思考题四

1. 不对. 随机变量 X 的数学期望按定义应该是

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{-1} x \cdot 0\mathrm{d}x + \int_{-1}^{0} x \cdot (1+x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} x \cdot (1-x)\mathrm{d}x + \int_{1}^{+\infty} x \cdot 0\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

2. 随机变量 X 与 Y 同分布, 那么它们的任意阶矩 (如果存在) 全部相等. 反之, 若有 $E(X) = E(Y)$ 且 $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y)$, 不能推出随机变量 X 与 Y 分布一定相同. 反例, 当 $X \sim P(1), Y \sim N(1,1)$ 时, $E(X) = E(Y) = 1$ 且 $\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) = 1$, 但显然两者的分布不一样.

3. 方差是 2×2.5^2.

4. 两个随机变量如果相互独立则它们一定不相关, 反之则不然.

5. (1) 对于 $n \geqslant 1$, 有 $E\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} E(X_i)$ 成立, 但 $\mathrm{Var}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i)$ 不一定成立, 因为

$$
\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) + \sum_{i \neq j} \mathrm{Cov}(X_i, X_j).
$$

且只有当 $\{X_i, i \geqslant 1\}$ 两两不相关时, $\mathrm{Var}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i)$ 才成立;

(2) 若 $\{X_i, i \geqslant 1\}$ 相互独立, 那么对于 $n \geqslant 1$, 有 $E\left(\prod\limits_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod\limits_{i=1}^{n} E(X_i)$ 成立, 但 $\mathrm{Var}\left(\prod\limits_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod\limits_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i)$ 不一定成立, 仅知

$$
\mathrm{Var}\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i^2\right) - \left(E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)\right)^2 = \prod_{i=1}^{n} E(X_i^2) - \prod_{i=1}^{n} (E(X_i))^2.
$$

6. 错. 应为 $\mathrm{Var}(X - 2Y) = \mathrm{Var}(X) + (-2)^2\mathrm{Var}(Y) + 2\mathrm{Cov}(X, -2Y) = 5 - 4\mathrm{Cov}(X, Y)$.

7. 错. 应根据定理 4.1.1 来计算,

$$
E\left(\frac{1}{X}\right) = \int_{1}^{3} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot (\ln 3 - \ln 1) = \ln \sqrt{3}.
$$

习题四

1. $\dfrac{nN}{M}$.
2. 应采用第二种方案, 因为后者的平均年薪比较高.
3. 6.
4. $E(\eta_n)=np, E(S_n)=n(2p-1)$.
5. 3.
6. (1) 0.5; (2) 0.5; (3) 0.25.
7. (1) $\dfrac{1}{2}+q(1-q)$, 其中 q 表示离棍子某一端点的距离;

(2) 当 Q 位于棍子中点时, 包含 Q 点的棍子平均长度达到最大.

8. 20 分钟.
9. 当 $k\leqslant 10$ 时, $0.8^k-\dfrac{1}{k}>0$, 第二种方法检验的平均次数少一些; 当 $k>10$ 时 $0.8^k-\dfrac{1}{k}<0$, 第一种方法检验的平均次数少一些.
10. $\dfrac{1-\mathrm{e}^{-8\lambda}}{\lambda}$ (小时).
11. (1) $E(X)=E(Y)=0$; (2) $\dfrac{2r}{3}$.
12. (1) 10; (2) 6.
13. $\dfrac{n-1}{n+1}$.
14. 这一天去该冷饮店购买冷饮的顾客数服从数学期望为 λp 的泊松分布, 数学期望为 λp.
15. $\dfrac{26}{63}$.
16. $E(X^k)=\dfrac{\Gamma(k+\alpha)}{\lambda^k\Gamma(\alpha)}(k\geqslant 1), \mathrm{Var}(X)=\dfrac{\alpha}{\lambda^2}$.
17. $\mathrm{Var}(X)=2, \mathrm{Var}(|X|)=1$.
18. (1) 6, 5.64; (2) 98, 1.96.
19. (1) $\dfrac{3}{4}$; (2) $E(X\cdot(-1)^Y)=0, \mathrm{Var}(X\cdot(-1)^Y)=\dfrac{1}{2}$.
20. (1) $E(Z)=\dfrac{1}{6}, Cv(Z)=1$; (2) $E(Z)=\dfrac{7}{12}, Cv(Z)=\dfrac{\sqrt{33}}{7}$; (3) $E(Z)=\dfrac{3}{4}, Cv(Z)=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.
21. (1) $\mathrm{Cov}(X,|X|)=0$, 故 X 与 $|X|$ 不相关; (2) X 与 $|X|$ 不独立.
22. (1) $\rho_{XY}=\dfrac{1}{3}$, X 与 Y 不独立且相关; (2) X^2 与 Y^2 相关系数为零, X^2 与 Y^2 相互独立且不相关.
23. $-\dfrac{1}{5}$, 两者为负相关关系.
24. (1)

		B			$P\{A=i\}$
		$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	
A	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
$P\{B=j\}$		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	

(2) $\dfrac{6+\sqrt{3}+2\sqrt{6}+2\sqrt{2}}{16}\approx 0.966$; (3) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 负相关.

25. $\dfrac{k-n_0}{k}$.

26. (1) 提示: 利用全概率公式计算 ξ 的分布函数; (2) $\rho_{X\xi}=2p-1$, 故当 $p=\dfrac{1}{2}$ 时, X 与 ξ 不相关; 当 $p>\dfrac{1}{2}$ 时, X 与 ξ 为正相关; 当 $p<\dfrac{1}{2}$ 时, X 与 ξ 为负相关. 当 $0<p<1$ 时, X 与 ξ 不独立.

27. (1)

		Y		$P\{X=i\}$
		0	1	
X	0	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$
	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
$P\{Y=j\}$		$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	

X 与 Y 不独立;

(2) $\dfrac{1}{25}$, 正相关.

28. (1) $\xi\sim N(-b,a^2+4b^2),\eta\sim N(a,4a^2+b^2)$; ξ 的标准化变量为 $\xi^*=\dfrac{\xi+b}{\sqrt{a^2+4b^2}}$, η 的标准化变量为 $\eta^*=\dfrac{\eta-a}{\sqrt{4a^2+b^2}}$; ξ 与 η 的相关系数为 $\dfrac{-5ab}{\sqrt{(a^2+4b^2)(4a^2+b^2)}}$;

(2) $Cv(\xi)=-\dfrac{1}{b}\sqrt{(a-b)^2+3b^2}$;

(3) a;

(4) 当 $b=-2a$ 或者 $a=-2b$ 时, ξ 与 η 不相关且相互独立, 否则 ξ 与 η 相关且不相互独立.

29. (1) $X_1\sim N(0,1),X_2\sim N(0,16),X_3\sim N(1,4)$;

(2) X_1 与 X_2 相关且不独立; X_1 与 X_3 相关且不独立, X_2 与 X_3 不相关且相互独立, X_1,X_2 与 X_3 不独立;

(3) $\boldsymbol{Y}=(Y_1,Y_2)^{\mathrm{T}}\sim N(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})$, 其中 $\boldsymbol{\mu}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\Sigma}=\begin{pmatrix}13&0\\0&7\end{pmatrix}$.

30. 0.034.

31. 0.158 7.

思考题五

1. 在“高等数学”中研究的对象都是确定的, 不具有随机性. 如: 对于数列 a_n 而言, 若有 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$, 则意味着对于任意的实数 $\varepsilon > 0$, 存在自然数 N, 使得当 $n > N$ 时, 均有 $|a_n - a| < \varepsilon$ 成立, 也就是对于满足 $n > N$ 的 n 来说, $|a_n - a| \geqslant \varepsilon$ 是不会出现的; 在“概率论”中, 依概率收敛讨论的是随机变量序列的收敛性. 若对随机变量序列 ξ_n 而言, 有 $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, 其中 ξ 可以是随机变量也可以是实数. 那就意味着对于任意的实数 $\varepsilon > 0$, 当 n 充分大时, 事件“$\{|\xi_n - \xi| < \varepsilon\}$”发生的概率很大, 接近于 1, 但不能说事件“$\{|\xi_n - \xi| \geqslant \varepsilon\}$”一定不会发生, 只是该事件发生的可能性非常小, 几乎为 0 而已.

2. 马尔可夫不等式适用于 k 阶矩存在的随机变量, 切比雪夫不等式则要求随机变量的数学期望和方差都存在才可以使用.

3. 大数定律与中心极限定理都是研究随机变量和 (或者说随机变量的算术平均) 的极限行为. 如果对于独立同分布的随机变量序列, 当它们的方差有限时, 大数定律与中心极限定理都是成立的. 它们的区别是: 大数定律 (我们此书中介绍的其实是弱大数定律的一种) 研究的是随机变量序列的算术平均在一定条件下的依概率收敛性质; 而中心极限定理则讨论了随机变量序列的算术平均在一定条件下可以用正态分布来近似, 所以在两个都适用的条件下, 中心极限定理不仅可以给出随机变量序列算术平均落入某区域的概率的极限值, 还可以给出此概率的一个近似值 (当 n 充分大).

4. 例 5.2.5 中的 X_i 独立同分布, 且方差有限, 所以切比雪夫不等式与中心极限定理都适用. 由于切比雪夫不等式仅仅可以得到随机变量落入某区域的一个界, 而中心极限定理则可以给出当 n 充分大时, 随机变量序列的部分和 (或算术平均) 落入某区域的近似概率, 从一定角度看, 后者讨论的概率更加“精确”. 事实上, 比较两者的条件, 也可知切比雪夫不等式的适用面更广, 而其结论就相对粗糙些.

习题五

1. (1) 72%; (2) 75%.
2. 92.8%.
3. $(3-2\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2})$.
4. 可求出 $X_{(n)}$ 的分布函数, 并利用依概率收敛的定义来得到; 或者利用切比雪夫不等式证明.
5. 提示: 利用切比雪夫不等式.
6. (1) 收敛, 极限值为 $\sigma^2+\mu^2$; (2) 收敛, 极限值为 σ^2;
(3) 收敛, 极限值为 $\dfrac{\mu}{\sigma^2+\mu^2}$; (4) 收敛, 极限值为 $\dfrac{\mu}{\sigma}$.
7. (1) $a = \dfrac{2}{\lambda^2}$; (2) $N\left(\dfrac{2}{\lambda}, \dfrac{1}{25\lambda^2}\right)$; (3) 0.5.
8. 可以, 因为 $1-\Phi(6.5) = 0$.
9. (1) 99.756%, 99.66%, 99.55%; (2) 117 次.
10. $\Phi(1.81) = 96.48\%$.
11. (1) 86.21%; (2) 94.3%.

思考题六

1. 统计量就是样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的一个函数, 且要求它不包含有任何未知参数. 用样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的观察值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 计算出统计量的数值, 就是统计量的值. 统计量的分布称为抽样分布.

2. 简单随机样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 满足: (1) $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 之间相互独立; (2) X_i 与总体 X 具有相同分布. 用简单随机抽样得到的样本称为简单随机样本.

3. 对于给定的 $\alpha, 0 < \alpha < 1$, 如果 x_α 满足 $P\{X > x_\alpha\} = \alpha$, 则称 x_α 是 X 的上 α 分位数. 若 X 服从某分布, 则称 x_α 是该分布的上 α 分位数.

如果 x_α 满足 $P\{X < x_\alpha\} = \alpha$, 则称 x_α 是 X 的下 α 分位数. 若 X 服从某分布, 则称 x_α 是该分布的下 α 分位数.

利用 Excel 2010 中 NORM. INV, T. INV, CHISQ. INV, F. INV 函数可以分别得到正态分布、t 分布、χ^2 分布和 F 分布的上、下分位数.

4. (3), (4), (6).

5. 不一定, 当总体 X 服从正态分布时相互独立.

6. 不一定, 当 X 和 Y 相互独立时成立.

习题六

1. (1) 和 (4) 是统计量, (2) 和 (3) 不是.

2. $\overline{x} = 3.28, s^2 = 0.347, B_2 = 0.277\,6$.

3. (1) 0.682 6; (2) 0.329.

4. (1) $N\left(0, \frac{1}{16}\right)$; (2) $\chi^2(16)$; (3) $t(9)$; (4) $t(2)$; (5) $N\left(0, \frac{15}{16}\right)$.

5. (1) 11.070 5　10.596 23　1.145 476　1.249 915;
(2) 1.859 548　1.740 243　−1.859 548　−1.740 243;
(3) 5.409 45　9.013 46　6.097 9　10. 617 3.

6. (1) 68; (2) 97.

7. (1) $N(0,1)$; (2) $t(8)$; (3) $\chi^2(8)$; (4) $\chi^2(9)$;
(5) $\chi^2(1)$; (6) $F(1,8)$;
(7) $F(1,2)$; (8) $F(2,2)$.

8. (1) $0, \frac{1}{5}$; (2) 2.

9. $\frac{\theta}{2}, \frac{4\theta^2}{15}, \frac{\theta^2}{12}$.

10. (1) $\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{10\lambda^2}$; (2) $\frac{1}{10\lambda}, \frac{1}{100\lambda^2}$.

11. $t(7)$.

12. (1) $\sqrt{\frac{45}{14}}$; (2) $\sqrt{\frac{135}{14}}$.

13. 5.82.

14. 0.5,0.

思考题七

1. 估计量是样本的函数, 是随机变量; 估计值是样本值代入估计量后的取值.

2. $\overline{X}$ 是 μ 的估计量, 取值是随机的, μ 是参数, 是常量, 因此 $\overline{X}\neq\mu$. 当总体是连续型随机变量时, $P\{\overline{X}=\mu\}=0, P\{S^2=\sigma^2\}=0$.

3. 不是.

4. 参见 §7.1 的介绍.

5. 步骤参见 §7.1 的介绍. 各分布参数的矩估计和极大似然估计为

分布	$B(1,p)$	$B(n,p)$	$P(\lambda)$	$U(a,b)$	$E(\lambda)$	$N(\mu,\sigma^2)$
矩估计	$\widehat{p}=\overline{X}$	$\widehat{p}=\dfrac{\overline{X}}{n}$	$\widehat{\lambda}=\overline{X}$	$\widehat{a}=\overline{X}-\sqrt{\dfrac{3}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$ $\widehat{b}=\overline{X}+\sqrt{\dfrac{3}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$	$\widehat{\lambda}=\dfrac{1}{\overline{X}}$	$\widehat{\mu}=\overline{X}$ $\widehat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$
极大似然估计	$\widehat{p}=\overline{X}$	$\widehat{p}=\dfrac{\overline{X}}{n}$	$\widehat{\lambda}=\overline{X}$	$\widehat{a}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$ $\widehat{b}=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$	$\widehat{\lambda}=\dfrac{1}{\overline{X}}$	$\widehat{\mu}=\overline{X}$ $\widehat{\sigma}^2=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$

6. 参见 §7.2 的介绍

7. 参见 §7.3 的介绍.

8. 枢轴量是样本和待估参数的函数, 其分布不依赖于未知参数, 而统计量只是样本的函数, 其分布可能依赖于未知参数.

9. 参见 §7.3 和 §7.4 的介绍.

10. 应选 $\left(\overline{X}\pm\dfrac{1}{\sqrt{n}}z_{a/2}\right)$, 因为当 σ^2 已知时, 选用正态分布枢轴量得到的区间估计要比 t 分布枢轴量得到的区间估计的精度更高.

习题七

1. $2\overline{X},\theta,\dfrac{\theta^2}{5n}$.

2. $\left[\dfrac{rS}{t}\right]$.

3. (1) 矩估计: $1-\dfrac{2\overline{X}}{3}$, 极大似然估计: $\dfrac{n_0}{n};\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3};$

(2) 矩估计: $1-\dfrac{\overline{X}}{2}$, 极大似然估计: $\dfrac{2n_0+n_1}{2n}$; 0.5, 0.5;

(3) 矩估计: $\widehat{\theta}_1=1-\dfrac{3\overline{X}}{2}+\dfrac{A_2}{2},\widehat{\lambda}_1=2\overline{X}-A_2$, 极大似然估计: $\widehat{\theta}_2=\dfrac{n_0}{n},\widehat{\lambda}_2=\dfrac{n_1}{n};\widehat{\theta}_1=\widehat{\theta}_2=\dfrac{1}{3},\widehat{\lambda}_1=\widehat{\lambda}_2=\dfrac{1}{3}$.

4. (1) 矩估计: $\dfrac{\overline{X}}{2-\overline{X}}$, 极大似然估计: $\dfrac{1}{\ln 2-\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i}$; 0.336, 0.577;

(2) 矩估计: $2\overline{X}-2$, 极大似然估计: $\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$: 0.186, 0.35;

(3) 矩估计: $\sqrt{\dfrac{A_2}{2}}$, 极大似然估计: $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}|X_i|}{n}$; 0.485, 0.468.

5. (1) $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2}{2n}$; (2) $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2}{n}$; (3) $\mathrm{e}^{-\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}X_i^2}}$.

6. (1) $\dfrac{1}{18}$; (2) $\dfrac{1}{10}$.

7. 都是 μ 的无偏估计量, $\widehat{\mu}_3$ 更有效.

8. (1) $a+b+c=1$; (2) $a=\dfrac{1}{6},b=\dfrac{1}{3},c=\dfrac{1}{2}$.

9. (1) 矩估计: $\widehat{\theta}_1=\dfrac{3\overline{X}}{2}$, 极大似然估计: $\widehat{\theta}_2=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$; (2) $\widehat{\theta}_2$ 优于 $\widehat{\theta}_1$;

(3) $\widehat{\theta}_1,\widehat{\theta}_2$ 均是 θ 的相合估计.

10. (1) 略; (2) $c=\dfrac{1}{n+1}$; (3) 是.

11. (1) $\widehat{\theta}=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$; (2) $\widehat{\theta}-\theta$ 的密度函数为 $g(x)=\begin{cases}n\mathrm{e}^{-nx}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0;\end{cases}$

(3) 是; (4) $\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}+\dfrac{\ln\alpha}{n}$.

12. (21.557, 22.083).

13. (1) (3 172.333, 3 629.533); (2) 3 213.208.

14. (−12.91, −0.49).

15. (1) (91 335.699, 423 804.783 1); (2) 363 049.326 5.

16. (1) $\overline{x}=8.080\ 813, s^2=6.873\ 35$; (2) (6.684, 9.478); (3) (3.751, 16.464).

17. (1) (221.613, 464.312); (2) 431.19.

18. (−159.8, −110.2), −114.2.

19. (1) (−4.01,14.61); (2) (−4.267,14.867); (3) (0.385,3.859).

20. (−0.574 5,−0.345 5).

21. (0.579 3,0.778 5).

思考题八

1. 若原假设成立, 则样本落入拒绝域中是小概率事件, 因此当样本值落在拒绝域时, 有充分的理由拒绝原假设.

2. 参见 §8.1 的介绍.

3. 对于有关参数的假设检验, 根据样本资料, 将希望得到支持的假设作为备择假设; 对于分布的假设检验, 则是将希望得到支持的假设作为原假设.

4. 对于假设问题 $H_0:\theta\leqslant\theta_0,H_1:\theta>\theta_0$, 如果在显著水平 α 下, 拒绝原假设 $H_0:\theta\leqslant\theta_0$, 意味着有 $1-\alpha$ 的把握认为 $\theta>\theta_0$. 对应于假设问题 $H_0:\theta\geqslant\theta_0,H_1:\theta<\theta_0$, 如果不能拒绝 H_0, 则有 $1-\beta$ 的把握认为 $\theta\geqslant\theta_0$, 其中 β 为犯第 II 类错误的概率. 根据奈曼和皮尔逊理论, 检验首先控制犯第 I 类错误的概率. 因此,

α 是有控制的, 而 β 是无控制的. 在设计检验假设时, 我们应根据样本资料, 将希望得到支持的假设作为备择假设.

5. 不矛盾. 有 $100\times(1-\alpha_1)\%$ 的把握但没有 $100\times(1-\alpha_2)\%$ 的把握拒绝原假设.

6. 参见 §8.1 的介绍.

7. (1) 第 I 类错误是该供应商提供的这批土豆片的平均重量的确大于等于 60 g, 但检验结果却提供证据支持店方倾向于认为其重量少于 60 g;

(2) 第 II 类错误是该供应商提供的这批土豆片的平均重量其实少于 60 g, 但检验结果却没有提供足够的证据支持店方发现这一点, 从而拒收这批产品;

(3) 顾客自然看重第 II 类错误, 而供应商更看重第 I 类错误.

8. 参见 §8.4 的介绍.

9. 参见 §8.5 的介绍.

习题八

1. (1) $H_0:\mu=15\,000, H_1:\mu>15\,000$;

(2) 拒绝域 $W=\left\{Z=\dfrac{\overline{X}-15\,000}{1\,500/\sqrt{100}}\geqslant z_{0.05}=1.645\right\}$; (3) $P_-=0.000\,233$; (4) 拒绝原假设.

2. $H_0:\mu\geqslant 15, H_1:\mu<15$, 不拒绝原假设, 即认为广告是真实的.

3. (1) 拒绝域为 $W=\{4|\overline{X}-1|\geqslant z_{0.025}=1.96\}$; 犯第 II 类错误的概率为 0.021;

(2) 拒绝域为 $W=\{15S^2\geqslant \chi^2_{0.05}(15)=24.996\}$; 犯第 II 类错误的概率为 0.024 7;

(3) 0.030 8, 0.118 7.

4. (1) 不拒绝原假设; (2) (890.7, 903.3); (3) 0.297 7.

5. 拒绝原假设, 即认为该地区男子的身高明显高于全国水平.

6. 拒绝原假设, 即说明该减肥药的减肥效果显著.

7. 不拒绝原假设, 即认为注射疫苗后狗的体温没有显著升高.

8. 拒绝原假设, P_-值为 0.021.

9. (1) P_-值为 0.134 14, 不拒绝原假设; (2) P_-值为 0.231 9, 不拒绝原假设.

10. (1) $H_0:\mu=15, H_1:\mu\neq 15$, 不拒绝原假设;

(2) $H_0:\sigma^2\leqslant 0.04, H_1:\sigma^2>0.04$, 不拒绝原假设.

11. (1) $H_0:\mu\leqslant 500, H_1:\mu>500, P_-$值为 0.000 891, 拒绝原假设;

(2) $H_0:\sigma^2=30, H_1:\sigma^2\neq 30, P_-$值为 0.942 4, 不拒绝原假设.

12. 拒绝原假设, 认为 A 矿的煤产生的热量要显著地大于 B 矿的煤.

13. (1) 认为两个方差没有显著差异;

(2) 不拒绝原假设, 即甲页均出错数并不显著少于乙.

14. (1) 认为两个方差有显著差异;

(2) 拒绝原假设, 即认为男性长跑运动员每分钟的心率显著低于一般年轻男性.

15. (1) 认为两个方差没有显著差异;

(2) 拒绝原假设, 即新药组和对照组病人的平均抗凝血酶活力有显著差异.

16. 拒绝原假设.

17. 不拒绝原假设, 认为该八面体是匀称的.

18. 不拒绝原假设, 认为数据来自泊松分布的总体.

19. 由于 $np_5 = 100P\{X > 30\} = 100\mathrm{e}^{-3} = 4.978\,7 \approx 5$. 如果不合并, 则采用 χ^2 检验, 不拒绝 H_0. 如果认为 $4.978\,7 < 5$, 合并后变成分 4 组, 经 χ^2 检验拒绝 H_0. 在实际中, 如果碰到类似情况, 建议增加样本容量.

20. 不拒绝原假设, 认为该地区成年男子身高服从正态分布.

思考题九

1. 方差分析的主要任务是比较分类数据均值的差异, 因此, 一般方差分析的数据来自几个方差相同的不同正态总体的分类数据, 并且要求数据具有独立性.

方差分析的基本假定为: 各样本是来自相互独立的正态分布总体, 各总体方差相等, 即满足方差齐性.

2. 假设 $X_{i1}, X_{i2}, \cdots, X_{in_i}$ 是来自第 i 个正态总体 $X_i \sim N(\mu_i, \sigma^2)(i = 1, 2, \cdots, r)$ 的样本, 其中 μ_i, σ^2 均为未知参数, 且总体 X_i 相互独立. 方差分析的数学模型:

$$\begin{cases} X_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}, \\ \varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2) \text{ 且相互独立}, \end{cases} \quad i = 1, 2, \cdots, r, j = 1, 2, \cdots, n_i,$$

其中 μ_i 是第 i 个总体的均值 (理论均值), ε_{ij} 是相应的试验误差.

方差分析是要检验假定 $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_r$. 方差分析的基本步骤如下:

(1) 建立检验假设 $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \cdots = \mu_r$;

(2) 给出方差分析表, 得到检验统计量 F 的值和 P_-值;

(3) 给定显著水平, 并作出推断结果.

3. 可以, 但一般不采用, 因为用两样本 t 检验没有用到全部的数据.

4. (1) 自变量是各省份和性别, 应变量是交通事故发生率;

(2) 自变量是分类变量, 应变量是连续型随机变量;

(3) 这样的数据适合采用方差分析去分析.

5. 一元线性回归模型: $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, i = 1, 2 \cdots, n$.

经典的线性回归模型需要满足 3 个假设:

(1) $E(\varepsilon_i) = 0$;(2) $\mathrm{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0, i \neq j$; (3) $\mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2$.

如果需要对模型进行统计推断, 一般要假设 ε_i 相互独立, 并服从正态分布 $N(0, \sigma^2)$.

6. 不是, 用线性回归模型进行数据分析要求变量之间存在因果关系, 并有一定的线性相关性. 除此以外, 如果采用经典的回归分析的方法, 要求总体具有正态性.

7. 一元线性回归方程的显著性检验可以采用 F 检验和 t 检验, 但对于多元线性回归方程的显著性检验只能用 F 检验.