



---

# 自动控制原理

## Principle of Automatic Control





---

## 第二章 CHAPTER 2

### 连续时间控制系统的数学模型

### Mathematical Model of Continuous-time Control Systems



# 机械平移系统的机理建模

- 惯性系下的机械平移系统遵循牛顿定律

$$\sum_i F_i = MDv = Ma = MD^2x$$

$\sum_i F_i$  是外力之和,  $M$  是质量,  $v$  是速度,  $a$  是加速度,  $x$  是位移

作用力与反作用力相等

- 机械平移系统基本元件

- 质量块(mass)

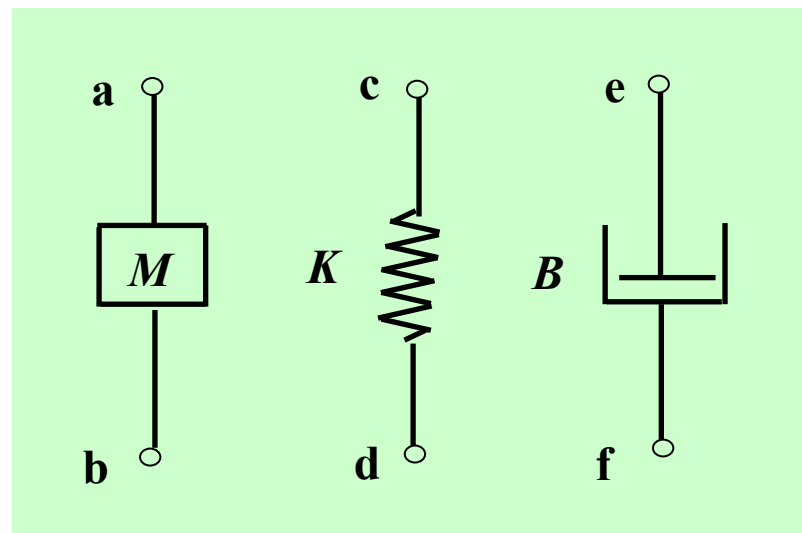
$$f_a - f_b = Ma = MDv = MD^2x$$

- 弹簧(elastance)

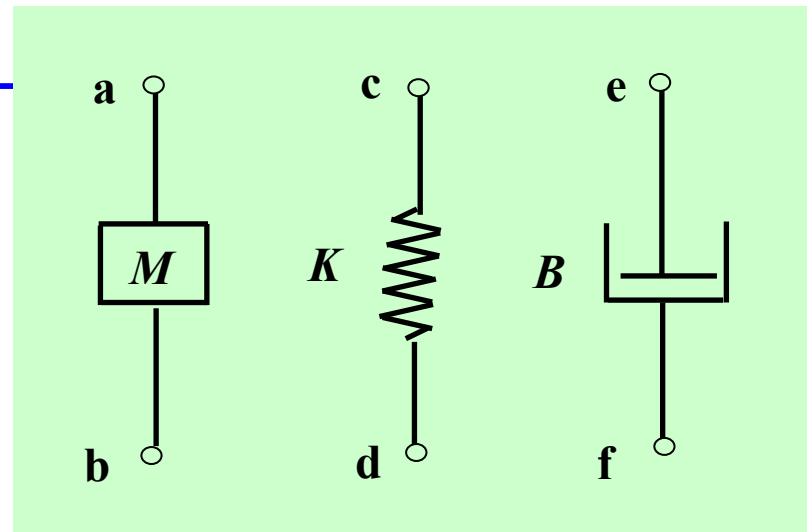
$$f_K = K(x_c - x_d)$$

- 阻尼器(damping)

$$f_B = B(v_e - v_f) = B(Dx_e - Dx_f)$$



## 机械平移系统的机理建模



### ➤ 机械平移元件的受力特点

- $M$ : 两端节点所受的外力可以不等
- $K, B$ : 两端节点所受的外力大小相等、方向相反

### ➤ 机械平移元件的运动特点

- $M$ : 两端节点运动的位移和速度相等
- $K, B$ : 两端节点运动的位移和速度可以不等

## 机械平移系统的机理建模

**例** 图中系统处于无重力场中，当外力  $f(t)$  作用于质量  $M$  时， $M$  将产生位移  $y(t)$ ，试列写  $F(s)$  到  $Y(s)$  传递函数

方法一（质量块受力分析）

第一步：关于  $M$

$$f(t) - f_1(t) - f_2(t) = M \frac{d^2 y}{dt^2}$$

其中，  $f_1(t)$  — 阻尼器阻力  
 $f_2(t)$  — 弹簧回复力

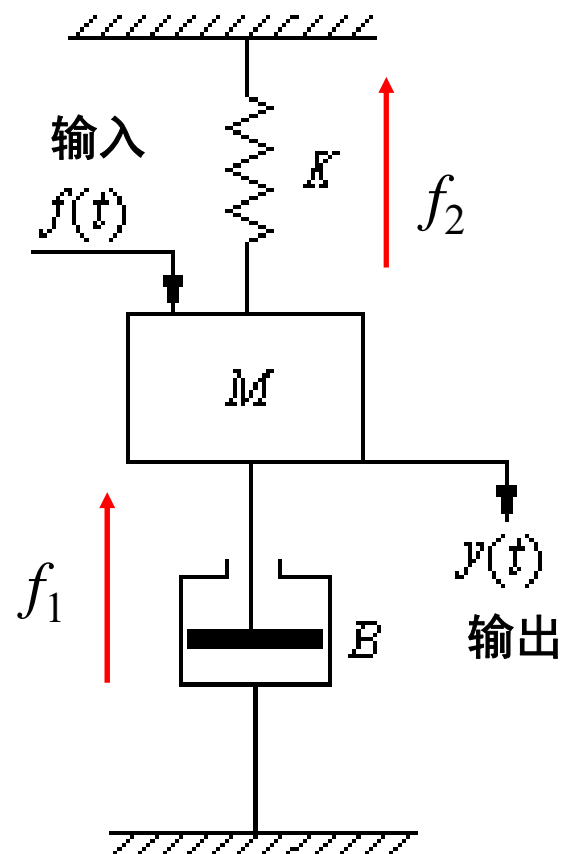
第二步：关于  $B$  和  $K$

$$f_1(t) = B \frac{dy(t)}{dt}$$

$$f_2(t) = Ky(t)$$

第三步：

$$M \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + B \frac{dy(t)}{dt} + Ky(t) = f(t)$$



$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{F(s)} &= \frac{1}{Ms^2 + Bs + K} \\ &= \frac{1/M}{s^2 + (B/M)s + K/M} \end{aligned}$$

# 机械平移系统的机理建模

**例** 系统结构如图所示， $f$ 为弹簧左端受力， $x_a$ 和 $x_b$ 分别为弹簧左、右端的位移，试求 $f$ 到 $x_a$ 的传递函数、 $f$ 到 $x_b$ 的传递函数、 $x_a$ 到 $x_b$ 的传递函数

(默认情况下，地面光滑)

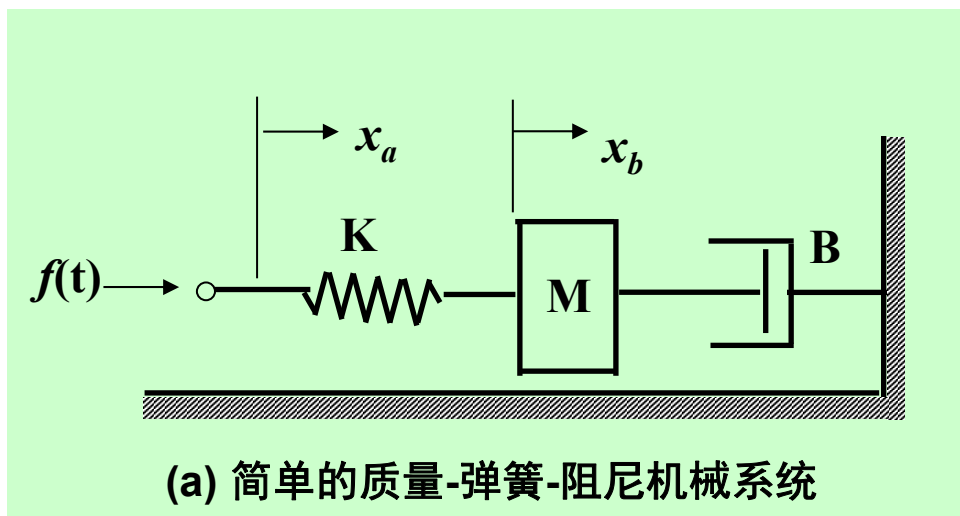
方法一 (质量块受力分析)

第一步：关于M

$$f_K(t) - f_B(t) = M \frac{d^2 x_b}{dt^2}$$

其中， $f_B(t)$  — 阻尼器力

$f_K(t)$  — 弹簧力



第二步：关于B和K

$$f_B(t) = B \frac{dx_b(t)}{dt}$$

$$f_K(t) = f(t) = K(x_a(t) - x_b(t))$$

第三步：

$$\frac{X_b(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + Bs}$$

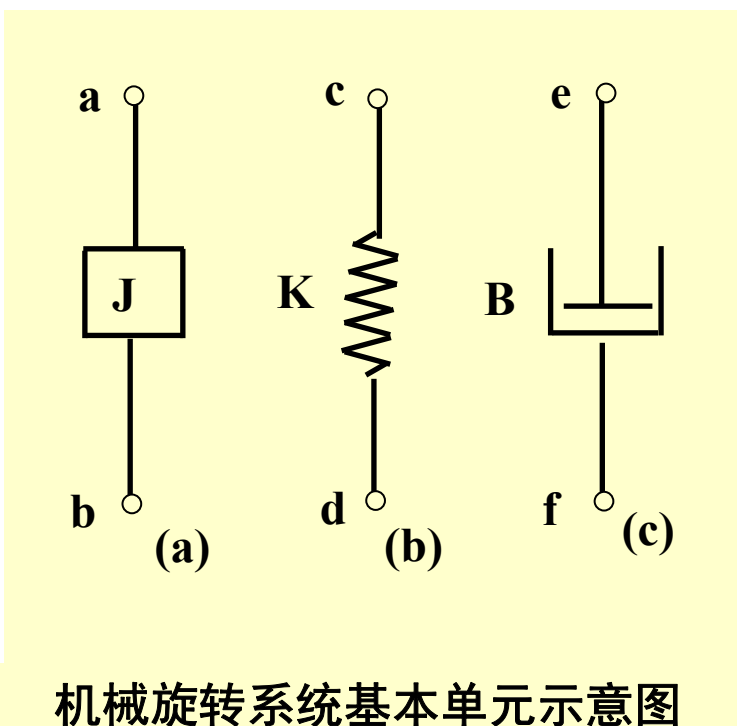
$$\frac{X_b(s)}{X_a(s)} = \frac{K}{Ms^2 + Bs + K}$$

$$\frac{X_a(s)}{F(s)} = \frac{X_b(s)}{F(s)} \bigg/ \frac{X_b(s)}{X_a(s)} = \frac{Ms^2 + Bs + K}{MKs^2 + BKs}$$

## 机械旋转系统的机理建模

◆ 本课程研究的机械旋转系统是一类**转轴在世界坐标系中不变**的机械旋转系统

◆ 描述这类机械旋转系统的方程与描述机械平移系统的方程类似，其中旋转系统中的位移、速度和加速度用角度量来表示（角位移、角速度、角加速度）



机械旋转系统基本单元示意图

◆ 作用**转矩 (Torque, 力矩)** 等于反作用转矩之和

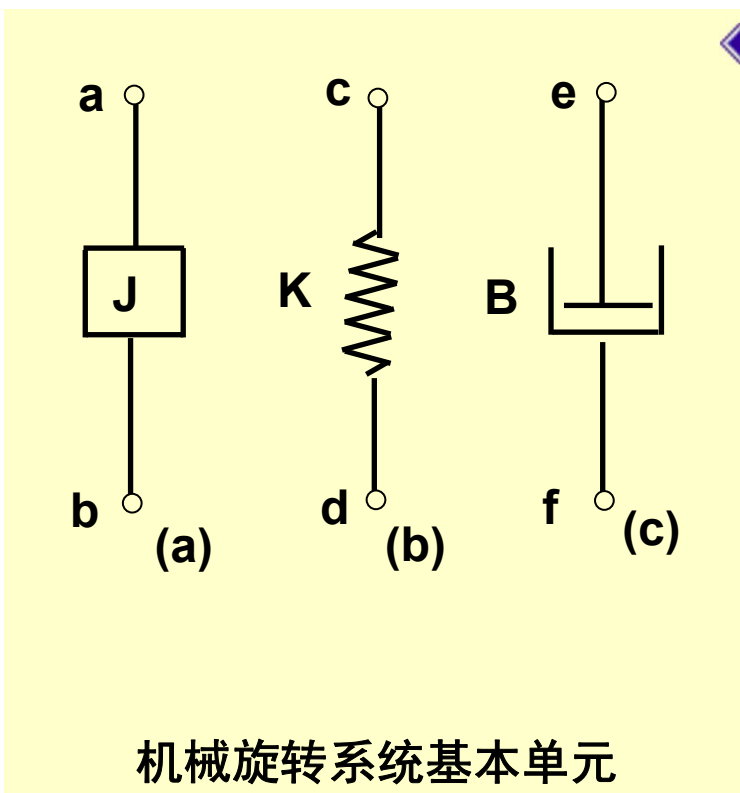
◆ 旋转系统中的三个基本单元是**惯量、扭簧和阻尼**，它们的元件表示图如左图所示。

◆ 同机械平移系统对比，元件图示基本一样，但物理行为有差别。

# 机械旋转系统的机理建模

- ◆ 转矩作用于具有转动惯量  $J$  的物体，产生角加速度  $a$

$$T_J = Ja = JD\omega = JD^2\theta$$



- ◆ 当转矩作用于扭簧时，扭簧将转过角度  $\theta$

$$T_K = K(\theta_c - \theta_d)$$

- ◆ 为了使物体运动，对该物体施加的转矩必须克服阻尼转矩。阻尼转矩为

$$T_B = B(\omega_e - \omega_f) = B(D\theta_e - D\theta_f)$$

- ◆ 对于每个结点，根据合力矩为零列写转矩方程

- ◆ 假设用  $\theta$  表示角位移， $\omega$  表示角速度， $a$  表示角加速度。



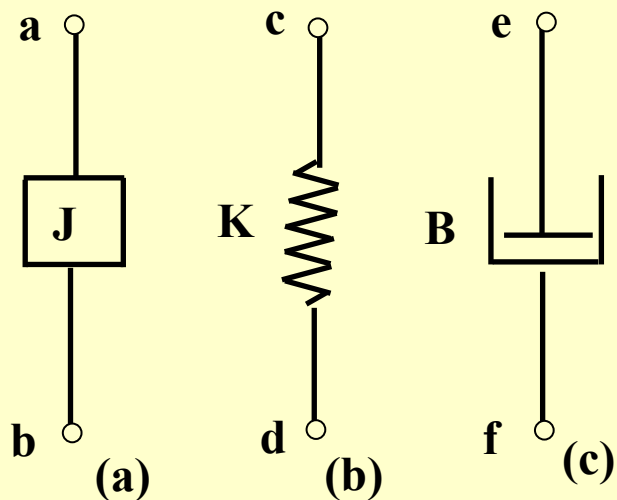
# 机械旋转系统的机理建模

◆ 比较：机械旋转系统和机械平移系统

$$T_J = Ja = JD\omega = JD^2\theta$$

$$T_K = K(\theta_c - \theta_d)$$

$$T_B = B(\omega_e - \omega_f) = B(D\theta_e - D\theta_f)$$

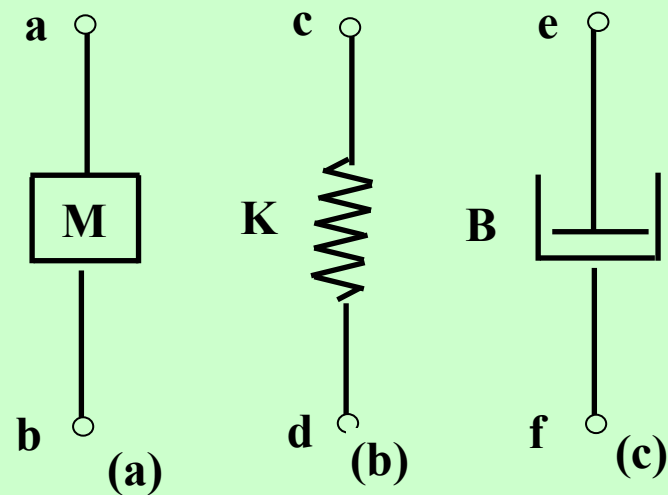


机械旋转系统基本单元

$$f_M = Ma = MDv = MD^2x$$

$$f_K = K(x_c - x_d)$$

$$f_B = B(v_e - v_f) = B(Dx_e - Dx_f)$$

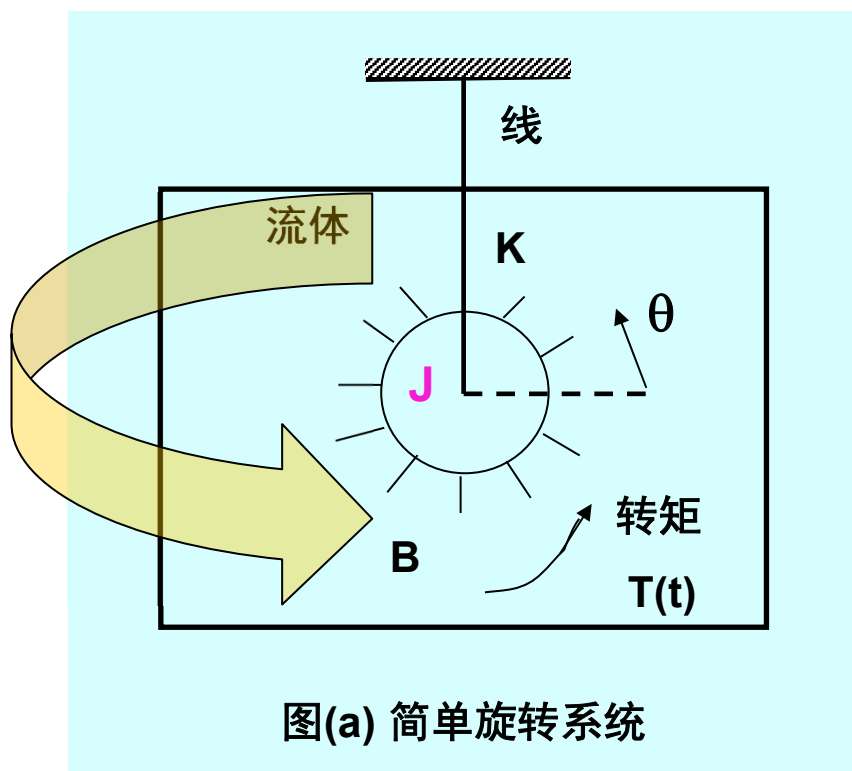


机械平移系统的基本单元

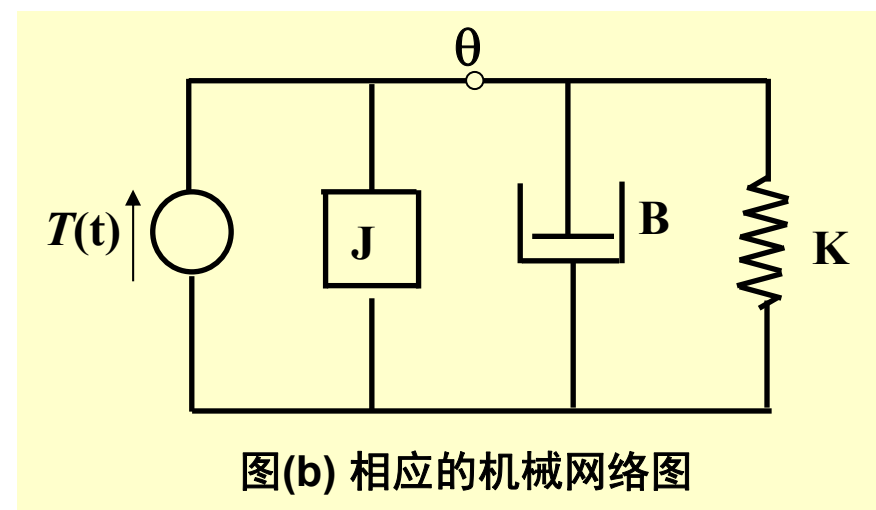
# 机械旋转系统的机理建模

◆ 如图所示，系统包含一个质量块，其具有转动惯量  $J$ ，并浸在流体中，输入转矩  $T$  作用于该质量块，输出  $\theta$  为质量块的角位移

质量块(定轴转动)受力矩分析  $T - f_B - f_K = J \frac{d^2\theta}{dt^2}$   $f_B = B \frac{d\theta}{dt}$   $f_K = K\theta$

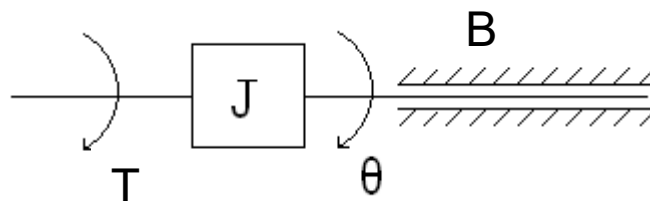


$$\frac{\Theta(s)}{T(s)} = \frac{1/J}{s^2 + (B/J)s + K/J}$$



## 机械旋转系统的机理建模

下图为定轴转动物体， $J$ 表示转动惯量， $B$ 表示粘滞系数。若输入为转矩 $T$ ，输出为轴角位移 $\theta$ ，求传递函数。

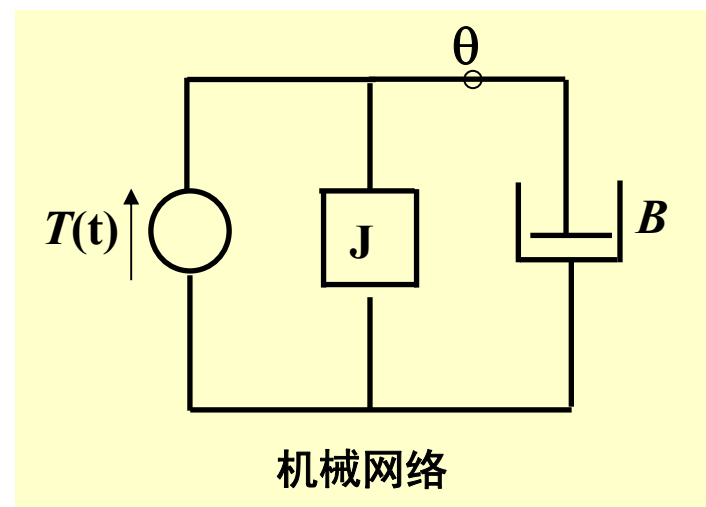


解：关于 $J$ 的力矩分析 
$$T - B \frac{d\theta}{dt} = J \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

设初始条件为零，对上式取拉氏变换得：

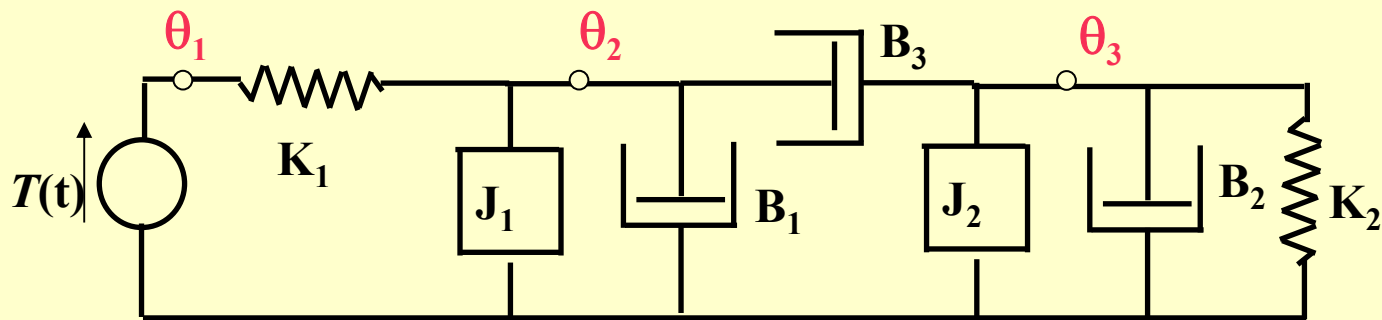
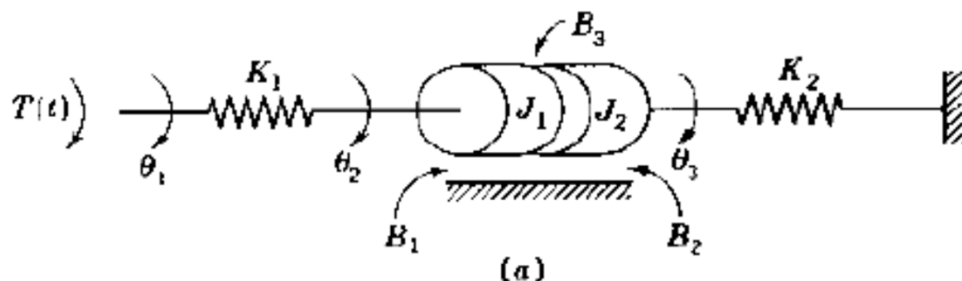
$$Js^2\theta(s) + Bs\theta(s) = T(s)$$

$$\therefore \frac{\theta(s)}{T(s)} = \frac{1}{s(Js + B)}$$



## 机械旋转系统的机理建模

- ◆ 如图a所示的系统包含两个定轴转动圆盘，两个圆盘之间存在阻尼作用，并且两个圆盘各自同下方的平面之间存在摩擦，输入 $T$ ，输出 $\theta_3$



图(b) 旋转系统的机械网络图

# 机械旋转系统的机理建模

~~$$\text{Node 1: } T(t) = K_1(\theta_1 - \theta_2)$$~~

~~$$\text{Node 2: } K_1(\theta_1 - \theta_2) = J_1 D^2 \theta_2 + B_1 D \theta_2 + B_3 D(\theta_2 - \theta_3) = T(t)$$~~

$$\text{Node 3: } B_3 D(\theta_2 - \theta_3) = J_2 D^2 \theta_3 + B_2 D \theta_3 + K_2 \theta_3$$

考虑  $J_2$ , 取  $x_1 = \theta_3, x_2 = \dot{\theta}_3$

注意到  $B_2$  的状态正是  $x_1 = \theta_3$

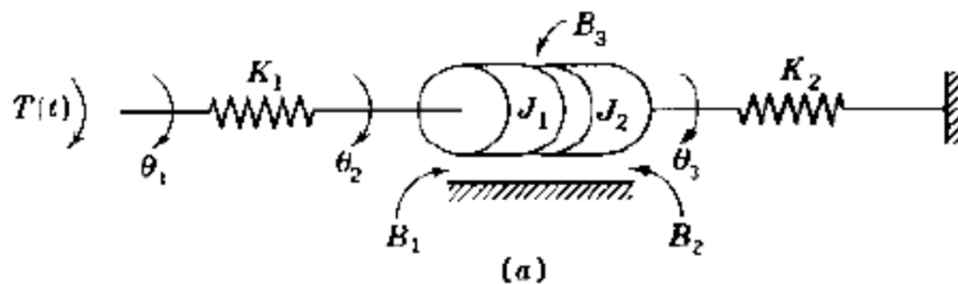
考虑  $J_1$ , 取  $x_3 = \theta_2, x_4 = \dot{\theta}_2$

注意到  $B_1$  的状态正是  $x_3 = \theta_2$

注意到  $B_3$  的状态正是  $x_3 - x_1 = \theta_2 - \theta_3$

$$u = T, y = \theta_3 = x_1$$

系统的状态空间表达式.....



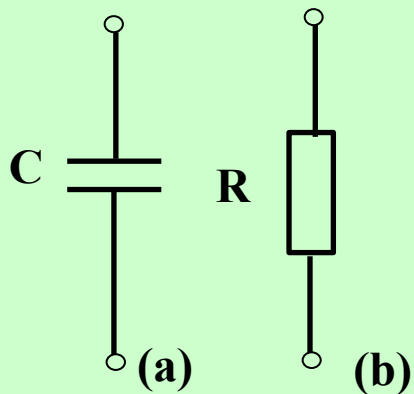
## 热力系统的机理建模

- ◆ 只有少数热力系统可以由常微分方程描述，用常微分方程描述的热力系统要求**研究对象的温度是均匀的**。

**Uniform temperature assumption**（温度均匀分布的假设）

- 1、small body (for solid**固体**)
- 2、perfect mixing(for liquid**液体**)

- ◆ **热平衡的必要条件**是注入系统的热量等于系统存储的热量加上离开系统的热量。这个条件也可以通过**热流率**表示



热力系统网络单元示意图

- ◆ 热力系统网络可以由热容和热阻表示。

## 热力系统的机理建模

◆ 外加的热量 $Q$ 会让对象温度从  $\theta_1$  升到  $\theta_2$

◆ 热量  $Q = \frac{q}{D} = C(\theta_2 - \theta_1)$  ◆ 热流率  $q = CD(\theta_2 - \theta_1)$

**热流率 $q$** ：单位时间内通过某一截面的热量，单位是“瓦特”。热流率大于零，物体获得热量；反之，热量外流。

**热容 $C$** ：物体在某一过程中，每升高(或降低)单位温度时从外界吸收(或放出)的热量，热容决定了对象储存热量的能力——类似于电路中的**电容**。

◆ 用边界温度  $\theta_3$  和  $\theta_4$ 表示的、通过对象的热流率为  $q = \frac{\theta_3 - \theta_4}{R}$

**热阻 $R$** ：热量在热流路径上遇到的阻力，反映介质与介质间的传热能力的大小，表明单位热量所引起的温升，热阻决定了通过对象的热流率——类似于电路中的**电阻**。

## 热力系统的机理建模

◆ 考虑一个充满水银的细壁温度计（具有热容  $C$  及热阻  $R$ ），温度计稳定于温度  $\theta_1$ 。在  $t=0$  时，将温度计放入温度为  $\theta_0$  的容器中，请建立水银计温度  $\theta_m$  与容器温度  $\theta_0$  的数学模型。

◆ 温度计的热流率为  $q = \frac{\theta_0 - \theta_m}{R}$

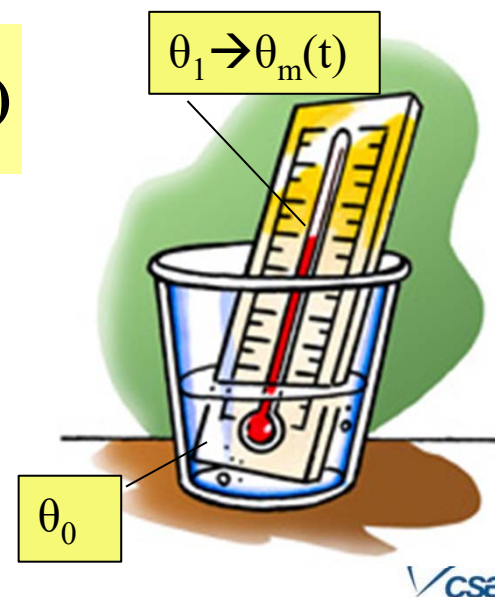
◆ 进入温度计并由热容  $C$  储存的热量为  $Q = \frac{q}{D} = C(\theta_m - \theta_1)$

◆ 上述方程可以合并为  $Q = \frac{\theta_0 - \theta_m}{RD} = C(\theta_m - \theta_1)$

◆ 对上式进行微分，并整理可以得到

$$RCD \frac{d\theta_m}{dt} + \theta_m = \theta_0$$

问题：上式中为何没有温度  $\theta_1$  了？



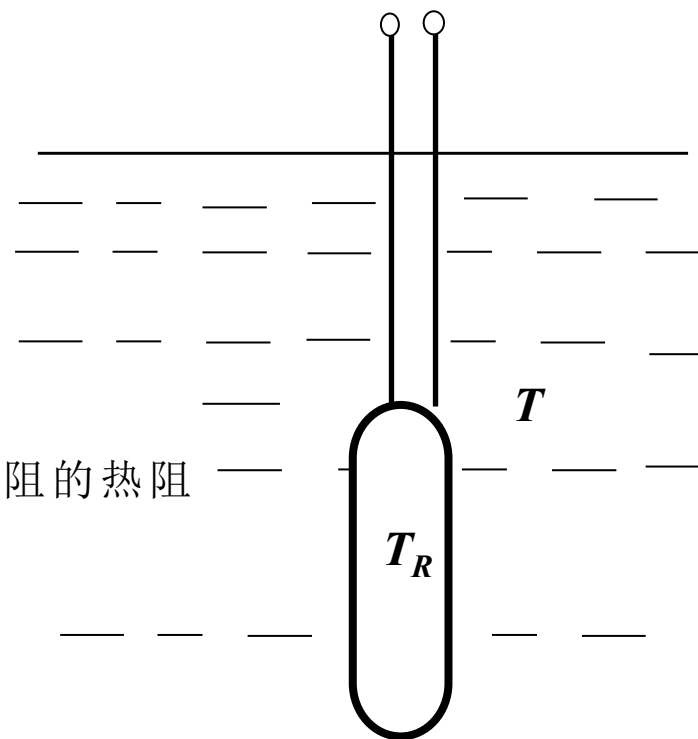


# 热电阻温度模型

## ◆ 热电阻测量元件（测温用）

热电阻测温原理是：电阻体电阻值 $R$ 与 $T_R$ 存在一一对应关系， $R$ 随 $T_R$ 的变化而变化。

一个热电阻测温元件插入温度为 $T$ 的被测介质中。假设导线向外传出的热量 $Q$ 可以忽略，电阻体温度为 $T_R$ 且分布均匀。



◆ 进入热电阻的热流率为  $q = \frac{T - T_R}{R_h}$ ,  $R_h$ 是热电阻的热阻

◆ 进入热电阻并由热容  $C$  储存的热量为

$$Q = \frac{q}{D} = C(T_R - T_{R0}), T_{R0} \text{ 是热电阻的初始温度}$$

◆ 合并、微分得到

$$R_h C \frac{dT_R}{dt} + T_R = T$$

热电阻示意图

## 热电阻温度模型

### ◆ 热电阻测量元件（测温用）在热电阻外加上保护套管

假设保护套管插入被测介质较深，由上部传出的热损耗可以忽略，并且

保护套管具有均匀的温度  $T_a$ 。介质温度为  $T$

进入套管的热流率  $q = \frac{T - T_a}{R_a} - \frac{T_a - T_R}{R_h}$ ,  $R_a$  是套管的热阻

### ◆ 进入套管并由其热容 $C_a$ 储存的热量为

$$Q = \frac{q}{D} = C_a(T_a - T_{a0}), T_{a0} \text{ 是套管的初始温度}$$

### ◆ 整理得到

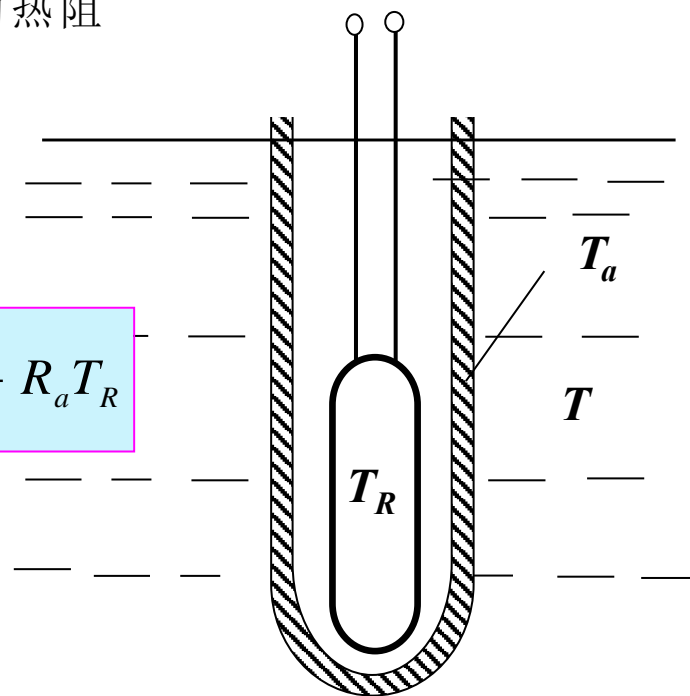
$$R_a R_h C_a \frac{dT_a}{dt} + (R_a + R_h)T_a = R_h T + R_a T_R$$

### ◆ 对于热电阻

$$R_h C \frac{dT_R}{dt} + T_R = T_a$$

### ◆ 消去 $T_a$

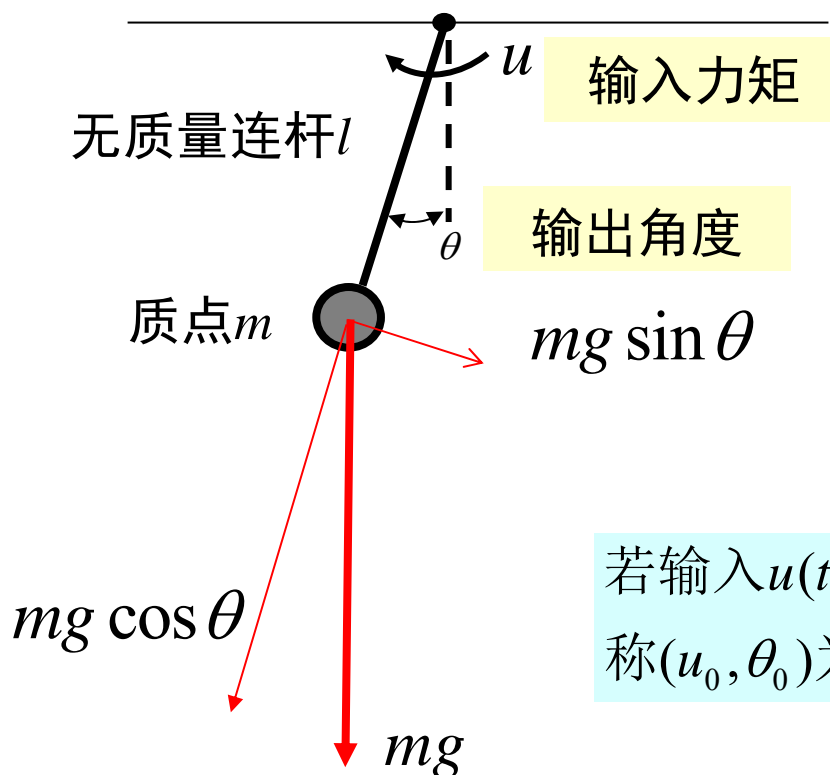
$$R_a R_h C_a C \frac{d^2 T_R}{dt^2} + (R_a C + R_h C + R_a C_a) \frac{dT_R}{dt} + T_R = T$$



有套管的热电阻示意图

# 非线性环节的线性化

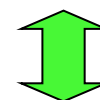
## 例 钟摆



## 力矩分析

$$J\ddot{\theta} = u - mgl \sin \theta$$

$$\text{转动惯量 } J = ml^2$$

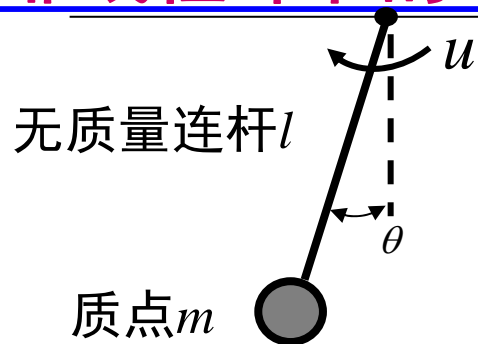


$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = \frac{1}{ml^2} u$$

若输入  $u(t)$  为常值  $u_0$ ，输出  $\theta(t)$  最终会收敛于常值  $\theta_0$   
称  $(u_0, \theta_0)$  为钟摆的一个**工作点**

$$\text{在工作点处, } \frac{g}{l} \sin \theta_0 = \frac{1}{ml^2} u_0$$

## 非线性环节的线性化



$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = \frac{1}{ml^2} u \quad (1)$$

$$\frac{g}{l} \sin \theta_0 = \frac{1}{ml^2} u_0 \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{记 } \Delta \theta(t) &= \theta(t) - \theta_0 \\ \Delta u(t) &= u(t) - u_0 \end{aligned}$$

在给定工作点处，作  $\sin \theta$  的泰勒级数展开

$$\sin \theta = \sin \theta_0 + \left. \frac{d \sin \theta}{d \theta} \right|_{\theta=\theta_0} \Delta \theta + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2 \sin \theta}{d \theta^2} \right|_{\theta=\theta_0} (\Delta \theta)^2 + \frac{1}{3!} \left. \frac{d^3 \sin \theta}{d \theta^3} \right|_{\theta=\theta_0} (\Delta \theta)^3 + \dots$$

保留泰勒级数展开中的常数项和1次项

$$\sin \theta \approx \sin \theta_0 + \left. \frac{d \sin \theta}{d \theta} \right|_{\theta=\theta_0} \Delta \theta = \sin \theta_0 + \cos \theta_0 \Delta \theta \quad (3)$$

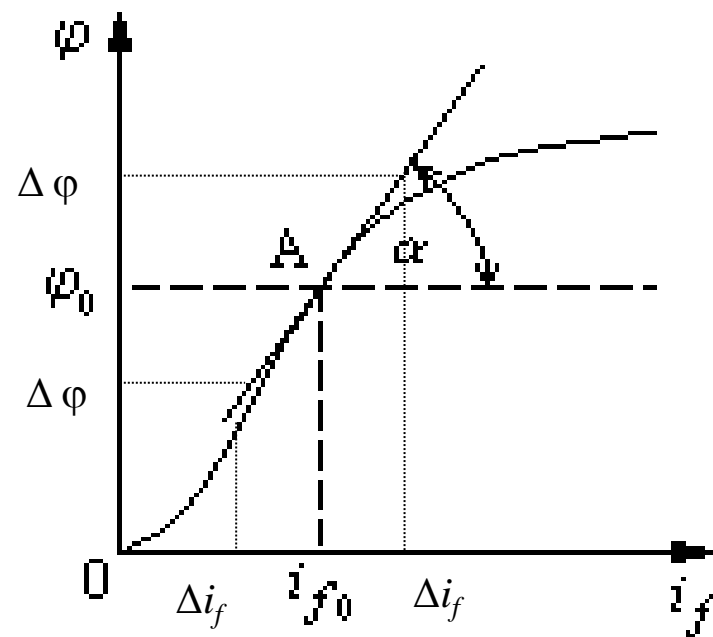
由(1)、(2)、(3)，有  $\frac{d^2 \Delta \theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \cos \theta_0 \Delta \theta = \frac{1}{ml^2} \Delta u$

工作点附近，偏移量，线性近似

比如工作点  $(u_0, \theta_0) = (0, 0)$  附近， $\frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{\Delta \Theta(s)}{\Delta U(s)} = \frac{1/(ml^2)}{s^2 + g/l}$  可较好描述钟摆行为

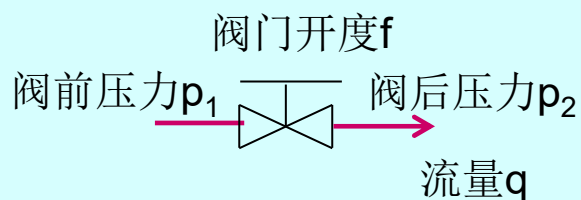
## 非线性环节的线性化

- 几乎所有元件或系统的运动方程都是非线性方程。在比较小的范围内，把这些方程近似成线性的，多数情况下是不会产生很大误差的。方程式一经线性化，就可以应用线性迭加原理。
- 线性化可以研究非线性系统在某一工作点附近的性能，如图， $(i_{f0}, \varphi_0)$ 为工作点，受到扰动后， $i_f(t)$ 偏离 $i_{f0}$ ，产生 $\Delta i_f(t)$ 和 $\Delta \varphi(t)$ 的变化过程。非线性特性的线性化，实质上就是以平衡点附近的直线代替平衡点附近的曲线。
- 线性化最常用的方法是工作点处泰勒级数展开后舍去2次及更高次项，取相对于工作点的偏移量为变量即得线性关系
- 线性化的前提条件：工作点存在、工作点附近的1阶导数存在

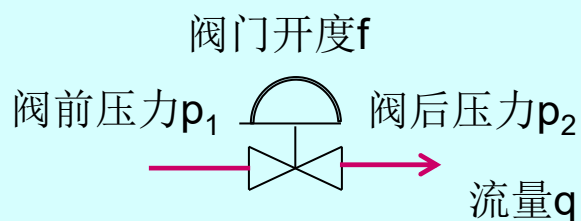


# 液位系统的机理建模

## 手动调节阀

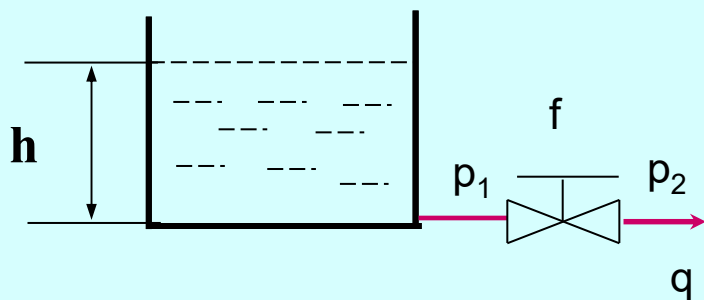


## 气动调节阀



有一工作点 $(h_0, f_0, q_0)$ ,  $q_0 = \alpha_\rho f_0 \sqrt{h_0}$

设 $\Delta h = h - h_0$ ,  $\Delta f = f - f_0$ ,  $\Delta q = q - q_0$



**流量**是指单位时间内流经封闭管道或明渠有效截面的流体量  
当流体量以体积表示时称为**体积流量**(液位系统采用)  
当流体量以质量表示时称为**质量流量**

据流体力学原理,  $q = \alpha f \sqrt{p_1 - p_2}$

参数 $\alpha$ 与液体密度有关

若阀前后压差 $p_1 - p_2$ 不变, 则 $q$ 与 $f$ 的关系是线性的,  $q = K_p f$

下图中, 阀前后压差 $p_1 - p_2 = \rho g h$ ,  $q = \alpha \sqrt{\rho g} f \sqrt{h} = \alpha_\rho f \sqrt{h}$   
 $\rho$  是液体密度,  $g$  是重力加速度,  $h$  是液位

$$\begin{aligned} \text{作线性化 } q &= q_0 + \left. \frac{\partial q}{\partial h} \right|_{\substack{h=h_0 \\ f=f_0}} \Delta h + \left. \frac{\partial q}{\partial f} \right|_{\substack{h=h_0 \\ f=f_0}} \Delta f \\ &= q_0 + \frac{1}{2} \alpha_\rho f_0 \sqrt{\frac{1}{h_0}} \Delta h + \alpha_\rho \sqrt{h_0} \Delta f \end{aligned}$$

$$\Delta q = \frac{1}{R} \Delta h + K \Delta f = \frac{1}{R} \Delta h + \Delta q_f$$

$$K = \alpha_\rho \sqrt{h_0}, \text{流阻 } R = \frac{2\sqrt{h_0}}{\alpha_\rho f_0}$$

$\Delta q_f$ :  $\Delta f$ 引起的流量改变



# 液位系统的机理建模

例 单个带阀的水槽

$q$  = 液体流量

$h$  = 液位

$R$  = 流阻

$A$  = 水槽的横截面积

围绕水槽建立微分方程

$$\Delta q_{in} - \Delta q_{out} = \frac{dV}{dt} = A \frac{d\Delta h}{dt}$$

流入：假设阀前后差压不变，  
流量与阀门开度的关系

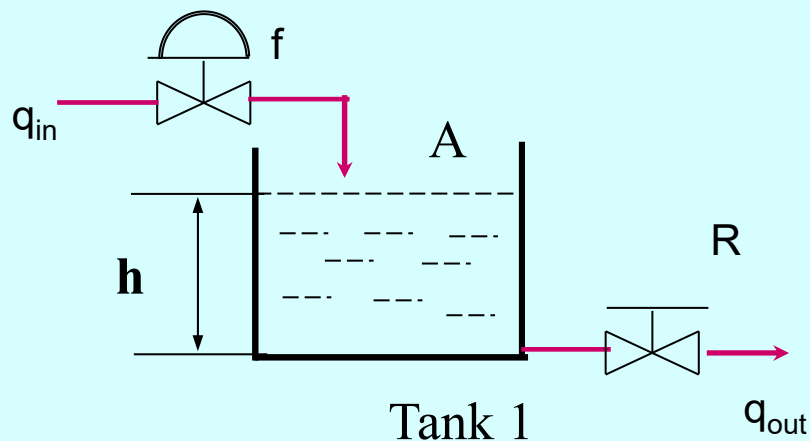
$$\Delta q_{in} = K_p \Delta f$$

流出：流量与液位关系：

$$q_{out} = \alpha_\rho f' \sqrt{h}$$

假设流入阀前后压差和流出阀开度不变  
求工作点附近流入阀开度偏移量与  
液位高度的传递函数

线性化 
$$\Delta q_{out} = \frac{\Delta h}{R} + K \Delta f'$$



假设阀门开度不变  
只考虑液位影响  
线性化后得到

$$\Delta q_{out} = \frac{\Delta h}{R}$$

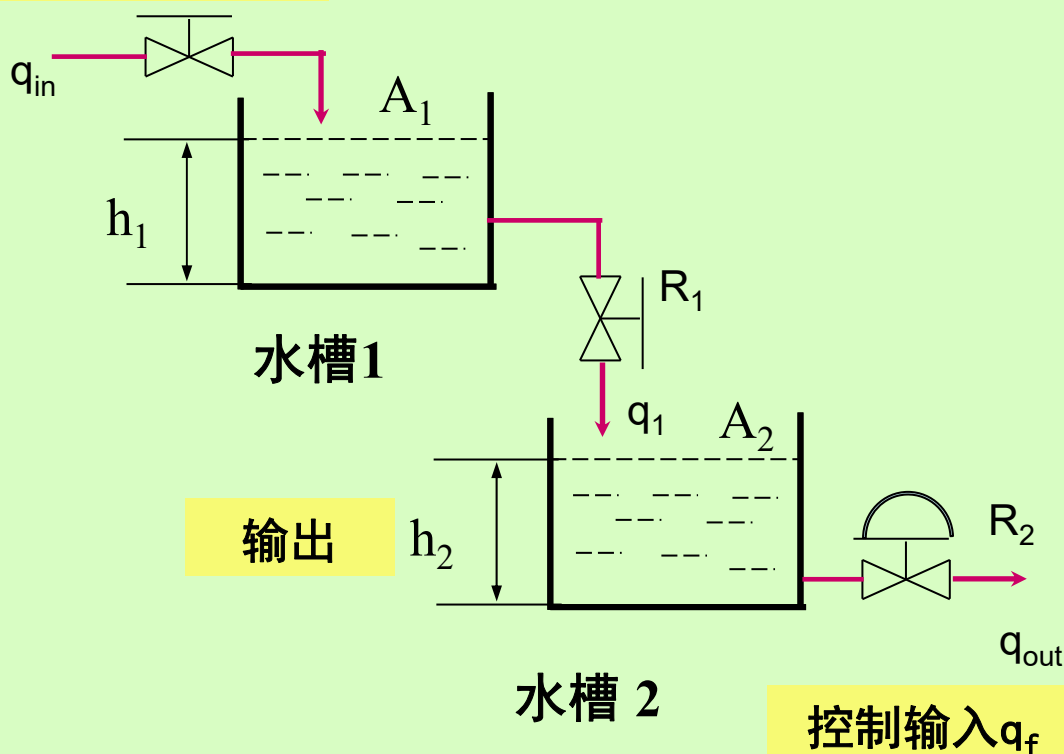
代入后得到

$$K_p \Delta f - \frac{\Delta h}{R} = A \frac{d\Delta h}{dt}$$
$$G(s) = \frac{\Delta H(s)}{\Delta F(s)} = \frac{K_p R}{RAs + 1}$$

# 液位系统的机理建模

**例** 二容液位控制系统如下图所示。系统变量及参数包括：

扰动输入



$q$  : 液体流量

$h$  : 液位高度

$R$  : 流阻

$A$  : 水槽截面积

干扰输入  $q_{in}$

输出  $h_2$  (比如: 保持  $h_2$  不变)

控制输入  $q_f$

液位系统由两个一阶对象串联组成

假设  $R_1$  开度不变

求输入与输出间的关系



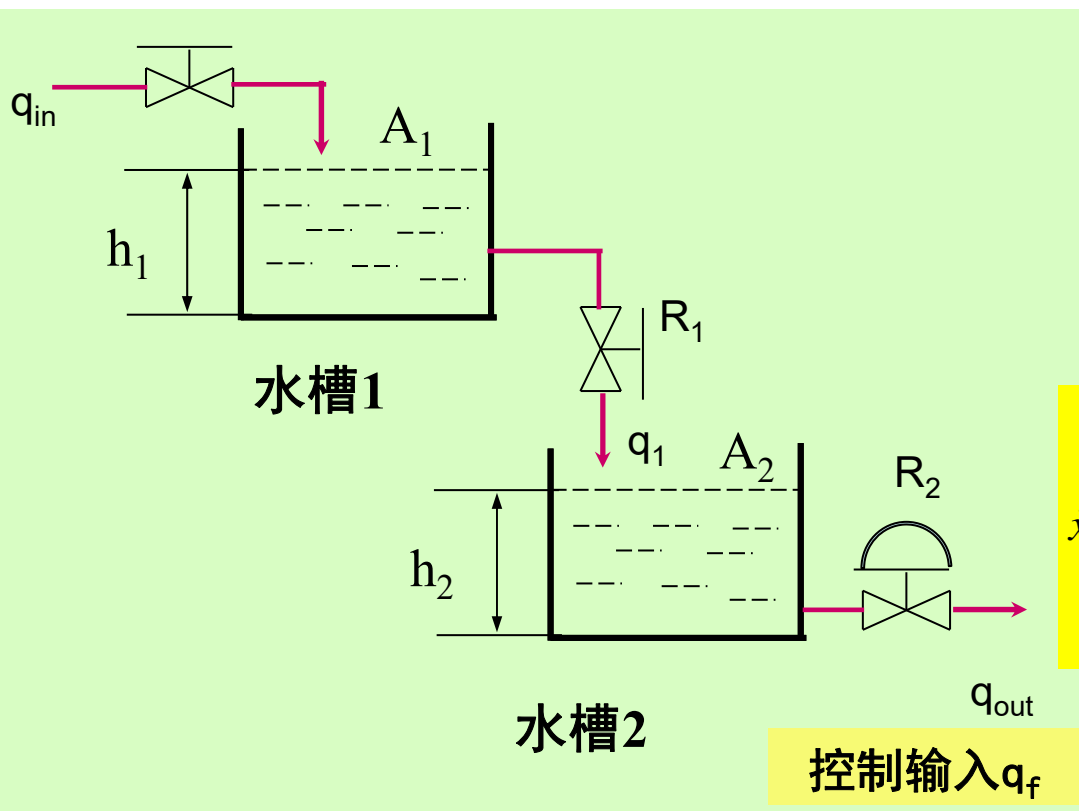
# 液位系统的机理建模

围绕水槽建立微分方程

水槽1

$$A_1 \frac{dh_1}{dt} = q_{in} - q_1$$

$$q_1 = \frac{1}{R_1} h_1$$



水槽2

$$A_2 \frac{dh_2}{dt} = q_1 - q_{out}$$

$$q_{out} = \frac{1}{R_2} h_2 + q_f$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 A_1} & 0 \\ \frac{1}{R_1 A_2} & -\frac{1}{R_2 A_2} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{A_2} \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \quad 1] x$$

取状态变量

$$x = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

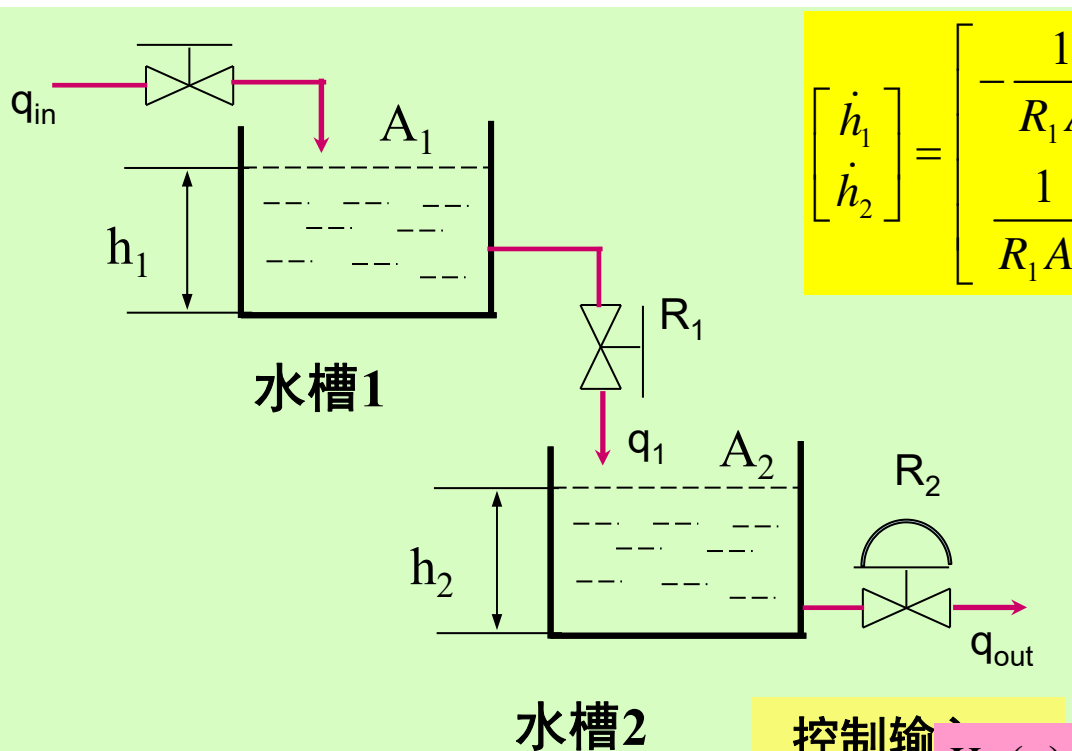
输入变量

$$u = \begin{bmatrix} q_{in} \\ q_f \end{bmatrix}$$

输出变量

$$y = h_2$$

# 液位系统的机理建模



$$\begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 A_1} & 0 \\ \frac{1}{R_1 A_2} & -\frac{1}{R_2 A_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{A_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{in} \\ q_f \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

水槽液位  $h_1$  可影响  $h_2$

水槽液位  $h_2$  不影响  $h_1$

控制输入

$$H_2(s) = G(s)U(s) = \left[ C(sI - A)^{-1}B + D \right] U(s)$$

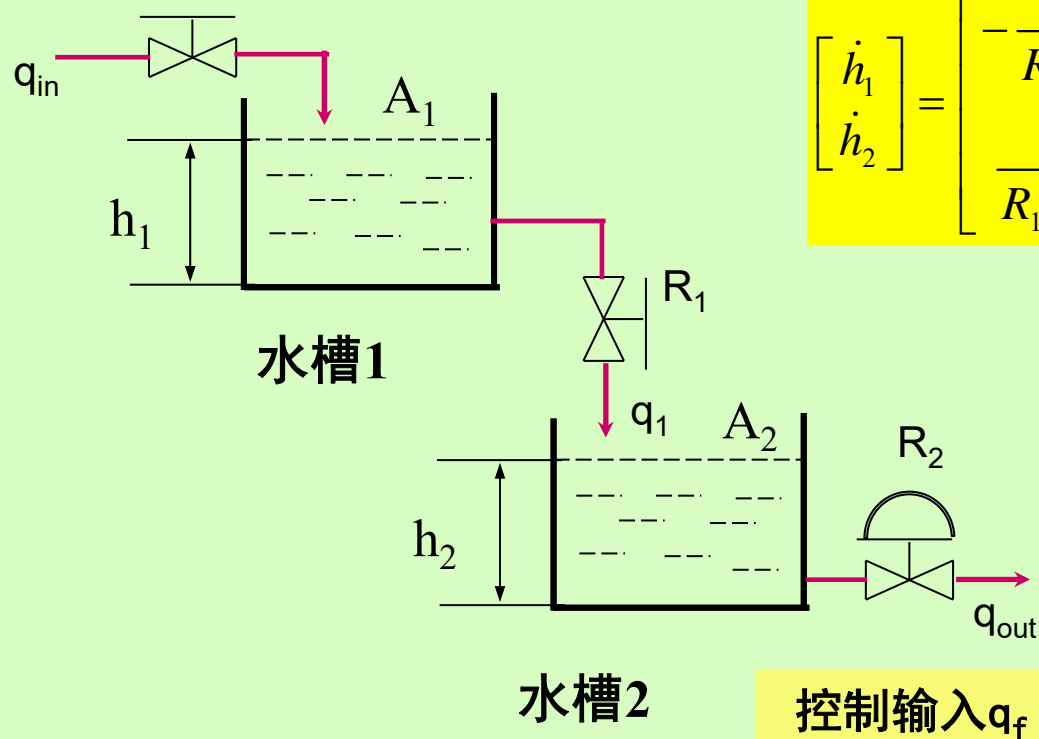
$$H_2(s) = \begin{bmatrix} \frac{R_2}{R_1 A_1 R_2 A_2 s^2 + (R_1 A_1 + R_2 A_2)s + 1} & \frac{-R_2}{R_2 A_2 s + 1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{in}(s) \\ Q_f(s) \end{bmatrix}$$

干扰通道  
传递函数

控制通道  
传递函数

$$R_1 A_1 R_2 A_2 \frac{d^2 h_2}{dt^2} + (R_1 A_1 + R_2 A_2) \frac{dh_2}{dt} + h_2 = R_2 q_{in} - R_1 A_1 R_2 \frac{dq_f}{dt} - R_2 q_f$$

# 液位系统的机理建模



$$\begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 A_1} & 0 \\ \frac{1}{R_1 A_2} & -\frac{1}{R_2 A_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{A_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{in} \\ q_f \end{bmatrix}$$

$$\text{取 } y = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}, \text{ 即 } y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

$q_{in}$  正影响  $h_1$

$q_{in}$  正影响  $h_2$

$q_f$  不影响  $h_1$

$q_f$  负影响  $h_2$

$$\begin{bmatrix} H_1(s) \\ H_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R_1}{R_1 A_1 s + 1} & 0 \\ \frac{R_2}{R_1 A_1 R_2 A_2 s^2 + (R_1 A_1 + R_2 A_2)s + 1} & \frac{-R_2}{R_2 A_2 s + 1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{in}(s) \\ Q_f(s) \end{bmatrix}$$

## 液位系统的机理建模

**例** 二容液位控制系统由两个一阶对象串联组成。注意，这里水槽液位 $h_2$ 对 $q_1$ 有影响

$q$  : 液体流量

$h$  : 液位高度

$R$  : 流阻

$A$  : 水槽截面积

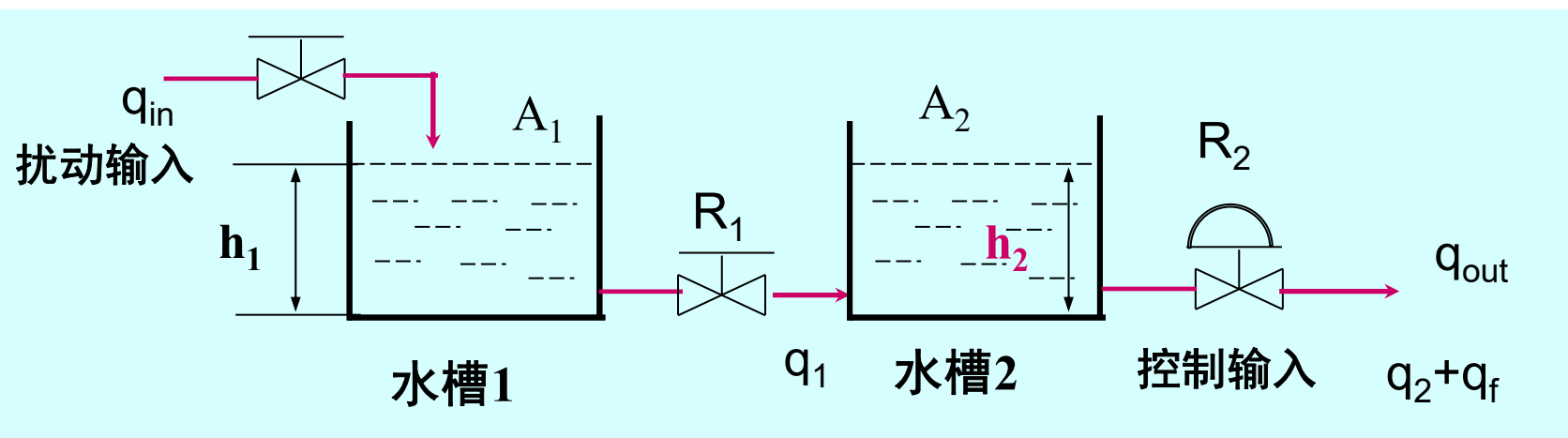
控制输入 $q_f$

干扰输入 $q_{in}$

输出 $h_1$ 和 $h_2$

假设 $R_1$ 开度不变

求输入与输出间的关系



# 液位系统的机理建模

围绕水槽建立微分方程

水槽1

$$A_1 \frac{dh_1}{dt} = q_{in} - q_1$$

$$q_1 = \frac{1}{R_1}(h_1 - h_2)$$

水槽2

$$A_2 \frac{dh_2}{dt} = q_1 - q_{out}$$

$$q_{out} = \frac{1}{R_2}h_2 + q_f$$

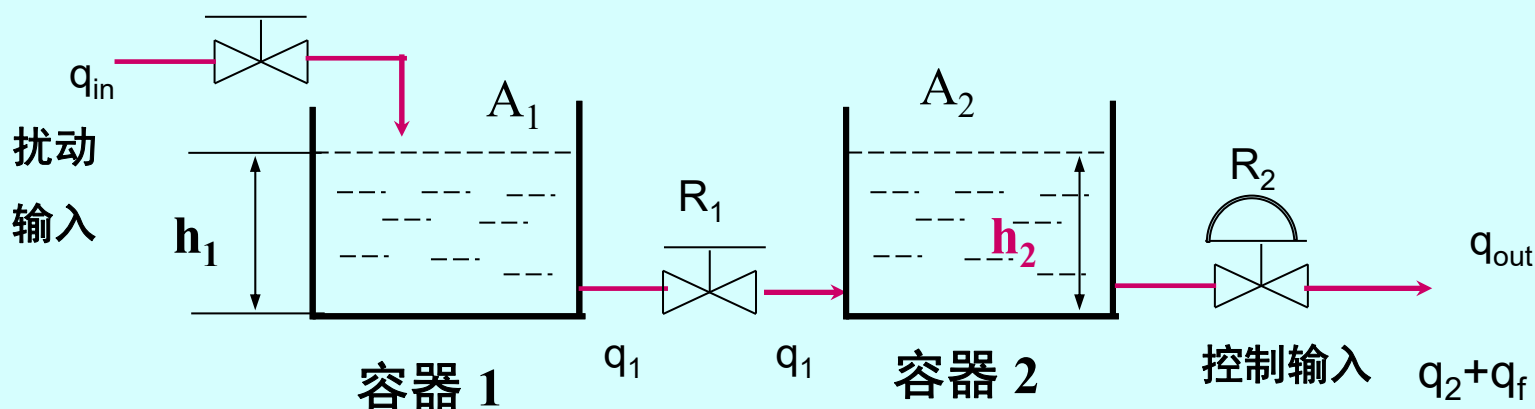
$$y = x = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

$$u = \begin{bmatrix} q_{in} \\ q_f \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 A_1} & \frac{1}{R_1 A_1} \\ \frac{1}{R_1 A_2} & -\frac{1}{R_1 A_2} - \frac{1}{R_2 A_2} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{A_2} \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

水槽液位  $h_1$  与  $h_2$  耦合:  $h_1$  影响  $h_2$ ,  $h_2$  也影响  $h_1$



# 液位系统的机理建模

$$\begin{bmatrix} H_1(s) \\ H_2(s) \end{bmatrix} =$$

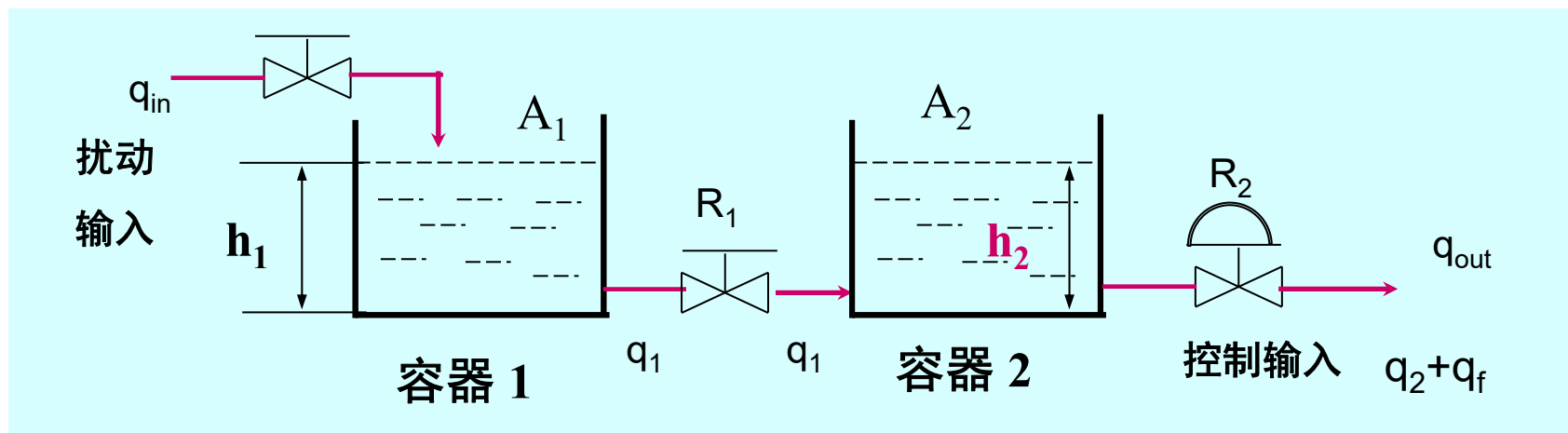
$q_{in}$  正影响  $h_1$

$q_{in}$  正影响  $h_2$

$q_f$  负影响  $h_1$

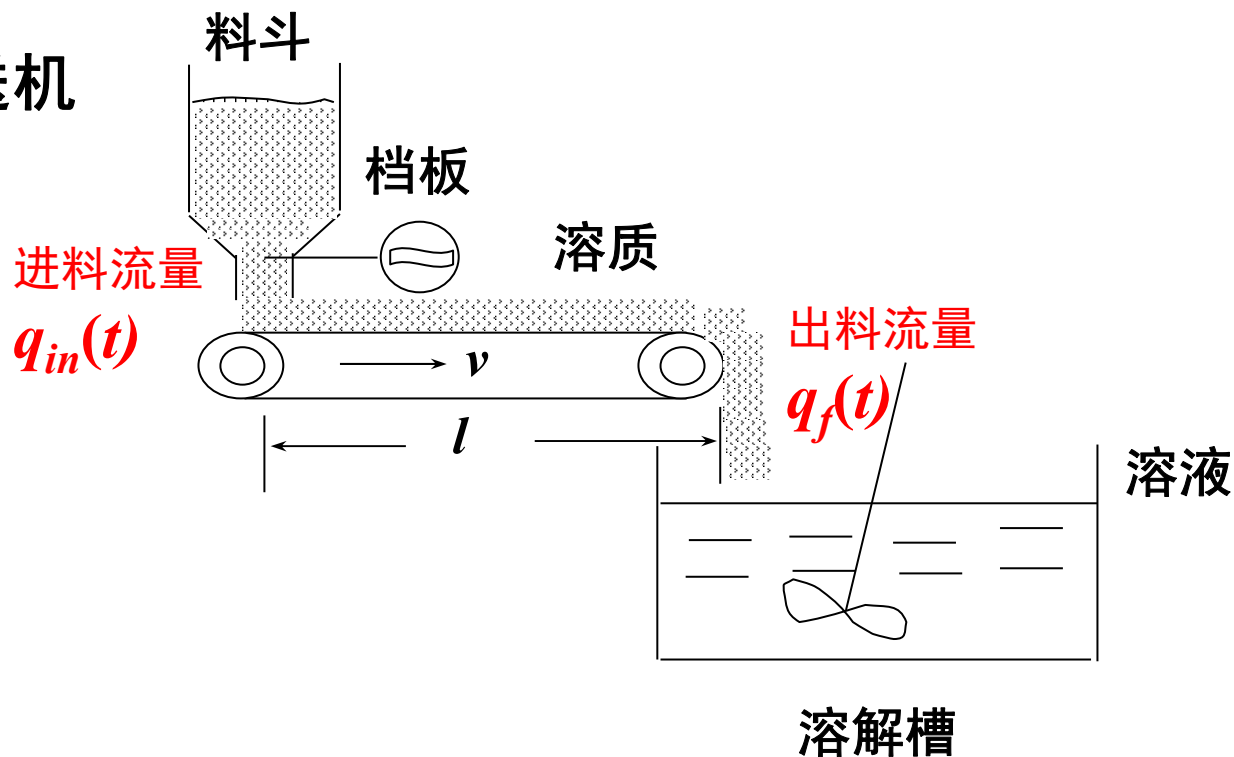
$q_f$  负影响  $h_2$

$$\begin{bmatrix} \frac{R_1 R_2 A_2 s + (R_1 + R_2)}{R_1 A_1 R_2 A_2 s^2 + (R_2 A_1 + R_1 A_1 + R_2 A_2) s + 1} & \frac{-R_2}{R_1 A_1 R_2 A_2 s^2 + (R_2 A_1 + R_1 A_1 + R_2 A_2) s + 1} \\ \frac{R_2}{R_1 A_1 R_2 A_2 s^2 + (R_2 A_1 + R_1 A_1 + R_2 A_2) s + 1} & \frac{-R_1 A_1 R_2 s - R_2}{R_1 A_1 R_2 A_2 s^2 + (R_2 A_1 + R_1 A_1 + R_2 A_2) s + 1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{in}(s) \\ Q_f(s) \end{bmatrix}$$



# 纯滞后环节的传递函数

## 例 皮带输送机

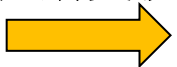


输入和输出间的关系

$$q_f(t) = q_{in}(t - \tau)$$

纯滞后时间  $\tau = ?$

拉普拉斯变换



$$Q_f(s) = e^{-\tau s} Q_{in}(s)$$

$$G(s) = \frac{Q_f(s)}{Q_{in}(s)} = e^{-\tau s}$$

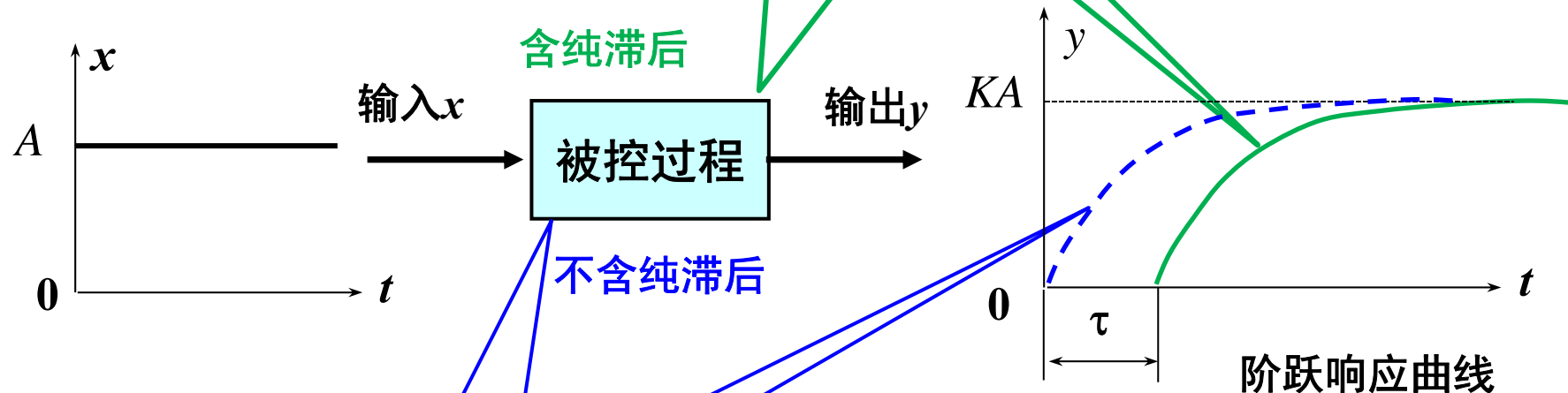
纯滞后环节的传递函数



## 含纯滞后的一阶微分方程及传递函数模型

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{Ke^{-\tau s}}{Ts + 1}$$

$$T \frac{dy}{dt} + y = Kx(t - \tau)$$



$$T \frac{dy}{dt} + y = Kx$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{Ts + 1}$$

## 不含纯滞后的一阶微分方程与传递函数模型

一阶+纯滞后可以描述许多工业对象





# 直接蒸汽加热器模型

## 传热的基本方式

**传导传热：**是热量从物体内部温度较高的部分传递到温度较低的部分或者传递到与之相接触的温度较低的另一个物体的过程。特点：**物质间没有宏观位移**

**对流传热：**流体中质点发生宏观位移而引起的热量传递

**辐射传热：**物体发出辐射能并在周围空间传播而引起的传热

**流量**是指单位时间内流经封闭管道或明渠有效截面的流体量  
当流体量以体积表示时称为**体积流量**  
当流体量以质量表示时称为**质量流量(热力系统采用)**



## 直接蒸汽加热器模型

对流传热是一个热交换过程，参与热交换的流体称为**载热体**

**载热体吸收（或释放）热量的计算方法**

**显热法：**

$$Q = mc(\theta_2 - \theta_1) = C(\theta_2 - \theta_1)$$

$Q$ : 流体吸收或释放的**热量**；  $m$ : 流体的**质量**

$c$ : 流体的**比热**（单位质量流体温度升高1°C所需热量）

$\theta_2$ : 流体离开换热器时的**温度**（单位°C）

$\theta_1$ : 流体进入换热器时的**温度**（单位°C）

$C$ : 流体的**热容**（ $C = mc$ ）

显热法不能用于热交换中出现相变的流体

**焓变法：**

流体在某一状态下的**热焓值** $H$ ：使单位质量流体由0°C变为现状态所需热量（ $H$ 还与压力有关，若热交换过程压力改变不大，可忽略压力影响）

$$Q = m(H_2 - H_1)$$

$H_2$ : 流体离开换热器时的**热焓值**；  $H_1$ : 流体进入换热器时的**热焓值**

无论热交换中是否出现相变，焓变法均适用





# 直接蒸汽加热器模型

显热法:  $Q = mc(\theta_2 - \theta_1) = C(\theta_2 - \theta_1)$

焓变法:  $Q = m(H_2 - H_1)$

取 $0^\circ\text{C}$ 液态流体的热量为参考点，即设 $0^\circ\text{C}$ 液态流体的热量等于0  
则 $\theta^\circ\text{C}$ 流体的热量等于 $mH$

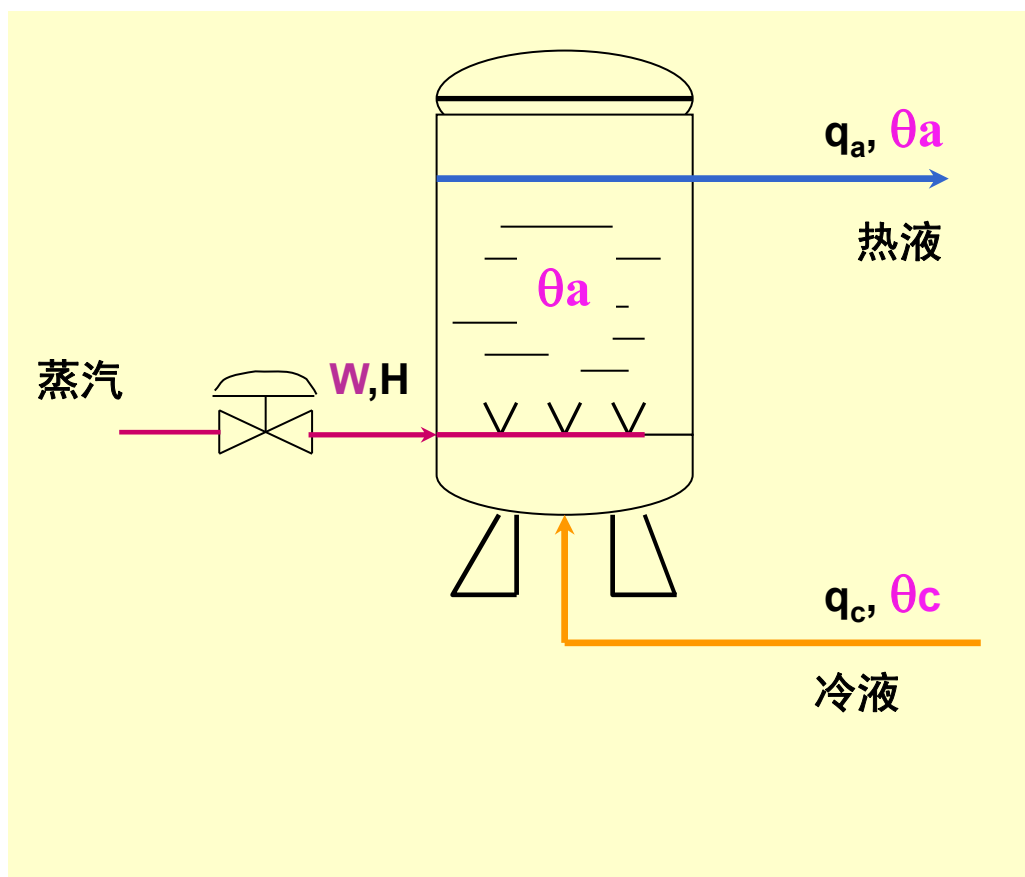
若 $\theta^\circ\text{C}$ 流体是液体，其热量也等于 $mc\theta$

(质量) 流量为 $q$ 的 $\theta^\circ\text{C}$ 流体的热流率等于 $qH$

若(质量) 流量为 $q$ 的 $\theta^\circ\text{C}$ 流体是液体，其热流率也等于 $qc\theta$

# 直接蒸汽加热器模型

➤ 目标：把冷液加热至温度  $\theta_a$



## 假设及简化

(1)理想保温条件：

与罐外环境无热交换

(2)混合充分，集总模型

(3)定常H，

$$\text{定常 } q_a = q_c + W \approx q_c$$

(罐内液体质量不变)

## 输入输出？

输出：  $\theta_a$  热液及罐内液体温度

控制输入：  $W$  蒸汽流量

干扰输入：  $\theta_c$  冷液温度

试求输入输出关系？

# 直接蒸汽加热器模型

罐内液体热量  $Q = mc\theta_a = V\rho c\theta_a$

$m$ : 罐内液体质量

$V$ : 罐内液体体积

$\rho$ : 液体密度

$c$ : 液体比热

根据能量守恒定律

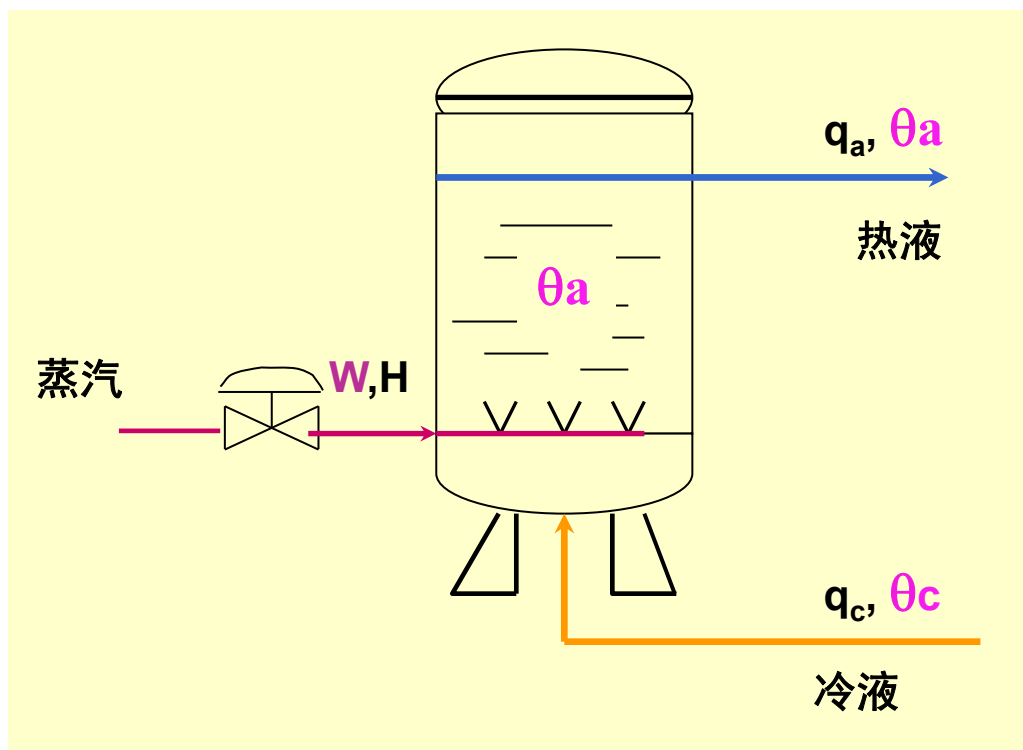
$Q$ 的变化率=总输入热流率-总输出热流率

$$V\rho c \frac{d\theta_a}{dt} = WH + q_c c \theta_c - q_a c \theta_a$$

$H$ : 热液的热焓值

$q_c$ : 冷液流量

$q_a$ : 热液流量



$$T \frac{d\theta_a}{dt} + \theta_a = KW + \theta_c$$

$$T = \frac{V\rho}{q_a}, K = \frac{H}{q_a c}$$

控制通道  $\frac{\Theta_a(s)}{W(s)} = \frac{K}{Ts + 1}$

干扰通道  $\frac{\Theta_a(s)}{\Theta_c(s)} = \frac{1}{Ts + 1}$

## 直接蒸汽加热器模型

- 在工业控制中，我们通常考虑变量的增量（偏移量）方程，如

系统**动态**方程：

$$T \frac{d\theta_a}{dt} + \theta_a = \theta_c + KW$$

\*\*

系统**稳态**方程：

$$\theta_{a0} = \theta_{c0} + KW_0$$

---工作点

- 将动态方程减去稳态方程，其中， $\theta_a = \theta_{a0} + \Delta\theta_a$

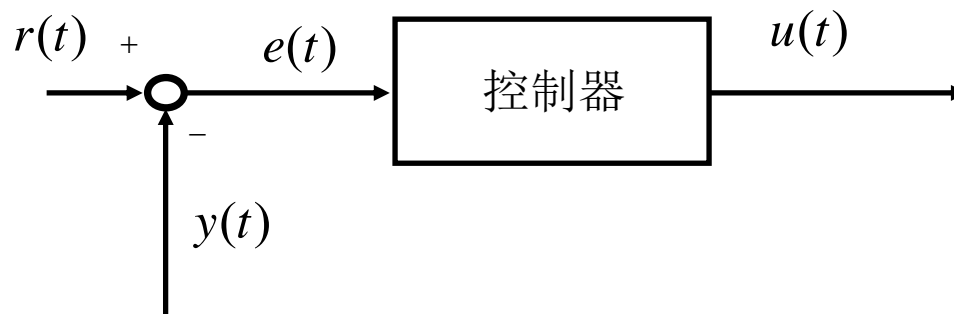
$$T \frac{d\theta_a}{dt} + \theta_a - \theta_{a0} = \theta_c + KW - \theta_{c0} - KW_0$$

- 可以得到增量方程

$$T \frac{d\Delta\theta_a}{dt} + \Delta\theta_a = \Delta\theta_c + K\Delta W$$

除了增量符号 $\Delta$ 之外，增量方程与动态方程具有一样的表达式。对于线性时不变系统，符号 $\Delta$ 通常省略，但是“增量”的思想非常重要。

## PID控制器的模型

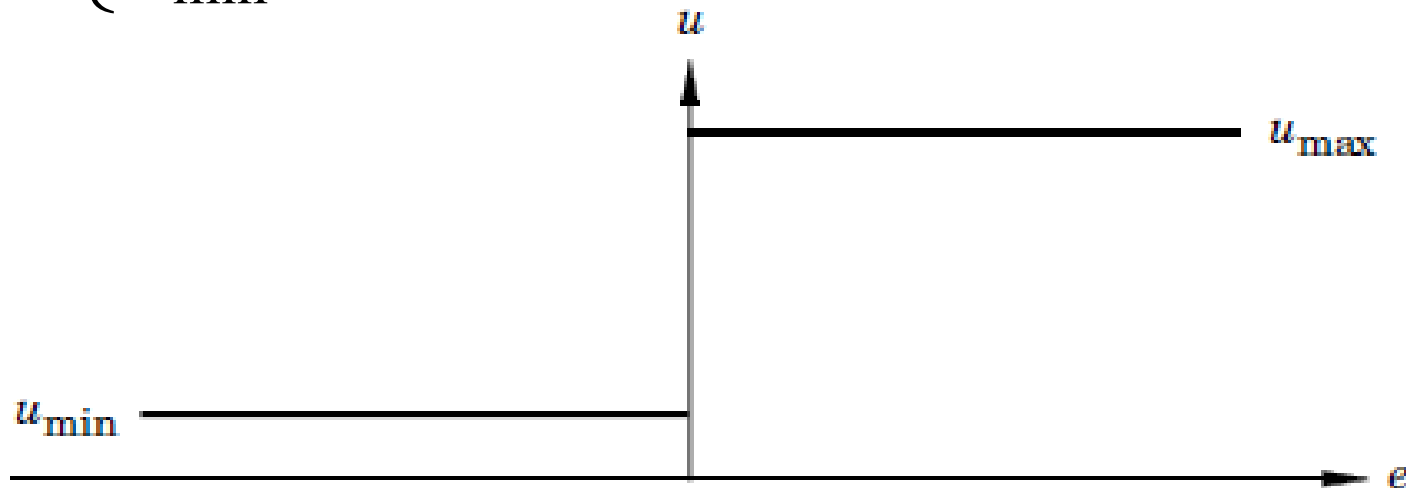


- 控制器的输入是偏差信号 $e$   
控制器的输出是控制变量 $u$
- 由 $e(t)$ 计算得到 $u(t)$ 的过程，即是控制律设计  
设计控制律是控制工程师的一大任务
- PID控制是工程上最常用的控制律  
PID（比例Proportional，积分Integral，微分Derivative）

## PID控制器的模型

最朴素的反馈控制：bang-bang控制

$$u = \begin{cases} u_{\max}, & e > 0 \\ u_{\min}, & e < 0 \end{cases}, \quad e = r - y$$



缺点：抖振



# PID控制器的模型

## P控制

K是工程师设计的控制器增益  
 $u_0$ 是偏差e等于0时的控制变量

$$u = \begin{cases} u_{\max}, & u_0 + Ke \geq u_{\max}; \\ u_0 + Ke, & u_{\max} > u_0 + Ke > u_{\min}; \\ u_{\min}, & u_0 + Ke \leq u_{\min}; \end{cases}$$

如何计算 $u_0$ ?

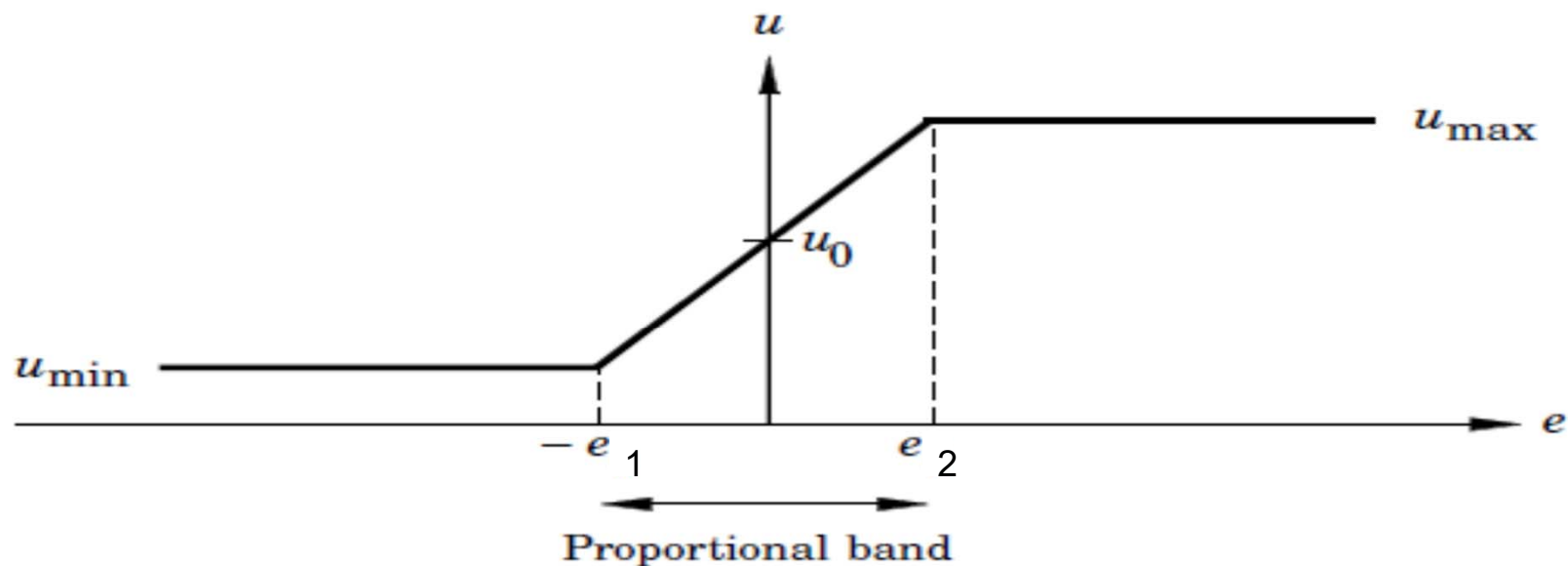


Figure 1.3 The control signal of the P controller.



## PID控制器的模型

---

### PI控制

$$u_0 = \frac{K}{T_i} \int e(t) dt$$

利用积分求 $u_0$ !

$T_i$ 是工程师设计的控制器积分时间

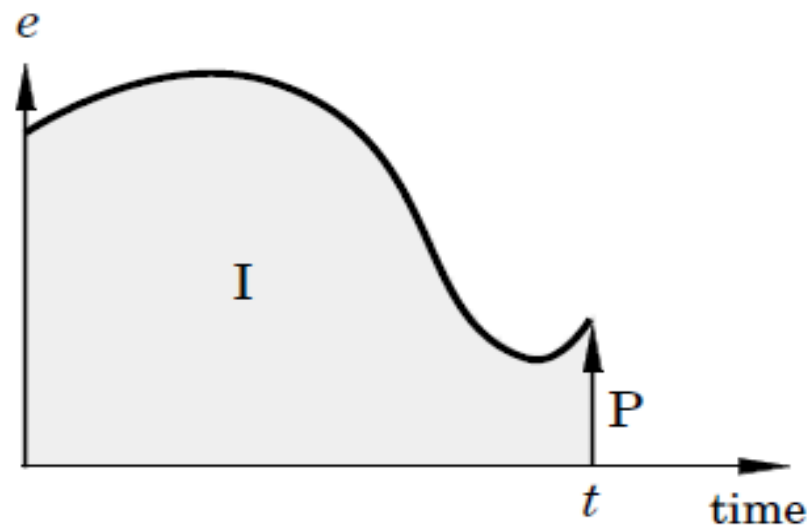
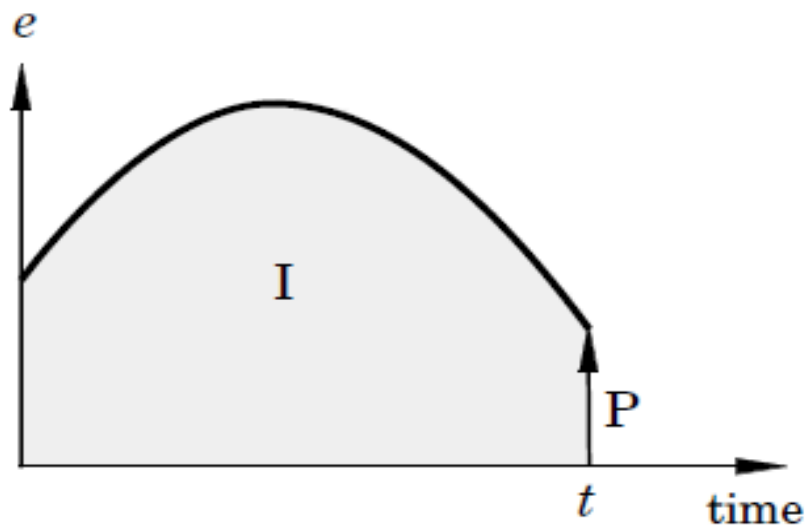
$$u = u_0 + Ke$$

$$u = K \left( \frac{1}{T_i} \int e(t) dt + e \right)$$

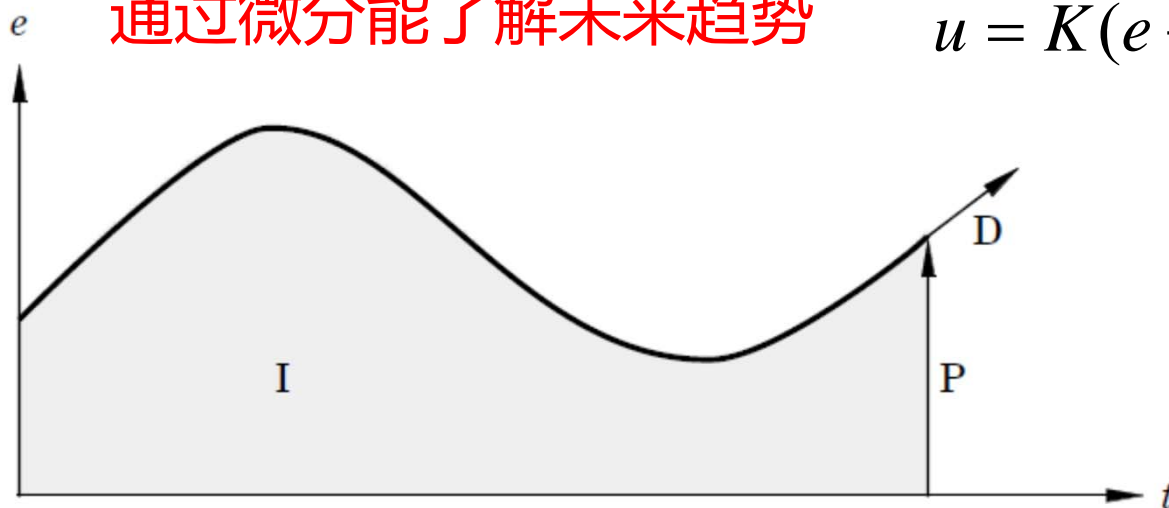
# PID控制器的模型

PI控制用到了过去和现在的偏差信息

PID控制



通过微分能了解未来趋势

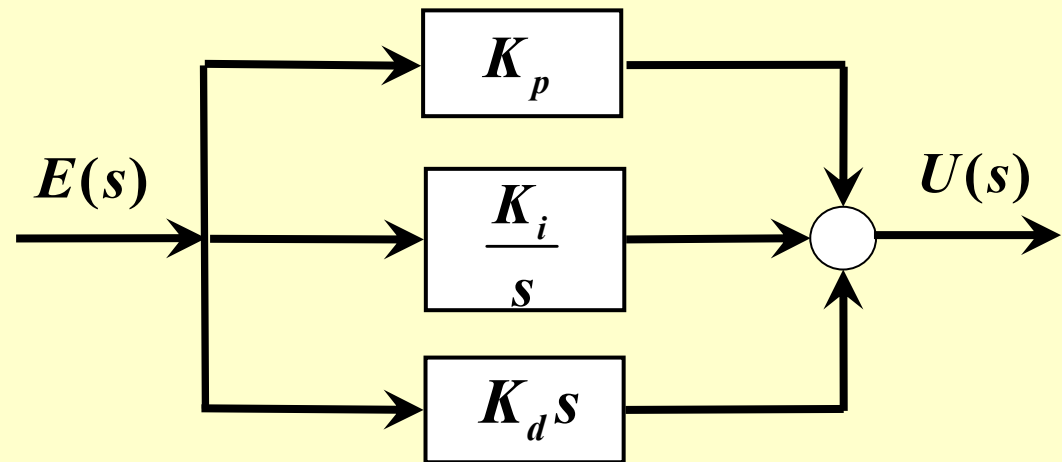


$$u = K(e + \frac{1}{T_i} \int e(t)dt + T_d \frac{de}{dt})$$

$T_d$ 是工程师设计的  
控制器微分时间

## PID控制器的模型

$$\begin{aligned} u &= K \left( e + \frac{1}{T_i} \int e(t) dt + T_d \frac{de}{dt} \right) \\ &= K_p e + K_i \int e(t) dt + K_d \frac{de}{dt} \end{aligned}$$



PID控制器结构图

比例系数  $K_p = K$ ，积分系数  $K_i = \frac{K}{T_i}$ ，微分系数  $K_d = K T_d$

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s}$$

微分环节  $T_d s$  是非因果的

工程中实现之一： $\frac{T_d s}{\tau s + 1} \approx T_d s, \tau \ll 1$

工程中实现之二： $T_d \left( \frac{e(t) - e(t-T)}{T} \right) \approx T_d \frac{de(t)}{dt}$

Thanks !