自动控制原理

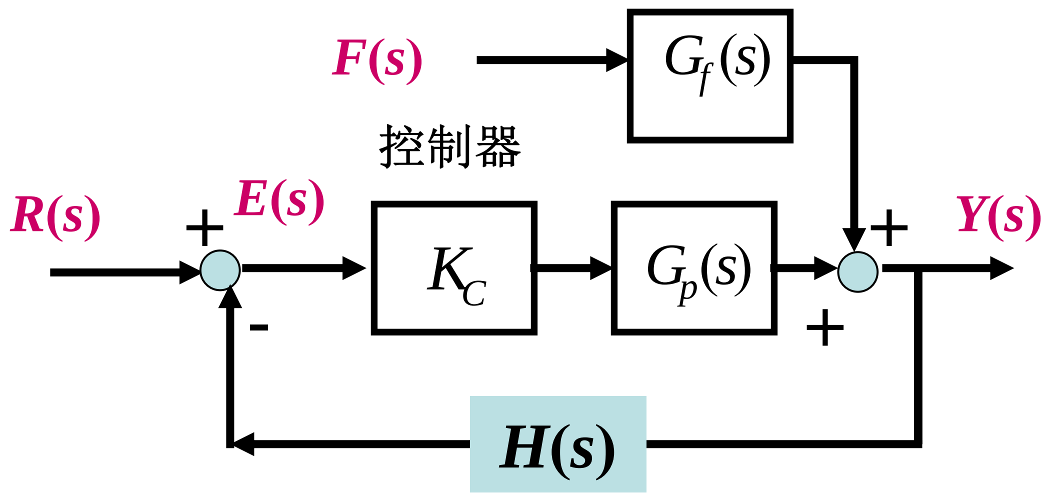
Principle of Automatic Control

第四章 CHAPTER 4

连续时间控制系统的稳定性与稳态误差

稳态误差

- 控制系统的性能：稳　快　准



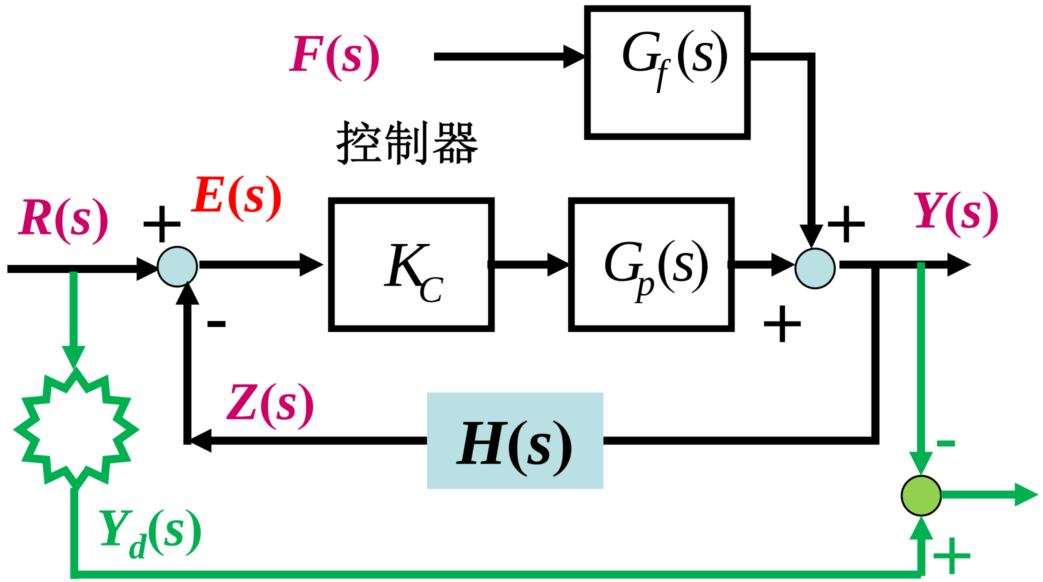
- 典型输入的全响应=自由响应+强迫响应

$$y(t) = y_{ss}(t) + y_{tr}(t)$$

- 对于稳定系统，自由响应将最终衰减至零，即有

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{t \to \infty} y_{ss}(t)$$

稳态误差



系统误差有两种定义方法

- 从输出端定义，将误差定义为期望输出与实际输出之差 $e(t)=y_d(t)-y(t)$
  但这种误差通常无法直接得到
- 从输入端定义，将误差定义为输入信号与反馈信号之差

  $e(t)=r(t)-z(t)$ $\quad E(s)=R(t)-Z(s)=R(t)-H(s)Y(s)$

  从输入端定义的误差又称为偏差，偏差可直接得到，常为工程上采用
- 如果系统是单位负反馈系统，则$z(t)=y(t)$，$r(t)=y_d(t)$，两种定义方法无差别
- 本课程采用从输入端定义的方法
- 稳态误差（静态误差或余差）定义为 $e_{ss}=\lim\limits_{t\to\infty}e(t)=\lim\limits_{t\to\infty}[r(t)-z(t)]$

稳态误差

- 系统输出 $Y(s)=Y_r(s)+Y_f(s)$

- 系统误差的拉普拉斯变换形式为

$$E(s)=R(s)-H(s)Y(s)=R(s)-H(s)Y_r(s)-H(s)Y_f(s)=E_r(s)+E_f(s)$$

由参考输入产生

$$E_r(s)=R(s)-H(s)Y_r(s)$$
$$=R(s)-H(s)Y_r(s)$$
$$=R(s)-H(s)\frac{G_c(s)G_p(s)}{1+G_c(s)G_p(s)H(s)}R(s)$$
$$=\frac{1}{1+G_c(s)G_p(s)H(s)}R(s)$$

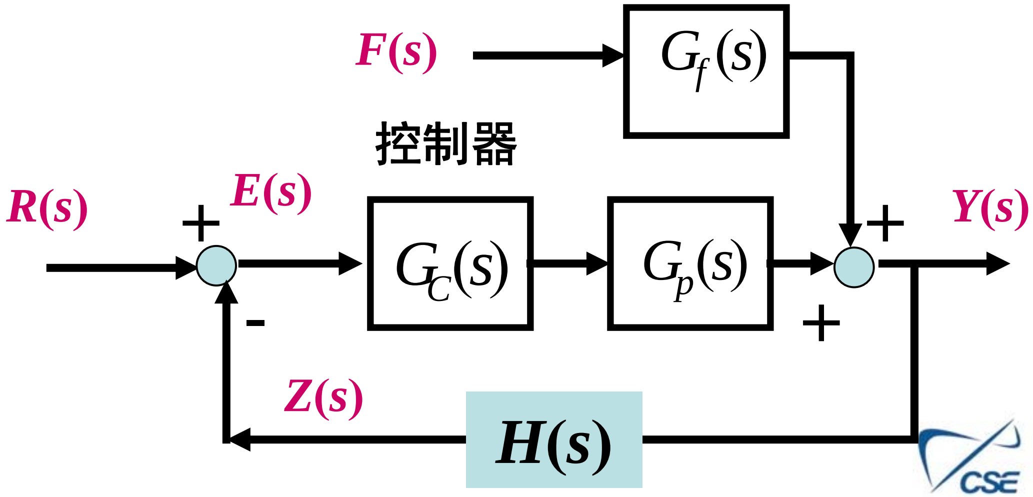
$$e_{ssr}=\lim_{t\to\infty}e_r(t)$$

$$e_{ss}=e_{ssr}+e_{ssf}$$

由扰动产生

$$E_f(s)=-H(s)Y_f(s)=\frac{-G_f(s)H(s)}{1+G_c(s)G_p(s)H(s)}F(s)$$

$$e_{ssf}=\lim_{t\to\infty}e_f(t)$$



终值定理方法

- 终值定理：若$L[f(t)]=F(s)$且$F(s)$满足下列条件之一：

  (1) $F(s)$的所有极点在左半开平面

  (2) $F(s)$有一个极点在原点，其它极点在左半开平面

  则$f(t)$存在有界终值并且

$$\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{s\to 0} sF(s)$$

终值定理的等价表述：

若$L[f(t)]=F(s)$且$sF(s)$的所有极点在左半开平面

则$f(t)$存在有界终值并且

$$\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{s\to 0} sF(s)$$

如图系统，已知$G_p(s)=\dfrac{3}{10s+1}, G_f(s)=\dfrac{2}{5s+1}, H(s)=\dfrac{0.5}{0.3s+1}, G_C(s)=\dfrac{2s+1}{s}$，求如下情形的余差

(1) $r(t)=u_{-1}(t), f(t)=0.5u_{-1}(t)$

(2) $r(t)=u_{-2}(t), f(t)=0.5u_{-1}(t)$

(3) $r(t)=\sin t, f(t)=0.5u_{-1}(t)$

解（1）

$$E_r(s)=R(s)-H(s)Y_r(s)=\frac{1}{1+G_c(s)G_p(s)H(s)}R(s)=\frac{1}{1+\frac{2s+1}{s}\frac{3}{10s+1}\frac{0.5}{0.3s+1}}\frac{1}{s}=\frac{3s^2+10.3s+1}{3s^3+10.3s^2+4s+1.5}$$

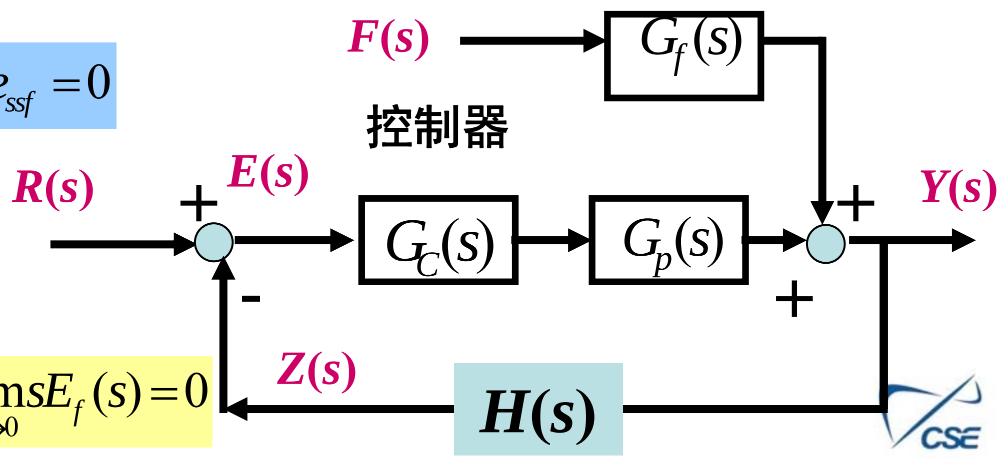
$10.3\times4>3\times1.5\Rightarrow E_r(s)$的极点均在左半开平面

$$e_{ssr}=\lim_{t\to\infty}e_r(t)=\lim_{s\to0}sE_r(s)=0$$

$$E_f(s)=-H(s)Y_f(s)=\frac{-G_f(s)H(s)}{1+G_c(s)G_p(s)H(s)}F(s)=\frac{-5s-0.5}{15s^4+54.5s^3+30.3s^2+11.5s+1.5}$$

x^4	15	30.3	1.5
x^3	54.5	11.5	
x^2	27.13	1.5	
x^1	8.49		
x^0	1.5		

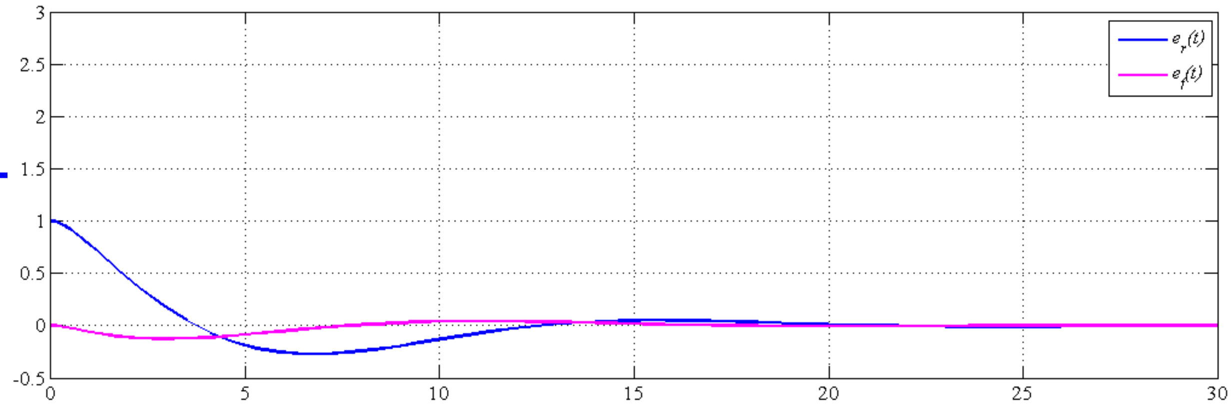
余差$e_{ss}=e_{ssr}+e_{ssf}=0$

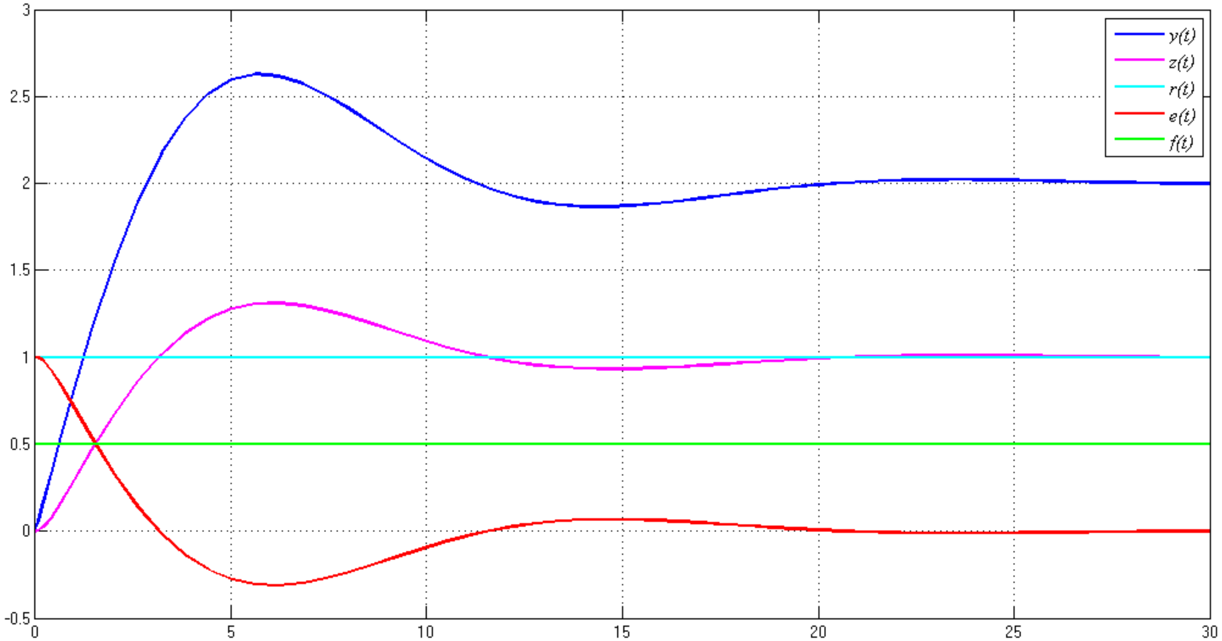


$E_f(s)$的极点均在左半开平面

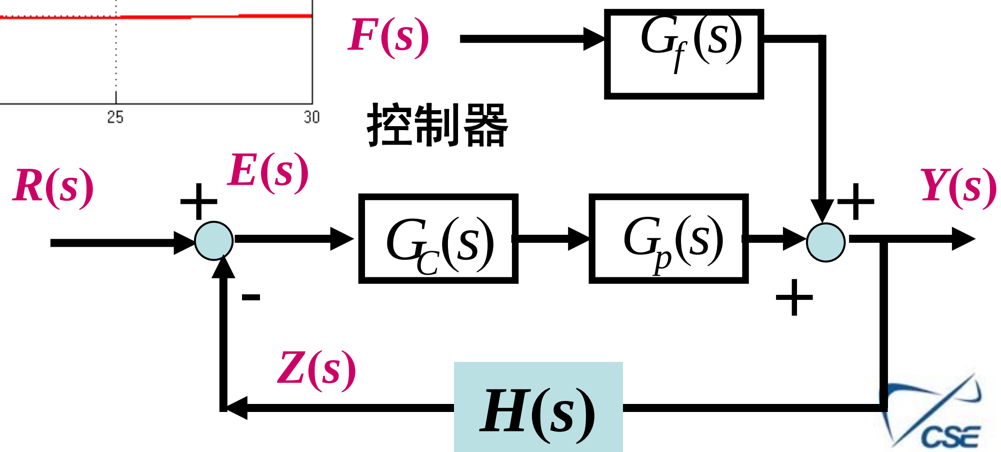
$$e_{ssf}=\lim_{t\to\infty}e_f(t)=\lim_{s\to0}sE_f(s)=0$$

终值定理方法

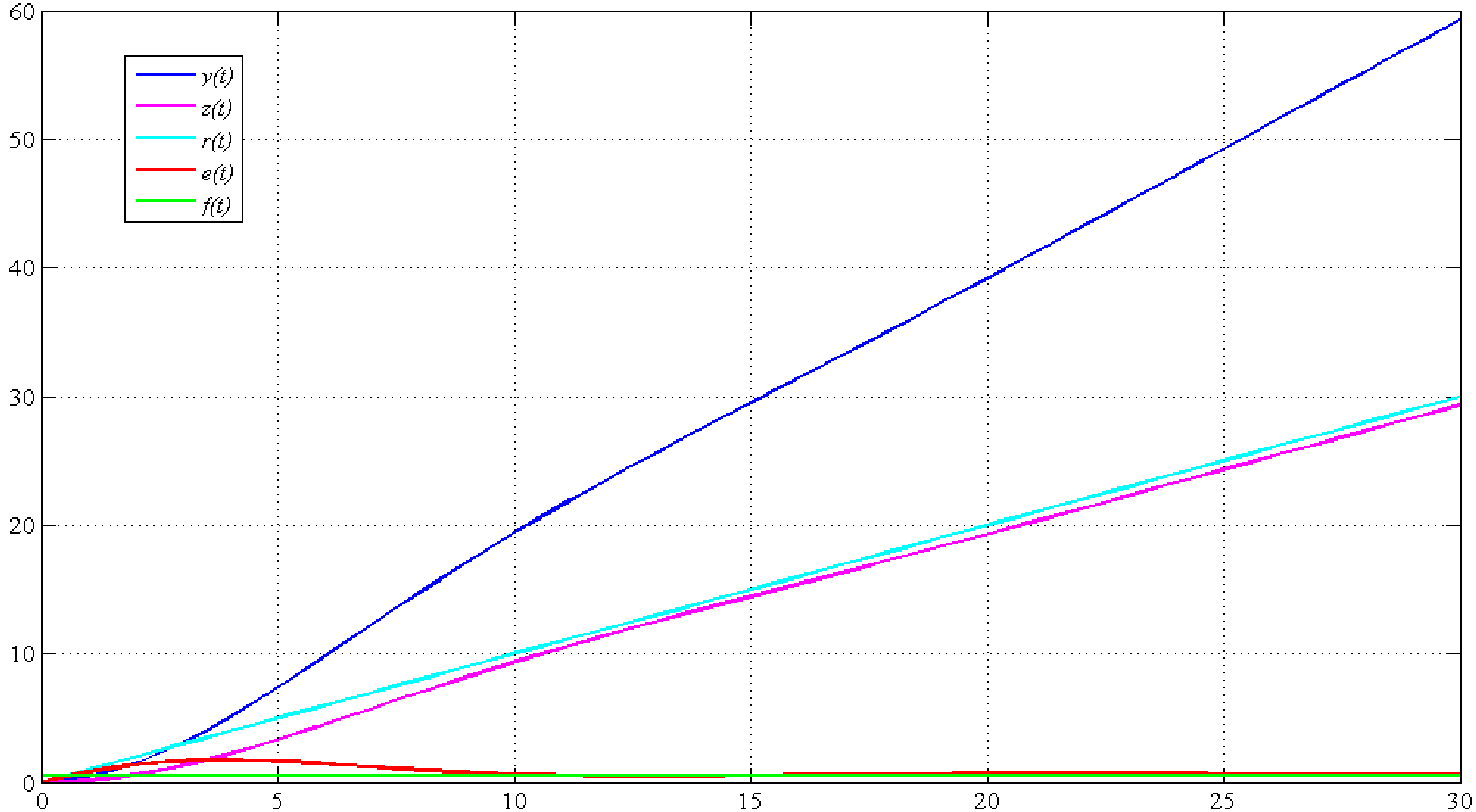




余差$e_{ss}=0$



终值定



（2）

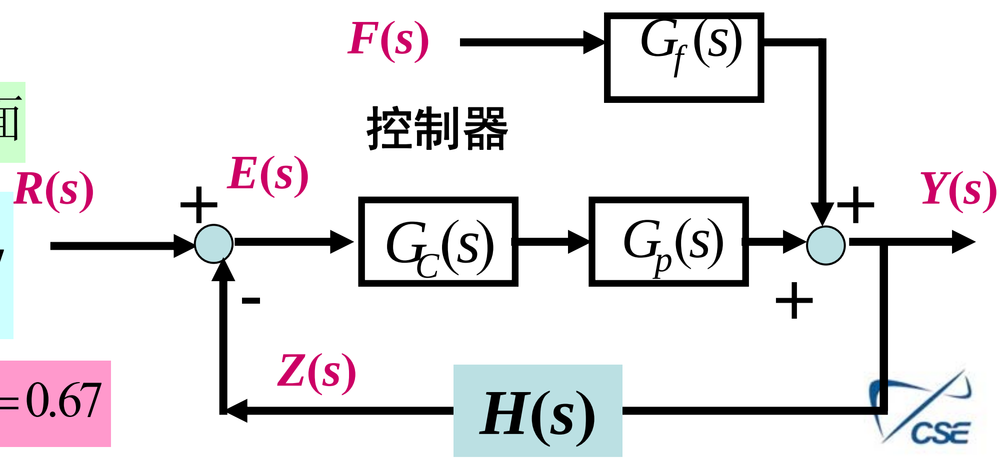
$$E_r(s)=\frac{3s^2+10.3s+1}{3s^3+10.3s^2+4s+1.5}\frac{1}{s}$$

$E_r(s)$有一极点在原点，其它极点均在左半开平面

$$e_{ssr}=\lim_{s\to 0}sE_r(s)=\lim_{s\to 0}s\frac{3s^2+10.3s+1}{3s^3+10.3s^2+4s+1.5}\frac{1}{s}=0.67$$

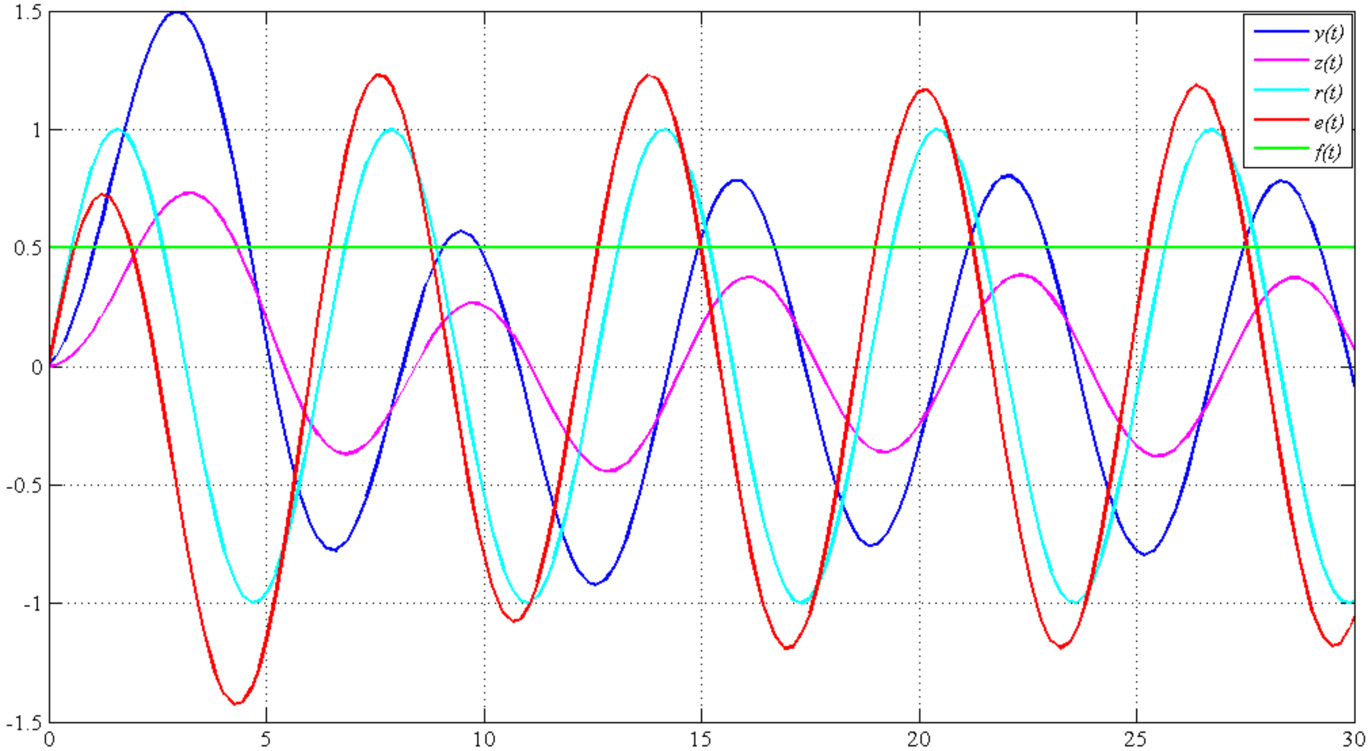
$E_f(s)$与 ⑴ 同，$e_{ssf}=0$

余差$e_{ss}=e_{ssr}+e_{ssf}=0.67$



终值定理方

x^5	3	7	4
x^4	103	118	15
x^3	1	1	
x^2	1	1	
x^1	2	0	
x^0	1		



（3）

$$E_r(s)=\frac{1}{1+\frac{2s+1}{s}\frac{3}{10s+1}\frac{0.5}{0.3s+1}}\frac{1}{s^2+1}$$

$$=\frac{3s^3+10.3s^2+s}{3s^5+10.3s^4+7s^3+11.8s^2+4s+1.5}$$

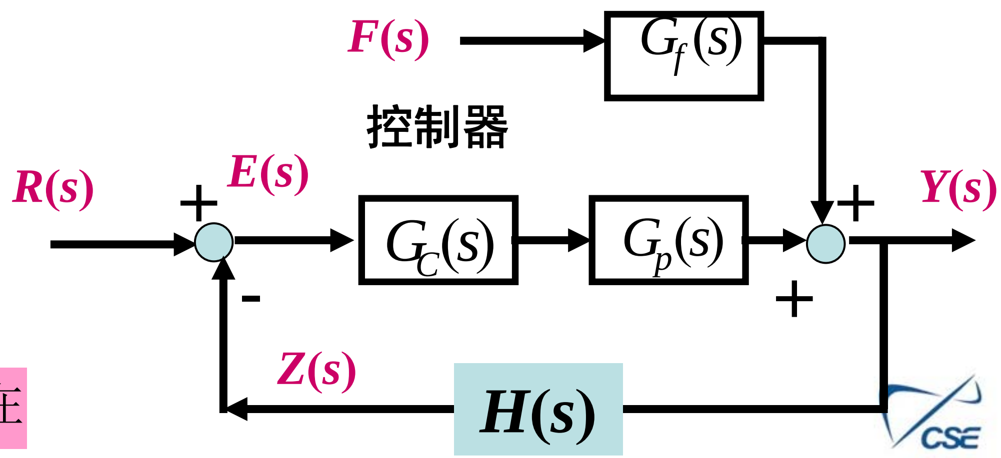
$E_r(s)$有一对极点在虚轴上，$e_r(t)$有界但不收敛

e_{ssr}不存在，终值定理不能用

$E_f(s)$与 ⑴ 同，$e_{ssf}=0$

余差e_{ss}不存在

稳态误差不仅取决于输入 $r(t)$ 和 $f(t)$，还取决于系统传递函数



如图系统，已知$G_p(s)=\dfrac{3}{10s+1},G_f(s)=\dfrac{2}{5s+1},H(s)=\dfrac{0.5}{0.3s+1},G_C(s)=2$，求如下情形的余差

$r(t)=u_{-1}(t), f(t)=0.5u_{-1}(t)$

解

$$E_r(s)=\frac{1}{1+G_c(s)G_p(s)H(s)}R(s)=\frac{1}{1+2\dfrac{3}{10s+1}\dfrac{0.5}{0.3s+1}}\frac{1}{s}=\frac{3s^2+10.3s+1}{s(3s^2+10.3s+4)}$$

$E_r(s)$有一极点在原点，其它极点均在左半开平面

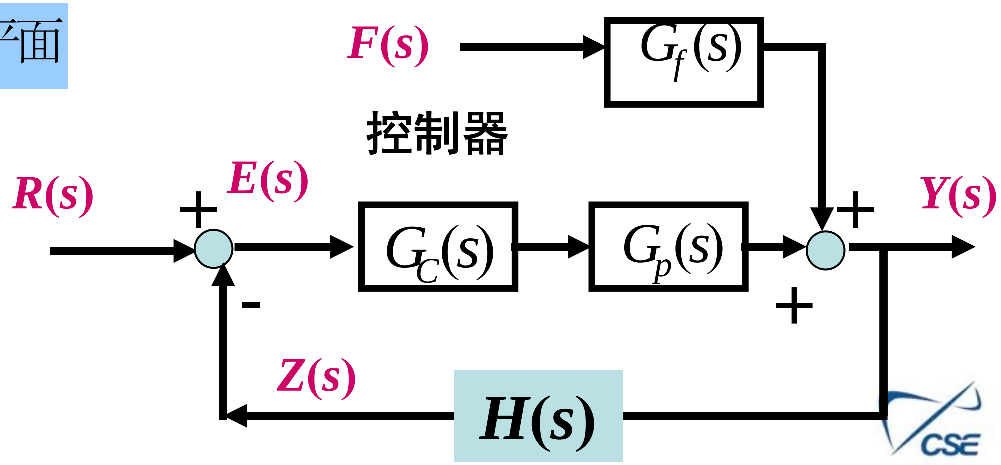
$$e_{ssr}=\lim_{t\to\infty}e_r(t)=\lim_{s\to 0}sE_r(s)=0.25$$

$$E_f(s)=\frac{-G_f(s)H(s)}{1+G_c(s)G_p(s)H(s)}F(s)=\frac{-5s-0.5}{s(15s^3+54.5s^2+30.3s+4)}$$

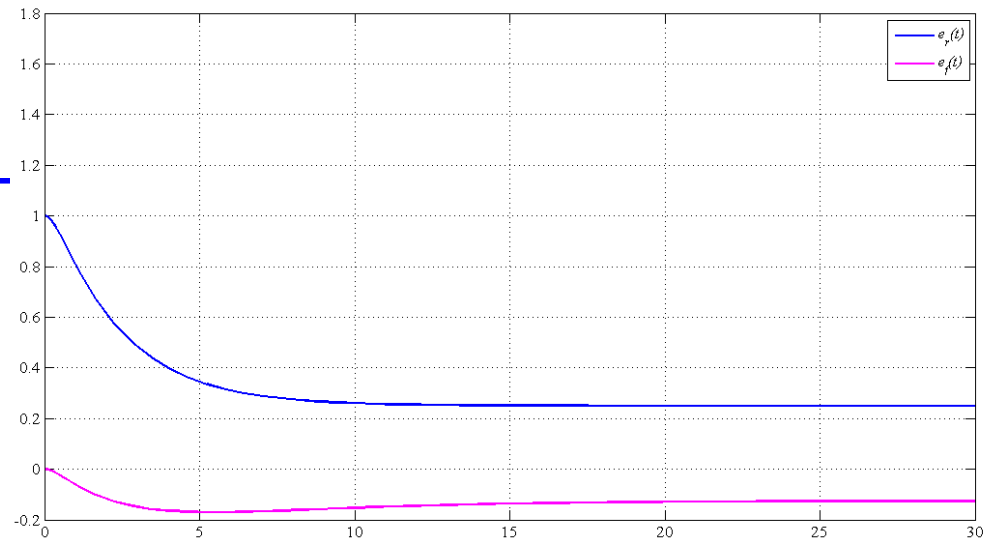
$E_f(s)$有一极点在原点，其它极点均在左半开平面

$$e_{ssf}=\lim_{t\to\infty}e_f(t)=\lim_{s\to 0}sE_f(s)=-0.125$$

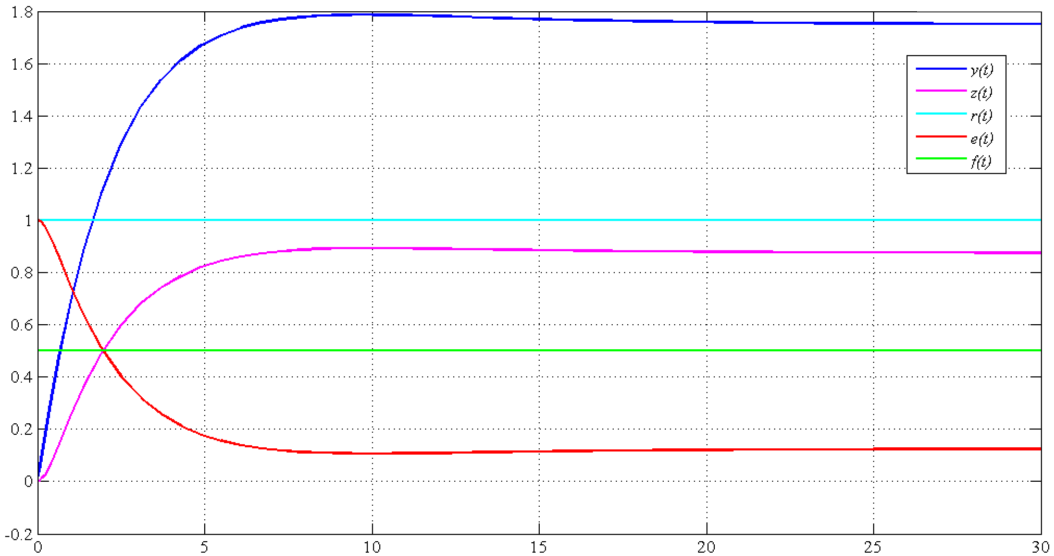
余差$e_{ss}=e_{ssr}+e_{ssf}=0.125$



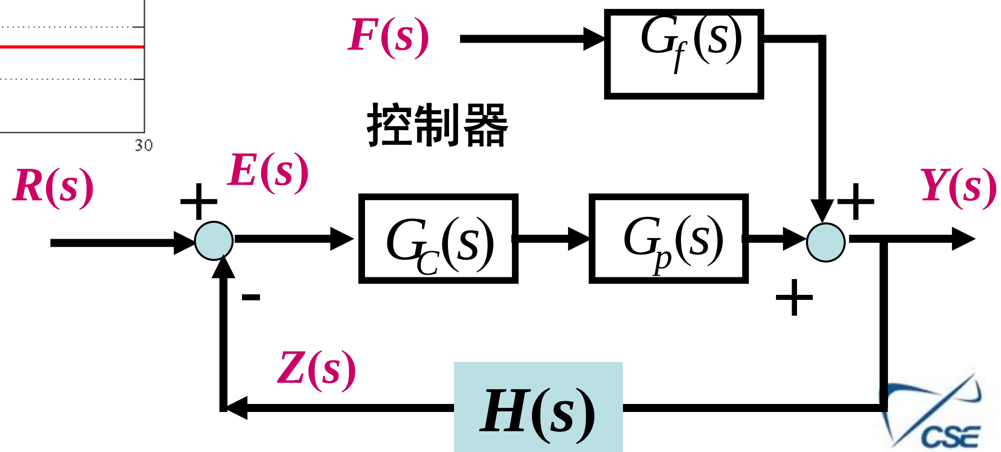
终值定理方法



在闭环系统中，若参考输入和干扰均为阶跃，控制器中的积分可使e_{ssr}、e_{ssf}和e_{ss}均等于零



余差$e_{ss}=0.125$



单位负反馈系统的型别

➢ 对于下图所示的单位负反馈系统（称为“跟踪系统”），系统的开环传递函数为：$G(s)=Y(s)/E(s)$，仅考虑参考输入

开环传递函数

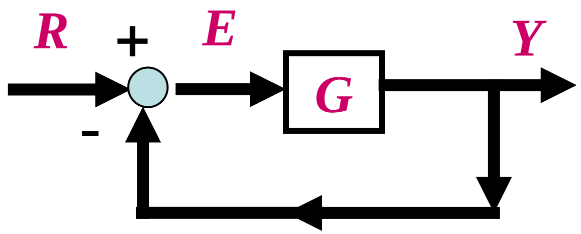
$$G(s)=\frac{K\prod_k (T_k s+1)\prod_l (T_l^2 s^2+2\zeta T_l s+1)}{\prod_i (T_i s+1)\prod_j (T_j^2 s^2+2\zeta T_j s+1)} s^q = \frac{K\beta(s)}{s^m \alpha(s)} \qquad m=-q$$

若$s=0$，则$\alpha(s)=\beta(s)=1$

闭环传递函数$\Phi(s)=\dfrac{G(s)}{1+G(s)}$

称K是闭环系统$\Phi(s)$的开环增益

称$m\in\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$是闭环系统$\Phi(s)$的型别



单位负反馈系统

实际中，闭环控制系统的型别多为0、1或2，称之为“0”型系统、“1”型系统或“2”型系统

“0”型系统的开环增益K也记为K_0

“1”型系统的开环增益K也记为K_1

“2”型系统的开环增益K也记为K_2

单位负反馈系统的型别

当$m \geq 0$时

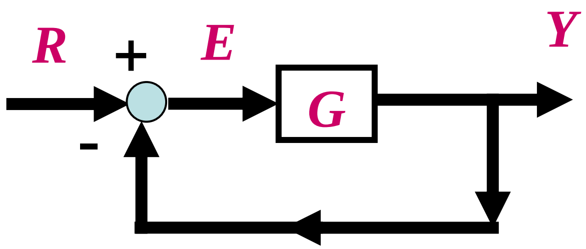
$$E(s)=\frac{R(s)}{1+G(s)}=\frac{R(s)}{1+\dfrac{K\beta(s)}{s^m\alpha(s)}}=\frac{s^m\alpha(s)R(s)}{s^m\alpha(s)+K\beta(s)}=\frac{s^m\alpha(s)R(s)}{A(s)}$$

当闭环系统稳定时，$A(s)=0$的根均在左半开平面

若e_{ss}存在

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0} sE(s)=\lim_{s\to 0} s\frac{s^m\alpha(s)R(s)}{s^m\alpha(s)+K\beta(s)}=\lim_{s\to 0}\frac{s^{m+1}}{s^m+K}R(s)$$

用上面公式，可在阶跃、斜坡、抛物线等输入下对各型别系统进行分析

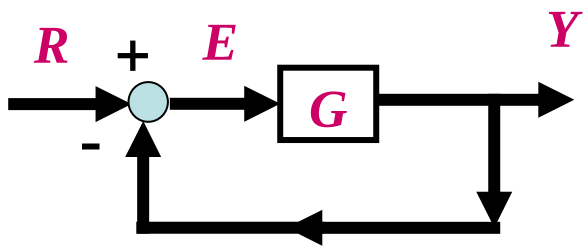


单位负反馈系统

0型系统（m=0）

$$E(s)=\frac{s^m\alpha(s)R(s)}{A(s)}$$

若e_{ss}存在，$e_{ss}=\lim\limits_{s\to 0}\frac{s^{m+1}}{s^m+K}R(s)$



单位负反馈系统

➢ **阶跃输入：** $r(t)=R_0,\ R(s)=R_0/s$

闭环稳定 $\Rightarrow E(s)=\frac{\alpha(s)}{A(s)}\frac{R_0}{s}$ 满足终值定理条件

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}\frac{s}{1+K_0}\frac{R_0}{s}=\frac{R_0}{1+K_0}\neq 0$$

能有差跟踪阶跃，余差与R_0和K_0有关

➢ **斜坡输入：** $r(t)=R_1t,\ R(s)=R_1/s^2$

闭环稳定 $\Rightarrow E(s)=\frac{\alpha(s)}{A(s)}\frac{R_1}{s^2}$ 不满足终值定理条件

$e(t)$中有模态t（斜坡模态），$\lim\limits_{t\to\infty}e(t)=\infty$

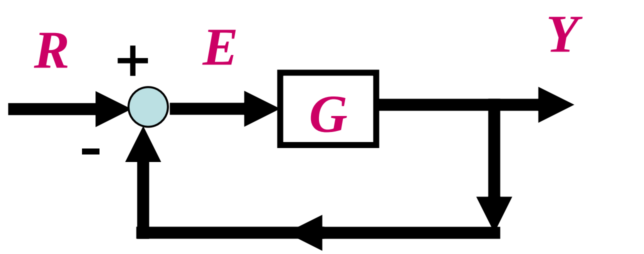
不能跟踪斜坡

➢ **抛物线输入：** $r(t)=0.5R_2t^2,\ R(s)=R_2/s^3$

同理可证，$e(t)$中有模态t^2（抛物线模态），$\lim\limits_{t\to\infty}e(t)=\infty$

不能跟踪抛物线

1型系统（m=1）



单位负反馈系统

$$E(s)=\frac{s^m\alpha(s)R(s)}{A(s)}$$

若e_{ss}存在，$e_{ss}=\lim\limits_{s\to 0}\frac{s^{m+1}}{s^m+K}R(s)$

- **阶跃输入：** $r(t)=R_0,\ R(s)=R_0/s$

闭环稳定 $\Rightarrow E(s)=\frac{s\alpha(s)}{A(s)}\frac{R_0}{s}$ 满足终值定理条件

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}\frac{s^2}{s+K_1}\frac{R_0}{s}=0$$

能无差跟踪阶跃

- **斜坡输入：** $r(t)=R_1t,\ R(s)=R_1/s^2$

闭环稳定 $\Rightarrow E(s)=\frac{s\alpha(s)}{A(s)}\frac{R_1}{s^2}$ 满足终值定理条件

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}\frac{s^2}{s+K_1}\frac{R_1}{s^2}=\frac{R_1}{K_1}$$

能有差跟踪斜坡，余差与R_1和K_1有关

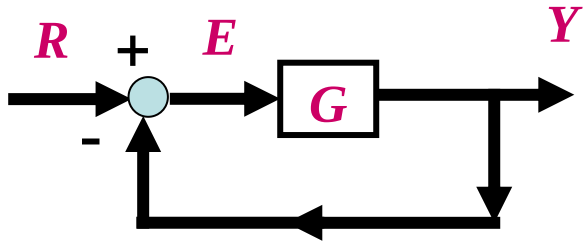
- **抛物线输入：** $r(t)=0.5R_2t^2,\ R(s)=R_2/s^3$

闭环稳定 $\Rightarrow E(s)=\frac{s\alpha(s)}{A(s)}\frac{R_2}{s^3}$ 不满足终值定理条件

$e(t)$中有模态t（斜坡模态），$\lim\limits_{t\to\infty}e(t)=\infty$

不能跟踪抛物线

2型系统（m=2）



单位反馈系统

$$E(s)=\frac{s^m\alpha(s)R(s)}{A(s)}$$

若e_{ss}存在，$e_{ss}=\lim\limits_{s\to 0}\frac{s^{m+1}}{s^m+K}R(s)$

- **阶跃输入：** $r(t)=R_0,\ R(s)=R_0/s$

闭环稳定 $\Rightarrow E(s)=\frac{s^2\alpha(s)}{A(s)}\frac{R_0}{s}$ 满足终值定理条件

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}\frac{s^3}{s^2+K_2}\frac{R_0}{s}=0$$

能无差跟踪阶跃

- **斜坡输入：** $r(t)=R_1t,\ R(s)=R_1/s^2$

闭环稳定 $\Rightarrow E(s)=\frac{s^2\alpha(s)}{A(s)}\frac{R_1}{s^2}$ 满足终值定理条件

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}\frac{s^3}{s^2+K_2}\frac{R_1}{s^2}=0$$

能无差跟踪斜坡

- **抛物线输入：** $r(t)=0.5R_2t^2,\ R(s)=R_2/s^3$

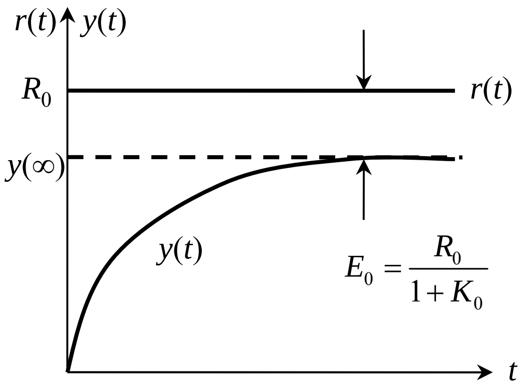
闭环稳定 $\Rightarrow E(s)=\frac{s^2\alpha(s)}{A(s)}\frac{R_2}{s^3}$ 满足终值定理条件

$$e_{ss}=\lim_{s\to 0}\frac{s^3}{s^2+K_2}\frac{R_2}{s^3}=\frac{R_2}{K_2}$$

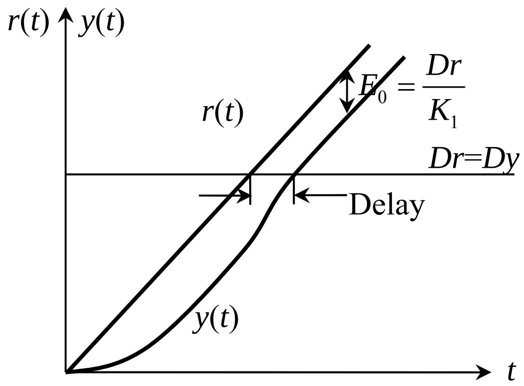
能有差跟踪抛物线，余差与R_2和K_2有关

误差系数

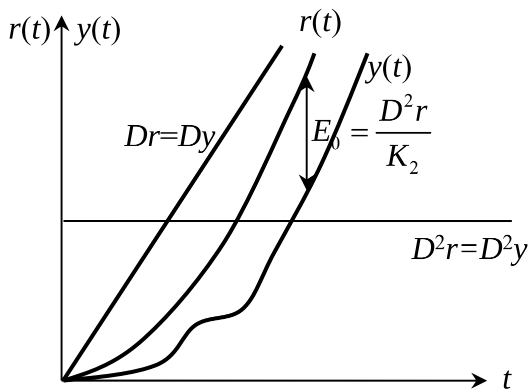
➢ 系统误差系数是在给定的参考输入（常数或慢时变）下，单位负反馈稳定控制系统稳态精度的一种度量



0型系统对阶跃输入的响应



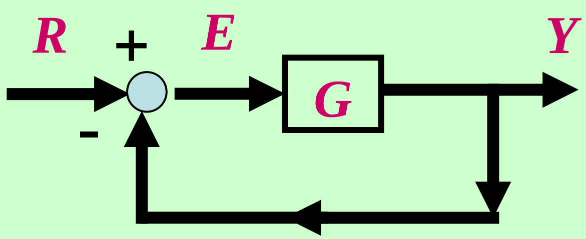
1型系统对斜坡输入的响应



2型系统对抛物线输入的响应

对稳定单位负反馈系统输入$\frac{R_p}{s^{p+1}}$，若余差e_{ss}为有界常数，则强迫输出（强迫响应）的p阶微分必为常数

$$\frac{\text{稳态输出的}p\text{阶微分}}{e_{ss}}=\text{常数}$$



单位负反馈系统

阶跃误差系数（位置误差系数）

- 误差系数与系统型别无关，据输入的形式来定义，如阶跃、斜坡和抛物线
- 误差系数只针对稳定的单位负反馈系统

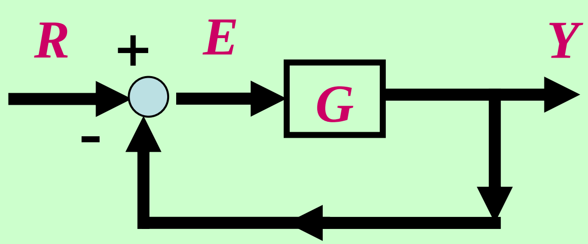
$$\text{阶跃误差系数定义为} K_p = \frac{\lim\limits_{t\to\infty} y(t)}{e_{ss}}$$

仅适用于阶跃输入

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \lim_{s\to 0} s\left[\frac{G(s)}{1+G(s)}\frac{R_0}{s}\right] = \lim_{s\to 0}\left[\frac{G(s)}{1+G(s)}R_0\right]$$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\left[\frac{1}{1+G(s)}\frac{R_0}{s}\right] = \lim_{s\to 0}\left[\frac{1}{1+G(s)}R_0\right]$$

$$K_p = \lim_{s\to 0}\left[\frac{G(s)}{1+G(s)}R_0\right] \Big/ \lim_{s\to 0}\left[\frac{1}{1+G(s)}R_0\right] = \lim_{s\to 0} G(s)$$



单位负反馈系统

$$G(s) = \frac{K\beta(s)}{s^m\alpha(s)}$$

$$K_p = \begin{cases} K_0 & \text{0 型系统} \\ \infty & \text{1 型系统} \\ \infty & \text{2 型系统} \end{cases}$$

斜坡误差系数（速度误差系数）

$$\text{斜坡误差系数定义为} K_v = \frac{\lim\limits_{t\to\infty} \frac{dy(t)}{dt}}{e_{ss}}$$

仅适用于斜坡输入

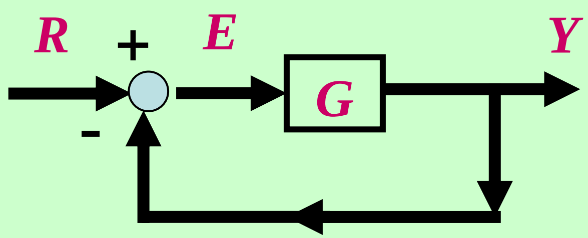
$$\lim_{t\to\infty} \frac{dy(t)}{dt} = \lim_{s\to 0} s^2 Y(s) = \lim_{s\to 0} s^2 \left[\frac{G(s)}{1+G(s)} \frac{R_1}{s^2} \right] = \lim_{s\to 0} \left[\frac{G(s)}{1+G(s)} R_1 \right]$$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s \left[\frac{1}{1+G(s)} \frac{R_1}{s^2} \right] = \lim_{s\to 0} \left[\frac{1}{1+G(s)} \frac{R_1}{s} \right]$$

$$K_v = \lim_{s\to 0} \left[\frac{G(s)}{1+G(s)} R_1 \right] \Big/ \lim_{s\to 0} \left[\frac{1}{1+G(s)} \frac{R_1}{s} \right] = \lim_{s\to 0} sG(s)$$

$$sG(s) = s \frac{K\beta(s)}{s^m \alpha(s)}$$

$$K_v = \begin{cases} 0 & \text{0 型系统} \\ K_1 & \text{1 型系统} \\ \infty & \text{2 型系统} \end{cases}$$



单位负反馈系统

抛物线误差系数（加速度误差系数）

$$\text{抛物线误差系数定义为} K_a = \frac{\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2}}{e_{ss}}$$

仅适用于抛物线输入

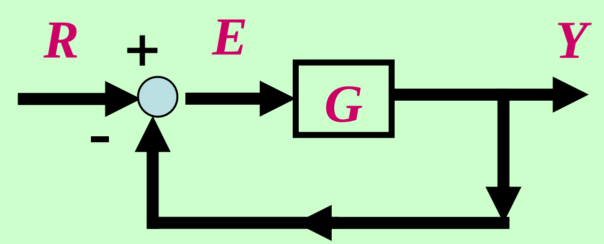
$$\lim_{t\to\infty} \frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} = \lim_{s\to 0} s^3 Y(s) = \lim_{s\to 0} s^3 \left[\frac{G(s)}{1+G(s)} \frac{R_2}{s^3} \right] = \lim_{s\to 0} \left[\frac{G(s)}{1+G(s)} R_2 \right]$$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s \left[\frac{1}{1+G(s)} \frac{R_2}{s^3} \right] = \lim_{s\to 0} \left[\frac{1}{1+G(s)} \frac{R_2}{s^2} \right]$$

$$K_v = \lim_{s\to 0} \left[\frac{G(s)}{1+G(s)} R_2 \right] \Big/ \lim_{s\to 0} \left[\frac{1}{1+G(s)} \frac{R_2}{s^2} \right] = \lim_{s\to 0} s^2 G(s)$$

$$s^2 G(s) = s^2 \frac{K\beta(s)}{s^m \alpha(s)}$$

$$K_a = \begin{cases} 0 & \text{0 型系统} \\ 0 & \text{1 型系统} \\ K_2 & \text{2 型系统} \end{cases}$$



单位负反馈系统

型别-误差系数方法

系统型别	误差系数			稳态误差		
	K_p	K_v	K_a	阶跃输入 $R_0(t)$	斜坡输入 $R_1 t$	抛物线输入 $\frac{R_2}{2}t^2$
0	K_0	0	0	$\frac{R_0}{1+K_p}$	∞	∞
1	∞	K_1	0	0	$\frac{R_1}{K_v}$	∞
2	∞	∞	K_2	0	0	$\frac{R_2}{K_a}$

型别-误差系数方法

例 已知单位负反馈系统的开环传递函数： $G(s)=\dfrac{50}{(0.1s+1)(2s+1)}$

试求位置(step)误差系数K_p，速度(ramp)误差系数K_v，加速度(parabolic)误差系数K_a

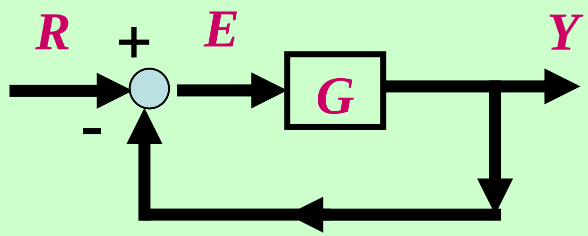
解： 首先判断系统的稳定性

$m=0$，这是"0"型系统，

位置误差系数K_p $$K_p=\lim_{s\to 0}G(s)=\lim_{s\to 0}\frac{50}{(0.1s+1)(2s+1)}=50$$

速度误差系数K_v $$K_v=\lim_{s\to 0}s\cdot G(s)=0$$

加速度误差系数K_a $$K_a=\lim_{s\to 0}s^2\cdot G(s)=0$$



单位负反馈系统

型别-误差系数方法

例 已知单位负反馈系统的开环传递函数：

$$G(s)=\frac{K}{s(s^2+4s+200)}$$

试求位置误差系数 K_p，速度误差系数 K_v，加速度误差系数 K_a

解：首先判断系统的稳定性

$m=1$，这是 "1" 型 系统，

位置误差系数 K_p

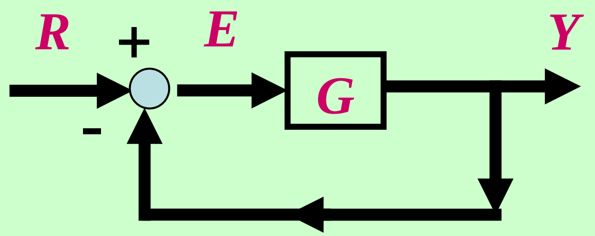
$$K_p=\lim_{s\to 0}G(s)=\infty$$

速度误差系数 K_v

$$K_v=\lim_{s\to 0}s\cdot G(s)=\lim_{s\to 0}s\cdot\frac{K}{s(s^2+4s+200)}=\frac{K}{200}$$

加速度误差系数 K_a

$$K_a=\lim_{s\to 0}s^2\cdot G(s)=0$$



单位负反馈系统

型别-误差系数方法

例 已知单位负反馈系统的开环传递函数：

$$G(s)=\frac{10(2s+1)(4s+1)}{s^2(s^2+2s+10)}$$

试求位置误差系数K_p，速度误差系数K_v，加速度误差系数K_a

解：首先判断系统的稳定性

m=2，这是 “2” 型系统，

位置误差系数K_p

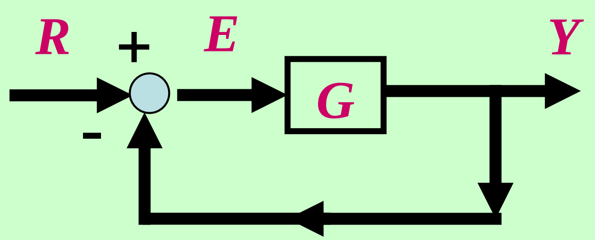
$$K_p=\lim_{s\to 0}G(s)=\infty$$

速度误差系数K_v

$$K_v=\lim_{s\to 0}s\cdot G(s)=\infty$$

加速度误差系数K_a

$$K_a=\lim_{s\to 0}s^2\cdot G(s)=\lim_{s\to 0}s^2\cdot\frac{10(2s+1)(4s+1)}{s^2(s^2+2s+10)}=1$$



单位负反馈系统

型别-误差系数方法

例 已知单位负反馈系统的开环传递函数：

$$G(s)=\frac{100}{(0.1s+1)(s+5)}$$

试求输入分别为 $r(t)=2t$ 和 $r(t)=2+2t+t^2$ 时，系统的稳态误差

解：首先判断系统的稳定性

因为m=0，这是 **“0” 型系统**，故有

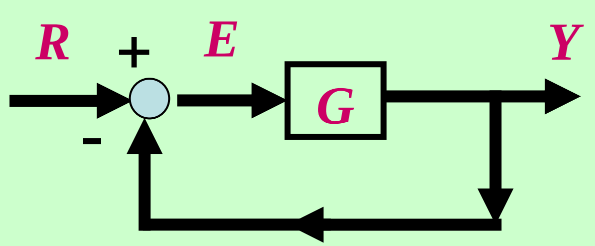
位置误差系数K_p

$$K_p=\lim_{s\to 0}G(s)=\lim_{s\to 0}\frac{100}{(0.1s+1)(s+5)}=20$$

速度误差系数K_v与加速度误差系数K_a均为零。又因是线性系统，满足迭加原理，故当输入分别为 $r(t)=2t$ 和 $r(t)=2+2t+t^2$ 时，系统的稳态误差为

$$e(\infty)=\infty$$

这是因为 “0” 型系统不能跟踪斜坡输入与抛物线输入之故



单位负反馈系统

型别-误差系数方法

例 已知单位负反馈系统的开环传递函数：

$$G(s)=\frac{50}{s(0.1s+1)(s+5)}$$

试求输入分别为 $r(t)=2t$ 和 $r(t)=2+2t+t^2$ 时，系统的稳态误差

解：首先判断系统的稳定性

因为m=1，这是“1”型系统，故有

位置误差系数K_p

$$K_p=\lim_{s\to0}G(s)=\infty$$

速度误差系数K_v

$$K_v=\lim_{s\to0}sG(s)=\lim_{s\to0}s\frac{50}{s(0.1s+1)(s+5)}=10$$

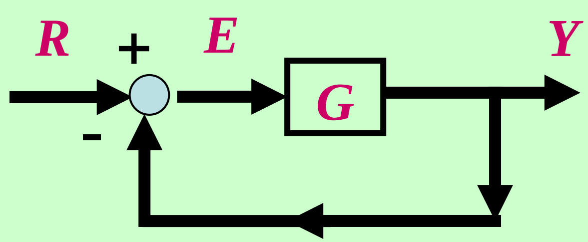
加速度误差系数K_a为零。当输入为 $r(t)=2t$时，系统稳态误差：

$$e(\infty)=\frac{R_1}{K_v}=\frac{2}{10}=0.2$$

当输入为 $r(t)=2+2t+t^2$

$$e(\infty)=\infty$$

因“1”型系统不能跟踪抛物线输入



单位负反馈系统

型别-误差系数方法

例 已知单位负反馈系统的开环传递函数：

$$G(s)=\frac{10(2s+1)}{s^2(s^2+6s+100)}$$

试求输入分别为 $r(t)=2t$ 和 $r(t)=2+2t+t^2$ 时，系统的稳态误差

解：首先判断系统的稳定性

因为m=2，这是 “2” 型系统，故有

位置误差系数K_p与速度误差系数K_v

$$K_p=K_v=\infty$$

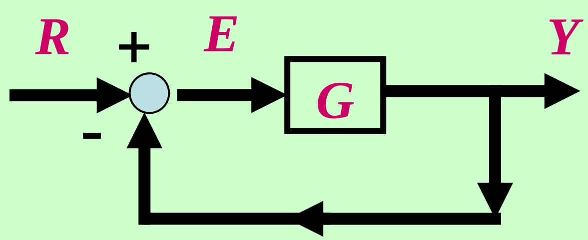
加速度误差系数K_a

$$K_a=\lim_{s\to 0} s^2\cdot G(s)=\lim_{s\to 0} s^2\cdot\frac{10(2s+1)}{s^2(s^2+6s+100)}=0.1$$

当输入为 $r(t)=2t$ $\quad e(\infty)=0$

当输入为 $r(t)=2+2t+t^2$

$$e(\infty)=\frac{R_2}{K_a}=\frac{2}{0.1}=20$$



单位负反馈系统

型别-误差系数方法

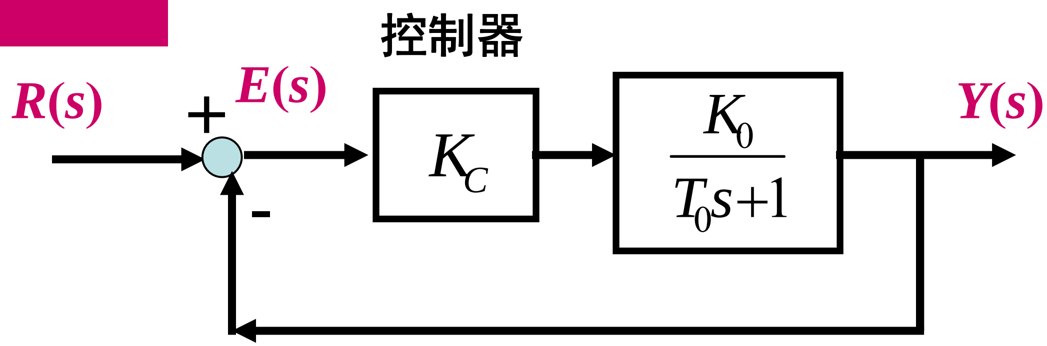
- m 型系统可以以零稳态误差跟踪具有 t^{m-1} 及更低次形式的输入

- m 型系统可以可以跟踪具有 t^{m} 形式的输入，但存在常数稳态误差

- m 型系统不能跟踪具有 t^{m+1} 及更高次形式的输入，因为稳态误差趋向于无穷值

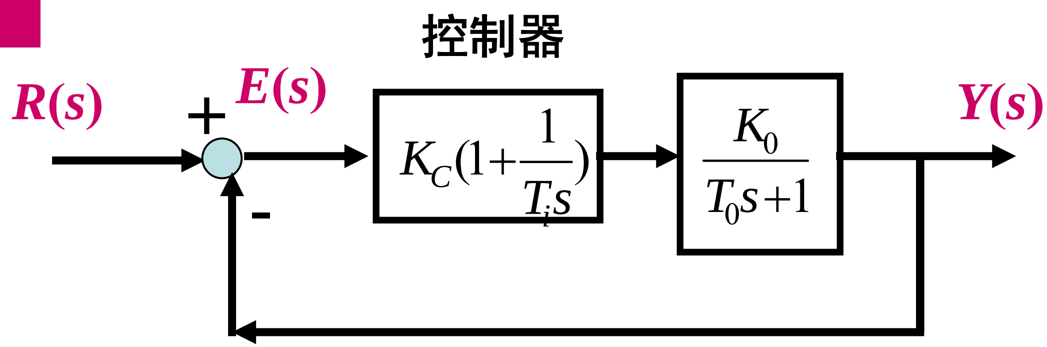
型别-误差系数方法

考虑比例控制器



0 型系统！

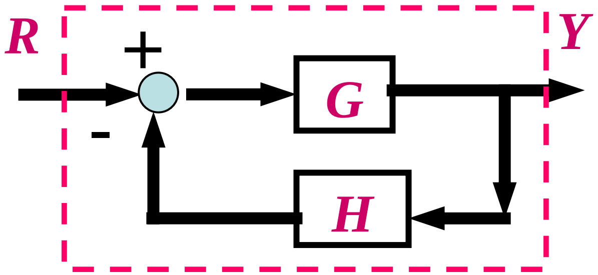
应用比例积分控制器



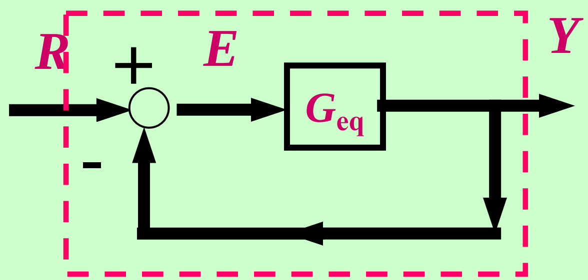
1 型系统！

非单位负反馈系统

- 非单位负反馈系统可以通过数学变换转换为等价的单位负反馈系统，再通过分析等价系统的型别和稳态误差系数来分析原系统的误差。



非单位负反馈系统



单位负反馈系统

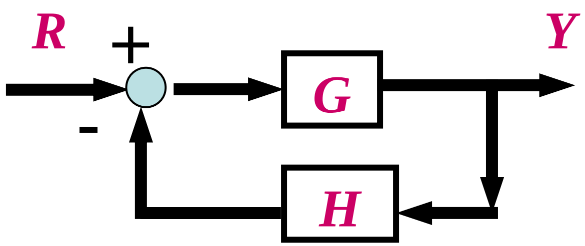
$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}=\frac{N(s)}{D(s)} \Leftrightarrow \frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{G_{eq}(s)}{1+G_{eq}(s)} \Rightarrow G_{eq}(s)=\frac{N(s)}{D(s)-N(s)}$$

- 当非单位负反馈系统稳定时，其稳态性能特征可以基于上式进行分析

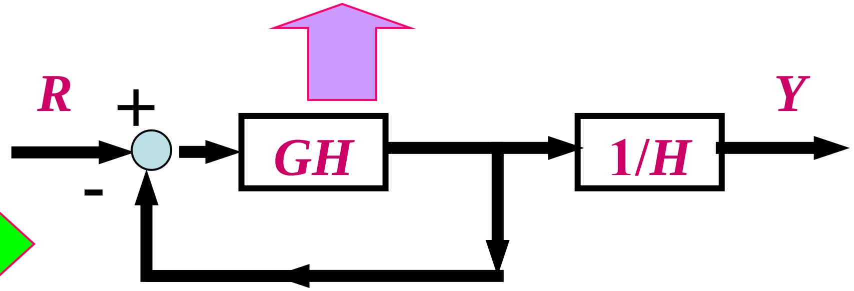
非单位负反馈系统

➢ 非单位负反馈系统的等效表示

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\left[\frac{G(s)H(s)}{1+G(s)H(s)}\right]\frac{1}{H(s)}$$



非单位负反馈系统



系统的等效单位负反馈系统

➢ 当 H 为常数时，有利于利用单位负反馈系统方法进行系统设计。

Thanks!