第2章 机器人运动学

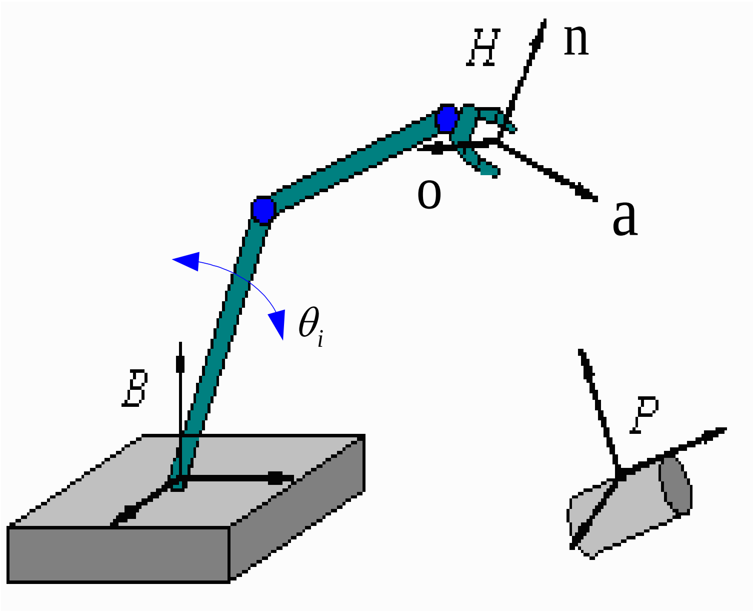
CONTROL SCIENCE AND ENGINEERING

SINCE 1956

机器人运动

- 机器人操作：指通过某种机构使零件和工具在空间运动。

- 机器人操作需要表达零件、工具以及机构本身的位置和姿态。



- 为定义和运用表达位置和姿态的数学量，必须定义坐标系并给出表达的规则。

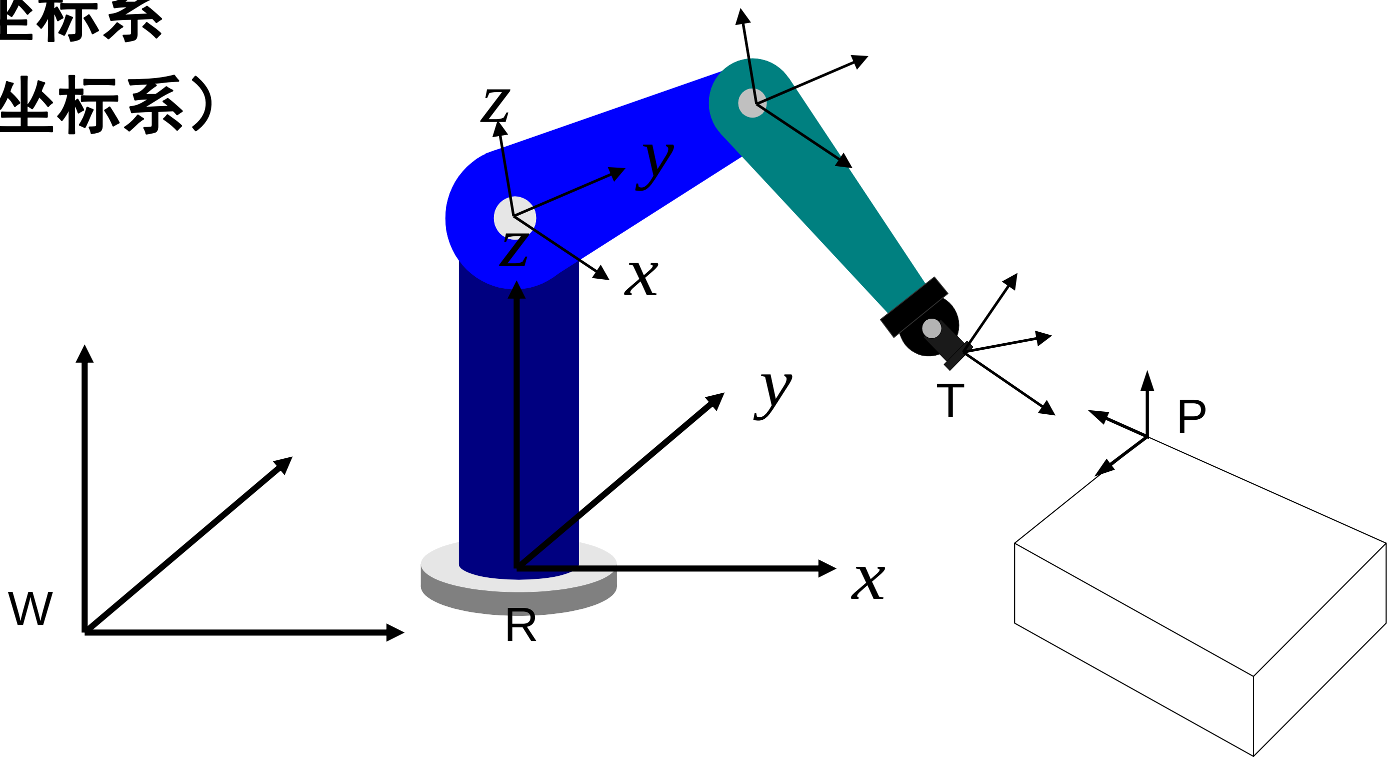
2.1 坐标系与向量

CONTROL SCIENCE AND ENGINEERING

SINCE 1956

坐标系

- 机械臂参考坐标系
  - –世界坐标系
  - –关节坐标系
  - –末端坐标系（工具坐标系）



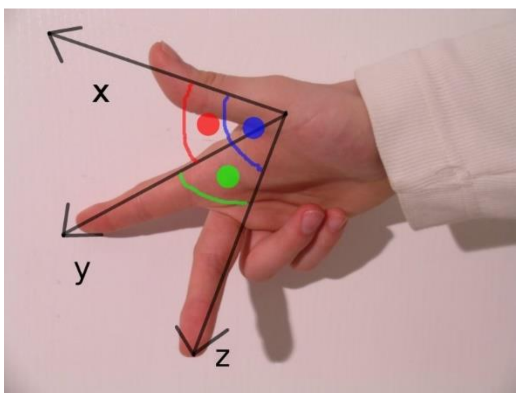
符号约定

- 一般大写字母的变量表示矢量或矩阵
  小写字母的变量表示标量
- 左上标和左下标表示变量所在的坐标系
  如：${}^{A}P$ 表示坐标系$\{A\}$中的位置矢量
  ${}^{A}_{B}R$ 是确定坐标系{A}和坐标系{B}相对关系的矩阵
  无左上、下标的位置矢量一般是世界坐标系中的
- 右上标用来表示矩阵的逆或转置
  如：R^{-1} R^{T}
- 右下标无严格限制，可表示矢量的分量（如x、y或z）或作为一种描述，如 P_{bolt} 表示螺栓的位置
- 某些三角函数有时候会被简化表示
  如: $\sin\theta_1 = s\theta_1 = s_1$ $\cos\theta_3 = c\theta_3 = c_3$

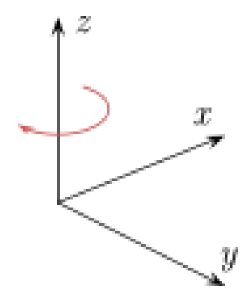
坐标系

- 交于原点的三条不共面的数轴（常称x轴、y轴和z轴）构成空间的放射坐标系。三条数轴（主轴）上度量单位相等的放射坐标系称为空间笛卡尔坐标系

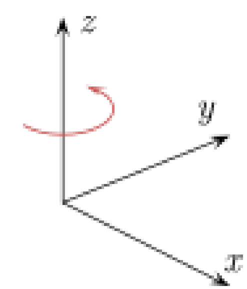
空间笛卡尔坐标系
- 空间笛卡尔直角坐标系
  - 空间笛卡尔直角右手坐标系
  - 空间笛卡尔直角左手坐标系
- 空间笛卡尔斜角坐标系



右手定则



左手坐标系



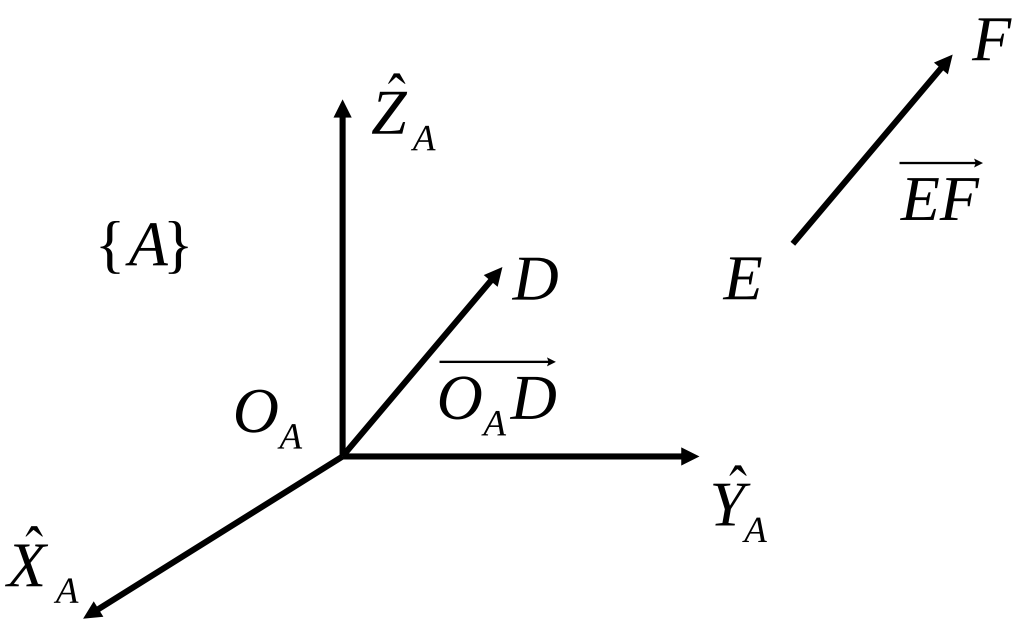
右手坐标系

- 本课程采用空间笛卡尔直角右手坐标系

所有坐标系都采用同样长度的度量单位

向量

- **定义** 向量是具有大小和方向的量
- 几何上，可以用3维空间的有向线段表示3维向量，如：$\overrightarrow{EF}$
- 若两个向量长度相等、方向相同，则称这两个向量相等



$$\overrightarrow{O_AD} = \overrightarrow{EF}$$

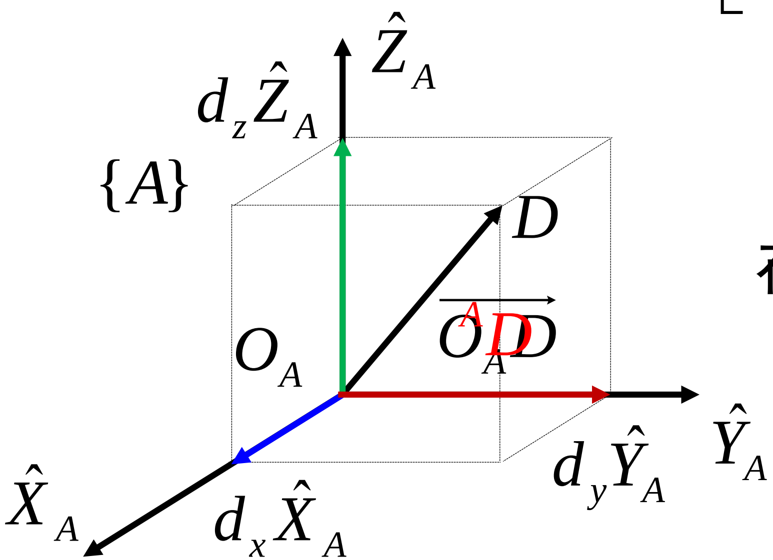
向量的定量表达

- **定量表达** 向量$\overrightarrow{O_A D}$，将它分别向$\hat{X}_A, \hat{Y}_A, \hat{Z}_A$作投影

  得到3个向量$d_x\hat{X}_A, d_y\hat{Y}_A$和$d_z\hat{Z}_A$

$$\overrightarrow{O_A D} = d_x\hat{X}_A + d_y\hat{Y}_A + d_z\hat{Z}_A = \begin{bmatrix} \hat{X}_A & \hat{Y}_A & \hat{Z}_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{bmatrix}$$

简洁表达 $${}^{A}D = \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{bmatrix}$$



向量长度（大小）

$$\left|\overrightarrow{O_A D}\right| = \left|{}^{A}D\right| = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}$$

在$\{A\}$中，$\hat{X}_A, \hat{Y}_A$和$\hat{Z}_A$可分别表达为

$${}^{A}X_A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, {}^{A}Y_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, {}^{A}Z_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

向量的内积

- 两个3维向量 $\overrightarrow{OP}$ 与 $\overrightarrow{OQ}$ 的内积（数量积）定义为

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\left|\overrightarrow{OP}\right|\left|\overrightarrow{OQ}\right|\cos\theta \quad \theta\in[0,\pi]$$

- 内积是一个**标量**，零向量与任何向量的内积等于零
- 两个非零向量间夹角 $\theta=\mathrm{Acos}\dfrac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}}{\left|\overrightarrow{OP}\right|\left|\overrightarrow{OQ}\right|}$
- $\overrightarrow{OP}$ 与 $\overrightarrow{OQ}$ 垂直（正交）的充要条件是它们的内积等于零
- 方向任意的零向量垂直（正交）于任何向量
- 向量长度 $\left|\overrightarrow{OP}\right|=\sqrt{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OP}}$

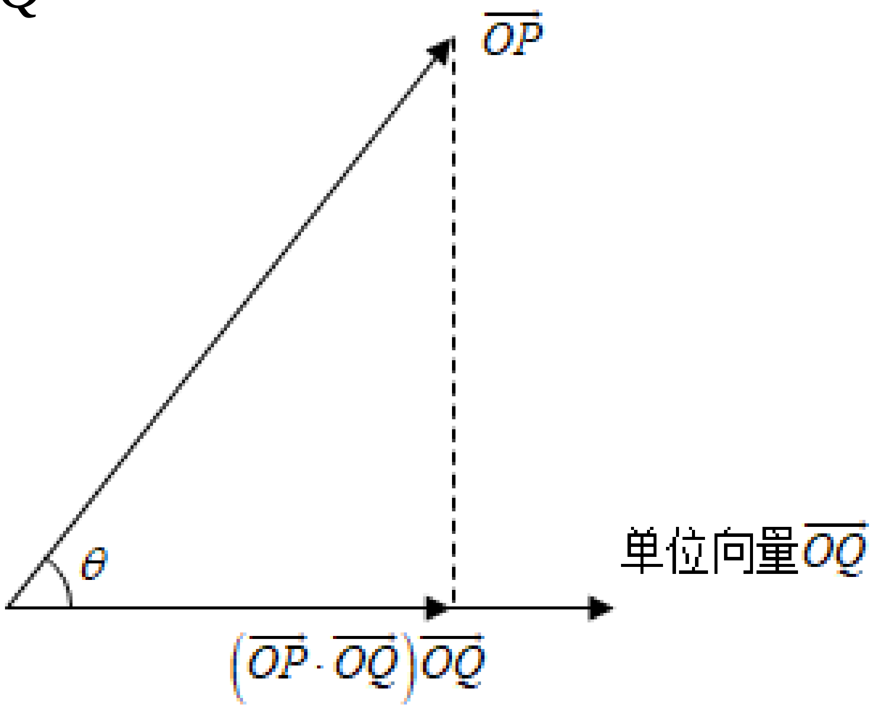
向量的内积

- 若 $\overrightarrow{OQ}$ 是单位向量

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=\left|\overrightarrow{OP}\right|\cos\theta$$

将 $\overrightarrow{OP}$ 向单位向量 $\overrightarrow{OQ}$ 作投影，得到的投影向量为

$$\left(\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}\right)\overrightarrow{OQ}$$



向量的内积

- 在参考系$\{A\}$中，$\overrightarrow{OP}$ 和 $\overrightarrow{OQ}$ 分别被表达为

$$^{A}P=\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix},\ ^{A}Q=\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix}$$

- $\overrightarrow{OP}$ 和 $\overrightarrow{OQ}$ 的内积可按下式计算

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}={}^{A}P\cdot{}^{A}Q={}^{A}P^{\mathrm{T}}\,{}^{A}Q=\begin{bmatrix} p_x & p_y & p_z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix}$$

$$=p_xq_x+p_yq_y+p_zq_z$$

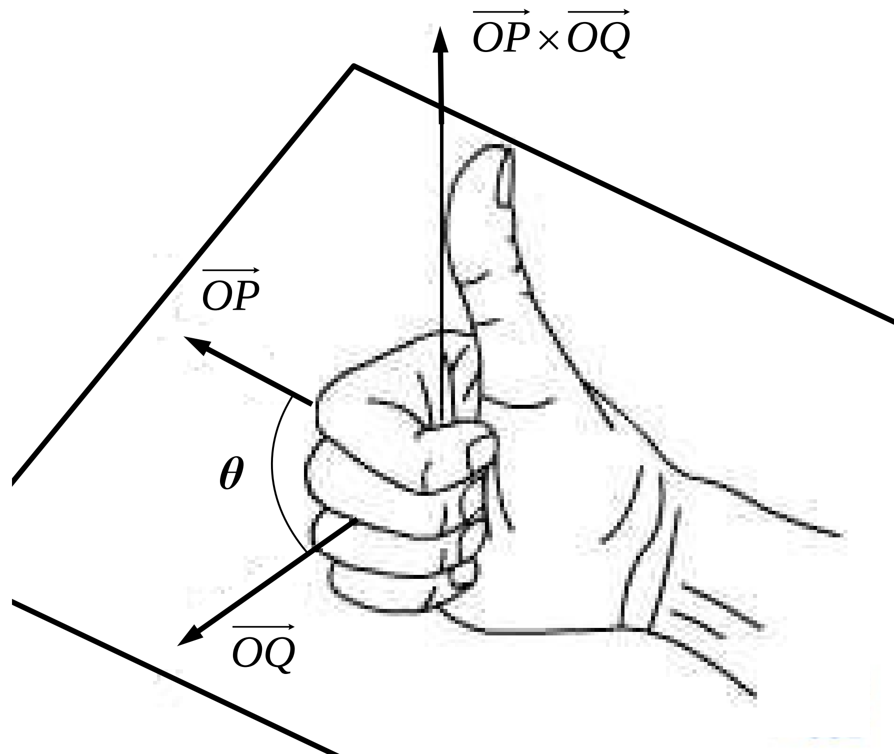
三维向量的外积

- 两个3维向量$\overrightarrow{OP}$与$\overrightarrow{OQ}$的外积（向量积）是一个3维向量，记这个向量为 $\overrightarrow{OW}=\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{OQ}$

  长度定义为$\left|\overrightarrow{OW}\right|=\left|\overrightarrow{OP}\right|\left|\overrightarrow{OQ}\right|\sin\theta$

  零向量与任何向量的外积是零向量，夹角θ为0或π的两个非零向量的外积也是零向量。

$\overrightarrow{OW}$与$\overrightarrow{OP}$ 和 $\overrightarrow{OQ}$ 均正交，方向按右手螺旋法则确定：右手大拇指伸直，弯曲其他四指，指向由 $\overrightarrow{OP}$ 沿小于 180° 的方向转向$\overrightarrow{OQ}$，大拇指的朝向即是$\overrightarrow{OW}$的方向



三维向量的外积

- 对于右手参考系{A}，有

$$\hat{Z}_A = \hat{X}_A \times \hat{Y}_A, \hat{X}_A = \hat{Y}_A \times \hat{Z}_A, \hat{Y}_A = \hat{Z}_A \times \hat{X}_A$$

- $\overrightarrow{OP}$ 和 $\overrightarrow{OQ}$ 以及它们的外积 $\overrightarrow{OW}$ 分别表达为

$$^{A}P = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}, {}^{A}Q = \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix}, {}^{A}W = \begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix} = {}^{A}P \times {}^{A}Q$$

三维向量的外积

- 三种方法计算 ^{A}W

法一

$$\begin{cases} w_x = p_y q_z - p_z q_y \\ w_y = p_z q_x - p_x q_z \\ w_z = p_x q_y - p_y q_x \end{cases}$$

法二

$$^{A}W = \begin{bmatrix} 0 & -p_z & p_y \\ p_z & 0 & -p_x \\ -p_y & p_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix}$$

法三

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ p_x & p_y & p_z \\ q_x & q_y & q_z \end{vmatrix}$$

其中，计算结果中i项、j项和k项的系数就分别是w_x 、w_y和 w_z

位置与姿态

- 位置
  - 空间中任何一点可用一个位置矢量描述，该矢量还需附加坐标系的信息。
  - 位置矢量的每个分量为矢量在相应坐标轴上的投影。
- 姿态
  - 在物体上固定一个坐标系，并给出此坐标系相对于参考坐标系的表达，可称为物体的姿态描述。

空间描述与变换

- 三个问题：
  - –坐标系在参考坐标系中的描述方法
  - –同一矢量在两个坐标系中的坐标变换
  - –矢量在坐标系中运动后的表示

2.2 点和刚体的描述

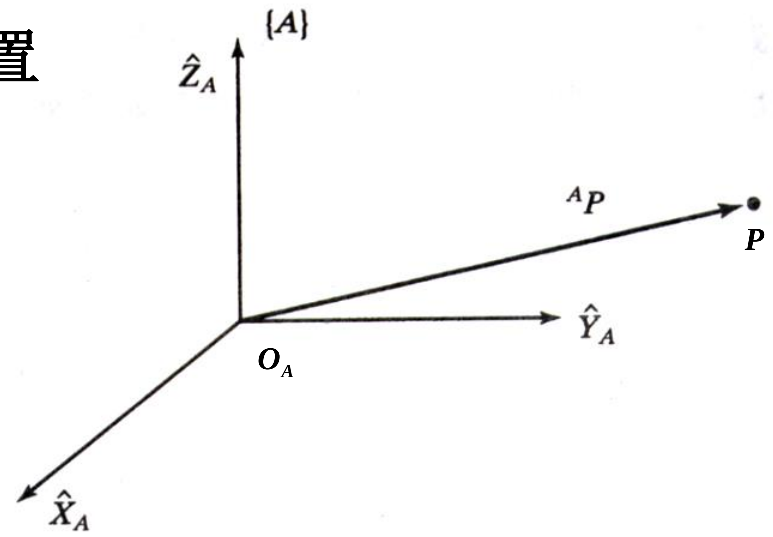
点的位置描述

O_A 表示$\{A\}$ 的原点

$\hat{X}_A$、$\hat{Y}_A$ 和$\hat{Z}_A$ 分别表示$\{A\}$ 的x 轴向、y 轴向和z 轴向的单位向量

在坐标系$\{A\}$ 中，空间任意一点P 的位置可表示为由其坐标构成的3×1 向量表示

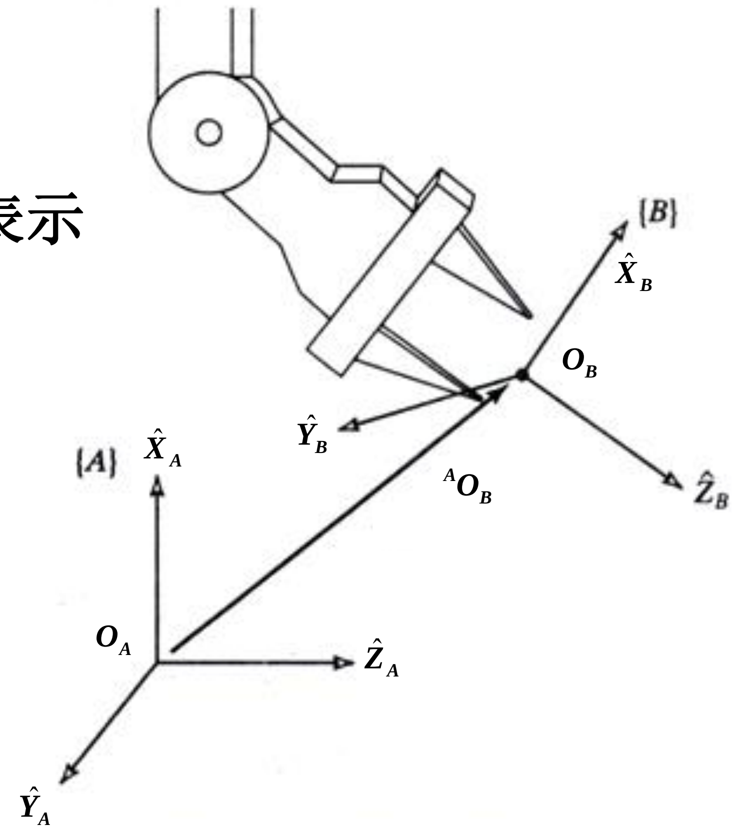
$$^{A}P=\begin{bmatrix}p_x\\p_y\\p_z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3$$



即：$\overrightarrow{O_AP}=\begin{bmatrix}\hat{X}_A & \hat{Y}_A & \hat{Z}_A\end{bmatrix}{}^{A}P$

物体的位置和姿态描述

设$\{B\}$是某物体的一个联体坐标系，即该物体上的任何一个点在$\{B\}$中的位置已知且始终不变



$\{B\}$的原点为O_B,3个轴分别用$\hat{X}_B$、$\hat{Y}_B$和$\hat{Z}_B$表示

在$\{A\}$中表示出$\{B\}$的位置和姿态，即描述了该物体在$\{A\}$中的位置和姿态

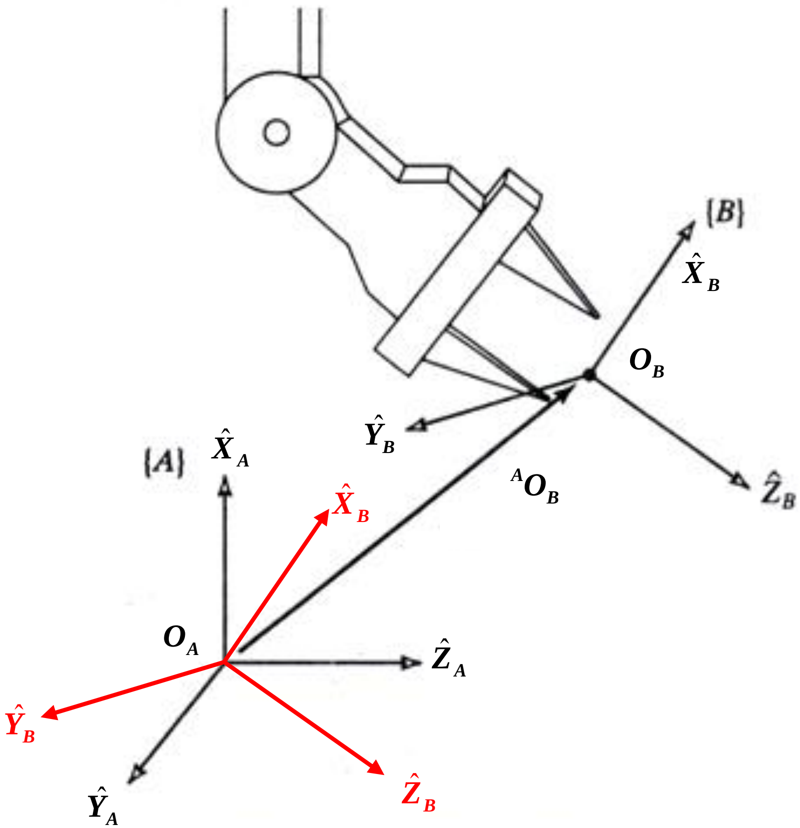
在$\{A\}$中表示出$\{B\}$的位置：${}^{A}O_B \in \mathbb{R}^3$

即$\overrightarrow{O_A O_B} = \begin{bmatrix} \hat{X}_A & \hat{Y}_A & \hat{Z}_A \end{bmatrix} {}^{A}O_B$

物体的位置和姿态描述-旋转矩阵

在$\{A\}$ 中表示出$\{B\}$ 的姿态：

$$\begin{bmatrix} \hat{X}_B & \hat{Y}_B & \hat{Z}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{X}_A & \hat{Y}_A & \hat{Z}_A \end{bmatrix} {}^A_BR$$



$$\hat{X}_B = \begin{bmatrix} \hat{X}_A & \hat{Y}_A & \hat{Z}_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{11} \\ r_{21} \\ r_{31} \end{bmatrix}$$

$$\hat{Y}_B = \begin{bmatrix} \hat{X}_A & \hat{Y}_A & \hat{Z}_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{12} \\ r_{22} \\ r_{32} \end{bmatrix}$$

$$\hat{Z}_B = \begin{bmatrix} \hat{X}_A & \hat{Y}_A & \hat{Z}_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{13} \\ r_{23} \\ r_{33} \end{bmatrix}$$

旋转矩阵 ${}^A_BR = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$

物体的位置和姿态描述-旋转矩阵

定义集合

$$SO(3)=\left\{\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 3}\ \middle|\ \begin{bmatrix} r_{11} \\ r_{21} \\ r_{31} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} r_{11} \\ r_{21} \\ r_{31} \end{bmatrix}=1, \begin{bmatrix} r_{12} \\ r_{22} \\ r_{32} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} r_{12} \\ r_{22} \\ r_{32} \end{bmatrix}=1, \begin{bmatrix} r_{11} \\ r_{21} \\ r_{31} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} r_{12} \\ r_{22} \\ r_{32} \end{bmatrix}=0, \begin{bmatrix} r_{11} \\ r_{21} \\ r_{31} \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} r_{12} \\ r_{22} \\ r_{32} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} r_{13} \\ r_{23} \\ r_{33} \end{bmatrix}\right\}$$

任何一个旋转矩阵（对应于刚体的一个姿态）都属于$SO(3)$

$SO(3)$的任何一个元素都是旋转矩阵

$SO(3)$是全体旋转矩阵的集合

刚体的不同姿态与$SO(3)$中的不同旋转矩阵是一一对应的

物体的位置和姿态描述-旋转矩阵

对于$SO(3)$中的任何一个矩阵

$$R=\begin{bmatrix} R_x & R_y & R_z \end{bmatrix}$$

有

$$R_x^{\mathrm{T}}R_x=1, R_y^{\mathrm{T}}R_y=1, R_z^{\mathrm{T}}R_z=1$$

$$R_x^{\mathrm{T}}R_y=R_x^{\mathrm{T}}R_z=R_y^{\mathrm{T}}R_z=0$$

于是

$$R^{\mathrm{T}}R=\begin{bmatrix} R_x^{\mathrm{T}} \\ R_y^{\mathrm{T}} \\ R_z^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_x & R_y & R_z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} R_x^{\mathrm{T}}R_x & R_x^{\mathrm{T}}R_y & R_x^{\mathrm{T}}R_z \\ R_y^{\mathrm{T}}R_x & R_y^{\mathrm{T}}R_y & R_y^{\mathrm{T}}R_z \\ R_z^{\mathrm{T}}R_x & R_z^{\mathrm{T}}R_y & R_z^{\mathrm{T}}R_z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

对于任何$R\in SO(3)$， R可逆且 $R^{-1}=R^{\mathrm{T}}$

物体的位置和姿态描述-齐次变换矩阵

在$\{A\}$ 中表示$\{B\}$ 的位姿（描述物体在$\{A\}$ 中的位姿）：

齐次变换矩阵 $${}^A_BT = \left[\begin{array}{ccc|c} & {}^A_BR & & {}^AO_B \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{4\times4}$$

定义集合

$$SE(3) = \left\{ \left[\begin{array}{ccc|c} & {}^A_BR & & {}^AO_B \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \middle| \; {}^A_BR \in SO(3),\ {}^AO_B \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

刚体的不同位姿与$SE(3)$中的不同齐次变换矩阵是一一对应的

坐标系的变换

坐标系的复合变换：坐标系{*B*}的原点与{*A*}的原点不重合，姿态也不相同。

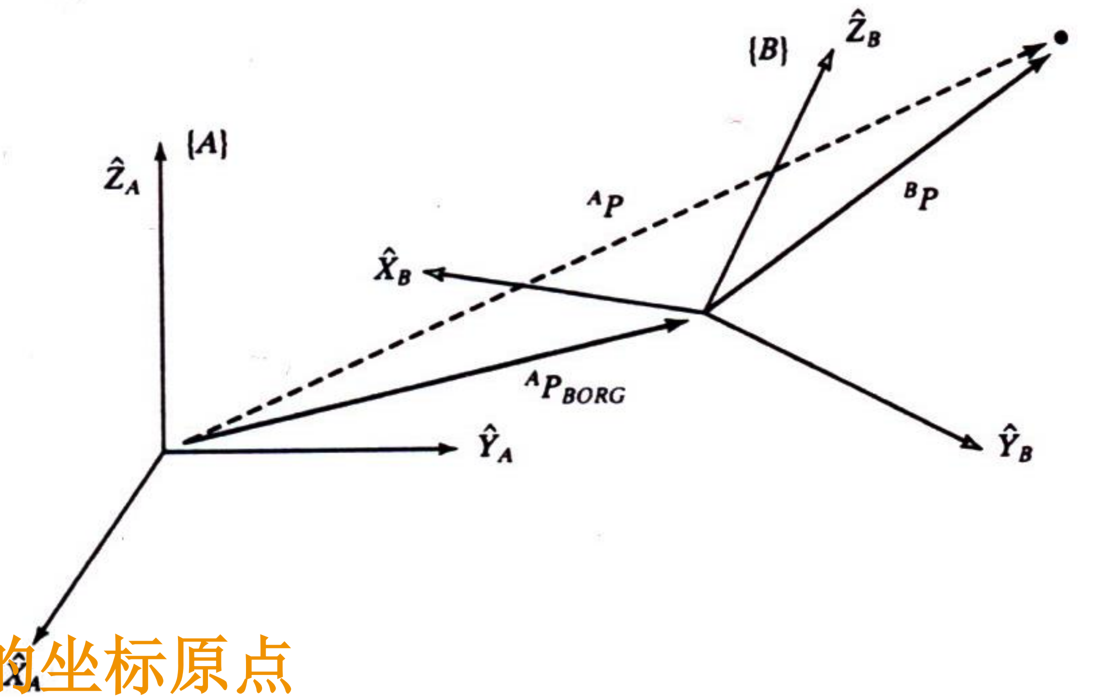
复合变换由坐标旋转和坐标平移共同组成。

在坐标系{*A*}中描述坐标系 {*B*} 中的位置矢量 ***P***

$$^{A}P = \boxed{^{A}_{B}R}\,^{B}P + \boxed{^{A}P_{BORG}}$$

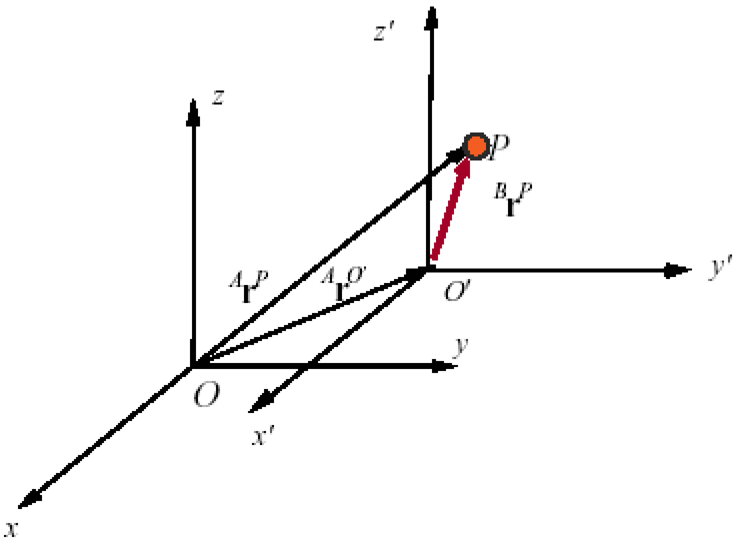
坐标系{*B*}针对坐标系{*A*}的旋转

坐标系{*B*}的坐标原点针对坐标系 {*A*}原点的平移



坐标系的变换

$$^{A}P = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}P + {}^{A}P_{BORG}$$



1. 平移

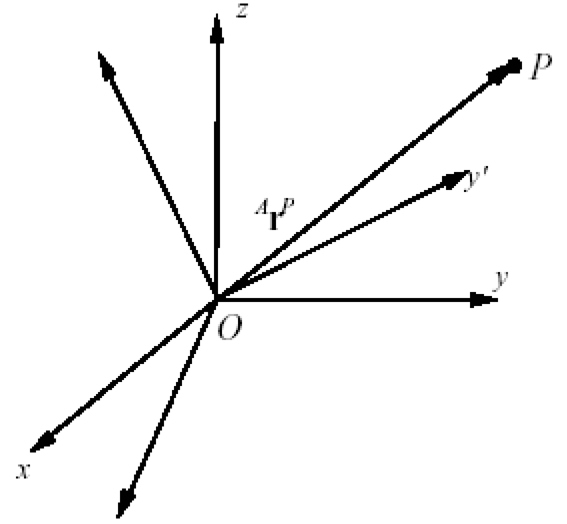
– 坐标系{*B*}和{*A*}的各轴平行

$$^{A}_{B}R=I$$

2. 旋转

– 坐标系{*B*}和{*A*}的原点一致

$$^{A}P_{BORG} = 0$$



齐次坐标变换

- 将从坐标系$\{B\}$到$\{A\}$的变换转为齐次式

$$^{A}P = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}P + {}^{A}P_{BORG}$$

$$\begin{bmatrix} ^{A}P \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} & {}^{A}_{B}R & & {}^{A}P_{BORG} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} ^{B}P \\ 1 \end{bmatrix} = {}^{A}_{B}T \begin{bmatrix} ^{B}P \\ 1 \end{bmatrix}$$

- 齐次变换矩阵

$${}^{A}_{B}T = \left[\begin{array}{ccc|c} & \boxed{{}^{A}_{B}R} & & \boxed{{}^{A}P_{BORG}} \\ \hline 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{array}\right]$$

旋转矩阵

位置矢量

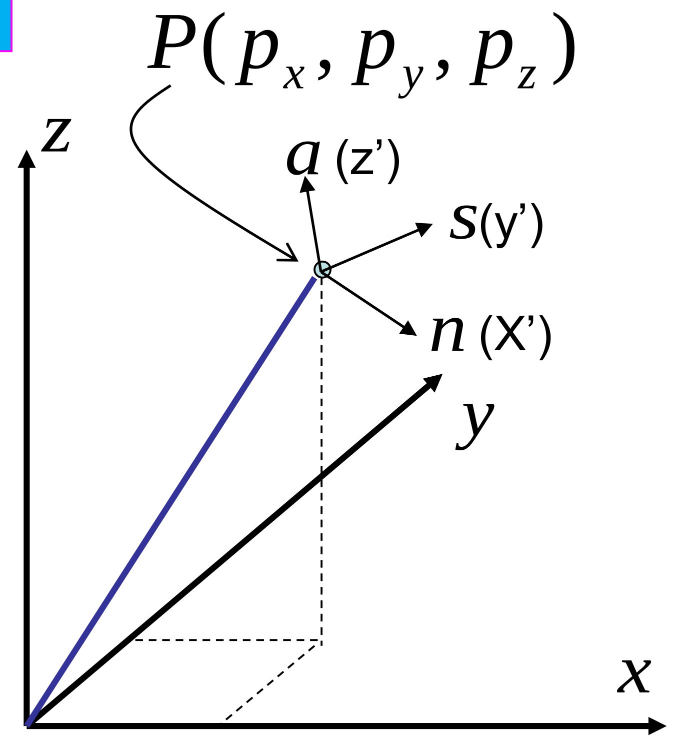
标量

齐次变换的几何意义

齐次变换可以描述运动坐标系

$$F=\begin{bmatrix} R_{3\times3} & P_{3\times1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F=\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{matrix}} & \begin{matrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{matrix} & \begin{matrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{matrix} & \begin{matrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{matrix} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



代表运动坐标系主轴***O'N***在固定坐标系中的表示

2.3 坐标系几何关系

坐标系间的相对位姿

- ${}^{A}_{B}R$ 与 ${}^{B}_{A}R$ 的关系

$$\begin{bmatrix}\hat{X}_B & \hat{Y}_B & \hat{Z}_B\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\hat{X}_A & \hat{Y}_A & \hat{Z}_A\end{bmatrix} {}^{A}_{B}R$$

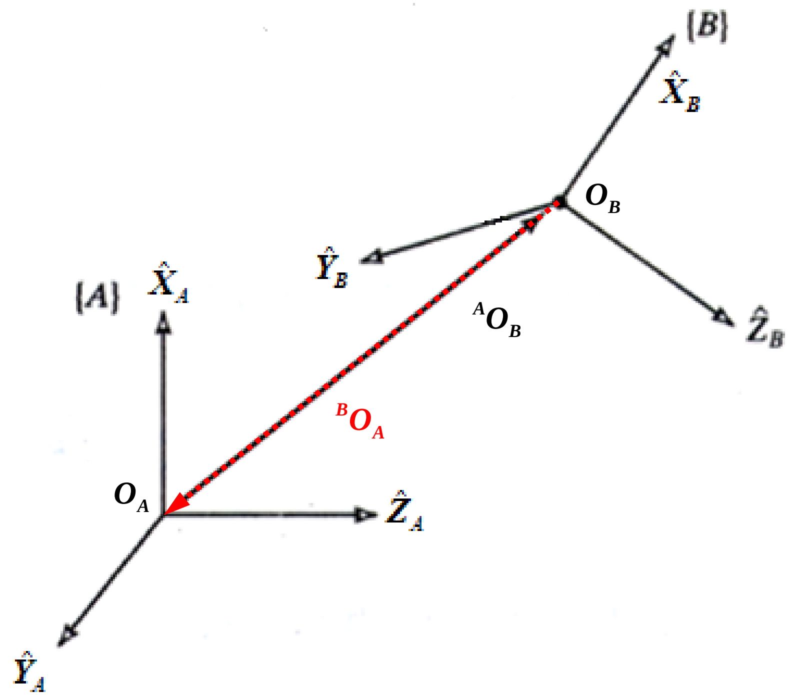
$$\begin{bmatrix}\hat{X}_A & \hat{Y}_A & \hat{Z}_A\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\hat{X}_B & \hat{Y}_B & \hat{Z}_B\end{bmatrix} {}^{B}_{A}R$$

$${}^{B}_{A}R = {}^{A}_{B}R^{-1} = {}^{A}_{B}R^{\mathrm{T}}$$

- ${}^{A}O_B$ 与 ${}^{B}O_A$ 的关系

$$\overrightarrow{O_A O_B} = \begin{bmatrix}\hat{X}_A & \hat{Y}_A & \hat{Z}_A\end{bmatrix} {}^{A}O_B$$

$$\overrightarrow{O_B O_A} = \begin{bmatrix}\hat{X}_B & \hat{Y}_B & \hat{Z}_B\end{bmatrix} {}^{B}O_A$$



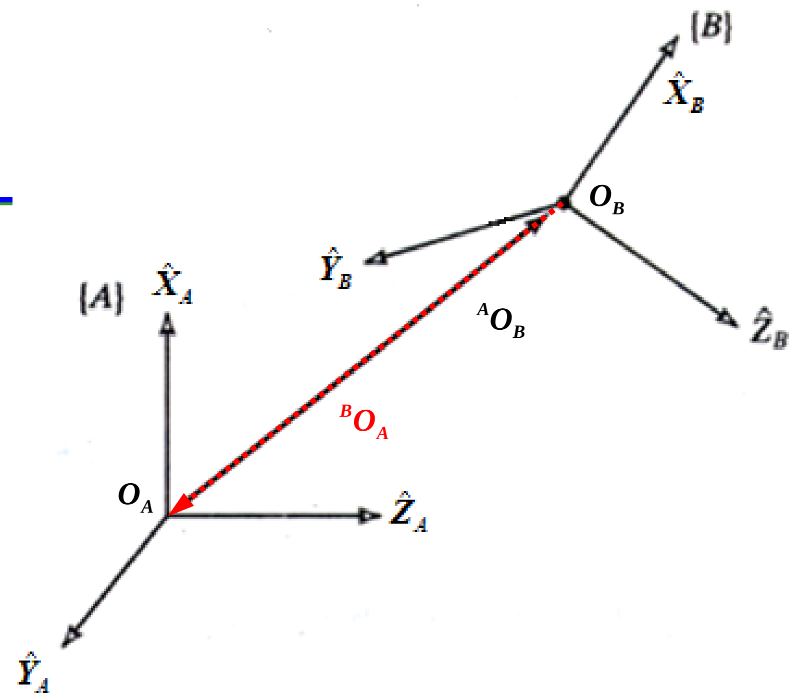
$$-\begin{bmatrix}\hat{X}_A & \hat{Y}_A & \hat{Z}_A\end{bmatrix} {}^{A}O_B = \begin{bmatrix}\hat{X}_B & \hat{Y}_B & \hat{Z}_B\end{bmatrix} {}^{B}O_A$$

$$-\begin{bmatrix}\hat{X}_B & \hat{Y}_B & \hat{Z}_B\end{bmatrix} {}^{B}_{A}R\, {}^{A}O_B = \begin{bmatrix}\hat{X}_B & \hat{Y}_B & \hat{Z}_B\end{bmatrix} {}^{B}O_A$$

$${}^{B}O_A = -{}^{B}_{A}R\, {}^{A}O_B$$

坐标系间的相对位姿

$$ {}^{B}O_A = -{}^{B}_{A}R\,{}^{A}O_B \qquad {}^{B}_{A}R = {}^{A}_{B}R^{-1} = {}^{A}_{B}R^{\mathrm{T}} $$



- ${}^{A}_{B}T$ 与 ${}^{B}_{A}T$ 的关系

$$ {}^{A}_{B}T = \left[\begin{array}{ccc|c} & {}^{A}_{B}R & & {}^{A}O_B \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] $$

$$ {}^{B}_{A}T = \left[\begin{array}{ccc|c} & {}^{B}_{A}R & & {}^{B}O_A \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} & {}^{B}_{A}R & & -{}^{B}_{A}R\,{}^{A}O_B \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] $$

$$ {}^{A}_{B}T\,{}^{B}_{A}T = \left[\begin{array}{ccc|c} & {}^{A}_{B}R & & {}^{A}O_B \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{ccc|c} & {}^{B}_{A}R & & -{}^{B}_{A}R\,{}^{A}O_B \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] $$

$$ = \left[\begin{array}{ccc|c} & {}^{A}_{B}R\,{}^{B}_{A}R & & -{}^{A}_{B}R\,{}^{B}_{A}R\,{}^{A}O_B + {}^{A}O_B \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = I $$

$$ {}^{B}_{A}T = {}^{A}_{B}T^{-1} $$

坐标系间的相对位姿

- 对于任何 $T=\left[\begin{array}{ccc|c} & R & & O \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\in SE(3)$，$T$可逆且

$$T^{-1}=\left[\begin{array}{ccc|c} & R^{\mathrm{T}} & & -R^{\mathrm{T}}O \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

例：已知 ${}_{B}^{A}T=\left[\begin{array}{ccc|c} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$，试求 ${}_{A}^{B}T$

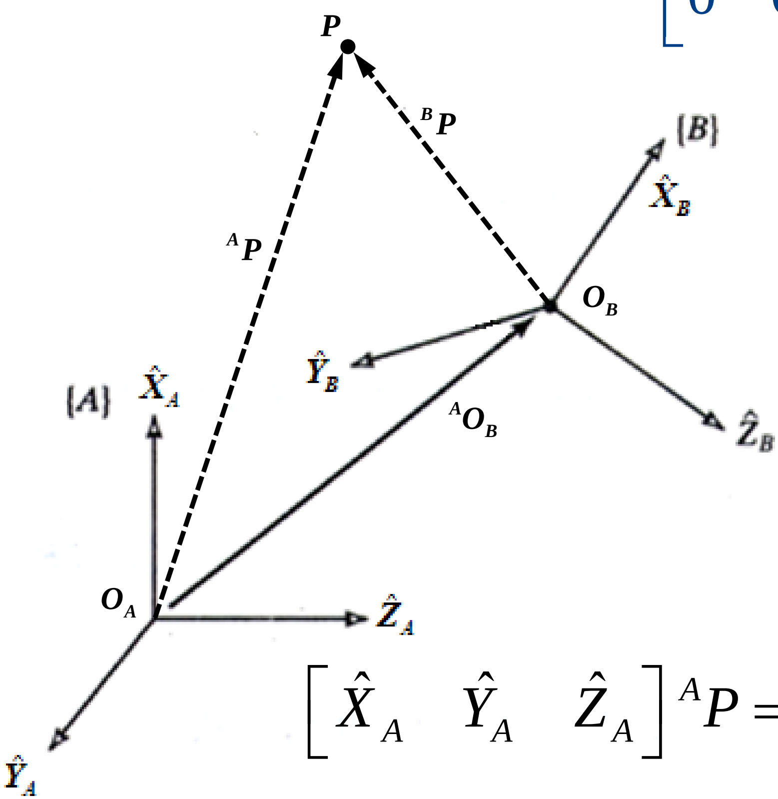
解：

$${}_{A}^{B}T=\left[\begin{array}{ccc|c} & {}_{B}^{A}R^{\mathrm{T}} & & -{}_{B}^{A}R^{\mathrm{T}}\,{}^{A}O_{B} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

从不同坐标系中描述同一点

$$\begin{bmatrix}\hat{X}_B & \hat{Y}_B & \hat{Z}_B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{X}_A & \hat{Y}_A & \hat{Z}_A\end{bmatrix}{}^A_BR$$

- 齐次变换矩阵 ${}^A_BT=\left[\begin{array}{ccc|c} & {}^A_BR & & {}^AO_B \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$ 以及 ${}^BP$ 均已知，求 ${}^AP$



$$\overrightarrow{O_AP}=\begin{bmatrix}\hat{X}_A & \hat{Y}_A & \hat{Z}_A\end{bmatrix}{}^AP$$

$${}^AP \neq {}^AO_B+{}^BP$$

$$\overrightarrow{O_AO_B}=\begin{bmatrix}\hat{X}_A & \hat{Y}_A & \hat{Z}_A\end{bmatrix}{}^AO_B$$

$$\overrightarrow{O_BP}=\begin{bmatrix}\hat{X}_B & \hat{Y}_B & \hat{Z}_B\end{bmatrix}{}^BP$$

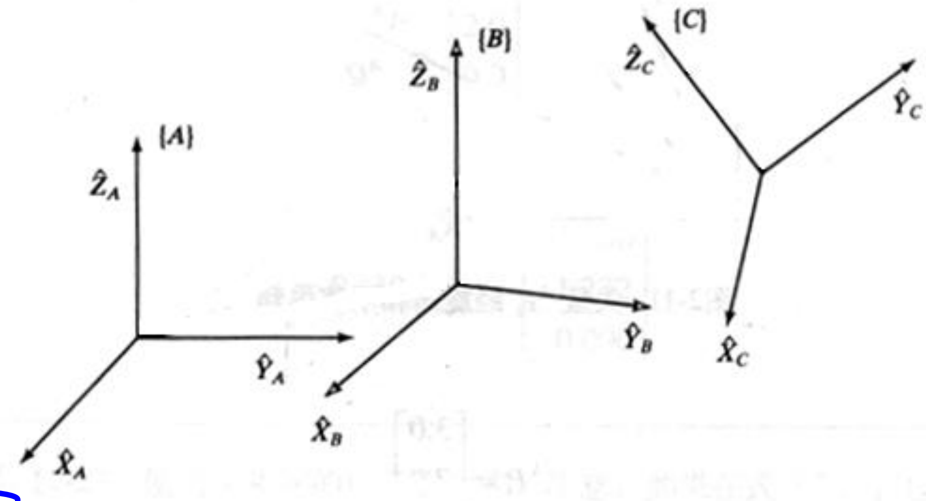
$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\hat{X}_A & \hat{Y}_A & \hat{Z}_A\end{bmatrix}{}^AP &=\begin{bmatrix}\hat{X}_A & \hat{Y}_A & \hat{Z}_A\end{bmatrix}{}^AO_B+\begin{bmatrix}\hat{X}_B & \hat{Y}_B & \hat{Z}_B\end{bmatrix}{}^BP \\ &=\begin{bmatrix}\hat{X}_A & \hat{Y}_A & \hat{Z}_A\end{bmatrix}{}^AO_B+\begin{bmatrix}\hat{X}_A & \hat{Y}_A & \hat{Z}_A\end{bmatrix}{}^A_BR\,{}^BP\end{aligned}$$

$${}^AP={}^AO_B+{}^A_BR\,{}^BP$$

$$\begin{bmatrix}{}^AP \\ 1\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{ccc|c} & {}^A_BR & & {}^AO_B \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\begin{bmatrix}{}^BP \\ 1\end{bmatrix}={}^A_BT\begin{bmatrix}{}^BP \\ 1\end{bmatrix}$$

旋转矩阵的链乘法则

- ${}^{B}_{C}R$ 、${}^{A}_{B}R$ 和 ${}^{A}_{C}R$ 的关系



$$\left[\hat{X}_C \quad \hat{Y}_C \quad \hat{Z}_C\right] = \left[\hat{X}_B \quad \hat{Y}_B \quad \hat{Z}_B\right]{}^{B}_{C}R$$

$$\left[\hat{X}_B \quad \hat{Y}_B \quad \hat{Z}_B\right] = \left[\hat{X}_A \quad \hat{Y}_A \quad \hat{Z}_A\right]{}^{A}_{B}R$$

$$\left[\hat{X}_C \quad \hat{Y}_C \quad \hat{Z}_C\right] = \left[\hat{X}_A \quad \hat{Y}_A \quad \hat{Z}_A\right]{}^{A}_{B}R\,{}^{B}_{C}R$$

$$\left[\hat{X}_C \quad \hat{Y}_C \quad \hat{Z}_C\right] = \left[\hat{X}_A \quad \hat{Y}_A \quad \hat{Z}_A\right]{}^{A}_{C}R$$

$${}^{A}_{C}R = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}_{C}R$$

对于n个坐标系{1},{2},···,{n}，它们的相对姿态有链乘法则

$${}^{1}_{n}R = {}^{1}_{2}R\,{}^{2}_{3}R\cdots{}^{n-1}_{n}R$$

齐次变换矩阵的链乘法则

- ${}^B_C T$ 、${}^A_B T$ 和 ${}^A_C T$ 的关系

$$ {}^B_C T = \left[\begin{array}{ccc|c} & {}^B_C R & & {}^B O_C \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad {}^A_B T = \left[\begin{array}{ccc|c} & {}^A_B R & & {}^A O_B \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad {}^A_C T = \left[\begin{array}{ccc|c} & {}^A_C R & & {}^A O_C \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] $$

$$ {}^A_B T\, {}^B_C T = \left[\begin{array}{ccc|c} & {}^A_B R & & {}^A O_B \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|c} & {}^B_C R & & {}^B O_C \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] $$

$$ = \left[\begin{array}{ccc|c} & {}^A_B R\, {}^B_C R & & {}^A_B R\, {}^B O_C + {}^A O_B \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] $$

$$ = \left[\begin{array}{ccc|c} & {}^A_C R & & {}^A O_C \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = {}^A_C T $$

$$ {}^A_B R\, {}^B_C R = {}^A_C R $$

$$ {}^A P = {}^A O_B + {}^A_B R\, {}^B P $$

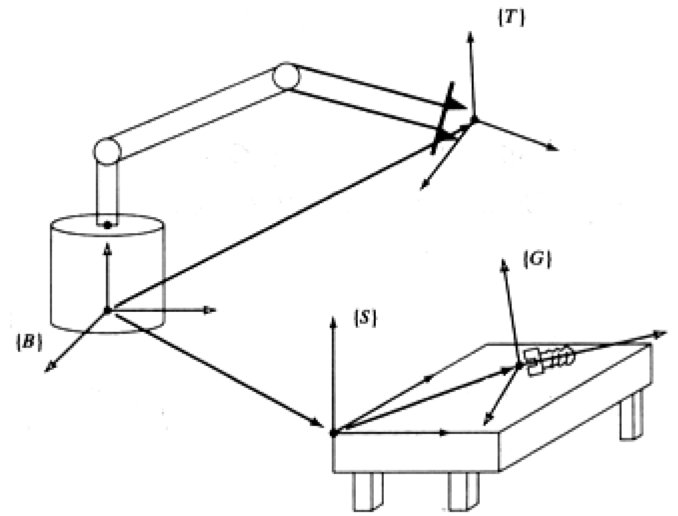
$$ {}^A_B T\, {}^B_C T = {}^A_C T $$

对于**n**个坐标系{**1**},{**2**},…,{**n**}，它们的相对位姿有链乘法则

$$ {}^1_n T = {}^1_2 T\, {}^2_3 T \cdots {}^{n-1}_{\ \ n} T $$

齐次变换矩阵的链乘法则

- 例：已知操作臂指端的坐标系$\{T\}$相对于操作臂基座$\{B\}$的位姿${}^{B}_{T}T$，又已知工作台坐标系$\{S\}$相对操作臂基座$\{B\}$的位置姿态${}^{B}_{S}T$，并且已知工作台上螺栓的坐标系$\{G\}$相对工作台坐标系的位姿${}^{S}_{G}T$，求螺栓相对操作手的位姿即${}^{T}_{G}T$



$${}^{B}_{T}T = {}^{B}_{S}T\,{}^{S}_{G}T\,{}^{G}_{T}T \quad \Longrightarrow \quad {}^{T}_{G}T = {}^{B}_{T}T^{-1}\,{}^{B}_{S}T\,{}^{S}_{G}T$$

齐次变换矩阵总结

- 三个意义：
  - 坐标系描述
  - 坐标变换映射
  - 矢量变换算子

2.4 欧拉角表示和固定角表示

旋转矩阵表示的缺点

- 旋转矩阵的自由度

旋转矩阵为正交阵，是否需要9个数字来表示一个姿态？

$$SO(3)=\left\{\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times3}\middle|\begin{bmatrix} r_{11} \\ r_{21} \\ r_{31} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} r_{11} \\ r_{21} \\ r_{31} \end{bmatrix}=1,\begin{bmatrix} r_{12} \\ r_{22} \\ r_{32} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} r_{12} \\ r_{22} \\ r_{32} \end{bmatrix}=1,\begin{bmatrix} r_{11} \\ r_{21} \\ r_{31} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} r_{12} \\ r_{22} \\ r_{32} \end{bmatrix}=0,\begin{bmatrix} r_{11} \\ r_{21} \\ r_{31} \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} r_{12} \\ r_{22} \\ r_{32} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} r_{13} \\ r_{23} \\ r_{33} \end{bmatrix}\right\}$$

注意：旋转矩阵表示与{*B*}的坐标轴平行的三个单位矢量在坐标系{*A*}中的描述

9个矩阵元素有6个约束：

$$r_{11}^2+r_{21}^2+r_{31}^2=1$$

$$r_{12}^2+r_{22}^2+r_{32}^2=1$$

$$r_{11}r_{12}+r_{21}r_{22}+r_{31}r_{32}=0$$

$$r_{13}=r_{21}r_{32}-r_{31}r_{22}$$

$$r_{23}=r_{31}r_{12}-r_{11}r_{32}$$

$$r_{33}=r_{11}r_{22}-r_{21}r_{12}$$

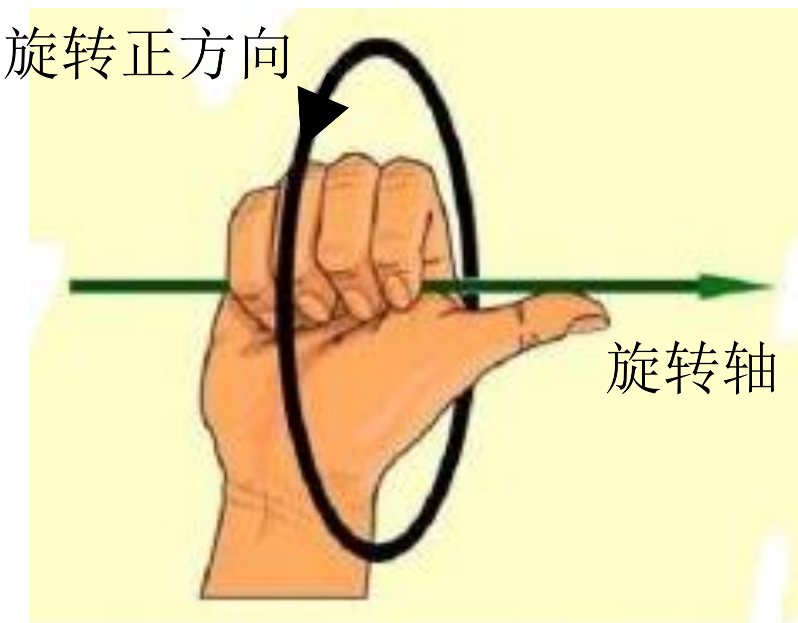
$\Rightarrow$ 用3个独立参量就能表示姿态

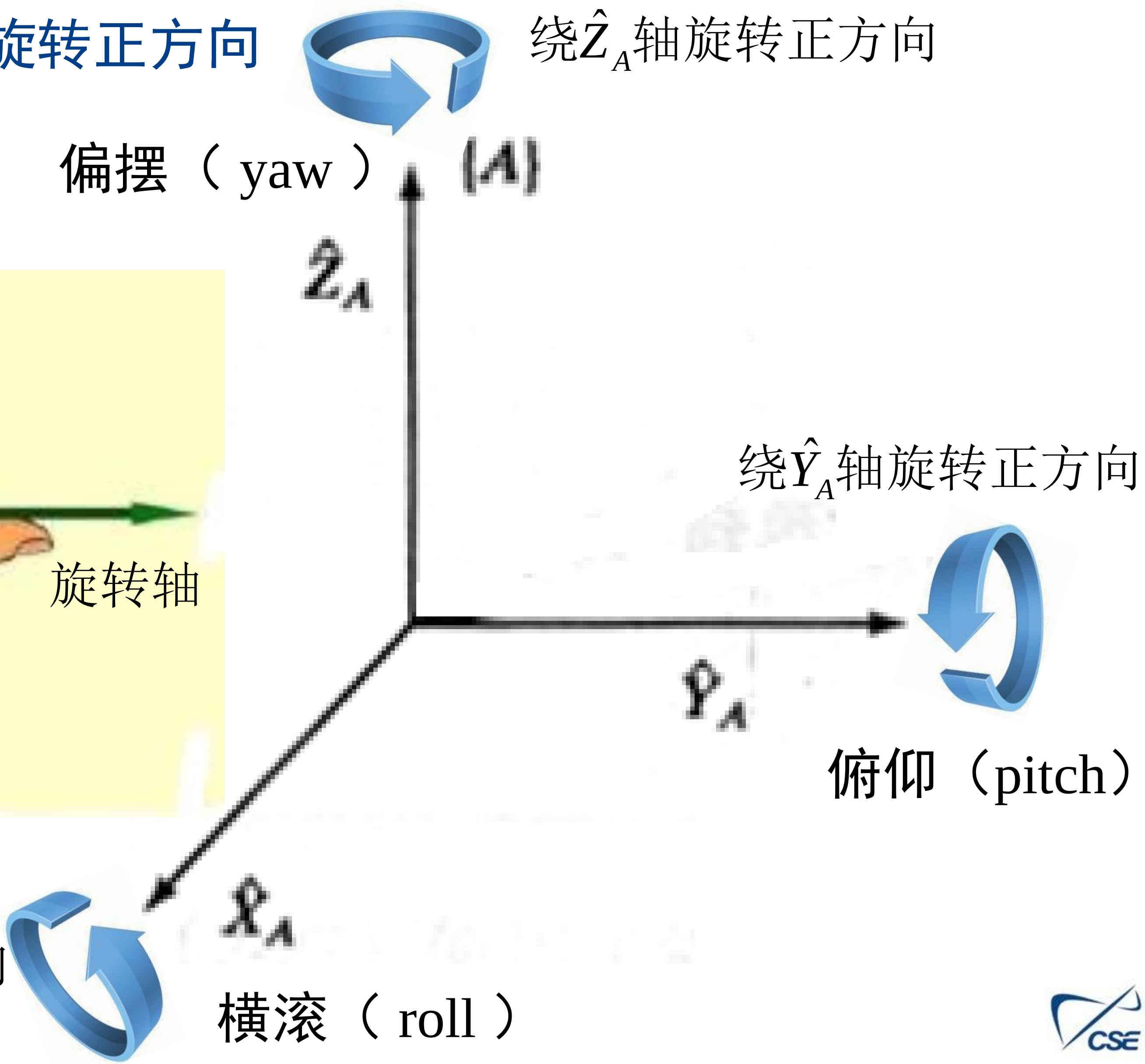
$$\begin{bmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} w_x=p_yq_z-p_zq_y \\ w_y=p_zq_x-p_xq_z \\ w_z=p_xq_y-p_yq_x \end{cases}$$

基本旋转矩阵

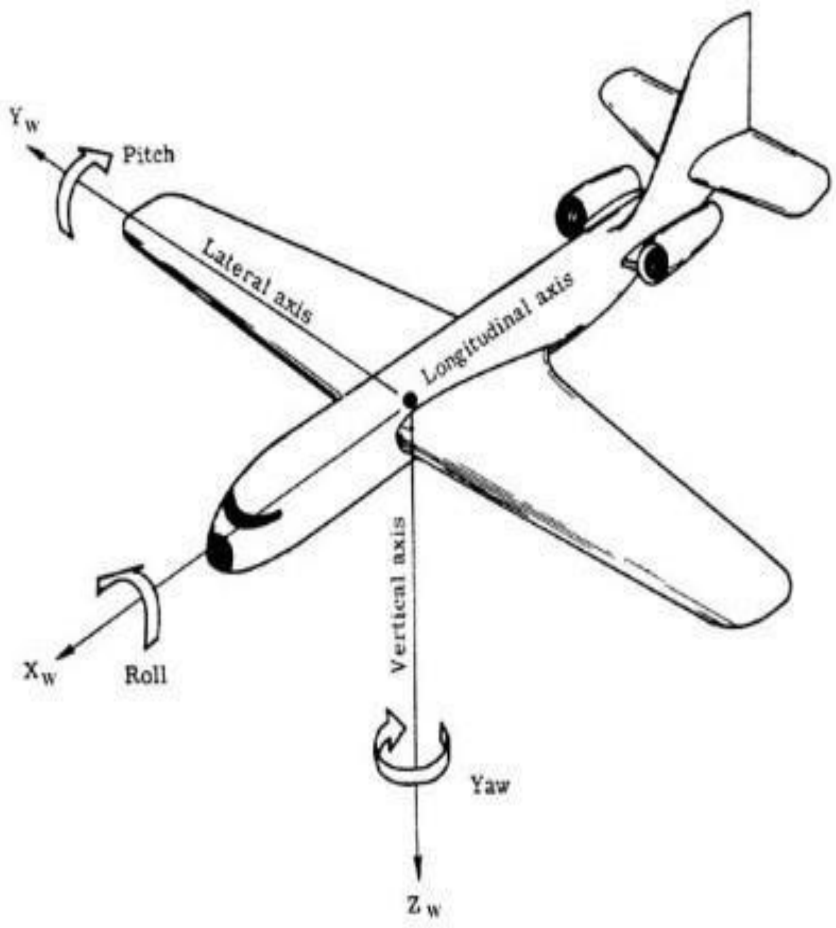
- 用右手定则确定旋转正方向

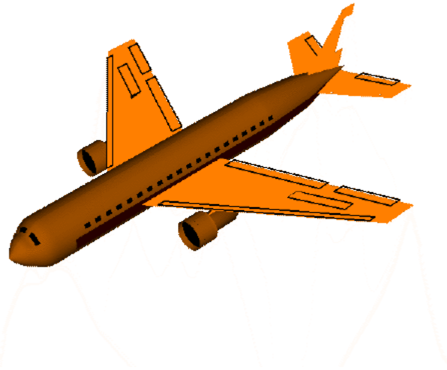


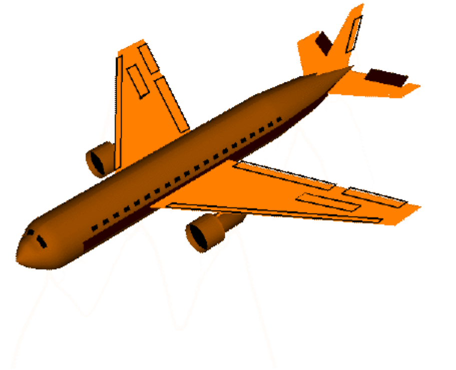


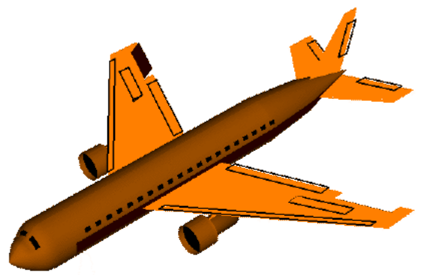
基本旋转矩阵

- 飞机常用的联体坐标系









基本旋转矩阵

- 初始的$\{B\}$与$\{A\}$重合，$\{B\}$绕$\hat{X}_A$旋转θ角，求旋转后的${}^A_BR$

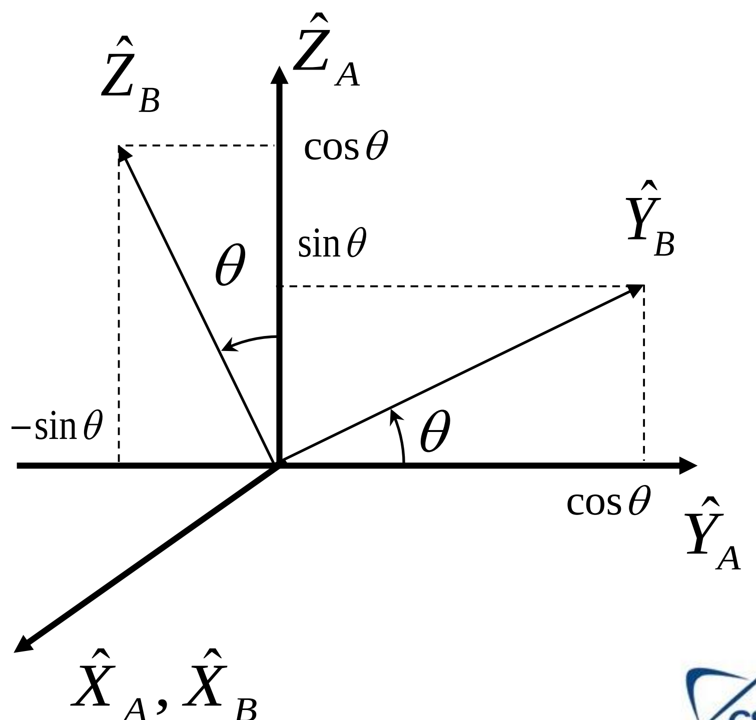
  绕x轴旋转θ

$$\hat{X}_B = \begin{bmatrix} \hat{X}_A & \hat{Y}_A & \hat{Z}_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \hat{Y}_B = \begin{bmatrix} \hat{X}_A & \hat{Y}_A & \hat{Z}_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$$

$$\hat{Z}_B = \begin{bmatrix} \hat{X}_A & \hat{Y}_A & \hat{Z}_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

$${}^A_BR = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= R_x(\theta)$$ 基本旋转矩阵



基本旋转矩阵

绕z轴旋转θ

$$R_z(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c\theta & -s\theta & 0\\ s\theta & c\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

如：${}_B^AR=R_z(\theta)$表示$\{B\}$的姿态是相对$\{A\}$绕$\hat{Z}_A$轴旋转θ

绕y轴旋转θ

$$R_y(\theta)=\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c\theta & 0 & s\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -s\theta & 0 & c\theta\end{bmatrix}$$

如：${}_B^AR=R_y(\theta)$表示$\{B\}$的姿态是相对$\{A\}$绕$\hat{Y}_A$轴旋转θ

绕x轴旋转θ

$$R_x(\theta)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta\\ 0 & \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & c\theta & -s\theta\\ 0 & s\theta & c\theta\end{bmatrix}$$

如：${}_B^AR=R_x(\theta)$表示$\{B\}$的姿态是相对$\{A\}$绕$\hat{X}_A$轴旋转θ

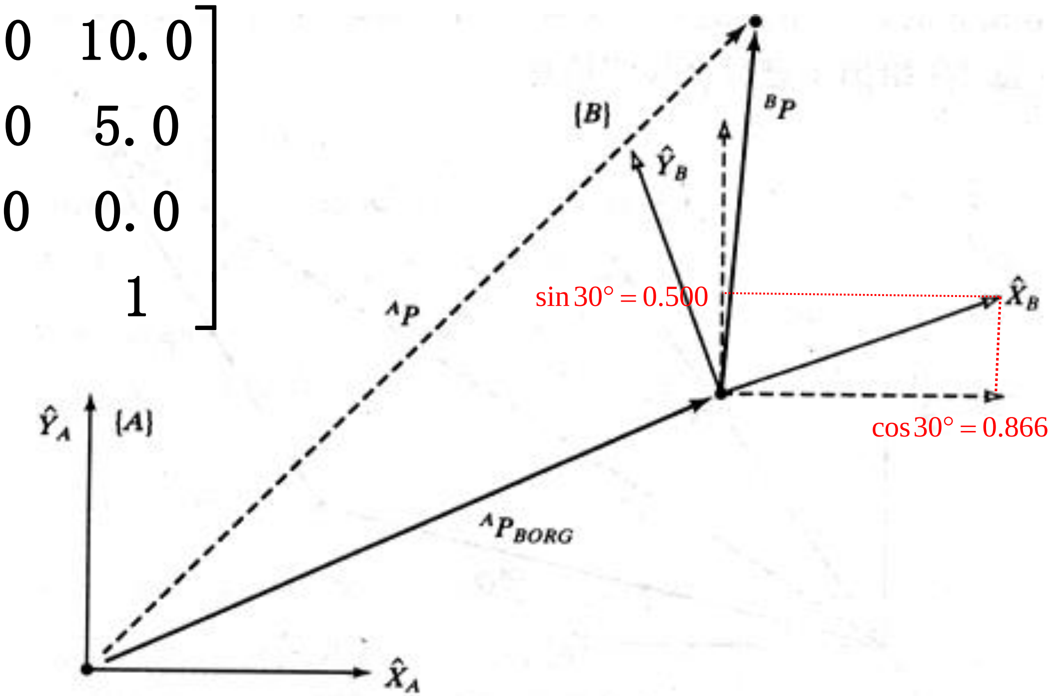
基本旋转矩阵

- 例：坐标系$\{B\}$相对坐标系$\{A\}$绕$\hat{Z}_A$轴旋转30 度，沿$\hat{X}_A$平移10 个单位，沿$\hat{Y}_A$平移5个单位。已知${}^{B}P=\begin{bmatrix}3.0 & 7.0 & 0.0\end{bmatrix}^T$，求${}^{A}P$

$$\begin{bmatrix} r_{11} \\ r_{21} \\ r_{31} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.866 \\ 0.500 \\ 0.000 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} r_{12} \\ r_{22} \\ r_{32} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -0.500 \\ 0.866 \\ 0.000 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} r_{13} \\ r_{23} \\ r_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.000 \\ 0.000 \\ 1.000 \end{bmatrix} \quad {}^{A}O_B=\begin{bmatrix} 10.0 \\ 5.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}$$

$${}^{A}_{B}T=\begin{bmatrix} 0.866 & -0.500 & 0.000 & 10.0 \\ 0.500 & 0.866 & 0.000 & 5.0 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 & 0.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} {}^{A}P \\ 1 \end{bmatrix}={}^{A}_{B}T\begin{bmatrix} {}^{B}P \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 9.098 \\ 12.562 \\ 0.000 \\ 1 \end{bmatrix}$$



ABC型欧拉角

设$\{A\}$的$\hat{X}_A$和$\hat{Y}_A$在水平面上，$\hat{Z}_A$ 垂直于水平面并指向下方

以飞机为例（其联体坐标系$\{G\}$ 的$\hat{X}_G$ 轴方向为机身向前方向、$\hat{Y}_G$ 轴方向为右机翼向右方向）如何将飞机一个任意初始姿态（$\{G(t_0)\}=\{D\}$ ）旋转为基准姿态（$\{G(t_f)\}=\{A\}$ ）？

可分3步，设$t_0 < t_1 < t_2 < t_f$

第1步(t_0,t_1)：飞机$\{G\}$ 绕$\{D\}$ 的$\hat{X}_D$ 旋转$-\gamma$ 角，以使左右机翼高度相等，$\{G(t_1)\}=\{C\}$

第2步(t_1,t_2)：飞机$\{G\}$ 绕$\{C\}$ 的$\hat{Y}_C$ 旋转$-\beta$ 角，以使机头机尾高度相等，$\{G(t_2)\}=\{B\}$

第3步(t_2,t_f)：飞机$\{G\}$ 绕$\{B\}$ 的$\hat{Z}_B$ 旋转$-\alpha$ 角，以使 $\{G(t_f)\}=\{A\}$

飞机如何从基准姿态$\{A\}$ 旋转为姿态$\{D\}$？

第1步：$\{G\}$ 绕$\hat{Z}_A$ 旋转α 角到$\{B\}$，即 ${}^A_BR=R_z(\alpha)$

第2步：$\{G\}$ 绕$\hat{Y}_B$ 旋转β 角到$\{C\}$，即 ${}^B_CR=R_y(\beta)$

第3步：$\{G\}$ 绕$\hat{X}_C$ 旋转γ 角到$\{D\}$，即 ${}^C_DR=R_x(\gamma)$

ABC型欧拉角

Z-Y-X欧拉角：${}^A_DR = {}^A_BR\,{}^B_CR\,{}^C_DR = R_z(\alpha)R_y(\beta)R_x(\gamma)$

物体的姿态由3个独立的角度α 、β 和γ 来确定

$$R_{Z'Y'X'}(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma - \sin\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma \\ \sin\alpha\cos\beta & \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma & \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma - \cos\alpha\sin\gamma \\ -\sin\beta & \cos\beta\sin\gamma & \cos\beta\cos\gamma \end{bmatrix}$$

任何$R \in SO(3)$可用$R_{Z'Y'X'}(\alpha,\beta,\gamma)$ 表示出来

任何$R_{Z'Y'X'}(\alpha,\beta,\gamma) \in SO(3)$

同理，还存在X-Y-Z 欧拉角、X-Z-Y 欧拉角、Y-X-Z 欧拉角、Y-Z-X 欧拉角和Z-X-Y 欧拉角

ABA型欧拉角

还有其它形式的欧拉角吗？

将飞机从一个任意初始姿态（$\{G(t_0)\}=\{D\}$）旋转为基准姿态（$\{G(t_f)\}=\{A\}$）

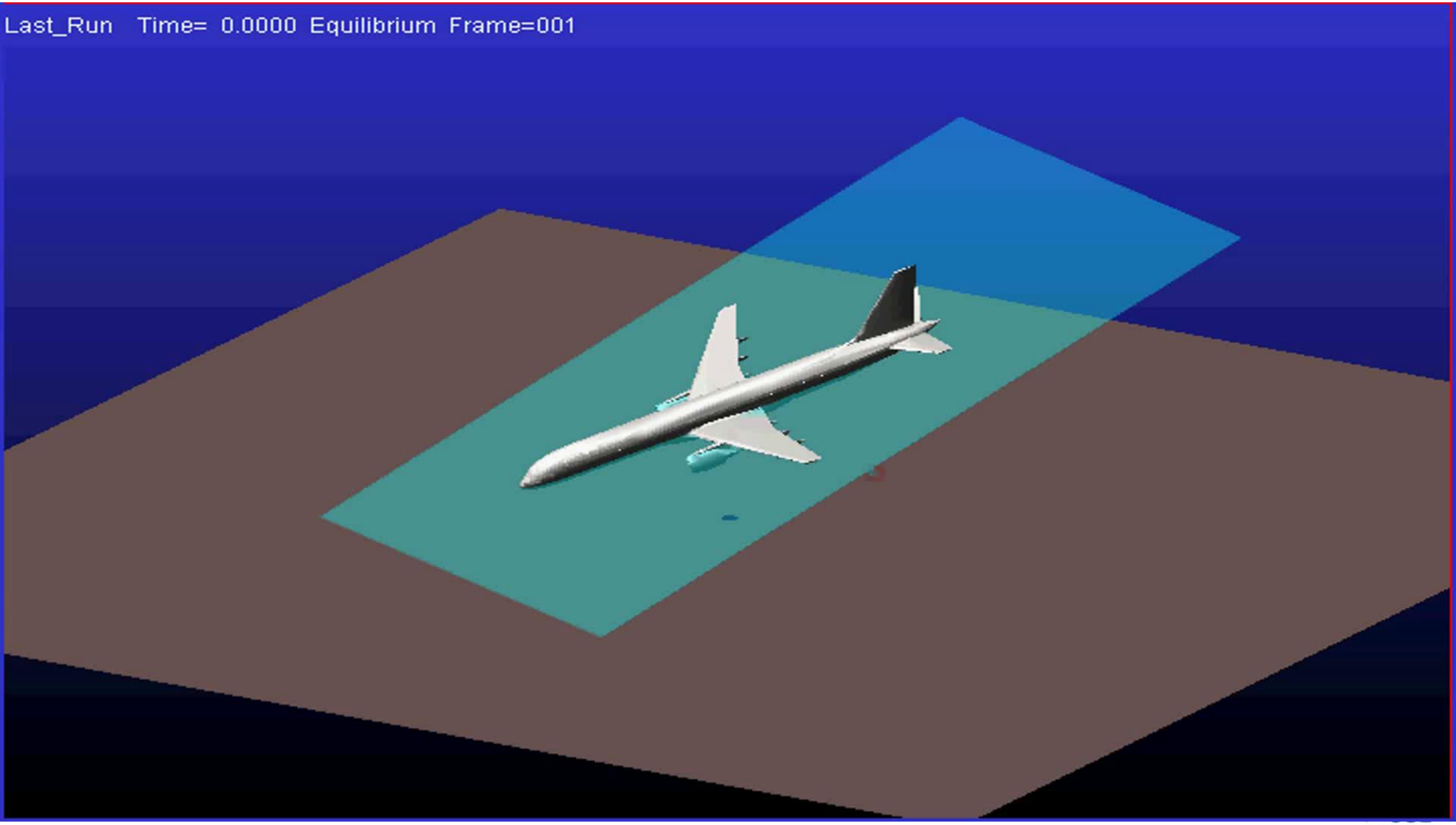
第1步(t_0,t_1)：飞机$\{G\}$绕$\{D\}$的$\hat{X}_D$旋转$-\gamma$角，以使左右机翼高度相等，$\{G(t_1)\}=\{C\}$

第2步(t_1,t_2)：飞机$\{G\}$绕$\{C\}$的$\hat{Y}_C$旋转$-\beta$角，以使机头机尾高度相等，$\{G(t_2)\}=\{B\}$

第3步(t_2,t_f)：飞机$\{G\}$绕$\{B\}$的$\hat{Z}_B$旋转$-\alpha$角，以使$\{G(t_f)\}=\{A\}$

ABA型欧拉角

还有其它形式的欧拉角吗?



ABA型欧拉角

还有其它形式的欧拉角吗？

在第1步中,$\{G\}$ 绕$\{D\}$ 的$\hat{Z}_D$ 旋转一个合适的角度，也能使左右机翼高度相等,$\{G(t_1)\}=\{C'\}$

第2步:$\{G\}$ 绕$\{C'\}$ 的$\hat{Y}_{C'}$ 旋转一个合适的角度，以使机头机尾高度相等,$\{G(t_2)\}=\{B'\}$

第3步:$\{G\}$ 绕$\{B'\}$ 的$\hat{Z}_{B'}$ 旋转一个合适的角度，以使$\{G(t_f)\}=\{A\}$

ABA型欧拉角

Z-Y-Z欧拉角：${}^{A}_{D}R = {}^{A}_{B'}R\,{}^{B'}_{C'}R\,{}^{C'}_{D}R = R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma)$

物体的姿态由3个独立的角度α 、β 和γ 来确定

$$R_{Z'Y'Z'}(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\beta & 0 & \sin\beta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\gamma & -\sin\gamma & 0\\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\sin\alpha\sin\gamma & -\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\sin\beta\\ \sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\gamma & -\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma+\cos\alpha\cos\gamma & \sin\alpha\sin\beta\\ -\sin\beta\cos\gamma & \sin\beta\sin\gamma & \cos\beta\end{bmatrix}$$

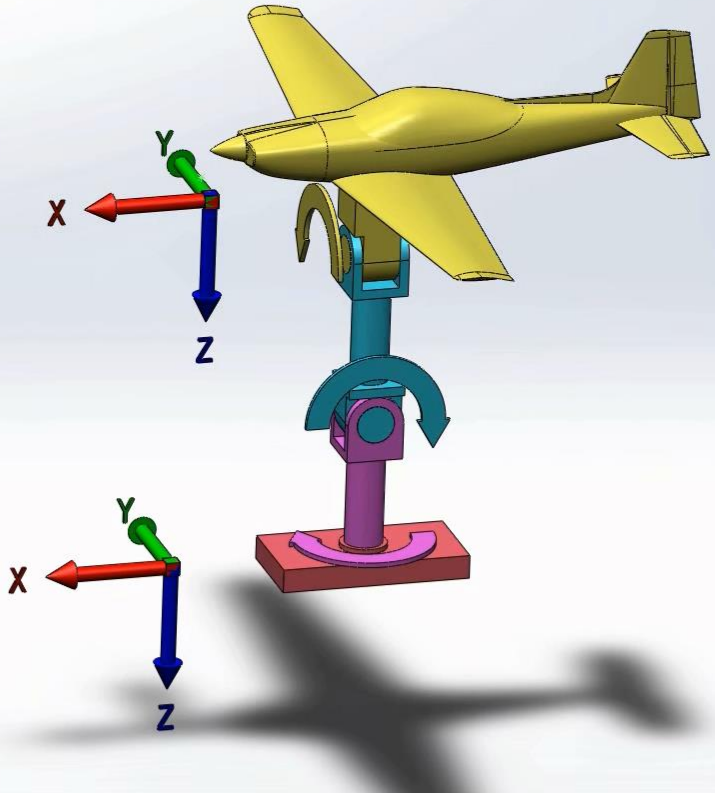
任何$R\in SO(3)$可用$R_{Z'Y'Z'}(\alpha,\beta,\gamma)$ 表示出来

任何$R_{Z'Y'Z'}(\alpha,\beta,\gamma)\in SO(3)$

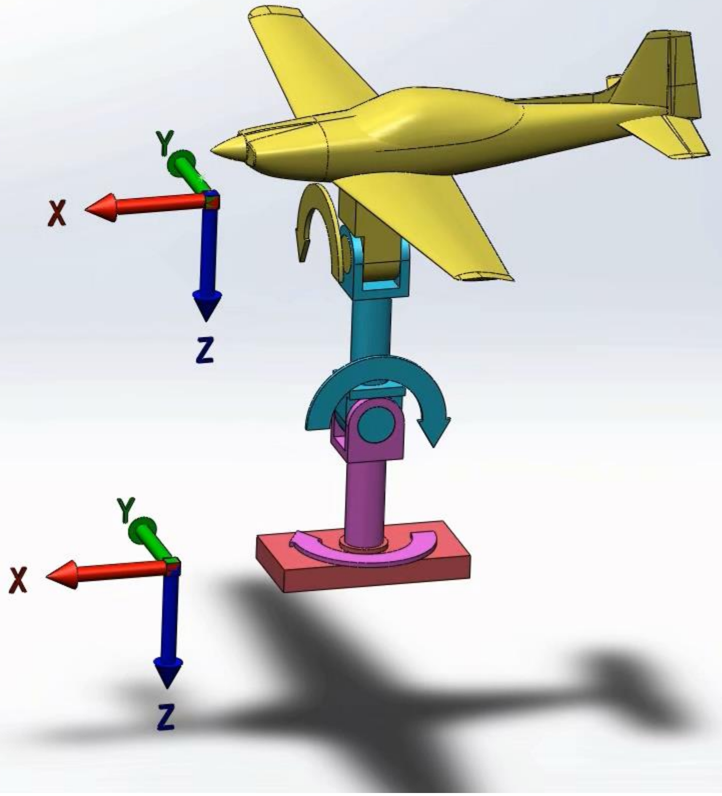
同理，还存在X-Y-X欧拉角、X-Z-X欧拉角、Y-X-Y欧拉角、Y-Z-Y欧拉角和Z-X-Z欧拉角

有12种欧拉角表示法

刚体姿态的固定角表示



刚体姿态的固定角表示



刚体姿态的固定角表示

X-Y-Z固定角：飞机如何从基准姿态$\{A\}$ 旋转为姿态$\{D\}$ ？

第1步：$\{G\}$ 绕$\hat{X}_A$ 旋转γ 角到$\{B''\}$，即 ${}^{A}_{B''}R = R_x(\gamma)$

第2步：$\{G\}$ 绕$\hat{Y}_A$ 旋转β 角到$\{C''\}$，即 ${}^{A}_{C''}R = R_y(\beta)R_x(\gamma)$

第3步：$\{G\}$ 绕$\hat{Z}_A$ 旋转α 角到$\{D\}$，即 ${}^{A}_{D}R = R_z(\alpha)R_y(\beta)R_x(\gamma)$

$$
{\color{red}R_{XYZ}(\gamma,\beta,\alpha)} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma - \sin\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma + \sin\alpha\sin\gamma \\ \sin\alpha\cos\beta & -\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma + \cos\alpha\cos\gamma & -\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma - \cos\alpha\sin\gamma \\ -\sin\beta & \cos\beta\sin\gamma & \cos\beta\cos\gamma \end{bmatrix}
$$

任何$R \in SO(3)$可用$R_{XYZ}(\gamma,\beta,\alpha)$ 表示出来

任何$R_{XYZ}(\gamma,\beta,\alpha) \in SO(3)$

三次绕固定轴旋转的最终姿态和以相反顺序三次绕运动坐标轴旋转的最终姿态相同

同理，还存在Z-Y-X固定角、Y-Z-X固定角、Z-X-Y固定角、X-Z-Y固定角和Y-X-Z固定角、Z-Y-Z固定角、X-Y-X固定角、X-Z-X固定角、Y-X-Y固定角、Y-Z-Y固定角和Z-X-Z固定角

欧拉角与固定角的对偶及其推广

教材附录B罗列了24种角坐标系的旋转矩阵定义，即12种欧拉角表示法和12种固定角表示法

根据所研究问题的具体特点，选择1个合适的欧拉角或固定角表示法，往往可以给姿态处理带来方便

任何姿态都可由3个基本旋转操作的相乘来表示，如：${}_D^AR = R_z(\alpha)R_y(\beta)R_x(\gamma)$

矩阵乘法不满足交换律，如：$R_z(\alpha)R_y(\beta)R_x(\gamma) \neq R_y(\beta)R_z(\alpha)R_x(\gamma)$

欧拉角表示法与固定角表示法的对偶性源自操作顺序

从左到右的顺序（右乘）：先操作$R_z(\alpha)$，再操作$R_y(\beta)$，最后操作$R_x(\gamma)$

则${}_D^AR = R_z(\alpha)R_y(\beta)R_x(\gamma)$由Z-Y-X欧拉角表示，操作是相对于联体坐标系的

从右到左的顺序（左乘）：先操作$R_x(\gamma)$，再操作$R_y(\beta)$，最后操作$R_z(\alpha)$

则${}_D^AR = R_z(\alpha)R_y(\beta)R_x(\gamma)$由X-Y-Z固定角表示，操作是相对于固定坐标系（基础坐标系）的

右乘联体左乘基

由旋转矩阵求欧拉角或固定角的解

Z-Y-X欧拉角：${}^{A}_{D}R = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}_{C}R\,{}^{C}_{D}R = \mathrm{Rot}(Z,\alpha)\mathrm{Rot}(Y,\beta)\mathrm{Rot}(X,\gamma)$

物体的姿态由3个独立的角度α 、β 和γ 来确定

$$R_{Z'Y'X'}(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\beta & 0 & \sin\beta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma\\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma-\sin\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+\sin\alpha\sin\gamma\\ \sin\alpha\cos\beta & -\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma+\cos\alpha\cos\gamma & -\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma-\cos\alpha\sin\gamma\\ -\sin\beta & \cos\beta\sin\gamma & \cos\beta\cos\gamma\end{bmatrix}$$

任何一个3×3的正交矩阵都可用$R_{Z'Y'X'}(\alpha,\beta,\gamma)$ 表示出来

$$\begin{bmatrix}r_{11} & r_{12} & r_{13}\\ r_{21} & r_{22} & r_{23}\\ r_{31} & r_{32} & r_{33}\end{bmatrix}=R_{Z'Y'X'}(\alpha,\beta,\gamma)$$

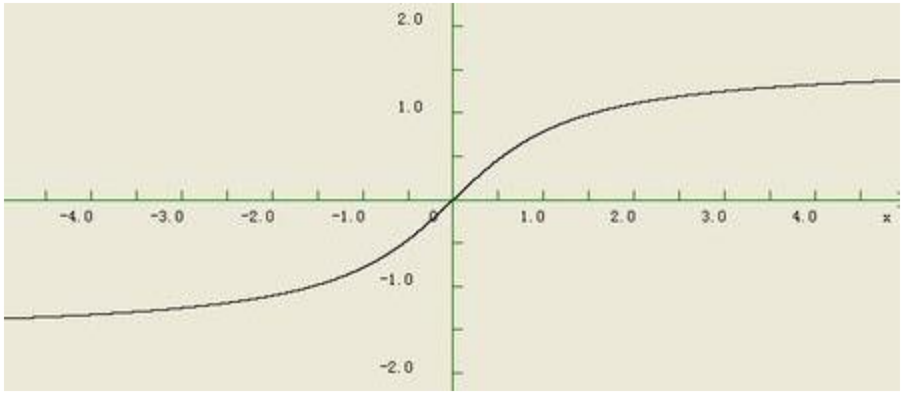
由旋转矩阵求欧拉角或固定角的解

- 两种反正切函数

$\theta = \mathrm{Arctan}(x) = \mathrm{Atan}(x)$

定义域：R

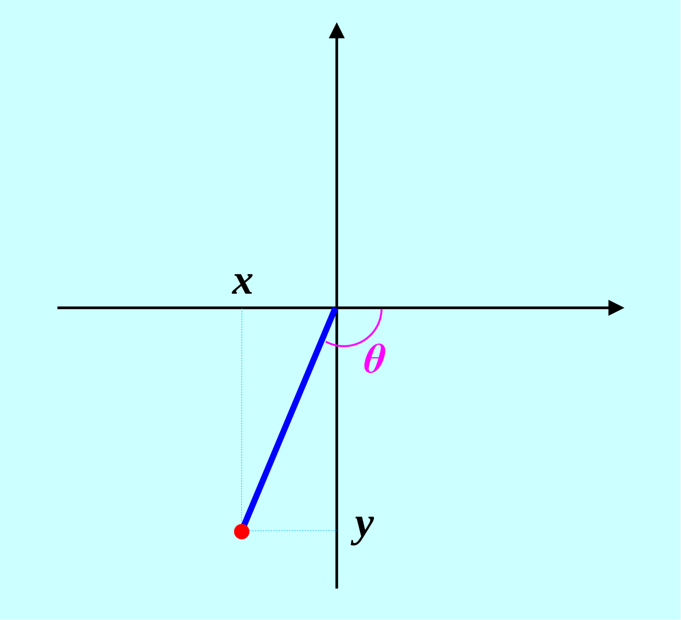
值域:$(-\pi/2, \pi/2)$



$\theta = \mathrm{Atan2}(y, x)$

定义域：$\mathrm{R}^2 \backslash (0,0)$

值域:$(-\pi, \pi]$



由旋转矩阵求欧拉角或固定角的解

已知$R \in SO(3)$，求$\alpha, \beta, \gamma \in (-\pi, \pi]$使得$R = R_{Z'Y'X'}(\alpha, \beta, \gamma)$

命题：$R_z(\pm\pi+\alpha)R_y(\pm\pi-\beta)R_x(\pm\pi+\gamma) = R_z(\alpha)R_y(\beta)R_x(\gamma)$

证明：

$$
\begin{aligned}
&R_z(\pm\pi+\alpha)R_y(\pm\pi-\beta)R_x(\pm\pi+\gamma) \\
&= \begin{bmatrix} \cos(\pm\pi+\alpha) & -\sin(\pm\pi+\alpha) & 0 \\ \sin(\pm\pi+\alpha) & \cos(\pm\pi+\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\pm\pi-\beta) & 0 & \sin(\pm\pi-\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\pm\pi-\beta) & 0 & \cos(\pm\pi-\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\pm\pi+\gamma) & -\sin(\pm\pi+\gamma) \\ 0 & \sin(\pm\pi+\gamma) & \cos(\pm\pi+\gamma) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -\cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & -\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & -\cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos\gamma & \sin\gamma \\ 0 & -\sin\gamma & -\cos\gamma \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & -\cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma & -\sin\gamma \\ 0 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{bmatrix} \\
&= R_z(\alpha)R_y(\beta)R_x(\gamma)
\end{aligned}
$$

由旋转矩阵求欧拉角或固定角的解

命题：$R_z(\pm\pi+\alpha)R_y(\pm\pi-\beta)R_x(\pm\pi+\gamma)=R_z(\alpha)R_y(\beta)R_x(\gamma)$

记集合 $\mathbb{Q}=(-\pi,-\pi/2)\cup(\pi/2,\pi]$

令函数 $f:\mathbb{Q}\to[-\pi/2,\pi/2],\ f(\beta)=\begin{cases}-\pi-\beta, & \text{when } \beta\in(-\pi,-\pi/2)\\ \pi-\beta, & \text{when } \beta\in(\pi/2,\pi]\end{cases}$

$$g:(-\pi,\pi]\to(-\pi,\pi],\ g(\alpha)=\begin{cases}\pi+\alpha, & \text{when } \alpha\in(-\pi,0]\\ -\pi+\alpha, & \text{when } \alpha\in(0,\pi]\end{cases}$$

命题：对于任何$(\alpha,\beta,\gamma)\in(-\pi,\pi]\times\mathbb{Q}\times(-\pi,\pi]$，有

$$R_z(g(\alpha))R_y(f(\beta))R_x(g(\gamma))=R_z(\alpha)R_y(\beta)R_x(\gamma)$$

且$(\alpha,\beta,\gamma)\in(-\pi,\pi]\times[-\pi/2,\pi/2]\times(-\pi,\pi]$

一个姿态若能被一组俯仰角绝对值大于90°的Z-Y-X欧拉角或X-Y-Z固定角描述，那么也能被另一组俯仰角绝对值不大于90°的Z-Y-X欧拉角或X-Y-Z固定角描述

因此可规定 $(\alpha,\beta,\gamma)\in(-\pi,\pi]\times[-\pi/2,\pi/2]\times(-\pi,\pi]$

由旋转矩阵求欧拉角或固定角的解

已知$R \in SO(3)$，求$(\alpha,\beta,\gamma) \in (-\pi,\pi] \times [-\pi/2,\pi/2] \times (-\pi,\pi]$使得$R = R_{Z'Y'X'}(\alpha,\beta,\gamma)$

$$R_{Z'Y'X'}(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma-\sin\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+\sin\alpha\sin\gamma \\ \sin\alpha\cos\beta & -\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma+\cos\alpha\cos\gamma & -\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma-\cos\alpha\sin\gamma \\ -\sin\beta & \cos\beta\sin\gamma & \cos\beta\cos\gamma \end{bmatrix}$$

$\cos\beta \geq 0$ $\qquad \cos\beta = \sqrt{r_{32}^2 + r_{33}^2}$ $\qquad \beta = \text{Atan2}\left(-r_{31}, \sqrt{r_{32}^2 + r_{33}^2}\right)$

若$\cos\beta > 0$ $\qquad \alpha = \text{Atan2}(r_{21}, r_{11})$ $\qquad \gamma = \text{Atan2}(r_{32}, r_{33})$

若$\cos\beta = 0$:

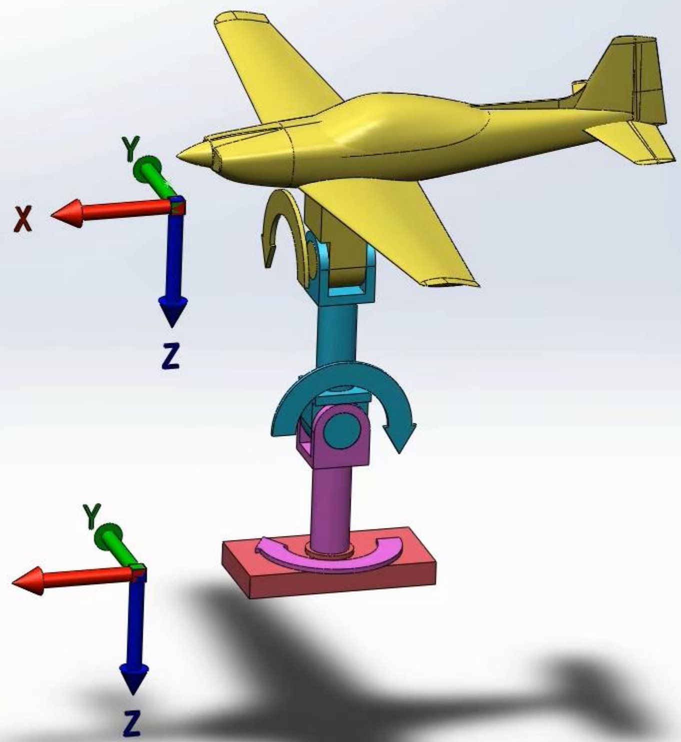
$$\beta=\frac{\pi}{2}\text{时} \quad \begin{bmatrix} 0 & r_{12} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{23} \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cos\alpha\sin\gamma-\sin\alpha\cos\gamma & \cos\alpha\cos\gamma+\sin\alpha\sin\gamma \\ 0 & \sin\alpha\sin\gamma+\cos\alpha\cos\gamma & \sin\alpha\cos\gamma-\cos\alpha\sin\gamma \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin(\alpha-\gamma) & \cos(\alpha-\gamma) \\ 0 & \cos(\alpha-\gamma) & \sin(\alpha-\gamma) \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

只能得到一个关于α与γ之差的结果 $\alpha - \gamma = \text{Atan2}(r_{23}, r_{22})$

对应这种姿态的Z-Y-X欧拉角或X-Y-Z固定角不唯一

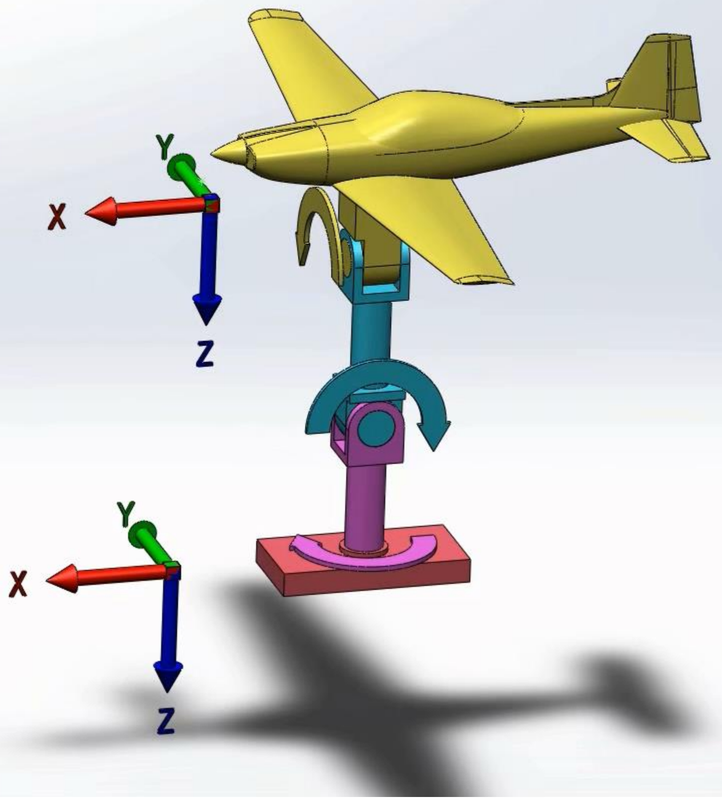
$\beta = -\frac{\pi}{2}$时 $\qquad$ 有类似结果 $\quad \alpha + \gamma = \text{Atan2}(-r_{23}, r_{22})$

欧拉角和固定角的缺点



某些情形下，同一姿态可以用无穷组欧拉角（固定角）表示

欧拉角和固定角的缺点



某些情形下，同一姿态可以用无穷组欧拉角（固定角）表示

欧拉角和固定角的缺点

其他ABC型欧拉角和CBA型固定角

类似可证

$$R_z(\alpha)R_x(\beta)R_y(\gamma), R_y(\alpha)R_x(\beta)R_z(\gamma), R_y(\alpha)R_z(\beta)R_x(\gamma),$$
$$R_x(\alpha)R_z(\beta)R_y(\gamma), R_x(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma)$$

的β角度范围均可限为$[-\pi/2, \pi/2]$；

当 $-\pi/2 < \beta < \pi/2$ 时，类似可得求取唯一欧拉角或固定角的公式；

若β等于$-\pi/2$或 $\pi/2$，有无穷组欧拉角解和固定角解，只能确定$\alpha+\gamma$或$\alpha-\gamma$的值，相应的公式可类似导出

欧拉角和固定角的缺点

ABA型欧拉角和ABA型固定角

类似可证

$$R_z(\alpha)R_x(\beta)R_z(\gamma), R_y(\alpha)R_x(\beta)R_y(\gamma), R_y(\alpha)R_z(\beta)R_y(\gamma),$$
$$R_x(\alpha)R_z(\beta)R_x(\gamma), R_x(\alpha)R_y(\beta)R_x(\gamma), R_z(\alpha)R_y(\beta)R_z(\gamma),$$

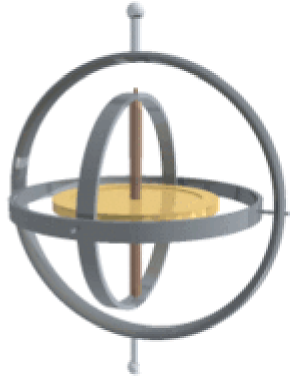
的β角度范围均可限为$[0, \pi]$；

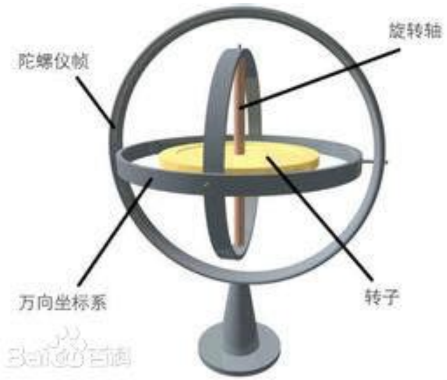
当 $0 < \beta < \pi$ 时，类似可得求取唯一欧拉角或固定角的公式；

若β等于0或π，有无穷组欧拉角解和固定角解，只能确定$\alpha+\gamma$或$\alpha-\gamma$的值，相应的公式可类似导出

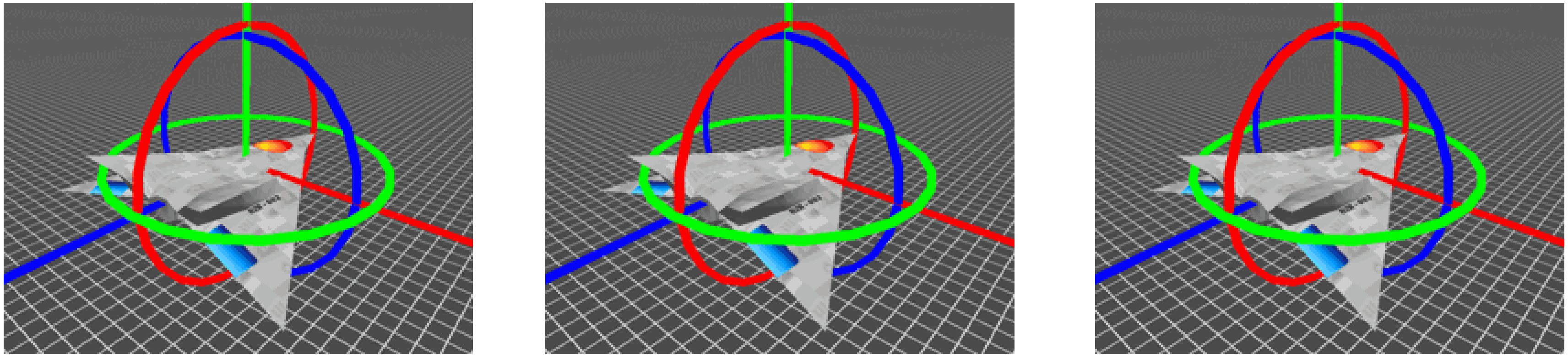
万向节死锁（Gimbal Lock）

- 万向节





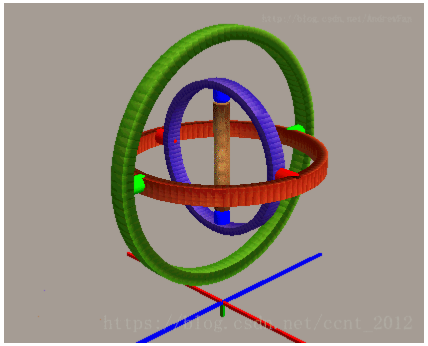
- 欧拉角与万向节



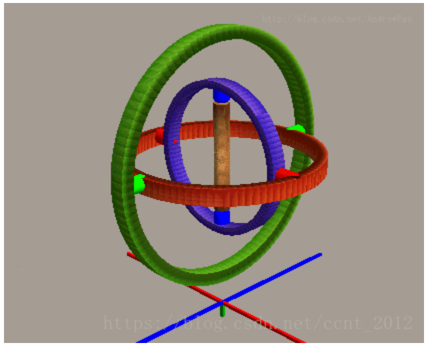
yaw pitch roll

万向节死锁（Gimbal Lock）

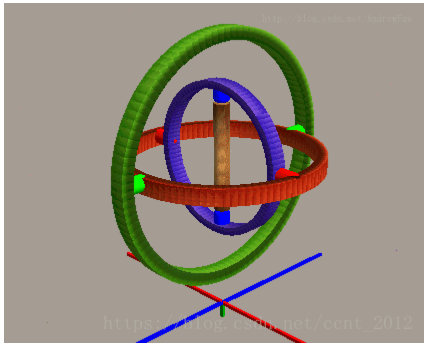
- 万向节平衡



Yaw平衡

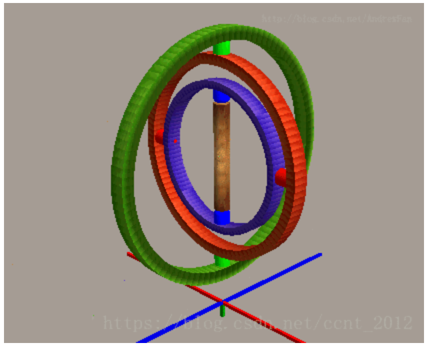


Pitch平衡



Roll平衡

- 万向节死锁



万向节死锁（Gimbal Lock）

- **Z-Y'-X'Euler角，姿态旋转矩阵为**

$$R = R_{z\alpha} R_{y'\beta} R_{x''\gamma}$$

$$= \begin{bmatrix} C\alpha & -S\alpha & 0 \\ S\alpha & C\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C\beta & 0 & S\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -S\beta & 0 & C\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & C\gamma & -S\gamma \\ 0 & S\gamma & C\gamma \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C\alpha C\beta & C\alpha S\beta S\gamma - S\alpha C\gamma & C\alpha S\beta C\gamma + S\alpha S\gamma \\ S\alpha C\beta & S\alpha S\beta S\gamma + C\alpha C\gamma & S\alpha S\beta C\gamma - C\alpha S\gamma \\ -S\beta & C\beta S\gamma & C\beta C\gamma \end{bmatrix}$$

- **β为-90°时，姿态矩阵为**

$$R = \begin{bmatrix} 0 & -S(\alpha+\gamma) & -C(\alpha+\gamma) \\ 0 & C(\alpha+\gamma) & -S(\alpha+\gamma) \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

这种情况下，可以看到，绕X轴旋转与绕Z轴旋转的效果是一样的。

2.5 等效轴角表示

CONTROL SCIENCE AND ENGINEERING

SINCE 1956

欧拉旋转定理

- 刚体姿态的等效轴角表示

飞机能否仅1次旋转从基准姿态运动到任意姿态?

即飞机绕1个合适的轴旋转1个合适的角度

定点转动：在三维空间里，假设一个刚体在运动过程中，刚体内部至少有一点固定不动，称此运动为定点转动

将联体坐标系原点设在此固定点，刚体姿态变、位置不变

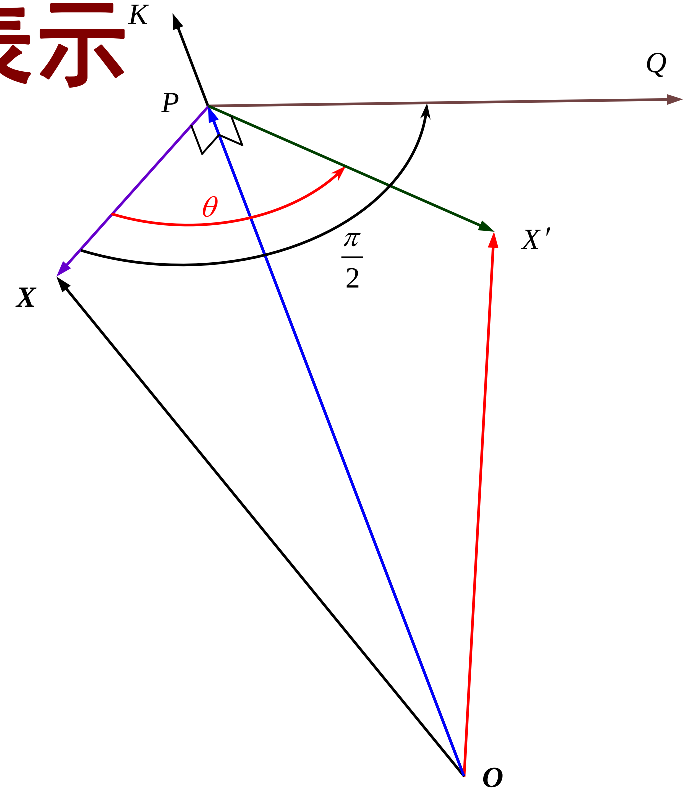
欧拉旋转定理：若刚体从初姿态作任意定点转动后呈终姿态，则必可找到一个过原点的轴K及角度θ，刚体从初姿态绕K作定轴转动θ后呈终姿态

以单位向量${}^{A}K=[k_x \ \ k_y \ \ k_z]^{\mathrm{T}}$表示旋转轴，记旋转角度为$\theta$

旋转前$\{B\}$与$\{A\}$重合，即 ${}^{A}_{B}R=I$，求$\{B\}$绕${}^{A}K$旋转θ后的 ${}^{A}_{B}R$

即分别求 $\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ 绕${}^{A}K$旋转θ后所得到的${}^{A}X_B, {}^{A}Y_B, {}^{A}Z_B$

刚体姿态的等效轴角表示



先考虑$[1\ \ 0\ \ 0]^T$, 如图

单位向量$\overrightarrow{OK}$即${}^AK$, $\overrightarrow{OX}$即$[1\ \ 0\ \ 0]^T$

$\overrightarrow{OX}$ 向 $\overrightarrow{OK}$ 作投影，得投影向量 $\overrightarrow{OP}=(\overrightarrow{OX}\cdot\overrightarrow{OK})\overrightarrow{OK}$

则 $\overrightarrow{PX}=\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{OP}$

将直角三角形OPX绕$\overrightarrow{OK}$旋转θ，得到直角三角形OPX'

$\overrightarrow{OX'}$即为旋转后的$\overrightarrow{OX}$

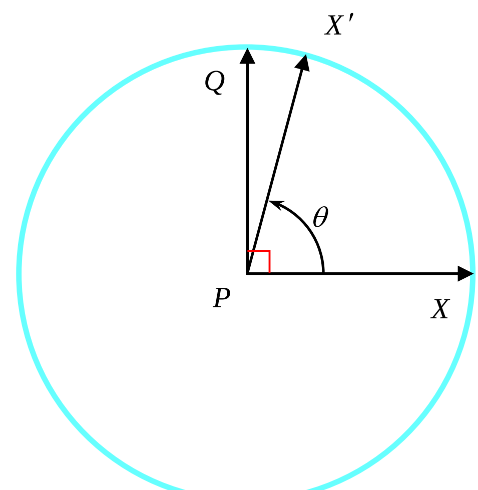
为了求得 $\overrightarrow{OX'}$，构造向量 $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OK}\times\overrightarrow{PX}$

$$\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{OK},\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{PX},\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\left|\overrightarrow{OK}\right|\left|\overrightarrow{PX}\right|\sin\frac{\pi}{2}=\left|\overrightarrow{PX}\right|$$

将 $\overrightarrow{PX}$ 绕 $\overrightarrow{OK}$ 旋转90° ，即得到 $\overrightarrow{PQ}$

显然，点P,X,Q,X'在同一平面上

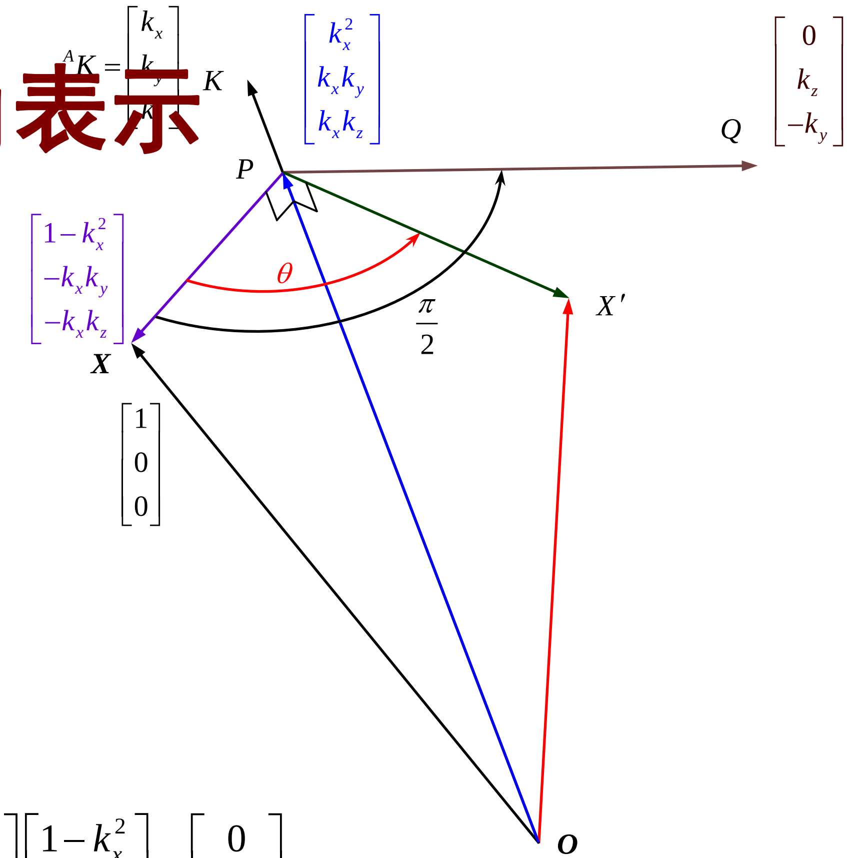
在该平面上，以点P为圆心，以$\left|\overrightarrow{PX}\right|$为半径画圆，点$X,Q,X'$在都在此圆上



且 $\overrightarrow{PX'}=\overrightarrow{PX}\cos\theta+\overrightarrow{PQ}\sin\theta$

于是 $\overrightarrow{OX'}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PX'}$

刚体姿态的等效轴角表示



投影向量 $\overrightarrow{OP} = (\overrightarrow{OX} \cdot \overrightarrow{OK})\overrightarrow{OK}$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_x^2 \\ k_x k_y \\ k_x k_z \end{bmatrix}$$

则 $\overrightarrow{PX} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP}$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} k_x^2 \\ k_x k_y \\ k_x k_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-k_x^2 \\ -k_x k_y \\ -k_x k_z \end{bmatrix}$$

构造向量 $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OK} \times \overrightarrow{PX}$

$$\begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1-k_x^2 \\ -k_x k_y \\ -k_x k_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -k_z & k_y \\ k_z & 0 & -k_x \\ -k_y & k_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-k_x^2 \\ -k_x k_y \\ -k_x k_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ k_z \\ -k_y \end{bmatrix}$$

$\overrightarrow{PX'} = \overrightarrow{PX}\cos\theta + \overrightarrow{PQ}\sin\theta$ $\qquad$ $\overrightarrow{OX'} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PX'}$

$$\begin{bmatrix} k_x^2 \\ k_x k_y \\ k_x k_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1-k_x^2 \\ -k_x k_y \\ -k_x k_z \end{bmatrix} \cos\theta + \begin{bmatrix} 0 \\ k_z \\ -k_y \end{bmatrix} \sin\theta = \begin{bmatrix} k_x^2(1-\cos\theta)+\cos\theta \\ k_x k_y(1-\cos\theta)+k_z\sin\theta \\ k_x k_z(1-\cos\theta)-k_y\sin\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_x^2 v\theta + c\theta \\ k_x k_y v\theta + k_z s\theta \\ k_x k_z v\theta - k_y s\theta \end{bmatrix}$$

其中 $v\theta = 1-\cos\theta$

刚体姿态的等效轴角表示

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}k_x^2 v\theta + c\theta \\ k_x k_y v\theta + k_z s\theta \\ k_x k_z v\theta - k_y s\theta\end{bmatrix}$$

类似可证：

$$\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}k_x k_y v\theta - k_z s\theta \\ k_y^2 v\theta + c\theta \\ k_y k_z v\theta + k_x s\theta\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}k_x k_z v\theta + k_y s\theta \\ k_y k_z v\theta - k_x s\theta \\ k_z^2 v\theta + c\theta\end{bmatrix}$$

那么

$${}^A_B R = \begin{bmatrix} k_x^2 v\theta + c\theta & k_x k_y v\theta - k_z s\theta & k_x k_z v\theta + k_y s\theta \\ k_x k_y v\theta + k_z s\theta & k_y^2 v\theta + c\theta & k_y k_z v\theta - k_x s\theta \\ k_x k_z v\theta - k_y s\theta & k_y k_z v\theta + k_x s\theta & k_z^2 v\theta + c\theta \end{bmatrix} = R_K(\theta)$$

上式以满足1个约束 $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 1$的4个变量$k_x$, k_y, k_z, θ描述了姿态

这种描述方式称为等效轴角描述，简记上式为$R_K(\theta)$

并分别称${}^A K$、θ和$R_K(\theta)$为等效轴、等效轴角和等效旋转矩阵

右乘联体左乘基

旋转前$\{B\}$与$\{A\}$不重合，即 ${}^{A}_{B}R(0) \neq I$ ，求$\{B\}$绕${}^{A}K$旋转θ后的 ${}^{A}_{B}R(1)$

另设1个坐标系$\{C\}$，$\{C\}$始终与$\{B\}$固连，旋转前$\{C\}$与$\{A\}$重合

则 ${}^{C}_{B}R$ 始终等于 ${}^{A}_{B}R(0)$，即 ${}^{C}_{B}R = {}^{A}_{B}R(0)$

旋转前的 ${}^{A}_{C}R(0) = I$ ，旋转后的 ${}^{A}_{C}R(1) = R_{K}(\theta)$

旋转后的 ${}^{A}_{B}R(1) = {}^{A}_{C}R(1)\,{}^{C}_{B}R = R_{K}(\theta)\,{}^{A}_{B}R(0)$

$$ {}^{A}_{B}R(1) = R_{K}(\theta)\,{}^{A}_{B}R(0) $$

左乘基

右乘联体左乘基

旋转前$\{B\}$与$\{A\}$不重合，即 ${}_B^AR(0) \neq I$ ，求$\{B\}$绕${}^BK$旋转θ后的 ${}_B^AR(1)$

另设1个坐标系$\{C\}$，$\{C\}$始终与$\{A\}$固连，旋转前$\{B\}$与$\{C\}$重合

则 ${}_C^AR$ 始终等于 ${}_B^AR(0)$，即 ${}_C^AR = {}_B^AR(0)$

${}^CK$ 始终等于 ${}^BK$，即 ${}^CK = {}^BK$

旋转前的 ${}_B^CR(0) = I$，旋转后的 ${}_B^CR(1) = R_K(\theta)$

旋转后的 ${}_B^AR(1) = {}_C^AR\,{}_B^CR(1) = {}_B^AR(0)R_K(\theta)$

$${}_B^AR(1) = {}_B^AR(0)R_K(\theta)$$

右乘联体左乘基

不仅适用于基本旋转矩阵，也适用于等效旋转矩阵

由欧拉旋转定理，也适用于$SO(3)$中的旋转矩阵

右乘联体左乘基

已知$\{A\}$中的向量${}^{A}P$，该向量先绕单位向量${}^{A}K_1$旋转θ_1，再绕单位向量${}^{A}K_2$旋转θ_2，最后绕单位向量${}^{A}K_3$旋转θ_3，求上述旋转后的${}^{A}P$

另设1个坐标系$\{B\}$，$\{B\}$始终与${}^{A}P$固连，旋转前$\{B\}$与$\{A\}$重合

则 ${}^{B}P$始终等于${}^{A}P$

旋转前的 ${}_{B}^{A}R(0)=I$，旋转后的 ${}_{B}^{A}R(1)=R_{K3}(\theta_3)R_{K2}(\theta_2)R_{K1}(\theta_1)I$

$$\begin{bmatrix} {}^{A}P \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:c} & {}_{B}^{A}R & & {}^{A}O_B \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} {}^{B}P \\ 1 \end{bmatrix}$$

${}^{A}P$旋转后变为${}_{B}^{A}R(1)\,{}^{B}P \;=R_{K3}(\theta_3)R_{K2}(\theta_2)R_{K1}(\theta_1)\,{}^{A}P$

若${}^{A}O_B$为零向量，则${}^{A}P={}_{B}^{A}R\,{}^{B}P$

右乘联体左乘基

已知$\{A\}$和$\{B\}$在初始时的${}^A_BR(0)$，已知与$\{B\}$固连的向量${}^BP$，$\{B\}$先绕单位向量${}^AK_1$旋转θ_1，再绕单位向量${}^BK_2$旋转θ_2，最后绕单位向量${}^AK_3$旋转θ_3，求上述旋转后${}^BP$在$\{A\}$中的描述

旋转后的 ${}^A_BR(1) = R_{K3}(\theta_3)R_{K1}(\theta_1)\,{}^A_BR(0)R_{K2}(\theta_2)$

${}^AP$旋转后变为 ${}^AP = {}^A_BR(1)\,{}^BP \; = R_{K3}(\theta_3)\,{}^A_BR(0)R_{K1}(\theta_1)R_{K2}(\theta_2)\,{}^BP$

右乘联体左乘基

右乘联体左乘基　　适用于$SE(3)$中的齐次变换矩阵吗？

已知 ${}_{B(0)}^{A}T=\left[\begin{array}{ccc:c} & {}_{B(0)}^{A}R & & {}^{A}O_{B(0)} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$，将 $T_d=\left[\begin{array}{ccc:c} & I & & P_d \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ 左乘 ${}_{B(0)}^{A}T$，得

$$
\begin{aligned}
{}_{B(1)}^{A}T = T_d\,{}_{B(0)}^{A}T &= \left[\begin{array}{ccc:c} & I & & P_d \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{ccc:c} & {}_{B(0)}^{A}R & & {}^{A}O_{B(0)} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{ccc:c} & {}_{B(0)}^{A}R & & {}^{A}O_{B(0)}+P_d \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]
\end{aligned}
$$

左乘T_d：$\{B\}$的姿态不变，$\{B\}$的原点在$\{A\}$中平移P_d

右乘联体左乘基

已知 ${}^{A}_{B(0)}T=\left[\begin{array}{ccc:c} & {}^{A}_{B(0)}R & & {}^{A}O_{B(0)} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ ，将 $T_d=\left[\begin{array}{ccc:c} & I & & P_d \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ 右乘 ${}^{A}_{B(0)}T$ ，得

$$
\begin{aligned}
{}^{A}_{B(1)}T={}^{A}_{B(0)}TT_d &=\left[\begin{array}{ccc:c} & {}^{A}_{B(0)}R & & {}^{A}O_{B(0)} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{ccc:c} & I & & P_d \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \\
&=\left[\begin{array}{ccc:c} & {}^{A}_{B(0)}R & & {}^{A}O_{B(0)}+{}^{A}_{B(0)}RP_d \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{B(0)}_{B(1)}T={}^{A}_{B(0)}T^{-1}\,{}^{A}_{B(1)}T &=\left[\begin{array}{ccc:c} & {}^{A}_{B(0)}R^{\mathrm{T}} & & -{}^{A}_{B(0)}R^{\mathrm{T}}\,{}^{A}O_{B(0)} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{ccc:c} & {}^{A}_{B(0)}R & & {}^{A}O_{B(0)}+{}^{A}_{B(0)}RP_d \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \\
&=\left[\begin{array}{ccc:c} & I & & P_d \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]
\end{aligned}
$$

右乘T_d：$\{B\}$的姿态不变，相对于联体坐标系平移P_d

右乘联体左乘基　　适用于T_d

右乘联体左乘基

已知 ${}_{B(0)}^{A}T=\left[\begin{array}{ccc:c} & {}_{B(0)}^{A}R & & {}^{A}O_{B(0)} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ ，将 $T_K(\theta)=\left[\begin{array}{ccc:c} & R_K(\theta) & & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ 右乘 ${}_{B(0)}^{A}T$ ，得

$$
\begin{aligned}
{}_{B(1)}^{A}T &= {}_{B(0)}^{A}TT_K(\theta)=\left[\begin{array}{ccc:c} & {}_{B(0)}^{A}R & & {}^{A}O_{B(0)} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{ccc:c} & R_K(\theta) & & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \\
&=\left[\begin{array}{ccc:c} & {}_{B(0)}^{A}RR_K(\theta) & & {}^{A}O_{B(0)} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]
\end{aligned}
$$

右乘$T_K(\theta)$：$\{B\}$的原点不变，姿态绕${}^{B}K$旋转θ

右乘联体左乘基

已知 ${}^{A}_{B(0)}T = \left[\begin{array}{ccc:c} & {}^{A}_{B(0)}R & & {}^{A}O_{B(0)} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ ，将 $T_K(\theta) = \left[\begin{array}{ccc:c} & R_K(\theta) & & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ 左乘 ${}^{A}_{B(0)}T$ ，得

$$
\begin{aligned}
{}^{A}_{B(1)}T = T_K(\theta)\, {}^{A}_{B(0)}T &= \left[\begin{array}{ccc:c} & R_K(\theta) & & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc:c} & {}^{A}_{B(0)}R & & {}^{A}O_{B(0)} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{ccc:c} & R_K(\theta)\, {}^{A}_{B(0)}R & & R_K(\theta)\, {}^{A}O_{B(0)} \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]
\end{aligned}
$$

左乘$T_K(\theta)$：姿态绕${}^{A}K$旋转θ，$\{B\}$的原点在$\{A\}$中平移 $(R_K(\theta) - I)\,{}^{A}O_{B(0)}$

右乘联体左乘基

适用于$T_K(\theta)$

右乘联体左乘基

$$\text{齐次变换矩阵 } T = \left[\begin{array}{ccc:c} & R_K(\theta) & & P_d \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{ccc:c} & I & & P_d \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{ccc:c} & R_K(\theta) & & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\neq \left[\begin{array}{ccc:c} & R_K(\theta) & & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{ccc:c} & I & & P_d \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$T_1\,{}_B^AT T_2 = T_{d1}T_{K1}(\theta_1)\,{}_B^AT T_{d2}T_{K2}(\theta_2)$$

右乘联体左乘基　　适用于齐次变换矩阵

需要注意：
1）右乘是先平移、后旋转；
2）左乘是先旋转、后平移；
3）相对于基础坐标系的旋转（左乘旋转），可能会产生平移

2.6 单位四元数表示

等效轴角的缺点

已知$R \in SO(3)$，求等效轴$\begin{bmatrix} k_x & k_y & k_z \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$和$\theta \in (-\pi, \pi]$使得$R = R_K(\theta)$

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_x^2 v\theta + c\theta & k_x k_y v\theta - k_z s\theta & k_x k_z v\theta + k_y s\theta \\ k_x k_y v\theta + k_z s\theta & k_y^2 v\theta + c\theta & k_y k_z v\theta - k_x s\theta \\ k_x k_z v\theta - k_y s\theta & k_y k_z v\theta + k_x s\theta & k_z^2 v\theta + c\theta \end{bmatrix} \qquad v\theta = 1 - c\theta$$

不难理解 $R_K(\theta) = R_{-K}(-\theta)$

因此规定 $\theta \in [0, \pi]$

$$\theta = \mathrm{Acos}\left(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2} \right)$$

若$\theta \in (0, \pi)$，

$$\begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sin\theta} \begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix}$$

唯一解

等效轴角的缺点

$$R=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k_x^2 v\theta + c\theta & k_x k_y v\theta - k_z s\theta & k_x k_z v\theta + k_y s\theta \\ k_x k_y v\theta + k_z s\theta & k_y^2 v\theta + c\theta & k_y k_z v\theta - k_x s\theta \\ k_x k_z v\theta - k_y s\theta & k_y k_z v\theta + k_x s\theta & k_z^2 v\theta + c\theta \end{bmatrix}$$

$$v\theta = 1 - c\theta$$

若$\theta=\pi$，

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2k_x^2-1 & 2k_x k_y & 2k_x k_z \\ 2k_x k_y & 2k_y^2-1 & 2k_y k_z \\ 2k_x k_z & 2k_y k_z & 2k_z^2-1 \end{bmatrix}$$

由 $r_{11}+r_{22}+r_{33}=(2k_x^2-1)+(2k_y^2-1)+(2k_z^2-1)=-1$，知 r_{11},r_{22},r_{33} 不会同时等于–1

以 $r_{11}\neq -1$ 为例，$k_x=\pm\sqrt{(r_{11}+1)/2}$ 进而 $\begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix}=\pm\begin{bmatrix} \sqrt{(r_{11}+1)/2} \\ r_{12}\Big/\sqrt{2(r_{11}+1)} \\ r_{13}\Big/\sqrt{2(r_{11}+1)} \end{bmatrix}$ 两组解

若$\theta=0$，

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

任何单位向量 $\begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix}$ 均可 无穷组解

关于旋转角范围的说明

在 $\{A\}$ 中描述相对静止的 $\{B\}$ 时，将欧拉角、固定角和等效轴角等旋转角限制在$(-\pi, \pi]$或$[-\pi/2, \pi/2]$是合适的

若 $\{B\}$ 在 $\{A\}$ 中的运动已预知旋转角不会穿越限制区间$(-\pi, \pi]$或$[-\pi/2, \pi/2]$的边界，对旋转角进行限制也是合适的

若 $\{B\}$ 在 $\{A\}$ 中连续多圈翻滚或翻滚范围较大，不宜对旋转角作限制

这时的旋转角计算公式可在原公式上扩展得到

欧拉参数

在等效轴 $[k_x \ \ k_y \ \ k_z]^{\mathrm{T}}$ 和等效轴角$\theta \in \mathbb{R}$的基础上，定义欧拉参数

$[\eta \quad \varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \varepsilon_3]^{\mathrm{T}}$，其中

$$\eta = \cos\frac{\theta}{2}, \qquad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_x \sin\frac{\theta}{2} \\ k_y \sin\frac{\theta}{2} \\ k_z \sin\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$$

一个标量和一个长度不超过1的3维向量

满足约束 $\eta^2 + \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2 = 1$

记$\mathbb{U}$为由全体欧拉参数构成的集合

$\mathbb{U}$是$\mathbb{R}^4$中的单位超球面

欧拉参数

$$R=\begin{bmatrix} k_x^2 v\theta + c\theta & k_x k_y v\theta - k_z s\theta & k_x k_z v\theta + k_y s\theta \\ k_x k_y v\theta + k_z s\theta & k_y^2 v\theta + c\theta & k_y k_z v\theta - k_x s\theta \\ k_x k_z v\theta - k_y s\theta & k_y k_z v\theta + k_x s\theta & k_z^2 v\theta + c\theta \end{bmatrix}$$

$$v\theta = 1 - c\theta$$

$$\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 = 2\eta^2 - 1$$

由 $\eta = \cos\frac{\theta}{2}$，知

$$v\theta = 1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = 2\eta\sin\frac{\theta}{2}$$

代入并由 $\varepsilon_1 = k_x \sin\frac{\theta}{2}, \varepsilon_2 = k_y \sin\frac{\theta}{2}, \varepsilon_3 = k_z \sin\frac{\theta}{2}$，得

$$R=\begin{bmatrix} 2(\eta^2+\varepsilon_1^2)-1 & 2(\varepsilon_1\varepsilon_2-\eta\varepsilon_3) & 2(\varepsilon_1\varepsilon_3+\eta\varepsilon_2) \\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_2+\eta\varepsilon_3) & 2(\eta^2+\varepsilon_2^2)-1 & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3-\eta\varepsilon_1) \\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_3-\eta\varepsilon_2) & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3+\eta\varepsilon_1) & 2(\eta^2+\varepsilon_3^2)-1 \end{bmatrix} = R_\varepsilon(\eta)$$

欧拉参数表示

任给一组欧拉参数，必有一个姿态（或旋转）与之对应

欧拉参数

已知$R\in SO(3)$，求欧拉参数使得

$$R=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2(\eta^2+\varepsilon_1^2)-1 & 2(\varepsilon_1\varepsilon_2-\eta\varepsilon_3) & 2(\varepsilon_1\varepsilon_3+\eta\varepsilon_2) \\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_2+\eta\varepsilon_3) & 2(\eta^2+\varepsilon_2^2)-1 & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3-\eta\varepsilon_1) \\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_3-\eta\varepsilon_2) & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3+\eta\varepsilon_1) & 2(\eta^2+\varepsilon_3^2)-1 \end{bmatrix}$$

若$r_{11}+r_{22}+r_{33}>-1$，可得两组反号的欧拉参数

$$\begin{bmatrix} \eta \\ \varepsilon \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{r_{11}+r_{22}+r_{33}+1} \\ \operatorname{sgn}(r_{32}-r_{23})\sqrt{r_{11}-r_{22}-r_{33}+1} \\ \operatorname{sgn}(r_{13}-r_{31})\sqrt{r_{22}-r_{33}-r_{11}+1} \\ \operatorname{sgn}(r_{21}-r_{12})\sqrt{r_{33}-r_{11}-r_{22}+1} \end{bmatrix} \quad \text{或} \quad \begin{bmatrix} \eta \\ \varepsilon \end{bmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} \sqrt{r_{11}+r_{22}+r_{33}+1} \\ \operatorname{sgn}(r_{32}-r_{23})\sqrt{r_{11}-r_{22}-r_{33}+1} \\ \operatorname{sgn}(r_{13}-r_{31})\sqrt{r_{22}-r_{33}-r_{11}+1} \\ \operatorname{sgn}(r_{21}-r_{12})\sqrt{r_{33}-r_{11}-r_{22}+1} \end{bmatrix}$$

欧拉参数

$$R=\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2(\eta^2+\varepsilon_1^2)-1 & 2(\varepsilon_1\varepsilon_2-\eta\varepsilon_3) & 2(\varepsilon_1\varepsilon_3+\eta\varepsilon_2) \\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_2+\eta\varepsilon_3) & 2(\eta^2+\varepsilon_2^2)-1 & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3-\eta\varepsilon_1) \\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_3-\eta\varepsilon_2) & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3+\eta\varepsilon_1) & 2(\eta^2+\varepsilon_3^2)-1 \end{bmatrix}$$

若$r_{11}+r_{22}+r_{33}=-1$，r_{11}、r_{22}和r_{33}不会同时等于-1

以$r_{11}\neq-1$为例，可得两组反号的欧拉参数

$$\begin{bmatrix} \eta \\ \varepsilon \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{r_{11}-r_{22}-r_{33}+1} \\ \mathrm{sgn}(r_{12})\sqrt{r_{22}-r_{33}-r_{11}+1} \\ \mathrm{sgn}(r_{13})\sqrt{r_{33}-r_{11}-r_{22}+1} \end{bmatrix} \quad 或 \quad \begin{bmatrix} \eta \\ \varepsilon \end{bmatrix}=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{r_{11}-r_{22}-r_{33}+1} \\ \mathrm{sgn}(r_{12})\sqrt{r_{22}-r_{33}-r_{11}+1} \\ \mathrm{sgn}(r_{13})\sqrt{r_{33}-r_{11}-r_{22}+1} \end{bmatrix}$$

任给一个姿态（或旋转），必有两组反号的欧拉参数与之对应

欧拉参数

$$R=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2(\eta^2+\varepsilon_1^2)-1 & 2(\varepsilon_1\varepsilon_2-\eta\varepsilon_3) & 2(\varepsilon_1\varepsilon_3+\eta\varepsilon_2)\\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_2+\eta\varepsilon_3) & 2(\eta^2+\varepsilon_2^2)-1 & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3-\eta\varepsilon_1)\\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_3-\eta\varepsilon_2) & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3+\eta\varepsilon_1) & 2(\eta^2+\varepsilon_3^2)-1\end{bmatrix}$$

若$r_{11}+r_{22}+r_{33}>-1$，计算公式 $\begin{bmatrix}\eta\\ \varepsilon\end{bmatrix}=\pm\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\sqrt{r_{11}+r_{22}+r_{33}+1}\\ \operatorname{sgn}(r_{32}-r_{23})\sqrt{r_{11}-r_{22}-r_{33}+1}\\ \operatorname{sgn}(r_{13}-r_{31})\sqrt{r_{22}-r_{33}-r_{11}+1}\\ \operatorname{sgn}(r_{21}-r_{12})\sqrt{r_{33}-r_{11}-r_{22}+1}\end{bmatrix}$

得到两组欧拉参数 $\begin{bmatrix}\eta\\ \varepsilon\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\pm1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$

$$\eta=\cos\frac{\theta}{2},\quad \varepsilon=\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_x\sin\frac{\theta}{2}\\ k_y\sin\frac{\theta}{2}\\ k_z\sin\frac{\theta}{2}\end{bmatrix}$$

当$\theta=2k\pi$时，利用 $\sin\frac{\theta}{2}=0$ 使得ε为零向量

Grassmann积

在$\mathbb{R}^4$中定义Grassmann积

$$\begin{bmatrix}\eta\\ \varepsilon\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}\xi\\ \delta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\eta\xi-\varepsilon^{\mathrm{T}}\delta\\ \eta\delta+\xi\varepsilon+\varepsilon\times\delta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\eta & -\varepsilon_1 & -\varepsilon_2 & -\varepsilon_3\\ \varepsilon_1 & \eta & -\varepsilon_3 & \varepsilon_2\\ \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \eta & -\varepsilon_1\\ \varepsilon_3 & -\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & \eta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi\\ \delta_1\\ \delta_2\\ \delta_3\end{bmatrix}=A\begin{bmatrix}\xi\\ \delta_1\\ \delta_2\\ \delta_3\end{bmatrix}$$

如果有 $\begin{bmatrix}\eta\\ \varepsilon\end{bmatrix}\in\mathbb{U}$，则 $A^{\mathrm{T}}A=I$

如果还有 $\begin{bmatrix}\xi\\ \delta\end{bmatrix}\in\mathbb{U}$，则 $[\xi\quad\delta^{\mathrm{T}}]A^{\mathrm{T}}A\begin{bmatrix}\xi\\ \delta\end{bmatrix}=1$ 即 $\begin{bmatrix}\eta\xi-\varepsilon^{\mathrm{T}}\delta\\ \eta\delta+\xi\varepsilon+\varepsilon\times\delta\end{bmatrix}\in\mathbb{U}$

$\mathbb{U}$中任意两个向量的Grassmann积仍是$\mathbb{U}$中的向量

令 $\zeta=\eta\xi-\varepsilon^{\mathrm{T}}\delta=\eta\xi-\varepsilon_1\delta_1-\varepsilon_2\delta_2-\varepsilon_3\delta_3$

$$\rho=\begin{bmatrix}\rho_1\\ \rho_2\\ \rho_3\end{bmatrix}=\eta\delta+\xi\varepsilon+\varepsilon\times\delta=\begin{bmatrix}\eta\delta_1+\varepsilon_1\xi+\varepsilon_2\delta_3-\varepsilon_3\delta_2\\ \eta\delta_2-\varepsilon_1\delta_3+\varepsilon_2\xi+\varepsilon_3\delta_1\\ \eta\delta_3+\varepsilon_1\delta_2-\varepsilon_2\delta_1+\varepsilon_3\xi\end{bmatrix}$$

Grassmann积

对应 $\begin{bmatrix}\eta\\ \varepsilon\end{bmatrix}\in\mathbb{U}$，有旋转矩阵 $R_\varepsilon(\eta)=\begin{bmatrix}2(\eta^2+\varepsilon_1^2)-1 & 2(\varepsilon_1\varepsilon_2-\eta\varepsilon_3) & 2(\varepsilon_1\varepsilon_3+\eta\varepsilon_2)\\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_2+\eta\varepsilon_3) & 2(\eta^2+\varepsilon_2^2)-1 & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3-\eta\varepsilon_1)\\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_3-\eta\varepsilon_2) & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3+\eta\varepsilon_1) & 2(\eta^2+\varepsilon_3^2)-1\end{bmatrix}$

对应 $\begin{bmatrix}\xi\\ \delta\end{bmatrix}\in\mathbb{U}$，有旋转矩阵 $R_\delta(\xi)=\begin{bmatrix}2(\xi^2+\delta_1^2)-1 & 2(\delta_1\delta_2-\xi\delta_3) & 2(\delta_1\delta_3+\xi\delta_2)\\ 2(\delta_1\delta_2+\xi\delta_3) & 2(\xi^2+\delta_2^2)-1 & 2(\delta_2\delta_3-\xi\delta_1)\\ 2(\delta_1\delta_3-\xi\delta_2) & 2(\delta_2\delta_3+\xi\delta_1) & 2(\xi^2+\delta_3^2)-1\end{bmatrix}$

对应 $\begin{bmatrix}\zeta\\ \rho\end{bmatrix}\in\mathbb{U}$，有旋转矩阵 $R_\rho(\zeta)=\begin{bmatrix}2(\zeta^2+\rho_1^2)-1 & 2(\rho_1\rho_2-\zeta\rho_3) & 2(\rho_1\rho_3+\zeta\rho_2)\\ 2(\rho_1\rho_2+\zeta\rho_3) & 2(\zeta^2+\rho_2^2)-1 & 2(\rho_2\rho_3-\zeta\rho_1)\\ 2(\rho_1\rho_3-\zeta\rho_2) & 2(\rho_2\rho_3+\zeta\rho_1) & 2(\zeta^2+\rho_3^2)-1\end{bmatrix}$

对于上述矩阵，可证得 $R_\varepsilon(\eta)R_\delta(\xi)=R_\rho(\zeta)$

$\mathbb{U}$中的Grassmann积相当于$SO(3)$中的乘法

基于Grassmann积，欧拉参数可在$\mathbb{U}$中直接描述3维姿态和3维坐标系旋转

右乘联体左乘基

适用于欧拉参数

四元数

引入三个虚数单位***i*, *j*, *k***, 并规定 $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$

由此规定，可推得 $ij = k, ji = -k, jk = i, kj = -i, ki = j, ik = -j$

对任何$[\eta \quad \varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \varepsilon_3]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^4$，其对应的四元数为 $\eta + i\varepsilon_1 + j\varepsilon_2 + k\varepsilon_3$

记$\mathbb{H}$为由全体四元数构成的集合

四元数加法的定义

$$(\eta + i\varepsilon_1 + j\varepsilon_2 + k\varepsilon_3) + (\xi + i\delta_1 + j\delta_2 + k\delta_3)$$
$$= (\eta + \xi) + i(\varepsilon_1 + \delta_1) + j(\varepsilon_2 + \delta_2) + k(\varepsilon_3 + \delta_3)$$

四元数

$$\begin{bmatrix}\eta\\ \varepsilon\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}\xi\\ \delta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\eta & -\varepsilon_1 & -\varepsilon_2 & -\varepsilon_3\\ \varepsilon_1 & \eta & -\varepsilon_3 & \varepsilon_2\\ \varepsilon_2 & \varepsilon_3 & \eta & -\varepsilon_1\\ \varepsilon_3 & -\varepsilon_2 & \varepsilon_1 & \eta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi\\ \delta_1\\ \delta_2\\ \delta_3\end{bmatrix}$$

四元数乘法的定义

$$\begin{aligned}(\eta+i\varepsilon_1+j\varepsilon_2+k\varepsilon_3)(\xi+i\delta_1+j\delta_2+k\delta_3)=&(\eta\xi-\varepsilon_1\delta_1-\varepsilon_2\delta_2-\varepsilon_3\delta_3)\\ &+i(\eta\delta_1+\varepsilon_1\xi+\varepsilon_2\delta_3-\varepsilon_3\delta_2)\\ &+j(\eta\delta_2-\varepsilon_1\delta_3+\varepsilon_2\xi+\varepsilon_3\delta_1)\\ &+k(\eta\delta_3+\varepsilon_1\delta_2-\varepsilon_2\delta_1+\varepsilon_3\xi)\end{aligned}$$

$\mathbb{H}$中的乘法相当于$\mathbb{R}^4$中的Grassmann积

四元数共轭的定义

$\eta+i\varepsilon_1+j\varepsilon_2+k\varepsilon_3$的共轭 $(\eta+i\varepsilon_1+j\varepsilon_2+k\varepsilon_3)^*=\eta-i\varepsilon_1-j\varepsilon_2-k\varepsilon_3$

四元数模长的定义

$\eta+i\varepsilon_1+j\varepsilon_2+k\varepsilon_3$的模长 $|\eta+i\varepsilon_1+j\varepsilon_2+k\varepsilon_3|=\sqrt{\eta^2+\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\varepsilon_3^2}$

单位四元数

单位四元数是模长等于1的四元数　　单位四元数的共轭还是单位四元数

单位四元数与欧拉参数一一对应

基于乘法，单位四元数可直接描述3维姿态和3维坐标系旋转

$\boxed{\text{右乘联体左乘基}}$　适用于单位四元数

原点不变条件下的3维向量的转换公式 ${}^{A}P = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}P$

记　${}^{B}P = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$　　${}^{A}P = \begin{bmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$

旋转矩阵基于欧拉参数表达为

$$ {}^{A}_{B}R = R_{\varepsilon}(\eta) = \begin{bmatrix} 2(\eta^2+\varepsilon_1^2)-1 & 2(\varepsilon_1\varepsilon_2-\eta\varepsilon_3) & 2(\varepsilon_1\varepsilon_3+\eta\varepsilon_2) \\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_2+\eta\varepsilon_3) & 2(\eta^2+\varepsilon_2^2)-1 & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3-\eta\varepsilon_1) \\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_3-\eta\varepsilon_2) & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3+\eta\varepsilon_1) & 2(\eta^2+\varepsilon_3^2)-1 \end{bmatrix} $$

命题：上述3维向量的转换公式可基于单位四元数表达为

$$ ix_2 + jy_2 + kz_2 = (\eta + i\varepsilon_1 + j\varepsilon_2 + k\varepsilon_3)(ix_1 + jy_1 + kz_1)(\eta + i\varepsilon_1 + j\varepsilon_2 + k\varepsilon_3)^* $$

注意：因可能出现非单位四元数，“右乘联体左乘基”不适用于上式

Thanks !