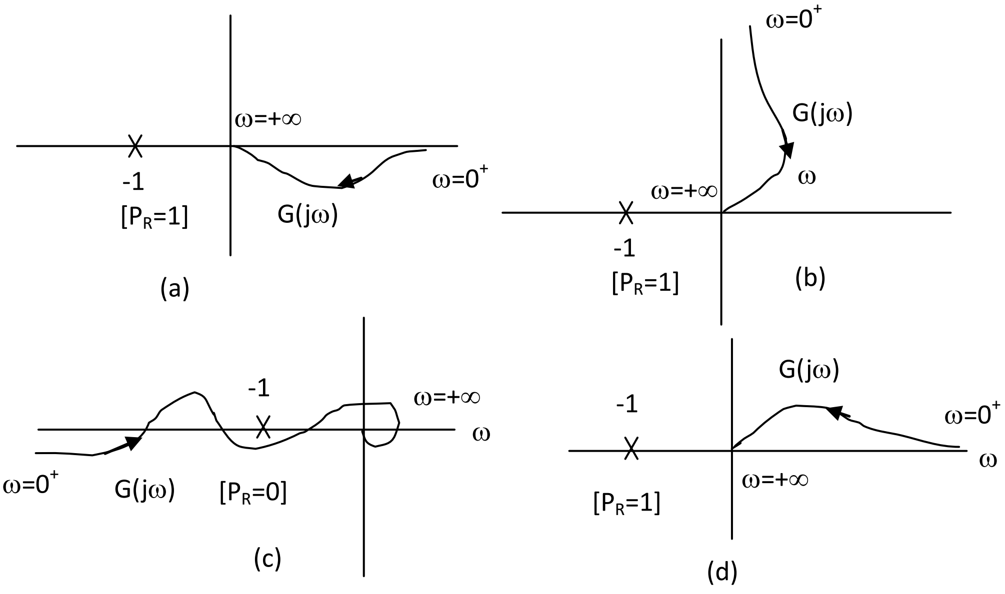
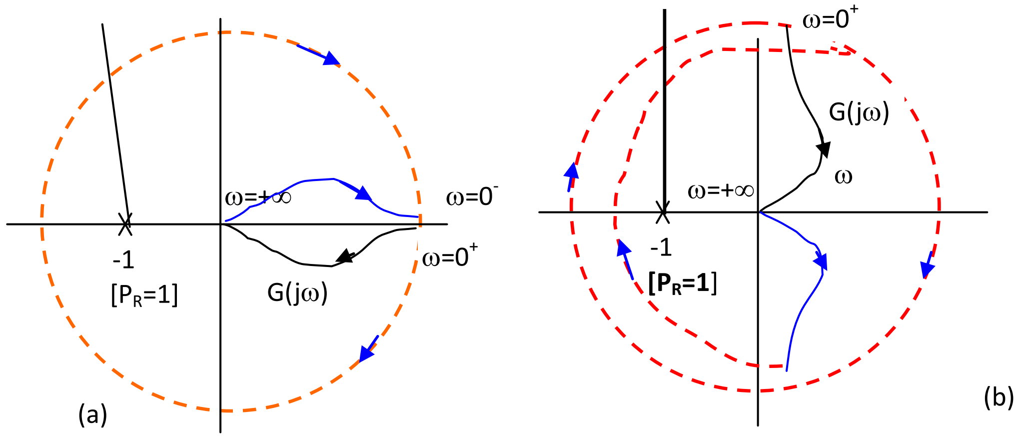
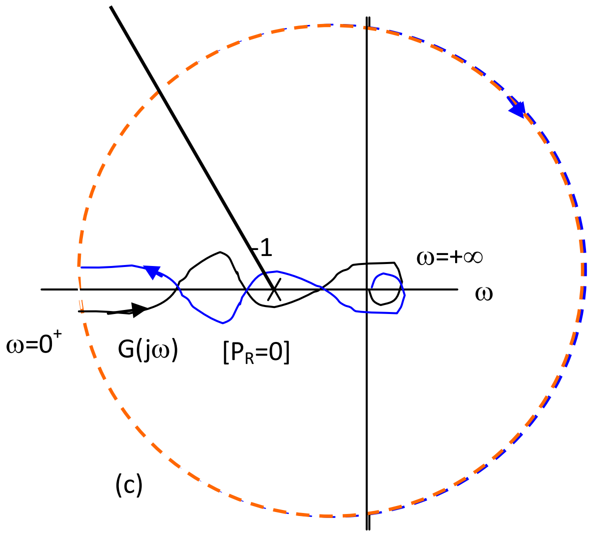
夏学期第八周作业参考答案

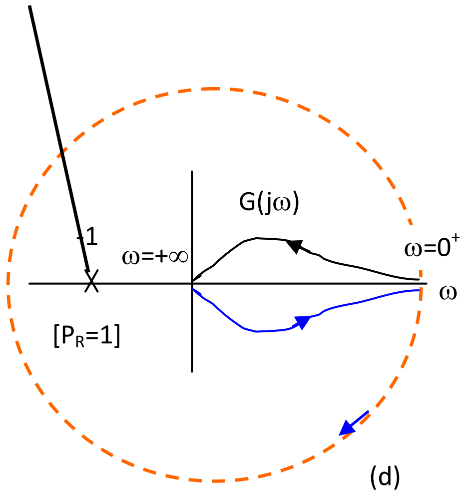
6-17 如图 6-78 所示为开环系统奈奎斯特曲线的正频部分。绘制完整的奈奎斯特图，并判断闭环系统的稳定性。



解：







(a) m=2, N= -1, $Z_R=P_R$-N=2, 不稳定；

(b) m=3, N= -2, Z_R=3, 不稳定；

(c) m=2, N=0, Z_R=0, 稳定；

(d) m=2, N= -1, Z_R=2, 不稳定。

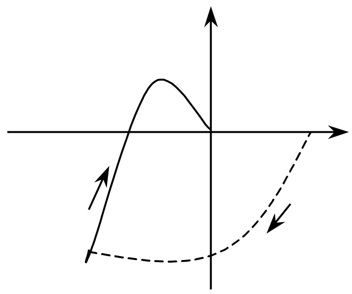
6-19 已知系统开环传递函数 $G(s)=\dfrac{K}{s(Ts+1)(s+1)}$，$K,T>0$，试根据奈奎斯特判据，确定其闭环稳定条件：

（1） T＝2 时，K 值的范围

（2） K＝10 时，T 值的范围

（3） K，T 值的范围

解：该开环系统的 Nyquist 曲线为：



若 Nyquist 曲线与（－1，j0）点左侧的负实轴有 l 个交点，则 Nyquist 曲线包围（－1，j0）的圈数 R=-2l，由于 P＝0，所以 Z=2l，系统闭环不稳定，若系统闭环稳定，则必须 l=0，设开环幅相曲线穿越负实轴的频率为 ω_x

方法一：

因为：

$$G(j\omega)=\frac{K}{j\omega(1+j\omega T)(1+j\omega)}$$
$$=\frac{K}{\omega\sqrt{1+\omega^2T^2}\sqrt{1+\omega^2}}\angle\left(-90^\circ-arctg\omega T-arctg\omega\right)$$
$$=A(\omega)\angle\varphi(\omega)$$

所以 $\varphi(\omega_x)=-90^\circ-arctg\omega_x T-arctg\omega_x=-(2k+1)\times180^\circ$

当 ω 增大时，A(ω)减小，而在频率 ω 为最小的 ω_{xm} 时，开环幅相曲线第一次穿过负实轴，因此：

$$\varphi(\omega_{xm})=-90^\circ-arctg\omega_{xm}T-arctg\omega_{xm}=-180^\circ \qquad \frac{\omega_{xm}T+\omega_{xm}}{1-\omega_{xm}{}^2T}=tg90^\circ=\infty$$

$$\omega_{xm}=\sqrt{\frac{1}{T}}$$

此时 $A(\omega_{xm})$达到最大，为使 $l=0$，$A(\omega_{xm})<1$，即

$$A(\omega_{xm})=\frac{K}{\omega_{xm}\sqrt{1+(\omega_{xm}T)^2}\sqrt{1+\omega_{xm}{}^2}}=\frac{KT}{T+1}<1$$

(1) 当 T＝2 时，$\omega_{xm}=\sqrt{\frac{1}{2}}$

$$A(\omega_{xm})=\frac{2K}{3}<1 \qquad K<1.5$$

(2) 当 K＝10 时，

$$A(\omega_{xm})=\frac{10T}{T+1}<1 \qquad T<\frac{1}{9}$$

(3) K，T 值的范围

$$A(\omega_{xm})=\frac{K}{\omega_{xm}\sqrt{1+(\omega_{xm}T)^2}\sqrt{1+\omega_{xm}{}^2}}=\frac{KT}{T+1}<1 \qquad K<\frac{T+1}{T}$$

方法 2：

系统的开环频率特性：

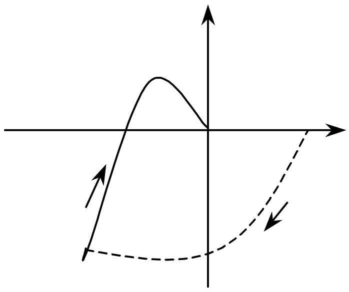
$$G(j\omega)=\frac{K}{j\omega(1+j\omega T)(1+j\omega)}=\frac{K\left[-(T+1)\omega^2-j\omega(1-T\omega^{2)}\right]}{(T+1)^2\omega^4+\omega^2(1-T\omega^2)^2}$$

ω 由 0＋变化到＋∞，相角变化：－90°～－270°

幅值变化：∞～0

为求 Nyquist 曲线与负实轴的交点，令 ImG(jω)=0，得 $1-T\omega^2=0$，即 $\omega_{xm}=\sqrt{\frac{1}{T}}$，将其带入 ReG(jω)，得：

$$\mathrm{Re}\,G(j\omega_{xm})=-\frac{KT}{T+1}$$



根据奈奎斯特稳定判据，$Z = P - 2(N_+ - N_-)$，已知 P＝0，N₊=0，要求 Z＝0，应有 $N_- = 0$，所以闭环系统稳定的条件为：

$\frac{KT}{T+1} < 1$，带入（1）（2）（3）问题的条件，即可得到结果。

6-20 已知系统的开环传递函数为 $G(s) = \dfrac{K(0.2s+1)}{s^2(0.02s+1)}$

（1） 若 K＝1，求该系统的相位稳定裕量；
（2） 若要求系统的相位稳定裕量为 45 度，求 K 值

解：

当 K=1时，由其幅频特性渐进线可得：其幅频关系为

$$20\lg|G(jw)| = \begin{cases} 20\lg|\frac{1}{\omega^2}| & \omega < 5 \\ 20\lg|\frac{0.2}{\omega}| & 5 \le \omega < 50 \\ 20\lg|\frac{10}{\omega^2}| & 50 \le \omega \end{cases}$$

当$\omega = \omega_c$时，应有$20\lg|G(jw_c)| = 0$

$\therefore 20\lg|\frac{1}{\omega^2}| = 0$，既有$\omega_c = 1$

此时相角为：$\arg[G(jw_c)] = -180^\circ + \arctan(0.2) - \arctan(0.02) = -169.8^\circ$

所以相位余量为：$r = 10.2^\circ$

(2)要使相位余量 $r^* = 45^\circ$

$\arg[G(jw_c)] = 45^\circ - 180^\circ = -135^\circ$

有 $\arg[G(jw_c)] = -180^\circ + \arctan(0.2w_c) - \arctan(0.02w_c) = -135^\circ$

所以：$w_c = 6.5$

有$5 < w_c < 50$

所以： $20\lg\left|\frac{k(1+j0.2w_c)}{(jw_c)^2(1+j0.02w_c)}\right|_{w_c = 6.5} = 0$

所以：$K = 25.76$

6-21 已知单位反馈系统的开环传递函数为$G(s)=\dfrac{K}{s(s+5)}$，试求当K为 20 时，闭环系统幅频特性峰值M_r，谐振频率ω_γ，以及频带宽度ω_b，并求出其阶跃响应的动态指标σ和T_s。

解：

$G(s)=\dfrac{20}{s(s+5)}$，所以其闭环传函为：$\Phi(s)=\dfrac{20}{s^2+5s+20}$

对照二阶标准形式，可得：$\omega_0{}^2=20$　　$2\zeta\omega_0=5$

即有：$\omega_0=2\sqrt{5}$　　$\zeta=\dfrac{\sqrt{5}}{4}$　　$M_r=\dfrac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}=1.08$

$\omega_r=\omega_0\sqrt{1-2\zeta^2}=2.74$　　$\omega_b=\omega_0\sqrt{1-2\zeta^2+\sqrt{2-4\zeta^2+4\zeta^4}}=5.37$

$\sigma=e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}=0.12$　　$T_s=\dfrac{3}{\zeta\omega_0}=1.2$

6-22 设单位反馈系统的开环传递函数为$G(s)=\dfrac{as+1}{s^2}$，试确定使相位裕为45°时的 a 值。

解：ω=1.189, a=1/ω=0.841

因 $GH(j\omega)=\dfrac{ja\omega+1}{-\omega^2}$

由题意有：$\gamma(\omega_C)=180^\circ+\varphi(\omega_C)=180^\circ-180^\circ+\arctan a\omega_c=45^\circ$

故 $a\omega_c=1$，代入$|GH(j\omega_c)|=\dfrac{\sqrt{(a\omega_c)^2+1}}{\omega_c{}^2}=1\Rightarrow\omega_c=1.19$

进而求得：$a\omega_c=1\Rightarrow a=\dfrac{1}{1.19}=0.84$