2020~2021 学年秋学期

《复变函数与积分变换》

林　智

浙江大学数学科学学院

第二章 解析函数

§2.1 复变函数

1. 复变函数的定义

定义： 设 D 是复平面中的一个点集，对于 D 中的每一个 z，按照一定的规律，有一个或多个 w 的值与之对应，则称 w 为定义在 D 上的复变函数，记做：

$$w = f(z) = f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$$

若采用指数表示 $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，则 $w = f(z)$ 可以写为

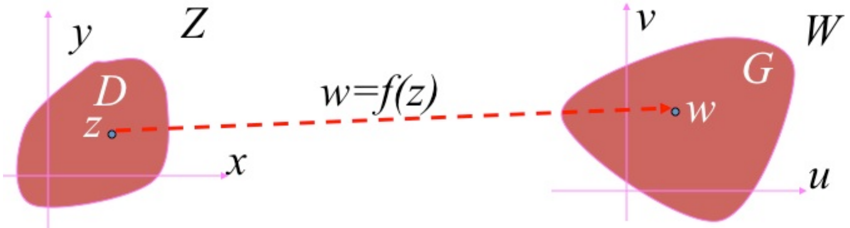
$$w = u(r\cos\theta, r\sin\theta) + \mathrm{i}v(r\cos\theta, r\sin\theta) = P(r, \theta) + \mathrm{i}Q(r, \theta)$$

单值函数；多值函数

映射的概念

函数 $w = f(z)$ 在几何上可以看做是把 z 平面上的一个点集 D(定义集合) 变到 w 平面上的一个点集 G（函数值集合）的映射（或变换）。

如果 D 中的点 z 被映射 $w = f(z)$ 映射成 G 中的点 w, 则 w 称为 z 的象(映象), 而 z 称为 w 的原象。



几种特殊的映射

1. 单射：$z_1 \neq z_2 \quad \Longrightarrow \quad f(z_1) \neq f(z_2)$;
2. 满射：对 $\forall w \in G$, $\exists z \in D$, 使得 $f(z) = w$;
3. 双射：既单又满。

双射的特殊性质

如果 f 是双射，则 f 存在反函数（或称逆函数）

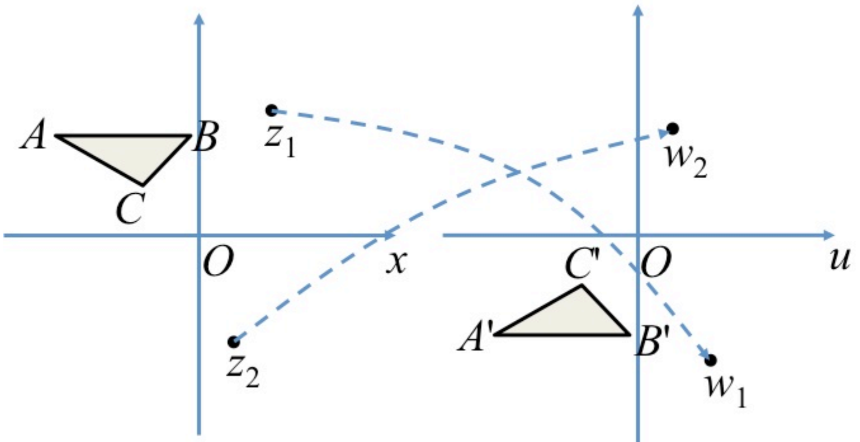
如果函数 (映射) $w = f(z)$ 与它的反函数 (逆映射) $z = \phi(w)$ 都是单值的, 则称函数 (映射) $w = f(z)$ 是一一的。此时, 我们也称集合 D 与集合 G 是一一对应的。

例如

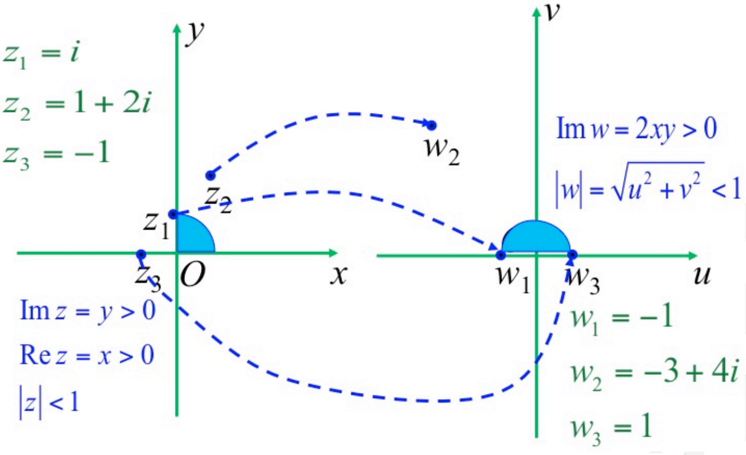
$$w = f(z) = \bar{z}$$

$$w = f(z) = z^2 \text{?!}$$

设函数 $w = \bar{z} = x - \mathrm{i}y$; $u(x, y) = x$, $v(x, y) = -y$

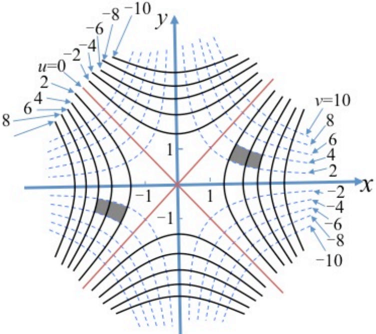


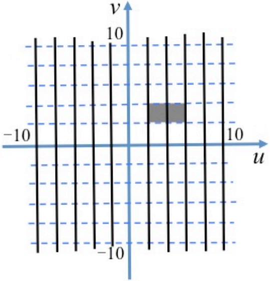
设函数 $w = z^2 = (x + \mathrm{i}y)^2$; $u(x, y) = x^2 - y^2$, $v(x, y) = 2xy$



平方函数下曲线的象

函数 $w = z^2$ 对应于两个二元实变函数: $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$ 把 z 平面上的两族双曲线 $x^2 - y^2 = c_1$, $2xy = c_2$ 分别映射成 w 平面上的两族平行直线 $u = c_1$, $v = c_2$.





曲线在映射下的象

例 1： $C: x^2+y^2=8 \xrightarrow{w=1/z} \Gamma?$

例 2： $C: |z|=R \xrightarrow{w=2z+b} \Gamma?$

例 3： $C: y=x \xrightarrow{w=\mathrm{i}z} \Gamma?$

2. 极限与连续

定义: 设函数 $w = f(z)$ 定义在 z_0 的去心邻域 $0 < |z - z_0| < \rho$ 内。如存在一确定的数 A，对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，相应地必有一正数 $\delta(\varepsilon) \in (0, \rho]$, 使得当 $0 < |z - z_0| < \delta$ 时有 $|f(z) - A| < \varepsilon$，则称 A 为 $f(z)$ 当 z 趋向于 z_0 时的极限，记作

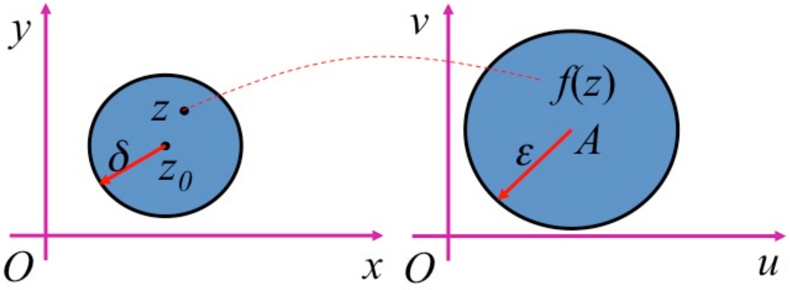
$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A$$

或记作当 $z \to z_0$ 时，$f(z) \to A$。

直观意义

当 z 充分接近 z_0 时，则象 w 也充分接近 A。

复变函数极限的几何意义



$\lim_{z\to z_0} f(z) = A$ 意味着当 z 从平面上任一方向、沿任何路径、以任意方式趋近于 z_0 时，$f(z)$ 均以 A 为极限

几个定理

定理 2.1.1：如果极限存在，则必唯一。

定理 2.1.2：极限 $\lim_{z\to z_0} f(z) = A$ 存在的充要条件是 $f(z) - A = \alpha(z)$，其中 $\lim_{z\to z_0} \alpha(z) = 0$。

定理 2.1.3：极限 $\lim_{z\to z_0} f(z) = A$ 存在的充要条件是

$$\lim_{x\to x_0, y\to y_0} u(x, y) = u_0, \qquad \lim_{x\to x_0, y\to y_0} v(x, y) = v_0$$

其中 $A = u_0 + \mathrm{i}v_0$，$z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$。与定理 2.1.2 等价。

定理 2.1.4：极限的运算

复变函数的极限

例 1. 证明函数 $f(z) = \dfrac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}$ 当 $z \to 0$ 时极限不存在。

2. 函数的连续性

定义: 若 $\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$, 则 $f(z)$ 在 z_0 处连续。若 $f(z)$ 在区域 D 内处处连续, 则 $f(z)$ 在 D 内连续。

函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 处连续的充要条件是 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续。

连续复变函数的性质

1. 连续函数的四则运算仍然连续;
2. 连续函数的复合函数仍然连续;
3. 连续函数的模也连续;
4. 有界闭区域 D 上的连续函数必有界，且其模在 D 上取到最大值与最小值;
5. 有界闭区域 D 上的连续函数必一致连续.

两个例子

例 1：讨论幅角主值函数 $\arg(z)$ 的连续性。

例 2：讨论函数 $f(z) = \dfrac{z\,\mathrm{Im}(z^2)}{|z|^2}$ 的连续性。

§2.2 解析函数 (Analytic Functions)

1. 复变函数的导数

定义: 设函数 $w = f(z), z \in D; z_0, z_0 + \Delta z \in D$。若极限

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

存在，则称 $f(z)$ 在点 z_0 可导（或可微）。此极限称为 $f(z)$ 在 z_0 的导数，记作

$$f'(z_0) \quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\Big|_{z=z_0}$$

1. 复变函数的导数（续）

容易证明：可导 $\Longrightarrow$ 连续。反之不然。

如果 $f(z)$ 在区域 D 内处处可导，则称 $f(z)$ 在 D 内可导。

例 1. 求 $f(z)=z^2$ 的导数。

复变函数的导数具有与实函数同样的求导法则

更多的例子

例 2. 讨论 $f(z) = x + 2\mathrm{i}y$ 的可导性。

例 3. 讨论 $w = f(z) = |z|^2$ 的可导性。

2. 解析函数的概念

定义：$f(z)$ 在 z_0 解析 $\Longleftrightarrow$ $f(z)$ 在 z_0 的某邻域内可导

z_0 称为解析点；不解析的点称为奇点

$f(z)$ 在区域 D 内解析 $\Longleftrightarrow$ $f(z)$ 在 D 内处处解析

如果 D 是整个复平面，则称 $f(z)$ 为整函数

类似可导和连续的关系。。。

函数在一点解析 $\Longrightarrow$ 在该点可导；反之不一定成立。

但在区域内：解析 $\Longleftrightarrow$ 可导

解析函数的性质

1) 两个解析函数的和、差、积、商仍为解析函数

$$[a\,f(z)+b\,g(z)]'=a\,f'(z)+b\,g'(z)$$

$$[f(z)g(z)]'=f'(z)g(z)+f(z)g'(z)$$

$$\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]'=\frac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{g^2(z)}$$

例如：

多项式函数在整个复平面上解析; 有理分式函数在除使分母为 0 的各

解析函数的性质（续）

2) 两个解析函数的复合函数仍为解析函数

设 $\zeta = g(z)$ 在区域 D 内解析，$w = f(\zeta)$ 在区域 G 内解析，并且 $g(D)$ 包含在 G 中，则 $w = f(g(z))$ 确定了一个 D 上的解析函数，且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} f(g(z)) = f'(g(z))g'(z) \quad \text{——链式法则}$$

3) 一个解析函数不可能仅在一个点或一条曲线上解析；所有解析点的集合必为开集。

思考

pp. 46 思考题二

1, 2

一个重要的问题:

对一个一般的函数 $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$

如何判别其解析（可导）性?

作业二-A（09/30 23:59 前提交至“学在浙大”）

pp. 47 习题二：2，4，5.(2), 6.(2)(3), 8.(3)(4)

§2.3 解析函数的充分必要条件

问题

$f(z)$ 解析 (可导) 与否与 u, v 的偏导数之间有什么关系?

定理 1: 函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在其定义域 D 内解析的充要条件是: $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$ 在 D 内可微, 并且满足 Cauchy-Riemann 方程:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

此时 $f'(z) = \partial u \quad + \mathrm{i}\, \partial v \quad = \partial v \quad - \mathrm{i}\, \partial u$

定理 1 的证明

必要性（$\Longrightarrow$）

设函数 $w=f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在区域 D 内解析。则存在复数 $f'(z)=a+\mathrm{i}b$ 和 $\varepsilon=\varepsilon_x+\mathrm{i}\varepsilon_y$，使得：

$$
\begin{aligned}
\Delta w &= f(z+\Delta z)-f(z)=[f'(z)+\varepsilon]\Delta z\,(\lim_{\Delta z\to 0}\varepsilon=0)\\
&= [(a+\mathrm{i}b)+(\varepsilon_x+\mathrm{i}\varepsilon_y)](\Delta x+\mathrm{i}\Delta y)\\
&= \Delta u+\mathrm{i}\Delta v
\end{aligned}
$$

其中

$$\Delta u=(a\Delta x-b\Delta y)+(\varepsilon_x\Delta x-\varepsilon_y\Delta y)=u_x\Delta x+u_y\Delta y+o(\rho)$$

$$\Delta v=(b\Delta x+a\Delta y)+(\varepsilon_y\Delta x+\varepsilon_x\Delta y)=v_x\Delta x+v_y\Delta y+o(\rho)$$

从而

$$\begin{cases} a &= u_x = & v_y \\ b &= v_x = & -u_y \end{cases} \implies f(z) = u_x + \mathrm{i}v_x = v_y - \mathrm{i}u_x$$

这对约束关系 $u_x = v_y; u_y = -v_x$

称为柯西-黎曼方程。

这样，我们就严格证明了：

$w = f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ 在 D 内一点 (x, y) 解析

$\implies u(x, y)$ 与 $v(x, y)$ 均在该点可微且它们满足 CR 方程

定理 1 的充分性证明（$\Longleftarrow$）

设实函数 $u(x, y)$ 与 $v(x, y)$ 在点 (x, y) 可微且满足 Cauchy-Riemann 方程，则有：

$$\begin{cases} \Delta u = (u_x + \varepsilon_1)\Delta x + (u_y + \varepsilon_2)\Delta y \\ \Delta v = (v_x + \varepsilon_3)\Delta x + (v_y + \varepsilon_4)\Delta y \\ \text{其中} \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0,\\ \Delta y \to 0}} \varepsilon_k = 0, \ k = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

从而

$$f(z + \Delta z) - f(z) = \Delta u + \mathrm{i}\Delta v = (u_x + \mathrm{i}v_x)\Delta x + (u_y + \mathrm{i}v_y)\Delta y + (\varepsilon_1 + \mathrm{i}\varepsilon_3)\Delta x + (\varepsilon_2 + \mathrm{i}\varepsilon_4)\Delta y$$

$$\overset{CR}{=} (u_x + \mathrm{i}v_x)\Delta x + (\mathrm{i}^2 v_x + \mathrm{i}u_x)\Delta y + (\varepsilon_1 + \mathrm{i}\varepsilon_3)\Delta x + (\varepsilon_2 + \mathrm{i}\varepsilon_4)\Delta y$$

$$= (u_x + \mathrm{i}v_x)(\Delta x + \mathrm{i}\Delta y) + (\varepsilon_1 + \mathrm{i}\varepsilon_3)\Delta x + (\varepsilon_2 + \mathrm{i}\varepsilon_4)\Delta y$$

从而

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} = u_x + \mathrm{i}v_x + (\varepsilon_1 + \mathrm{i}\varepsilon_3)\frac{\Delta x}{\Delta z} + (\varepsilon_2 + \mathrm{i}\varepsilon_4)\frac{\Delta y}{\Delta z}$$

$$\left(\left|\frac{\Delta x}{\Delta z}\right|, \left|\frac{\Delta y}{\Delta z}\right| \le 1\right) \to \frac{\partial u}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \Delta z \to 0$$

该极限即为 $f'(z)$

由此证明函数 $f(z)$ 在点 $z = x + \mathrm{i}y$ 处可导；而由 z 的任意性，可知 $w = f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ 在 D 内解析。

定理 2：函数 $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ 在 D 内一点可导的充要条件是：

1. 偏导数 u_x, u_y, v_x, v_y 在点 (x, y) 处存在；
2. $u(x, y), v(x, y)$ 在点 (x, y) 处满足 C-R 条件。

几个例子

例 1：已知 $f(z)=z^2$，求 $f'(z)$。$u=?$，$v=?$

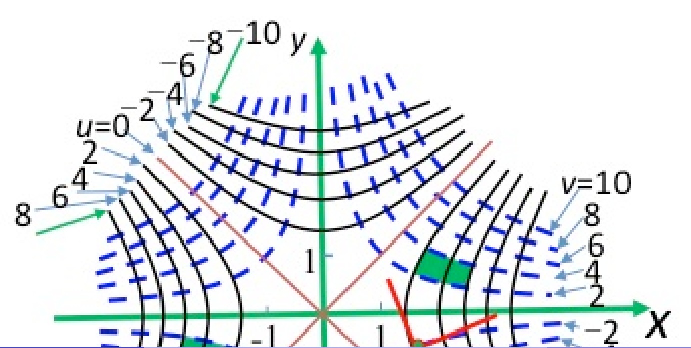
例 2：判断下列函数在何处可导，在何处解析：

$$1)\ w=\bar{z};\qquad 2)\ w=z\mathrm{Re}(z)$$

例 3：$f(z)=u+\mathrm{i}v$ 是区域 D 内的解析函数且 $f'(z)\neq 0$，证明：$u(x,y)=C_1$，$v(x,y)=C_2$ (C_1, C_2 为任意常数) 是区域内的正交曲线族(即两曲线在交点处切线垂直)。

例如 $f(z)=z^2, f'(z)\neq 0 (z\neq 0)$

两族分别以直线 $y=\pm x$ 和坐标轴为渐近线的等轴双曲线 $u=x^2-y^2=C_1, v=2xy=C_2$ 互相正交。



解析函数退化为常数的几个充分条件

1. 函数在区域内解析且导数恒为零
2. 解析函数的实部、虚部、模或辐角中有一恒为常数
3. 解析函数的共轭在区域内解析

§2.4 解析函数和调和函数的关系

定义 1： 实函数 $u(x,y)$ 为区域 D 内的调和函数$\Longleftrightarrow$ $u(x,y)$ 在 D 内有二阶连续偏导数且满足方程

$$\Delta u \equiv u_{xx} + u_{yy} = 0$$

该方程称为调和 (harmonic) 方程或Laplace 方程。

定理 1： $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ 是区域 D 内的解析函数 $\Longrightarrow$ u 和 v 是区域 D 内的调和函数。

证明： C-R 条件

反过来成立吗？

§2.4 解析函数和调和函数的关系 (续)

我们知道, $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ 是解析函数;
但是, $\overline{f}(z) = 2xy + \mathrm{i}(x^2 - y^2)$ 并不解析。问题在哪儿?

定义 2: 若 u 与 v 是区域 D 内的调和函数且满足 C-R 方程, 则称 v 为 u 的共轭调和函数。

定理 2: $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ 是区域 D 内解析
$\Longleftrightarrow$ v 为 u 的共轭调和函数。

注意顺序, 注意顺序, 注意顺序

解析函数的虚部为实部的共轭调和函数

利用这个性质

如果已知共轭调和函数中的一个，可利用 C-R 方程求得另一个，从而构成一个解析函数。

例 1：已知调和函数 $u(x, y) = x^2 - y^2 + xy$，求一解析函数 $f(z) = u + iv$ 使得 $f(0) = 0$。

解：三种方法。

初等函数

1. 指数函数

定义： $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$

$y = 0:\ \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x,\ \mathrm{e}^0 = 1;$

$x = 0:\ \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \cos y + \mathrm{i}\sin y$

性质

1. e^z 定义在全平面上，且 $\mathrm{e}^z \neq 0$
2. e^z 在全平面解析，且 $(\mathrm{e}^z)' = \mathrm{e}^z$
3. **加法定理：** $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ \mathrm{e}^{z_1} \cdot \mathrm{e}^{z_2} = \mathrm{e}^{z_1+z_2}$
4. e^z 是以 $2\pi\mathrm{i}$ 为基本周期的周期函数（$\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} = 1$）

例：求 $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^z}$ 的实部和虚部

解：

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\mathrm{e}^z} &= \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y)} \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x\cos y}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{e}^x\sin y} \\
&= \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x\cos y}\Big[\cos(\mathrm{e}^x\sin y)+\mathrm{i}\sin(\mathrm{e}^x\sin y)\Big]
\end{aligned}$$

2. 三角函数

定义 (正/余弦): $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2\,i}$, $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

性质

1. 欧拉公式对复数仍然成立，即 $e^{iz} = \cos z + i \sin z$
2. 全平面解析，且 $(\sin z)' = \cos z$, $(\cos z)' = -\sin z$
3. 除半角公式外，其余各种三角恒等式仍然成立
4. $\sin z$ 为奇函数，$\cos z$ 为偶函数
5. 以 2π 为基本周期的周期函数
6. 模可以大于 1 以至任意大（例如 $\cos i$, $\cos iy$)

3. 双曲函数

定义: $\operatorname{sh} z=\dfrac{\mathrm{e}^{z}-\mathrm{e}^{-z}}{2}, \quad \operatorname{ch} z=\dfrac{\mathrm{e}^{z}+\mathrm{e}^{-z}}{2}$

性质

1. 全平面解析，且 $(\operatorname{sh} z)'=\operatorname{ch} z$, $(\operatorname{ch} z)'=\operatorname{sh} z$
2. $\operatorname{sh} z$ 为奇函数，$\operatorname{ch} z$ 为偶函数
3. 以 $2\pi\mathrm{i}$ 为基本周期的周期函数
4. 与三角函数的关系：

   $\operatorname{sh}\mathrm{i}z=\mathrm{i}\sin z, \quad \operatorname{ch}\mathrm{i}z=\mathrm{i}\cos z$

   $\sin\mathrm{i}z=\mathrm{i}\operatorname{sh} z, \quad \cos\mathrm{i}z=\mathrm{i}\operatorname{ch} z$

例 1：解方程 $\sin z = \mathrm{i}\,\mathrm{sh}\,1$

解:
$$\begin{aligned}
\sin z &= \sin(x+\mathrm{i}y) = \sin x\cos \mathrm{i}y + \cos x\sin \mathrm{i}y \\
&= \sin x\,\mathrm{ch}\,y + \mathrm{i}\cos x\,\mathrm{sh}\,y = \mathrm{i}\mathrm{sh}\,1 \\
&\Longrightarrow \begin{cases} \sin x\,\mathrm{ch}\,y = 0, & (1) \\ \cos x\,\mathrm{sh}\,y = \mathrm{sh}\,1, & (2) \end{cases}
\end{aligned}$$

$(1) \Longrightarrow \sin x = 0\ (\mathrm{ch}\,y \neq 0) \Longrightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z};$

代入 $(2) \Longrightarrow \mathrm{sh}\,y = (-1)^k \mathrm{sh}\,1 \Longrightarrow y = (-1)^k + 2m\pi\mathrm{i}$

综上所述:

$\Big\{\ 2n\pi + \mathrm{i}$

4. 对数函数（指数函数的逆函数）

定义: 若 w 满足: $\mathrm{e}^w = z(z \neq 0)$, 则 $w = \mathrm{Ln}\ z(z \neq 0)$

设 $w = u + \mathrm{i}v$, $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \Longrightarrow \mathrm{e}^{u+\mathrm{i}v} = \mathrm{e}^u\mathrm{e}^{\mathrm{i}v} = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \mathrm{e}^u = r \Longrightarrow u = \ln r = \ln|z| \\ v = \theta = \mathrm{Arg}\, z = \arg z + 2k\pi \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow w = \mathrm{Ln}\, z \ &= \ \ln|z| + \mathrm{i}(\arg z + 2k\pi) \\ &:= \ \ln z + 2k\pi\mathrm{i} \ \ (\text{多值性}) \end{aligned}$$

其中 $\ln z = \ln|z| + \mathrm{i}\arg z$ 称作对数函数的主值支。

例如:

对数函数的性质

1. $\mathrm{Ln}\, z$ 的定义域为 $\{z : 0 < |z| < +\infty\}$;
2. $\mathrm{Ln}\, z$ 为无穷多值函数，每两个值相差 $2\pi\mathrm{i}$ 的整数倍;
3. $\forall z_1,\ z_2 \neq 0 : \mathrm{Ln}\,(z_1 z_2) = \mathrm{Ln}\, z_1 + \mathrm{Ln}\, z_2$,
$$\mathrm{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Ln}\, z_1 - \mathrm{Ln}\, z_2;$$
4. 除去原点与负实轴(??), $\ln z$在复平面内处处解析:
$(\ln z)' = (\mathrm{Ln}\, z)' = 1/z$
注： 今后我们应用对数函数 $\mathrm{Ln}\, z$ 时，指的都是它在除去原点及负实轴的某一单值分支(固定 k)

5. 幂函数

定义: $w = z^a = \mathrm{e}^{a\,\mathrm{Ln}\,z}$——主值为 $\mathrm{e}^{a\ln z}$ 的多值函数

当 $a = n \in \mathbb{Z}$ 时

$$\begin{aligned} z^n &= \mathrm{e}^{n(\ln|z| + \mathrm{i}\arg z + 2k\pi\mathrm{i})} = \mathrm{e}^{n\ln|z|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n\arg z} \\ &= |z|^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n\arg z} \end{aligned}$$

——单值函数

当 $a = 1/n,\ n \in \mathbb{Z}$ 时

$$z^{\frac{1}{n}} = |z|^{\frac{1}{n}} \exp(\mathrm{i}\frac{\arg z + 2k\pi}{n}) = \sqrt[n]{z}$$

——n 值函数

一些例子

例 2：求 $1^{\sqrt{2}}$ 和 i^{i} 的值

解:

$$\begin{aligned} 1^{\sqrt{2}} &= \mathrm{e}^{\sqrt{2}\ln 1} = \mathrm{e}^{\sqrt{2}[\ln|1|+\mathrm{i}(0+2k\pi)]} = \mathrm{e}^{2\sqrt{2}k\pi\mathrm{i}} \\ &= \cos(2\sqrt{2}k\pi) + \mathrm{i}\sin(2\sqrt{2}k\pi), \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{i}^{\mathrm{i}} &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ln\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}[\ln|\mathrm{i}|+\mathrm{i}(\frac{\pi}{2}+2k\pi)]} \\ &= \mathrm{e}^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

——i^{i} 是一个正实数，主值为 $\mathrm{e}^{-\pi/2}$

一些例子

例 3：求解以下方程：

$$1)\ \ln z = \frac{\pi \mathrm{i}}{2};\quad 2)\ \ln z = 1 + \pi \mathrm{i};\quad 3)\ \ln z = 2 - \frac{\pi \mathrm{i}}{6}$$

解：1) $z = \mathrm{e}^{\frac{\pi \mathrm{i}}{2}} = \mathrm{i}$

2) $z = \mathrm{e}^{1+\pi \mathrm{i}} = \mathrm{e} \cdot \mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}} = -\mathrm{e}$

3) $z = \mathrm{e}^{2-\frac{\pi \mathrm{i}}{6}} = \mathrm{e}^2\Big(\cos\frac{\pi \mathrm{i}}{6} + \sin\frac{\pi \mathrm{i}}{6}\Big) = \frac{(\sqrt{3} - \mathrm{i})\mathrm{e}^2}{2}$

作业二-B （09/30 23:59 前提交至“学在浙大”）

pp. 47 习题二： 9, 10.(2), 13, 14.(1)(3), 16.(1), 17.(2)(4), 18.(2), 19.(2), 20.(1)(2)