的版面设计。然后使用系统自带的 `\marginpar` 或者 `marginnote` 宏包的 `\marginnote` 命令。

注 在使用旁注的时候，需要注意的是，文本和公式可以直接在旁注中使用。

```
% text
\marginpar{margin paragraph text}

% equation
\marginpar{
\begin{equation}
a^2 + b^2 = c^2
\end{equation}
}
```

但是浮动体（表格、图片）需要注意，不能用浮动体环境，需要使用直接插图命令或者表格命令环境。然后使用 `\captionof` 为其设置标题。为了得到居中的图表，可以使用 `\centerline` 命令或者 `center` 环境。更多详情请参考：[Caption of Figure in Marginpar](#)。

```
% graph with centerline command
\marginpar{
\centerline{
\includegraphics[width=0.2\textwidth]{logo.png}
}
\captionof{figure}{your figure caption}
}

% graph with center environment
\marginpar{
\begin{center}
\includegraphics[width=0.2\textwidth]{logo.png}
\captionof{figure}{your figure caption}
\end{center}
}
```

第3章 字体选项

字体选项独立成章的原因是，我们希望本模板的用户关心模板使用的字体，知晓自己使用的字体以及遇到字体相关的问题能更加便捷地找到答案。

重要提示：从3.10版本更新之后，沿用至今的newtx系列字体被重新更改为cm字体。并且新增中文字体(`chinesefont`)选项。

3.1 数学字体选项

本模板定义了一个数学字体选项(`math`)，可选项有三个：

1. `math=cm`(默认)，使用`LATEX`默认数学字体(推荐，无需声明)；
2. `math=newtx`，使用`newtxmath`设置数学字体(潜在问题比较多)。
3. `math=mtpro2`，使用`mtpro2`宏包设置数学字体，要求用户已经成功安装此宏包。

3.2 使用 newtx 系列字体

如果需要使用原先版本的newtx系列字体，可以通过显示声明数学字体：

```
\documentclass[math=newtx]{elegantbook}
```

3.2.1 连字符

如果使用newtx系列字体宏包，需要注意下连字符的问题。

$$\int_{R^q} f(x, y) dy \text{.off} \quad (3.1)$$

的代码为

```
\begin{equation}
\int_{R^q} f(x, y) dy.\text{\kern0pt f}
\end{equation}
```

3.2.2 宏包冲突

另外在3.08版本中，有用户反馈模板在和`yhmath`以及`esvect`等宏包搭配使用的时候会出现报错：

```
LaTeX Error:  
Too many symbol fonts declared.
```

原因是在使用`newtxmath`宏包时，重新定义了数学字体用于大型操作符，达到了最多16个数学字体的上限，在调用其他宏包的时候，无法新增数学字体。为了减少调用非常用宏包，在此给出如何调用`yhmath`以及`esvect`宏包的方法。

请在`elegantbook.cls`内搜索`yhmath`或者`esvect`，将你所需要的宏包加载语句取消注释即可。

```
%%% use yhmath pkg, uncomment following code
% \let\oldwidering\widering
% \let\widering\undefined
% \RequirePackage{yhmath}
```

```
% \let\widering\oldwidering
%%% use esvect pkg, uncomment following code
% \RequirePackage{esvect}
```

3.3 中文字体选项

模板从 3.10 版本提供中文字体选项 `chinesefont`, 可选项有

1. `ctexfont`: 默认选项, 使用 `ctex` 宏包根据系统自行选择字体, 可能存在字体缺失的问题, 更多内容参考 [ctex 宏包官方文档¹](#)。
2. `founder`: 方正字体选项 ([需要安装方正字体](#)), 后台调用 `ctex` 宏包并且使用 `fontset=none` 选项, 然后设置字体为方正四款免费字体, 方正字体下载注意事项见后文, 用户只需要安装方正字体即可使用该选项。
3. `nofont`: 后台会调用 `ctex` 宏包并且使用 `fontset=none` 选项, 不设定中文字体, 用户可以自行设置中文字体, 具体见后文。

3.3.1 方正字体选项

由于使用 `ctex` 宏包默认调用系统已有的字体, 部分系统字体缺失严重, 因此, 用户希望能够使用其它字体, 我们推荐使用方正字体。方正的方正书宋、方正黑体、方正楷体、方正仿宋四款字体均可免费试用, 且可用于商业用途。用户可以自行从[方正字体官网](#)下载此四款字体, 在下载的时候请**务必**注意选择 GBK 字符集, 也可以使用 [LATEX 工作室](#)提供的[方正字体](#), 提取码为: `njy9` 进行安装。安装时, Win 10 用户请右键选择为全部用户安装, 否则会找不到字体。



| 字体名称 | 编码 | 单价 | 实付价 | 交易状态 | 操作 |
|---------------------------------|-----------|--------|-----|---------------------|----------------------|
| 订单号: C20200204164821OW1F | | | | 2020-02-04 16:48:21 | |
| 方正仿宋_GBK • 免费商用 | 简繁扩展(GBK) | ¥ 0.00 | | | |
| 方正黑体_GBK • 免费商用 | 简繁扩展(GBK) | ¥ 0.00 | | | |
| 方正书宋_GBK • 免费商用 | 简繁扩展(GBK) | ¥ 0.00 | | 免费 已完成 | 下载字体 |
| 方正楷体_GBK • 免费商用 | 简繁扩展(GBK) | ¥ 0.00 | | | |

3.3.2 其他中文字体

如果你想完全自定义字体², 你可以选择 `chinesefont=nofont`, 然后在导言区设置

```
\setCJKmainfont [BoldFont={FZHei-B01}, ItalicFont={FZKai-Z03}]{FZShuSong-Z01}
\setCJKsansfont [BoldFont={FZHei-B01}]{FZKai-Z03}
```

¹可以使用命令提示符, 输入 `texdoc ctex` 调出本地 `ctex` 宏包文档

²这里仍然以方正字体为例。

```
\setCJKmonofont[BoldFont={FZHei-B01}]{FZFangSong-Z02}
\setCJKfamilyfont{zhsong}{FZShuSong-Z01}
\setCJKfamilyfont{zhhei}{FZHei-B01}
\setCJKfamilyfont{zhkai}[BoldFont={FZHei-B01}]{FZKai-Z03}
\setCJKfamilyfont{zhfs}[BoldFont={FZHei-B01}]{FZFangSong-Z02}
\newcommand*\songti{\CJKfamily{zhsong}}
\newcommand*\heiti{\CJKfamily{zhhei}}
\newcommand*\kaishu{\CJKfamily{zhkai}}
\newcommand*\fangsong{\CJKfamily{zhfs}}
```

第4章 ElegantBook 写作示例

内容提要

- 积分定义 4.1
- Fubini 定理 4.1
- 最优化原理 4.1
- 柯西列性质 4.1.1
- 韦达定理

4.1 Lebesgue 积分

在前面各章做了必要的准备后，本章开始介绍新的积分。在 Lebesgue 测度理论的基础上建立了 Lebesgue 积分，其被积函数和积分域更一般，可以对有界函数和无界函数统一处理。正是由于 Lebesgue 积分的这些特点，使得 Lebesgue 积分比 Riemann 积分具有在更一般条件下的极限定理和累次积分交换积分顺序的定理，这使得 Lebesgue 积分不仅在理论上更完善，而且在计算上更灵活有效。

Lebesgue 积分有几种不同的定义方式。我们将采用逐步定义非负简单函数，非负可测函数和一般可测函数积分的方式。

由于现代数学的许多分支如概率论、泛函分析、调和分析等常常用到一般空间上的测度与积分理论，在本章最后一节将介绍一般的测度空间上的积分。

4.1.1 积分的定义

我们将通过三个步骤定义可测函数的积分。首先定义非负简单函数的积分。以下设 E 是 \mathcal{R}^n 中的可测集。

定义 4.1 (可积性)

设 $f(x) = \sum_{i=1}^k a_i \chi_{A_i}(x)$ 是 E 上的非负简单函数，其中其中 $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ 是 E 上的一个可测分割， a_1, a_2, \dots, a_k 是非负实数。定义 f 在 E 上的积分为 $\int_a^b f(x) dx$

$$\int_E f dx = \sum_{i=1}^k a_i m(A_i) \pi \alpha \beta \sigma \gamma \nu \xi \epsilon \varepsilon. \oint_a^b \oint_a^b \prod_{i=1}^n$$
 (4.1)

一般情况下 $0 \leq \int_E f dx \leq \infty$ 。若 $\int_E f dx < \infty$ ，则称 f 在 E 上可积。



一个自然的问题是，Lebesgue 积分与我们所熟悉的 Riemann 积分有什么联系和区别？在 4.4 在我们将详细讨论 Riemann 积分与 Lebesgue 积分的关系。这里只看一个简单的例子。设 $D(x)$ 是区间 $[0, 1]$ 上的 Dirichlet 函数。即 $D(x) = \chi_{Q_0}(x)$ ，其中 Q_0 表示 $[0, 1]$ 中的有理数的全体。根据非负简单函数积分的定义， $D(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的 Lebesgue 积分为

$$\int_0^1 D(x) dx = \int_0^1 \chi_{Q_0}(x) dx = m(Q_0) = 0$$
 (4.2)

即 $D(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是 Lebesgue 可积的并且积分值为零。但 $D(x)$ 在 $[0, 1]$ 上不是 Riemann 可积的。

有界变差函数是与单调函数有密切联系的一类函数。有界变差函数可以表示为两个单调递增函数之差。与单调函数一样，有界变差函数几乎处处可导。与单调函数不同，有界变差函数类对线性运算是封闭的，它们构成一线空间。练习题 4.1 是一个性质的证明。

练习 4.1 设 $f \notin L(\mathcal{R}^1)$ ， g 是 \mathcal{R}^1 上的有界可测函数。证明函数

$$I(t) = \int_{\mathcal{R}^1} f(x+t) g(x) dx \quad t \in \mathcal{R}^1$$
 (4.3)

是 \mathcal{R}^1 上的连续函数。

解 即 $D(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是 Lebesgue 可积的并且积分值为零。但 $D(x)$ 在 $[0, 1]$ 上不是 Riemann 可积的。

证明 即 $D(x)$ 在 $[0, 1]$ 上是 Lebesgue 可积的并且积分值为零。但 $D(x)$ 在 $[0, 1]$ 上不是 Riemann 可积的。

定理 4.1 (Fubini 定理)

(1) 若 $f(x, y)$ 是 $\mathcal{R}^p \times \mathcal{R}^q$ 上的非负可测函数，则对几乎处处的 $x \in \mathcal{R}^p$, $f(x, y)$ 作为 y 的函数是 \mathcal{R}^q 上的非负可测函数， $g(x) = \int_{\mathcal{R}^q} f(x, y) dy$ 是 \mathcal{R}^p 上的非负可测函数。并且

$$\int_{\mathcal{R}^p \times \mathcal{R}^q} f(x, y) dx dy = \int_{\mathcal{R}^p} \left(\int_{\mathcal{R}^q} f(x, y) dy \right) dx. \quad (4.4)$$

(2) 若 $f(x, y)$ 是 $\mathcal{R}^p \times \mathcal{R}^q$ 上的可积函数，则对几乎处处的 $x \in \mathcal{R}^p$, $f(x, y)$ 作为 y 的函数是 \mathcal{R}^q 上的可积函数，并且 $g(x) = \int_{\mathcal{R}^q} f(x, y) dy$ 是 \mathcal{R}^p 上的可积函数。而且 4.4 成立。



4.1

笔记 在本模板中，引理 (lemma), 推论 (corollary) 的样式和定理 4.1 的样式一致，包括颜色，仅仅只有计数器的设置不一样。

我们说一个实变或者复变量的实值或者复值函数是在区间上平方可积的，如果其绝对值的平方在该区间上的积分是有限的。所有在勒贝格积分意义下平方可积的可测函数构成一个希尔伯特空间，也就是所谓的 L^2 空间，几乎处处相等的函数归为同一等价类。形式上， L^2 是平方可积函数的空间和几乎处处为 0 的函数空间的商空间。

说明 4.1 (最优化原理)

如果 u^* 在 $[s, T]$ 上为最优解，则 u^* 在 $[s, T]$ 任意子区间都是最优解，假设区间为 $[t_0, t_1]$ 的最优解为 u^* ，则 $u(t_0) = u^*(t_0)$ ，即初始条件必须还是在 u^* 上。



我们知道最小二乘法可以用来处理一组数据，可以从一组测定的数据中寻求变量之间的依赖关系，这种函数关系称为经验公式。本课题将介绍最小二乘法的精确定义及如何寻求点与点之间近似成线性关系时的经验公式。假定实验测得变量之间的 n 个数据，则在平面上，可以得到 n 个点，这种图形称为“散点图”，从图中可以粗略看出这些点大致散落在某直线近旁，我们认为其近似为一线性函数，下面介绍求解步骤。

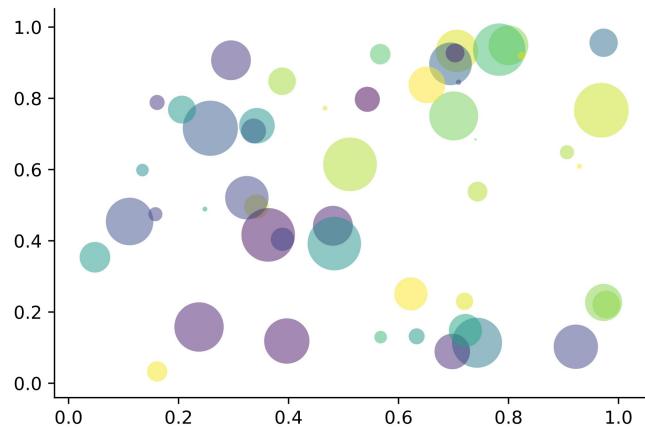


图 4.1: 散点图示例 $\hat{y} = a + bx$

以最简单的一元线性模型来解释最小二乘法。什么是一元线性模型呢？监督学习中，如果预测的变量是离散的，我们称其为分类（如决策树，支持向量机等），如果预测的变量是连续的，我们称其为回归。回归分析中，如果只包括一个自变量和一个因变量，且二者的关系可用一条直线近似表示，这种回归分析称为一元线性回归分析。如果回归分析中包括两个或两个以上的自变量，且因变量和自变量之间是线性关系，则称为多元线性回

归分析。对于二维空间线性是一条直线；对于三维空间线性是一个平面，对于多维空间线性是一个超平面。

性质 柯西列的性质

1. $\{x_k\}$ 是柯西列，则其子列 $\{x_k^i\}$ 也是柯西列。
2. $x_k \in \mathcal{R}^n$, $\rho(x, y)$ 是欧几里得空间，则柯西列收敛， (\mathcal{R}^n, ρ) 空间是完备的。

结论 回归分析 (regression analysis) 是确定两种或两种以上变量间相互依赖的定量关系的一种统计分析方法。运用十分广泛，回归分析按照涉及的变量的多少，分为一元回归和多元回归分析；按照因变量的多少，可分为简单回归分析和多重回归分析；按照自变量和因变量之间的关系类型，可分为线性回归分析和非线性回归分析。

~~~~~ 第4章 练习 ~~~~

1. 设 A 为数域 K 上的 n 级矩阵。证明：如果 K^n 中任意非零列向量都是 A 的特征向量，则 A 一定是数量矩阵。
2. 证明：不为零矩阵的幂零矩阵不能对角化。
3. 设 $A = (a_{ij})$ 是数域 K 上的一个 n 级上三角矩阵，证明：如果 $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn}$ ，并且至少有一个 $a_{kl} \neq 0 (k < l)$ ，则 A 一定不能对角化。

第 5 章 常见问题集

我们根据用户社区反馈整理了下面一些常见的问题，用户在遇到问题时，应当首先查阅本手册和本部分的常见问题。

1. 有没有办法章节用“第一章，第一节，（一）”这种？

见前文介绍，可以使用 `scheme=chinese` 设置。

2. 大佬，我想把正文字体改为亮色，背景色改为黑灰色。

页面颜色可以使用 `\pagecolor` 命令设置，文本命令可以参考[这里](#)进行设置。

3. Package `ctex` Error: CTeX fontset 'Mac' is unavailable.

在 Mac 系统下，中文编译请使用 Xe^LA_TE_X。

4. ! LaTeX Error: Unknown option '`scheme=plain`' for package '`ctex`'.

你用的 CTeX 套装吧？这个里面的 `ctex` 宏包已经是 10 年前的了，与本模板使用的 `ctex` 宏集有很大区别。不建议 CTeX 套装了，请卸载并安装 TeX Live 2022。

5. 我该使用什么版本？

请务必使用[最新正式发行版](#)，发行版间不定期可能会有更新（修复 bug 或者改进之类），如果你在使用过程中没有遇到问题，不需要每次更新[最新版](#)，但是在发行版更新之后，请尽可能使用最新版（发行版）！最新发行版可以在 GitHub 或者 TeX Live 2021 内获取。

6. 我该使用什么编辑器？

你可以使用 TeX Live 2021 自带的编辑器 TeXworks 或者使用 TeXstudio，TeXworks 的自动补全，你可以参考我们的总结 [TeXworks 自动补全](#)。推荐使用 TeX Live 2021 + TeXstudio。我自己用 VS Code 和 Sublime Text，相关的配置说明，请参考 [LaTeX 编译环境配置：Visual Studio Code 配置简介](#) 和 [Sublime Text 搭建 LaTeX 编写环境](#)。

7. 您好，我们想用您的 ElegantBook 模板写一本书。关于机器学习的教材，希望获得您的授权，谢谢您的宝贵时间。

模板的使用修改都是自由的，你们声明模板来源以及模板地址（GitHub 地址）即可，其他未尽事宜按照开源协议 LPPL-1.3c。做好之后，如果方便的话，可以给我们一个链接，我把你们的教材放在 Elegant^LA_TE_X 用户作品集里。

8. 请问交叉引用是什么？

本群和本模板适合有一定 LaTeX 基础的用户使用，新手请先学习 LaTeX 的基础，理解各种概念，否则你将寸步难行。

9. 代码高亮环境能用其他语言吗？

可以的，ElegantBook 模板用的是 `listings` 宏包，你可以在环境 (`lstlisting`) 之后加上语言（比如 Python 使用 `language=Python` 选项），全局语言修改请使用 `lsset` 命令，更多信息请参考宏包文档。

10. 群主，什么时候出 Beamer 的模板（主题），ElegantSlide 或者 ElegantBeamer？

由于 Beamer 中有一个很优秀的主题 Metropolis。后续确定不会再出任何主题/模板，请大家根据需要修改已有主题。

第 6 章 版本更新历史

根据用户的反馈，我们不断修正和完善模板。由于 3.00 之前版本与现在版本差异非常大，在此不列出 3.00 之前的更新内容。

2022/04/09 更新：版本 4.3 正式发布。

- ① 放弃 newtx 系列宏包的设置，改用 TeX Gyre Terms，并设置其他字体；
- ② 修改定理类环境内部字体设置，修复环境内部中文无法加粗问题；
- ③ 增加定理类环境的计数器选项 thmcnt，可选 chapter 和 section；
- ④ 增加 bibend 选项，可选 bibend=biber（默认）和 bibend=bibtex。

2022/03/08 更新：版本 4.2 正式发布。

- ① 对于 newtx 系列宏包更新导致的字体 bug 的修复；
- ② 修缮目录格式，为了达到这个目的，重新改写 \chaptername 的重定义语句；
- ③ 增加日语 lang=jp 设定。
- ④ 这个版本为一个临时性版本，在 TeXLive 2022 发布之后，将尽快发布 4.3 版本，由于对于中文的改动比较大，可能会出现预期之外的 bug，有问题可以在 QQ 群或者 Github 反馈。

2021/05/02 更新：版本 4.1 正式发布。

- ① **重要改动：**由原先的 BiBTeX 改为 biblatex 编译方式（后端为 biber），请注意两者之间的差异；
- ② **重要改进：**修改对于定理写法兼容方式，提高数学公式代码的兼容性；
- ③ 页面设置改动，默认页面更宽；方便书写和阅读；
- ④ 支持目录文字以及页码跳转；
- ⑤ 不再维护 pdfLATEX 中文支持方式，请务必使用 XeLATEX 编译中文文稿。
- ⑥ 增加多个语言选项，法语 lang=fr、荷兰语 lang=nl、匈牙利语 lang=hu、西班牙语 lang=es、蒙古语 lang=mn 等。

2020/04/12 更新：版本 3.11 正式发布，此版本为 3.x 最后版本。

- ① **重要修正：**修复因为 gbt7714 宏包更新导致的 natbib option clash 错误；
- ② 由于 pgfornament 宏包未被 TeX Live 2020 收录，因此删除 base 相关的内容；
- ③ 修复部分环境的空格问题；
- ④ 增加了意大利语言选项 lang=it。

2020/02/10 更新：版本 3.10 正式发布

- ① 增加数学字体选项 math，可选项为 newtx 和 cm。
重要提示：原先通过 newtxmath 宏包设置的数学字体改为 LATEX 默认数学字体，如果需要保持原来的字体，需要显式声明数学字体 (math=newtx)；
- ② 新增中文字体选项 chinesefont，可选项为 ctexfont、founder 和 nofont。
- ③ 将封面作者信息设置为可选，并且增加自定义信息命令 \bioinfo；
- ④ 在说明文档中增加版本历史，新增 \datechange 命令和 change 环境；
- ⑤ 增加汉化章节选项 scheme，可选项为汉化 chinese；
- ⑥ 由于 \lvert 问题已经修复，重新调整 ctex 宏包和 amsmath 宏包位置。
- ⑦ 修改页眉设置，去除了 \lastpage 以避免 page anchor 问题，加入 \frontmatter。
- ⑧ 修改参考文献选项 cite，可选项为数字 numbers、作者-年份 authoryear 以及上标 super。

-
- ⑨ 新增参考文献样式选项 `bibstyle`, 并将英文模式下参考文献样式 `apalike` 设置为默认值, 中文仍然使用 `gbt7714` 宏包设置。

2019/08/18 更新: 版本 3.09 正式发布

- ① `\elegantpar` 存在 bug, 删除 `\elegantpar` 命令, 建议用户改用 `\marginnote` 和 `\marginpar` 旁注命令。
- ② 积分操作符统一更改为 `esint` 宏包设置;
- ③ 新增目录选项 `toc`, 可选项为单栏 `onecol` 和双栏 `twocol`;
- ④ 手动增加参考文献选项 `cite`, 可选项为上标形式 `super`;
- ⑤ 修正章节习题 (`problemset`) 环境。

2019/05/28 更新: 版本 3.08 正式发布

- ① 修复 `\part` 命令。
- ② 引入 Note 模板中的 `pad` 选项 `device=pad`。
- ③ 数学字体加入 `mtpro2` 可选项 `math=mtpro2`, 使用免费的 `lite` 子集。
- ④ 将参考文献默认显示方式 `authoyear` 改为 `numbers`。
- ⑤ 引入旁注命令 `\marginpar` (测试)。
- ⑥ 新增章节摘要环境 `introduction`。
- ⑦ 新增章节习题环境 `problemset`。
- ⑧ 将 `\equation` 重命名为 `\extrainfo`。
- ⑨ 完善说明文档, 增加致谢部分。

2019/04/15 更新: 版本 3.07 正式发布

- ① 删除中英文自定义字体总设置。
- ② 新增颜色主题, 并将原绿色默认主题设置为蓝色 `color=blue`。
- ③ 引入隐藏装饰图案选项 `base`, 可选项有显示 `show` 和隐藏 `hide`。
- ④ 新增定理模式 `mode`, 可选项有简单模式 `simple` 和炫彩模式 `fancy`。
- ⑤ 新增隐藏证明、答案等环境的选项 `result=noanswer`。

2019/02/25 更新: 版本 3.06 正式发布

- ① 删除水印。
- ② 新封面, 新装饰图案。
- ③ 添加引言使用说明。
- ④ 修复双面 `twoside`。
- ⑤ 美化列表环境。
- ⑥ 增加 `\subsubsection` 的设置。
- ⑦ 将模板拆分成中英文语言模式。
- ⑧ 使用 `lstlisting` 添加代码高亮。
- ⑨ 增加定理类环境使用说明。

2019/01/22 更新: 版本 3.05 正式发布

- ① 添加 `xeCJK` 宏包中文支持方案。
- ② 修复模板之前对 `TikZ` 单位的改动。
- ③ 更新 logo 图。

2019/01/15 更新: 版本 3.04 正式发布

-
- ① 格式化模板代码。
 - ② 增加 `\equote` 命令。
 - ③ 修改 `\date`。

2019/01/08 更新：版本 3.03 正式发布

- ① 修复附录章节显示问题。
- ② 小幅优化封面代码。

2018/12/31 更新：版本 3.02 正式发布

- ① 修复名字系列命令自定义格式时出现的空格问题，比如 `\listfigurename`。
- ② 英文定理类名字改为中文名。
- ③ 英文结构名改为中文。

2018/12/16 更新：版本 3.01 正式发布

- ① 调整 `ctex` 宏包。
- ② 说明文档增加更新内容。

2018/12/06 更新：版本 3.00 正式发布

- ① 删除 `mathpazo` 数学字体选项。
- ② 添加邮箱命令 `\mailto`。
- ③ 修改英文字体为 `newtx` 系列，另外大型操作符号维持 `cm` 字体。
- ④ 中文字体改用 `ctex` 宏包自动设置。
- ⑤ 删除 `xeCJK` 字体设置，原因是不同系统字体不方便统一。
- ⑥ 定理换用 `tcolorbox` 宏包定义，并基本维持原有的定理样式，优化显示效果，支持跨页；定理类名字重命名，如 `etheorem` 改为 `theorem` 等等。
- ⑦ 删去自定义的缩进命令 `\Eindent`。
- ⑧ 添加参考文献宏包 `natbib`。
- ⑨ 颜色名字重命名。

附录 A 基本数学工具

本附录包括了计量经济学中用到的一些基本数学，我们扼要论述了求和算子的各种性质，研究了线性和某些非线性方程的性质，并复习了比例和百分数。我们还介绍了一些在应用计量经济学中常见的特殊函数，包括二次函数和自然对数，前 4 节只要求基本的代数技巧，第 5 节则对微分学进行了简要回顾；虽然要理解本书的大部分内容，微积分并非必需，但在一些章末附录和第 3 篇某些高深专题中，我们还是用到了微积分。

A.1 求和算子与描述统计量

求和算子是用以表达多个数求和运算的一个缩略符号，它在统计学和计量经济学分析中扮演着重要作用。如果 $\{x_i : i = 1, 2, \dots, n\}$ 表示 n 个数的一个序列，那么我们就把这 n 个数的和写为：

$$\sum_{i=1}^n x_i \equiv x_1 + x_2 + \dots + x_n \quad (\text{A.1})$$