第六章　频率特性分析法

CHAPTER 6 Frequency Response

第六章主要内容

- ✓ 概述
- ✓ 系统的频率特性曲线
- ✓ Nyquist稳定性判据
- ✓ 幅值裕度和相位裕度
- ✓ 基于频率响应的补偿器设计

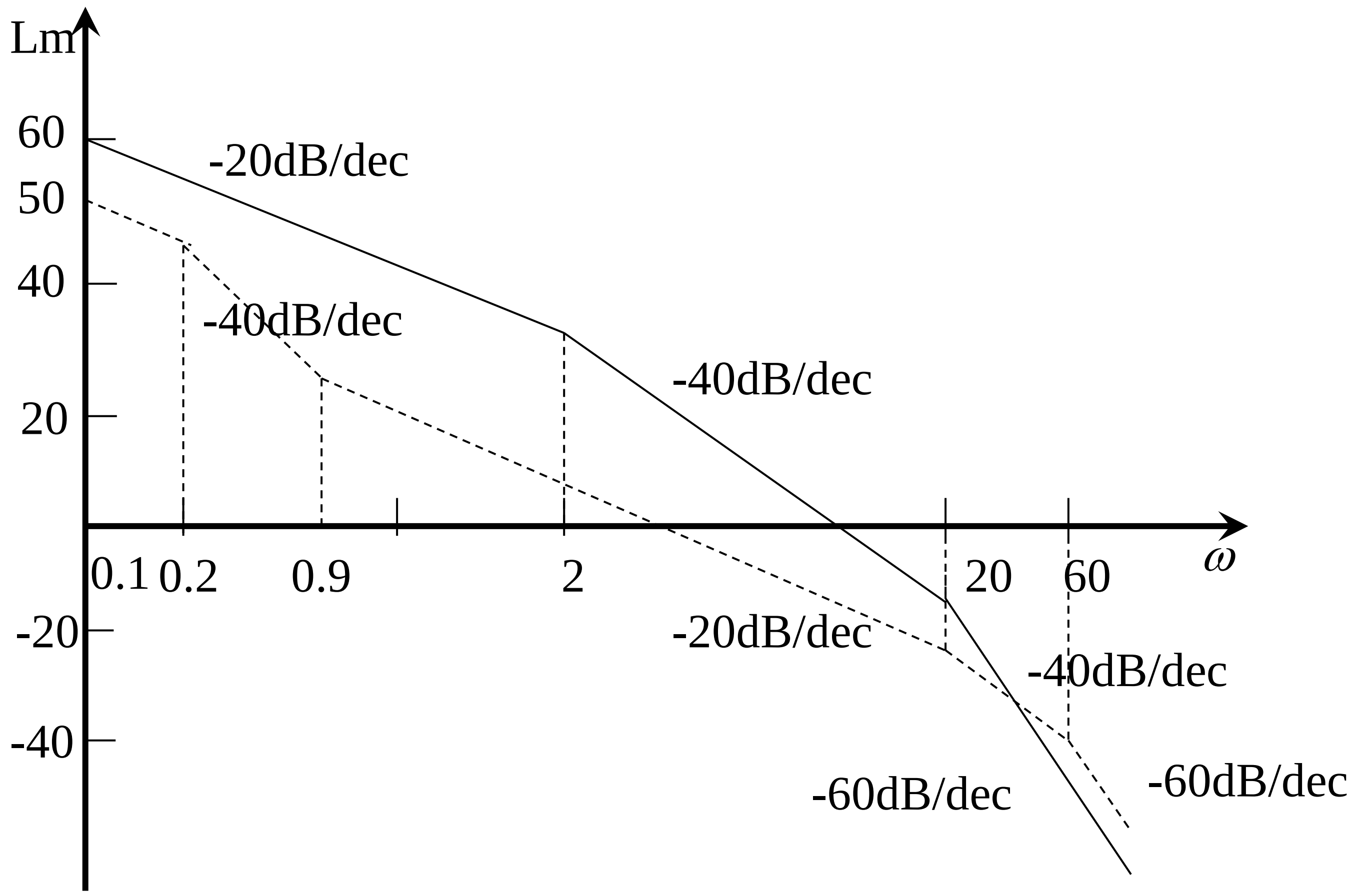
系统校正——串联校正

开环Bode图法非常适合用于设计串联校正：

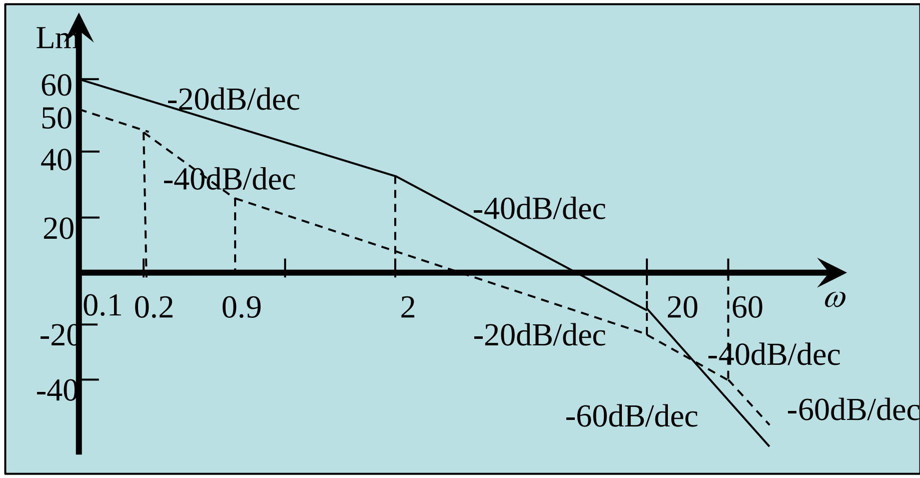
把校正装置的相频特性和幅频特性分别与原系统的相频特性和幅频特性相叠加，就能清楚地显示出校正装置的作用

反之，将原系统的相频特性和幅频特性与期望的相频特性和幅频特性比较后，就可得到校正装置的相频特性和幅频特性，从而获得满足性能指标要求的校正网络有关参数

例6-22 最小相位系统$G_0(s)$ 的对数渐近幅频特性如图中实线所示。采用串联校正后，系统的开环对数渐近幅频特性如图中虚线所示，要求：① 写出$G_0(s)$ 的传递函数；② 写出串联校正环节$G_c(s)$的传递函数。



系统校正——串联校正例题



解：（1）由图，$G_0(s)$ 有3个环节：

$$\frac{1}{T_1 s}=\frac{K_1}{s},\quad \frac{1}{T_2 s+1},\quad \frac{1}{T_3 s+1}$$

又由图知： $T_2=0.5,\qquad T_3=0.05$

在低频段， $LmG(j\omega)=LmK_1-Lm\omega_1$

代入： $\omega_1=0.1$

$$60=LmK_1-Lm0.1=20\lg(\frac{K_1}{0.1})$$

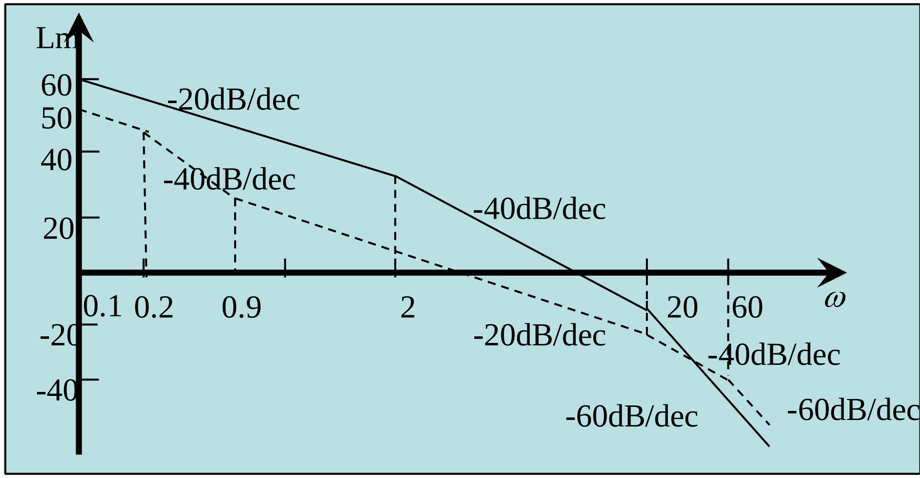
解之： $3=\lg\dfrac{K_1}{0.1}\Rightarrow K_1=100$

故：

$$G_0(s)=\frac{100}{s\left(\dfrac{s}{2}+1\right)\left(\dfrac{s}{20}+1\right)}$$

系统校正——串联校正例题

解：（2）加上串联校正环节$G_c(s)$后的虚线代表的传递函数也可求出：



不同的是：

$$50 = LmK_1 - Lm0.1 = 20\lg(\frac{K_1}{0.1})$$

$$2.5 = \lg\frac{K_1}{0.1} \Rightarrow K_1 = 31.62$$

$$G_0(s)G_C(s) = \frac{31.6\left(\frac{s}{0.9}+1\right)}{s\left(\frac{s}{0.2}+1\right)\left(\frac{s}{20}+1\right)\left(\frac{s}{60}+1\right)}$$

$G_0(s)$ 已知，$G_0(s)\ G_c(s)$ 已求出，

则$G_c(s)=G_0(s)G_c(s)/G_0(s)$

$$G_0(s) = \frac{100}{s\left(\frac{s}{2}+1\right)\left(\frac{s}{20}+1\right)}$$

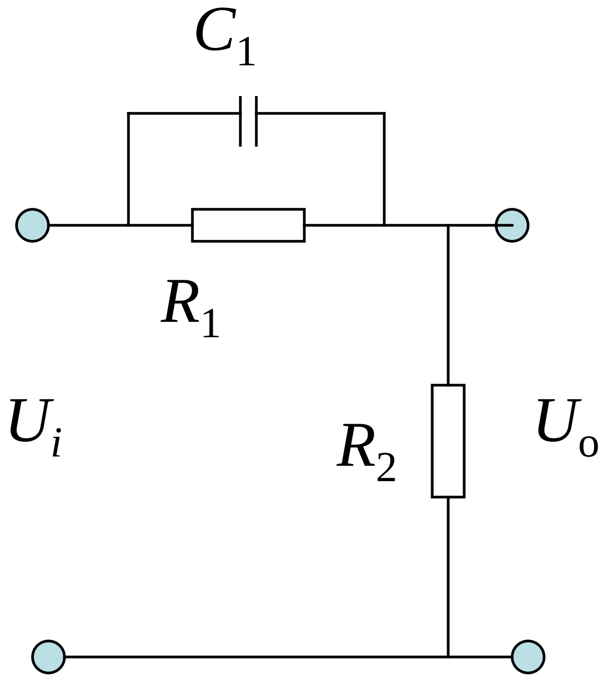
$$G_c(s) = \frac{0.316\left(\frac{s}{0.9}+1\right)\left(\frac{s}{2}+1\right)}{\left(\frac{s}{0.2}+1\right)\left(\frac{s}{60}+1\right)}$$

系统校正——串联超前校正

无源超前网络的传递函数

$$G(s)=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1+\alpha Ts}{1+Ts}$$

式中 $T=\dfrac{R_1R_2C}{R_1+R_2}$; $\alpha=\dfrac{R_1+R_2}{R_2}>1$



无源超前网络

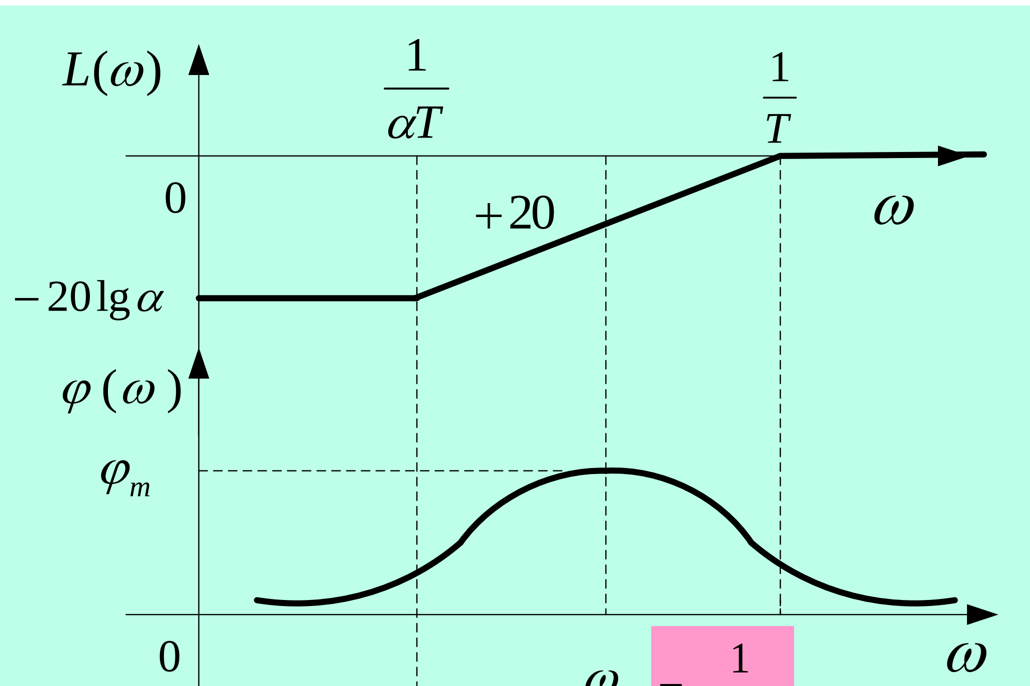
无源超前网络具有幅值衰减作用，如果给超前无源网络串接一放大系数为α的比例放大器，就可补偿幅值衰减作用。此时，超前网络传递函数：

$$G_1(s)=\alpha\cdot G(s)=\frac{1+\alpha Ts}{1+Ts}\qquad \alpha>1$$

系统校正——串联超前校正

无源超前网络的传递函数 $G(s)=\dfrac{1}{\alpha}\cdot\dfrac{1+\alpha Ts}{1+Ts}\qquad \alpha>1$

两个转折频率的几何中心点ω_m处有最大超前角φ_m



$$\omega_m=\frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$$

无源超前校正网络的对数频率特性

$$\lg\omega_m=\frac{1}{2}\left(\lg\frac{1}{\alpha T}+\lg\frac{1}{T}\right)=\lg\frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$$

$$\varphi_m=\angle\frac{1+j\alpha T\dfrac{1}{T\sqrt{\alpha}}}{1+jT\dfrac{1}{T\sqrt{\alpha}}}=\operatorname{atan}\sqrt{\alpha}-\operatorname{atan}\frac{1}{\sqrt{\alpha}}=\arcsin\frac{\alpha-1}{\alpha+1}$$

系统校正——串联超前校正

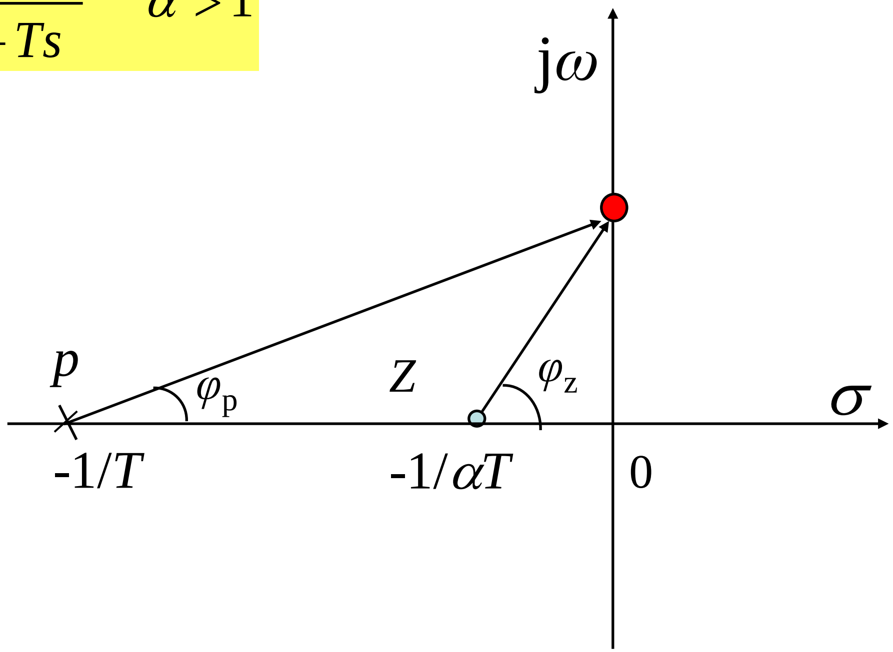
超前网络传递函数：

$$G(s)=\frac{1+\alpha Ts}{1+Ts}\qquad \alpha>1$$

超前网络传递函数有一个极点*p*(-1/*T*)和一个零点*Z*(-1/α*T*)，它们在复平面上的分布如图所示。

可见：$\varphi_m=\varphi_z-\varphi_p>0$

即网络具有相位超前作用。

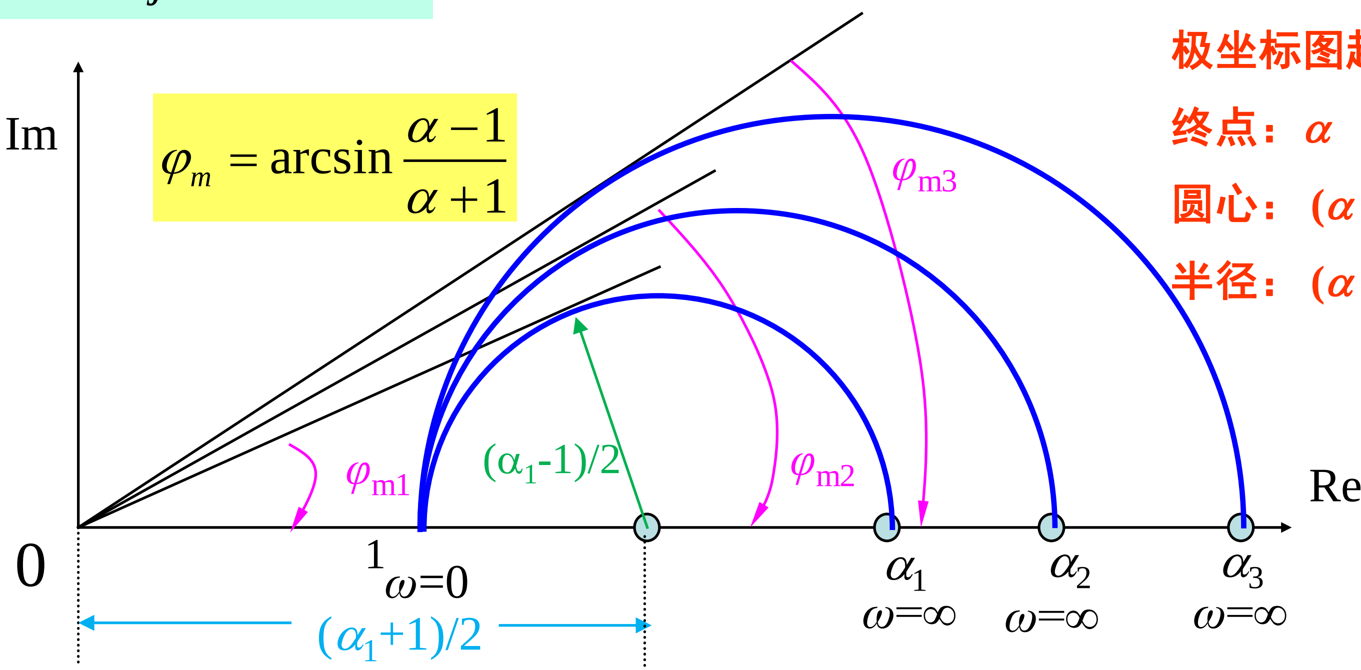


超前网络零、极点在S平面上的分布

系统校正——串联超前校正

用$s=j\omega$代入 $G(s)=\dfrac{1+\alpha Ts}{1+Ts} \quad \alpha>1$，得到超前校正网络的频率特性

$$G(j\omega)=\frac{1+j\alpha T\omega}{1+jT\omega} \quad \alpha>1$$，由此可得到超前网络幅相曲线



极坐标图起点：1

终点：α

圆心：$(\alpha+1)/2$

半径：$(\alpha-1)/2$

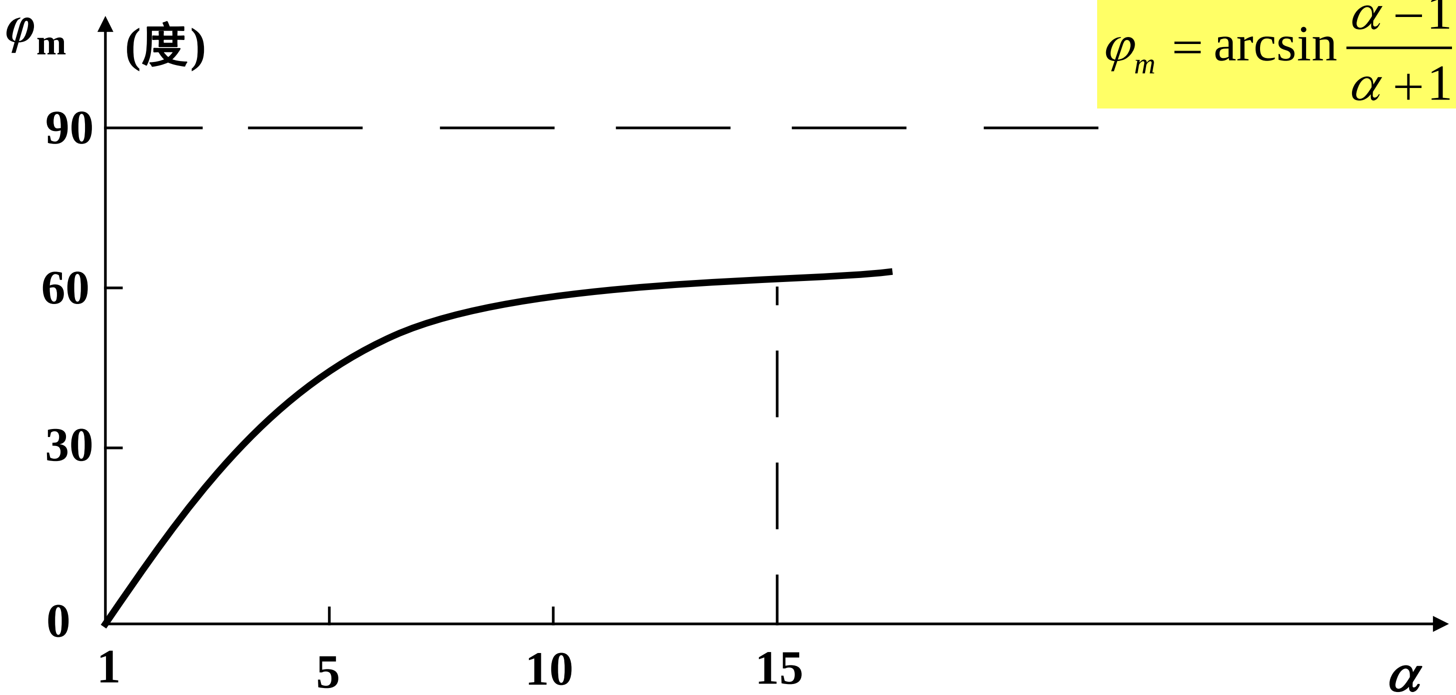
超前网络极坐标图

系统校正——串联超前校正

当α>15（约相当于φ_{m}>60度）后，φ_{m}变化很小

一般取α值在1～15之间

$$\varphi_m = \arcsin\frac{\alpha-1}{\alpha+1}$$



超前网络的α-φ_{m}曲线

- 最大幅值增益是20lgα(dB)，频率范围ω>1/T

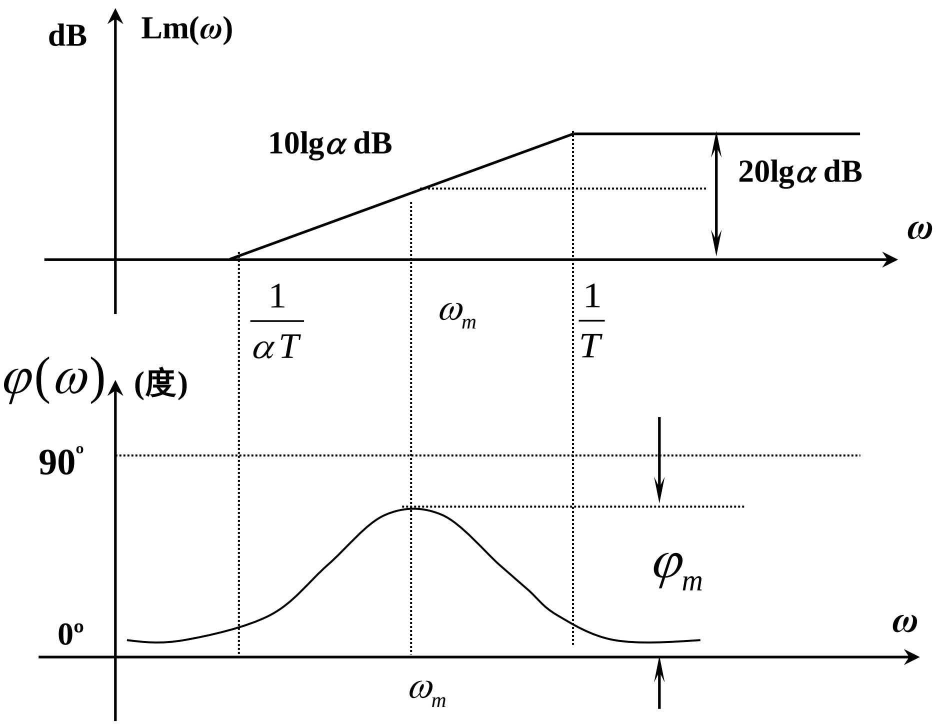
- 由相频特性可求出最大超前相角对应的频率ω_m

$$\omega_m = \frac{1}{T\sqrt{\alpha}}$$

- 在ω_m处有最大超前角φ_m

$$\varphi_m = \arcsin\frac{\alpha-1}{\alpha+1}$$

- 在ω_m处的对数幅值为10lgα



超前网络 $\frac{1+\alpha Ts}{1+Ts}$ 的Bode图

例6-22a 设单位负反馈系统的开环传递函数为 $G_0(s)=\dfrac{K}{s(s+1)}, K>0$，要求校正后系统满足：(1) 相位裕度$\gamma \geq 40^o$；(2) 稳态速度误差系数$K_1$=12秒$^{-1}$

解： 根据稳态误差要求，确定开环增益K。

$$K_v = \lim_{s\to 0} sG_0(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{K}{s(s+1)} = 12$$

即 K=12 可以满足稳态误差的要求。

系统校正——串联超前校正

$$G_0(s)=\frac{12}{s(s+1)}$$

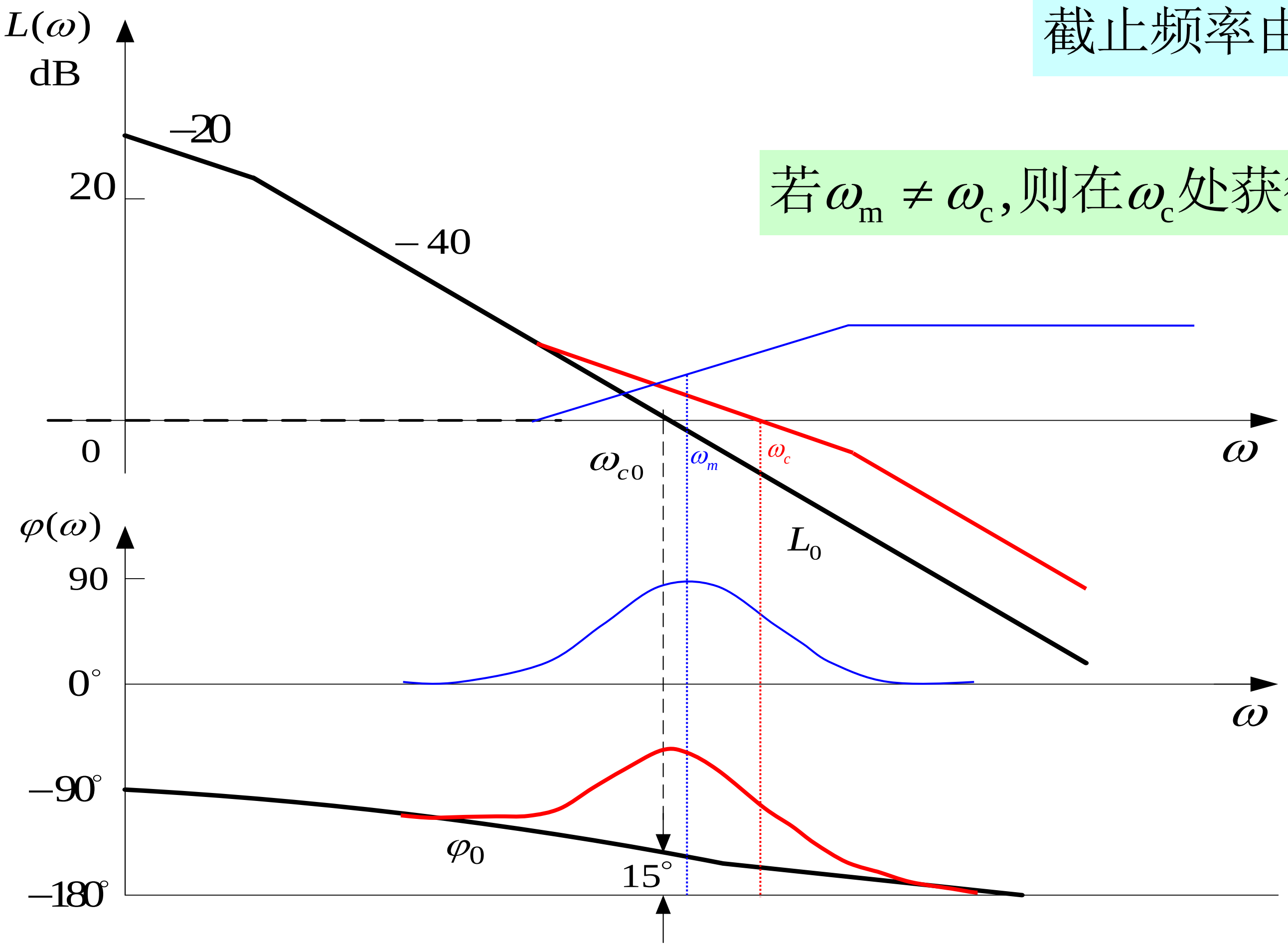
要求相位裕度$\gamma \geq 40^o$

作出校正前系统的开环Bode图，求出系统ω_{c0}＝3.5 rad /s， γ_0 =15^0

截止频率由ω_{c0}提高到ω_c

若$\omega_m \neq \omega_c$,则在ω_c处获得的超前补偿角小于φ_m

超前补偿要求$\omega_m = \omega_c$



$\omega_m = \dfrac{1}{T\sqrt{\alpha}}$ $\varphi_m = \arcsin\dfrac{\alpha-1}{\alpha+1}$ **要求相位裕度$\gamma \geq 40^o$**

$$G_0(s) = \frac{12}{s(s+1)}$$

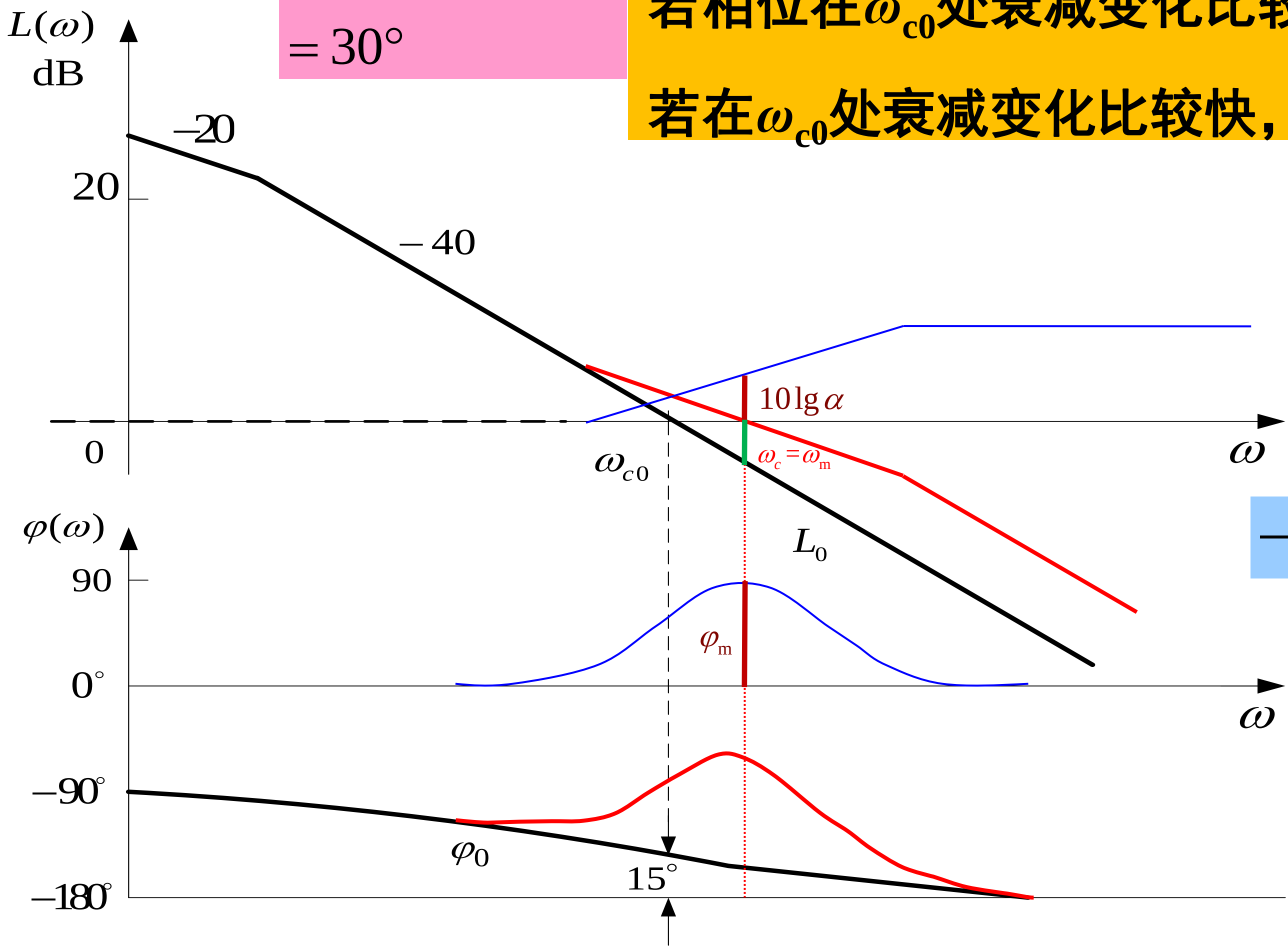
作出校正前系统的开环Bode图，求出系统ω_{c0}＝3.5 rad /s ， γ_0 =15^0

最大超前角$\varphi_m = \gamma - \gamma_0 + \varepsilon = 40° - 15° + 5° = 30°$

增量ε（一般取5º~12º ）是考虑截止频率增大而设置

若相位在ω_{c0}处衰减变化比较缓慢，取ε=5º

若在ω_{c0}处衰减变化比较快，ε的取值也要随之增大



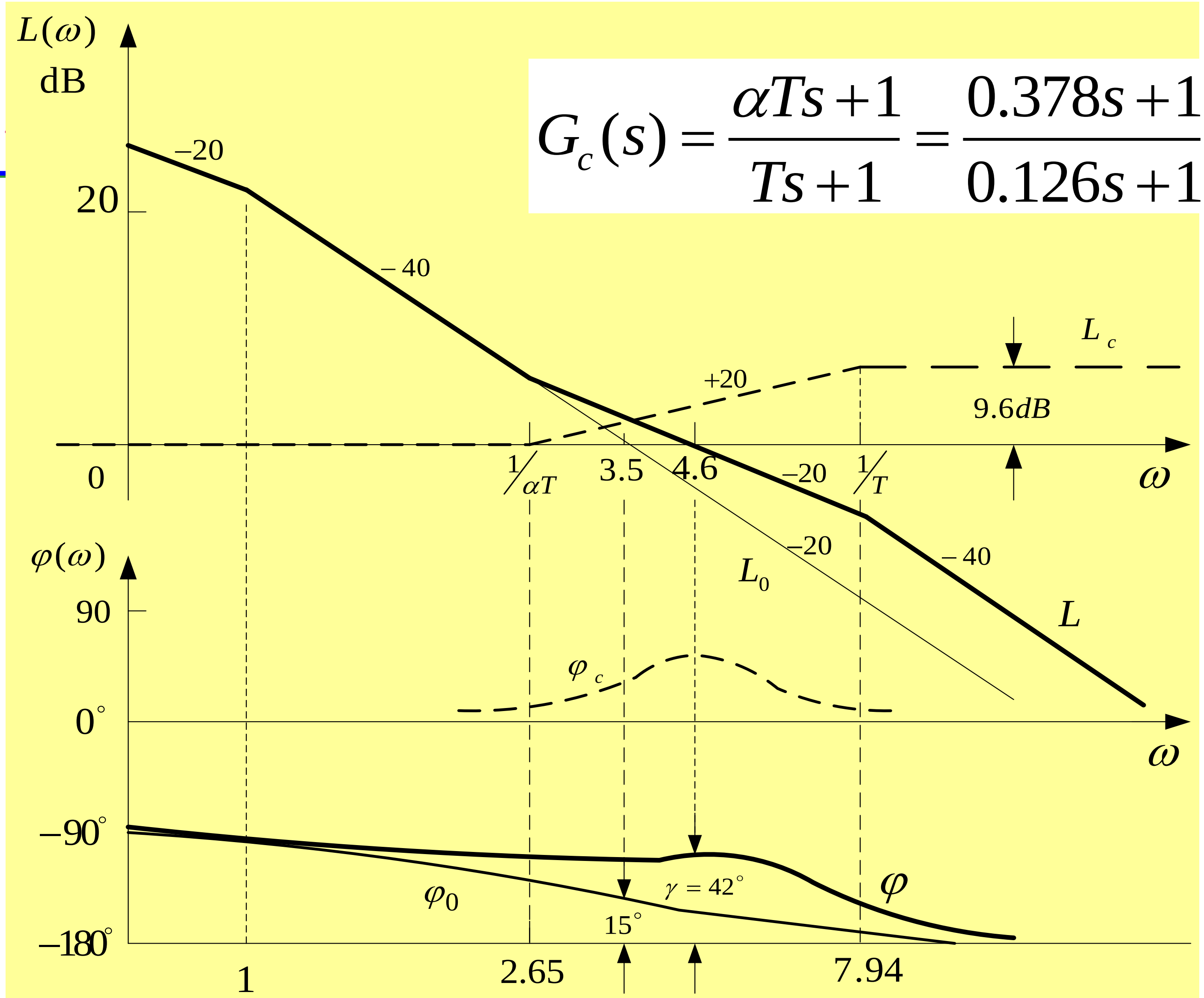
$$\alpha = \frac{1+\sin 30^0}{1-\sin 30^0} = 3$$

$$10\lg\alpha = 4.8\text{dB}$$

$$-4.8 - 0 = -40(\lg\omega_c - \lg 3.5)$$

$$\omega_m = \omega_c = 4.6$$

$$T = \frac{1}{\omega_m\sqrt{\alpha}} = 0.126$$



$$G_c(s)=\frac{\alpha Ts+1}{Ts+1}=\frac{0.378s+1}{0.126s+1}$$

(5) 检验。求得：K_v=12s^{-1}，γ=42^0，ω_c从3.5 rad/s增加到4.6 rad/s满足要求

系统校正——串联超前校正

通过超前校正分析可知：

(1) **提高了控制系统的相对稳定性**——使系统的稳定裕量增加，超调量下降

工业上常取α=10，此时校正装置可提供约55°的超前相位

(2) **加快了控制系统的反应速度**——过渡过程时间减小。由于串联超前校正的存在，使校正后系统的ω_c、ω_r及ω_b均变大了。带宽的增加，会使系统响应速度变快

(3) **控制系统的稳态性能不变**—— 开环低频幅值和相位不变

(4) **系统的抗干扰能力下降了**—— 高频段开环幅频曲线抬高了

系统校正——串联超前校正（频率特性法的步骤）

(1) 根据稳态性能的要求，确定系统的开环放大系数K；

(2) 利用求得的K值和原系统的传递函数，绘制原系统的开环伯德图；

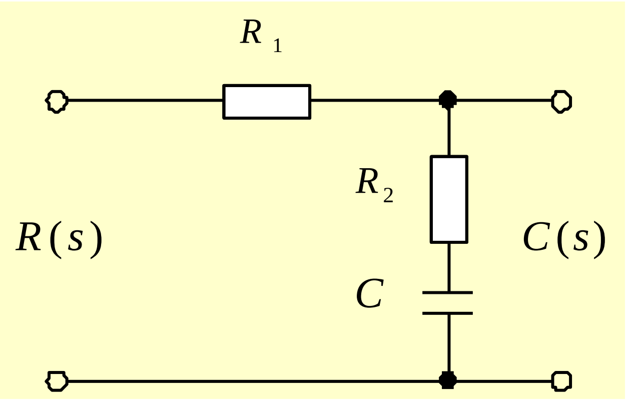
(3) 在开环伯德图上求出原系统的相位裕度，确定为使相位裕度达到规定的数值所需增加的超前相角，即超前校正装置的φ_m值，根据φ_m值求出校正网络参数α，在伯德图上确定原系统幅值等于$-10\lg\alpha$对应的频率ω_c；以这个频率作为超前校正装置的最大超前相角所对应的频率ω_m，即令$\omega_m=\omega_c$；

(4) 将已求出的ω_m和α的值求出超前网络的参数αT和T，并写出校正网络的传递函数 $G_c(s)$；

(5) 写出校正后系统的开环传递函数，并绘制校正后系统的开环伯德图，验证校正的结果。

1. 滞后校正装置

具有滞后相位特性（即相频特性$\varphi(\omega)$小于零）的校正装置叫滞后校正装置，又称之为积分校正装置。常见无源滞后网络的电路图。



$$G_c(s)=\frac{Ts+1}{\beta Ts+1}$$

$$\beta=\frac{R_1+R_2}{R_2}>1$$

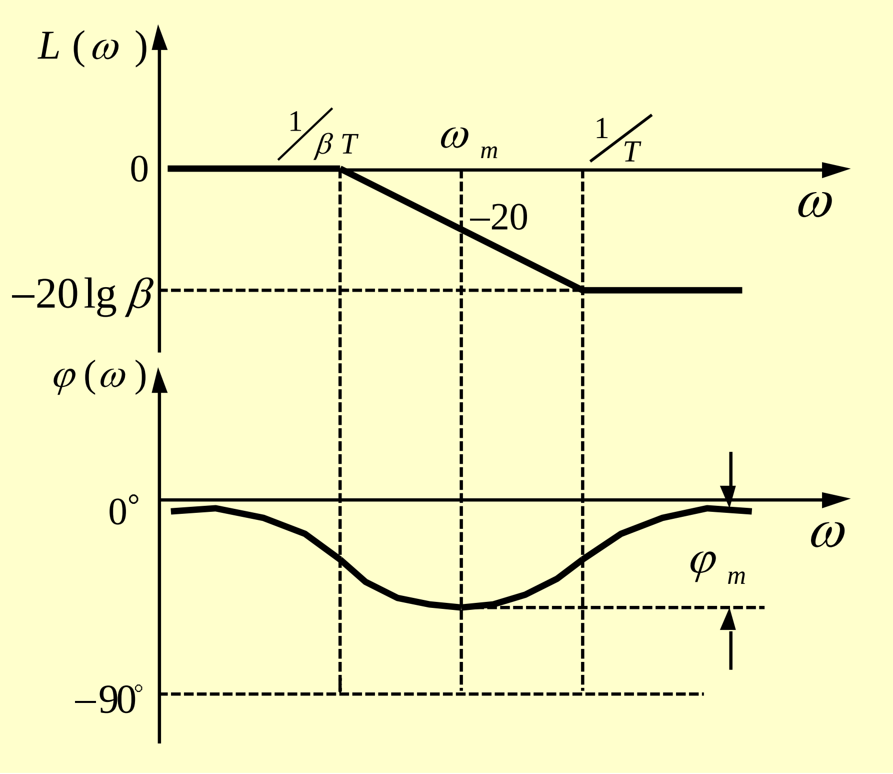
式中：$T=R_2C$

系统校正——串联滞后校正

2. 特点：1) 幅频特性小于或等于0dB。是一个低通滤波器

2) $\varphi(\omega)$小于等于零。可看作是PD环节与惯性环节的串联，但惯性环节时间常数βT大于PD环节时间常数T（分母的时间常数大于分子的时间常数），即积分效应大于微分效应，相角表现为一种滞后效应

3) 最大负相移发生在转折频率 $\dfrac{1}{T}$ 与 $\dfrac{1}{\beta T}$ 的几何中点



$$\varphi_m = -\arcsin\frac{\beta-1}{\beta+1} = \arcsin\frac{1-\beta}{1+\beta}$$

$$\beta = \frac{1+\sin(-\varphi_m)}{1-\sin(-\varphi_m)}$$

系统校正——串联滞后校正

例6-23 设单位负反馈系统的开环传递函数为 $G_0(s)=\dfrac{K}{s(s+1)(0.5s+1)}, K>0$

要求校正后，稳态速度误差系数 $K_V=5$秒$^{-1}$，$\gamma \geq 40^0$

解 (1)根据稳态误差要求确定开环增益K。绘制未校正系统的伯德图，并求出其相位裕度和幅值裕度。

确定K值。因为

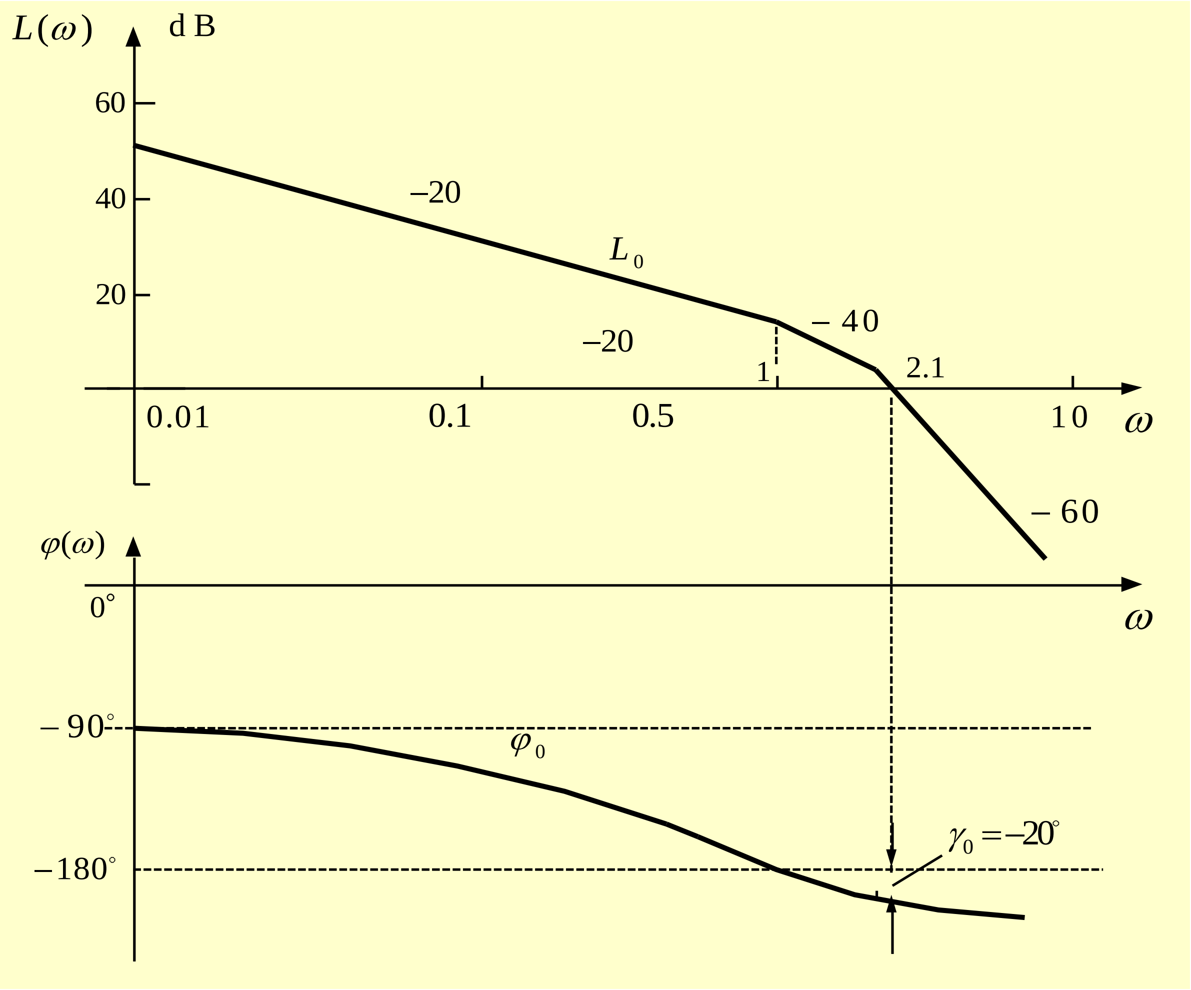
$$K_v=\lim_{s\to 0} sG_0(s)=\lim_{s\to 0}\frac{sK}{s(s+1)(0.5s+1)}=K$$

所以：$K_v=K=5$

系统校正——串联滞后校正

要求$\gamma \geq 40^0$

作出原系统的开环伯德图

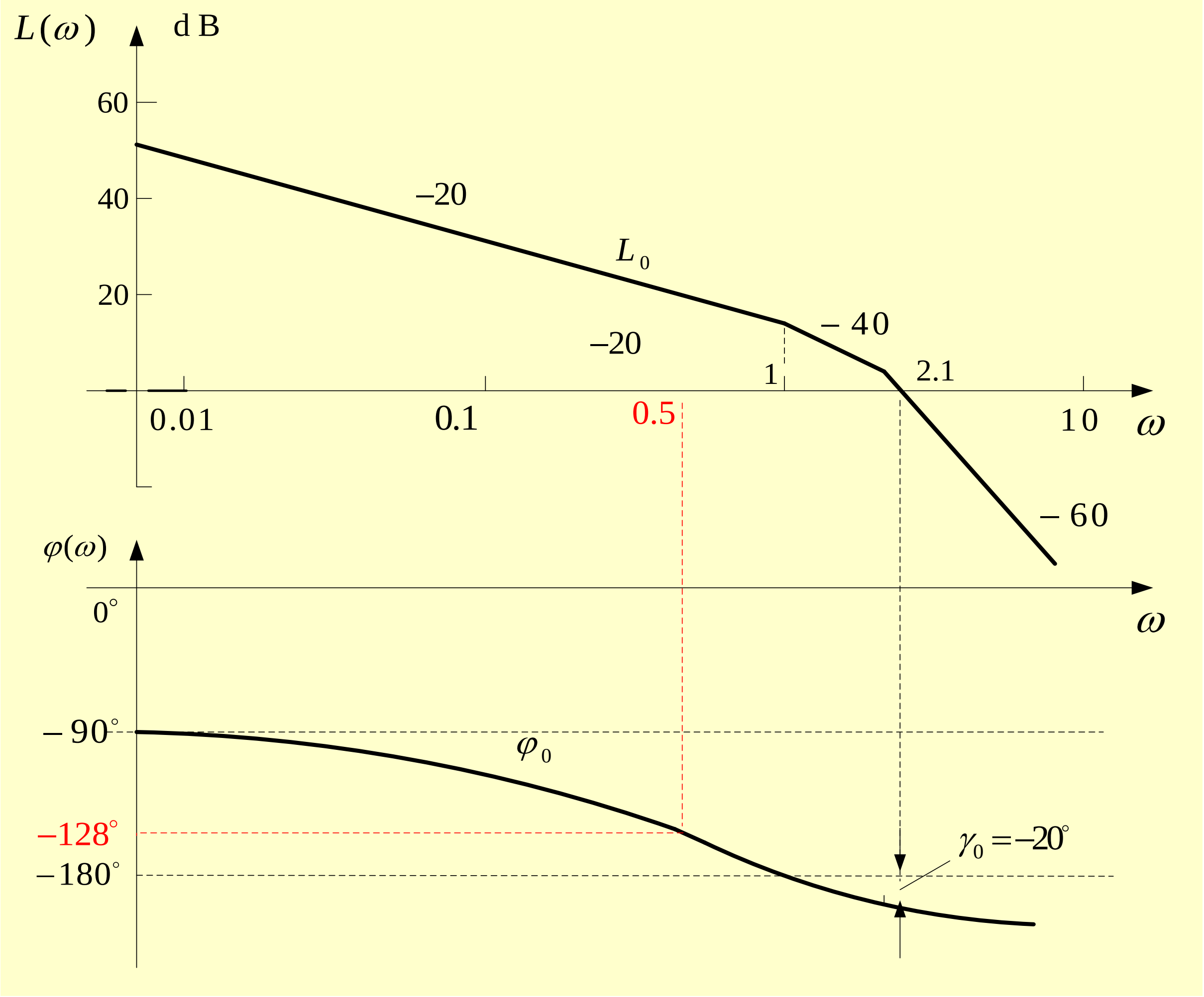


若采用超前校正
需要提供至少65°的超前角
有困难

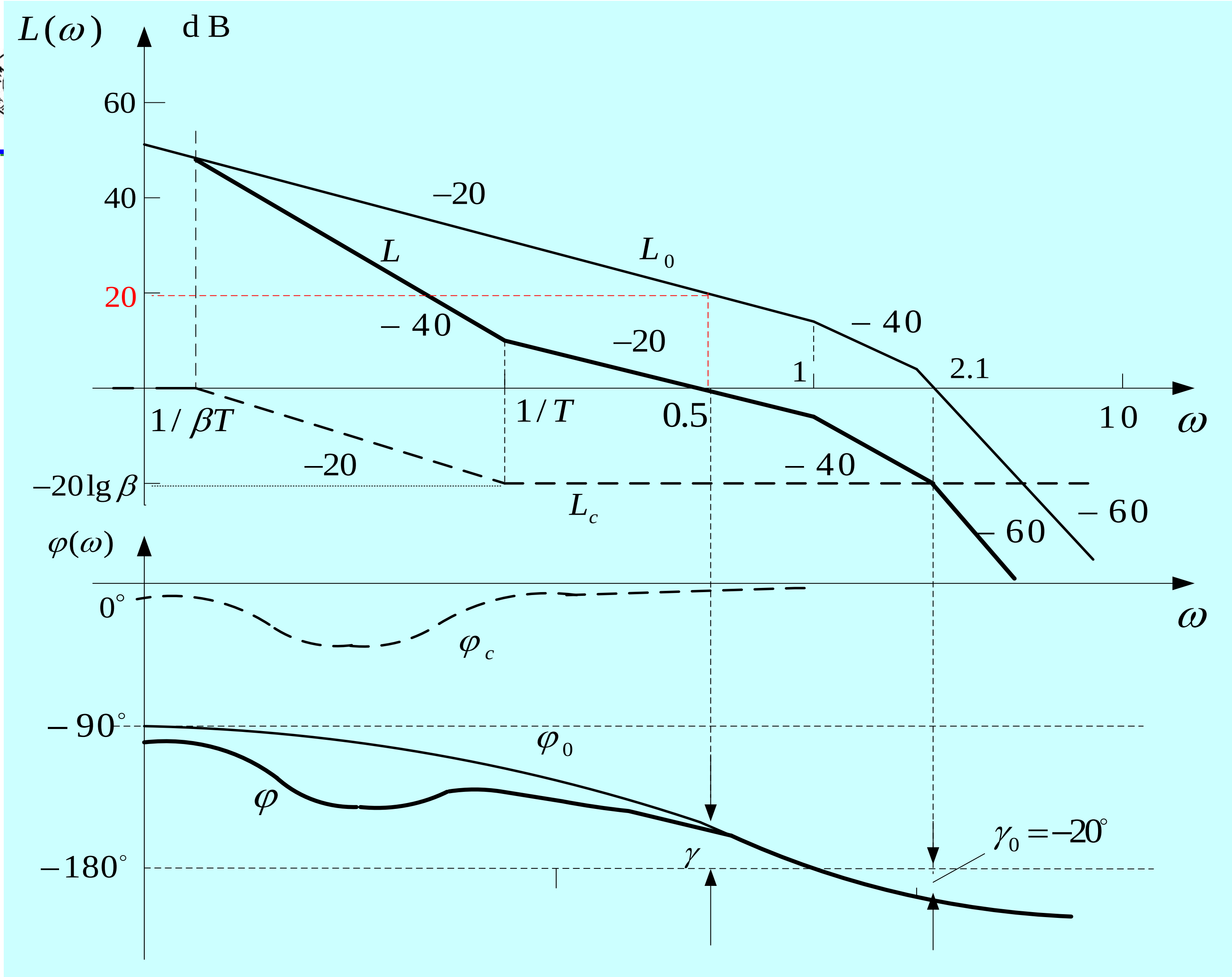
求得原系统的相位裕度：γ_0= -20^0，系统不稳定

系统校正——串联滞后校正

(2) 确定校正后的ω_c。原系统在ω_{c0}处相角衰减快，要求校正后$\gamma \geq 40^0$，为补偿滞后校正网络本身的相位滞后，再加5^0~12^0的补偿角，取$\gamma=40^0+12^0=52^0$



由伯德图，ω=0.5rad/s的相位角等于-128^0(即相位裕量为52^0)，故选择校正后系统的截止频率ω_c =0.5rad/s



(3) 求β值

由左图得原系统在ω_c=0.5处的幅值为20dB

-20=-20lgβ

β=10

(4) 选取T值。为了使滞后校正装置产生的相位滞后对校正后系统的幅值穿越频率ω_c处的影响足够小，一般取ω_c=(5~10)× 1/T， $T = 5/\omega_c = 5/0.5 = 10$

(5)确定滞后校正装置的传递函数。

$$G_c(s)=\frac{10s+1}{100s+1}=\frac{1}{10}\times\frac{s+0.1}{s+0.01}$$

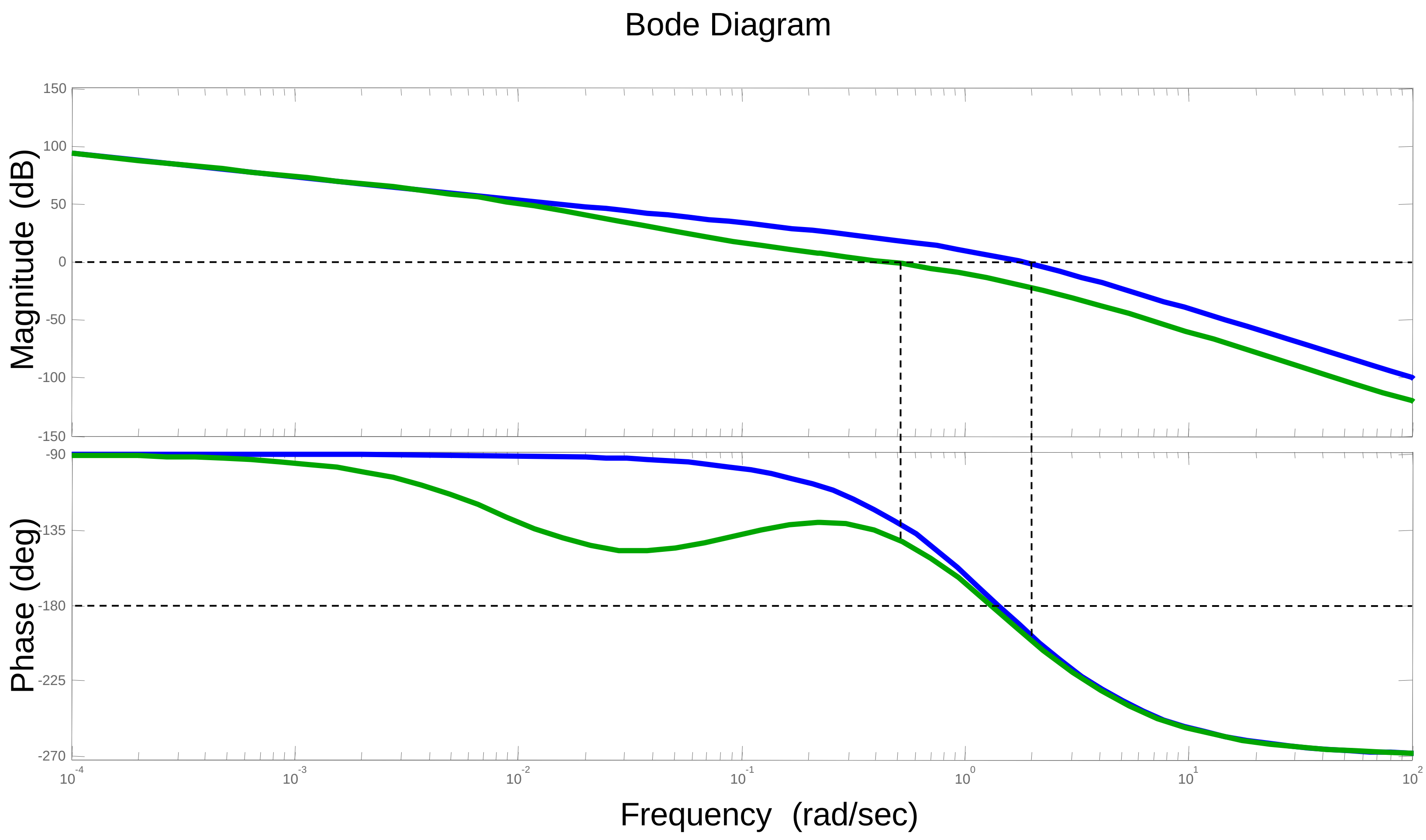
校正后系统的开环传递函数

$$G(s)=G_0(s)\cdot G_c(s)=\frac{5(10s+1)}{s(100s+1)(s+1)(0.5s+1)}$$

(6) 检验。

作出校正后系统的伯德图，求得相位裕度=40^0，K_V=5。所以，系统满足要求。

系统校正——串联滞后校正


Bode Diagram
Magnitude (dB)
150
100
50
0
-50
-100
-150
Phase (deg)
-90
-135
-180
-225
-270
10^{-4}
10^{-3}
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
Frequency (rad/sec)

系统校正——串联滞后校正

在滞后校正中，利用的是滞后校正网络在高频段的衰减特性，而不是其相位的滞后特性。

对系统滞后校正后：

① 改善了系统的稳定性

相位裕度由负变正，系统由不稳定变稳定

② 稳态性能不变

开环低频幅值和相位不变

③ 响应速度变慢

滞后校正装置使系统的频带变窄，导致动态响应时间增大。

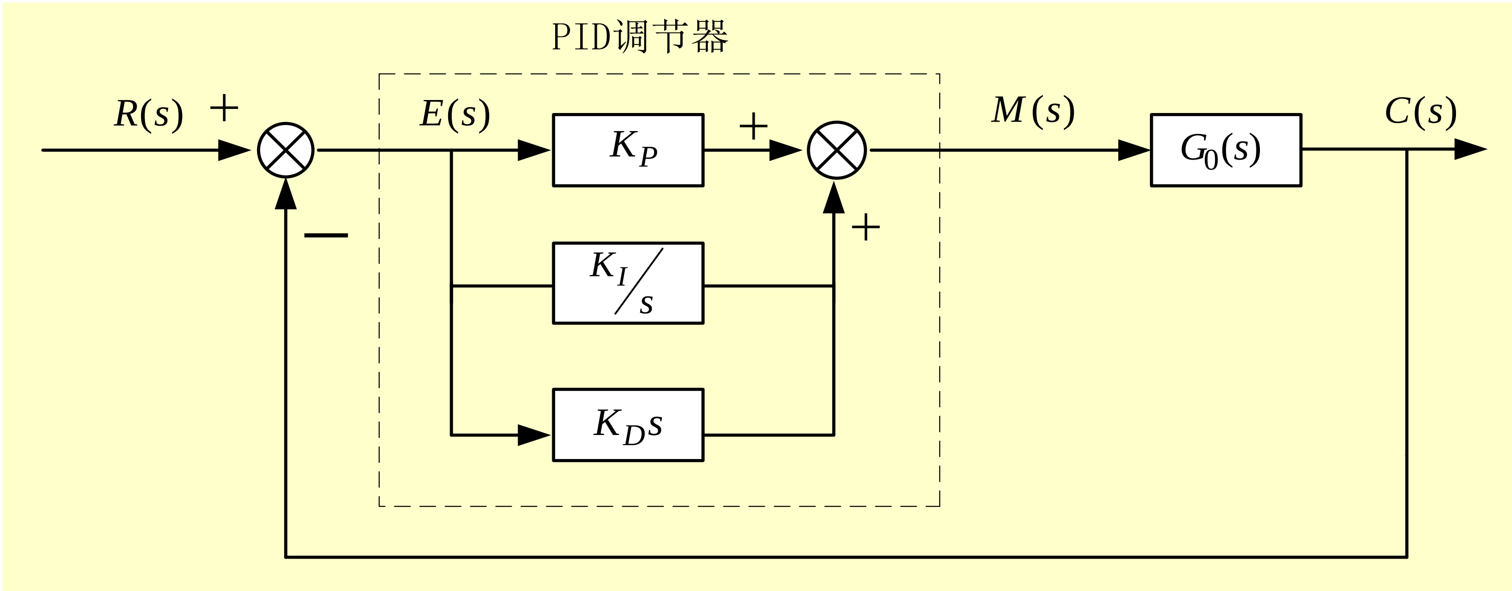
④ 高频抗干扰能力提高

高频段开环幅频曲线压低了

超前校正和滞后校正的区别与联系

	超 前 校 正	滞 后 校 正
原理	利用超前网络的相角超前特性，改善系统的动态性能	利用滞后网络的高频幅值衰减特性，改善系统的稳定性
效果	(1)在ω_c附近，原系统的对数幅频特性的斜率变小，相角裕量γ变大，超调量下降 (2)系统的频带宽度增加 (3)不影响系统的稳态特性	(1) 相角裕量γ变大，超调量下降 (2)系统的增益剪切频率ω_c下降，闭环带宽减小 (3)不影响系统的稳态特性
缺点	(1)频带加宽，对高频抗干扰能力下降 (2)用无源网络时，为了补偿校正装置的幅值衰减，需附加一个放大器	频带变窄，使动态响应时间变大
应用范围	(1)ω_c附近，原系统的相位迟后变化缓慢，超前相位一般要求小于55^0，对于多级串联超前校正则无此要求 (2)要求有大的频宽和快的瞬态响应 (3)高频干扰不是主要问题	(1)ω_c附近，原系统的相位变化急剧，以致难于采用串联超前校正 (2)适于频宽与瞬态响应要求不高的情况 (3)对高频抗干扰有一定的要求 (4)低频段能找到所需要的相位裕量

比例-积分-微分(PID)调节器



$$m(t) = K_P e(t) + K_I \int e(t)dt + K_D \frac{de(t)}{dt}$$

$$= K_P e(t) + \frac{K_P}{T_I}\int e(t)dt + K_P T_D \frac{de(t)}{dt} = K_P\left(e(t) + \frac{1}{T_I}\int e(t)dt + T_D \frac{de(t)}{dt}\right)$$

T_I称为积分时间，T_I称为微分时间

实际中，可采用P、PI、PD和PID等形式

比例-积分-微分(PID)调节器

写成传递函数形式 $$G_e(s)=\frac{M(s)}{E(s)}=K_P+\frac{K_I}{s}+K_D s$$

$$G_e(s)=\frac{K_D\left(s+\dfrac{K_P+\sqrt{K_P^2-4K_IK_D}}{2K_D}\right)\left(s+\dfrac{K_P-\sqrt{K_P^2-4K_IK_D}}{2K_D}\right)}{s}$$

引入PID调节器后，系统的型别数增加了1，稳态性能得到提升，还提供了两个零点，适当配置这两个零点可增强系统稳定性和提高系统动态性能

比例-积分-微分(PID)调节器

确定PID控制器参数（PID参数整定）的Ziegler-Nichols方法

在系统闭环情况下，让系统在纯比例器的作用下产生等幅振荡，利用此时的比例系数K_u和振荡周期T_u，查表得到PID参数

控 制 器类型	K_P	T_I	T_D
P	$0.5K_u$		
PI	$0.4K_u$	$0.8T_u$	
PD	$0.8K_u$		$0.12T_u$
PID	$0.6K_u$	$0.5T_u$	$0.12T_u$

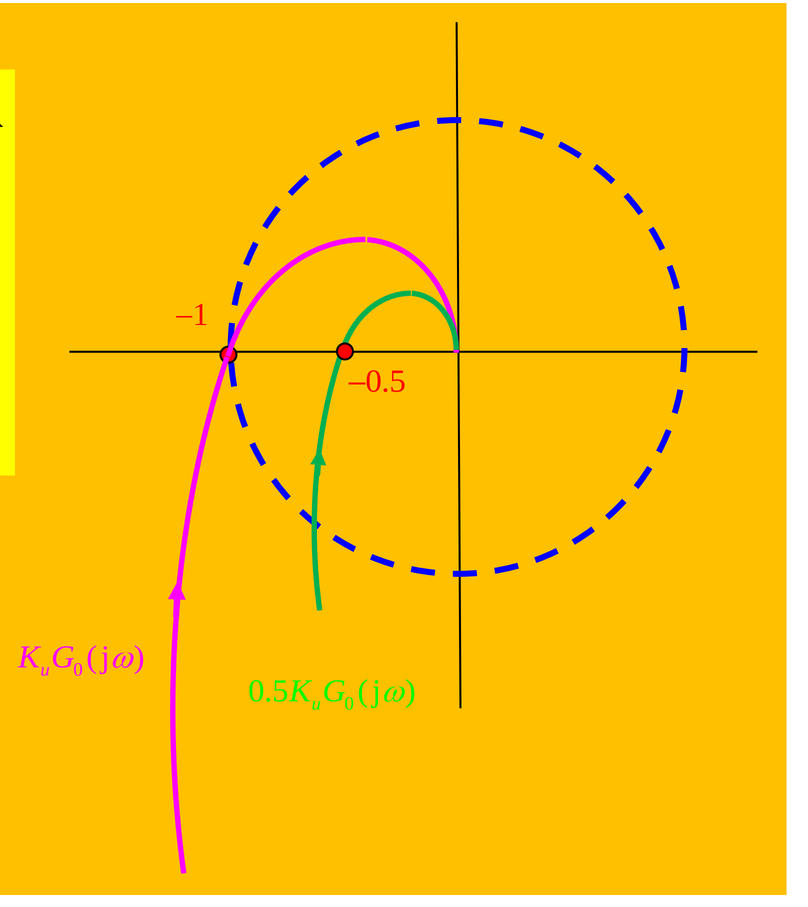
比例-积分-微分(PID)调节器

等幅振荡时，$-1+\mathrm{j}0$点在开环幅相曲线$K_uG_0(\mathrm{j}\omega)$上

$$\omega_x = \omega_\Phi = \frac{2\pi}{T_u}$$

穿越频率ω_x， 截止频率ω_Φ

幅值裕度$h=1$,相位裕度$\gamma=0^\circ$



P控制器的$K_P=0.5K_u$时

$0.5K_uG_0(\mathrm{j}\omega)$与负实轴的交点为$-0.5$

幅值裕度$h=2=6\mathrm{dB}$,穿越频率$\omega_x=\dfrac{2\pi}{T_u}$

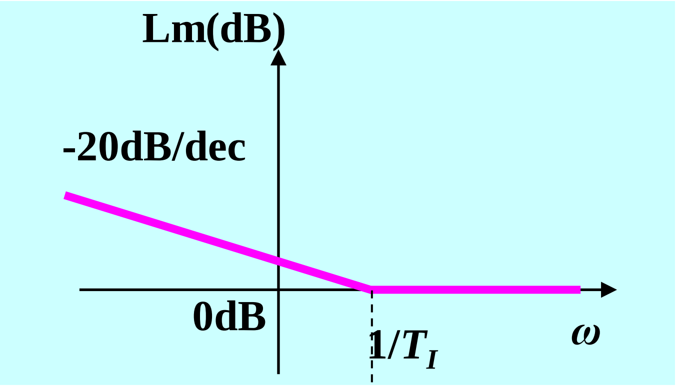
器

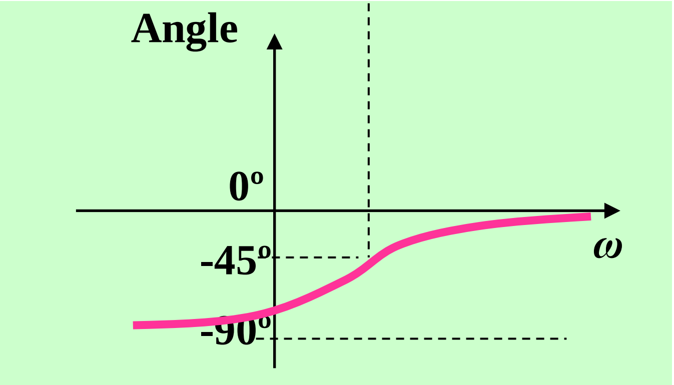
PI控制器$K_P + \dfrac{K_P}{T_I}\dfrac{1}{s} = K_P\left(1+\dfrac{1}{T_I s}\right) = K_P\left(\dfrac{1+T_I s}{T_I s}\right)$

$K_P = 0.4K_u, T_I = 0.8T_u$

开环频率特性

$$K_P\left(\frac{1+\mathrm{j}T_I\omega}{\mathrm{j}T_I\omega}\right)G_0(\mathrm{j}\omega) = 0.4K_u\left(\frac{1+\mathrm{j}T_I\omega}{\mathrm{j}T_I\omega}\right)G_0(\mathrm{j}\omega)$$





先考虑$0.4K_u G_0(\mathrm{j}\omega)$:

幅值裕度$h = \dfrac{1}{0.4} = 2.5 \approx 8\mathrm{dB}$, 穿越频率$\omega_x = \dfrac{2\pi}{T_u}$

在$\dfrac{1+\mathrm{j}T_I\omega}{\mathrm{j}T_I\omega}$的bode图中，转折频率$\dfrac{1}{T_I} = \dfrac{1}{0.8T_u} = \dfrac{1}{0.8\times 2\pi}\dfrac{2\pi}{T_u} \approx \dfrac{1}{5}\omega_x$

在穿越频率ω_x处, $\dfrac{1+\mathrm{j}T_I\omega}{jT_I\omega}$的幅值约等于0dB，相角接近0°

$0.4K_u\left(\dfrac{1+\mathrm{j}T_I\omega}{\mathrm{j}T_I\omega}\right)G_0(\mathrm{j}\omega)$的穿越频率在$\dfrac{2\pi}{T_u}$附近，幅值裕度不低于6dB

比例-积分-微分(PID)调节器

PID调节器在工业控制中得到广泛地应用。它有如下特点：

1. 对系统的模型要求低

实际系统要建立精确的模型往往很困难。而PID调节器对模型要求不高，甚至在模型未知的情况下，也能进行调节。

2. 调节方便

调节作用相互独立，最后以求和的形式出现的，人们可改变其中的某一种调节规律，大大地增加了使用的灵活性。

3. 适应范围较广

一般校正装置，系统参数改变难，调节效果差，而PID调节器的适应范围广，在一定的变化区间中，仍有很好的调节效果。

Thanks！