第六章　频率特性分析法

CHAPTER 6 Frequency Response

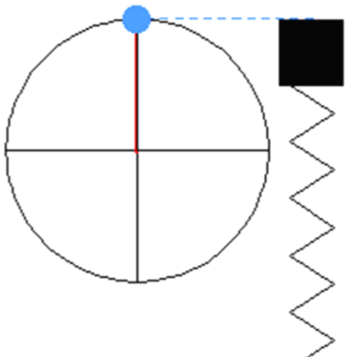
第六章主要内容

- ✓ 概述
- ✓ Bode 图 (对数坐标图)
- ✓ 极坐标图
- ✓ Nyquist稳定性判据
- ✓ 基于频率特性的补偿器设计

积分变换

拉普拉斯变换	傅里叶变换
s表示系统模态	ω表示圆频率
能用于求解全响应	不能用于求全响应
不方便处理纯滞后	方便处理纯滞后
不方便处理测量噪声	方便处理测量噪声（滤波）
可用于控制系统的分析与综合	可用于控制系统的分析与综合

三角函数（波）与匀速圆周运动



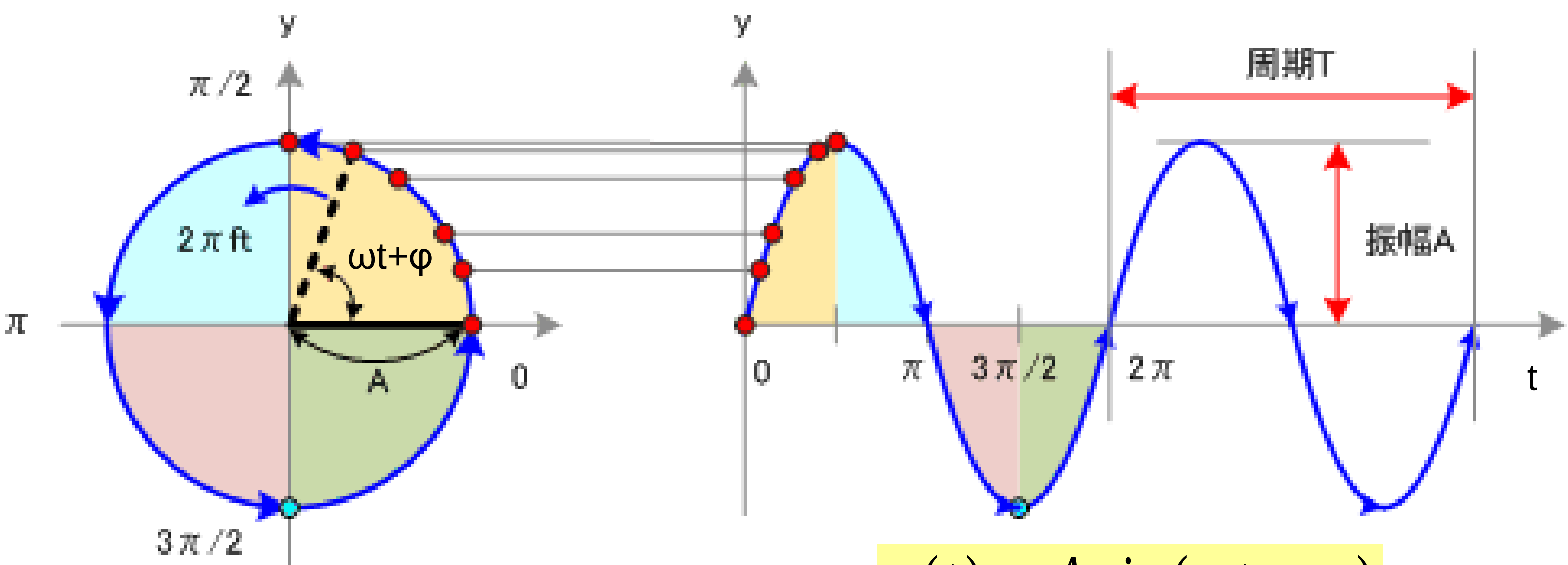
A:波的振幅，圆的半径

ω:圆频率，圆周运动的角速度（rad/s）

t:时间（s）

φ:圆周运动的初始角

$\omega = 2\pi / T, T$是圆周运动的周期



$$y(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$$

信号：从时域到频域

傅里叶级数

给定一个周期为T的周期信号$f(t)$,若$f(t)$满足狄利赫里条件，则

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(n\omega_0 t)+b_n\sin(n\omega_0 t)\right]\qquad t\in(-\infty,+\infty)$$

其中，$\omega_0=2\pi/T$

傅立叶系数$a_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\cos(n\omega_0 t)\mathrm{d}t, b_n=\frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)\sin(n\omega_0 t)\mathrm{d}t$

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin(n\omega_0 t+\varphi_n)$$

$$=\underbrace{\frac{a_0}{2}}_{\text{直流分量}}+\underbrace{c_1\sin(\omega_0 t+\varphi_1)}_{\text{一次谐波或基波}}+\underbrace{c_2\sin(2\omega_0 t+\varphi_2)}_{\text{二次谐波}}+\cdots$$

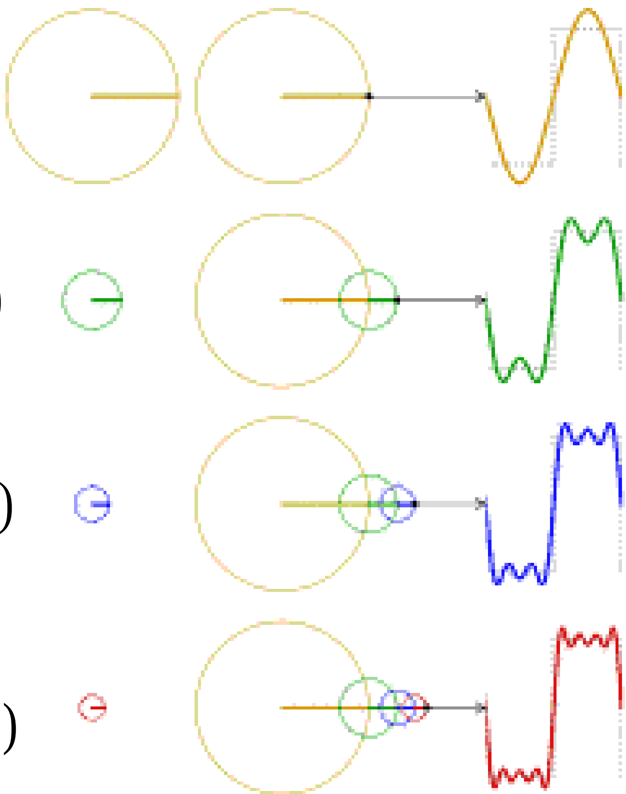
例：基于傅立叶级数逼近周期性方波信号波

$$\frac{4}{\pi}\sin(\omega_0 t)$$

$$\frac{4}{\pi}\sin(\omega_0 t)+\frac{4}{3\pi}\sin(3\omega_0 t)$$

$$\frac{4}{\pi}\sin(\omega_0 t)+\frac{4}{3\pi}\sin(3\omega_0 t)+\frac{4}{5\pi}\sin(5\omega_0 t)$$

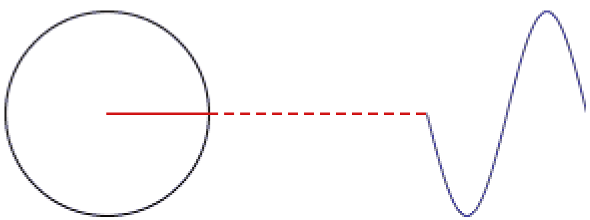
$$\frac{4}{\pi}\sin(\omega_0 t)+\frac{4}{3\pi}\sin(3\omega_0 t)+\frac{4}{5\pi}\sin(5\omega_0 t)+\frac{4}{7\pi}\sin(7\omega_0 t)$$

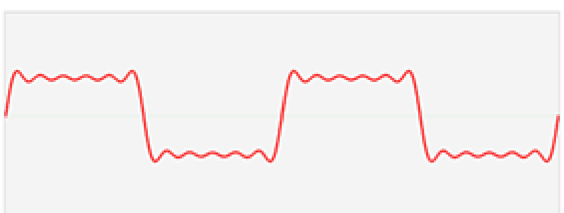


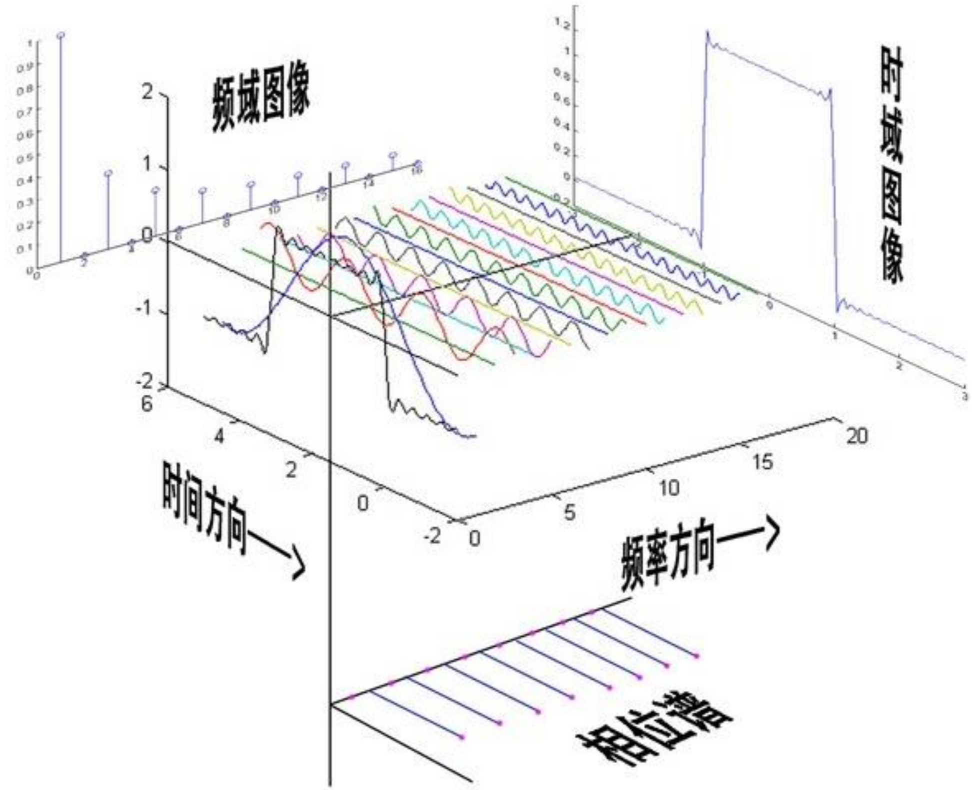
信号：从时域到频

$$\hat{f}(\omega)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n\pi}\delta(\omega-n\omega_0)\qquad n\in\{1,3,5,7,\cdots\}$$

δ为单位脉冲函数







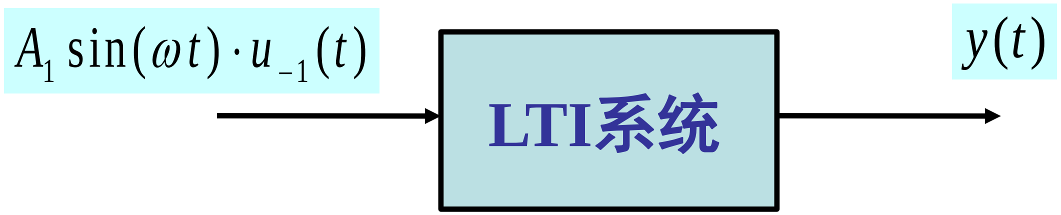
利用傅立叶级数，时域上的周期信号$f(t)$可以在频域上用$\hat{f}(\omega)$描述（离散频谱）

当$T\rightarrow\infty$时，傅立叶级数$\rightarrow$傅立叶变换

时域上满足条件的非周期信号$f(t)$可以在频域上用$\hat{f}(\omega)$描述（连续频谱）

典型输入的自由响应及强迫响应

正弦输入下LTI系统的全响应、自由响应和强迫响应



某典型输入$u(t)$和一个LTI系统$G(s)$满足下列2个模态不重叠条件之一：

1) $u(t)=A_1\sin\omega_0 t\cdot u_{-1}(t)$，$G(s)$不含$\dfrac{1}{s^2+\omega_0^2}$

2) $u(t)$为阶跃、斜坡或抛物线输入，$G(s)$不含$\dfrac{1}{s}$

任给初始条件，对$G(s)$输入$u(t)$，可得到相应的全响应$y(t)$，则

$y(t)=y_{tr}(t)+y_{ss}(t)$

$y_{tr}(t)$：$y(t)$中由$G(s)$模态组成的部分，称为自由响应

$y_{ss}(t)$：$y(t)$中由非$G(s)$模态组成的部分，称为强迫响应

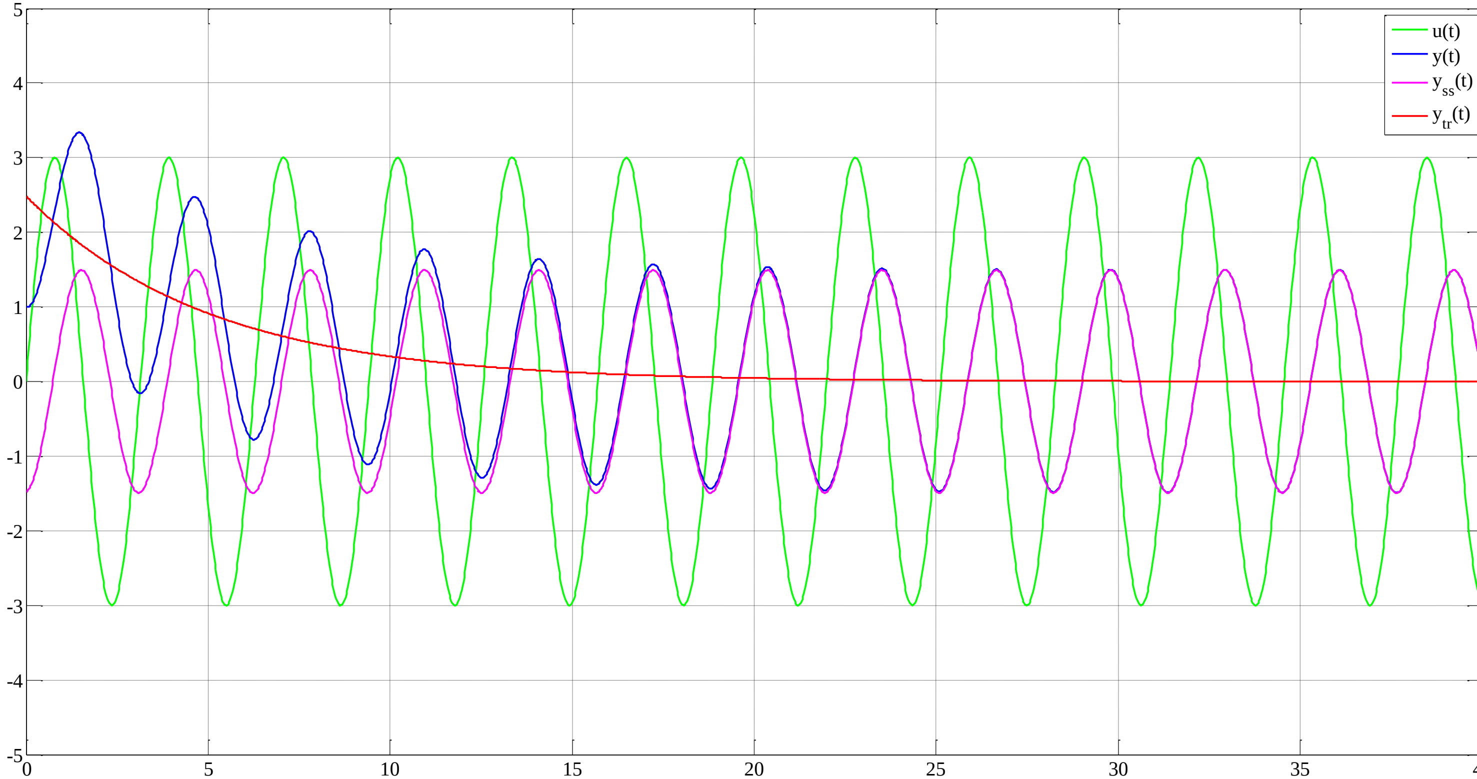
典型输入的自由响应及强迫响应

例： $u(t)=3\sin 2t\cdot u_{-1}(t), G(s)=\dfrac{1}{s+0.2}, y(0^-)=1$

计算可得 全响应 $y(t)=2.4851e^{-0.2t}+1.4926\sin(2t-1.4711)$

自由响应 $y_{tr}(t)=2.4851e^{-0.2t}\cdot u_{-1}(t)$

强迫响应 $y_{ss}(t)=1.4926\sin(2t-1.4711)\cdot u_{-1}(t)$



强迫响应是与输入频率相同的正弦波，但幅值和相位与输入不同

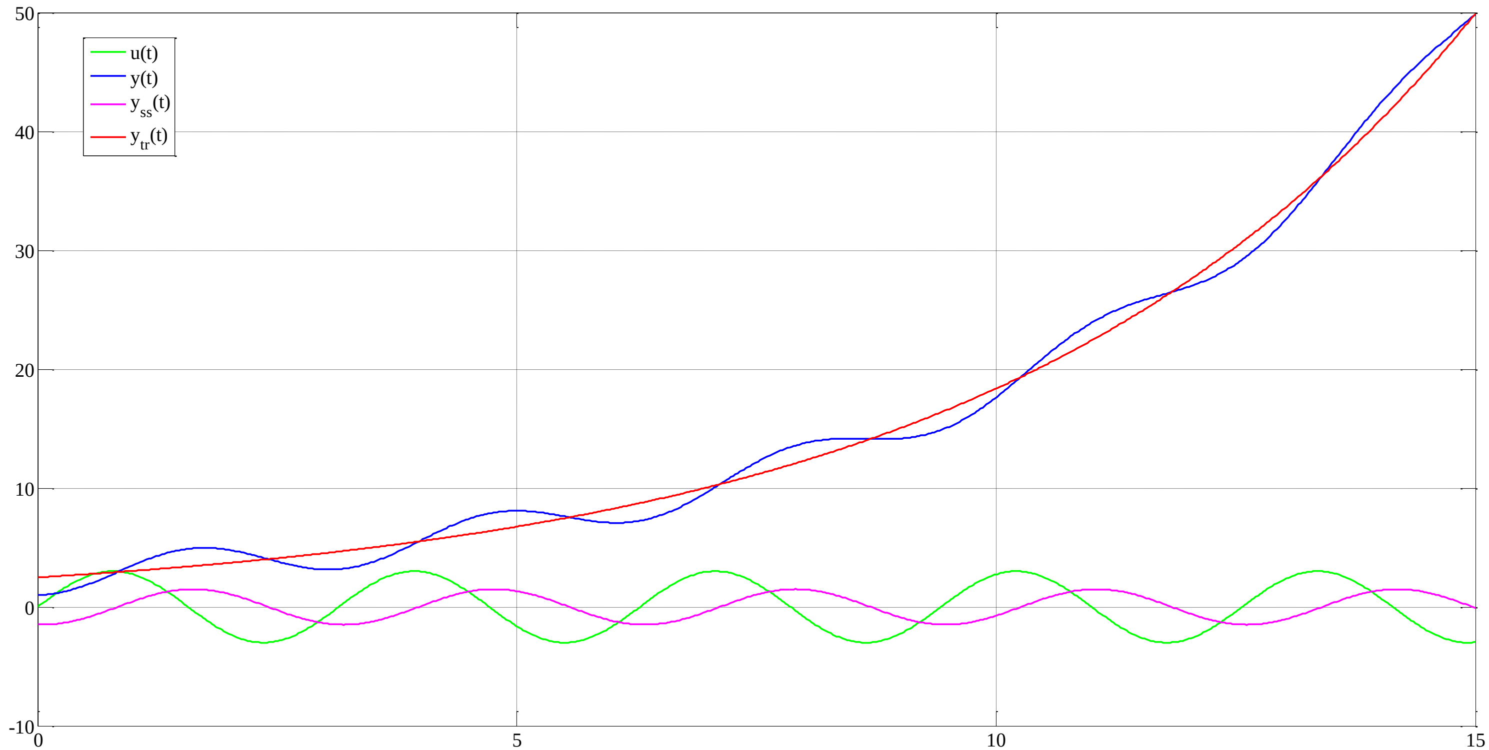
典型输入的自由响应及强迫响应

例： $u(t)=3\sin 2t\cdot u_{-1}(t), G(s)=\dfrac{1}{s-0.2}, y(0^-)=1$

计算可得 全响应 $y(t)=2.4851e^{0.2t}+1.4926\sin(2t-1.6705)$

自由响应 $y_{tr}(t)=2.4851e^{0.2t}\cdot u_{-1}(t)$

强迫响应 $y_{ss}(t)=1.4926\sin(2t-1.6705)\cdot u_{-1}(t)$



强迫响应是与输入频率相同的正弦波，但幅值和相位与输入不同

典型输入的自由响应及强迫响应

$A_1 \sin(\omega t) \cdot u_{-1}(t)$

LTI系统

$y_{ss}(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi) \cdot u_{-1}(t)$

只需关注 $\dfrac{A_2}{A_1}$ 和 φ，可以证明：$\dfrac{A_2}{A_2}$ 和 φ 均为 ω 的函数，即 $\dfrac{A_2}{A_2} = M(\omega), \varphi = \phi(\omega)$

LTI系统输入正弦信号，强迫响应与输入的幅值比称为系统的幅频特性 $M(\omega)$

强迫响应与输入的相角差称为系统的相频特性 $\phi(\omega)$

复数值函数 $M(\omega)e^{j\phi(\omega)}$ 称为系统的频率特性

对于稳定的LTI系统，可以用实验法测得 $M(\omega)$ 和 $\phi(\omega)$

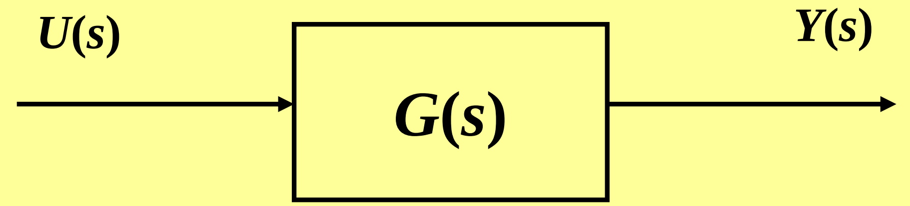
对于LTI系统（无论是否稳定），可以用分析法得到频率特性，即

$$M(\omega)e^{j\phi(\omega)} = G(j\omega) = G(s)\big|_{s=j\omega}$$

概述——频率特性

考虑系统

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s)$$



系统方块图

若输入为

$$u(t) = A_1 \sin \omega t$$

LT

$$U(s) = \frac{A_1\omega}{s^2+\omega^2} = \frac{A_1\omega}{(s+j\omega)(s-j\omega)}$$

$$G(s) = \frac{A(s)}{B(s)} = \frac{A(s)}{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n)}$$

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s)U(s) \\ &= \frac{A(s)}{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n)} \cdot \frac{A_1\omega}{(s+j\omega)(s-j\omega)} \\ &= \frac{b}{s+j\omega} + \frac{\bar{b}}{s-j\omega} + \frac{a_1}{s-s_1} + \frac{a_2}{s-s_2} + \cdots + \frac{a_n}{s-s_n} \end{aligned}$$

概述——频率特性

$$Y(s)=G(s)U(s)=\frac{b}{s+j\omega}+\frac{\bar{b}}{s-j\omega}+\frac{a_1}{s-s_1}+\frac{a_2}{s-s_2}+\cdots+\frac{a_n}{s-s_n}$$

$$y(t)=be^{-j\omega t}+\bar{b}e^{j\omega t}+a_1e^{s_1t}+a_2e^{s_2t}+\cdots+a_ne^{s_nt}$$

$$y_{ss}(t)=be^{-j\omega t}+\bar{b}e^{j\omega t}$$

其中 b可以通过留数定理或其他方法获得

$$b=G(s)\frac{A_1\omega}{(s+j\omega)(s-j\omega)}\cdot(s+j\omega)\Big|_{s=-j\omega}=-\frac{G(-j\omega)A_1}{2j}$$

$$\bar{b}=G(s)\frac{A_1\omega}{(s+j\omega)(s-j\omega)}\cdot(s-j\omega)\Big|_{s=j\omega}=\frac{G(j\omega)A_1}{2j}$$

由于$G(s)$是实系数有理分式（或带一个纯滞后），$G(-j\omega)$与$G(j\omega)$共轭

$$b=-\frac{|G(j\omega)|A_1}{2j}e^{-j\angle G(j\omega)} \qquad \bar{b}=\frac{|G(j\omega)|A_1}{2j}e^{j\angle G(j\omega)}$$

$$y_{ss}(t)=-\frac{|G(j\omega)|A_1}{2j}e^{-j\angle G(j\omega)}e^{-j\omega t}+\frac{|G(j\omega)|A_1}{2j}e^{j\angle G(j\omega)}e^{j\omega t}$$

概述——频率特性

$$y_{ss}(t) = -\frac{|G(j\omega)|A_1}{2j}e^{-j\angle G(j\omega)}e^{-j\omega t} + \frac{|G(j\omega)|A_1}{2j}e^{j\angle G(j\omega)}e^{j\omega t}$$

$$= \frac{|G(j\omega)|A_1}{2j}(e^{j(\angle G(j\omega)+\omega t)} - e^{j(-\angle G(j\omega)-\omega t)})$$

$$= \frac{|G(j\omega)|A_1}{2j}2j\sin(\omega t + \angle G(j\omega))$$

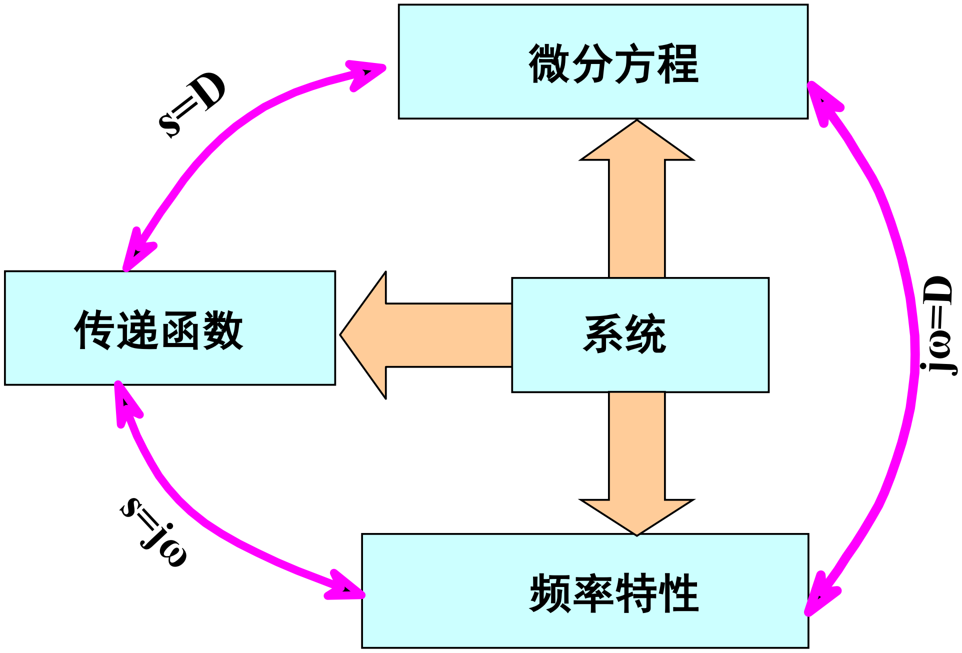
$$= \underbrace{|G(j\omega)|A_1}_{A_2}\sin(\omega t + \underbrace{\angle G(j\omega)}_{\Phi(\omega)})$$

$$M(\omega) = \frac{A_2}{A_1} = |G(j\omega)|, \phi(\omega) = \angle G(j\omega)$$

$$M(\omega)e^{j\phi(\omega)} = G(j\omega) = G(s)\Big|_{s=j\omega}$$

当系统$G(s)$的输入为一频率ω的正弦信号时，强迫响应为同频率的正弦信号，其幅值增大$|G(j\omega)|$，相位滞后$\angle G(j\omega)$

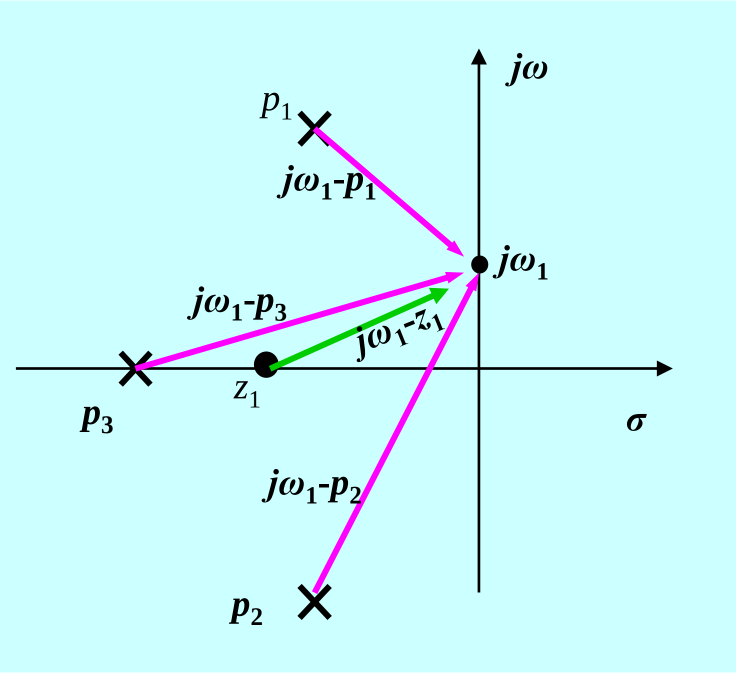
概述——频率特性



概述——频率特性

LTI系统传递函数：

$$G(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{K(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$



频率特性：

$$M(\omega)=\left|\frac{B(j\omega)}{A(j\omega)}\right|=\left|\frac{K(j\omega-z_1)\cdots(j\omega-z_m)}{(j\omega-p_1)\cdots(j\omega-p_m)}\right| \\ =\left|G(j\omega)\right|$$

$$\phi(\omega)=\angle B(j\omega)-\angle A(j\omega)=\angle G(j\omega) \\ =\angle K+\angle(j\omega-z_1)+\cdots\angle(j\omega-z_m)-\angle(j\omega-p_1)-\cdots-\angle(j\omega-p_n)$$

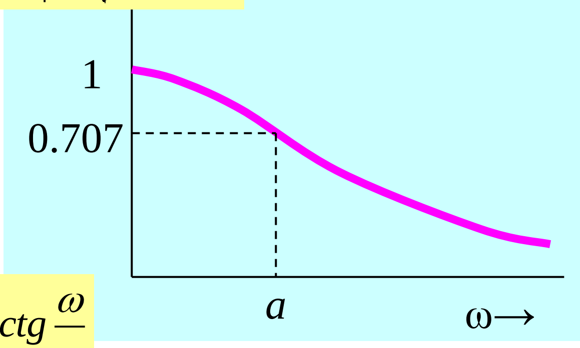
概述——频率特性

频率特性曲线： 在直角坐标系中，频率与输出输入比的**幅值**之间的关系图，以及相应的**相角**与频率之间的关系图，例如

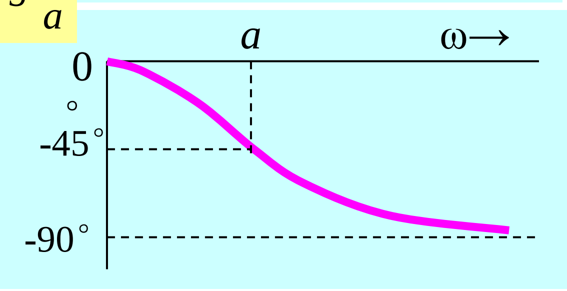
输入:$U(j\omega)$　　输出:$Y(j\omega)$

$$G(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)}=\frac{a}{s+a}=\frac{a}{j\omega+a}$$

$$M(\omega)=\left|\frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)}\right|=\frac{a}{\sqrt{\omega^2+a^2}}$$



$$\phi(\omega)=\angle\frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)}=-arctg\,\frac{\omega}{a}$$



- 频率特性常用的两种图示方法：
  - Bode图（对数频率特性曲线）
  - Nyquist图（极坐标图，幅相曲线）

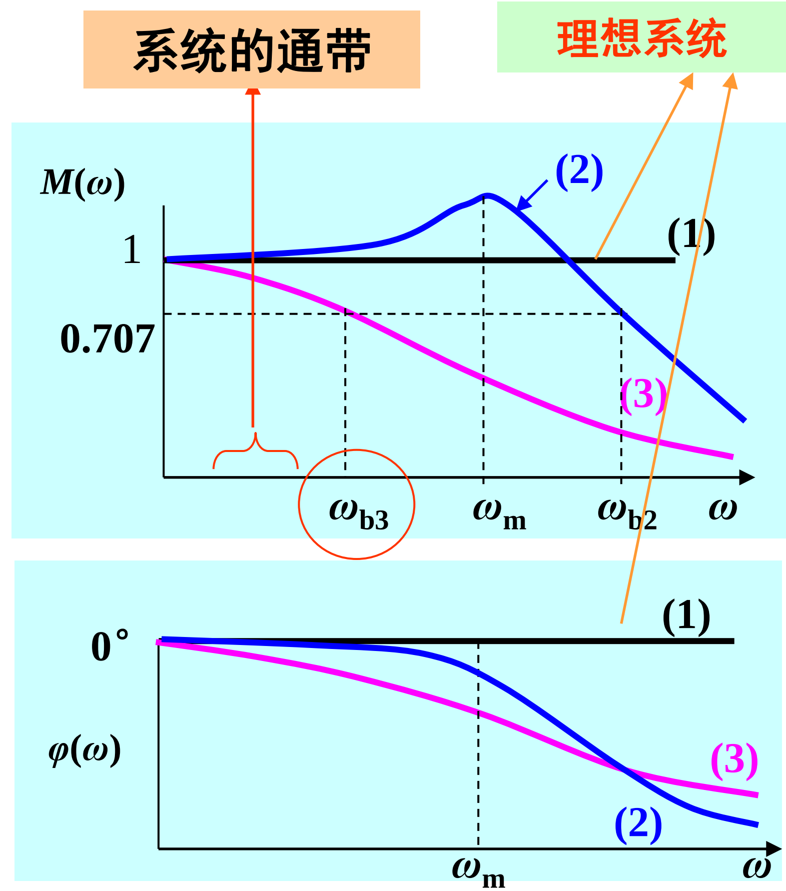
Hendrik Wade Bode
(1905-1982)

Harry Nyquist
(1889-1976)

概述——频率特性

对一给定的正弦输入，输入与强迫响应具有以下形式：

$x(t) = X\sin\omega t$　　$y(t) = Y\sin(\omega t+\varphi)$



闭环系统频率响应

$$\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=\frac{G(j\omega)}{1+G(j\omega)H(j\omega)}=M(\omega)\angle\varphi(\omega)$$

$Y(j\omega)/R(j\omega)$ 的频率响应特性（直角坐标）如图所示

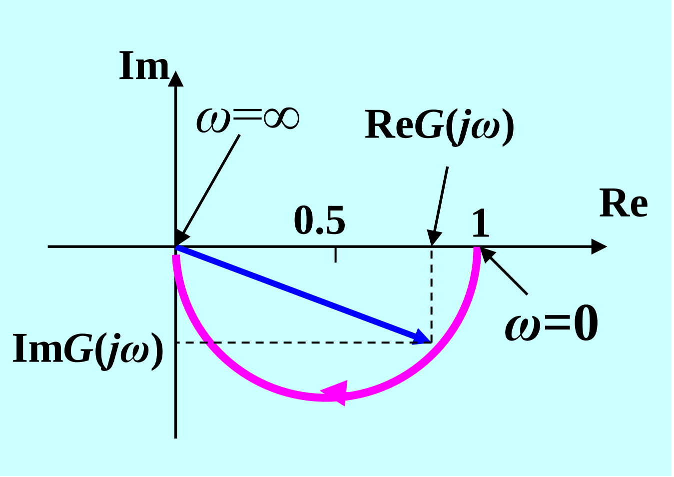
在极坐标系中以频率为参数绘制输出输入比被称为 *Nyquist* 图

例 6-1：传递函数*G*(*s*)

$$G(s)=\frac{1}{1+Ts} \Rightarrow G(j\omega)=\frac{1}{1+j\omega T}=\frac{1-j\omega T}{1+(T\omega)^2}$$

$$\left[\mathrm{Re}G(j\omega)-\frac{1}{2}\right]^2+\mathrm{Im}^2G(j\omega)=\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

Nyquist 图是以(0.5, j0) 为圆心，以0.5为半径的圆

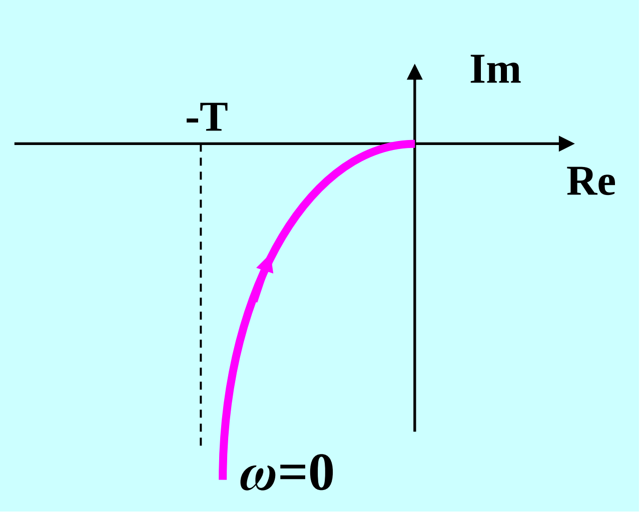


概述——频率特性

例 6-2：传递函数$G(s)$

$$G(s)=\frac{1}{s(Ts+1)} \Rightarrow G(j\omega)=\frac{1}{j\omega(j\omega T+1)}=\frac{-T}{1+\omega^2T^2}-j\frac{1}{\omega(1+\omega^2T^2)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} G(j\omega)\big|_{\omega\to 0}=-T-j\infty=\infty\angle(-90^\circ) \\ G(j\omega)\big|_{\omega\to \infty}=-0-j0=0\angle(-180^\circ) \end{cases}$$



以频率为参数，纵坐标为对数幅值横坐标为相角（对数幅值 vs 相角），被称为*Nichols*图或者对数幅相曲线----第三种频域表现形式。

Bode图（对数坐标图）

对数坐标图的优点

1) 将乘积和除法的数学操作转化为加法和减法；

2) 对数坐标扩展了频段

对数幅频： 传递函数 $G(j\omega)$ 幅值的对数 (幅频特性)，以分贝来表示

$$20\log|G(j\omega)| \qquad \text{dB}$$

称为对数幅频，缩写Lm。因此

$$LmG(j\omega)=20\log|G(j\omega)| \qquad \text{dB}$$

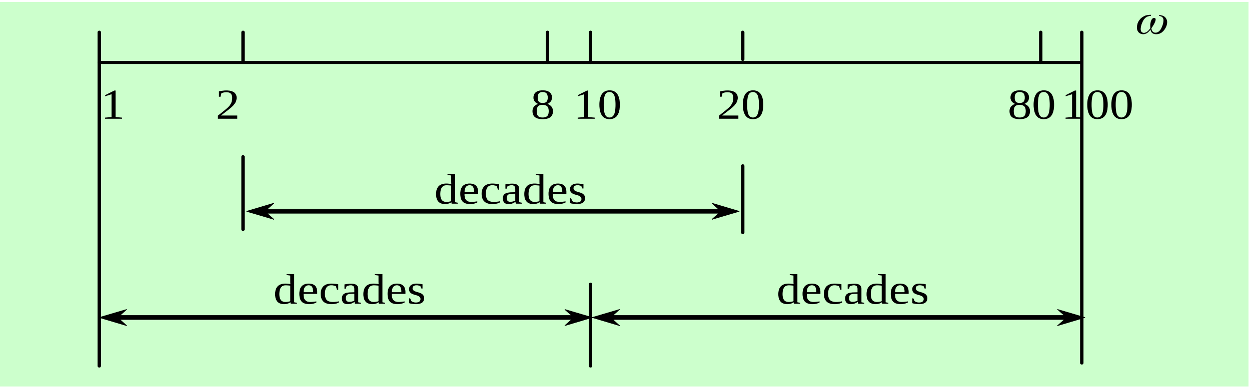
$$L(\omega)=20\log|G(j\omega)| \qquad \text{dB}$$

由于幅频特性是频率的函数，因此 Lm 也是频率的函数

Bode图（对数坐标图）

Octave (倍频)：倍频是f_1到f_2的频带，其中 $f_2/f_1=2$。 例如：频带1rad/s 到 2 rad/s 是 1个倍频宽度，频带17.4rad/s 到 34.8rad/s 也是一个倍频宽度

Decade(十倍频)：当$f_2/f_1=10$时，则频带f_1到f_2称为一个十倍频。频带1rad/s到10rad/s或者 2.5rad/s到25rad/s 称为一个十倍频宽度



Bode图（对数坐标图）

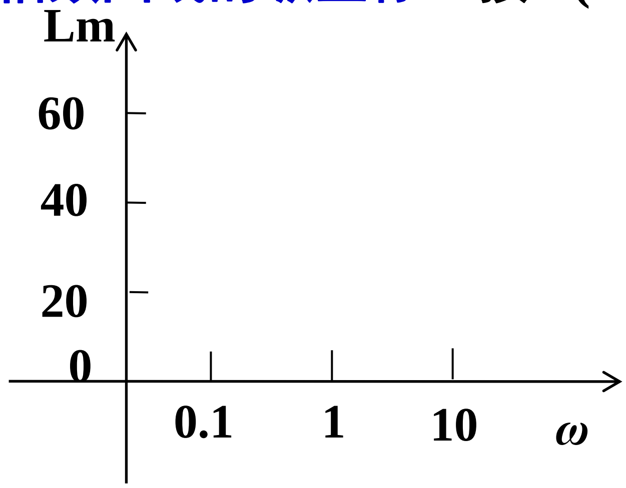
Bode图（对数频率特性曲线）：

对数频率特性曲线由对数幅频曲线和对数相频曲线组成

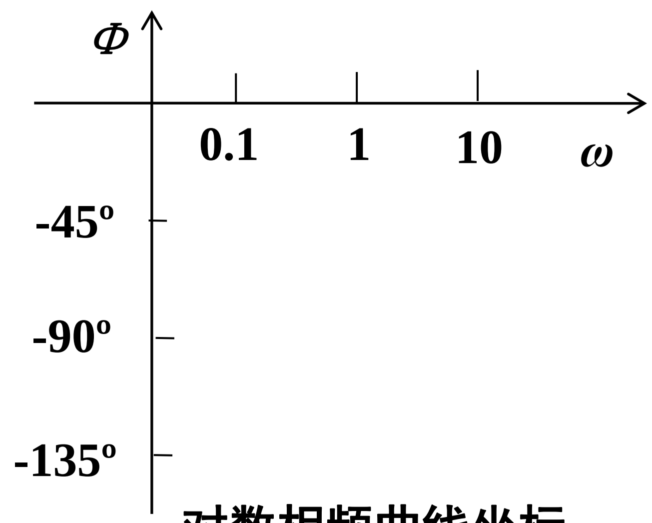
对数频率特性曲线的横坐标：按logω线性分度，单位为弧度/秒（rad/s）

对数幅频曲线的纵坐标：按Lm$G(j\omega)$=20log|$G(j\omega)$|线性分度，单位是分贝

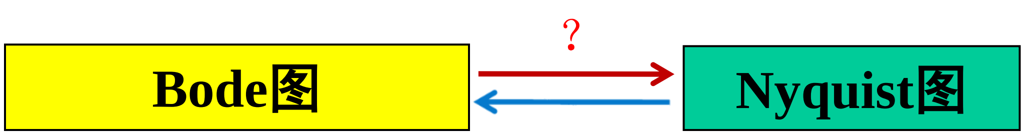
对数相频曲线的纵坐标：按$\Phi(\omega)$线性分度，单位为度



对数幅频曲线坐标



对数相频曲线坐标



Bode图（对数坐标图）

$\mathrm{Lm}G(j\omega)=20\log|G(j\omega)| \quad \mathrm{dB}$

频域响应：

$$G(j\omega)=\frac{K_m(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)^r\cdots}{(j\omega)^m(1+j\omega T_a)[1+(2\zeta/\omega_n)j\omega+(1/\omega_n^2)(j\omega)^2]\cdots}$$

对数幅值：

$$\begin{aligned}LmG(j\omega)=&LmK_m+Lm(1+j\omega T_1)+rLm(1+j\omega T_2)+\cdots-mLm(j\omega)\\&-Lm(1+j\omega T_a)-Lm\left[1+\frac{2\zeta}{\omega_n}j\omega+\frac{1}{\omega_n^2}(j\omega)^2\right]-\cdots\end{aligned}$$

相角方程：

$\tan^{-1}\omega T_1$

$m90^\circ$

$$\begin{aligned}\angle G(j\omega)=&\angle K_m+\angle(1+j\omega T_1)+r\angle(1+j\omega T_2)+\cdots-m\angle(j\omega)\\&-\angle(1+j\omega T_a)-\angle\left[1+\frac{2\zeta}{\omega_n}j\omega+\frac{1}{\omega_n^2}(j\omega)^2\right]-\cdots\end{aligned}$$

$0^\circ/180^\circ$

$\tan^{-1}\dfrac{2\xi\omega/\omega_n}{1-\omega^2/\omega_n^2}$

绘制Bode图

一般形式的传递函数

$$G(j\omega)=\frac{K_m(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)^r\cdots}{(j\omega)^m(1+j\omega T_a)[1+(2\zeta/\omega_n)j\omega+(1/\omega_n^2)(j\omega)^2]\cdots}$$

典型环节:

$$K_m \qquad (j\omega)^{\pm m} \qquad (1+j\omega T)^{\pm r} \qquad \left[1+\frac{2\zeta}{\omega_n}j\omega+\frac{1}{\omega_n^2}(j\omega)^2\right]^{\pm p}$$

$$K_m \qquad (j\omega)^{\pm 1} \qquad (1+j\omega T)^{\pm 1} \qquad \left[1+\frac{2\zeta}{\omega_n}j\omega+\frac{1}{\omega_n^2}(j\omega)^2\right]^{\pm 1}$$

典型环节的Bode图叠加在一起就可以得到整个频率特性的Bode图，特别是采用对数幅频渐近特性曲线的时候。

Thanks !