

2020 秋冬学期复变函数回忆卷 (非数学系)

2020-11-19

禁止用于商业用途, 请勿去除水印

1. 计算 $(1+i)^{2020}$
2. 在复平面上标出 i , $\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ 及和, 并证明 $\tan \frac{3\pi}{8} = 1 + \sqrt{2}$
3. $z = x + iy$, $f(z) = x^2 + iy^2$, 问 $f(z)$ 在何处可导? 在何处解析? 在可导处写出它的导数。
4. $\int z^3 + (\operatorname{Re} z)^3 dz$, 路径从 0 到 $1+i$
5. $\oint_{|z|=1} \frac{z}{1-e^{7z}} dz$
6. 将 $f(z) = \frac{1}{z(z-1)^2}$ 分别在 $0 < |z| < 1$ 和 $|z-1| > 1$ 处展开成洛朗级数
7. $\oint_{|z|=1} \frac{1}{z^2 \ln(z+e)} dz$
8. $\int_0^\infty \frac{x \sin x + 1}{x^2 + 1} dx$
9. 求 $f(z) = \frac{\cos \pi z}{z^2 \sin \pi z}$ 在各个奇点处的留数
10. 求保角变换, 将复平面上除 x 负半轴及原点 (即 $(-\infty, 0]$), 变换为单位圆。 $w(1) = 0$, $\lim_{z \rightarrow 0} w(z) = 1$
11. 求保角变换, 将圆心在原点处半径为 2 的圆映射到自身。 $w(2) = 2$, $w(1) = 0$

12. 求 $f(t) = \int_0^t \tau \sin \tau d\tau + t^2 u(t-1)$ 的 Laplace 变换

13. 求 $F(s) = \ln(1 + \frac{1}{s})$ 的 Laplace 逆变换

14. $f(z)$ 在 $|z| \leq 1$ 上解析, 且 $|z| = 1$ 时 $|f(z)| \leq 1$

(1) 证明: $|f'(0)| \leq 1$

(2) 证明: $|f'(z)| \leq \frac{1}{1-|z|^2}$. (提示: 利用 $f(z)$ 与 $g(\zeta) = \frac{\zeta + z}{1 + \bar{z}\zeta}$ 的复合函数)