2020-2021 学年秋学期

《复变函数与积分变换》

林　智

浙江大学数学科学学院

第五章　留　数

§5.1 孤立奇点

定义: 函数不解析的点称为奇点。如果函数 $f(z)$ 虽然在 z_0 不解析, 但在 z_0 的某一个去心邻域 $0 < |z - z_0| < \delta$ 内处处解析, 则 z_0 称为 $f(z)$ 的孤立奇点。

例如: 函数 $\dfrac{1}{z}$ 和 $e^{\frac{1}{z}}$ 都以 $z = 0$ 为孤立奇点。

并不是所有奇点都是孤立的

例如: $z = 0$ 就是 $f(z) = \dfrac{1}{\sin(1/z)}$ 的非孤立奇点 (聚点)

孤立奇点的分类

将函数 $f(z)$ 在孤立奇点 z_0 的去心邻域 $0 < |z - z_0| < \delta$ 作洛朗展开并根据展开式的不同情况对奇点作分类

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$$

1. 可去奇点 $(\frac{\sin z}{z}, z = 0)$

如洛朗级数中不含 $z - z_0$ 的负幂项，则孤立奇点 z_0 称为 $f(z)$ 的可去奇点。这时，显然有：$\lim_{z\to z_0} f(z) = c_0$。若我们补充定义 $f(z_0) = c_0$，则在圆域 $|z - z_0| < \delta$ 内 $f(z)$ 成为解析（有幂级数展开）。

孤立奇点的分类 (续)

2. 极点 ($\dfrac{z-2}{(z^2+1)(z-1)^3}$, $z=1,\pm\mathrm{i}$)

如洛朗级数中只有有限多个 $z-z_0$ 的负幂项, 且其中关于 $(z-z_0)^{-1}$ 的最高幂为 $(z-z_0)^{-m}$, 即

$$f(z)=c_{-m}(z-z_0)^{-m}+\cdots+c_{-1}(z-z_0)^{-1}+\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n,$$

$(m\geq 1, c_{-m}\neq 0)$ 则孤立奇点 z_0 称为 $f(z)$ 的m 级极点

2. 极点 (续)

上式也可以写成 $f(z)=\dfrac{g(z)}{(z-z_0)^m}=\dfrac{\sum_{n=0}^{\infty}c_{n-m}(z-z_0)^n}{(z-z_0)^m}$ (*)

其中 $g(z)$ 在 $|z-z_0|<\delta$ 内是解析函数，且 $g(z_0)\neq 0$

反过来，当任何一个函数 $f(z)$ 能表示为 (*) 的形式，且 $g(z_0)\neq 0$ 时，则 z_0 是 $f(z)$ 的 m 级极点

这时，显然有：$\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty$

问题：$z=0$ 是 $\dfrac{e^z-1}{z^3}$ 的几级极点？

孤立奇点的分类 (续)

3. 本性奇点 ($e^{1/z}, \sin(1/z), z = 0$)

如果在洛朗级数中含有无穷多 $z - z_0$ 的负幂项, 则孤立奇点 z_0 称为 $f(z)$ 的本性奇点.

这时，显然有：$\lim_{z \to z_0} f(z)$不存在 (也不是 ∞)

孤立奇点的分类 (续)

综上所述:

- 如果 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点 $\Longleftrightarrow \lim_{z\to z_0} f(z)$ 存在且有限;
- 如果 z_0 为 $f(z)$ 的极点 $\Longleftrightarrow \lim_{z\to z_0} f(z)=\infty$;
- 如果 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点 $\Longleftrightarrow \lim_{z\to z_0} f(z)$ 不存在

我们可以利用上述极限的不同情形来判别孤立奇点的类型.

孤立奇点的性质——可去奇点

定理： z_0 是 $f(z)$ 的孤立奇点，则下面的结论等价：

1. z_0 是 $f(z)$ 的可去奇点；
2. $\lim_{z\to z_0} f(z)$ 存在且不等于 ∞;
3. $f(z)$ 在 z_0 的一个邻域内有界;
4. $\lim_{z\to z_0} f(z)(z-z_0)=0$

证明： $(1)\Longrightarrow(2)\Longrightarrow(3)\Longrightarrow(4)$ 显然成立。只需证明 $(4)\Longrightarrow(1)$。设 $f(z)$ 在 z_0 的 δ 去心邻域内解析，由洛朗展开定理得

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_n)^n$$

证明（续）

设 $C_r = \{z : |z - z_0| = r < \delta\}$

$$\begin{aligned}
|C_{-n}| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{-n+1}}\,\mathrm{d}z\right| \\
&\le \frac{1}{2\pi}\oint_{C_r} |f(z)(z-z_0)| \cdot |z-z_0|^{n-2}\,\mathrm{d}s \\
&\le \frac{2\pi r}{2\pi}\left(\max_{z\in C_r}|f(z)(z-z_0)|\right)\cdot r^{n-2} \\
&= r^{n-1}\max_{z\in C_r}|f(z)(z-z_0)| \to 0,\ r\to 0 (n\ge 1)
\end{aligned}$$

孤立奇点的性质——极点

定理： z_0 是函数 $f(z)$ 的 m 级极点的充分必要条件为：
$f(z)$ 可表为 $f(z)=(z-z_0)^{-m}\psi(z)$，其中 ψ 在 z_0 处解析且 $\psi(z_0)\neq 0$

定理： z_0 是函数 $f(z)$ 的 m 级极点的充分必要条件为：

z_0 是函数 $\frac{1}{f(z)}$ 的 m 级零点，$m\geq 1$

定理： <u>z_0 是函数 $f(z)$ 的 m 级极点的充分必要条件为：</u>

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty$$

定义： 在复平面上除了极点外没有其他类型奇点的单值解析函数，称为<u>亚纯函数</u>

孤立奇点的性质——本性奇点

定理： z_0 是函数 $f(z)$ 的本性奇点的充分必要条件为：
$\lim_{z\to z_0} f(z)$ 不存在

几个例子

例 1：考察函数 $\dfrac{1}{\sin z}$ 的奇点及其类型

例 2：考察函数 $\dfrac{1}{z^n(\mathrm{e}^z-1)}$ 的奇点及其类型

例 3：考察函数 $\dfrac{\mathrm{e}^z-1}{z^m}$, $m\in\mathbb{Z}$ 在 $z=0$ 处的奇点类型

函数在无穷远点的性态

如果函数 $f(z)$ 在无穷远点 $z=\infty$ 的去心邻域内解析，称无穷远点为 $f(z)$ 的孤立奇点。

作变换 $w=1/z$ 把扩充 z 平面上 ∞ 的去心邻域 $R<|z|<+\infty$ 映射成扩充 w 平面上原点的去心邻域 $0<|w|<1/R$. 则
$f(z) \Longrightarrow f(1/w) := \varphi(w)$.

则 $f(z)$ 在 $z=\infty$ 的奇点类型，等价于 $\varphi(w)$ 在 $w=0$ 的奇点类型。

即 $z=\infty$ 是否 $f(z)$ 的可去奇点、极点或本性奇点，完全看极限 $\lim_{z\to\infty} f(z)$ 是否是有限值、无穷大或不存在。

几个例子

例 1：考察函数 $(z-2)(z^2+1)$ 的奇点及其类型

例 2：考察函数 $\mathrm{e}^{z-\frac{1}{z}}$ 的奇点及其类型

例 2：考察函数 $\mathrm{e}^{\tan\frac{1}{z}}$ 处的奇点类型

§5.2 留数

1. 留数的定义及留数定理

如果函数 $f(z)$ 在 z_0 的邻域 D 内解析，由柯西积分定理

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0, \quad C \subset D$$

但如果 z_0 为一孤立奇点，则上述积分一般不为 0（此时 C 为包含在 z_0 的某个去心邻域 $0 < |z - z_0| < R$ 的任意一条正向简单闭曲线）。

在该去心邻域内对 $f(z)$ 作洛朗展开

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n(z - z_n)^n$$

并对右端级数沿 C 作逐项积分可得: $\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\, C_{-1}$.

1. 留数的定义及留数定理 (续)

即 C_{-1} 是积分过程中唯一残留下来的洛朗系数

称 C_{-1} 为 $f(z)$ 在 z_0 的留数 (Residue)，记作 $\mathrm{Res}[f(z), z_0]$。

$$\mathrm{Res}[f(z), z_0] = C_{-1} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C f(z) \mathrm{d}z$$

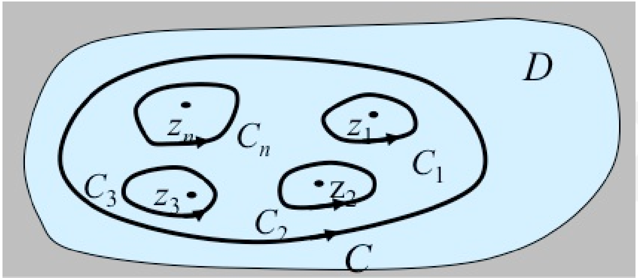
留数定理

设函数 $f(z)$ 在区域 D 内除有限个孤立奇点 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 外处处解析. C 是 D 内包围诸奇点的一条正向简单闭曲线，则

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C f(z) \mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f(z), z_k].$$

1. 留数的定义及留数定理 (续)

留数定理的证明：复合闭路定理



求函数在孤立奇点 z_0 处的留数即求它在洛朗级数中 $(z - z_0)^{-1}$ 项的系数 c_{-1} 即可. 但如果知道奇点的类型, 求留数可能更简便。。。

2. 留数的计算规则

基本思想

1. 如果 z_0 是 $f(z)$ 的可去奇点，$\mathrm{Res}[f(z), z_0] = 0$;
2. 如果 z_0 是 $f(z)$ 的本性奇点，只好作完整的洛朗展开;
3. 如果 z_0 是 $f(z)$ 的极点，有一些便于操作的规则。

规则 1

如果 z_0 是 $f(z)$ 的 m 级极点

$$\mathrm{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}} \left[(z - z_0)^m f(z) \right]$$

特殊情形： $m = 1$

2. 留数的计算规则 (续)

规则 2

设 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$，而 P 和 Q 在 z_0 都解析。如 $P(z_0)\neq 0$，$Q(z_0)=0$, $Q'(z_0)\neq 0$，则 z_0 是 $f(z)$ 的一级极点，且

$$\operatorname{Res}[f(z),z_0]=\frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

因为

$$Q(z)=(z-z_0)\varphi(z),\ \varphi(z_0)\neq 0 = Q'(z_0)$$

2. 留数的计算规则 (续)

规则 3

如果 z_0 是 $g(z)$ 的 k 级零点 $(k \geq 1)$，是 $h(z)$ 的 $k+1$ 级零点，则 z_0 是 $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$ 的单极点，且

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = (k+1)\frac{g^{(k)}(z_0)}{h^{(k+1)}(z_0)}$$

规则 4

设 $g(z)$ 和 $h(z)$ 在 z_0 解析且 $g(z_0) \neq 0, h(z_0) = h'(z_0) = 0$, $h''(z_0) \neq 0$, 则 z_0 是 $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$ 的二级极点，且

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = 2\frac{g'(z_0)}{h''(z_0)} - \frac{2}{3}\frac{g(z_0)h'''(z_0)}{[h''(z_0)]^2}$$

例子

例 1：计算积分 $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{z\,\mathrm{e}^{z}}{z^{2}-1}\mathrm{d}z$

解：一级极点 ±1(规则 1, 2, 3) $I=2\pi\mathrm{i}\operatorname{ch}1$

例 2：计算积分 $\displaystyle\oint_{|z|=7}\frac{z+1}{1-\cos z}\mathrm{d}z$

解：二级极点 $0,\pm2\pi$(规则 1, 4) $I=2\pi\mathrm{i}\times2\times3=12\pi\mathrm{i}$

例 3：计算积分 $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{z}{z^{4}-1}\mathrm{d}z$

解：一级极点 $\pm1,\pm\mathrm{i}$(规则 1, 2, 3) $I=0$

例子

例 4：计算积分 $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{\mathrm{e}^z}{z(z-1)^2}\mathrm{d}z$

解：一级极点 0，二级极点 1(规则 1, 2, 4) $I=2\pi\mathrm{i}$

例 5：计算积分 $\displaystyle\oint_{|z|=1}\frac{z\sin z}{(1-\mathrm{e}^z)^3}\mathrm{d}z$

解：一级极点 0!!(规则 1, 2, 3) $I=-2\pi\mathrm{i}$

例 6：计算积分 $\displaystyle\oint_{|z|=1/2}\frac{1}{z^{101}(1-z^2)}\mathrm{d}z$

解：101 级极点 0(规则 1?) $I=2\pi\mathrm{i}$

作业五-A （(10/28 23:59 前提交至“学在浙大”)

pp.158 习题五： 1.(4)(8), 2.(1)(5)(9), 3.(2)(4)(6), 4.(1)

3. 在无穷远点的留数

设函数 $f(z)$ 在圆环域 $R < |z| < \infty$ 内解析, C 为圆环域内绕原点的任何一条简单闭曲线, 则积分 $\oint_{C^-} f(z)\mathrm{d}z$ 的值与 C 无关, 称其为$f(z)$ 在 ∞ 点的留数, 记作

$$\mathrm{Res}[f(z),\infty] = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C^-} f(z)\mathrm{d}z$$

C^- 理解为圆环域内绕 ∞ 的任何一条负向简单闭曲线。因此, $\mathrm{Res}[f(z),\infty] = -c_{-1}$.

3. 在无穷远点的留数（续）

注： 当 ∞ 为可去奇点时，$\mathrm{Res}[f(z),\infty]$ 不一定为 0。

例如：$\dfrac{1}{1-z}, \dfrac{1}{z}$

定理： 如果 $f(z)$ 在扩充复平面内只有有限个孤立奇点，则 $f(z)$ 在各奇点 (包括 ∞ 点) 的留数总和必等于零。

一个例子：求函数 $f(z)=\dfrac{e^z}{z(z-1)}$ 在 $z=\infty$ 的留数

解法一：

在 ∞ 点的邻域 $1<|z|<\infty$ 内将 $f(z)$ 展开成洛朗级数并找出 $1/z$ 项的系数

$$f(z)=\frac{1}{z^2}\frac{e^z}{1-\frac{1}{z}}=\frac{1}{z^2}\Big(1+z+\frac{z^2}{2}+\cdots\Big)\Big(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\Big)$$

其中 $-c_{-1}=-\big(1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\big)=\sum_{n=1}^{\infty}(n!)^{-1}=1-e$

解法二

$$\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-\big(\mathrm{Res}[f(z),0]+\mathrm{Res}[f(z),1]\big)=1-e$$

针对无穷远点的留数计算规则

规则 5

$$\mathrm{Res}[f(z),\infty]=-\mathsf{Res}\left[\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right),0\right]$$

证明： 在无穷远点的留数定义中，取简单闭曲线 C 为半径足够大的圆周 $|z|=\rho$，并令 $z=\rho e^{i\theta},\zeta=1/z=re^{i\varphi}$，则 $\rho=r^{-1},\theta=-\varphi$，由此

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}[f(z),\infty]&=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-}f(z)\mathrm{d}z\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{-2\pi}f(\rho e^{i\theta})\rho ie^{i\theta}\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

规则 5 的证明（续）

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^{2\pi} f\Big(\frac{1}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}\Big)\frac{\mathrm{i}}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}\mathsf{d}\varphi \\
&= -\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^{2\pi} f\Big(\frac{1}{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}\Big)\frac{1}{r^2\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\varphi}}\mathsf{d}(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}) \\
&= -\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|\zeta|=\rho^{-1}} \frac{1}{\zeta^2} f\Big(\frac{1}{\zeta}\Big)\mathsf{d}\zeta \\
&= -\mathsf{Res}\Big[\frac{1}{z^2} f\Big(\frac{1}{z}\Big), 0\Big]
\end{aligned}
$$

例子

例 7：计算 $\displaystyle\oint_{|z|=4}\frac{z^{15}\,\mathrm{d}z}{(z^4+2)^3(z^2+1)^2}$

解：$|z|=4$ 内有 6 个极点：

$\pm\mathrm{i}$(二级)； $\sqrt[4]{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi+2k\pi}{4}}, k=0,1,2,3$(三级)

直接展开？定理二？太复杂！利用规则 5：

$$\begin{aligned} I &= 2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right),0\right] \\ &= 2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z(1+2z^4)^3(1+z^2)^2},0\right] \\ &= 2\pi\mathrm{i} \end{aligned}$$

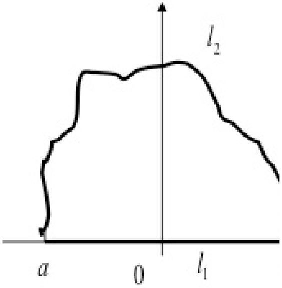
例子

例 7：计算 $\oint_{|z|=2} \frac{z \mathrm{d} z}{z^4 - 1}$

解：$I = 2\pi \mathrm{i} \mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), 0\right] = 2\pi \mathrm{i} \mathrm{Res}\left[\frac{z}{1 - z^4}, 0\right] = 0$

§5.3 留数在定积分计算上的应用

留数定理是复变函数的定理，若要在实变函数定积分中应用，必须将实变函数变为复变函数。这就要利用解析延拓的概念。留数定理又是应用到回路积分的，要应用到定积分，就必须将定积分变为回路积分中的一部分。



如图，对于实积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，变量 x 定义在闭区间 $[a,b]$(线段 l_1)，此区间可作为回路 $l=l_1+l_2$ 的一部分。实积分要变为回路积分，则实函数必须解析延拓到复平面上包含回路的一个区域中，而实积分成为回路积分的一部分:

或者利用变量变换

例如形如 $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\mathrm{d}\theta$ 的积分，其中 R 为有理函数

令 $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，则 $\mathrm{d}z = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta \Longleftrightarrow \mathrm{d}\theta = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$ 而

$$\sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}} = \frac{z^2-1}{2\mathrm{i}\,z}, \quad \cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2} = \frac{z^2+1}{2z},$$

从而积分化为沿正向单位圆周的积分

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\mathrm{d}\theta = \oint_{|z|=1} R\left[\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2\mathrm{i}\,z}\right]\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$$

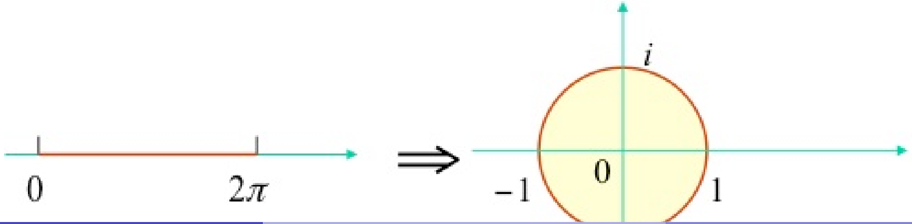
$$:= \oint_{|z|=1} f(z)\mathrm{d}z$$

或者利用变量变换 (续)

其中 $f(z)$ 是 z 的有理函数且在单位圆周 $|z|=1$ 上分母不为零(因为 R 在求积区间内分母不为零)。由留数定理

$$\oint_{|z|=1} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f(z), z_k]$$

其中 $z_k, k=1,\cdots,n$ 为单位圆内的 $f(z)$ 的孤立奇点.



例 1 计算 $I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{1 - 2p\cos\theta + p^2} \mathrm{d}\theta, 0 < p < 1$

[解] 由于 $0 < p < 1$, 被积函数的分母在 $0 \le \theta \le 2\pi$ 内不为零, 因而积分是有意义的.

$$
\begin{aligned}
I &= \oint_{|z|=1} \frac{z^2 + z^{-2}}{2} \cdot \frac{1}{1 - 2p \cdot \frac{z+z^{-1}}{2} + p^2} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z} \\
&= \oint_{|z|=1} \frac{z^4 + 1}{2\mathrm{i}z^2(1 - pz)(z - p)} \mathrm{d}z := \oint_{|z|=1} f(z)\mathrm{d}z
\end{aligned}
$$

三个极点: $z = 0$(二级), $z = p$(一极), $z = 1/p$(在圆外!)

例 1 计算 $I=\int_0^{2\pi}\dfrac{\cos 2\theta}{1-2p\cos\theta+p^2}\mathrm{d}\theta, 0<p<1$

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^2\frac{z^4+1}{2\mathrm{i}z^2(1-pz)(z-p)}\right]=-\frac{1+p^2}{2\mathrm{i}p^2}$$

$$\operatorname{Res}[f(z),p]=\lim_{z\to 0}(z-p)\frac{z^4+1}{2\mathrm{i}z^2(1-pz)(z-p)}=\frac{1+p^4}{2\mathrm{i}p^2(1-p^2)}$$

$$I=2\pi\mathrm{i}\left[-\frac{1+p^2}{2\mathrm{i}p^2}+\frac{1+p^4}{2\mathrm{i}p^2(1-p^2)}\right]=\frac{2\pi p^2}{1-p^2}$$

例 2 计算 $I=\int_0^{\pi}\dfrac{\mathrm{d}x}{1+\varepsilon\cos 2x}, 0<\varepsilon<1$

[解] 令 $\theta=2x,$

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{1+\varepsilon\cos\theta}=\frac{1}{2}\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z(1+\varepsilon\frac{z+z^{-1}}{2})}$$
$$=\frac{1}{\mathrm{i}}\oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{\varepsilon z^2+2z+\varepsilon}:=\oint_{|z|=1}f(z)\mathrm{d}z$$

$f(z)$ 有两个极点,$z=\dfrac{-1\pm\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}$,但只有一个在圆内!

$$I=2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}[f(z),\frac{-1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}]=\frac{\pi\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$$

例 3 计算 $I = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+\cos^2\theta}$

[解] 令 $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, 则 $I = \oint_{|z|=1} \frac{4z\mathrm{d}z}{\mathrm{i}(z^4+6z^2+1)}$

再令 $u = z^2$, 则 $I = \oint_{|u|=1} \frac{4\mathrm{d}u}{\mathrm{i}(u^2+6u+1)}$

因为当 z 绕圆一周时, u 绕圆两周

显然被积函数在圆内只有一个一级极点 $u = -3+2\sqrt{2}$,

$$I = 2\pi\mathrm{i} \frac{4}{\mathrm{i}[u-(-3-2\sqrt{2})]}\Big|_{u=-3+2\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,\pi$$

例 4 计算积分 $I=\int_0^{\pi}\frac{\cos mx}{5-4\cos x}\mathrm{d}x$

[解] 被积函数是 x 的偶函数 $\Longrightarrow I=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos mx}{5-4\cos x}\mathrm{d}x$

令 $I_2=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin mx}{5-4\cos x}\mathrm{d}x=0$，则

$$I=I+\mathrm{i}I_2=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}}{5-4\cos x}\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{i}}{4}\oint_{|z|=1}\frac{z^m\mathrm{d}z}{(z-2)(z-\frac{1}{2})}$$

被积函数在圆内只有一个一级极点 $z=1/2$，

$$I=2\pi\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{i}z^m}{4(z-2)}\bigg|_{z=1/2}=\frac{\pi}{3\cdot 2^m}$$

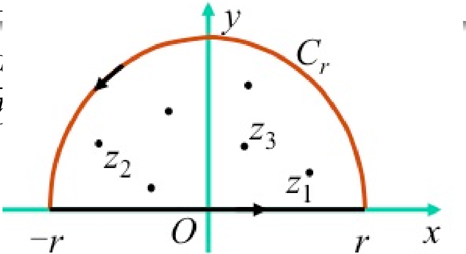
另一类积分，形如 $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\mathrm{d}x$，其中。。。

被积函数 $R(x)$ 是 x 的有理函数，且分母的次数比分子的次数至少高二次，且$R(x)$ 在实轴上没有孤立

不失一般性，设

$$R(z) = \frac{z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a}{z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b}$$

$(m-n \geq 2)$ 为一已约分式。



取积分路线如图所示，其中 C_r 是以原点为中心，r 为半径的上半圆周. 取 r 适当大，使 $R(z)$ 所有的在上半平面内的极点 z_k 都包在这积分路线内.

对于这样的被积函数和积分路径，由留数定理

$$\int_{-r}^{r} R(x)\mathrm{d}x + \int_{C_r} R(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_k \mathrm{Res}[R(z), z_k]$$

重要的是,此等式不因 r 不断增大而有所改变, 而

$$\begin{aligned} |R(z)| &= \frac{1}{|z|^{m-n}} \cdot \frac{|1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}|}{|1 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}|} \\ &\le \frac{1}{|z|^{m-n}} \cdot \frac{1 + |a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}|}{1 - |b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}|} \\ &< \frac{M}{|z|^{m-n}} < \frac{M}{|z|^2}, (\text{只要}|z|\text{足够大}) \end{aligned}$$

从而

$$\Longrightarrow \left|\int_{C_r} R(z)\mathrm{d}z\right| \leq \int_{C_r} |R(z)|\mathrm{d}s \leq \frac{M}{r^2}\pi r \to 0,\ r \to \infty$$

因此

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_k \mathrm{Res}[R(z), z_k]$$

而如果 $R(x)$ 是偶函数

$$\int_0^{\infty} R(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\mathrm{d}x = \pi\mathrm{i}\sum_k \mathrm{Res}[R(z), z_k]$$

例 5 计算 $I=\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{x^2\mathrm{d}x}{x^4+x^2+1}$

$f(z)=\dfrac{z^2}{z^4+z^2+1}=\dfrac{z^2}{(z^2+z+1)(z^2-z+1)}$ 有四个一级极点：

$$z_{1,2}=\frac{\pm1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2},\qquad z_{3,4}=\frac{\pm1-\sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2}$$

其中 z_1, z_2 在上半平面，所以

$$I=2\pi\mathrm{i}\{\mathrm{Res}[f(z),z_1]+\mathrm{Res}[f(z),z_2]\}=\frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

例 6 计算 $I=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{n+1}}$

$f(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)^{n+1}}$ 在上半平面只有一个极点 $z=\mathrm{i}$, 它是 $n+1$ 级的, 所以

$$\begin{aligned} I &= \pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}[f(z),\mathrm{i}] = \frac{\pi\mathrm{i}}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}\Big(\frac{1}{z+\mathrm{i}}\Big)^{n+1}\Bigg|_{z=\mathrm{i}} \\ &= \frac{(-1)^n\pi\mathrm{i}}{n!}\frac{(n+1)(n+2)\cdots 2n}{(2\mathrm{i})^{2n+1}} = \frac{\pi(2n-1)!!}{2(2n)!!} \end{aligned}$$

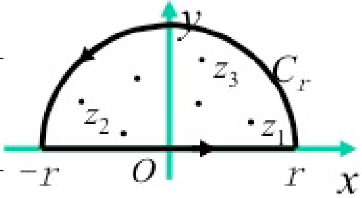
3. 形如 $\int^{\infty} R(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}\mathrm{d}x,\ (a>0)$ 的积分

当 $R(x)$ 是 x 的有理函数而分母的次数至少比分子的次数高一次，且 $R(x)$在实数轴上没有奇点时，积分是存在的.

与上一类积分类似，由于 $m-n\geq 1$，故对充分大的 $|z|$ 有 $|R(z)|<\dfrac{M}{|z|}$.因此在半径 r 充分大的 C_r 上有:

$$\left|\int_{C_r} R(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}\mathrm{d}z\right| < \frac{M}{r}\int_{C_r} \mathrm{e}^{-}$$

$$= M\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-}$$



3. 形如 $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}\mathrm{d}x,\ (a>0)$ 的积分 (续)

而

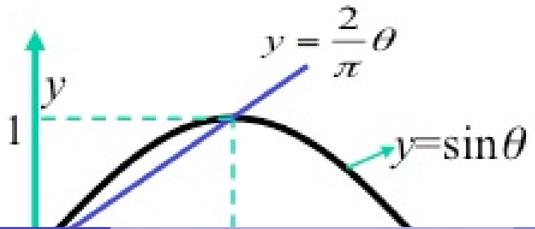
$$\begin{aligned} M\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-ar\sin\theta}\mathrm{d}\theta &= 2M\int_0^{\pi/2}\mathrm{e}^{-ar\sin\theta}\mathrm{d}\theta \\ \le\ & 2M\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-ar(2\theta/\pi)}\mathrm{d}\theta = -\frac{M\pi}{ar}\mathrm{e}^{-2aR\theta/\pi}\Big|_0^{\pi/2} \\ =\ & \frac{M\pi}{ar}(1-\mathrm{e}^{-ar}) \to 0,\ r\to\infty \end{aligned}$$

因此 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_k \mathrm{Res}\big[R(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}az}, z_k\big]$

3. 形如 $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{iax}dx,\ (a>0)$ 的积分 (续)

等价地

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\cos ax\,dx + i\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\sin ax\,dx$$
$$= \ 2\pi i\sum_k \operatorname{Res}[R(z)e^{iaz}, z_k]$$



例 7 计算 $I=\int_0^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+a^2}\mathrm{d}x\,(a>0)$

[解] 这里 $m=2, n-1, m-n=1$ 且 $R(z)=\frac{z}{z^2+a^2}$ 在实轴上无孤立奇点，因此积分存在。$R(z)$ 在上半平面有一级极点 $z=a\mathrm{i}$，所以

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{x^2+a^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}[R(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}az},a\mathrm{i}]$$

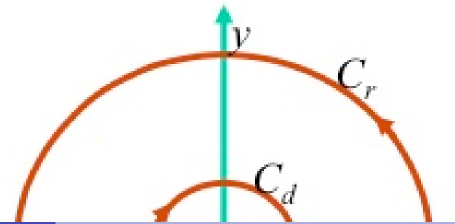
$$=2\pi\mathrm{i}\lim_{z\to a\mathrm{i}}\frac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z+a\mathrm{i}}=\pi\mathrm{i}\mathrm{e}^{-a}$$

因此，$I=\frac{1}{2}\mathrm{Im}(\pi\mathrm{i}\mathrm{e}^{-a})=\frac{\pi\mathrm{e}^{-a}}{2}$

例 8 计算 $I=\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$

[解] $f(z)=1/z$ 在实轴上有奇点 $z=0$，因此不能像之前的例子那样取一个上半圆作围道积分。为了使积分路线不通过原点，取如下图所示的路线．由柯西积分定理，

$$\int_{C_r}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\mathrm{d}z+\int_{-r}^{-d}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\mathrm{d}x+\int_{C_d^-}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\mathrm{d}z+\int_d^r\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x}\mathrm{d}x=0$$



例 8 计算 $I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$ (续)

令 $x = -t$, 有

$$\int_{-r}^{-d} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x} \mathrm{d}x = \int_r^d \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{t} \mathrm{d}t = -\int_d^r \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{x} \mathrm{d}x$$

$$\Longrightarrow \int_d^r \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{x} \mathrm{d}x + \left(\int_{C_r} - \int_{C_d} \right) \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z} \mathrm{d}z = 0$$

$$\Longrightarrow 2\mathrm{i} \int_d^r \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x + \left(\int_{C_r} - \int_{C_d} \right) \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z} \mathrm{d}z = 0$$

例 8 计算 $I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$ (续)

接下来我们将证明

$$\lim_{r\to\infty} \int_{C_r} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z} \mathrm{d}z = 0, \qquad \lim_{d\to 0} \int_{C_d} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z} \mathrm{d}z = -\pi \mathrm{i}$$

$$\left| \int_{C_r} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z} \mathrm{d}z \right| \leq \int_{C_r} \frac{|\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}|}{|z|} \mathrm{d}s = \frac{1}{R} \int_{C_r} \mathrm{e}^{-y} \mathrm{d}s = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-r\sin\theta} \mathrm{d}\theta$$

$$\leq 2 \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-r(2\theta/\pi)} \mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{r}(1 - \mathrm{e}^{-r}) \to 0, r \to \infty$$

例 8 计算 $I=\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ (续)

在 C_d 上作洛朗展开

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}=\frac{1}{z}+\mathrm{i}-\frac{z}{2}+\cdots+\frac{\mathrm{i}^n z^{n-1}}{n!}+\cdots=\frac{1}{z}+\varphi(z)$$

其中 $\varphi(z)$ 在 $z=0$ 处解析且 $\phi(0)=\mathrm{i}$——当 $|z|$ 充分小时可使 $|\varphi(z)|\leq 2$. 则

$$\int_{C_d}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z}\mathrm{d}z=\int_{C_d}\frac{\mathrm{d}z}{z}+\int_{C_d}\varphi(z)\mathrm{d}z,\quad \int_{C_d}\frac{\mathrm{d}z}{z}=-\pi\mathrm{i}$$

当 d 充分小时

$$\left|\int_{C_r}\varphi(z)\mathrm{d}z\right|\leq\int_{C_r}|\varphi(z)|\mathrm{d}s\leq 2\pi r\to 0,\ d\to 0$$

例 8 计算 $I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d}x$ (续)

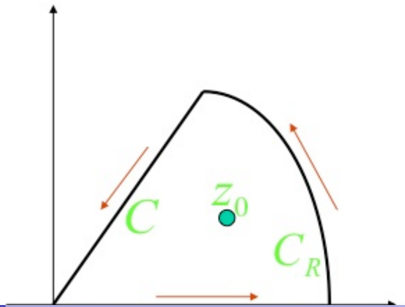
综上所述

$$2\mathrm{i}\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \pi\mathrm{i} \Longrightarrow \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

例 9 计算 $I = \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n + 1} \ (n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$

[解] $f(z) = \dfrac{1}{z^n + 1}$ 的奇点为一级极点 $z_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2k+1}{n}\pi}$, $k = 0, \cdots, n-1$. 其中 $z_0 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/n}$ 位于上半平面. 我们构造如图所示积分路线, 其中:

$C: z = t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}} \ (0 \leq t \leq R)$; $C_R: z = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \ (0 \leq \theta \leq 2\pi/n)$



例 9 计算 $I=\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^n+1}\ (n\in\mathbb{N}, n\geq 2)$（续）

由留数定理

$$\int_0^R f(x)\mathrm{d}x+\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z+\int_{C^-} f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}[f(z),z_0]$$

因为

$$\int_{C^-} f(z)\mathrm{d}z=\int_R^0 \frac{\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/n}}{x^n+1}\mathrm{d}z=-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/n}\int_0^R \frac{\mathrm{d}x}{x^n+1}$$

所以

$$\left(1-\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{n}}\right)\int_0^R \frac{\mathrm{d}x}{x^n+1}+\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}[f(z),z_0]$$

例 9 计算 $I=\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^n+1}\ (n\in\mathbb{N}, n\geq 2)$（续）

由于

$$\left|\int_{C_r} f(z)\mathrm{d}z\right| = \left|\int_0^{2\pi/n} \frac{R\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{R^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}+1}\mathrm{d}\theta\right| \leq \int_0^{2\pi/n} \frac{R\mathrm{d}\theta}{R^n-1}$$

$$= \frac{2\pi R}{n(R^n-1)} \to 0,\ R\to\infty$$

最后

$$\mathrm{Res}[f(z), z_0] = \lim_{z\to z_0} \frac{z-z_0}{z^n+1} = \left.\frac{1}{(z^n+1)'}\right|_{z=z_0} = \frac{1}{nz_0^{n-1}}$$

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}z}{x^n+1} = -\frac{2\pi\mathrm{i}z_0}{n(1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/n})} = \frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}$$

作业五-B (10/28 23:59 前提交至“学在浙大”)

pp.158 习题五：7.(1)(3), 8.(3)(5), 10.(1)(4), 11.(3)(6)