第3章 微分运动学与静力学

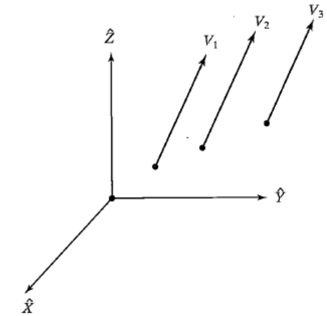
本章提纲

- 概述
- 时变位姿的符号表示
- 刚体的线速度和角速度
- 连杆间的速度传递
- 雅可比
- 奇异性
- 作用在操作臂上的静力
- 力域中的雅可比

概述

- **力学中，矢量的相等和等效问题**
  - 矢量相等：矢量具有相同的维数、大小和方向
  - 矢量等效：矢量针对特定功能产生了相同的作用效果

    矢量在特定功能上是否等效取决于当时的条件



- **基本矢量**
  - 线矢量：矢量的作用效果不仅依赖矢量的大小和方向，也依赖矢量的作用线（或作用点）
  - 自由矢量：矢量的大小和方向保持不变，可出现在空间任意位置，矢量的作用效果依赖矢量的大小和方向，不依赖矢量的作用线（或作用点）
- **自由矢量的变换**
  - 自由矢量的运算都是关于矢量的大小和方向的，在坐标系变换中只与旋转矩阵有关，而与原点的相对位移无关

$$^{A}V = {}^{A}_{B}R\, {}^{B}V$$

概述

- **刚体的线速度和角速度**

  不同于瞬时位置，瞬时速度涉及到运动，所考虑的矢量、矩阵和坐标系等多是可以随时间变换的，如：$^{A}P_{BORG}(t)$ 和 $^{A}_{B}R(t)$等，在不至引起歧义时，为简化表达，这些t被省略

- **操作臂静力学**

- **操作臂雅可比（矩阵）**

时变位姿的符号表示

$$ {}^{A}P = {}^{A}P_{BORG} + {}^{A}_{B}R\,{}^{B}P $$

位置矢量的微分

矢量 ${}^{B}Q$ 的微分表示为如下同维矢量

$$ {}^{B}V_{Q} = \frac{d}{dt}{}^{B}Q = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{{}^{B}Q(t+\Delta t) - {}^{B}Q(t)}{\Delta t} $$

若 ${}^{B}Q$ 是描述某个点的位置矢量，该点关于{B}的速度是 ${}^{B}V_{Q}$

像其他矢量一样，速度矢量 ${}^{B}V_{Q}$ 可在任意坐标系中描述

$$ {}^{A}({}^{B}V_{Q}) = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}V_{Q} = \frac{{}^{A}d}{dt}{}^{B}Q = \lim_{\Delta t \to 0} {}^{A}_{B}R(t)\left(\frac{{}^{B}Q(t+\Delta t) - {}^{B}Q(t)}{\Delta t} \right) $$

需要注意，${}^{A}({}^{B}V_{Q})$ 不同于 ${}^{A}V_{Q} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{{}^{A}Q(t+\Delta t) - {}^{A}Q(t)}{\Delta t}$

$$ {}^{A}V_{Q} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{{}^{A}P_{BORG}(t+\Delta t) + {}^{A}_{B}R(t+\Delta t)\,{}^{B}Q(t+\Delta t) - {}^{A}P_{BORG}(t) - {}^{A}_{B}R(t)\,{}^{B}Q(t)}{\Delta t} $$

当两个上标相同时，无需给出外层上标，即 ${}^{B}({}^{B}V_{Q}) = {}^{B}V_{Q}$

时变位姿的符号表示

经常讨论的是一个坐标系原点相对于世界坐标系{U}的速度，对于这种情况，定义一个缩写符号

$$\upsilon_C = {}^U V_{CORG}$$

式中的点为坐标系 {C}的原点

特别要注意下列符号的意思

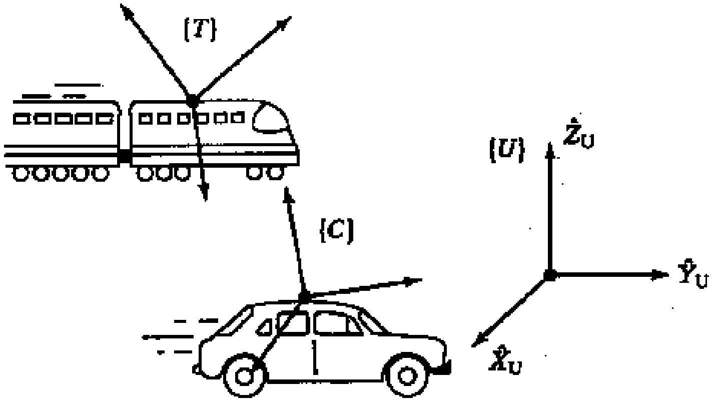
$$ {}^A\upsilon_C = {}^A_U R \upsilon_C = {}^A_U R\, {}^U V_{CORG} \neq {}^A V_{CORG} $$

$$ {}^C\upsilon_C = {}^C_U R \upsilon_C = {}^C_U R\, {}^U V_{CORG} $$

时变位姿的符号表示

例子: {U} 是世界坐标系. {T}固连在速度为 100 kmph的火车上.坐标系{C}固连在速度为 30 kmph的汽车上. 两车前进方向为 {U}的X方向。旋转矩阵 ${}^U_T R, {}^U_C R$ 已知并且为常数.求

$$\frac{{}^U d}{dt}\, {}^U P_{CORG}, \quad {}^C({}^U V_{TORG})$$



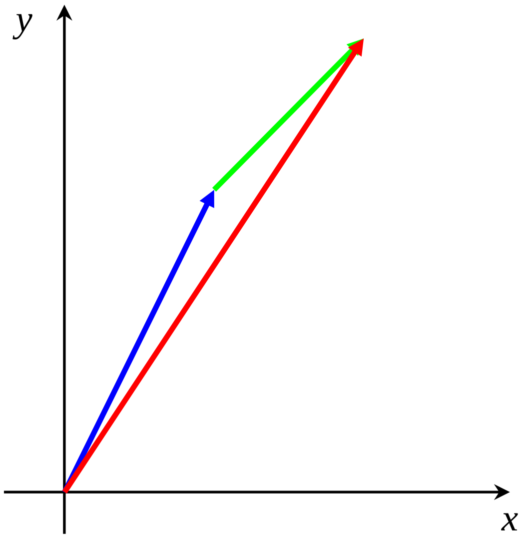
解:

$$\frac{{}^U d}{dt}\, {}^U P_{CORG} = {}^U V_{CORG} = \upsilon_C = 30\hat{X}$$

$${}^C({}^U V_{TORG}) = {}^C \upsilon_T = {}^C_U R \upsilon_T = {}^C_U R(100\hat{X}) = {}^U_C R^{-1} 100\hat{X}$$

时变位姿的符号表示

- 线位移标量的微分是线速度标量
- 角位移标量的微分是角速度标量
- 线位移向量有物理意义，其微分是线速度向量



$$\begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

时变位姿的符号表示

- **角位移向量没有物理意义**

例：XYZ固定角 $R_{XYZ}(\gamma,\beta,\alpha)=R_Z(\alpha)R_Y(\beta)R_X(\gamma)$，设以角位移向量$\begin{bmatrix}\gamma\\ \beta\\ \alpha\end{bmatrix}$表示姿态

设初始姿态为$[0\ \ 0\ \ 0]^T$

绕固定坐标系的x轴旋转0.1弧度后，绕固定坐标系的y轴旋转0.2弧度

绕固定坐标系的x轴旋转0.1弧度后，绕固定坐标系的y轴旋转0.1弧度

若按“右乘联体左乘基”，终点姿态 $R_Y(0.1)R_X(0.1)R_Y(0.2)R_X(0.1)$

若按向量加法，终点姿态 $\begin{bmatrix}0.1\\0.2\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0.1\\0.1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.2\\0.3\\0\end{bmatrix}$

即 $R_Z(0)R_Y(0.3)R_X(0.2)=R_Y(0.3)R_X(0.2)=R_Y(0.1)R_Y(0.2)R_X(0.1)R_X(0.1)$

时变位姿的符号表示

● 角速度矢量

刚体的定点转动

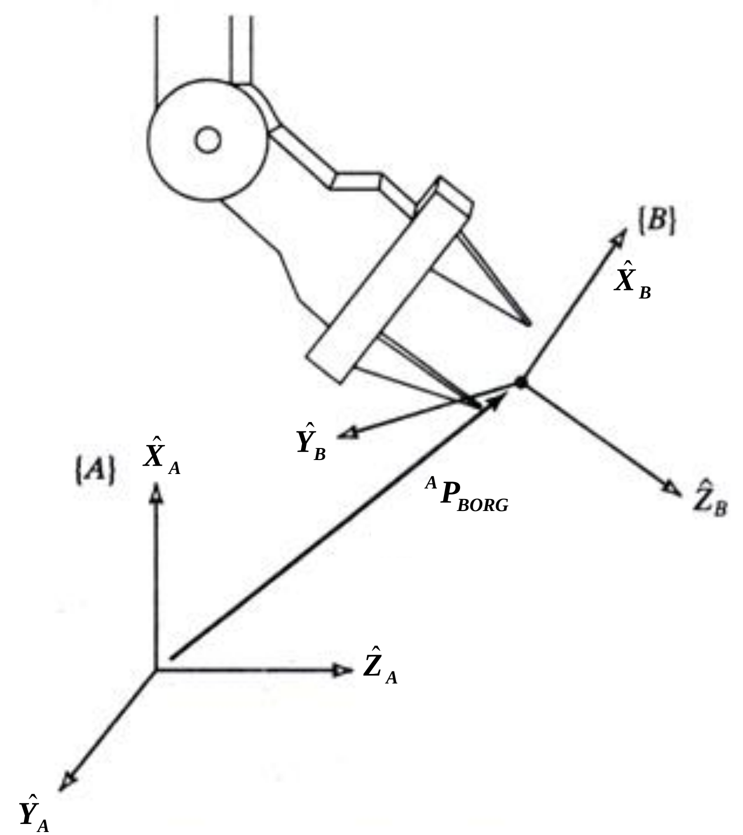
刚体绕体内或其外延部分的一固定点旋转

定点转动不同于定轴转动（$\tau = J\ddot{\theta}$）

由理论力学知：刚体（其联体坐标系为{B} ）

在参考坐标系{A}中的任何运动都可以分解为

点${}^{A}P_{BORG}$ 的运动和刚体绕${}^{A}P_{BORG}$ 的定点转动



时变位姿的符号表示

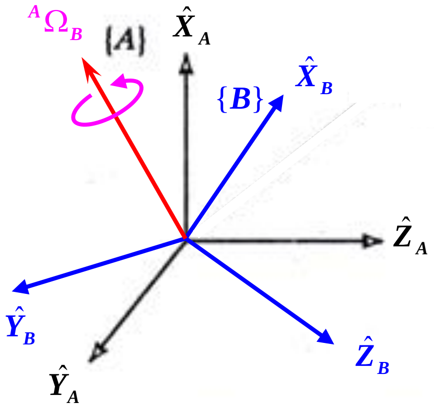
仅考虑刚体（或**{B}**）的定点转动，令 ${}^{A}P_{BORG}=0$，**{B}**与**{A}**原点重合

由理论力学知：在任一瞬间，**{B}**在**{A}**中的定点转动可以看作是绕**瞬时转动轴**（简称瞬轴，瞬轴上的每个点在该瞬时相对于**{A}**的速度为零）的转动

瞬轴的位置可随时间**t**变化**,**但原点始终在瞬轴上

在**{A}**中描述**{B}**的定点转动可用**角速度矢量** ${}^{A}\Omega_{B}$，${}^{A}\Omega_{B}$的方向是瞬轴在**{A}**中的方向

${}^{A}\Omega_{B}$的大小表示在**{A}**中**{B}**绕瞬轴的旋转速度



时变位姿的符号表示

像其他矢量一样, 角速度矢量可以在任意坐标系中描述

$$^{C}(^{A}\Omega_B) = {}^{C}_{A}R\,{}^{A}\Omega_B$$

经常讨论的是动坐标系（比如**{C}**）相对于世界坐标系**{U}**的角速度，对于这种情况，定义一个缩写符号

$$\omega_C = {}^{U}\Omega_C$$

特别要注意下列符号的意思

$$^{A}\omega_C = {}^{A}_{U}R\,\omega_C = {}^{A}_{U}R\,{}^{U}\Omega_C \neq {}^{A}\Omega_C$$

$$^{C}\omega_C = {}^{C}_{U}R\,\omega_C = {}^{C}_{U}R\,{}^{U}\Omega_C$$

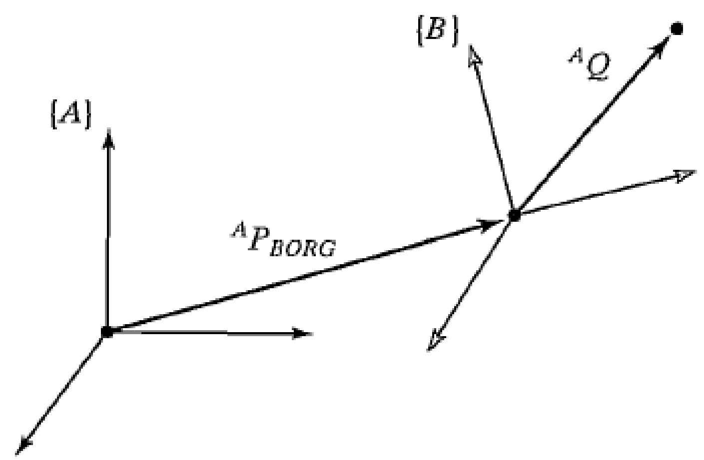
刚体的线速度和角速度（几何法）

线速度

坐标系{*B*}固连在刚体上，描述 ^{B}Q 相对于坐标系{*A*}的运动。

{*B*}相对于{*A*}用位置矢量 $^{A}P_{BORG}$ 和旋转矩阵 $^{A}_{B}R$ 来描述。

若方位 $^{A}_{B}R$ 不随时间变化，则**Q**点相对于坐标系{*A*}的运动是由于$^{A}P_{BORG}$ 或 ^{B}Q 随时间的变化引起的。



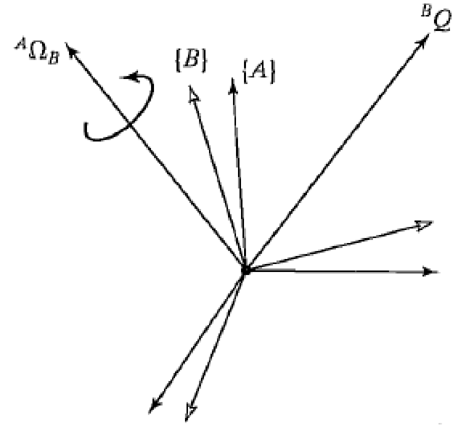
坐标系{*A*}中的**Q**点的线速度:

$$^{A}V_{Q}={}^{A}V_{BORG}+{}^{A}_{B}R\,{}^{B}V_{Q}$$

只适用于坐标系{*B*}和坐标系{*A*}的相对方位保持不变的情况。

刚体的线速度和角速度（几何法）

角速度



考虑:

- 两坐标系原点始终保持重合，相对线速度为零的情况。
- **{*B*}**相对于**{*A*}**的方位随时间变化。**{*B*}**相对于**{*A*}**的旋转速度用矢量 $^{A}\Omega_B$ 表示。
- ^{B}Q 是坐标系**{*B*}**中一个点的位置。

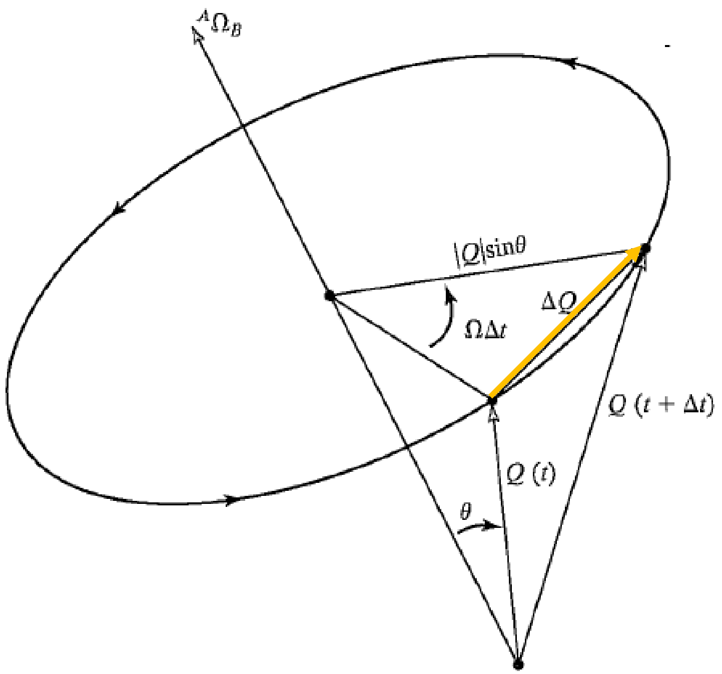
从**{*A*}**看**{*B*}**中的矢量，采用几何方法:

（1）若矢量***Q***在**{*B*}**中不变，则 ^{A}Q 的微分增量一定垂直于 $^{A}\Omega_B$ 和 ^{A}Q，微分增量的大小为:

$$|\Delta Q| = (|^{A}Q|\sin\theta)(|^{A}\Omega_B|\Delta t)$$

因此，微分矢量的大小和方向满足:

$$^{A}V_Q = {}^{A}\Omega_B \times {}^{A}Q$$



刚体的线速度和角速度（几何法）

（2）一般情况，若矢量**Q**相对于**{*B*}**是变化的

$$^{A}V_{Q} = {}^{A}({}^{B}V_{Q}) + {}^{A}\Omega_{B} \times {}^{A}Q$$

利用旋转矩阵:

$$^{A}V_{Q} = {}^{A}_{B}R\, {}^{B}V_{Q} + {}^{A}\Omega_{B} \times {}^{A}_{B}R\, {}^{B}Q$$

线速度和角速度同时存在

$$^{A}V_{Q} = {}^{A}V_{BORG} + {}^{A}_{B}R\, {}^{B}V_{Q} + {}^{A}\Omega_{B} \times {}^{A}_{B}R\, {}^{B}Q$$

这是从固定坐标系观测运动坐标系中的矢量微分的最终结果。

刚体的线速度和角速度（代数法）

正交矩阵的导数性质

对任何 $n\times n$ 的正交矩阵 ***R***，有: $RR^T = I_n$

求导，得到:

$$\dot{R}R^T + R\dot{R}^T = \dot{R}R^T + (\dot{R}R^T)^T = 0_n$$

定义 $S = \dot{R}R^T$，由此有 $S + S^T = 0_n$

S 是一个反对称阵（**skew-symmetric matrix**）.

正交矩阵的微分与反对称阵之间存在如下特性:

$$S = \dot{R}R^{-1}$$

刚体的线速度和角速度（代数法）

$${}^{A}P = {}^{A}P_{BORG} + {}^{A}_{B}R\,{}^{B}P$$

- Q是空间中的动点，{A}和{B}是动坐标系，求 ${}^{A}V_{Q}$ 与 ${}^{B}V_{Q}$ 的关系

$${}^{A}V_{Q} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{{}^{A}Q(t+\Delta t) - {}^{A}Q(t)}{\Delta t} \qquad {}^{B}V_{Q} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{{}^{B}Q(t+\Delta t) - {}^{B}Q(t)}{\Delta t}$$

$${}^{A}V_{Q} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{{}^{A}P_{BORG}(t+\Delta t) + {}^{A}_{B}R(t+\Delta t)\,{}^{B}Q(t+\Delta t) - {}^{A}P_{BORG}(t) - {}^{A}_{B}R(t)\,{}^{B}Q(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{{}^{A}P_{BORG}(t+\Delta t) - {}^{A}P_{BORG}(t)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{{}^{A}_{B}R(t+\Delta t)\,{}^{B}Q(t+\Delta t) - {}^{A}_{B}R(t)\,{}^{B}Q(t)}{\Delta t}$$

$$= {}^{A}V_{BORG} + \frac{d}{dt}\,{}^{A}_{B}R(t)\,{}^{B}Q(t)$$

$$= {}^{A}V_{BORG} + {}^{A}_{B}\dot{R}\,{}^{B}Q + {}^{A}_{B}R\,{}^{B}V_{Q}$$

刚体的线速度和角速度（代数法）

$$ {}^{A}_{B}\dot{R} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{{}^{A}_{B}R(t+\Delta t) - {}^{A}_{B}R(t)}{\Delta t} $$

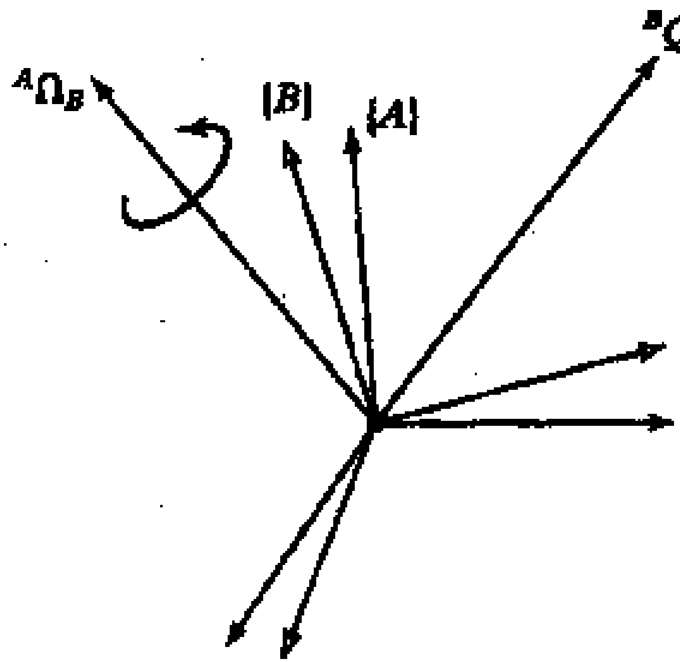
在时间间隔Δt中，通过绕瞬轴匀速旋转φ角度，姿态${}^{A}_{B}R(t)$变成姿态${}^{A}_{B}R(t+\Delta t)$

根据等效轴角方法，有 ${}^{A}_{B}R(t+\Delta t) = \mathrm{Rot}({}^{A}K,\varphi)\,{}^{A}_{B}R(t)$

${}^{A}K$是瞬轴的归一化向量，即

$$ {}^{A}K = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_x/\dot{\varphi} \\ \Omega_y/\dot{\varphi} \\ \Omega_z/\dot{\varphi} \end{bmatrix} $$

角速度向量 $\begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix} = {}^{A}\Omega_{B}$



标量$\dot{\varphi}$表示旋转速度

则 $$ {}^{A}_{B}\dot{R} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathrm{Rot}({}^{A}K,\varphi) - I_3}{\Delta t}\,{}^{A}_{B}R(t) $$

$$ = \lim_{\varphi \to 0} \frac{\mathrm{Rot}({}^{A}K,\varphi) - I_3}{\varphi}\,\dot{\varphi}\,{}^{A}_{B}R(t) $$

刚体的线速度和角速度（代数法）

已知

$$\mathrm{Rot}({}^{A}K,\varphi)=\begin{bmatrix} k_xk_xv\varphi+c\varphi & k_xk_yv\varphi-k_zs\varphi & k_xk_zv\varphi+k_ys\varphi \\ k_xk_yv\varphi+k_zs\varphi & k_yk_yv\varphi+c\varphi & k_yk_zv\varphi-k_xs\varphi \\ k_xk_zv\varphi-k_ys\varphi & k_yk_zv\varphi+k_xs\varphi & k_zk_zv\varphi+c\varphi \end{bmatrix}$$

$$v\varphi=1-c\varphi$$

显然 $\mathrm{Rot}({}^{A}K,0)=I_3$

于是

$$\lim_{\varphi\to 0}\frac{Rot({}^{A}K,\varphi)-I_3}{\varphi}=\lim_{\varphi\to 0}\frac{Rot({}^{A}K,\varphi)-Rot({}^{A}K,0)}{\varphi-0}=\frac{d}{d\varphi}Rot({}^{A}K,\varphi)\Big|_{\varphi=0}$$

$$=\begin{bmatrix} k_xk_xs\varphi-s\varphi & k_xk_ys\varphi-k_zc\varphi & k_xk_zs\varphi+k_yc\varphi \\ k_xk_ys\varphi+k_zc\varphi & k_yk_ys\varphi-s\varphi & k_yk_zs\varphi-k_xc\varphi \\ k_xk_zs\varphi-k_yc\varphi & k_yk_zs\varphi+k_xc\varphi & k_zk_zs\varphi-s\varphi \end{bmatrix}\Bigg|_{\varphi=0}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & -k_z & k_y \\ k_z & 0 & -k_x \\ -k_y & k_x & 0 \end{bmatrix}$$

刚体的线速度和

$$A\times B=\begin{bmatrix} a_2b_3-a_3b_2\\ a_3b_1-a_1b_3\\ a_1b_2-a_2b_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2\\ a_3 & 0 & -a_1\\ -a_2 & a_1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ b_3\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3$$

$${}^A_B\dot{R}=\dot{\varphi}\lim_{\varphi\to 0}\frac{\mathrm{Rot}({}^AK,\varphi)-I_3}{\varphi}\,{}^A_BR$$

$$=\dot{\varphi}\begin{bmatrix} 0 & -k_z & k_y\\ k_z & 0 & -k_x\\ -k_y & k_x & 0\end{bmatrix}{}^A_BR=\begin{bmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y\\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x\\ -\Omega_y & \Omega_x & 0\end{bmatrix}{}^A_BR={}^A_BS\,{}^A_BR$$

对应角速度向量 ${}^A\Omega_B=\begin{bmatrix}\Omega_x\\ \Omega_y\\ \Omega_z\end{bmatrix}$，定义角速度矩阵 ${}^A_BS=\begin{bmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y\\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x\\ -\Omega_y & \Omega_x & 0\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 3}$

$${}^A_B\dot{R}={}^A_BS\,{}^A_BR \qquad {}^A_BS={}^A_B\dot{R}\,{}^A_BR^{-1}={}^A_B\dot{R}\,{}^A_BR^T$$

若$M=-M^{\mathrm{T}}$，称**M**为反对称矩阵　　　　角速度矩阵 ${}^A_BS$ 是反对称矩阵

$${}^AV_Q={}^AV_{BORG}+{}^A_B\dot{R}\,{}^BQ+{}^A_BR\,{}^BV_Q={}^AV_{BORG}+{}^A_BS\,{}^A_BR\,{}^BQ+{}^A_BR\,{}^BV_Q$$

$${}^AV_Q={}^AV_{BORG}+{}^A_BR\,{}^BV_Q+{}^A\Omega_B\times{}^A_BR\,{}^BQ$$

刚体的线速度和角速度

先乘除后加减，先点乘后叉乘

$\{A\}$、$\{B\}$ 和 $\{C\}$ 是动坐标系，${}^{A}\Omega_{B}$ 、${}^{B}\Omega_{C}$ 和 ${}^{A}\Omega_{C}$ 的关系如何？

$${}^{A}_{C}R = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}_{C}R \qquad {}^{A}_{C}\dot{R} = {}^{A}_{B}\dot{R}\,{}^{B}_{C}R + {}^{A}_{B}R\,{}^{B}_{C}\dot{R}$$

$$\begin{aligned}
{}^{A}_{C}S\,{}^{A}_{C}R &= {}^{A}_{B}S\,{}^{A}_{B}R\,{}^{B}_{C}R + {}^{A}_{B}R\,{}^{B}_{C}S\,{}^{B}_{C}R \\
&= {}^{A}_{B}S\,{}^{A}_{C}R + {}^{A}_{B}R\left[{}^{B}\Omega_{C}\times{}^{B}X_{C} \quad {}^{B}\Omega_{C}\times{}^{B}Y_{C} \quad {}^{B}\Omega_{C}\times{}^{B}Z_{C}\right] \\
&= {}^{A}_{B}S\,{}^{A}_{C}R + \left[{}^{A}_{B}R\,{}^{B}\Omega_{C}\times{}^{A}_{B}R\,{}^{B}X_{C} \quad {}^{A}_{B}R\,{}^{B}\Omega_{C}\times{}^{A}_{B}R\,{}^{B}Y_{C} \quad {}^{A}_{B}R\,{}^{B}\Omega_{C}\times{}^{A}_{B}R\,{}^{B}Z_{C}\right] \\
&= {}^{A}_{B}S\,{}^{A}_{C}R + \left[{}^{A}_{B}R\,{}^{B}\Omega_{C}\times{}^{A}X_{C} \quad {}^{A}_{B}R\,{}^{B}\Omega_{C}\times{}^{A}Y_{C} \quad {}^{A}_{B}R\,{}^{B}\Omega_{C}\times{}^{A}Z_{C}\right] \\
&= {}^{A}_{B}S\,{}^{A}_{C}R + \left[{}^{A}\Gamma_{C}\times{}^{A}X_{C} \quad {}^{A}\Gamma_{C}\times{}^{A}Y_{C} \quad {}^{A}\Gamma_{C}\times{}^{A}Z_{C}\right] \\
&= {}^{A}_{B}S\,{}^{A}_{C}R + {}^{A}_{C}W\,{}^{A}_{C}R = ({}^{A}_{B}S + {}^{A}_{C}W)\,{}^{A}_{C}R
\end{aligned}$$

$${}^{A}_{C}S = {}^{A}_{B}S + {}^{A}_{C}W \qquad {}^{A}\Omega_{C} = {}^{A}\Omega_{B} + {}^{A}_{B}R\,{}^{B}\Omega_{C}$$

$${}^{A}\Gamma_{C} = \begin{bmatrix}\gamma_x\\ \gamma_y\\ \gamma_z\end{bmatrix} = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}\Omega_{C} \qquad {}^{A}_{C}W = \begin{bmatrix}0 & -\gamma_z & \gamma_y\\ \gamma_z & 0 & -\gamma_x\\ -\gamma_y & \gamma_x & 0\end{bmatrix}$$

连杆间的速度传递

在操作臂工作过程中基座静止，所以一般将{0}作为世界坐标系{U}
对于连杆i（其联体坐标系{i}）的速度，有

$$ {}^{i}\upsilon_i = {}^{i}_{U}R\upsilon_i = {}^{i}_{U}R\,{}^{U}V_{iORG} = {}^{i}_{0}R\,{}^{0}V_{iORG} $$

$$ {}^{i}\omega_i = {}^{i}_{U}R\omega_i = {}^{i}_{U}R\,{}^{U}\Omega_i = {}^{i}_{0}R\,{}^{0}\Omega_i $$

$$ {}^{i+1}\upsilon_i = {}^{i+1}_{U}R\upsilon_i = {}^{i+1}_{U}R\,{}^{U}V_{iORG} = {}^{i+1}_{0}R\,{}^{0}V_{iORG} $$

$$ {}^{i+1}\omega_i = {}^{i+1}_{U}R\omega_i = {}^{i+1}_{U}R\,{}^{U}\Omega_i = {}^{i+1}_{0}R\,{}^{0}\Omega_i $$

显然

$$ {}^{i+1}\upsilon_i = {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\upsilon_i $$

$$ {}^{i+1}\omega_i = {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\omega_i $$

$$
{}^{\;\;i}_{i+1}T = \begin{bmatrix} \cos\theta_{i+1} & -\sin\theta_{i+1} & 0 & a_i \\ \sin\theta_{i+1}\cos\alpha_i & \cos\theta_{i+1}\cos\alpha_i & -\sin\alpha_i & -\sin\alpha_i d_{i+1} \\ \sin\theta_{i+1}\sin\alpha_i & \cos\theta_{i+1}\sin\alpha_i & \cos\alpha_i & \cos\alpha_i d_{i+1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{A}\Omega_C = {}^{A}\Omega_B + {}^{A}_{B}R\,{}^{B}\Omega_C
$$

操作臂是一个链式结构，每个连杆的运动都与它的相邻杆有关，由于这种结构的特点，我们可以依次计算各连杆的速度（线速度和角速度）

当关节**i+1**是旋转关节时

$$
{}^{i}\Omega_{i+1} = \dot{\theta}_{i+1}\,{}^{\;\;i}_{i+1}R\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}
$$

${}^{i+1}\hat{Z}_{i+1} = [0 \quad 0 \quad 1]^T$是轴**i+1**在**{i+1}**中的表示

$\dot{\theta}_{i+1}$ 是旋转关节**i+1**的关节转速

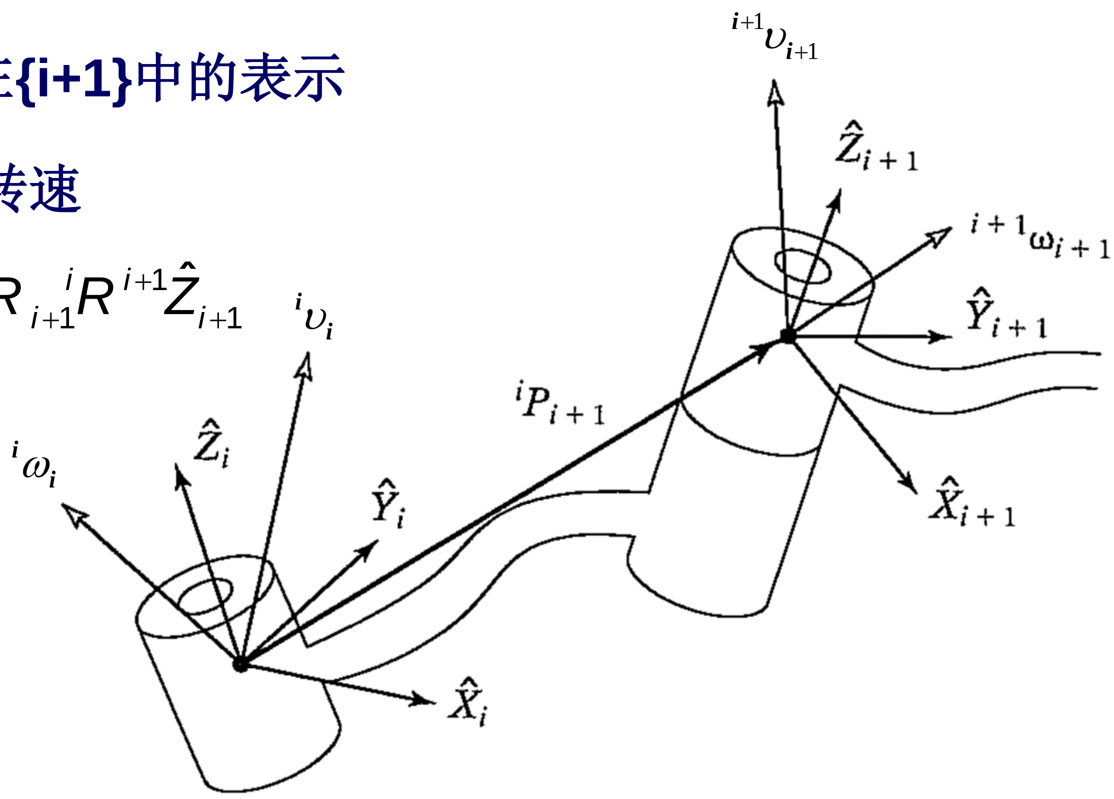
$$
\omega_{i+1} = \omega_i + {}^{0}_{i}R\,{}^{i}\Omega_{i+1} = \omega_i + \dot{\theta}_{i+1}\,{}^{0}_{i}R\,{}^{\;\;i}_{i+1}R\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}
$$

$$
{}^{i}\omega_{i+1} = {}^{i}_{0}R\,\omega_{i+1}
$$

$$
= {}^{i}_{0}R\,\omega_i + {}^{i}_{0}R\,\dot{\theta}_{i+1}\,{}^{0}_{i}R\,{}^{\;\;i}_{i+1}R\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}
$$

$$
= {}^{i}\omega_i + {}^{\;\;i}_{i+1}R\,\dot{\theta}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}
$$

$$
{}^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}_{\;\;i}R\,{}^{i}\omega_i + \dot{\theta}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}
$$



连杆间的速度传递

$$^{A}V_Q = {}^{A}V_{BORG} + {}^{A}_{B}R\,{}^{B}V_Q + {}^{A}\Omega_B \times {}^{A}_{B}R\,{}^{B}Q$$

对于旋转关节i+1，{0}是{A}，{i}是{B}，Q是{i+1}的原点

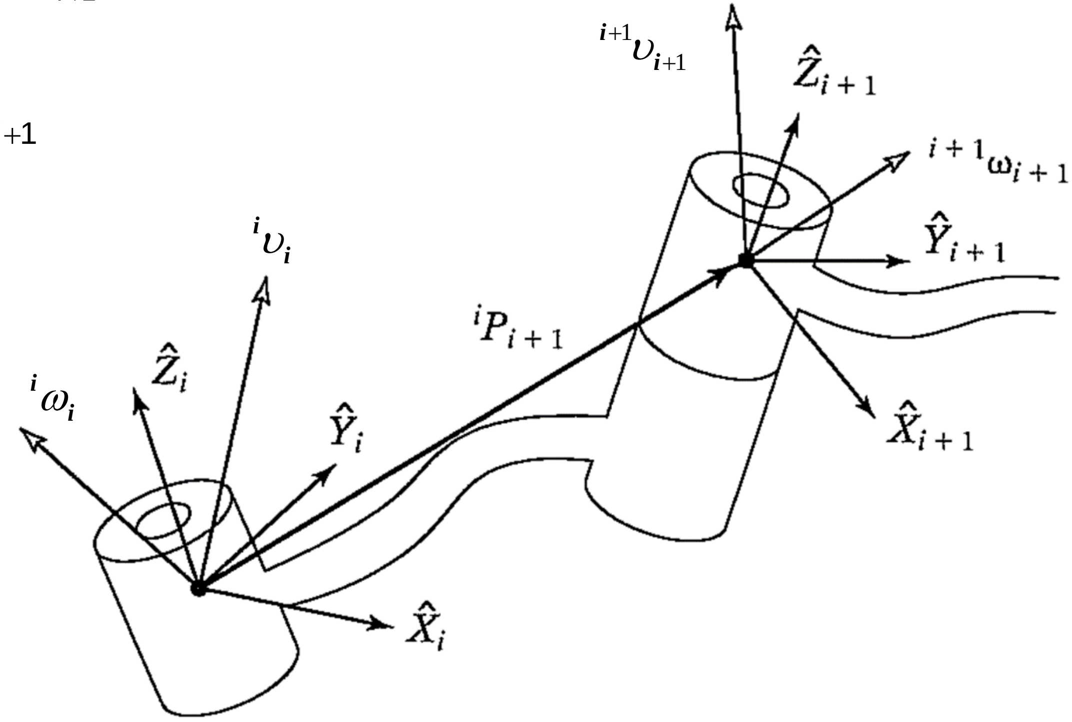
$^{B}Q = {}^{i}P_{i+1}$ 是定常向量，因此 $^{B}V_Q = 0$

于是 $^{0}V_{i+1} = {}^{0}V_i + {}^{0}\Omega_i \times {}^{0}_{i}R\,{}^{i}P_{i+1}$

即 $\upsilon_{i+1} = \upsilon_i + \omega_i \times {}^{0}_{i}R\,{}^{i}P_{i+1}$

$$\begin{aligned}
{}^{i}\upsilon_{i+1} &= {}^{i}_{0}R\,\upsilon_{i+1} \\
&= {}^{i}_{0}R\,\upsilon_i + {}^{i}_{0}R\left(\omega_i \times {}^{0}_{i}R\,{}^{i}P_{i+1}\right) \\
&= {}^{i}\upsilon_i + \left({}^{i}_{0}R\,\omega_i\right) \times {}^{i}P_{i+1} \\
&= {}^{i}\upsilon_i + {}^{i}\omega_i \times {}^{i}P_{i+1}
\end{aligned}$$

$$^{i+1}\upsilon_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\left({}^{i}\upsilon_i + {}^{i}\omega_i \times {}^{i}P_{i+1}\right)$$



连杆间的速度传递

当关节i+1是移动关节时

$$^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\omega_i$$

$$^{i+1}\upsilon_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R({}^{i}\upsilon_i + {}^{i}\omega_i \times {}^{i}P_{i+1}) + \dot{d}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}$$

$\dot{d}_{i+1}$ 是移动关节i+1的平移速度

向外迭代法

若已知每个旋转关节的 θ_i 和 $\dot{\theta}_i$ 以及每个移动关节的 d_i 和 $\dot{d}_i$，从连杆0的 $^{0}\omega_0 = 0, {}^{0}\upsilon_0 = 0$ 开始，依次应用这些公式，可以计算出最后一个连杆的角速度 $^{N}\omega_N$ 和线速度 $^{N}\upsilon_N$，进一步，可得

$$\upsilon_N = {}^{0}_{N}R\,{}^{N}\upsilon_N$$

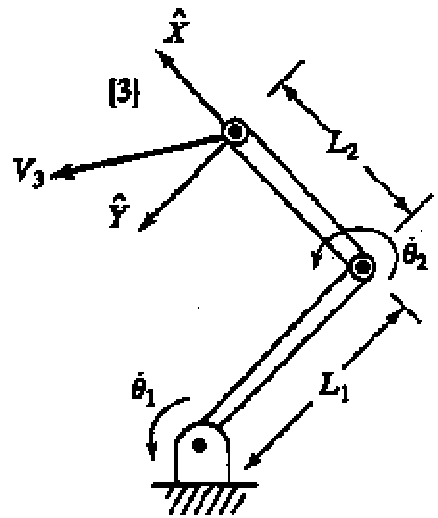
$$\omega_N = {}^{0}_{N}R\,{}^{N}\omega_N$$

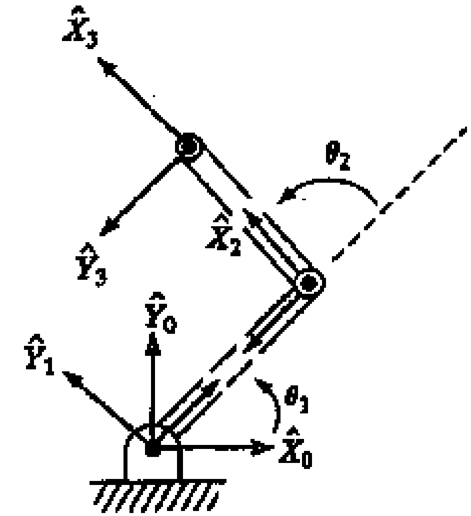
连杆间的速度传递

例子: 一个具有两个转动关节的操作臂.计算操作臂末端的速度，将它表达成关节速度的函数。给出两种形式的解答，一种是用坐标系{3}来表示，另一种是用坐标系{0}来表示

$$ {}^0_1T = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1_2T = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & l_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^2_3T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^0_3R = {}^0_1R\,{}^1_2R\,{}^2_3R = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 \\ s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$





连杆间的速度传递

$$^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\omega_i + \dot{\theta}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}$$

$$^{i+1}\upsilon_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R({}^{i}\upsilon_i + {}^{i}\omega_i \times {}^{i}P_{i+1})$$

基坐标系的速度为零:
$$^{0}\omega_0 = 0 \quad , \quad {}^{0}\upsilon_0 = 0$$

Frame {1}—{3}:

$$^{1}\omega_1 = {}^{1}_{0}R\,{}^{0}\omega_0 + \dot{\theta}_1\,{}^{1}\hat{Z}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \quad , \quad {}^{1}\upsilon_1 = {}^{1}_{0}R({}^{0}\upsilon_0 + {}^{0}\omega_0 \times {}^{0}P_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$^{2}\omega_2 = {}^{2}_{1}R\,{}^{1}\omega_1 + \dot{\theta}_2\,{}^{2}\hat{z}_2 = \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 \\ -s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} + \dot{\theta}_2\,{}^{2}\hat{z}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$$^{2}\upsilon_2 = {}^{2}_{1}R({}^{1}\upsilon_1 + {}^{1}\omega_1 \times {}^{1}P_2) = \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 \\ -s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 \\ -s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ l_1\dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 s_2 \dot{\theta}_1 \\ l_1 c_2 \dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

连杆间的速度传递

$$^{i+1}\omega_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R\,{}^{i}\omega_i + \dot{\theta}_{i+1}\,{}^{i+1}\hat{Z}_{i+1}$$

$$^{i+1}\upsilon_{i+1} = {}^{i+1}_{i}R({}^{i}\upsilon_i + {}^{i}\omega_i \times {}^{i}P_{i+1})$$

$$^{3}\omega_3 = {}^{3}_{2}R\,{}^{2}\omega_2 + \dot{\theta}_3\,{}^{3}\hat{Z}_3 = {}^{2}\omega_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

$$^{3}\upsilon_3 = {}^{3}_{2}R({}^{2}\upsilon_2 + {}^{2}\omega_2 \times {}^{2}P_3) = {}^{3}_{2}R(\begin{bmatrix} l_1 s_2 \dot{\theta}_1 \\ l_1 c_2 \dot{\theta}_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} l_1 s_2 \dot{\theta}_1 \\ l_1 c_2 \dot{\theta}_1 + l_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$^{0}\upsilon_3 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 \\ s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 s_2 \dot{\theta}_1 \\ l_1 c_2 \dot{\theta}_1 + l_2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 s_1 \dot{\theta}_1 - l_2 s_{12}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ l_1 c_1 \dot{\theta}_1 + l_2 c_{12}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$^{0}\omega_3 = {}^{0}_{3}R\,{}^{3}\omega_3 = {}^{3}\omega_3$$

雅可比 Jacobian

雅可比 Jacobian是多元函数的导数

假设6个函数，每个函数都有6个独立的变量：

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$$
$$y_2 = f_2(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$$
$$\cdots$$
$$y_6 = f_6(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$$

$$\Longrightarrow \quad Y = F(X)$$

计算 y_i 的微分关于 x_j 的微分的函数：

$$\delta y_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\delta x_2 + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial x_6}\delta x_6$$
$$\delta y_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\delta x_2 + \cdots + \frac{\partial f_2}{\partial x_6}\delta x_6$$
$$\cdots$$
$$\delta y_6 = \frac{\partial f_6}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial f_6}{\partial x_2}\delta x_2 + \cdots + \frac{\partial f_6}{\partial x_6}\delta x_6$$

$$\Longrightarrow \quad \delta Y = \frac{\partial F}{\partial X}\delta X = J(X)\delta X$$

雅可比 Jacobian

$$\delta Y = \frac{\partial F}{\partial X}\delta X = J(X)\delta X \Longrightarrow \dot{Y} = J(X)\dot{X}$$

Jacobian矩阵：关节空间的微分变化（速度变化）与目标空间（速度变化）之间的关系

雅可比Jacobian:

偏导数矩阵 $J(X)$ 称作雅可比矩阵, 是 x_i 的函数。

雅可比矩阵可看成是***X***中的速度向***Y***中速度的映射。

$J(X)$ 是一个时变的线性变换。

$$\begin{bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \theta_3\\ \theta_4\\ \theta_5\\ \theta_6\end{bmatrix} \underset{\text{逆向}}{\overset{\text{正向}}{\rightleftarrows}} \begin{bmatrix}x\\ y\\ z\\ \phi\\ \theta\\ \varphi\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}\dot\theta_1\\ \dot\theta_2\\ \dot\theta_3\\ \dot\theta_4\\ \dot\theta_5\\ \dot\theta_6\end{bmatrix} \overset{\text{Jacobian 矩阵}}{\longleftrightarrow} \begin{bmatrix}\dot x\\ \dot y\\ \dot z\\ \omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix}$$

运动学

关节空间　　　　目标空间

关节空间向目标空间速度的传动比。

前述向外迭代法计算机械臂末端速度的算法是**计算雅可比矩阵**的方法之一。

雅可比

$$^{A}V_Q = {}^{A}V_{BORG} + {}^{A}_{B}R\,{}^{B}V_Q + {}^{A}\Omega_B \times {}^{A}_{B}R\,{}^{B}Q$$

{A}={0}，{B}={2}，Q是{N}的原点

$$\upsilon_N^{(2)} = \upsilon_2 + {}^{0}_{2}R\,{}^{2}V_N + \omega_2 \times {}^{0}_{2}R\,{}^{2}Q$$

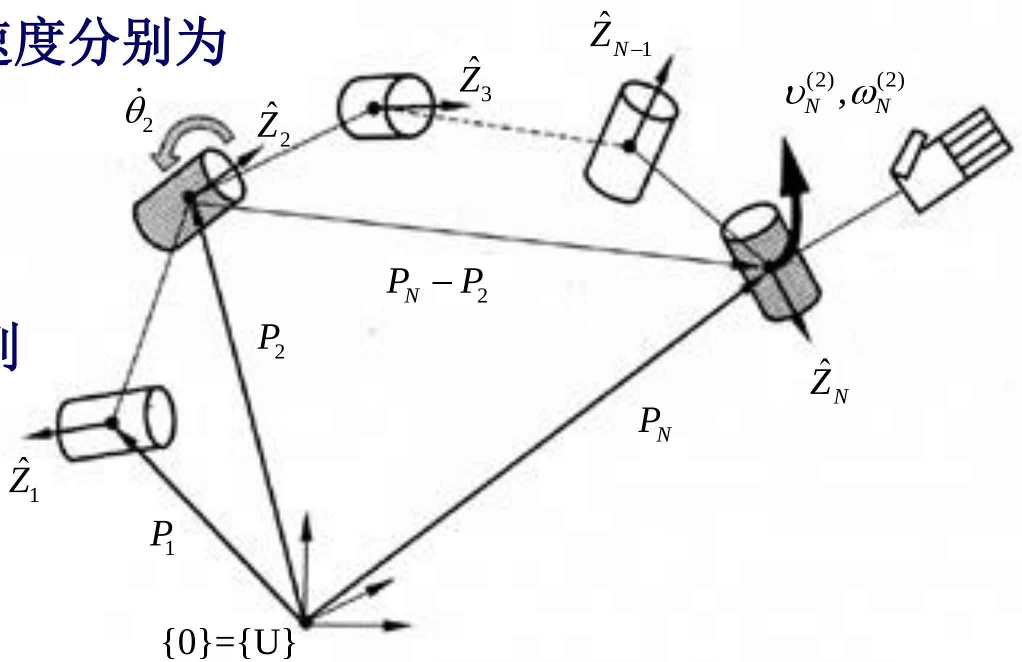
若每个关节是旋转关节，还可以采用雅可比方法求末端线速度和角速度

机构链如图所示，假定末端执行器固连在连杆N上，而且每个连杆的坐标系原点 P_i 和转轴单位向量 $\hat{Z}_i$ 已由正运动学求得

假设其他关节固定不动，只有第2个关节绕其轴的转速为 $\dot{\theta}_2$，则由此产生的连杆N的线速度和角速度分别为

$$\upsilon_N^{(2)} = \dot{\theta}_2\hat{Z}_2 \times (P_N - P_2)$$

$$\omega_N^{(2)} = \dot{\theta}_2\hat{Z}_2$$



同样方法扩展到其他关节，得到

$$\upsilon_N^{(i)} = \dot{\theta}_i\hat{Z}_i \times (P_N - P_i)$$

$$\omega_N^{(i)} = \dot{\theta}_i\hat{Z}_i$$

雅可比

$$\upsilon_N^{(i)} = \dot{\theta}_i \hat{Z}_i \times (P_N - P_i)$$
$$\omega_N^{(i)} = \dot{\theta}_i \hat{Z}_i$$

末端实际线速度和角速度就是各关节造成的线速度和角速度的总和

$$\upsilon_N = \sum_{i=1}^{N} \upsilon_N^{(i)}, \quad \omega_N = \sum_{i=1}^{N} \omega_N^{(i)}$$

定义笛卡尔速度矢量 $v_N = \begin{bmatrix} \upsilon_N \\ \omega_N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^6$ 和关节空间角速度矢量 $\dot{\Theta} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \vdots \\ \dot{\theta}_N \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^N$

则

$$v_N = \begin{bmatrix} \hat{Z}_1 \times (P_N - P_1) & \hat{Z}_2 \times (P_N - P_2) & \cdots & \hat{Z}_{N-1} \times (P_N - P_{N-1}) & 0 \\ \hat{Z}_1 & \hat{Z}_2 & \cdots & \hat{Z}_{N-1} & \hat{Z}_N \end{bmatrix} \dot{\Theta}$$
$$= J(\Theta)\dot{\Theta}$$

$J(\Theta) \in \mathbb{R}^{6\times N}$ 称为雅可比

对于任意已知的操作臂位形，关节速度和操作臂末端速度的关系是线性的，然而这种线性关系仅仅是瞬时的，因为在下一刻，雅可比矩阵就会有微小的变化

雅可比

若关心{i}中的笛卡尔速度矢量，则

$$\begin{bmatrix} {}^{i}\upsilon_N \\ {}^{i}\omega_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{i}_{0}R & 0 \\ 0 & {}^{i}_{0}R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \upsilon_N \\ \omega_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^{i}_{0}R & 0 \\ 0 & {}^{i}_{0}R \end{bmatrix} J(\Theta)\dot{\Theta}$$

可记变换后的雅可比为

$${}^{i}J(\Theta) = \begin{bmatrix} {}^{i}_{0}R & 0 \\ 0 & {}^{i}_{0}R \end{bmatrix} J(\Theta)$$

即

$$\begin{bmatrix} {}^{i}\upsilon_N \\ {}^{i}\omega_N \end{bmatrix} = {}^{i}J(\Theta)\dot{\Theta}$$

雅可比

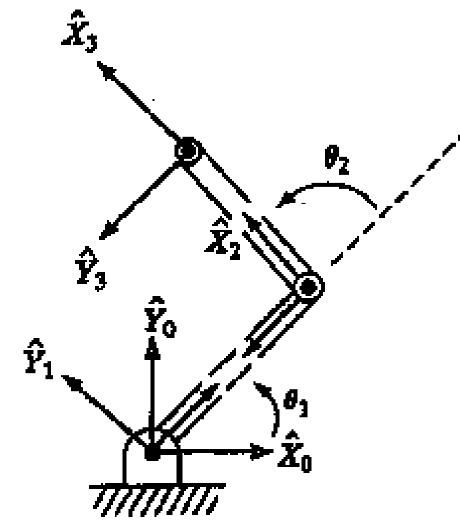
$$J(\Theta)=\begin{bmatrix}\hat{Z}_1\times(P_N-P_1) & \hat{Z}_2\times(P_N-P_2) & \cdots & \hat{Z}_{N-1}\times(P_N-P_{N-1}) & 0\\ \hat{Z}_1 & \hat{Z}_2 & \cdots & \hat{Z}_{N-1} & \hat{Z}_N\end{bmatrix}$$

例子: 以两连杆操作臂为例，用雅可比求末端执行器的速度

由正运动学计算得 $\hat{Z}_1=\hat{Z}_2=\hat{Z}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\quad P_1=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\quad P_2=\begin{bmatrix}l_1c_1\\l_1s_1\\0\end{bmatrix}\quad P_3=\begin{bmatrix}l_2c_{12}+l_1c_1\\l_2s_{12}+l_1s_1\\0\end{bmatrix}$

设 $\dot{\Theta}=\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1 & \dot{\theta}_2 & \dot{\theta}_3\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$，**6×3的雅可比表达为**

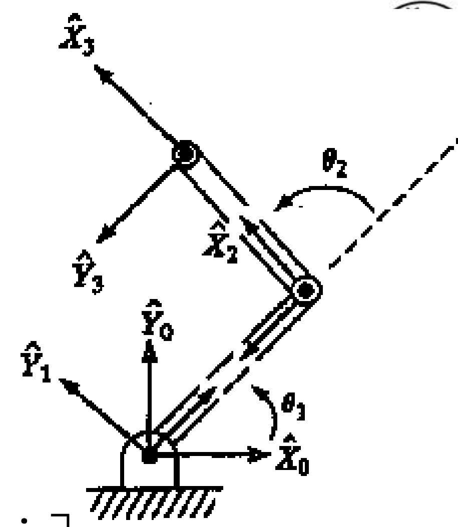
$$\begin{bmatrix}\upsilon_3\\ \omega_3\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c:c:c}-l_2s_{12}-l_1s_1 & -l_2s_{12} & 0\\ l_2c_{12}+l_1c_1 & l_2c_{12} & 0\\ 0 & 0 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{array}\right]\begin{bmatrix}\dot{\theta}_1\\ \dot{\theta}_2\\ \dot{\theta}_3\end{bmatrix}$$



$$\upsilon_3=\begin{bmatrix}-l_1s_1\dot{\theta}_1-l_2s_{12}(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)\\ l_1c_1\dot{\theta}_1+l_2c_{12}(\dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2)\\ 0\end{bmatrix}\qquad \omega_3=\begin{bmatrix}0\\0\\ \dot{\theta}_1+\dot{\theta}_2\end{bmatrix}$$

所得结果与向外迭代法相同

雅可比



由 $\begin{bmatrix} {}^3\upsilon_3 \\ {}^3\omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^3_0R & 0 \\ 0 & {}^3_0R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \upsilon_3 \\ \omega_3 \end{bmatrix}$，有

$$\begin{bmatrix} {}^3\upsilon_3 \\ {}^3\omega_3 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:ccc} c_{12} & s_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & c_{12} & s_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s_{12} & c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c:c:c} -l_2s_{12}-l_1s_1 & -l_2s_{12} & 0 \\ l_2c_{12}+l_1c_1 & l_2c_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

$$= \left[\begin{array}{c:c:c} l_1s_2 & 0 & 0 \\ l_2+l_1c_2 & l_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix}$$

设 ${}^3\upsilon_3 = \begin{bmatrix} u_x & u_y & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$

平面操作臂重视2维线速度且 $\dot{\theta}_3 \equiv 0$，则2×2的雅可比表达为

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1s_2 & 0 \\ l_2+l_1c_2 & l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

奇异性

对于6×6的J和某个Θ，若J(Θ)可逆，则对任何笛卡尔速度矢量v_N，由

$$\dot{\Theta} = J^{-1}(\Theta)v_N$$

可以计算出产生v_N的各关节转速，这些转速是产生v_N的唯一解

大多数6×6的J都有使得其不可逆的Θ值，这些Θ值所对应的位姿称为机构的奇异位形或简称奇异状态

所有的操作臂在工作空间的边界都存在奇异位形，并且大多数操作臂在它们的工作空间也有奇异位形

奇异性

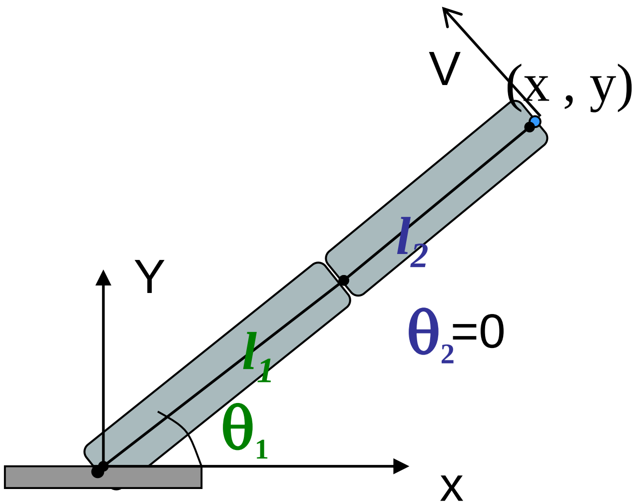
奇异位形大致分为两类:

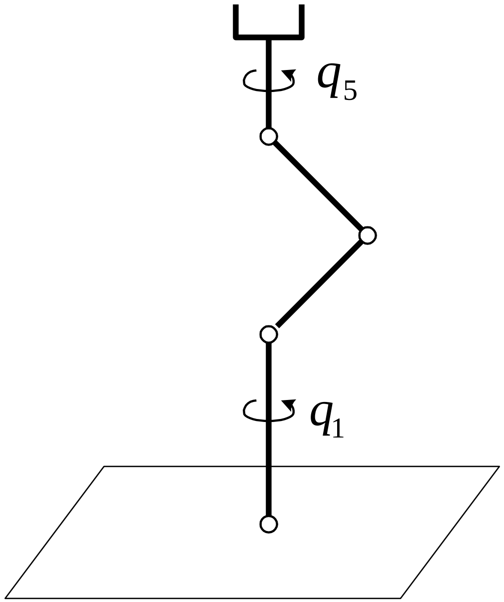
1）边界奇异性：

工作空间边界的奇异位形。出现在操作臂完全展开或者收回使得末端执行器处于或非常接近空间边界的情况

2）内点奇异性：

工作空间内部的奇异位形。出现在远离工作空间的边界，通常是由于两个或两个以上的关节轴线共线引起的





当操作臂处于奇异位形时，会失去一个或多个自由度。即在笛卡尔空间的某个方向上（或某个子空间中），无论选择什么样的关节速度，都不能使操作臂运动。

奇异性

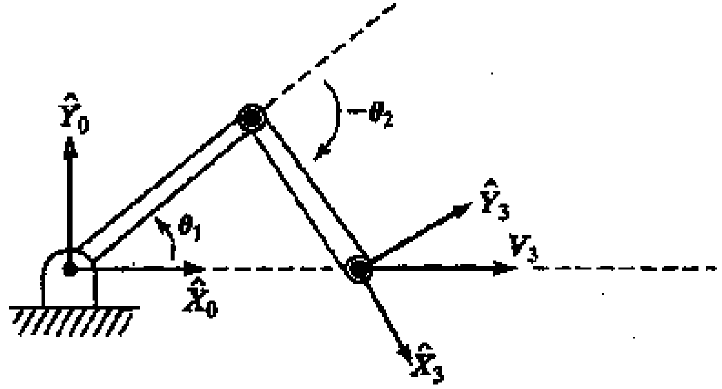
例子: 对于两自由度操作臂，末端执行器沿着 $\hat{X}$ 轴以**1.0m/s**的速度运动。当操作臂远离奇异位形时，关节速度都在允许范围内。但是当 $\theta_2=0$时，操作臂接近奇异位形，此时关节速度趋向于无穷大

首先计算坐标系 **{0}**中雅可比矩阵的逆:

$$ {}^0J^{-1}(\Theta)=\frac{1}{l_1l_2s_2}\begin{bmatrix} l_2c_{12} & l_2s_{12} \\ -l_1c_1-l_2c_{12} & -l_1s_1-l_2s_{12} \end{bmatrix} $$

当末端执行器以 **1m/s** 的速度沿着 $\hat{X}$ 方向运动时，按照操作臂位形的函数计算出关节速度:

$$ \dot{\theta}_1=\frac{c_{12}}{l_1s_2} \quad , \quad \dot{\theta}_2=-\frac{c_1}{l_2s_2}-\frac{c_{12}}{l_1s_2} $$



当操作臂伸展到接近 $\theta_2=0$ ，两个关节的速度趋向无穷大.

奇异性

- 老式飞机上的机枪

当枪竖直向上或接近这种方位时，Jacobian为奇异阵，机构体现奇异性，枪手需要极快地通过旋转方位轴来跟踪目标，导致射击失准。

作用在操作臂上的静力

操作臂在静态平衡（静止或匀速直线运动）状态下，考虑力和力矩如何从一个连杆向下一个连杆传递

– 操作臂的自由末端在工作空间推某个物体
– 用操作臂支撑住某个负载

我们希望求出保持系统静态平衡的关节扭矩

– 锁定所有的关节已使操作臂的结构固定
– 写出力和力矩对于各连杆坐标系的平衡关系
– 本章不考虑作用在连杆上的重力（动力学时会讨论）
– 在最后一个连杆受外部力/力矩时，为了保持操作臂的静态平衡，计算出需要对各关节轴依次施加多大的静力矩

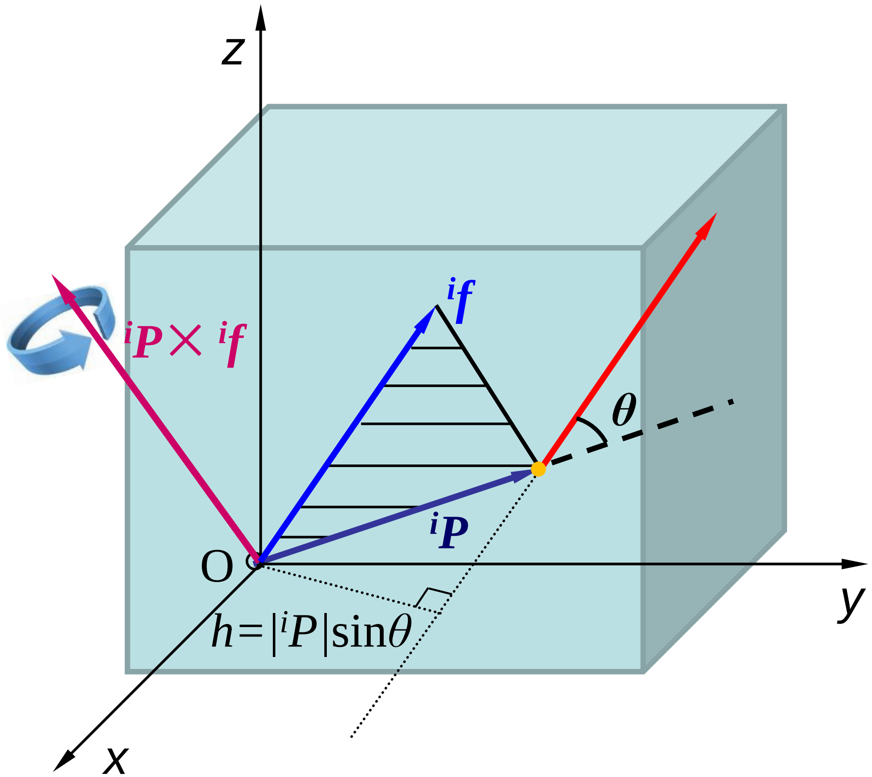
作用在操作臂上的静力

设{i}是刚体的联体坐标系，作用在刚体上的力可用力向量 ${}^{i}f \in \mathbb{R}^3$ 表示大小和方向，用位置向量 ${}^{i}P \in \mathbb{R}^3$ 表示力作用点

力 ${}^{i}f$ 对原点O的矩在{i}中可表示为 ${}^{i}P \times {}^{i}f \in \mathbb{R}^3$

矩的大小 $|{}^{i}P||{}^{i}f|\sin\theta = h|{}^{i}f|$，θ是 ${}^{i}P$ 与 ${}^{i}f$ 的夹角，h是力臂

垂直于 ${}^{i}P$ 和 ${}^{i}f$ 所在平面的矩方向意味着“矩使刚体产生绕 ${}^{i}P \times {}^{i}f$ 旋转的趋势”



作用在操作臂上的静力

力偶：两个大小相等、方向相反且不共线的平行力组成的力系

如：刚体上作用于**A**点的 $\vec{f}$ 和作用于**B**点的 $-\vec{f}$

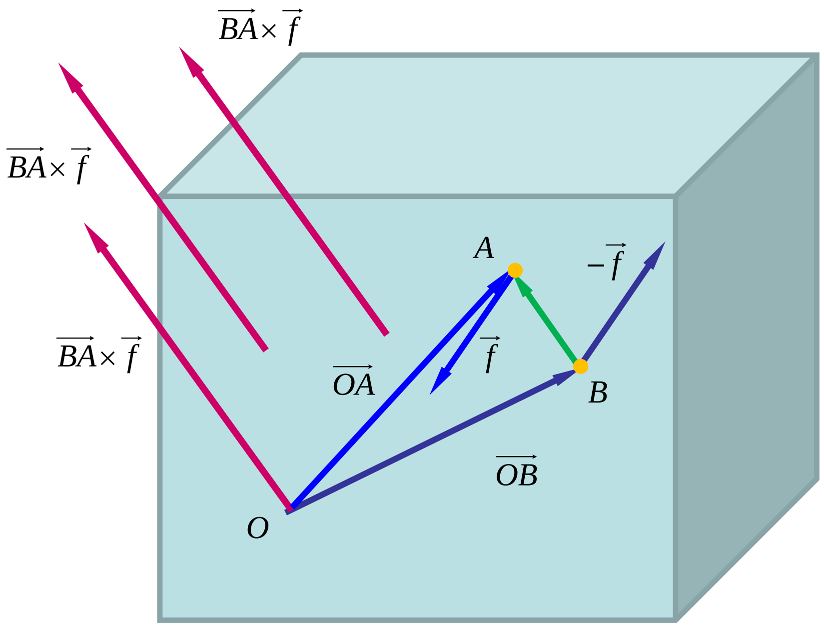
力偶的作用只改变刚体的转动状态，其转动效应可用力偶矩来度量

力偶 $\left(\vec{f},-\vec{f}\right)$ 对点**O**的矩：

$$\overrightarrow{OA}\times\vec{f}+\overrightarrow{OB}\times\left(-\vec{f}\right)=\overrightarrow{BA}\times\vec{f}$$

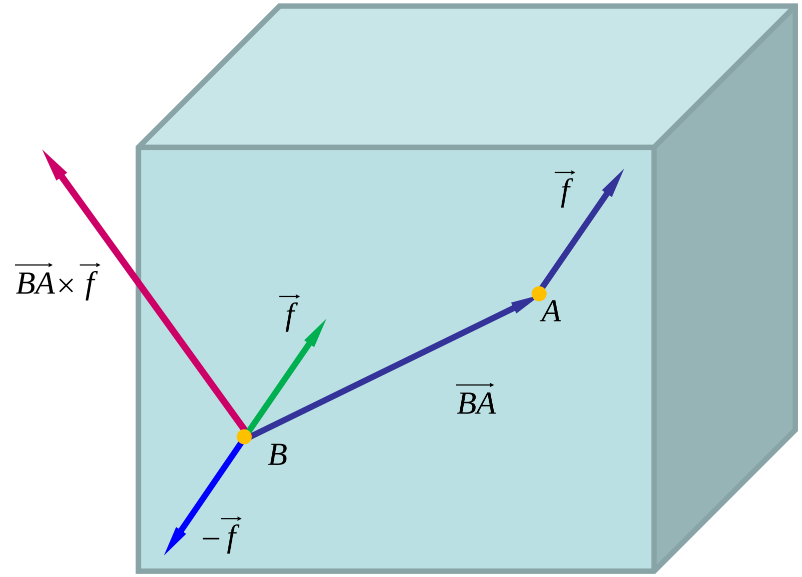
对刚体上的任何点，力偶矩 $\overrightarrow{BA}\times\vec{f}$ 不变

力偶矩向量 $\overrightarrow{BA}\times\vec{f}$ 可在刚体上任意转移



作用在操作臂上的静力

力的平移



如：刚体上作用于A点的力 $\vec{f}$

在刚体上任取一点B

在点B加上一对平衡力 $\vec{f}$ 和 $-\vec{f}$

作用于点A的 $\vec{f}$ 和作用于点B的 $-\vec{f}$ 构成力偶

其力偶矩 $\overrightarrow{BA}\times\vec{f}$ = 作用于点A的 $\vec{f}$ 对点B的矩

刚体上作用于A点的力 $\leftrightarrow$ 刚体上作用于B点的力 附加 $\overrightarrow{BA}\times\vec{f}$

作用在操作臂上的静力

空间力系向一点的简化

如：刚体上分别作用于点A、B、C的力 $\vec{f}_A, \vec{f}_B, \vec{f}_C$

以及力矩 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 构成一个空间力系

在刚体上任取一点O（简化中心）

附加 $\vec{n}_A = \overrightarrow{OA} \times \vec{f}_A$ ，使 $\vec{f}_A$ 平移到O

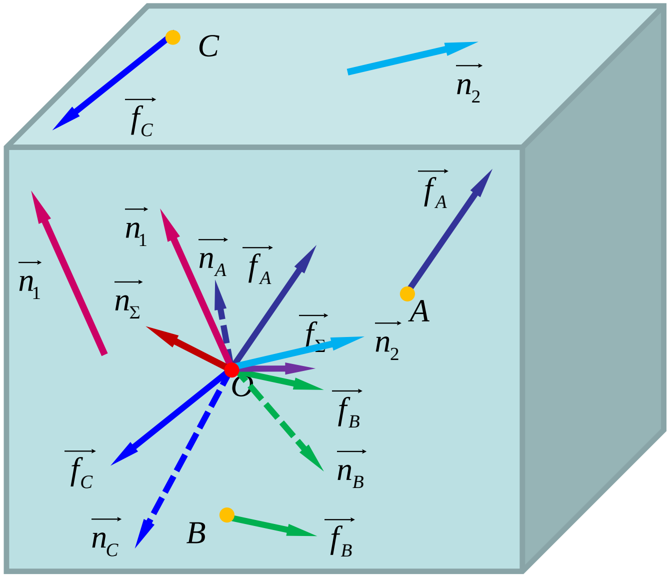
附加 $\vec{n}_B = \overrightarrow{OB} \times \vec{f}_B$ ，使 $\vec{f}_B$ 平移到O

附加 $\vec{n}_C = \overrightarrow{OC} \times \vec{f}_C$ ，使 $\vec{f}_C$ 平移到O

合力（主矢）$\vec{f}_\Sigma = \vec{f}_A + \vec{f}_B + \vec{f}_C$

平移 $\vec{n}_1$ 到O　　　　平移 $\vec{n}_2$ 到O

合力矩（主矩）$\vec{n}_\Sigma = \vec{n}_1 + \vec{n}_2 + \vec{n}_A + \vec{n}_B + \vec{n}_C$



空间任意力系向空间内任一点的简化结果，是一个作用在简化中心的主矢和一个对简化中心的主矩

刚体静态平衡的条件：$\vec{f}_\Sigma = 0, \vec{n}_\Sigma = 0$

刚体静态平衡的条件：作用在刚体上的全部力的向量和为零且作用在刚体上的全部力矩的向量和为零

作用在操作臂上的静力

为相邻连杆所施加的力和力矩定义以下特殊符号：

3维矢量 f_i = 连杆i-1施加在连杆i上的力

3维矢量 n_i = 连杆i-1施加在连杆i上的力矩

将力相加并令其等于零:

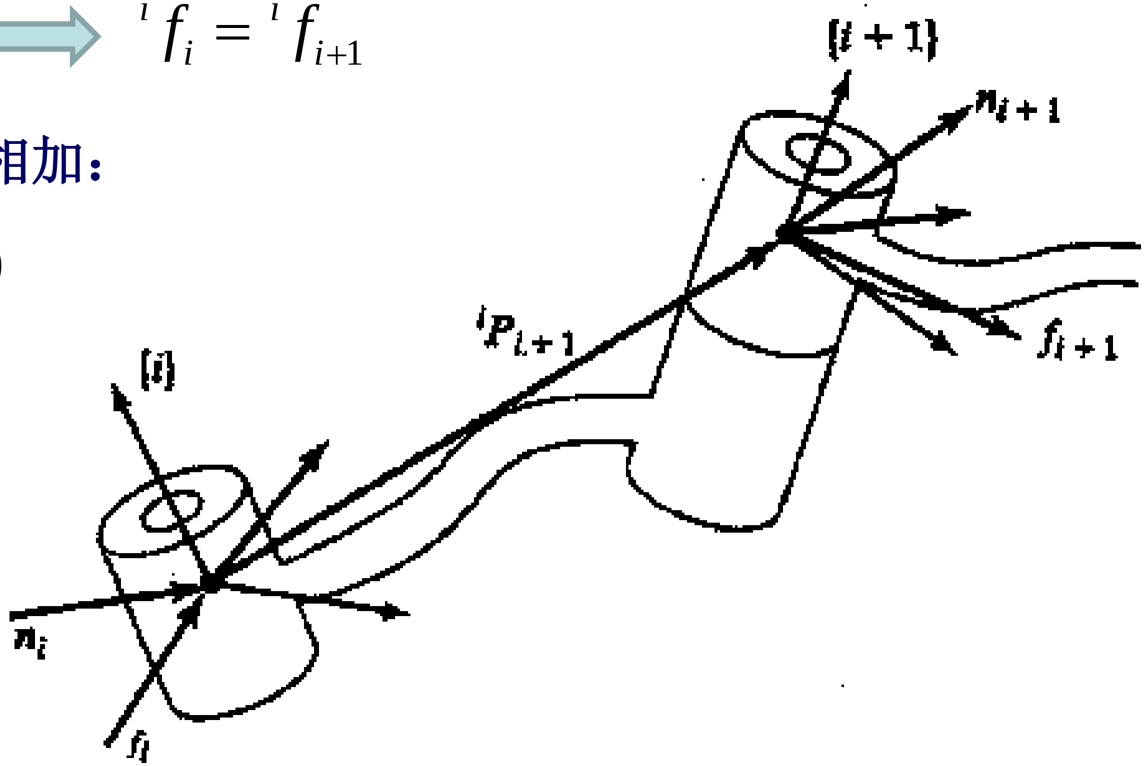
$${}^i f_i - {}^i f_{i+1} = 0 \Longrightarrow {}^i f_i = {}^i f_{i+1}$$

将绕坐标系{i}原点的力矩相加：

$${}^i n_i - {}^i n_{i+1} - {}^i P_{i+1} \times {}^i f_{i+1} = 0$$

$$\Downarrow$$

$${}^i n_i = {}^i n_{i+1} + {}^i P_{i+1} \times {}^i f_{i+1}$$



作用在操作臂上的静力

$$ {}^{i}f_{i} = {}^{i}f_{i+1} $$

$$ {}^{i}n_{i} = {}^{i}n_{i+1} + {}^{i}P_{i+1} \times {}^{i}f_{i+1} $$

用坐标系{i+1}相对于坐标系{i}描述的旋转矩阵进行变换，得到连杆之间静力传递的表达式

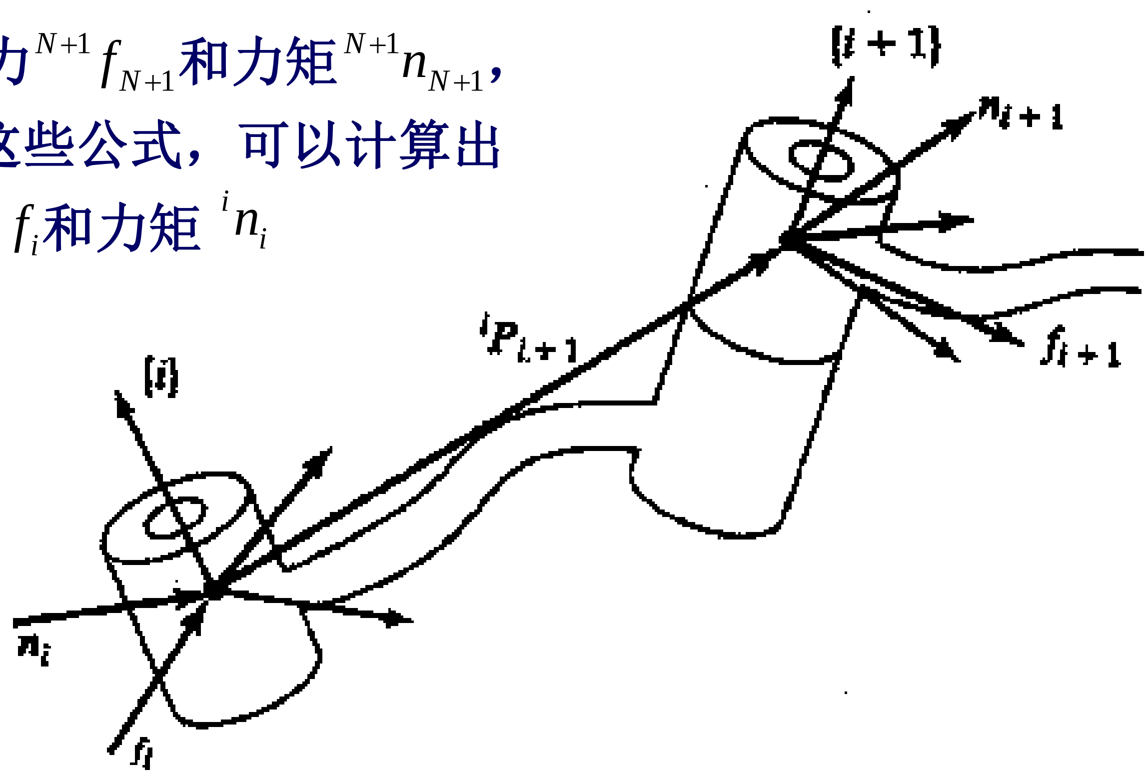
$$ {}^{i}f_{i} = {}_{i+1}^{\;\;i}R\,{}^{i+1}f_{i+1} $$

$$ {}^{i}n_{i} = {}_{i+1}^{\;\;i}R\,{}^{i+1}n_{i+1} + {}^{i}P_{i+1} \times {}^{i}f_{i} $$

向内迭代法

若已知末端施加给外部的力${}^{N+1}f_{N+1}$和力矩${}^{N+1}n_{N+1}$，从连杆N开始，依次应用这些公式，可以计算出作用在每一个连杆上的力${}^{i}f_{i}$和力矩${}^{i}n_{i}$

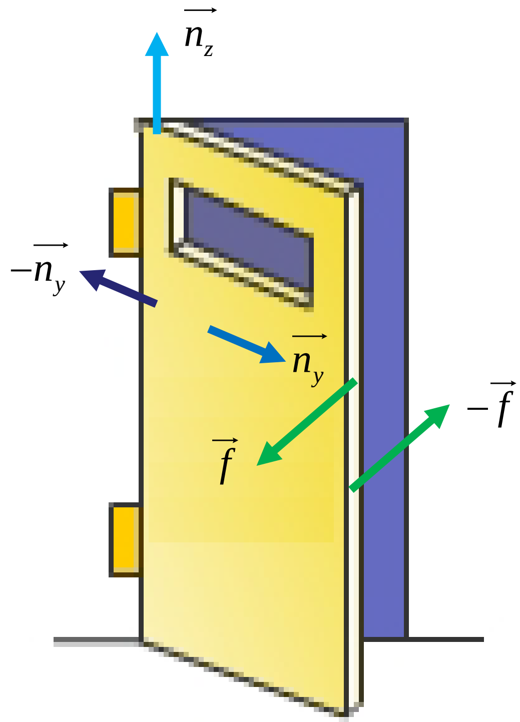
一个问题：为了平衡施加在连杆上的力和力矩，需要在关节提供多大的力矩（旋转关节）或力（移动关节）？

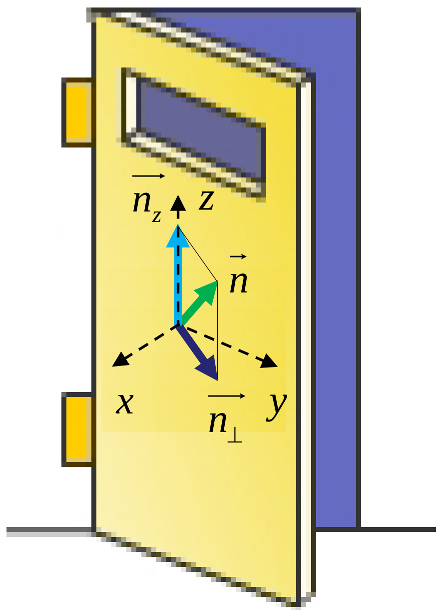


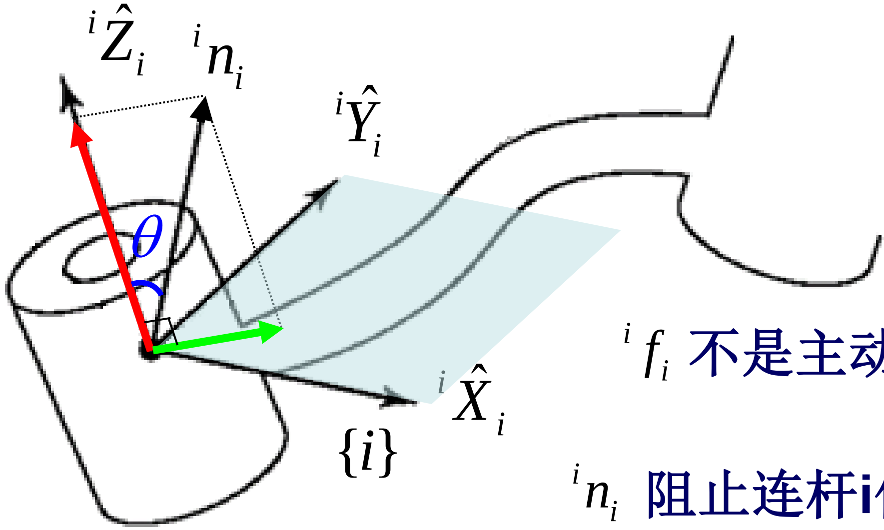
作用在操作臂上的静力

力矩按运动轴进行分解

以带旋转轴（Z轴）的门为例







静力

旋转关节*i*

$^{i}f_i$ 不是主动力而是约束力，它阻止连杆i作直线运动

$^{i}n_i$ 阻止连杆i作旋转运动，在{i}中对 $^{i}n_i$ 进行正交分解，可得到1个沿 $^{i}\hat{Z}_i$ 的力矩矢量和1个垂直于 $^{i}\hat{Z}_i$ 的力矩矢量

垂直于 $^{i}\hat{Z}_i$ 的力矩矢量是约束力矩；沿 $^{i}\hat{Z}_i$ 的力矩矢量是主动力矩，主动力矩需由关节i的旋转驱动器提供

主动力矩可表示为 $\tau_i\,{}^{i}\hat{Z}_i$，其中 $\tau_i = |{}^{i}n_i|\cos\theta = |{}^{i}n_i||{}^{i}\hat{Z}_i|\cos\theta = {}^{i}n_i^{\mathrm{T}}\,{}^{i}\hat{Z}_i$

移动关节*i*

$^{i}n_i$ 是约束力矩。在{i}中对 $^{i}f_i$ 进行正交分解，得到1个主动力和1个约束力，需由关节i的直线驱动器提供的主动力矩表示为$\tau_i\,{}^{i}\hat{Z}_i$，其中 $\tau_i = {}^{i}f_i^{\mathrm{T}}\,{}^{i}\hat{Z}_i$

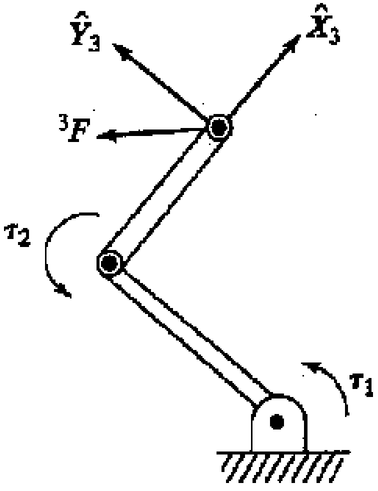
作用在操作臂上的静力

例: 两连杆操作臂，在末端执行器施加作用力矢量^3F ，求出所需的关节力矩.

先写出各齐次变换矩阵、外力和外力矩

$$
{}^0_1T=\begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\quad
{}^1_2T=\begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & l_1 \\ s_2 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\quad
{}^2_3T=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & l_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^3f_3=\begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^3n_3=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$



作用在操作臂上的静力

$$ {}^{i}f_i = {}^{i}_{i+1}R\,{}^{i+1}f_{i+1} $$

$$ {}^{i}n_i = {}^{i}_{i+1}R\,{}^{i+1}n_{i+1} + {}^{i}P_{i+1} \times {}^{i}f_i $$

从{3}开始向内迭代

$$ {}^{2}f_2 = {}^{2}_{3}R\,{}^{3}f_3 = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^{2}n_2 = {}^{2}_{3}R\,{}^{3}n_3 + {}^{2}P_3 \times {}^{2}f_2 = \begin{bmatrix} l_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 f_y \end{bmatrix} $$

$$ {}^{1}f_1 = {}^{1}_{2}R\,{}^{2}f_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2 f_x - s_2 f_y \\ s_2 f_x + c_2 f_y \\ 0 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{1}n_1 = {}^{1}_{2}R\,{}^{2}n_2 + {}^{1}P_2 \times {}^{1}f_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_2 f_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times {}^{1}f_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ l_1 s_2 f_x + l_1 c_2 f_y + l_2 f_y \end{bmatrix} $$

作用在操作臂上的静力

求主动力矩

$$\tau_1 = {}^1n_1^T \, {}^1\hat{Z}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & l_1 s_2 f_x + l_1 c_2 f_y + l_2 f_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = l_1 s_2 f_x + l_1 c_2 f_y + l_2 f_y$$

$$\tau_2 = {}^2n_2^T \, {}^2\hat{Z}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & l_2 f_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = l_2 f_y$$

表达为矢量形式 $$\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 s_2 & l_1 c_2 + l_2 \\ 0 & l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}$$

与速度传递式比较，发现静力传递式中的矩阵是速度雅可比的转置！

$$\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 s_2 & 0 \\ l_2 + l_1 c_2 & l_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix}$$

力域中的雅可比

在静态下，关节力矩与末端力平衡

操作臂末端力作用于外部，如果操作臂末端有一个位移，就做了功

如果令位移无穷小，就可以用虚功思想来处理静态的情况

在笛卡尔空间作的功等于关节空间作的功，即 $\mathcal{F}^{\mathrm{T}}\delta\mathcal{X} = \tau^{\mathrm{T}}\delta\Theta$

$\mathcal{F}$ 是末端作用于外部的6×1维笛卡尔力-力矩矢量

$\delta\mathcal{X}$ 是末端的6×1维无穷小笛卡尔位移矢量

τ 是6×1维关节力矩矢量

$\delta\Theta$ 是6×1维无穷小关节位移矢量

由雅可比的定义，有$\delta\mathcal{X} = J\delta\Theta$，因此 $\mathcal{F}^{\mathrm{T}}J\delta\Theta = \tau^{\mathrm{T}}\delta\Theta$

对所有的 $\delta\Theta$，上式均成立，则 $\mathcal{F}^{\mathrm{T}}J = \tau^{\mathrm{T}}$，即 $\tau = J^{\mathrm{T}}\mathcal{F}$

雅可比的转置将作用于操作臂的笛卡尔力映射成等效关节力矩

力域也有奇异性问题，如：奇异位形下，末端在某些方向得不到期望的静力

Thanks !