第6章 非正弦周期电路的分析

本章主要讨论：

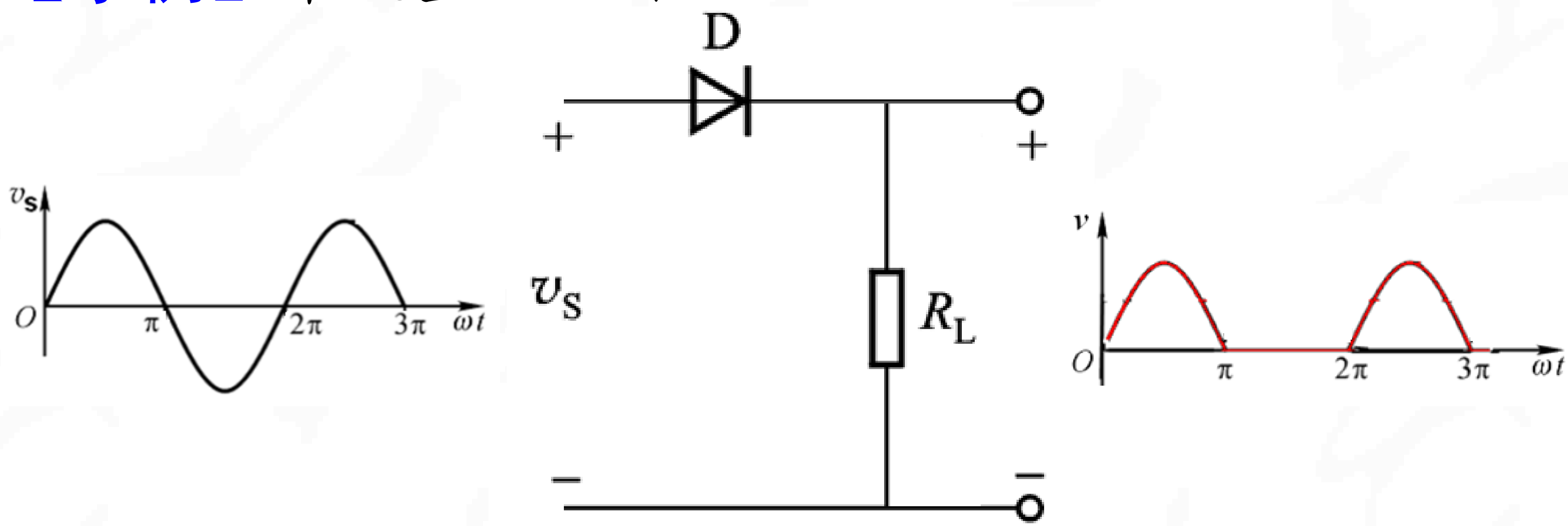
- 非正弦周期信号的傅里叶级数分解
- 非正弦周期函数的有效值、平均功率
- 非正弦周期信号电路的稳态计算
- 傅里叶变换与频谱概念
- 电路的频率特性分析
- 滤波器和频率响应

6.1 非正弦周期信号分解

一、非正弦周期信号

✧ 实际电气系统中，经常会遇到非正弦周期信号。

〖示例〗半波整流电路



✧ 非正弦周期信号特点：**非正弦**、**周期性**变化。

二、非正弦周期信号的傅里叶级数分解（自学）

✧ 非正弦周期信号可以分解成不同频率的正弦周期信号之和。

设周期非正弦信号为： $f(t)=f(t+kT)$

可分解为：

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_1 t+b_n\sin n\omega_1 t)$$ 三角级数

或 $$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\omega_1 t+\psi_n)$$ 余弦形式

或 $$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin(n\omega_1 t+\psi_n)$$ 正弦形式

或 $$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\dot{F}_n e^{jn\omega_1 t}$$ 复指数级数

✧ 本教材中通常表示成：

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin(n\omega_1 t+\psi_n)$$

$$=B_0+B_1\sin(\omega t+\psi_1)+B_2\sin(2\omega t+\psi_2)+B_3\sin(3\omega t+\psi_3)+\cdots$$

直流分量　基波分量　2次谐波　3次谐波　…

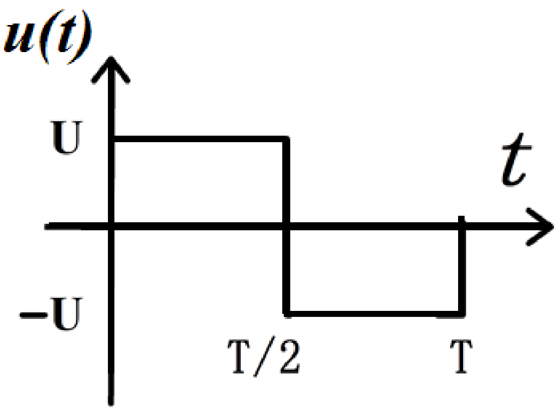
高次谐波分量

✧ 在实际工程计算中，由于傅里叶级数展开为无穷级数，因此要根据精度要求确定所需的项数。

〖示例〗方波信号分解为正弦信号

给定方波信号为：

$$u(t)=\begin{cases} U & 0<t<T/2 \\ -U & T/2<t<T \end{cases}$$



分解为傅里叶级数（$\omega=2\pi/T$）：

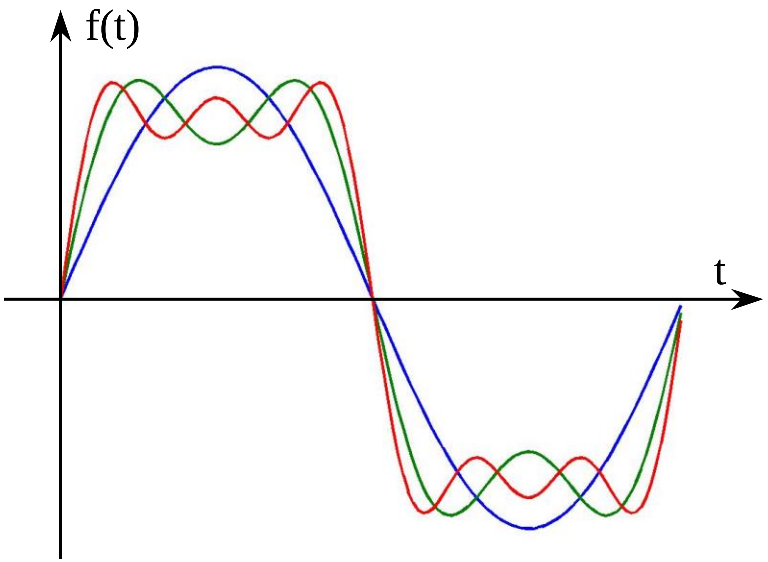
$$u(t)=\frac{4U}{\pi}\left(\sin\omega t+\frac{1}{3}\sin 3\omega t+\frac{1}{5}\sin 5\omega t+\cdots\right)$$

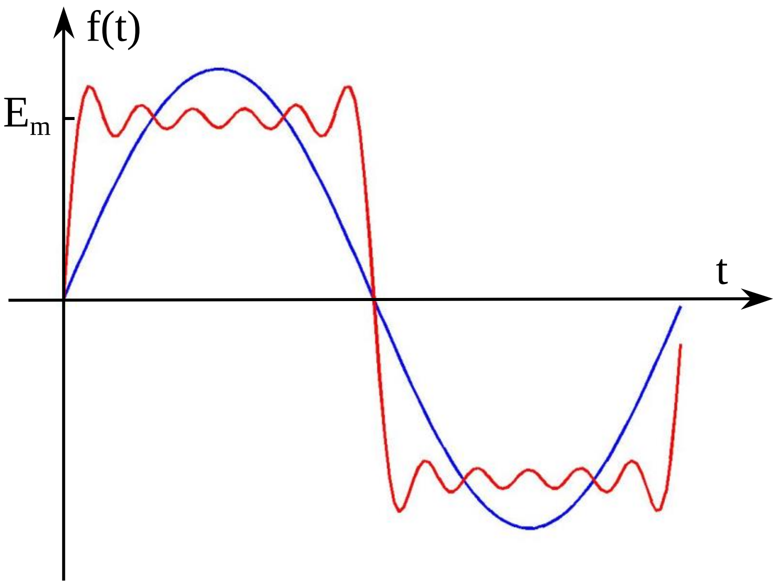
显然，直流分量为0；

基波幅值为 $\dfrac{4U}{\pi}$ ，初相位为0；

谐波只有奇数次谐波，且谐波次数越高，谐波幅值越小。

取不同项数时波形的逼近情况：





1~3次谐波合成

1~5次谐波合成

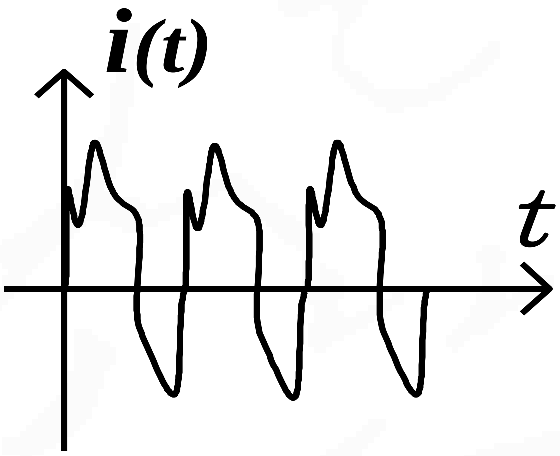
1~9次谐波合成

显然，取的谐波次数越多，越接近原信号。

三、非正弦周期信号的有效值、平均值

以电流为例，设非正弦周期信号为：

$$i = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} I_k \sin(k\omega t + \psi_k)$$



✧ **最大值**：一个周期内幅度最大的值，也称为**峰值**。

✧ **平均值**：等于直流分量。

$$\frac{1}{T}\int_0^T \left[I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} I_k \sin(k\omega t + \psi_k) \right] dt = I_0$$

✧ 有效值：也称为均方根值（RMS）。

$$I=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T\left[I_0+\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{2}I_k\sin(k\omega t+\psi_k)\right]^2 \mathrm{d}t}$$

由三角函数的正交性可得：

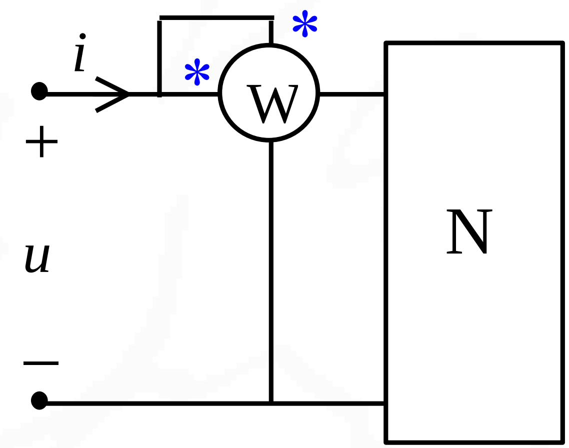
$$I=\sqrt{I_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}I_k^2}=\sqrt{I_0^2+I_1^2+I_2^2+\cdots}$$

结论：非正弦周期信号的有效值等于直流、基波和各次谐波有效值的平方和再开根号。

四、非正弦周期信号的功率

$$u = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} U_k \sin(k\omega t + \psi_{uk})$$

$$i = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} I_k \sin(k\omega t + \psi_{ik})$$



瞬时功率： $p(t) = u(t)i(t)$

平均功率： $P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)i(t)\mathrm{d}t$

$$= U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos(\psi_{uk} - \psi_{ik}) = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos\varphi_k$$

结论： 非正弦信号的平均功率等于直流、基波和各次谐波的平均功率之和。

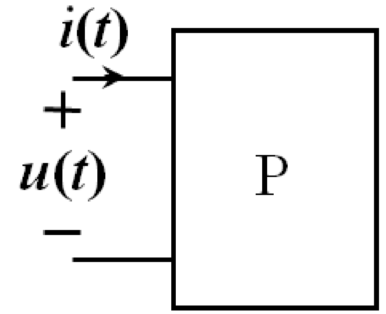
〖例1〗

如图所示无源一端口网络，已知

$u(t)=100+100\sin\omega t+30\sin(3\omega t-30°)\text{V}$,

$i(t)=25+50\sin(\omega t-45°)+10\sin(2\omega t-60°)\text{A}$,

求该一端口网络的电压有效值、电流有效值及平均功率。



〖解〗

$$U=\sqrt{100^2+(\frac{100}{\sqrt{2}})^2+(\frac{30}{\sqrt{2}})^2}=124.3\ \text{V}$$

$$I=\sqrt{25^2+(\frac{50}{\sqrt{2}})^2+(\frac{10}{\sqrt{2}})^2}=43.9\ \text{A}$$

$$P=100\times 25+\frac{100}{\sqrt{2}}\times\frac{50}{\sqrt{2}}\times\cos 45°=4267.8\ \text{W}$$

6.2 非正弦周期信号电路的稳态分析

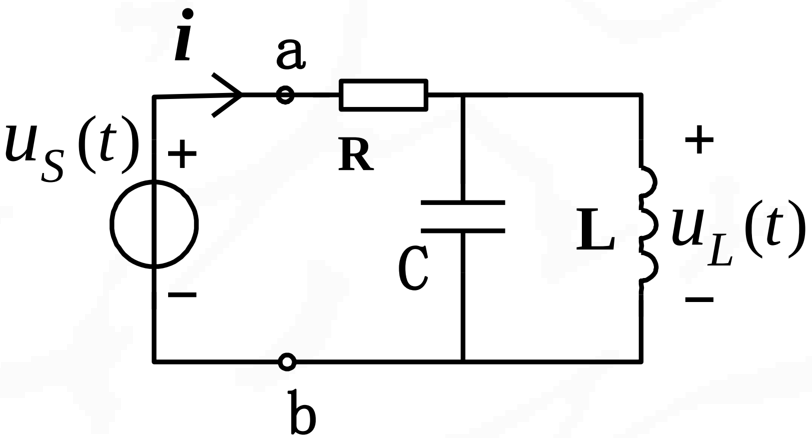
➢ 稳态分析

对于非正弦周期激励的稳态电路，将非正弦信号分解为正弦周期信号，分别计算直流、基波、各次谐波下的稳态响应，然后用叠加原理获得电路状态。

- 直流分量作用：按直流电路分析方法求解（电感短接，电容开路）；
- 基波和谐波分量作用：不同频率的正弦分量采用正弦电路相量分析方法分别求解，需注意电路的阻抗特性随频率而变化。
- 叠加：将各分量的瞬时表达式叠加，需注意相量不能叠加（因频率不同）。

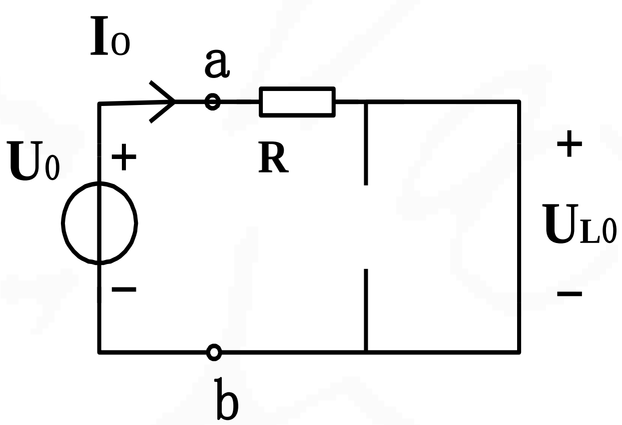
〖例1〗

已知R=10Ω，L=10 mH，C=120μF，电源电压$u_s(t)=\left[10+50\sqrt{2}\sin\omega t+30\sqrt{2}\sin(3\omega t+30°)\right]\text{V}$，基波角频率$\omega$=314rad/s，试求流过电阻的电流$i(t)$及电感两端电压$u_L(t)$。



〖解〗

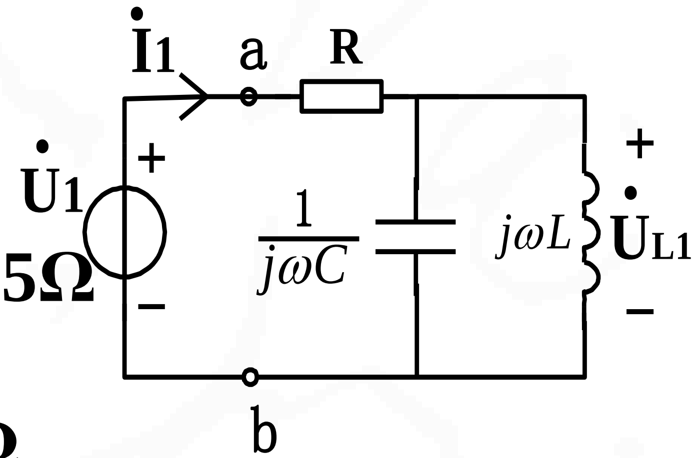
1）直流分量作用时：



$$I_0=\frac{U_0}{R}=\frac{10\text{V}}{10\Omega}=1\text{A}$$

$$U_{L0}=0\text{V}$$

2）基波分量作用时：



$$\dot{U}_1 = 50\angle 0°\text{V}$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314\times 120\times 10^{-6}} = 26.5\Omega$$

$$X_L = \omega L = 314\times 10\times 10^{-3} = 3.14\Omega$$

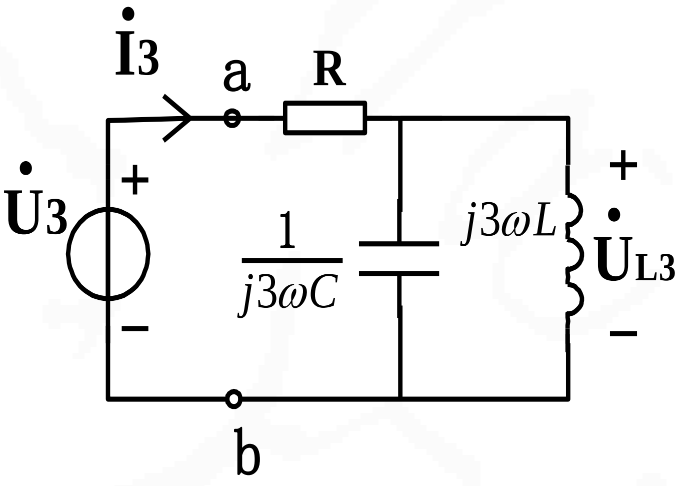
$$Z_{ab1} = R + \frac{jX_L\times(-jX_C)}{jX_L - jX_C} = 10 + \frac{j3.14\times(-j26.5)}{j3.14 - j26.5}$$

$$= 10.6\angle 19.6°\Omega$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{Z_{ab1}} = \frac{50\angle 0°}{10.6\angle 19.6°} = 4.7\angle -19.6°\text{A}$$

$$\dot{U}_{L1} = \dot{U}_1 - R\dot{I}_1 = 50 - 10\times 4.7\angle -19.6° = 16.8\angle 70°\text{V}$$

3）三次谐波分量作用时：



$$\dot{U}_3 = 30\angle 30°\text{V}$$

注意容抗和感抗为：

$$X_C = \frac{1}{3\omega C}, \quad X_L = 3\omega L$$

$$Z_{ab3} = R + \frac{j3\omega L \times (-j\frac{1}{3\omega C})}{j3\omega L - j\frac{1}{3\omega C}} = 10 + \frac{j9.42 \times (-j8.83)}{j9.42 - j8.83}$$

$$= 141\angle -86°\Omega$$

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_3}{Z_{ab3}} = \frac{30\angle 30°}{141\angle -86°} = 0.21\angle 116°\text{A}$$

$$\dot{U}_{L3} = \dot{U}_3 - R\dot{I}_3 = 29.9\angle 26°\text{V}$$

4）最后叠加：

$$I_0 = 1\text{A} \qquad U_{L0} = 0\text{V}$$

$$\dot{I}_1 = 4.7\angle -19.6°\text{A} \qquad \dot{U}_{L1} = 16.8\angle 70°\text{V}$$

$$\dot{I}_3 = 0.21\angle 116°\text{A} \qquad \dot{U}_{L3} = 29.9\angle 26°\text{V}$$

$$i_R = I_0 + i_1 + i_3$$

$$= 1 + 4.7\sqrt{2}\sin(\omega t - 19.6°) + 0.21\sqrt{2}\sin(3\omega t + 116°)\text{A}$$

$$u_L = U_{L0} + u_{L1} + u_{L3}$$

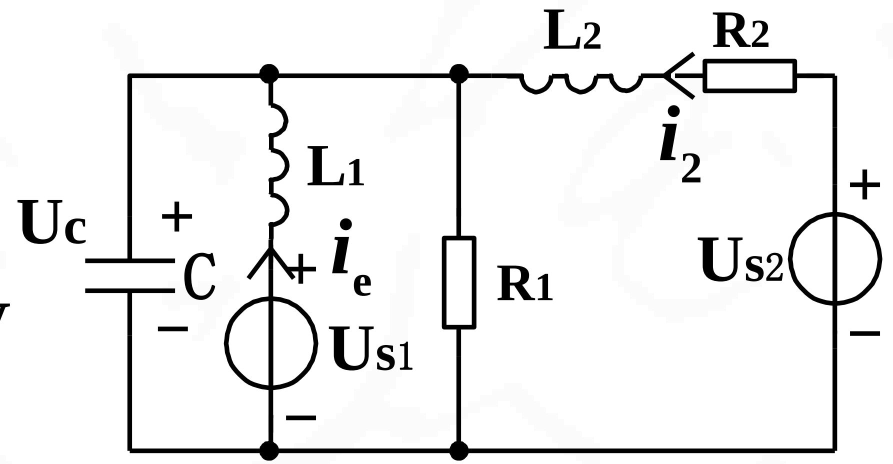
$$= 16.8\sqrt{2}\sin(\omega t + 70°) + 29.9\sqrt{2}\sin(3\omega t + 26°)\text{V}$$

注意：各分量的相量表达式不能叠加！

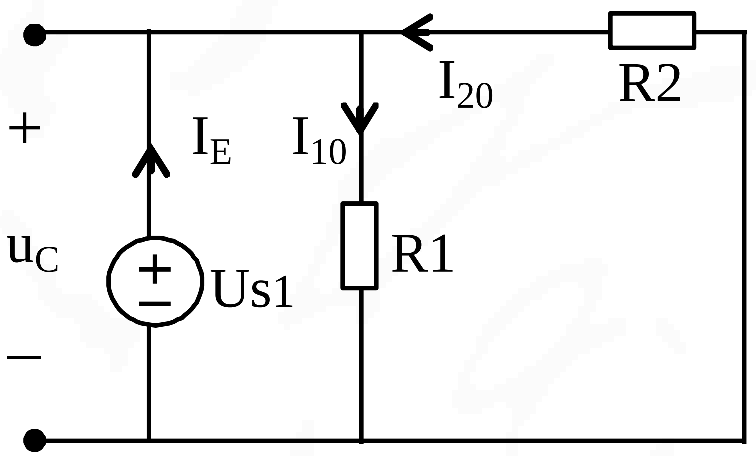
$$\times\ \dot{I} = I_0 + \dot{I}_1 + \dot{I}_3$$

〖例2〗

已知R_1=1 Ω, R_2=2 Ω, L_1=1 H, L_2=2 H, $C=\frac{1}{4}$ F, U_{S1}=4 V, $u_{S2}=10\sqrt{2}\sin 2t$ V 求i_2、I_2、u_C，及电压源的功率P_{US1}、P_{US2}。



〖解〗**1）U_{S1}单独激励时：**

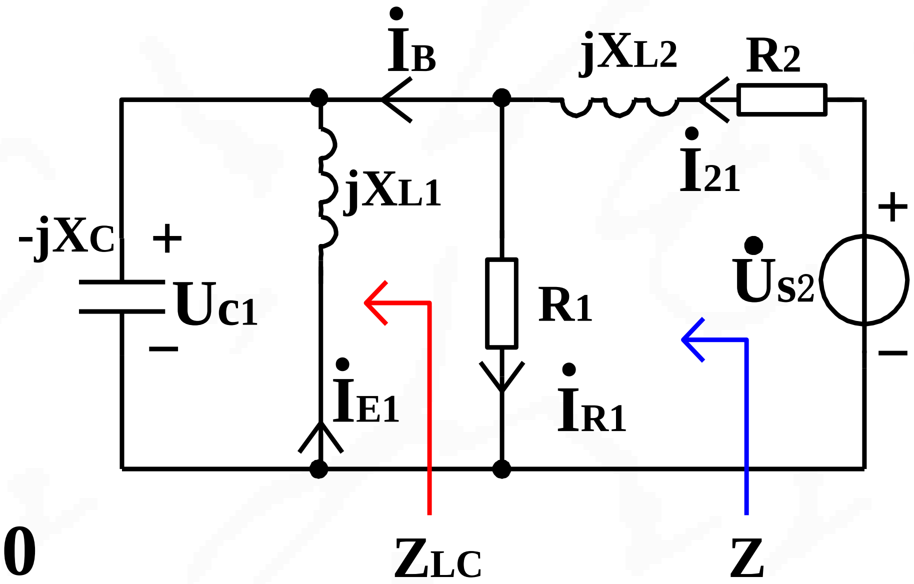


$$I_{20}=-\frac{U_{S1}}{R_2}=-2\text{A}$$

$$I_{10}=\frac{U_{S1}}{R_1}=4\text{A} \qquad I_{E0}=6\text{A}$$

$$U_{C0}=U_{S1}=4\text{V} \qquad P_E=U_{S1}I_{E0}=24\text{ W}$$

2）u_{S2}单独激励时：



$$X_C = \frac{1}{\omega C} = 2\ \Omega$$

$$X_{L1} = \omega L_1 = 2\ \Omega$$

$$X_{L2} = \omega L_2 = 4\ \Omega$$

C、L_1并联谐振， $\dot{I}_B = 0$

$$Z = R_1 + R_2 + jX_{L2} = 3 + j4 = 5\angle 53.1°\Omega$$

$$\dot{I}_{21} = \dot{I}_{R1} = \frac{\dot{U}_{S2}}{Z} = \frac{10\angle 0°}{5\angle 53.1°} = 2\angle -53.1°\text{A}$$

$$\dot{U}_{C1} = R_1\dot{I}_{R1} = 2\angle -53.1°\text{V}$$

$$\dot{I}_{E1} = -\frac{\dot{U}_{C1}}{jX_{L1}} = -\frac{2\angle -53.1°}{2\angle 90°} = 1\angle 36.9°\text{A}$$

$I_{20}=-2\text{A},\ \ I_{E0}=6\text{A},\ \ U_{C0}=4\text{V},\ \ P_E=U_{S1}I_E=24\ \text{W}$

$\dot{I}_{21}=2\angle-53.1°\text{A},\ \ \dot{I}_{E1}=1\angle 36.9°\text{A},\ \ \dot{U}_{C1}=2\angle-53.1°\text{V}$

3）U_{S1}、u_{S2}同时激励时：

$$i_2=I_{20}+i_{21}=-2+2\sqrt{2}\sin(2t-53.1°)\ \ \text{A}$$

$$I_2=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2.83\ \ \text{A}$$

$$u_C=U_{C0}+u_{C1}=4+2\sqrt{2}\sin(2t-53.1°)\ \ \text{V}$$

电压源U_{S1}的电流：　$i_E=6+\sqrt{2}\sin(\omega t+36.9°)\ \ \text{A}$

电压源U_{S1}的功率：　$P_{US1}=U_{S1}I_E=24\ \ \text{W}=P_E$

电压源u_{S2}的功率：

$$P_{US2}=U_{S2}I_{21}\cos\varphi=10\times2\times\cos 53.1°=12\ \ \text{W}$$

〖例3〗

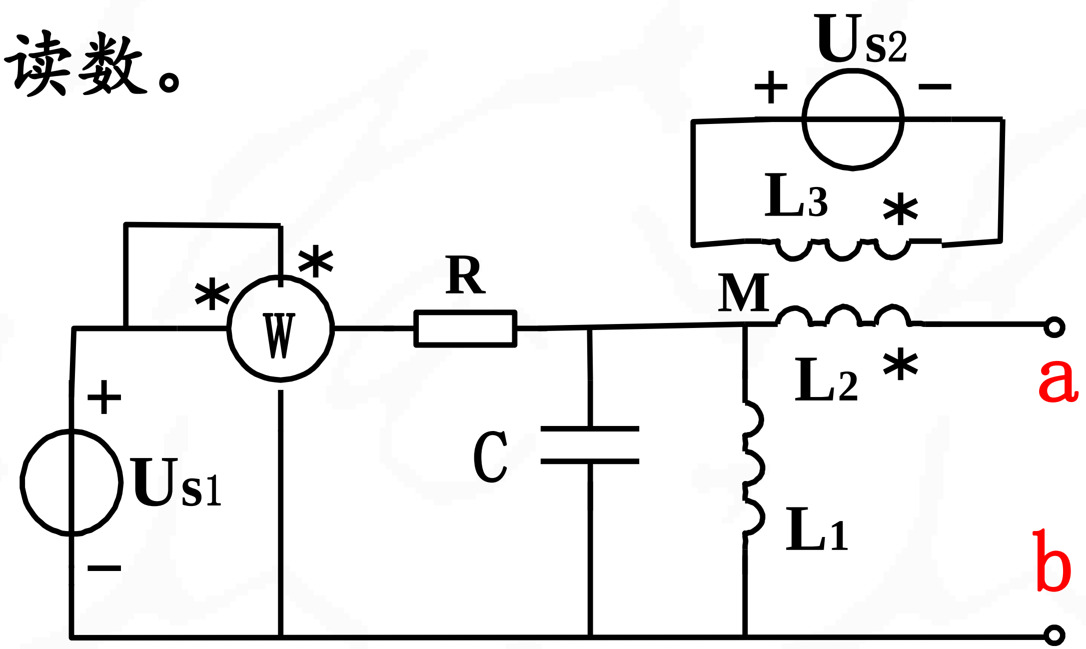
已知 $u_{S1}(t)=220\sqrt{2}+220\sqrt{2}\sin(\omega t-90°)\ \mathrm{V}$,

$u_{S2}(t)=220\sqrt{2}\sin(\omega t+90°)+110\sqrt{2}\sin 3\omega t\ \mathrm{V}$,

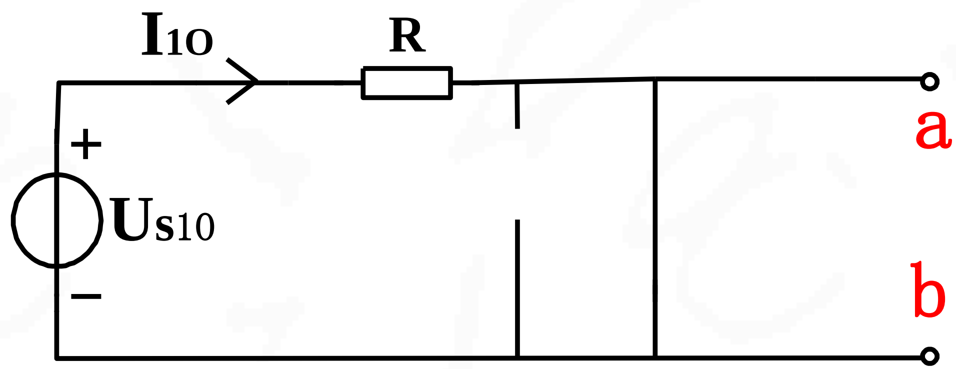
$R=220\sqrt{2}\ \Omega,\ \omega L_1=\omega L_2=\omega L_3=\dfrac{1}{\omega C}=220\ \Omega$,

$\omega M=110\ \Omega$, 求：1）开路电压u_{ab}及有效值U_{ab}；

2）功率表读数。



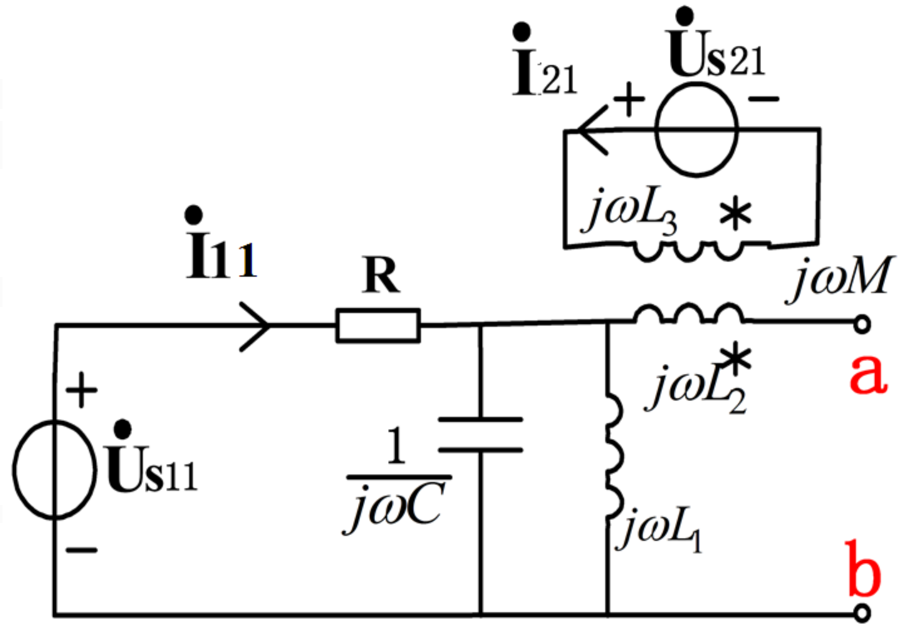
〖解〗



1）直流分量单独激励时：

$$I_{10}=\frac{U_{S10}}{R}=\frac{220\sqrt{2}}{220\sqrt{2}}=1\ \text{A}$$

$$U_{ab0}=0\text{V}$$



2）基波分量激励时：

因 $\omega L_1=\dfrac{1}{\omega C}$ ，L_1、C为并联谐振。

$$\dot{I}_{11}=0\text{A}$$

$$\dot{U}_{ab1}=-j\omega M\dot{I}_{21}+\dot{U}_{S1}=-j110\frac{220\angle 90^\circ}{j220}+220\angle -90^\circ$$

$$=330\angle -90^\circ\ \text{V}$$

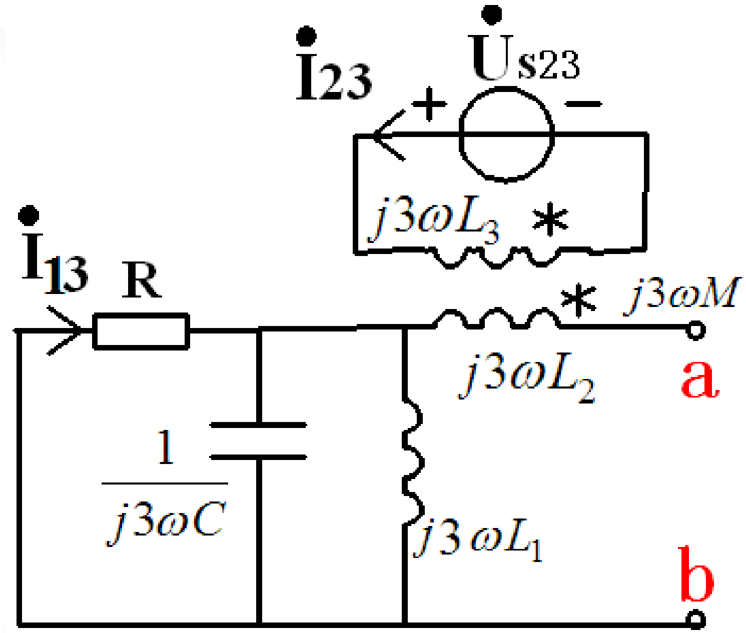
3）三次谐波分量激励时：

$$\dot{I}_{13} = 0\text{A}$$

$$\dot{U}_{ab3} = -j3\omega M \cdot \dot{I}_{23}$$

$$= -j330\frac{110\angle 0^\circ}{j660}$$

$$= -55\angle 0^\circ \text{V}$$



4）最后叠加：

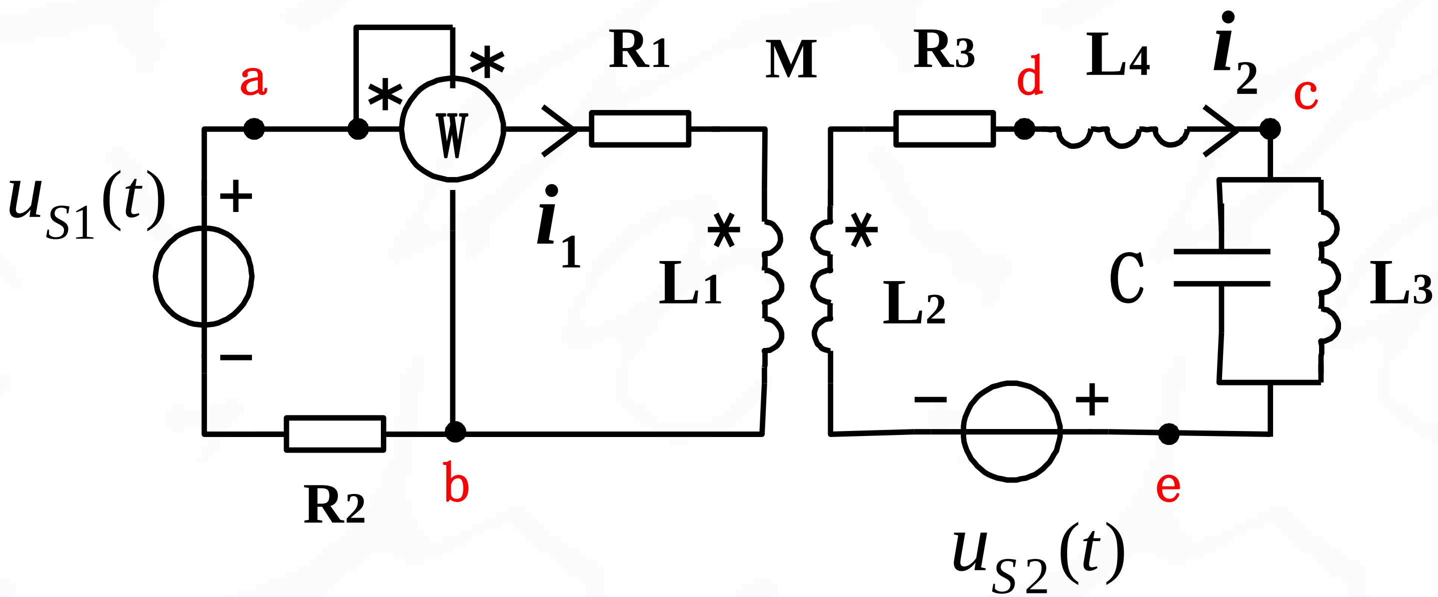
$$u_{ab} = 330\sqrt{2}\sin(\omega t - 90^\circ) - 55\sqrt{2}\sin 3\omega t \text{ V}$$

$$U_{ab} = \sqrt{330^2 + 55^2} = 334.55\text{V}$$

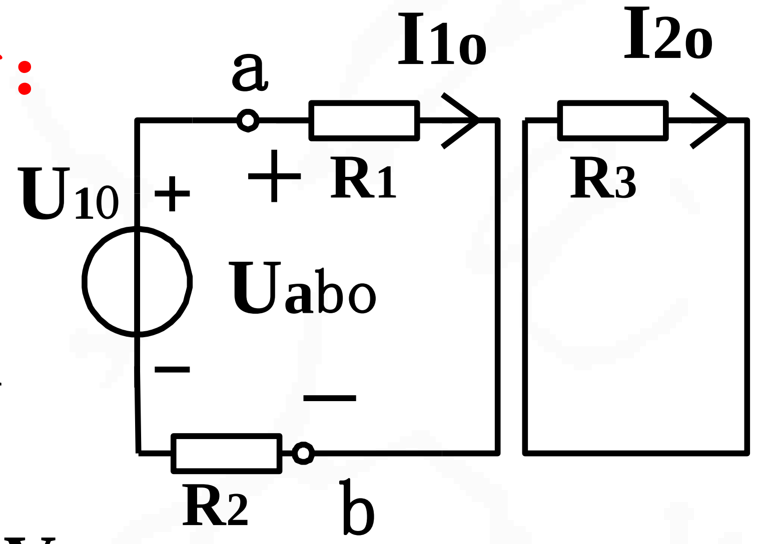
$$P = P_0 + P_1 + P_3 = I_{10}^2 R = 220\sqrt{2} \text{ W}$$

〖例4〗

电路如图，已知 $u_{S1}(t)=10+60\sqrt{2}\sin\omega_1 t$ V，$u_{S2}(t)=40\sqrt{2}\sin\omega_1 t+30\sqrt{2}\sin 3\omega_1 t$ V，$R_1=R_2=10\ \Omega$，$R_3=20\ \Omega$，$\omega_1 L_1=\omega_1 L_2=\omega_1 L_3=\dfrac{1}{\omega_1 C}=20\Omega$，$\omega_1 L_4=\dfrac{5}{2}\Omega$，$\omega_1 M=10\Omega$，求$I_1$、$I_2$、$U_{ab}$及功率表读数。



〖解〗1）直流分量单独激励时：



$$U_{1(0)} = 10\text{V}$$

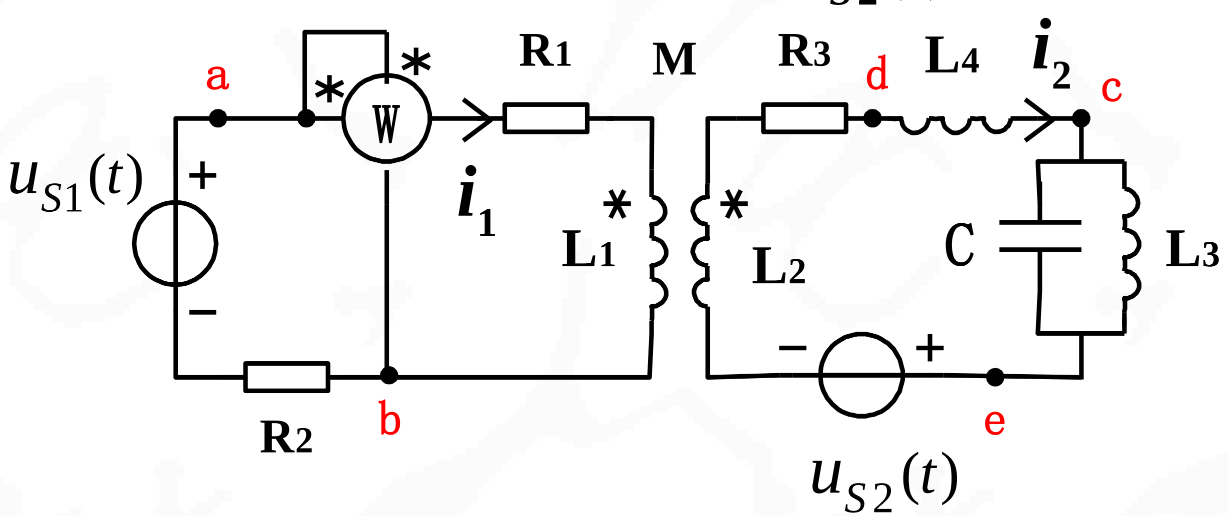
$$I_{1(0)} = \frac{U_{1(0)}}{R_1 + R_2} = \frac{10}{10+10} = 0.5\text{A}$$

$$I_{2(0)} = 0 \qquad U_{ab(0)} = R_1 I_{1(0)} = 5\text{V}$$

2）基波分量激励时：

$$u_{S1}(t) = 10 + 60\sqrt{2}\sin\omega_1 t \text{ V}$$

$$u_{S2}(t) = 40\sqrt{2}\sin\omega_1 t + 30\sqrt{2}\sin 3\omega_1 t \text{ V}$$



$$\omega_1 L_3 = \frac{1}{\omega_1 C} = 20\Omega$$

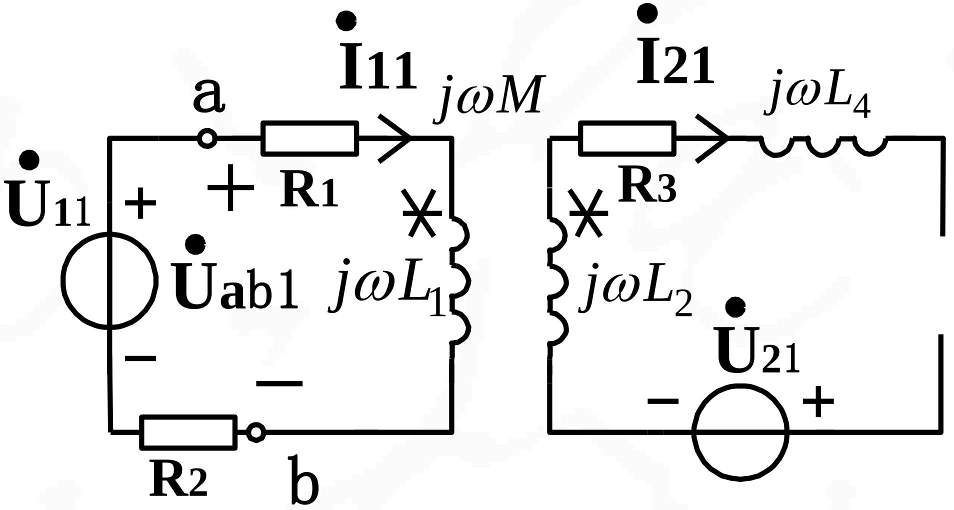
C、L_3并联谐振

$$\dot{U}_{1(1)} = 60\angle 0° \text{V}$$

$$\dot{I}_{2(1)} = 0$$

$$\dot{I}_{1(1)} = \frac{\dot{U}_{1(1)}}{R_1 + R_2 + j\omega_1 L_1}$$

$$= \frac{60\angle 0°}{20 + j20} = \frac{3}{2}\sqrt{2}\angle -45° \text{A}$$



$$i_{1(1)}(t) = 3\sin(\omega t - 45°) \text{A}$$

$$\dot{U}_{ab(1)} = \dot{I}_{1(1)}(R_1 + j\omega_1 L_1) = \frac{3}{2}\sqrt{2}\angle -45° \times (10 + j20)$$

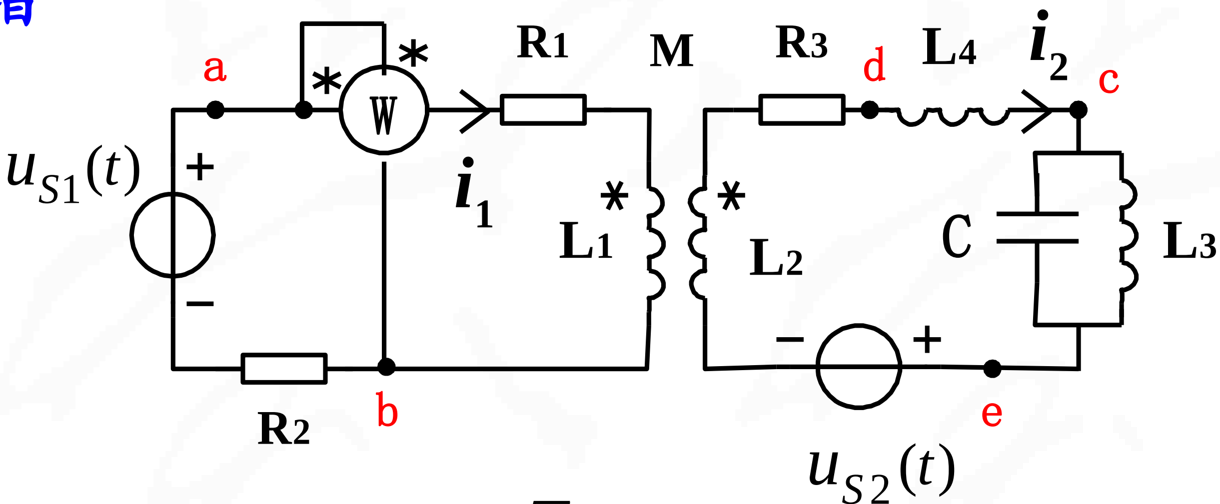
$$= 47.4\angle 18.4° \text{V}$$

$$u_{ab(1)}(t) = 47.4\sqrt{2}\sin(\omega t + 18.4°) \text{V}$$

3）三次谐波分量激励时：

$$Z_{de(3)}=j3\omega_1 L_4+\frac{j3\omega_1 L_3\left(-j\dfrac{1}{3\omega_1 C}\right)}{j3\omega_1 L_3-j\dfrac{1}{3\omega_1 C}}=j\frac{15}{2}-j\frac{60\times\dfrac{20}{3}}{60-\dfrac{20}{3}}=0$$

L_4、C、L_3 串联谐振，d、e短路。



$\dot{U}_{S1(3)}=0\text{V}$

$\dot{U}_{S2(3)}=30\angle 0°\text{V}$

$u_{S1}(t)=10+60\sqrt{2}\sin\omega_1 t\ \text{V}$

$u_{S2}(t)=40\sqrt{2}\sin\omega_1 t+30\sqrt{2}\sin 3\omega_1 t\ \text{V}$

等效电路为：

列回路方程：

$$\dot{I}_{2(3)}(R_3 + j3\omega_1 L_2) - j3\omega_1 M\dot{I}_{1(3)} = -\dot{U}_{2(3)}$$

$$\dot{I}_{1(3)}(R_1 + R_2 + j3\omega_1 L_1) - j3\omega_1 M\dot{I}_{2(3)} = 0$$

代入数据： $$(20 + j60)\dot{I}_{2(3)} - j30\dot{I}_{1(3)} = -30\angle 0°$$

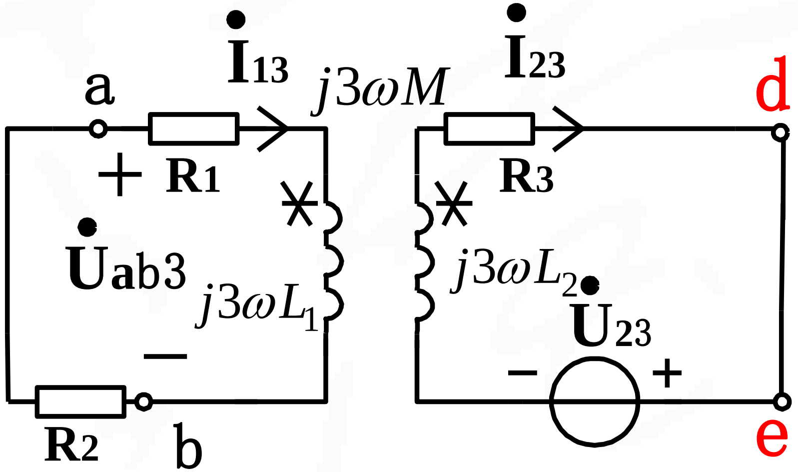
$$(20 + j60)\dot{I}_{1(3)} - j30\dot{I}_{2(3)} = 0$$

解得： $$\dot{I}_{1(3)} = 0.27\angle -44°\text{A}$$

$$\dot{I}_{2(3)} = 0.57\angle -62.4°\text{A}$$

$$i_{1(3)}(t) = 0.27\sqrt{2}\sin(3\omega t - 44°)\text{A}$$

$$i_{2(3)}(t) = 0.57\sqrt{2}\sin(3\omega t - 62.4°)\text{A}$$



$$\dot{U}_{ab(3)} = -R_2\dot{I}_{1(3)} = 2.7\angle 136°\ \text{V}$$ $$u_{ab(3)}(t) = 2.7\sqrt{2}\sin(3\omega t + 136°)\text{V}$$

4）最后瞬时式相加：

$$i_1 = I_{1(0)} + i_{1(1)} + i_{1(3)}$$

$$= 0.5 + 3\sin(\omega t - 45°) + 0.27\sqrt{2}\sin(3\omega t - 44°)\ \text{A}$$

$$i_2 = I_{2(0)} + i_{2(1)} + i_{2(3)} = 0.57\sqrt{2}\sin(3\omega t - 62.4°)\ \text{A}$$

$$u_{ab} = U_{ab(0)} + u_{ab(1)} + u_{ab(3)} = 5 + 47.4\sqrt{2}\sin(\omega t + 18.4°)$$

$$+2.7\sqrt{2}\sin(3\omega t + 13.6°)\ \text{V}$$

求I_1、I_2、U_{ab}及功率表读数：

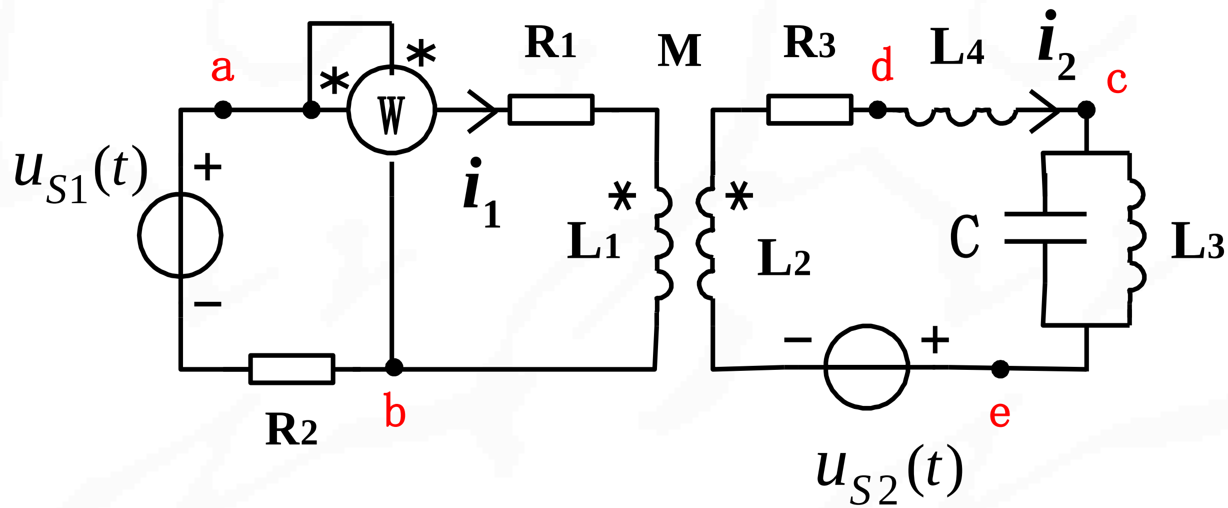
$$I_1 = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_3^2} = \sqrt{0.5^2 + \left(\frac{3}{2} \times \sqrt{2}\right)^2 + 0.27^2} = 2.2\text{A}$$

$$I_2 = 0.57\ \text{A}$$

$$U_{ab} = \sqrt{5^2 + 47.4^2 + 2.7^2} = 47.7\text{V}$$

$$i_1 = 0.5 + 3\sin(\omega t - 45°) + 0.27\sqrt{2}\sin(3\omega t - 44°)\ \text{A}$$

$$u_{ab} = 5 + 47.4\sqrt{2}\sin(\omega t + 18.4°) + 2.7\sqrt{2}\sin(3\omega t + 13.6°)\ \text{V}$$



功率表读数为：

$$P = I_{1(0)}U_{ab(0)} + U_{ab(1)}I_{1(1)}\cos\varphi_1 + U_{ab(3)}I_{1(3)}\cos\varphi_3$$

$$= 0.5\times 5 + 47.4\times\frac{3}{\sqrt{2}}\times\cos(18.4° + 45°) + 2.7\times 0.27\times\cos(13.6° + 44°)$$

$$= 48\ \text{W}$$

6.4 非周期信号的频谱及傅里叶变换

➢ 周期信号的频谱（6.1节）

本章第1节曾指出，非正弦周期信号可展开为复指数形式的傅里叶级数：

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\dot{F}_n e^{jn\omega_1 t} \qquad 式中，\dot{F}_n=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-jn\omega_1 t}dt$$

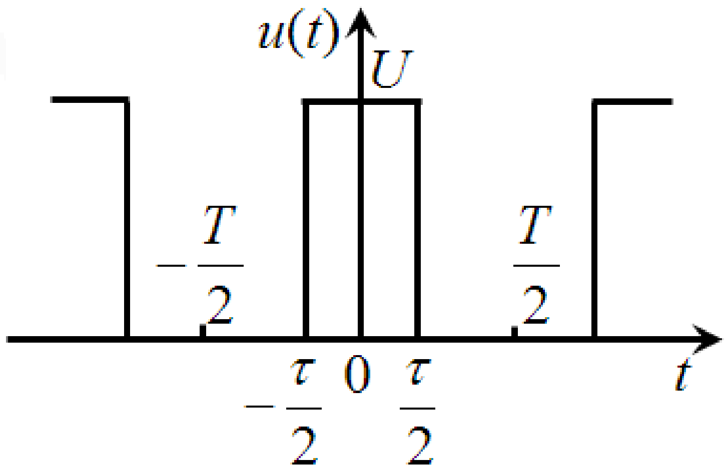
✧ $\dot{F}_n$ 是 $n\omega_1$ 的函数，$\dot{F}_n(n\omega_1)$ 称为给定信号$f(t)$的**频谱函数**，它包含了信号中各次谐波的所有信息。

✧ $\dot{F}_n$ 的模 $|\dot{F}_n(n\omega_1)|$ 称为**振幅频谱**，其大小为对应谐波分量的幅值的一半。

✧ $\dot{F}_n$ 的幅角 $\psi(n\omega_1)$ 称为**相位频谱**，幅角（当n取正值时）为对应谐波分量的初相位。

〖示例〗

周期脉冲信号如图所示，波形表达式为：



$$u(t)=\begin{cases}0 & -\dfrac{T}{2}<t<-\dfrac{\tau}{2}\\ U & -\dfrac{\tau}{2}<t<\dfrac{\tau}{2}\\ 0 & \dfrac{\tau}{2}<t<\dfrac{T}{2}\end{cases}$$

设 $\tau=\dfrac{T}{4}$，求该信号的频谱函数，并画出频谱图。

〖解〗

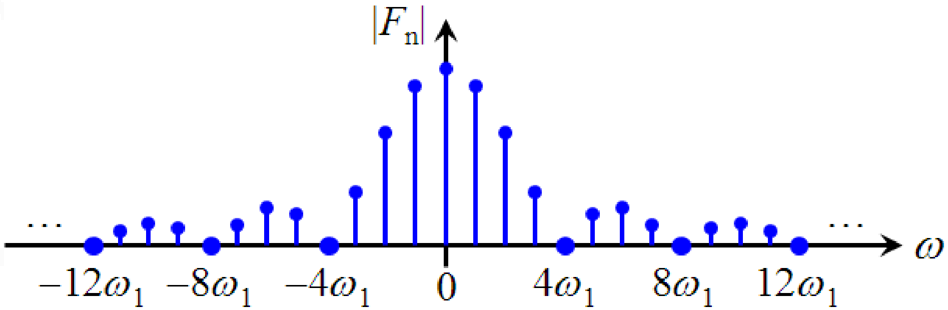
$$\dot{F}_{\mathrm{n}}=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}u(t)e^{-jn\omega_1 t}\,dt=\frac{1}{T}\left[\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}Ue^{-jn\omega_1 t}\,dt\right]=\frac{U}{T}\cdot\frac{1}{-jn\omega_1}\cdot\left[e^{-jn\omega_1 t}\Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}\right]$$

$$=\frac{\tau U}{T}\cdot\frac{\sin\dfrac{n\omega_1\tau}{2}}{\dfrac{n\omega_1\tau}{2}}$$

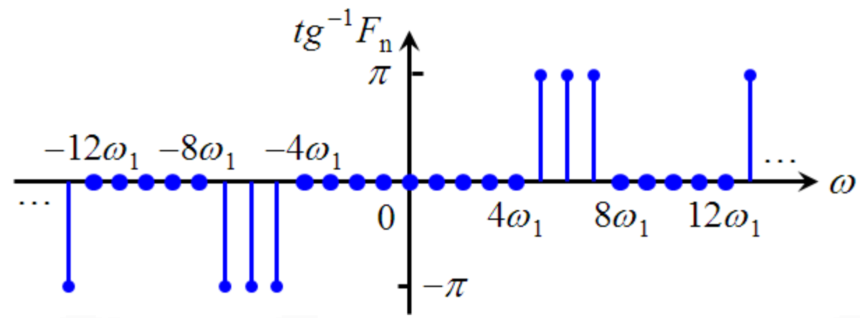
$$F_0=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}u(t)\,dt=\frac{1}{T}\left[\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}U\,dt\right]=\frac{\tau U}{T}$$

若 $\tau = \dfrac{T}{4}$，则 $F_0 = \dfrac{U}{4}$, $\dot{F}_n = \dfrac{U}{4} \cdot \dfrac{\sin\frac{n\pi}{4}}{\frac{n\pi}{4}}$

频谱图为：



振幅频谱图



相位频谱图

✧ 振幅频谱为偶函数（Y轴对称）；相位频谱为奇函数（原点对称）。所以有时只画出第一象限即可，称为单边频谱图。

✧ 周期信号（连续）的频谱为离散频谱（非周期），即时域的周期性对应频域的离散性。

➢ 非周期信号的频谱（6.4节）

对于非周期信号，可看成是：当周期信号的周期T趋于无限大时，周期信号就变为非周期信号（单个不重复信号）。

此时，频谱间隔$\omega_1=2\pi/T$趋于零（即周期信号的离散频谱变为非周期信号的连续频谱），频谱振幅趋于零，因此定义其相对大小为非周期信号的频谱函数：

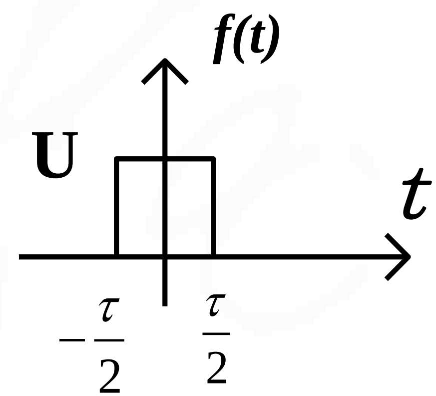
$$F(j\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{\dot{F}_n}{\frac{1}{T}}=\lim_{T\to\infty}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\mathrm{e}^{-jn\omega_1 t}\mathrm{d}t$$

$$F(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\mathrm{d}t$$ 称为傅里叶变换

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(j\omega)\mathrm{e}^{j\omega t}d\omega$$ 称为傅里叶反变换

〖示例〗

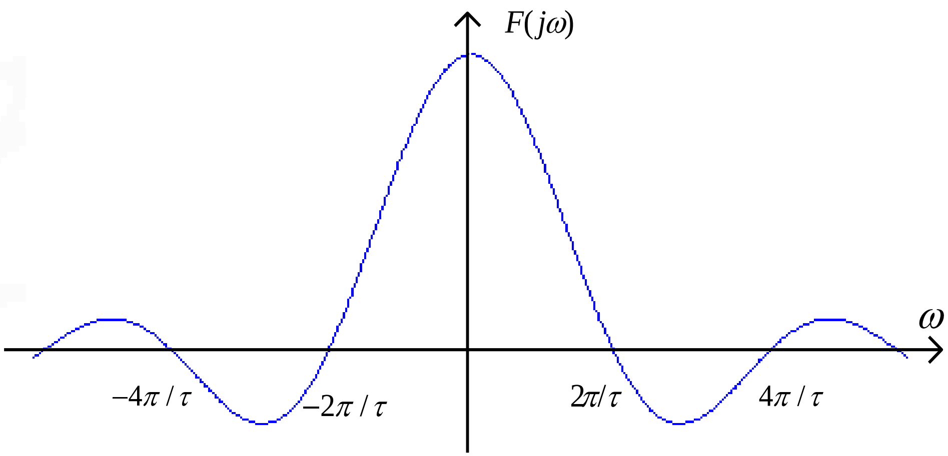
非周期脉冲信号如图所示，波形表达式为： $u(t)=U \quad -\frac{\tau}{2}<t<\frac{\tau}{2}$ ，求该信号的频谱函数，并画出频谱图。



〖解〗

$$F(j\omega)=\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} Ue^{-j\omega t}dt=U\frac{e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}-e^{j\omega\frac{\tau}{2}}}{-j\omega}=\tau U\left[\frac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}}\right]$$

✧ 非周期信号（连续）的频谱为连续频谱（非周期），即时域的非周期性对应频域的连续性。



➢ 小结与讨论：频谱

- ✧ 周期信号的频谱是离散的，说明非正弦周期信号包含多个谐波正弦信号；
- ✧ 非周期信号的频谱是连续的，说明非周期信号（实际信号通常是非周期信号）包含无限多个不同频率的正弦信号；
- ✧ 信号的傅里叶变换及频谱是信号分析与处理的基础内容；
- ✧ 对于电路的意义是：需要分析电路的频率特性。

6.5 电路的频率特性分析

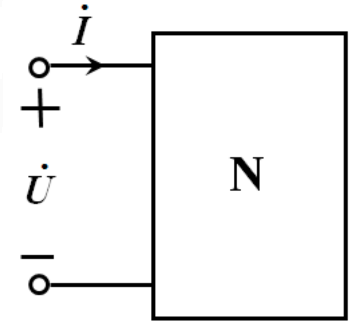
一、网络函数

- 同一电路，只要激励源的频率不同（即使幅值和相位均相同），就有可能获得不同的输出响应。
- 当激励源频率变化时，输出响应与激励源的比值随频率变化的关系，称为电路的频率特性。响应相量与激励源相量之比，称为网络函数：

$$H(j\omega)=\frac{\text{响应相量}}{\text{激励源相量}}=|H(j\omega)|\angle\varphi(j\omega)$$

- $|H(j\omega)|$ 称为幅频特性；$\varphi(j\omega)$ 称为相频特性。

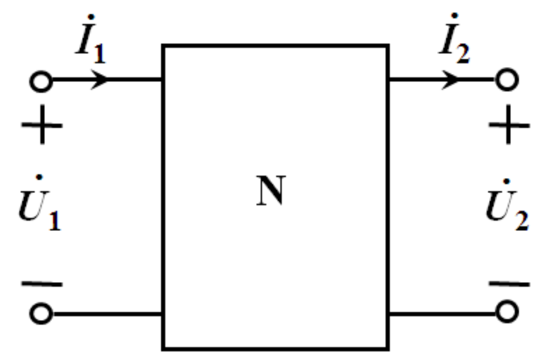
✧ 策动点函数与转移函数



当响应和激励为同一个端口，此时网络函数也称为**策动点函数**。

- **策动点阻抗**（输入阻抗）：$Z(j\omega)=\dfrac{\dot{U}}{\dot{I}}$
- **策动点导纳**（输入导纳）：$Y(j\omega)=\dfrac{\dot{I}}{\dot{U}}$

当响应和激励为不同的端口，此时网络函数也称为**转移函数**。



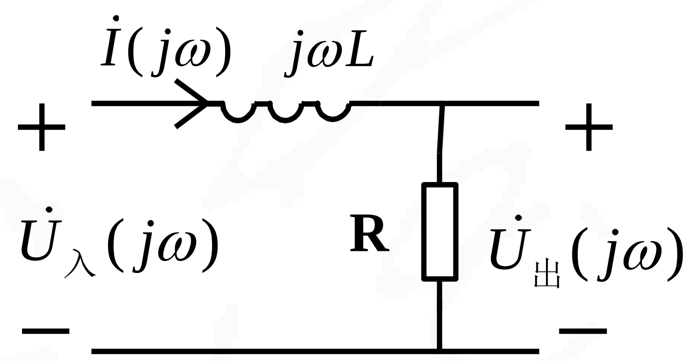
- **转移阻抗**：$Z(j\omega)=\dfrac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1}$
- **转移导纳**：$Y(j\omega)=\dfrac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1}$
- **转移电压比**（电压传输比）
- **转移电流比**（电流传输比）

✧ 网络函数$H(j\omega)$的求法

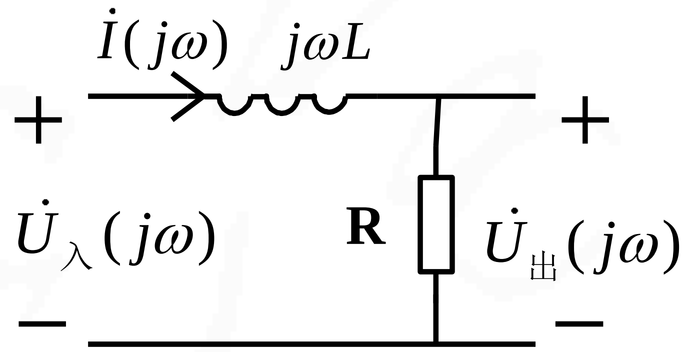
- 频域方法：利用电路的相量模型来求。
- 时域方法：先求冲激响应，再求网络函数。
- 数学方法：给定系统的微分方程时，利用傅里叶变换来求。

〖示例〗

电路如图，设输入信号为$\dot{U}_{入}(j\omega)$,响应信号为电流$\dot{I}(j\omega)$。求其网络函数，并分析其频率特性。



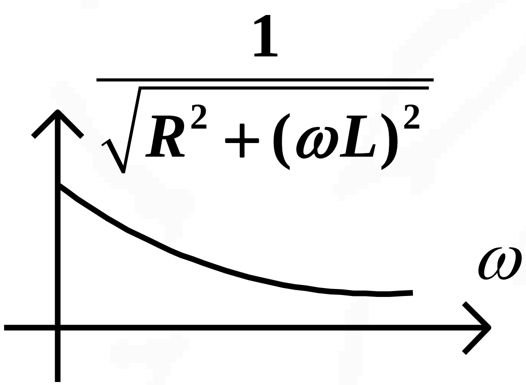
〖解〗 网络函数为：



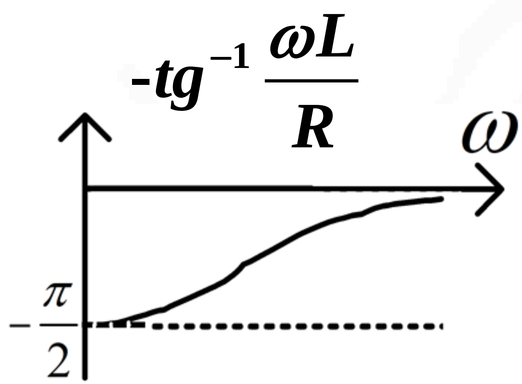
$$H(j\omega)=\frac{\dot{I}(j\omega)}{\dot{U}_{入}(j\omega)}=\frac{1}{R+j\omega L}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}\angle\text{-}tg^{-1}\frac{\omega L}{R}$$

网络函数为输入导纳，其频率特性如图。



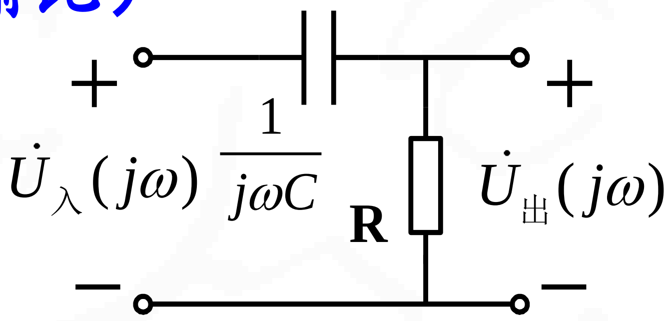
幅频特性



相频特性

二、几个典型电路的频率特性

✧ RC电路的频率特性（电压传输比）

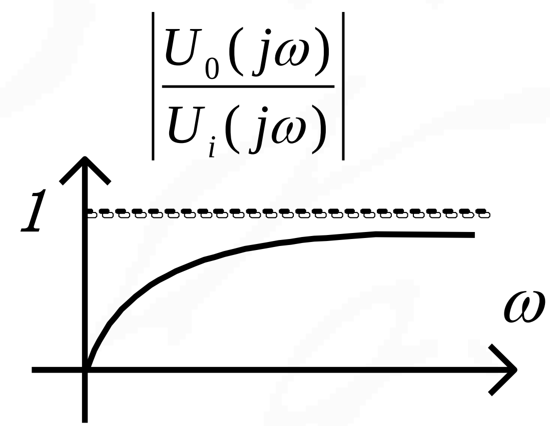


设输入信号为 $\dot{U}_{入}(j\omega)$，

响应为 $\dot{U}_{出}(j\omega)$，频率特性为：

$$H(j\omega)=\frac{\dot{U}_{出}(j\omega)}{\dot{U}_{入}(j\omega)}=\frac{R}{R-j\dfrac{1}{\omega C}}$$

幅频特性：$|H(j\omega)|=\dfrac{R}{\sqrt{R^2+\left(\dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}$

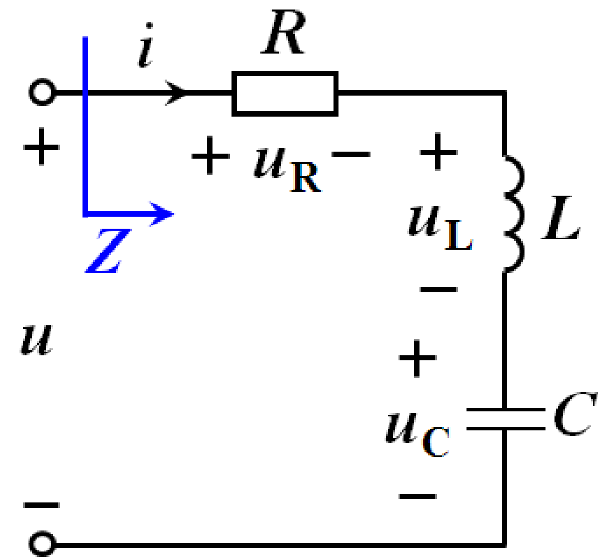


幅频特性

幅频特性反映了不同频率下信号“**通过**”的能力，该曲线说明低频信号被限制通过。（**高通滤波**）

✧ RLC串联电路的频率特性（选频特性）

$$\dot{I}(j\omega)=\frac{\dot{U}}{Z}=\frac{\dot{U}}{R+j(\omega L-\dfrac{1}{\omega C})}$$



幅频特性：

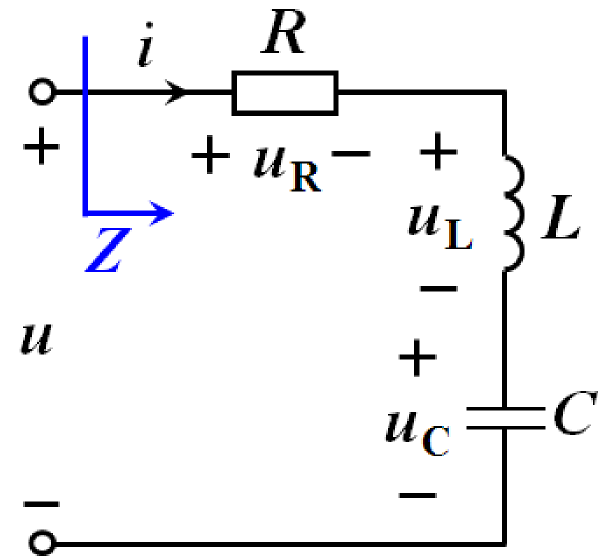
$$I(\omega)=\frac{U}{\sqrt{R^2+(\omega L-\dfrac{1}{\omega C})^2}}$$

谐振时： $\omega_0=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ $Q=\dfrac{\omega_0 L}{R}=\dfrac{1}{R\cdot\omega_0 C}$ $I(\omega_0)=\dfrac{U}{R}$

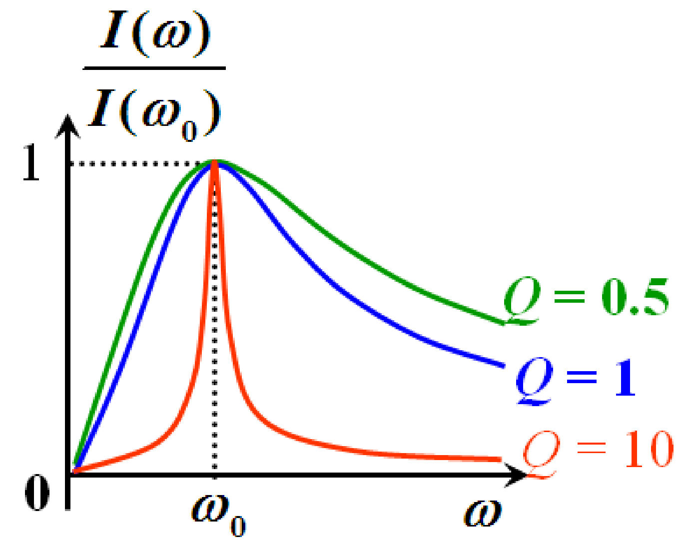
$$I(\omega)=\frac{U/R}{\sqrt{1+\dfrac{1}{R^2}(\omega_0 L\cdot\dfrac{\omega}{\omega_0}-\dfrac{1}{\omega_0 C}\cdot\dfrac{\omega_0}{\omega})^2}}=\frac{I(\omega_0)}{\sqrt{1+Q^2(\dfrac{\omega}{\omega_0}-\dfrac{\omega_0}{\omega})^2}}$$

不同频率下的电流与谐振最大电流之比：

$$\frac{I(\omega)}{I(\omega_0)}=\frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$



- 当 $\omega=\omega_0$ 时，电流达极大值。
- Q 值越大，谐振曲线越尖；电路对非谐振频率 ω_0 以外的信号具有较强的抑制能力；电路的选择性好。



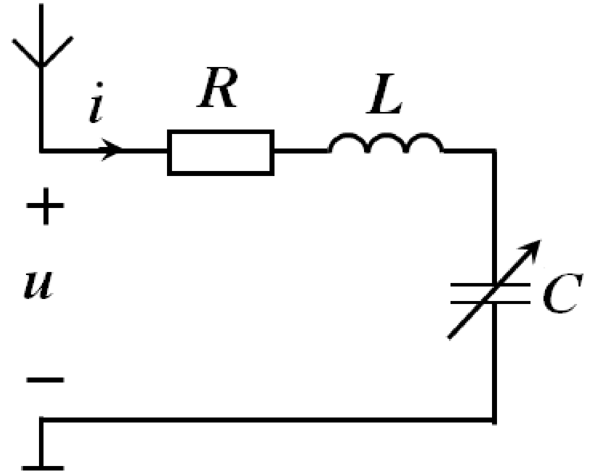
选频特性

〖例1〗

图示为（通讯）信号接收电路。已知 $R = 10\ \Omega$，$L = 250\ \mu H$，电台信号频率 $f = 990\ kHz$，接收到的信号幅值 $U = 10mV$。问：

（1）为接收该信号，应将电容 C 调到多大？此时电容两端电压U_C为多少？

（2）若附近有 950 kHz、10mV 的杂波信号，分析对接收的影响。



〖解〗

（1）当选择某一信号时，应调节电容C使电路产生谐振。

$$C=\frac{1}{\omega_0^2 L}=\frac{1}{(2\pi\times 990\times 10^3)^2\times 250\times 10^{-6}}=103.4\ \text{pF}$$

品质因数：
$$Q=\frac{\omega_0 L}{R}=\frac{2\pi\times 990\times 10^3\times 250\times 10^{-6}}{10}=155.4$$

电容电压：$U_C=Q\cdot U=1.55\ \text{V}$

（2）对于950 kHz的杂波信号：

$$I=\frac{I_0}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}=0.078\cdot I_0$$

说明对接收的影响不大。

本章重点提示：

- ✧ 理解周期信号可由不同频率的正弦信号叠加。（傅里叶分解的计算不要求）
- ✧ 会计算非正弦周期信号的有效值及平均功率。
- ✧ 掌握非正弦周期信号电路的计算（包含谐振、互感等）。
- ✧ 了解信号的频谱、电路的频率特性的基本概念（要求低）。

作 业：

题6.5

题6.7

题6.10

题6.11

Thank you for your attention

蔡忠法
浙江大学电工电子教学中心