第7章 动态电路的暂态分析

本章主要讨论：

- 换路定则与初始条件
- 一阶电路的过渡过程
- 全响应与三要素法
- 二阶电路的过渡过程（RLC零输入响应）
- 阶跃响应与冲激响应

7.1 电路过渡过程与换路定则

一、动态电路与过渡过程

✧ **动态电路**：含有动态（储能）元件（*L*、*C*）的电路。

✧ **过渡过程**：电路结构、参数或电源的突然改变，称为**换路**。换路后，电路从一稳定状态转为另一种稳定状态的过程，称为**过渡过程**。

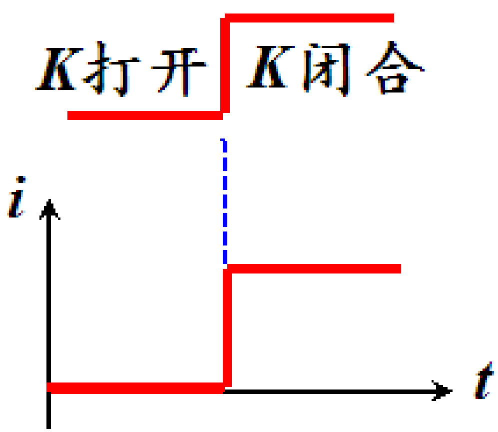
✧ **暂态分析**：动态电路的过渡过程通常可用微分方程表示。根据电路列写并求解微分方程，称为**暂态分析**，也称为**过渡过程分析**。

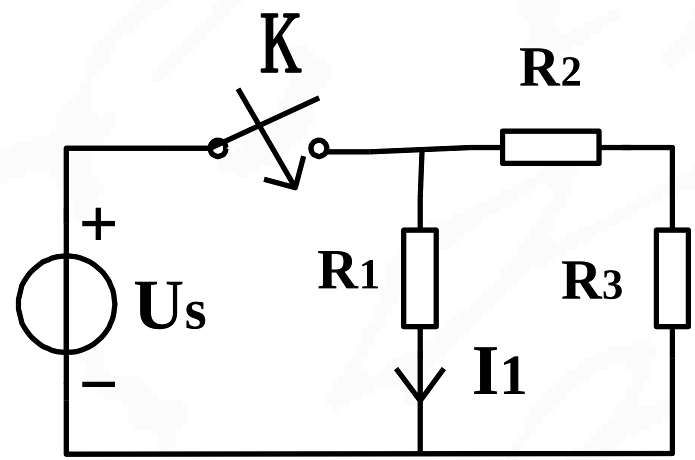
✧ 对于纯电阻电路（非动态电路），电路中电压和电流的变化是“立即”完成的。

〖示例〗电路如图，开关合上，则电流如何变？以电阻R_1上的电流I_1为：

K打开： $I_1 = 0$

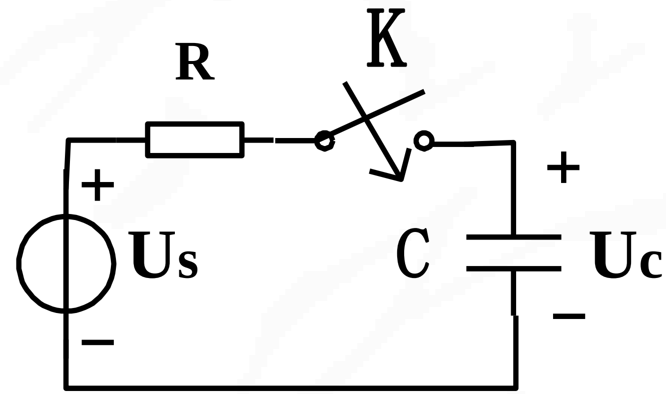
K闭合： $I_1 = \dfrac{U_S}{R_1}$





✧ 对于存在电容或电感的电路，电容元件的电压（电荷）和电感元件的电流（磁链）变化一般需要时间（过渡过程时间）。

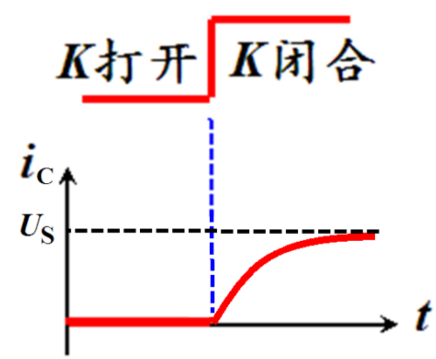
〖示例1〗如果电容原来不带电，在开关闭合后，电容电压从0变为 U_S，则电容电流为：



$$i_C = C\frac{du_C}{dt} = C\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta u_C}{\Delta t}$$

$$= C\lim_{\Delta t\to 0}\frac{U_S - 0}{\Delta t}$$

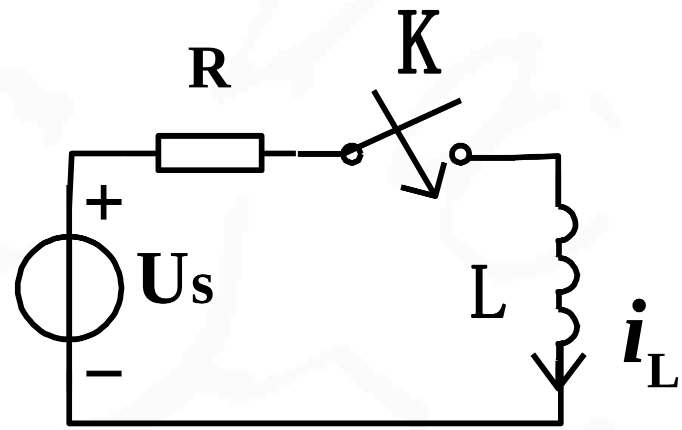
若电容电压能“瞬间”从0升到 U_S，则必有 $i_C \to \infty$，显然不可能。



电容电压上升需要时间！

〖示例2〗电感电路

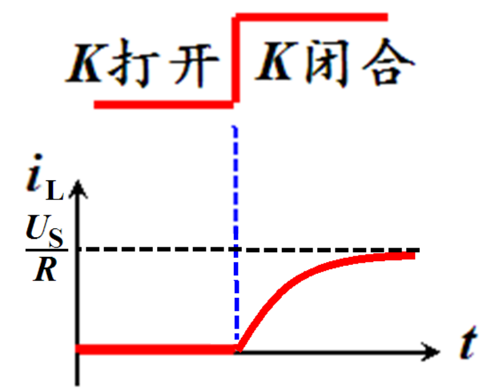
设开关K闭合前$i_L=0$，K闭合后达到稳态时电感电流为：



$$I_L=\frac{U_S}{R}$$

若电感电流能“**瞬间**”从0上升到$\frac{U_S}{R}$，则

$$u_L=L\frac{di_L}{dt}=L\lim_{\Delta t\to 0}\frac{I_L-0}{\Delta t}\to\infty$$

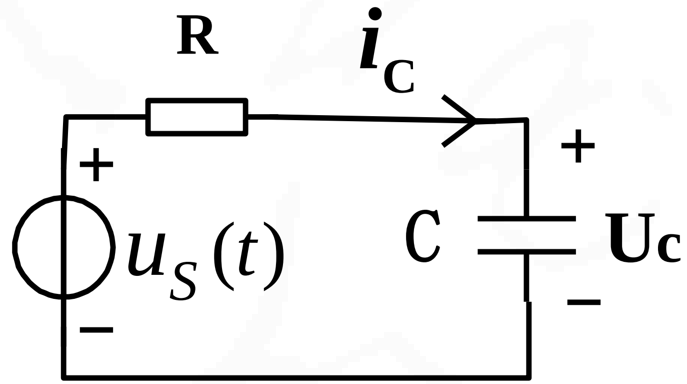


显然不可能。**电感电流上升需要时间！**

- ✧ 在过渡过程的分析中，外界对电路的输入称为激励，电路在激励作用下电路所产生的电压电流，称为响应（或输出）。
- ✧ 在激励作用下足够长时间后所建立的状态，称为强迫状态；当激励是恒定（直流）或周期性信号（正弦交流或非正弦周期）时，强迫状态就是稳定状态。求解稳定状态，称为稳态分析。
- ✧ 对动态电路的过渡过程进行分析称为暂态分析（或过渡过程分析）。暂态分析中，任一时刻的响应不仅与当前的激励有关，还与过去的状态有关。
- ✧ 从物理意义上说，过渡过程分析是求响应随时间变化的全过程。从数学意义上说，过渡过程分析是求微分方程的全解。

二、动态电路方程的列写

以一阶RC电路为例，已知$u_S(t)$，求$u_C(t)$。



列出回路方程：

$$Ri_C + u_C = u_S(t)$$

得到微分方程：$$RC\frac{du_C}{dt} + u_C = u_s(t)$$

利用初始条件：$$u_C(t)\Big|_{t=0^+} = u_C(0^+)$$

由方程解出$u_C(t)$：全解=通解+特解

最后由初始条件确定各系数。

三、换路定则

电路结构、参数的突然改变或激励的突然变化，称为**换路**。

- **换路定则1：当电容电流为有限值时，电容上的电荷和电压在换路瞬间保持连续。**

$$u_C(0^+)=u_C(0^-) \qquad u_C(t_0^{\ +})=u_C(t_0^{\ -})$$

证：$q_C(t)=q_C(t_0)+\int_{t_0}^{t} i_C(\xi)d\xi$

$$u_C(t)=u_C(t_0)+\frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i_C(\xi)d\xi$$

$\Rightarrow$

$$q_C(0^+)=q_C(0^-)$$

$$u_C(0^+)=u_C(0^-)$$

➢ **换路定则2：当电感电压为有限值时，电感中的磁链和电流在换路瞬间保持连续。**

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) \qquad i_L(t_0^{\ +}) = i_L(t_0^{\ -})$$

证：设在t=0时换路。

$$\Psi_L(t) = \Psi_L(t_0) + \int_{t_0}^{t} u_L(\xi)d\xi$$

$$i_L(t) = i_L(t_0) + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} u_L(\xi)d\xi$$

$\Rightarrow$

$$\Psi_L(0^+) = \Psi_L(0^-)$$

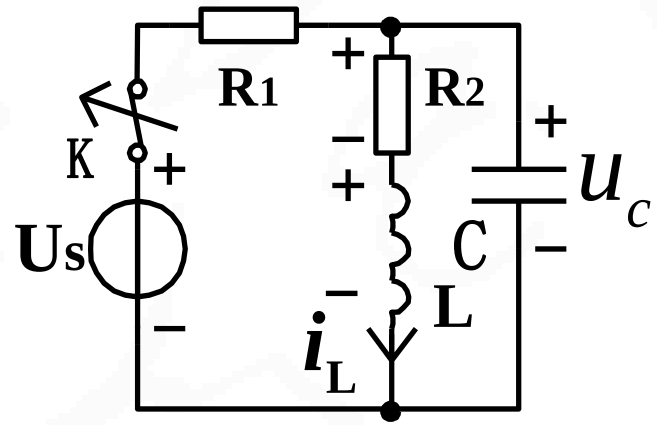
$$i_L(0^+) = i_L(0^-)$$

✧ 换路定则的本质是能量守恒（不能突变）。体现在电容上为电荷守恒；体现在电感上是磁链守恒。

✧ 利用换路定则可以计算电路在换路后的初始状态。

〖例1〗

图示电路，开关闭合已久，求开关打开瞬间的电容电压$u_C(0^+)$和电流$i_C(0^+)$，电感电压$u_L(0^+)$和电流$i_L(0^+)$，电阻电压$u_{R2}(0^+)$。



〖解〗

1) 先求开关打开前的电容电压和电感电流：

$$u_C(0^-)=\frac{R_2}{R_1+R_2}U_S \qquad i_L(0^-)=\frac{U_S}{R_1+R_2}$$

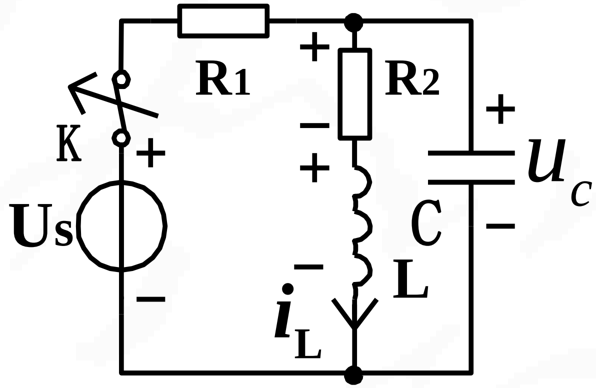
2) 由换路定则得电容电压$u_C(0^+)$和电感电流$i_L(0^+)$：

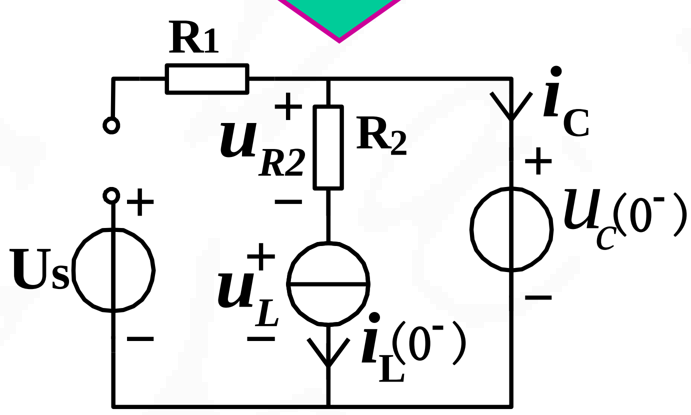
$$u_C(0^+)=u_C(0^-) \qquad i_L(0^+)=i_L(0^-)$$

3) 计算换路后$t=0^+$的其它电压电流：

电容等效为一直流电压源，数值为$u_C(0^-)$

电感等效为一直流电流源，数值为$i_L(0^-)$





$t=0^+$时的等效电路

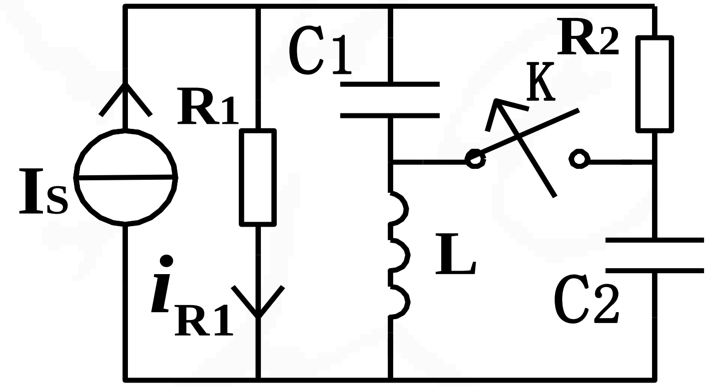
$$i_C(0^+) = -i_L(0^-) = -\frac{U_S}{R_1+R_2}$$

$$u_{R2}(0^+) = i_l(0^-)R_2 = U_S\frac{R_2}{R_1+R_2}$$

$$u_L(0^+) = -u_{R2} + u_C(0^-) = 0$$

〖例2〗

图示电路，$R_1 = R_2 = 2\,\Omega$，$I_S = 4\,\mathrm{A}$，开关闭合已久，求开关打开瞬间电阻R_1上的电流$i_{R1}(0^+)$。



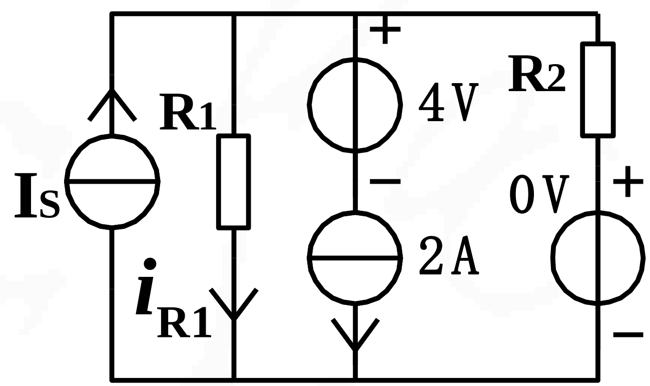
〖解〗

开关闭合时： $i_L(0^-) = 2\mathrm{A}$

$$u_{C1}(0^-) = 4\mathrm{V},\quad u_{C2}(0^-) = 0\mathrm{V}$$

开关打开后：

$$i_{R1}(0^+) = 1\mathrm{A}$$



四、奇异电路

换路时电容电压或电感电流存在跳变的电路，称为奇异电路。对于奇异电路，换路时电容电流和电感电压不再是有限值，此时换路定则不适用。

✧ **情形1：当电路存在只由电压源和电容组成的回路、或纯电容组成的回路时，电容电压有突变。**

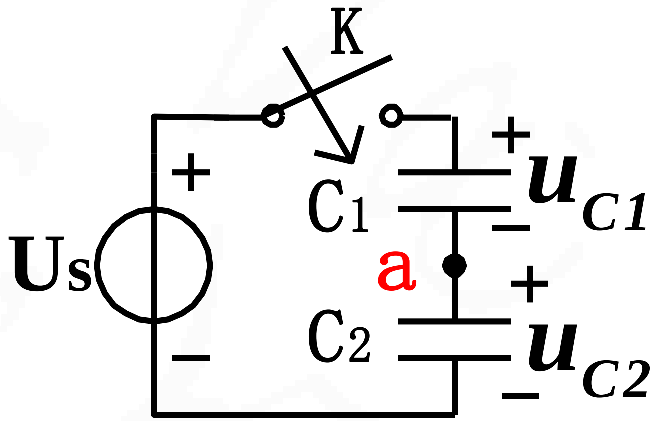
此时，$u_C(0^+)$与$u_C(0^-)$不一定相同，但节点电荷守恒，即换路前后节点的电荷代数和保持不变：

$$\sum q(0^+) = \sum q(0^-)$$

式中，与电容正极相连的为正电荷，与负极相连的为负电荷。

〖例3〗

设$u_{C1}(0^-)=4\ V$，$u_{C2}(0^-)=2V$，$U_S=12V$，$C_1=2\ F$，$C_2=4\ F$，开关K原来打开，问K闭合后瞬间$u_{C1}(0^+)$、$u_{C2}(0^+)$为多少？



〖解〗开关闭合后应满足KVL：$U_S=u_{C1}(0^+)+u_{C2}(0^+)$

节点a换路前后电荷保持不变： $q_a(0^+)=q_a(0^-)$

$$-C_1u_{C1}(0^+)+C_2u_{C2}(0^+)=-C_1u_{C1}(0^-)+C_2u_{C2}(0^-)$$

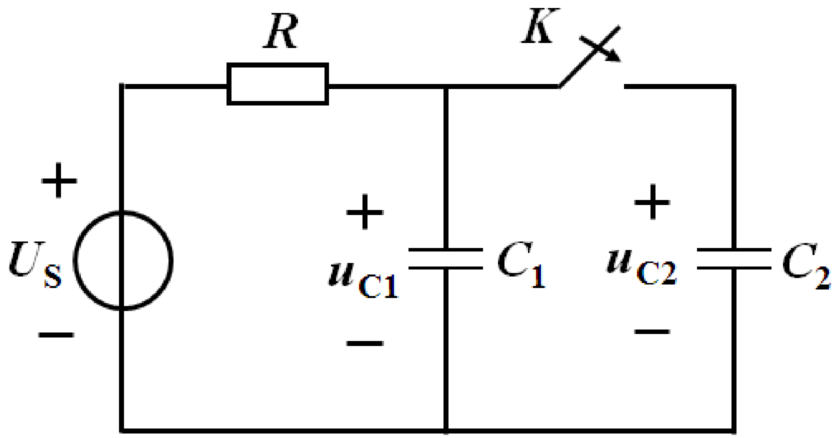
代入数据：$12=u_{C1}(0^+)+u_{C2}(0^+)$

$$-2u_{C1}(0^+)+4u_{C2}(0^+)=-2\times4+4\times2$$

解得： $u_{C1}(0^+)=8\ V$， $u_{C2}(0^+)=4\ V$

〖例4〗

已知$U_S = 1$ V，$R = 1\Omega$，$C_1 = 0.25\ \mu F$，$C_2 = 0.5\ \mu F$。求：$t = 0$ 时刻闭合 K 后瞬间的 $u_{C1}(0^+)$、$u_{C2}(0^+)$。



〖解〗

开关闭合前：$u_{C1}(0^-) = 1$ V，$u_{C2}(0^-) = 0$ V

开关闭合后：$u_{C1}(0^+) = u_{C2}(0^+) = u_C(0^+)$

$$C_1 u_{C1}(0^+) + C_2 u_{C2}(0^+) = C_1 u_{C1}(0^-) + C_2 u_{C2}(0^-)$$

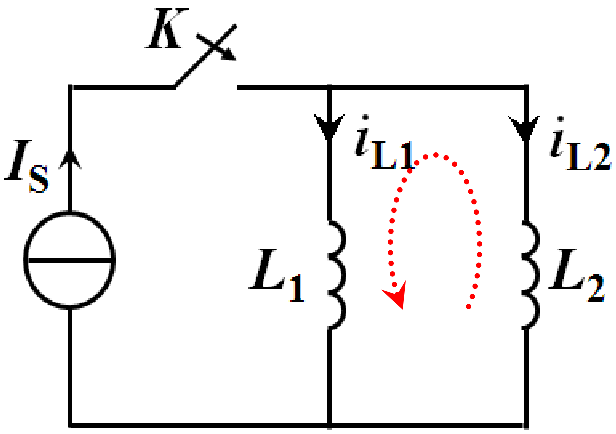
代入数据，解得：$u_{C1}(0^+) = u_{C2}(0^+) = \dfrac{1}{3}$ V

✧ **情形2：当电路存在某一节点相连的所有支路（或割集）都含电感或电流源时，电感电流有突变。**

此时，$i_L(0^+)$与$i_L(0^-)$不一定相同，但回路磁链守恒，即换路前后回路的磁链代数和保持不变：

$$\sum \Psi(0^+) = \sum \Psi(0^-)$$

式中，$\Psi = Li_L$，若回路与电流方向一致时，则磁链为正，否则取负。



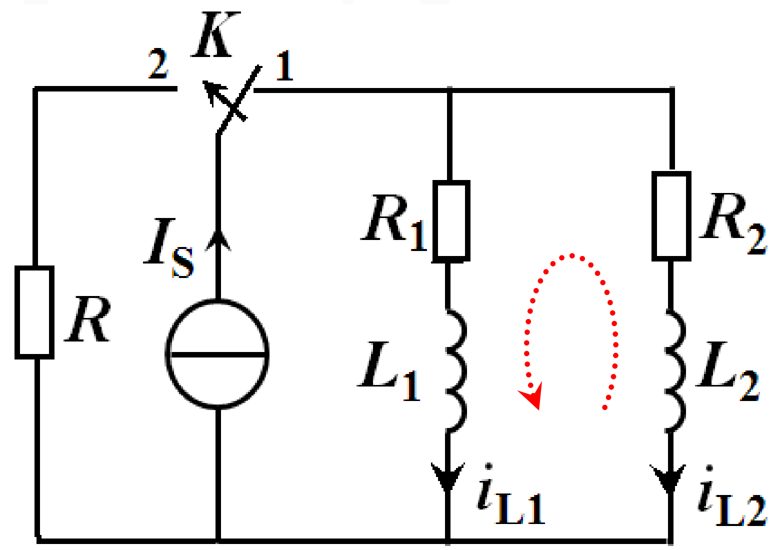
如图，设$i_{L1}(0^-)= i_{L2}(0^-) =0$，开关合上，有 $i_{L1}(0^+)+i_{L2}(0^+)=I_S$

由回路磁链守恒，得：

$$L_1 i_{L1}(0^+) - L_2 i_{L2}(0^+) = L_1 i_{L1}(0^-) - L_2 i_{L2}(0^-)$$

〖例5〗

已知R_1=1 Ω， R_2=2 Ω，L_1=2 H，L_2=3 H，I_S =3 A，开关K 原在1处已久，在t=0时开关K 由1切换到2，求换路后瞬间的电感电流 $i_{L1}(0^+)$、$i_{L2}(0^+)$ 为多少？



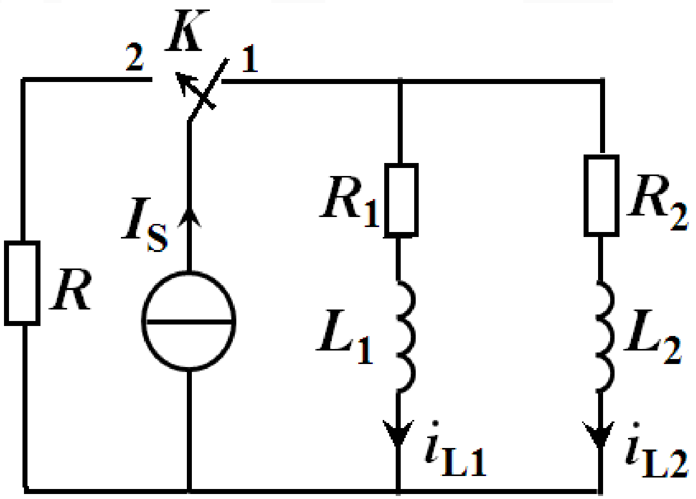
〖解〗

开关在1处时： $i_{L1}(0^-) = 2$ A， $i_{L2}(0^-) = 1$ A

开关由1切换到2后： $i_{L1}(0^+) + i_{L2}(0^+) = 0$

$$L_1 i_{L1}(0^+) - L_2 i_{L2}(0^+) = L_1 i_{L1}(0^-) - L_2 i_{L2}(0^-)$$

$$L_1 i_{L1}(0^+) - L_2 i_{L2}(0^+) = L_1 i_{L1}(0^-) - L_2 i_{L2}(0^-)$$



L_1=2 H，L_2=3 H

$i_{L1}(0^-) = 2$ A，$i_{L2}(0^-) = 1$ A

代入数据：

$$i_{L1}(0^+) + i_{L2}(0^+) = 0$$

$$2i_{L1}(0^+) - 3i_{L2}(0^+) = 2\times 2 - 3\times 1$$

解得：

$$i_{L1}(0^+) = 0.2\ \text{A}$$

$$i_{L2}(0^+) = -0.2\ \text{A}$$

7.2 一阶电路的时域分析法

含有一个独立储能元件的电路，称为一阶电路。一阶电路列写出的微分方程为一阶微分方程。

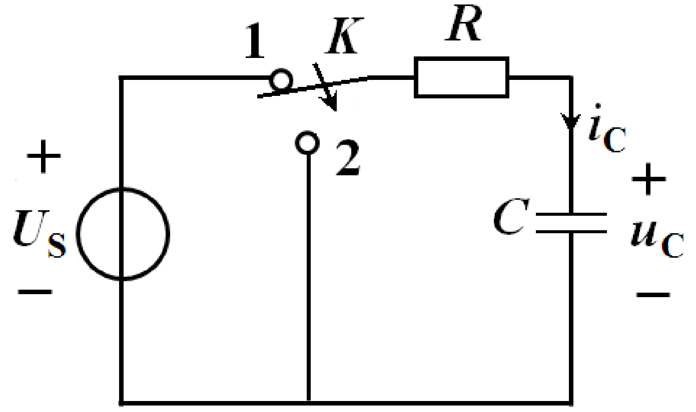
一、一阶电路的零输入响应

动态电路没有外加激励，仅由储能元件的初始状态（初始能量）引起的响应，称为零输入响应。

➢ *RC*电路的零输入响应

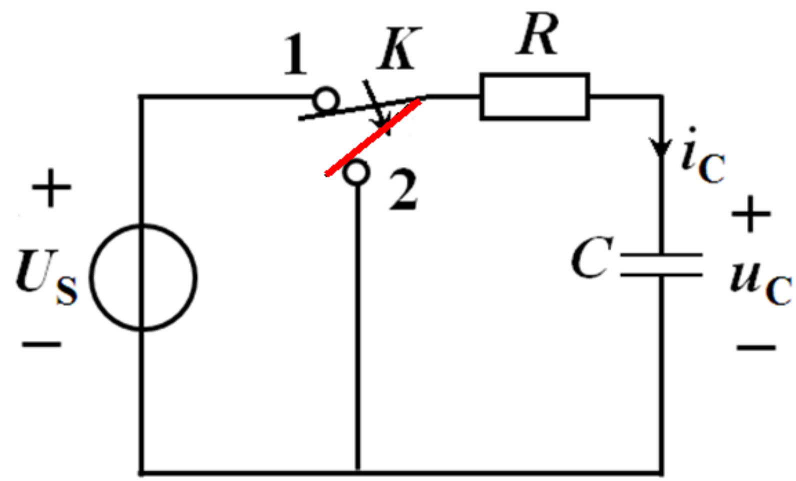
开关*K*处于1已久，电容得到初始能量（初始条件）。

然后将开关从1切换到2处，求电路的响应。



一阶*RC*电路

✧ 微分方程的建立



初始条件（设$U_S=U_0$）：

$$u_C(0^+)=u_C(0^-)=U_0$$

开关切换到2后：

$$Ri_C+u_C(t)=0$$

$$RC\frac{du_C}{dt}+u_C=0$$

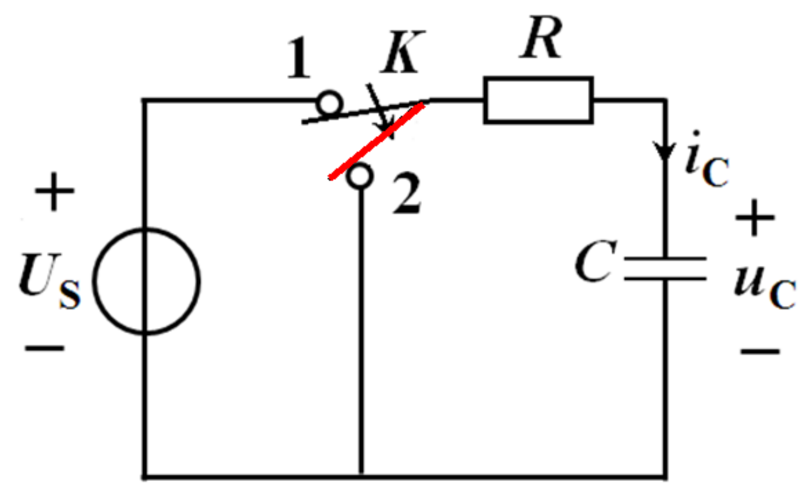
这是一阶常系数齐次线性微分方程。

✧ 一阶常系数齐次线性微分方程的求解

解（通解）为： $u_C(t)=Ae^{st}$

s是特征方程的特征根。

$$RC\frac{du_C}{dt}+u_C=0$$



特征方程： $RCs+1=0$

特征根： $s=-\dfrac{1}{RC}$

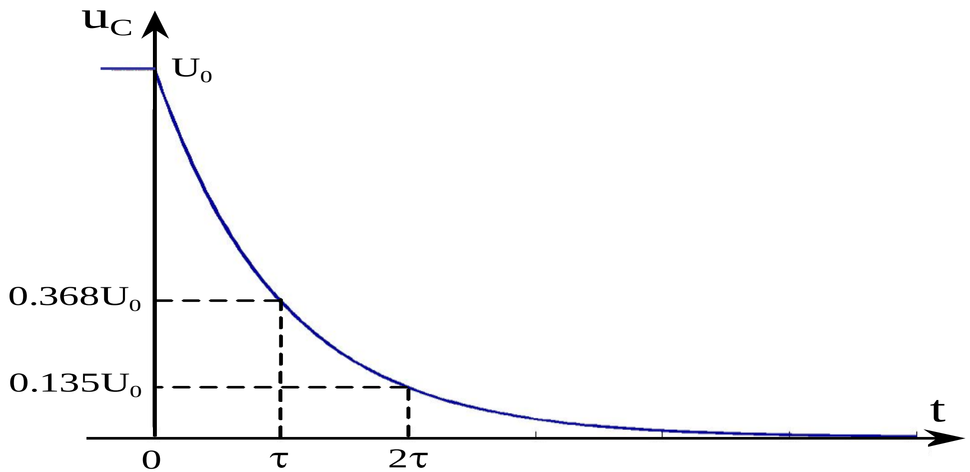
通解为： $u_C(t)=Ae^{-\frac{t}{RC}}$

由初值： $u_C(0^+)=A=U_0$

得：

$$u_C(t)=U_0e^{-\frac{t}{RC}}$$

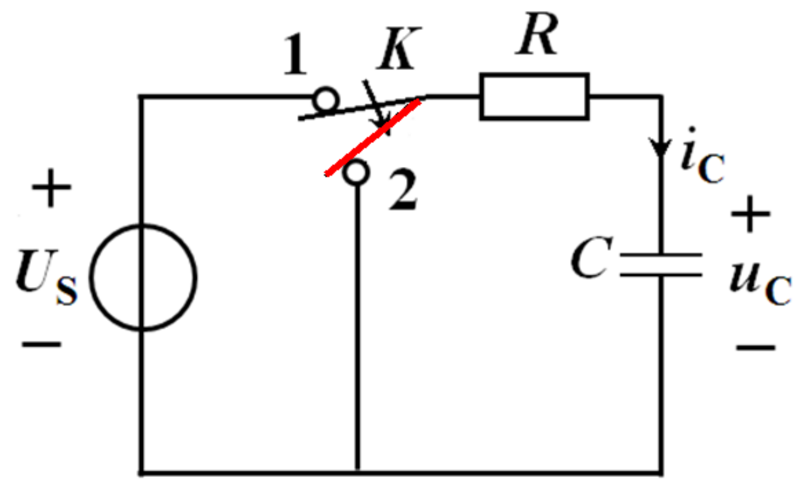
电容电压变化波形为：



✧ 电容电压的零输入响应：

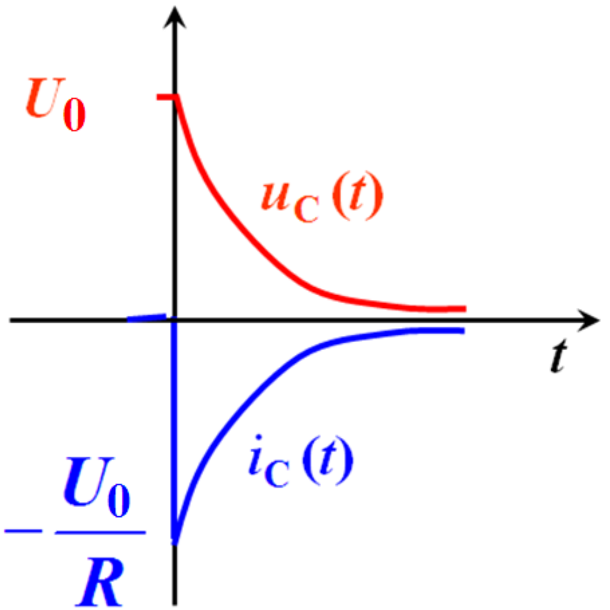
$$u_C(t)=U_0e^{-\frac{t}{RC}}=U_0e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$\tau=RC$，称为一阶RC电路的**时间常数**，单位为秒。



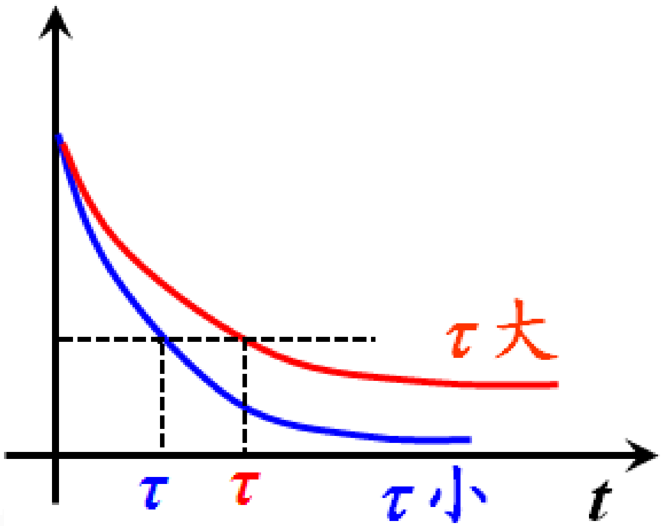
✧ 电容电流为：

$$i_C(t)=C\frac{du_C}{dt}=-\frac{U_0}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}$$



RC电路的零输入响应

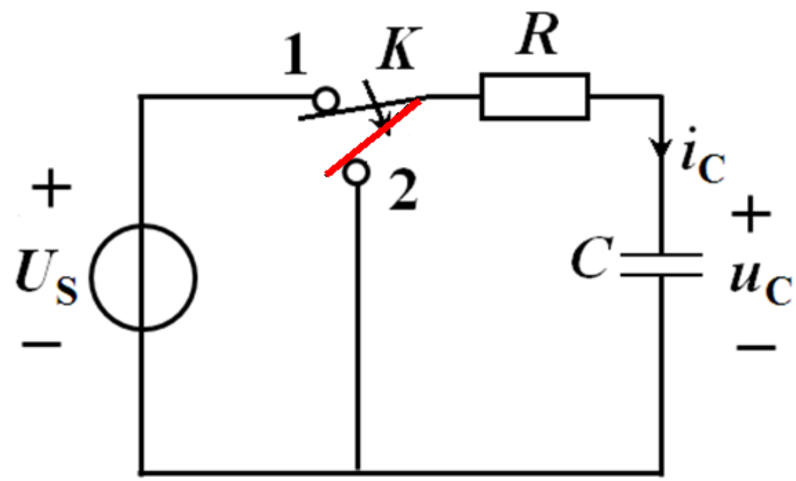
$$u_C(t)=U_0 e^{-\frac{t}{RC}}=U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$



✧ 零输入响应的特性：

- 零输入响应的线性性质：
  零输入响应与初始值成正比。
- 时间常数：τ只与电路结构及参数有关，与外界激励无关。
- τ的大小反映了电路过渡时间的长短。（当$t=\tau$时，电容电压下降为原值的$1/e=0.368$倍。）
- 工程上认为，经过$(3\sim5)\tau$，过渡过程结束。
- τ越大，曲线越平坦，衰减越慢；反之，曲线越陡峭，衰减越快。

✧ 零输入响应过程的能量关系



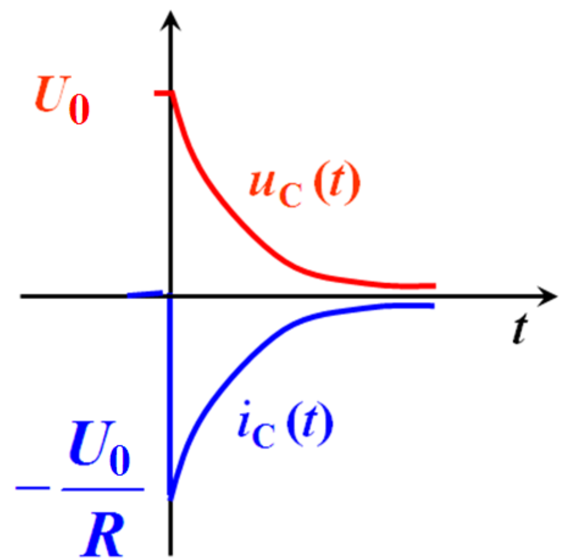
电容储存的初始能量：

$$W_C(0^+) = \frac{1}{2}CU_0^2$$

电阻消耗的总能量：

$$W_R = \int_0^\infty R\, i_C^2 dt$$

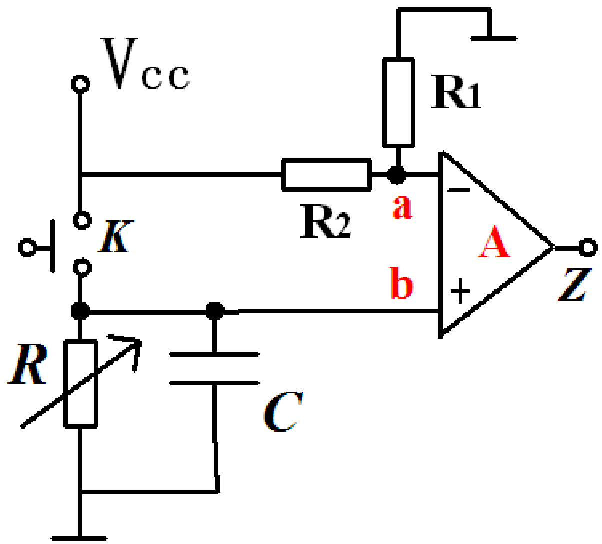
$$= \int_0^\infty R\,(-\frac{U_0}{R}e^{-\frac{1}{RC}t})^2 dt = \frac{1}{2}CU_0^2$$



电阻消耗的能量等于电容提供的能量，当能量释放完毕，过渡过程就结束了。

〖应用示例1〗延时开关

以楼道灯延时控制为例，定时部分的电路如图。设 $V_{CC}=5$ V，$R_1=2$ kΩ，$R_2=3$ kΩ，A为比较器。



定时电路

比较器工作原理：

$U_a=2$V，比较器输入U_a、U_b。

当$U_b>U_a$时，比较器输出高电平（灯接通，亮）；

当$U_b<U_a$时，比较器输出低电平（灯断开，灭）。

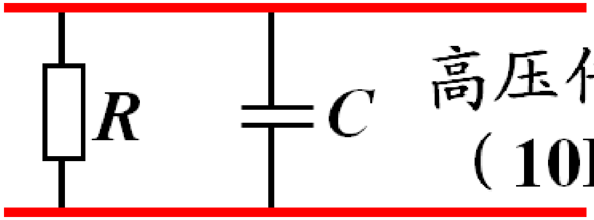
问：若要灯亮的时间更长，*R*应增大还是减小？

〖解〗 *R*应增大。

〖应用示例2〗高压传输线检修

以 10 kV 高压传输线(电缆)为例。检修电缆时，首先需断开外部电源，然后等 n 分钟后，方可检修。电缆间等效电路如图，设线间电容 C＝1 μF，线间绝缘电阻 R ＝100 MΩ。

问：断开电源后等 5 分钟够吗？



〖解〗

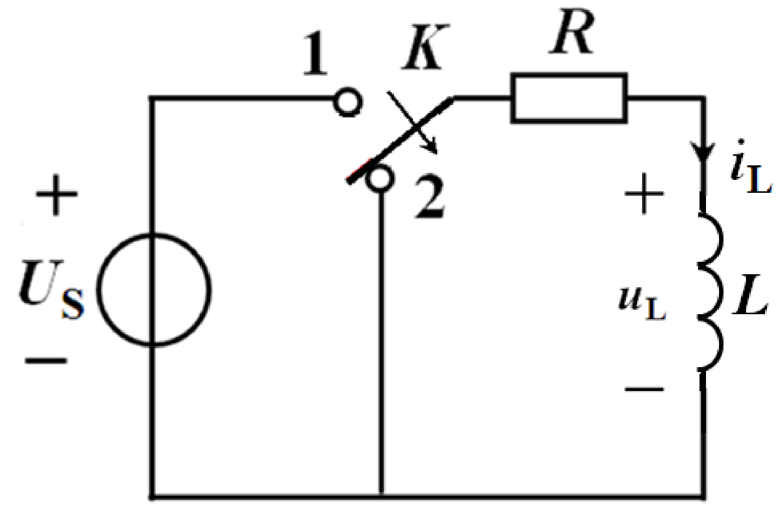
不够。$\tau = RC = 100$秒，5分钟（300秒）相当于 3τ;

此时的残余电压约为：5%×10 kV = 500 V。

实际工作中，通常用一个铁棒短路，减少 R 以减少 τ 。

➢ *RL*电路的零输入响应

开关 *K* 初始位置为1，$t=0$ 时，开关从 1 切换至 2（换路）。



建立微分方程：

$$u_L + Ri_L = 0$$

$$L\frac{di_L}{dt} + Ri_L = 0$$

特征方程及特征根：

$$Ls + R = 0 \qquad s = -\frac{R}{L}$$

方程解：

$$i_L(t) = Ae^{st} = Ae^{-\frac{R}{L}t} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

时间常数：

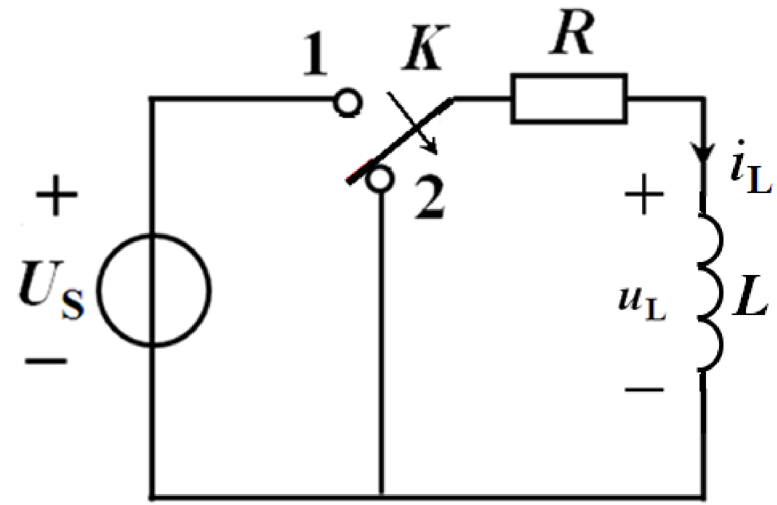
$$\tau = \frac{L}{R}$$

由初始条件：

$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = \frac{U_S}{R}$$

得：

$$i_L(0^+) = A = \frac{U_S}{R} = I_0$$



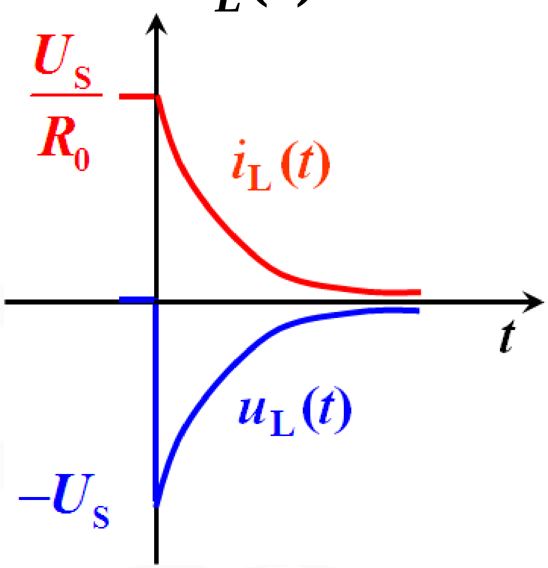
电感电流的零输入响应为：

$$i_L(t) = \frac{U_S}{R} e^{-\frac{R}{L}t} = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

电感电压的零输入响应为：

$$u_L(t) = L\frac{di_L}{dt} = -U_S e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$i_L(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t}$$



RL电路的零输入响应

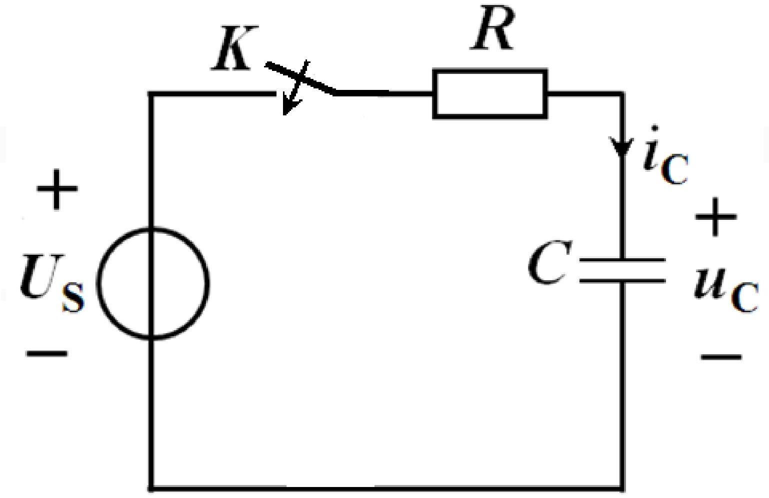
二、一阶电路的零状态响应

✧ **电路状态**：是指电路储能元件的电压、电流值。

✧ **零状态响应**：电路储能元件状态为零，响应由外加激励引起。

➢ *RC*电路的零状态响应

电容的初始电压为0（开关*K*打开），$t=0$时，开关*K*合上。



$$Ri_C + u_C(t) = U_S$$

$$RC\frac{du_C}{dt} + u_C = U_S$$

这是一阶常系数**非齐次**线性微分方程。

✧ 一阶常系数非齐次线性微分方程的求解

全解=齐次方程通解+非齐次特解

$RC\dfrac{du_C}{dt}+u_C=0$ 的通解为： $u_{Ch}(t)=Ae^{-\frac{t}{RC}}$

$RC\dfrac{du_C}{dt}+u_C=U_S$ 的特解为：$u_{Cp}(t)=U_S$

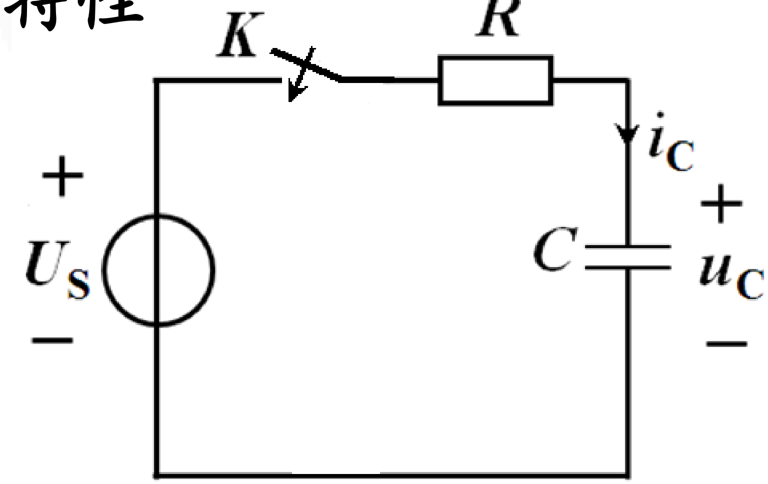
方程的解（全解）为： $u_C(t)=U_S+Ae^{-\frac{t}{RC}}$

由初值 $u_C(0^+)=u_C(0^-)=0$得： $U_S+A=0,\quad A=-U_S$

RC电路的零状态响应为：

$$u_C(t)=U_S-U_Se^{-\frac{t}{RC}}=U_S(1-e^{-\frac{t}{\tau}})$$

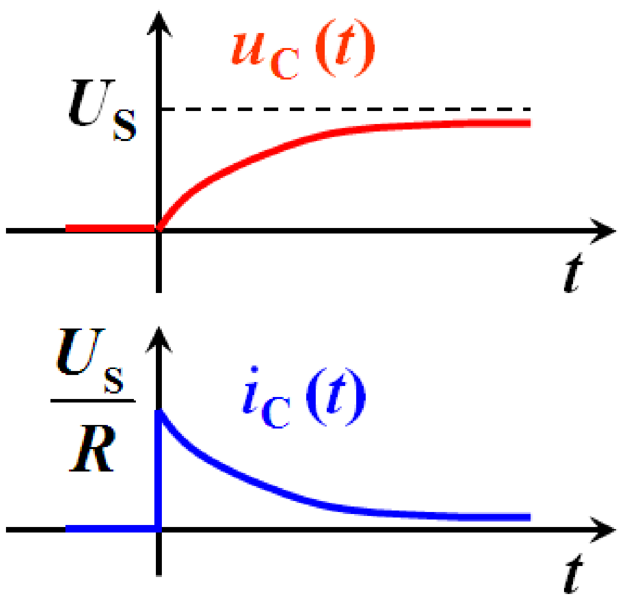
✧ RC电路零状态响应的波形和特性



$$u_C(t) = U_S - U_S e^{-\frac{t}{RC}}$$

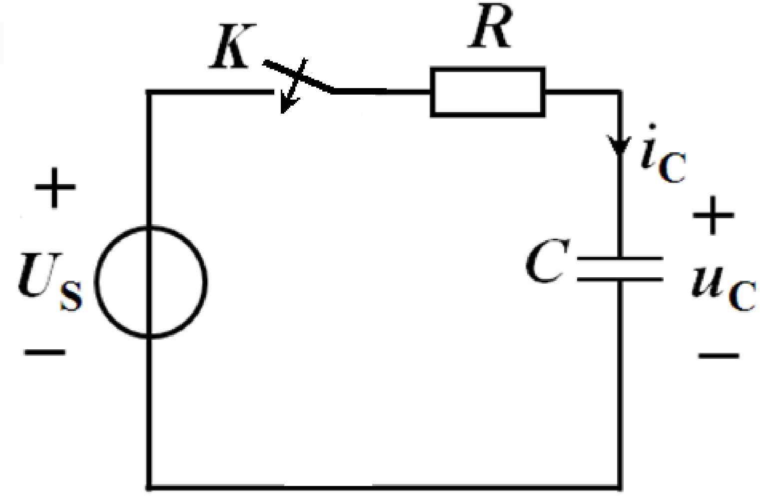
$$i_C(t) = C\frac{du_C(t)}{dt} = \frac{U_S}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

- 电容电压和电流按指数规律变化。
- 时间常数τ反映了电路过渡时间的长短。
- 零状态响应的**线性性质**：如果电路中只有一个激励，则零状态响应与激励成正比。



RC电路的零状态响应

✧ 零状态响应过程的能量关系



电源提供的能量：

$$W_S = \int_0^\infty U_S i_C dt$$

$$= \int_0^\infty (U_S \cdot \frac{U_S}{R} e^{-\frac{t}{RC}})dt = CU_S^2$$

电容储存的能量：

$$W_C = W_C(0+) - W_C(\infty) = \frac{1}{2}CU_S^2$$

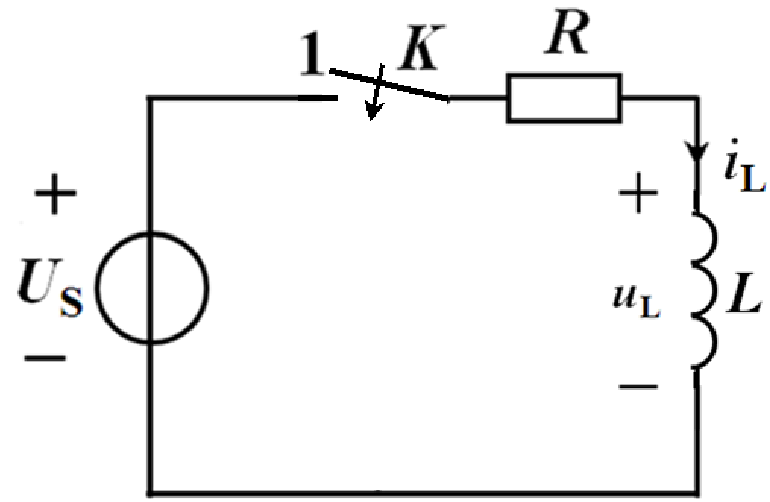
电阻消耗的能量：

$$W_R = \int_0^\infty R i_C^2 dt = \int_0^\infty R\,(\frac{U_S}{R} e^{-\frac{t}{RC}})^2 = \frac{1}{2}CU_S^2$$

说明：电容充电过程有一半能量消耗在电阻上。

➢ RL电路的零状态响应

电感的初始电流为0（开关K打开），$t=0$ 时，开关K合上。



建立微分方程：

$$u_L + Ri_L = U_S$$

$$L\frac{di_L}{dt} + Ri_L = U_S$$

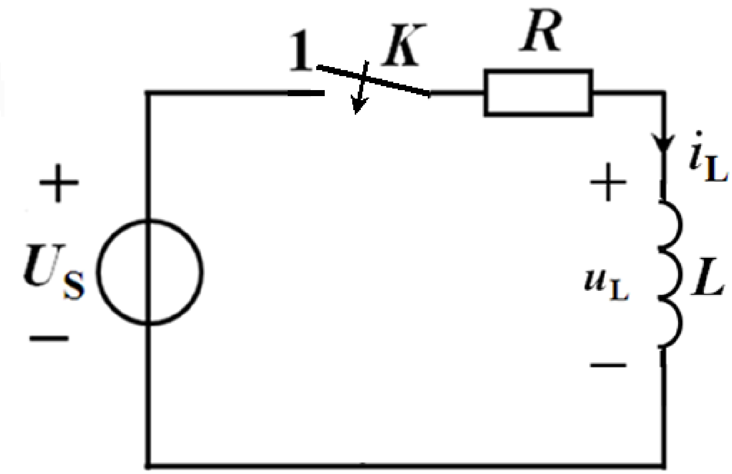
方程的全解为： $i_L(t) = \frac{U_S}{R} + Ae^{-\frac{R}{L}t}$

由初值 $i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$得： $\frac{U_S}{R} + A = 0$, $A = -\frac{U_S}{R}$

电感电流的零状态响应为：

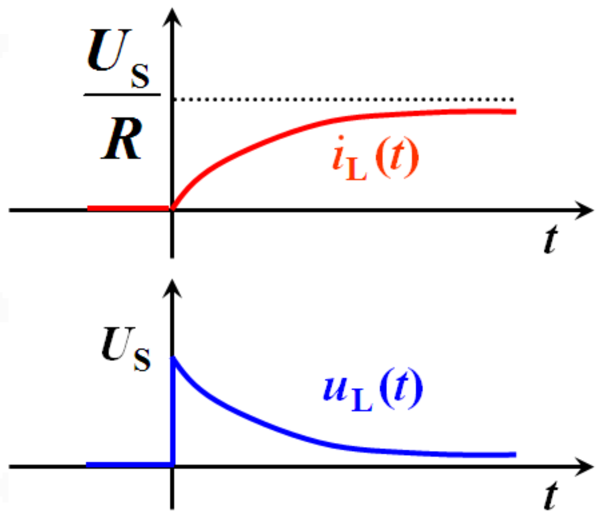
$$i_L(t)=\frac{U_S}{R}-\frac{U_S}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$=\frac{U_S}{R}(1-e^{-\frac{t}{\tau}})$$



时间常数：

$$\tau=\frac{L}{R}$$



电感电压的零状态响应为：

$$u_L(t)=L\frac{di_L}{dt}=U_Se^{-\frac{R}{L}t}$$

RL电路的零状态响应

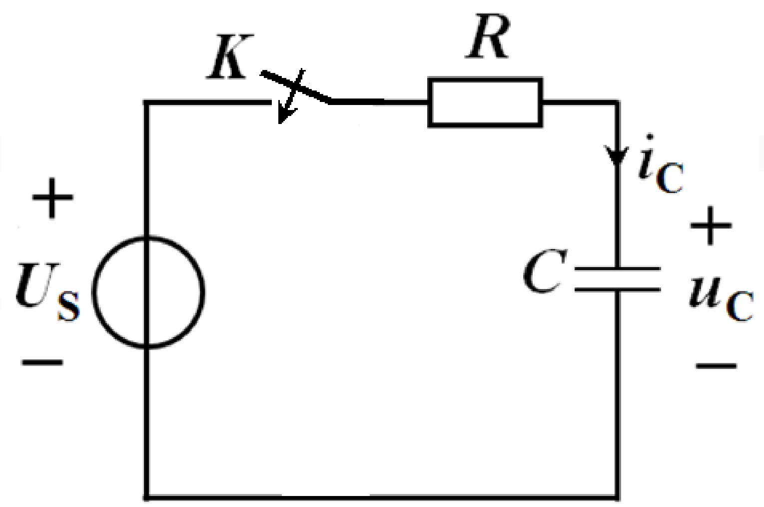
7.3 一阶电路的全响应

✧ **全响应**：既有初始状态值，又有外加激励作用下产生的响应。

✧ **三要素法**：基于公式的求解一阶电路响应的一种方法。

➢ 一阶电路的全响应

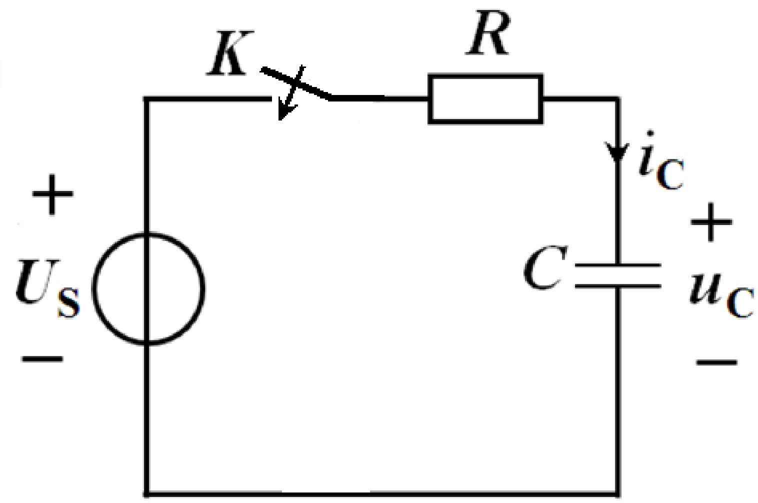
以RC电路为例，设电容初始电压$u_C(0^+) = u_C(0^-) = U_0$，$t = 0$ 时开关K合上。



$$RC\frac{du_C}{dt} + u_C = U_S$$

方程为一阶常系数**非齐次**线性微分方程。

$$RC\frac{du_C}{dt}+u_C=U_S$$



方程的解为：

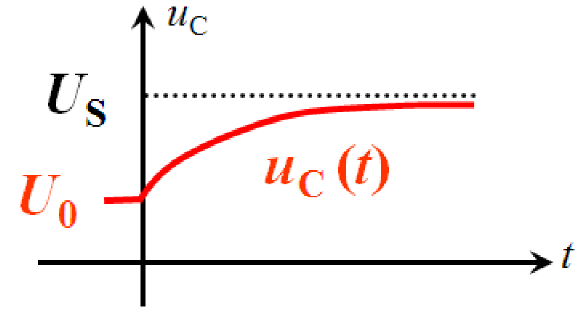
$$u_C(t)=U_S+Ae^{-\frac{t}{RC}}$$

由初值 $u_C(0^+)=u_C(0^-)=U_0$ 得：

$$U_S+A=U_0,\qquad A=U_0-U_S$$

方程的解为：

$$u_C(t)=U_S+(U_0-U_S)e^{-\frac{t}{RC}}$$

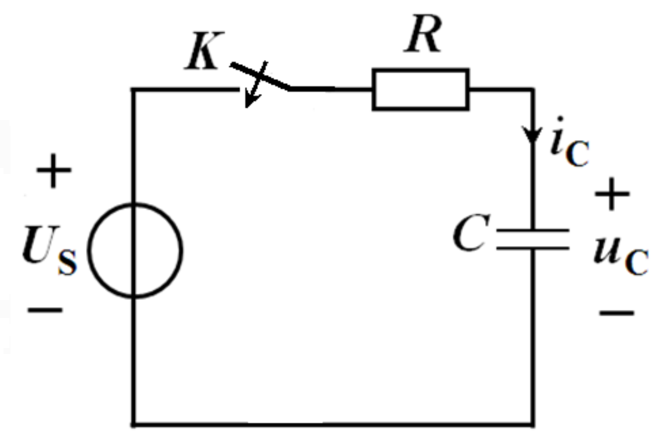


RC电路的全响应

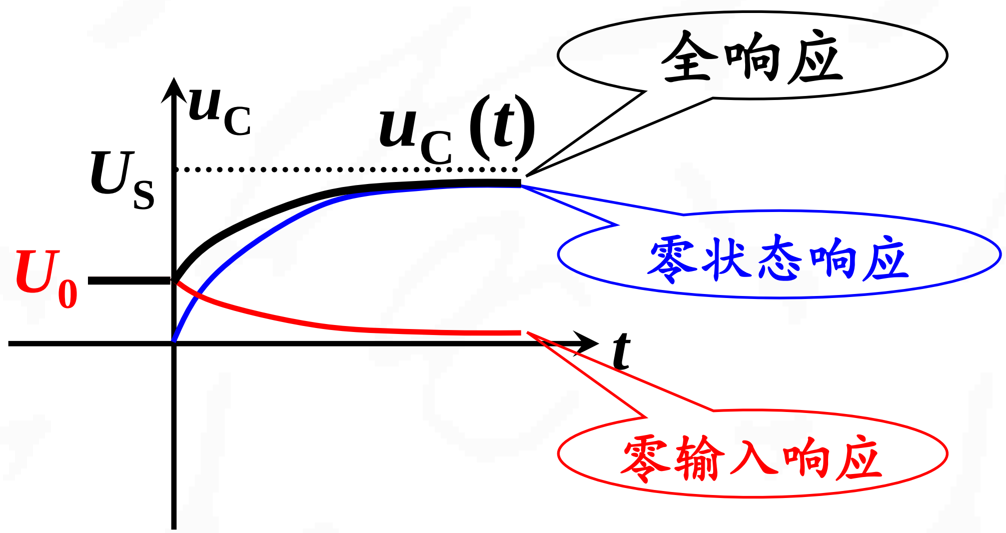
➢ 全响应的分解

$$u_C(t)=U_S+(U_0-U_S)e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$=U_0e^{-\frac{t}{RC}}+U_S(1-e^{-\frac{t}{RC}})$$

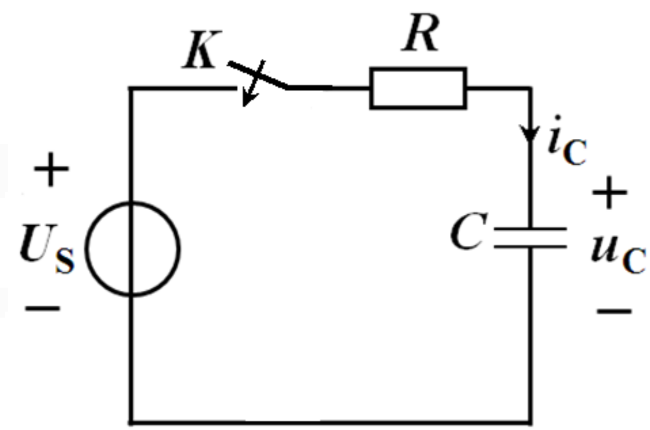


✧ 分解方式1：全响应=零输入响应+零状态响应



✧ 分解方式2：

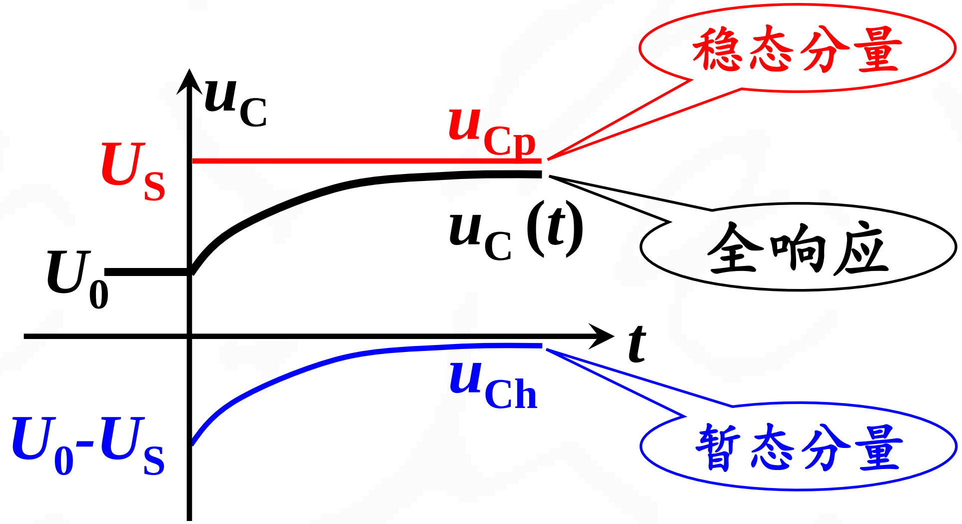
全响应=稳态分量+暂态分量



$$u_C(t)=U_S+(U_0-U_S)e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$=u_{Cp}(t)+u_{Ch}(t)$$

- 稳态分量：又称强制分量，由外加激励决定，对应方程的特解 $u_{Cp}(t)$。
- 暂态分量：又称自由分量，由于电路结构和参数决定，对应齐次方程的通解$u_{Ch}(t)$。



7.4 一阶电路的三要素法（公式法）

一阶电路全响应的一般形式为：

$$f(t)=f_{\mathrm{p}}(t)+f_{\mathrm{h}}(t)=f_{\mathrm{p}}(t)+Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

设初值为 $f(0^+)$，则： $f(0^+)=f_{\mathrm{p}}(0^+)+A$

$$A=f(0^+)-f_{\mathrm{p}}(0^+)$$

得到： $f(t)=f_{\mathrm{p}}(t)+[f(0^+)-f_{\mathrm{p}}(0^+)]e^{-\frac{t}{\tau}}$

✧ 由上式直接写出电路响应，只需知道三个要素：

① 稳态解：外加激励时的稳态分析。

② 初始值：由换路定则确定。

③ 时间常数τ：由电路结构和参数确定。

✧ 三要素法公式：

$$f(t)=f_{稳}(t)+[f(0^{+})-f_{稳}(0^{+})]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

或表示成（直流激励下）：

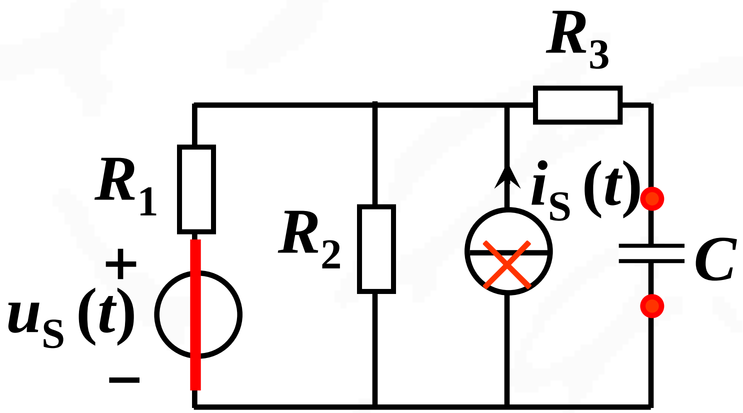
$$f(t)=f(\infty)+[f(0^{+})-f(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

✧ 时间常数的计算：

以图示电路为例，

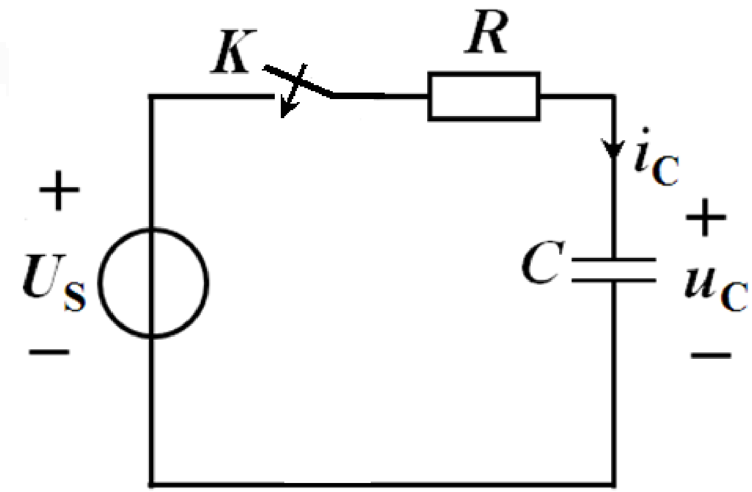
$$\tau=R_{eq}C$$

$$R_{eq}=R_1//R_2+R_3$$



➢ RC电路的全响应

电容初始电压$u_C(0^-)=U_0$，$t=0$时开关K合上。由三要素法直接写出全响应。



三要素法公式：

$$f(t)=f_{稳}(t)+[f(0^+)-f_{稳}(0^+)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_C(0^+)=u_C(0^-)=U_0$$

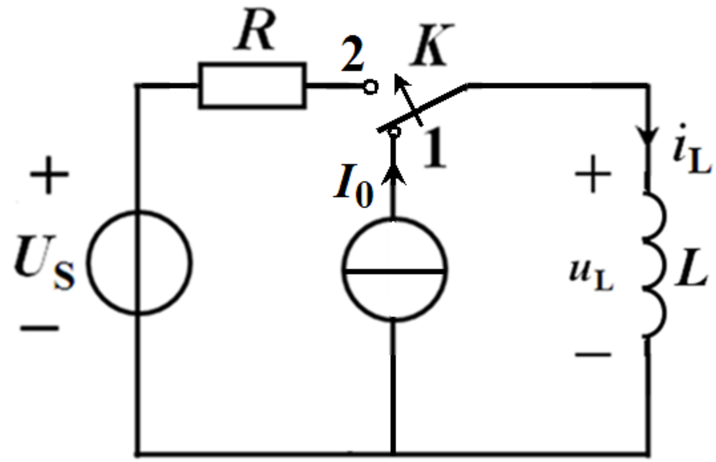
$$u_{C稳}(t)=u_C(\infty)=U_S$$

$$\tau=RC$$

全响应为： $$u_C(t)=U_S+(U_0-U_S)e^{-\frac{t}{RC}}$$

➢ RL电路的全响应

$t=0$ 时，开关K由1切换到2，分析全响应$i_L(t)$。



由三要素法直接写出全响应：

$$f(t)=f_{稳}(t)+[f(0^+)-f_{稳}(0^+)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$i_L(0^+)=i_L(0^-)=I_0$$

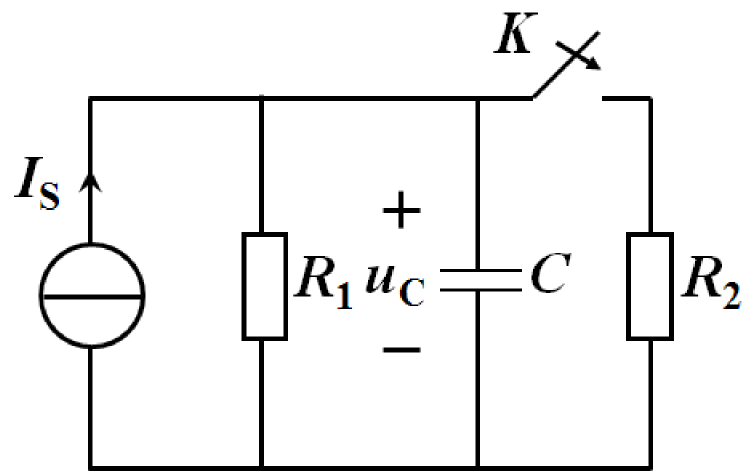
$$i_{L稳}(t)=i_L(\infty)=\frac{U_S}{R}$$

$$\tau=\frac{L}{R}$$

全响应为：$i_L(t)=\dfrac{U_S}{R}+(I_0-\dfrac{U_S}{R})e^{-\frac{R}{L}t}$

〖例1〗*RC* 电路

电路如图，已知I_S=2 A，R_1=3 Ω，R_2=6 Ω，C=3 F，t = 0 时合上开关 K，求换路后的 $u_C(t)$。



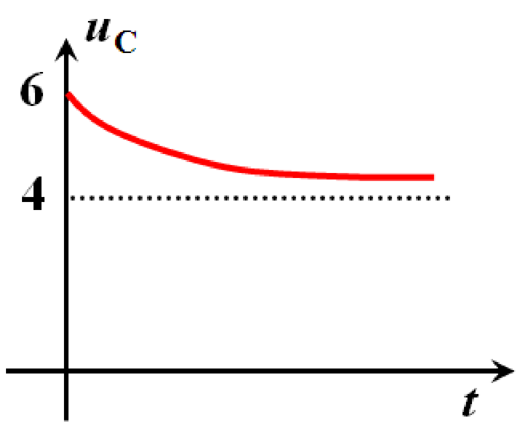
〖解〗

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = I_S R_1 = 6\ \text{V}$$

$$u_C(\infty) = I_S(R_1 // R_2) = 4\ \text{V}$$

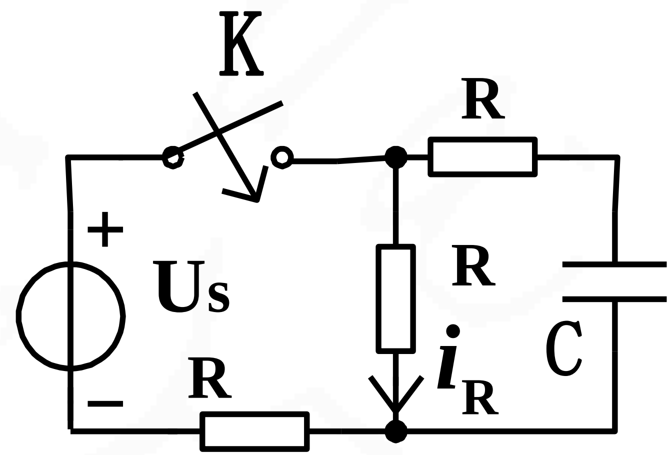
$$\tau = (R_1 // R_2)C = 6\ \text{s}$$

$$u_C(t) = 4 + (6-4)e^{-\frac{t}{6}}\ \text{V}$$



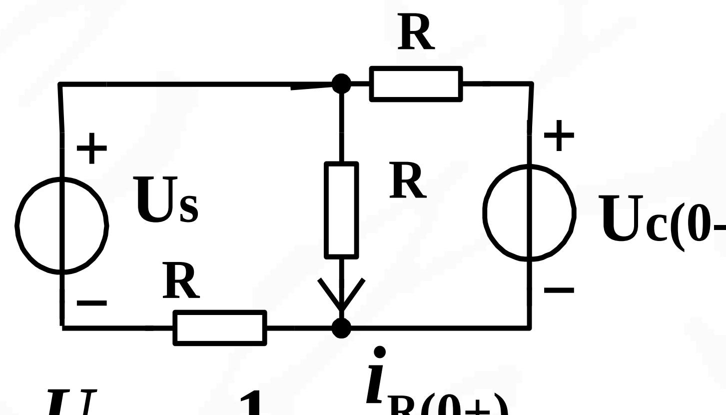
〖例2〗任意支路响应

电路如图，已知U_S =30 V，R =100 Ω，$C=\dfrac{1}{1500}$F ，$u_C(0^-)$ =0，求开关 K闭合后的 $i_R(t)$ 。



〖解〗

稳态解：$i_R(\infty)=\dfrac{U_S}{2R}=0.15\text{A}$



初态值：注意 $i_R(0^+)\neq i_R(0^-)$

$$u_C(0^+)=u_C(0^-)=0$$

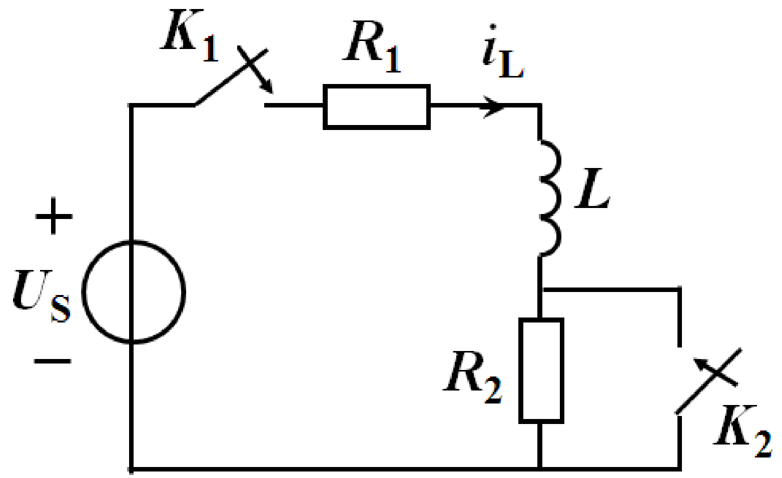
$$i_R(0^+)=\frac{U_S}{1.5R}\times\frac{1}{2}=0.1\text{A}$$

时间常数：$\tau=1.5R\times C=0.1\text{ s}$

所以：$i_R(t)=0.15+(0.1-0.15)e^{-\frac{t}{0.1}}=0.15-0.05e^{-10t}$

〖例3〗二次换路

电路如图，U_S =10 V，R_1 =2 Ω，R_2 =3 Ω，L =1 H，t = 0 时合上开关 K_1， t = 0.2 s时合上开关 K_2，求 $i_L(t)$ 。



〖解〗 $0 \le t < 0.2$ s:

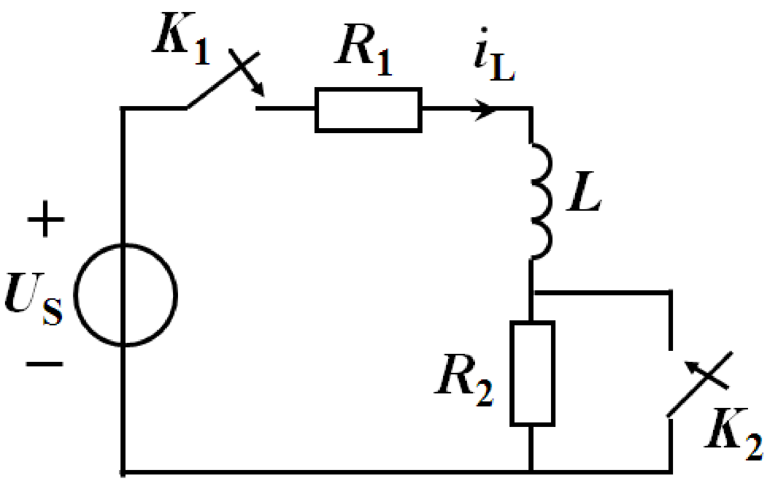
稳态解： $$i_L(\infty) = \frac{U_S}{R_1 + R_2} = 2\ \text{A}$$

初态值： $$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0$$

时间常数： $$\tau = \frac{L}{R_1 + R_2} = 0.2\ \text{s}$$

所以： $$i_L(t) = 2 - 2e^{-5t}\ \text{A}$$

$t \geq 0.2\ \mathrm{s}$（K_2合上）：



稳态解： $i_L(\infty) = \dfrac{U_S}{R_1} = 5\ \mathrm{A}$

初态值：

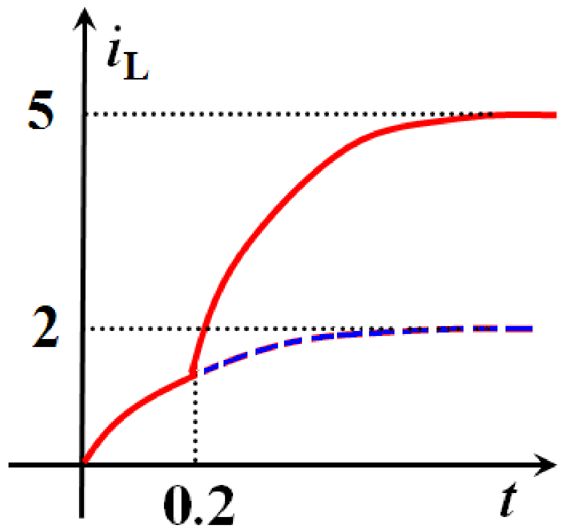
$$i_L(0.2^+) = i_L(0.2^-)$$

$$= 2 - 2e^{-5\times0.2} = 1.26\mathrm{A}$$

时间常数： $\tau = \dfrac{L}{R_1} = 0.5\ \mathrm{s}$

所以：

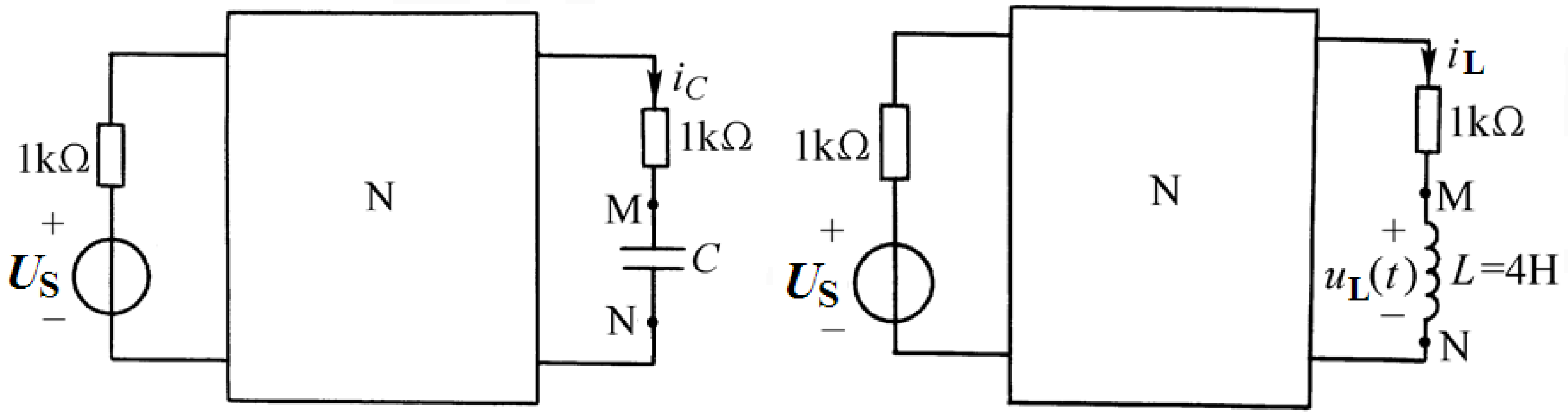
$$i_L(t) = 5 - 3.74e^{-2(t-0.2)}\ \mathrm{A}$$



电感电流的波形

〖例4〗综合应用

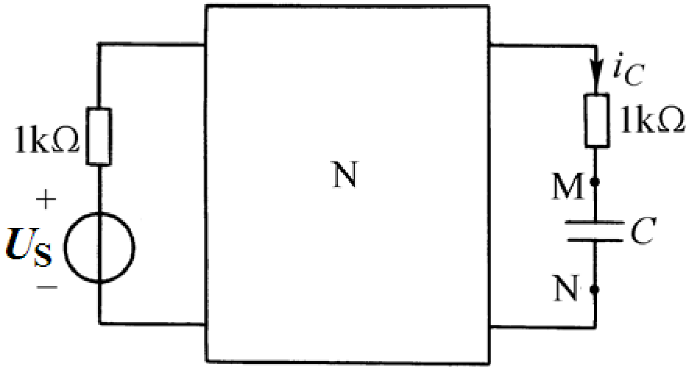
电路如图，N为电阻网络，C=10 μF，U_S=6 V，已知零状态响应为 $i_C(t)=2e^{-25t}$ mA，若将C换为L=4 H，求零状态响应$u_L(t)$。

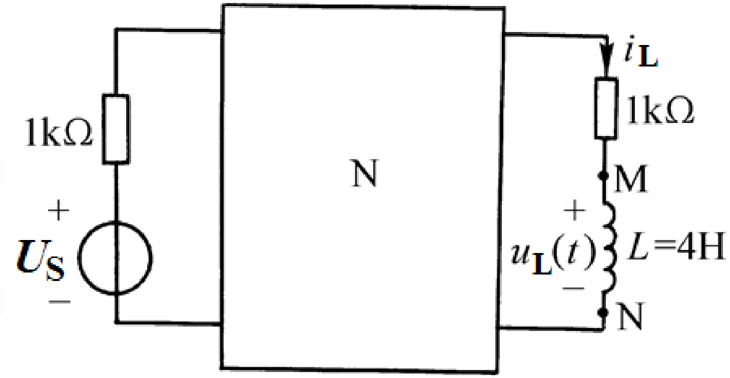


〖解〗设M、N两端的入端电阻为R_o。

$$\tau_C=R_oC=R_o\times10^{-5}=\frac{1}{25}$$

$$R_o=4000\ \Omega$$





接C时：

MN短路时(初始值)：

$$i_C(0^+) = 2\text{mA} = i_{short}$$

MN开路时(稳态解)：

$$i_C(\infty) = 0 = i_{open}$$

接L时：

初始值(MN开路时)：

$$i_L(0^+) = i_{open} = 0$$

稳态解(MN短路时)：

$$i_L(\infty) = i_{short} = 2\text{mA}$$

时间常数： $$\tau_L = \frac{L}{R_o} = \frac{4}{4000} = \frac{1}{1000}\ \text{s}$$

由三要素得： $$i_L(t) = 2\times10^{-3} - 2\times10^{-3}e^{-1000t}\ \text{A}$$

电感电压为： $$u_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} = 8e^{-1000t}\ \text{V}$$

指数信号激励下的响应

✧ 指数信号不是周期性信号，对于指数信号激励下的响应，可直接求解非齐次微分方程。

✧ 非齐次微分方程解的一般形式为：

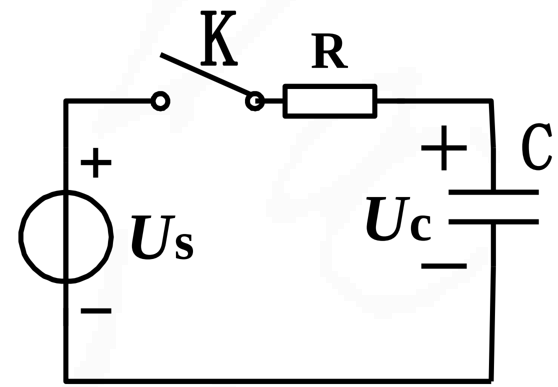
全解=齐次方程通解+非齐次特解

分别求出通解和特解，然后根据初始值确定系数得到响应表达式。

✧ 指数信号激励下，也可以应用三要素法写出响应：先根据非齐次微分方程求出稳态解（即特解），然后按照三要素公式写出响应表达式。

〖例5〗指数信号激励

电路如图，$u_S(t)=Ue^{-\alpha t}$，$u_C(0^-)=0$，$t=0$时，开关K闭合，求$u_C(t)$。



〖解1〗列微分方程直接求解。

$$Ri_C+u_C(t)=U_S=Ue^{-\alpha t} \qquad RC\frac{du_C}{dt}+u_C=Ue^{-\alpha t}$$

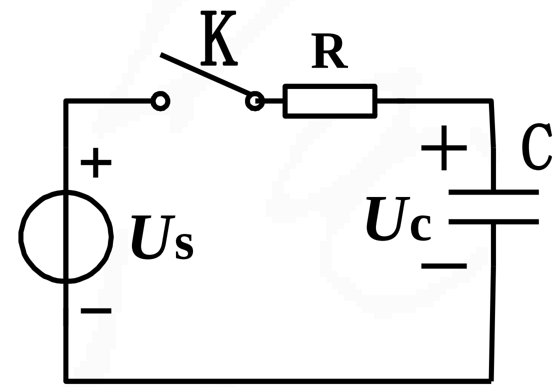
齐次通解： $u_{Ch}(t)=Ae^{-\frac{t}{RC}}$

非齐次特解： $u_{Cp}(t)=ke^{-\alpha t}$

代入原方程得：$-RC\alpha ke^{-\alpha t}+ke^{-\alpha t}=Ue^{-\alpha t}$

$$k=\frac{U}{1-RC\alpha}$$

全解为：



$$u_C(t) = u_{Cp}(t) + u_{Ch}(t)$$

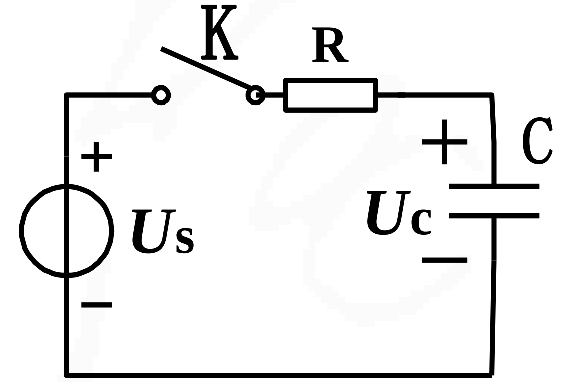
$$= \frac{U}{1-RC\alpha}e^{-\alpha t} + Ae^{-\frac{t}{RC}}$$

由初值： $u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0$

得： $\frac{U}{1-RC\alpha} + A = 0$ $\quad A = -\frac{U}{1-RC\alpha}$

所以响应为： $u_C(t) = \frac{U}{1-RC\alpha}(e^{-\alpha t} - e^{-\frac{t}{RC}})$

〖解2〗应用三要素法求解。



求稳态解（特解）：$u_{C稳}(t)=ke^{-\alpha t}$

代入微分方程：$$RC\frac{du_C}{dt}+u_C=Ue^{-\alpha t}$$

$$-RC\alpha ke^{-\alpha t}+ke^{-\alpha t}=Ue^{-\alpha t}\qquad k=\frac{U}{1-RC\alpha}$$

稳态解为：$u_{C稳}(t)=\dfrac{U}{1-RC\alpha}e^{-\alpha t}$　$u_{C稳}(0^+)=\dfrac{U}{1-RC\alpha}$

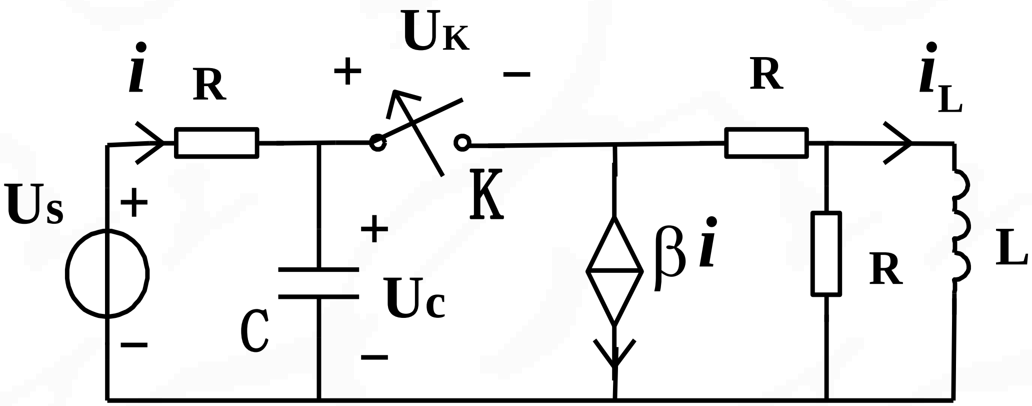
初值：　$u_C(0^+)=0$　　时间常数：　$\tau=RC$

代入三要素公式：

$$u_C(t)=\frac{U}{1-RC\alpha}e^{-\alpha t}+(0-\frac{U}{1-RC\alpha})e^{-\frac{t}{RC}}$$

〖例6〗隐含指数激励

电路如图，R=10 Ω，C =0.01 F，L=0.5 H，U_S =24 V，β =0.5，开关K 闭合已久，求开关打开后的$u_K(t)$。



〖解〗需求出开关两端电压，即$u_C(t)$和$i_L(t)$的响应。

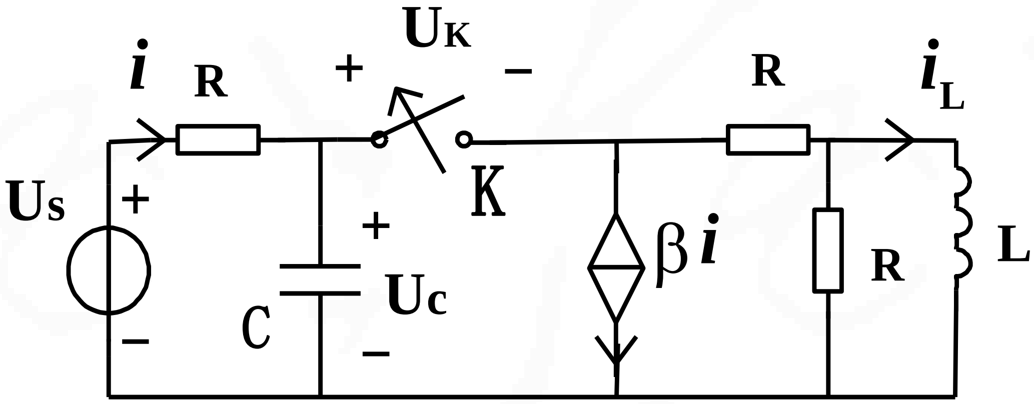
先求开关闭合时电路状态（t=0⁻时）：

$$U_S = I\times R + (1-\beta)I\times R$$

$$I = \frac{U_S}{(2-\beta)R} = \frac{24}{(2-0.5)\times 10} = 1.6\text{A}$$

$$i_L(0^-) = I - \beta I = 0.8\text{A},\quad u_C(0^-) = I_L\times R = 8\text{V}$$

1）求$u_C(t)$



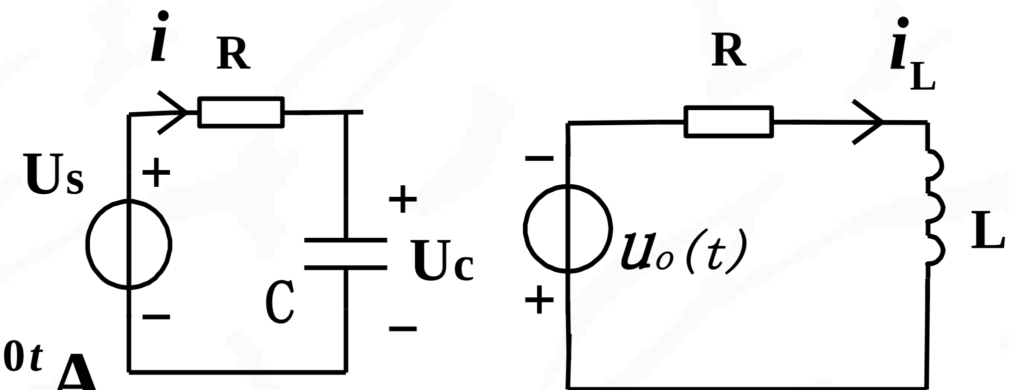
$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 8\text{V}$$

$$u_C(\infty) = U_S = 24\text{V}$$

$$\tau_C = RC = 0.1\text{s}$$

$$u_C(t) = 24 - 16e^{-10t}\ \text{V}$$

2）求$i_L(t)$



$$i(t) = C\frac{du_C(t)}{dt} = 1.6e^{-10t}\text{A}$$

$$\beta i(t) = 0.8e^{-10t}\ \text{A}$$

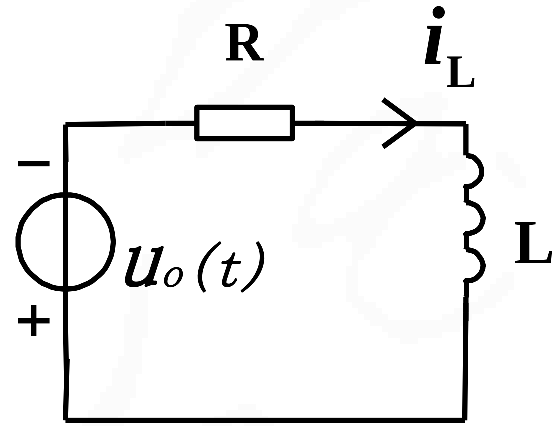
为指数信号激励。

注意：电压源方向；

等效电阻为R。

为求$i_L(t)$，可采用戴维南等效。

$$u_o = \beta i(t) \times R = 8e^{-10t}\ \mathrm{V}$$



$$i_L(0^+) = i_L(0^-) = 0.8\mathrm{A}$$

$$\tau_L = \frac{L}{R} = \frac{0.5}{10} = \frac{1}{20}\mathrm{s}$$

列方程:

$$Ri_L + L\frac{di_L}{dt} = -8e^{-10t} \qquad 10i_L + 0.5\frac{di_L}{dt} = -8e^{-10t}$$

通解为: $i_{Lh}(t) = Ae^{-20t}$ 特解为: $i_{Lp}(t) = ke^{-10t}$

特解代入方程: $10ke^{-10t} - 5ke^{-10t} = -8e^{-10t}$

$$k = -1.6$$

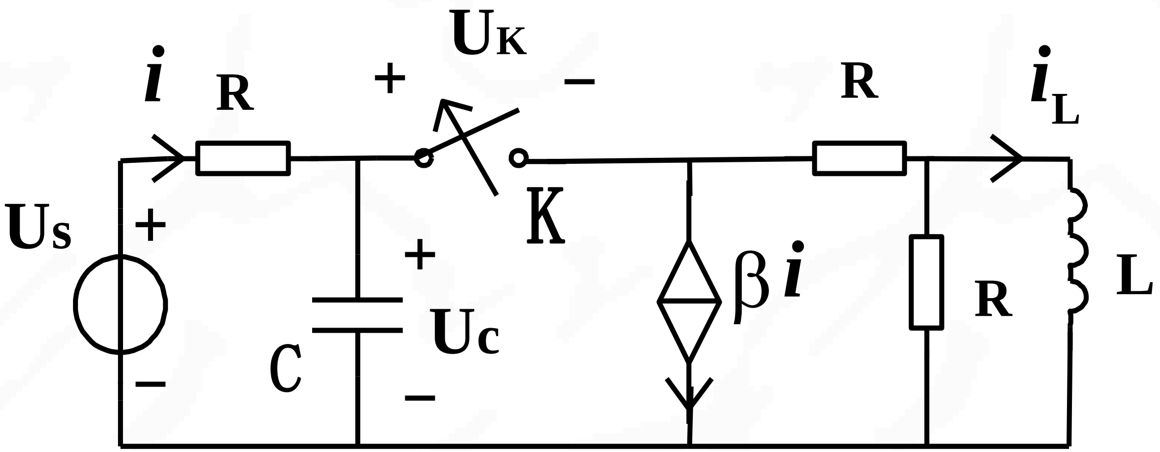
全解为: $i_L(t) = -1.6e^{-10t} + Ae^{-20t}$

$$i_L(0^+) = -1.6 + A = 0.8, \quad A = 2.4$$

$$u_C(t) = 24 - 16e^{-10t} \ \text{V}$$

$$\beta i(t) = 0.8e^{-10t} \ \text{A}$$

$$i_L(t) = -1.6e^{-10t} + 2.4e^{-20t}$$



$$u_k(t) = u_C(t) - (-\beta i \times R + L\frac{di_L}{dt})$$

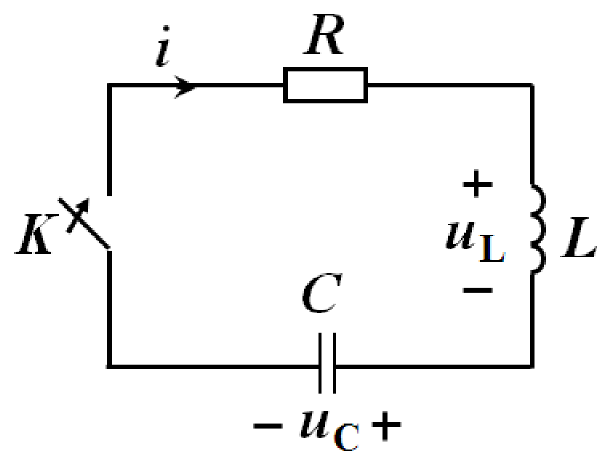
$$= 24 - 16e^{-10t} + 0.8e^{-10t} \times 10 - 0.5 \times (16e^{-10t} - 48e^{-20t})$$

$$= 24 - 16e^{-10t} + 24e^{-20t} \ \text{V}$$

7.5 二阶动态电路的零输入响应

✧ 二阶动态电路：含两个独立储能元件的电路，需用二阶常微分方程描述。

➢ 典型电路（RLC电路）

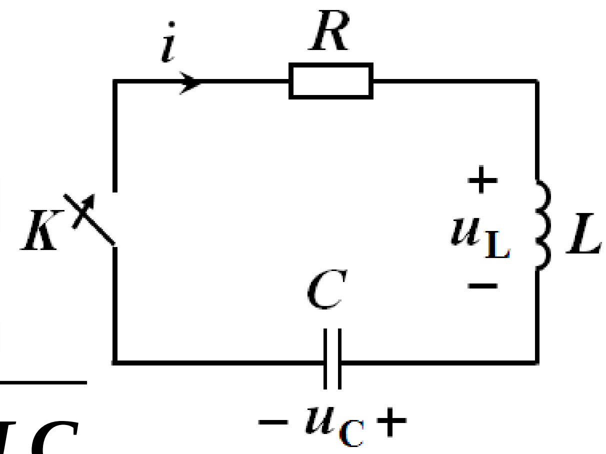


设电容初始电压 $u_C(0^-)=U_0$，$i_L(0^-)=0$，$t=0$ 时开关K合上。

列写方程：$Ri+u_L+u_C=0$

由于：$i=C\dfrac{du_C}{dt}$，$u_L=L\dfrac{di}{dt}=LC\dfrac{d^2u_C}{dt^2}$

可得：$RC\dfrac{du_C}{dt}+LC\dfrac{d^2u_C}{dt^2}+u_C=0$



$$LC\frac{d^2u_C}{dt^2}+RC\frac{du_C}{dt}+u_C=0$$

特征方程： $LCs^2+RCs+1=0$

特征根：

$$s_{1,2}=\frac{-RC\pm\sqrt{(RC)^2-4LC}}{2LC}$$

$$=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{(\frac{R}{2L})^2-\frac{1}{LC}}$$

分为3种情况：

- 过阻尼： $R>2\sqrt{\frac{L}{C}}$ ，特征根为二个不等负实根。
- 欠阻尼： $R<2\sqrt{\frac{L}{C}}$ ，特征根为二个不等复数根。
- 临界阻尼： $R=2\sqrt{\frac{L}{C}}$ ，特征根为重根。

✧ 二阶电路过渡过程的形式取决于特征根；而特征根仅仅取决于电路结构和参数，与激励和初值无关。

✧ 或者说，二阶电路根据**电路参数的不同，其过渡过程也不同**，与激励和初值无关。

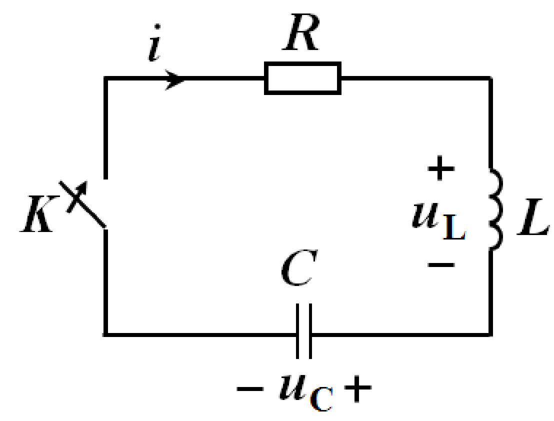
➢ 过阻尼过渡过程

✧ 当 $R > 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$，即 $(\dfrac{R}{2L})^2 - \dfrac{1}{LC} > 0$，特征根

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{(\frac{R}{2L})^2 - \frac{1}{LC}}$$ 为二个不等负实根。

通解为：$$u_C(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

$$u_C(t) = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$



初始条件：

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = U_0$$

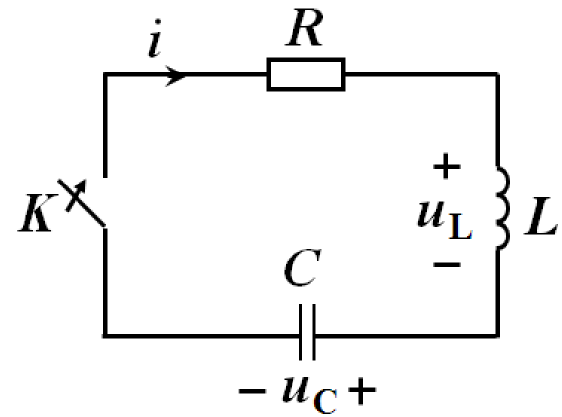
$$i_L(0^+) = 0 \Rightarrow i_L = C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}, \quad \left.\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0^+} = 0$$

代入通解： $$u_C(0^+) = A_1 + A_2 = U_0$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0^+} = A_1 s_1 + A_2 s_2 = 0$$

得： $$A_1 = \frac{s_2}{s_2 - s_1}U_0, \quad A_2 = \frac{-s_1}{s_2 - s_1}U_0$$

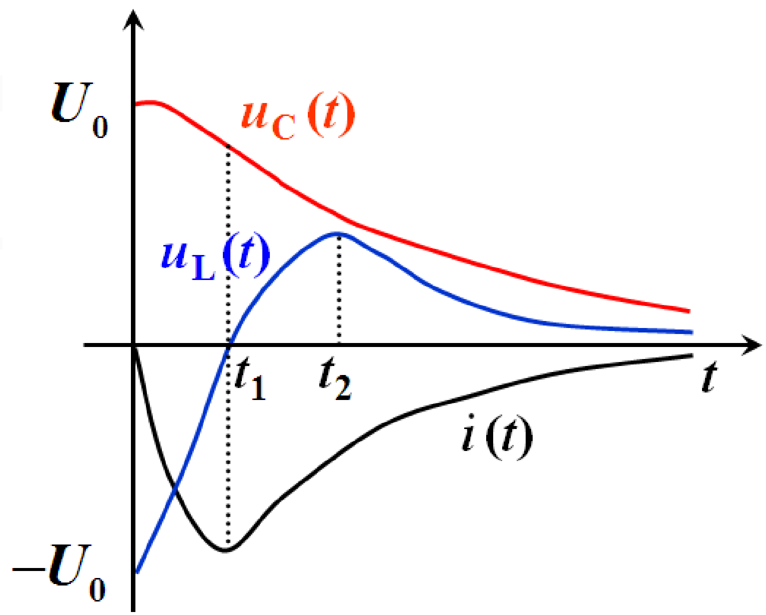
$$u_C(t)=\frac{U_0}{s_2-s_1}(s_2e^{s_1t}-s_1e^{s_2t})$$



$$i=C\frac{du_C}{dt}=\frac{s_1s_2}{s_2-s_1}CU_0(e^{s_1t}-e^{s_2t})$$

$$u_L=L\frac{di}{dt}=\frac{U_0}{s_2-s_1}(s_1e^{s_1t}-s_2e^{s_2t})$$

✧ 结论：过阻尼时，电容电压单调衰减，电路无振荡。



过阻尼波形

➢ 欠阻尼过渡过程

✧ 当 $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ ，即 $(\frac{R}{2L})^2 - \frac{1}{LC} < 0$ ，特征根为二个不等复数根。

$$s_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{(\frac{R}{2L})^2 - \frac{1}{LC}} = -\alpha \pm j\omega_{\mathrm{d}}$$

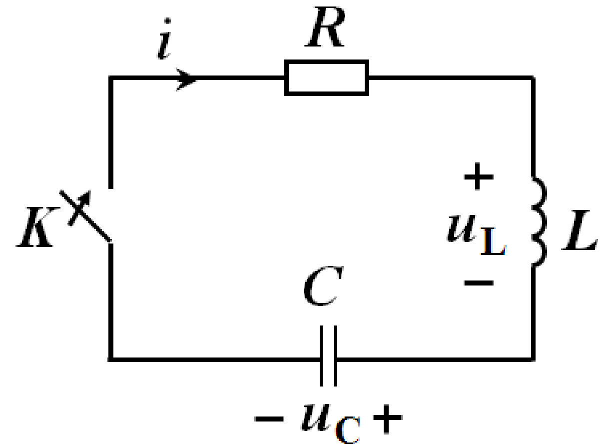
通解为： $u_C(t) = Ae^{-\alpha t}\sin(\omega_d t + \theta)$

式中： $\alpha = \frac{R}{2L}$ 为衰减系数

$$\omega_d = \sqrt{\frac{1}{LC} - (\frac{R}{2L})^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$$ 为振荡角频率

ω_0 为谐振角频率

$$u_C(t) = Ae^{-\alpha t}\sin(\omega_d t + \theta)$$



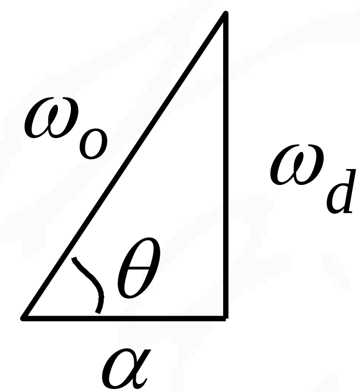
初始条件：

$$u_C(0^+) = U_0, \left.\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0^+} = 0$$

代入通解：

$$u_C(0^+) = A\sin\theta = U_0$$

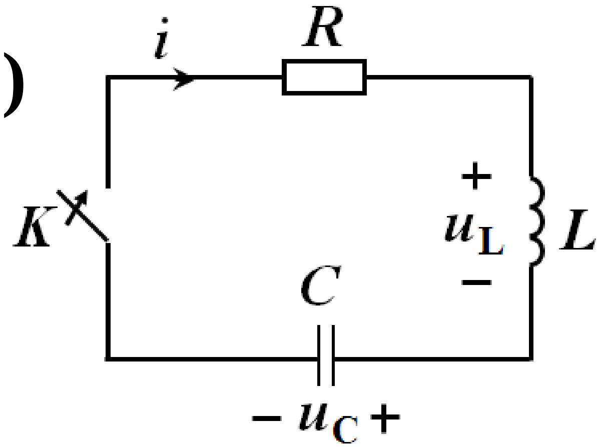
$$\left.\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0^+} = -\alpha\sin\theta + \omega_d\cos\theta = 0$$



得： $\theta = tg^{-1}\dfrac{\omega_d}{\alpha}$ $A = U_0\dfrac{\omega_0}{\omega_d}$

方程解为： $u_C(t) = U_0\dfrac{\omega_0}{\omega_d}e^{-\alpha t}\sin(\omega_d t + tg^{-1}\dfrac{\omega_d}{\alpha})$

$$u_C(t)=U_0\frac{\omega_0}{\omega_d}e^{-\alpha t}\sin(\omega_d t+tg^{-1}\frac{\omega_d}{\alpha})$$

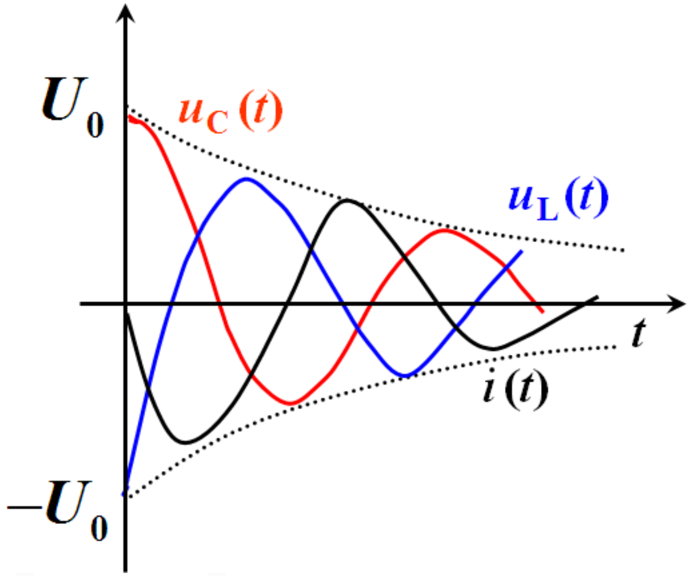


$$i(t)=C\frac{du_C}{dt}=\frac{-U_0}{\omega_d L}e^{-\alpha t}\sin(\omega_d t)$$

$$u_L(t)=L\frac{di}{dt}=\frac{\omega_0}{\omega_d}U_0 e^{-\alpha t}\sin(\omega_d t-\theta)$$

✧ 结论：欠阻尼时，过渡过程为衰减振荡，电容与电感之间有周期性的能量交换。

✧ 当电阻R=0时：衰减系数α=0，电路为等幅振荡，称为无阻尼振荡。



欠阻尼波形

临界阻尼过渡过程

✧ 当 $R=2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$，即 $(\dfrac{R}{2L})^2-\dfrac{1}{LC}=0$，特征根为重根。

$$s=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{(\frac{R}{2L})^2-\frac{1}{LC}}=-\frac{R}{2L}$$

通解为： $u_C(t)=(A_1+A_2t)\mathrm{e}^{st}$

初始条件：$u_C(0^+)=A_1=U_0$

$$\left.\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0^+}=A_1s+A_2=0$$

得： $A_1=U_0$，$A_2=-sU_0$

方程解为：$u_C(t)=U_0(1-st)e^{st}$

临界阻尼的波形类似于过阻尼波形。

➢ 结论与讨论：*RLC*电路的零输入响应

✧ 二阶电路的过渡过程取决于电路结构和参数，与激励和初值无关。

✧ 判断依据：$R \sim 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ 。

✧ 当电阻足够大时：过阻尼，过渡过程单调衰减，电路无振荡。

✧ 当电阻足够小时：欠阻尼，过渡过程衰减振荡。

✧ 当电阻为0时：过渡过程为持续振荡（没有能量消耗）。

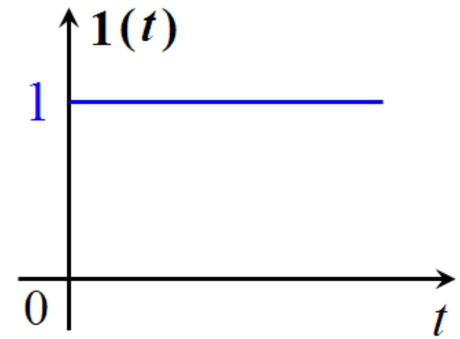
✧ 当电阻 $R = 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ 时：临界阻尼，过渡过程类似于过阻尼。

7.6 单位阶跃响应和单位冲激响应

一、单位阶跃响应

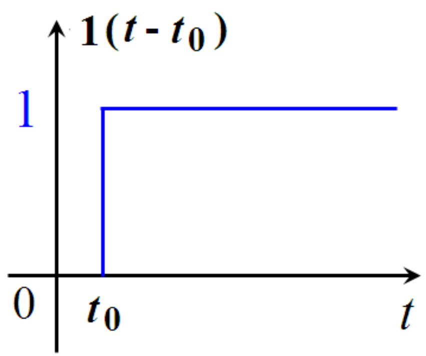
✧ 单位阶跃函数

$$1(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t\geq 0\end{cases}$$



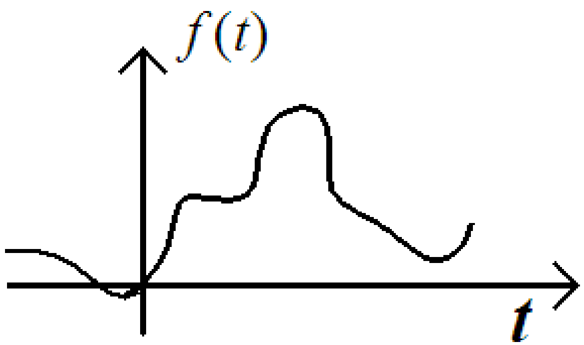
- 单位阶跃函数相当于一开关函数。
- 迟延（位移）单位阶跃函数：

$$1(t-t_0)=\begin{cases}0 & t<t_0\\ 1 & t\geq t_0\end{cases}$$

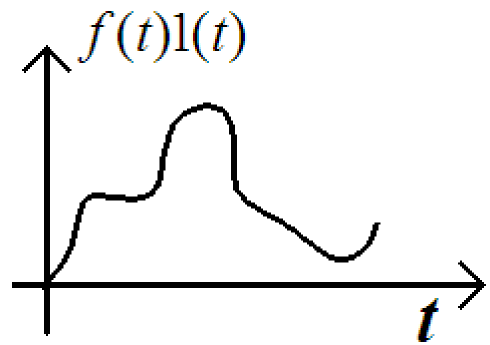


- 阶跃函数： $K\cdot 1(t)$

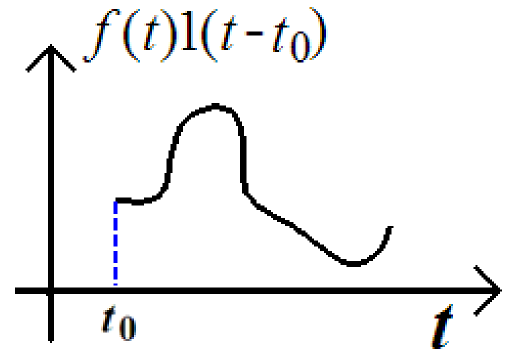
〖示例1〗函数$f(t)$



$f(t)$

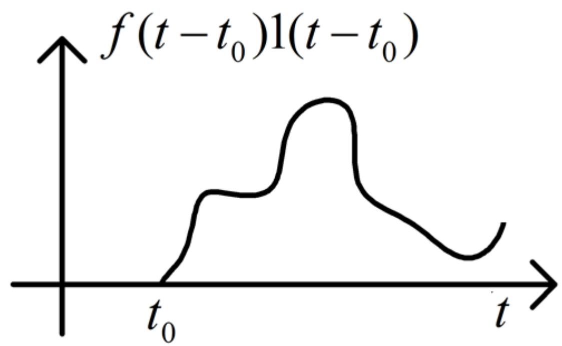


$f(t)1(t)$

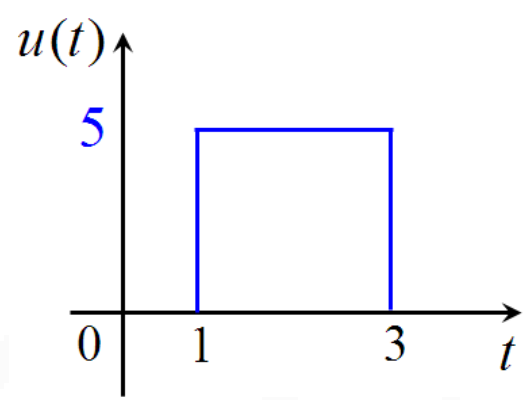


$f(t)1(t-t_0)$

$f(t-t_0)1(t-t_0)$



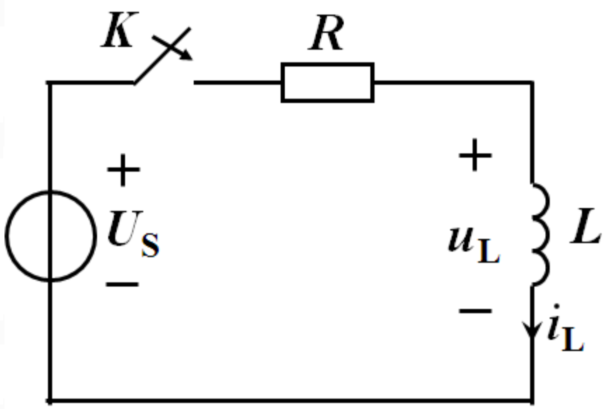
〖示例2〗门信号：如何用函数表示？



$$u(t)=5\cdot[1(t-1)-1(t-3)]$$

✧ 单位阶跃响应：在单位阶跃函数激励下的零状态响应，称为单位阶跃响应。

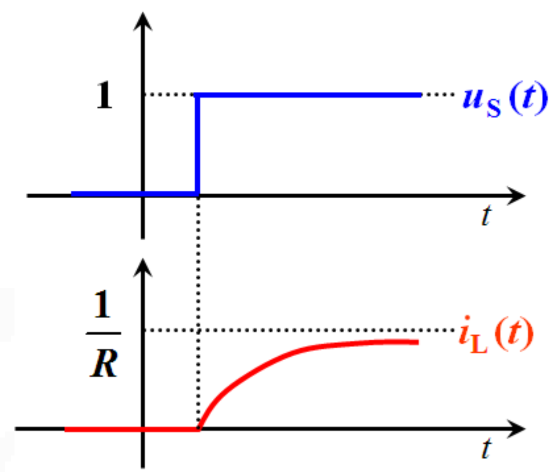
图示电路，零状态响应为：



$$i_L(t)=\frac{U_S}{R}(1-e^{-\frac{R}{L}t})$$

当U_S=1(t)时，得到单位阶跃响应：

$$i_L(t)=\frac{1}{R}(1-e^{-\frac{R}{L}t})\cdot 1(t)$$

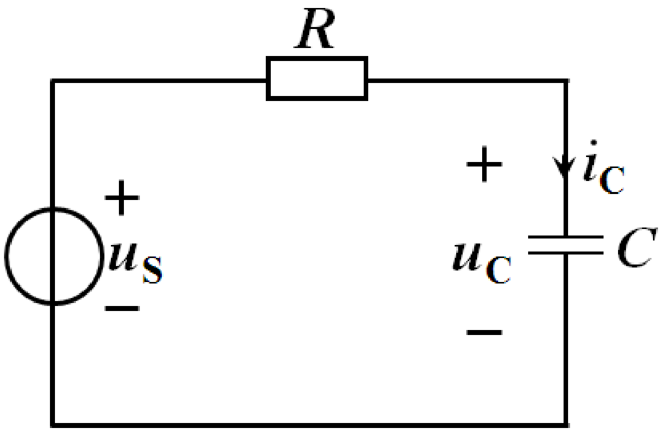


✧ 非时变系统的延迟特性：当激励延迟t_0，则响应亦延迟t_0。

当U_S=1(t- t_0)时，响应为：$i_L(t)=\frac{1}{R}[1-e^{-\frac{R}{L}(t-t_0)}]\cdot 1(t-t_0)$

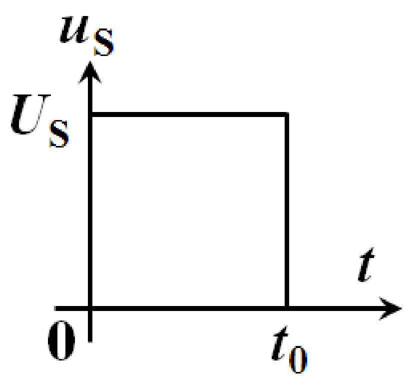
〖例1〗

图示电路，已知电路零状态，u_S波形如下，求$u_C(t)$。



〖解1〗按三要素法分段求解。

t=0时换路，当$0 \le t < t_0$时为零状态响应。

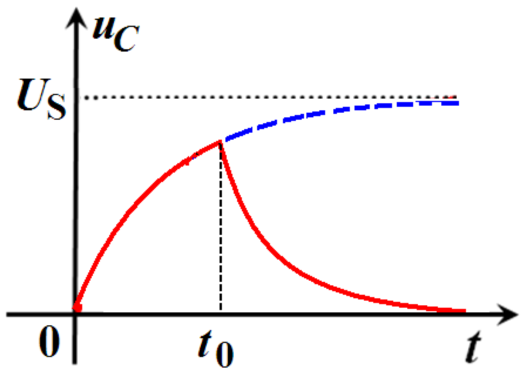


$$u_C(t) = U_S(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$$

$t = t_0$时再次换路，$t \ge t_0$时为零输入响应。

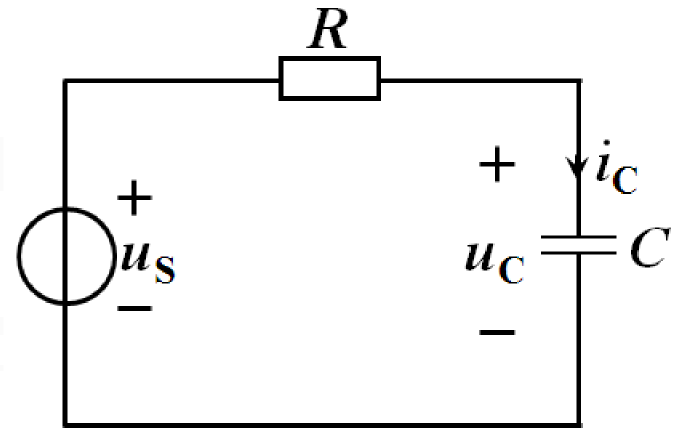
$$u_C(t_0^+) = u_C(t_0^-) = U_S(1 - e^{-\frac{t_0}{RC}})$$

$$u_C(t) = U_S(1 - e^{-\frac{t_0}{RC}})e^{-\frac{t-t_0}{RC}}$$



响应波形

〖解2〗通过单位阶跃响应来求。

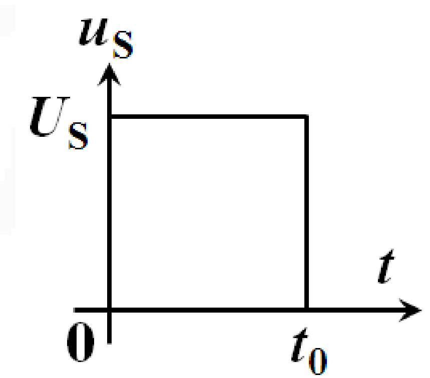


当u_S=1(t)时（单位阶跃响应）：

$$u_C(t)=(1-e^{-\frac{t}{RC}})\cdot 1(t)$$

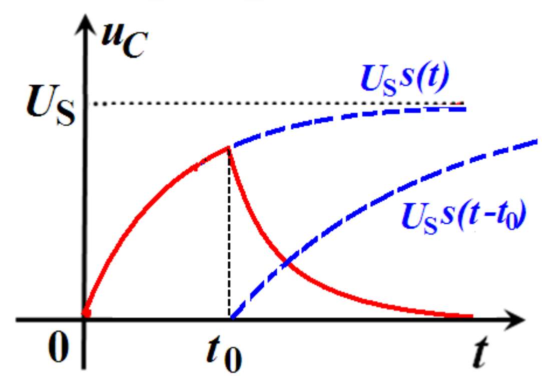
当u_S=1(t- t_0)时，由时不变特性得：

$$u_C(t)=(1-e^{-\frac{t-t_0}{RC}})\cdot 1(t-t_0)$$



当 $u_s=U_s\cdot 1(t)-U_s\cdot 1(t-t_0)$ 时，由线性叠加定理得：

$$u_C(t)=U_s(1-e^{-\frac{t}{RC}})\cdot 1(t)$$
$$-U_s(1-e^{-\frac{t-t_0}{RC}})\cdot 1(t-t_0)$$

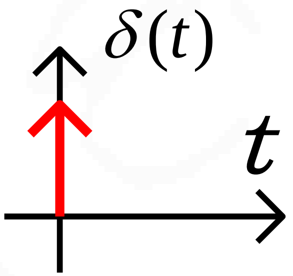


响应波形

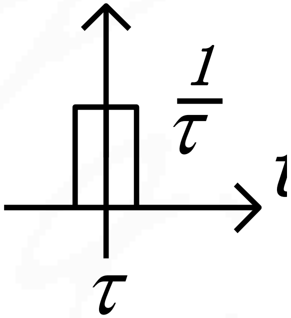
二、单位冲激响应

✧ 单位冲激函数：

$$\delta(t)=\begin{cases}0 & t\neq 0\\ \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1\end{cases}$$



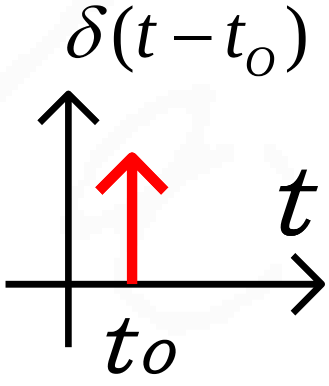
- 单位冲激函数的作用时间极短，幅值极大，但能量为1。
- 单位冲激函数相当于：一矩形脉冲信号（宽度为τ，高度为$1/\tau$）在$\tau\to 0$时的信号。



$$\delta(t)=\lim_{\tau\to 0}\left[\frac{1}{\tau}\cdot 1(t+\frac{\tau}{2})-\frac{1}{\tau}\cdot 1(t-\frac{\tau}{2})\right]$$

- 延时单位冲激函数：

$$\delta(t-t_0)=\begin{cases}0 & t\neq t_0\\ \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_0)\mathrm{d}t=1\end{cases}$$



- 单位冲激函数常用作取样函数。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\delta(t)\mathrm{d}t=f(0)\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)\mathrm{d}t=f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t=f(t_0)\int_{0^-}^{0^+}\delta(t-t_0)\mathrm{d}t=f(t_0)$$

$\Rightarrow$ $f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)$ $\quad f(t)\delta(t-t_0)=f(t_0)\delta(t-t_0)$

- 单位冲激函数是单位阶跃函数的导数。

$$\delta(t)=\frac{d}{dt}1(t)$$

✧ 单位冲激响应：在单位冲激函数激励下的零状态响应，称为单位冲激响应。

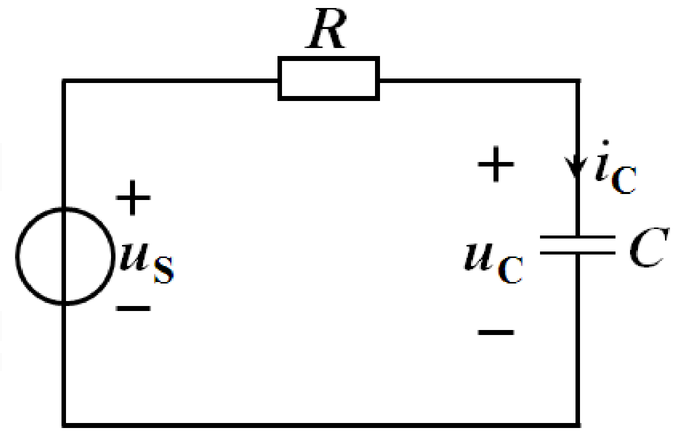
✧ 求电路的冲激响应时，可先求电路的单位阶跃响应，然后对单位阶跃响应求导，就可得到电路的单位冲激响应。

$$h(t) = \frac{d}{dt} s(t)$$

$$u_{\delta}(t) = \frac{d}{dt} u_s(t)$$

〖例1〗

图示电路，设$u_S=\delta(t)$，求电容电压和电流的单位冲激响应$u_{C\delta}(t)$和$i_{C\delta}(t)$。



〖解1〗根据三要素法来求解。

求初值。先列方程：$$RC\frac{du_C}{dt}+u_C=\delta(t)$$

两边积分：$$\int_{0-}^{0+}RC\frac{du_C}{dt}dt+\int_{0-}^{0+}u_C dt=\int_{0-}^{0+}\delta(t)dt$$

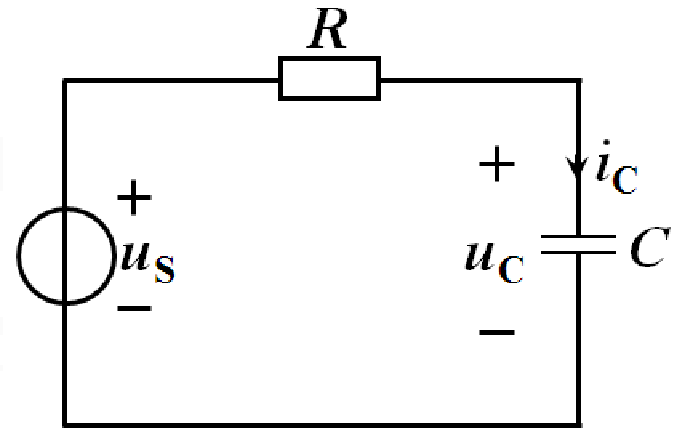
u_C在t=0时有跳变但仍为有限值，$\frac{du_C}{dt}$含有冲激：

$$RC[u_C(0^+)-u_C(0^-)]=1$$

由$u_C(0^-)=0$ 得：$$u_C(0^+)=\frac{1}{RC}$$

$\delta(t)$作用下，u_C不满足换路定则。

当$t>0$时，$u_S=\delta(t)=0$，电路相当于RC短路：



稳态值为： $u_C(\infty)=0$

时间常数： $\tau=RC$

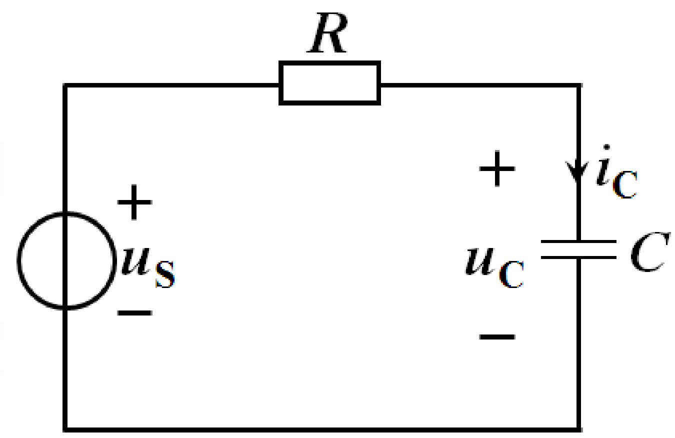
由三要素法得冲激响应（$\delta(t)$提供电容初始能量）：

$$u_{C\delta}(t)=\frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}\cdot 1(t)\ \text{V}$$

$$i_{C\delta}(t)=C\frac{du_{C\delta}}{dt}=-\frac{1}{R^2C}e^{-\frac{t}{RC}}\cdot 1(t)+\frac{1}{R}\delta(t)\ \text{A}$$

说明： 冲激响应为零状态响应，但相当于冲激电源提供初始能量的零输入响应。

〖解2〗通过单位阶跃响应来求。



当$u_S=1(t)$时（单位阶跃响应）：

$$u_{Cs}(t)=(1-e^{-\frac{t}{RC}})\cdot 1(t)\ \mathrm{V}$$

$$i_{Cs}(t)=\frac{1}{R}e^{-\frac{t}{RC}}\cdot 1(t)\ \mathrm{A}$$

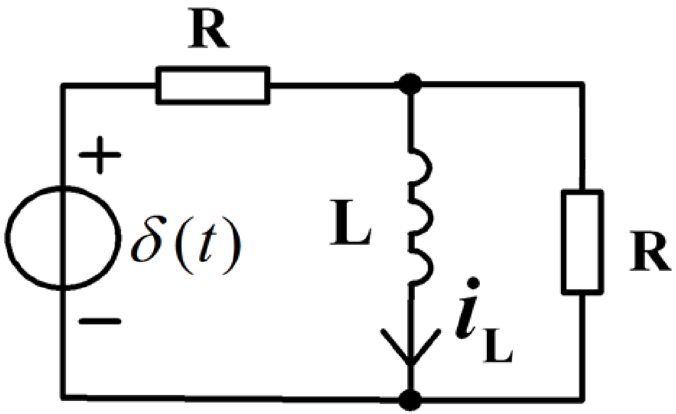
当$u_S=\delta(t)$时（单位冲激响应）：

$$u_{C\delta}(t)=\frac{du_{Cs}(t)}{dt}=\frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}\cdot 1(t)\ \mathrm{V}$$

$$i_{C\delta}(t)=\frac{di_{Cs}(t)}{dt}=-\frac{1}{R^2C}e^{-\frac{t}{RC}}\cdot 1(t)+\frac{1}{R}\delta(t)\ \mathrm{A}$$

〖例2〗

图示电路，已知R=10 Ω，L=0.1 H，求$i_L(t)$。



〖解〗

先求单位阶跃响应：

$$i_L(0^+) = 0 \qquad i_L(\infty) = \frac{1}{R} = 0.1\text{A}$$

$$\tau = \frac{L}{R//R} = \frac{0.1}{5} = 0.02\text{s}$$

$$i_{Ls}(t) = 0.1(1 - e^{-50t}) \cdot 1(t)\ \text{A}$$

单位冲激响应为：

$$i_L(t) = \frac{di_{Ls}(t)}{dt} = 5e^{-50t} \cdot 1(t)\ \text{A}$$

本章重点提示：

- ✧ 掌握一般情况下的换路定则，奇异电路的换路跳变。
- ✧ 掌握*RC*和*RL*电路的过渡过程（零输入、零状态响应）。
- ✧ 理解全响应的表达形式及响应分解。
- ✧ 熟练掌握一阶电路的三要素法，对于复杂的一阶电路要会应用三要素法求出响应。
- ✧ 掌握指数激励下的过渡过程求解。
- ✧ 了解阶跃响应和冲激响应的概念，会求简单电路的冲激响应。
- ✧ 掌握二阶*RLC*的零输入响应性质（基本概念）。

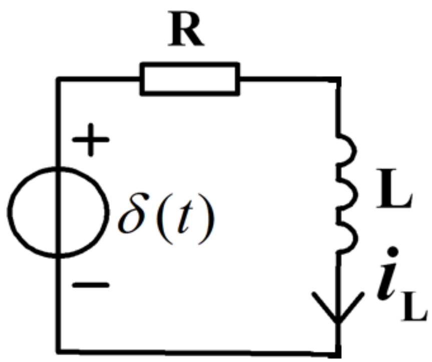
作 业：

题7.2	题7.8	题7.12
题7.4	题7.13	题7.28
题7.5	题7.17	补充习题

提示：题7.12教材后答案有误，应为：

$$u_{C2}(t)=12e^{-0.5t}-6e^{-t}\ \mathrm{V}$$

〖补充习题〗冲激响应



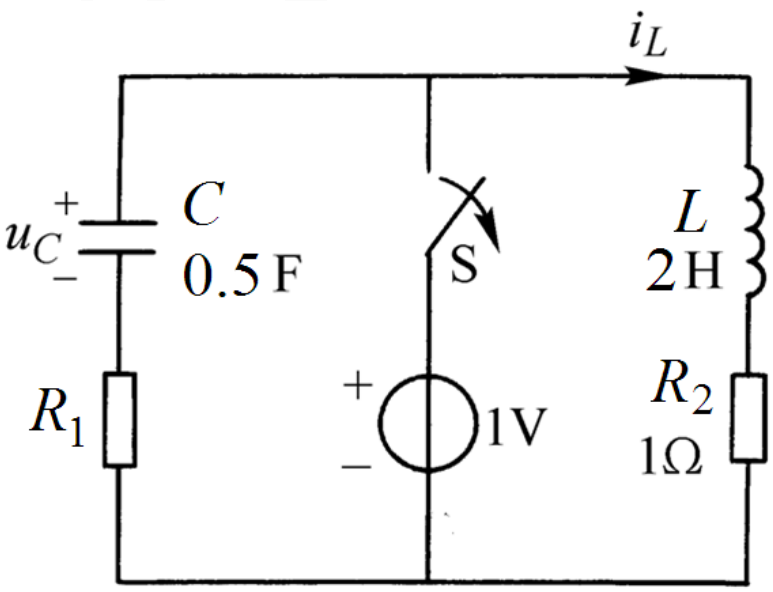
图示RL电路，$R=5\ \Omega$，$L=0.5\text{H}$，求冲激响应$i_{L\delta}(t)$和$u_{L\delta}(t)$。

〖补充习题〗二阶电路

图示电路中，$L=2\ \text{H}$，$C=0.5\ \text{F}$，$R_2=1\ \Omega$，开关K闭合已久，$t=0$时断开。

(1) 当$R_1=1\ \Omega$时，电容电压的过渡波形为哪种形态？

(2) 若要求过渡过程为临界阻尼，求R_1阻值。



Thank you for your attention

蔡忠法 浙江大学电工电子教学中心

Ver2.01