第四章 级 数

§4.1 复数项级数与幂级数

1. 复数列的极限 设 $\{z_n\}(n=1,2,\cdots)$ 为一复数列, 其中 $z_n=a_n+ib_n$; 又设 $z=a+ib$ 为一确定的复数. 如果任意给定 $\varepsilon>0$, 相应地能找到一个正数 $N(\varepsilon)$, 使 $|z_n-z|<\varepsilon$ 在 $n>N$ 时成立, 则称 z 为复数列 $\{z_n\}$ 当 $n\to\infty$ 时的极限, 记作

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z$$

如果复数序列 $\{z_n\}$ 不收敛，则称 $\{z_n\}$发散, 即

$$\forall z\in\mathbb{C}, \exists\varepsilon>0, \forall N, \exists n, s.t.|z_n-z|>\varepsilon_0$$

两个定理

定理一 复数列 $\{z_n = a_n + ib_n, n = 1, 2, \cdots\}$ 收敛于 $z_0 = a + ib$ 的充要条件是 $\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b.$

定理二 (柯西收敛准则) 复数列 $\{z_n,\ n = 1, 2\cdots\}$ 收敛的充分必要条件是

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon), n > N \Longrightarrow |z_{n+p} - z_n| < \varepsilon, p \in \mathbb{Z}^+$$

2. 级数

设 $\{z_n = a_n + \mathrm{i}b_n, n = 1, 2, \cdots\}$ 为一复数列，表达式

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \cdots$$

称为无穷级数。其前 n 项和 $S_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$ 称为级数的部分和。

如果部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛，则称级数 $\sum z_n$ 收敛；且极限 $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ 称为级数的和。

如果部分和数列 $\{S_n\}$ 不收敛，则称级数 $\sum z_n$ 发散。

又一个定理

定理三 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛的充要条件是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛.

因此，复数项级数的收敛问题等价于实数项级数的收敛问题。

推论： 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 收敛的必要条件是 $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$

还有一个定理

定理四 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}z_n$ 也收敛，且有不等式

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}z_n\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$$

证明: 因 $\sum_n|z_n|=\sum_n\sqrt{a_n^2+b_n^2}$, $|a_n|,|b_n|\le\sqrt{a_n^2+b_n^2}$,

所以级数 $\sum_n|a_n|$ 和 $\sum_n|b_n|$ 都收敛，从而 $\sum_n a_n$ 和 $\sum_n b_n$

也都收敛，即 $\sum_n z_n$ 收敛(定理一)；

又因 $\left|\sum_{k=1}^{n}z_k\right|\le\sum_{k=1}^{n}|z_k|$，因此

$$\lim_{n\to\infty}\left|\sum_{k=1}^{n}z_k\right|\le\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}|z_k|\iff\left|\sum_{n=1}^{\infty}z_n\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$$

类似实变函数

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|$ 收敛，则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$绝对收敛；非绝对收敛的收敛级数称为条件收敛级数。

容易证明

$\sum_n z_n$ 绝对收敛的充要条件是$\sum_n a_n$ 和 $\sum_n b_n$ 绝对收敛

因为 $\sum_n |z_n|$ 的各项都是非负的实数，所以它的收敛也可用正项级数的判定法来判.

一些例子

例 1：下列数列是否收敛？如果收敛，求出其极限.

$$1)\, z_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)e^{\frac{\pi i}{n}}; \qquad 2)\, z_n = n\cos(in)$$

例 1：下列级数是否收敛？是否绝对收敛？

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(1+\frac{i}{n}\right); \qquad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(8i)^n}{n!}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{2^n} i\right]$$

3. 复函数序列与复函数项级数

定义: 设 $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ 为定义在区域 D 的复变函数序列, $f(z)$ 是定义在 D 上的一个函数。如 $\forall z \in D, \varepsilon > 0$, $\exists N = N(\varepsilon, z)$, 使得当 $n > N$ 时, 有 $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$, 则称复函数序列 $\{f_n(z)\}$ 的极限为 $f(z)$。

定义: 设 $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ 为定义在区域 D 的复变函数序列. 称

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots$$

为函数项级数。而它的前 n 项之和 $S_n(z)$ 为部分和函数.

3. 复函数序列与复函数项级数（续）

当 $f_n(z) = c_{n-1}(z-a)^{n-1}$ 时，就得到函数项级数的特殊情形：

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n &= c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 \\ &\quad + \cdots + c_n(z-a)^n + \cdots\end{aligned}$$

这种级数称为幂级数

级数敛散性的阿贝尔 (Abel) 定理

1. 如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在 $z = z_0 (\neq 0)$ 收敛，则对满足 $|z| < |z_0|$ 的 z，级数必绝对收敛；

2. 如果级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在 $z = z_0 (\neq 0)$ 发散，则对满足 $|z| > |z_0|$ 的 z，级数必发散.

证明：(1) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n$ 收敛 $\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} c_n z_0^n = 0$,即存在 M 使得 $\forall n \in \mathbb{N}$, $|c_n z_0^n| < M$. 因此，若 $|z| < |z_0|$, 则 $|z|/|z_0| = q < 1$,从而

$$|c_n z^n| = |c_n z_0^n| \left|\frac{z}{z_0}\right|^n < Mq^n$$

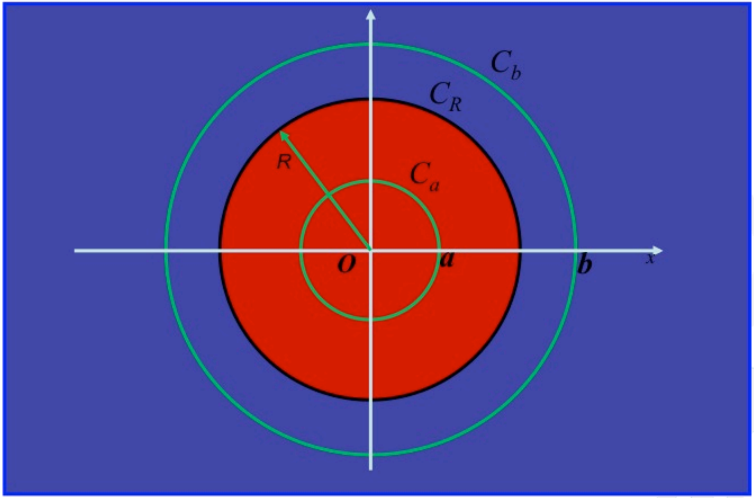
...... (2) 的证明，易从反证法推得

收敛圆和收敛半径

利用阿贝尔定理，可以定出幂级数的收敛范围，对一个幂级数来说，它的收敛情况有三种：

1. 对所有的正实数都是收敛的．这时，根据阿贝尔定理可知级数在复平面内处处绝对收敛；
2. 对所有的正实数除 $z=0$ 外都是发散的。这时，级数在复平面内除原点外处处发散；
3. 既存在使级数收敛的正实数，也存在使级数发散的正实数。假设我们知道当 $z=a>0$ 时，级数收敛；$z=b>a$ 时，级数发散.....

收敛圆和收敛半径（续）



收敛圆和收敛半径（续）

当 a 由小逐渐变大、b 从大逐渐变小时, C_a 和 C_b 必定逐渐接近, 最终重合为一个以原点为中心、R 为半径的圆周 C_R. 在 C_R 的内部都是红色, 外部都是蓝色. 这个红蓝两色的分界圆周 C_R 称为幂级数的收敛圆

在收敛圆的外部, 级数发散；收敛圆的内部, 级数绝对收敛。收敛圆的半径 R 称为收敛半径. 所以幂级数 $\sum_n c_n z^n$ 的收敛范围是以原点为中心的圆域. 对幂级数 $\sum_n c_n(z-a)^n$ 来说, 收敛范围是以 $z=a$ 为中心的圆域.

在收敛圆周上是否收敛, 则不一定.

例子

例 1. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ 的收敛范围以及和函数

收敛半径的求法

定理： 对于幂级数 $\sum_n c_n z^n$，如下列极限之一存在

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = R \quad 或 \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}} = R$$

则 R 就是该幂级数的收敛半径。

证明:(1) 可用实变级数中正项级数的 D'Alembert 判别法

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}z^{n+1}}{c_n z^n}\right| = \frac{|z|}{R} \Longrightarrow \sum_{n=0}^{\infty}|c_n z^n| 收敛,\ \forall |z| < R$$

所以级数在圆 $|z| = R$ 内绝对收敛；

证明（续）

再证明当 $|z| > R$ 时级数发散。

反证法：假设在圆外有一点 z_0 使得 $\sum_n c_n z_0^n$ 收敛。则对任意 z_1 满足 $R < |z_1| < |z_0|$，级数 $\sum_n c_n z_1^n$ 收敛。但此时

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_{n+1} z_1^{n+1}}{c_n z_1^n} \right| = \frac{|z_1|}{R} > 1 \text{ 矛盾！}$$

（2）证明略。

例子

例 2. 求下列幂级数的收敛半径

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n^3}$ (并讨论在收敛圆周上的情形);
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(z-1)^n}{n}$ (并讨论 $z=0,2$ 的情形);
3. $\sum_{n=(}^{\infty} \cos \mathrm{i}n) z^n$

幂级数的运算和性质

复变幂级数也能进行有理运算

设 $f(z)=\sum_n a_n z^n$, $R_f=r_1$; $g(z)=\sum_n b_n z^n$, $R_g=r_2$.
在以原点为中心, r_1,r_2 中较小的一个为半径的圆内, 这两个幂级数都绝对收敛, 可以象多项式那样进行相加, 相减, 相乘, 所得到的幂级数的和函数分别就是 $f(z)$ 与 $g(z)$ 的和, 差与积.

复合运算

如果当 $|z|<r$ 时 $f(z)=\sum_n a_n z^n$ 收敛; 又设当 $|z|<R$ 时 $g(z)$ 解析且满足 $|g(z)|<r$. 则当 $|z|<R$ 时,

$$f[g(z)]=\sum_{n=0}^{\infty} a_n[g(z)]^n$$

例子

例 3. 把函数 $\dfrac{1}{z-b}$ 表成形如 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的幂级数，其中 a 和 b 是不相等的两个复常数。

定理

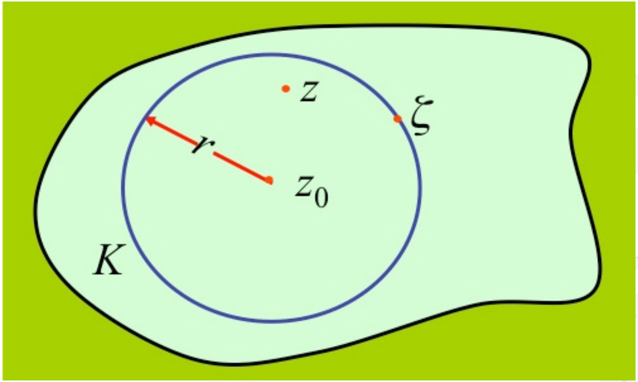
设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 的收敛半径为 R, 则

1. 它的和函数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 是收敛圆 $|z-a|<R$ 内的解析函数;
2. $f(z)$ 在收敛圆内的导数可由对其幂函数逐项求导得到，即 $f'(z)=\sum_{n=0}^{\infty} n\,c_n(z-a)^{n-1}$;
3. $f(z)$ 在收敛圆内可逐项积分，即 $\displaystyle\int_a^z f(\zeta)\mathrm{d}\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n+1}(z-a)^{n+1}$,

   或 $$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{\infty} c_n\int_C (z-a)^n\mathrm{d}z,\quad C\subset|z-a|<R$$

§4.2 泰勒级数

设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析，而 $|z-z_0|=r$ 为 D 内以 z_0 为中心的任一圆周，它与它的内部全含于 D，把它记作 K，又设 z 为 K 内任一点



由柯西积分公式

$$f(z)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_K \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta,\quad \text{且}\ \frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{\zeta-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}}$$

由于积分变量 ζ 取在圆周 K 上，而点 z 在 K 的内部，有

$$\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|<1,\Longrightarrow \frac{1}{\zeta-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}$$

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_K \frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\right](z-z_0)^n \\ &+ \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_K \left[\sum_{n=N}^{\infty}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n\right]\mathrm{d}\zeta \end{aligned}$$

由解析函数高阶导数公式

$$\iff f(z) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n + R_N(z)$$

$$\text{其中}\, R_N(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_K \Big[\sum_{n=N}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n\Big]\mathrm{d}\zeta$$

如果能证明 $\lim_{N\to\infty} R_N(z) = 0$ 在 K 内成立，则

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

在 K 内成立，即 $f(z)$ 在 K 内用幂级数表达.

令 $\left|\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right| = \dfrac{|z-z_0|}{r} = q$, q 与 ζ 无关且 $0 \le q < 1$. 由 K 含于 D, $f(z)$ 在 D 内解析, 在 K 上连续、有界, 因此在 K 上存在正实数 M 使 $|f(z)| \le M$. 因此

$$
\begin{aligned}
|R_N(z)| &\le \frac{1}{2\pi}\oint_K \left|\sum_{n=N}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n\right| \mathrm{d}s \\
&\le \frac{1}{2\pi}\oint_K \sum_{n=N}^{\infty} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-z_0|}\left|\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|^n \mathrm{d}s \\
&\le \frac{1}{2\pi}\sum_{n=N}^{\infty} \frac{M}{r}q^n \cdot 2\pi r = \frac{Mq^N}{1-q} \to 0, \quad N \to \infty
\end{aligned}
$$

泰勒展开定理

由前面分析，展开式 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$ 在 K 内成立。这称为 $f(z)$ 在 z_0 的泰勒展开式，它右端的级数称为 $f(z)$ 在 z_0 处的泰勒级数。

而圆周 K 的半径可以任意增大，只要 K 在 D 内。所以，如果 z_0 到 D 的边界上各点的最短距离为 d，则 $f(z)$ 在 z_0 的泰勒展开式在圆域 $|z-z_0|<d$ 内成立.

泰勒展开定理

定理: 设 $f(z)$ 在区域 D 内解析, z_0 为 D 内的一点, d 为 z_0 到 D 的边界上各点的最短距离, 则当 $|z-z_0|<d$ 时,

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

成立，其中

$$c_n=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},\quad n\in\mathbb{N}$$

注: 如果 $f(z)$ 在 z_0 解析, 则使 $f(z)$ 在 z_0 的泰勒展开式成立的圆域的半径 R 等于从 z_0 到 $f(z)$ 的距 z_0最近一个奇点α 的距离, 即 $R=|z_0-\alpha|$.

泰勒展开的唯一性

任何解析函数展开成幂级数的结果就是泰勒级数，因而是唯一的。利用泰勒展开式，可以直接通过计算系数：

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

把 $f(z)$ 在 z_0 展开成幂级数，这被称作直接展开法。

例如：$\mathrm{e}^z, \sin z, \cos z$ 在 $z = 0$ 的泰勒展开式。

这些级数的收敛半径分别是多少??

作业四-A (10/16 23:59 前提交至“学在浙大”)

pp. 114 习题四：1.(2), 3.(2)(4)(6), 4. (1)(2)(3)

间接展开法

除直接法外，也可以借助一些已知函数的展开式，利用幂级数的运算性质和分析性质，以唯一性为依据来得出一个函数的泰勒展开式，此方法称为间接展开法。

例如 $\sin z$ 在 $z=0$ 的泰勒展开式也可用间接展开法得出：

$$\sin z = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathrm{i}z)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{i}z)^n}{n!}\right]$$

$$= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad |z| < +\infty$$

例子

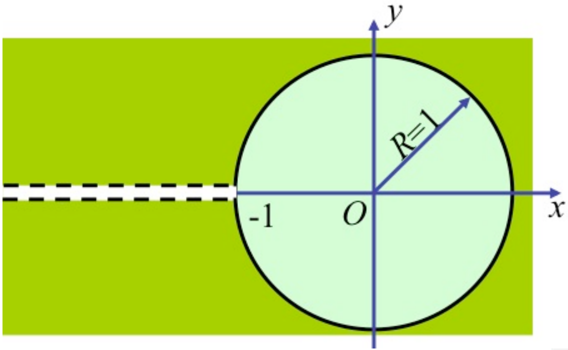
例 1：把函数 $1/(1+z)^2$ 展开成 z 的级数

解：$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \cdots + (-1)^n z^n + \cdots, \ |z| < 1$

$$\frac{1}{(1+z)^2} = -\left(\frac{1}{1+z}\right)' = \cdots$$

例子

例 2： 求对数函数主值 $\ln(1+z)$ 在 $z=0$ 的幂级数展开式



几个推论

推论 1

1. $f(z)$在点 z_0 解析$\Longleftrightarrow f(z)$在 z_0 的某领域内可展开为 $z-z_0$ 的幂级数;
2. $f(z)$在区域 D 解析$\Longleftrightarrow f(z)$在 D 内任一点可展开为 $z-z_0$ 的幂级数

小结: 函数 $f(z)$ 在区域 D 解析的等价条件有:

- (i) 函数 $f(z)$ 在区域 D 内可导;
- (ii) $\mathrm{Re}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$ 在区域 D 内可微且满足 CR 条件;
- (iii) 函数 $f(z)$ 在区域 D 内连续且积分与路径无关;
- (iv) 函数 $f(z)$ 在区域 D 内可展开为幂级数。

几个推论 (续)

推论 2: 设函数 $f(z)$ 在区域 D 内解析, $z_0 \in D, R = \mathrm{dist}(z_0, \partial D)$; 则 $f(z)$ 在 $|z - z_0| < R$ 内可展开为 $z - z_0$ 的幂级数。

推论 3: 幂级数的和函数在其收敛圆周上至少有一个奇点. ——即使幂级数在其收敛圆周上处处收敛!!

例如: $f(z) = \sum_n \frac{z^n}{n^2}$ 在 $|z| \leq 1$ 上绝对收敛;

但 $f'(z) = \sum_n \frac{z^{n-1}}{n}$ 显然在 $z = 1$ 发散。因此 $z = 1$ 为奇点

几个推论 (续)

推论 4: 设函数 $f(z)$ 在点 z_0 解析，且有泰勒展开式 $f(z) = \sum_n c_n(z-z_0)^n$；而 α 是 $f(z)$ 距 z_0 最近的一个奇点，则泰勒级数的收敛半径 $R = |z_0 - \alpha|$.

例如

$$f(z) = \frac{1}{z^2+z-6} = \sum_n C_n z^n \text{ 的收敛半径是} R = 2;$$

$$f(z) = \frac{1}{z^2+z-6} = \sum_n C_n (z-\mathrm{i})^n \text{ 的收敛半径是} R = \sqrt{\mathrm{i}^2+2^2} = \sqrt{5};$$

评论

在实变函数中有些不易理解的问题，一到复变函数中就成为显然的事情。例如在实数范围内，展开式

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots$$

的成立必须受 $|x| < 1$ 的限制。这一点往往使人难以理解——因为上式左端的函数对任何实数都是确定的而且是可导的。

评论（续）

而如果把函数中的 x 换成 z, 在复平面内来看函数

$$\frac{1}{1+z^2}=1-z^2+z^4-\cdots+(-1)^n z^{2n}+\cdots,$$

它有两个奇点 $\pm\mathrm{i}$, 而这两个奇点都在此函数的展开式的收敛圆周上, 所以这个级数的收敛半径只能等于 1. 因此, 即使我们只关心 z 的实数值, 但复平面上的奇点形成了限制.

§4.3 解析函数零点孤立性（解析函数的性质）

定义：设函数 $f(z)$ 在解析区域 D 内一点 z_0 处的值为零，则称 z_0 是解析函数 $f(z)$ 的零点。

定义：设函数 $f(z)$ 在解析区域 D 内一点 z_0 处的值为零，而在 z_0 的某个去心领域 $D(z_0,\delta)=\{z:0<|z-z_0|<\delta\}$ 内处处不为零，则称 z_0 是解析函数 $f(z)$ 的孤立零点。

定义：设解析函数 $f(z)$ 在解析区域 D 内一点 z_0 的某个领域 $D(z_0,\delta)=\{z:0<|z-z_0|<\delta\}$ 内可表示成

$$f(z)=(z-z_0)^m\psi(z),\ m\geq 1$$

其中 $\psi(z)$ 在 z_0 解析且 $\psi(z_0)\neq 0$，则称 z_0 是解析函数 $f(z)$ 的 m 阶零点；当 $m=1$ 时，称为单零点。

定理和推论

定理： 设 $f(z)$ 在区域 D 内解析，并且存在一列两两不相同的零点 $\{z_n\}$ 收敛于 z_0，则 $f(z)$ 在 D 内恒为 0。

推论 1: 不恒为零的解析函数的零点必定是孤立零点。

推论 2: 设函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在 D 内解析，并且存在一列两两不相同的零点 $\{z_n\}$ 收敛于 z_0，有 $f(z_n) = g(z_n)$，则在 D 内恒有 $f(z) = g(z)$。

定理证明： 先从 z_0 的一个小领域出发；证明 f 的幂级数展开系数均为 0；反证法。

两点发现

发现 1： 零点的孤立性是解析函数有别于实可微函数的又一重要性质。例如：

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$x = 0, \dfrac{1}{n\pi}$ 均是 $f(x)$ 的零点。其中 0 是聚点不是孤立点

发现 2： 一切在实轴上成立的恒等式。例如：

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1, \quad \operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$$

在复平面内都成立。

定理

z_0 为不恒为 0 的解析函数 $f(z)$ 的 m 阶零点的充要条件是:

$$f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) = 0,\ f^{(m)}(z_0) \neq 0$$

证明：作业！

两个例子

例 1：考察函数 $f(z) = z - \sin z$ 在原点的性质

例 2：求函数 $f(z) = \sin z - 1$ 的全部零点以及它们各自的阶数

§4.4 洛朗级数

一个以 z_0 为中心的圆域内解析的函数 $f(z)$, 可以在该圆域内展开成 $z-z_0$ 的幂级数. 但如果 $f(z)$ 在 z_0 处不解析, 则在 z_0 的邻域内就不能用 $z-z_0$ 的幂级数来表示. 但是这种情况在实际问题中却经常遇到.

因此, 在本节中将讨论在以 z_0 为中心的圆环域内的非解析函数的级数表示法。即有以下形式的双边级数:

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} &= \cdots + c_n(z-z_0)^{-n} + \cdots + c_{-1}(z-z_0)^{-1} \\ &\quad + c_0 + c_1(z-z_0) + \cdots + c_n(z-z_0)^n + \cdots \\ &= I_n + I_p\end{aligned}$$

洛朗级数

只有正幂项 I_p 和负幂项 I_n都收敛才认为原级数收敛于它们的和。正幂项是一幂级数，设其收敛半径为 R_p; 对负幂项，令 $\zeta = (z - z_0)^{-1}$，可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z - z_0)^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\zeta^n$$

这是 z 的幂级数, 设收敛半径为 $R : |\zeta| < R \Longrightarrow |z - z_0| > 1/R := R_n$

因此, 只有在 $R_n < |z - z_0| < R_p$ 的圆环域原级数才收敛

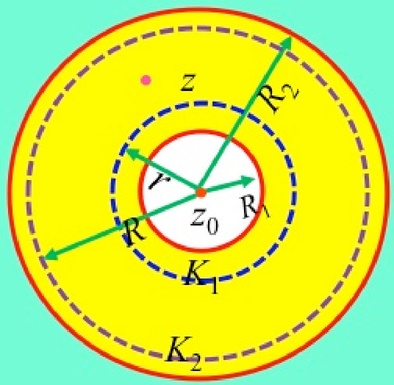
显然，如果 $R_n > R_p$, 双边级数处处发散。

推广的幂级数

定理：设 $f(z)$ 在圆环域 $R_1 < |z-z_0| < R_2$ 内解析，则

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

其中 $c_n = \dfrac{1}{2\pi \mathrm{i}} \displaystyle\oint_C \frac{f(\zeta)\mathrm{d}\zeta}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$. C 为在圆环域内绕 z_0 的任何一条正向简单闭曲线.



洛朗级数

这称为 $f(z)$ 在以 z_0 为中心的圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内的洛朗 (Laurent) 展开式, 它右端的级数称为 $f(z)$ 在此圆环域内的洛朗级数.

一个在某圆环域内解析的函数展开为含有正, 负幂项的级数是唯一的, 这个级数就是 $f(z)$ 的洛朗级数.

根据由正负整次幂项组成的级数的唯一性, 一般可以用代数运算、代换、求导和积分等方法去展开, 以求得洛朗级数的展开式。

例 1：把 $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在复平面上展开为 z 的幂级数

先把 $f(z)$ 用部分分式表示：$f(z)=\dfrac{1}{1-z}-\dfrac{1}{2-z}$

i) 在 $0<|z|<1$ 内：$f(z)=\dfrac{1}{1-z}-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1-\frac{z}{2}}$

注意:展开式中有负幂次项吗?

ii) 在 $1<|z|<2$ 内：$f(z)=-\dfrac{1}{z}\dfrac{1}{1-\frac{1}{z}}-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1-\frac{z}{2}}$

$$=-\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}z^{-n}-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^{n}$$

把 $f(z)=z^3e^{\frac{1}{z}}$ 展开成洛朗级数

除了在原点 $z=0$ 外，$f(z)$ 在整个复平面解析。

因为 $e^\zeta = 1+\zeta+\dfrac{\zeta}{2!}+\cdots+\dfrac{z^n}{n!}+\cdots$

$$\begin{aligned} z^3e^{\frac{1}{z}} &= z^3\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\cdots+\frac{1}{n!z^n}+\cdots\right) \\ &= z^3+z^2+\frac{z}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24z}+\cdots, \quad 0<|z|<+\infty \end{aligned}$$

注意：一个函数可以以奇点为中心展开为洛朗级数，也可以以非奇点为中心展开

函数可以在以 z_0 为中心的(由奇点隔开的)不同圆环域内解析，因而在各个不同的圆环域中有不同的洛朗展开式(包括泰勒展开式作为它的特例).

我们不要把这种情形与洛朗展开式的唯一性相混淆：所谓洛朗展开式的唯一性，是指函数在某一个给定的圆环域内的洛朗展开式是唯一的.

例如：分别在 $z = \mathrm{i}$ 和 $z = -\mathrm{i}$ 展开函数 $f(z) = \dfrac{1-2\mathrm{i}}{z(z+\mathrm{i})}$

以 i 为中心展开

1. 在 $|z-\mathrm{i}| < 1$ 中 $\Longrightarrow$ 泰勒展开式；
2. 在 $1 < |z-\mathrm{i}| < 2$ 中 $\Longrightarrow$ 洛朗展开式；
3. 在 $2 < |z-\mathrm{i}| < +\infty$ 中 $\Longrightarrow$ 洛朗展开式。

以 $-\mathrm{i}$ 为中心展开

1. 在 $0 < |z+\mathrm{i}| < 1$ 中 $\Longrightarrow$ 洛朗展开式；
2. 在 $1 < |z-\mathrm{i}| < +\infty$ 中 $\Longrightarrow$ 洛朗展开式.

把 $\sin\dfrac{z}{z-1}$ 在 $0<|z-1|<+\infty$ 中展开成洛朗级数

$$
\begin{aligned}
& \sin\frac{z}{z-1} \\
= \ & \sin\left(1+\frac{1}{z-1}\right) \\
= \ & \sin 1 \times \cos\frac{1}{z-1} + \cos 1 \times \sin\frac{1}{z-1} \\
= \ & \sin 1\left[1-\frac{1}{2}\frac{1}{(z-1)^2}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n)!(z-1)^n}+\cdots\right] \\
+ \ & \cos 1\left[\frac{1}{z-1}-\frac{1}{3!}\frac{1}{(z-1)^3}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!(z-1)^{2n+1}}+\cdots\right]
\end{aligned}
$$

洛朗展开定理的一大功能

计算积分，利用

$$c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\mathrm{d}z \Longleftrightarrow \oint_C f(z)\mathrm{d}z=2\pi i\, c_{-1}$$

其中 C 为圆环域 $R_1<|z-z_0|<R_2$ 内的任何一条简单闭曲线, $f(z)$ 在此圆环域内解析

例 3：求积分 $I=\oint_{|z-z_0|=r} e^{\frac{1}{z-z_0}}(z-z_0)^{-3}\mathrm{d}z$

解：$f(z)=e^{\frac{1}{z-z_0}}(z-z_0)^{-3}$ 在 $0<|z-z_0|<+\infty$ 内解析

例 4：求积分 $I = \oint_{|z|=2} \ln\left(1 + \frac{1}{z}\right) \mathrm{d}z$

解：$\ln(1+\zeta) = \int_C \frac{1}{1+\zeta} \mathrm{d}\zeta = \zeta - \frac{\zeta^2}{2} + \frac{\zeta^3}{3} + \cdots, \ |\zeta| < 1$

$\ln\left(1 + \frac{1}{z}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^{-n}, \ 1 < |z| < +\infty$

$\Longrightarrow c_{-1} = 1 \Longleftrightarrow I = 2\pi\mathrm{i}\, c_{-1} = 2\pi\mathrm{i}$

例 5: 求积分 $I = \oint_{|z|=2} \frac{ze^{\frac{1}{z}}}{1-z} \mathrm{d}z$

解: $f(z)$ 在圆环 $1 < |z| < +\infty$ 内解析, 而 $|z| = 2$ 被包含在此圆环域内, 展开得:

$$f(z) = -e^{\frac{1}{z}} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}\right)$$

$$= -\left(1 + \frac{2}{z} + \frac{5}{2z^2} + \cdots\right)$$

$c_{-1} = -2, \implies I = -4\pi i$

作业四-B (10/16 23:59 前提交至"学在浙大")

pp. 114 习题四： 7, 9, 10, 13.(2)(5)(6), 15; 证明讲义 pp.41 的定理