第六章 频率特性分析法

CHAPTER 6 Frequency Response

第六章主要内容

- ✓ 概述
- ✓ Bode 图 (对数坐标图)
- ✓ 极坐标图
- ✓ Nyquist稳定性判据
- ✓ 基于频率特性的补偿器设计

幅相曲线绘制方法

$G(s)$的极坐标图（幅相曲线）可以采用下述3种方法绘制：

变$G(s)$为$G(j\omega)$，在$[0,+\infty)$内取足够多个ω，计算每个ω对应的复数$G(j\omega)$，在复平面上标出相应的点。依ω增大方向将所有的点用光滑曲线连接

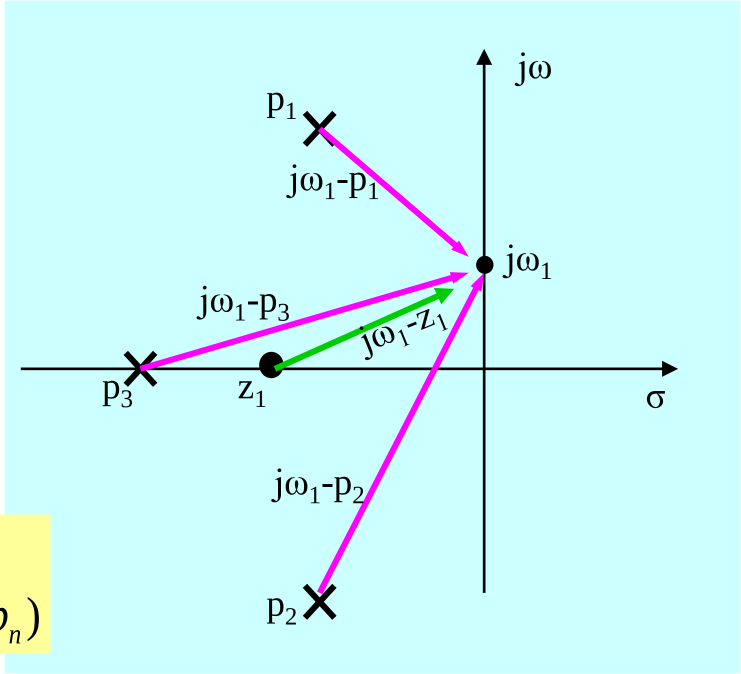
从对数幅频曲线和相频曲线中，获取足够多的幅值$|G(j\omega)|$和相角，利用幅值和相角在复平面上标出相应的点。依ω增大方向光滑连接所有的点

从零极点图中获得绘制幅相曲线的数据（适用于最小相位传递函数）

$$G(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{K(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_w)}{(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

$$|G(j\omega)|=\frac{|K||j\omega-z_1|\cdots|j\omega-z_w|}{|j\omega-p_1|\cdots|j\omega-p_n|}$$

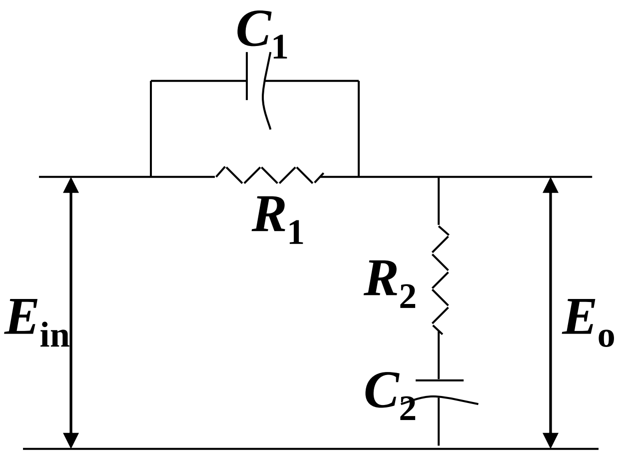
$$\angle G(j\omega)$$
$$=\angle K+\angle(j\omega-z_1)+\cdots\angle(j\omega-z_w)-\angle(j\omega-p_1)-\cdots-\angle(j\omega-p_n)$$



幅相曲线——RC复合网络

对某些特殊的$G(s)$，可以证明其幅相曲线呈特殊形状（如：圆、线）

RC复合网络



$$G(s)=\frac{E_o(s)}{E_{in}(s)}=\frac{1+(T_1+T_2)s+T_1T_2s^2}{1+(T_1+T_2+T_{12})s+T_1T_2s^2}$$

$T_1=R_1C_1$ $\quad$ $T_2=R_2C_2$ $\quad$ $T_{12}=R_1C_2$

$$G(s)=1+\frac{-T_{12}s}{1+(T_1+T_2+T_{12})s+T_1T_2s^2}$$

$$G(j\omega)=1+\frac{-\mathrm{j}\omega T_{12}}{\left(1-\omega^2T_1T_2\right)+\mathrm{j}\omega\left(T_1+T_2+T_{12}\right)}$$

令： $a=1-\omega^2T_1T_2$

$b=T_1+T_2+T_{12}$

$$G(j\omega)=1+\frac{-\mathrm{j}\omega T_{12}}{a+\mathrm{j}\omega b}$$

$$=1-\frac{\omega^2T_{12}b}{a^2+\omega^2b^2}-\mathrm{j}\frac{\omega T_{12}a}{a^2+\omega^2b^2}$$

幅相曲线——RC复合网络

$$G(j\omega)=1-\frac{\omega^2T_{12}b}{a^2+\omega^2b^2}-\mathrm{j}\frac{\omega T_{12}a}{a^2+\omega^2b^2}$$

$$b=T_1+T_2+T_{12}$$

$$\left(1-\frac{\omega^2T_{12}b}{a^2+\omega^2b^2}-\frac{b-0.5T_{12}}{b}\right)^2+\left(\frac{\omega T_{12}a}{a^2+\omega^2b^2}\right)^2$$

$$=\left(\frac{-\omega^2T_{12}b^2+0.5T_{12}a^2+0.5\omega^2T_{12}b^2}{\left(a^2+\omega^2b^2\right)b}\right)^2+\left(\frac{\omega T_{12}ab}{\left(a^2+\omega^2b^2\right)b}\right)^2$$

$$=\left(\frac{0.5T_{12}}{b}\right)^2\frac{\left(a^2-\omega^2b^2\right)^2+\left(2\omega ab\right)^2}{\left(a^2+\omega^2b^2\right)^2}$$

$$=\left(\frac{0.5T_{12}}{b}\right)^2$$

幅相曲线在一个圆上，圆心$\left(\frac{b-0.5T_{12}}{b}=\frac{T_1+T_2+0.5T_{12}}{T_1+T_2+T_{12}},0\right)$，半径$\frac{0.5T_{12}}{T_1+T_2+T_{12}}$

幅相曲线——RC复合网络

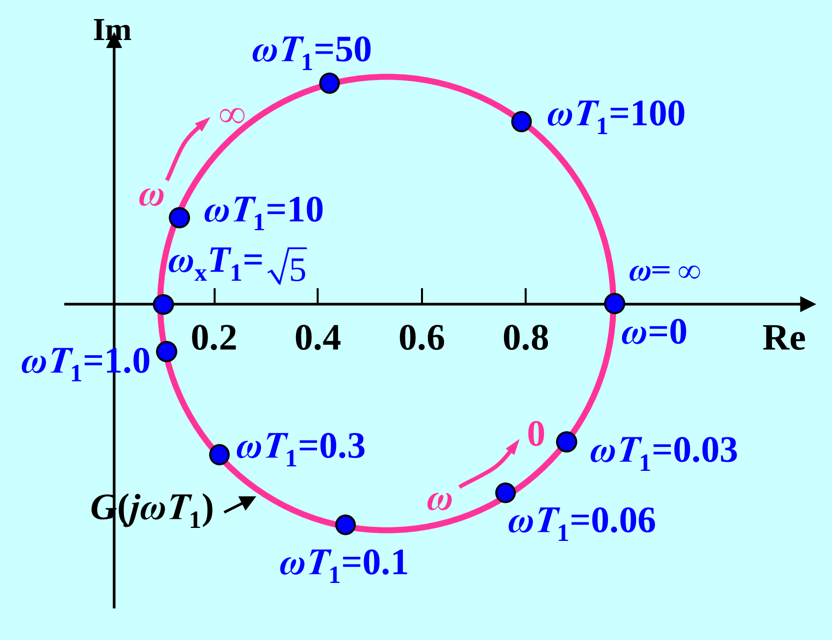
例如

$$G(j\omega)=\frac{1+(T_1+T_2)(j\omega)+T_1T_2(j\omega)^2}{1+(T_1+T_2+T_{12})(j\omega)+T_1T_2(j\omega)^2}$$

$$=\frac{(1+j\omega T_1)(1+j0.2\omega T_1)}{(1+j11.1\omega T_1)(1+j0.0179\omega T_1)}$$

$$T_2=0.2T_1$$

$$T_{12}=10T_1$$



幅相曲线是圆心在实轴上的整圆，且位于第一、四象限

根据ω 是小于或大于 ω_x，正弦强迫响应E_o滞后或超前正弦输入E_{in}

幅相曲线——RC复合网络

1) $\lim\limits_{\omega\to 0} G(j\omega) \to 1\angle 0°$

2) $\lim\limits_{\omega\to \infty} G(j\omega) \to 1\angle 0°$

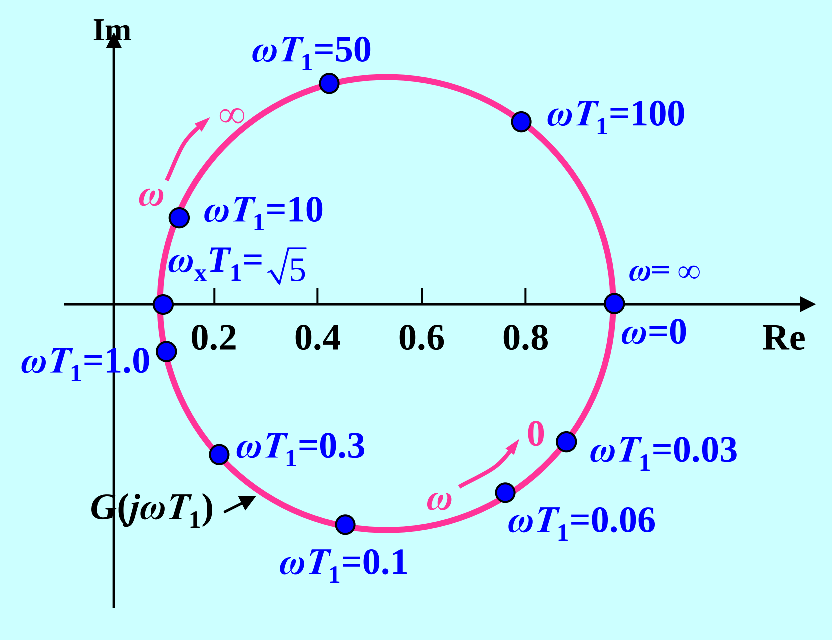
3）当$\omega=\omega_x$时，相角也为零

$$G(j\omega) = 1 - \frac{\omega^2 T_{12} b}{a^2+\omega^2 b^2} - j\frac{\omega T_{12} a}{a^2+\omega^2 b^2}$$

当$\omega=0, \omega=+\infty$或$a=0$时，虚部为零

$a = 1-\omega^2 T_1 T_2$

$1-\omega^2 T_1 T_2 = 0$得$\omega_x = \sqrt{\dfrac{1}{T_1 T_2}}$



当频率小于ω_x时，相位滞后

当频率大于ω_x时，相位超前

该RC复合网络也称为滞后-超前补偿器

0型系统的开环幅相曲线

0 型系统的开环幅相曲线

$$\text{开环频率特性} G(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{E(j\omega)}=\frac{K}{(1+j\omega T_f)(1+j\omega T_m)}$$

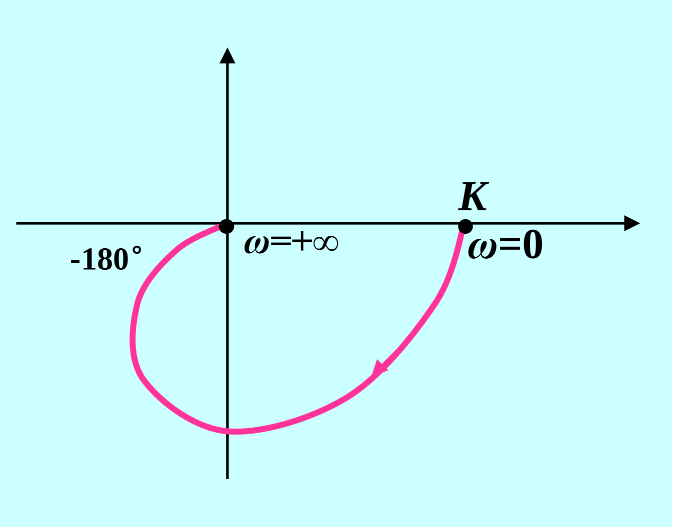
$$K>0, T_f>0, T_m>0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} K\angle 0^\circ & \omega=0 \\ 0\angle -180^\circ & \omega\to\infty \end{cases}$$

每一典型一阶环节当ω从0到∞变化时，相角变化 0 到 -90°

$G(j\omega)$ 的极坐标图起始于 $G(j\omega)=K\angle 0^\circ$（$\omega=0$），首先穿过第四象限，然后穿过第三象限，当频率接近无穷大时，达到 $\lim_{\omega\to\infty}=0\angle -180^\circ$。

$G(j\omega)$的相角持续减小，顺时针方向从0°变化到 -180°。



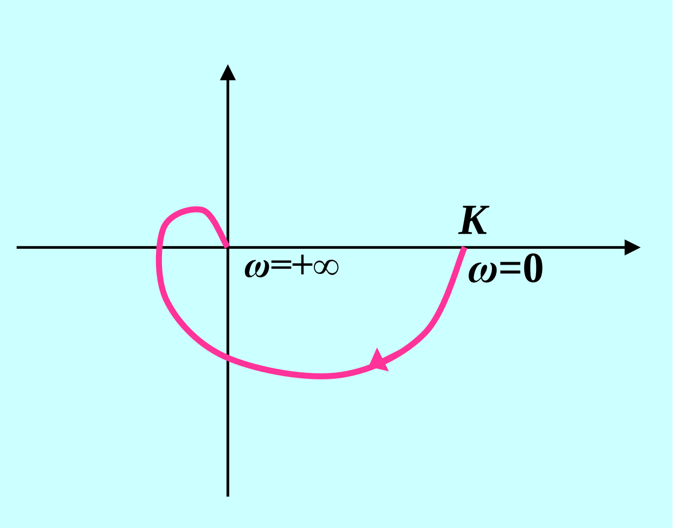
0型系统的开环幅相曲线

若上述开环频率特性分母上增加一个$1+j\omega T(T>0)$

$$G(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{E(j\omega)}=\frac{K}{(1+j\omega T_f)(1+j\omega T_m)(1+j\omega T)},K>0$$

$G(j\omega)|_{\omega=\infty}$ **顺时针旋转增加90°**

当$\omega\to\infty$，$G(j\omega)\to 0\angle -270^{\circ}$

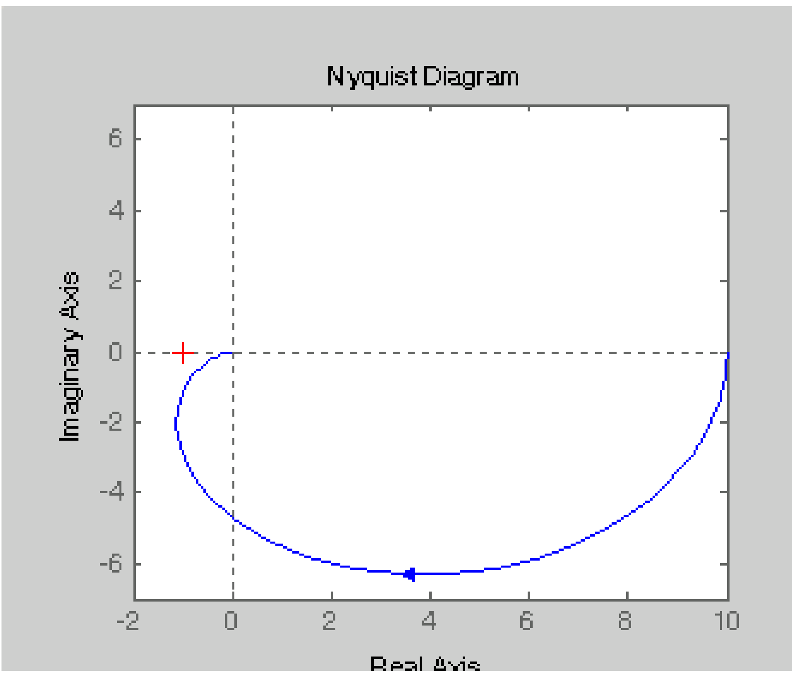


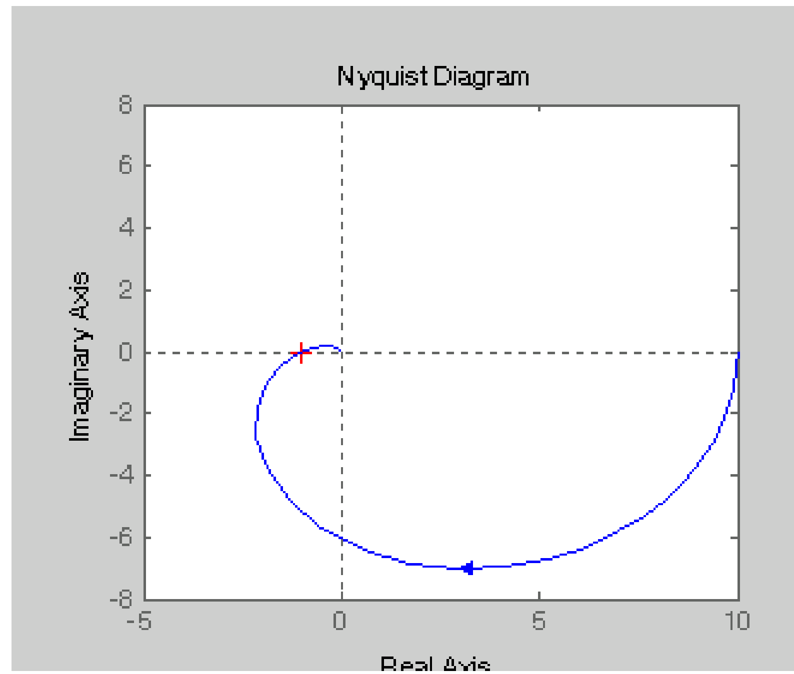
0型系统的开环幅相曲线

例 6-13

$$G_1(j\omega)=\frac{10}{(1+j5\omega)(1+j10\omega)}$$

$$G_2(j\omega)=\frac{10}{(1+j5\omega)(1+j10\omega)(1+j15\omega)}$$





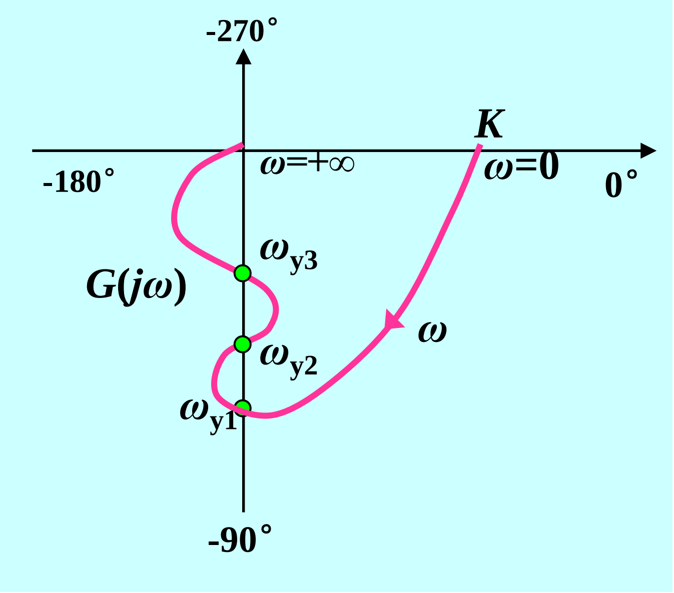
0型系统的开环幅相曲线

当分子出现$1+j\omega T$　($T>0$)时，频率从0变化到∞，频率响应增加0到90°的相角变化(逆时针旋转)

$G(j\omega)$的相角不一定单调变化

例如，传递函数

$$G(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{E(j\omega)}=\frac{K(1+j\omega T_1)^2}{(1+j\omega T_2)(1+j\omega T_3)(1+j\omega T_4)^2}$$
$$K>0, T_2, T_3>T_1>T_4>0$$



- 当时间常数T_2和T_3大于T_1，且T_1大于T_4时，极坐标图有“dent(凹痕，齿)”

0型系统的开环幅相曲线

结论

开环最小相位的0型系统的开环幅相曲线起始于正实轴上的K（开环增益），若开环传递函数是严格因果的($n>w$)，开环幅相曲线终止（$\omega=\infty$）于原点且与某一坐标轴成切线方向，终止角是$-90°\times(n-w)$

n:开环传递函数分母多项式的阶次

w :开环传递函数分子多项式的阶次

1型系统的开环幅相曲线

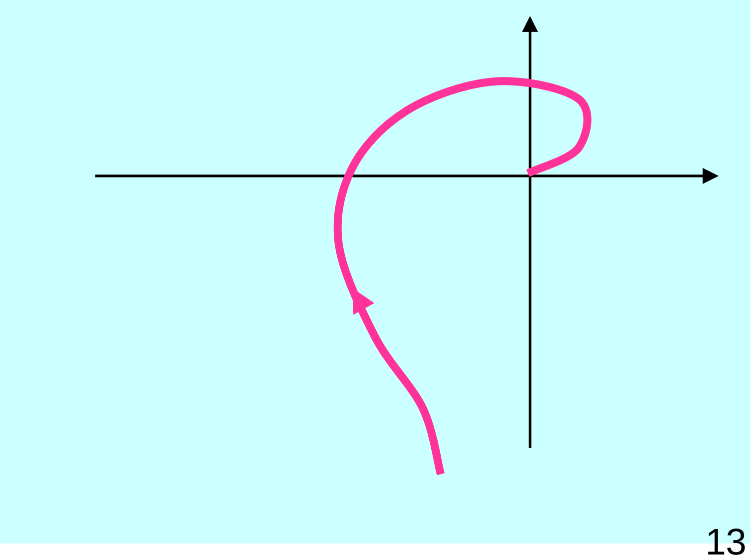
1 型系统的开环幅相曲线

$$开环频率特性G(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{E(j\omega)}=\frac{K}{j\omega(1+j\omega T_m)(1+j\omega T_c)(1+j\omega T_q)}$$

$$K>0,T_m>0,T_c>0,T_q>0$$

$$G(j\omega)\to\begin{cases}\infty\angle-90^\circ & \omega=0\\ 0\angle-360^\circ & \omega\to\infty\end{cases}$$

当ω由0到∞变化时，$G(j\omega)$的相角变化由–90到-360°单调减小。



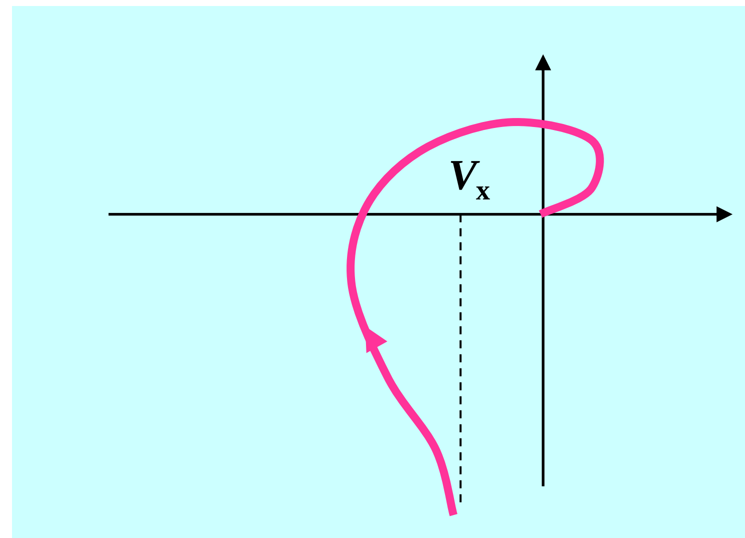
1型系统的开环幅相曲线

$$G(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{E(j\omega)}=\frac{K}{j\omega\left(1+j\omega T_m\right)\left(1+j\omega T_c\right)\left(1+j\omega T_q\right)}$$

任何出现在开环频率特性分子上的环节对开环幅相曲线的影响与0型系统类似

当ω趋近于0时，**$G(j\omega)$的幅值接近于无穷大。**存在一条平行于-90°轴线的线，满足$\omega\to0$时$G(j\omega)$ 渐近趋于-90°

$$V_x=\lim_{\omega\to0}\mathrm{Re}\left[G(j\omega)\right]$$



对于这个传递函数：

$$\mathrm{Re}\left[G(j\omega)\right]=\frac{-K\left[(1-\omega^2T_mT_c)T_q+(T_m+T_c)\right]}{(1+\omega^2T_m^2)(1+\omega^2T_c^2)(1+\omega^2T_q^2)}$$

$$\Rightarrow\quad V_x=-K\left(T_q+T_c+T_m\right)$$

1型系统的开环幅相曲

$$G(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{E(j\omega)}=\frac{K}{j\omega(1+j\omega T_m)(1+j\omega T_c)(1+j\omega T_q)}$$

$G(j\omega)$负实轴穿越点的频率ω_x，该点处$G(j\omega)$的虚部为0

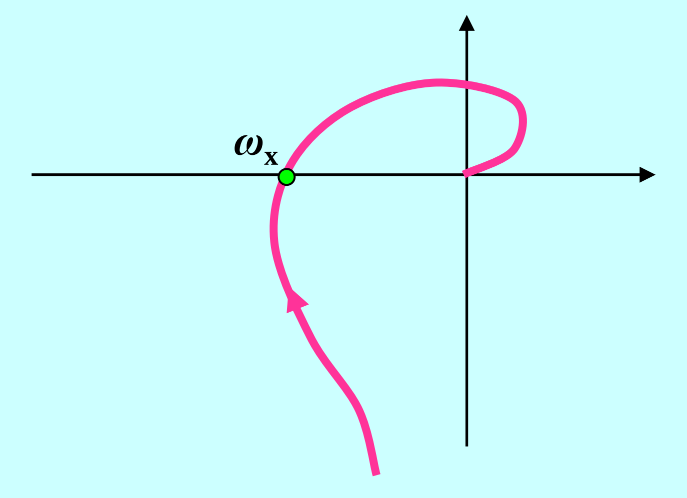
$$\boxed{\mathrm{Im}\left[G(j\omega_x)\right]=0}$$

对于本系统：

$$\mathrm{Im}\left[G(j\omega)\right]=\frac{-K\left[(1-\omega^2T_mT_c)-(T_m+T_c)T_q\omega^2\right]}{\omega(1+\omega^2T_m^2)(1+\omega^2T_c^2)(1+\omega^2T_q^2)}=0$$

$$\Downarrow$$

$$\omega_x=\left(T_cT_q+T_qT_m+T_mT_c\right)^{-\frac{1}{2}}$$



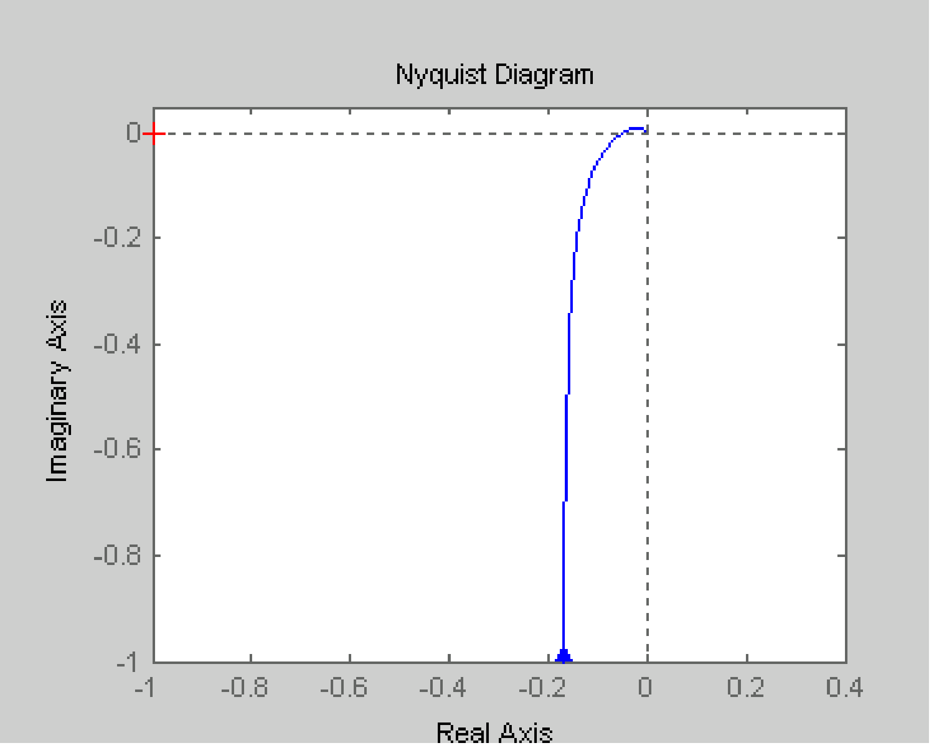
Ⅰ型系统的开环幅相曲线

例 6-14

$$G(j\omega)=\frac{1}{j\omega(1+j0.02\omega)(1+j0.1\omega)(1+j0.05\omega)}$$

$$V_x=-K_1(T_q+T_c+T_m)$$
$$=-(0.02+0.1+0.05)$$
$$=-0.17$$

$$\omega_x=(T_cT_q+T_qT_m+T_mT_c)^{-\frac{1}{2}}$$
$$=(0.002+0.005+0.001)^{-\frac{1}{2}}$$
$$=11.18$$



$$G(j\omega_x)=-0.0508$$

2型系统的开环幅相曲线

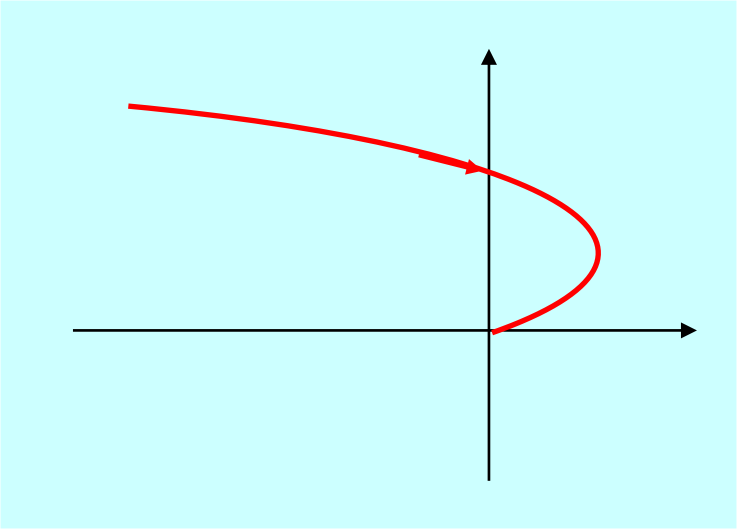
2 型系统的开环幅相曲线

开环频率特性$G(j\omega)=\dfrac{Y(j\omega)}{E(j\omega)}=\dfrac{K}{(j\omega)^2(1+j\omega T_f)(1+j\omega T_m)}, K>0, T_f>0, T_m>0$

$$G(j\omega)\rightarrow\begin{cases}\infty\angle-180^\circ & \omega=0\\ 0\angle-360^\circ & \omega\rightarrow+\infty\end{cases}$$

当ω 从0 增加到 ∞时，相角由

–180 ° 连续减少 到-360°



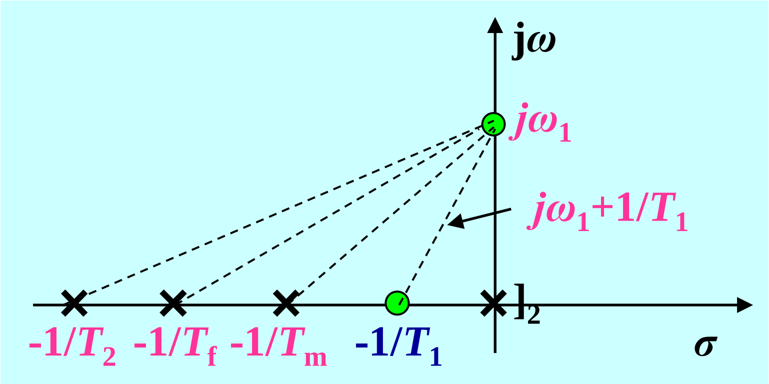
2型系统的开环幅相曲线

增加开环零点或开环极点将改变开环幅相曲线的形状。考虑开环频率特性

$$G_0(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{E(j\omega)}=\frac{K(1+j\omega T_1)}{(j\omega)^2\left(1+j\omega T_f\right)\left(1+j\omega T_m\right)\left(1+j\omega T_2\right)}$$

$$K>0,T_2>0$$
$$T_f>0,T_m>0$$
$$T_1>T_2+T_f+T_m$$

由开环零极点图可以得到开环幅相曲线



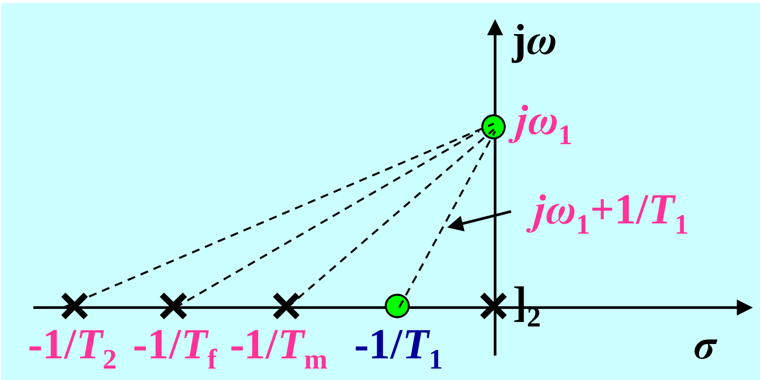
$$G_0(s)=\frac{KT_1}{T_fT_mT_2}\frac{(s+1/T_1)}{s^2\left(s+1/T_f\right)\left(s+1/T_m\right)\left(s+1/T_2\right)}$$

当 $s=j\omega=j0^+$ 除了原点处的2个极点，其余每个环节的相角都为0。因此 $\omega=0^+$ 时的相角为 -180°。

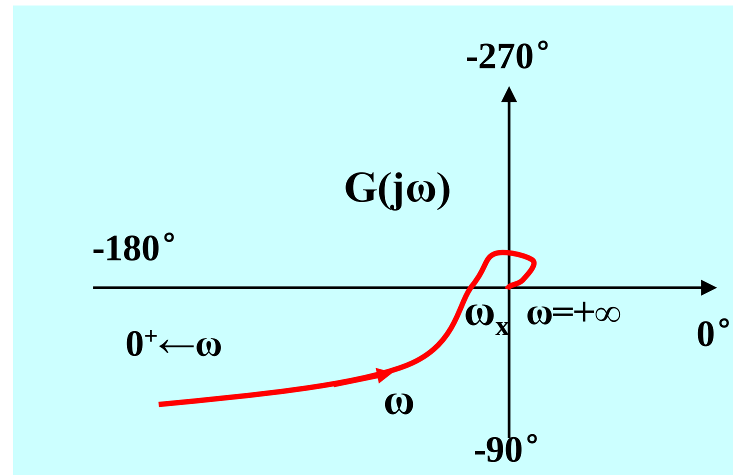
当 ω 从0开始增大，$j\omega+1/T_1$ 相角增速快于3个极点。$G(j\omega)$的相角在低频段大于 -180°

随着频率进一步增加，$j\omega+1/T_1$ 相角增速变得慢于3个极点。$G(j\omega)$的相角又呈减小趋势。当频率达到ω_x，$G(j\omega)$ 各环节的相角和为 -180°，开环幅相曲线穿越负实轴。

2型系统的开环幅相曲线



当ω继续增加，$j\omega+1/T_1$的相角增速较慢，极点处的相角增速较快。 $G(j\omega)$的相角继续减小



极限状态，当$\omega\to\infty$，$j\omega+1/T_1$ 的相角和$j\omega+1/T_2$ 的相角相等，符号相反，因此$G(j\omega)$的相角接近于 -360°

对于2型系统，当$\omega\to0^+$，开环幅相曲线接近 -180°，且当$\sum(T_{numerator})-\sum(T_{denominator})$ 为正时，极坐标图在实轴下方；当$\sum(T_{numerator})-\sum(T_{denominator})$ 为负时，极坐标图在实轴上方。当$\omega\to\infty$，相角接近于

$-(n-w)90°$

开环幅相曲线——总结

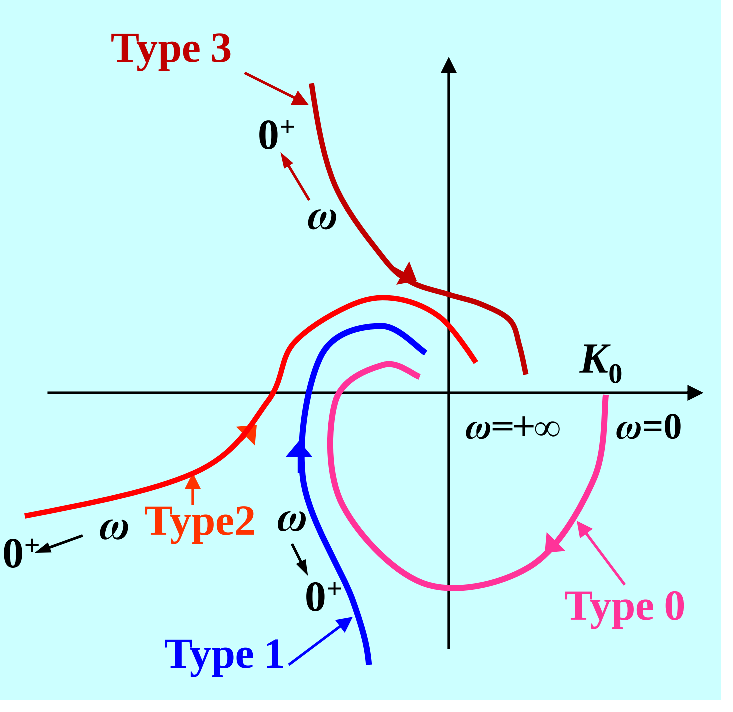
为了获得系统的开环幅相曲线，经常采用下列方法来确定曲线的主要部分：

第一步：开环特性的一般形式

$$G(j\omega)=\frac{K_m(1+j\omega T_a)(1+j\omega T_b)\cdots(1+j\omega T_w)}{(j\omega)^m(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)\cdots(1+j\omega T_u)}$$

系统的型别为m，决定了 系统极坐标图的起点 $\lim_{\omega\to 0}G(j\omega)$

不同型别系统的极坐标图($K_m>0, T_i>0$)在低频段的特点 (当$\omega\to 0$) 如图所示。$\omega=0$ 时的相角为 $m\times(-90°)$



开环幅相曲线——总结

第二步：开环幅相曲线的终点

$$\lim_{\omega \to +\infty} G(j\omega) = 0\angle(w-m-u)90^\circ$$

当分母的阶次大于分子的阶次时，开环幅相曲线终止于原点，且原点的入射角由上式决定，高频点 (ω=∞) 是顺时针接近的。

第三步：I型系统的低频渐近线通过取$\omega \to 0$时开环特性实部的极限来确定

开环幅相曲线——总结

第四步：开环幅相曲线与实轴和虚轴的交点处的频率可以分别用以下方法获得

$$\mathrm{Im}[G(j\omega)]=0 \qquad \mathrm{Re}[G(j\omega)]=0$$

第五步：若开环特性分子没有与$j\omega$相关的环节，则$G(j\omega)$的相角随 ω 由 0 变化到 ∞而连续减小。

若开环特性分子有与$j\omega$相关的环节，根据分子时间常数的大小，开环幅相曲线的相角将不会单调变化，可能会产生凹点 “dents”

通过起点($\omega=0$)、实轴交点($\mathrm{Im}(G(j\omega)=0$)、虚轴交点($\mathrm{Re}(G(j\omega)=0$)、终点($\omega=\infty$)、相角变化($\angle G(j\omega)$)和幅值变化($|G(j\omega)|$)等情况，
综合判断幅相曲线会出现在哪些象限以及在不同象限间进出的情况

开环幅相曲线——总结

概略开环幅相曲线应反映开环频率特性的三个重要要素：

1）开环幅相曲线的起点（$\omega=0$）和终点（$\omega=\infty$）

2）开环幅相曲线和实轴的交点

设$\omega=\omega_x$时，$G(j\omega_x)H(j\omega_x)$的虚部为零，即

$$\mathrm{Im}[G(j\omega_x)H(j\omega_x)]=0$$ 或者 $$\angle G(j\omega_x)H(j\omega_x)=k\pi$$

幅相曲线与负实轴交点处的频率ω_x称为穿越频率

3）开环幅相曲线的变化范围（起始与结束的象限、随ω↑的单调性）

开环幅相曲线——示例

例6-15 设系统的开环传递函数为

$$G(s)H(s)=\frac{K}{s(Ts+1)(s^2/\omega_n^2+1)}\qquad K,T>0$$

试绘制系统开环概略幅相曲线

解： 系统开环频率特性为

$$G(j\omega)H(j\omega)=\frac{K}{j\omega(j\omega T+1)((j\omega)^2/\omega_n^2+1)}=\frac{-K(T\omega+j)}{\omega(1+\omega^2T^2)(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2})}$$

开环幅相曲线的起点： $G(j0)H(j0)=\infty\angle-90^\circ$ $\lim\limits_{\omega\to 0}\mathrm{Re}[G(j\omega)H(j\omega)]=-KT$

开环幅相曲线的终点： $G(j\infty)H(j\infty)=0\angle-360^\circ$

由开环频率特性表达式知，$G(j\omega)H(j\omega)$的虚部不为零，故与实轴无交点

$$\angle G(j\omega)H(j\omega) = -\angle j\omega - \angle(j\omega T+1) - \angle[1-(\frac{\omega}{\omega_n})^2]$$

开环幅相曲线——示例

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega T+1)((j\omega)^2/\omega_n^2+1)}$$

开环系统中含有特殊振荡环节(ζ=0)，

当ω趋于ω_n时，｜$GH(j\omega_n)$｜趋于无穷大，而相频特性

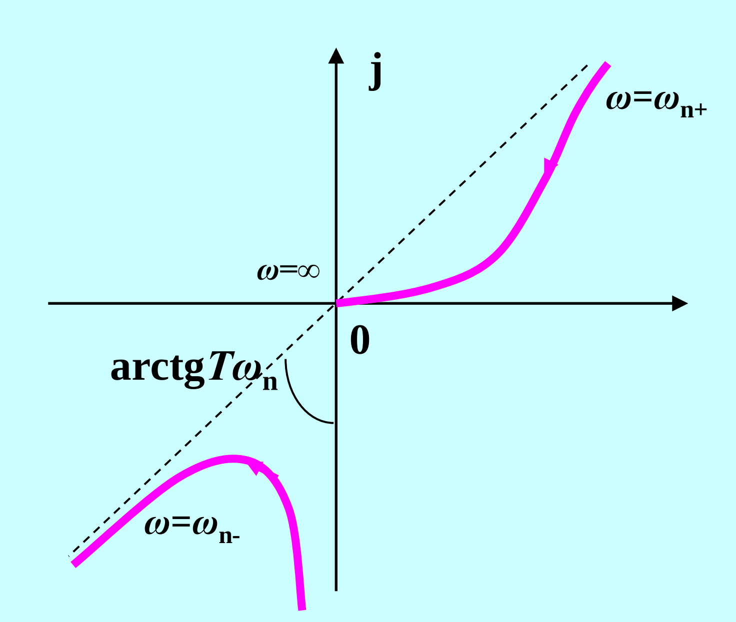
$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{-K(T\omega+j)}{\omega(1+\omega^2T^2)(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2})}$$

$$\varphi(\omega_{n-}) \approx -90° - tg^{-1}(T\omega_n) \in (-180°, -90°)$$

$\omega_{n-} = \omega_n - \varepsilon, \quad \varepsilon > 0$　　3rd 象限

$$\varphi(\omega_{n+}) \approx -90° - tg^{-1}(T\omega_n) - 180° \in (-360°, -270°)$$

$\omega_{n+} = \omega_n + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0$　　1st 象限



即$\Phi(\omega)$在$\omega=\omega_n$的附近，相角突变-180°
幅相曲线在ω_n处呈现不连续现象

开环幅相曲线——示例

例6-16 设系统的开环传递函数为 $G(s)H(s)=\dfrac{K(s+4)}{s(s-1)}=\dfrac{-4K(1+s/4)}{s(1-s)},K>0$

试绘制系统开环概略幅相曲线

解： 系统开环频率特性为 $G(j\omega)H(j\omega)=\dfrac{-4K(1+j0.25\omega)}{j\omega(1-j\omega)}=\dfrac{-5K}{\omega^2+1}+j\dfrac{K(4-\omega^2)}{\omega(\omega^2+1)}$

幅频特性为 $|G(j\omega)H(j\omega)|=\dfrac{K\sqrt{\omega^2+16}}{\omega\sqrt{\omega^2+1}}=\dfrac{4K\sqrt{\dfrac{\omega^2}{16}+1}}{\omega\sqrt{\omega^2+1}}$

相频特性为 $\angle G(j\omega)H(j\omega)=-180^\circ-90^\circ+arctg\dfrac{\omega}{4}-(-arctg\omega)=-270^\circ+arctg\dfrac{\omega}{4}+arctg\omega$

开环幅相曲线的起点：$G(j0^+)H(j0^+)=\infty\angle-270^\circ\Rightarrow V_x=\mathrm{Re}G(j0^+)H(j0^+)=-5K$

开环幅相曲线的终点：$G(j\infty)H(j\infty)=0\angle-90^\circ$

当K>0时，$G(j\omega)H(j\omega)$的实部不为零，故与虚轴无交点

开环幅相曲线——示例

$$G(s)H(s)=\frac{K(s+4)}{s(s-1)}$$

开环幅相曲线的起点：$G(j0^+)H(j0^+)=\infty\angle-270^\circ \Rightarrow V_x=\mathrm{Re}\,G(j0^+)H(j0^+)=-5K$

开环幅相曲线的终点：$G(j\infty)H(j\infty)=0\angle-90^\circ$

$$G(j\omega)H(j\omega)=\frac{K(j\omega+4)}{j\omega(j\omega-1)}=\frac{-5K}{\omega^2+1}+j\frac{K(4-\omega^2)}{\omega(\omega^2+1)}$$

当K不为零，$G(j\omega)H(j\omega)$的实部不为零，故与虚轴无交点。

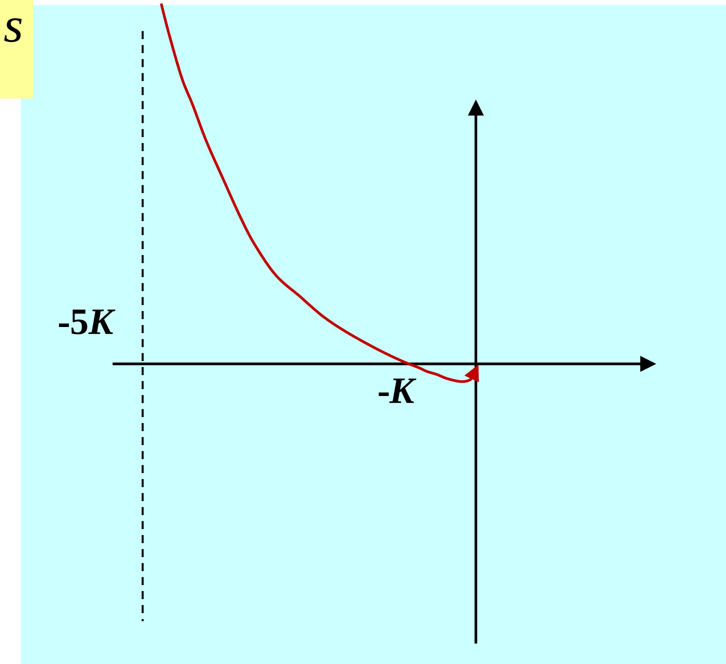
令虚部为零，可求出频率特性与实部的交点时的频率值为

$$\mathrm{Im}\,G(j\omega)H(j\omega)=0\Rightarrow\frac{K(4-\omega^2)}{\omega(\omega^2+1)}=0\Rightarrow\omega=2rad/s$$

此时，实部的坐标：

$$\mathrm{Re}\,G(j\omega)H(j\omega)=\frac{-5K}{\omega^2+1}=-K$$

$$\mathrm{Re}\,G(j\omega)H(j\omega)=\frac{-5K}{\omega^2+1},\text{随}\omega\text{增大实部单调向0靠拢}$$



问题？——Type I System？

——S平面的右半平面有极点，非最小相位系统

开环幅相曲线

绘制开环概略幅相曲线的规则

1) 开环幅相曲线的起点，取决于比例环节K和系统积分或微分环节的个数m（系统的型别），因为其他环节当ω=0时为1。

m<0，起点为原点；

m=0，起点为实轴上的点K处（K为系统开环增益，K有正负之分）；

m>0，K>0时，起点为m×(-90°)的无穷远处，K<0时，起点为m×(-90°)-180°的无穷远处。

令虚部为零，可求出频率特性与实轴的交点；令实部为零，可求出频率特性与虚轴的交点。

注意——S平面的右半开平面有零极点时的情况！

——无阻尼环节或其逆！

开环幅相曲线

2) 开环幅相曲线的终点，取决于开环传递函数分子、分母多项式中最小相位环节和非最小相位环节的阶次和。

设系统开环传递函数分子、分母多项式的阶次分别为w和n，记除K外，分子多项式中最小相位环节的阶次和为w_1，非最小相位环节的阶次和为w_2，分母多项式中最小相位环节的阶次和为n_1，非最小相位环节的阶次和为n_2，则有

$$w = w_1 + w_2$$

$$n = n_1 + n_2$$

$$\phi(\infty) = \begin{cases} [(w_1 - w_2) - (n_1 - n_2)] \times 90^\circ & K > 0 \\ [(w_1 - w_2) - (n_1 - n_2)] \times 90^\circ - 180^\circ & K < 0 \end{cases}$$

特别地，当开环系统为最小相位系统时，

若 $n = w,$ $\quad G(j\infty)H(j\infty) = K^*$

$n > w,$ $\quad G(j\infty)H(j\infty) = 0\angle(n-w)\times(-90^\circ)$

其中K^*为系统开环根轨迹增益

开环幅相曲线

3) 若开环系统存在特殊振荡环节，重数 l 为正整数，即开环传递函数具有下述形式

$$G(s)H(s)=\frac{1}{\left(\frac{s^2}{\omega_n^2}+1\right)^l}G_1(s)H_1(s)$$

$G_1(s)H_1(s)$不含$\pm j\omega_n$的极点，当ω趋于ω_n时，$|GH(j\omega)|$趋于无穷，而

$$\phi(\omega_{n-})\approx\phi_1(\omega_n)=\angle G_1(j\omega_n)H_1(j\omega_n)$$

$$\phi(\omega_{n+})\approx\phi_1(\omega_n)-l\times180^\circ$$

即$\Phi(\omega)$在$\omega=\omega_n$的附近，相角突变$-l\times180^\circ$。

Thanks !