一、

1. 求$\ln\left(-\sqrt{3}+\mathrm{i}\right)$的实部与虚部.

2. 解方程$\tan z=2-\mathrm{i}$.

3. 求$\int_C \bar{z}\mathrm{d}z$，其中$C$为连接$1+\mathrm{i}$与 2i 的线段.

4. 写出$f(z)=\dfrac{1}{1-z}\sin\dfrac{1}{z}$的孤立奇点，并求孤立奇点处的留数.

5. 求$\oint\limits_{|z|=4}\dfrac{|z|}{\sin z}\mathrm{d}z$.

6. 求$\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\cos 2x}{x^2-2x+2}\mathrm{d}x$.

二、

$f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$为解析函数，

(1) 写出 C-R 方程.

(2) 若$u+v=\mathrm{e}^y(\cos x-\sin x)+4xy$，且$f(0)=1$，求$f(z)$.

三、

1. 求$f(z)=\dfrac{1}{z^4(z-1)(z-2)}$在圆环$1<|z|<2$内的洛朗级数.

2. 求$f(z)=\tan z$的麦克劳林级数（写到z^5为止），并指出收敛半径.

四、

1. 求把区域$\left\{z\middle||z|<1,-\dfrac{\pi}{4}<\arg z<\dfrac{\pi}{4}\right\}$映成$W$平面的上半平面的保角映射.

2. 求将上半平面映成W平面的单位圆的保角映射，其中$w(1)=1$，$w(\mathrm{i})=\dfrac{1}{2}$.

五、

1. 已知$f(t)=t\int_0^t \mathrm{e}^{t-\tau}\sin 2\tau\mathrm{d}\tau$，求$f(t)$的拉普拉斯变换$L\left[f(t)\right]$.

2. 已知$F(s)=\dfrac{\mathrm{e}^{-s}}{s^2\left(s^2+1\right)}$，求$F(s)$的拉普拉斯逆变换$L^{-1}\left[F(s)\right]$.

六、

$f(z)$在闭区域$\overline{D}=\left\{z\middle||z-z_0|\le R\right\}$上解析，且$\left|f(z_0)\right|=\max\left|f(z)\right|$，求证在区域$D$内$\left|f(z)\right|$恒为常数.

我自己的答案（仅供参考，如有不同，相信自己）

一、

1. $\mathrm{Re}=\ln 2$； $\mathrm{Im}=\frac{5}{6}\pi$.

2. $z_k=\left(\frac{3}{8}\pi+k\pi\right)+\mathrm{i}\cdot\frac{1}{4}\ln 2$， $k\in\mathbb{Z}$.

3. $\int_C \bar{z}\mathrm{d}z=1+2\mathrm{i}$.

4. 孤立奇点： $z=0$ （本性奇点）与 $z=1$ （单极点）； $\mathrm{Res}(f;0)=\sin 1$，

$\mathrm{Res}(f;1)=-\sin 1$.

5. $\oint\limits_{|z|=4}\frac{|z|}{\sin z}\mathrm{d}z=-8\pi\mathrm{i}$.

6. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x^2-2x+2}\mathrm{d}x=\frac{\pi\cos 2}{\mathrm{e}^2}$.

二、

(1) $\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$.

(2) $f(z)=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}+(1-\mathrm{i})z^2$.

三、

1. $f(z)=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n-4}}{2^{n+1}}-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+5}}$， $1<|z|<2$.

2. $\tan z=z+\frac{z^3}{3}+\frac{2}{15}z^5+\cdots$； $R=\frac{\pi}{2}$.

四、

1. $w=\left(\frac{z^2-\mathrm{i}}{z^2+\mathrm{i}}\right)^2$.

2. $w=\frac{(2-\mathrm{i})z+(1-2\mathrm{i})}{(1-2\mathrm{i})z+(2-\mathrm{i})}$.

五、

1. $L\left[f(t)\right]=\dfrac{2\left(3s^2-2s+4\right)}{\left(s^2+4\right)^2(s-1)^2}$.

2. $L^{-1}\left[F(s)\right]=\left[t-1+\sin(t-1)\right]u(t-1)$.

六、

证：

$f(z)$解析$\Rightarrow f(z)$连续

由 Cauchy 积分公式$f(z_0)=\dfrac{1}{2\pi \mathrm{i}}\displaystyle\oint_{|z-z_0|=r<R}\dfrac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z$

$$\left|f(z_0)\right|\le\frac{1}{2\pi}\oint_{|z-z_0|=r<R}\left|\frac{f(z)}{z-z_0}\right|\mathrm{d}z=\frac{1}{2\pi r}\oint_{|z-z_0|=r<R}\left|f(z)\right|\mathrm{d}z\le\frac{1}{2\pi r}\oint_{|z-z_0|=r<R}\left|f(z_0)\right|\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{2\pi r}\cdot\left|f(z_0)\right|\cdot 2\pi r=\left|f(z_0)\right|$$

$$\therefore\frac{1}{2\pi r}\oint_{|z-z_0|=r<R}\left|f(z)\right|\mathrm{d}z=\left|f(z_0)\right|$$

假设在圆周$|z-z_0|=r$上存在z_1，使得$\left|f(z_1)\right|\ne\left|f(z_0)\right|$，则$\left|f(z_1)\right|<\left|f(z_0)\right|$

由$f(z)$的连续性，知$\exists D(z_1,\delta)$，$\forall z\in D(z_1,\delta)$，$\left|f(z)\right|<\left|f(z_0)\right|$

记$|z-z_0|=r$在$D(z_1,\delta)$内的部分为C_1，在$D(z_1,\delta)$外的部分为C_2，则有

$$2\pi r\left|f(z_0)\right|=\int_{C_1}\left|f(z)\right|\mathrm{d}z+\int_{C_2}\left|f(z)\right|\mathrm{d}z<\int_{C_1}\left|f(z_0)\right|\mathrm{d}z+\int_{C_2}\left|f(z_0)\right|\mathrm{d}z=2\pi r\left|f(z_0)\right|$$

矛盾！

故假设不成立，即圆周$|z-z_0|=r$上每一点都满足$\left|f(z)\right|=\left|f(z_0)\right|$

由r的任意性知，在区域D内$\left|f(z)\right|$均为常数$\left|f(z_0)\right|$，证毕.