

## (\*\*) 自动控制理论

## 第六章 CHAPTER 6

## 频率特性分析法 Frequency Response





## 第六章 主要内容

- ✓ 概述
- ✓ Bode 图 (对数坐标图)
- ✓ 极坐标图
- ✓ Nyquist稳定性判据
  - 稳定裕度
- ✓ 基于频率响应的补偿器设计
- ✓ 系统的闭环频率特性

稳定性和相对稳定性可以通过对数幅频曲线和相频曲线来确定。

相对稳定性可以用稳定裕度进行度量,包括相位裕度和幅值裕 度。

Gain crossover(截止频率——增益临界点)

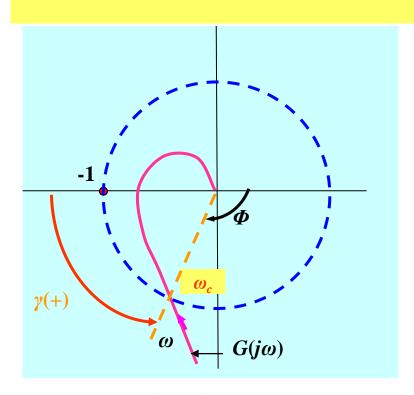
 $G(j\omega)$ 幅相曲线在幅值为1 [Lm $G(j\omega)$ =0dB] 的点处的频率称为 截止频率 $\omega_c$ 。

Phase margin angle (相位裕度)

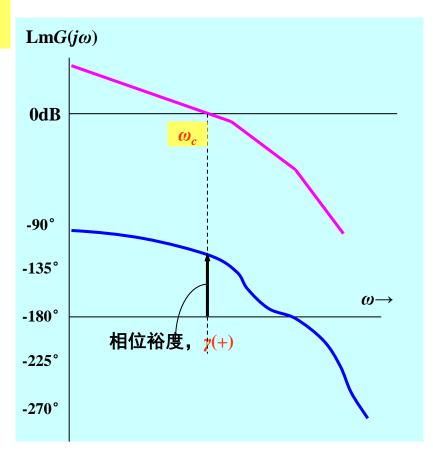
相位裕度等于180°加上截止频率处的负相位,用 $\gamma$ 来表示, $\gamma=180°+\Phi$ ,其中 $\angle G(j\omega_c)=\Phi$ 是负值。



### 对于稳定系统 $\gamma=180^{\circ}+\Phi>0$



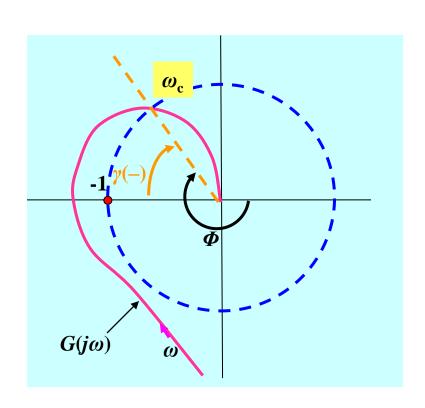
 $G(j\omega)$ 的极坐标图



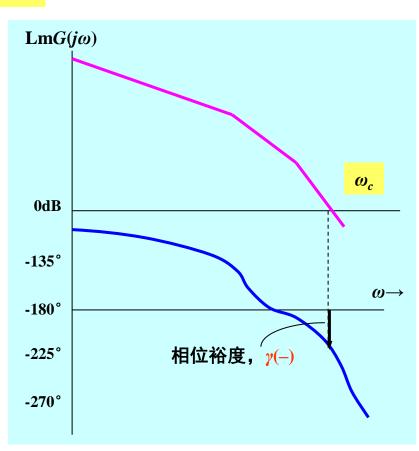
 $G(j\omega)$ 的对数幅频曲线和相频曲线



### 对不稳定系统γ=180°+Φ<**(**)



 $G(j\omega)$ 的极坐标图



 $G(j\omega)$ 的对数幅频曲线和相频曲线



对于闭环稳定系统,如果系统的开环相频特性再滞后相位裕度)度,则系统将处于临界稳定状态。

滞后该角度将使得极坐标图穿越-1点。

对于最小相位系统来说,相位裕度为正,系统稳定, 负的相位裕度表示系统是不稳定的。

相位裕度与系统阻尼比  $\zeta$  有关,一般地,相位裕度在  $45^{\circ}$  到  $60^{\circ}$  之间的系统响应能令人满意。



#### Phase crossover (穿越频率——相位临界点)

幅相曲线在该点处的相角是- $180^{\circ}$ 。该点处的频率被称为<mark>穿越频率 $\omega_{r}$ ,也被称为幅值裕度频率</mark>。

### Gain margin (幅值裕度)

对于闭环稳定系统,如果系统的开环幅频特性再增大幅值裕度h倍,则系统将处于临界稳定状态。可以用频率点 $\omega_x$ 处的传递函数来表示,即  $|G(j\omega_x)|\cdot h=1$ 

在 $G(j\omega)$ 极坐标图上,频率点 $\omega_x$ 对应的幅值

$$\left|G(j\omega_x)\right| = \frac{1}{h}$$

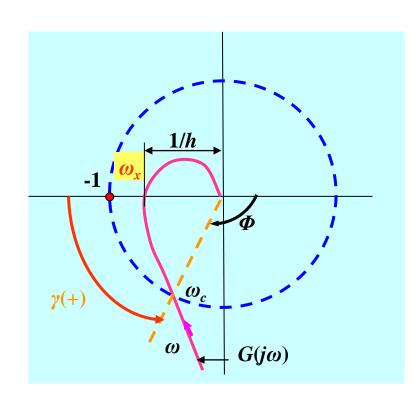
在对数幅频曲线上,  $Lmh = -Lm |G(j\omega_x)|$ 



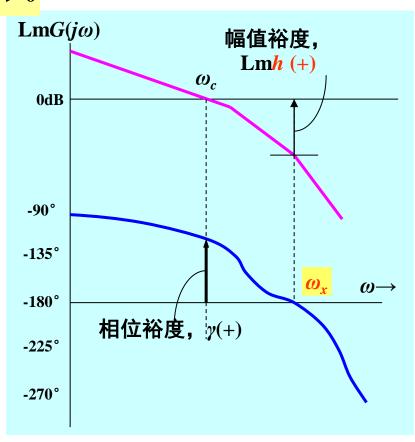
#### 对于稳定系统

1/h < 1, h > 1

 $Lmh = -Lm |G(j\omega_x)| > 0$ 



 $G(j\omega)$ 的极坐标图

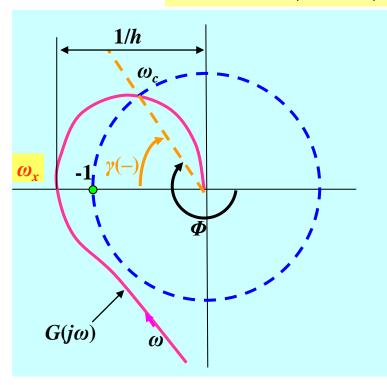


 $G(j\omega)$ 的对数幅频曲线和相频曲线

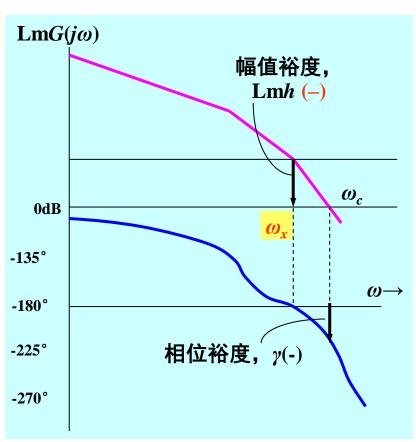


### 对于不稳定系统 1/h >1,h<1

$$Lmh = -Lm |G(j\omega_c)| < 0 \quad LmG(j\omega)$$



 $G(j\omega)$ 的极坐标图



 $G(j\omega)$ 的对数幅频曲线和相频曲线

## 》相位裕度和幅值裕度的求解——解析法

求解系统相位裕度和幅值裕度的方法——解析法、极坐标图法和Bode图法。

#### (一) 解析法

根据系统的开环频率特性,由

$$|G(j\omega_c)H(j\omega_c)| = 1$$
  $(0 \le \omega_c \le +\infty)$ 

和 
$$\gamma = \Phi(\omega_c) - (-180^\circ) = \Phi(\omega_c) + 180^\circ$$
 求出相位裕度。

$$h = \frac{1}{\left| G(j\omega_x)H(j\omega_x) \right|}$$

或  $20\log h = -20\log |G(j\omega_x)H(j\omega_x)|$  求出幅值裕度。

## 》相位裕度和幅值裕度的求解——解析法

## 例6-21 已知最小相位系统的开环传递函数为 试求出该系统的幅值裕度和相位裕度。

$$G(s)H(s) = \frac{40}{s(s^2 + 2s + 25)}$$

解: 系统的开环频率特性为

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{40}{j\omega(25-\omega^2+j2\omega)}$$

其幅频特性和相频特性分别是

$$|G(j\omega)H(j\omega)| = \frac{1}{\omega} \frac{40}{\sqrt{(25-\omega^2)^2 + 4\omega^2}}$$

$$\angle G(j\omega)H(j\omega) = -90^{\circ} - arctg \frac{2\omega}{25 - \omega^2}$$



## 》相位裕度和幅值裕度的求解——解析法

令 
$$|G(j\omega)H(j\omega)| = 1$$
 ,得  $\omega_c = 1.82$ 



$$\gamma = 180^{\circ} + \angle G(j\omega_c)H(j\omega_c) = 90^{\circ} - \arctan \frac{2 \times 1.82}{25 - 1.82^2} = 80.5^{\circ}$$

令 
$$\angle G(j\omega)H(j\omega) = -180^{\circ}$$
 , 得  $\omega_x = 5$ 

$$h = \frac{1}{|G(j\omega_x)H(j\omega_x)|} = 1.25$$

或 
$$h(dB) = 20 \log 1.25 = 1.94(dB)$$

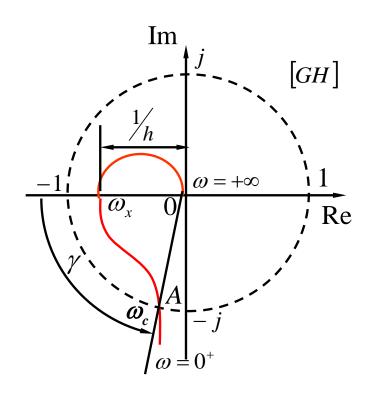
即:该系统具有1.94dB的幅值裕度,80.5°的相位裕度。



## 相位裕度和幅值裕度的求解——极坐标图法

#### (二)极坐标图法

在GH平面上作出系统的开环频率特性的极坐标图,并作一单位圆,由单位圆与开环频率特性的交点 $^{A}$ 与坐标原点的连线与负实轴的夹角求出相位裕度 $^{\gamma}$ ;由开环频率特性与负实轴交点处的幅值 $^{G}(j\omega_{x})H(j\omega_{x})$ 的倒数得到幅值裕度 $^{h}$ 。



例6-21 的极坐标图



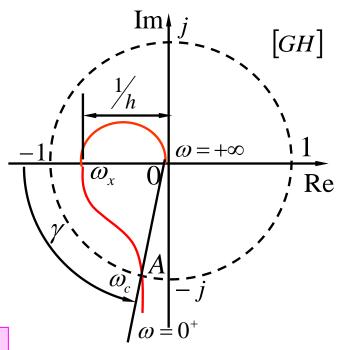
## 相位裕度和幅值裕度的求解——极坐标图法

在例6-21中,先作出系统的开环频率特性曲线如图所示,作单位圆交开环频率特性曲线于A点,连接 OA,射线OA与负实轴的夹角即为系统的相位裕度  $\gamma \approx 80^{\circ}$  。 开环频率特性曲线与负实轴的交点坐标为 (0.8, j0)

由此得到系统的幅值裕度:

$$h = \frac{1}{0.8} = 1.25$$

注意:作图法,首先画出系统的极坐标图, 然后画单位圆,再由定义读图。



例6-21 的极坐标图



## 》相位裕度和幅值裕度的求解——Bode图法

#### (三) Bode图法

- 1) 画出系统的Bode图,由开环对数幅频特性与零分贝线(即  $\omega$  轴)的交点频率  $\omega_c$  ,求出对应的相频特性与 $-180^\circ$  线的相移量,即为相位裕度 $\gamma$ 。
- 2) 当  $\omega_c$  对应的相频特性位于  $-180^\circ$ 线上方时,  $\gamma > 0^\circ$  ; 反之,当  $\omega_c$  对应的相频特性位于  $-180^\circ$  线下方时,  $\gamma < 0^\circ$  。
- 3) 然后,由相频特性与 $-180^{\circ}$ 线的交点频率  $\omega_x$  求出对应幅频特性与零分贝线的差值,即为幅值裕度 h 的分贝数。当  $\omega_x$  对应的幅频特性位于零分贝线下方时, h>0dB,反之,当  $\omega_x$  对应的幅频特性位于零分贝线上方, h<0dB



## 相位裕度和幅值裕度的求解——Bode图法

#### 例6-21的Bode图如右图所示。

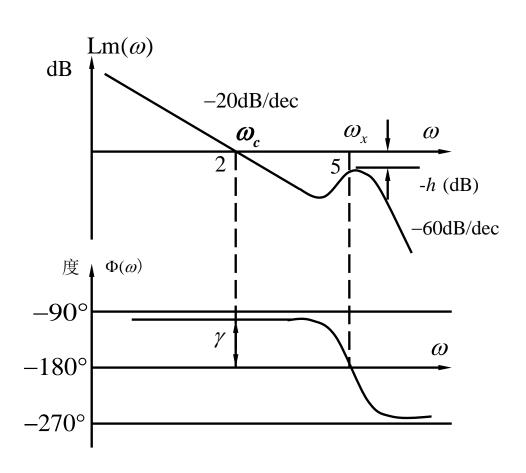
从图中,可直接得到

截止频率  $\omega_c \approx 2$ 

穿越频率  $\omega_x = 5$ 

相位裕度:  $\gamma \approx 80^{\circ}$ 

幅值裕度: h=2dB



例6-21 Bode图



## 相位裕度和幅值裕度的求解

解析法 比较精确,但计算步骤复杂,而且对于三阶以上的高阶系统, 用解析法相当困难。

图解法 以极坐标图和Bode图为基础的图解法,避免了繁锁的计算, 具有简便、直观的优点,对于高阶系统尤为方便。不过图解法是一 种近似方法,所得结果有一定误差,误差的大小视作图的准确性而 定。

Bode图法和极坐标法 虽然都是图解法,但前者不仅可直接从Bode图上获得相位裕度  $\gamma$  和幅值裕度 h,而且还可直接得到相应的截止频率  $\omega_c$  和穿越频率  $\omega_x$  。同时Bode图较极坐标图方便,因此在工程实践中得到更为广泛的应用。可以采用计算机辅助绘制。



#### 注意:

• 对于非最小相位系统,不能简单地用系统的相位裕度和幅值裕度的大小来判断系统的稳定性。

• 对于最小相位系统以相位裕度  $\gamma > 0$  和幅值裕度 h > 1 (或 h (dB)>0)作为系统稳定的充要条件是可靠的。



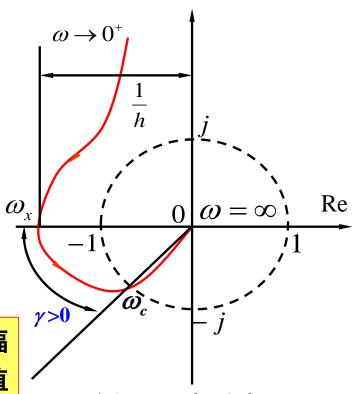
# 例6-22 已知非最小相位系统的开环传递函数为 $G(s)H(s) = \frac{K(\tau s + 1)}{\sigma(s)}$

试分析该系统的稳定性及其与系统稳定 裕度之间的关系。

 $\mathbf{M}$  在一定的K值条件下,系统的开环频 率特性如右图所示。由于该系统有一个 位于S右半部平面的开环极点  $P_{R}=1$ , Nyquist曲线逆时针包围 (-1, j0) 点一周 (N=1),根据Nyquist判据,该系统为 稳定系统。

但由图解法求出该系统的相位裕度 $\gamma > 0$ ,幅 值裕度 h<1, 这说明以相位裕度 $\gamma>0$  和幅值 裕度 h>1 作为判别非最小相位系统稳定性的 依据是不可靠的。

$$G(s)H(s) = \frac{K(\tau s + 1)}{s (Ts - 1)}$$



例6-22 极坐标图



当幅值裕度用分贝(decibels)来表示时,大于零 (为正)表示系统稳定(即幅值裕度数字上大于1),一 个负的幅值裕度表示系统不稳定。

系统阻尼比 (5) 同样与幅值裕度有关,但是相位裕度 比幅值裕度能更好地估计阻尼比、超调。



- · 对数幅频渐近特性曲线与传递函数的每一典型环节有关。 例如, $(1+j\omega)^{-1}$ 环节在高频段的斜率为-20dB/decade。
- 在任意频率点处传递函数的相角与对数幅频渐近特性曲线的斜率有关。例如、斜率-20dB/decade 的相角为 -90°。
- 通过观察对数幅频渐近特性曲线。有可能估计出相位的 近似值。斜率变化频率点距离所求解的频率点越远,对 该频率点处的相位影响越小。



- 最小相位系统稳定,则相角裕度为正,即截止频率处的相角 [Lm*G*(*jω*)=0] 必须大于-180°。这就要求对对数幅频曲线上截止频率点处的斜率做一个限制。若相邻的转折频率相距较远,该点处的斜率必须大于—40dB/decade。一般斜率为—20dB/decade是比较合适。
- 与根轨迹法类似,对数幅频曲线和相频曲线可以用于系统设计。



#### 例如:

- · 可以通过调整Lm曲线在截止频率处的斜率使系统具有 45° 到 60°的相位裕度。
- 曲线的低频部分的形状决定了系统的型别和增益。
- 系统的型别和增益决定了误差系数,进而决定了稳态 误差。
- **截止频率\omega\_c** 给出了系统响应速度的定性指标。



## 第六章 主要内容

- ✓ 概述
- ✓ Bode 图 (对数坐标图)
- ✓ 极坐标图
- ✓ Nyquist稳定性判据
- ✓ 基于频率响应的补偿器设计
  - 频域指标与时域指标的关系
  - 系统校正
- ✓ 系统的闭环频率特性



#### 不同的性能指标

稳定性——是系统工作的前提

稳态特性——反映了系统稳定后的精度

动态特性——反映了系统响应的快速性

人们追求的是稳定性强,稳态精度高,动态响应快。

不同域中的性能指标的形式又各不相同:

- 1. 时域指标: 超调量 $\sigma$ 、过渡过程时间 $T_{s_n}$ 以及峰值时间 $T_p$ 、上升时间 $T_p$ 等。
- 2. 频域指标:
- ① 开环:截止频率 $\omega_c$ 、穿越频率 $\omega_x$ 、相位裕度 $\gamma$ 及幅值裕度 h等。
- ② 闭环:谐振峰值 $M_r$ 、谐振频率 $\omega_r$ 及带宽 $\omega_b$ 等。

截止频率 $\omega_{\alpha}$ 与阻尼比 $\zeta_{\alpha}$ ,自然频率 $\omega_{\alpha}$ 的关系

典型单位负反馈二阶系统的开环传递函数如下:

$$G(s) = \frac{K}{s(Ts+1)};$$
  $G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{j\omega(j\omega+2\zeta\omega_n)}$ 

其中: 
$$\omega_n = \sqrt{K/T}$$
,  $2\zeta\omega_n = \frac{1}{T}$ 

$$|G(j\omega_c)| = \frac{\omega_n^2}{\omega_c \sqrt{\omega_c^2 + 4\zeta^2 \omega_n^2}} = 1 \qquad \qquad \left(\frac{\omega_c^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\zeta^2 \left(\frac{\omega_c^2}{\omega_n^2}\right) - 1 = 0$$

$$\left(\frac{\omega_c}{\omega_n}\right) = \left(\sqrt{4\zeta^4 + 1} - 2\zeta^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

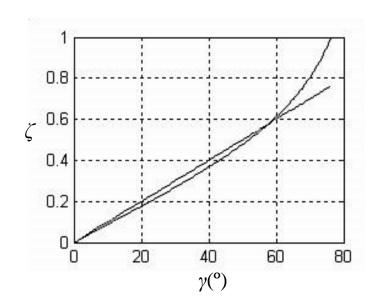
当阻尼比 $\zeta$ 一定的情况下,截止频率 $\omega_c$ 越大,  $\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right) = \left(\sqrt{4\zeta^4 + 1} - 2\zeta^2\right)^{\frac{1}{2}}$  自然频率 $\omega_n$ 也越大,闭环系统的上升时间、峰值时间和调节时间越小,系统的响应速 度越快。



$$\left(\frac{\omega_c}{\omega_n}\right) = \left(\sqrt{4\zeta^4 + 1} - 2\zeta^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

### ightharpoonup 相位裕度 $\gamma$ 与阻尼比 $\zeta$ 的关系

$$\gamma = 180^{\circ} - 90^{\circ} - \arctan \frac{\omega_c}{2\zeta\omega_n} \qquad \gamma = \arctan \frac{2\zeta\omega_n}{\omega_c} = \arctan \left(\frac{2\zeta}{\sqrt{4\zeta^4 + 1} - 2\zeta^2}\right)$$



典型二阶系统的 y- ζ图

 $\gamma$  仅与  $\zeta$  有关,  $\zeta$  为  $\gamma$  的增函数,且在  $\zeta \leq 0.7$  的范围内,可以近似地用一条直线表示它们之间的关系

$$\zeta \approx 0.01\gamma$$

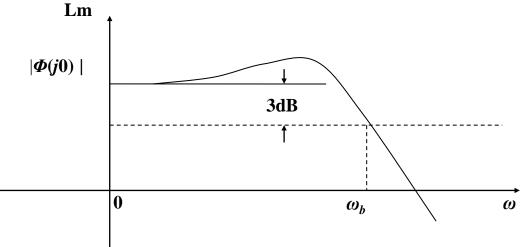
二阶系统的相位裕度  $\gamma$  可以决定系统的 $\zeta$ , 但不能决定系统的自然频率  $\omega_n$ 。 具有相同阻尼比  $\zeta$  的系统,当  $\omega_n$ 不同时,过渡过程的调节时间相差很大。



#### ▶带宽频率

当闭环幅频特性下降到频率为零时的分贝值以下3分贝时,对应的频率称为带宽频率。若出现多个交点,则指其中最低的频率。

对高于带宽频率的正弦 输入信号,系统输出将 呈现较大的衰减。



合理选择控制系统的带宽:

带宽频率示意图

既能以所需精度跟踪输入信号,又能抵制噪声扰动信号。



#### > 二阶系统频域指标与时域指标的关系

谐振峰值 
$$M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}, \quad \zeta \le 0.707$$
  $\sigma = e^{-\pi\sqrt{\frac{M_r - \sqrt{M_r^2 - 1}}{M_r + \sqrt{M_r^2 - 1}}}} \times 100\%$ 



$$\sigma = e^{-\pi \sqrt{\frac{M_r - \sqrt{M_r^2 - 1}}{M_r + \sqrt{M_r^2 - 1}}}} \times 100\%$$

谐振频率 
$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}$$
,  $\zeta \le 0.707$ 

**带宽频率** 
$$\omega_b = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2 + \sqrt{2 - 4\zeta^2 + 4\zeta^4}}$$

截止频率 
$$\omega_c = \omega_n \sqrt{1+4\zeta^4} - 2\zeta^2$$

相位裕度 
$$\gamma = \arctan\left(\frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{1+4\zeta^4}-2\zeta^2}}\right)$$

$$T_s = \frac{3.5}{\zeta \omega_n}$$

调节时间 
$$T_s = \frac{3.5}{\zeta \omega_n}$$
 或  $\omega_n T_s = \frac{7}{tg\gamma}$ 

二阶系统的谐振峰值 $M_r$ =1.2~1.5时,对应的系统超 调量 $\sigma=20~30\%$ ,这时系 统可以获得较为满意的过 渡过程。如果 $M_r > 2$ ,则系 统的超调量 $\sigma$ 将超过40%。

高阶系统:如存在主导极点,可采用二阶系统的公式;如不存在主导极点,有相应的频域与时域指标的近似公式:

谐振峰值 
$$M_r = \frac{1}{|\sin \gamma|}$$

超调量 
$$\sigma = 0.16 + 0.4(M_r - 1), 1 \le M_r \le 1.8$$

调节时间 
$$T_s = \frac{K_0 \pi}{\omega_c}$$

$$K_0 = 2 + 1.5(M_r - 1) + 2.5(M_r - 1)^2, \quad 1 \le M_r \le 1.8$$



## 第六章 主要内容

- ✓ 概述
- ✓ Bode 图 (对数坐标图)
- ✓ 极坐标图
- ✓ Nyquist稳定性判据
- ✓ 基于频率响应的补偿器设计
  - 频域指标与时域指标的关系
  - 系统校正
- ✓ 系统的闭环频率特性



- > 系统校正的基本概念
- > 常用校正装置的连接方式
- > 串联校正
- ➤ 比例、积分、微分(PID)调节器

# 分析4

## 分析与校正的区别

- 系统分析 根据已知的系统(即结构、参数已知),计算出系统性能,分析这些性能与系统参数之间的关系,结果具有唯一性。
- ◆ 系统的综合与校正 根据系统应具备的性能指标以及原系 统在性能指标上的缺陷,引入校正装置(元件),以改善 其性能指标。
- 1)逻辑上讲,系统的综合与校正是系统分析的逆问题。
- 2) 满足系统性能指标的校正装置的结构、参数和连接方式不是唯一的,需对系统各方面性能、成本、体积、重量以及可行性综合考虑,选出最佳方案。

能使系统的控制性能满足控制要求而有目的地增添的元件称 为控制系统的校正元件或称校正装置。



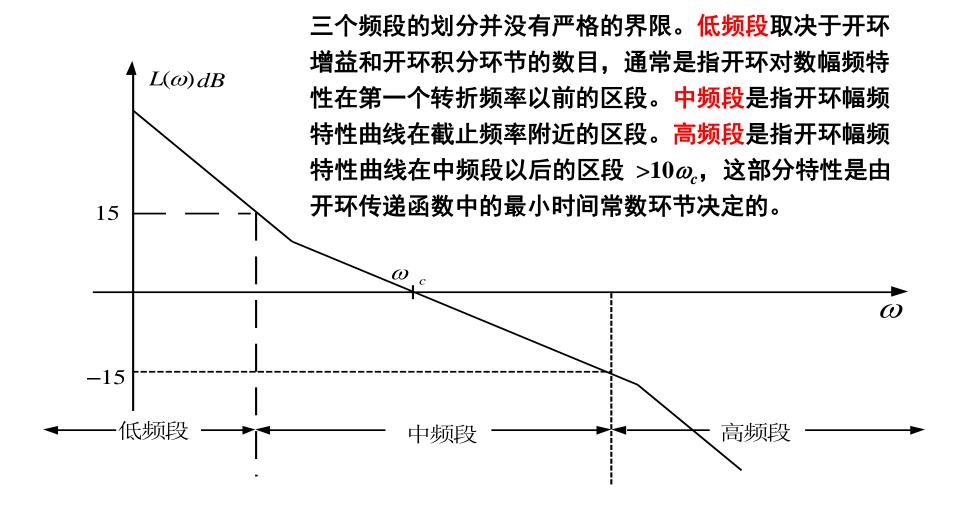
## 综合与校正的基本概念

- ◆ 在控制工程实践中,综合与校正的方法应根据特定的性能指标来确定。
- ◆ 一般情况下,若性能指标以稳态误差 $e_{ss}$ 、峰值时间 $T_p$ 、最大超调量  $\sigma$  和过渡过程时间  $T_s$  等时域性能指标给出时,应用根轨迹法进行综合与校正比较方便;
- ◆ 如果性能指标是以相位裕度 $_{f}$ 、幅值裕度 h 、谐振峰值  $M_{r}$ 、谐振频率  $\omega_{r}$  和系统带宽  $\omega_{b}$  等频域性能指标给出时,应用频率特性法进行综合与校正更合适。



## 综合与校正的基本概念

特性	时域 微分方程 ——分析法	复域 传递函数 ——根轨迹法	频域 频率特性 ——频率法 (开环Bode图为例) 开环因果且最小相位 主要用于0型、1型和2型
稳 定 性	运动方程的特征根 具有负实部,则系 统稳定。	闭环传递函数的极点分布在S平面的左半平面,则系统稳定。	频率特性的相位裕度大于0°、幅值裕度大于0dB,则系统稳定。
稳 态	由运动方程的系数决定。	系统工作点处对应的开环根轨迹增益 $K_1$ 越大, $e_{ss}$ 越小。	取决于系统低频段特性,型别相同,低频段幅值越大, $e_{ss}$ 越小。
动态	过渡过程时间 $T_s$ 越短,最大超调量 $\sigma$ 越小,动态特性越好。	11	主要取决于系统中频段特性。参数:相位裕度 $\gamma$ 和截止频率 $\omega_c$ , $\gamma$ 越小,振荡越厉害, $\omega_c$ 越大,响应速度越快。





## 用开环频率特性进行系统设计

#### (1) 稳

相位裕度 $\gamma$ 不低于45度 幅值裕度不低于6dB

#### (2) 快

相位裕度 $\gamma$ 在45度到60度之间 尽可能大的开环截止频率 $\omega_c$ 

#### (3) 准

开环幅频起始斜率为-20dB/dec或-40dB/dec 低频段应有较高幅值

#### (4) 抗干扰

开环高频段应有尽可能大的斜率。高频段特性是由小时间常数的环节决定的,由于其转折频率远离截止频率 $\omega_c$ ,所以对系统动态响应影响不大。但从系统的抗高频干扰能力来看,则需引起重视。



## 综合与校正的基本概念

### 无源或有源校正

无源校正装置: 自身无放大能力,通常由RC网络组成,在信号传递中,会产生幅值衰减,且输入阻抗低,输出阻抗高,常需要引入附加的放大器,补偿幅值衰减和进行阻抗匹配。

无源串联校正装置通常被安置在前向通道中能量较低的部位上。

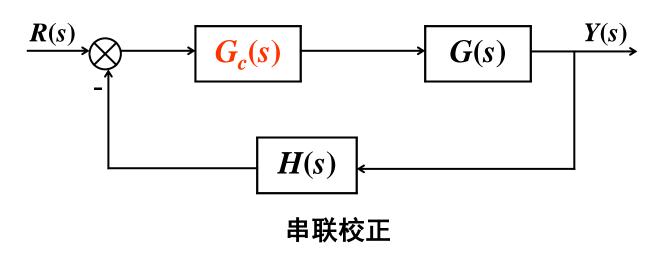
有源校正装置:常由运算放大器和RC网络共同组成,该装置自身具有能量放大与补偿能力,且易于进行阻抗匹配,所以使用范围与无源校正装置相比要广泛得多。

# 系统校正

- >系统校正的基本概念
- ▶常用校正装置的连接方式
  - 一串联校正
  - 一并联校正
  - 一反馈校正
- ▶串联校正
- ▶比例、积分、微分(PID)调节器



串联校正的接入位置应视校正装置本身的物理特性和原系统的结构而定。



 $G_c(s)$ : 校正装置传递函数

G(s): 原系统前向通道的传递函数

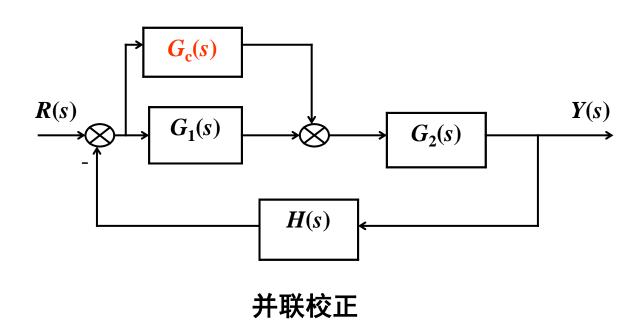
H(s): 原系统反馈通道的传递函数

分析简单,应用范围 广,易于理解、接受。

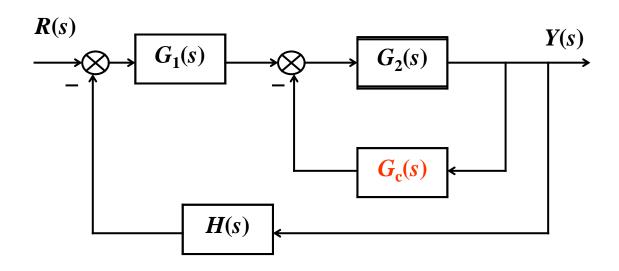


## 并联校正(前馈校正:输入控制方式)

并联校正是将校正装置 $G_{c}(s)$ 前向并接在原系统前向通道的一个或几个环节上。它比串联校正多一个连接点,即需要一个信号取出点和一个信号加入点。

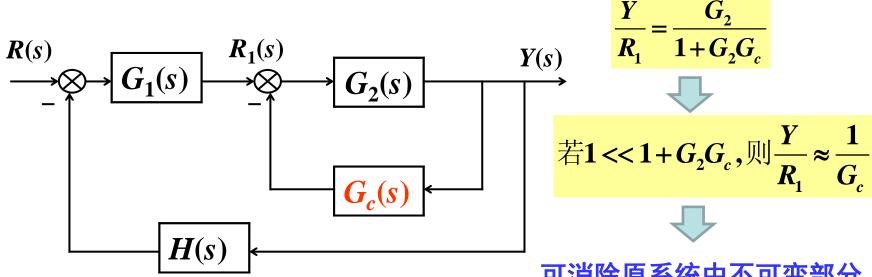


反馈校正是将校正装置 $G_{c}(s)$ 反向并接在原系统前向通道的一个或几个环节上,构成局部反馈回路。



反馈校正

反馈校正一般无附加放大器,所以所需元件比串联校正少。 另一个突出优点是:只要合理地选取校正装置参数,可消除 原系统中不可变部分参数波动对系统性能的影响。



可消除原系统中不可变部分 参数波动对系统性能的影响



## 三种连接方式的合理变换

- 1. 三种连接方式可以等效地转换,系统的综合与校正是非唯一的。
- 2. 在工程应用中,究竟采用哪一种连接方式,要视具体情况而定。 要考虑的因素有:
  - 1) 原系统的物理结构,信号是否便于取出和加入;
  - 2) 信号的性质,系统中各点功率的大小,可供选用的元件;
  - 3)设计者的经验和经济条件等。

例如: 串联校正通常是由低能量向高能量部位传递信号,加上校正 装置本身的能量损耗,必须进行能量补偿。因此,串联校正装置 通常由有源网络或元件构成,即其中需要有放大元件。

而反馈校正结构比串联校正装置简单,若原系统随着工作条件 的变化,它的某些参数变化较大时,采用反馈校正效果会更好些。



