第5章 正弦稳态分析

之1 正弦交流电路

本部分（5.1节）主要讨论：

- 基本概念（相位、有效值、相量）
- 正弦电路元件（电阻、电感、电容）
- 基尔霍夫定律的相量形式
- 阻抗、导纳及等效变换
- 正弦交流电路的功率计算

5.1 正弦交流电路

一、概述

✧ 动态电路：含动态元件（L、C）的电路。

✧ 稳定响应：当动态电路的激励变换时，电路状态会先经历一个过渡过程，然后趋于稳定。分析过渡过程的特性，称为暂态分析；分析稳定响应的特性，称为稳态分析。对于线性时不变电路，稳态响应与外加激励源的变化规律相同。

✧ 正弦交流电路：当动态电路输入正弦激励时进行稳态分析时，则称电路为正弦交流电路。

二、正弦交流电量的基本概念

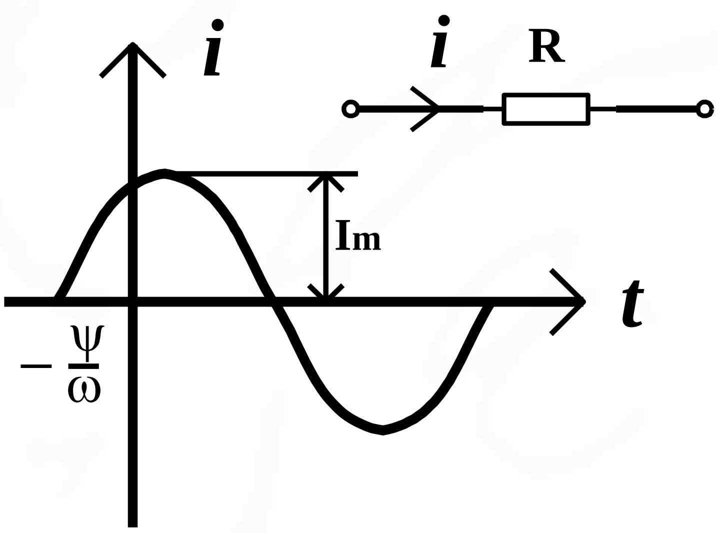
✧ **交流量**：电压或电流是时间的周期性函数，且在一周期内平均值为零。

✧ **正弦量**：电压或电流是时间的正弦函数。当电路中电源是正弦量时，电路中的电压或电流都为同频率的正弦量。

时域表达式描述：

$$i(t)=I_m\sin(\omega t+\psi_i)$$

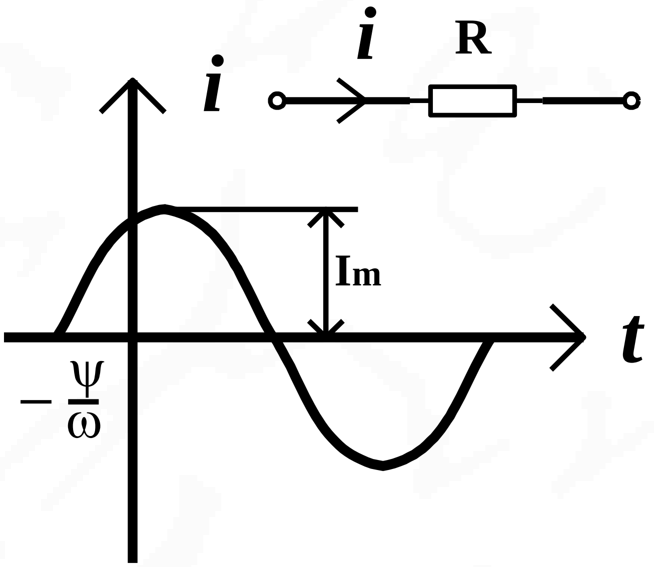
$i(t)$称为正弦交流电的**瞬时值**。



波形图描述

➢ 正弦交流电的三要素：

$$i = I_m \sin(\omega t + \psi_i)$$



① I_m：幅值（最大值或有效值）。

② ω：角频率；

$\omega = 2\pi f$，f 为频率；

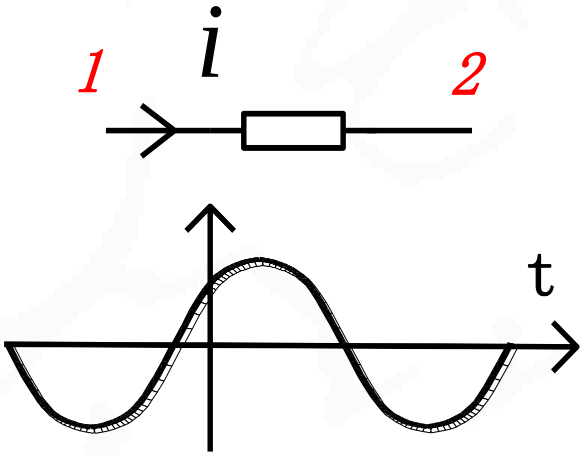
$f=1/T$，T 为周期。

③ $(\omega t + \psi_i)$ 相位，

ψ_i称为初相位。

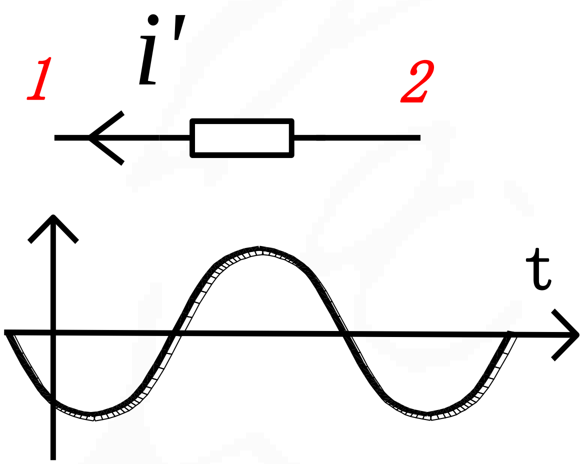
➢ 正弦交流电的参考方向

电流表达式必须规定参考方向!



✧ 例如规定参考方向从1到2，$i=5\sin(314t+45°)$，则随时间变化曲线如图。

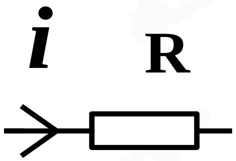
✧ 对于同一个电流，如果参考方向改为从2到1，记为i'，则 $i'=-i=-5\sin(314t+45°)=5\sin(314t-135°)$，即把时间起点沿$\omega t$轴移动180°。



➢ 正弦交流电流的有效值

有效值物理意义：周期交流电流$i(t)$流过电阻R时，在一个周期内消耗的能量等于某一大小的直流电流I在同一电阻相同时间内消耗的能量。称这一直流电流I为交流电流$i(t)$的有效值。

交流电能量： $W_i = \int_0^T i(t)^2 R dt$



直流电能量： $W_I = \int_0^T I^2 R dt = I^2 RT$

由W_i=W_I得周期交流电流有效值： $I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i(t)^2 dt}$

有效值又称为均方根值，电压有效值： $U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2 dt}$

对正弦交流来说，设电流 $i = I_m \sin\omega t$ ，则电流的有效值为：

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I_m^2 (\frac{1-\cos 2\omega t}{2})dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

即 $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$ 同理， $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$

✧ 电气工程上电压电流的大小，一般都用有效值来表示。如单相电压220V是指有效值，其最大值约为311V。

✧ 电气测量仪表一般也指有效值。

✧ 电路计算中一般用有效值运算。

〖示例〗

我国低压电网的电压为220V（有效值），最大值为311V， f＝50Hz，ω＝314弧度/秒(rad/s)，T = 20 ms。

若设初相位为30°，则表达式为：

$$u = 311\sin(314t + 30°)\mathrm{V}$$

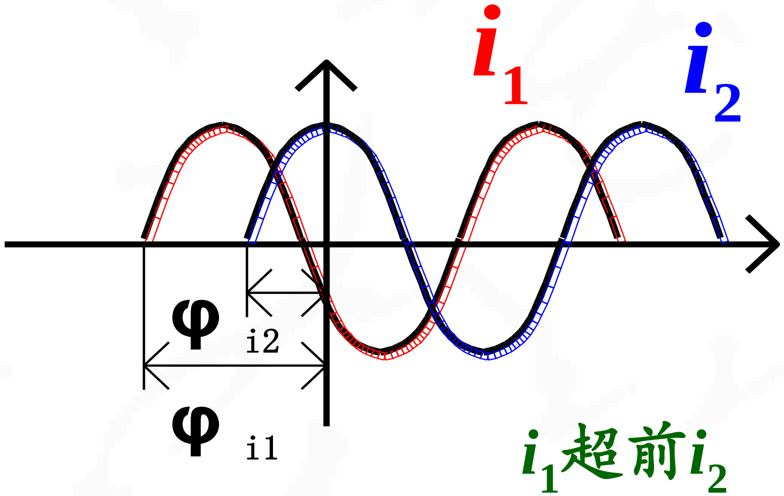
$$=220\sqrt{2}\sin(2\pi ft + \frac{\pi}{6})\mathrm{V}$$

三、正弦交流电的相位差

两个同频率的正弦交流电，见图。

$i_1 = I_1 \sin(\omega t + \psi_{i1})$

$i_2 = I_2 \sin(\omega t + \psi_{i2})$



则相位差：

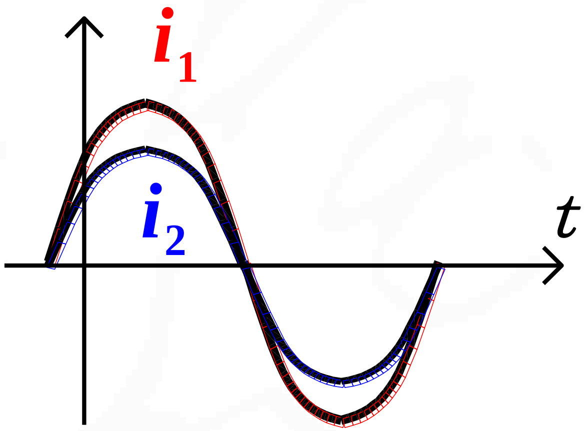
$$\varphi = (\omega t + \psi_{i1}) - (\omega t + \psi_{i2}) = \psi_{i1} - \psi_{i2}$$

✧ 相位差＝初相位之差。

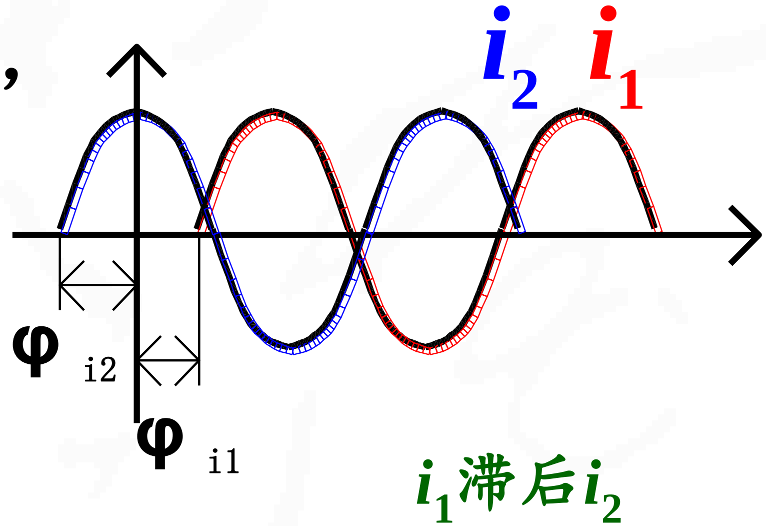
✧ 只有同频率的正弦量才有相位差。

✧ 若i_1与i_2的相位差 $\varphi > 0$（$\psi_{i1} > \psi_{i2}$），则i_1超前i_2。

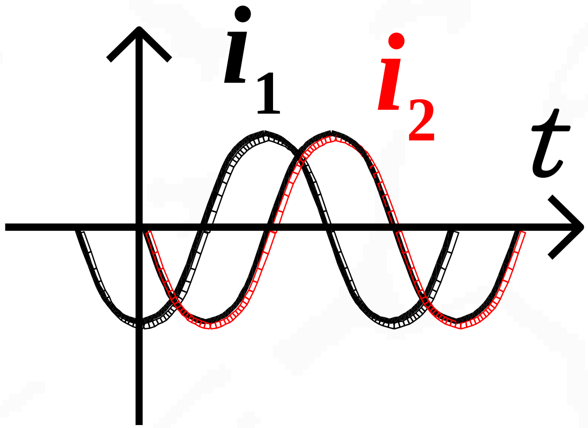
✧ 若相位差$\varphi=0$（$\psi_{i1}=\psi_{i2}$），则i_1与i_2同相位。

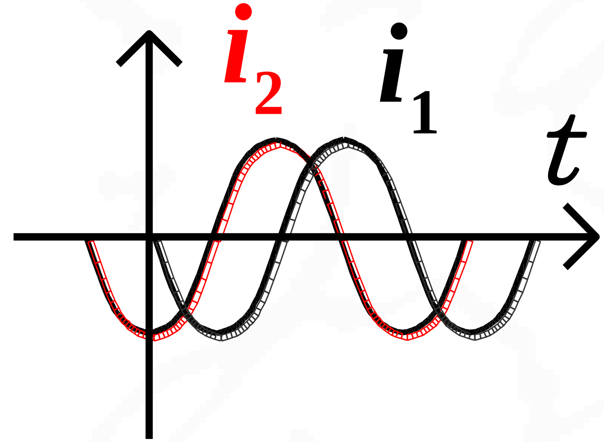


✧ 若相位差$\varphi<0$（$\psi_{i1}<\psi_{i2}$），则i_1滞后i_2。

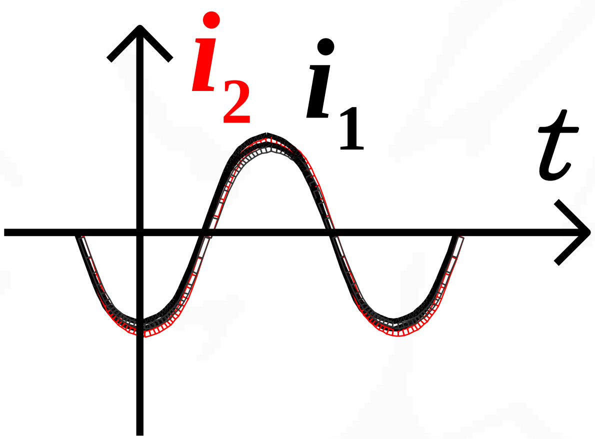


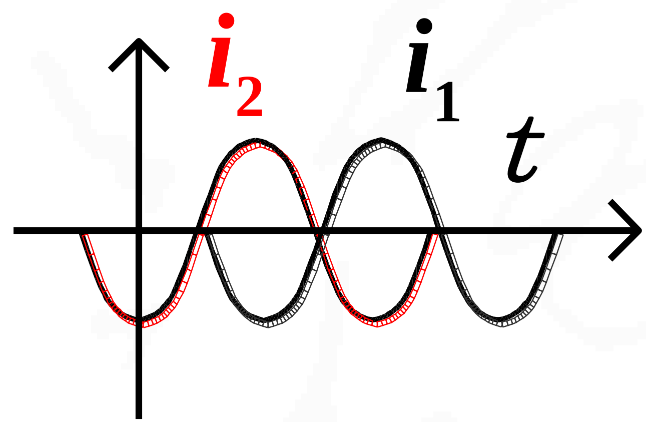
〔例〕判断i_1与i_2的相位关系。





〔解〕 i_1超前i_2 90°　　i_1滞后i_2 90°





i_1与i_2同相　　i_1与i_2反相

四、正弦交流电量的相量表示

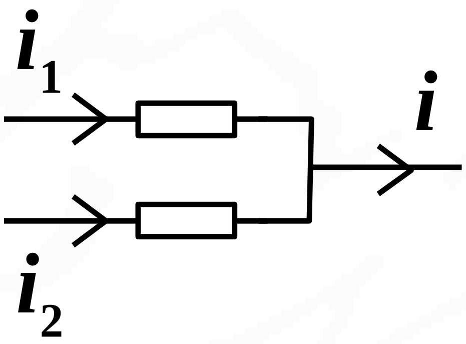
➢ 相量描述

✧ 正弦交流量可用三角函数进行计算，但不方便。

例 如：

$$i_1 = \sqrt{2}40\sin(314t + 30°)\text{A}$$

$$i_2 = \sqrt{2}30\sin(314t - 60°)\text{A}$$



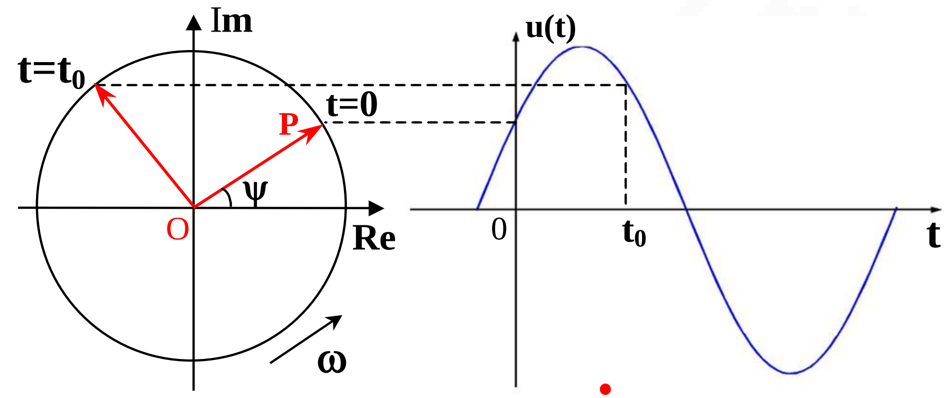
$$i = i_1 + i_2 = \sqrt{2}40\sin(314t + 30°) + \sqrt{2}30\sin(314t - 60°)$$

✧ 利用相量运算可以简化正弦交流量的计算。相量实际上是正弦交流量的复数简化表示。

➢ 正弦交流电瞬时值与相量的关系

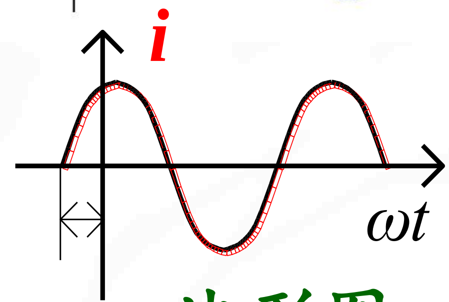
线段P在虚轴上的投影：

$$i = \sqrt{2}I\sin(\omega t + \psi)$$



瞬时表达式：

$$i = \sqrt{2}I\sin(\omega t + \psi)$$



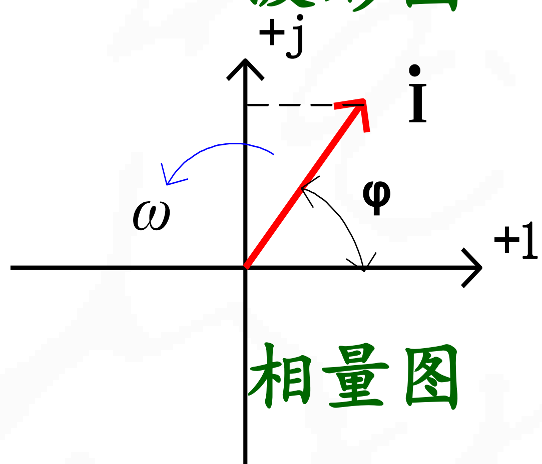
波形图

代数表示法：
（复数表示）

$$i = \mathrm{Im}[\sqrt{2}Ie^{j\psi}e^{j\omega t}]$$

相量表示：
(复数的简化表示)

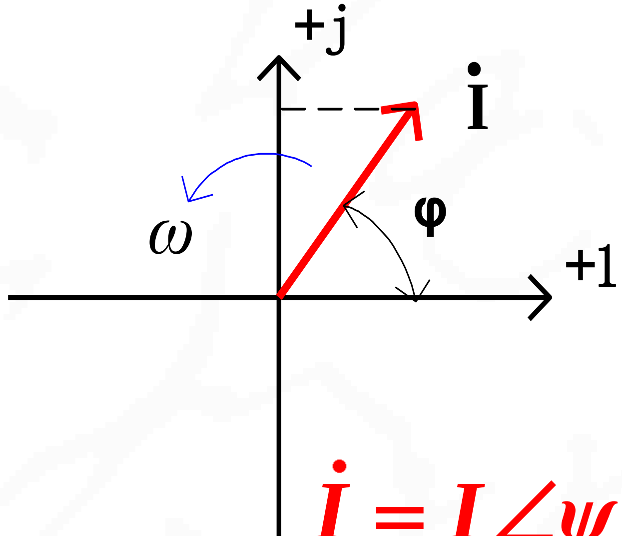
$$\dot{I} = Ie^{j\psi} = I\angle\psi$$



相量图

➢ 小结与讨论：相量表示

- ✧ 相量以角频率ω逆时针旋转，其在虚轴上的投影即为正弦交流电流的瞬时值。



$$\dot{I} = I\angle\psi$$

- ✧ 正弦交流电的三种表达方式：
  瞬时表达式　复数式　相量
- ✧ 相量实际上是复数表达式的简化表示。
- ✧ 相量表示一定要在I或U上方加一“点”。
- ✧ 本教材中，相量的大小用有效值来表示。
- ✧ 本教材中，取相量在虚轴上的投影，对应的瞬时表达式为正弦函数。

〖例1〗 已知三个正弦电压表达式为：

$$u_1(t) = \sqrt{2}U \sin(\omega t - 30°)\ \mathrm{V}$$

$$u_2(t) = -\sqrt{2}U \sin(\omega t + 30°)\ \mathrm{V}$$

$$u_3(t) = \sqrt{2}U \cos(\omega t + 45°)\ \mathrm{V}$$

求其相量表示式，并画出相量图。

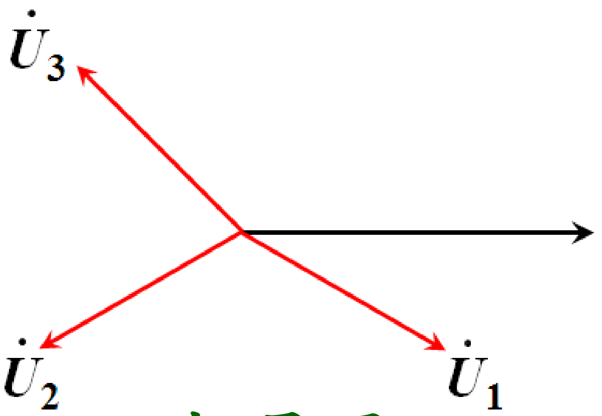
〖解〗

$$\dot{U}_1 = U\angle -30°\ \mathrm{V}$$

$$\dot{U}_2 = -U\angle 30° = U\angle -150°$$

$$u_3(t) = \sqrt{2}U \cos(\omega t + 45°) = \sqrt{2}U \sin(\omega t + 135°)$$

$$\dot{U}_3 = U\angle 135°$$



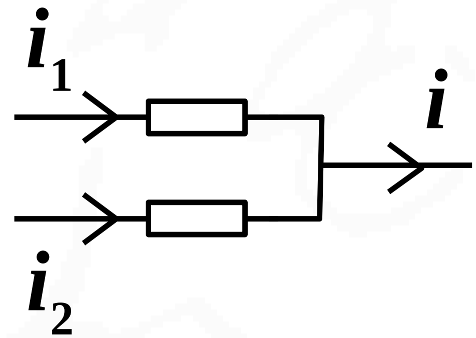
相量图

➢ 相量运算

设 $i_1 = \sqrt{2} I_1 \sin(\omega t + \psi_1)$

$i_2 = \sqrt{2} I_2 \sin(\omega t + \psi_2)$

求合成电流： $i = i_1 + i_2$



✧ 正弦交流电瞬时表达式计算（正弦函数计算）

→ 相量计算（复数计算）。

✧ 两个**同频率**的正弦电流之和，对应于，两个电流相量之和，即

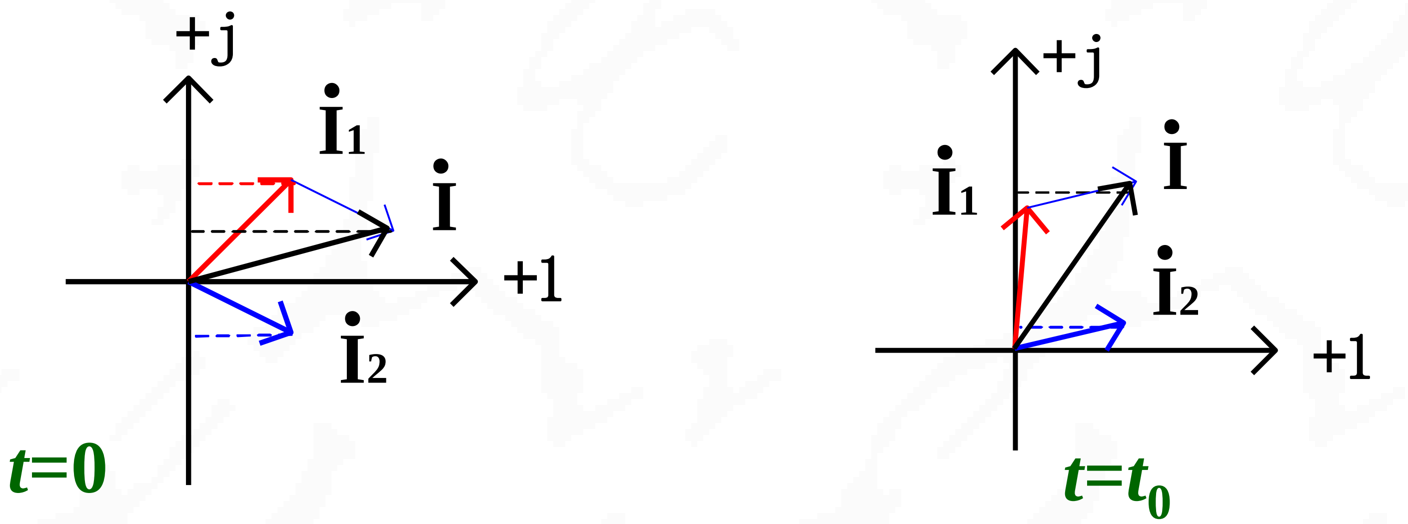
$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$$

证： $i = \sqrt{2} I \sin(\omega t + \psi) = \mathrm{Im}[\sqrt{2} I e^{j\psi} e^{j\omega t}] = \mathrm{Im}[\sqrt{2} \dot{I} e^{j\omega t}]$

$$i_1 + i_2 = \mathrm{Im}[\sqrt{2} I_1 e^{j\psi_1} e^{j\omega t}] + \mathrm{Im}[\sqrt{2} I_2 e^{j\psi_2} e^{j\omega t}]$$

$$= \mathrm{Im}[\sqrt{2}(I_1 e^{j\psi_1} + I_2 e^{j\psi_2}) e^{j\omega t}] = \mathrm{Im}[\sqrt{2}(\dot{I}_1 + \dot{I}_2) e^{j\omega t}]$$

✧ 相量相加的含义：



✧ 相量相加：按照平行四边形法则得到合成相量。

✧ 对于任意时刻，合成相量 $\dot{I}$ 在虚轴上的投影都等于 $\dot{I}_1$ 和 $\dot{I}_2$ 在虚轴上的投影。

✧ 只有同频率量才可进行相量运算。

〖例2〗 已知 $i_1=\sqrt{2}\times 4\sin(\omega t+30°)\ \text{A}$, $i_2=\sqrt{2}\times 3\sin(\omega t-60°)\ \text{A}$，求$i_1+i_2$。

〖解〗 ① 转换为相量形式。$\dot{I}_1=4\angle 30°$ $\dot{I}_2=3\angle -60°$

②用复数进行运算。

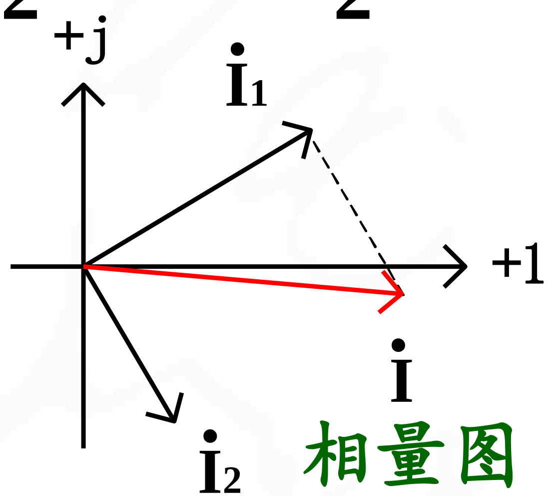
$$\dot{I}=\dot{I}_1+\dot{I}_2=4\angle 30°+3\angle -60°$$

$$=2\sqrt{3}+j2+\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\sqrt{3}j=(2\sqrt{3}+\frac{3}{2})+j(2-\frac{3}{2}\sqrt{3})$$

$$=5\angle -6.9°$$

③ 转换为瞬时表达式。

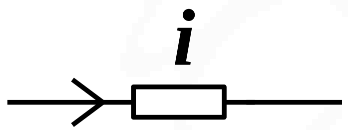
$$i=5\sqrt{2}\sin(\omega t-6.9°)\text{A}$$



相量图

五、正弦交流电路元件的相量模型

➤ 电阻元件

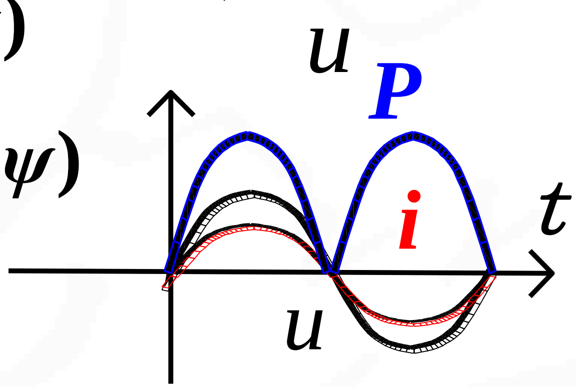


✧ 时域瞬时式：

$$i_R = \sqrt{2} I \sin(\omega t + \psi)$$

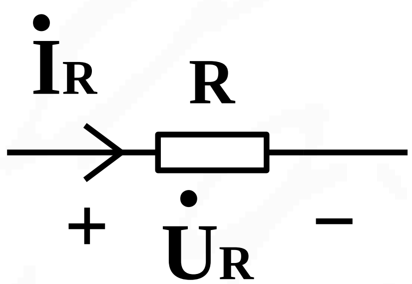
$$u_R = \sqrt{2} RI \sin(\omega t + \psi)$$

$$u_R = Ri_R$$



✧ 相量表达式：$\dot{U}_R = R\dot{I}_R$

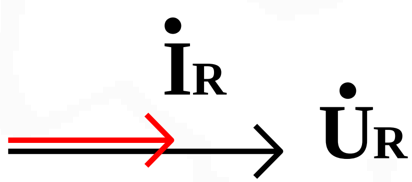
称为欧姆定律的相量形式



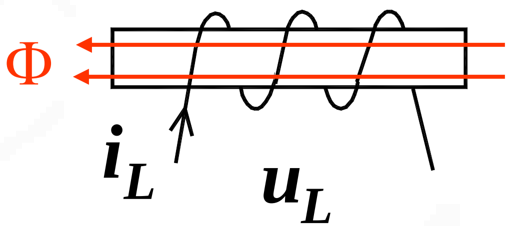
- 电阻电压与电流的有效值关系：

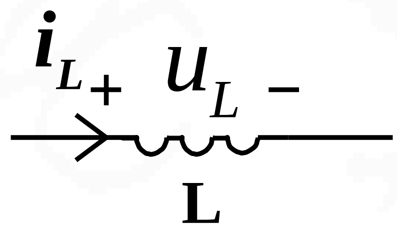
$U_R = RI_R$

- 电压与电流同相位。



➢ 电感元件





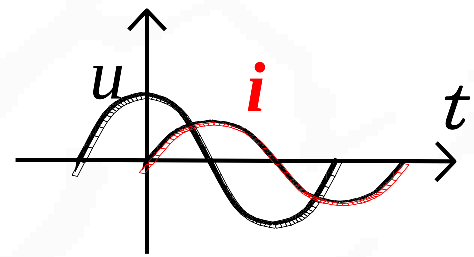
$$u_L = L\frac{di_L}{dt}$$

✧ 时域瞬时式：

$$i_L = \sqrt{2} I_L \sin \omega t$$

$$u_L = \sqrt{2}\omega L I_L \sin(\omega t + 90°)$$

$$= \sqrt{2} U_L \sin(\omega t + 90°)$$

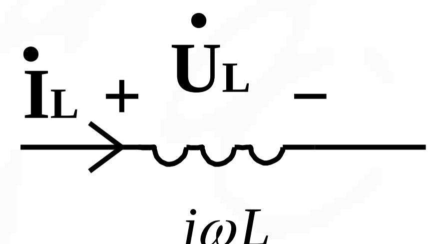


电感电压
超前电流90°

✧ 相量表达式：

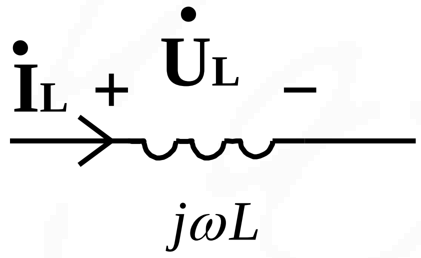
$$\dot{I}_L = I_L \angle 0$$

$$\dot{U}_L = \omega L I_L \angle 90°$$

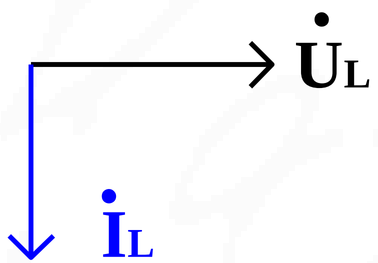


即 $\dot{U}_L = j\omega L \dot{I}_L = jX_L \dot{I}_L$ 欧姆定律相量形式

$$\dot{U}_L = j\omega L \dot{I}_L = jX_L \dot{I}_L$$



- $X_L=\omega L$，称为感抗，具有电阻的量纲（Ω）。
- L的大小由元件本身决定（类比于电阻R的大小，由材料、结构决定）。
- 但用一电感在不同频率的正弦电路中感抗是不同的（与电阻不同）。
- 电感电压与电流的有效值关系：
  $U_L= \omega L\ I_L = X_L\ I_L$
- 电感电压超前电流90°。



电感相量图

〖例1〗一线圈电感 $L=31.8\times10^{-3}\mathrm{H}$，求电压分别为 $u=10\sqrt{2}\sin 314t$ 和 $u=10\sqrt{2}\sin 314000t$ 时的电感电流。

〖解〗 1）当 $\omega=314\ \ rad/s\quad (f=50\ \mathrm{Hz})$

$$X_L=\omega L=314\times31.8\times10^{-3}=10\Omega$$

$$\dot I_L=\frac{\dot U_L}{jX_L}=\frac{10\angle 0^\circ}{j10}=1\angle -90^\circ\ \mathrm{A}\qquad i_L=\sqrt{2}\sin(314t-90^\circ)\ \mathrm{A}$$

2）当 $\omega=314000\ \ rad/s\quad (f=50\ \mathrm{kHz})$

$$X_L=\omega L=314000\times31.8\times10^{-3}=10000\Omega$$

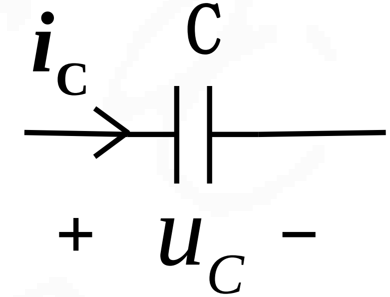
$$\dot I_L=\frac{\dot U_L}{jX_L}=\frac{10\angle 0^\circ}{j10000}=0.001\angle -90^\circ\ \mathrm{A}$$

$$i_L=0.001\sqrt{2}\sin(314000t-90^\circ)\ \mathrm{A}$$

➢ 电容元件

✧ 时域瞬时式：

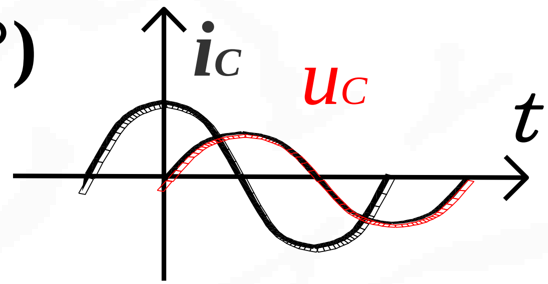
$$i_C = C\frac{du_C}{dt}$$



$$u_C = \sqrt{2}U_C \sin \omega t$$

$$i_C = C\frac{du_C}{dt} = \sqrt{2}U_C\omega C \sin(\omega t + 90°)$$

$$= \sqrt{2}I_C \sin(\omega t + 90°)$$

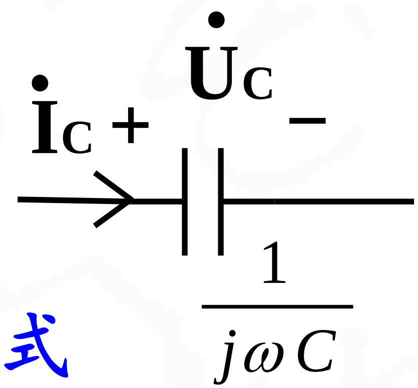


电容电压滞后电流90°

✧ 相量表达式： $\dot{U}_C = U_C\angle 0°$

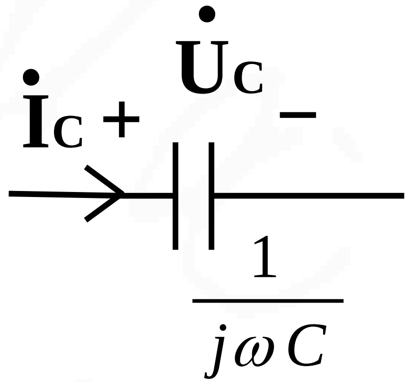
$$\dot{I}_C = U_C\omega C\angle 90° \qquad \dot{I}_C = j\omega C\dot{U}_C$$

即 $\dot{U}_C = \dfrac{\dot{I}_C}{j\omega C} = -jX_C\dot{I}_C$

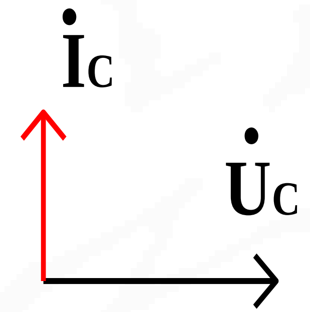


欧姆定律相量形式

$$\dot{U}_C = \frac{\dot{I}_C}{j\omega C} = -jX_C\dot{I}_C$$



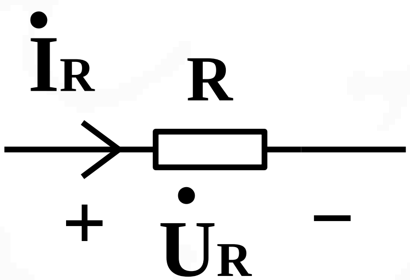
- $X_C = \frac{1}{\omega C}$，称为容抗，单位为欧姆（Ω）。
- 容抗与频率成反比。
- 电容电压与电流的有效值关系：
  $U_C = X_C I_C$
- 电容电压滞后电流90°。



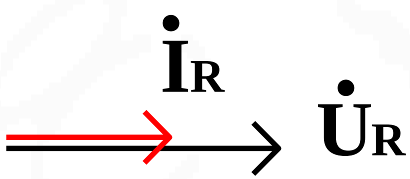
电容相量图

➢ 小结：正弦交流电路中的元件

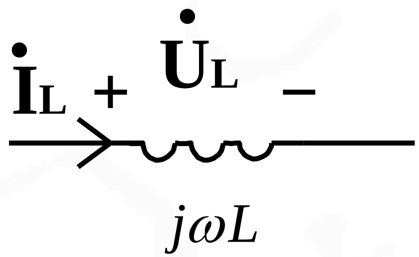
电阻



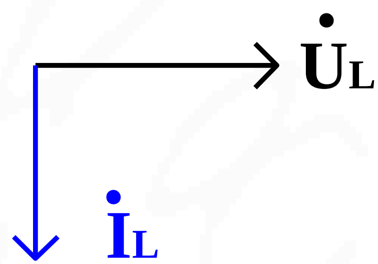
$$\dot{U}_R = R\dot{I}_R$$



电感

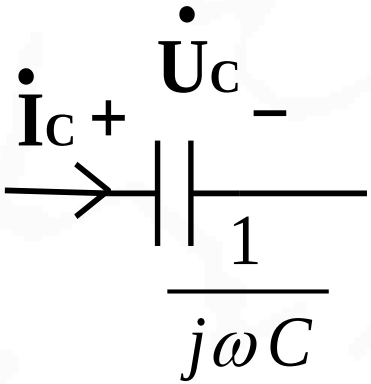


$$\dot{U}_L = j\omega L\dot{I}_L = jX_L\dot{I}_L$$

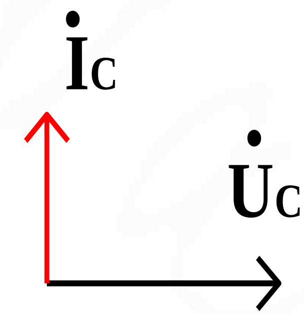


电感电压
超前电流90°

电容



$$\dot{U}_C = \frac{1}{j\omega C}\dot{I}_C = -jX_C\dot{I}_C$$



电容电压
滞后电流90°

六、基尔霍夫定律的相量形式

✧ 对于复杂的线性电路，如果所有激励源均为同一频率的正弦函数，则各支路的电流和电压都为与激励源有相同频率的正弦函数，都可以表示为相量形式，在电路计算中可采用相量计算的方法。

✧ 基尔霍夫节点电流定律：

时域表达式： $\Sigma i(t)=0$ 相量形式： $\Sigma \dot{I}=0$

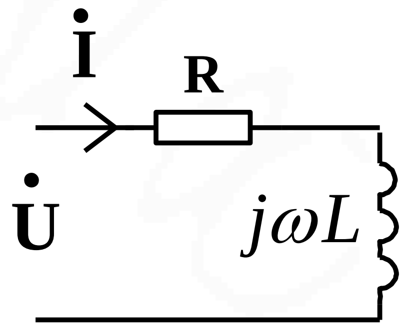
✧ 基尔霍夫回路电压定律：

时域表达式： $\Sigma u(t)=0$ 相量形式： $\Sigma \dot{U}=0$

✧ 将节点电流或回路电压的相量作成矢量图，可得到一个闭合的矢量多边形。

✧ 第4章（直流电路）中叙述的电路分析方法和电路定理是基于KCL和KVL导出的，而这两个基本定律对交流电路依然成立。因此这些分析方法和定理对于交流电路均成立，且在交流电路中可用相量形式表示。在今后的分析中将直接引用这些电路分析方法和电路定理。

〖例1〗 设 $R=\omega L=100\Omega, I=1\text{A}$ ，求电源电压U。



〖解〗

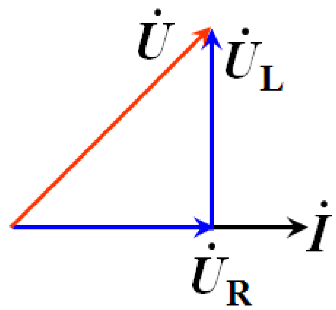
设电流I的初相位为0，即 $\dot{I}=1\angle 0^\circ$ A

$$\dot{U}_R=\dot{I}\times R=100\angle 0^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U}_L=j\omega L\dot{I}=100\angle 90^\circ \text{ V}$$

$$\dot{U}=\dot{U}_R+\dot{U}_L=100\angle 0^\circ+100\angle 90^\circ$$

$$=100+j100=100\sqrt{2}\angle 45^\circ \text{ V}$$



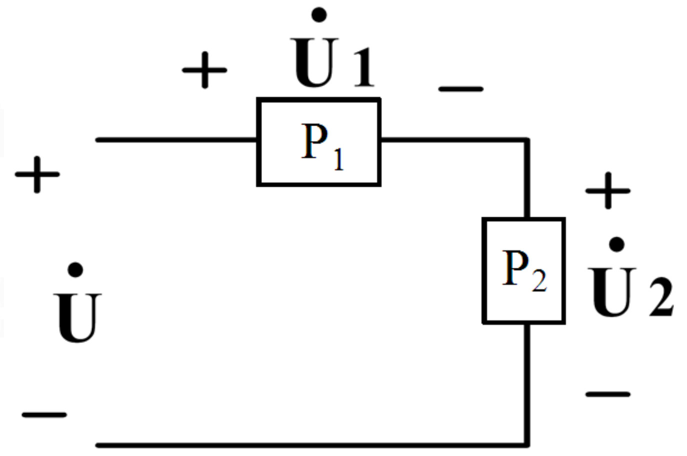
所以电源电压有效值U=141.4V。

注意： $U_R=100\text{V}, U_L=100\text{V}, U=141\text{V}\Rightarrow U\neq U_R+U_L$

正弦电路相量形式满足KCL、KVL，但有效值不能简单相加。

〖例2〗相量相减

已知 $\dot{U}=220\angle 0^{\circ}\text{V}$，$\dot{U}_1=100\angle 60^{\circ}\text{V}$，求 $\dot{U}_2$ 的值。

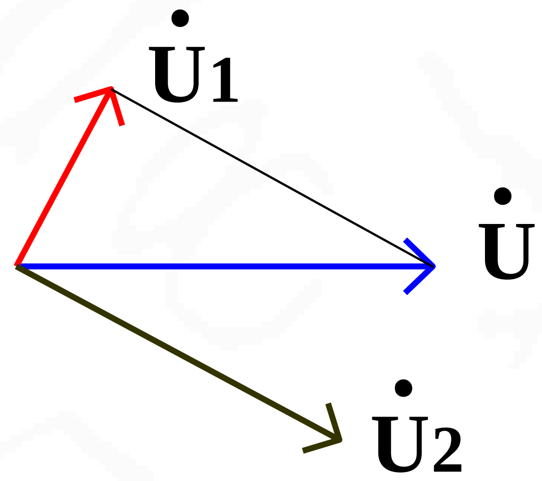


〖解〗 $\dot{U}=\dot{U}_1+\dot{U}_2$

$$\dot{U}_2=\dot{U}-\dot{U}_1=220\angle 0^{\circ}-100\angle 60^{\circ}$$

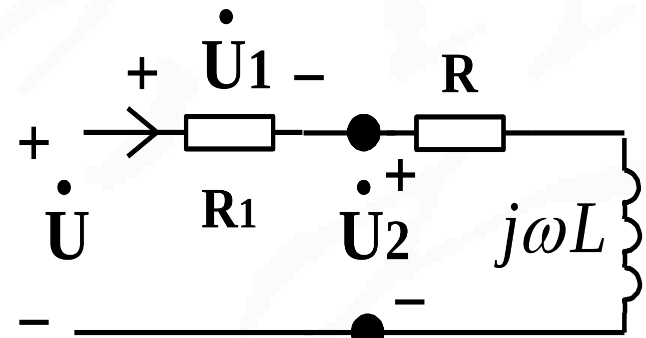
$$=220-(50+j86.6)=170-j86.6=190.8\angle -27^{\circ}\text{V}$$

相量图为：



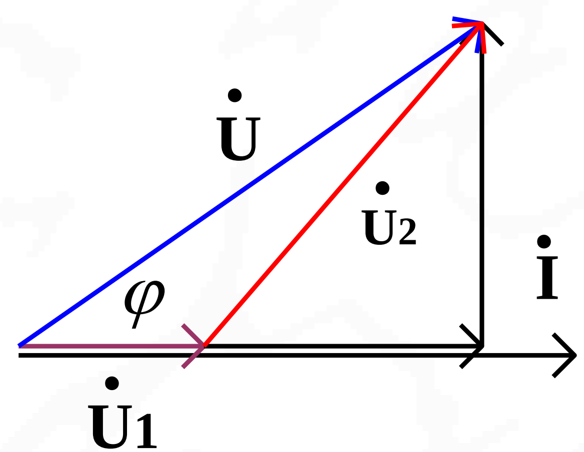
〖例3〗相量的几何关系

为测量一只线圈的电感和电阻，将它与电阻R_1串联后接入频率为50Hz的正弦电源，如图所示，测得外加电压 $U=200\text{V}$，电阻R_1上电压 $U_1=100\text{V}$，线圈两端电压 $U_2=124\text{V}$。已知电阻 $R_1=100\Omega$，试求线圈的电阻R与电感L的值。

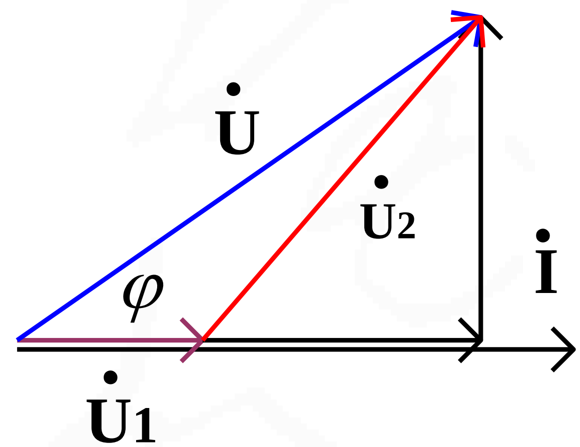


〖解〗

以电流作参考相量，分别作出电压相量，如图所示。图中电压相量组成一个闭合三角形。



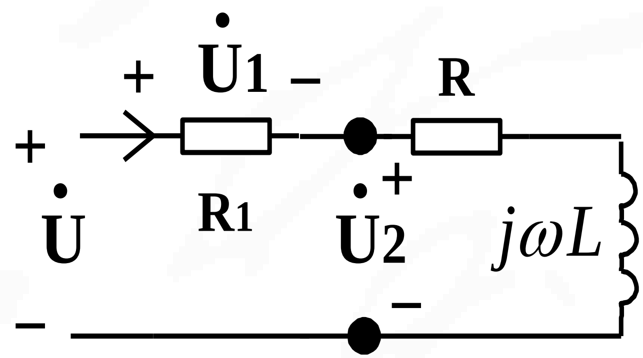
在相量图上，用余弦定理可求出 φ 角。



$$\cos\varphi=\frac{U^2+U_1^2-U_2^2}{2UU_1}$$

$$=\frac{200^2+100^2-124^2}{2\times200\times100}=0.866$$

$$\varphi=30°$$



$$I=\frac{U_1}{R_1}=\frac{100\text{V}}{100\Omega}=1\text{A}$$

$$L=\frac{U\sin\varphi}{\omega I}=\frac{200\times0.5}{314}=0.318\text{H}$$

$$R=\frac{U\cos\varphi-U_1}{I}=\frac{200\times0.866-100}{1}\Omega=73.2\Omega$$

七、阻抗、导纳及等效转换

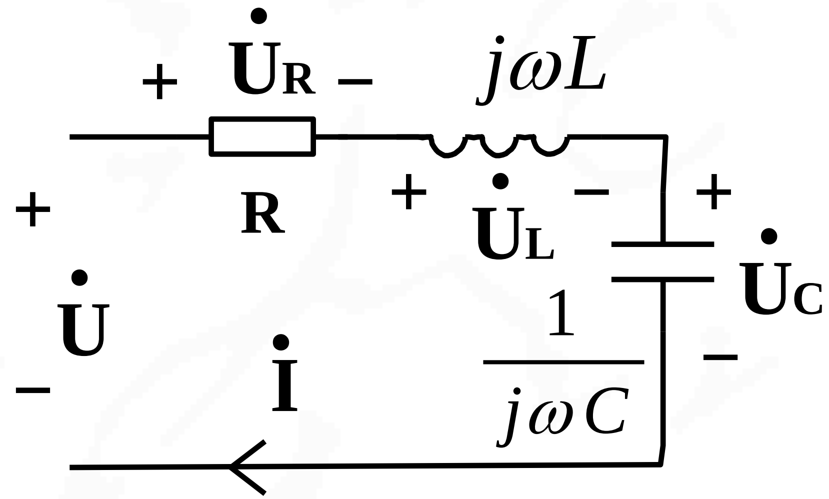
- RLC串联电路

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C$$

$$= R\dot{I} + j\omega L\dot{I} + \frac{1}{j\omega C}\dot{I}$$

$$= [R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})] \times \dot{I}$$

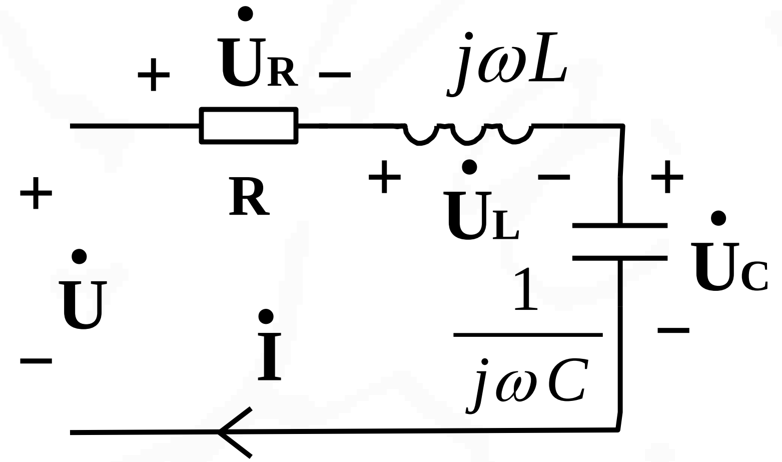
$$= Z\dot{I}$$



阻抗： $Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$

$$= R + j(X_L - X_C) = R + jX = z\angle\varphi$$

$$Z = R + jX = R + j(X_L - X_C)$$

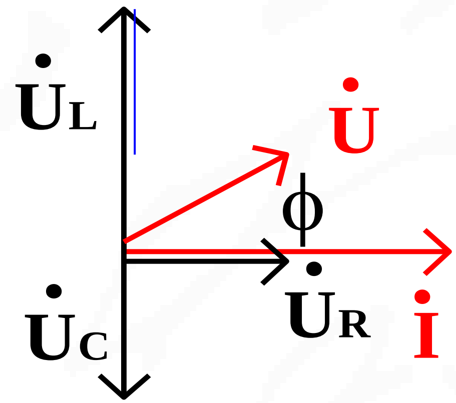


Z复数阻抗： R电阻

X电抗： X_L感抗

X_C容抗

$$Z = R + jX = z\angle\varphi$$

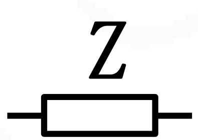


相量图

$$\begin{cases} \text{阻抗模：} & z = \sqrt{R^2 + X^2} \\ \text{阻抗角：} & \varphi = tg^{-1}\dfrac{X}{R} \end{cases}$$

✧ 当$X>0$（$\varphi > 0$）时，Z为感性阻抗

✧ 当$X<0$（$\varphi < 0$）时，Z为容性阻抗

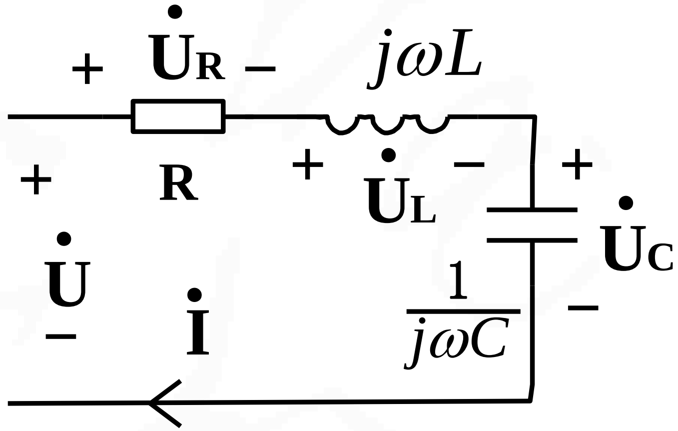


阻抗符号

〖例1〗

已知 $u = 22\sqrt{2}\sin 314t\ \text{V}$，$R = 12\Omega,\ L = 210\text{mH},\ C = 64\mu\text{F}$

求 i、u_R、u_L、u_C。



〖解〗

$$X_L = \omega L = 314 \times 210 \times 10^{-3} = 65.94\Omega$$

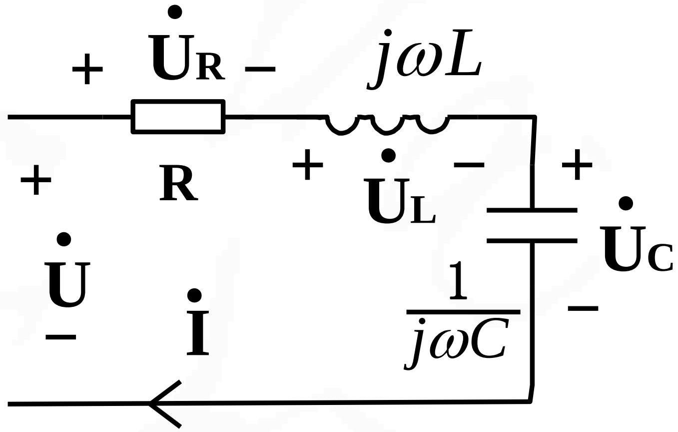
$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \times 64 \times 10^{-6}} = 49.76\Omega$$

$$Z = R + j(X_L - X_C) = 12 + j16.18 = 20.14\angle 53.44°\Omega$$

已知：$\dot{U} = 22\angle 0°\ \text{V}$

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{22\angle 0°}{20.14\angle 53.44°} = 1.09\angle -53.44°\ \text{A}$$

$$i = 1.09\sqrt{2}\sin(314t - 53.44°)\ \text{A}$$



$$\dot{U}_R = R \times \dot{I} = 12 \times 1.09\angle -53.44°$$
$$= 13.11\angle -53.44°\ \text{V}$$

$$u_R = 13.11\sqrt{2}\sin(314t - 53.44°)\ \text{V}$$

$$\dot{U}_L = jX_L\dot{I} = j65.94 \times 1.09\angle -53.44° = 71.8\angle 35.56°\ \text{V}$$

$$u_L = 7.18\sqrt{2}\sin(314t + 35.56°)\ \text{V}$$

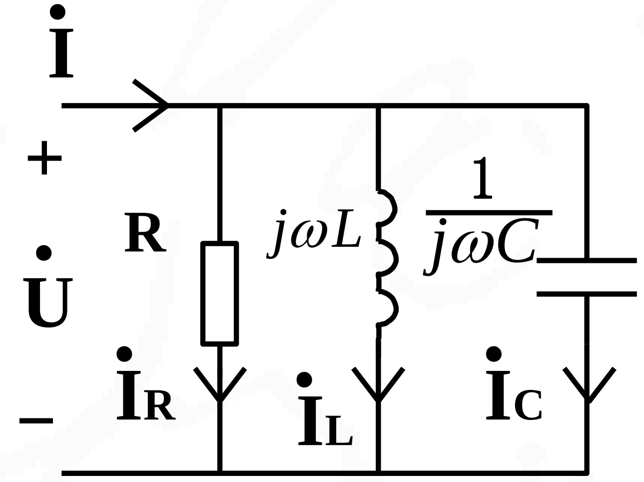
$$\dot{U}_C = -jX_C\dot{I} = -j49.76 \times 1.09\angle -53.44° = 54.24\angle -143.44°\ \text{V}$$

$$u_C = 54.24\sqrt{2}\sin(314t - 143.44°)\ \text{V}$$

➢ RLC并联电路

$$\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_L + \dot{I}_C$$

$$= \dot{U}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C\right)$$



导纳：

$$Y = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C = \frac{1}{R} - j\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right) = G - jB$$

Y复数导纳： G电导

B电纳： B_L感纳

B_C容纳

$$B_L = \frac{1}{\omega L} = \frac{1}{X_L}$$

$$B_C = \omega C = \frac{1}{X_C}$$

小结：阻抗与导纳

	阻抗	导纳
电阻	$Z_R = R$	$Y_R = \frac{1}{R} = G$
电感	$Z_L = j\omega L = jX_L$	$Y_L = \frac{1}{j\omega L} = -jB_L$
电容	$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = -jX_C$	$Y_C = j\omega C = jB_C$
串联	$Z = Z_1 + Z_2$	$Y = \frac{Y_1 Y_2}{Y_1 + Y_2}$
并联	$Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$	$Y = Y_1 + Y_2$
感性负载	$Z = R + jX,\ X > 0$	$Y = G - jB,\ B > 0$
容性负载	$Z = R + jX,\ X < 0$	$Y = G - jB,\ B < 0$

无源一端口网络等效

✧ 任意无源网络在**正弦激励**下可等效成为一个入端阻抗Z或导纳Y。

✧ 入端阻抗与导纳互为倒数： $Y = \frac{1}{Z}$

✧ 互换关系为：

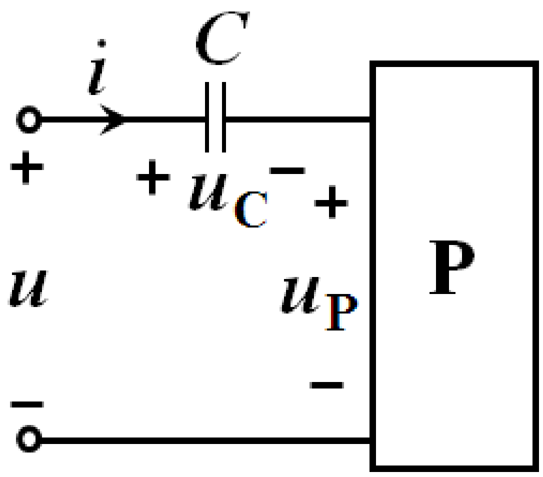
$$Z = R + jX \qquad R = \frac{G}{G^2 + B^2} \qquad X = \frac{B}{G^2 + B^2}$$

$$Y = G - jB \qquad G = \frac{R}{R^2 + X^2} \qquad B = \frac{X}{R^2 + X^2}$$

✧ 需注意：一般情况下，G与R，B与X 不互为倒数。

〖例2〗

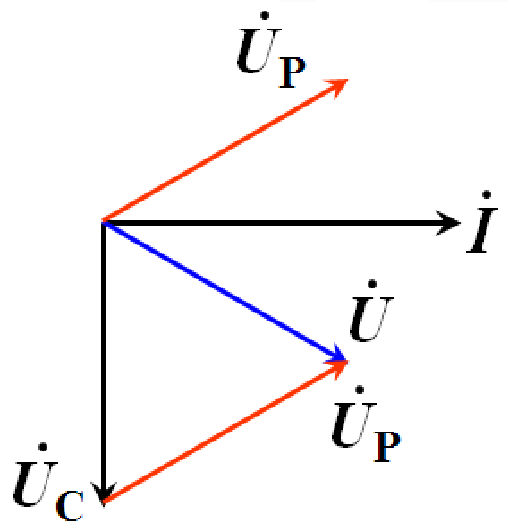
图示电路，$\omega = 1000$ rad/s，有效值 $I = 3$A，有效值 $U = U_C = U_P = 30$V。求网络 P 的等效并联参数。



〖解〗 以电流为参考相量画出相量图。

可知P为感性负载。

$$\dot{U}_C = 30\angle -90°\text{V},\ \dot{U}_P = 30\angle 30°\text{V}$$

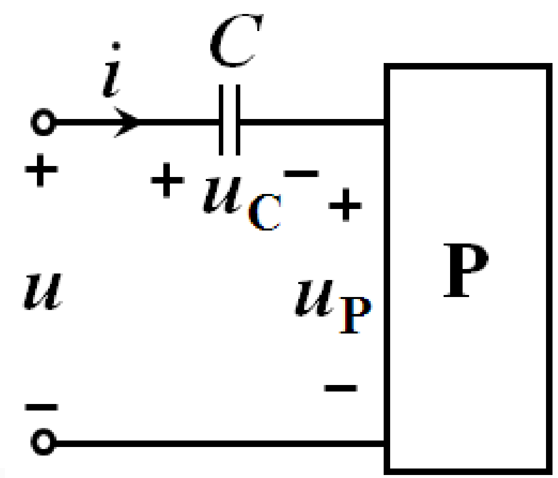


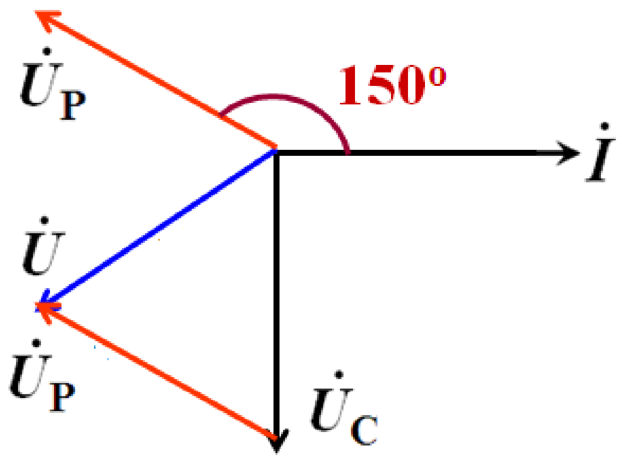
等效导纳为：

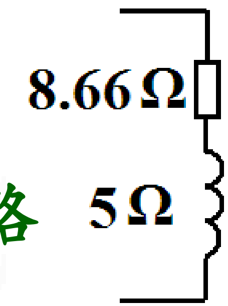
$$Y_P = \frac{\dot{I}}{\dot{U}_P} = \frac{3\angle 0°}{30\angle 30°} = 0.1\angle -30°$$

$$= 0.0866 - j0.05\ \text{S}$$

说明： 有效值 $U = U_C = U_P = 30V$ 的另一种情况如下图，此时阻抗角 $\varphi > 90°$（即电阻为负），通常是不可能的。





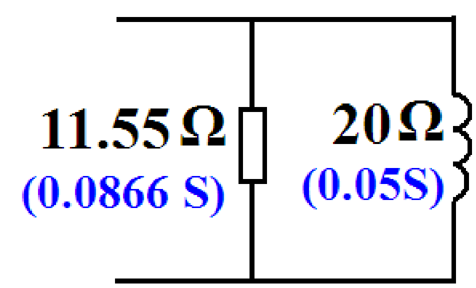


串联等效电路

串联等效参数为：

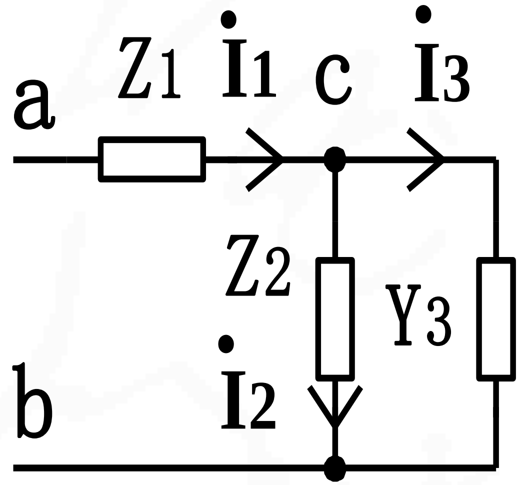
$$Z_P = \frac{\dot{U}_P}{\dot{I}} = \frac{30\angle 30°}{3\angle 0°} = 10\angle 30°$$

$$= 8.66 + j5\ \Omega$$



并联等效电路

〖例3〗



已知 $Z_1=(4+j10)\Omega$ ，$Z_2=(8-j6)\ \Omega, Y_3=-j0.12\ \text{S}$，求该电路的入端阻抗。若外加电压 $u=\sqrt{2}\times 220\sin\omega t\ \text{V}$，求各支路电流。

〖解〗先求入端阻抗。

$$Y_2=\frac{1}{Z_2}=\frac{1}{8-j6}=(0.08+j0.06)\ \text{S}$$

$$Y_{cb}=Y_2+Y_3=0.08+j0.06-j0.12=0.08-j0.06$$

$$=0.1\angle-36.9^\circ\ \text{S}$$

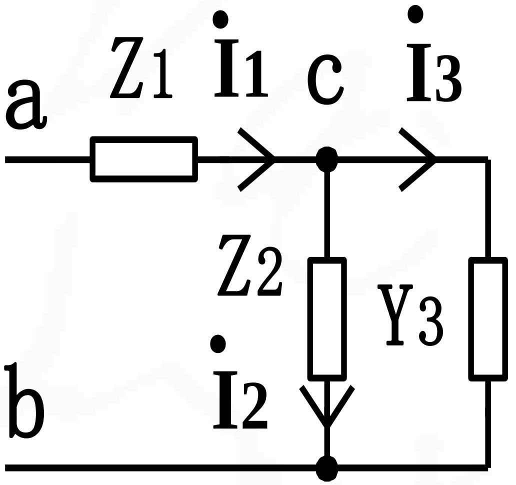
$$Z_{cb}=\frac{1}{Y_{cb}}=10\angle 36.9^\circ=(8+j6)\Omega$$

入端阻抗为：

$$Z = Z_1 + Z_{cb} = 4 + j10 + 8 + j6$$

$$= 20\angle 53.1°\Omega$$

若 $\dot{U} = 220\angle 0°\ \text{V}$ 则



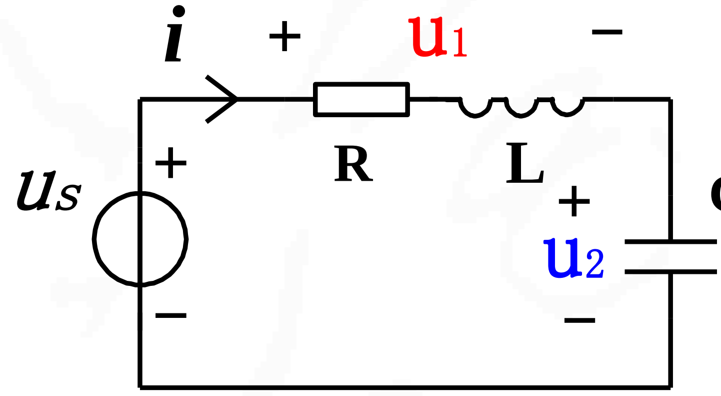
$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{Z} = \frac{220\angle 0°}{20\angle 53.1°} = 11\angle -53.1°\ \text{A}$$

$$\dot{U}_{cb} = \dot{I}_1 Z_{cb} = 11\angle -53.1° \times 10\angle 36.9° = 110\angle -16.2°\ \text{V}$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{cb}}{Z_2} = 11\angle 20.7°\text{A}$$

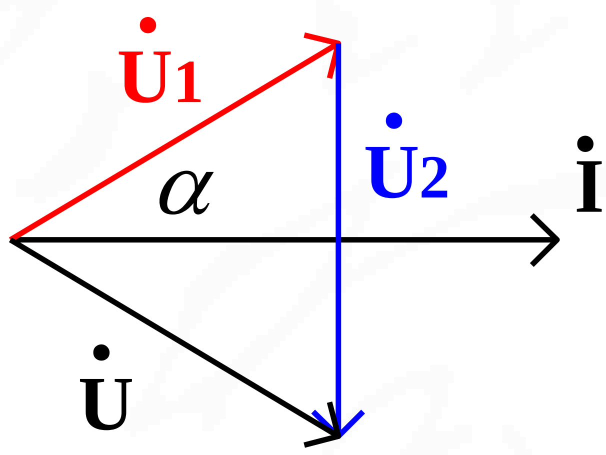
$$\dot{I}_3 = \dot{U}_{cb} Y_3 = 13.2\angle -106.2°\text{A}$$

〖例4〗已知 $\omega = 1000$ rad/s ，电压 $U_s = 200$ V，电流 I=2A，$U_1 = U_2 = 200$V，求 R、L、C的值。



〖解〗以电流为参考相量作相量图，

由电压值得：α=30°



$$U_R = U_1 \times \cos\alpha = 100\sqrt{3}\ \text{V}$$

$$U_L = U_1 \times \sin\alpha = 100\ \text{V}$$

$$R = \frac{U_R}{I} = \frac{100\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3}\ \Omega$$

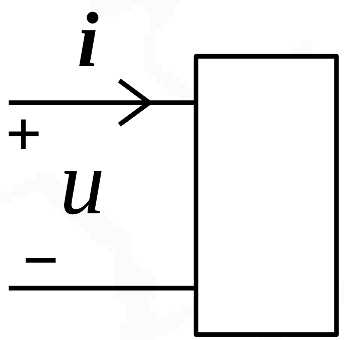
$$L = \frac{U_L}{\omega I} = \frac{100}{2000} = 50\text{mH}$$

$$C = \frac{I}{\omega U_C} = \frac{2}{200000} = 10\mu\text{F}$$

八、正弦交流电路的功率

➢ 瞬时功率

设电压和电流取关联参考方向。



$$u(t)=\sqrt{2}U\sin(\omega t+\psi_u)$$

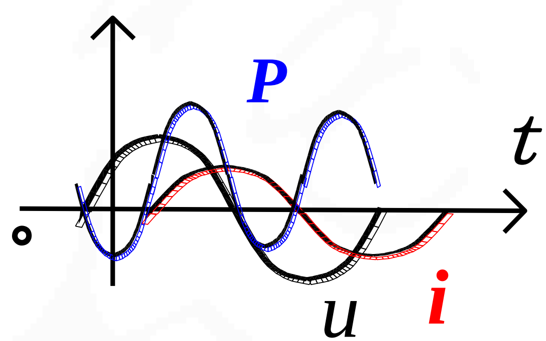
$$i(t)=\sqrt{2}I\sin(\omega t+\psi_i)$$

$$p=u(t)i(t)=\sqrt{2}U\sin(\omega t+\psi_u)\times\sqrt{2}I\sin(\omega t+\psi_i)$$

$$=UI\cos(\psi_u-\psi_i)-UI\cos(2\omega t+\psi_u+\psi_i)$$

✧ 瞬时功率可分为恒定分量与二倍角频率变化的正弦分量。

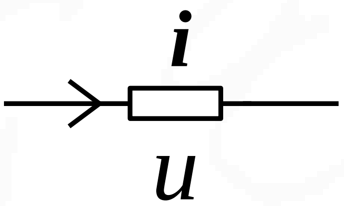
✧ 瞬时功率为正值表示正在吸收功率。负值表示正在输出功率（将原来储存的能量送回电网）。



电阻的瞬时功率：

设： $i_R = \sqrt{2} I_R \sin(\omega t + \psi)$

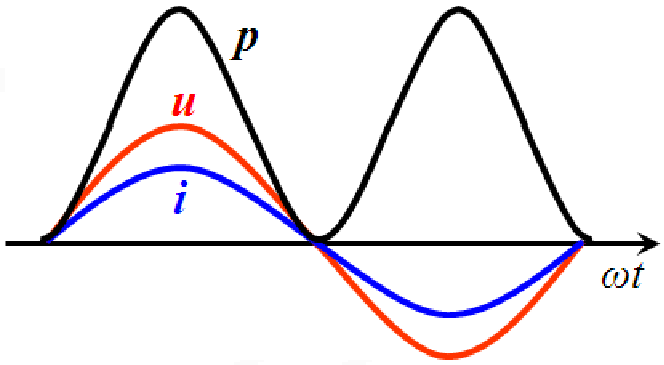
$u_R = \sqrt{2} U_R \sin(\omega t + \psi)$



则电阻瞬时功率为：

$$p_R = i_R u_R = 2 U_R I_R \sin^2(\omega t + \psi)$$

$$= U_R I_R [1 - \cos 2(\omega t + \psi)]$$

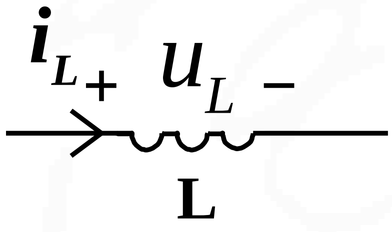


✧ 瞬时功率总是大于或等于0，说明**电阻是耗能元件**。

电感的瞬时功率：

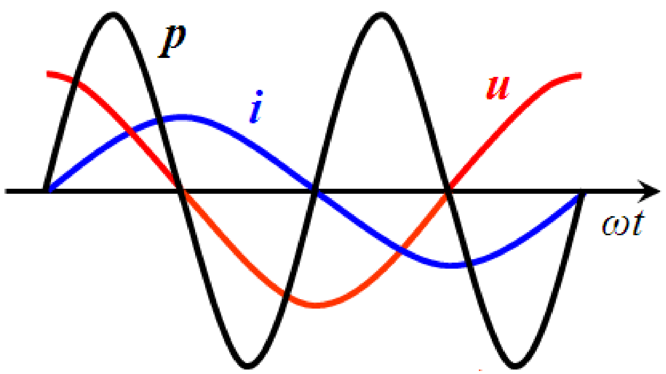
设：$i_L = \sqrt{2} I_L \sin \omega t$

$u_L = \sqrt{2} U_L \sin(\omega t + 90°)$



则电感瞬时功率为：

$$p_L = u_L i_L = \sqrt{2} I_L \sin \omega t \times \sqrt{2} U_L \sin(\omega t + 90°)$$
$$= U_L I_L \sin 2\omega t$$



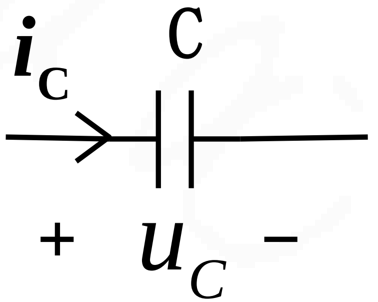
✧ 瞬时功率正负交替，说明电感交替吸收、发出功率。

✧ 瞬时功率均值为0，说明电感元件不会产生功率损耗。

电容的瞬时功率：

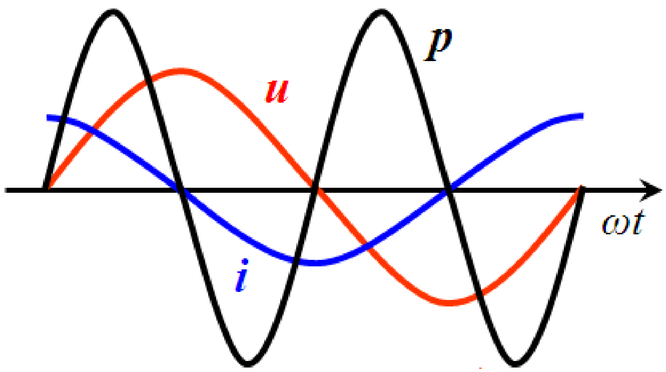
设： $u_C = \sqrt{2}U_C \sin\omega t$

$i_C = \sqrt{2}I_C \sin(\omega t + 90°)$



则电容瞬时功率为：

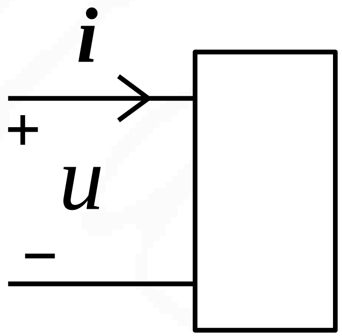
$$p_C = u_C i_C = \sqrt{2}U_C \sin\omega t \times \sqrt{2}I_C \sin(\omega t + 90°)$$
$$= U_C I_C \sin 2\omega t$$



✧ 瞬时功率正负交替，说明电容交替吸收、发出功率。

✧ 电容元件不会产生功率损耗。

➢ 有功功率（平均功率）



电路在一周期内吸收的平均功率，称为**有功功率**。它的值为：

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T[UI\cos(\psi_u-\psi_i)-UI\cos(2\omega t+\psi_u+\psi_i)]dt$$

$$=UI\cos(\psi_u-\psi_i)=UI\cos\varphi$$

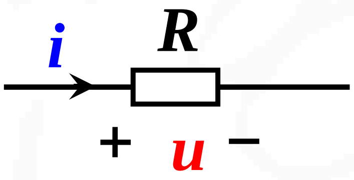
- U、I为电压电流有效值
- $\varphi=\psi_u-\psi_i$ 为电压电流相位差，称为**功率因数角**
- $\cos\varphi$ 称为**功率因数**

✧ 平均功率的大小，不仅与电压、电流的有效值大小有关，而且**还与电压电流的相位差，即功率因数角有关**。

✧ 基本元件的有功功率：

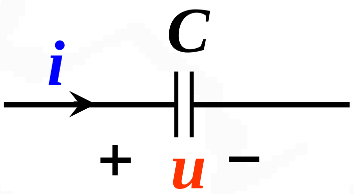
- 电阻平均功率：

$$P_R = UI$$ （消耗能量）



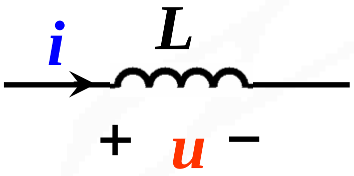
- 电容平均功率：

$$P_C = 0$$ （不消耗能量）



- 电感平均功率：

$$P_L = 0$$ （不消耗能量）

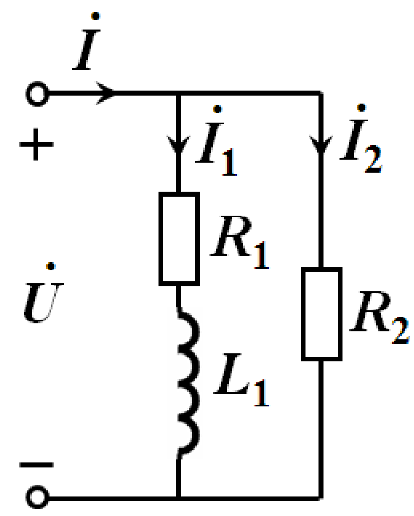


- 任意元件的平均功率：

$$P = UI\cos\varphi$$

〖例1〗

功率为40W、功率因数为0.5的日光灯和功率为100W的白炽灯并联在220V（50Hz）交流电源上，求总的功率因数。



〖解〗 日光灯等效模型为电阻与电感串联（R_1、L_1 ）。

$$I_1 = \frac{P}{U\cos\varphi} = \frac{40}{220\times 0.5} = \frac{4}{11}\ \text{A}$$

$$\varphi_1 = \cos^{-1}0.5 = 60^\circ \qquad \dot{I}_1 = \frac{4}{11}\angle -60^\circ\ \text{A} \qquad \dot{I}_2 = \frac{5}{11}\angle 0^\circ\ \text{A}$$

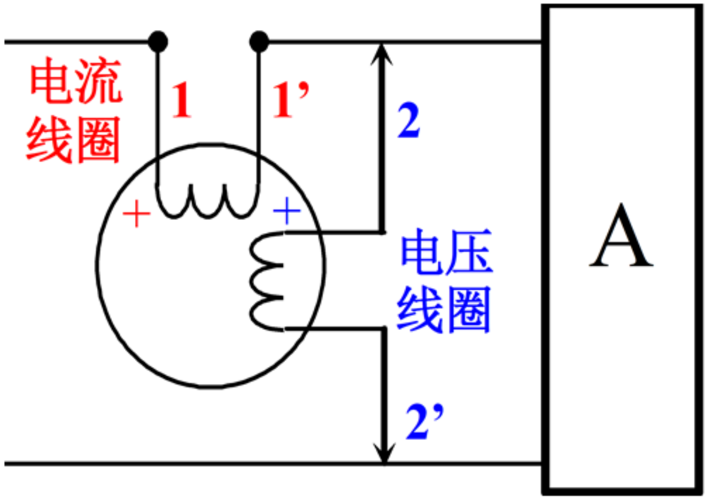
$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \frac{4}{11}\angle -60^\circ + \frac{5}{11}\angle 0^\circ = \frac{2}{11} - j\frac{2\sqrt{3}}{11} + \frac{5}{11}$$

$$= 0.71\angle -26.3^\circ\ \text{A}$$

$$\cos\varphi = \cos 26.3^\circ = 0.896$$

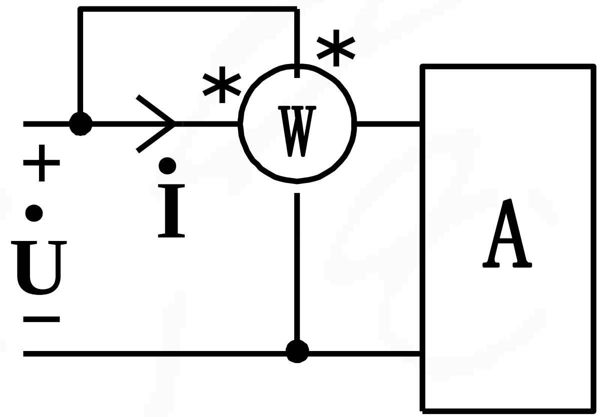
➢ 有功功率的测量

✧ 功率表有二组线圈：**电流线圈**与被测电流回路串联；**电压线圈**与被测端口电压并联。



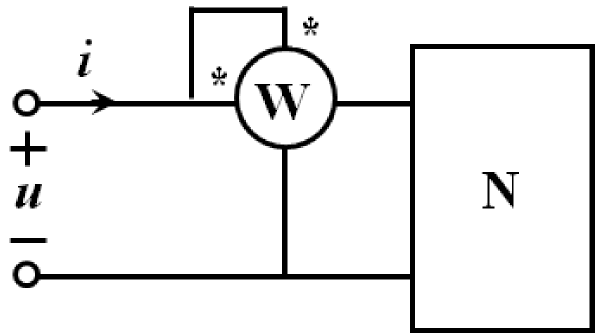
功率表线圈

✧ 功率表用**同名端**标记测量时的参考方向。功率表的读数等于以*号为参考方向用 $P = UI\cos\varphi$ 计算所得的数值

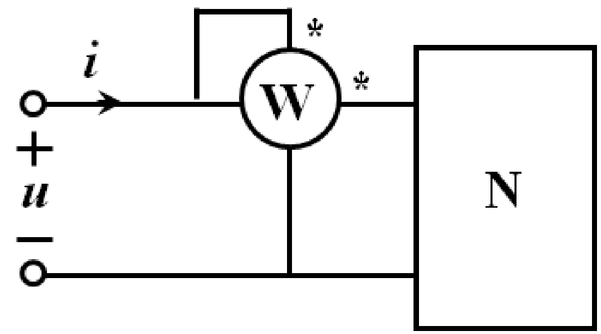


习惯表示方法

✧ 不同的同名端连接时：



$$W = UI\cos\varphi$$



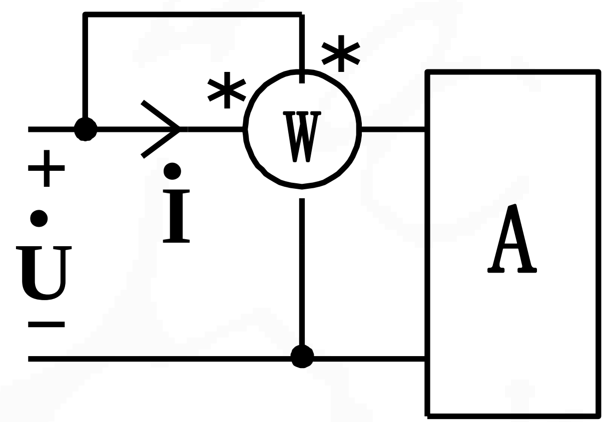
$$W = -UI\cos\varphi$$

✧ 若功率为负，模拟式功率表则无法读数（对调电流线圈端钮即可读数）；数字式功率表显示负数。

✧ 图示接线时，若

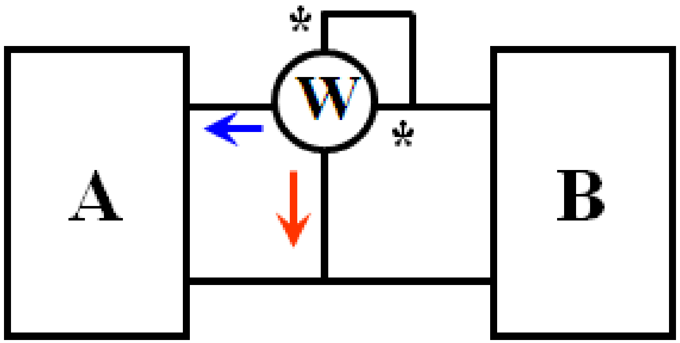
W>0：表示电路A吸收功率

W<0：表示电路A发出功率



〖示例〗

根据功率表连接方式和读数正负判断功率传输方向。



〖解〗

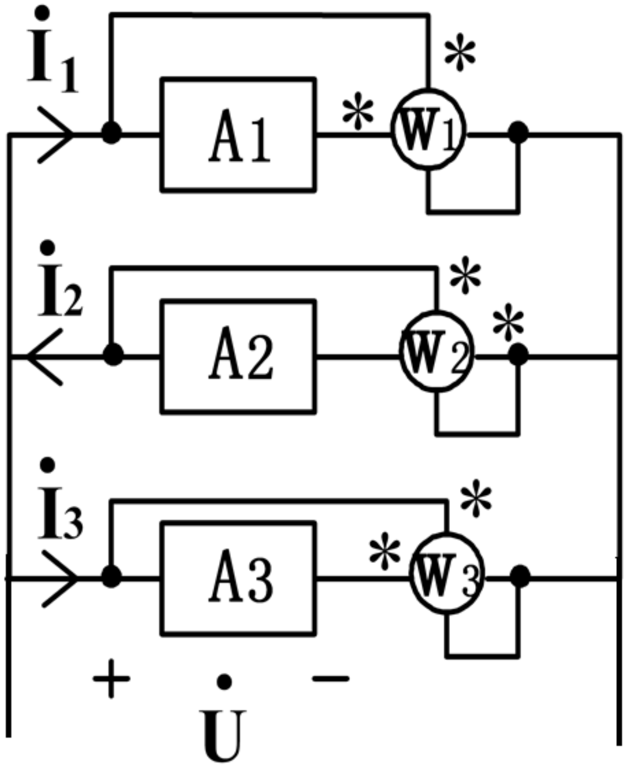
W读数为正时：

A吸收功率，B发出功率，即 B → A

W读数为负时：A → B

〖例2〗

图示电路中，A_1、A_2、A_3为一端口网络，线路电压电流参考方向及相量图如图，请判断一端口网络的功率流向（吸收或发出），及功率表读数（正或负）。

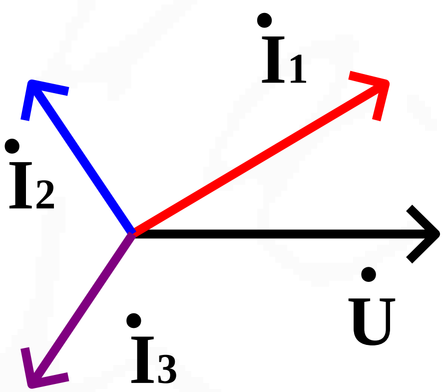


〖解〗

对于A_1：$\dot{U}$、$\dot{I}_1$ 为关联参考方向。

$\varphi_1 < 90°$　　$P_1 = UI_1\cos\varphi_1 > 0$

所以为吸收功率，功率表W_1为正。

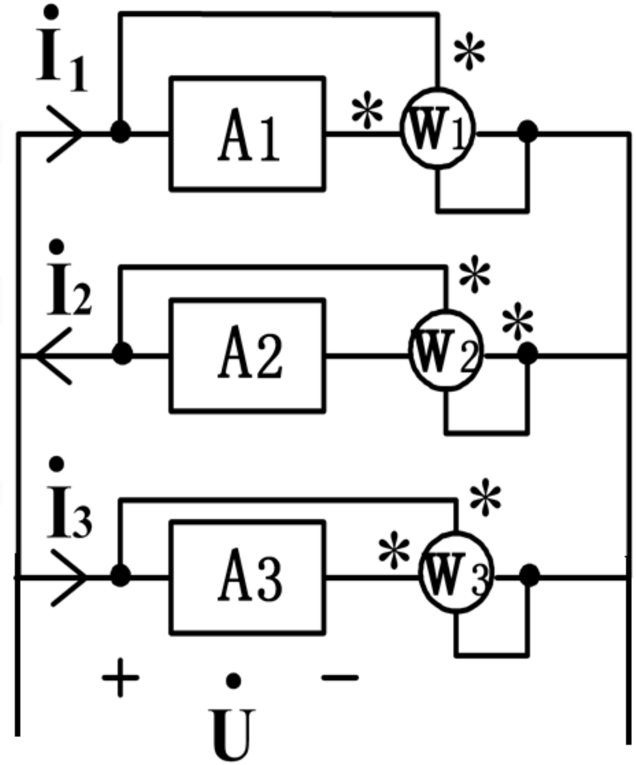


对于A_2：$\dot{U}$、$\dot{I}_2$ 为非关联方向。

$\varphi_2 > 90°$ $\quad P_2 = UI_2 \cos\varphi_2 < 0$

所以为吸收功率，

功率表W_2为负。

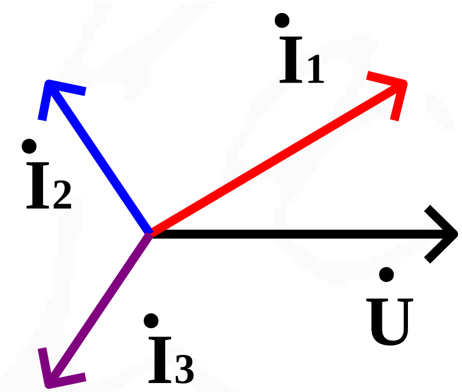


对于A_3：$\dot{U}$、$\dot{I}_3$ 为关联参考方向。

$\varphi_3 > 90°$ $\quad P_3 = UI_3 \cos\varphi_3 < 0$

所以为发出功率，

功率表W_3为负。



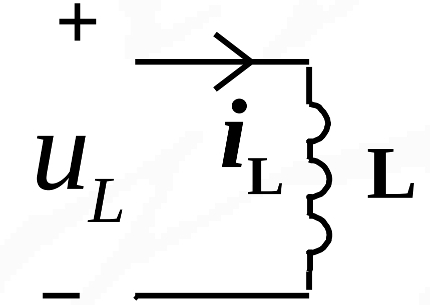
➢ 无功功率Q

✧ 无功功率 $Q = UI\sin\varphi$，单位为VAR（乏，即无功伏安）。

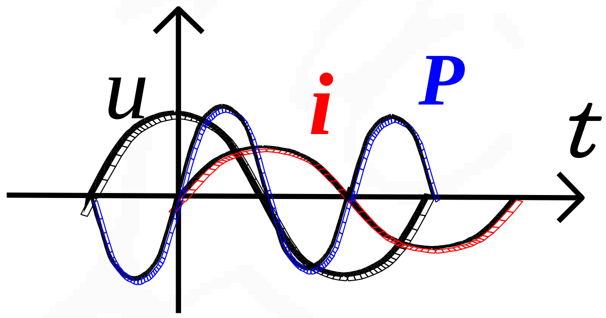
✧ 无功功率Q表示无源一端口网络与外界的能量交换能力 。以电感为例：

$$i_L = \sqrt{2} I_L \sin\omega t$$

$$u_L = \sqrt{2} U_L \sin(\omega t + 90°)$$



瞬时功率： $p_L = u_L i_L = U_L I_L \sin 2\omega t$

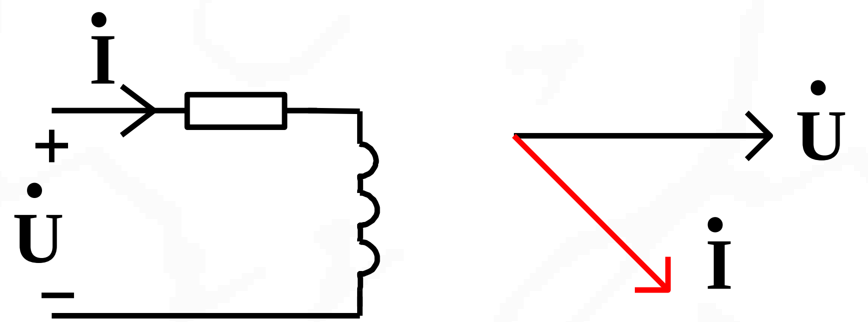


无功功率：

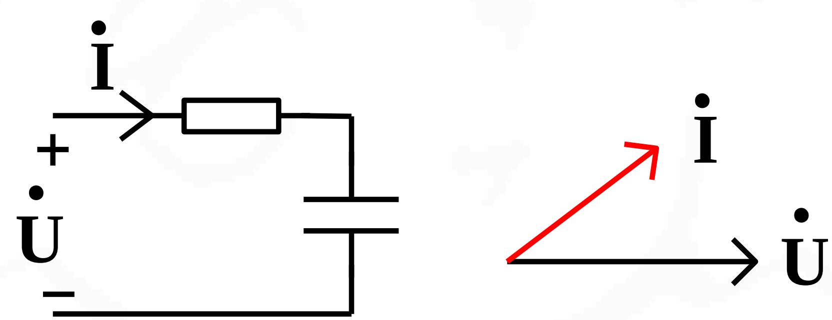
$$Q_L = U_L I_L \sin 90° = U_L I_L$$

是瞬时功率的最大值。

✧ 当负载为感性阻抗时，功率因数角 $\varphi > 0$，此时无功功率 $Q = UI\sin\varphi > 0$，称为吸收无功功率（感性无功功率）。

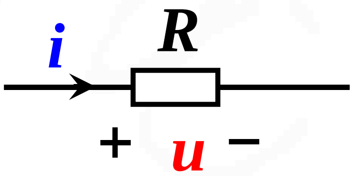


✧ 当负载为容性阻抗时，功率因数角 $\varphi < 0$，此时无功功率 $Q = UI\sin\varphi < 0$，称为发出无功功率（容性无功功率）。



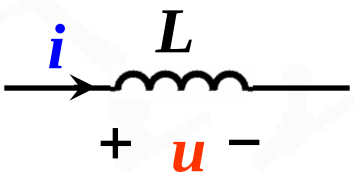
✧ 基本元件的无功功率

- 电阻无功功率：



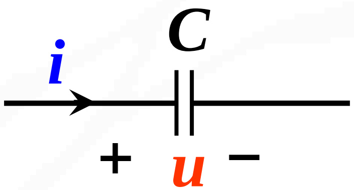
$$Q_R = 0$$ （与外界无能量交换）

- 电感无功功率：



$$Q_L = I^2 X_L > 0$$ （吸收无功功率）

- 电容无功功率：



$$Q_C = -I^2 X_C < 0$$ （发出无功功率）

- 任意元件的无功功率：

$$Q = UI \sin \varphi$$

➢ 视在功率S

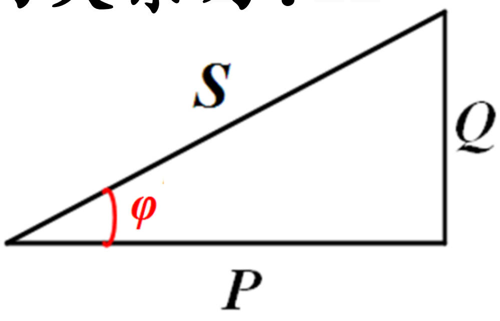
✧ 视在功率 $S = UI$，单位为VA（伏安,不能写作W）。

✧ 对于发电机、变压器等实际电气设备，额定值有额定工作电压与额定工作电流。因此它们的容量大小是由电压和电流的乘积而定。**视在功率表示电器装置的容量。**

✧ 有功功率、无功功率和视在功率的关系为：

$$P = S\cos\varphi \qquad Q = S\sin\varphi$$

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \qquad \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{Q}{P}$$



功率三角形

➢ 复数功率

在电力系统的计算中，为了使功率计算表达方便，常在正弦电路中用复数功率来表示一个元件或一端口网络的功率。复数功率定义为电压相量与电流共轭相量的乘积，即

$$\tilde{S} = \dot{U}\overset{*}{I} = UI\angle\psi_u - \psi_i = UI\cos\varphi + jUI\sin\varphi = P + jQ$$

✧ 复数功率的实部为有功功率，虚部为无功功率。模为视在功率，幅角是功率因数角。

✧ 对于无源一端口网络，其吸收的复数功率可表示为：

$$\tilde{S} = I^2 Z = U^2 \overset{*}{Y}$$

式中，$\overset{*}{Y}$ 为入端导纳的共轭复数。

➢ 复功率守恒

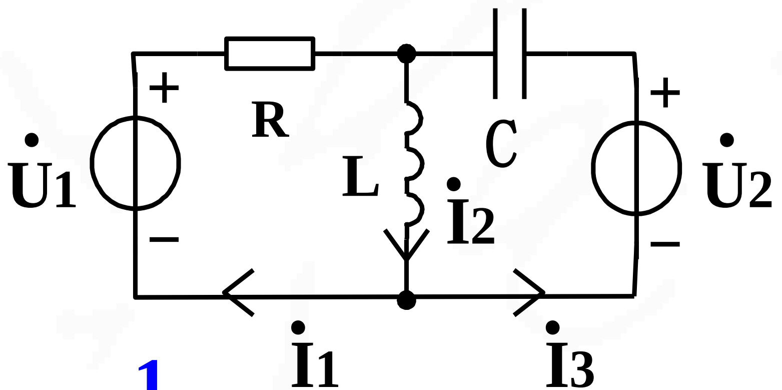
✧ 任一封闭正弦交流电网络，所有电源发出的复数功率等于所有负载吸收的复数功率。

$$\sum_k \tilde{S}_{源} = \sum_k \tilde{S}_{负载}$$

✧ 电网络的有功功率和无功功率分别守恒。

$$\sum_k P_{源} = \sum_k P_{负载} \qquad \sum_k Q_{源} = \sum_k Q_{负载}$$

〖示例〗以图示电路为例，

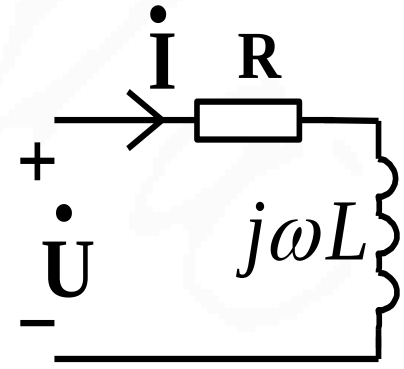


$$U_1 I_1 \cos\varphi_1 + U_2 I_3 \cos\varphi_2 = I_1{}^2 R$$

$$U_1 I_1 \sin\varphi_1 + U_2 I_3 \sin\varphi_2 = I_2{}^2 \omega L - I_3{}^2 \frac{1}{\omega C}$$

〖例3〗

已知 $R=\omega L=10\Omega, \dot{U}=200\angle 0°\text{V}$，求负载有功功率$P$、无功功率$Q$、视在功率$S$、复数功率 $\tilde{S}$ 、功率因数 $\cos\varphi$ 。



〖解〗

$$\dot{I}=\frac{\dot{U}}{R+j\omega L}=\frac{200\angle 0°}{10+j10}=10\sqrt{2}\angle -45°\ \text{A}$$

$$\cos\varphi=\cos 45°=0.707$$

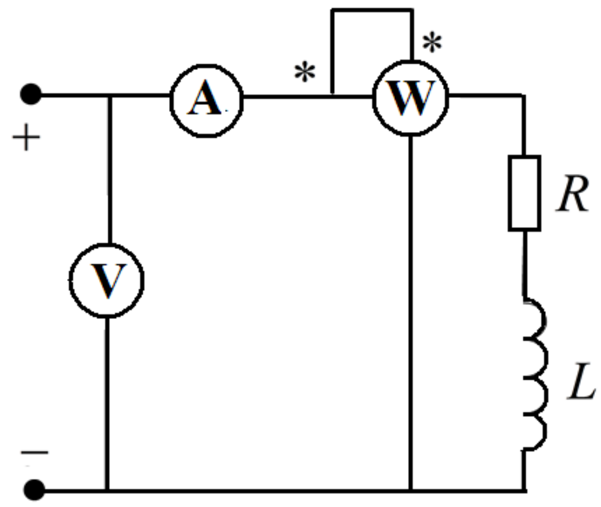
$$P=UI\cos\varphi=200\times 10\sqrt{2}\times\cos 45°=2000\text{W}$$

$$Q=UI\sin\varphi=200\times 10\sqrt{2}\times\sin 45°=2000\text{var}$$

$$S=UI=200\times 10\sqrt{2}=2000\sqrt{2}\ \text{VA}$$

$$\tilde{S}=\dot{U}\overset{*}{I}=200\times 10\sqrt{2}\angle 45°=2000\ \text{W}+j2000\ \text{var}$$

〖例4〗三表测量法



图示电路是三表测量法测电感线圈的电感和电阻参数。已知 f =50 Hz，电压表读数为100 V，电流表读数为1 A，功率表读数为80 W，求电阻R和电感 L的值。

〖解〗 $P = I^2 R = 1^2 \times R = 80\text{W}$ $\qquad R = 80\ \Omega$

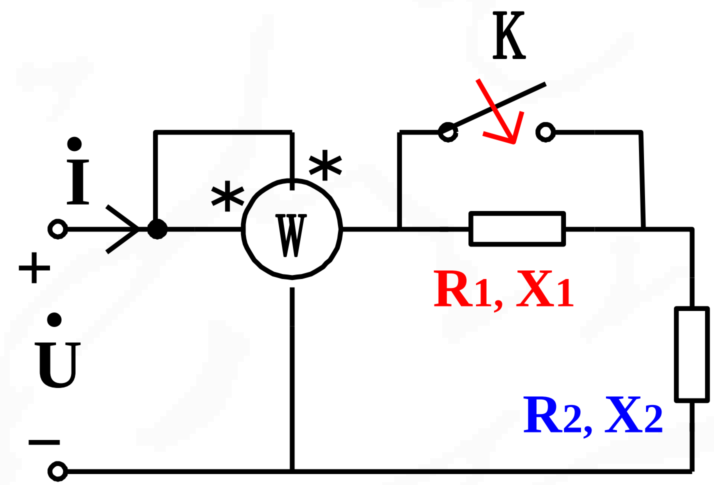
$$z = \frac{U}{I} = \frac{100}{1} = 100\ \Omega$$

$$X_L = \sqrt{z^2 - R^2} = \sqrt{100^2 - 80^2} = 60\ \Omega$$

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{60}{314} = 0.19\ \text{H}$$

〖例5〗

图示电路，阻抗 $Z_1=R_1+jX_1$，阻抗$Z_2=R_2+jX_2$，外加电压幅值 $U=220$V，$\omega=314$ rad/s。开关K闭合时，$I=10$ A，$P=1000$ W；K打开时，$I=12$ A，$P=1600$ W。求R_1、$X_1(X_1>0)$，R_2、X_2。



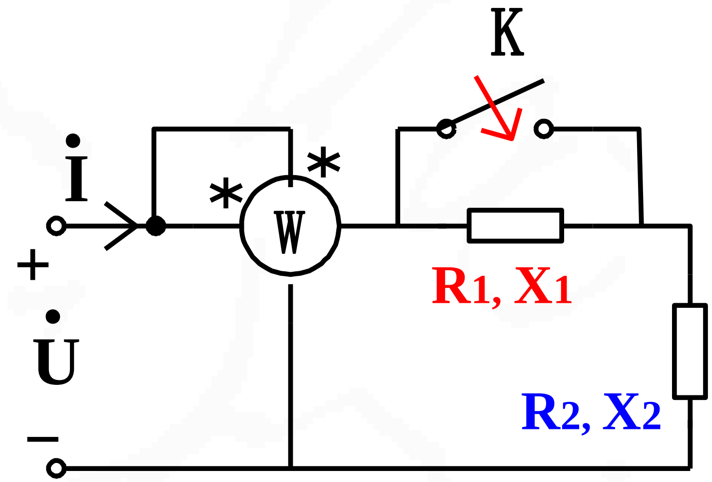
〖解〗K闭合时:

$$P=I^2R_2=10^2\times R_2=1000\text{W} \qquad R_2=10\ \Omega$$

$$z_2=\frac{U}{I}=\frac{220}{10}=22\ \Omega \qquad X_2=-\sqrt{z_2^2-R_2^2}=-19.6\ \Omega$$

注：Z_1为感性；Z_2在串联Z_1后电流I反而增加，说明Z_2为容性。

K 打开时：



$$P = I^2(R_1 + R_2)$$

$$R_1 + R_2 = \frac{P}{I^2} = \frac{1600}{12^2} = 11.11\ \Omega$$

$$R_1 = 1.11\ \Omega$$

$$z_1 + z_2 = \frac{U}{I} = \frac{220}{12} = 18.33\ \Omega$$

$$X_1 + X_2 = \pm\sqrt{(z_1 + z_2)^2 - (R_1 + R_2)^2}$$

$$= \sqrt{18.33^2 - 11.11^2} = \pm 14.6\ \Omega$$

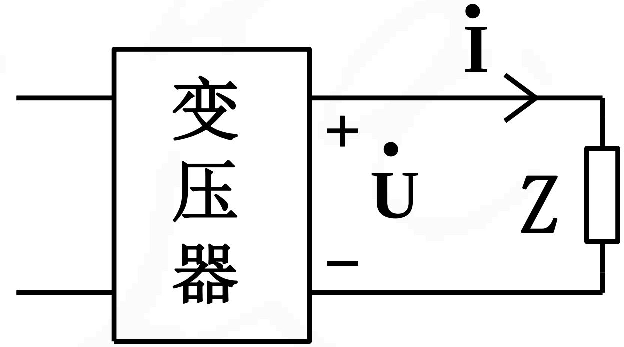
$$X_1 = \pm 14.6 - X_2 = \pm 14.6 + 19.6 = 5\ \Omega \text{ 或 } 34.2\ \Omega$$

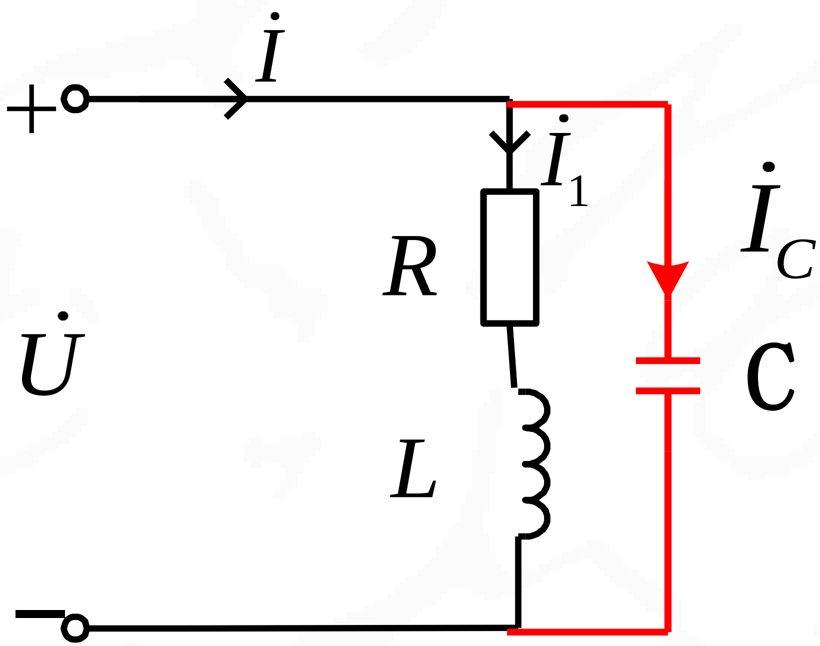
➢ 功率因数提高

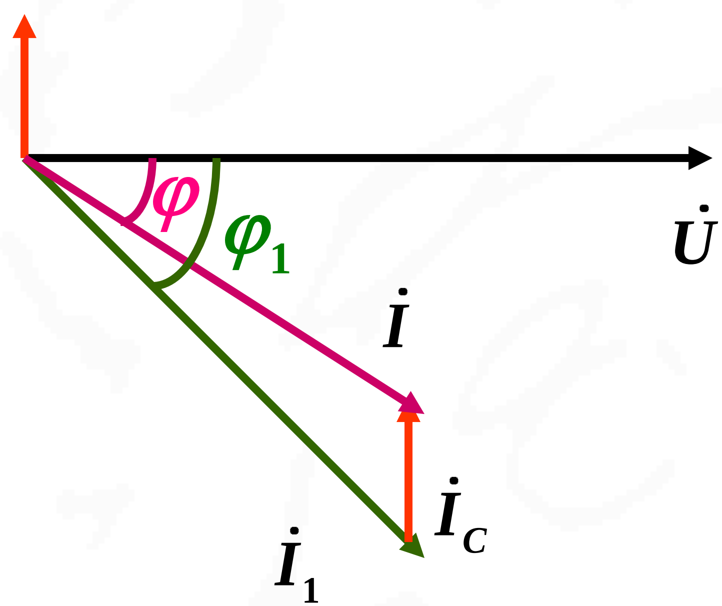
✧ 任何一种电气设备的容量决定于它的额定电压和额定电流的大小，但电气设备发出（对发电机）或消耗（对负载）的有功功率不仅与电压、电流有关，而且与功率因数有关。当电气设备的功率因数较低时，设备的利用率就低。

举例来说，一台额定容量为1000kVA的变压器为负载供电。如果负载的功率因数为0.7，则变压器最大输出700kW的有功功率。如果把负载功率因数提高到1，则变压器最大可输出1000kW的有功功率。这样设备的利用率就提高了。

✧ 在实际工业应用中，**多数用电负载是感性负载**（如三相感应电动机），使得负载端电流滞后于电压，功率因数角φ>0。要提高功率因数，最简便的措施是**在感性负载两端并联电容器**。



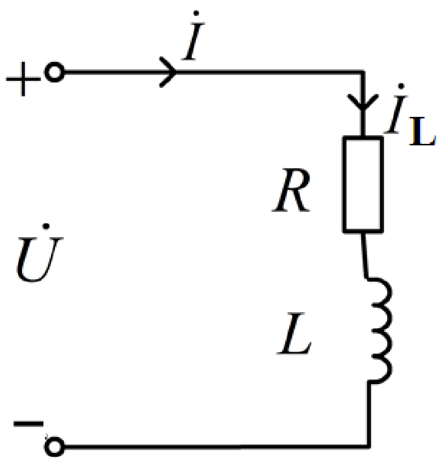




$\varphi < \varphi_1$　　$\cos\varphi > \cos\varphi_1$

〖示例〗通过并联电容来提高功率因数

设电力线路电源电压$U_S = 200$ V，最大容许电流100 A，电器的负载阻抗为R和L：$Z = R + j\omega L = 100 + j100\ \Omega$。



负载电流为：

$$\dot{I}_L = \frac{\dot{U}_s}{Z} = \frac{200\angle 0^\circ}{100\sqrt{2}\angle 45^\circ} = \sqrt{2}\angle -45^\circ \text{A}$$

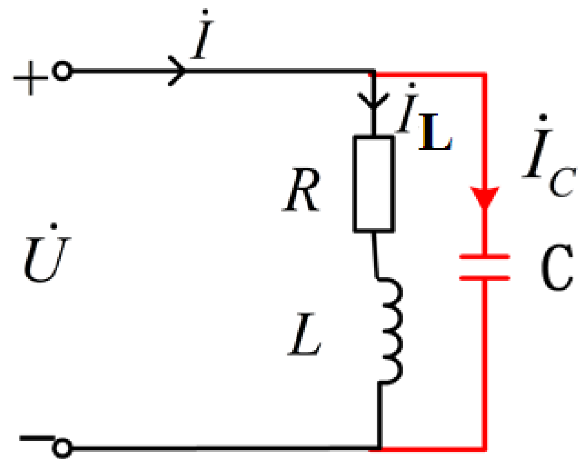
功率因数为：

$$\cos\varphi = \cos 45^\circ = 0.707$$

负载电流有效值为1.414 A，该100A线路在负载端可并联接入约70个电器负载。

若在负载端并联电容C，取 $\dfrac{1}{\omega C}=200\Omega$，则

电容电流为：



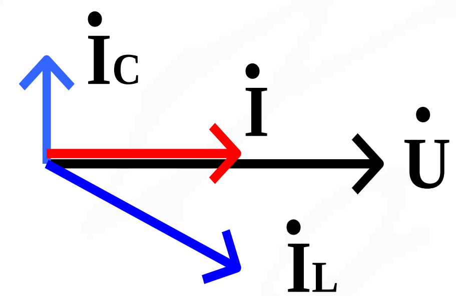
$$\dot{I}_C = j\omega C\dot{U}_S$$

$$= j\frac{1}{200}200\angle 0° = 1\angle 90°\text{A}$$

总电流为：

$$\dot{I} = \dot{I}_L + \dot{I}_C = \sqrt{2}\angle -45° + 1\angle 90°$$

$$= 1 - j1 + j1 = 1\angle 0°\text{A}$$



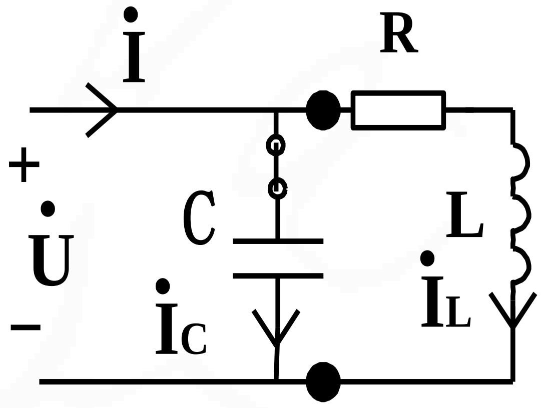
功率因数为：

$$\cos\varphi = \cos 0° = 1.0$$

负载电流有效值为1 A，同一线路（100A）在负载端可并联接入100个电器负载。

〖例6〗

有一负载接在电压10kV、50Hz的输电线上，有功功率为1000kW，功率因数为0.8，现需将功率因数提高至0.9，问应并联多大的电容?



〖解1〗根据电流补偿原理

电容并联前负载电流为:

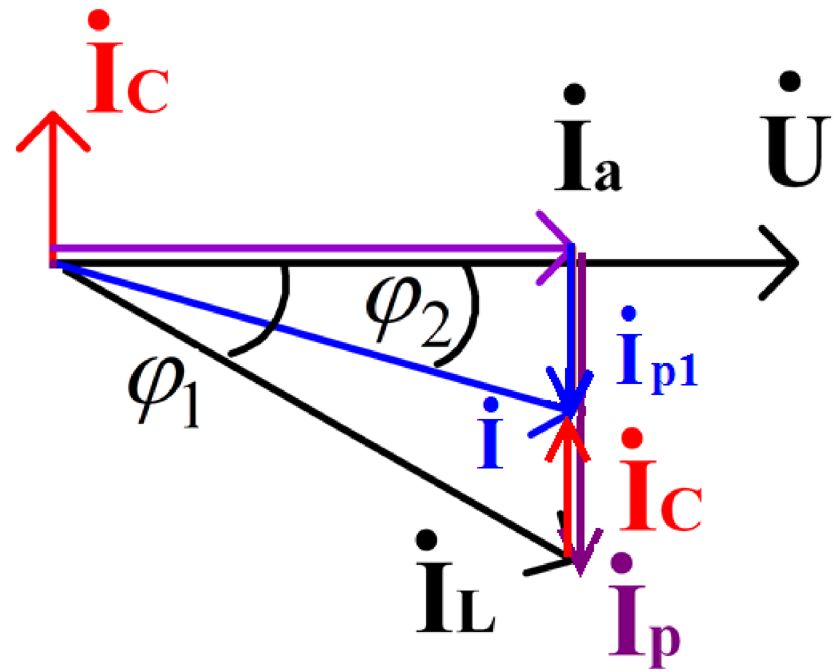
$$I_L = \frac{P}{U\cos\varphi_1} = \frac{1000\times10^3}{10\times10^3\times0.8} = 125\ \text{A}$$

并联电容后负载电流为:

$$I = \frac{P}{U\cos\varphi} = \frac{1000\times10^3}{10\times10^3\times0.9} = 111.1\ \text{A}$$

负载电流可以分解成两部分：①沿 $\dot{U}$ 方向的有功分量 $\dot{I}_a$，称为有功电流；②与 $\dot{U}$ 方向垂直的无功分量 $\dot{I}_p$，称为无功电流。

由于电容电流与电压 $\dot{U}$ 垂直，所以电容补偿前与补偿后的有功电流不变，而无功电流之差即为电容电流。



电容并联前，

$$\varphi_1 = \cos^{-1} 0.8 = 36.9°$$

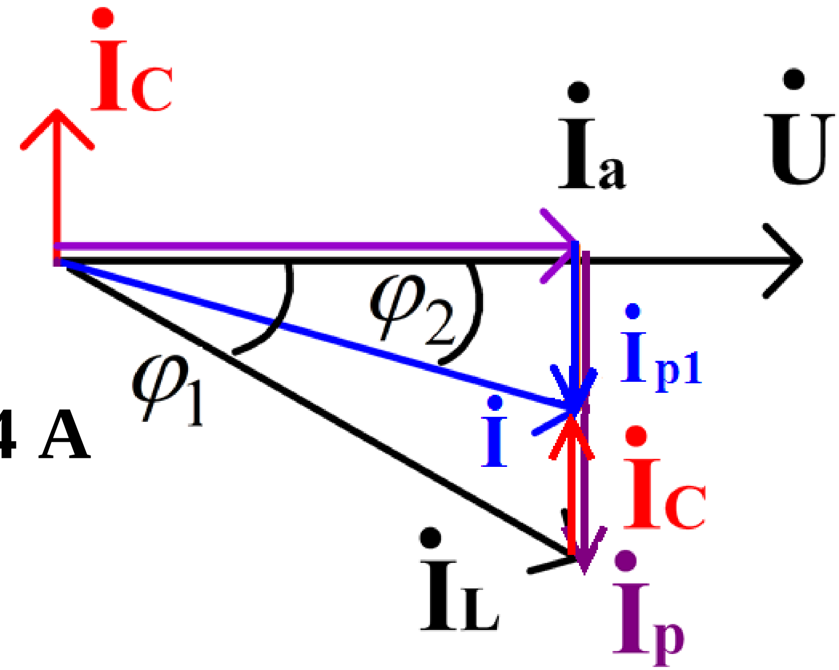
$$I_p = I_L \sin\varphi_1 = 125 \times \sin 36.9° = 75\ \text{A}$$

电容并联后，

$$\varphi_2 = \cos^{-1} 0.9 = 25.8°$$

$$I_{p1} = I \sin \varphi_2$$

$$= 111.1 \times \sin 25.8° = 48.4\ \mathrm{A}$$



需要补偿的电容电流：

$$I_C = I_{\mathrm{p}} - I_{\mathrm{p1}} = 75\mathrm{A} - 48.4\mathrm{A} = 26.6\mathrm{A}$$

需并联的电容大小为：

$$C = \frac{I_C}{\omega U} = \frac{26.6}{2\pi \times 50 \times 10^4} = 8.47 \times 10^{-6}\mathrm{F} = 8.47\mu\mathrm{F}$$

〖解2〗根据无功功率补偿原理

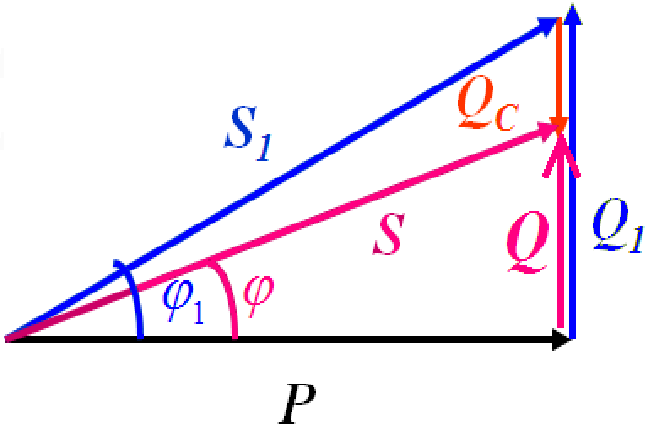
在感性负载上并联电容，实际上是用容性无功功率（Q为负值）去抵消感性无功功率（Q为正值），使补偿后的无功功率减少，从而提高功率因数。

电容并联前，

$$\cos\varphi_1 = 0.8 \qquad \varphi_1 = 36.9°$$

$$Q_1 = P \times \tan\varphi_1 = 1000 \times 10^3 \times 0.75$$

$$= 750\ \text{kVAR}$$



电容补偿后，

$$\cos\varphi = 0.9 \qquad \varphi = 25.84°$$

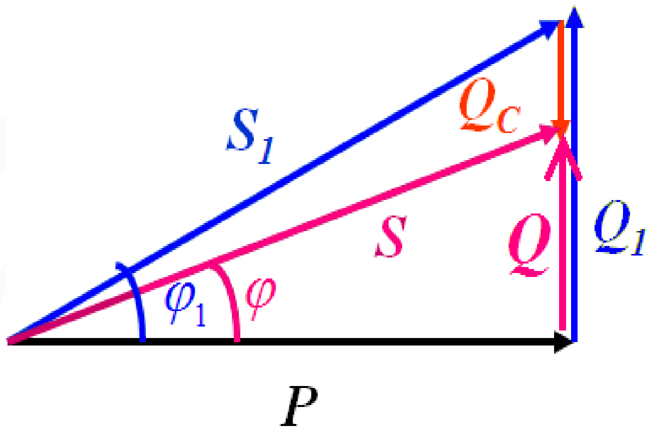
$$Q = P \times \tan\varphi = 1000 \times 10^3 \times 0.484 = 484\ \text{kVAR}$$

需补偿的容性无功功率为：

$$Q_1 + Q_C = Q$$

$$Q_C = Q - Q_1 = 484 - 750$$

$$= -266\ \mathrm{kVAR}$$



由电容的无功功率：

$$Q_C = U_C I_C \sin(-90°) = U_C \times (U_C \cdot \omega C) \times (-1) = -U_C^2 \omega C$$

得电容为:

$$C = -\frac{Q_C}{U^2 \cdot \omega} = -\frac{-266 \times 10^3}{\left(10 \times 10^3\right)^2 \times 2\pi \times 50}$$

$$= 8.47 \times 10^{-6}\,\mathrm{F} = 8.47\,\mu\mathrm{F}$$

本部分重点提示：

- 掌握交流电路的相量表示，会画相量图。
- 掌握RLC元件的相量欧姆定律、及特性。
- 掌握RLC串并联的阻抗和导纳计算，会计算等效阻抗或等效导纳。
- 掌握交流电路的功率（有功功率、无功功率、视在功率、复数功率），理解功率守恒，会计算功率因素提高。

作 业：

题5.4 题5.13(a) 题5.22

题5.7 题5.15 题5.24

题5.9 题5.16

题5.11 题5.18

Thank you for your attention

蔡忠法 浙江大学电工电子教学中心

Ver2.0