



第五章 根轨迹分析法

Chapter 5 Root Locus



浙江大学控制科学与工程学系

CONTROL SCIENCE AND ENGINEERING

SINCE 1956



第五章内容



- 概述
- 根轨迹的绘制方法
- 广义根轨迹
- 基于根轨迹的系统性能分析
- 基于根轨迹的系统补偿器设计



广义根轨迹



1. 参数根轨迹
2. 正反馈系统根轨迹(或 $K < 0$)
3. 纯滞后系统根轨迹



广义根轨迹—— (1) 参数根轨迹



定义:

常规根轨迹----- 闭环系统特征方程的根是根轨迹增益的函数,

例如:

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+2)}{s^2 + 2s + 2}$$

参数根轨迹 ----- 闭环系统特征方程的根是其他参数 (非根轨迹增益) 的函数, 如时间常数 T . 例如

$$G(s)H(s) = \frac{2}{s(Ts+1)(s+1)}$$

绘制参数根轨迹的目的 ----- 了解闭环系统特征方程的根随其他参数变化的情况。

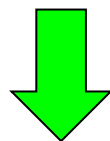


广义根轨迹——(1) 参数根轨迹

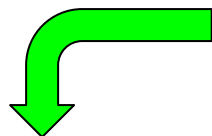


分析方法：引入等效单位反馈系统和**等效传递函数**概念，然后采用常规根轨迹绘制法则。闭环特征方程：

$$1 + G(s)H(s) = 0$$



等效变换



$$A \frac{P(s)}{Q(s)} = -1$$

A是除**K**外任意的其他变化参数

P(s)和**Q(s)**是与**A**无关的首一多项式

$$Q(s) + AP(s) = 1 + G(s)H(s) = 0$$

等效单位反馈系统的等效开环传递函数：

$$[G(s)H(s)]_e = A \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A \prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

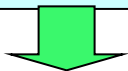


广义根轨迹—— (1) 参数根轨迹



参数根轨迹绘制方法:

写出开环传递函数 $\mathbf{G(s)H(s)}$



特征方程 $\mathbf{1+G(s)H(s)=0}$



等效开环传递函数 $\mathbf{[G(s)H(s)]_e}$
(使关注的参数成为根轨迹增益)



用等效开环传递函数 $\mathbf{[G(s)H(s)]_e}$ 绘制 根轨迹

$$[G(s)H(s)]_e = \frac{A \prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

注: 这种方法的关键在于寻找“等效” $\mathbf{[G(s)H(s)]_e}$, 这里的“等效” 仅仅是闭环极点相同这一点上成立, 而闭环零点一般是不同的, 不是闭环传递函数的“等效”。



广义根轨迹——(1) 参数根轨迹

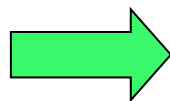


例 5-13 开环传递函数 $G(s)H(s)$, 绘制参数 T 变化时的根轨迹。

$$G(s)H(s) = \frac{2}{s(Ts + 1)(s + 1)}$$

1) 特征方程:

$$\Delta(s) = s(Ts + 1)(s + 1) + 2$$



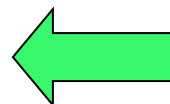
$$Ts^2(s + 1) + s^2 + s + 2 = 0$$

等效根轨迹增益

闭环系统特征根相同!

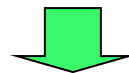
等效开环传递函数:

$$\Delta'(s) = 1 + [G(s)H(s)]_e = 0$$



$$[G(s)H(s)]_e = \frac{Ts^2(s + 1)}{s^2 + s + 2}$$

$$1 + \frac{Ts^2(s + 1)}{s^2 + s + 2} = 0$$





广义根轨迹——(1) 参数根轨迹



$$[G(s)H(s)]_e = \frac{T s^2 (s+1)}{s^2 + s + 2}$$

2) 开环极点: $n = 2, p_1 = -0.5 + j1.323, p_2 = -0.5 - j1.323$

开环零点: $w = 3, z_1 = 0, z_2 = 0, z_3 = -1$

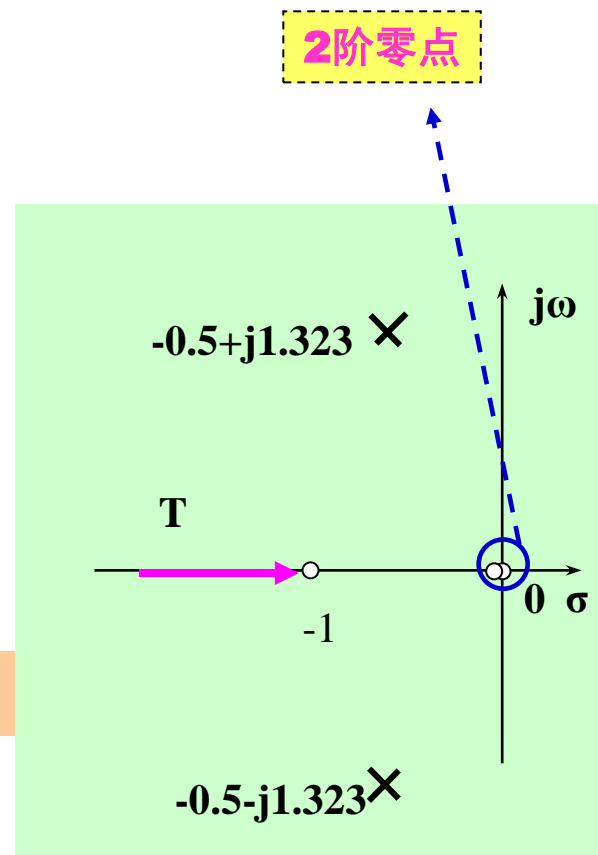
3) 3条根轨迹分支(注意: $w > n$)

4) 实轴上的根轨迹: $(-\infty, -1]$

5) 极点 $-0.5 + j1.323$ 处的出射角 Φ_{1D}

$$\begin{aligned}\phi_{3D} &= (1 + 2h)180^\circ + (\psi_1 + \psi_2 + \psi_3) - \phi_1 \\ &= (1 + 2h)180^\circ + (69.3^\circ + 110.7^\circ + 110.7^\circ) - 90^\circ \\ &= 20.7^\circ\end{aligned}$$

同样地, 极点 $-0.5 - j1.323$ 处的出射角为 -20.7°





广义根轨迹——(1) 参数根轨迹



$$[G(s)H(s)]_e = \frac{Ts^2(s+1)}{s^2+s+2}$$

6) 根轨迹与虚轴的交点

特征方程: $\Delta(s) = s(Ts+1)(s+1) + 2 = Ts^3 + (T+1)s^2 + s + 2$

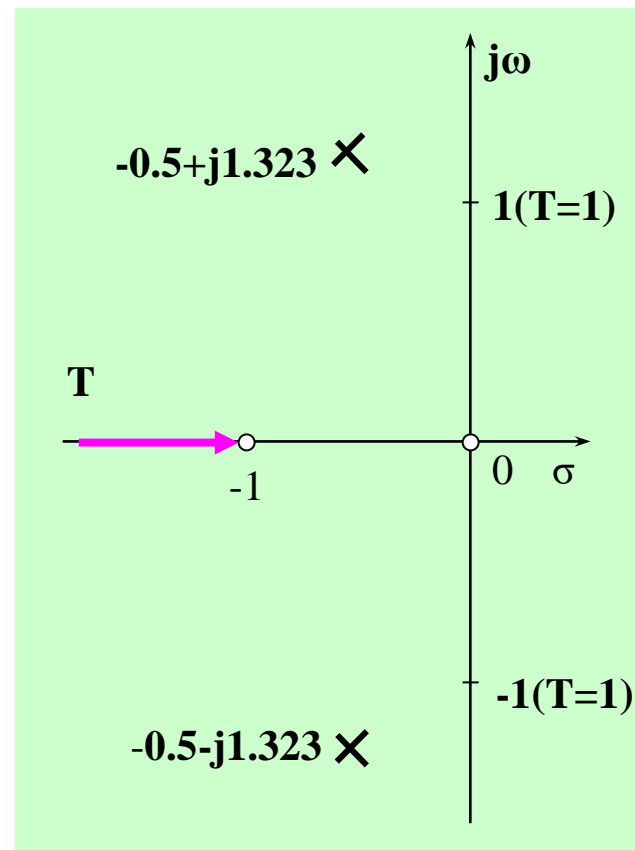
Routhian 表:

s^3	T	1
s^2	$T+1$	2
s^1	$1 - \frac{2T}{T+1}$	0
s^0	$\frac{2}{T+1}$	

$$1 - \frac{2T}{T+1} = 0 \Rightarrow T = 1$$

由 s^2 行构造辅助方程:

$$(T+1)s^2 + 2 = 0 \Rightarrow s = \pm j\sqrt{\frac{2}{T+1}} = \pm j1$$





广义根轨迹——(1) 参数根轨迹

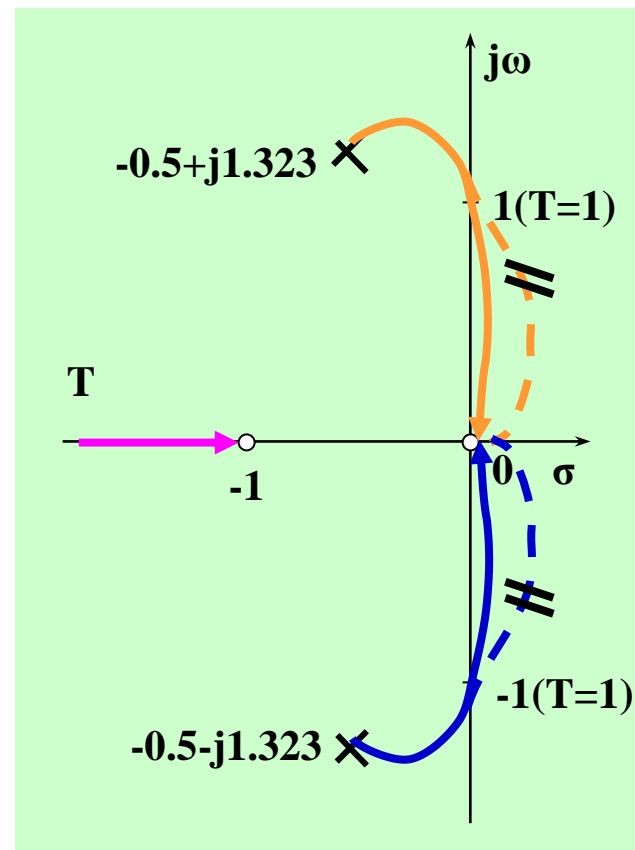
根轨迹接近零点 $z_1=0$ 时的方向(入射角)

$$[G(s)H(s)]_e = \frac{Ts^2(s+1)}{s^2+s+2}$$

$$\psi_{1_A} = \frac{(1+2h)180^\circ + (\angle(z_1 - p_1) + \angle(z_1 - p_2)) - \angle(z_1 - z_2)}{2} = \pm 90^\circ$$

注意: 通常, 当极点数 n 小于零点数时, 可以用 $1/T$ 作为绘制根轨迹时的变化参数。问题?

请你试试看这个例题!





广义根轨迹——(2) 正反馈根轨迹



系统开环传递函数为 **$G(s)H(s)$** ：

$$G(s)H(s) = \frac{K(s - z_1) \cdots (s - z_w)}{s^m (s - p_1) \cdots (s - p_u)} = K[G(s)H(s)]_1 = -1$$

➤ 若系统是**正反馈系统**，则其特征方程如下：

$$1 - G(s)H(s) = 0 \quad \longrightarrow \quad G(s)H(s) = 1$$

正反馈系统的幅值条件和相角条件为

$$|G(s)H(s)| = 1 \quad \text{----- 幅值条件}$$

$$\angle G(s)H(s) = 0^\circ + k \cdot 360^\circ (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

----- 相角条件

➤ 若系统是**负反馈系统**，但 **$K < 0$** ，如何考虑？



广义根轨迹—— (2) 正反馈根轨迹



比较正反馈系统和负反馈系统的根轨迹, 不同之处在于相角条件

$$\angle G(s)H(s) = 0^\circ + k \cdot 360^\circ (k = 0, 1, 2, \dots) \text{ ———— 正反馈}$$

对比

$$\angle G(s)H(s) = 180^\circ + k \cdot 360^\circ (k = 0, 1, 2, \dots) \text{ ———— 负反馈}$$

对比: 正反馈系统根轨迹被称为**0°** 根轨迹或负参数根轨迹(**K<0**);
负反馈系统根轨迹被称为 **180°** 根轨迹.

常见零度根轨迹的来源:

- 1) **s**最高次幂的系数为负;
- 2) 控制系统中包含正反馈内回路;

由于相角条件不同, 所有与相角条件有关的根轨迹绘制法则也就不同



回顾常规根轨迹的绘制法则

- 规则 1: 根轨迹的起点和终点
- 规则 2: 根轨迹的分支数、对称性和连续性
- 规则 3: 根轨迹的渐近线
- 规则 4: 实轴上的根轨迹
- 规则 5: 根轨迹的分离点和分离角
- 规则 6: 复数极点(或零点): 出射角与入射角
- 规则 7: 根轨迹与虚轴的交点
- 规则 8: 系统根之和守恒



广义根轨迹—— (2) 正反馈根轨迹



规则 3: 当 s 趋于 ∞ 时, 根轨迹的渐近线与实轴的夹角

$$\gamma = \frac{2k\pi}{n-w}$$

规则 4: 实轴上的根轨迹

若实轴上的搜索点 s 右侧实数零极点数是偶数, 则该点在根轨迹上

规则 6: 复数极点(或零点): 出射角(入射角)

出射角

$$\phi_{p_k} = 0^\circ + \sum_{j=1}^w \angle(p_k - z_j) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \angle(p_k - p_i)$$

入射角

$$\psi_{z_k} = 0^\circ + \sum_{i=1}^n \angle(z_k - p_i) - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^w \angle(z_k - z_j)$$



广义根轨迹——(2) 正反馈根轨迹



例 5-14 开环传递函数 $\mathbf{G(s)H(s)}$, 分别绘制负反馈系统根轨迹和正反馈系统根轨迹:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

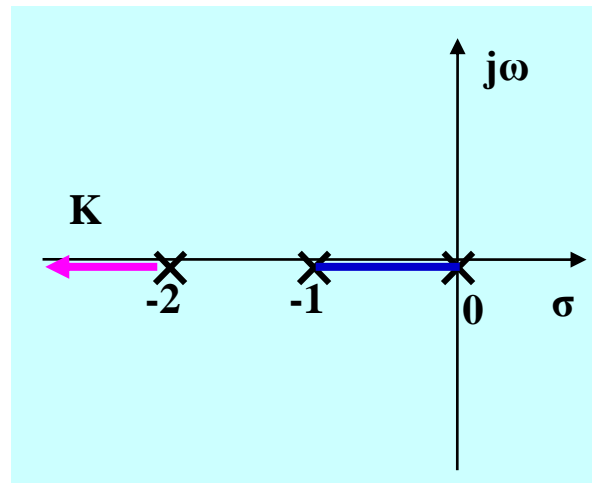
1. 负反馈系统

1) 开环极点: $n = 3, p_1 = 0, p_2 = -1, p_3 = -2$

开环零点: $w = 0$

2) 根轨迹由3条分支

3) 实轴上的根轨迹: $[-1, 0], (-\infty, -2]$





广义根轨迹——(2) 正反馈根轨迹



4) 渐近线的夹角

$$\gamma = \frac{(1+2h)180^\circ}{n-w} = \frac{(1+2h)180^\circ}{3} = \pm 60^\circ, 180^\circ$$

渐近线与实轴的交点

$$\sigma_0 = \frac{p_1 + p_2 + p_3}{n-w} = \frac{0-1-2}{3} = -1$$

5) 实轴上[-1, 0]之间的分离点 d

$$-K = s^3 + 3s^2 + 2s$$

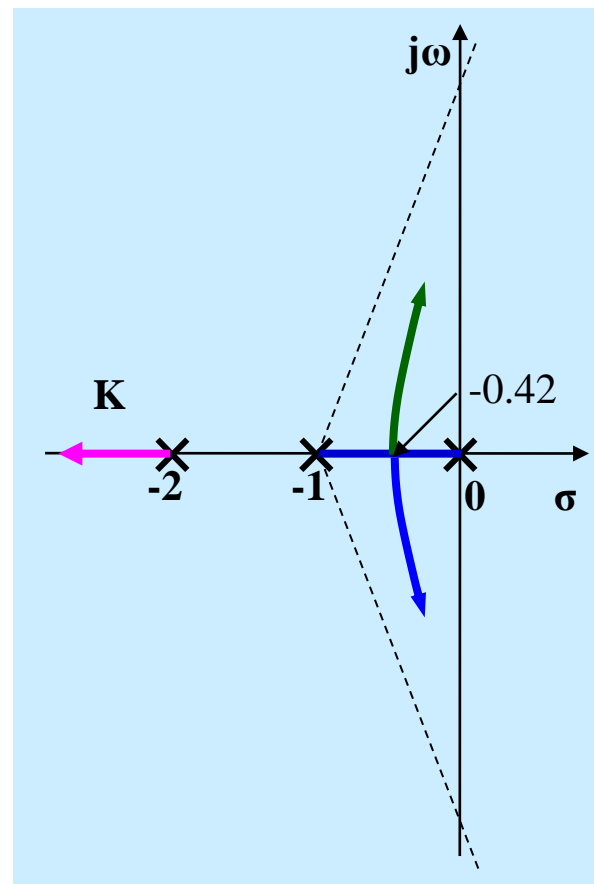
$$\left. \frac{d(-K)}{ds} \right|_{s=d} = 3d^2 + 6d + 2 = 0$$

$$d = -0.42$$

$$d = -1.58 \quad (\text{舍弃})$$

分离角:

$$\frac{(2k+1)180^\circ}{l} = \frac{(2k+1)180^\circ}{2} = \begin{cases} 90^\circ \\ -90^\circ \end{cases}$$





广义根轨迹——(2) 正反馈根轨迹



6) 根轨迹与虚轴的交点

$s = j\omega$ 代入特征方程

特征方程:

$$\Delta(s) = s^3 + 3s^2 + 2s + K$$

$$-j\omega^3 - 3\omega^2 + 2j\omega + K = 0$$

Routhian 表:

s^3	1	2
s^2	3	K
s^1	$\frac{6-K}{3}$	0
s^0	K	

$$\frac{6-K}{3} = 0$$

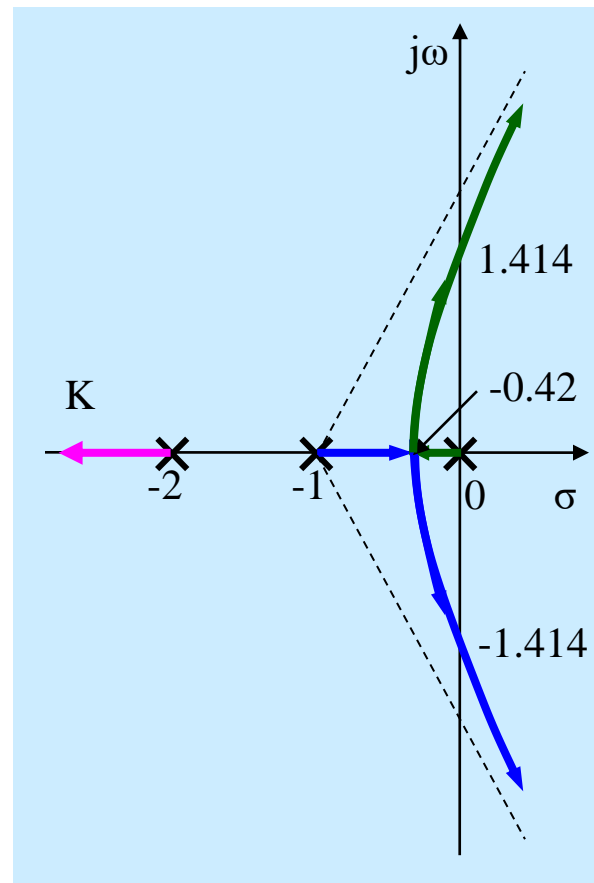
$$K = 6$$

$$\begin{cases} 3\omega = K \\ \omega^3 = 2\omega \end{cases}$$

$$3s^2 + K = 0$$

$$s = \pm j1.414$$

$K > 6$ 时, 该系统不稳定





广义根轨迹——(2) 正反馈根轨迹



2. 正反馈系统 (或 $K < 0$)

1) 开环极点: $n = 3, p_1 = 0, p_2 = -1, p_3 = -2$

开环零点: $w = 0$

2) 有三条根轨迹分支

3) 实轴上的根轨迹 $[0, \infty), [-2, -1]$

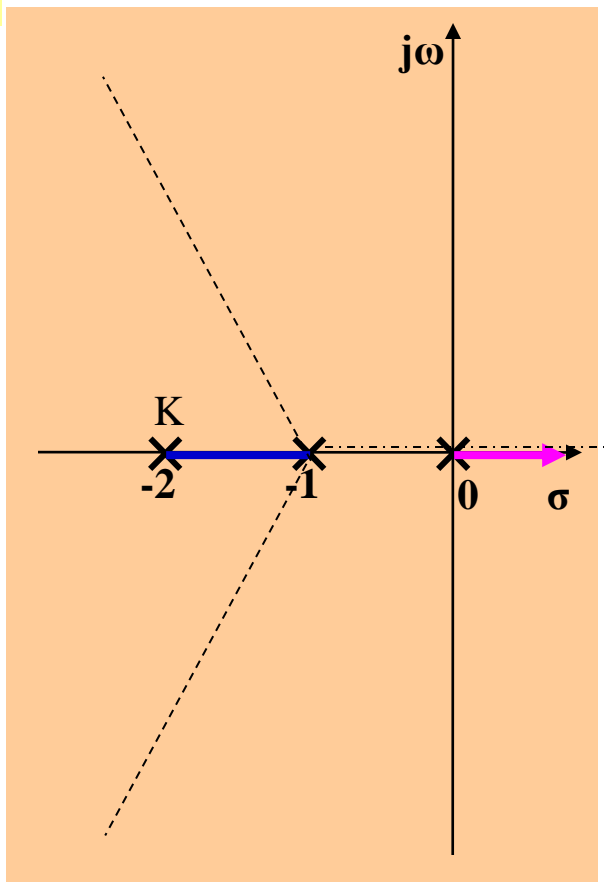
4) 渐近线与实轴的夹角

$$\gamma = \frac{2h \times 180^\circ}{n - w} = \frac{2h \times 180^\circ}{3} = \pm 120^\circ, 0^\circ$$

渐近线与实轴的交点

$$\sigma_0 = \frac{p_1 + p_2 + p_3}{n - w} = \frac{0 - 1 - 2}{3} = -1$$

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$





广义根轨迹——(2) 正反馈根轨迹



5) 实轴上[-2, -1]间的分离点 d

$$-K = s^3 + 3s^2 + 2s$$

$$\left. \frac{d(-K)}{ds} \right|_{s=d} = 3d^2 + 6d + 2 = 0$$

$$d = -0.42 \quad (\text{舍弃})$$

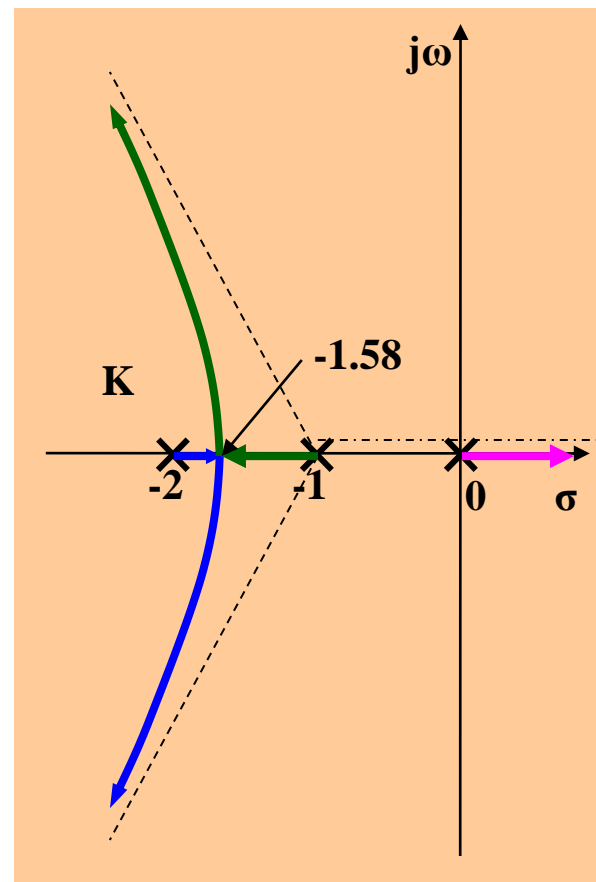
$$d = -1.58$$

分离角:

$$\frac{(2k+1)180^\circ}{l} = \frac{(2k+1)180^\circ}{2} = \begin{cases} 90^\circ \\ -90^\circ \end{cases}$$

$K > 0$ 时正反馈系统不稳定

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$



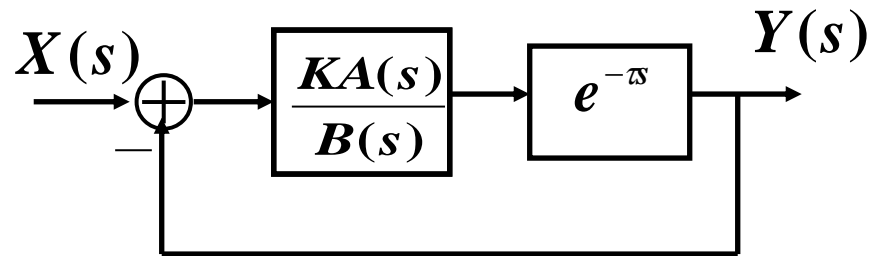


根轨迹——(3) 含纯滞后环节系统的根轨迹



考虑如图所示具有纯滞后环节(滞后时间 τ)的系统

$$G(s)H(s) = K \frac{A(s)}{B(s)} \cdot e^{-\tau s}$$



系统的特征方程为指数方程

$$1 + G_1(s)H_1(s)e^{-\tau s} = 0$$

$$s = \sigma + j\omega$$

幅值条件 $|G_1(s)H_1(s)e^{-\tau s}| = 1 \Rightarrow |G_1(\sigma + j\omega)H_1(\sigma + j\omega)|e^{-\sigma\tau} = 1$

相角条件 $\angle G_1(s)H_1(s)e^{-\tau s} = (2h + 1)\pi$

$$\angle G_1(\sigma + j\omega)H_1(\sigma + j\omega) = (2h + 1)\pi + \omega\tau$$

其根轨迹分支数等于 ∞

其根轨迹依然关于实轴对称

幅值条件 $K = |\sigma + j\omega| \cdot |\sigma + j\omega - p_1| e^{\sigma\tau}$, 相角条件 $\angle(\sigma + j\omega) + \angle(\sigma + j\omega - p_1) + \omega\tau = (1 + 2h)\pi$

例5-15: $G(s)H(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{s(s - p_1)} = \frac{Ke^{-\sigma\tau} e^{-j\omega\tau}}{s(s - p_1)}$, 负反馈, $K > 0, \tau > 0, p_1 < 0$

当 $\omega=0$ 时, 即对实轴上的点, 相角条件与不含纯滞后环节时相同, 实轴根轨迹法依然成立

无论有无纯滞后, $(p_1, 0)$ 上都有实分离点

当 $|\omega|$ 足够小时, 相角条件可近似于无纯滞后的

$$\angle(\sigma + j\omega) + \angle(\sigma + j\omega - p_1) = (1 + 2h)\pi$$

这意味着对 $(p_1, 0)$, 实分离点求法依然成立

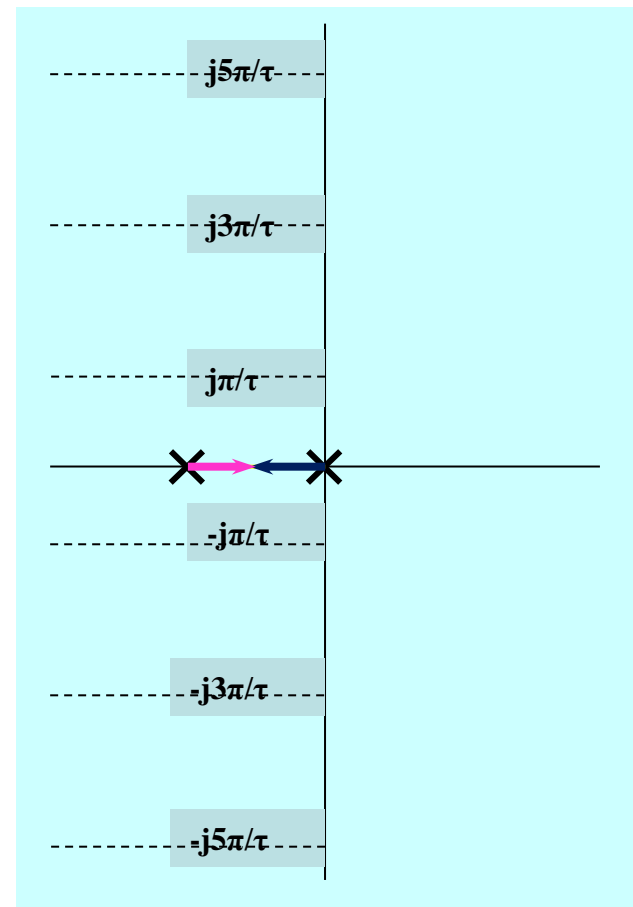
$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r - p_1} = 0 \Rightarrow \text{实分离点 } r = \frac{p_1}{2}$$

起点: $K = |\sigma + j\omega| \cdot |\sigma + j\omega - p_1| e^{\sigma\tau} = 0$

$$\sigma + j\omega = 0, \quad \sigma + j\omega = p_1, \quad \sigma = -\infty$$

设 $-\infty + j\omega_1$ 是起点, 由相角条件知

$$\omega_1 = \frac{(-1 + 2h)\pi}{\tau}, \quad h = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$



幅值条件 $K = |\sigma + j\omega| \cdot |\sigma + j\omega - p_1| e^{\sigma\tau}$ 相角条件 $\angle(\sigma + j\omega) + \angle(\sigma + j\omega - p_1) + \omega\tau = (1 + 2h)\pi$

例5-15: $G(s)H(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{s(s - p_1)} = \frac{Ke^{-\sigma\tau} e^{-j\omega\tau}}{s(s - p_1)}$, 负反馈, $K > 0, \tau > 0, p_1 < 0$

终点 $|s| \angle \gamma$

由相角条件知终点的 ω 必为常值

$\angle \gamma = 0 (\sigma = +\infty)$ 或 $\pi (\sigma = -\infty)$

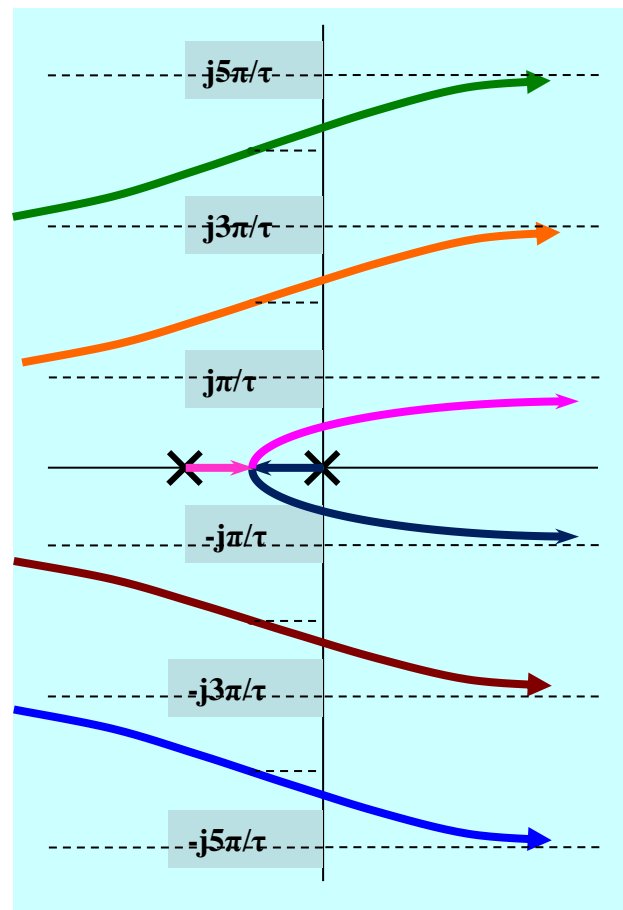
设 $+\infty + j\omega_2$ 是终点, 由相角条件知

$$\omega_2 = \frac{(1 + 2h)\pi}{\tau}, \quad h = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

设 $\sigma + j\frac{2h\pi}{\tau}$ ($h = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 是根轨迹上的点

由相角条件知 $\sigma = \frac{p_1}{2}$

这些点分别对应不同的 K



基于上述点, 可大致勾勒根轨迹



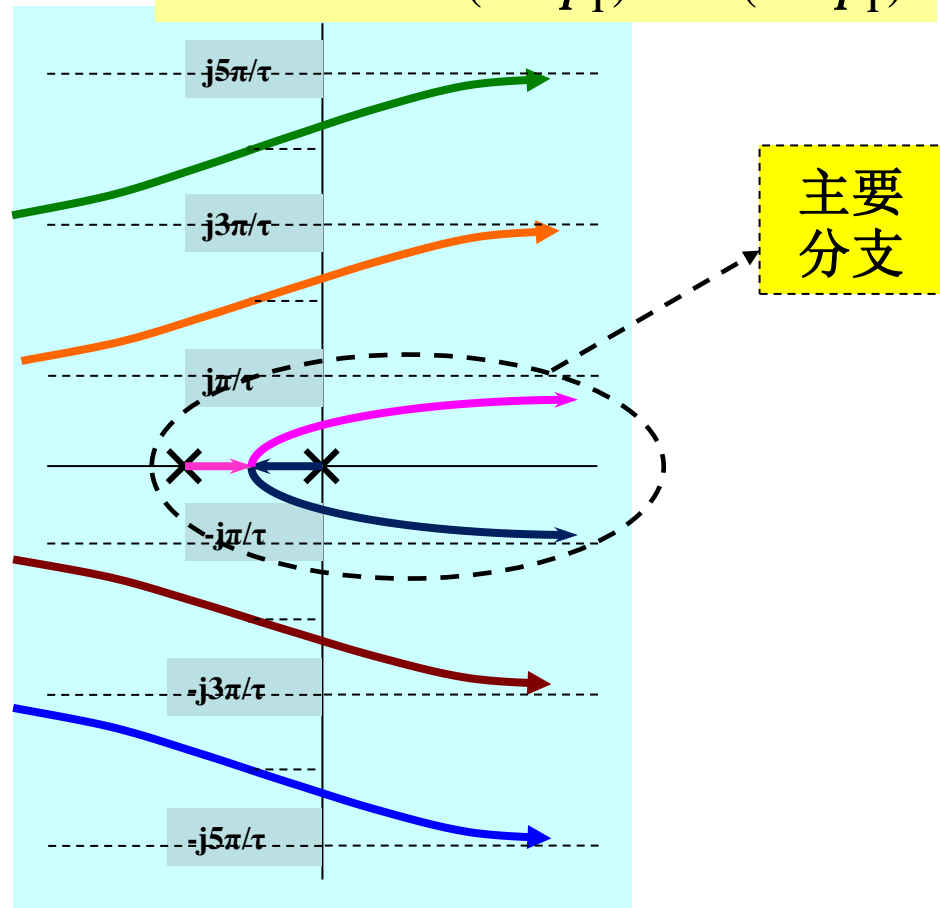
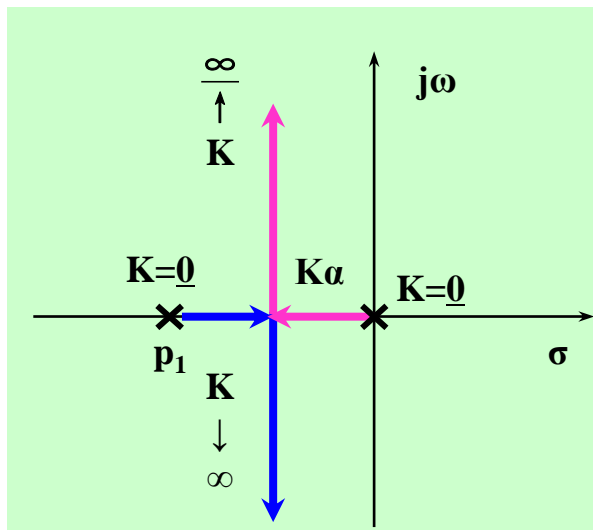
根轨迹——(3) 含纯滞后环节系统的根轨迹



比较有/无纯滞后环节系统的根轨迹

$$G(s)H(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{s(s - p_1)} = \frac{Ke^{-\sigma\tau}e^{-j\omega\tau}}{s(s - p_1)}$$

$$G_1(s)H_1(s) = \frac{K}{s(s - p_1)}$$





义根轨迹—— (3) 含纯滞后环节系统的根轨迹



例5-15的结论:

- 不含纯滞后的系统有两条根轨迹分支,且对所有的 $K>0$,系统是稳定的。
含纯滞后的系统有无穷多个根轨迹分支,且根轨迹渐近线平行于实轴。
- 有两条根轨迹分支接近原点,对系统的稳定性影响很大,称为主根轨迹,其余分支称为辅助根轨迹。
- 系统稳定的增益 K 的最大值由虚轴上满足相角条件的频率 ω 确定

$$\angle(j\omega_3) + \angle(j\omega_3 - p_1) + \omega_3\tau = (1 + 2h)\pi$$

$$K = |j\omega_3| |j\omega_3 - p_1| = \omega_3 \sqrt{p_1^2 + \omega_3^2}$$

系统中若有纯滞后存在, 相比无纯滞后系统会降低系统的稳定性。



义根轨迹—— (3) 含纯滞后环节系统的根轨迹



也可以用其他的近似方法来处理纯滞后，如有理函数近似。其中Pade近似是一种常用的方法，近似后可以用根轨迹绘制法则绘制根轨迹

$$G_1(s)H_1(s) = \frac{K}{s(s - p_1)}$$

$$e^{-\tau s} = \frac{e^{-\frac{\tau}{2}s}}{e^{\frac{\tau}{2}s}} \approx \frac{1 - \frac{\tau}{2}s}{1 + \frac{\tau}{2}s} = \frac{s - \frac{2}{\tau}}{s + \frac{2}{\tau}}$$

注意: $K < 0$

$$G(s)H(s) = \frac{Ke^{-\tau s}}{s(s - p_1)} \approx \frac{-K(s - \frac{2}{\tau})}{s(s - p_1)(s + \frac{2}{\tau})}$$



根轨迹——(3) 含纯滞后环节系统的根轨迹



例 5-16 控制系统的开环传递函数为
绘制 K_c 变化时的根轨迹。

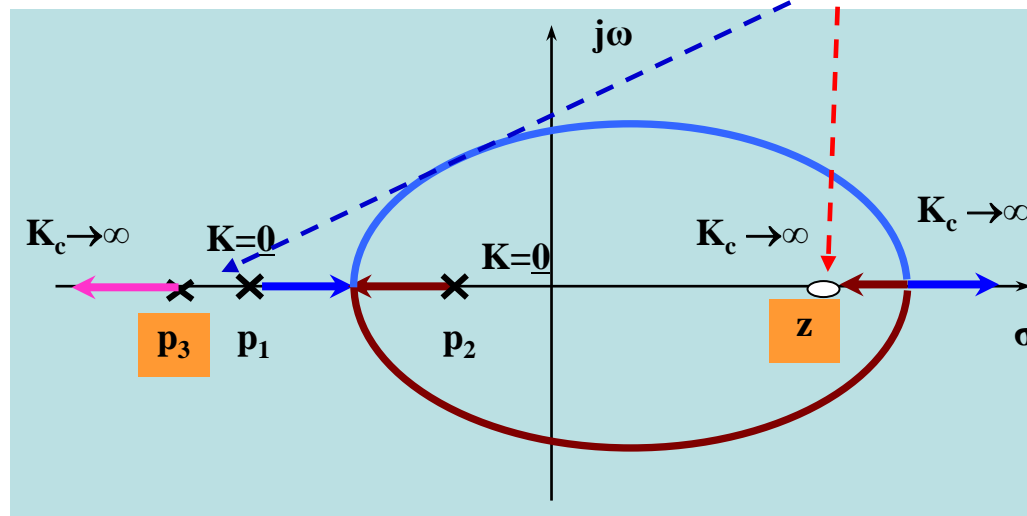
$$G(s)H(s) = \frac{K_c K_v K_0 K_m e^{-\tau s}}{(T_0 s + 1)(T_m s + 1)}$$

解：采用**Pade's**方法来近似纯滞后部分。

$$G(s)H(s) = - \frac{K_c K_v K_0 K_m (s - \frac{2}{\tau})}{(T_0 s + 1)(T_m s + 1)(s + \frac{2}{\tau})} = - \frac{K_r (s - \frac{2}{\tau})}{(s + \frac{1}{T_0})(s + \frac{1}{T_m})(s + \frac{2}{\tau})}$$

纯滞后时间 τ 越大，对系统的稳定性和其他特性的影响就越大

请比较：若该系统无纯滞后存在，稳定性？





广义根轨迹——多参数的处理（根轨迹簇）



■ **例5-17** 已知单位负反馈系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{k(\tau s + 1)}{s(s+1)(s+4)}$
试绘制参数 k 和 τ 变化时的根轨迹（ $k > 0, \tau > 0$ ）。

方法：（1）先画出当 $\tau = 0$ 时， k 变化时的根轨迹。与前无殊。

（2）当 $\tau \neq 0$ 时，取 k 为某些确定值，绘制参数 τ 变化的根轨迹，先写出等效开环传递函数

$$G'(s) = \frac{\tau k s}{s^3 + 5s^2 + 4s + k}$$

- 以 τ 为参数的根轨迹的起始点均在 τ 为 0 时 k 为参数的根轨迹上
- 所以最后得到的将是一个根轨迹簇（对应每个 k 值都不同）
- 如此例，取 $k=20, k=8, k=40$请你试试！



- **参数根轨迹**（即将开环传递函数中的其它参数作为可变参数）
 - 关键是由系统闭环特征方程写出等效开环传递函数，将可变参数置于根轨迹增益 K_r 的位置。
- **对于 $K < 0$ 情况（正反馈系统）——零度根轨迹**
 - 若无特殊要求，实际上是写出开环传递函数后，视其根轨迹增益 K_r 前的符号决定（设 K_r 总是 > 0 ）是采取 $K > 0$ 或 $K < 0$ 的规则
- **纯滞后的处理** 为方便分析，可采用**pade**多项式近似纯滞后环节（在低频时较为适用）
- **多个可变参数的根轨迹——根轨迹簇——参见例5-17**
 - 实际上也只能先选定一个，再画其他的
- **多回路系统的根轨迹——“先内后外”**



根轨迹方法举例



例5-18 单位负反馈系统($K>0$)的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+1)}{s(s-1)(s^2+2s+2)}$$

绘制根轨迹。

注意有一个在S右半面的开环极点？

解： **1) 开环极点：** $n = 4, \quad p_1 = 0, \quad p_2 = 1, \quad p_{3,4} = -1 \pm j1$

开环零点： $w = 1, z_1 = -1$

2) 有4条根轨迹分支

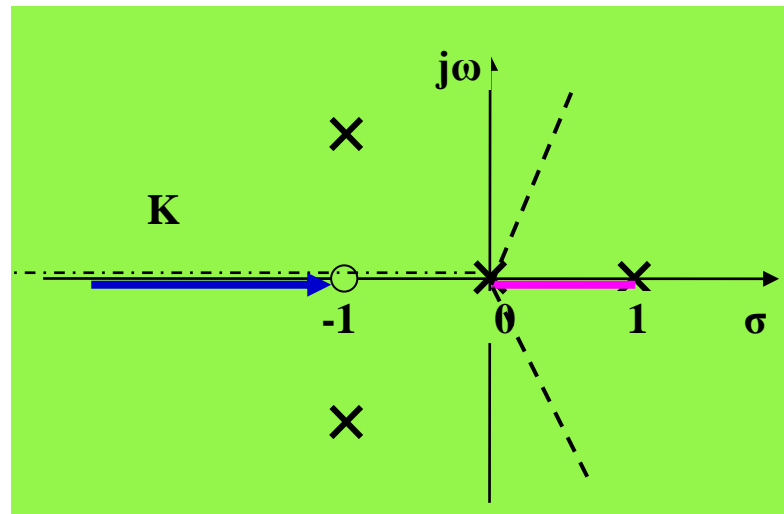
3) 实轴上的根轨迹 $[0, 1], (-\infty, -1]$

4) 渐近线与实轴的夹角

$$\gamma = \frac{(1+2h)180^\circ}{n-w} = \pm 60^\circ, 180^\circ$$

与实轴的交点

$$\sigma_0 = \frac{p_1 + p_2 + p_3 + p_4 - z_1}{n-w} = 0$$





根轨迹方法举例

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+1)}{s(s-1)(s^2+2s+2)}$$



5) 实轴上的分离点

$$s^4 + s^3 - 2s + K(s+1) = 0 \longrightarrow -K = \frac{s^4 + s^3 - 2s}{s+1}$$

$$\frac{d(-K)}{ds} \bigg|_{s=d} = d^4 + 2d^3 + d^2 - \frac{2}{3} = 0$$

$$d_1 = 0.55 \quad d_2 = -1.55 \quad d_{3,4} = -0.5 \pm j0.75 \quad (\text{舍弃})$$

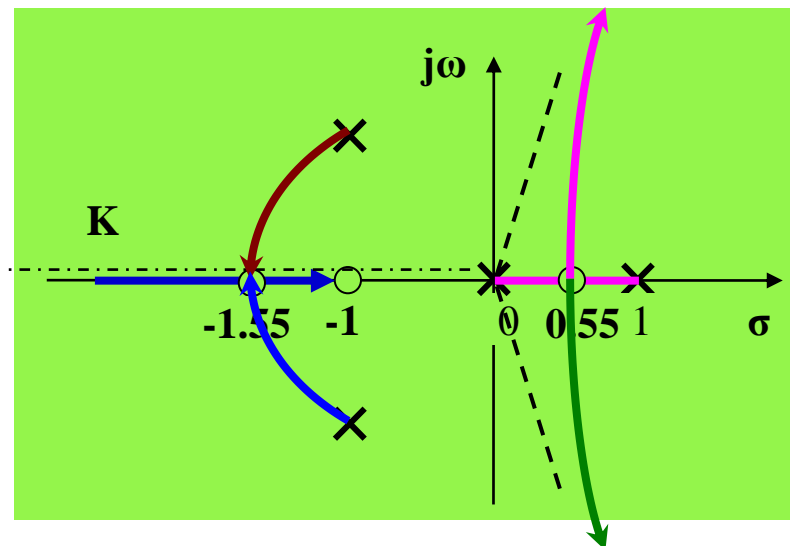
$$\text{分离角: } \frac{(2k+1)180^\circ}{l} = \frac{(2k+1)180^\circ}{2} = \begin{cases} 90^\circ \\ -90^\circ \end{cases}$$

6) 极点 $-1+j1$ 处的出射角 Φ_{3D}

$$\begin{aligned} \phi_{3D} &= (1+2h)180^\circ - (\phi_1 + \phi_2 + \phi_4) + \psi_1 \\ &= (1+2h)180^\circ - (135^\circ + 153.4^\circ + 90^\circ) + 90^\circ \\ &= -108.6^\circ \end{aligned}$$

极点 $-1-j1$ 处的出射角为 108.6° .

7) 与虚轴没有交点.



因此, 该系统不稳定。



根轨迹方法举例



例 5-19 某单位负反馈系统 ($K>0$) 的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+1)}{s(s-1)(s^2+4s+16)}$$

绘制其根轨迹。

解: 1) 开环极点: $n = 4, p_1 = 0, p_2 = 1, p_{3,4} = -2 \pm j2\sqrt{3}$

开环零点: $w = 1, z_1 = -1$

2) 有4条根轨迹分支

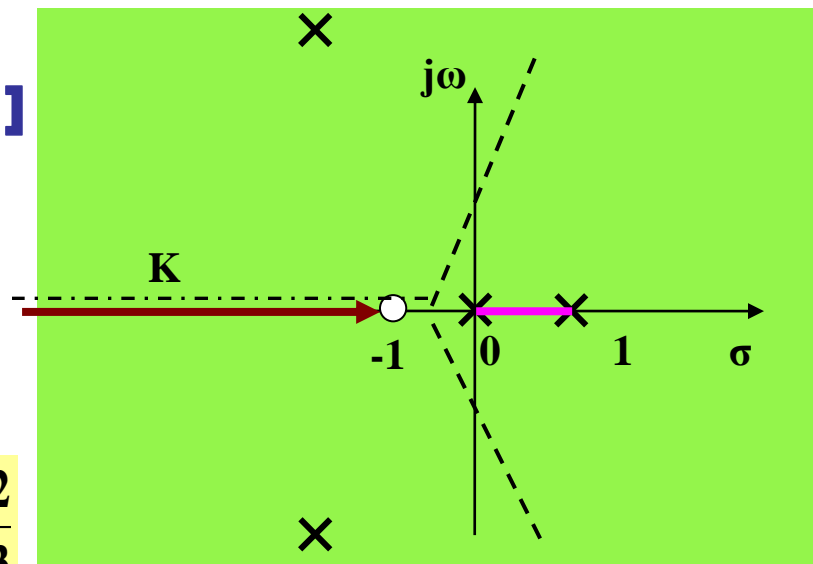
3) 实轴上的根轨迹 $[0, 1], (-\infty, -1]$

4) 渐近线与实轴的夹角

$$\gamma = \frac{(1+2h)180^\circ}{n-w} = \pm 60^\circ, 180^\circ$$

与实轴的交点

$$\sigma_0 = \frac{p_1 + p_2 + p_3 + p_4 - z_1}{n-w} = -\frac{2}{3}$$





根轨迹方法举例

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+1)}{s(s-1)(s^2+4s+16)}$$



5) 实轴上的分离点

$$\left. \frac{d(-K)}{ds} \right|_{s=d} = 3s^4 + 10s^3 + 21s + 24s - 16 = 0$$

$$d_1 = 0.46 \quad d_2 = -2.22$$

$$d_{3,4} = -0.79 \pm j2.46 \quad (\text{舍弃})$$

分离角

$$\frac{(2k+1)180^\circ}{l} = \frac{(2k+1)180^\circ}{2} = \begin{cases} 90^\circ \\ -90^\circ \end{cases}$$

6) 极点 $-2+j3.46$ 处的出射角 Φ_{3_D}

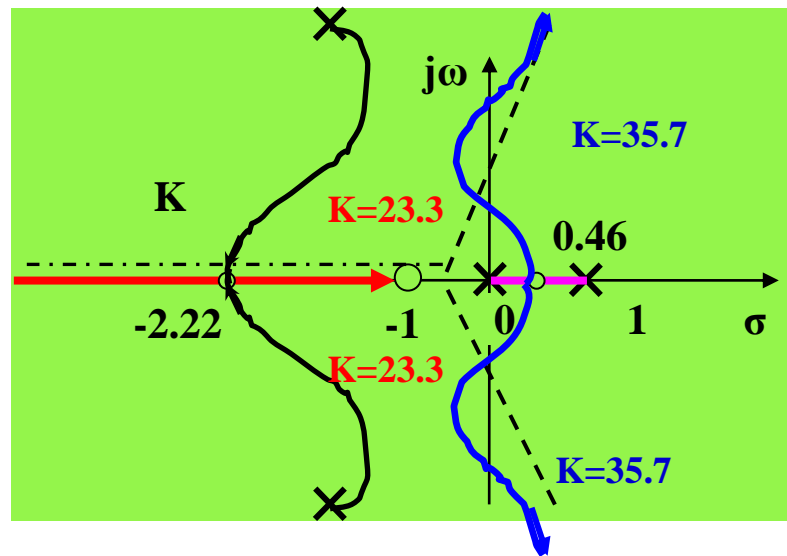
$$\begin{aligned} \phi_{3_D} &= (1+2h)180^\circ - (\phi_1 + \phi_2 + \phi_4) + \psi_1 \\ &= -54.5^\circ \end{aligned}$$

极点 $-2-j3.46$ 处的出射角为 54.5°

7) 与虚轴的交点 $s_{1,2} = \pm j1.56 (K = 23.3)$

$$s_{3,4} = \pm j2.56 (K = 35.7)$$

当 $23.3 < K < 35.7$ 时系统稳定



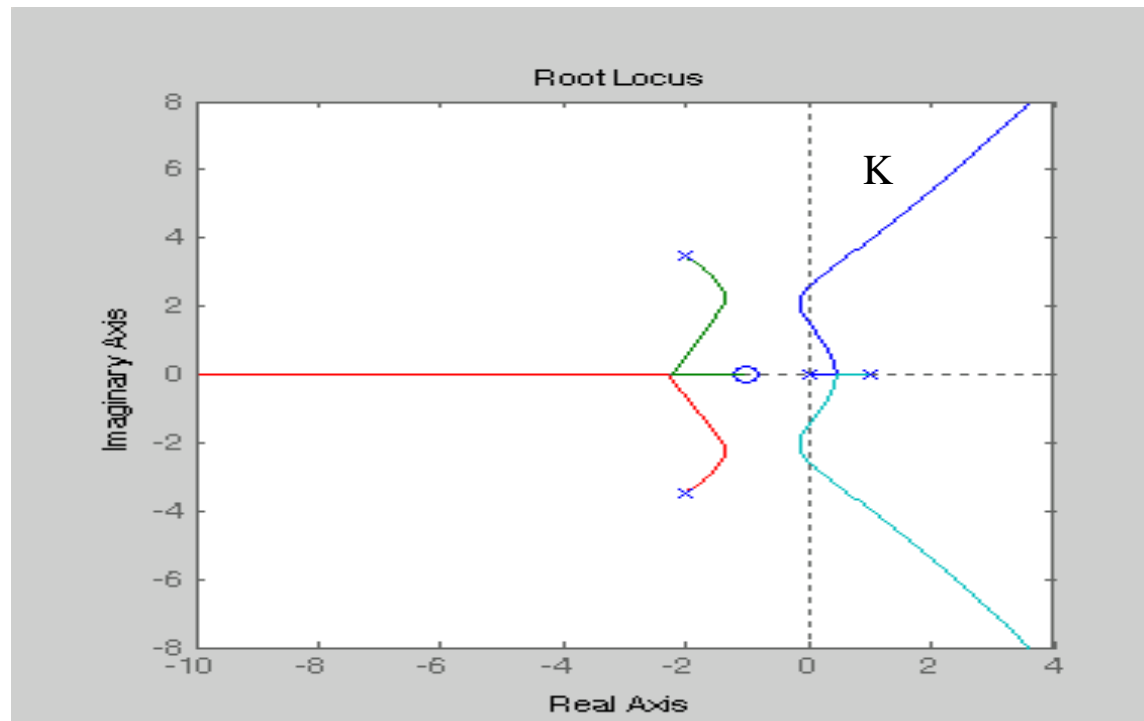
该系统是条件稳定.



根轨迹方法举例



$$G(s)H(s) = \frac{K(s+1)}{s(s-1)(s^2+4s+16)}$$





根轨迹方法举例



例 5-20 单位反馈系统开环传递函数
绘制根轨迹(其中 $K > 0$).

$$G(s)H(s) = \frac{K(1-s)}{s(s+2)}$$

解:

$$G(s)H(s) = \frac{K(1-s)}{s(s+2)} = \frac{-K(s-1)}{s(s+2)}$$

注意选取 $K < 0$ 的规则

1) 开环极点: $n = 2, p_1 = 0, p_2 = -2$

开环零点: $w = 1, z_1 = 1$

2) 有2条根轨迹分支

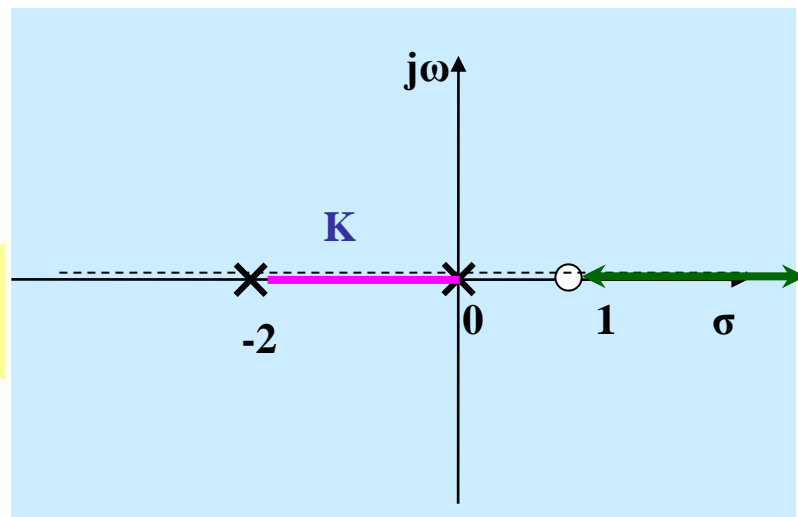
3) 实轴上的根轨迹 $[0, -2], [1, \infty)$

4) 渐近线与实轴的夹角

$$\gamma = \frac{2h \cdot 180^\circ}{n - w} = 0^\circ$$

与实轴的交点

$$\sigma_0 = \frac{p_1 + p_2 - z_1}{n - w} = \frac{0 - 2 - 1}{2 - 1} = -3$$





根轨迹方法举例

$$G(s)H(s) = \frac{K(1-s)}{s(s+2)}$$



5) 实轴上的分离点

$$\frac{d(-K)}{ds} \Big|_{s=d} = s^2 - 2s - 2 = 0$$

$$d_1 = -0.71$$

$$d_2 = 2.71$$

分离角

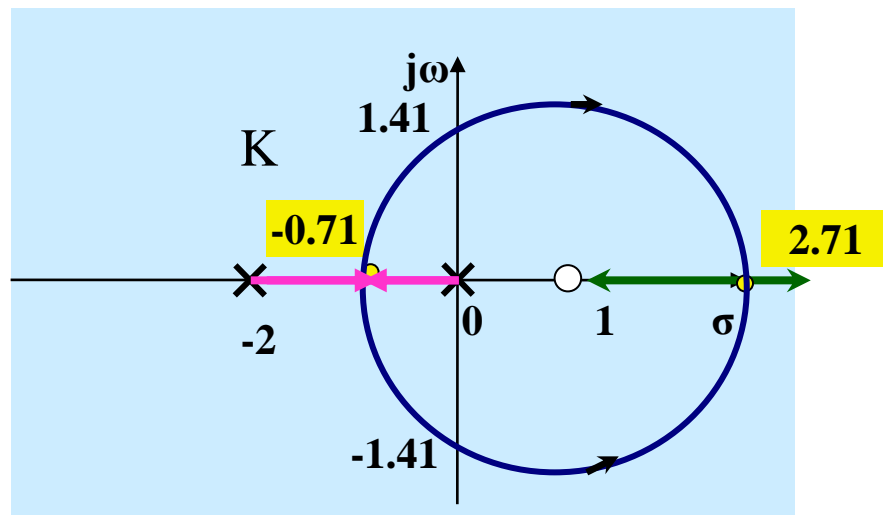
$$\frac{(2k+1)180^\circ}{l} = \frac{(2k+1)180^\circ}{2} = \begin{cases} 90^\circ \\ -90^\circ \end{cases}$$

6) 根轨迹与虚轴的交点

$$\Delta \Big|_{s=jw} = s^2 + (2-K)s + K = 0$$

$$w = \pm\sqrt{2}, \quad K = 2$$

因此, 系统是条件稳定 (当 $0 < K < 2$).





根轨迹方法举例



例5-21 设一控制系统的前向通道传递函数 $\mathbf{G(s)}$ 与反馈通道传递函数分别如下，试绘制系统的根轨迹。

$$G(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+2)}$$

$$H(s) = (s+1)$$

解：开环传递函数 $\mathbf{G(s)H(s)}$ 出现了零极点对消情况，此时如何绘制根轨迹？先作一分析：

闭环传递函数为：

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

先不对消极点，闭环特征方程： $[s(s+2)+k](s+1) = 0$

若 \mathbf{GH} 对消极点，闭环特征方程变成： $s(s+2)+k = 0$

基于对消极点后的 \mathbf{GH} 绘制根轨迹的话，闭环系统少了一个极点。因此，在绘制好根轨迹后，应对消的极点也作为一个闭环极点补上(它不随 k 变化而变化)。



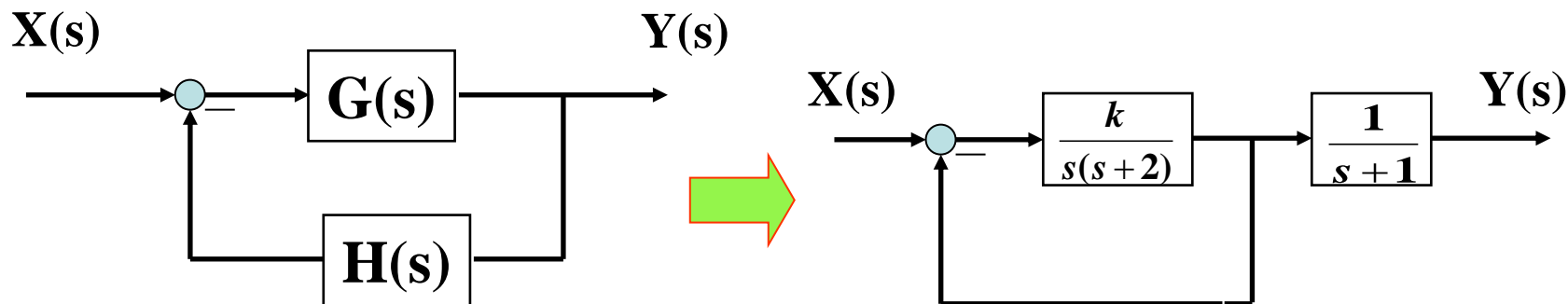
根轨迹方法举例



例5-21 设一控制系统的前向通道传递函数 $\mathbf{G(s)}$ 与反馈通道传递函数分别如下，试绘制系统的根轨迹。

$$G(s) = \frac{k}{s(s+1)(s+2)}$$

$$H(s) = (s+1)$$



基于对消极点后的 \mathbf{GH} 绘制根轨迹的话，闭环系统少了一个极点。因此，在绘制好根轨迹后，应对消的极点也作为一个闭环极点补上(它不随 k 变化而变化)。



根轨迹方法举例



■ **例5-22** 一控制系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s) = \frac{k}{s(s + p_1)(s + p_2)(s + p_3)}$$

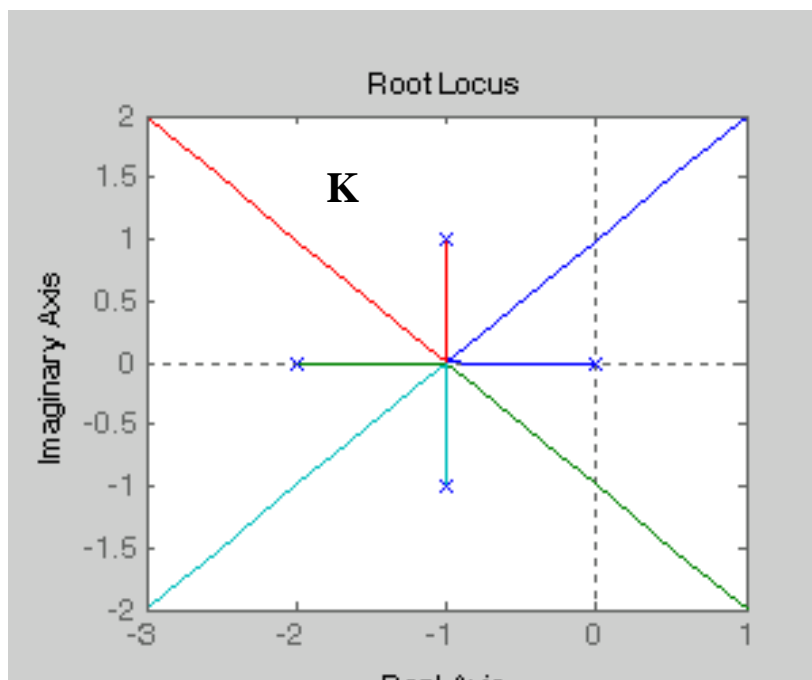
其中 p_2 、 p_3 为一对共轭复根，当它们的位置发生变化时，根轨迹将发生变化。

设 $p_1 = -2$ 。

(1) $p_2 = -1+j$, $p_3 = -1-j$

$$\begin{aligned} G(s)H(s) &= \frac{K}{s(s+2)(s^2+2s+2)} \\ &= \frac{K}{s(s+2)(s+1-j)(s+1+j)} \end{aligned}$$

参见PPT5-2例5-12





根轨迹方法举例



■ **例5-22** 一控制系统的开环传递函数为

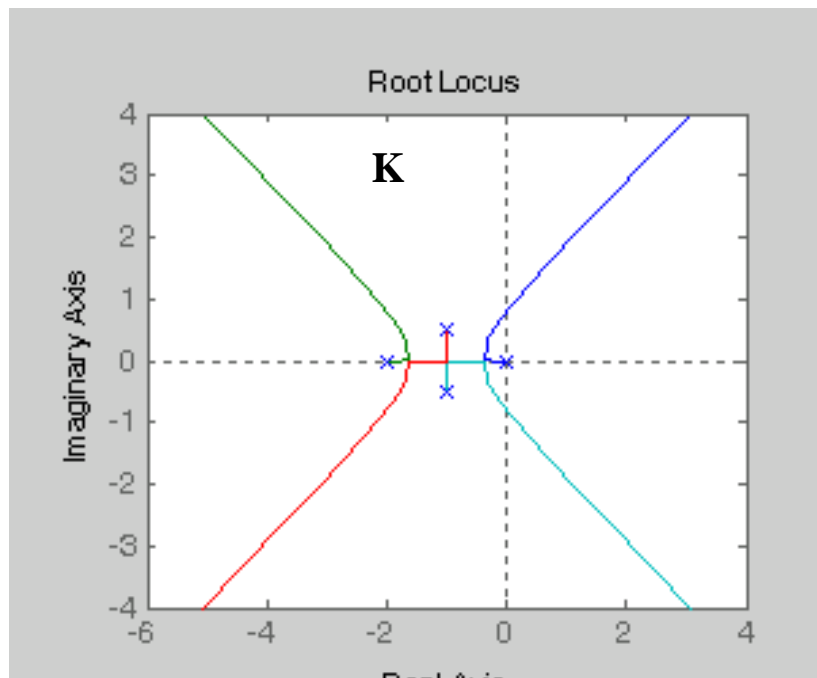
$$G(s)H(s) = \frac{k}{s(s + p_1)(s + p_2)(s + p_3)}$$

其中 p_2 、 p_3 为一对共轭复根，当它们的位置发生变化时，根轨迹将发生变化。

设 $p_1 = -2$ 。

(2) $p_2 = -1 + 0.5j$, $p_3 = -1 - 0.5j$

$$\begin{aligned} G(s)H(s) &= \frac{K}{s(s + 2)(s^2 + 2s + 1.25)} \\ &= \frac{K}{s(s + 2)(s + 1 - j0.5)(s + 1 + j0.5)} \end{aligned}$$





根轨迹方法举例



■ **例5-22** 一控制系统的开环传递函数为

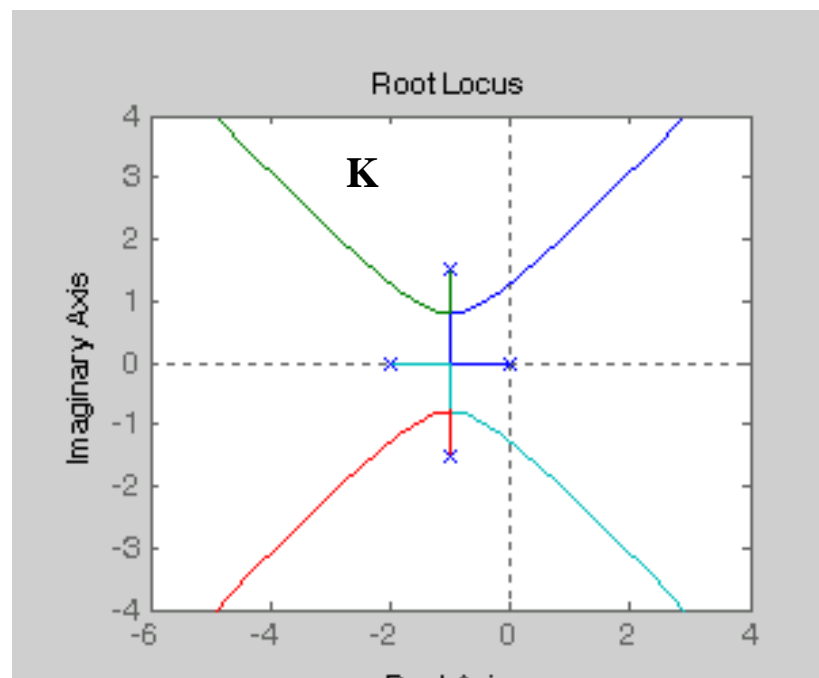
$$G(s)H(s) = \frac{k}{s(s + p_1)(s + p_2)(s + p_3)}$$

其中 p_2 、 p_3 为一对共轭复根，当它们的位置发生变化时，根轨迹将发生变化。

设 $p_1 = -2$ 。

(3) $p_2 = -1 + 1.5j$, $p_3 = -1 - 1.5j$

$$\begin{aligned} G(s)H(s) &= \frac{K}{s(s+2)(s^2+2s+3.25)} \\ &= \frac{K}{s(s+2)(s+1-j1.5)(s+1+j1.5)} \end{aligned}$$





根轨迹方法举例



■ **例5-22** 一控制系统的开环传递函数为

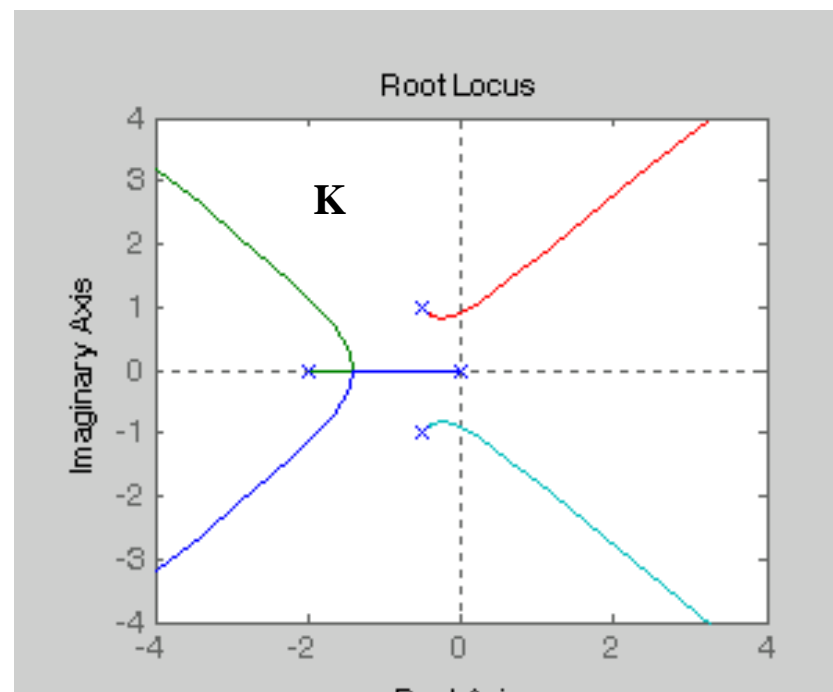
$$G(s)H(s) = \frac{k}{s(s + p_1)(s + p_2)(s + p_3)}$$

其中 p_2 、 p_3 为一对共轭复根，当它们的位置发生变化时，根轨迹将发生变化。

设 $p_1 = -2$ 。

(4) $p_2 = -0.5 + j$, $p_3 = -0.5 - j$

$$\begin{aligned} G(s)H(s) &= \frac{K}{s(s + 2)(s^2 + s + 1.25)} \\ &= \frac{K}{s(s + 2)(s + 0.5 - j)(s + 0.5 + j)} \end{aligned}$$



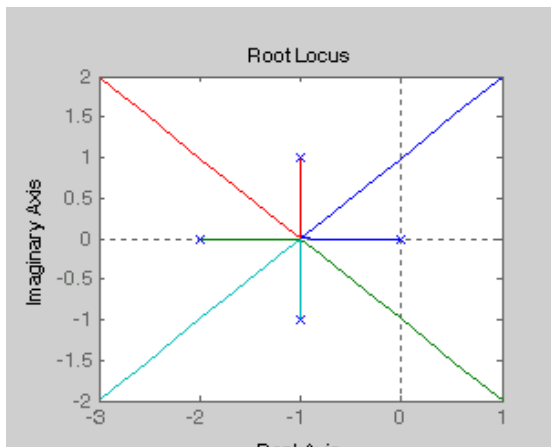


根轨迹方法举例

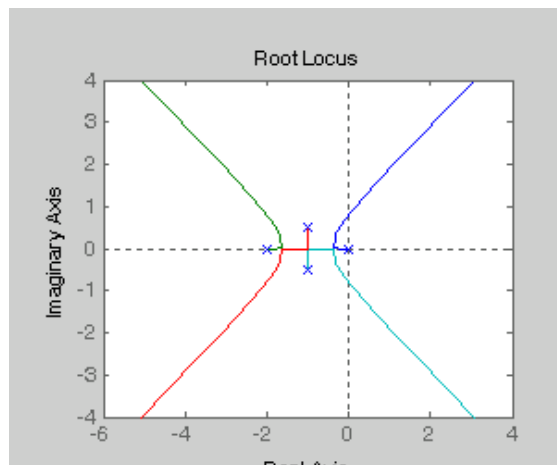
根轨迹



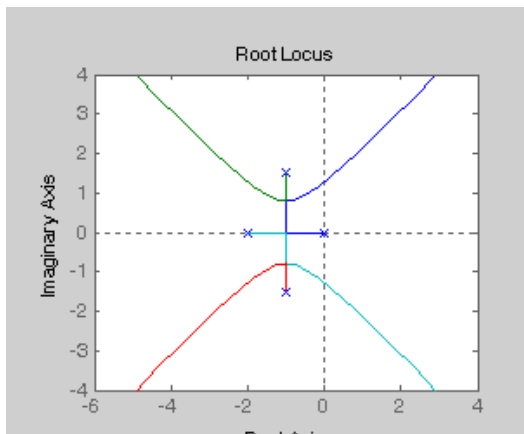
$$(1) G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+2)(s^2+2s+2)}$$



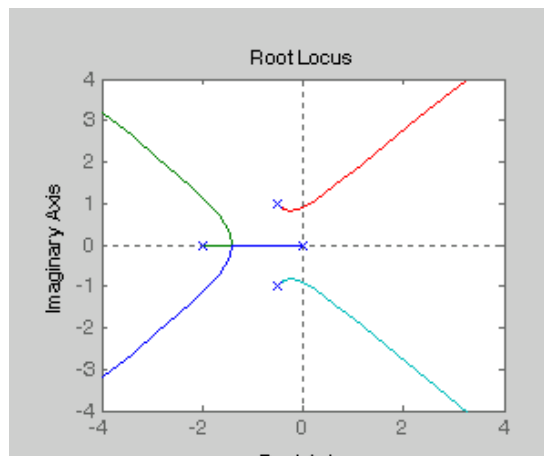
$$(2) G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+2)(s^2+2s+1.25)}$$



$$(3) G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+2)(s^2+2s+3.25)}$$



$$(4) G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+2)(s^2+s+1.25)}$$





Thanks!