自动控制原理

Principle of Automatic Control

第二章 CHAPTER 2

连续时间控制系统的数学模型

Mathematical Model of Continuous-time Control Systems

状态的基本概念

- 系统微分方程是输入输出模型，它仅仅描述了系统输入变量与输出变量之间的关系。

——经典控制理论模型

- 系统状态空间模型能够刻画系统内部变量的运动过程，能够描述多变量系统。状态空间模型也便于计算机实现。

——现代控制理论模型

状态的基本概念

- **State(状态)**：所谓状态，是指系统过去、现在和将来的状况。
- **State variable(状态变量)**： 状态变量是指能确定系统运动状态的最少数目的一组变量。一个用n阶微分方程描述的系统就有n个独立的变量，当这n个独立变量的时间响应都求得时，系统的行为也就完全被确定。因此由n阶微分方程描述的系统就有n个状态变量。状态变量具有非唯一性，因为不同的状态变量也能表达同一个系统的行为。要注意的是，状态变量不一定是物理上可观测的量，可以是一个纯数学量。
- **State vector(状态向量)**：若n个状态变量 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 是向量$x(t)$的分量，则$x(t)$称为状态向量。其阶数(order)为n，也即微分方程（特征方程）的阶数。

$$\mathbf{x}(t) \equiv \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \equiv \mathbf{x}$$

状态的基本概念

- **State space(状态空间)**：以状态变量 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 构成的n维空间，称为状态空间。系统在任意时刻的状态向量$x(t)$在状态空间中是一个点。系统随时间的变化过程，使$x(t)$在状态空间中描绘出一条轨迹称为状态轨迹(state trajectory)。
- **状态空间表达式(State variables representation)**：将反映系统动态过程的n阶微分方程，转换成一阶微分方程组的形式，并利用矩阵和向量的数学工具，将一阶微分方程组用一个式子来表示，这就是状态方程。将状态方程与描述系统状态变量与系统输出变量之间的关系的输出方程一起就构成了状态空间表达式。下面就是状态空间表达式的标准描述

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \qquad \text{状态方程}$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t) \qquad \text{输出方程}$$

状态的基本概念

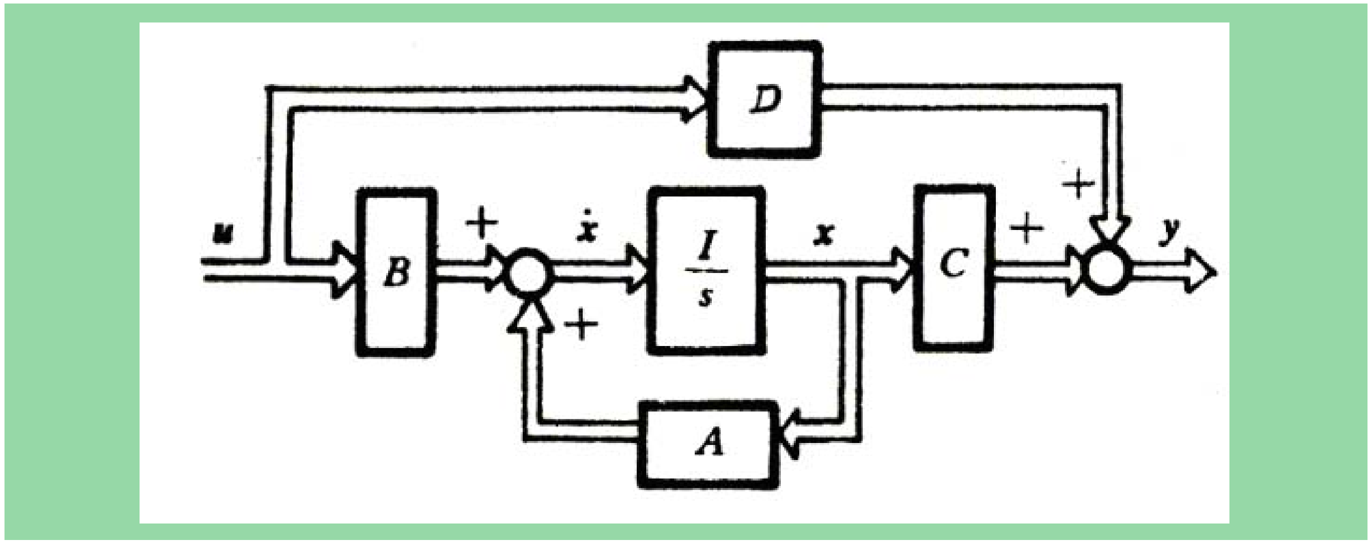
- 状态空间模型(State-space model)

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \quad \text{状态方程}$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t) \quad \text{输出方程}$$

式中，$x(t), \dot{x}(t)$ 分别为状态向量及其一阶导数，$u(t)$，$y(t)$分别为系统的输入变量和输出变量，A，B，C，D分别为具有一定维数的系统矩阵。

- 状态空间模型图



状态的基本概念

- 三种常用的系统状态变量：物理（*physical*）状态变量、相（*phase*）变量、正则（*canonical*）变量。
- 物理状态变量同系统中的储能元件(energy-storage elements)相关。如：电容、电感等。
- 储能元件的能量函数中的运动物理量可被选作系统的状态变量，如电压、电流等。
- 一般而言，只有独立物理量才被选作状态变量。独立物理量意味着，该物理量不能够由其他状态变量所构成的函数来表示（注：一个状态变量可以由其他状态变量的各阶导数所构成的函数表示）。

常用储能元件及其物理量(中文课本P33)

储能元件	能量	物理变量
电容C	$\frac{Cv^2}{2}$	电压 v
电感L	$\frac{Li^2}{2}$	电流 i
质量M	$\frac{Mv^2}{2}$	传递速度 v
弹簧K	$\frac{Kx^2}{2}$	位移 x
流体容量$C=\rho A$	$\frac{\rho Ah^2}{2}$	高度 h
热容C	$\frac{C\theta^2}{2}$	温度 θ
流体可压缩性V/K_B	$\frac{VP_L^2}{2K_B}$	压力 P_L

例1-1-S：电阻电感串联电路

在图1中，只有一个储能元件——电感 L，因此只有一个状态变量。选择状态变量 $x_1=i$，令 $u=e$，列写回路电压方程

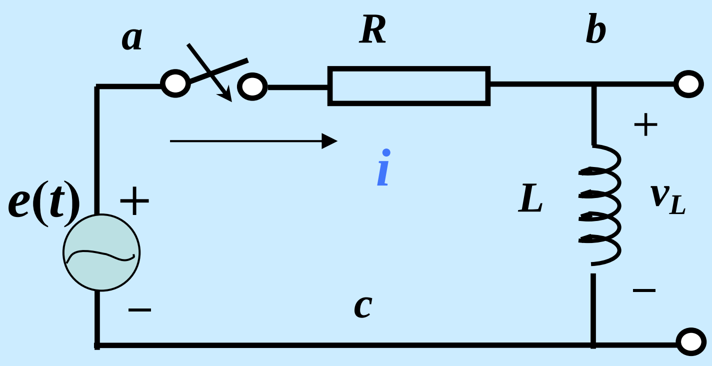


图1

$$iR + L\frac{di}{dt} = Ri + LDi = e$$

$$Rx_1 + L\dot{x}_1 = u$$

整理得：

$$\boxed{\dot{x}_1 = -\frac{R}{L}x_1 + \frac{1}{L}u}$$

其中，u 是系统输入函数的标准符号，称为控制变量。如果给定输出 y，就可以根据状态变量和控制变量列写输出方程。如：

$$\boxed{y = v_L = e - Ri = -Rx_1 + u}$$

例2-S：电阻电感电容（RLC）串联电路

在图 2中，系统包含两个储能元件：电感 L 和电容 C。设状态变量为$x_1=v_c$ 和 $x_2=i$ ，因此需要两个状态方程。 令 *e*为控制变量：

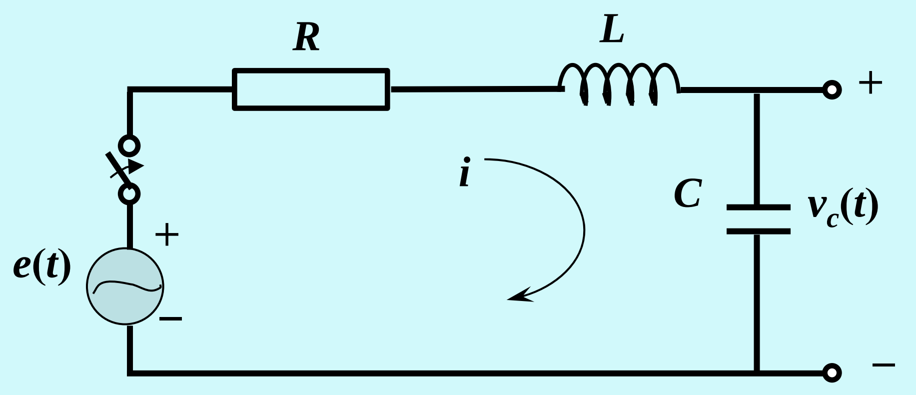


图2

$$\because v_C = \frac{1}{C}\int_0^t i\,d\tau$$

$$\boxed{\therefore \dot{x}_1 = \frac{1}{C}x_2}$$

$$\because v_L + v_R + v_C = e$$

及 $$v_L = L\frac{di}{dt}$$

$$\boxed{\therefore \dot{x}_2 = -\frac{1}{L}x_1 - \frac{R}{L}x_2 + \frac{1}{L}u}$$

例2-S：电阻电感电容（RLC）串联电路

将 R-L-C 电路的状态方程写成标准形式（ 2 个一阶微分方程，系统独立状态数为2）。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{C} \\ -\dfrac{1}{L} & -\dfrac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{L} \end{bmatrix} [u]$$

比较：同一系统的微分方程描述

$$LC\frac{dv_c^2(t)}{dt^2} + RC\frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = e$$

- 还可以用更紧凑的矩阵形式表示： $\dot{x} = Ax + bu$

其中 $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}_{n\times 1}$ 及 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{C} \\ -\dfrac{1}{L} & -\dfrac{R}{L} \end{bmatrix}_{n\times n}$

x 是一个 $n\times 1$ 的状态向量（本例中 $n=2$）；A是$n\times n$矩阵， 称为对象系数矩阵或系统矩阵。

例2-S：电阻电感电容（RLC）串联电路

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{L} \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

b 称为控制向量 ($n\times1$) （因为 u 是一个标量）；如果 u 是一个 m 维的输入向量，比如系统具有多个输入，那么 B 将会成为一个 $n\times m$ 的控制矩阵。

- 如果系统输出 $y(t)$ 是 电容电压，那么有 $y(t) = v_c = x_1$

于是系统输出方程就是

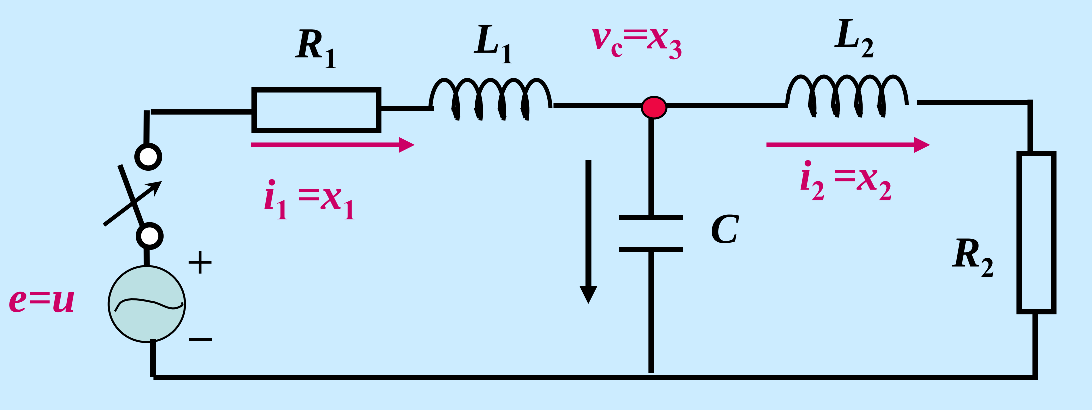
$$y(t) = Cx + Du = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0][u] = x_1$$

C为$l\times n$矩阵，称为输出矩阵；D为$l\times m$矩阵，称为前馈矩阵。本例中，$l=1$；$D=0$。

如果 y 是 $l\times1$ 的向量，那么称为输出向量；这里，y是一个一维输出变量。

例3：RLC电路

➢ 推导P35图2-12电路的状态空间模型。其中，i_2 是系统输出 y。系统状态变量设定为：$x_1=i_1$，$x_2=i_2$ 和 $x_3=v_c$。可列写2个回路方程和1个节点方程。



P35图2-12

Loop 1

$$R_1 x_1 + L_1 \dot{x}_1 + x_3 = u$$

Loop 2

$$-x_3 + L_2 \dot{x}_2 + R_2 x_2 = 0$$

Node

$$-x_1 + x_2 + C\dot{x}_3 = 0$$

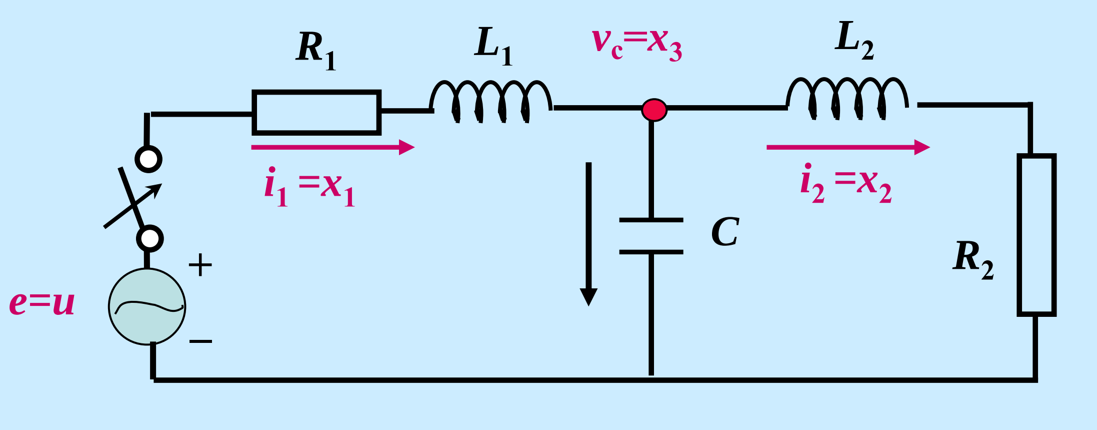
其中 x_1、 x_2 和 x_3 是独立的。

$$y = [0 \quad 1 \quad 0]x$$

$$\dot{x}_1 = -\frac{R_1}{L_1}x_1 - \frac{1}{L_1}x_3 + \frac{1}{L_1}u$$

⋮ ⋮

例3：RLC电路



P35图2-12

Loop 1

$$R_1 x_1 + L_1 \dot{x}_1 + x_3 = u$$

Loop 2

$$-x_3 + L_2 \dot{x}_2 + R_2 x_2 = 0$$

Node

$$-x_1 + x_2 + C\dot{x}_3 = 0$$

其中，i_2 是系统输出 y。

写成状态空间模型标准形式：

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L_1} & 0 & -\frac{1}{L_1} \\ 0 & -\frac{R_2}{L_2} & \frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

关于系统中的变量

➢ 对于一个被控过程，其中的变量可以分成三类

（1） **输入变量：** 控制变量

扰动变量

输入变量从外部作用于被控过程（或被控对象）。

（2） **输出变量：过程的被控变量，通常可以被测量、观测，输出变量会对输入变量的作用做出响应。**

（3） **状态变量：一组能够完全描述系统时域行为的、数量最少的变量。**

建立状态方程模型的一般步骤

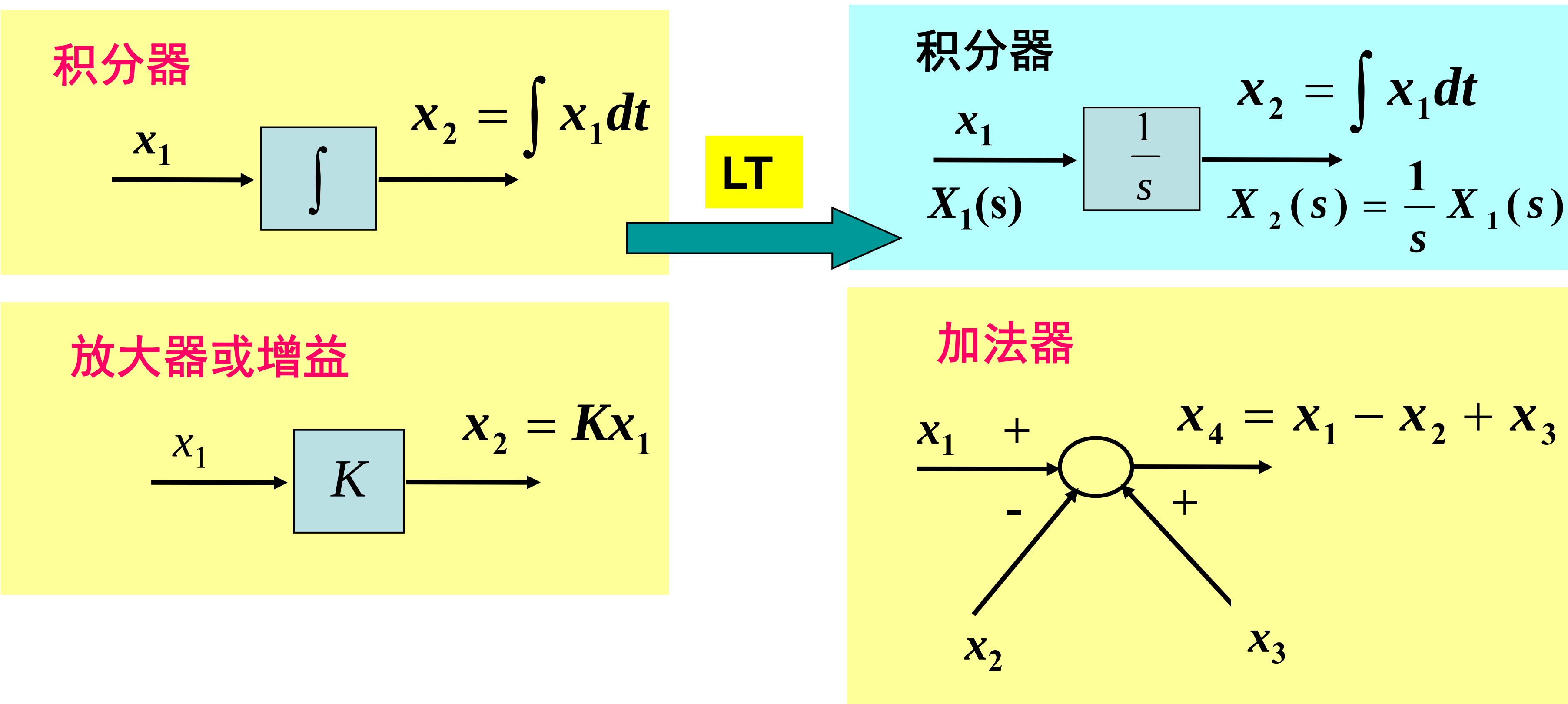
- 确定输入变量、输出变量及状态变量（非唯一性！）
- 用微分方程表示各环节模型
- 选择独立的状态变量，用一阶微分方程组的形式表达模型
- 整理成状态方程的标准形式
- 将输出变量表示为状态变量的线性组合，即输出方程

仿真图

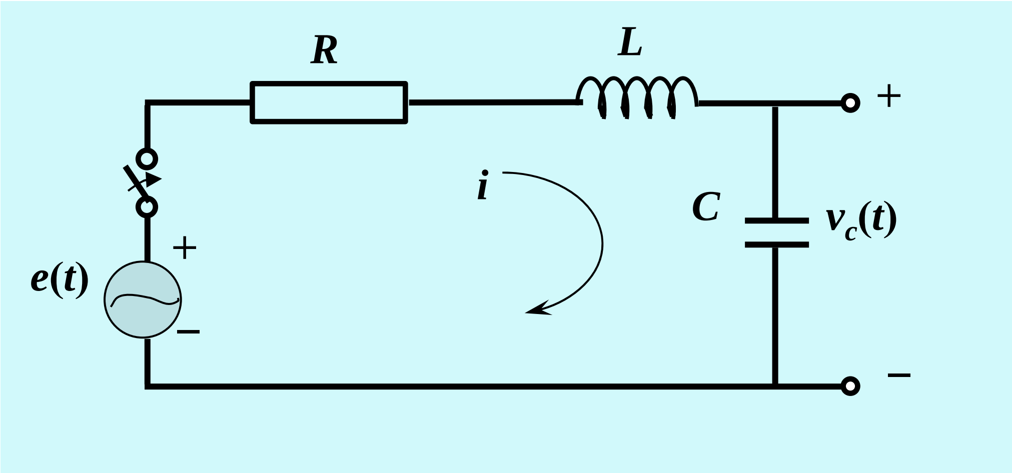
- 仿真图类似于方块图，可以用模拟元件或在计算机对物理系统进行仿真，给分析问题带来方便
- 仿真图的基本单元包括：理想积分器、理想放大器和理想加法器

仿真图

➢ 基本单元：理想积分器、理想放大器和理想加法器



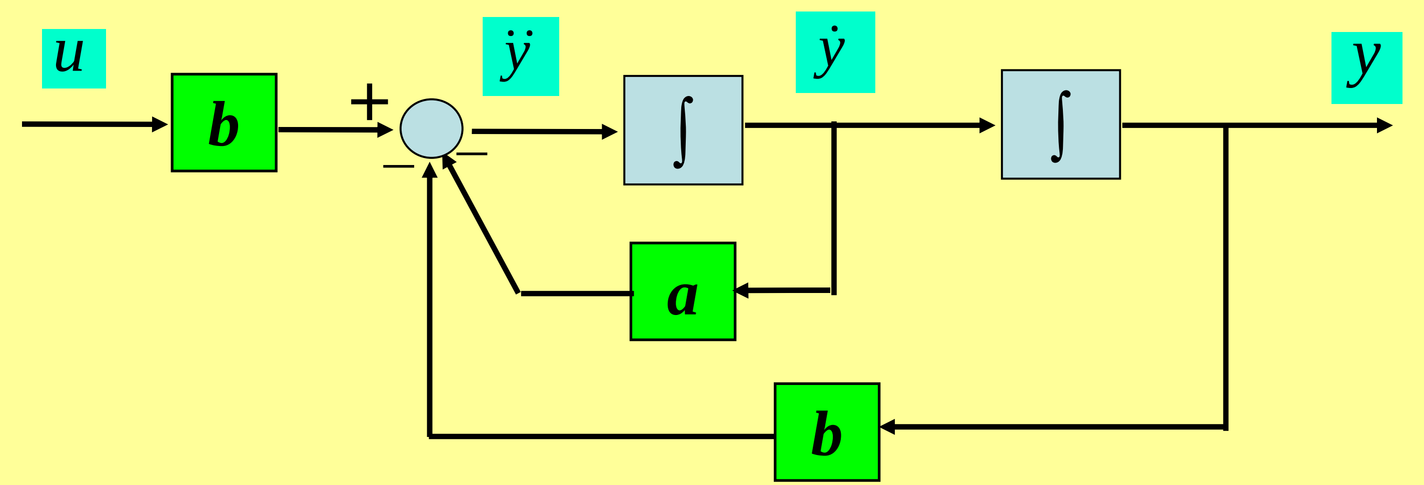
仿真图



$$LC\frac{dv_c^{\,2}(t)}{dt^2}+RC\frac{dv_c(t)}{dt}+v_c(t)=e$$

令 $y=v_c(t)$, $u=e$

$$\ddot{y}=bu-a\dot{y}-by$$



相应的仿真图

其中

$$a=\frac{R}{L}$$

$$b=\frac{1}{LC}$$

仿真图

- 系统仿真图的作图步骤：

步骤1：得到系统的微分方程；

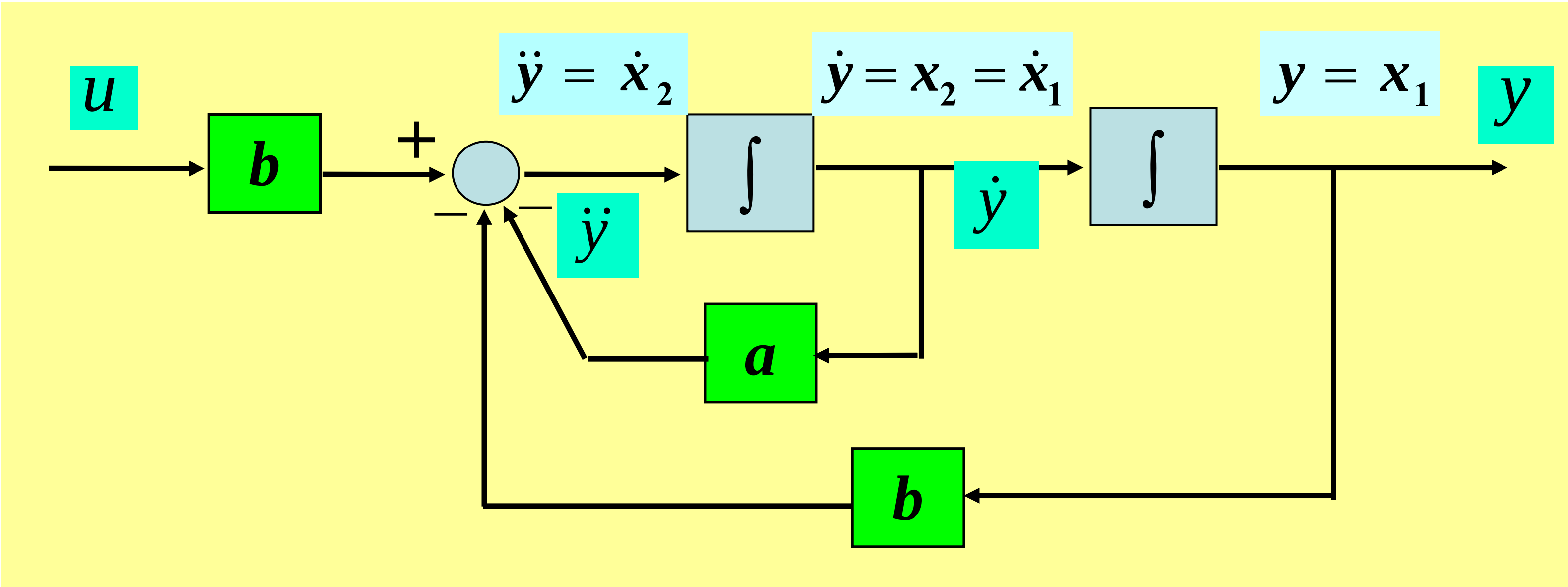
步骤2：重新整理系统微分方程，把输出的最高次微分项放到方程左边；

步骤3：假设方程左边的信号已知，开始作图（注意：首先确定所需的积分器数量）；

步骤4：为了生成第2步中方程左边的信号，将积分器的输出反馈至相应的加法器，并加入所需的输入函数，从而完成作图。

仿真图

- 如果将系统的状态变量选择为仿真图中各个积分器的输出
- 这样，仿真图就可以表示系统状态变量之间的关系，故仿真图亦可称为状态变量图



仿真图

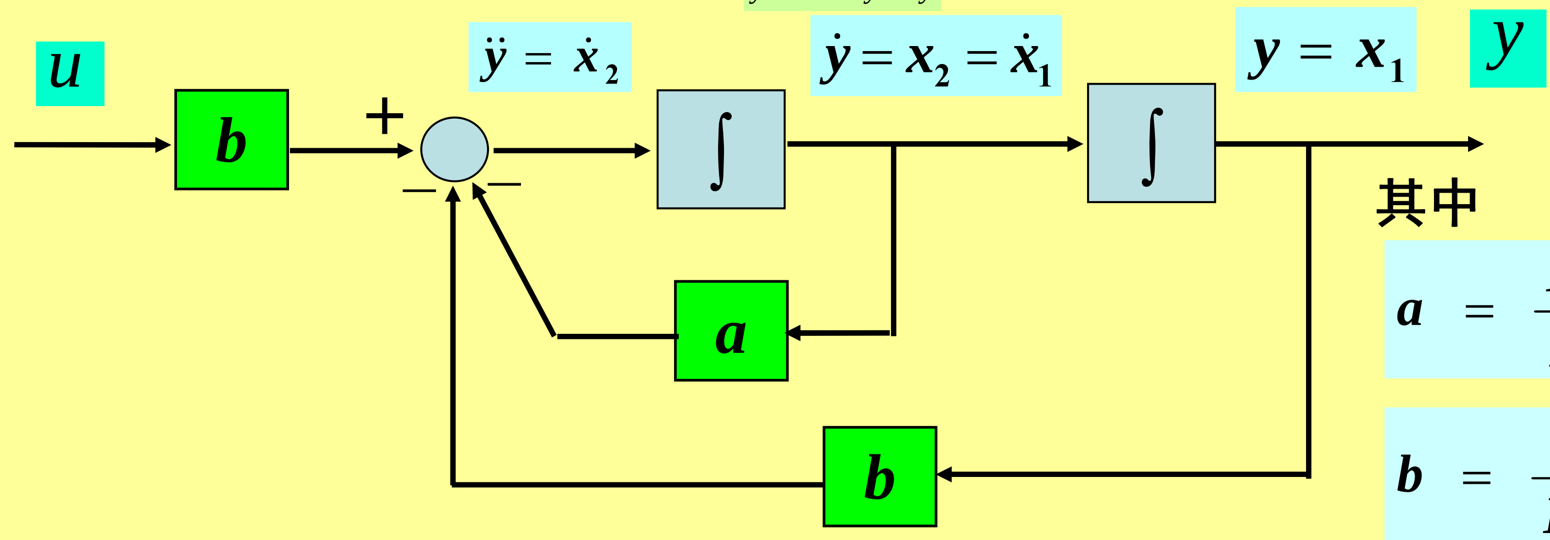
- 根据仿真图，可以很容易地得到系统的**状态变量**（称为**相变量**）；进一步地，可以直接得到系统的状态空间模型。此时的仿真图也称为**状态变量图**。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} u$$

$$y = x_1$$

- 例：由下图

$$\ddot{y} = bu - a\dot{y} - by$$



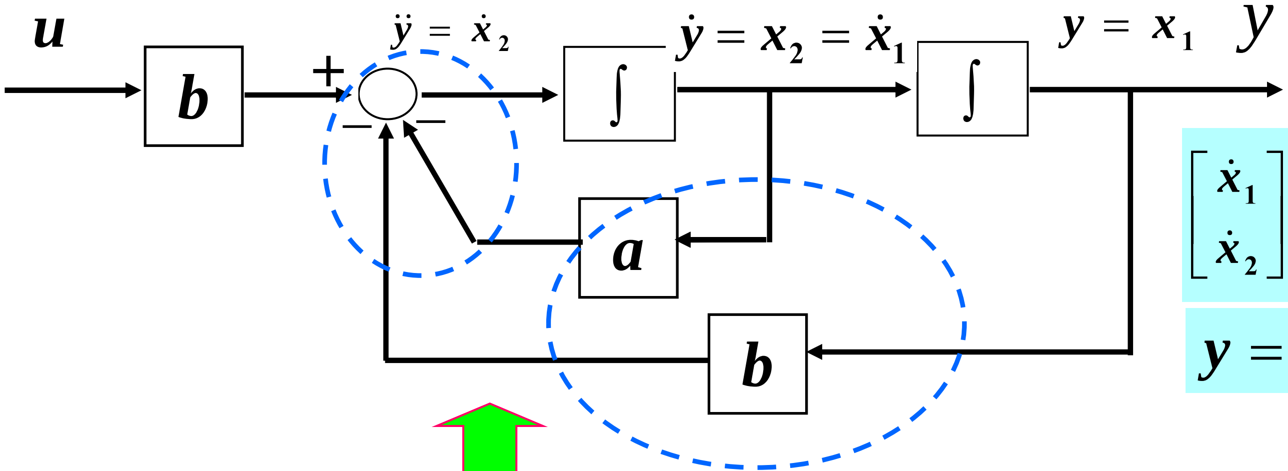
其中

$$a = \frac{R}{L}$$

$$b = \frac{1}{LC}$$

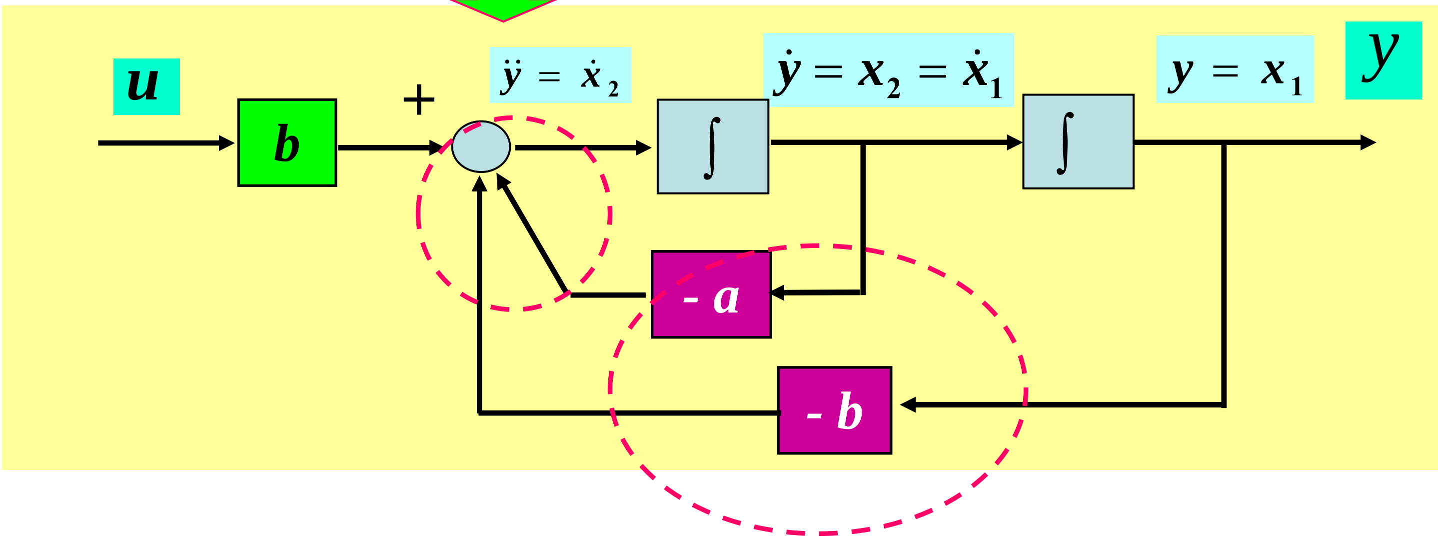
仿真图

- 为了便于处理，可以作出两种形式的图



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix} u$$

$$y = x_1$$



其中

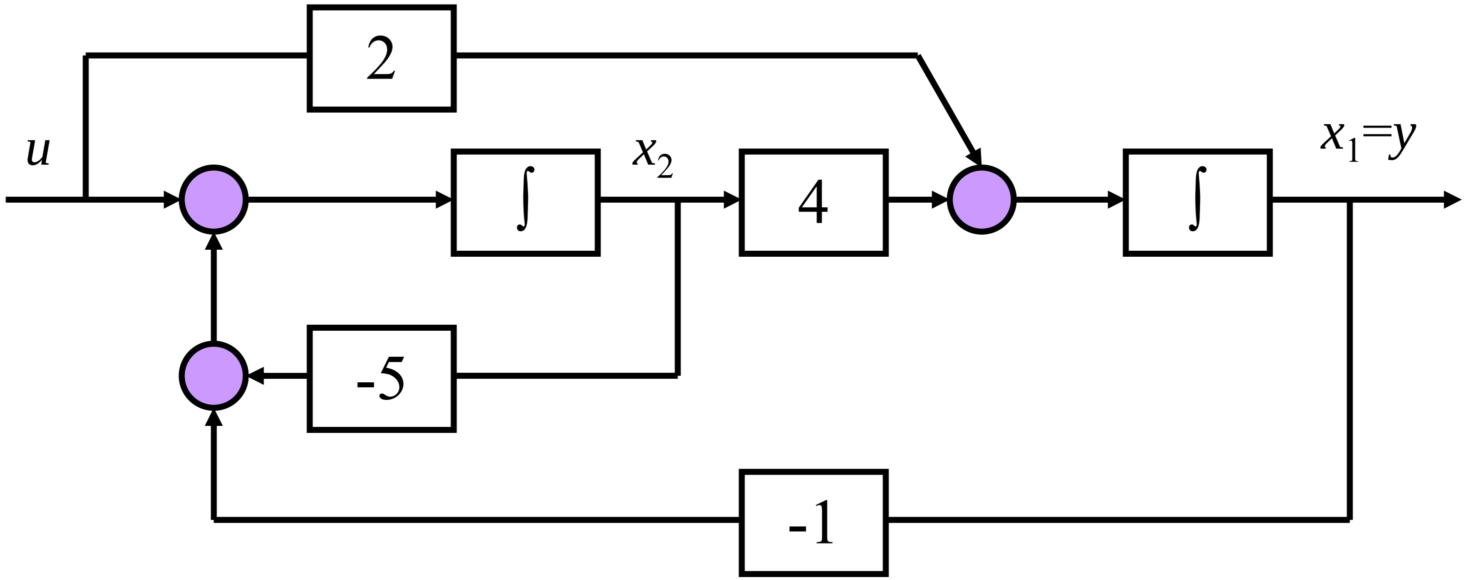
$$a = \frac{R}{L}$$

$$b = \frac{1}{LC}$$

状态变量图

➢ 针对由下列状态方程描述的系统，作出系统的状态变量图（y=x_1）

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u$$



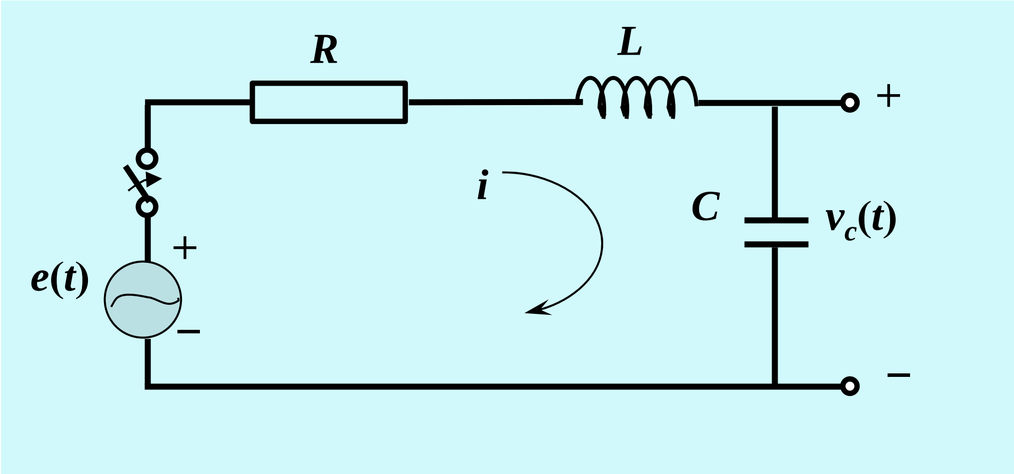
状态空间模型

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L}\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{LC}\end{bmatrix}u$$

$$y=x_1$$

针对如图示同一个 RLC 电路，如果选择系统的状态变量为 $x_1=v_c$ 和 $x_2=i$，即基于系统储能元件的状态变量（物理变量方法），则系统的状态空间模型为：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{C}\\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L}\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ \frac{1}{L}\end{bmatrix}u \qquad y=x_1$$



- 因此，同一个系统可以由不同的状态空间模型表示
- 状态空间模型的不唯一性来源于状态变量的不唯一性
- 到目前为止，状态空间模型两种常用的系统状态变量：物理变量和相变量

相变量

- 当状态变量为输出变量及其各阶导数时，称相应的状态变量为相变量。
- 相变量概念适用于任意阶微分方程，并且可以在不作仿真图的情况下应用相变量。

微分方程（传递函数）⇒状态空间模型
相变量：输入无微分项

➢ 不包含输入微分项的微分方程一般形式为：

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_0y(t)=u$$

系统状态变量选择为相变量，即有 $x_1=y(t)$ $\quad x_2=\dot{x}_1=\dot{y}(t)$

$x_3=\dot{x}_2=\ddot{y}(t)$ …… $\quad x_n=\dot{x}_{n-1}=y^{(n-1)}(t)$ $\quad y^{(n)}(t)=\dot{x}_n$

在微分方程中代入这些状态变量后可得

$$\dot{x}_n+a_{n-1}x_n+a_{n-2}x_{n-1}+\cdots a_1x_2+a_0x_1=u$$

$$(D^n+a_{n-1}D^{n-1}+\cdots+a_1D+a_0)x_1=u$$

微分方程（传递函数）⇒状态空间模型
相变量：输入无微分项

利用相变量后可得，系统状态方程和输出方程为：

$$\dot{x}_n + a_{n-1}x_n + a_{n-2}x_{n-1} + \cdots a_1 x_2 + a_0 x_1 = u$$

$$\dot{x}_w = x_{w+1}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [u]$$

$$y = x_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

标准形式：

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_c x + \mathbf{b}_c u$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{c}\mathbf{x}$$

注意下标

Companion matrix

友矩阵，能控标准型(A_c , b_c)

微分方程（传递函数）⇒状态空间模型
相变量：输入无微分项

不包含输入微分项的微分方程一般形式为：

$$y^{(n)}(t)+a_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_0y(t)=u$$

$$\dot{x}_n+a_{n-1}x_n+a_{n-2}x_{n-1}+\cdots a_1x_2+a_0x_1=u$$

$$\dot{x}_w=x_{w+1}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_{n-1}\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_{n-1}\\ x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}[u]$$

$$y=x_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{bmatrix}x$$

仔细观察上述方程可以发现，在无输入微分项的情况下，可以很容易地将微分方程转换为状态空间模型。

如何根据状态空间模型画出状态变量图？

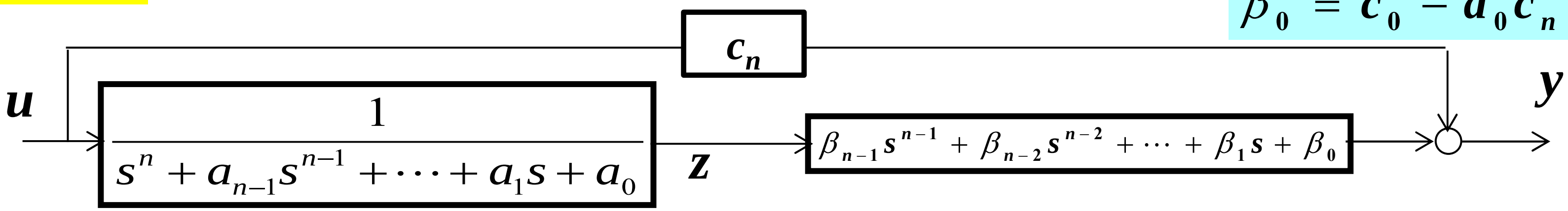
微分方程（传递函数）⇒状态空间模型
相变量：输入有微分项

$$(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0)y = (c_n D^n + c_{n-1}D^{n-1} + \cdots + c_1 D + c_0)u$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = c_n + \frac{\beta_{n-1}s^{n-1} + \beta_{n-2}s^{n-2} + \cdots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{n-1} &= c_{n-1} - a_{n-1}c_n \\
\beta_{n-2} &= c_{n-2} - a_{n-2}c_n \\
&\vdots \\
\beta_1 &= c_1 - a_1 c_n \\
\beta_0 &= c_0 - a_0 c_n
\end{aligned}$$

串联分解



$$y = (\beta_{n-1}D^{n-1} + \beta_{n-2}D^{n-2} + \cdots + \beta_1 D + \beta_0)z + c_n u$$

$$z = \frac{u}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

微分方程（传递函数）⇒状态空间模型
相变量：输入有微分项

微分方程与输入无微分项时具有相同的形式，即

$$(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0)z = u$$

$$\dot{x}_w = x_{w+1}$$

标准形式：

$$\dot{x} = A_c x + b_c u$$

其中，A_c 和 b_c 与输入无微分项时一样

✓ 输出方程 不同

$$y = (\beta_{n-1}D^{n-1} + \beta_{n-2}D^{n-2} + \cdots + \beta_1 D + \beta_0)z + c_n u$$

✓ 由状态变量表示的输出方程变为：

$$y = \beta_0 x_1 + \beta_1 x_2 + \beta_{n-2} x_{n-1} + \cdots + \beta_{n-1} x_n + c_n u$$

微分方程（传递函数）⇒状态空间模型
相变量：小结

微分方程

$$(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0)y = (c_w D^w + c_{w-1}D^{w-1} + \cdots + c_1 D + c_0)u$$

相变量

状态方程

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [u]$$

w=*n*

$$y = \begin{bmatrix} (c_0 - a_0 c_n) & (c_1 - a_1 c_n) & \cdots & (c_{n-1} - a_{n-1} c_n) \end{bmatrix} x + c_n u$$

w<*n*

$$y = \begin{bmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_w & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} x = cx$$

思考：如何用仿真图表示上述系统？

微分方程（传递函数）⇒状态空间模型
对角标准型

- 由下面微分方程描述的 SISO 系统可以由相应的传递函数表示

$$(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0)y = (\beta_w D^w + \beta_{w-1}D^{w-1} + \cdots + \beta_1 D + \beta_0)u$$

$w \le n$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{\beta_w s^w + \beta_{w-1}s^{w-1} + \cdots + \beta_1 s + \beta_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

$w \le n$

- **进一步地，将传递函数的分母进行因式分解，并将 $G(s)$ 表示为部分分式形式。当不存在多重极点且 $w=n$ 时**

$$G(s) = \frac{\beta_n s^n + \beta_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \beta_1 s + \beta_0}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\cdots(s-\lambda_n)} = \beta_n + \sum_{i=1}^{n} G_i(s);$$

$$G_i(s) = \frac{f_i Z_i(s)}{U(s)} = \frac{f_i}{s-\lambda_i}$$

注意：这里的符号标注与教材上的不同

微分方程（传递函数）⇒状态空间模型
对角标准型

$$G(s)=\frac{\beta_n s^n+\beta_{n-1}s^{n-1}+\cdots+\beta_1 s+\beta_0}{(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\cdots(s-\lambda_n)}=\beta_n+\sum_{i=1}^{n}G_i(s);\quad G_i(s)=\frac{f_i Z_i(s)}{U(s)}=\frac{f_i}{s-\lambda_i}$$

- 采用符号 z_i 及其拉普拉斯变换形式 $Z_i(s)$ 来表示状态变量，以突出对角阵形式中的状态变量。

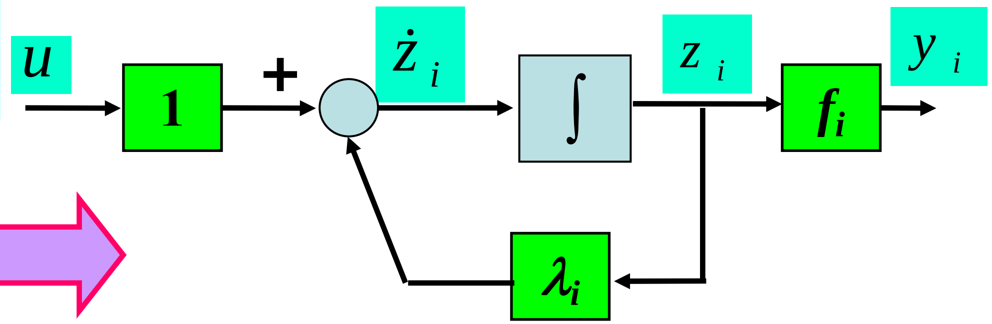
$$\begin{aligned}Y(s)&=\beta_n U(s)+\frac{f_1 U(s)}{s-\lambda_1}+\frac{f_2 U(s)}{s-\lambda_2}+\cdots\\&=\beta_n U(s)+f_1 Z_1(s)+f_2 Z_2(s)+\cdots\end{aligned}$$

- 所选择的状态变量 $Z_i(s)$ 满足如下方程：

$$Z_i(s)=\frac{U(s)}{s-\lambda_i}\;;\quad sZ_i(s)-\lambda_i Z_i(s)=U(s)$$

$$\dot{z}_i-\lambda_i z_i=u$$

$$y_i=f_i z_i$$



微分方程（传递函数）⇒状态空间模型
对角标准型

➢ 系统的状态空间模型为：

所有元素均为 1

$$\dot{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \mathbf{z} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u = \Lambda \mathbf{z} + \mathbf{b}_n u$$

$$y = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \end{bmatrix} \mathbf{z} + \beta_n u = \mathbf{c}_n \mathbf{z} + d_n u$$

$w=n$, $d_n \neq 0$, 否则 $d_n=0$

➢ 系统矩阵 A 是对角阵，此时系统动态方程称为**正则标准型**状态空间模型，相应的状态变量称为正则（规范）变量（*canonical variables*）。

➢ 对于 MIMO 系统，有

b →**B**，**c** →**C** 和 **d** →**D**

微分方程（传递函数）⇒状态空间模型
对角标准型

- 系统矩阵 **A=Λ**（对角阵） 意味着各个状态变量之间相互解耦，即各个状态变量 $\mathbf{z}_i$ 不依赖于其他状态变量，可被独立求解。
- 这个特点可以简化状态转移矩阵 **Φ(t)** 的计算程序。
- 对角型动态方程对系统研究非常有用，如能观性和能控性分析。
- 这里讲的系统特征根为各不相同的单根时的正则标准型状态空间描述，是一种最简单的情况。对于存在复根的情况**(**较少碰到**)**，**A**阵为约当阵。此略。有兴趣的同学可自学。

微分方程（传递函数）⇒状态空间模型
对角标准型

$w<n,\ d_n=0$

【例】设控制系统的传递函数为 $\dfrac{Y(s)}{U(s)}=\dfrac{s^2+3s+2}{s(s^2+7s+12)}$

试求系统的正则标准型状态空间描述。

解：将系统传递函数化为分母为因式相乘的形式

系统的特征根为0，－3，－4；相应的留数可求得为

$$\frac{1}{6},-\frac{2}{3},\frac{3}{2}$$

即：

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{s}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{s+3}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{s+4}$$

✓ 因此可得系统的正则标准型状态空间描述：

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-3&0\\0&0&-4\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}\frac{1}{6}&-\frac{2}{3}&\frac{3}{2}\end{bmatrix}x$$

状态方程的标准型

A 矩阵的对角化

- **在前面的部分分式展开方法中，我们得到了所需的正则规范型状态空间模型，其中 A 矩阵是对角阵。**
- **当系统为 MIMO 系统，或者已经给出状态空间描述的系统方程时，这样的部分分式展开方法并不方便。**
- **一种更为一般的状态方程转换方法是利用*线性相似变换*。**

能控标准型与能观标准型

- 当状态空间模型中的系统矩阵和控制矩阵具有特定形式的情况下，反馈控制系统的综合及其响应特征分析通常会变得非常容易。
- 从传递函数直接得到系统能控标准型和能观标准型的方法。

相变量状态方程——能控标准型

➢ 由下面微分方程表示的 SISO 系统可以由相应的传递函数表示

$$(D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0)y = (c_w D^w + c_{w-1}D^{w-1} + \cdots + c_1 D + c_0)u$$

$w \le n$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{c_w s^w + c_{w-1}s^{w-1} + \cdots + c_1 s + c_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

$w \le n$

相变量

$$\dot{x} = A_c x + B_c u$$
$$y = c_c x + Du$$

$$A_C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \quad B_C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

能控(相伴)标准型(Controllable Standard form) (A_c, b_c)(只与A、B有关)

$w = n$ $\quad y = \left[(c_0 - a_0 c_n) \quad (c_1 - a_1 c_n) \quad \cdots \quad (c_{n-1} - a_{n-1}c_n)\right]\mathbf{x} + [c_n]\mathbf{u}$

$w < n$ $\quad y = \left[c_0 \quad c_1 \quad \cdots \quad c_w \; 0 \quad \cdots \quad 0\right]\mathbf{x} = \mathbf{cx}$

能观标准型

➢ 另一个重要的状态方程形式是能观标准型。

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = \frac{c_w s^w + c_{w-1}s^{w-1} + \cdots + c_1 s + c_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

$w \le n$

$y = x_n + c_n u$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -a_0 y + c_0 u \\ \dot{x}_2 &= x_1 - a_1 y + c_1 u \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= x_{n-1} - a_{n-1} y + c_{n-1} u \end{aligned}$$

$w = n, c_n \ne 0$ $\quad y = x_n + c_n u$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -a_0 y + c_0 u = -a_0 x_n + (c_0 - a_0 c_n)u \\ \dot{x}_2 &= x_1 - a_1 y + c_1 u = x_1 - a_1 x_n + (c_1 - a_1 c_n)u \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= x_{n-1} - a_{n-1} y + c_{n-1} u = x_{n-1} - a_{n-1} x_n + (c_{n-1} - a_{n-1} c_n)u \end{aligned}$$

$$\dot{x} = A_o x + B_o u$$

$$y = c_o x + Du$$

$$A_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$c_o = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$w = n, c_n \ne 0$

$$B_o = \begin{bmatrix} c_0 - a_0 c_n \\ c_1 - a_1 c_n \\ c_2 - a_2 c_n \\ \vdots \\ c_{n-1} - a_{n-1} c_n \end{bmatrix}$$

$D = c_n$

$w < n, c_n = 0$

$$B_o = \begin{bmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_w \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$D = 0$

能观标准型(A_o, C_o)(只与A、C有关)

能控标准型与能观标准型

已知传递函数为：

$$G(s)=\frac{c_n s^n+c_{n-1}s^{n-1}+c_{n-2}s^{n-2}+\cdots+c_1 s+c_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+a_{n-2}s^{n-2}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

能控标准型

$$\dot{x}=A_c x+B_c u$$

$$y=c_c x+Du$$

能观标准型

$$\dot{x}=A_o x+B_o u$$

$$y=c_o x+Du$$

能控标准型与能观标准型之间存在关系：

$$\left.\begin{aligned} A_o&=(A_c)^T\\ C_o&=(B_c)^T\\ B_o&=(C_c)^T \end{aligned}\right\}$$

这是普遍规律？ ⇒ **Yes!**

能控标准型与能观标准型

【例 】设控制系统的传递函数为

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{s^2+3s+2}{s(s^2+7s+12)}$$

试求系统的能控和能观标准型状态空间描述。

解: (1) 将系统传递函数对照能控标准型公式，可得

$$w=2,\quad n=3,\quad c_2=1,\ c_1=3,\ c_0=2$$
$$a_3=1,\ a_2=7,\ a_1=12,\ a_0=0$$

进而可得系统的能控标准型状态空间表达式为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -12 & -7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=[2\quad 3\quad 1]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

能控标准型与能观标准型

【例 】设控制系统的传递函数为

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{s^2+3s+2}{s(s^2+7s+12)}$$

试求系统的能控和能观标准型状态空间描述。

解：(2) 将系统传递函数对照能观标准型公式，因为

$$w=2,\quad n=3,\quad c_2=1,\ c_1=3,\ c_0=2$$
$$a_3=1,\ a_2=7,\ a_1=12,\ a_0=0$$

进而可得系统的能观标准型状态空间表达式为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&-12\\0&1&-7\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix}\boldsymbol{u}$$

$$y=\begin{bmatrix}0&0&1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&-12&-7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}u$$

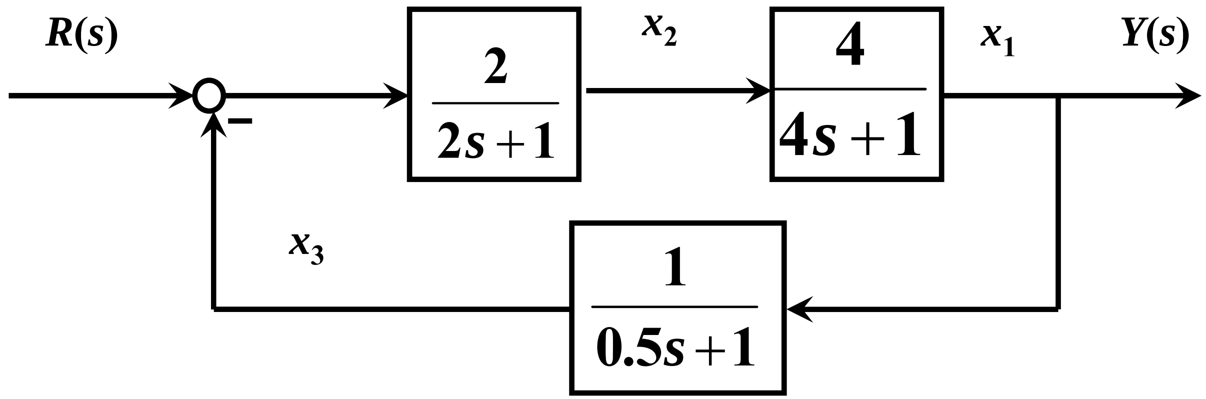
$$y=[2\ \ 3\ \ 1]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$$

能控标准型

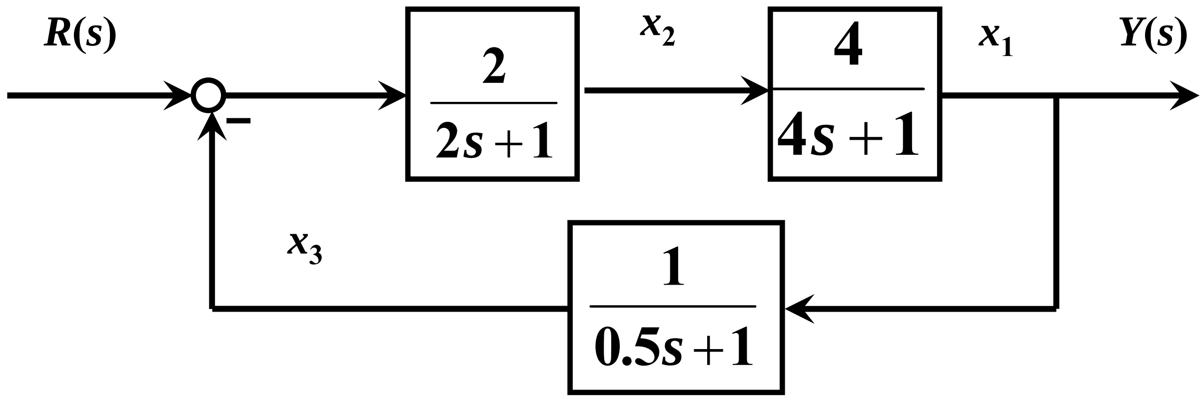
从方块图到状态空间模型

- 从已知的控制系统方块图中，选择一阶环节的输出变量作为状态变量，经直接计算将方块图化为状态变量图，从而可得系统的状态空间表达式。

【例 】已知系统的方块图如下图所示，请写出状态空间表达式并画出状态变量图。



从方块图到状态空间模型



解：由图中的状态变量，可写出：

$$X_2(s)=\frac{2}{2s+1}(R-X_3(s))$$

$$X_1(s)=\frac{4}{4s+1}X_2(s)$$

$$X_3(s)=\frac{1}{0.5s+1}X_1(s)$$

$$Y(s)=X_1(s)$$

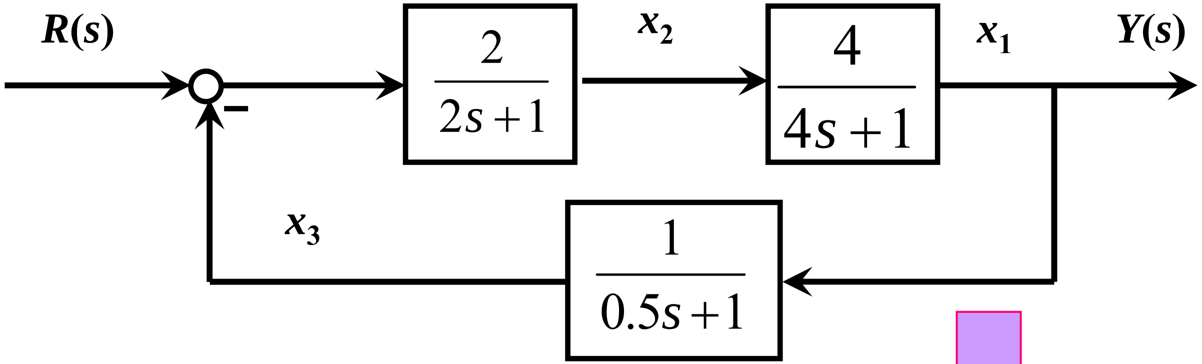
$$\dot{x}_1=-\frac{1}{4}x_1+x_2$$

$$\dot{x}_2=-\frac{1}{2}x_2-x_3+r$$

$$\dot{x}_3=2x_1-2x_3$$

$$y=x_1$$

从方块图到状态空间模型



$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{4} & 1 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & -1\\ 2 & 0 & -2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}r$$

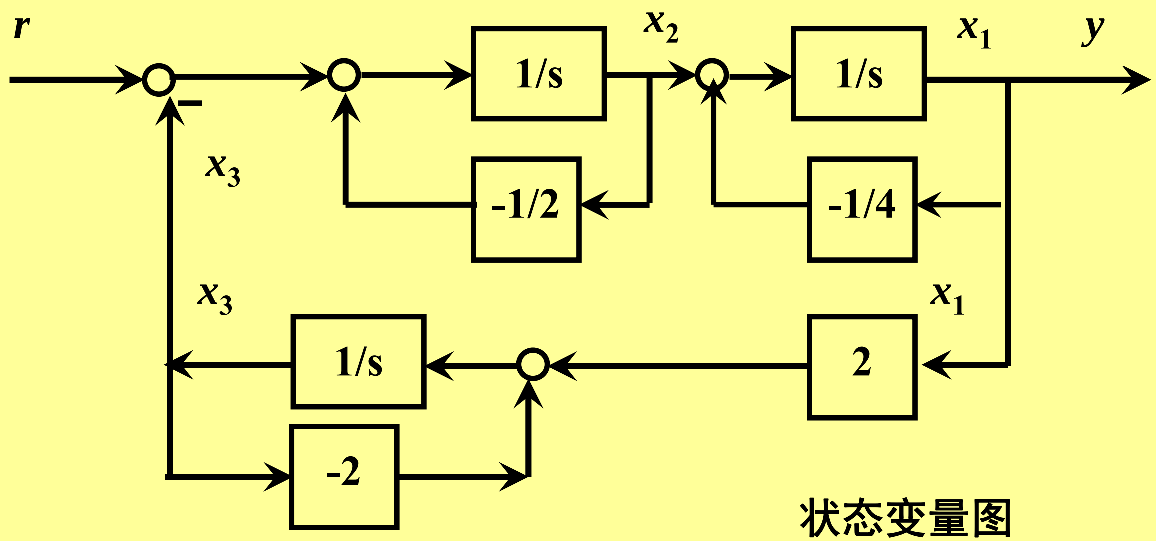
$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}x=x_1$$

$$\dot{x}_1=-\frac{1}{4}x_1+x_2$$

$$\dot{x}_2=-\frac{1}{2}x_2-x_3+r$$

$$\dot{x}_3=2x_1-2x_3$$

$$y=x_1$$



状态变量图

思考：针对状态变量图能否画出状态变量信号流图？

从状态空间模型到传递函数

状态空间模型标准形式：

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

LT

拉普拉斯变换形式：

$$sX(s) = AX(s) + BU(s) \Rightarrow X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s) \Rightarrow Y(s) = C(sI - A)^{-1}BU(s) + DU(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s)$$

由传递函数概念可以得到

$$\boxed{G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = [C(sI - A)^{-1}B + D]}$$

从状态空间模型到传递函数

状态空间模型标准形式：

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

传递函数模型：

$$\boxed{G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = [C(sI - A)^{-1}B + D]}$$

➢ 当系统输入变量u和输出变量y均为标量时，系统称为单输入单输出系统（SISO系统），G(s) 称为传递函数，其中，B 和 C 是向量。

➢ 当系统有多个输入变量u和输出变量y时，系统称为多输入多输出系统（ MIMO 系统），此时，B和C是矩阵，因此G(s)也是矩阵，称为传递函数矩阵。

从状态空间模型到传递函数

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=[\mathbf{C}(sI-A)^{-1}B+D]$$
$$=\frac{C\left[adj(sI-A)\right]B}{\det(sI-A)}+D$$

- 式中，adj(sI－A)为(sI－A)矩阵的伴随矩阵(adjoint)；det(sI－A)为矩阵(sI－A)的行列式(determinant)。

- 关于矩阵运算及符号表达请复习“线性代数”的相关知识。

◆ 问题：已知同一系统的状态变量选择是非唯一的，也即状态方程非唯一，由这些不同的状态方程转化为传递函数时，所得到的该系统的传递函数是同一个吗？为什么？

从状态空间模型到传递函数

【例 A】 设系统的状态空间描述为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u \qquad y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

求系统的传递函数。

解：由题目可得，这是一个SISO系统，状态空间描述的[A ,B ,C]分别为

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -3\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}$$

（1）先求 $\Phi(s)=(sI-A)^{-1}$

$$sI-A=\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}s & -1\\ 1 & s+3\end{bmatrix}$$

$$\Phi(S)=(sI-A)^{-1}=\frac{1}{s(s+3)+1}\begin{bmatrix}s+3 & 1\\ -1 & s\end{bmatrix}$$

从状态空间模型到传递函数

【例 A】 设系统的状态空间描述为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u \qquad y=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

求系统的传递函数。

（2）所以系统的传递函数为

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=C(sI-A)^{-1}B$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{s+3}{s(s+3)+1} & \dfrac{1}{s(s+3)+1}\\ \dfrac{-1}{s(s+3)+1} & \dfrac{s}{s(s+3)+1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{s(s+3)+1}=\frac{1}{s^2+3s+1}$$

由已经得到的系统传递函数，很容易地就可以得到代表原动态系统的微分方程模型。

（3）所以原系统的微分方程为

$$\ddot{y}+3\dot{y}+y=u$$

从状态空间模型到传递函数

【例 B】设一控制系统的动态过程表示为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -8 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [u]$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$ 这里 $D = 0$

式中，u，y分别为系统的输入和输出信号，试求系统的传递函数描述。

解：　矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -8 & -9 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

$$G(s) = \frac{C\left[adj(sI - A)\right]B}{\det(sI - A)} + D$$

从状态空间模型到传递函数

$$\because\ adj(sI-A)=\begin{bmatrix} s(s+9)+8 & s+9 & 1 \\ 0 & s(s+9) & s \\ 0 & -8s & s^2 \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta=\det(sI-A)=\begin{vmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 0 & 8 & s+9 \end{vmatrix}=s(s+1)(s+8)$$

$$C=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

传递函数

$$\therefore\ G(s)=\frac{C\left[adj(sI-A)\right]B}{\det(sI-A)}=\frac{\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ s \\ s^2 \end{bmatrix}}{\Delta}=\frac{s^2+4s+1}{s^3+9s^2+8s}$$

系统的微分方程表示为

$$\dddot{y}+9\ddot{y}+8\dot{y}=\ddot{u}+4\dot{u}+u$$

从状态空间模型到传递函数

【例 B'】设一控制系统的动态过程用微分方程表示为

$$\dddot{y}+9\ddot{y}+8\dot{y}=\ddot{u}+4\dot{u}+u$$

式中，u，y分别为系统的输入和输出信号，已知系统的状态空间一种描述为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & -8 & -9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ -5\\ 38\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

试由状态空间模型求系统的传递函数描述。

从状态空间模型到传递函数

将矩阵

$$A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&-8&-9\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}1\\-5\\38\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}\quad D=0$$

代入

$$G(s)=\frac{C\left[adj(sI-A)\right]B}{\det(sI-A)}+D$$

$$\because\ adj(sI-A)=\begin{bmatrix}s(s+9)+8 & s+9 & 1\\0 & s(s+9) & s\\0 & -8s & s^2\end{bmatrix}$$

$$\Delta=\det(sI-A)=\begin{bmatrix}s&-1&0\\0&s&-1\\0&8&s+9\end{bmatrix}=s(s+1)(s+8)$$

传递函数

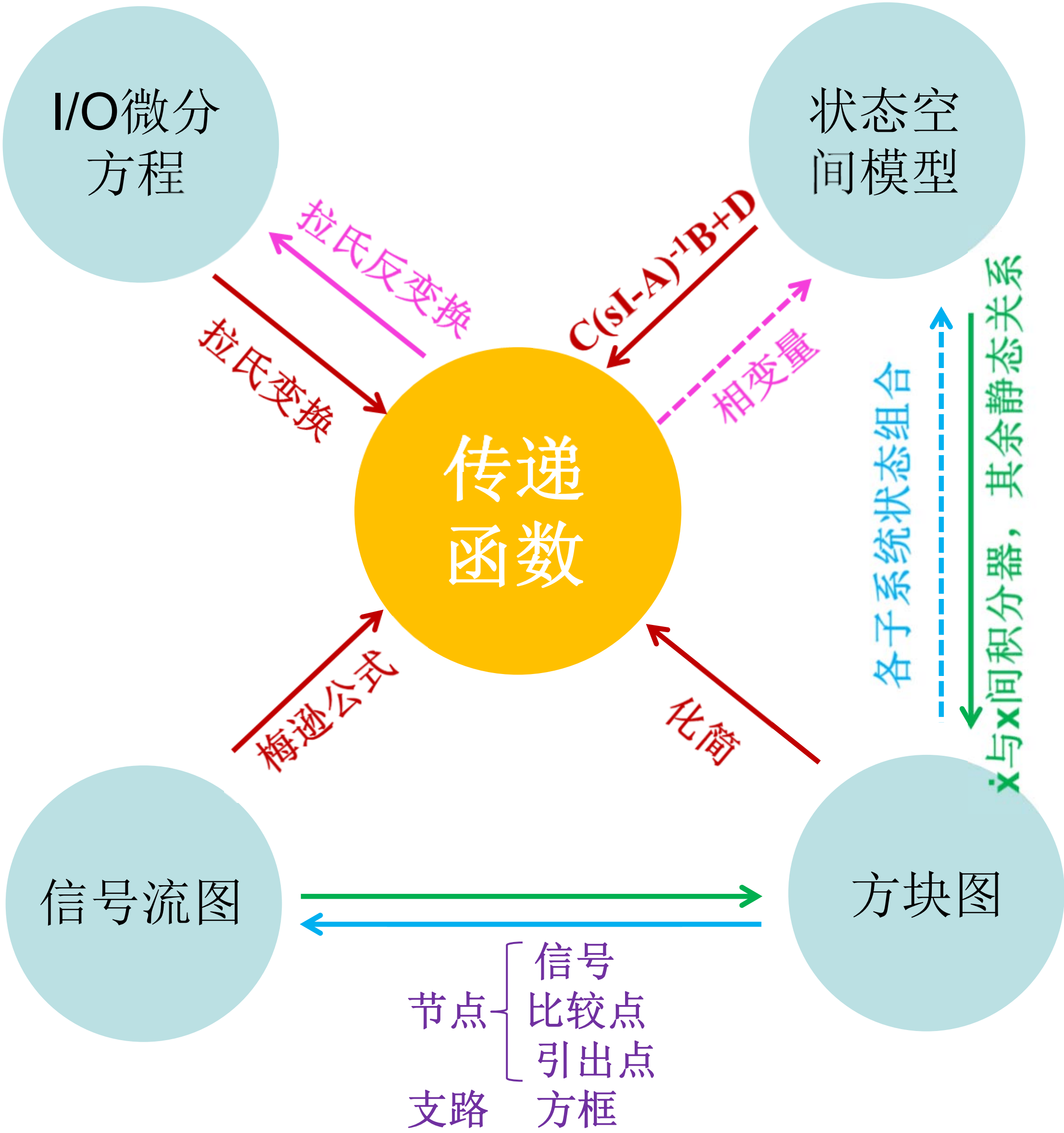
$$\therefore G(s)=\frac{C\left[adj(sI-A)\right]B}{\det(sI-A)}=\frac{\begin{bmatrix}s^2+9s+8 & s+9 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-5\\38\end{bmatrix}}{\Delta}=\frac{s^2+4s+1}{s^3+9s^2+8s}$$

系统的微分方程表示为

$$\dddot{y}+9\ddot{y}+8\dot{y}=\ddot{u}+4\dot{u}+u$$

结论：？？代表同一系统的不同的状态方程。。。。。

电路系统的机理建模（状态空间模型）



Thanks!