第4章 电路分析方法与电路定理

之3 电路定理

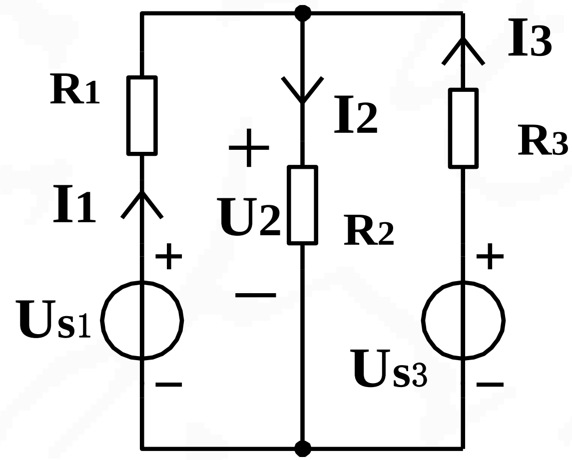
本部分主要讨论：

- 叠加定理和线性定理
- 替代定理
- 戴维南定理和诺顿定理
- 最大功率传输定理
- 密勒定理

4.3 电路定理

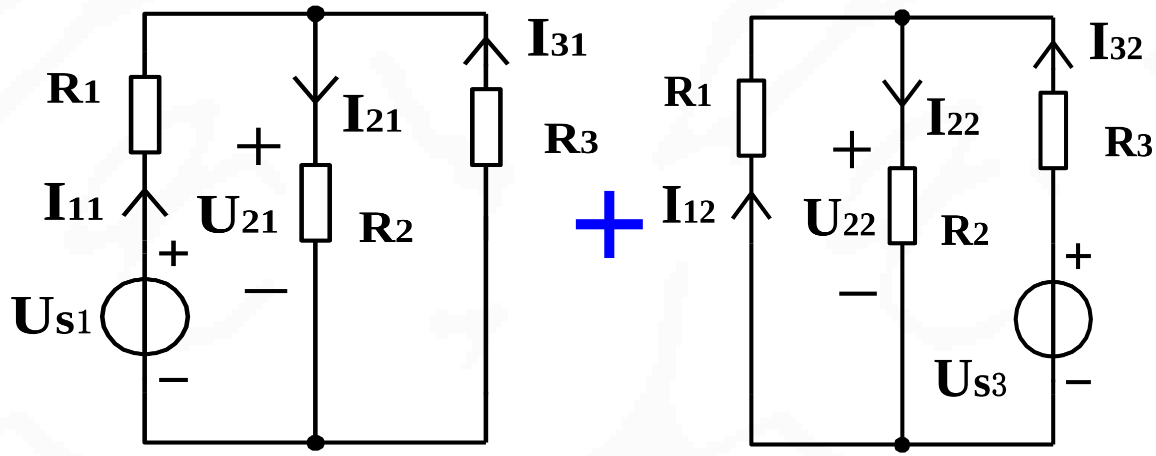
一、线性叠加定理

1、叠加定理



✧ 线性电路中任一支路电流或电压等于各个独立源分别单独作用情况下所产生电流或电压之代数和。

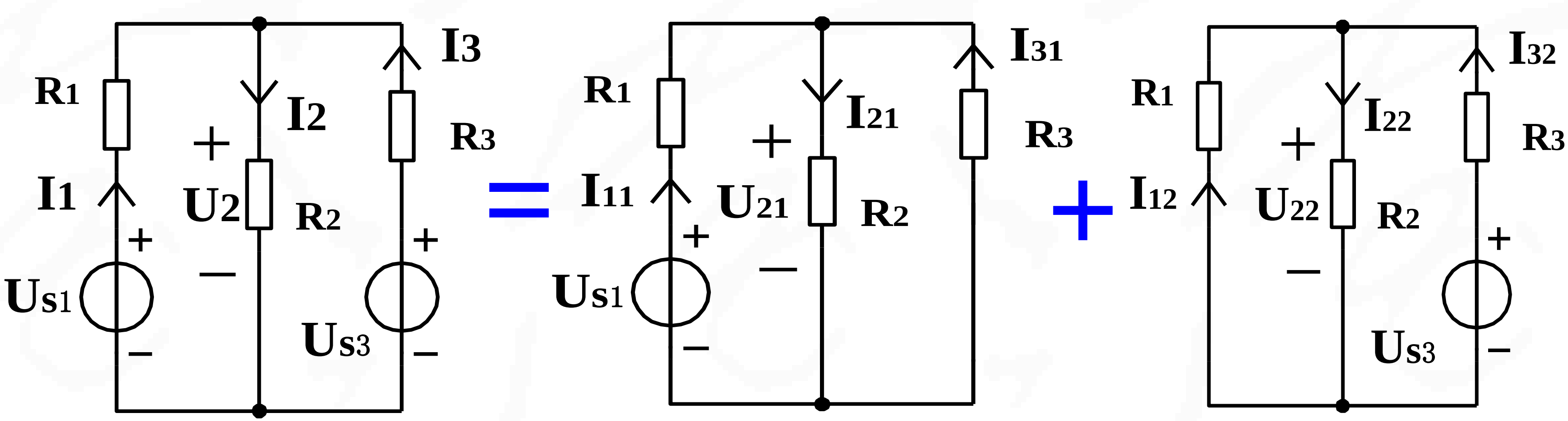
$$I_2 = I_{21} + I_{22} \quad || \quad U_2 = U_{21} + U_{22}$$



✧ 分别单独作用是指：电路中其余电压源短路，其余电流源开路。

证： 由米尔曼公式，支路2的电压为：

$$U_2=\frac{\dfrac{U_{S1}}{R_1}+\dfrac{U_{S3}}{R_3}}{\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}+\dfrac{1}{R_3}}=\frac{\dfrac{U_{S1}}{R_1}}{\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}+\dfrac{1}{R_3}}+\frac{\dfrac{U_{S3}}{R_3}}{\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}+\dfrac{1}{R_3}}$$



说明

① 叠加定理中，不起作用的电压源元件短路，不起作用的电流源元件开路。

② 叠加定理计算时，独立电源可分成一个一个电源分别作用，也可把电源分为一组一组电源分别作用。

③ 叠加定理只适合于线性电路，非线性电路的电压电流不可叠加。

④ 无论是线性电路，还是非线性电路，功率 P 均不可叠加。

设：$I_1 = I'_1 + I''_1$

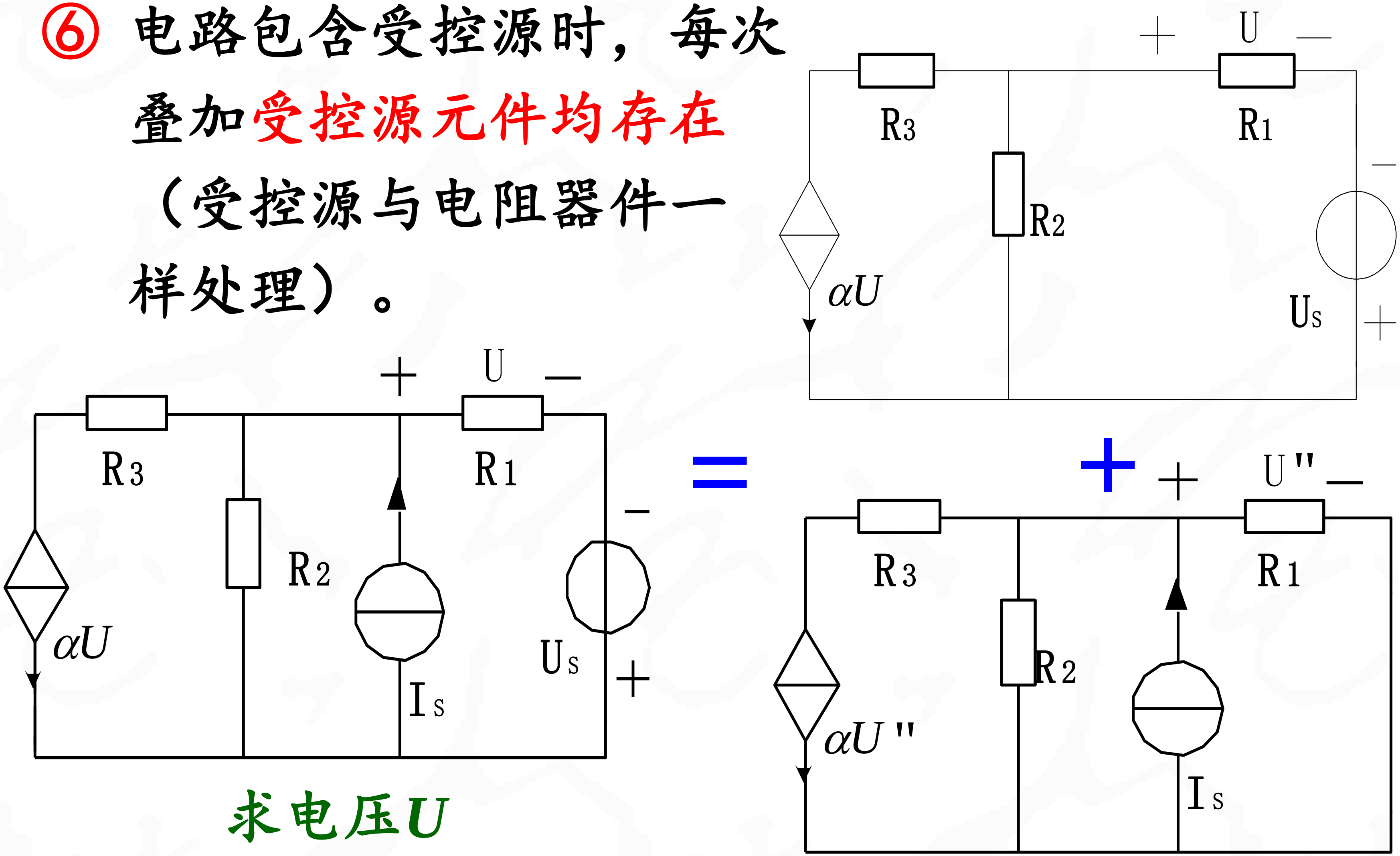
$$P = I^2R = (I'_1 + I''_1)^2 R = I'^2_1 R + I''^2_1 R + 2I'_1 I''_1 R$$

$$= P'_1 + P'_2 + 2I'_1 I''_1 R$$

显然：$P \neq P'_1 + P'_2$

⑤ 叠加定理不仅可以用来计算解题，而且更多的用来分析电路，推导定理。

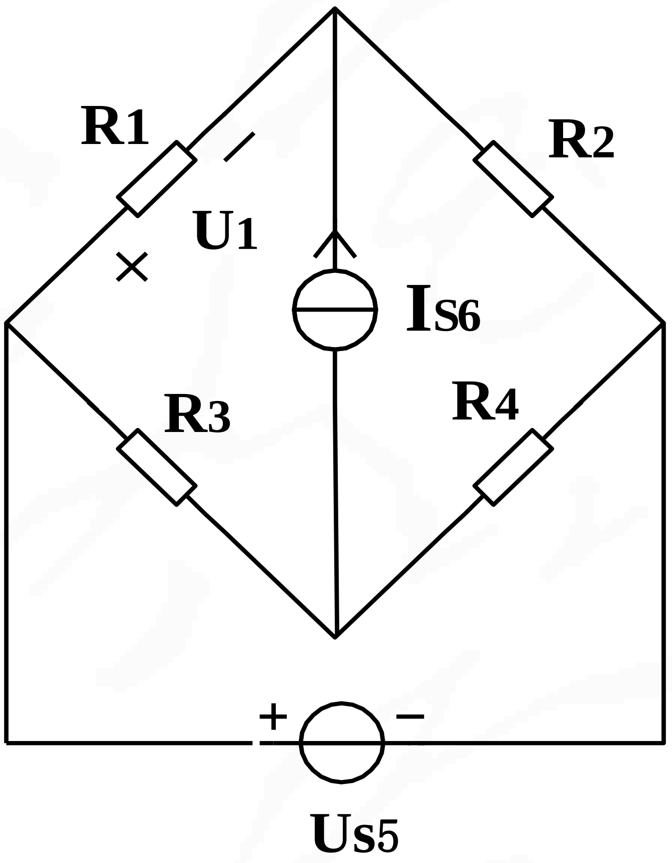
⑥ 电路包含受控源时，每次叠加受控源元件均存在（受控源与电阻器件一样处理）。



求电压*U*

〖例1〗

已知R_1=2 Ω，R_2= R_3= 4 Ω，R_4= 8 Ω，I_{S6}=1 A，为使U_1=0V，U_{S5}应为多少？



〖解〗应用叠加定理，当I_{S6}起作用时，R_1电压为：

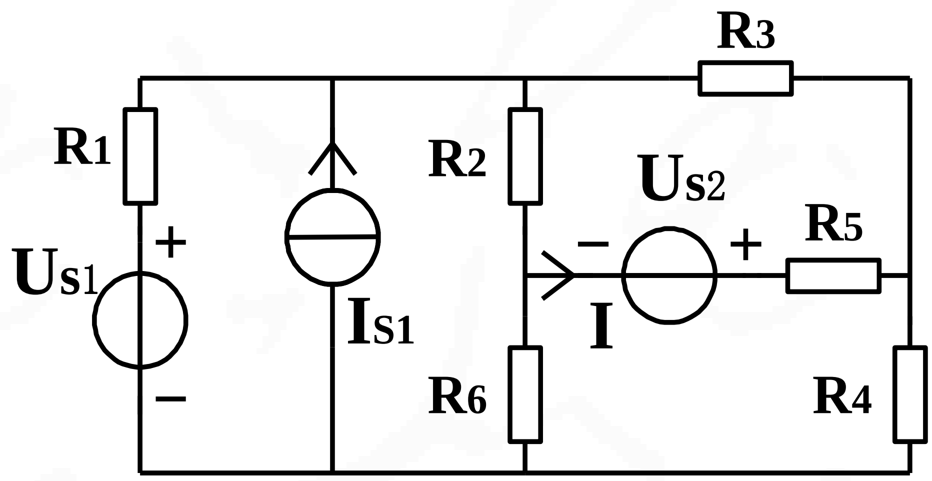
$$U_1' = -R_1 \frac{R_2}{R_1 + R_2} I_{S6} = -\frac{4}{3}\ \mathrm{V}$$

当U_{S5}起作用时，R_1电压为：$U_1'' = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} U_{S5} = \dfrac{1}{3} U_{S5}$

由题意，$U_1 = U_1' + U_1'' = 0$ 得：$U_{S5} = 4\ \mathrm{V}$

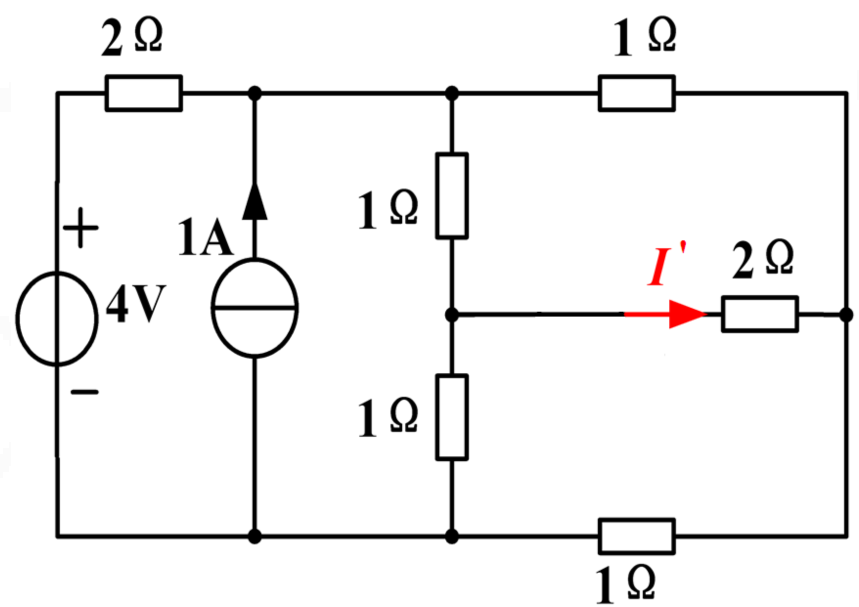
〖例2〗

已知$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_6 = 1\ \Omega$， $R_5 = 2\ \Omega$，$I_{S1} = 1\ A$，$U_{S1} = 4\ V$，$U_{S2} = 2\ V$，求电流I。



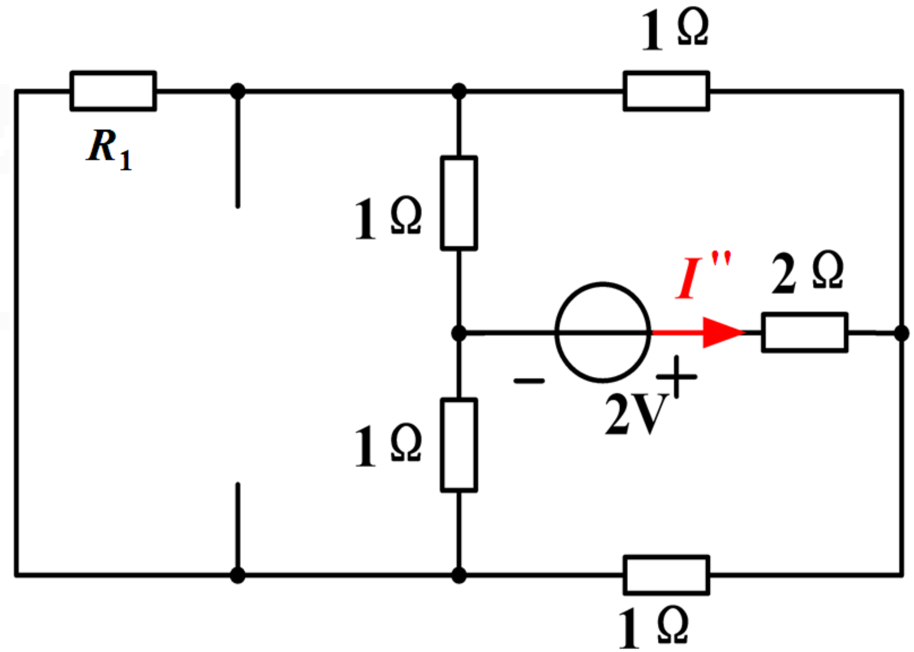
〖解〗

当U_{S1}、I_{S1}作用时，由于$R_2 = R_3 = R_4 = R_6$，电桥平衡。



$$I' = 0A$$

当U_{S2}作用时，等效电路如图。



电桥平衡，R_1可开路（也可短路）。

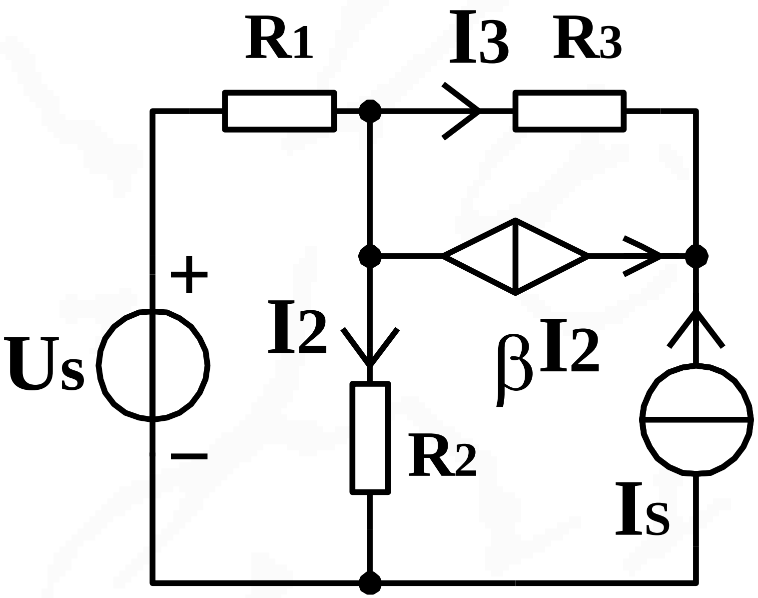
$$I''=\frac{U_{S2}}{R_5+(R_2+R_3)//(R_4+R_6)}=\frac{2}{2+1}=\frac{2}{3}\text{A}$$

所以，

$$I=I'+I''=\frac{2}{3}\text{A}$$

〖例3〗

已知R_1= 20 Ω， R_2= 5 Ω，R_3= 2 Ω，β = 10，U_S= 10V，I_S=1 A，试用叠加定理求电流I_3。

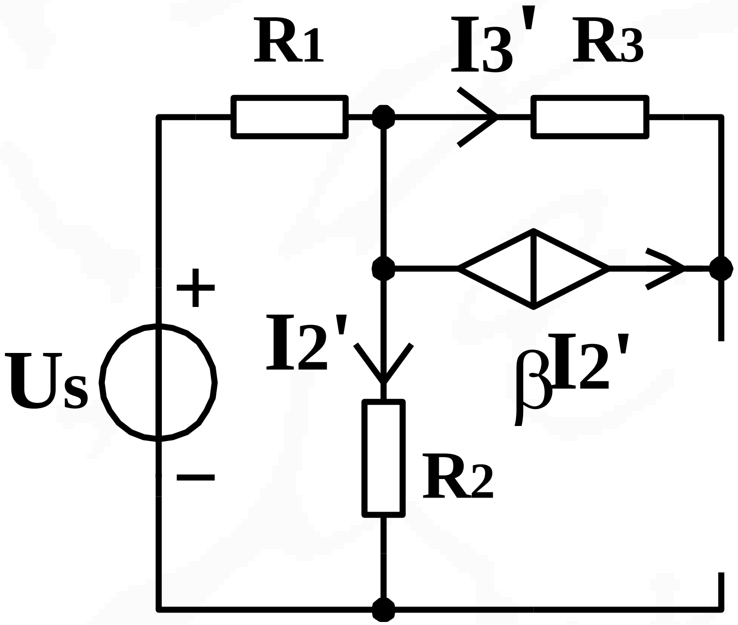


〖解〗

当**电压源U_S**单独作用时：

$$I_2' = \frac{U_S}{R_1 + R_2} = 0.4\text{A}$$

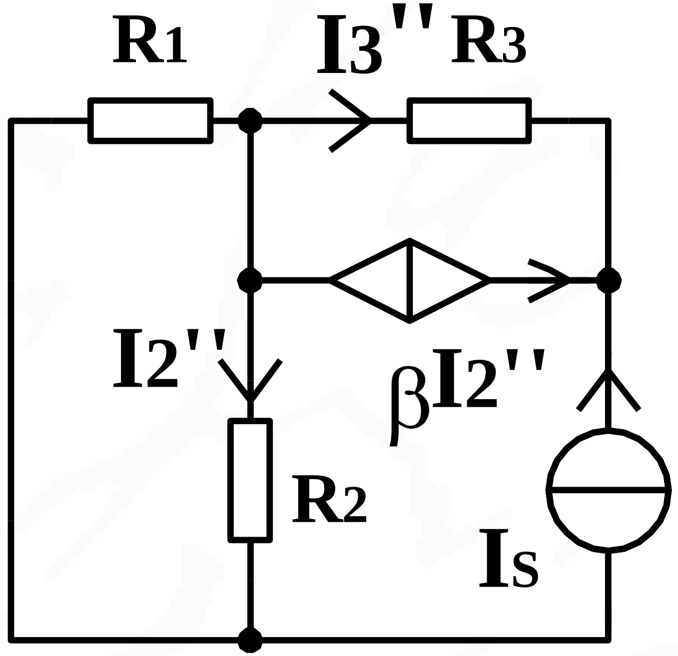
$$I_3' = -\beta I_2' = -4\text{A}$$



当电流源I_S单独作用时：

$$I_2'' = I_S \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 0.8\text{A}$$

$$I_3'' = -(I_S + \beta I_2'') = -9\text{A}$$

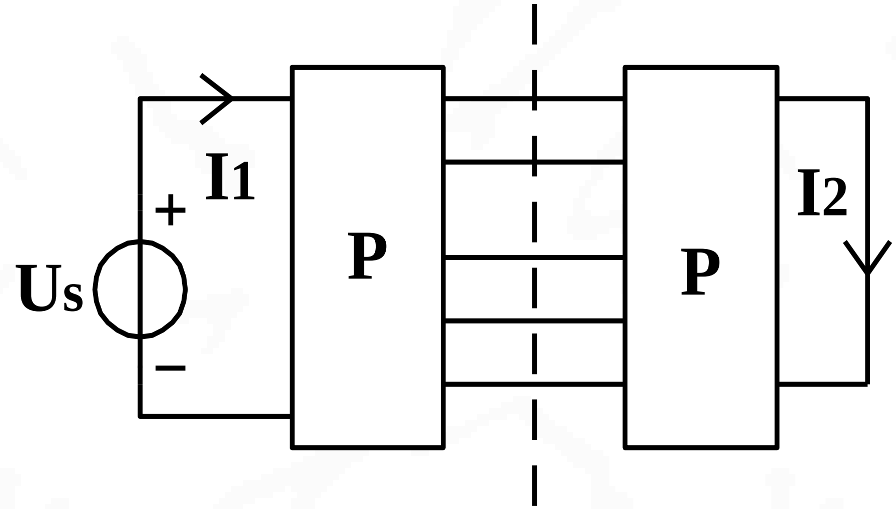


所以，

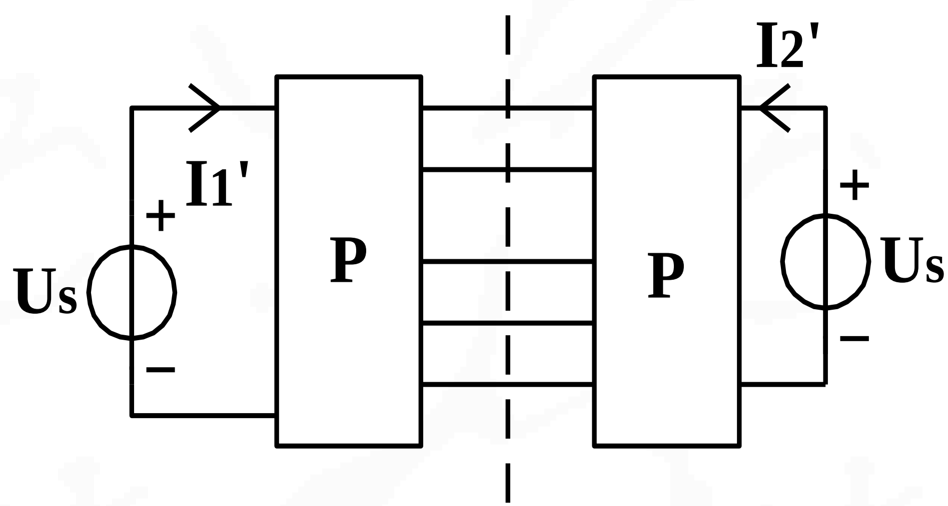
$$I_3 = I_3' + I_3'' = -13\ \text{A}$$

〖例4〗

图示电路，P为任意线性无源电路，已知I_1=3 A，I_2=1 A。问切断中间所有支路后，$I_1^{'}$ = ？



〖解〗 考虑**电路的对称性**，在支路2加入一电压源，中间所有支路的电流都为零，断开不影响其余支路电流，因此问题即转化为求此时的 $I_1^{'}$ 。



由叠加定理得：

$$I_1^{'} = I_1 - I_2 = 2\text{A}$$

2、线性定理

✧ 线性电路中，当只有一个独立电源（独立电压源或独立电流源）作用时，各个支路电压或电流均与该电源的大小成正比。

- 当独立电压源激励时： $I = gU_s$ $U = \alpha U_s$
- 当独立电流源激励时： $I = \beta I_s$ $U = rI_s$

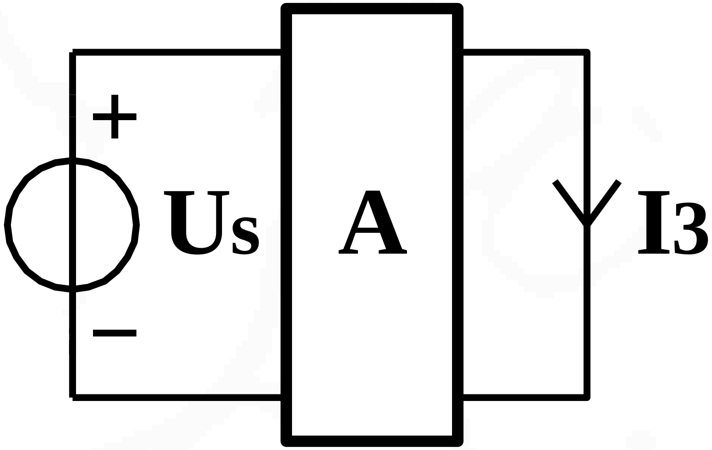
✧ 线性电路中，当多个独立电源作用时，根据叠加定理和线性定理，支路电压、电流可表示为：

$$I_k = \sum_{j=1}^{n} g_{kj} U_{Sj} + \sum_{i=1}^{m} \beta_{ki} I_{Si}$$

$$U_k = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} U_{Sj} + \sum_{i=1}^{m} \gamma_{ki} I_{Si}$$

〖例1〗

电路如图，A为有源电路，当U_S=4V时，I_3=4A；当U_S=6V时，I_3=5A。求：当U_S=2V时，I_3为多少？



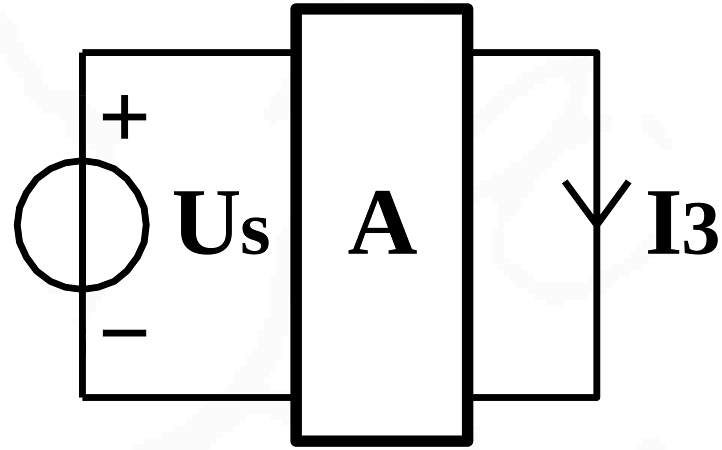
〖解〗 A为有源电路，内部存在独立电压源或电流源。由线性定理，I_3可表示为：

$$I_3 = G_1 \times U_S + \sum_{i=1}^{n} G_i U_{Si} + \sum_{j=1}^{m} \beta_{kj} I_{Sj}$$

由于A内电源不变，因此上式又可表示为：

$$I_3 = G \times U_S + I_0$$

$$I_3 = G \times U_S + I_0$$



已知当U_S=4V时，I_3=4A；

当U_S=6V时，I_3=5A。

$$4 = G \times 4 + I_0$$

$$5 = G \times 6 + I_0$$

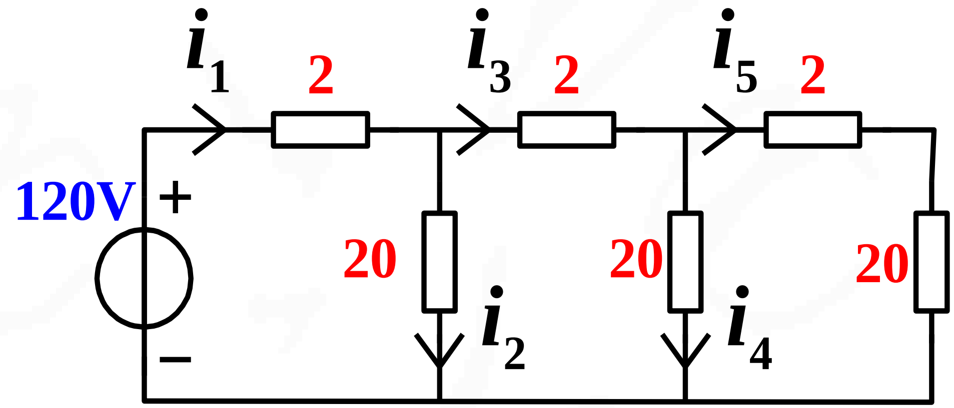
解得：

$$G = 0.5$$

$$I_0 = 2$$

当U_S=2V时， $I_3 = 0.5 \times 2 + 2 = 3\ A$

〖例2〗倒递推法



电路如图，求各支路电流。

〖解〗

常规方法是先求I_1，再求I_2、I_3，然后求I_4、I_5。

简便的方法是利用线性定理，设$I_5'=1A$ (U_S待定)。

$$I_4'=\frac{1\times(2+20)}{20}=1.1A \qquad I_3'=2.1A$$

$$I_2'=\frac{2.1\times 2+1.1\times 20}{20}=1.31A \qquad I_1'=3.41A$$

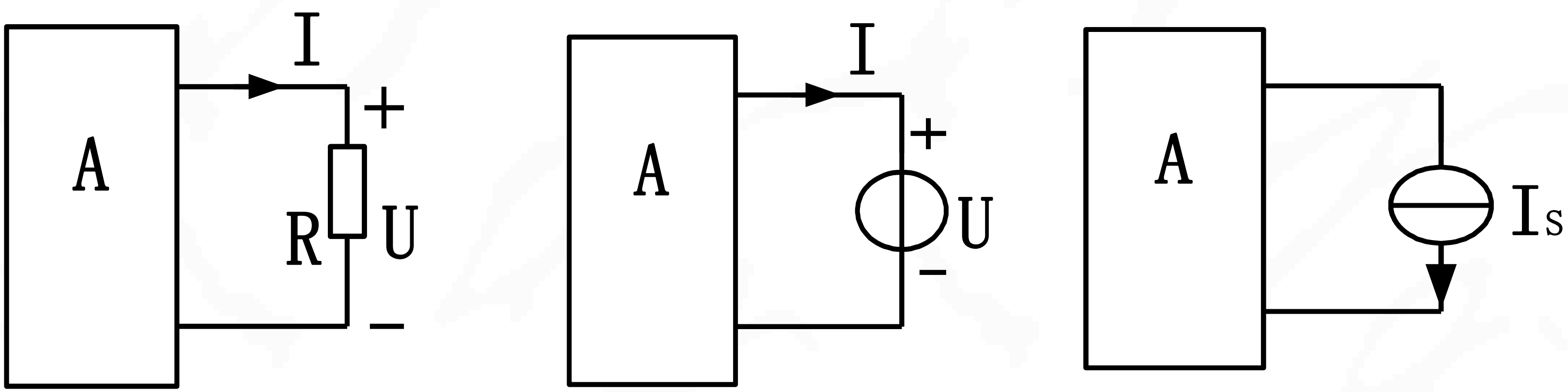
$$U_S'=3.41\times 2+1.31\times 20=33.02V$$

而实际电压源为120V，所以 $I_1=\frac{120}{33.02}I_1'=12.38A$

同理可求得其余支路电流。

二、替代定理

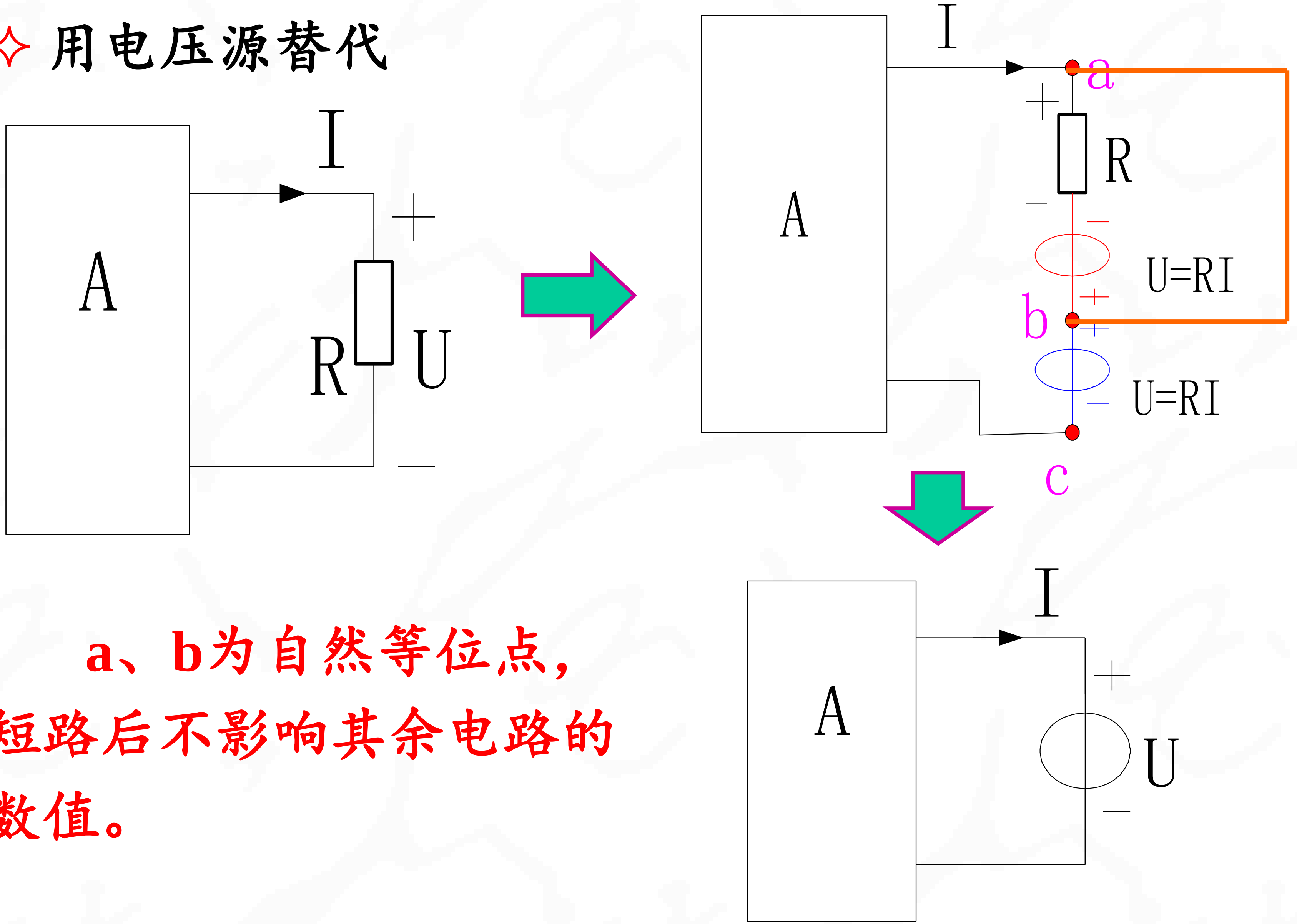
✧ 若一条支路电流（或电压）确定，则可以用一个等于该确定电流（或电压）的电流源（或电压源）替代，替代之后，其余部分的电流、电压仍保持不变，这就是替代定理。



示例　　用电压源替代　　用电流源替代

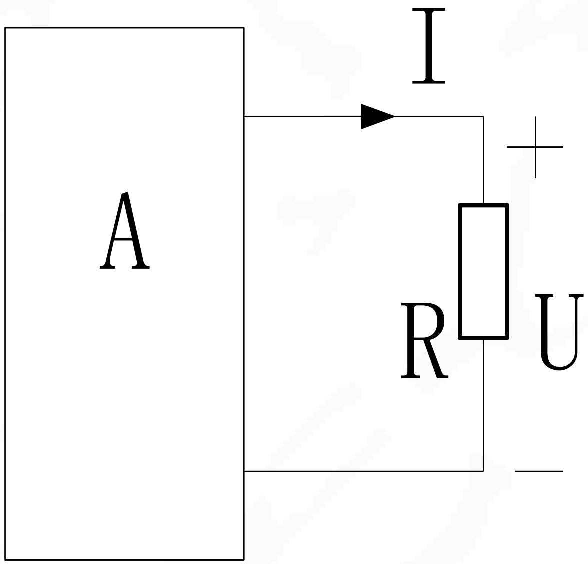
证明：

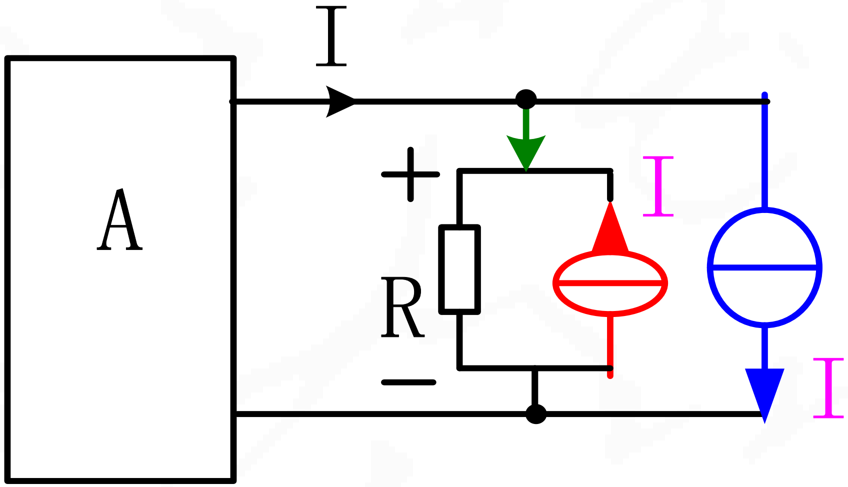
✧ 用电压源替代

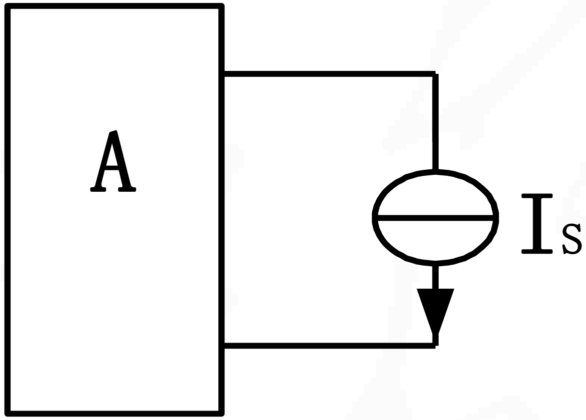


a、b为自然等位点，短路后不影响其余电路的数值。

✧ 用电流源替代







$I_S=I$

电流为零可开路。

➢ 说明

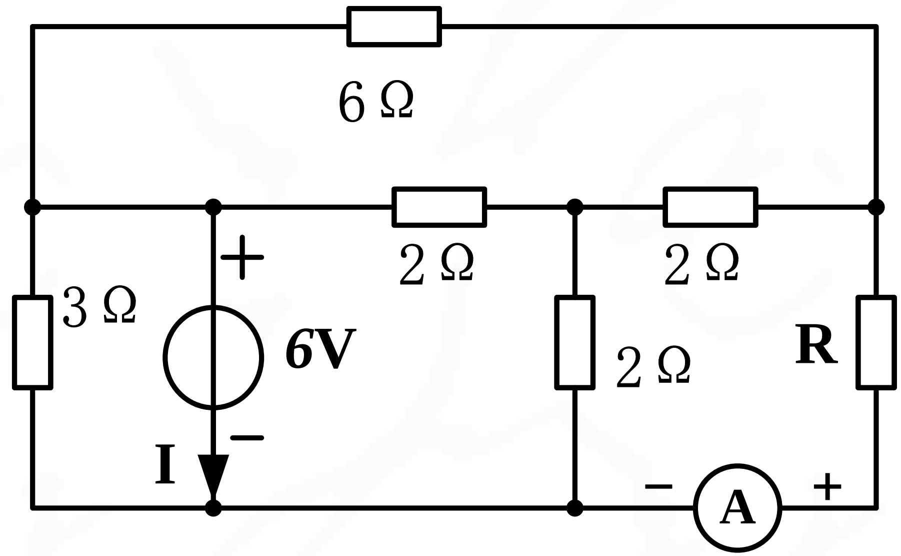
① 替代定理也称为置换定理，适用于任何电路（线性或非线性电路都适用）。

② 不仅一条支路可以被替代，而且一端口电路都可以被替代。

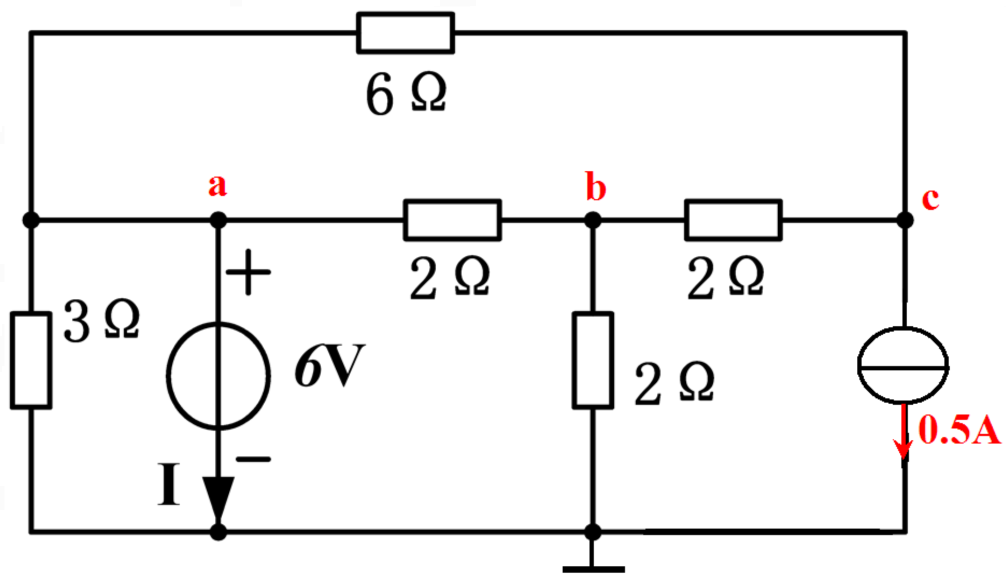
③ 被替代支路不能与电路其它部分存在耦合关系，如受控源。

〖例1〗

已知安培表的读数为0.5A，求电阻*R*。



〖解〗替代定理，*R*用电流源替代，只需求出U_c即可。



$$U_a = 6\ \text{V}$$

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)U_b - \frac{U_a}{2} - \frac{U_c}{2} = 0$$

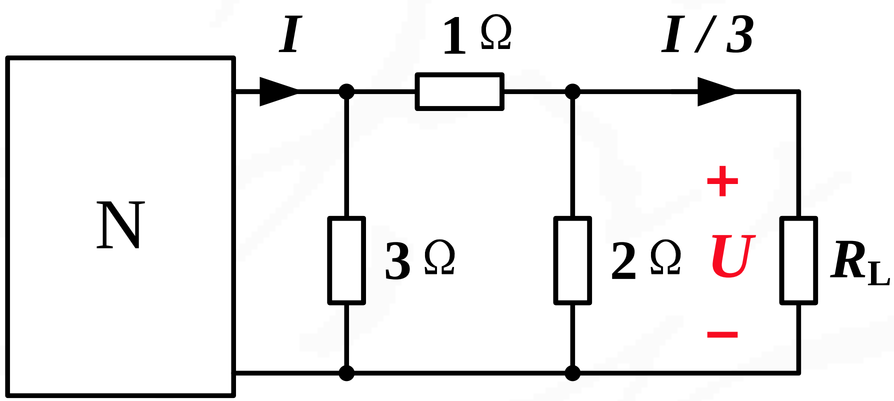
$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right)U_c - \frac{U_a}{6} - \frac{U_b}{2} = -0.5$$

解得：U_b=3V　U_c=3V

R=3V/0.5A=6 Ω

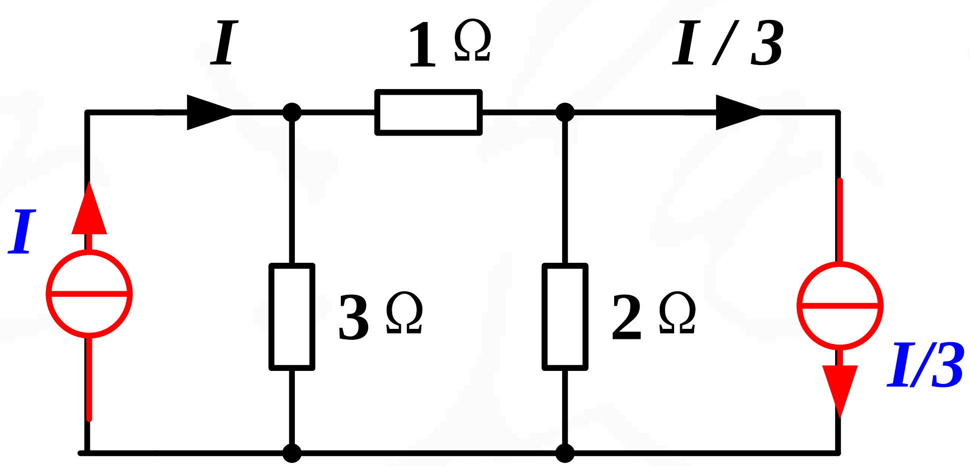
〖例2〗

含源一端口网络N通过衰减电路连接负载R_L, 现欲使流过负载R_L 的电流为一端口网络N输出电流的1/3，负载R_L 应为多少？



〖解〗 根据替代定理，用电流源替代。

只需求出U即可，可用叠加定理计算。



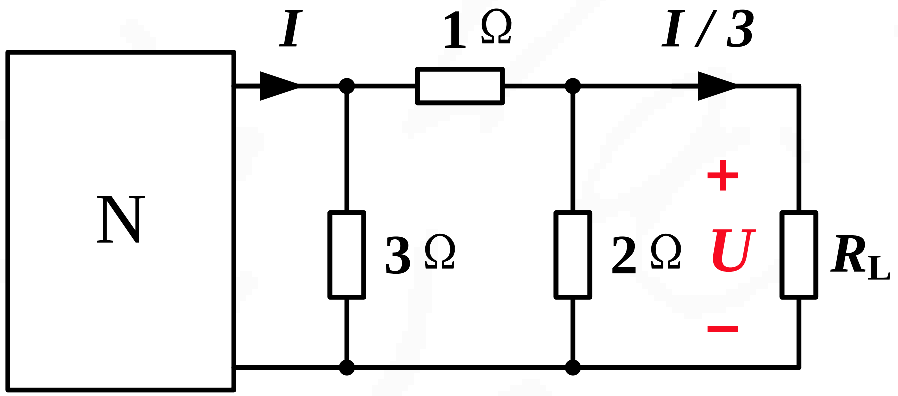
$$U' = \frac{1}{2} I \times 2 = I$$

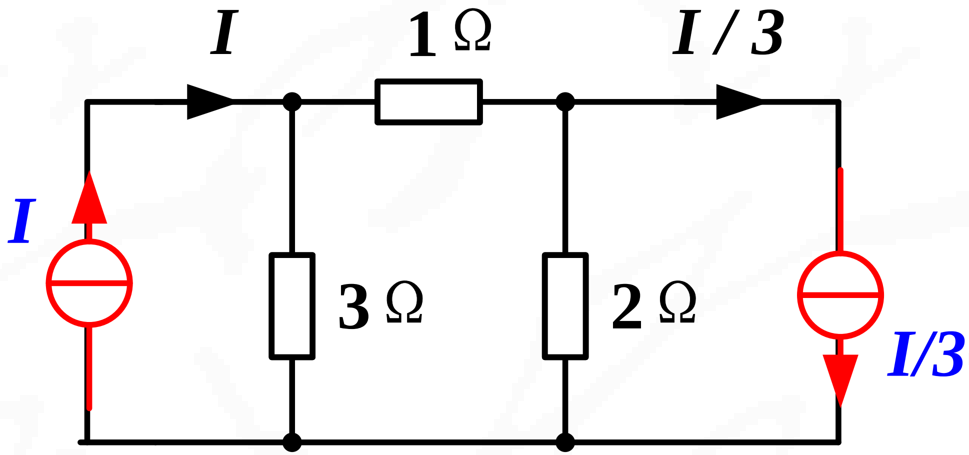
$$U'' = -\frac{I}{3} \times \frac{4}{4+2} \times 2 = -\frac{4}{9} I$$

$$U = U' + U'' = \frac{5}{9} I$$

所以，

$$R_L = \frac{U}{\frac{I}{3}} = \frac{\frac{5}{9} I}{\frac{I}{3}} = \frac{5}{3}\ \Omega$$





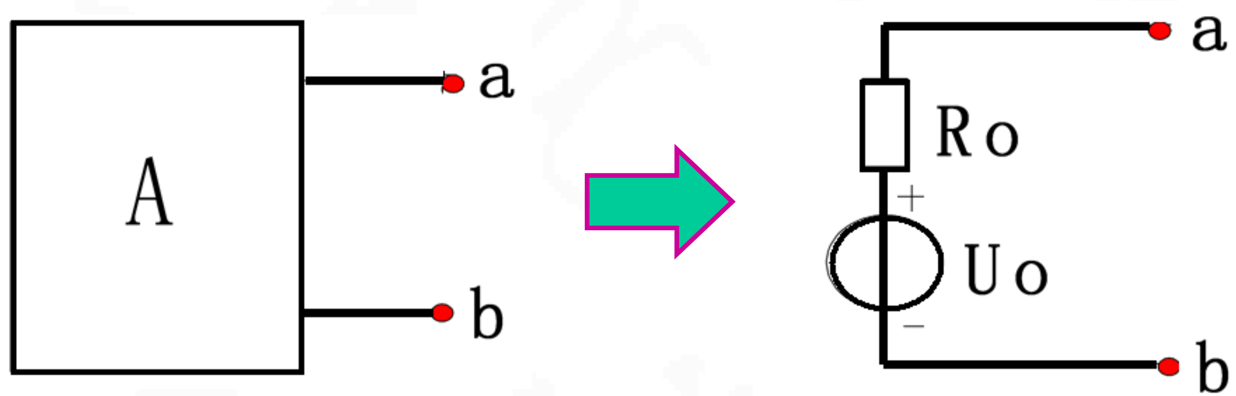
三、戴维南定理和诺顿定理

1、戴维南定理

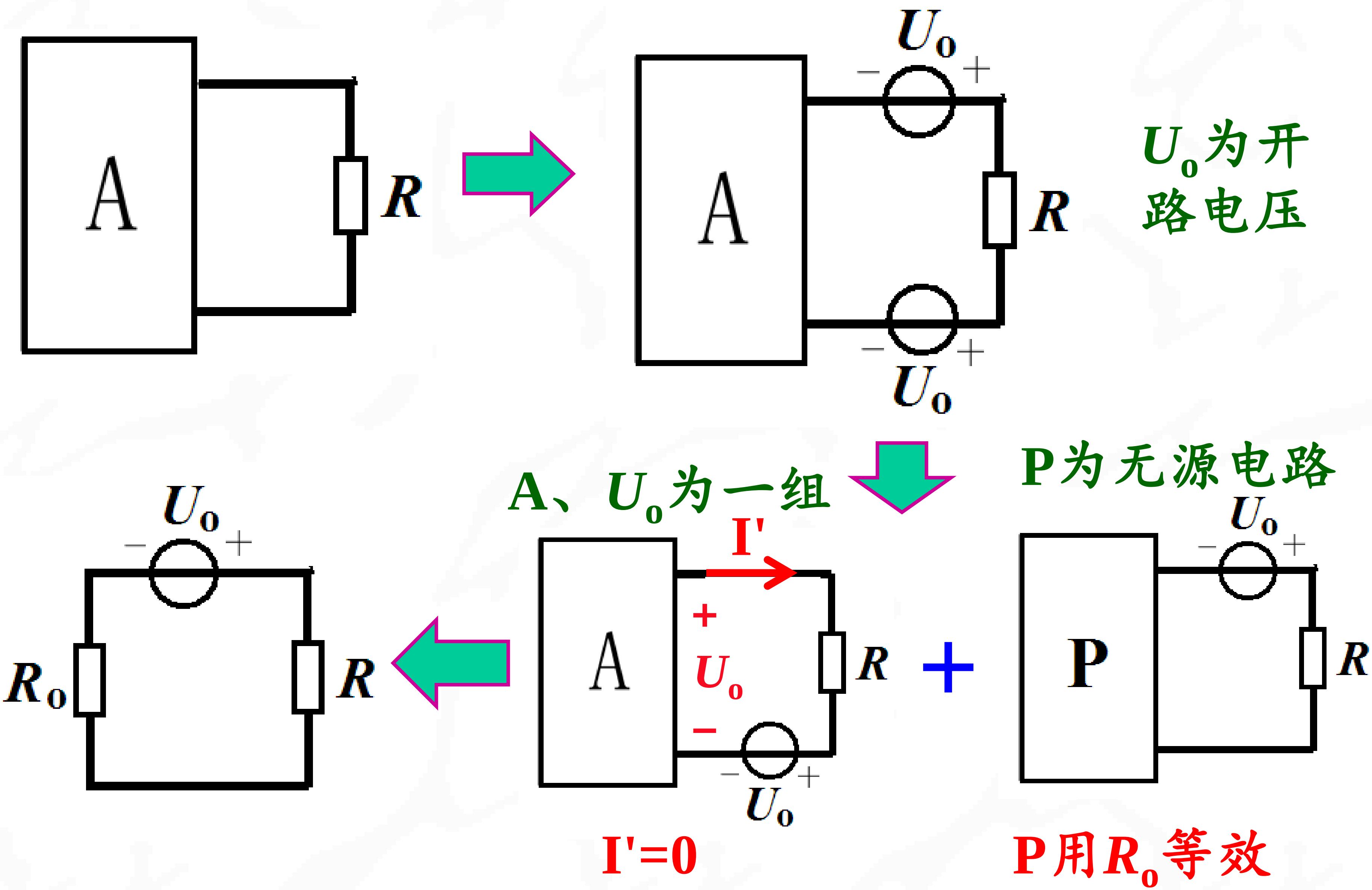
✧ 任一线性有源一端口网络，对其余部分而言，可以等效为一个电压源U_0和电阻R_0相串联的电路，其中：

U_0：等于该一端口网络的开路电压，且电源的正极和开路端口高电位点对应；

R_0：等于该有源一端口网络内所有独立源均为零时所构成的无源一端口网络的等效电阻。

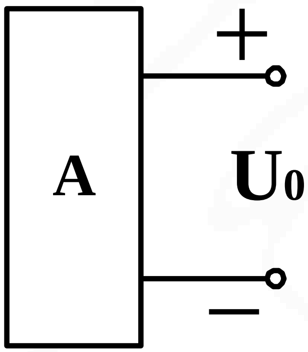


证明： 用叠加定理来证明。


A
R
U_0
A
R
U_0
U_0为开路电压
A、U_0为一组
P为无源电路
U_0
R_0
R
I'
A
+
U_0
−
R
U_0
+
P
U_0
R
I'=0
P用R_0等效

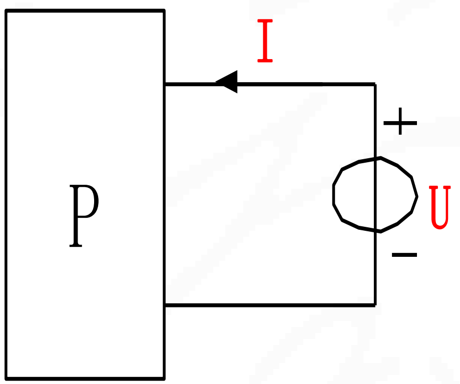
➢ 开路电压U_0的计算

将输出端开路，求开路电压。



➢ 入端电阻R_0的求解

① **加压法**：电路中将**独立电源去掉**（即电压源短路，电流源开路），外加电压U，求出输入电流I。则入端电阻为：



$$R_o = \frac{U}{I}$$

也可对电路**加一个电流源**I，求出输入端电压U，得到入端电阻R_0。

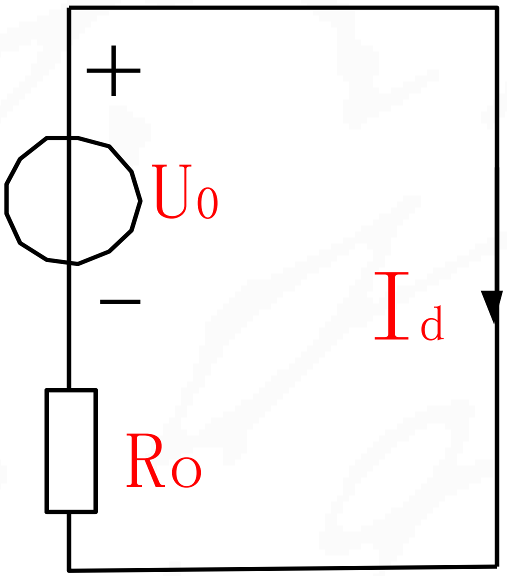
② 开路短路法

将输出端开路，求出开路电压U_o。

将输出端短路，求出短路电流I_d。

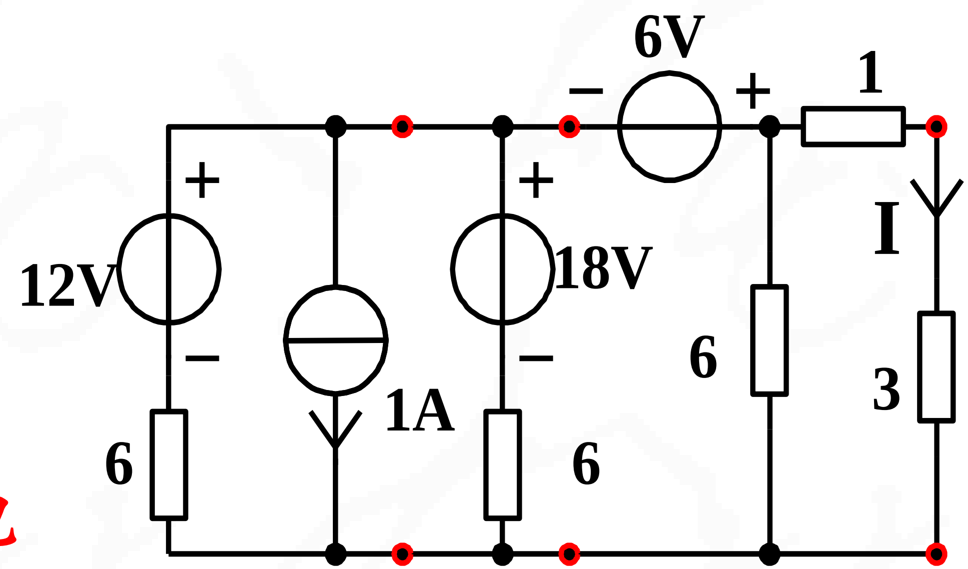
则入端电阻为：

$$R_o = \frac{U_o}{I_d}$$



〖例1〗戴维南定理应用

电路及参数如图，求电流I。

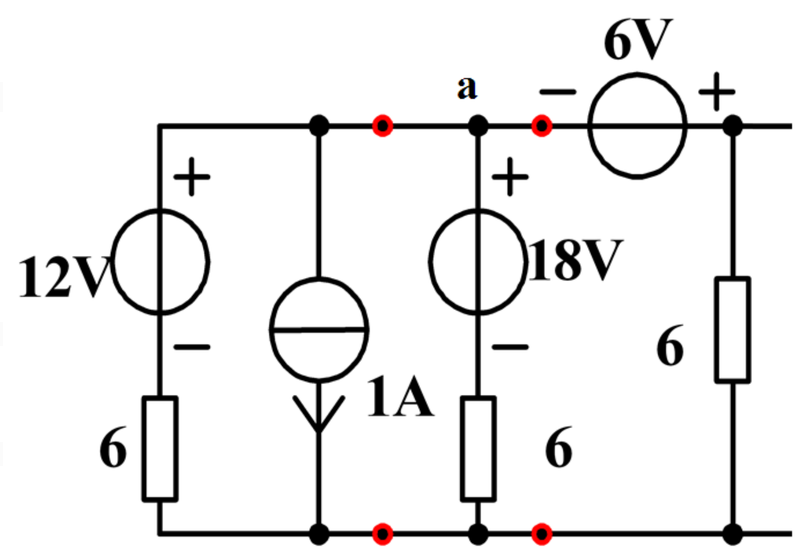


〖解〗

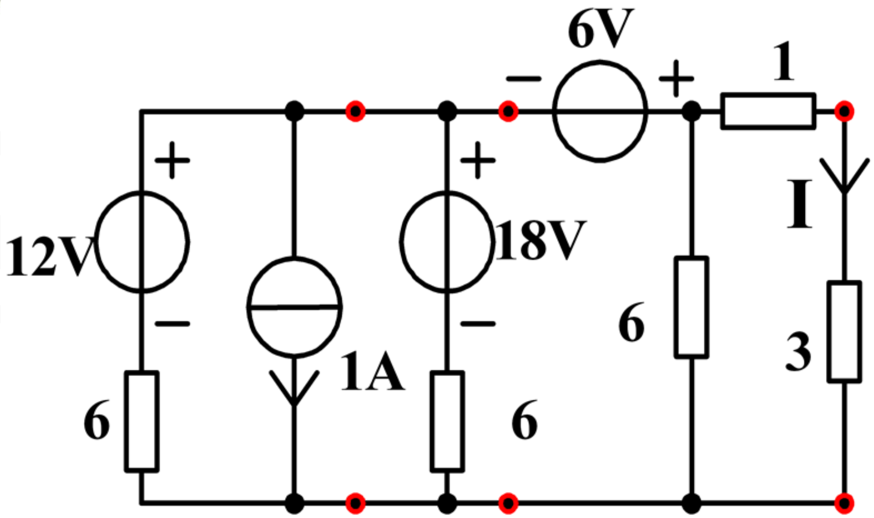
方法1： 通过电压源与电流源的等效替换来求，略。

方法2： 用戴维南定理来等效。由米尔曼公式得：

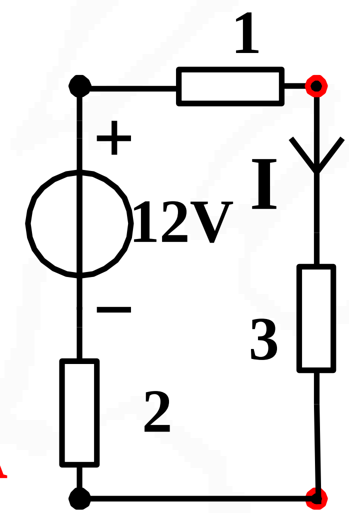
$$U_a = \frac{\frac{12}{6} - 1 + \frac{18}{6} - \frac{6}{6}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}} = 6\ \mathrm{V}$$



$U_o = 12\ \mathrm{V} \quad R_o = 2\Omega$



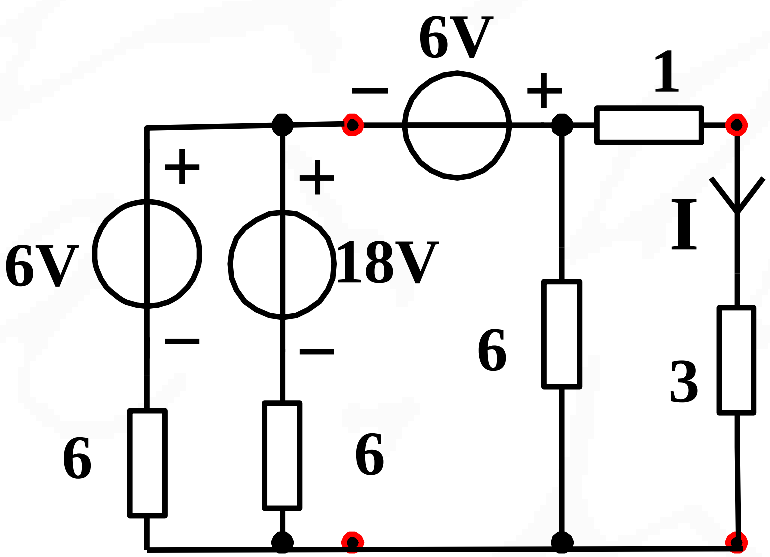
所以，I=2 A



$$I_2=\frac{12+6}{3+6}=2\ \text{A}$$

$$U_0=2\times6=12\text{V}$$

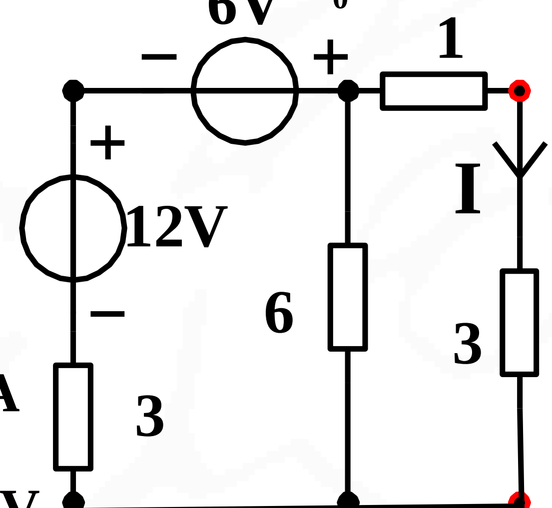
方法3：多次用戴维南定理来等效。



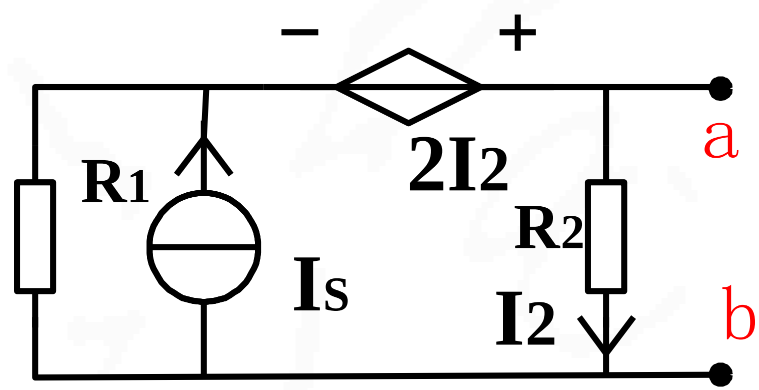
$$U_0=12-1\times6=6\text{V}$$

$$I_1=\frac{18-6}{6+6}=1\ \text{A}$$

$$U_0=18-6=12\text{V}$$



〖例2〗戴维南等效电路计算



已知I_S=4 A, R_1= 1Ω, R_2 = 3 Ω，求戴维南等效电路。

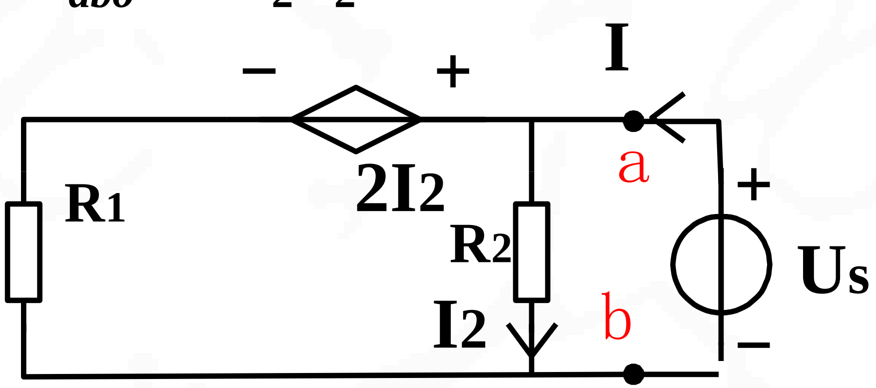
〖解〗方法1:

1）求开路电压：

$$(I_S - I_2)R_1 + 2I_2 - R_2 I_2 = 0$$

$$I_2 = 2\text{A}$$

$$U_{abo} = R_2 I_2 = 6\text{V}$$



2）求入端电阻，设外加电压U_S=3V。

$$I_2 = 1\text{A}$$

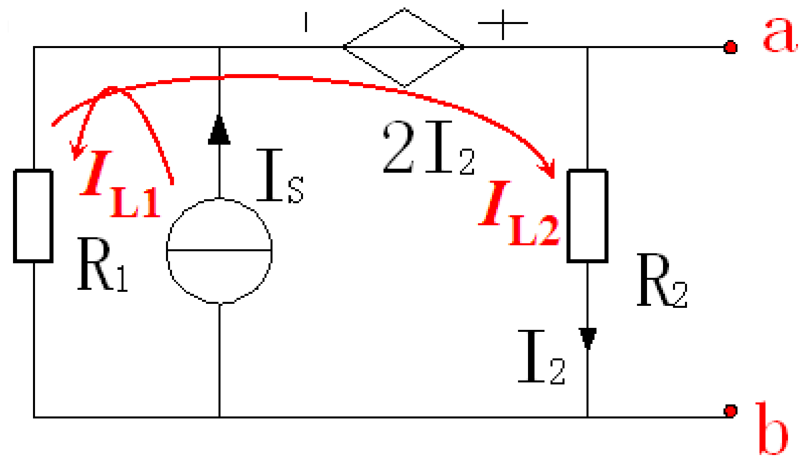
$$I_1 = \frac{U_S - 2I_2}{R_1} = 1\text{A}$$

$$I = I_1 + I_2 = 2\text{A}$$

$$R_o = 1.5\Omega$$

方法2：开路短路法

用回路电流法求开路电压：



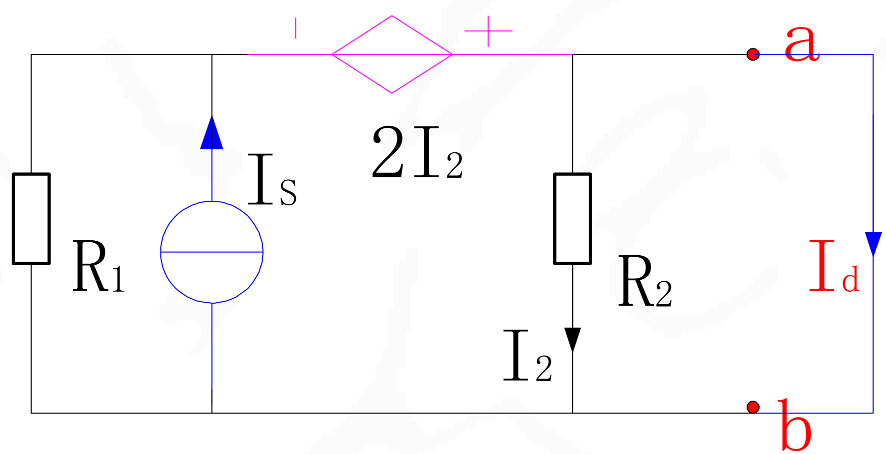
$$I_{L1} = I_S = 4\text{A}$$

$$(R_1 + R_2)I_{L2} - R_1 I_{L1} = 2I_2$$

代入数据： $(1+3)I_2 - 1\times 4 = 2I_2$

得： $I_2 = 2\text{A}$　　$U_{abo} = R_2 I_2 = 6\text{V}$

求短路电流：

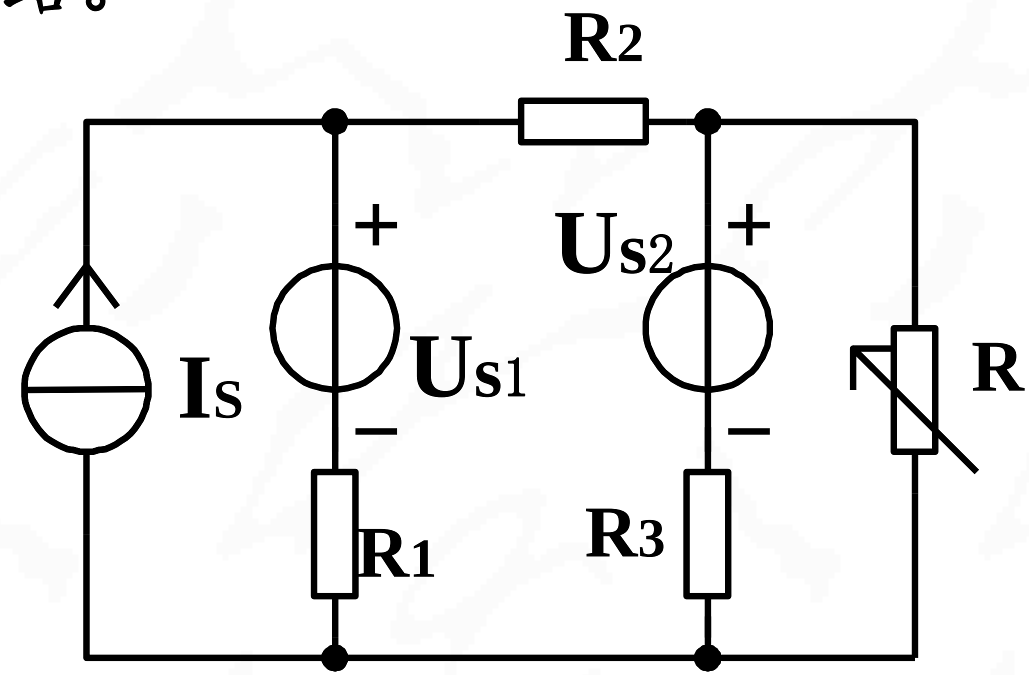


$$I_d = I_S = 4\text{A}$$

所以， $R_o = \dfrac{U_{abo}}{I_d} = 1.5\Omega$

〖例3〗练习

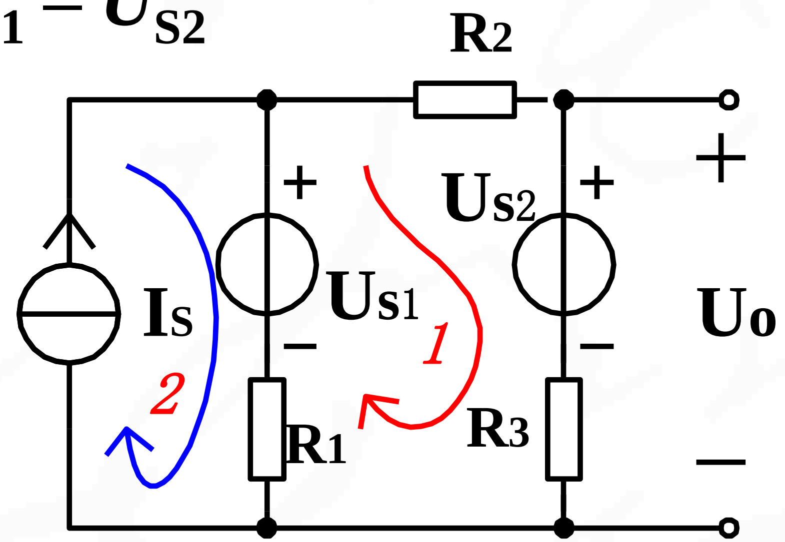
已知$R_1 = R_2 = 10\ \Omega$， $R_3 = 5\ \Omega$，$U_{S1} = 20V$，$U_{S2} = 5V$， $I_S = 1\ A$，负载R可调。求负载R左侧电路的戴维南等效电路。



〖解〗先求开路电压，可采用网孔电流法求。

$(R_1+R_2+R_3)I_{m1}-R_1I_{m2}=U_{S1}-U_{S2}$

$I_{m2}=I_S=1\ \mathrm{A}$



代入数据：

$25I_{m1}-10\times1=20-5$

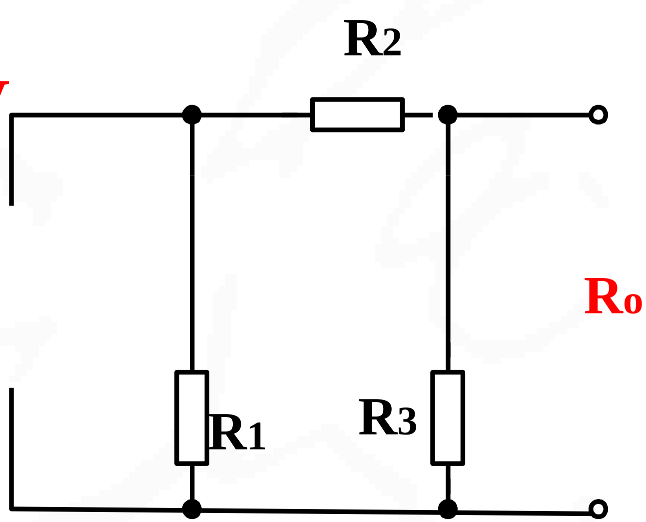
$I_{m1}=1\ \mathrm{A}$

开路电压为：

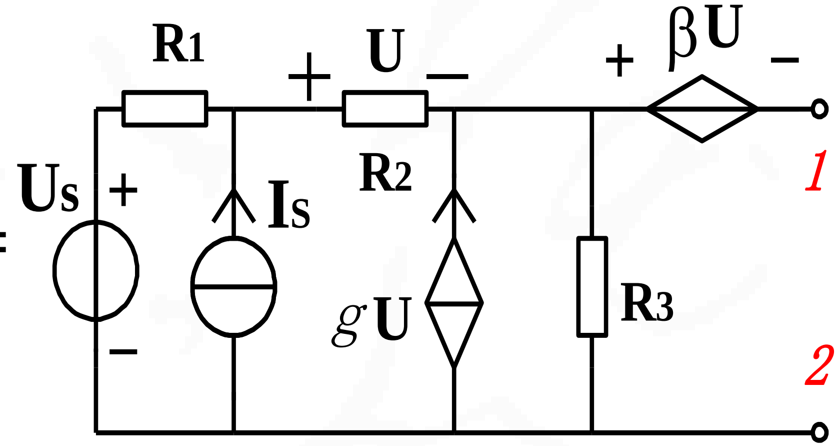
$U_o=U_{S2}+R_3\times I_{m1}=5+5\times1=10\mathrm{V}$

入端电阻为：

$R_o=(R_1+R_2)//R_3=20//5=4\ \Omega$

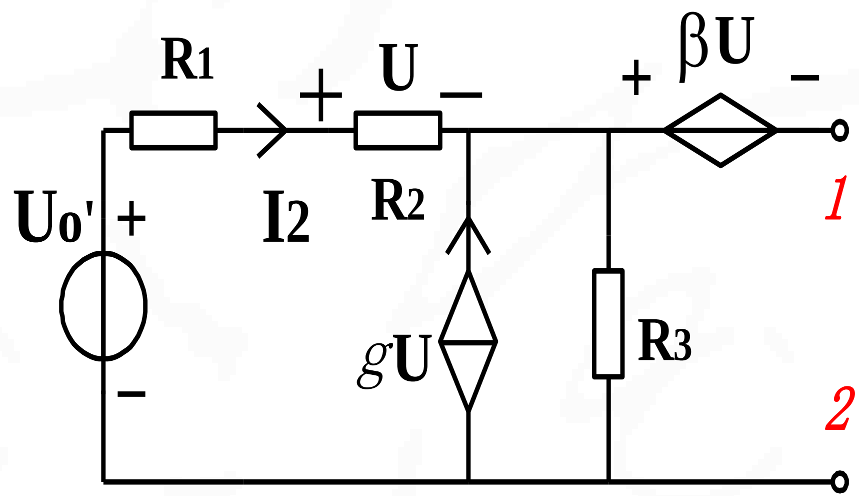


〖例4〗（自己练习）



已知U_S=10V，I_S=1A，β=0.5，g=0.0375，$R_1=R_2=R_3$=20Ω，求戴维南等效电路。

〖解〗1）求开路电压



方法1：节点电压法，略。

方法2：回路电流法，略。

方法3：先对电路局部简化（采用电压源-电流源等效），再列KVL方程。

$$U_o'=U_S+R_1I_S=30\text{V}$$

由KVL定律得： $U_o' = (R_1 + R_2)I_2 + (I_2 + gI_2R_2)R_3$

代入数据： $30 = (20 + 20)I_2 + (I_2 + 0.75I_2) \times 20$

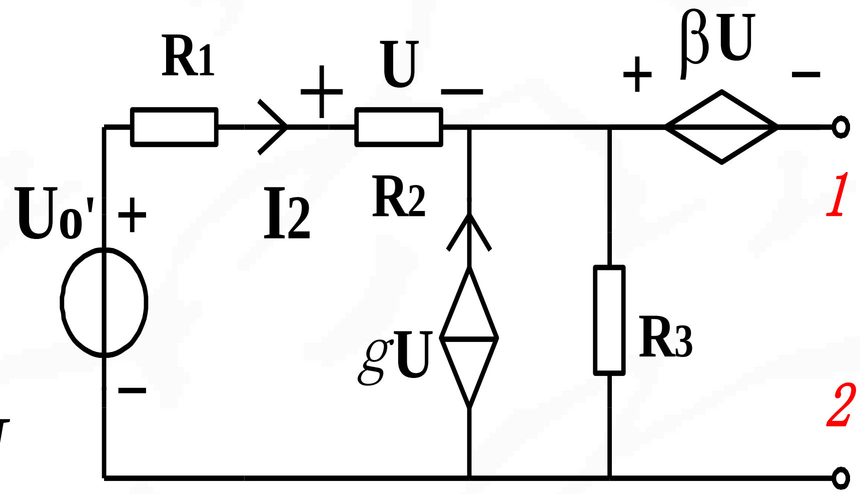
解得： $I_2 = 0.4\ \text{A}$

所以， $U = I_2R_2 = 8\ \text{V}$

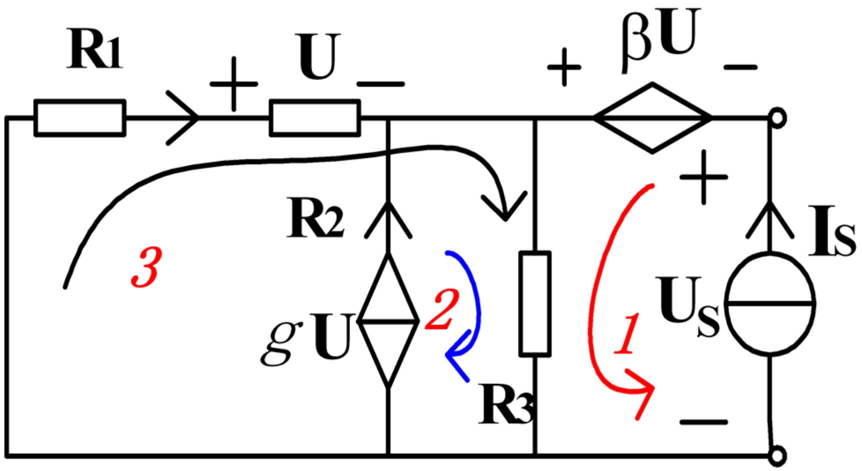
开路电压为：

$$U_o = (I_2 + gU)R_3 - \beta U$$

=10 V



2）求入端电阻



方法1：外加电流源I_S=1A。

用回路电流法求输出端电压。

回路3的电压方程为：

$$(R_1+R_2+R_3)I_{L3}+R_3I_S+R_3(gR_2I_{L3})=0$$

解得：

$$I_{L3}=-\frac{4}{15}\ \text{A}$$

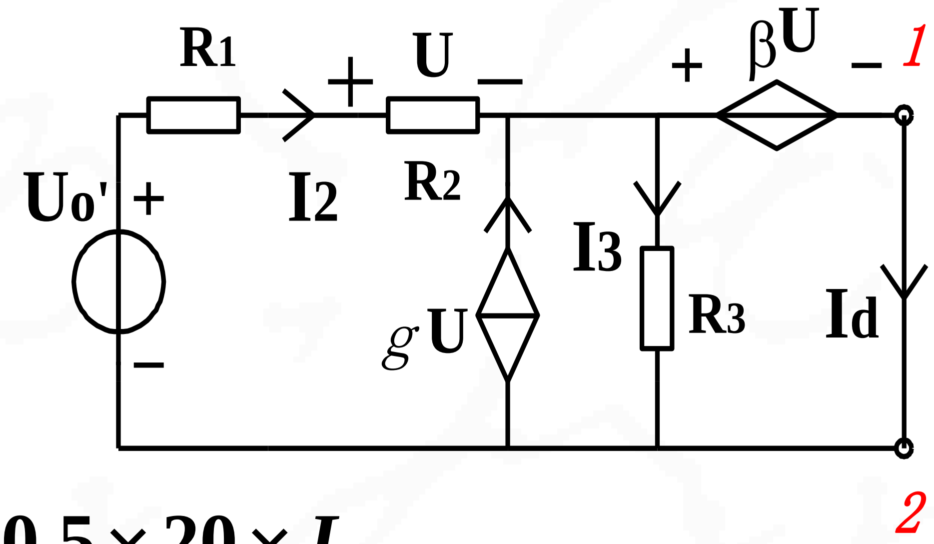
端电压为：

$$U_S=-\beta R_2I_{L3}+(I_S+I_{L3}+gR_2I_{L3})R_3=40/3\ \text{V}$$

所以入端电阻为：

$$R_o=\frac{U_S}{I_S}=\frac{40}{3}\Omega$$

方法2：开路短路法



外围回路列KVL方程：

$$U_o' = (R_1 + R_2)I_2 + \beta R_2 I_2$$

代入数据：

$$30 = (20 + 20)I_2 + 0.5 \times 20 \times I_2$$

解得：

$$I_2 = 0.6\ \text{A}$$

短路电流为：

$$I_d = I_2 + gI_2R_2 - \frac{\beta I_2 R_2}{R_3} = \frac{3}{4}\ \text{A}$$

入端电阻为：

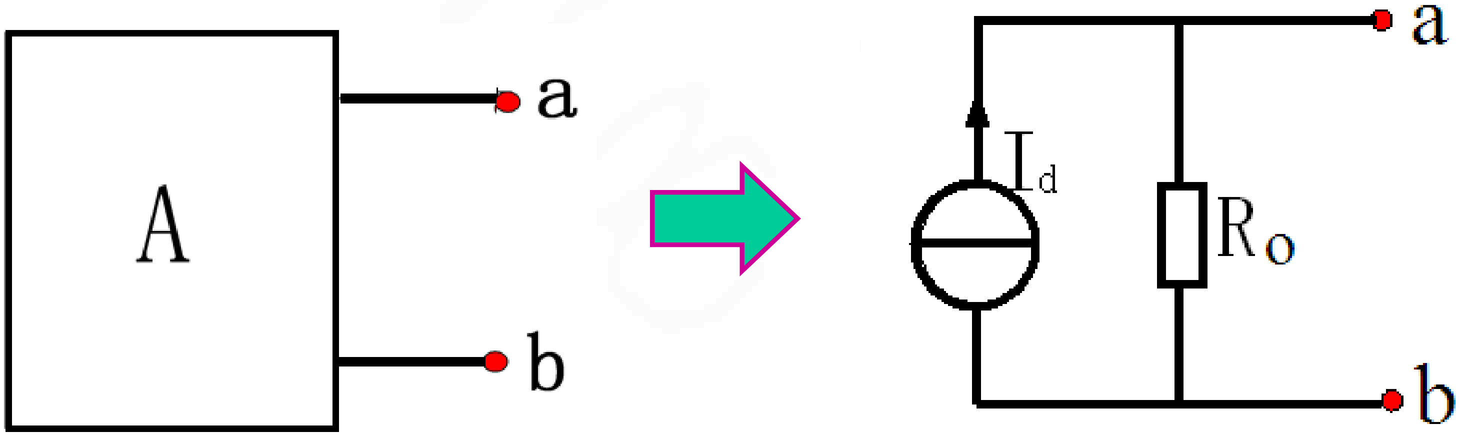
$$R_o = \frac{U_o}{I_d} = \frac{40}{3}\Omega$$

2、诺顿定理

✧ 任一线性有源一端口网络，对其余部分而言，可以等效为一个电流源I_d和一个电阻R_o(电导G_o)相并联的电路，其中：

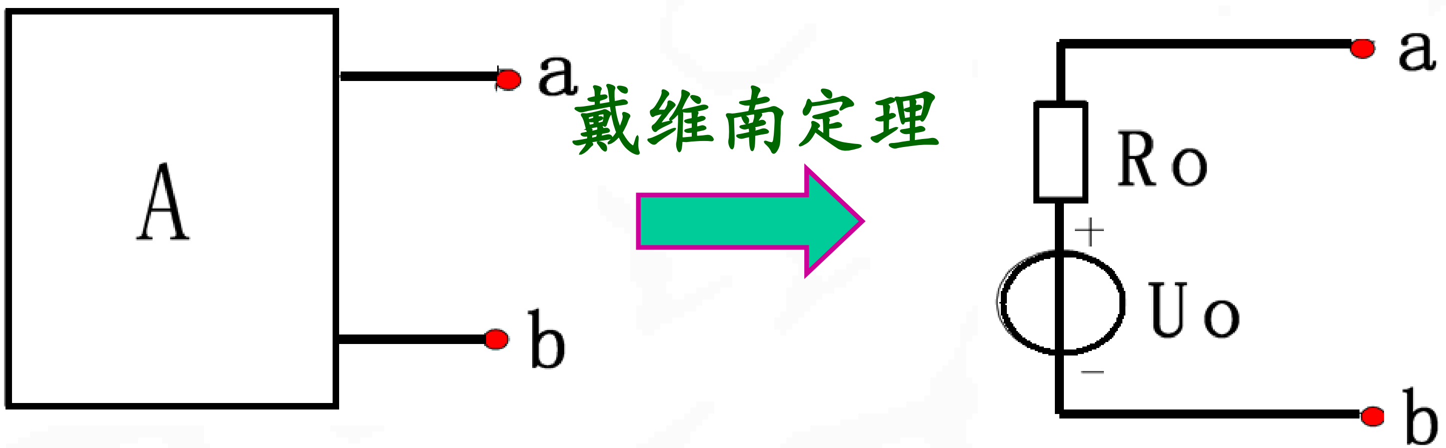
I_d：等于该一端口网络的短路电流；

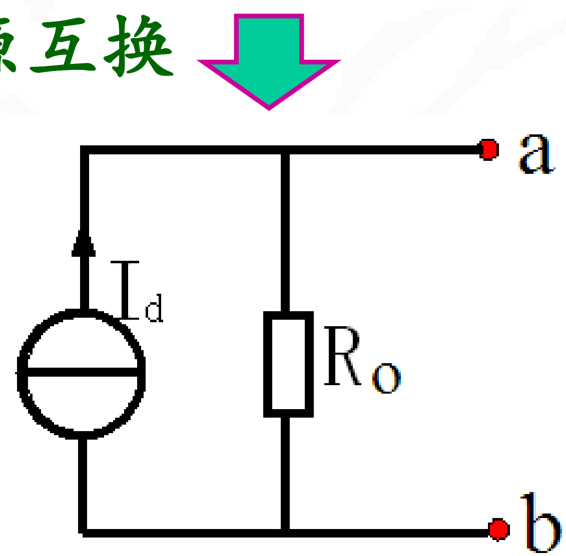
R_o：等于该有源一端口网络内所有独立源均为零时所构成的无源一端口网络的等效电阻。



证明： 方法1：用叠加定理可证明，略。

方法2：应用电压源-电流源变换。



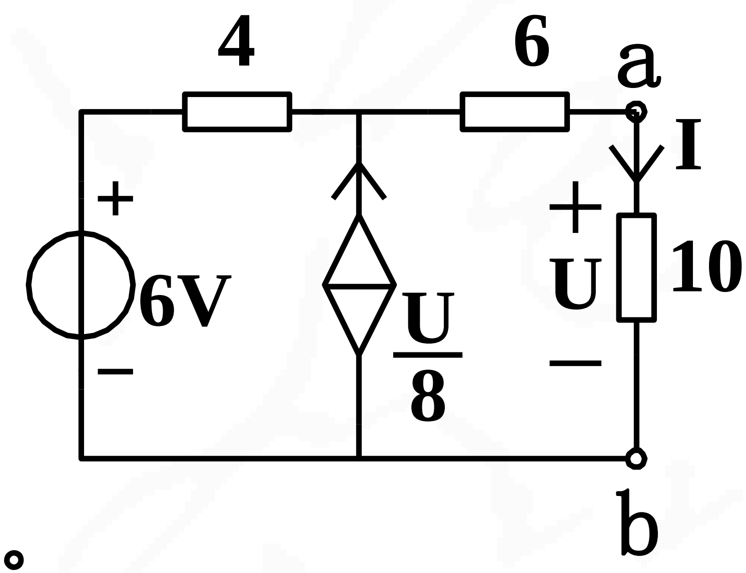


$$U_o = R_o \times I_d$$

$$I_d = U_o / R_o$$

〖例1〗

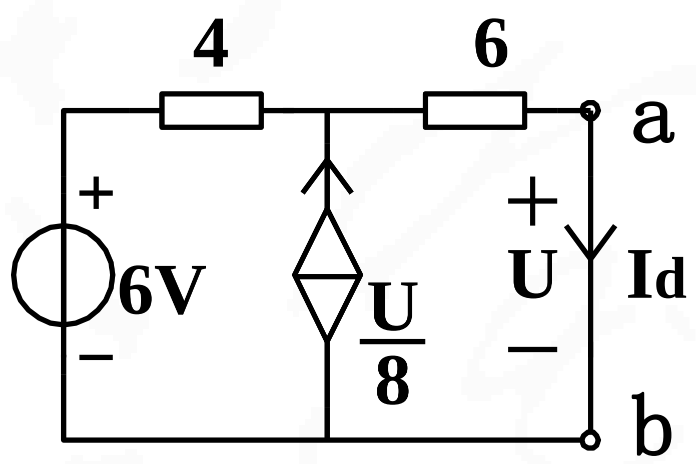
电路及参数如图，利用诺顿定理求电流I。



〖解〗

求a-b左侧的诺顿等效电路。

短路电流： a-b短路，受控电流源电流为0，所以

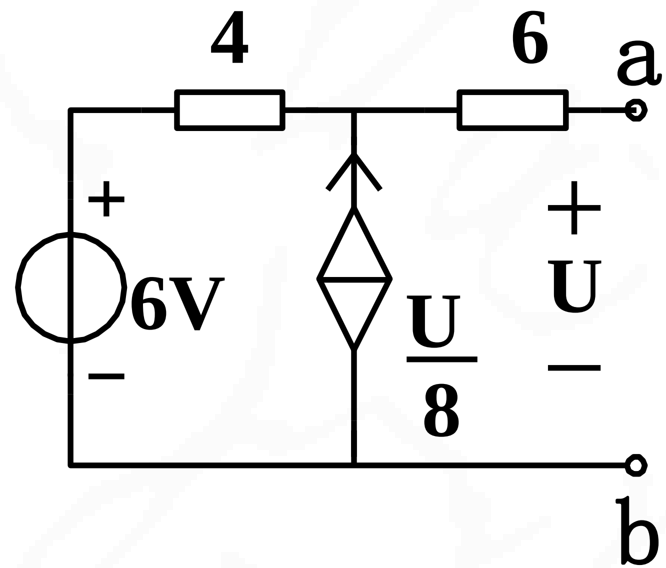


$$I_d = \frac{6}{4+6} = 0.6\ \mathrm{A}$$

开路电压： a-b开路。

$$U = 4 \times \frac{U}{8} + 6$$

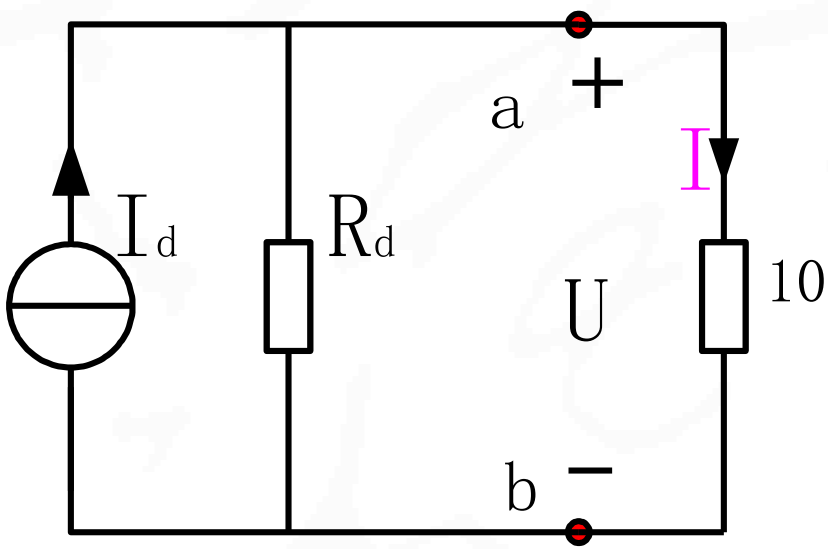
$$U = 12\ \mathrm{V}$$



入端电阻为： $R_o = \dfrac{12}{0.6} = 20\Omega$

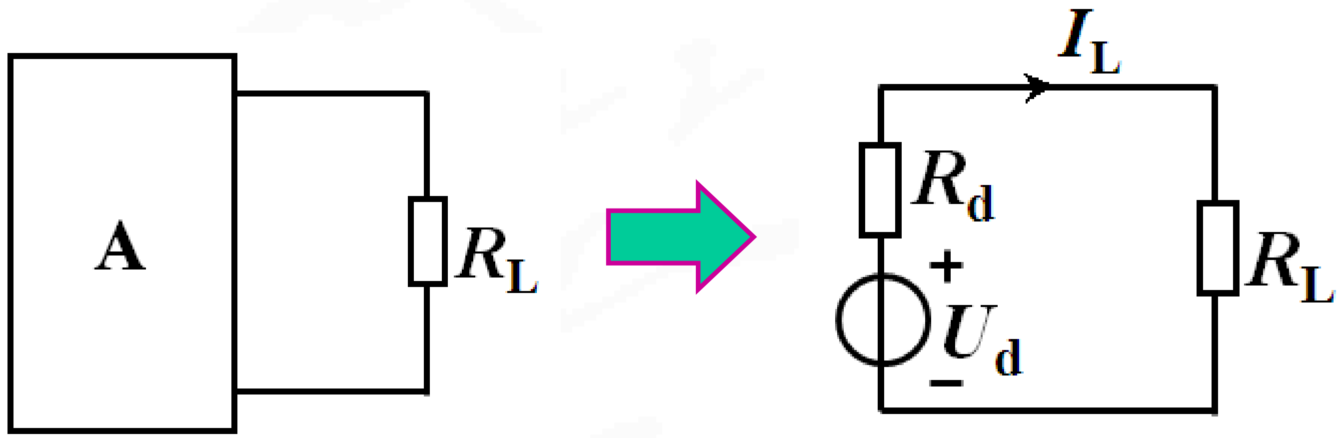
根据诺顿等效定理可得：

$$I = \frac{R_o}{R_o + 10} \times 0.6 = 0.4\ \mathrm{A}$$



四、最大功率传输定理

✧ **问题的提出：** 负载R_L接在电路的输出端，负载 R_L可调，在电源参数不变的情况下，当R_L调至多大时它从电路吸收的功率最大？其功率值是多少？

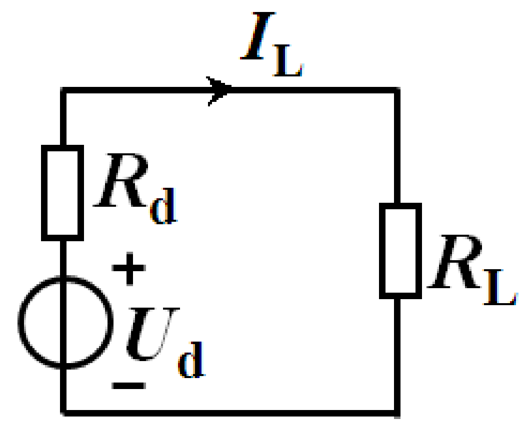


✧ 采用戴维南定理等效，负载上的功率为：

$$P = I^2 R_L = \frac{U_d^2}{(R_d + R_L)^2} R_L$$

为求P的最大值，对P求导，并令 $\dfrac{dP}{dR_L}=0$

解得$R_L=R_d$，此时电阻R_L获得最大功率。



最大功率为：

$$P_{L\max}=\frac{U_d^2}{4R_d}$$

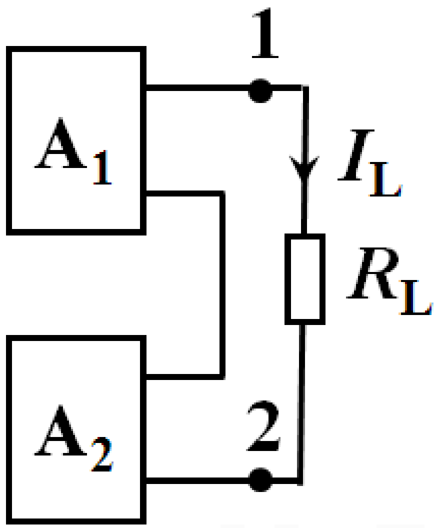
✧ **最大功率传输定理：** 当负载R_L等于电源内阻R_d时（称为**电阻匹配**），负载上获得最大功率，最大功率为

$$P_{L\max}=\frac{U_d^2}{4R_d}。$$

✧ 最大功率传输时，系统效率为50%。

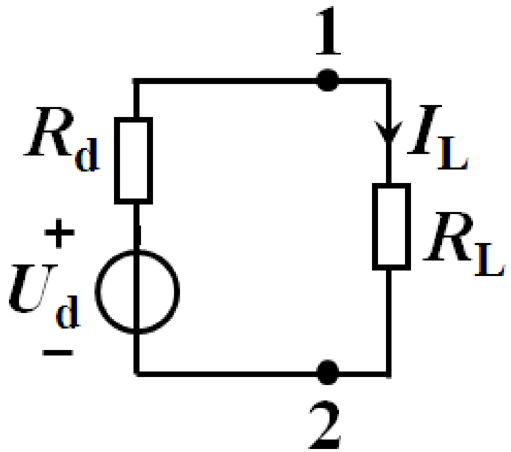
〖例1〗

两个有源一端口网络A_1、A_2串联后与负载R_L相连。R_L可调，当$R_L=0$时，$I_L=0.2\,A$；当$R_L=50\,\Omega$时，$I_L=0.1A$。问：当R_L为多少时，能获得最大功率？



〖解〗 戴维南等效，据题意得：

$$\begin{cases} U_d = R_d \times 0.2A \\ U_d = (R_d + 50) \times 0.1A \end{cases}$$



解得： $U_d = 10V$， $R_d = 50\Omega$

当$R_L = 50\Omega$时，功率最大， $P_{Lmax} = \dfrac{U_d^2}{4R_d} = 0.5\ W$

本节重点提示：

本节主要介绍了电路的基本定理，包括线性定理和叠加定理、替代定理、戴维南等效和诺顿等效定理、最大功率传输定理和密勒定理。

- ✧ 线性定理和叠加定理：要求熟练掌握。
- ✧ 替代定理：一般了解。
- ✧ 戴维南和诺顿定理：要求熟练掌握，会应用电路分析方法来求比较复杂电路的戴维南或诺顿等效电路。
- ✧ 最大功率传输定理：掌握原理，会求最大功率。

作 业：

题4.28 题4.33 题4.34

题4.30 题4.40

提示：题4.33书后答案R_a有误， R_a =12 Ω 。

Thank you for your attention

蔡忠法 浙江大学电工电子教学中心