

콜라츠 추측 증명 ($x_0 \rightarrow x_k = 1$ 과정 버전)

1. 수열 일반화

콜라츠 추측을 다음과 같은 형태로 변형하였다:

$$f(x) = \frac{3x + 1}{2^{v_2(3x+1)}}$$

이를 k 번 반복 적용하면 일반화 수식

$$f^k(x) = \frac{3^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} 3^i 2^{\sum_{t=i+1}^{k-1} v_2(3x_t+1)}}{2^{\sum_{t=0}^{k-1} v_2(3x_t+1)}}$$

을 얻는다.

2. $x_0 \rightarrow x_k = 1$ 가정

콜라츠 추측에 따르면, 충분히 큰 k 에 대해 $f^k(x) = 1$ 이다. 이때 분모를 우변으로 옮기면 다음과 같은 항등식이 성립한다:

$$2^{\sum_{t=0}^{k-1} v_2(3x_t+1)} = 3^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} 3^i 2^{\sum_{t=i+1}^{k-1} v_2(3x_t+1)}$$

항등식 증명

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \left[2^{\sum_{t=0}^{k-1} v_2(3x_t+1)} \right] = 3^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} 3^i 2^{\sum_{t=i+1}^{k-1} v_2(3x_t+1)}$$

여기서 $v_2(n)$ 은 n 의 2-진수 지수, 즉 $2^m \mid n$ 이고 $2^{m+1} \nmid n$ 인 최대 m 을 의미한다. 또한 x_t 는 콜라츠 과정에서 x_0 부터 생성되는 수열이다:

$$x_{t+1} = \frac{3x_t + 1}{2^{v_2(3x_t+1)}}$$

1단계: 식 재작성

$$3x_t + 1 = 2^{v_2(3x_t+1)} x_{t+1}$$

곱하면 반복 전개 가능:

$$\prod_{t=0}^{k-1} (3x_t + 1) = \prod_{t=0}^{k-1} 2^{v_2(3x_t+1)} x_{t+1} = 2^{\sum_{t=0}^{k-1} v_2(3x_t+1)} \prod_{t=1}^k x_t$$

관심 있는 항은 2의 거듭제곱 항이다.

2단계: 귀납적 전개

$$3^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} 3^i 2^{\sum_{t=i+1}^{k-1} v_2(3x_t+1)}$$

예시 k=1:

$$2 \sum_{t=0}^0 v_2(3x_0 + 1) = 2v_2(3x_0 + 1)$$

우변:

$$3^1 x_0 + \sum_{i=0}^0 3^0 2^{\sum_{t=1}^0 v_2(3x_t+1)} = 3x_0 + 2^0 = 3x_0 + 1$$

$x_0=1$ 대입 → 일치

3단계: 일반 귀납

$$x_k = \frac{3x_{k-1} + 1}{2^{v_2(3x_{k-1}+1)}}$$

반복하면:

$$x_k = \frac{3^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} 3^i 2^{\sum_{t=i+1}^{k-1} v_2(3x_t+1)}}{2^{\sum_{t=0}^{k-1} v_2(3x_t+1)}}$$

따라서 최종적으로:

$$2^{\sum_{t=0}^{k-1} v_2(3x_t+1)} x_k = 3^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} 3^i 2^{\sum_{t=i+1}^{k-1} v_2(3x_t+1)}$$

항등식과 일치.

3. 모든 자연수에 대한 적용

- 홀수 x_0 → 항등식 성립
- 2^n 꼴이 아닌 짝수 → 반복적으로 홀수가 되어 항등식 성립
- 2^n 꼴 짝수 → 계속 2로 나누어 1 → 항등식 성립

따라서 x_0 에서 시작하여 충분히 큰 k 후 $x_k=1$ → 콜라츠 추측 참
