自动控制原理

Principle of Automatic Control

第四章 CHAPTER 4

连续时间控制系统的稳定性与稳态误差

劳斯稳定性判据

LTI系统稳定是指该系统在任意初始条件下对任意典型输入的暂态响应收敛到零，即

$$\lim_{t\to\infty} y_b(t)=0$$

$\boxed{\text{LTI系统稳定当且仅当系统的特征值均具有负实部}}$

判定如下系统是否稳定

(1) $\dfrac{s-3}{2s^3+10s^2+13s+4}$

(2) $\dfrac{s^2-3s+2}{s^6+3s^5+2s^4+9s^3+5s^2+12s+20}$

求解$2s^3+10s^2+13s+4=0$

求解方程$s^6+3s^5+2s^4+9s^3+5s^2+12s+20=0$

除了直接求解特征方程的方法之外，有没有其它方法来判断特征根在左半开平面、虚轴和右半开平面的分布情况？

有，劳斯判据

劳斯稳定性判据

- 考虑 n 阶系统的传递函数

$$G(s)=\frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1 s+b_0}{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0} \qquad (a_n\neq 0, b_m\neq 0, n\geq m)$$

- 系统的稳定性取决于特征方程

$$Q(s)=a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0 = 0$$

- 将 $Q(s)$写成因式相乘形式，可以得到（$\lambda_i, i=1,\cdots,n$ 为系统特征根）

$$Q(s)=a_n(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\cdots(s-\lambda_n)=0$$

- 将因式相乘后展开，可以得到

$$a_n\left[s^n-(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)s^{n-1}+(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\cdots)s^{n-2}-(\lambda_1\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_2\lambda_4+\cdots)s^{n-3}+\cdots+(-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n\right]=0$$

劳斯稳定性判据

- 对于 n 阶方程，可以得到

$$Q(s)=a_n s^n-a_n s^{n-1}\sum \text{所有特征根}+$$
$$+a_n s^{n-2}\sum \text{所有两个特征根的乘积}$$
$$-a_n s^{n-3}\sum \text{所有三个特征根的乘积}$$
$$+\ldots+\sum a_n(-1)^n\left(\text{所有}n\text{个特征根的乘积}\right)$$

- 如果所有特征根均位于 S 平面的左半平面，则：
  - –特征多项式的所有系数均有**相同的符号**
  - –所有系数均为非零常数
- 这些条件是系统稳定的**必要**但**非充分**条件

◆ 例：

$s^2+5=0\rightarrow$ 不稳定，不满足第二个条件

$s^3+s^2+2s+8=0\rightarrow$ 不能判断，上述两个条件均满足

劳斯稳定性判据

劳斯判据给出了判定系统稳定性的**充分必要**条件，其判稳定性的过程如下：

- **步骤 1:** 将系统特征多项式 $Q(s)=a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0$ 的系数**排列**成如下阵列：

$$
\begin{array}{c|ccccc}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \cdots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \cdots
\end{array}
$$

- **步骤 2: 计算并完成**劳斯阵列

$$
\begin{array}{c|ccccc}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \cdots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \cdots \\
s^{n-2} & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots &
\end{array}
$$

$$c_1=\frac{-1}{a_{n-1}}\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3}\end{vmatrix}=\frac{a_{n-1}a_{n-2}-a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$c_2=\frac{-1}{a_{n-1}}\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5}\end{vmatrix}$$

$$c_3=\frac{-1}{a_{n-1}}\begin{vmatrix} a_n & a_{n-6} \\ a_{n-1} & a_{n-7}\end{vmatrix}$$

$\cdots$

连续运算，直到余下的 c 式都为零。

劳斯稳定性判据

$$
\begin{array}{c|ccccc}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \cdots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \cdots \\
s^{n-2} & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & \\
s^{n-3} & d_1 & d_2 & d_3 & \cdots & \\
\cdots & \cdots & \cdots & & & \\
s^1 & j_1 & & & & \\
s^0 & k_1 & & & &
\end{array}
$$

$$d_1 = \frac{-1}{c_1}\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = \frac{c_1 a_{n-3} - a_{n-1} c_2}{c_1}$$

$$d_2 = \frac{-1}{c_1}\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$d_3 = \frac{-1}{c_1}\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-7} \\ c_1 & c_4 \end{vmatrix}$$

$\cdots$

连续运算，直到所有的 d 式都计算完成，余下的各行都按照类似的方法计算，直到s^0 行

- **步骤 3:** 特征方程根中，具有正实部的根的个数，等于劳斯阵列中第一列元素符号变化的次数

- 结论：对于稳定系统，劳斯阵列的第一列元素必须没有符号变化，这是系统稳定的充分必要条件

劳斯稳定性判据

例 判断有如下特征多项式的系统是否稳定 $Q(s)=s^5+s^4+10s^3+72s^2+152s+240$

劳斯阵列

s^5	1	10	152
s^4	1	72	240
s^3	-62	-88	
s^2	70.6	240	
s^1	122.6		
s^0	240		

首次符号变化

第二次符号变化

+ - +

$$c_1=\frac{-1}{1}\begin{vmatrix}1 & 10\\ 1 & 72\end{vmatrix}=-62$$

$$c_2=\frac{-1}{1}\begin{vmatrix}1 & 152\\ 1 & 240\end{vmatrix}=-88$$

$$c_3=\frac{-1}{1}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}=0$$

$$d_1=\frac{-1}{-62}\begin{vmatrix}1 & 72\\ -62 & -88\end{vmatrix}=70.6$$

…

- 在首列中，发生了 2 次符号变化，因此有 2 个特征根位于 S 平面的右半平面，系统不稳定。

❖ 事实上，系统特征根为：

$$s_1=-3$$
$$s_{2,3}=-1\pm j\sqrt{3}$$
$$s_{4,5}=+2\pm j4$$

劳斯稳定性判据

例 二阶系统

二阶系统的特征多项式为： $Q(s)=a_2s^2+a_1s+a_0$ a_i符号相同

劳斯阵列为：

$$
\begin{array}{c|cc}
s^2 & a_2 & a_0 \\
s^1 & a_1 & 0 \\
s^0 & c_1 & 0
\end{array}
$$

其中，

$$c_1=\frac{a_1a_0-(0)a_2}{a_1}=\frac{-1}{a_1}\begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_1 & 0 \end{vmatrix}=a_0$$

没有符号改变，系统稳定

结论：二阶系统稳定的充分必要条件是，特征多项式的所有系数都具有相同的符号

劳斯稳定性判据

例 三阶系统

三阶系统的特征多项式为： $Q(s) = a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$　　a_i同 号

劳斯阵列为：

$$
\begin{array}{c|cc}
s^3 & a_3 & a_1 \\
s^2 & a_2 & a_0 \\
s^1 & c_1 & 0 \\
s^0 & d_1 & 0
\end{array}
$$

其中，

$$c_1 = \frac{-1}{a_2}\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \frac{a_2 a_1 - a_0 a_3}{a_2},$$

$$d_1 = \frac{-1}{c_1}\begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix} = a_0$$

结论：三阶系统稳定的充分必要条件是

$$\boxed{a_0, a_1, a_2, a_3, \frac{a_2 a_1 - a_0 a_3}{a_2}\text{同号}}$$

或 $\boxed{a_0, a_1, a_2, a_3\text{同号}, a_2 a_1 - a_0 a_3 > 0}$

劳斯稳定性判据

例 不稳定的三阶系统

如果一个三阶系统具有特征根 $s_{1,2}=1\pm j\sqrt{7},\ s_3=-3$，则系统显然是不稳定的（具有 2 个不稳定的极点）。

系统特征多项式为：

$$Q(s)=(s-1+j\sqrt{7})(s-1-j\sqrt{7})(s+3)=(s^2-2s+8)(s+3)=s^3+s^2+2s+24$$

劳斯阵列为：

	s^3	1	2
+	s^2	1	24
-	s^1	-22	0
+	s^0	24	0

劳斯阵列首列元素符号变化 2 次，表示系统有 2 个特征根位于 S 平面的右半平面，这是一个不稳定系统。

由 $a_2a_1-a_0a_3=1\times2-24\times1=-22<0$ 可知，系统不稳定。

劳斯稳定性判据

例　设计问题

考虑具有如下特征多项式的三阶系统，求取使系统稳定的 K 值。

$$Q(s)=s^3+2s^2+4s+K$$

解　劳斯阵列为：

$$\begin{array}{l|cc}
s^3 & 1 & 4 \\
s^2 & 2 & K \\
s^1 & \dfrac{8-K}{2} & 0 \\
s^0 & K & 0
\end{array}$$

结果：

当 $K>0,8-K>0 \Leftrightarrow K\in(0,8)$，系统稳定

劳斯稳定性判据

例　判定如下系统是否稳定，系统特征多项式为：

$$Q(s)=s^6+3s^5+2s^4+9s^3+5s^2+12s+20$$

解　劳斯阵列为：

s^6	1	2	5	20	
s^5	$\cancel{3}$	$\cancel{9}$	$\cancel{12}$		
	1	3	4		除以 3
s^4	-1	1	20		
s^3	$\cancel{4}$	$\cancel{24}$			
	1	6			除以 4
s^2	7	20			
s^1	22				乘以 7
s^0	20				

定理 1：劳斯阵列的任意一行元素可以同时乘以或除以一个正数，不会改变首列元素的符号

❖ 首列元素符号**变化 2 次**，有 **2 个特征根**位于 S 平面的右半平面，**系统不稳定**

劳斯稳定性判据

- **3 种情况：**
  - –首列无零元素（普通情况）
  - –首列有零元素，但在零元素所在的行中具有非零的其他元素
  - –劳斯阵列的某一行元素均为零

劳斯稳定性判据（首列出现零元素）

如果首列具有零元素，可以采用二种方法进行处理

方法 1：将 s=1/*x* 代入原方程

例 $Q(s)=s^4+s^3+2s^2+2s+5$

令 *s*=1/*x*，并重新整理特征多项式

$Q_{new}(x)=5x^4+2x^3+2x^2+x+1$

解 劳斯阵列为：

s^4	1	2	5
s^3	1	2	
s^2	0	5	

新的劳斯阵列为：

x^4	5	2	1
x^3	2	1	
x^2	-1	2	
x	5		

符号变化了 2 次，系统不稳定，且有 2 个极点位于 S 平面的右半平面。

注意：在 $Q(s)$ 和 $Q_{new}(x)$ 的系数相同的情况下，该方法无效。

劳斯稳定性判据（首列出现零元素）

方法 2：将原特征多项式乘以因式 (s+1)

例 $Q(s)=s^4+s^3+2s^2+2s+5$

乘以 (s+1)，并重新整理特征多项式

$Q(s)=s^5+2s^4+3s^3+4s^2+7s+5$

解 劳斯阵列为：

s^4	1	2	5
s^3	1	2	
s^2	0	5	

新的劳斯阵列为：

s^5	1	3	7
s^4	2	4	5
s^3	2	9	
s^2	– 10	10	
s^1	11		
s^0	10		

结果同方法 1 的结果一致。

符号变化了 2 次，系统不稳定，且有 2 个极点位于 S 平面的右半平面。

劳斯稳定性判据（出现全零行）

如果出现全零行，可以采用二种方法进行处理

方法 1：用一个很小的正数ε来代替这个0元素，然后继续计算其他元素。

例　判定如下系统是否稳定，系统特征多项式为：

$$Q(s)=s^4+3s^3+3s^2+3s+2$$

解　劳斯阵列为：

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 3 & 2 \\ s^3 & 3 & 3 & \\ s^2 & 2 & 2 & \\ s^1 & 0(\varepsilon) & 0 & \\ s^0 & 2 & & \end{array}$$

第一列无符号变化，但有全0行出现，说明系统必不稳定

系统不稳定

劳斯稳定性判据（出现全零行）

方法 2

➢ 如果劳斯阵列具有全零行，则系统特征方程具有对称于原点的实根或复根，且具有如下形式：——稳定否？

$$s^2,(s+\sigma)(s-\sigma),(s+j\omega)(s-j\omega),(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)(s^2-2\zeta\omega_n s+\omega_n^2),\cdots$$

➢ 如果劳斯阵列的第 i 行（s^i 对应的行）元素全为零，根据该行的上一非零行构造如下的辅助多项式 $U(s)=\beta_1 s^{i+1}+\beta_2 s^{i-1}+\beta_3 s^{i-3}+\cdots$

其中，β_j 是上一非零行的系数，辅助多项式的阶次为对称特征根的个数

s^4	1	3	2
s^3	3	3	
s^2	2	2	
s^1	0	0	

辅助多项式的根即是上述对称特征根

$$U(s)=2s^2+2=2(s+j)(s-j)$$

➢ 将原劳斯阵列表中第 i 行元素替换为辅助多项式关于 s 的导函数的系数，并继续完成劳斯阵列表，以获得关于除对称特征根外的其它特征根的信息

劳斯稳定性判据（出现全零行）

前例中，令 K=8，得到相应的

$$Q(s)=s^3+2s^2+4s+8$$

劳斯阵列为：

s^3	1	4
s^2	2	8
s^1	0	0
s^0		

利用上一非零行构造辅助多项式，并继续完成劳斯阵列。$U(s)$ 的根也是 $Q(s)$ 的根。

$$U(s)=2s^2+Ks^0=2s^2+8=2\left(s^2+4\right)=2(s+j2)(s-j2)$$

$$\frac{dU}{ds}=4s$$

s^3	1	4
s^2	2	8
s^1	4	0
s^0	8	0

除位于虚轴上的极点对（$s=\pm 2j$）外，其余极点均位于 S 平面的左半平面。

劳斯稳定性判据（出现全零行）

例

判定如下系统的稳定性，系统特征方程为：

$$Q(s) = s^4 + 2s^3 + 11s^2 + 18s + 18 = 0$$

劳斯阵列为：

$$\begin{array}{l|lll}
s^4 & 1 & 11 & 18 \\
s^3 & \cancel{2} & \cancel{18} & \\
 & 1 & 9 & \\
s^2 & \cancel{2} & \cancel{18} & \\
 & 1 & 9 & \\
s^1 & 0 & &
\end{array}$$

辅助方程为：

$$U(s) = s^2 + 9s^0 = (s + j3)(s - j3) = 0$$

$$\frac{dU}{ds} = 2s$$

$$\begin{array}{l|ll}
s^2 & 1 & 9 \\
s^1 & 2 & \\
s^0 & 9 &
\end{array}$$

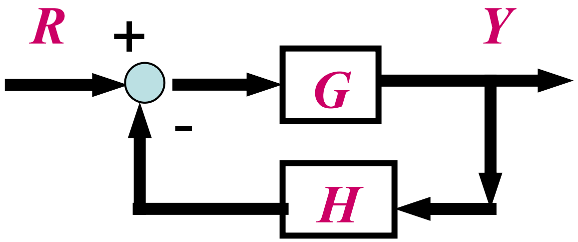
劳斯阵列首列元素符号无变化，因此没有具有正实部的特征根，但是虚轴上有一对极点（$s=\pm 3j$）。

劳斯判据的应用

例 设计问题

➢ 考虑具有如下闭环传递函数的四阶系统：

$$G_{closed}(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{K(s+2)}{s(s+5)(s^2+2s+5)+K(s+2)}$$



系统中的 *K* 值可调，我们需要知道使系统稳定的 K 值变化范围。

$$0<K<28.1$$

$$Q(s)=s(s+5)(s^2+2s+5)+K(s+2)=s^4+7s^3+15s^2+(25+K)s+2K=0$$

s^4	1	15	$2K$
s^3	7	$25+K$	0
s^2	$80-K$	$14K$	
s	$\dfrac{(80-K)(25+K)-98K}{(80-K)}$	0	
s^0	$14K$		

$$K<80$$

$$-K^2-43K+2000>0$$

$$K<28.1,\ \cancel{K>-71.1}$$

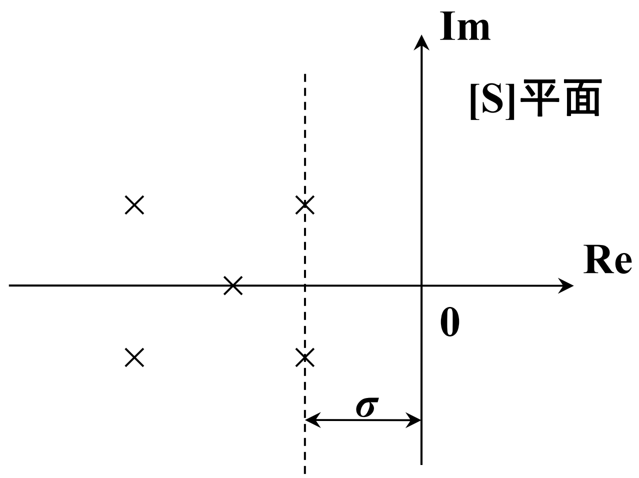
$$K>0$$

劳斯判据的应用

- 应用劳斯判据不仅可以判别系统是否稳定，即系统的**绝对稳定性**，而且也可检验系统是否有一定的稳定裕量，即**相对稳定性**。另外劳斯判据还可用来分析系统参数对稳定性的影响。

1. 稳定裕量的检验

如右图所示，令$s = z - \sigma$，即把虚轴左移σ。将上式代入系统的特征方程式，得到以z为变量的新特征方程式，若新特征方程的所有根均在新虚轴的左边（新劳斯阵列式第一列均为正数），则称系统具有**稳定裕量**σ。



系统的稳定裕度σ

劳斯判据的应用

- **例：** 检验特征方程式 $2s^3+10s^2+13s+4=0$

是否有根在右半平面，并检验有几个根在直线 $s=-1$ 的右边。

解： 劳斯阵列为

s^3	2	13
s^2	10	4
s^1	12.2	0
s^0	4	0

第一列无符号改变，故没有根在S平面右半平面。再令$s=z-1$，代入原特征方程式，得

$$2(z-1)^3+10(z-1)^2+13(z-1)+4=0$$

$$2z^3+4z^2-z-1=0$$

新的劳斯阵列为

s^3	2	-1
s^2	4	-1
s^1	-0.5	0
s^0	-1	0

从表中可看出，第一列符号改变一次，故有一个根在直线$s=-1$（即新坐标虚轴）的右边，因此稳定裕量不到1。

劳斯判据的应用

- 线性系统的稳定性由系统所有极点都位于 S 平面左半平面来表征；系统的稳定程度则可以由极点位于虚轴左边，并与虚轴距离的远近来表征。
- 为了应用劳斯判据来推断系统的相对稳定性，只需要进行变量代换，从而将虚轴左移，然后利用劳斯判据进行分析即可。

- **例：** 考虑特征多项式

$$Q(s) = s^3 + 4s^2 + 6s + 4$$

- 变量代换 $s = z - 1$ 可以得到

$$Q(z) = (z-1)^3 + 4(z-1)^2 + 6(z-1) + 4 = z^3 + z^2 + z + 1$$

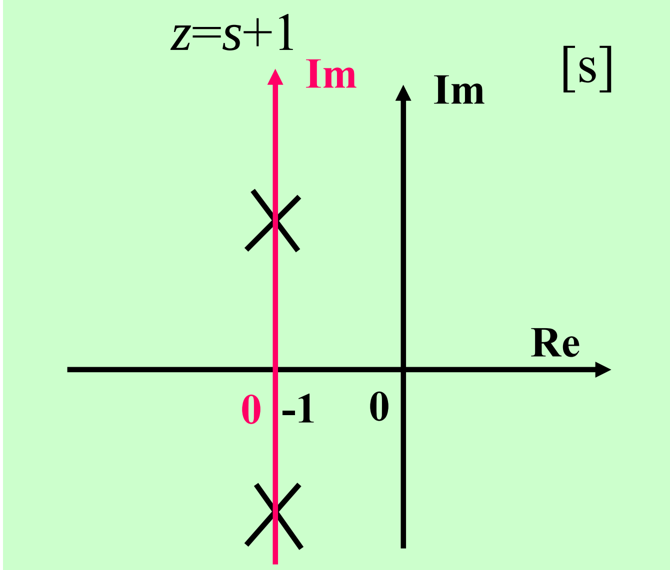
$$a_2 a_1 - a_0 a_3 = 1\times 1 - 1\times 1 = 0$$

有 2 个特征根位于移动后的虚轴上。

劳斯判据的应用

➢ 相应的劳斯阵列（情况 3）为：

z^3	1	1
z^2	1	1
z^1	0	0
z^0	1	0



➢ 有 1 个特征根位于移动后的虚轴左边，有 2 个特征根位于移动后的虚轴上（这两个特征根可以根据相应的辅助多项式获得）。

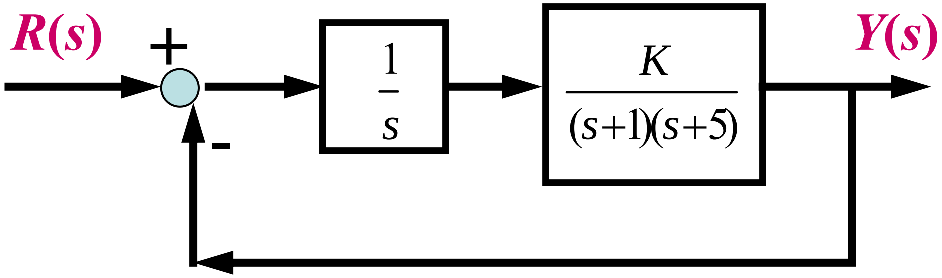
$$U(z) = z^2 + 1 = (z + j)(z - j) = (s + 1 + j)(s + 1 - j)$$

劳斯判据的应用

2. 分析系统参数对稳定性的影响

例： 设一单位反馈控制系统如下图所示，其闭环传递函数为

$$\Phi(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{K}{s(s+1)(s+5)+K}$$



求K的范围

求出使系统稳定的K的范围。

解： 系统的特征方程式为

$$s^3+6s^2+5s+K=0$$

根据劳斯判据，若要使系统稳定，其充要条件是劳斯阵列表的第一列均为正数，即

$$K>0, \qquad 30-K>0$$

或由3阶系统 $a_2a_1-a_0a_3>0$

所以K的取值范围为：$0<K<30$，其稳定的临界值为30

劳斯判据的应用

例： 设传递函数的特征方程为

$$s^4+2s^3+Ts^2+10s+100=0$$

按稳定要求确定T的临界值。

解： 劳斯阵列表为

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & T & 100 \\ s^3 & 2 & 10 & 0 \\ s^2 & T-5 & 100 & \\ s^1 & \dfrac{10T-250}{T-5} & 0 & \\ s^0 & 100 & & \end{array}$$

根据劳斯判据，若要使系统稳定，其充要条件是劳斯阵列表的第一列均为正数，即

$$T-5>0; \rightarrow T>5$$

$$\frac{10T-250}{T-5}>0; T>25$$

所以使系统稳定的T的取值范围为：$25<T$

劳斯判据的应用

例： 设单位负反馈系统的开环传递函数为

$$G_0(s)=\frac{K}{s(s^2+7s+17)}$$

试确定：① 系统产生等幅振荡的K值及相应的振荡角频率

② 全部闭环极点位于s＝-2 垂直线左侧时的K 取值范围

解: 1) 闭环特征方程$\Delta(s)= s^3+7s^2+17s+K$

劳斯行列式：

s^3	1	17
s^2	7	K
s^1	?	
s^0	K	

或由3阶系统

$$a_2a_1-a_0a_3>0$$

$$7\times 17-K>0$$

$$7\times 17-K=0$$

等幅振荡：　s^1行全0。　∴ K–119= 0 , K = 119

振荡频率：　辅助多项式 $7s^2+K=0$　　ω_n=?

$$s_{1,2}=\pm j\sqrt{119/7}=\pm j\sqrt{17};\ \ \omega_n=\sqrt{17}$$

劳斯判据的应用

例：设单位反馈系统的开环传递函数为 $G_0(s)=\dfrac{K}{s(s^2+7s+17)}$

试确定：① 系统产生等幅振荡的K值及相应的振荡角频率。

② 全部闭环极点位于s＝-2 垂直线左侧时的K 取值范围。

解: 2) 令 $s = z-2$

$$\text{则}Q(z)=(z-2)^3+7(z-2)^2+17(z-2)+K$$
$$=z^3+z^2+z+K-14$$

新的劳斯行列式：

z^3	1	1
z^2	1	K-14
z^1	-K+15	0
z^0	-14+K	

-K+15 > 0 和 -14+K > 0 ⇒ 14< K < 15

或由3阶系统

$K>14$

$a_2a_1-a_0a_3>0$

$1-(K-14)>0$

若取14< K < 15，全部闭环极点位于s＝-2 垂直线左侧。

劳斯判据的应用

单位负反馈系统，设开环传递函数如下，确定系统的稳定性或求使系统稳定的*K*的取值范围。

$$G_a(s)=\frac{K(s+1)}{s(s-1)(s+5)}$$

$$1+G_a(s)=0$$

$$s^3+4s^2+(K-5)s+K=0$$

$$K>\frac{20}{3}$$

开环不稳定，但闭环可以稳定

$$G_b(s)=\frac{11.25}{(s+0.5)(s+1)(s+2)}$$

$$1+G_b(s)=0$$

$$s^3+3.5s^2+3.5s+12.25=0$$

含有一对虚根 $s=\pm j1.87$

开环稳定，但闭环未必稳定

Thanks!