第5章 操作臂动力学

本章提纲

- 概述
- 刚体的加速度
- 质量分布
- 牛顿欧拉方程
- 操作臂动力学方程的结构
- 拉格朗日方程
- 笛卡尔状态空间方程
- 笛卡尔位形空间中的力矩方程

概述

与动力学有关的两个问题：

- 给定轨迹，$\Theta, \dot{\Theta}, \ddot{\Theta}$，求出期望的关节力矩矢量$\tau$

- 施加一组关节力矩，计算机构如何运动，即已知关节力矩τ，计算出操作臂的运动结果$\Theta, \dot{\Theta}, \ddot{\Theta}$

刚体的加速度

在任一瞬时，对刚体的线速度和角速度进行求导，可分别得到线加速度和角加速度：

向量 ${}^{B}V_{Q}$表示Q点相对于坐标系$\{B\}$的线速度

$$ {}^{B}\dot{V}_{Q}=\frac{d}{dt}\,{}^{B}V_{Q}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{{}^{B}V_{Q}(t+\Delta t)-{}^{B}V_{Q}(t)}{\Delta t} $$

向量 ${}^{B}\dot{V}_{Q}$表示Q点相对于坐标系$\{B\}$的线加速度

向量 ${}^{A}\Omega_{B}$表示刚体的联体坐标系$\{B\}$相对于坐标系$\{A\}$的角速度

$$ {}^{A}\dot{\Omega}_{B}=\frac{d}{dt}\,{}^{A}\Omega_{B}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{{}^{A}\Omega_{B}(t+\Delta t)-{}^{A}\Omega_{B}(t)}{\Delta t} $$

向量 ${}^{A}\dot{\Omega}_{B}$表示刚体的联体坐标系$\{B\}$相对于坐标系$\{A\}$的角加速度

刚体的加速度

当微分的参考坐标系为世界坐标系{*U*}时，用下列符号表示刚体的加速度:

$$\dot{\upsilon}_A = {}^U\dot{V}_{AORG}$$
$$\dot{\omega}_A = {}^U\dot{\Omega}_A$$

坐标系{*A*}与刚体固连，*AORG*表示{*A*}的原点。

$$ {}^{A}V_Q = {}^{A}V_{BORG} + {}^{A}_{B}R\,{}^{B}V_Q + {}^{A}\Omega_B \times {}^{A}_{B}R\,{}^{B}Q $$

$$ {}^{A}_{B}S = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{bmatrix} \qquad {}^{A}\Omega_B = \begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix} $$

刚体的加速度

● 线加速度

向量${}^{B}Q$表示Q点在坐标系$\{B\}$ 中的位置

正交矩阵${}^{A}_{B}R$表示坐标系$\{B\}$ 相对于坐标系$\{A\}$ 的旋转矩阵

注意到： ${}^{A}_{B}\dot{R} = {}^{A}_{B}S\,{}^{A}_{B}R$ **，因此，针对位置向量：**

$$ \frac{d}{dt}({}^{A}_{B}R\,{}^{B}Q) = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}\dot{Q} + {}^{A}_{B}\dot{R}\,{}^{B}Q = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}V_Q + {}^{A}_{B}S\,{}^{A}_{B}R\,{}^{B}Q = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}V_Q + {}^{A}\Omega_B \times {}^{A}_{B}R\,{}^{B}Q $$

同理，针对速度向量：

$$ \frac{d}{dt}({}^{A}_{B}R\,{}^{B}V_Q) = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}\dot{V}_Q + {}^{A}\Omega_B \times {}^{A}_{B}R\,{}^{B}V_Q $$

则：

$$ {}^{A}\dot{V}_Q = {}^{A}\dot{V}_{BORG} + \frac{d}{dt}({}^{A}_{B}R\,{}^{B}V_Q) + {}^{A}\dot{\Omega}_B \times {}^{A}_{B}R\,{}^{B}Q + {}^{A}\Omega_B \times \frac{d}{dt}({}^{A}_{B}R\,{}^{B}Q) $$

$$ = {}^{A}\dot{V}_{BORG} + {}^{A}_{B}R\,{}^{B}\dot{V}_Q + {}^{A}\Omega_B \times {}^{A}_{B}R\,{}^{B}V_Q + {}^{A}\dot{\Omega}_B \times {}^{A}_{B}R\,{}^{B}Q + {}^{A}\Omega_B \times ({}^{A}_{B}R\,{}^{B}V_Q + {}^{A}\Omega_B \times {}^{A}_{B}R\,{}^{B}Q) $$

$$ = {}^{A}\dot{V}_{BORG} + {}^{A}_{B}R\,{}^{B}\dot{V}_Q + 2\,{}^{A}\Omega_B \times {}^{A}_{B}R\,{}^{B}V_Q + {}^{A}\dot{\Omega}_B \times {}^{A}_{B}R\,{}^{B}Q + {}^{A}\Omega_B \times ({}^{A}\Omega_B \times {}^{A}_{B}R\,{}^{B}Q) $$

刚体的加速度

线加速度公式：

$$\boxed{{}^{A}\dot{V}_{Q} = {}^{A}\dot{V}_{BORG} + {}^{A}_{B}R\,{}^{B}\dot{V}_{Q} + 2\,{}^{A}\Omega_{B} \times {}^{A}_{B}R\,{}^{B}V_{Q} + {}^{A}\dot{\Omega}_{B} \times {}^{A}_{B}R\,{}^{B}Q + {}^{A}\Omega_{B} \times ({}^{A}\Omega_{B} \times {}^{A}_{B}R\,{}^{B}Q)}$$

当 ${}^{B}Q$ 是常数，

$${}^{B}V_{Q} = {}^{B}\dot{V}_{Q} = 0$$

加速度的推导公式化简为:

$${}^{A}\dot{V}_{Q} = {}^{A}\dot{V}_{BORG} + {}^{A}\dot{\Omega}_{B} \times {}^{A}_{B}R\,{}^{B}Q + {}^{A}\Omega_{B} \times ({}^{A}\Omega_{B} \times {}^{A}_{B}R\,{}^{B}Q)$$

$$ {}^A\Omega_C = {}^A\Omega_B + {}^A_BR\,{}^B\Omega_C $$

$$ \frac{d}{dt}\left({}^A_BR\,{}^BV_Q\right) = {}^A_BR\,{}^B\dot{V}_Q + {}^A\Omega_B \times {}^A_BR\,{}^BV_Q $$

刚体的加速度

- **角加速度**

假设 $\{B\}$相对于$\{A\}$以 ${}^A\Omega_B$转动，同时 $\{C\}$ 相对于 $\{B\}$ 以 ${}^B\Omega_C$ 转动

在$\{A\}$中进行矢量叠加: $$ {}^A\Omega_C = {}^A\Omega_B + {}^A_BR\,{}^B\Omega_C $$

求导， 得到: $$ {}^A\dot{\Omega}_C = {}^A\dot{\Omega}_B + \frac{d}{dt}\left({}^A_BR\,{}^B\Omega_C\right) $$

因为有 $$ \frac{d}{dt}\left({}^A_BR\,{}^B\Omega_C\right) = {}^A_BR\,{}^B\dot{\Omega}_C + {}^A\Omega_B \times {}^A_BR\,{}^B\Omega_C $$

于是得到**角加速度公式**

$$ \boxed{{}^A\dot{\Omega}_C = {}^A\dot{\Omega}_B + {}^A_BR\,{}^B\dot{\Omega}_C + {}^A\Omega_B \times {}^A_BR\,{}^B\Omega_C} $$

质量分布

惯性矩：又称转动惯量，是一个物体对于其旋转运动的惯性大小的量度。

- 一个质点，在定轴转动时，惯性矩为

$$I = mr^2$$

其中，***m***是质点质量，***r***是质点到转轴的距离。

- 对于多个质点的系统，惯性矩为

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2$$

- 对于刚体，用积分计算，惯性矩为

$$I = \int \rho r^2 dV$$

其中，***ρ***是刚体密度，***dV***是体积微分。

质量分布

动量： $p = mv$，牛顿第二定律也可以表示为：$F = ma = \frac{dp}{dt}$ ，即物体动量的变化率等于施加到物体上的合力。

力矩： $\tau = r \times F$

角动量： 又称**动量矩**，质点动量***p***对**O**点的动量矩，$L = r \times p$ ，必须指明参考点，角动量才有意义。

质点的角动量定理： 由牛顿第二定律容易得到 $\tau = \frac{dL}{dt}$

质点系角动量： 系统内所有质点对同一参考点角动量的矢量和。

$$L = \sum r_i \times (m_i v_i)$$

第***i***个质点在惯性坐标系和质心坐标系（原点在质心处）的变换关系为

$$r_i = r_i' + r_c \qquad v_i = v_i' + v_c$$

则质点系角动量为

$$L = \sum m_i r_i' \times v_i' + m r_c \times v_c = L' + L_c$$

其中，L' 是质心坐标系中质点系针对质心的总角动量，称为**固有角动量或自转角动量**。L_c是惯性坐标系中质量集中在质心后，质心对参考点的角动量。

质量分布

定轴转动刚体的角动量：若以参考点为坐标原点O，刚体绕着Oz轴以角速度ω转动，刚体对Oz轴的转动惯量为I，刚体对O点的角动量为L，对于定轴转动，将L沿Oz轴的分量 L_z 称为刚体绕定轴的角动量。

$$L_z = \int r \times v dm = \int r \times (\omega \times r) dm$$
$$= \int \left[(r \cdot r) \omega - (r \cdot \omega) r \right] dm$$
$$= \left(\int r^2 dm \right) \omega = I \omega$$

质点系的角动量定理：

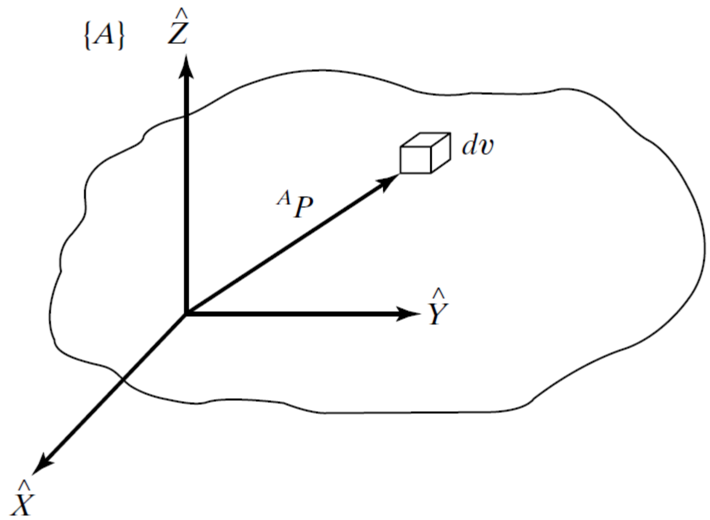
$$\tau_{外} = \frac{dL_{总}}{dt}$$

即物体角动量的变化率等于施加在物体上的总外力矩。

质量分布

惯性张量：物体转动惯量的推广，表征刚体质量分布。惯性张量可在任意坐标系中定义，但一般在固连于刚体上的坐标系{A}中定义：

$$^{A}I = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix}$$



惯量矩：

$$I_{xx} = \iiint_V (y^2 + z^2)\rho dv$$

$$I_{yy} = \iiint_V (x^2 + z^2)\rho dv$$

$$I_{zz} = \iiint_V (x^2 + y^2)\rho dv$$

惯量积：

$$I_{xy} = \iiint_V xy\rho dv$$

$$I_{xz} = \iiint_V xz\rho dv$$

$$I_{yz} = \iiint_V yz\rho dv$$

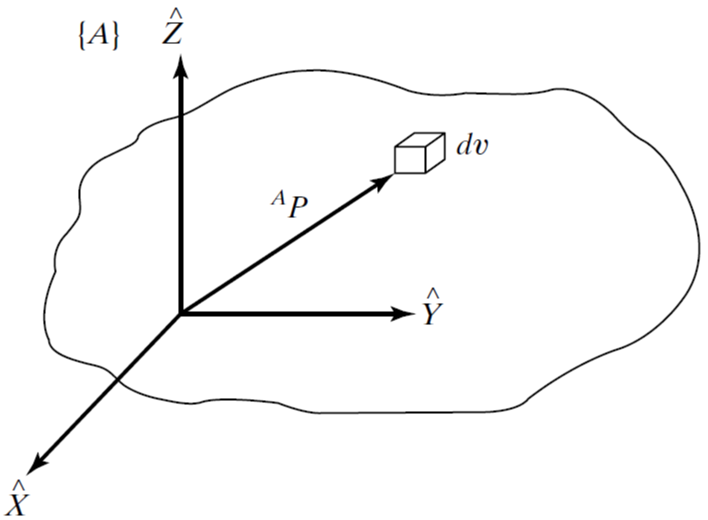
刚体由单元体dv组成，单位体的密度为ρ

每个单位体的位置为$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$,$V$表示刚体所占空间

质量分布

刚体的角动量： 若刚体在固连于刚体上的坐标系{A}中的惯性张量为 ${}^{A}I$ ，刚体瞬时角速度为 $\omega=\left(\omega_x,\quad \omega_y,\quad \omega_z\right)^T$，则刚体针对坐标原点的角动量为

$$ {}^{A}L=\int r\times v dm=\int r\times\left(\omega\times r\right)dm $$



则X轴分量为：

$$ \begin{aligned} {}^{A}L_x &= \int\left[y\left(\omega\times r\right)_z - z\left(\omega\times r\right)_y\right]dm \\ &= \int\left(y\omega_x y - y\omega_y x + z\omega_x z - z\omega_z x\right)dm \\ &= \int\left[\omega_x\left(y^2+z^2\right)-\omega_y xy-\omega_z xz\right]dm \\ &= \omega_x\int\left(y^2+z^2\right)dm-\omega_y\int xydm-\omega_z\int xzdm \end{aligned} $$

同理，Y轴和Z轴分量为：

$$ {}^{A}L_y=-\omega_x\int xydm+\omega_y\int\left(x^2+z^2\right)dm-\omega_z\int yzdm $$

$$ {}^{A}L_z=-\omega_x\int xzdm-\omega_y\int yzdm+\omega_z\int\left(x^2+y^2\right)dm $$

所以，刚体针对坐标原点的角动量：

$$ {}^{A}L={}^{A}I\omega $$

质量分布

例: 已知长方体密度均匀，大小为ρ，如图建立坐标系，求此坐标系下长方体的惯性张量。

解： 计算 I_{xx} ：

$$dv = dxdydz$$

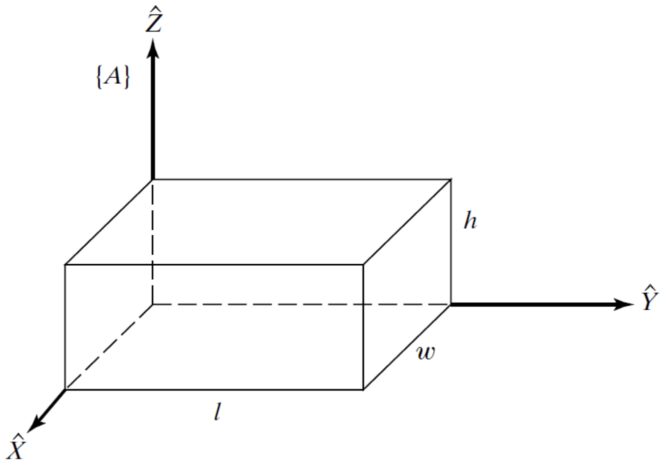
$$I_{xx} = \int_0^h\int_0^l\int_0^w (y^2+z^2)\rho dxdydz = \int_0^h\int_0^l (y^2+z^2)w\rho dydz$$

$$= \int_0^h (\frac{l^3}{3}+z^2 l)w\rho dz = (\frac{hl^3w}{3}+\frac{h^3lw}{3})\rho = \frac{m}{3}(l^2+h^2)$$

同理：

$$I_{yy} = \frac{m}{3}(w^2+h^2)$$

$$I_{zz} = \frac{m}{3}(l^2+w^2)$$



质量分布

$$I_{xy}=\int_0^h\int_0^l\int_0^w xy\rho dxdydz=\int_0^h\int_0^l \frac{w^2}{2}y\rho dydz$$

$$=\int_0^h \frac{w^2l^2}{4}\rho dz=\frac{m}{4}wl$$

$$I_{xz}=\frac{m}{4}hw$$

$$I_{yz}=\frac{m}{4}hl$$

物体的惯性张量阵:

$${}^{A}I=\begin{pmatrix} \frac{m}{3}(l^2+h^2) & -\frac{m}{4}wl & -\frac{m}{4}hw \\ -\frac{m}{4}wl & \frac{m}{3}(w^2+h^2) & -\frac{m}{4}hl \\ -\frac{m}{4}hw & -\frac{m}{4}hl & \frac{m}{3}(l^2+w^2) \end{pmatrix}$$

惯性张量是坐标系位姿的函数.

必存在一个坐标系使得惯量积等于0，该坐标系的轴称为**主轴**，相应的惯量矩称为**主惯量矩**

质量分布

平行移轴定理：假设{C}是以刚体质心为原点的坐标系，{A}为任意平移后的坐标系，则

$$^{A}I_{xx} = {}^{C}I_{xx} + m(y_c^2 + z_c^2) \qquad ^{A}I_{yy} = {}^{C}I_{yy} + m(x_c^2 + z_c^2) \qquad ^{A}I_{zz} = {}^{C}I_{zz} + m(x_c^2 + y_c^2)$$

$$^{A}I_{yz} = {}^{C}I_{yz} - m y_c z_c \qquad ^{A}I_{xz} = {}^{C}I_{xz} - m x_c z_c \qquad ^{A}I_{xy} = {}^{C}I_{xy} - m x_c y_c$$

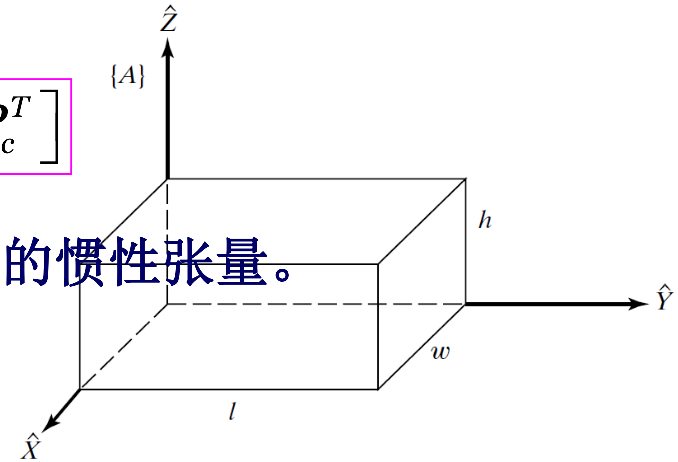
矢量 $P_c = \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix}$ 表示刚体质心在坐标系{A}中的位置。

矢量矩阵形式：

$$\boxed{^{A}I = {}^{C}I + m\left[P_c^T P_c I_3 - P_c P_c^T \right]}$$

质量分布

$$ {}^{A}I = {}^{C}I + m\left[P_c^T P_c I_3 - P_c P_c^T\right] $$



例: 当坐标系{C}原点在刚体质心时，求图中刚体的惯性张量。

解:

$$ P_c = \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} w \\ l \\ h \end{bmatrix} $$

$$ m\left[P_c^T P_c I_3 - P_c P_c^T\right] = \begin{bmatrix} \frac{m}{4}(l^2+h^2) & -\frac{m}{4}wl & -\frac{m}{4}wh \\ -\frac{m}{4}wl & \frac{m}{4}(w^2+h^2) & -\frac{m}{4}lh \\ -\frac{m}{4}wh & -\frac{m}{4}lh & \frac{m}{4}(w^2+l^2) \end{bmatrix} $$

坐标系{C}的坐标轴是刚体的主轴

$$ {}^{A}I = \begin{bmatrix} \frac{m}{3}(l^2+h^2) & -\frac{m}{4}wl & -\frac{m}{4}wh \\ -\frac{m}{4}wl & \frac{m}{3}(w^2+h^2) & -\frac{m}{4}lh \\ -\frac{m}{4}wh & -\frac{m}{4}lh & \frac{m}{3}(w^2+l^2) \end{bmatrix} $$

$$ {}^{C}I = \frac{m}{12}\begin{bmatrix} l^2+h^2 & & \\ & w^2+h^2 & \\ & & w^2+l^2 \end{bmatrix} $$

质量分布

坐标系旋转：若坐标系{*B*}与{*A*}共原点，即它们之间的关系为旋转，{*B*}针对{*A*}的旋转矩阵为 ${}^A_BR$，各自坐标系下的角动量表示分别为 ${}^BL$ 和 ${}^AL$ ，则

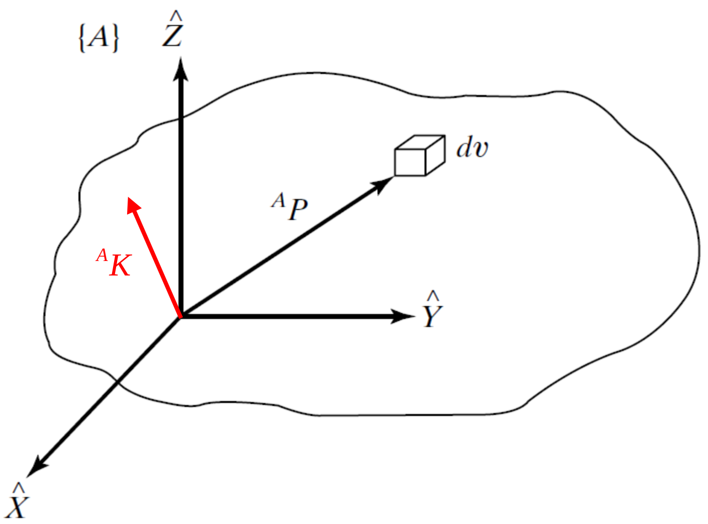
$$ {}^AL = {}^A_BR\,{}^BL = {}^A_BR\left({}^BI\,{}^B\omega\right) = {}^AI\,{}^A\omega = {}^AI\,{}^A_BR\,{}^B\omega $$

因此：

$$ {}^A_BR\,{}^BI = {}^AI\,{}^A_BR $$

所以有：

$$ {}^BI = {}^A_BR^T\,{}^AI\,{}^A_BR = {}^B_AR\,{}^AI\,{}^A_BR $$



此即为坐标系旋转情况下的惯性张量变换公式

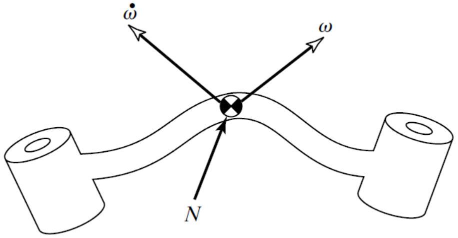
质量分布

刚体上的坐标系{*C*}固连于刚体，即为固连坐标系，坐标原点是刚体上的点*O*，则在{*C*}中刚体的惯性张量${}^{C}I$是固定值。

若刚体在惯性坐标系{*A*}中绕*O*点进行旋转，一般在{*A*}中刚体的惯性张量${}^{A}I$是变化的。

由角动量定理

$$^{A}\tau = \frac{d\,^{A}L}{dt} = \frac{d\left(^{A}I\,^{A}\omega\right)}{dt}$$



注意 $\quad {}^{A}I = {}^{A}_{C}R\,{}^{C}I\,{}^{C}_{A}R$，${}^{A}\omega = {}^{A}_{C}R\,{}^{C}\omega$ ，${}^{A}\tau = {}^{A}_{C}R\,{}^{C}\tau$

则

$$\frac{d\left(^{A}I\,^{A}\omega\right)}{dt} = \frac{d\left({}^{A}_{C}R\,^{C}I\,^{C}\omega\right)}{dt} = {}^{A}_{C}R\,^{C}I\,^{C}\dot{\omega} + {}^{A}_{C}\dot{R}\,^{C}I\,^{C}\omega$$

$${}^{A}_{C}\dot{R} = {}^{A}_{C}S\,{}^{A}_{C}R$$

$${}^{A}_{C}SP = {}^{A}\Omega_{C} \times P$$

由 $\quad {}^{A}_{C}\dot{R}\,^{C}I\,^{C}\omega = {}^{A}_{C}R\,^{C}\omega \times {}^{C}I\,^{C}\omega \quad$ 可以得到

$$^{C}\tau = {}^{C}I\,^{C}\dot{\omega} + {}^{C}\omega \times {}^{C}I\,^{C}\omega$$

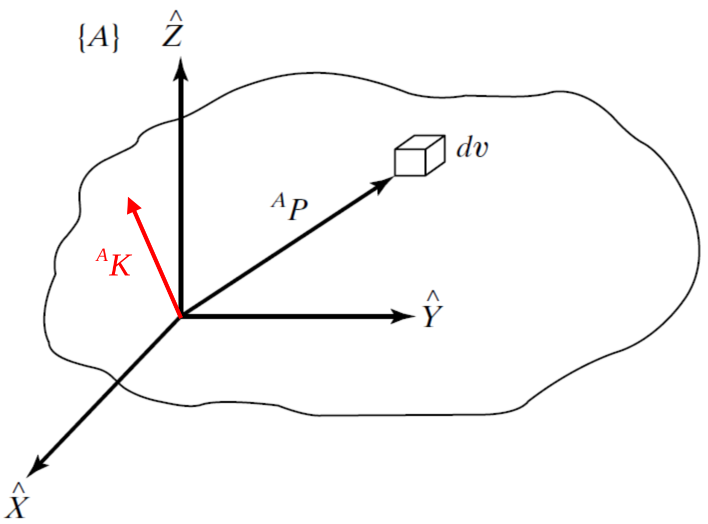
此即在固连坐标系上描述旋转运动的**欧拉方程**

质量分布

惯性张量的一些性质：

- 如果坐标系两个坐标轴构成的平面为刚体质量分布的对称平面，则正交于这个对称平面的坐标轴与另一个坐标轴的惯量积为0
- 惯量矩是正值，惯量积可正可负
- 参考坐标系姿态变化后，三个惯量矩的和保持不变
- 惯性张量的特征值为刚体的主惯量矩，相应的特征矢量为主轴
- 设{A}为刚体的联体坐标系，${}^{A}K$ 是{A}中过原点的某个单位向量，则刚体绕轴 ${}^{A}K$ 的转动惯量

$$J_K = {}^{A}K^{\mathrm{T}}\,{}^{A}I\,{}^{A}K \in \mathbb{R}$$



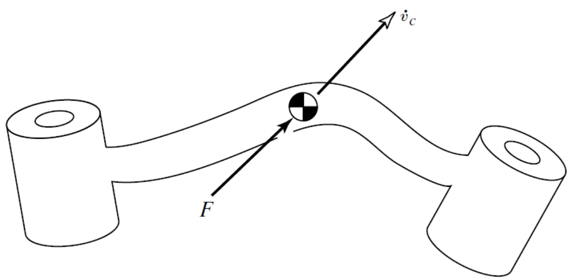
牛顿欧拉方程

牛顿方程和欧拉方程

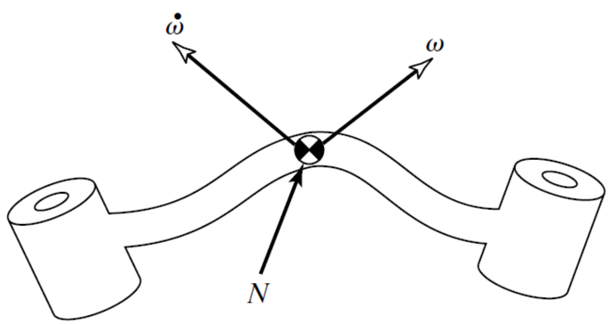
– 要使连杆改变运动状态，必须对连杆进行加速和减速运动。连杆运动所需的力是关于连杆期望加速度及其质量分布的函数。

– 牛顿方程以及描述旋转运动的欧拉方程描述了力、惯量和加速度之间的关系。

牛顿方程: $F = m\dot{v}_C$



欧拉方程：${}^{C}N = {}^{C}I\,{}^{C}\dot{\omega} + {}^{C}\omega \times {}^{C}I\,{}^{C}\omega$



- $\{C\}$是固连于连杆的坐标系
- 连杆的质心是$\{C\}$的原点

牛顿欧拉方程

- 向外迭代计算各连杆的速度和加速度
  - 为了计算作用在连杆上的力，需要计算操作臂每个连杆在某一时刻的角速度、线加速度和角加速度。
  - 可应用迭代方法完成这些计算。首先对连杆1进行计算，接着计算下一个连杆，这样一直向外迭代到最后一个连杆。
  - 计算出每个连杆质心的线加速度和角加速度之后，运用牛顿欧拉公式计算出作用在连杆质心上的力和力矩 。

$$
{}^{i}_{i+1}T = \begin{bmatrix} \cos\theta_{i+1} & -\sin\theta_{i+1} & 0 & a_i \\ \sin\theta_{i+1}\cos\alpha_i & \cos\theta_{i+1}\cos\alpha_i & -\sin\alpha_i & -\sin\alpha_i d_{i+1} \\ \sin\theta_{i+1}\sin\alpha_i & \cos\theta_{i+1}\sin\alpha_i & \cos\alpha_i & \cos\alpha_i d_{i+1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

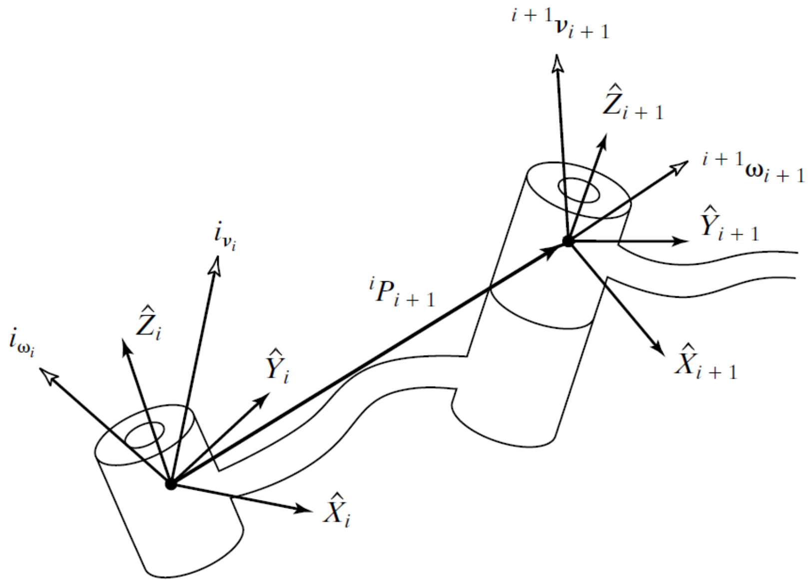
$$
{}^{A}\dot{\Omega}_C = {}^{A}\dot{\Omega}_B + {}^{A}_{B}R\,{}^{B}\dot{\Omega}_C + {}^{A}\Omega_B \times {}^{A}_{B}R\,{}^{B}\Omega_C
$$

第i+1关节为旋转关节

角速度在连杆之间的“传递问题”：

$$
{}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\omega_i + \dot{\theta}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}
$$

向量 ${}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{T}$



连杆之间的角加速度传递:

{A}={0},{B}={i},{C}={i+1}

$$
\dot{\omega}_{i+1} = \dot{\omega}_i + {}^{0}_{i}R\,{}^{i}\dot{\Omega}_{i+1} + \omega_i \times {}^{0}_{i}R\,{}^{i}\Omega_{i+1}
$$

$$
{}^{i}\Omega_{i+1} = \dot{\theta}_{i+1}\,{}^{i}_{i+1}R\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} \qquad {}^{i}\dot{\Omega}_{i+1} = \ddot{\theta}_{i+1}\,{}^{i}_{i+1}R\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}
$$

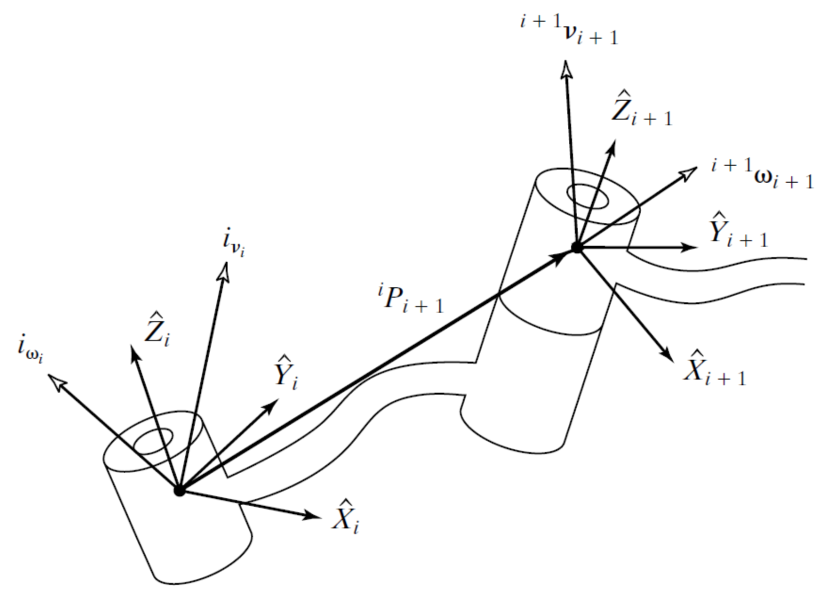
$$
\dot{\omega}_{i+1} = \dot{\omega}_i + {}^{0}_{i}R\ddot{\theta}_{i+1}\,{}^{i}_{i+1}R\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} + \omega_i \times {}^{0}_{i}R\dot{\theta}_{i+1}\,{}^{i}_{i+1}R\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}
$$

$$
{}^{i}\dot{\omega}_{i+1} = {}^{i}\dot{\omega}_i + \ddot{\theta}_{i+1}\,{}^{i}_{i+1}R\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} + {}^{i}\omega_i \times \dot{\theta}_{i+1}\,{}^{i}_{i+1}R\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}
$$

$$
{}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\dot{\omega}_i + \ddot{\theta}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} + {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\omega_i \times \dot{\theta}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}
$$

牛顿欧拉方程

$$ {}_{i+1}^{\;\;i}T = \begin{bmatrix} \cos\theta_{i+1} & -\sin\theta_{i+1} & 0 & a_i \\ \sin\theta_{i+1}\cos\alpha_i & \cos\theta_{i+1}\cos\alpha_i & -\sin\alpha_i & -\sin\alpha_i d_{i+1} \\ \sin\theta_{i+1}\sin\alpha_i & \cos\theta_{i+1}\sin\alpha_i & \cos\alpha_i & \cos\alpha_i d_{i+1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$



第i+1关节为旋转关节

连杆之间的线加速度传递:

$$ {}^{A}\dot{V}_{Q} = {}^{A}\dot{V}_{BORG} + {}_{B}^{A}R\,{}^{B}\dot{V}_{Q} + 2\,{}^{A}\Omega_{B}\times{}_{B}^{A}R\,{}^{B}V_{Q} + {}^{A}\dot{\Omega}_{B}\times{}_{B}^{A}R\,{}^{B}Q + {}^{A}\Omega_{B}\times({}^{A}\Omega_{B}\times{}_{B}^{A}R\,{}^{B}Q) $$

{A}={0},{B}={i},Q是{i+1}的原点

$^{B}Q = {}^{i}P_{i+1}$ 是定常向量 $\qquad {}^{B}V_{Q} = {}^{B}\dot{Q} = 0 \qquad {}^{B}\dot{V}_{Q} = 0$

$$ \dot{\upsilon}_{i+1} = \dot{\upsilon}_{i} + \dot{\omega}_{i}\times{}_{i}^{0}R\,{}^{i}P_{i+1} + \omega_{i}\times(\omega_{i}\times{}_{i}^{0}R\,{}^{i}P_{i+1}) $$

连杆坐标系原点的线加速度传递公式

$$ {}^{i+1}\dot{\upsilon}_{i+1} = {}_{\;i}^{i+1}R[\,{}^{i}\dot{\upsilon}_{i} + {}^{i}\dot{\omega}_{i}\times{}^{i}P_{i+1} + {}^{i}\omega_{i}\times({}^{i}\omega_{i}\times{}^{i}P_{i+1})] $$

牛顿欧拉方程

当第 i+1个关节是移动关节

连杆之间的角加速度传递:

$$^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\dot{\omega}_{i}$$

（角速度，角加速度均与关节i相同）

连杆之间的线加速度传递:

$$^{A}\dot{V}_{Q} = {}^{A}\dot{V}_{BORG} + {}^{A}_{B}R\,{}^{B}\dot{V}_{Q} + 2\,{}^{A}\Omega_{B} \times {}^{A}_{B}R\,{}^{B}V_{Q} + {}^{A}\dot{\Omega}_{B} \times {}^{A}_{B}R\,{}^{B}Q + {}^{A}\Omega_{B} \times ({}^{A}\Omega_{B} \times {}^{A}_{B}R\,{}^{B}Q)$$

{A}={0},{B}={i},Q是{i+1}的原点

$$^{B}Q = {}^{i}P_{i+1} \qquad {}^{B}V_{Q} = {}^{B}\dot{Q} = {}_{i+1}^{\;\;i}R\dot{d}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} \qquad {}^{B}\dot{V}_{Q} = {}_{i+1}^{\;\;i}R\ddot{d}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}$$

$$\dot{\upsilon}_{i+1} = \dot{\upsilon}_{i} + \dot{\omega}_{i} \times {}^{0}_{i}R\,{}^{i}P_{i+1} + \omega_{i} \times (\omega_{i} \times {}^{0}_{i}R\,{}^{i}P_{i+1}) + {}_{i+1}^{\;\;0}R\ddot{d}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} + 2\omega_{i} \times {}_{i+1}^{\;\;0}R\dot{d}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}$$

$$^{i+1}\dot{\upsilon}_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R[{}^{i}\dot{\upsilon}_{i} + {}^{i}\dot{\omega}_{i} \times {}^{i}P_{i+1} + {}^{i}\omega_{i} \times ({}^{i}\omega_{i} \times {}^{i}P_{i+1})] + \ddot{d}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} + 2\,{}^{i+1}\omega_{i+1} \times \dot{d}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}$$

牛顿欧拉方程

$$^{A}\Omega_{C}={}^{A}\Omega_{B}+{}_{B}^{A}R\,{}^{B}\Omega_{C}$$

$$^{A}\dot{\Omega}_{C}={}^{A}\dot{\Omega}_{B}+{}_{B}^{A}R\,{}^{B}\dot{\Omega}_{C}+{}^{A}\Omega_{B}\times{}_{B}^{A}R\,{}^{B}\Omega_{C}$$

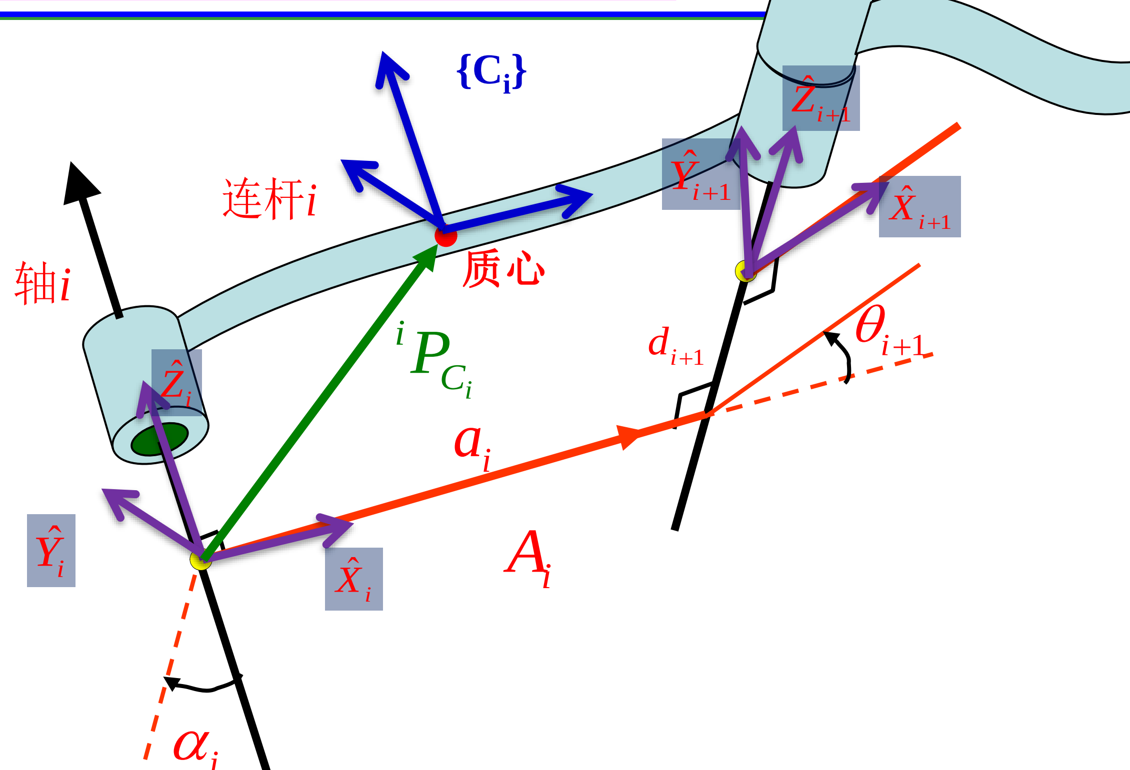
第 i根连杆的质心

平行的{i}和{C$_i$}是同一刚体的联体坐标系

{i}和{C$_i$}的角速度相等

{i}和{C$_i$}的角加速度相等

{C$_i$}的线加速度就是连杆质心的线加速度



$$^{A}\dot{V}_{Q}={}^{A}\dot{V}_{BORG}+{}_{B}^{A}R\,{}^{B}\dot{V}_{Q}+2\,{}^{A}\Omega_{B}\times{}_{B}^{A}R\,{}^{B}V_{Q}+{}^{A}\dot{\Omega}_{B}\times{}_{B}^{A}R\,{}^{B}Q+{}^{A}\Omega_{B}\times({}^{A}\Omega_{B}\times{}_{B}^{A}R\,{}^{B}Q)$$

{A}={0},{B}={i},Q是{C$_i$}的原点

$^{B}Q={}^{i}P_{C_i}$ 是定常向量　　$^{B}V_{Q}={}^{B}\dot{Q}=0$　　$^{B}\dot{V}_{Q}=0$

$$\dot{\upsilon}_{C_i}=\dot{\upsilon}_i+\dot{\omega}_i\times{}_{i}^{0}R\,{}^{i}P_{C_i}+\omega_i\times(\omega_i\times{}_{i}^{0}R\,{}^{i}P_{C_i})$$

$$^{i}\dot{\upsilon}_{C_i}={}^{i}\dot{\omega}_i\times{}^{i}P_{C_i}+{}^{i}\omega_i\times({}^{i}\omega_i\times{}^{i}P_{C_i})+{}^{i}\dot{\upsilon}_i$$

牛顿欧拉方程

$$F = m\dot{v}_C \qquad {}^C N = {}^C I\, {}^C\dot{\omega} + {}^C\omega \times {}^C I\, {}^C\omega$$

计算出每个连杆质心的线加速度和角加速度之后，运用牛顿欧拉公式计算出作用在连杆质心上的惯性力和力矩：

$$ {}^iF_i = m_i\, {}^i\dot{v}_{C_i} $$

$$ {}^iN_i = {}^{C_i}I_i\, {}^i\dot{\omega}_i + {}^i\omega_i \times {}^{C_i}I_i\, {}^i\omega_i $$

此处坐标系{C_i}的原点位于连杆质心，各坐标轴方位与原连杆坐标系{i}方位相同。

- 若不考虑重力，机械臂处于惯性系，第0个连杆初始条件：

$$ {}^0\omega_0 = {}^0\dot{\omega}_0 = 0 \qquad {}^0\dot{v}_0 = 0 $$

- 若考虑重力，机械臂处于非惯性系，需要将连杆的重力嵌入动力学方程，此时，令G为与重力矢量大小相等，方向相反的矢量，则第0个连杆初始条件：

$$ {}^0\omega_0 = {}^0\dot{\omega}_0 = 0 \qquad {}^0\dot{v}_0 = G $$

这等效于机器人以1g的加速度在向上做加速运动。

牛顿欧拉方程

- **非惯性系中的牛顿第二定律**

不受力作用的质点在其中作匀速直线运动的参照坐标系称为惯性系

世界坐标系{U}是惯性系

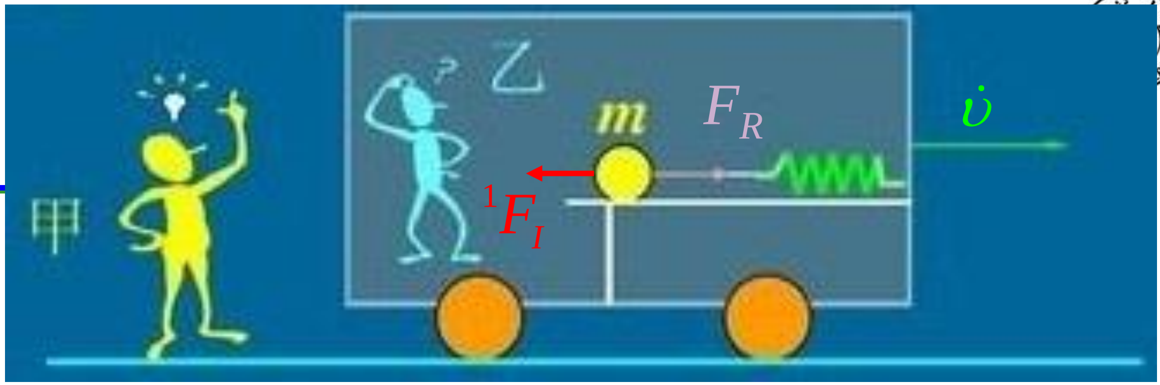
相对于惯性系沿直线作匀速平动的任意坐标系也是惯性系

设质量为m的质点Q所受的由其他物体施加的外力之和为 ${}^{A}F$

若{A}是惯性系，则 ${}^{A}F = m\,{}^{A}\dot{V}_Q$

若{A}是非惯性系，上式不成立

牛顿欧拉方程



例1：世界坐标系{0}的水平面上，一辆车做直线匀加速运动，加速度 $\dot{\upsilon}$=2米/秒²；车内光滑水平桌面上质量m=3千克的质点相对于车是静止的，质点以弹簧测力计与车前壁相连。设{1}是车的联体坐标系

竖直方向：无论在{0}或{1}中，质点所受的重力与支撑力平衡，观察结果相同

水平方向：

静止在{0}中的甲观察，质点加速度2米/秒²，测力计读数6牛顿，即 $^0F_R = m\,^0\dot{V}$

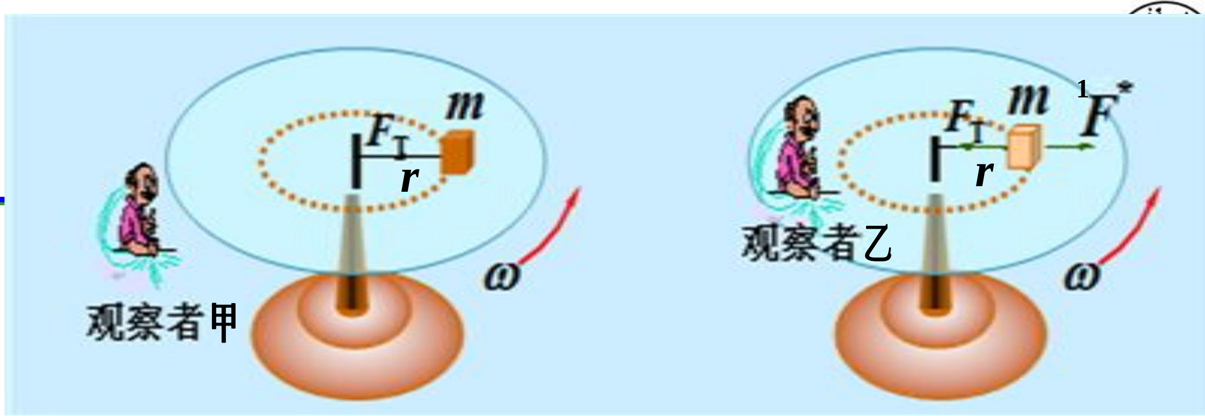
静止在{1}中的乙观察，质点加速度0，测力计读数6牛顿，牛顿第二定律？

在非惯性系中使用牛顿第二定律，需引入惯性力，即 $^1F_R + {^1F_I} = m\,^1\dot{V}$

其中，$^1F_I = -m\dot{\upsilon}$ 是惯性力

惯性力不是物体间的相互作用，不存在惯性力的反作用力，找不出它的施力物体

牛顿欧拉方程



例2：世界坐标系{0}中，光滑的水平圆盘绕圆心匀速旋转，角速度ω=3弧度/秒；圆盘上质量m=4千克的质点相对于圆盘是静止的，质点以弹簧测力计与圆盘圆心相连，质点与圆心间的距离r=2米。设{1}是圆盘的联体坐标系

水平方向：

静止在{0}中的甲观察，质点角速度3弧度/秒，测力计读数72牛顿，即

$${}^0F_T = m\left({}^0\Omega\right)^2 r$$

向心力公式

静止在{1}中的乙观察，质点角速度0，测力计读数72牛顿，引入惯性力，即

$${}^1F_T + {}^1F^* = m\left({}^1\Omega\right)^2 r$$

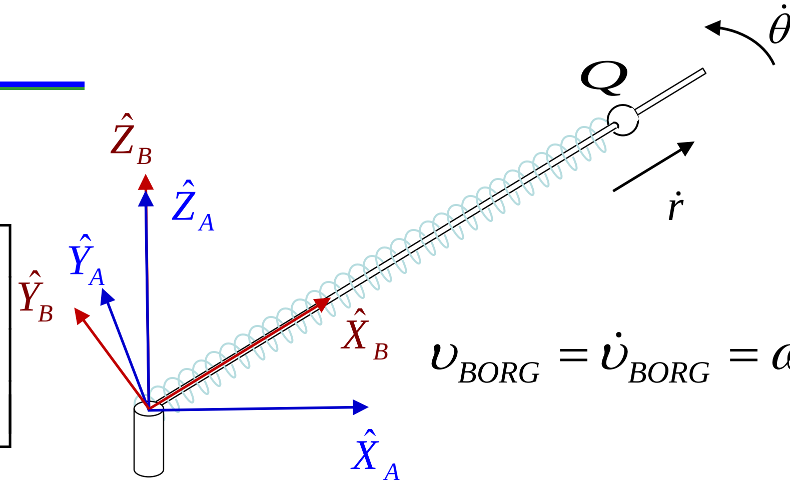
其中，惯性力${}^1F^* = -m\omega^2 r$也称为离心力

离心力不是向心力的反作用力，离心力是一种惯性力

$$ {}^{A}\dot{V}_{Q} = {}^{A}\dot{V}_{BORG} + {}^{A}_{B}R\,{}^{B}\dot{V}_{Q} + 2\,{}^{A}\Omega_{B} \times {}^{A}_{B}R\,{}^{B}V_{Q} + {}^{A}\dot{\Omega}_{B} \times {}^{A}_{B}R\,{}^{B}Q + {}^{A}\Omega_{B} \times ({}^{A}\Omega_{B} \times {}^{A}_{B}R\,{}^{B}Q) $$

细杆的联体坐标系{B}

$$ {}^{A}_{B}T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \omega_{B} = {}^{B}\omega_{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} $$



$$ \upsilon_{BORG} = \dot{\upsilon}_{BORG} = \dot{\omega}_{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} $$

例3：无重力的世界坐标系{A}中，光滑细杆绕其一端在水平面内匀速旋转，角速度 $\dot{\theta}$，质量为m的小球穿在细杆上并沿细杆匀速移动，移动速度 $\dot{r}$，小球以弹簧测力计与旋转中心相连，小球内有应变片测量小球与细杆的接触力

$$ {}^{B}Q = [r \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}} \qquad {}^{B}V_{Q} = [\dot{r} \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}} \qquad {}^{B}\dot{V}_{Q} = [0 \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}} $$

{A}作参照系 $\dot{\upsilon}_{Q} = \dot{\upsilon}_{BORG} + {}^{A}_{B}R\,{}^{B}\dot{V}_{Q} + 2\omega_{B} \times {}^{A}_{B}R\,{}^{B}V_{Q} + \dot{\omega}_{B} \times {}^{A}_{B}R\,{}^{B}Q + \omega_{B} \times (\omega_{B} \times {}^{A}_{B}R\,{}^{B}Q)$

$$ {}^{A}F = m\dot{\upsilon}_{Q} = 2m\omega_{B} \times {}^{A}_{B}R\,{}^{B}V_{Q} + m\omega_{B} \times (\omega_{B} \times {}^{A}_{B}R\,{}^{B}Q) $$

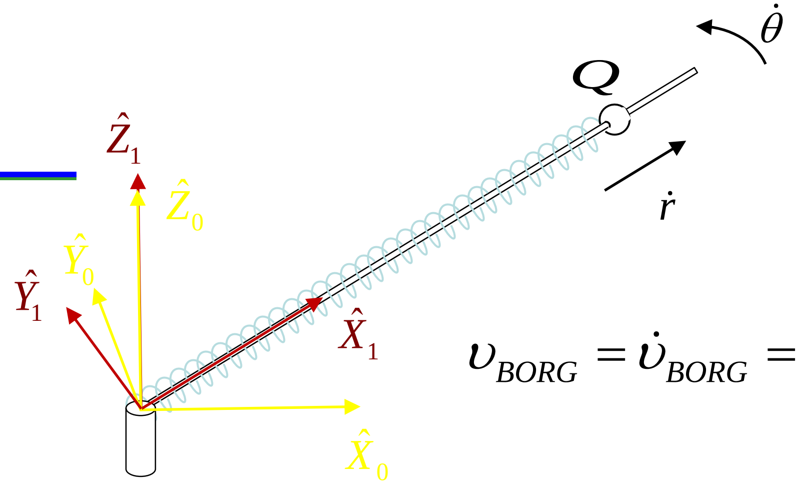
接触力

$$ 2m\omega_{B} \times {}^{A}_{B}R\,{}^{B}V_{Q} = \begin{bmatrix} -2m\dot{\theta}\dot{r}\sin\theta \\ 2m\dot{\theta}\dot{r}\cos\theta \\ 0 \end{bmatrix} $$

弹簧力正是向心力

$$ m\omega_{B} \times (\omega_{B} \times {}^{A}_{B}R\,{}^{B}Q) = \begin{bmatrix} -m\dot{\theta}^{2} r\cos\theta \\ -m\dot{\theta}^{2} r\sin\theta \\ 0 \end{bmatrix} $$

细杆的联体坐标系{B}



$${}^{A}_{B}T=\begin{bmatrix} c\theta & -s\theta & 0 & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \omega_B={}^{B}\omega_B=\begin{bmatrix}0\\0\\\dot{\theta}\end{bmatrix} \qquad \upsilon_{BORG}=\dot{\upsilon}_{BORG}=\dot{\omega}_B=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$${}^{B}Q=\begin{bmatrix}r & 0 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \qquad {}^{B}V_Q=\begin{bmatrix}\dot{r} & 0 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \qquad {}^{B}\dot{V}_Q=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$${}^{A}F=m\dot{\upsilon}_Q=2m\omega_B\times{}^{A}_{B}R\,{}^{B}V_Q+m\omega_B\times(\omega_B\times{}^{A}_{B}R\,{}^{B}Q)$$

{B}作参照系 $${}^{B}F={}^{B}_{A}R\,{}^{A}F=2m\,{}^{B}\omega_B\times{}^{B}V_Q+m\,{}^{B}\omega_B\times({}^{B}\omega_B\times{}^{B}Q)$$

$${}^{B}F+{}^{B}F_C+{}^{B}F^{*}=m\,{}^{B}\dot{V}_Q=0$$

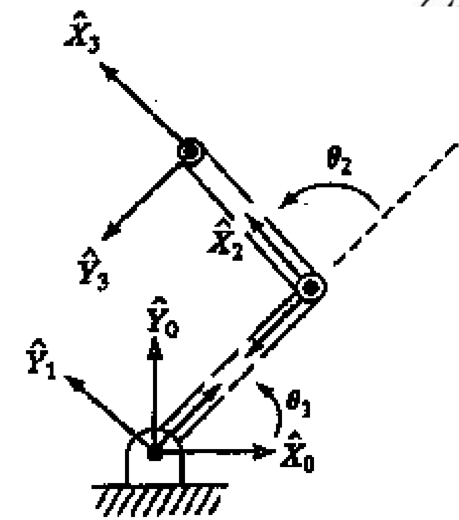
其中，$${}^{B}F^{*}=-m\,{}^{B}\omega_B\times({}^{B}\omega_B\times{}^{B}Q)=\begin{bmatrix}m\dot{\theta}^2r & 0 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$ 是离心力

$${}^{B}F_C=-2m\,{}^{B}\omega_B\times{}^{B}V_Q=\begin{bmatrix}0 & -2m\dot{\theta}\dot{r} & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$ 称为哥氏力（科里奥利力）

哥氏力是质点在旋转参照系中做直线运动情形下出现的一种惯性力

惯性力的思想也适用于非惯性系中的刚体运动学

牛顿欧拉方程



● 考虑重力

不考虑重力时，{0}={U}，{U}是无重力的世界坐标系

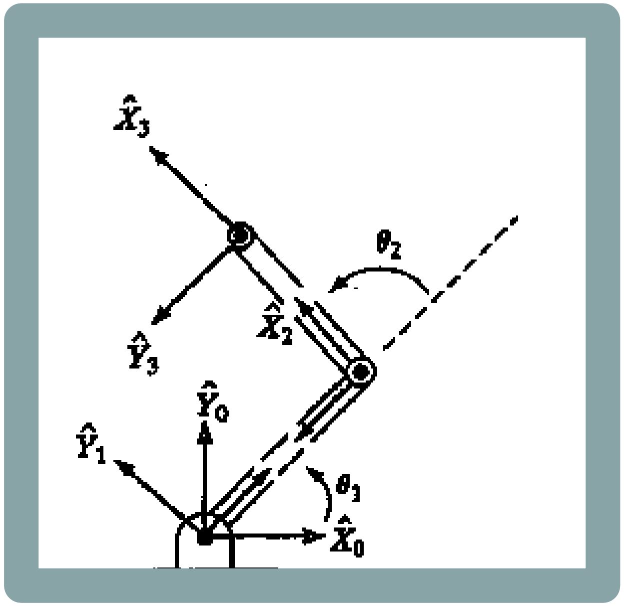
利用惯性力的思想引入重力：

{U}是无重力的世界坐标系

{0}不再等于{U}，设g为重力加速度

$$\dot{\upsilon}_{0ORG} = {}^{U}\dot{V}_{0ORG} = \begin{bmatrix} 0 \\ g \\ 0 \end{bmatrix}$$

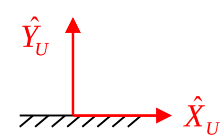
g



在{U}的竖直方向，{0}向上做直线匀加速运动，加速度的大小等于重力加速度

在非惯性系{0}中的任何一个质量为m的质点

都受到惯性力 ${}^{0}F_{I} = -m\begin{bmatrix} 0 & g & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & -mg & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$



显然，这个惯性力的作用与重力完全相同，可视为重力

牛顿欧拉方程

- 向内迭代计算各连杆的力和力矩
  - 列出力平衡和力矩平衡方程.每个连杆都受到相邻连杆的作用力和力矩以及附加的惯性力和力矩.
  - 计算出每个连杆上的力和力矩之后，计算关节力矩.

牛顿欧拉方程

将所有作用在连杆i上的力相加，得到力平衡方程

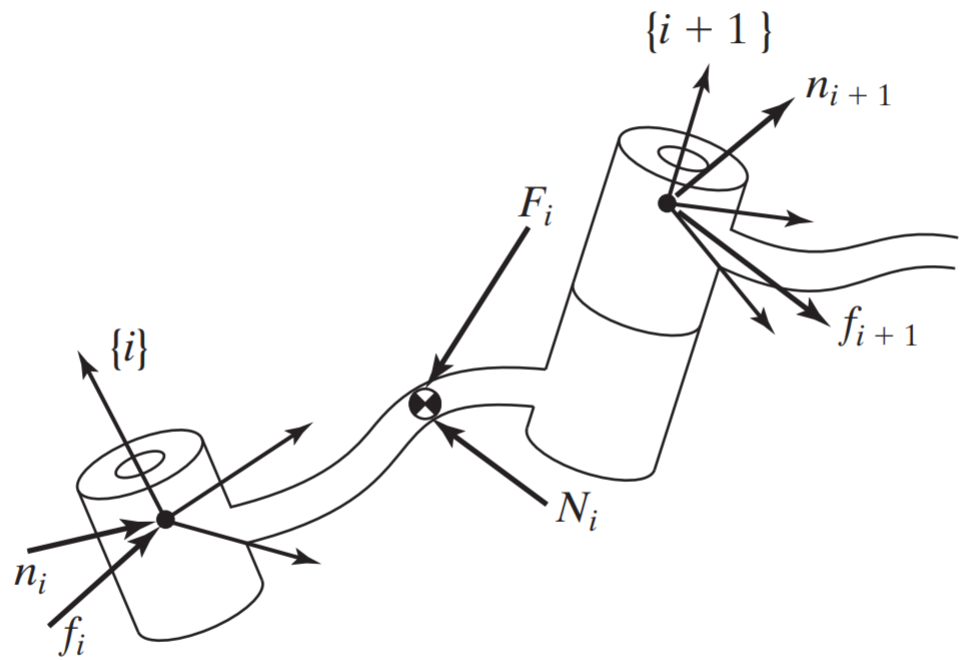
$$ {}^{i}F_i = {}^{i}f_i - {}^{i}_{i+1}R\,{}^{i+1}f_{i+1} $$

f_i表示连杆i-1作用在连杆i上的力

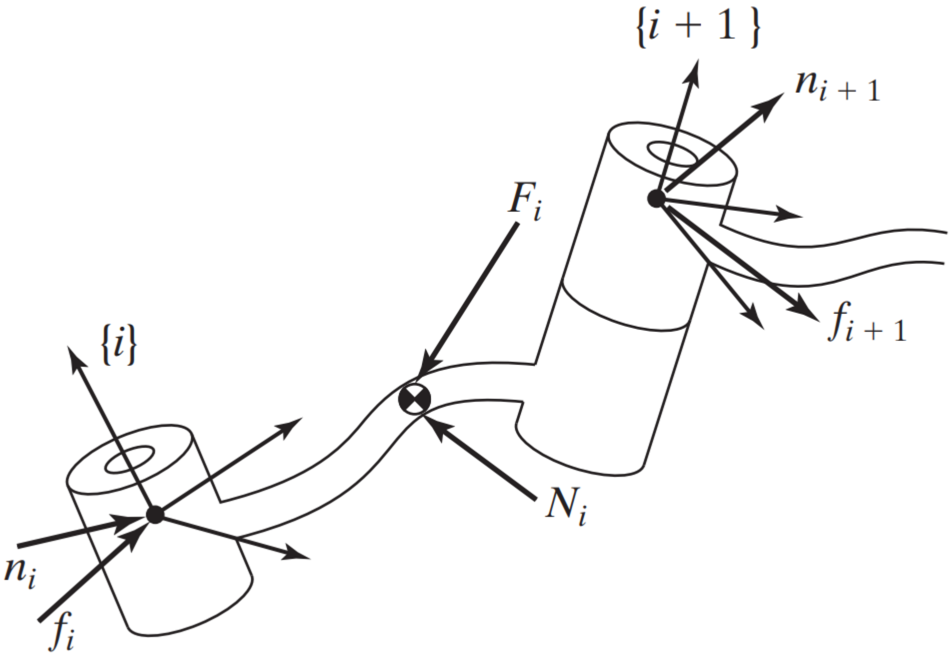
将所有作用在质心上的力矩相加，并且令它们的和为零，得到力矩平衡方程：

$$ {}^{i}N_i = {}^{i}n_i - {}^{i}n_{i+1} + (-{}^{i}P_{C_i}) \times {}^{i}f_i - ({}^{i}P_{i+1} - {}^{i}P_{C_i}) \times {}^{i}f_{i+1} $$

n_i表示连杆i-1作用在连杆i上的力矩



牛顿欧拉方程



最后重新排列力和力矩方程，形成相邻连杆从高序号向低序号排列的迭代关系：

$$^{i}f_i = {}^{i}_{i+1}R\, ^{i+1}f_{i+1} + {}^{i}F_i$$

$$^{i}n_i = {}^{i}N_i + {}^{i}_{i+1}R\, ^{i+1}n_{i+1} + {}^{i}P_{C_i} \times {}^{i}F_i + {}^{i}P_{i+1} \times {}^{i}_{i+1}R\, ^{i+1}f_{i+1}$$

注意对一个在自由空间中运动的机器人来说，$^{n+1}f_{n+1}$ 和 $^{n+1}n_{n+1}$ 等于零.

牛顿欧拉方程

与静力学类似，可通过计算一个连杆施加于相邻连杆的力矩在 $\hat{Z}$ 方向的分量求得关节力矩：

$$\tau_i = {}^i n_i^T \, {}^i\hat{Z}_i$$

对于移动关节 $\tau_i = {}^i f_i^T \, {}^i\hat{Z}_i$

- ## 牛顿–欧拉迭代动力学算法

由关节运动计算关节力矩的完整算法由两部分组成：

- 对每个连杆应用牛顿-欧拉方程，从连杆1到连杆n向外迭代计算连杆的速度和加速度.
- 从连杆n到连杆1向内迭代计算连杆间的相互作用力和力矩以及关节驱动力矩.

牛顿欧拉方程

对于转动关节，该算法归纳如下:

---外推: *i*: 0 →*n*

$$^{0}\omega_{0} = {}^{0}\dot{\omega}_{0} = 0 \quad {}^{0}\dot{v}_{0} = -{}^{0}g \quad \theta_i, \dot{\theta}_i, \ddot{\theta}_i \text{均已知}$$

$$^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\omega_{i} + \dot{\theta}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}$$

$$^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\dot{\omega}_{i} + {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\omega_{i} \times \dot{\theta}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} + \ddot{\theta}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}$$

$$^{i+1}\dot{v}_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R({}^{i}\dot{\omega}_{i} \times {}^{i}P_{i+1} + {}^{i}\omega_{i} \times ({}^{i}\omega_{i} \times {}^{i}P_{i+1}) + {}^{i}\dot{v}_{i})$$

$$^{i+1}\dot{v}_{C_{i+1}} = {}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} \times {}^{i+1}P_{C_{i+1}} + {}^{i+1}\omega_{i+1} \times ({}^{i+1}\omega_{i+1} \times {}^{i+1}P_{C_{i+1}}) + {}^{i+1}\dot{v}_{i+1}$$

$$^{i+1}F_{i+1} = m_{i+1}\,{}^{i+1}\dot{v}_{C_{i+1}}$$

$$^{i+1}N_{i+1} = {}^{C_{i+1}}I_{i+1}\,{}^{i+1}\dot{\omega}_{i+1} + {}^{i+1}\omega_{i+1} \times {}^{C_{i+1}}I_{i+1}\,{}^{i+1}\omega_{i+1}$$

---内推: *i*: *n*+1 → 1

$$^{n+1}f_{n+1} = 0, \; {}^{n+1}n_{n+1} = 0$$

$$^{i}f_{i} = {}^{i}_{i+1}R\,{}^{i+1}f_{i+1} + {}^{i}F_{i}$$

$$^{i}n_{i} = {}^{i}N_{i} + {}^{i}_{i+1}R\,{}^{i+1}n_{i+1} + {}^{i}P_{C_i} \times {}^{i}F_{i} + {}^{i}P_{i+1} \times {}^{i}_{i+1}R\,{}^{i+1}f_{i+1}$$

$$\tau_i = {}^{i}n_i^{T}\,{}^{i}\hat{Z}_i$$

牛顿欧拉方程

例: 计算二连杆操作臂的动力学方程。 假设质量分布非常简单：每个连杆的质量都集中在连杆的末端，设其质量分别为 m_1 和 m_2。

首先，确定牛顿欧拉迭代公式中各参量的值:

连杆质心的位置矢量

$$^{1}p_{c1}=l_1\hat{X}_1\,,\ ^{2}p_{c2}=l_2\hat{X}_2$$

连杆在质心坐标系中的惯性张量

$$^{c_1}I_1=0\,,\ ^{c_2}I_2=0$$

作用在末端的外力

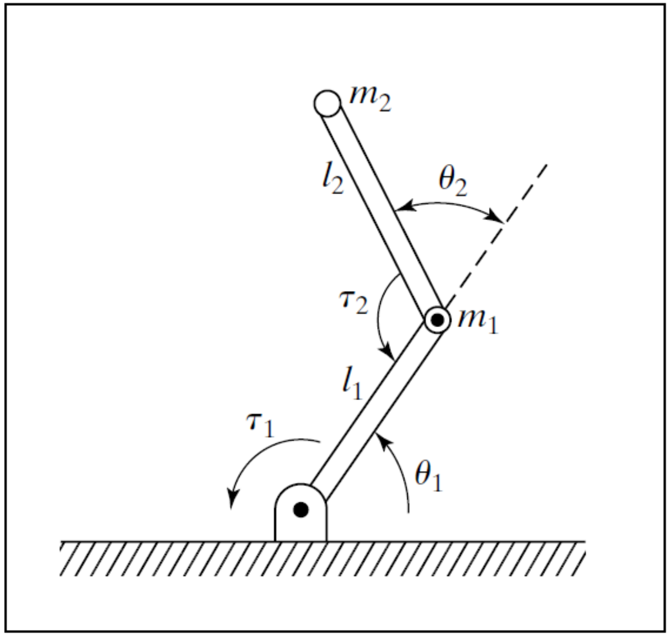
$$f_3=0\,,n_3=0$$

机械臂基座

$$\omega_0=0\,,\dot{\omega}_0=0$$

考虑重力

$$^{0}\dot{v}_0=g\hat{Y}_0$$



牛顿欧拉方

$$^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\omega_i + \dot\theta_{i+1}\,{}^{i+1}\hat Z_{i+1}$$

$$^{i+1}\dot\omega_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\dot\omega_i + {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\omega_i\times\dot\theta_{i+1}\,{}^{i+1}\hat Z_{i+1} + \ddot\theta_{i+1}\,{}^{i+1}\hat Z_{i+1}$$

$$^{i+1}\dot v_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R({}^{i}\dot\omega_i\times{}^{i}P_{i+1} + {}^{i}\omega_i\times({}^{i}\omega_i\times{}^{i}P_{i+1}) + {}^{i}\dot v_i)$$

$$^{i+1}\dot v_{C_{i+1}} = {}^{i+1}\dot\omega_{i+1}\times{}^{i+1}P_{C_{i+1}} + {}^{i+1}\omega_{i+1}\times({}^{i+1}\omega_{i+1}\times{}^{i+1}P_{C_{i+1}}) + {}^{i+1}\dot v_{i+1}$$

$$^{i+1}F_{i+1} = m_{i+1}\,{}^{i+1}\dot v_{C_{i+1}}$$

$$^{i+1}N_{i+1} = {}^{C_{i+1}}I_{i+1}\,{}^{i+1}\dot\omega_{i+1} + {}^{i+1}\omega_{i+1}\times{}^{C_{i+1}}I_{i+1}\,{}^{i+1}\omega_{i+1}$$

对连杆 1 向外迭代:

$${}^{0}_{1}R = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\omega_0 = 0\,,\ \dot\omega_0 = 0\quad {}^{0}\dot v_0 = g\hat Y_0$$

$${}^{1}\omega_1 = \dot\theta_1\,{}^{1}\hat Z_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\theta_1 \end{bmatrix} \quad , \quad {}^{1}\dot\omega_1 = \ddot\theta_1\,{}^{1}\hat Z_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot\theta_1 \end{bmatrix}$$

$${}^{1}\dot v_1 = \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ g \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} gs_1 \\ gc_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^{1}\dot v_{c1} = \begin{bmatrix} gs_1 \\ gc_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot\theta_1 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\theta_1 \end{bmatrix}\times\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\theta_1 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} gs_1 - l_1\dot\theta_1^2 \\ gc_1 + l_1\ddot\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^{1}F_1 = m_1\,{}^{1}\dot v_{c1} = \begin{bmatrix} m_1gs_1 - m_1l_1\dot\theta_1^2 \\ m_1gc_1 + m_1l_1\ddot\theta_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad {}^{1}N_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

牛顿欧拉方程

$$ {}^{1}_{2}R = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}^{2}_{3}R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

对连杆 2 向外迭代:

$$ {}^{2}\omega_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} , \quad {}^{2}\dot{\omega}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{2}\dot{v}_2 = \begin{bmatrix} c2 & s2 & 0 \\ -s2 & c2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} gs_1 - l_1\dot{\theta}_1^2 \\ gc_1 + l_1\ddot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} gs_{12} - l_1\dot{\theta}_1^2 c2 + l1\ddot{\theta}_1 s2 \\ gc_{12} + l_1\dot{\theta}_1^2 s2 + l1\ddot{\theta}_1 c2 \\ 0 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{2}\dot{v}_{c2} = \begin{bmatrix} 0 \\ l_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -l_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} gs_{12} - l_1\dot{\theta}_1^2 c_2 + l_1\ddot{\theta}_1 s_2 \\ gc_{12} + l_1\dot{\theta}_1^2 s_2 + l_1\ddot{\theta}_1 c_2 \\ 0 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{2}F_2 = \begin{bmatrix} m_2 gs_{12} - m_2 l_1\dot{\theta}_1^2 c_2 + m_2 l_1\ddot{\theta}_1 s_2 - m_2 l_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \\ m_2 gc_{12} + m_2 l_1\dot{\theta}_1^2 s_2 + m_2 l_1\ddot{\theta}_1 c_2 + m_2 l_2(\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix} , \quad {}^{2}N_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} $$

牛顿欧拉方程

$$^{i}f_i = {}^{i}_{i+1}R\,^{i+1}f_{i+1} + {}^{i}F_i$$

$$^{i}n_i = {}^{i}N_i + {}^{i}_{i+1}R\,^{i+1}n_{i+1} + {}^{i}P_{C_i} \times {}^{i}F_i + {}^{i}P_{i+1} \times {}^{i}_{i+1}R\,^{i+1}f_{i+1}$$

$$\tau_i = {}^{i}n_i^T\,{}^{i}\hat{Z}_i$$

对连杆 2 向内迭代:

$$f_3 = 0\,,\; n_3 = 0$$

$$^{2}f_2 = {}^{2}F_2 \quad , \quad {}^{2}n_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_2 l_1 l_2 c_2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_2 g c_{12} + m_2 l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) \end{bmatrix}$$

对连杆 1 向内迭代:

$$^{1}f_1 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_2 l_1 s_2 \ddot{\theta}_1 - m_2 l_1 c_2 \dot{\theta}_1^2 - m_2 l_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + m_2 g s_{12} \\ m_2 l_1 c_2 \ddot{\theta}_1 - m_2 l_1 s_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + m_2 g c_{12} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -m_1 l_1 \dot{\theta}_1^2 + m_1 g s_1 \\ m_1 l_1 \ddot{\theta}_1 + m_1 g c_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$^{1}n_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_2 l_1 l_2 c_2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_2^2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) + m_2 l_1 l_2 s_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 l_2 g c_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_1 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_1 l_1 g c_1 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_2 l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 c_2 (\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2) - m_2 l_1 l_2 s_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + m_2 l_1 g c_2 c_{12} + m_2 l_1 g s_2 s_{12} \end{bmatrix}$$

牛顿欧拉方程

$$
\begin{aligned}
{}^{i}f_i &= {}_{i+1}^{\ i}R\, {}^{i+1}f_{i+1} + {}^{i}F_i \\
{}^{i}n_i &= {}^{i}N_i + {}_{i+1}^{\ i}R\, {}^{i+1}n_{i+1} + {}^{i}P_{C_i} \times {}^{i}F_i + {}^{i}P_{i+1} \times {}_{i+1}^{\ i}R\, {}^{i+1}f_{i+1} \\
\tau_i &= {}^{i}n_i^T\, {}^{i}\hat{Z}_i
\end{aligned}
$$

取 ${}^{i}n_i$ 中的 $\hat{Z}$ 方向分量, 得关节力矩:

$$
\begin{aligned}
\tau_1 =\ & m_2 l_2^2(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2)+m_2 l_1 l_2 c_2(2\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2)+(m_1+m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 \\
& -m_2 l_1 l_2 s_2\dot{\theta}_2^2-2m_2 l_1 l_2 s_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2+m_2 l_2 g c_{12}+(m_1+m_2)l_1 g c_1
\end{aligned}
$$

$$
\tau_2 = m_2 l_1 l_2 c_2\ddot{\theta}_1+m_2 l_1 l_2 s_2\dot{\theta}_1^2+m_2 l_2 g c_{12}+m_2 l_2^2(\ddot{\theta}_1+\ddot{\theta}_2)
$$

将驱动力矩表示为关于关节位置、速度和加速度的函数.

操作臂动力学方程的结构

迭代形式与封闭形式的动力学方程

- 迭代形式的动力学方程可以进行数值计算。
- 封闭形式的动力学方程可用符号方程通过迭代递推得到。
- 封闭形式的动力学方程便于对机械臂进行分析。

状态空间方程

当用牛顿-欧拉方程对操作臂进行分析时，动力学方程可以写成如下形式:

$$\tau = M(\Theta)\ddot{\Theta} + V(\Theta,\dot{\Theta}) + G(\Theta)$$

这里 $M(\Theta)$是 $n\times n$ 操作臂的质量矩阵，$V(\Theta,\dot{\Theta})$是$n\times 1$的离心力和哥氏力矢量，$G(\Theta)$ 是$n\times 1$重力矢量，

$V(\Theta,\dot{\Theta})$ 包含了所有与关节速度有关的项

操作臂动力学方程的结构

例： $\tau_1 = m_2 l_2^2(\ddot\theta_1+\ddot\theta_2)+m_2 l_1 l_2 c_2(2\ddot\theta_1+\ddot\theta_2)+(m_1+m_2)l_1^2\ddot\theta_1$

$$-m_2 l_1 l_2 s_2 \dot\theta_2^2 - 2m_2 l_1 l_2 s_2 \dot\theta_1 \dot\theta_2 + m_2 l_2 g c_{12} + (m_1+m_2) l_1 g c_1$$

$$\tau_2 = m_2 l_1 l_2 c_2 \ddot\theta_1 + m_2 l_1 l_2 s_2 \dot\theta_1^2 + m_2 l_2 g c_{12} + m_2 l_2^2(\ddot\theta_1+\ddot\theta_2)$$

$$\tau = M(\Theta)\ddot\Theta + V(\Theta,\dot\Theta) + G(\Theta)$$

$$M(\Theta) = \begin{pmatrix} m_2 l_2^2 + 2m_2 l_1 l_2 c_2 + (m_1+m_2) l_1^2 & m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 c_2 \\ m_2 l_2^2 + m_2 l_1 l_2 c_2 & m_2 l_2^2 \end{pmatrix}$$

$$V(\Theta,\dot\Theta) = \begin{bmatrix} -m_2 l_1 l_2 s_2 \dot\theta_2^2 - 2m_2 l_1 l_2 s_2 \dot\theta_1 \dot\theta_2 \\ m_2 l_1 l_2 s_2 \dot\theta_1^2 \end{bmatrix} \qquad G(\Theta) = \begin{bmatrix} m_2 l_2 g c_{12} + (m_1+m_2) l_1 g c_1 \\ m_2 l_2 g c_{12} \end{bmatrix}$$

$V(\Theta,\dot\Theta)$ **: $n\times 1$ Coriolis 项，包含了所有与关节速度有关的项**

$-m_2 l_1 l_2 s_2 \dot\theta_2^2$ 是与离心力有关的项，包含与速度的平方有关的项

$-2m_2 l_1 l_2 s_2 \dot\theta_1 \dot\theta_2$ 是与哥氏力有关的项，总是包含两个不同关节速度的乘积

$G(\Theta)$ **: $n\times 1$ 与重力加速度有关的项, 只与 Θ 有关，与它的导数无关**

$M(\Theta)$**: $n\times$n 质量矩阵, Θ 的函数**

操作臂动力学方程的结构

- **位形空间方程**

$$\tau = M(\Theta)\ddot{\Theta} + V(\Theta,\dot{\Theta}) + G(\Theta)$$

将速度项写成另一种形式:

$$\tau = M(\Theta)\ddot{\Theta} + B(\Theta)[\dot{\Theta}\dot{\Theta}] + C(\Theta)[\dot{\Theta}^2] + G(\Theta)$$

$B(\Theta)$--$n \times n(n-1)/2$ 哥氏力系数矩阵

$C(\Theta)$--$n \times n$ 离心力系数矩阵

$$[\dot{\Theta},\dot{\Theta}] = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_{n-1}\dot{\theta}_n \end{bmatrix} \qquad [\dot{\Theta}^2] = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1^2 \\ \dot{\theta}_2^2 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_n^2 \end{bmatrix}$$

$$B(\Theta) = \begin{bmatrix} -2m_2 l_1 l_2 s_2 \\ 0 \end{bmatrix} , \quad C(\Theta) = \begin{bmatrix} 0 & -m_2 l_1 l_2 s_2 \\ m_2 l_1 l_2 s_2 & 0 \end{bmatrix}$$

动力学方程随着操作臂的运动不断更新

拉格朗日方程

拉格朗日方法是基于能量的动力学方法。对于复杂系统，运用拉格朗日方法将变得相对简单。

- **Lagrange-Euler公式**

$$F_i = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i}$$

$$T_i = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i}$$

***L*是拉格朗日函数**

$$L = K - P$$

其中，***K***是机械臂的总动能，***P***是机械臂的总势能，
x_i是机械臂的移动关节变量，θ_i是机械臂的转动关节变量，
F_i是第i关节（移动关节）的所有外力之和，
T_i是第i关节（转动关节）的所有外力矩之和。

拉格朗日方程

操作臂的动能表达式:

$$k_i = \frac{1}{2} m_i v_{C_i}^{\mathrm{T}} v_{C_i} + \frac{1}{2} {}^{i}\omega_i^{\mathrm{T}} \, {}^{C_i}I_i \, {}^{i}\omega_i$$

整个操作臂的动能是各个连杆动能之和:

$$k = \sum_{i=1}^{n} k_i$$

操作臂的动能可以描述为关节位置和速度的标量函数:

$$k(\Theta, \dot{\Theta}) = \frac{1}{2} \dot{\Theta}^T M(\Theta) \dot{\Theta}$$

操作臂的质量矩阵一定是正定矩阵

拉格朗日方程

连杆*i*的势能可表示为:

$$u_i = -m_i \, {}^0g^T \, {}^0P_{C_i} + u_{ref_i}$$

${}^0g$ 是 3×1 的重力矢量，${}^0P_{C_i}$ 是连杆*i*的质心的位置，u_{ref_i} 是使 u_i 的最小值为零的常数。

操作臂的总势能

$$u = \sum_{i=1}^{n} u_i$$

操作臂的总势能 $u(\Theta)$ 可描述为关节位置的标量函数。

拉格朗日方程

拉格朗日函数:

$$L(\Theta,\dot{\Theta}) = k(\Theta,\dot{\Theta}) - u(\Theta)$$

操作臂的动力学方程满足:

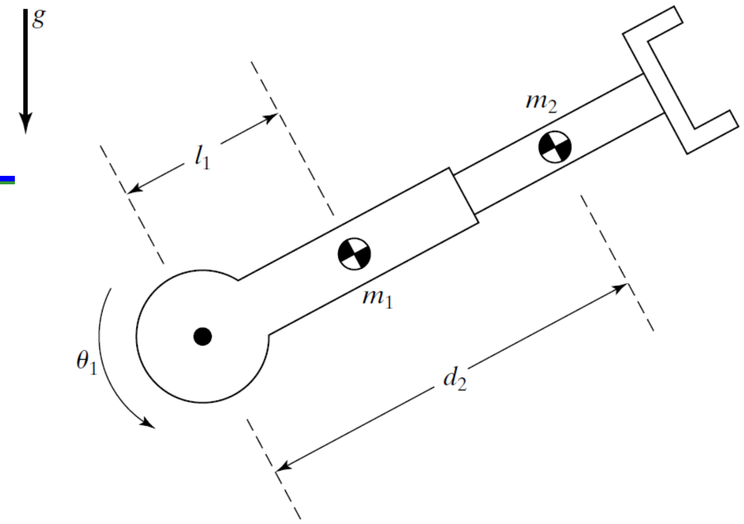
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\Theta}} - \frac{\partial L}{\partial \Theta} = \tau$$

τ 是 $\boldsymbol{n}\times\mathbf{1}$ 的驱动力矩矢量

最终得到操作臂的动力学方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial k}{\partial \dot{\Theta}} - \frac{\partial k}{\partial \Theta} + \frac{\partial u}{\partial \Theta} = \tau$$

拉格朗日方程



例：如图，RP操作臂的惯性张量为

$$^{C_1}I_1=\begin{bmatrix} I_{xx1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz1} \end{bmatrix},\ ^{C_2}I_2=\begin{bmatrix} I_{xx2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz2} \end{bmatrix}$$

总质量为m_1和m_2。连杆1的质心与关节1的轴线相距l_1，连杆2的质心与关节1的轴线距离为变量l_2的轴线。试用拉格朗日法求动力学方程。

解：连杆1和2的动能分别为 $k_1=\frac{1}{2}m_1l_1^2\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}I_{zz1}\dot{\theta}_1^2$ **和** $k_2=\frac{1}{2}m_2(d_2^2\dot{\theta}_1^2+\dot{d}_2^2)+\frac{1}{2}I_{zz2}\dot{\theta}_1^2$

总动能为 $k(\Theta,\dot{\Theta})=\frac{1}{2}(m_1l_1^2+I_{zz1}+I_{zz2}+m_2d_2^2)\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}m_2\dot{d}_2^2$ $\quad \Theta=\begin{bmatrix}\theta_1\\ d_2\end{bmatrix},\dot{\Theta}=\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1\\ \dot{d}_2\end{bmatrix}$

连杆1和2的势能分别为 $u_1=m_1l_1g\sin\theta_1+m_1l_1g$ **和** $u_2=m_2gd_2\sin\theta_1+m_2gd_{2\max}$

其中，$d_{2\max}$是关节2的最大运动范围。

因此，总势能为 $u(\Theta)=g(m_1l_1+m_2d_2)\sin\theta_1+m_1l_1g+m_2gd_{2\max}$

拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial k}{\partial \dot{\Theta}} - \frac{\partial k}{\partial \Theta} + \frac{\partial u}{\partial \Theta} = \tau$$

$$k(\Theta,\dot{\Theta}) = \frac{1}{2}(m_1 l_1^2 + I_{zz1} + I_{zz2} + m_2 d_2^2)\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{d}_2^2$$

$$u(\Theta) = g(m_1 l_1 + m_2 d_2)\sin\theta_1 + m_1 l_1 g + m_2 g d_{2\max}$$

求偏导数

$$\frac{\partial k}{\partial \dot{\Theta}} = \begin{bmatrix} (m_1 l_1^2 + I_{zz1} + I_{zz2} + m_2 d_2^2)\dot{\theta}_1 \\ m_2 \dot{d}_2 \end{bmatrix}, \frac{\partial k}{\partial \Theta} = \begin{bmatrix} 0 \\ m_2 d_2 \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \Theta} = \begin{bmatrix} g(m_1 l_1 + m_2 d_2)\cos\theta_1 \\ g m_2 \sin\theta_1 \end{bmatrix}$$

由拉格朗日方程，得

$$\tau_1 = (m_1 l_1^2 + I_{zz1} + I_{zz2} + m_2 d_2^2)\ddot{\theta}_1 + 2 m_2 d_2 \dot{\theta}_1 \dot{d}_2 + (m_1 l_1 + m_2 d_2) g \cos\theta_1$$

$$\tau_2 = m_2 \ddot{d}_2 - m_2 d_2 \dot{\theta}_1^2 + m_2 g \sin\theta_1$$

即

$$M(\Theta) = \begin{bmatrix} m_1 l_1^2 + I_{zz1} + I_{zz2} + m_2 d_2^2 & \\ & m_2 \end{bmatrix}, V(\Theta,\dot{\Theta}) = \begin{bmatrix} 2 m_2 d_2 \dot{\theta}_1 \dot{d}_2 \\ -m_2 d_2 \dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix}$$

$$G(\Theta) = \begin{bmatrix} (m_1 l_1 + m_2 d_2) g \cos\theta_1 \\ m_2 g \sin\theta_1 \end{bmatrix}$$

拉格朗日方程

考虑拉格朗日函数

$$L(\Theta,\dot{\Theta}) = k(\Theta,\dot{\Theta}) - u(\Theta)$$

其中$\Theta = [q_1, q_2, \dots, q_n]$

$$k(\Theta,\dot{\Theta}) = \frac{1}{2}\dot{\Theta}^T M(\Theta)\dot{\Theta} = \frac{1}{2}\sum_{i,j} m_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j$$

由于$M(\Theta)$是对称的，$L(\Theta,\dot{\Theta})$相对于第k个关节速度的偏导数：

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_j m_{kj}\dot{q}_j$$

因此

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \sum_j m_{kj}\ddot{q}_j + \sum_j \frac{d}{dt} m_{kj}\dot{q}_j$$

$$= \sum_j m_{kj}\ddot{q}_j + \sum_j \left[\sum_i \frac{\partial m_{kj}}{\partial q_i}\dot{q}_i\right]\dot{q}_j = \sum_j m_{kj}\ddot{q}_j + \sum_{i,j} \frac{\partial m_{kj}}{\partial q_i}\dot{q}_i\dot{q}_j$$

$L(\Theta,\dot{\Theta})$相对于第k个关节位置的偏导数

$$\frac{\partial L}{\partial q_k} = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k}\dot{q}_i\dot{q}_j - \frac{\partial u}{\partial q_k}$$

拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial k}{\partial \dot{\Theta}} - \frac{\partial k}{\partial \Theta} + \frac{\partial u}{\partial \Theta} = \tau$$

因此，对于每个$k = 1, \ldots, n$，拉格朗日方程可写成

$$\sum_j m_{kj}\ddot{q}_j + \sum_{i,j}\left\{\frac{\partial m_{kj}}{\partial q_i} - \frac{1}{2}\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k}\right\}\dot{q}_i\dot{q}_j + \frac{\partial u}{\partial q_k} = \tau_k$$

通过改变求和顺序并使用对称性质，我们可以证明：

$$\sum_{i,j}\left\{\frac{\partial m_{kj}}{\partial q_i}\right\}\dot{q}_i\dot{q}_j = \frac{1}{2}\sum_{i,j}\left\{\frac{\partial m_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial m_{ki}}{\partial q_j}\right\}\dot{q}_i\dot{q}_j$$

因此

$$\sum_{i,j}\left\{\frac{\partial m_{kj}}{\partial q_i} - \frac{1}{2}\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k}\right\}\dot{q}_i\dot{q}_j = \sum_{i,j}\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial m_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial m_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k}\right\}\dot{q}_i\dot{q}_j = \sum_{i,j} c_{ijk}\dot{q}_i\dot{q}_j$$

其中，我们定义

$$c_{ijk} := \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial m_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial m_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k}\right\}$$

c_{ijk}称为（第一类）克里斯托费尔（Christoffel）符号。

对于固定的k，$c_{ijk} = c_{jik}$。

拉格朗日方程

如果定义

$$g_k = \frac{\partial u}{\partial q_k}$$

那么可以将拉格朗日方程写为

$$\sum_{j=1}^{n} m_{kj}\ddot{q}_j + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ijk}\dot{q}_i\dot{q}_j + g_k = \tau_k, k = 1, \dots, n$$

或矩阵形式

$$M(\Theta)\ddot{\Theta} + V_m(\Theta, \dot{\Theta})\dot{\Theta} + G(\Theta) = \tau$$

其中，矩阵$V_m(\Theta, \dot{\Theta})$中的第$(k, j)$项元素被定义为

$$c_{kj} = \sum_{i=1}^{n} c_{ijk}\,\dot{q}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial m_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial m_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k}\right\}\dot{q}_i$$

反对称性

此处，**反对称性**是指机械臂动力学方程

$$M(\Theta)\ddot{\Theta} + V_m(\Theta,\dot{\Theta})\dot{\Theta} + G(\Theta) = \tau$$

中的质量矩阵$M(\Theta)$和矩阵$V_m(\Theta,\dot{\Theta})$之间的一个重要关系，即

矩阵$\dot{M}(\Theta) - 2V_m(\Theta,\dot{\Theta})$是反对称的

证明：根据链式法则，$\dot{M}(\Theta)$的第(k,j)元素是

$$\dot{m}_{kj} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial m_{kj}}{\partial q_i}\dot{q}_i$$

因此，矩阵$\dot{M}(\Theta) - 2V_m(\Theta,\dot{\Theta})$的第$(k,j)$个元素是

$$n_{kj} = \dot{m}_{kj} - 2c_{kj} = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial m_{kj}}{\partial q_i} - \left\{\frac{\partial m_{kj}}{\partial q_i} + \frac{\partial m_{ki}}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k}\right\}\right]\dot{q}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k} - \frac{\partial m_{ki}}{\partial q_j}\right]\dot{q}_i$$

类似地，第(j,k)个元素是

$$n_{jk} = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial m_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{ji}}{\partial q_k}\right]\dot{q}_i$$

反对称性

$$n_{kj} = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial m_{ij}}{\partial q_k} - \frac{\partial m_{ki}}{\partial q_j} \right] \dot{q}_i \,, n_{jk} = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\partial m_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial m_{ji}}{\partial q_k} \right] \dot{q}_i$$

由于质量矩阵$M(\Theta)$是对称的，即$m_{ij} = m_{ji}$，因此$n_{kj} = -n_{jk}$

矩阵$\dot{M}(\Theta) - 2V_m(\Theta, \dot{\Theta})$是反对称的。

笛卡尔状态空间方程

- **笛卡尔状态空间方程**

应用笛卡尔变量的一般形式建立操作臂的动力学方程:

$$F = M_\chi(\Theta)\ddot{\chi} + V_\chi(\Theta,\dot{\Theta}) + G_\chi(\Theta)$$

--- $\boldsymbol{F}$ 作用于机器人末端的虚拟操作力-力矩矢量

--- χ 能够恰当表达末端执行器位姿的笛卡尔矢量

--- $M_\chi(\Theta)$ 笛卡尔质量矩阵

--- $V_\chi(\Theta,\dot{\Theta})$ 笛卡尔空间的速度项矢量

--- $G_\chi(\Theta)$ 笛卡尔空间的重力项矢量

笛卡尔状态空间方程

$$F = M_\chi(\Theta)\ddot{\chi} + V_\chi(\Theta,\dot{\Theta}) + G_\chi(\Theta)$$

$$\tau = M(\Theta)\ddot{\Theta} + V(\Theta,\dot{\Theta}) + G(\Theta)$$

F用关节驱动力表示： $\tau = J^T(\Theta)F$

$$F = J^{-T}\tau = J^{-T}M(\Theta)\ddot{\Theta} + J^{-T}V(\Theta,\dot{\Theta}) + J^{-T}G(\Theta)$$

$$\dot{\chi} = J\dot{\Theta} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\chi} = \dot{J}\dot{\Theta} + J\ddot{\Theta} \quad \Rightarrow \quad \ddot{\Theta} = J^{-1}\ddot{\chi} - J^{-1}\dot{J}\dot{\Theta}$$

代入得:

$$F = J^{-T}M(\Theta)J^{-1}\ddot{\chi} - J^{-T}M(\Theta)J^{-1}\dot{J}\dot{\Theta} + J^{-T}V(\Theta,\dot{\Theta}) + J^{-T}G(\Theta)$$

于是

$$M_\chi(\Theta) = J^{-T}(\Theta)M(\Theta)J^{-1}(\Theta)$$

$$V_\chi(\Theta,\dot{\Theta}) = J^{-T}(\Theta)(V(\Theta,\dot{\Theta}) - M(\Theta)J^{-1}(\Theta)\dot{J}\dot{\Theta})$$

$$G_\chi(\Theta) = J^{-T}(\Theta)G(\Theta)$$

$J(\Theta)$、F和χ在同一坐标系下，这个坐标系的选择是任意的。

注意：当操作臂达到奇异位置时，笛卡尔空间动力学方程中的某些量将趋于无穷大

笛卡尔状态空间方程

例： 两连杆平面机械臂的笛卡尔空间形式的动力学方程.

$$M(\Theta)=\begin{pmatrix} m_2l_2^2+2m_2l_1l_2c_2+(m_1+m_2)l_1^2 & m_2l_2^2+m_2l_1l_2c_2 \\ m_2l_2^2+m_2l_1l_2c_2 & m_2l_2^2 \end{pmatrix}$$

$$V(\Theta,\dot{\Theta})=\begin{bmatrix} -m_2l_1l_2s_2\dot{\theta}_2^2-2m_2l_1l_2s_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\ m_2l_1l_2s_2\dot{\theta}_1^2 \end{bmatrix}$$

$$G(\Theta)=\begin{bmatrix} m_2l_2gc_{12}+(m_1+m_2)l_1gc_1 \\ m_2l_2gc_{12} \end{bmatrix}$$

$$J(\Theta)=\begin{pmatrix} l_1s_2 & 0 \\ l_1c_2+l_2 & l_2 \end{pmatrix}\quad,\quad J^{-1}(\Theta)=\frac{1}{l_1l_2s_2}\begin{pmatrix} l_2 & 0 \\ -l_1c_2-l_2 & l_1s_2 \end{pmatrix}$$

笛卡尔状态空间方程

可以得到:

$$M_\chi(\Theta)=\begin{pmatrix} m_2+\dfrac{m_1}{s_2^2} & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \qquad G_\chi(\Theta)=\begin{bmatrix} m_1 g\dfrac{c_1}{s_2}+m_2 g s_{12} \\ m_2 g c_{12} \end{bmatrix}$$

$$V_\chi(\Theta,\dot{\Theta})=\begin{bmatrix} -(m_2 l_1 c_2+m_2 l_2)\dot{\theta}_1^2-m_2 l_2\dot{\theta}_2^2-(2m_2 l_2+m_2 l_1 c_2+m_1 l_1\dfrac{c_2}{s_2^2})\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \\ m_2 l_1 s_2\dot{\theta}_1^2+m_2 l_1 s_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

当 $s_2=0$ 时, 操作臂位于奇异位置

笛卡尔位形空间中的力矩方程 $\tau = J^T(\Theta)F$

$$F = M_\chi(\Theta)\ddot{\chi} + V_\chi(\Theta,\dot{\Theta}) + G_\chi(\Theta)$$

- ## 笛卡尔位形空间中的力矩方程

利用笛卡尔空间动力学方程写出等价的关节力矩:

$$\tau = J^T(\Theta)(M_\chi(\Theta)\ddot{\chi} + V_\chi(\Theta,\dot{\Theta}) + G_\chi(\Theta))$$

改写为:

$$\tau = J^T(\Theta)M_\chi(\Theta)\ddot{\chi} + B_\chi(\Theta)\left[\dot{\Theta}\dot{\Theta}\right] + C_\chi(\Theta)\left[\dot{\Theta}^2\right] + G(\Theta)$$

$B_\chi(\Theta)$是哥氏力系数矩阵，$C_\chi(\Theta)$是离心系数矩阵

注意：$G(\Theta)$ 与关节空间方程中的相同，但一般情况下，

$$B_\chi(\Theta) \neq B(\Theta),\ \ C_\chi(\Theta) \neq C(\Theta)$$

Thanks !