浙江大学 20 <u>19</u> — 20 <u>20</u> 春夏学期

《复变函数》课程期末考试试卷

课程号: 751Q0006 , 开课学院: 数学科学学院

考试试卷: ✓A 卷、 B 卷 (请在选定项上打✓)

考试形式: ✓闭、开卷 (请在选定项上打✓), 允许带 无 进场

考试日期: 2020 年 06 月 23 日, 考试时间: 120 分钟

诚信考试, 沉着应考, 杜绝违纪

考生姓名: ________ 学号: ________ 所属院系: ________

由 *CC98 @Serapay* 整理

1. (40分,每小题 10 分)

(1) 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}[3+(-1)^n]^n z^n$ 的收敛半径;

(2) 写出一个从第一象限到单位圆盘的双全纯映射 f, 满足 $f\left(e^{\frac{\pi i}{4}}\right)=0$

(3) 计算积分 $\int_{|z|=1}\frac{e^{\frac{1}{z}}}{z-a}|\mathrm{d}z|$, 其中 $|z|<a$;

(4) 将环形区域 $A=\{1<|a|<3\}$ 上的全纯函数 $f(z)=\frac{1}{z}-\frac{a}{z-b}, a\in\mathbb{C}, b\notin A$ 展开成 Laurent 级数.

2. (15分) 记 $f(z)=z^d+a_{d-1}z^{d-1}+\cdots+a_1z+a_0$ 是 d 次首一多项式.

(1) 如果当 $|z|\leq 1$ 时, $|f(z)|\leq 1$, 证明: $f(z)=z^d$;

(2) 记 $||f||_\rho=\max\limits_{|z|=\rho}|f(z)|$, 证明: 函数 $h(r)=\frac{||f||_r}{r^d}$ 要么严格单调递减, 要么是常数, 并求出 $h(r)$ 是常数的充要条件.

3. (15分) 假设 $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 全纯.

(1) 证明: $|f(z) - f(-z)| \leq 2|z|$;

(2) 若上述不等式对某个 $z_0 \neq 0$ 等号成立, 那么 f 具有怎么样的表达式? 证明你的结论.

4. (20分) 叙述 Riemann 映射定理, 并对有界区域的情形给出证明.

5. (15分) 设 f 在 $\overline{D(0,R)}$ 上全纯, 且在 $|z| = R$ 上不取零值. 若

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = 2,$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}z\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = 2,$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=R}z^2\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = -4,$$

求出 f 在 $D(0,R)$ 上的所有根.