



## 第五章 根轨迹方法

## Chapter 5 Root Locus



浙江大学控制科学与工程学系

CONTROL SCIENCE AND ENGINEERING

SINCE 1956



## ✓ 控制系统的基本概念

- ✓ 发展概况；基本概念；定义与术语 ……

## ✓ 系统建模及其表示方式

- ✓ 系统的动态特性——建模
- ✓ 各种类型的模型：微分方程模型；传递函数模型；状态空间模型；信号流图……；以及各种模型之间的关系
- ✓ 非线性系统线性化

## ✓ 控制系统的时域响应与动态性能

- ✓ 微分方程求解：时间响应；状态方程求解
- ✓ 系统的性能指标

## ✓ 控制系统的稳定性能

- ✓ 系统的稳定性概念；Routh稳定判据；稳态误差

✓ .....



# 控制系统的分析与综合



- ◆ **控制系统的分析** 针对**已知控制系统**（即结构、参数已知），计算出**该系统的性能**，分析这些性能与系统参数之间的关系，结果具有**唯一性**
  - ◆ **控制系统的综合** 根据**期望的控制性能指标**以及原系统模型，确定控制系统的结构、设计控制律及参数、选定控制元器件，以达到期望的性能指标
- 1) 逻辑上讲，控制系统综合是控制系统分析的逆问题
  - 2) 满足期望性能指标的控制系统**的结构、参数和控制元器件**不是唯一的，需对系统各方面性能、成本、体积、重量以及可行性综合考虑，选出最佳方案
  - 3) 控制系统分析与综合的方法有多种，控制律更是五花八门，设计人员需根据实际情况选用



# 第五章内容



- 概述
- 根轨迹的绘制方法
- 广义根轨迹
- 基于根轨迹的系统性能分析
- 基于根轨迹的系统补偿器设计



# 根轨迹概述



对设计者来说: 闭环极点的位置是最需要关注

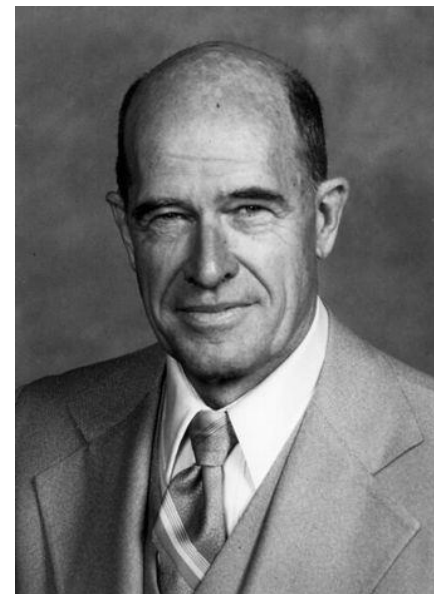
闭环系统的稳定性、超调量、调节时间等均与闭环极点的位置有关系

闭环极点的个数通常不等于1

某个控制参数的变化会通常会引起全部闭环极点位置的改变

有没有办法直观地展示出某个参数  
对全部闭环极点的影响?

**根轨迹** 1948年Walter Richard Evans提出



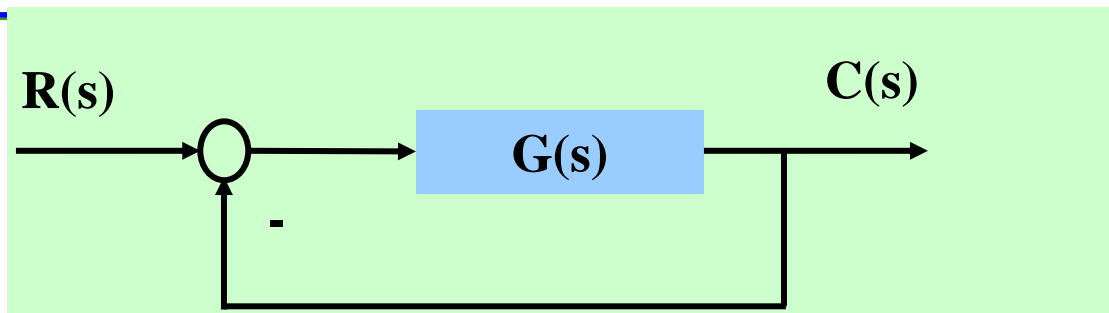
Walter Richard Evans (1920 - 1999)



# 根轨迹概述 —— 特征方程的根



## 例5-1



开环传递函数:  $G(s) = \frac{K}{s(s+2)}$   $K$ 是开环传递函数的根轨迹增益

$$G(s) = \frac{\theta_o(s)}{E(s)} = \frac{A/J}{s(s+B/J)} = \frac{K}{s(s+a)}$$

闭环传递函数:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{K}{s(s+2)+K} = \frac{K}{s^2+2s+K}$$

特征方程的根:

$$s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-K}$$



# 根轨迹概述 —— 特征方程的根



$$\text{开环传递函数 } G(s) = \frac{K}{s(s+2)}$$

$$\text{闭环传递函数 } \Phi(s) = \frac{K}{s^2 + 2s + K}$$

$$s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-K}$$

**$s_{1,2}$  依赖于参数  $K$**

**$K=0$  ---  $s_1=0$  和  $s_2=-2$**

**$K=1$  ---  $s_1=s_2=-1$**

**$0 < K < 1$  ---  $s_{1,2}$  为实数，分别位于  $s$  平面  $(-2, -1)$  和  $(-1, 0)$  的负实轴上**

**$K > 1$  --- 根为复数，即**

$$s_{1,2} = -\zeta \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} = -1 \pm j \sqrt{K-1}$$

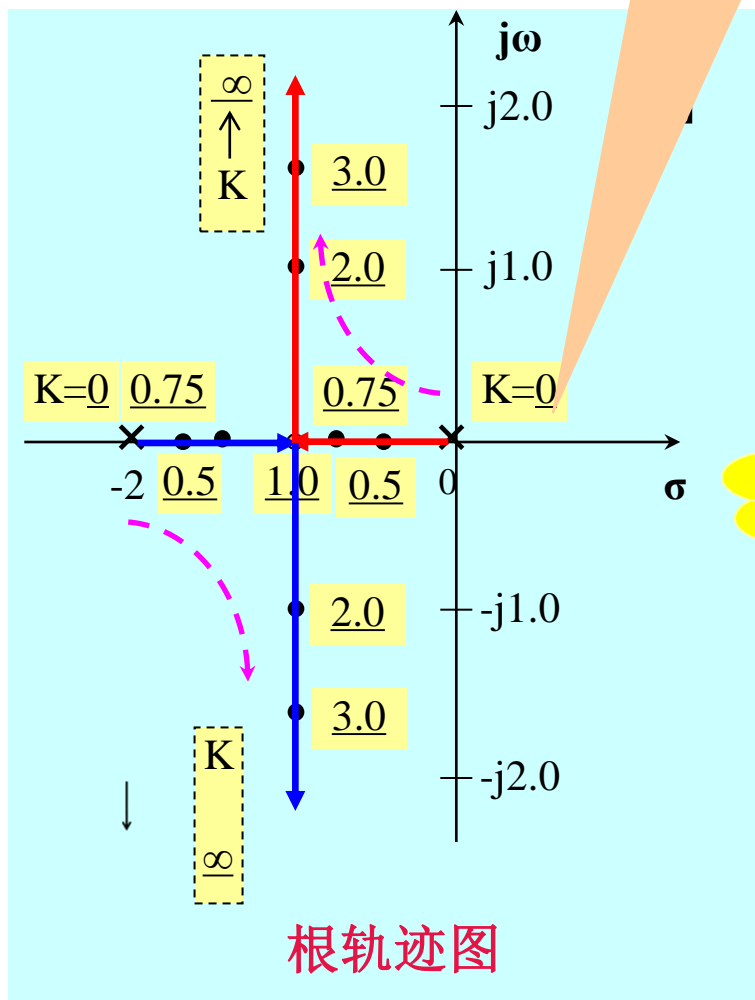


# 根轨迹概述

$$s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-K}$$

下划线表示K的值

K	$s_1$	$s_2$
0	-0+j0	-2.0-j0
0.5	-0.293+j0	-1.707-j0
0.75	-0.5+j0	-1.5-j0
1.0	-1.0+j0	-1.0-j0
2	-1.0+j1.0	-1.0-j1.0
3	-1.0+j1.414	-1.0-j1.414
50.0	-1.0+j7.0	-1.0-j7.0
:	:	:

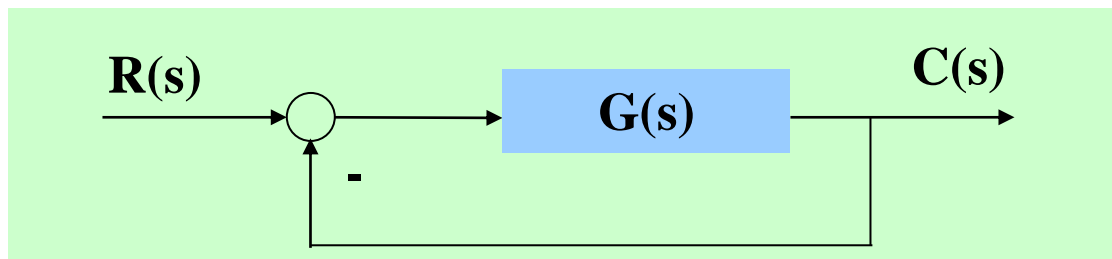


包含两条分支  
(以K为参数)

表明了当K从0到 $\infty$ 变化时，特征方程的所有特征根 ( $K \geq 0$ )



## 例5-2



开环传递函数:

$$G(s) = \frac{K(s+2)}{s^2}$$

闭环传递函数:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{K(s+2)}{s^2 + K(s+2)}$$

特征方程的根:

$$s_{1,2} = -\frac{K}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{K^2 - 8K}$$



# 根轨迹概述 —— 特征方程的根



$$s_{1,2} = -\frac{K}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{K^2 - 8K}$$

$s_{1,2}$  依赖于  $K$

$0 < K < 8$  —— 特征根  $s_{1,2}$  为共轭极点

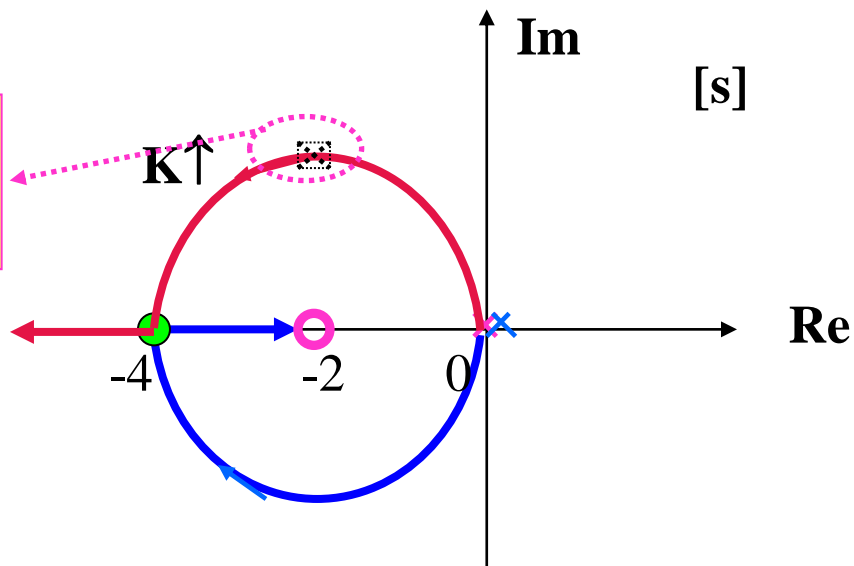
$$s_{1,2} = -\frac{K}{2} \pm \frac{1}{2} j \sqrt{8K - K^2}$$

$K=0$  —— 特征根  $s_1=s_2=0$

$K=8$  —— 特征根  $s_1=s_2=-4$

$K>8$  —— 特征根位于  $s$  平面的负实轴上，其中  $s_1 \rightarrow -\infty$ ,  $s_2 \rightarrow -2$

根轨迹上的每一点都是闭环特征根。





## 根轨迹:

当闭环系统某一参数（如开环根轨迹增益）变化时，闭环极点在**S**平面上变化的轨迹

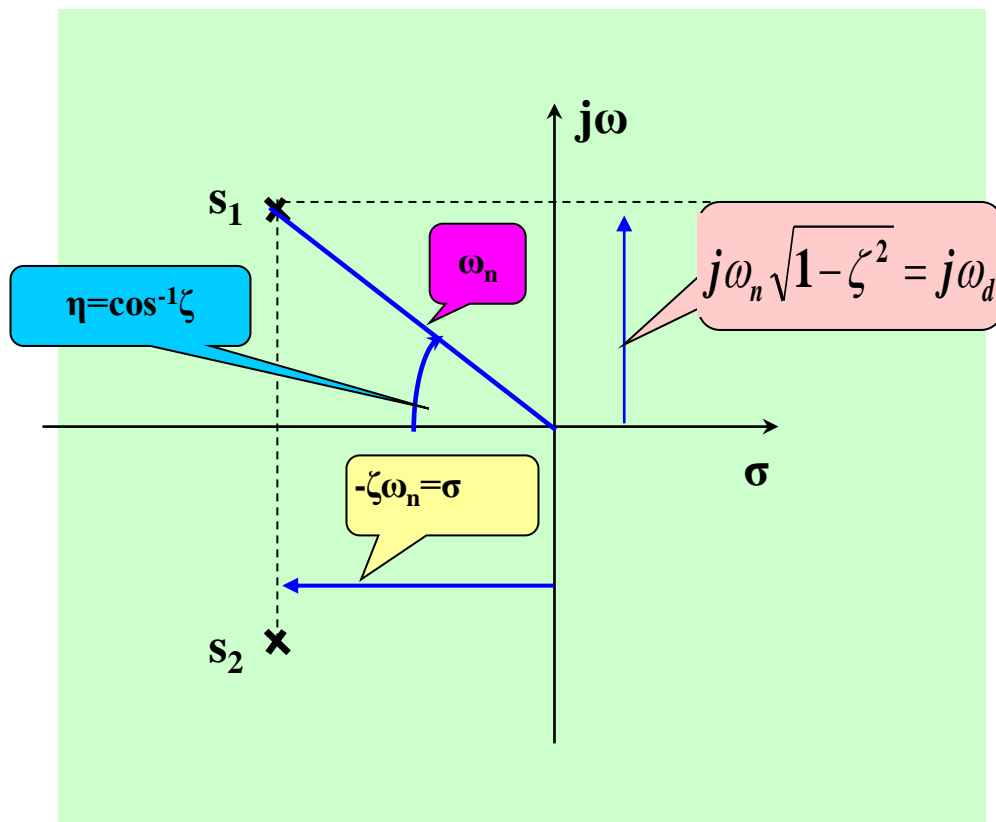
## 根轨迹方法和Routh 判据的区别:

**根轨迹法**---- 告诉我们每个控制参数所对应的闭环极点位置

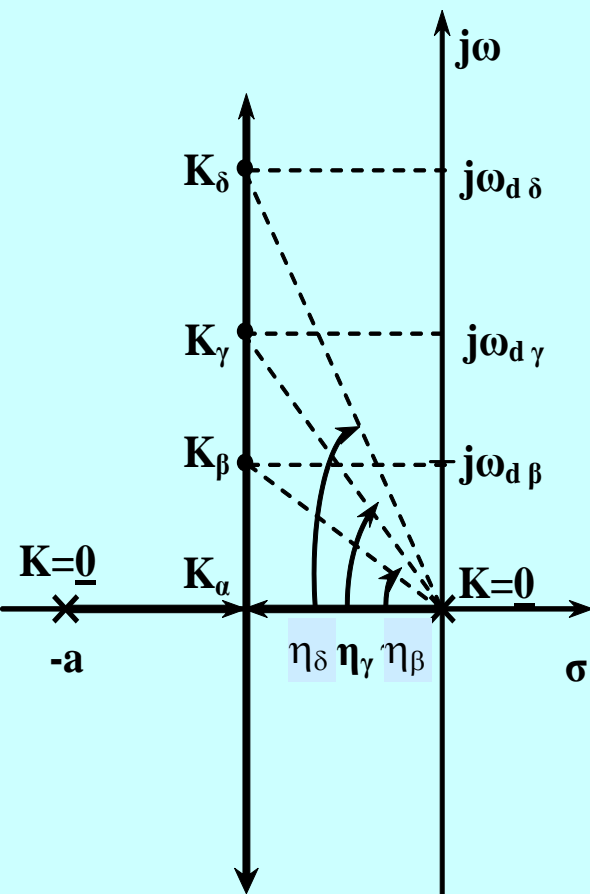
**Routh判据**---- 只能确定**S**平面上闭环极点位于给定垂线左侧时的  
控制器参数范围

复共轭极点:

$$-\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = \sigma + j\omega_d$$



具有相同阻尼比 $\zeta$ 的特征根位于一条直线上，该直线与负实轴的夹角满足  $\eta = \cos^{-1} \zeta$



## 例5-1根轨迹分析 (当 $K \uparrow$ )

阻尼比  $\zeta$  降低, 超调增大。  $\zeta \downarrow \rightarrow M_p \uparrow$

自然频率  $\omega_n$  增大,  $\omega_n \uparrow$

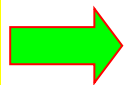
阻尼振荡频率  $\omega_d$  增大,  $\omega_d \uparrow$

$\sigma$  没有影响。也就是说对所有大于  $K_\alpha$  的参数  $K$  的变化,  $\sigma$  均为常数

$K \geq K_\alpha$ ,  $\sigma = -\zeta\omega_n$  是常数, 系统稳定

## (1) 给例5-1增加一个开环零点

$$G(s) = \frac{K}{s(s+a)}$$



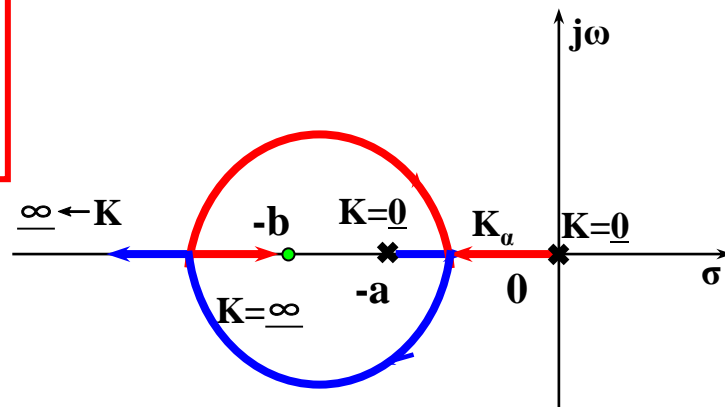
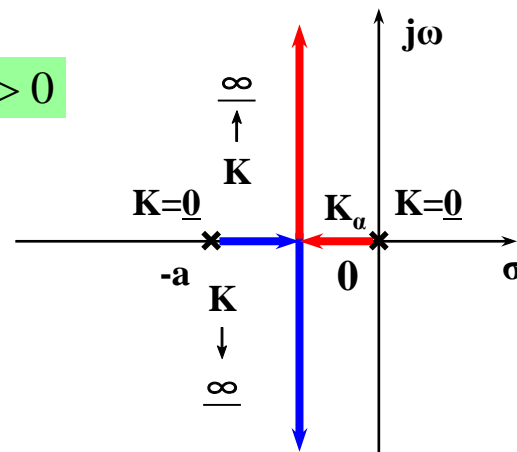
$$G(s) = \frac{K(s+b)}{s(s+a)}$$

$$b > a > 0$$

### 结论:

根轨迹曲线“被拉向左侧”，或远离虚轴。当K大于 $K_a$ 时，相比原系统，特征根更向左侧移动

因此，系统更稳定. 过渡过程更短



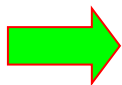


# 根轨迹概述 —— 根轨迹定性分析



## (2) 给例5-1增加一个开环极点

$$G(s) = \frac{K}{s(s+a)}$$



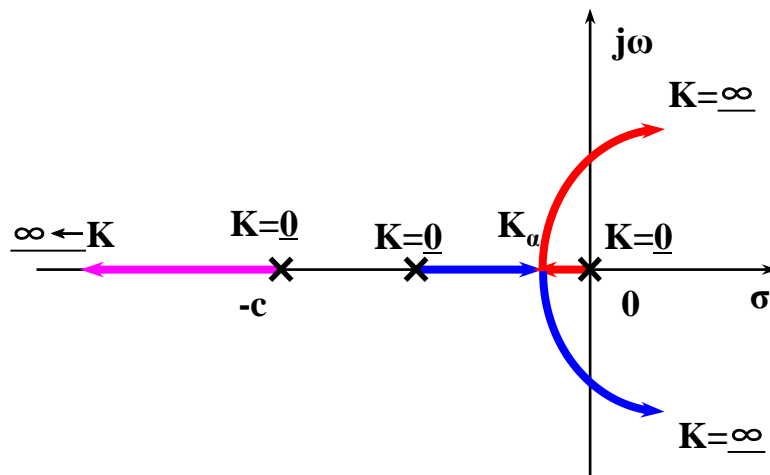
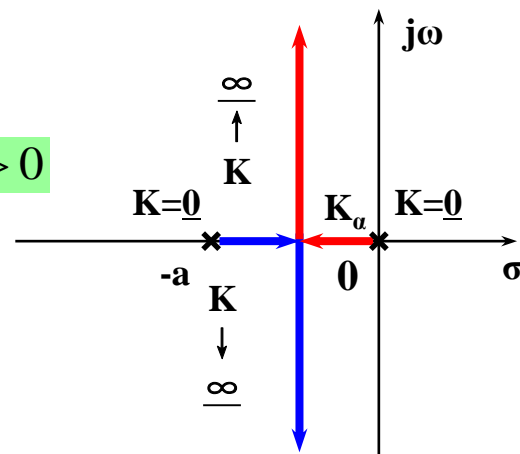
$$G(s) = \frac{K}{s(s+a)(s+c)}$$

$$c > a > 0$$

结论:

根轨迹“被推向右侧”，或者接近于虚轴。当K大于 $K_a$ 时，相比原系统，特征根更接近虚轴

因此，系统容易出现不稳定





# 根轨迹概述 —— 根轨迹定性分析



## 一般性结论：

- 给系统增加合适的开环零点使根轨迹向左弯曲，系统更加稳定，过渡过程加快（稳态时间 $t_s$ 减少）
- 给系统增加合适的开环极点根轨迹向右弯曲，容易使系统不稳定，过渡过程变缓

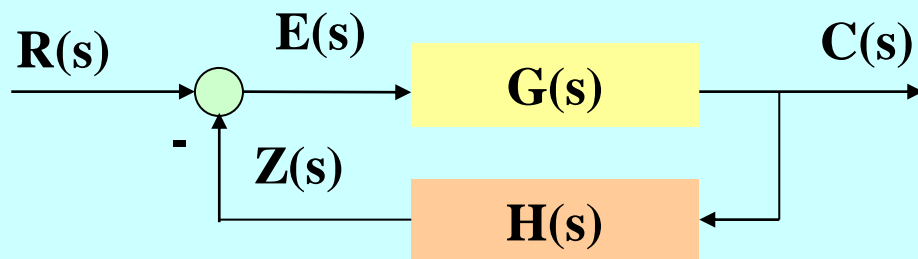




# 根轨迹概述



(1) 闭环传递函数零极点与开环传递函数零极点的关系:



开环传递函数为

$$G_o(s) = \frac{Z(s)}{E(s)} = G(s)H(s)$$

闭环传递函数为

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$



# 根轨迹概述 —— 开环传递函数



前向通道传递函数 **$G(s)$**  和反馈通道传递函数 **$H(s)$** :

$$G(s) = \frac{C(s)}{E(s)} = K_{1g} \frac{\prod_{j=1}^f (\tau_{1j}s + 1)}{s^m \prod_{i=1}^q (T_{1i}s + 1)} = K_{1r} \frac{\prod_{j=1}^f (s - z_{1j})}{s^m \prod_{i=1}^q (s - p_{1i})}$$

$$H(s) = \frac{Z(s)}{C(s)} = K_{2g} \frac{\prod_{j=1}^l (\tau_{2j}s + 1)}{\prod_{i=1}^h (T_{2i}s + 1)} = K_{2r} \frac{\prod_{j=1}^l (s - z_{2j})}{\prod_{i=1}^h (s - p_{2i})}$$

其中:

$K_{1g}$  -----前向通道增益,  $K_{1r}$  -----前向通道根轨迹增益

$K_{2g}$  -----反馈通道增益,  $K_{2r}$  -----反馈通道根轨迹增益



# 根轨迹概述 —— 开环传递函数



## 开环传递函数 $G(s)H(s)$ :

$$G(s) = K_{1g} \frac{\prod_{j=1}^f (\tau_{1j}s + 1)}{s^m \prod_{i=1}^q (T_{1i}s + 1)} = K_{1r} \frac{\prod_{j=1}^f (s - z_{1j})}{s^m \prod_{i=1}^q (s - p_{1i})}$$

$$H(s) = K_{2g} \frac{\prod_{j=1}^l (\tau_{2j}s + 1)}{\prod_{i=1}^h (T_{2i}s + 1)} = K_{2r} \frac{\prod_{j=1}^l (s - z_{2j})}{\prod_{i=1}^h (s - p_{2i})}$$

$$G(s)H(s) = K_g \frac{\prod_{j=1}^w (\tau_j s + 1)}{s^m \prod_{i=1}^{n-m} (T_i s + 1)} = K_r \frac{\prod_{j=1}^w (s - z_j)}{s^m \prod_{i=1}^{n-m} (s - p_i)} = K_r \frac{\prod_{j=1}^f (s - z_{1j}) \prod_{j=1}^l (s - z_{2j})}{s^m \prod_{i=1}^q (s - p_{1i}) \prod_{i=1}^h (s - p_{2i})}$$

其中:  $K_g = K_{1g} K_{2g}$  ----- 系统的开环增益

$K_r = K_{1r} K_{2r}$  ----- 开环根轨迹增益

$w = f + l$  ----- 开环零点数

$n = m + q + h$  ----- 开环极点数

更一般地, 将开环传递函数写成:

$$G(s)H(s) = \frac{K \prod_{h=1}^w (s - z_h)}{\prod_{j=1}^n (s - p_j)}$$



# 根轨迹概述 —— 闭环

$$G(s)H(s) = K_g \frac{\prod_{j=1}^w (\tau_j s + 1)}{s^m \prod_{i=1}^{n-m} (T_i s + 1)} = K_r \frac{\prod_{j=1}^w (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

$$G(s) = K_{1g} \frac{\prod_{j=1}^f (\tau_{1j} s + 1)}{s^m \prod_{i=1}^q (T_{1i} s + 1)} = K_{1r} \frac{\prod_{j=1}^f (s - z_{1j})}{s^m \prod_{i=1}^q (s - p_{1i})}$$

$$H(s) = K_{2g} \frac{\prod_{j=1}^l (\tau_{2j} s + 1)}{\prod_{i=1}^h (T_{2i} s + 1)} = K_{2r} \frac{\prod_{j=1}^l (s - z_{2j})}{\prod_{i=1}^h (s - p_{2i})}$$

闭环传递函数：

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{K_{1r} \prod_{i=1}^f (s - z_{1i}) \prod_{j=1}^h (s - p_{2j})}{\prod_{i=1}^n (s - p_i) + K_r \prod_{j=1}^w (s - z_j)}$$

- 1) 若  $n > w$ ，闭环系统根轨迹增益等于开环系统前向通道根轨迹增益  $K_{1r}$
- 2) 闭环零点由开环前向通道传递函数零点和反馈通道传递函数极点组成
- 3) 闭环极点与开环零、极点和根轨迹增益有关。



# 根轨迹概述——幅值条件与相角条件



(2) 在复平面上任给一个点，如何判断该点是否在根轨迹上？

设开环传递函数

$$G(s)H(s) = \frac{K(s - z_1) \cdots (s - z_w)}{(s - p_1) \cdots (s - p_n)}$$

代数方法：

$s \in C$  在根轨迹上，当且仅当  $\exists K \in R$  满足

$$1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{K(s - z_1) \cdots (s - z_w)}{(s - p_1) \cdots (s - p_n)} = 0$$

$$1 + G(s)H(s) = 0$$



$$G(s)H(s) = \frac{K(s - z_1) \cdots (s - z_w)}{(s - p_1) \cdots (s - p_n)} = -1 = e^{j(1+2h)\pi}, h = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$



# 根轨迹概述——幅值条件与相角条件



$$G(s)H(s) = \frac{K(s - z_1) \cdots (s - z_w)}{(s - p_1) \cdots (s - p_n)} = e^{j(1+2h)\pi} \quad h = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

在约束 **$K > 0$** 下， **$s$** 在根轨迹上当且仅当存在 **$K > 0$** 及整数 **$h$** 满足

幅值条件:

$$|G(s)H(s)| = \frac{|K| |s - z_1| \cdots |s - z_w|}{|s - p_1| \cdots |s - p_n|} = 1$$

**180度根轨迹**

相角条件:

$$\angle G(s)H(s) = (1 + 2h)180^\circ$$

在约束 **$K < 0$** 下， **$s$** 在根轨迹上当且仅当存在 **$K < 0$** 及整数 **$h$** 满足

幅值条件:

$$|G(s)H(s)| = \frac{|K| |s - z_1| \cdots |s - z_w|}{|s - p_1| \cdots |s - p_n|} = 1$$

**0度根轨迹**

相角条件:

$$\angle G(s)H(s) = h360^\circ$$



# 根轨迹概述——幅值条件与相角条件



几何方法:

$s \in C$  且  $s \neq z_i, s \neq p_j, i \in \{1, \dots, w\}, j \in \{1, \dots, n\}$ , 则  $s$  在根轨迹上, 当且仅当有整数  $h$  使

$$\begin{aligned} & \angle(s - z_1) + \dots + \angle(s - z_w) - \angle(s - p_1) - \dots - \angle(s - p_n) \\ &= \begin{cases} (2h+1)180^\circ & \text{若 } K > 0 \\ h360^\circ & \text{若 } K < 0 \end{cases} \quad (\text{相角条件}) \end{aligned}$$

对  $K > 0$  情形的证明:

必要条件

$s$  在根轨迹上  $\Rightarrow$  相角条件成立

充分条件

相角条件成立

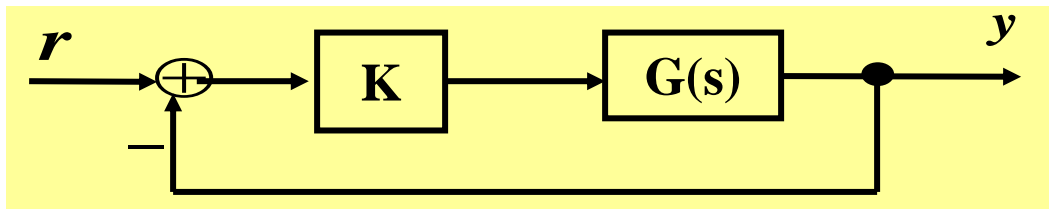
$$\left. \begin{aligned} & \text{取 } K = \frac{|s - p_1| \cdots |s - p_n|}{|s - z_1| \cdots |s - z_w|} > 0 \Rightarrow \frac{|K| |s - z_1| \cdots |s - z_w|}{|s - p_1| \cdots |s - p_n|} = 1 \Rightarrow \text{幅值条件成立} \end{aligned} \right\} \Rightarrow s \text{ 在根轨迹上}$$



# 根轨迹概述——幅值条件与相角条件



如下单回路系统 ( $K$ 为参数  $K>0$ )



特征方程 $\Delta(s)$ :  $\Delta(s) = 1 + KG(s) = 0 \Leftrightarrow KG(s) = -1$

$$|KG(s)| = 1, \quad \angle\{KG(s)\} = (1 + 2h)\pi$$

结论:

**s**-平面可能的闭环极点位置必须保证上述相角条件, **K**则可以应用幅值条件来获得。

一般地, 从**s**(满足相角条件)→通过幅值条件求**K**





# 根轨迹概述——幅值条件与相角条件



一旦开环传递函数 **$G(s)H(s)$** 确定，并转换为零极点增益的形式，则开环零点和极点就可以在 **$s$** 平面绘制出来。 **例如：**

$$G(s)H(s) = \frac{K(s + 1/T_1)^2}{s(s + 1/T_2)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{K(s - z_1)^2}{s(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)}$$

对于阻尼比 **$\zeta < 1$** 的二次式 **$s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$**

$$p_{2,3} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \zeta^2} = \sigma \pm j\omega_d$$



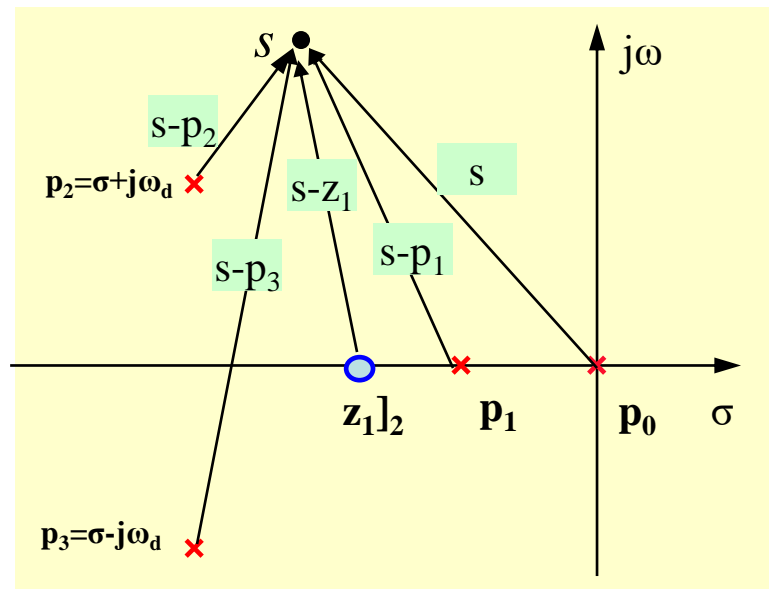
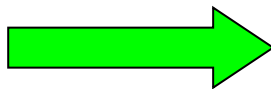
# 根轨迹概述——幅值条件与相角条件



$$G(s)H(s) = \frac{K(s - z_1)^2}{s(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)}$$

有4个极点和2个零点

零极点图:



注意:

- 1) 零极点图上的多重零极点用  $\times|_q$  or  $\circ|_q$  表示,  $q$  表示零极点的重数
- 2) 逆时针方向为相角的正方向 (右手原则)

例如, 试验点:

$s = -4 + j4$ ,  $p_1 = -1$ , 那么

$$\begin{aligned} s - p_1 &= -3 + j4 \quad \text{or} \\ |s - p_1| &= \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5 \\ \angle(s - p_1) &= 126.8^\circ \end{aligned}$$

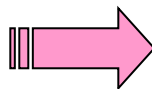


# 根轨迹概述——幅值条件与相角条件



## 例5-3

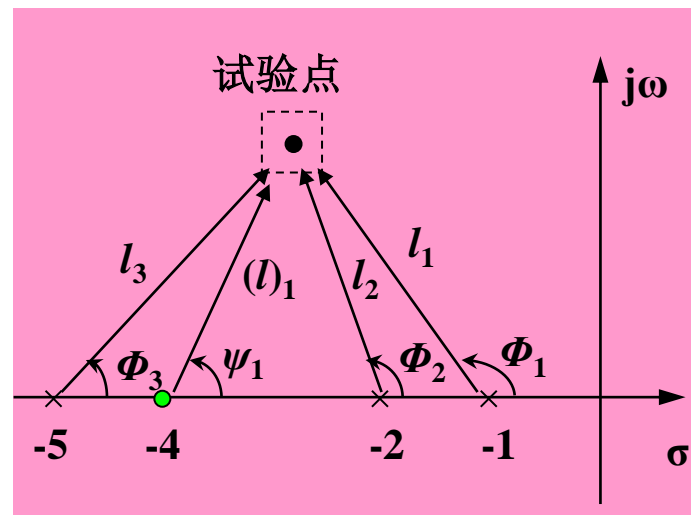
$$G(s)H(s) = \frac{K_0(1+0.25s)}{(1+s)(1+0.5s)(1+0.2s)}$$



$$G(s)H(s) = \frac{K(s+4)}{(s+1)(s+2)(s+5)}$$
$$K = 2.5K_0$$

**Step1.** 绘制开环零极点

**Step2.**  $\Phi$  表示分母对应的相角,  $\psi$  分子对应的相角,  $l$  表示分母因式线段的距离,  $(l)$  表示分子因式线段的距离





# 根轨迹概述——幅值条件与相角条件

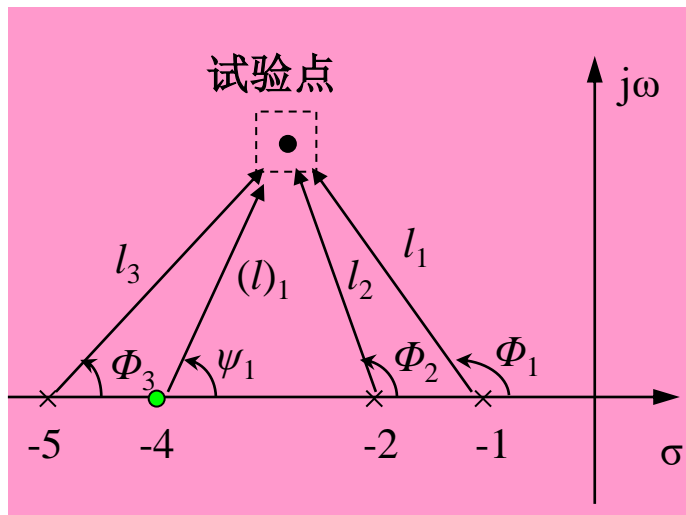


**Step3.** 任意选择一个试验点，若下述相角条件满足，则此试验点在根轨迹上

$$\psi_1 - \phi_1 - \phi_2 - \phi_3 = \begin{cases} (2h+1)180^\circ & \text{若 } K > 0 \\ h360^\circ & \text{若 } K < 0 \end{cases}$$

一旦确定试验点 $s_1$ 在根轨迹上，则可求其对应的根轨迹增益

$$|K| = \frac{l_1 l_2 l_3}{(l)_1} \quad l_1 = |s_1 + 1| \quad l_2 = |s_1 + 2| \quad l_3 = |s_1 + 5| \quad (l)_1 = |s_1 + 4|$$



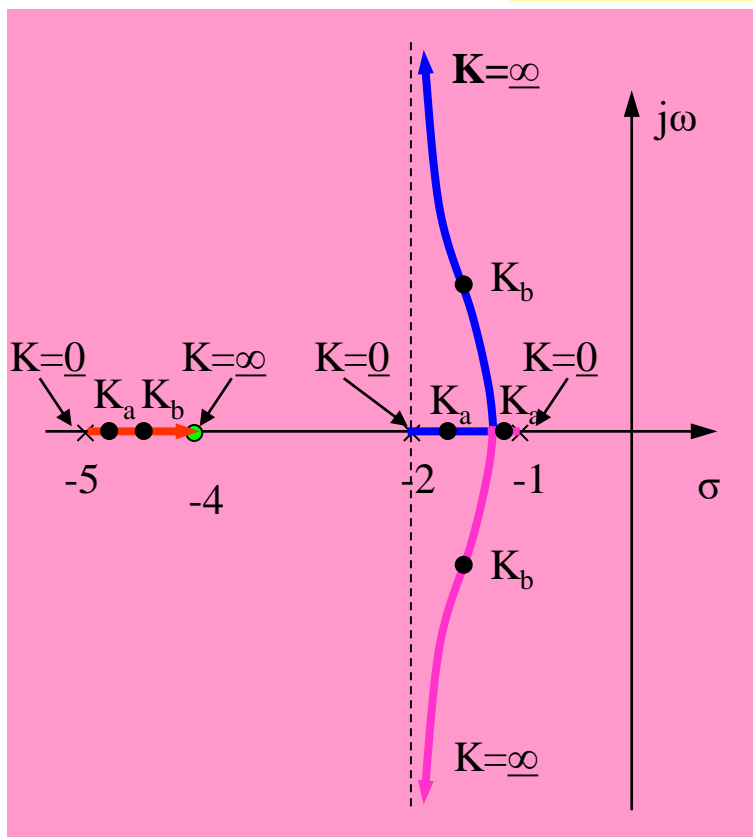


# 根轨迹概述——幅值条件与相角条件

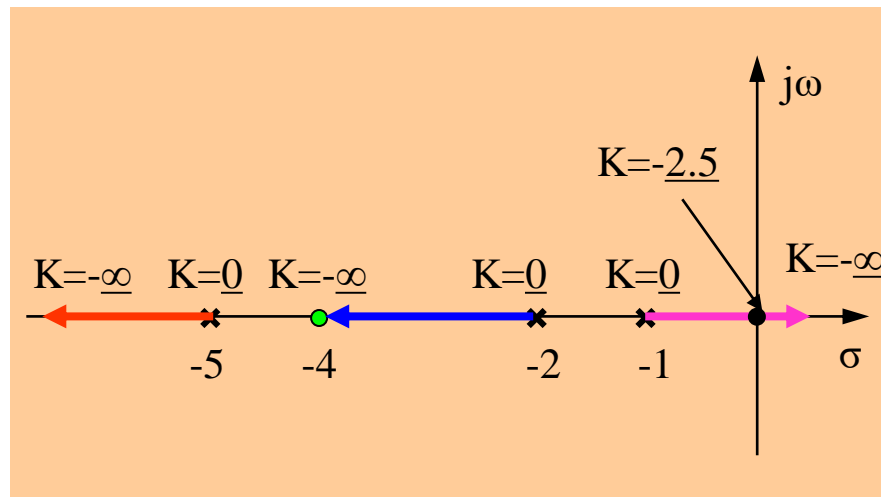


本系统的根轨迹:

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+4)}{(s+1)(s+2)(s+5)}$$



$K > 0$



注意:

$K < 0$

$K > -2.5$  的闭环极点均位于左半平面



Thanks!