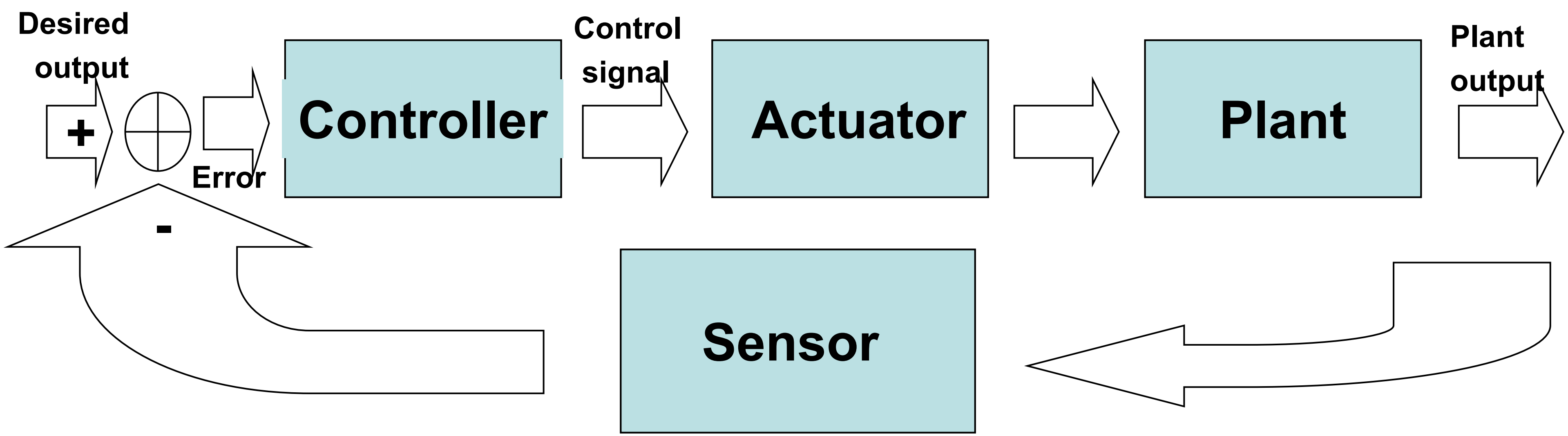
自动控制理论
Principle of Automatic Control

第二章 CHAPTER 2

连续时间控制系统的数学模型

Mathematical Model of Continuous-time Control Systems

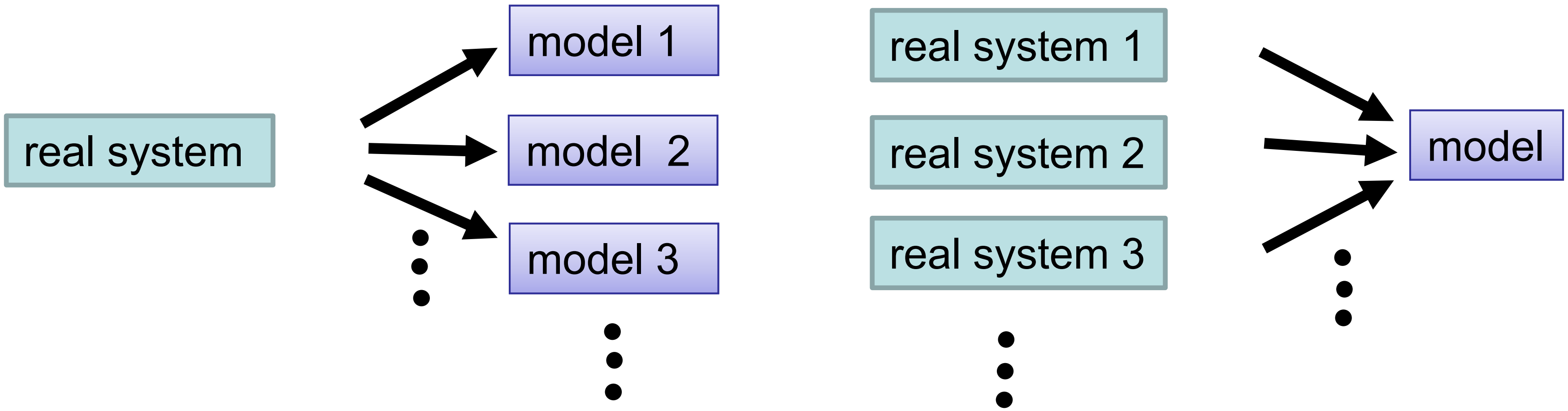


对系统进行数学描述，是设计和分析控制系统的前提

对系统进行数学描述即是建立系统的模型（建模，modeling）

系统建模 System Modeling

真实系统 ≠ 系统模型



两种建模方法

✓ **机理建模**

基于电路原理建模电路系统

基于力学原理建模力学系统

⋮

✓ **数据建模(也称系统辨识)**

通过大量实验，获得系统在不同输入信号

$$u_i(t) \quad i=1, 2, \ldots, m$$

下的输出信号$y_i(t)$，基于u_i和y_i数据，采用数学方法求取一个合理的映射Φ，使得$\Phi(u_i)\approx y_i$，再利用Φ得到系统的模型

工程建模不是越准确越好，要兼顾精度、简单、易用、成本等等

建模比控制难得多

控制中常用的模型

- 输入输出（I/O）微分方程模型
- 传递函数
- 方块图
- 状态空间模型

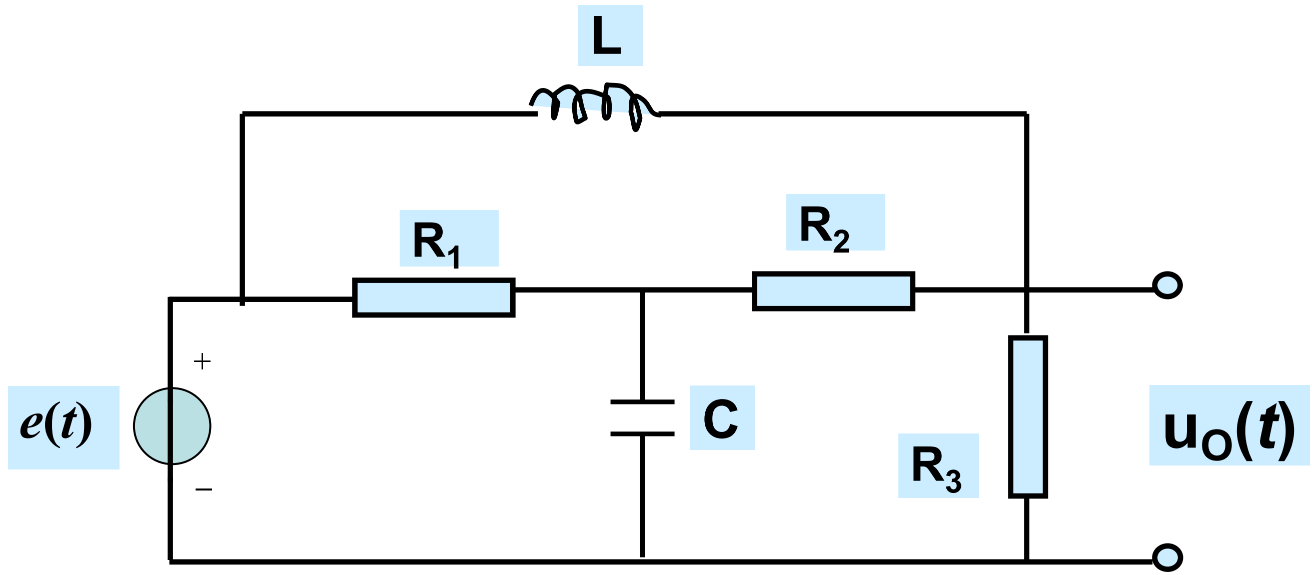
若干典型系统

- 电路系统
- 机械运动系统
- 液位系统
- 热力系统

电路系统的机理建模

- 电路系统 = 电路元件+电路结构（网络）

例



- 常用电路元件

电阻：$u(t)=Ri(t)$

电容：$C\dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}=i(t)$

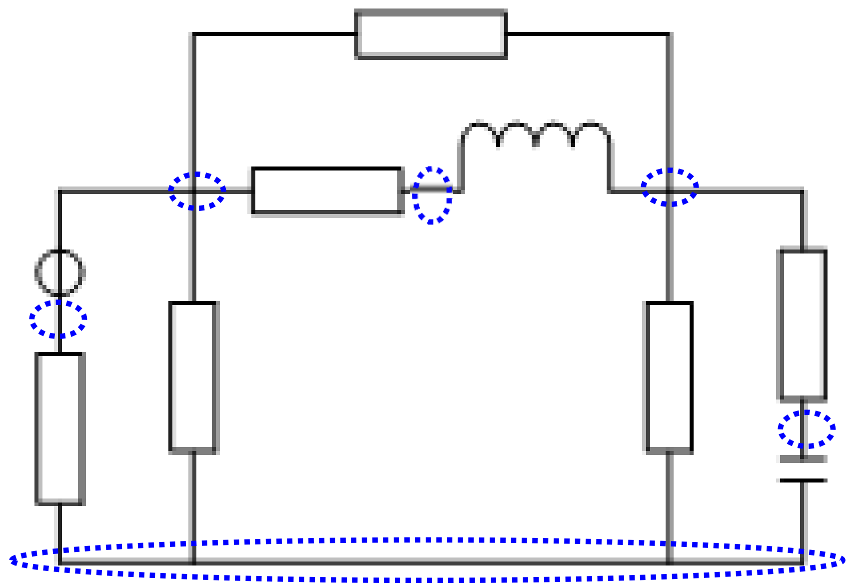
电感：$L\dfrac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}=u(t)$

电压源、电流源、…

电路系统的机理建模

◆ 电路结构(网络)的若干概念

例



支路（branch）：每个二端元件称为一条支路（上例9条支路）

结点（node）：二条或以上支路的连接点称为结点（上例6个结点）

回路（loop）：由支路组成的闭合路径

网孔（mesh）：每个网眼即为网孔（上例4个网孔）

网孔必是回路，但回路未必是网孔

电路系统的机理建模

- **基尔霍夫电流定律**

在任一时刻，对任一结点，其连接的全部支路电流的代数和为零

$$\sum_k i_k = 0$$

若流出结点的电流前面取“+”，则流入结点的电流前面取“－”

- **基尔霍夫电压定律**

在任一时刻，对任一回路，其上的全部支路电压的代数和为零

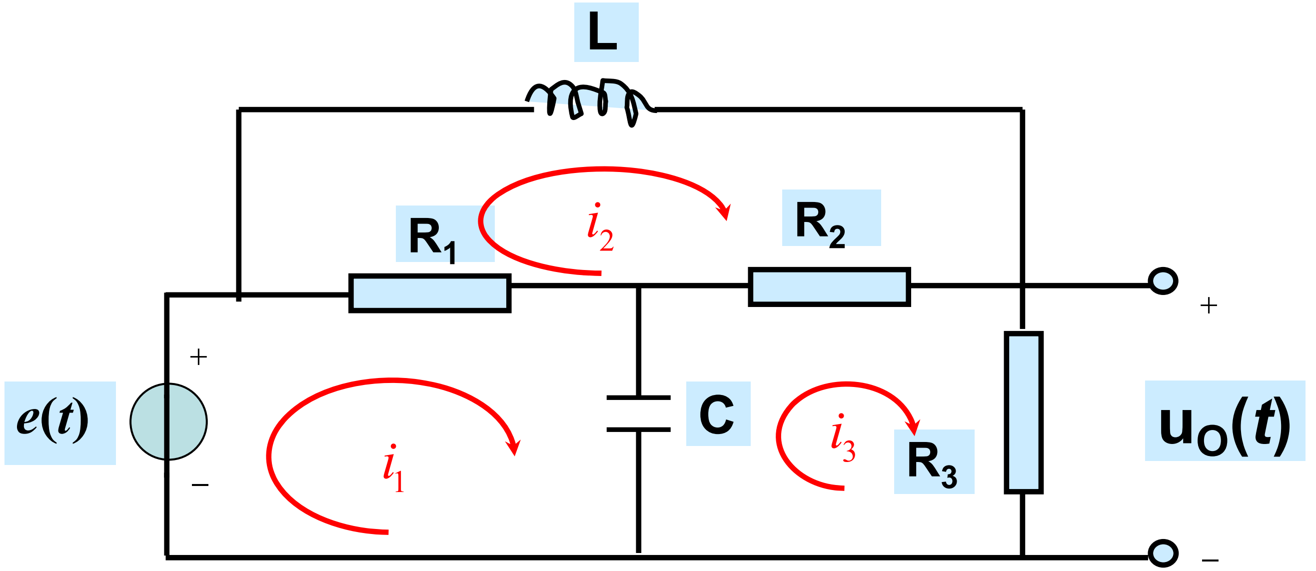
$$\sum_k u_k = 0$$

需指定回路的绕行方向（顺时针或逆时针）

与绕行方向同向的电压前面取“+”，反向的电压前面取“—”

电路系统的机理建模（I/O微分方程模型）

- 例：如图电路中，输入$e(t)$，输出$u_O(t)$，求输入-输出关系



回路方法：3个网孔

$$\text{记}Dx(t)=\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t},\ \frac{1}{D}x(t)=\int_0^t x(\tau)d\tau$$

Mesh 1: $$\left(R_1+\frac{1}{CD}\right)i_1-R_1i_2-\frac{1}{CD}i_3=e$$

Mesh 2: $$-R_1i_1+(R_1+R_2+LD)i_2-R_2i_3=0$$

Mesh 3: $$-\frac{1}{CD}i_1-R_2i_2+\left(R_2+R_3+\frac{1}{CD}\right)i_3=0$$

输出电压

$$u_o=R_3i_3$$

$$\left(R_1+\frac{1}{CD}\right)i_1-R_1 i_2-\frac{1}{CD}i_3=e$$
$$-R_1 i_1+(R_1+R_2+LD)i_2-R_2 i_3=0$$
$$-\frac{1}{CD}i_1-R_2 i_2+\left(R_2+R_3+\frac{1}{CD}\right)i_3=0$$

$$\begin{bmatrix} R_1+\dfrac{1}{CD} & -R_1 & -\dfrac{1}{CD} \\ -R_1 & R_1+R_2+LD & -R_2 \\ -\dfrac{1}{CD} & -R_2 & R_2+R_3+\dfrac{1}{CD} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u_o=R_3 i_3$$

$$\begin{aligned}\Delta &= \left(R_1+\frac{1}{CD}\right)(R_1+R_2+LD)\left(R_2+R_3+\frac{1}{CD}\right)-\frac{R_1R_2}{CD}-\frac{R_1R_2}{CD} \\ &\quad -\frac{1}{C^2D^2}(R_1+R_2+LD)-R_2^2\left(R_1+\frac{1}{CD}\right)-R_1^2\left(R_2+R_3+\frac{1}{CD}\right) \\ &= R_1R_2R_3+\frac{L}{C}(R_1+R_2+R_3)+R_1(R_2+R_3)LD+(R_1+R_2)\frac{R_3}{CD}\end{aligned}$$

$$i_3=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} R_1+\dfrac{1}{CD} & -R_1 & e \\ -R_1 & R_1+R_2+LD & 0 \\ -\dfrac{1}{CD} & -R_2 & 0 \end{vmatrix}=\frac{1}{\Delta}\left(R_1R_2+\frac{L}{C}+\frac{R_1+R_2}{CD}\right)e$$

$$\Delta = R_1R_2R_3 + \frac{L}{C}\left(R_1 + R_2 + R_3\right) + R_1\left(R_2 + R_3\right)LD + \left(R_1 + R_2\right)\frac{R_3}{CD}$$

$$u_o = R_3 i_3$$

$$i_3 = \frac{1}{\Delta}\left(R_1R_2 + \frac{L}{C} + \frac{R_1 + R_2}{CD}\right)e$$

$$i_3 = \frac{R_1R_2 + \frac{L}{C} + \frac{R_1 + R_2}{CD}}{R_1R_2R_3 + \frac{L}{C}\left(R_1 + R_2 + R_3\right) + R_1\left(R_2 + R_3\right)LD + \left(R_1 + R_2\right)\frac{R_3}{CD}}e$$

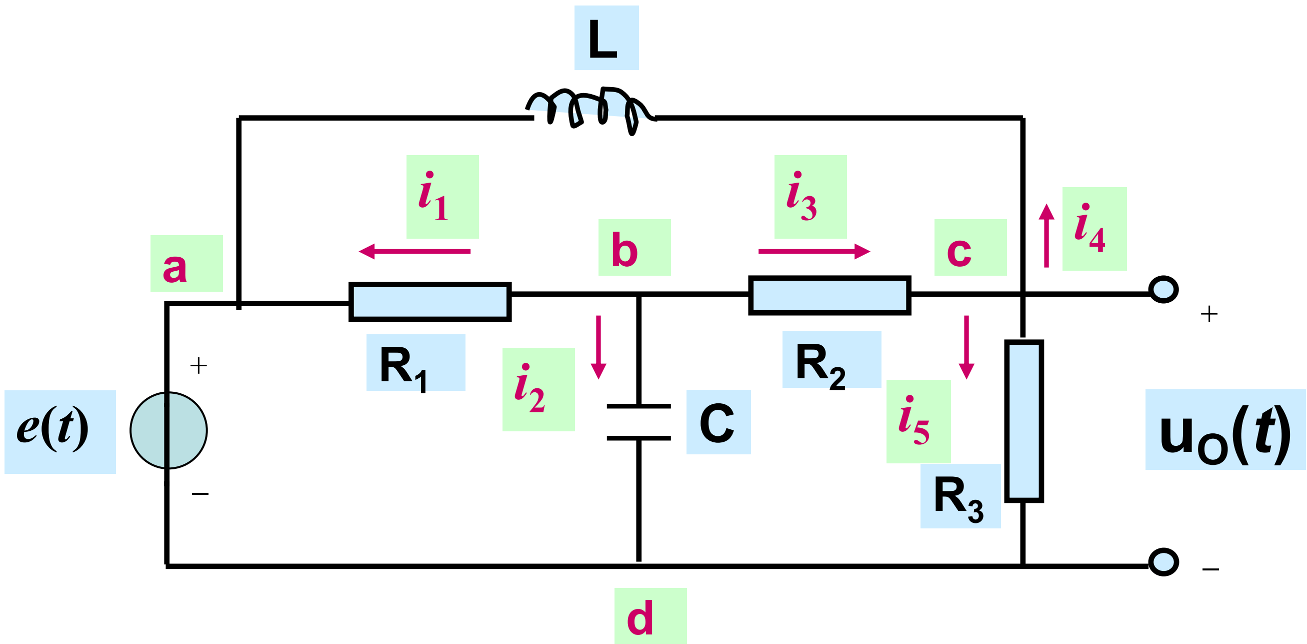
$$= \frac{R_1R_2CD + LD + R_1 + R_2}{R_1R_2R_3CD + \left(R_1 + R_2 + R_3\right)LD + R_1\left(R_2 + R_3\right)LCD^2 + \left(R_1 + R_2\right)R_3}e$$

$$u_o = \frac{R_1R_2R_3CD + R_3LD + R_3\left(R_1 + R_2\right)}{R_1R_2R_3CD + \left(R_1 + R_2 + R_3\right)LD + R_1\left(R_2 + R_3\right)LCD^2 + \left(R_1 + R_2\right)R_3}e$$

$$\left(R_1R_2R_3CD + \left(R_1 + R_2 + R_3\right)LD + R_1\left(R_2 + R_3\right)LCD^2 + \left(R_1 + R_2\right)R_3\right)u_o$$
$$= \left(R_1R_2R_3CD + R_3LD + R_3\left(R_1 + R_2\right)\right)e$$

$$R_1\left(R_2 + R_3\right)LC\ddot{u}_o + \left(R_1R_2R_3C + \left(R_1 + R_2 + R_3\right)L\right)\dot{u}_o + \left(R_1 + R_2\right)R_3u_o$$
$$= \left(R_1R_2R_3C + R_3L\right)\dot{e} + R_3\left(R_1 + R_2\right)e$$

电路系统的机理建模（I/O微分方程模型）



结点方法：4个结点，d参考点，电压源电流仅与a有关 标出各支路参考电流方向

对于结点b $i_1+i_2+i_3=0$ 对于结点c $-i_3+i_4+i_5=0$

用结点电压表示

$$\frac{u_b-e}{R_1}+CDu_b+\frac{u_b-u_o}{R_2}=0$$

$$\frac{u_o-u_b}{R_2}+\frac{u_o}{R_3}+\frac{1}{LD}(u_o-e)=0$$

用与回路法类似的整理步骤可得I/O微分方程模型

例：电阻电容串联电路

图2中, R, C为已知常数, $e_i(t)$ 是输入；$e_o(t)$ 是输出，请列写关于电路输出$e_o(t)$和输入$e_i(t)$的方程。

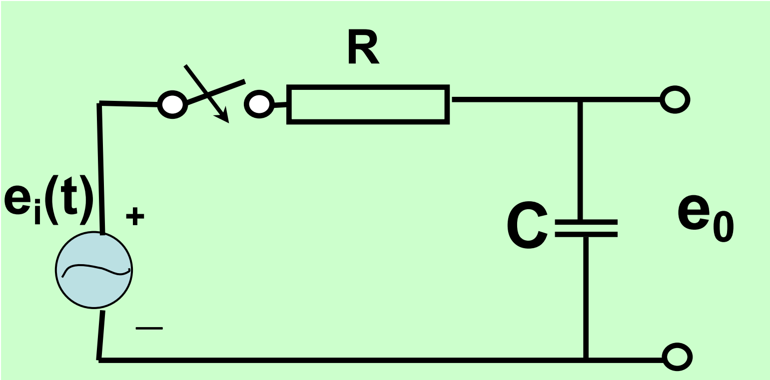


Fig. 2

$$RC\frac{de_0}{dt} + e_0 = e_i$$

或

$$T\frac{de_0}{dt} + e_0 = e_i \qquad ***$$

其中，T=RC称为电路的时间常数，（***）方程为一阶方程。

由一阶微分方程描述的系统称为一阶系统

例：电阻电感电容（RLC）串联电路

在图3中, R, L, C 为已知常数, e(t) 是输入；$u_c(t)$是输出。请列写关于电路输出 $u_c(t)$ 和输入 e(t) 的方程。

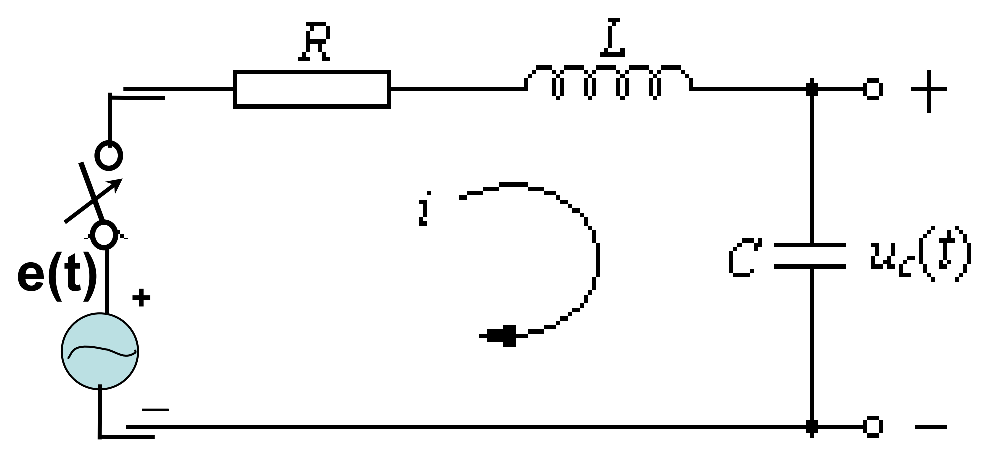


Fig .3

1）$T_1=L/R$ 和 $T_2=RC$ 称为电路的时间常数

2）RLC电路（** **）是二阶微分方程

由二阶微分方程描述的系统称为二阶系统

$$LC\frac{d^2u_c(t)}{dt^2}+RC\frac{du_c(t)}{dt}+u_c(t)=e$$

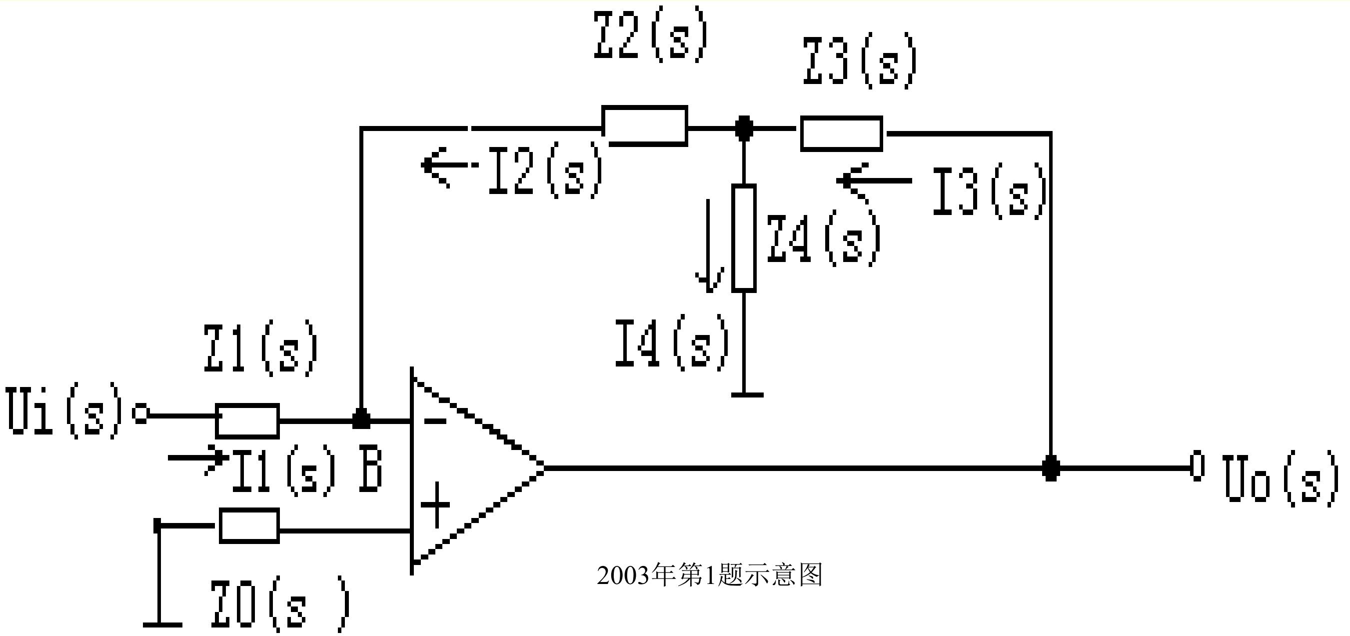
或

$$T_1T_2\frac{d^2u_c(t)}{dt^2}+T_2\frac{du_c(t)}{dt}+u_c(t)=e$$

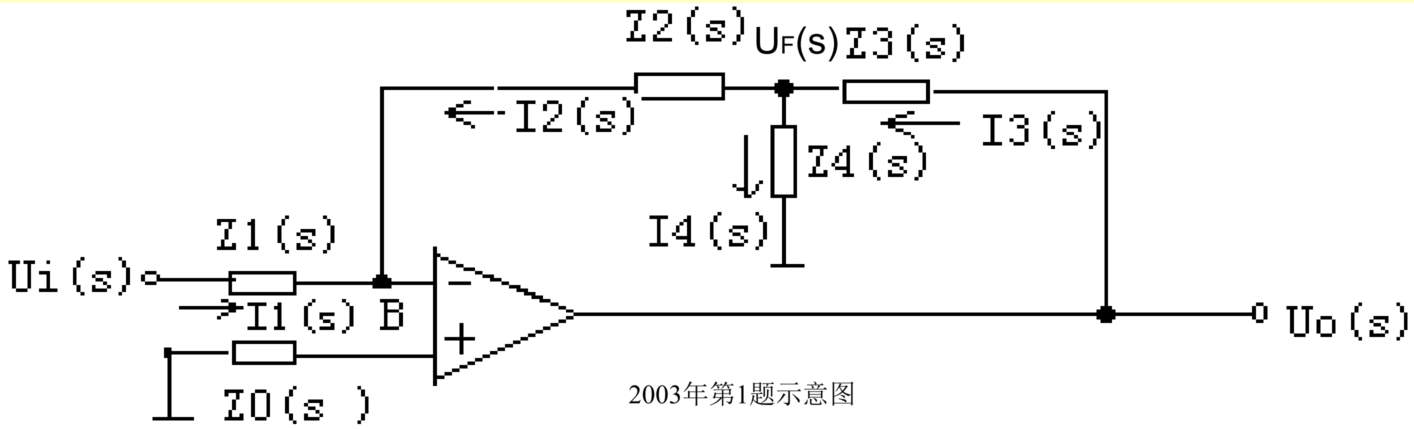
****

电路系统的机理建模（I/O微分方程模型）

一．1．求理想运算放大器的传递函数，结构图如下：(2003年)



2003年第1题示意图



2003年第1题示意图

$\therefore\ i_1 = -i_2$ 虚断

$i_3 = i_2 + i_4$

即：
$$\begin{cases} \dfrac{U_i(s) - U_B(s)}{Z_1(s)} = \dfrac{U_B(s) - U_F(s)}{Z_2(s)} \\[2ex] \dfrac{U_F(s) - U_O(s)}{Z_3(s)} = \dfrac{U_B(s) - U_F(s)}{Z_2(s)} - \dfrac{U_F(s)}{Z_4(s)} \end{cases}$$

$U_B = 0$ 虚短

消去 $U_F(s)$

得：
$$\frac{U_O(s)}{U_i(s)} = -\frac{Z_2(s)Z_3(s) + Z_3(s)Z_4(s) + Z_2(s)Z_4(s)}{Z_1(s)Z_4(s)}$$

电路系统的机理建模（传递函数）

- **零初始条件：**

系统 $a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0 y(t) = b_m x^{(m)}(t) + \cdots + b_0 x(t)$

x(t)为输入，y(t)为输出，a_n不等于零，b_m不等于零

其零初始条件为

$$y(t)\big|_{t=0} = 0 \qquad x(t)\big|_{t=0} = 0$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 0 \qquad \left.\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 0$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^{n-1}y(t)}{\mathrm{d}t^{n-1}}\right|_{t=0} = 0 \qquad \left.\frac{\mathrm{d}^{m-1}x(t)}{\mathrm{d}t^{m-1}}\right|_{t=0} = 0$$

- **传递函数的定义：传递函数是在零初始条件下，系统输出拉普拉斯变换除以输入拉普拉斯变换的商**

电路系统的机理建模（传递函数）

- 考虑如下由时域微分方程描述的 n 阶系统

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0 y(t) = b_m x^{(m)}(t) + \cdots + b_0 x(t)$$

通常有 n≥m（因果系统）

在零初始条件下作拉普拉斯变换

$$a_n s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \cdots + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s)$$

$$= b_m s^m X(s) + b_{m-1} s^{m-1} X(s) + \cdots + b_1 s X(s) + b_0 X(s)$$

- 其传递函数是

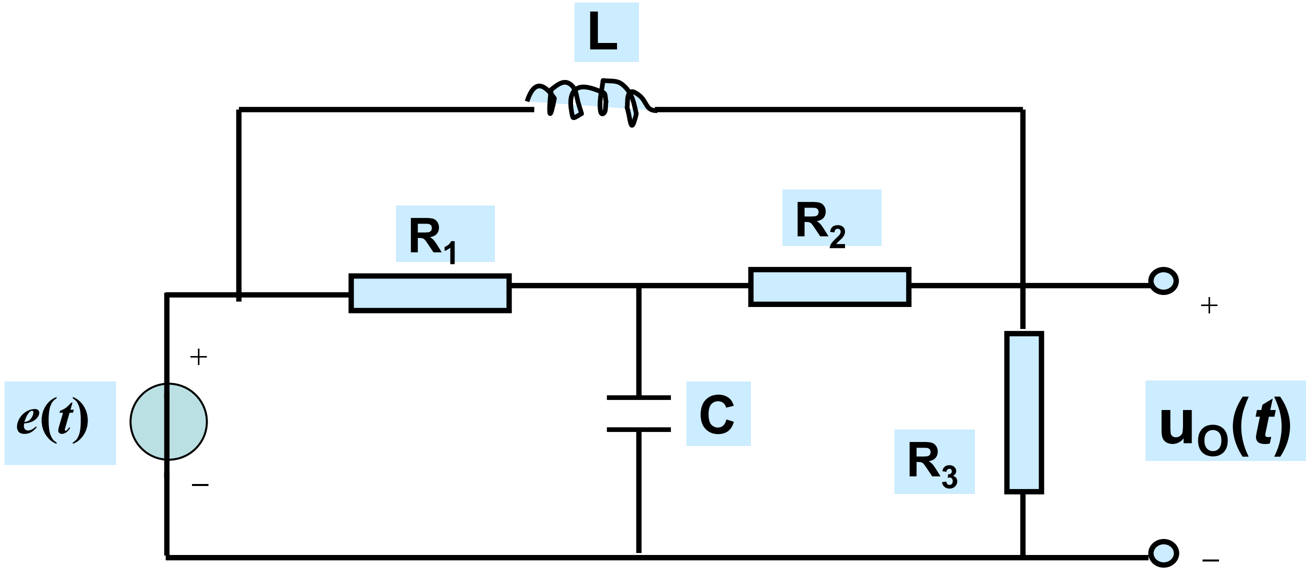
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

$$Y(s) = G(s) X(s)$$

$$X(s) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow Y(s)$$

电路系统的机理建模（传递函数）

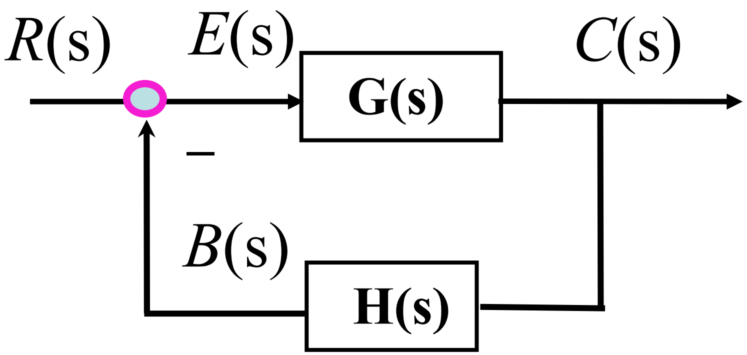
- 例：如图电路中，输入$e(t)$,输出$u_O(t)$，求传递函数



$$R_1(R_2+R_3)LC\ddot{u}_o+\left(R_1R_2R_3C+(R_1+R_2+R_3)L\right)\dot{u}_o+(R_1+R_2)R_3u_o$$
$$=(R_1R_2R_3C+R_3L)\dot{e}+R_3(R_1+R_2)e$$

$$G(s)=\frac{U_o(s)}{E(s)}=\frac{(R_1R_2R_3C+R_3L)s+R_3(R_1+R_2)}{R_1(R_2+R_3)LCs^2+\left(R_1R_2R_3C+(R_1+R_2+R_3)L\right)s+(R_1+R_2)R_3}$$

电路系统的机理建模（传递函数）



•开环传递函数(简称开环传函，这里是闭环系统的开环传递函数)

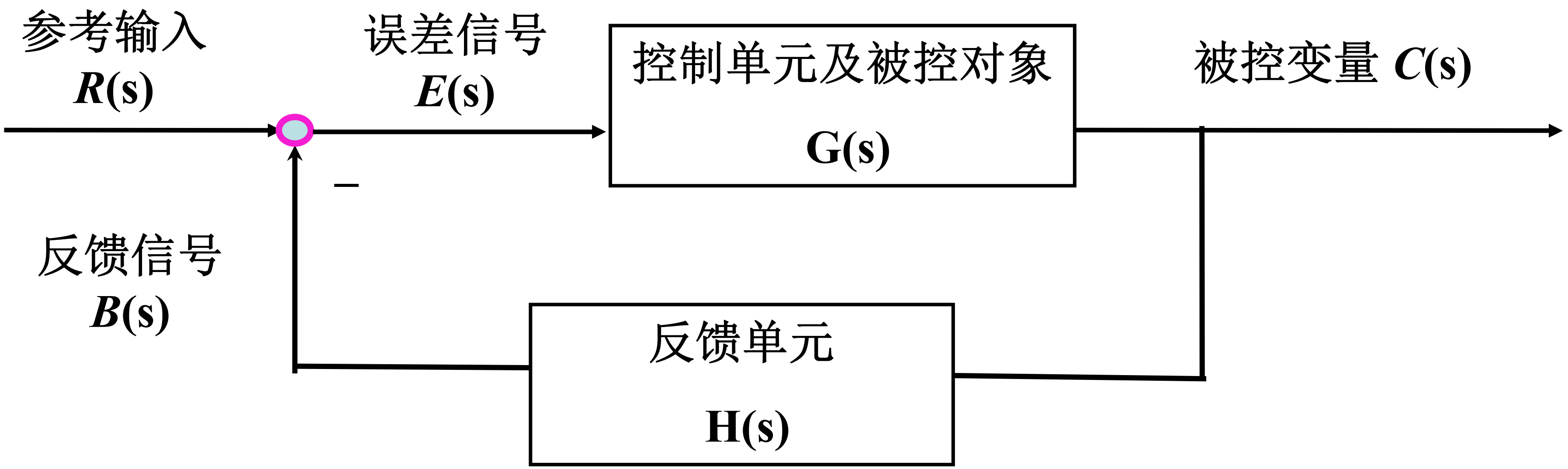
$$G_o(s) = \frac{B(s)}{E(s)} = G(s)H(s)$$

•闭环传递函数(简称闭环传函)

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{G(s)}{1 + G_o(s)}$$

电路系统的机理建模（传递函数）

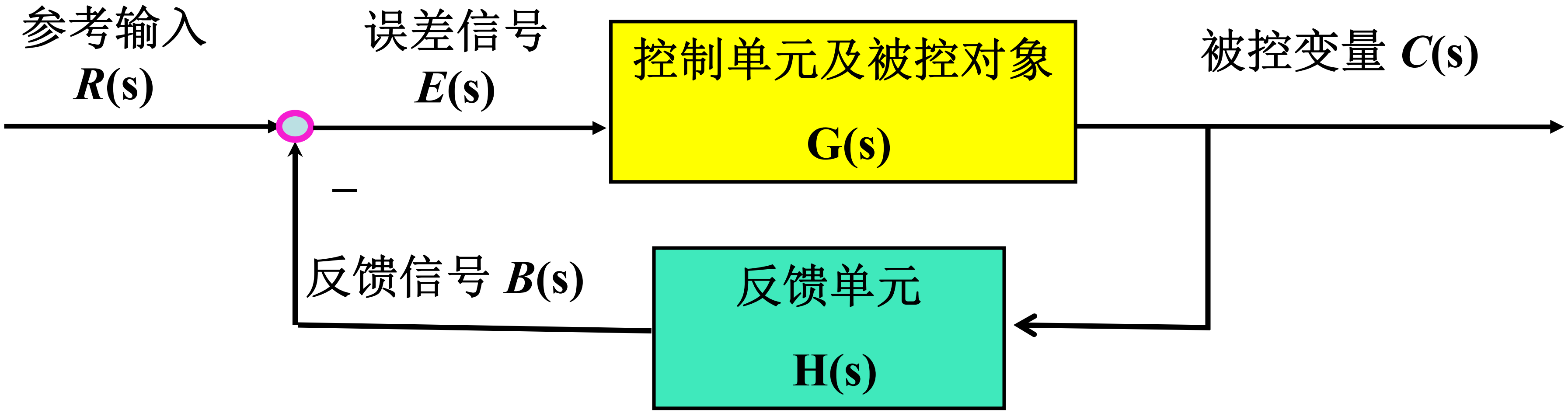
- 对于典型的闭环控制系统



- 整个系统的传递函数 – 被控变量 C(s) 与参考输入 R(s) 的比值。

$$\Phi(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

电路系统的机理建模（传递函数）



- 开环传递函数 – 对于任意给定的反馈环，反馈通路输出变量 B(s) 与误差信号 E(s) 的比值（注意：系统仍然是闭环控制系统）。

$$G(s) = \frac{B(s)}{E(s)} = G(s)H(s)$$

- 前向通路传递函数 – 被控变量 C(s) 与误差信号 E(s) 的比值 $G_f(s) = \frac{C(s)}{E(s)} = G(s)$

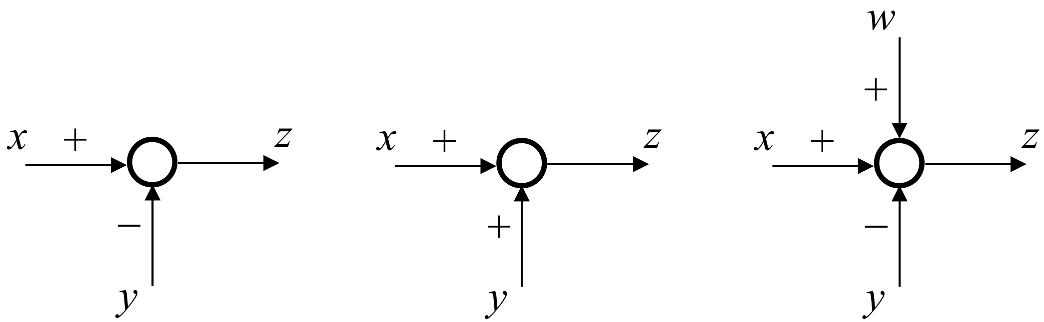
- 反馈通路传递函数 $G_b(s) = \frac{B(s)}{C(s)} = H(s)$

电路系统的机理建模（方块图）

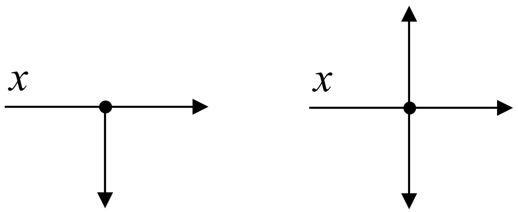
方块图的基本元素

$\boxed{A}$ $\boxed{G(s)}$ $\boxed{-1}$ 方框（环节）表示子系统或对信号的变换

$\xrightarrow{x}$ $\xrightarrow{x(t)}$ $\xrightarrow{X(s)}$ 带单向箭头的线段（信号线）表示信号及其流向



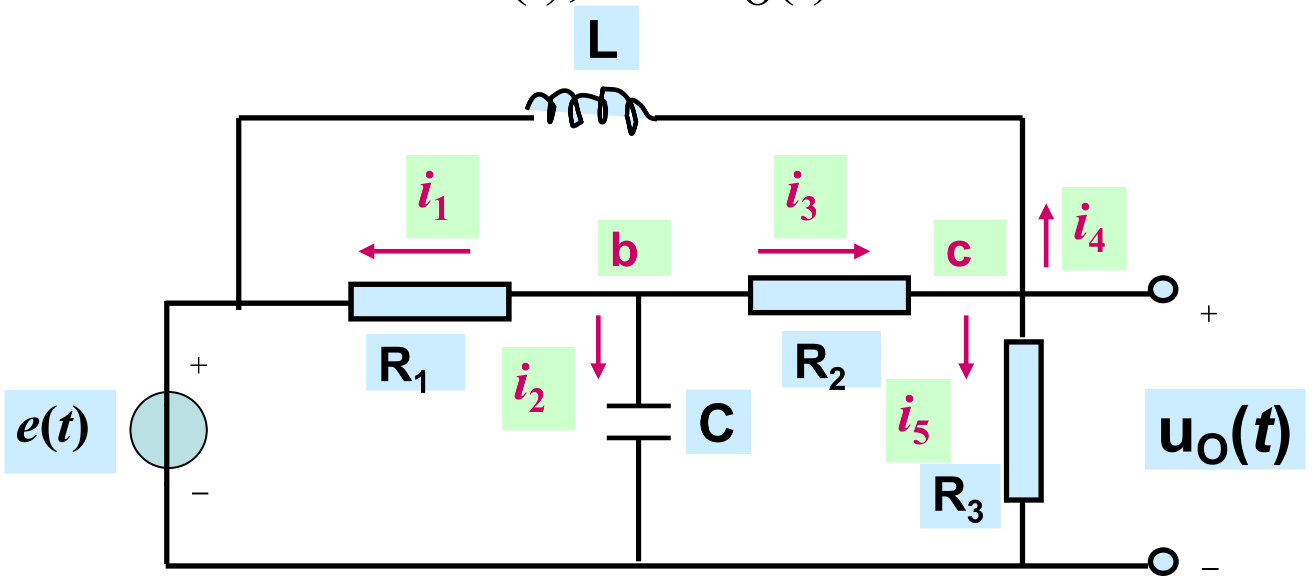
比较点（综合点）表示对两个或以上信号的加减运算



引出点表示同一个信号被引至多个不同的位置使用

电路系统的机理建模（方块图）

◆ 例：如图电路中，输入$e(t)$,输出$u_O(t)$，要求用方块图表示电路模型



结点方法:

对于节点b $\quad i_1+i_2+i_3=0$

对于节点c $\quad -i_3+i_4+i_5=0$

对于电容C $\quad i_2=C\dfrac{\mathrm{d}u_b}{\mathrm{d}t}$

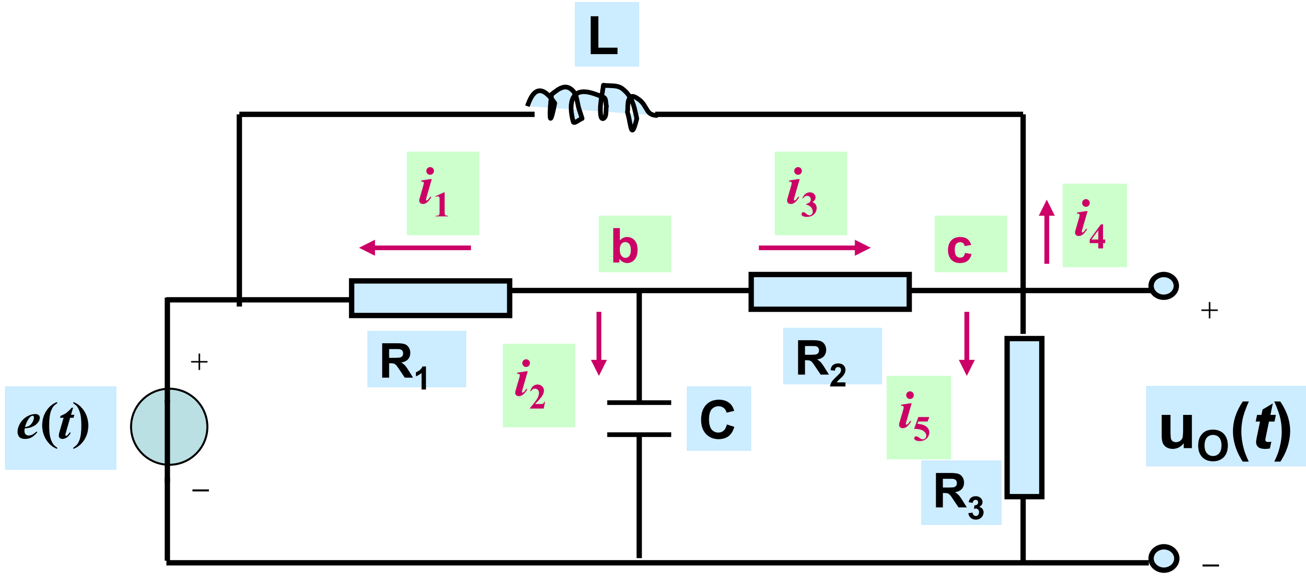
对于电感L $\quad u_c-e=L\dfrac{\mathrm{d}i_4}{\mathrm{d}t}$

记$\dfrac{1}{D}x(t)=\int_0^t x(\tau)d\tau$

$$\xrightarrow{i_2}\boxed{\frac{1}{CD}}\xrightarrow{u_b}$$

$$\xrightarrow{u_c-e}\boxed{\frac{1}{LD}}\xrightarrow{i_4}$$

电路系统的机理建模（方块图）

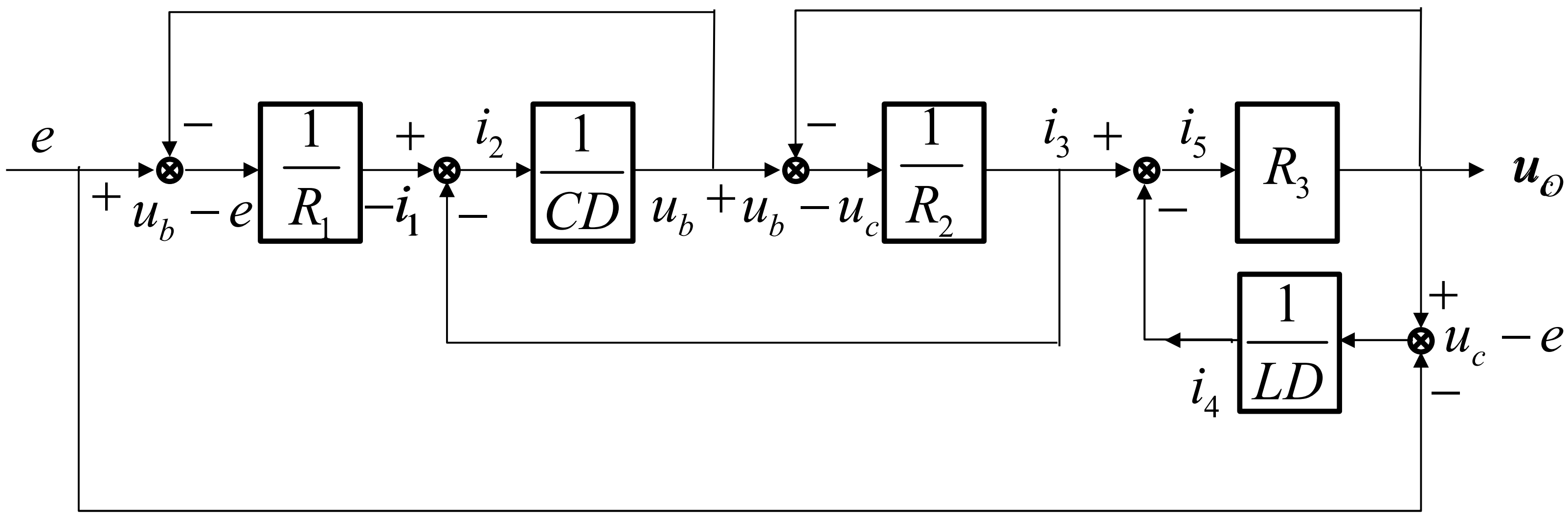


$$i_2 = -i_1 - i_3$$

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0$$

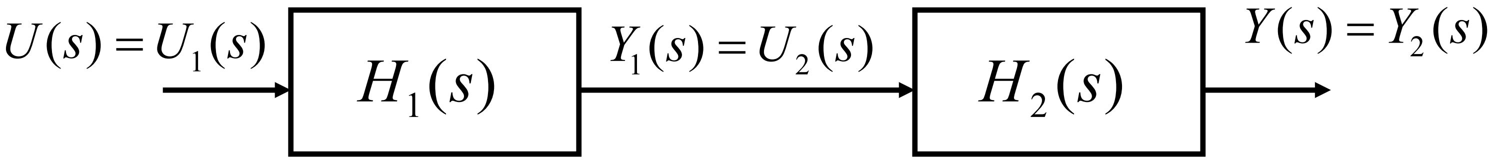
$$-i_3 + i_4 + i_5 = 0$$

$$i_5 = i_3 - i_4$$



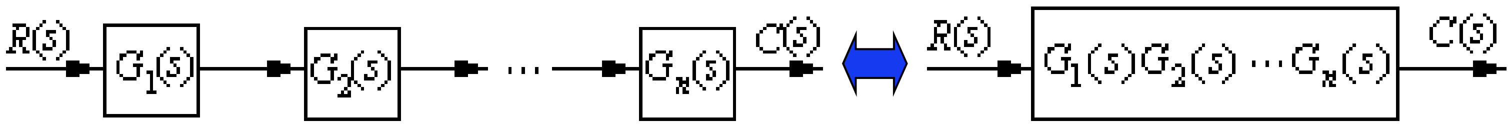
电路系统的机理建模（方块图）

串联（cascade）



$$Y(s)=Y_2(s)=H_2(s)U_2(s)=H_2(s)Y_1(s)=H_2(s)H_1(s)U(s)$$

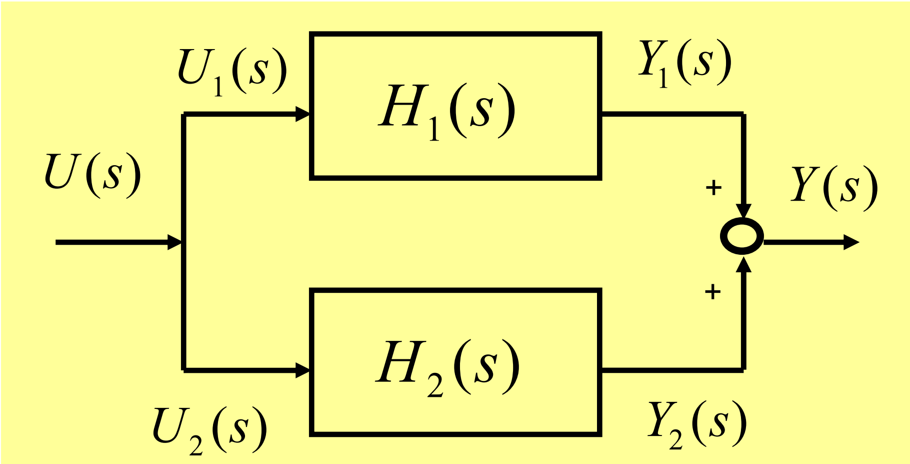
$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=H_2(s)H_1(s)$$



(a) (b)

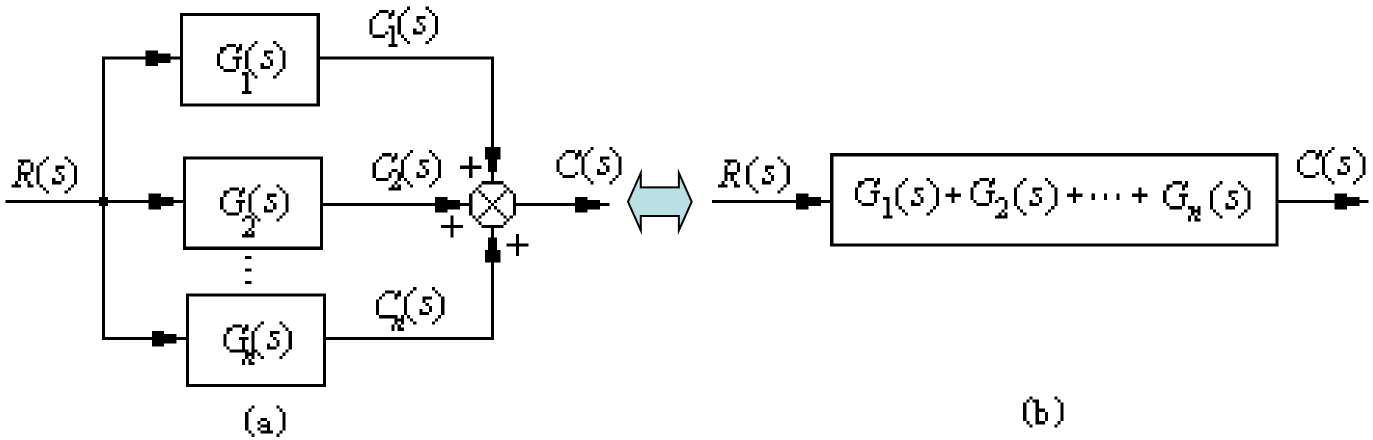
电路系统的机理建模（方块图）

并联（parallel）



$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=H_1(s)+H_2(s)$$

$$Y(s)=Y_1(s)+Y_2(s)=H_1(s)U_1(s)+H_2(s)U_2(s)=\left(H_1(s)+H_2(s)\right)U(s)$$

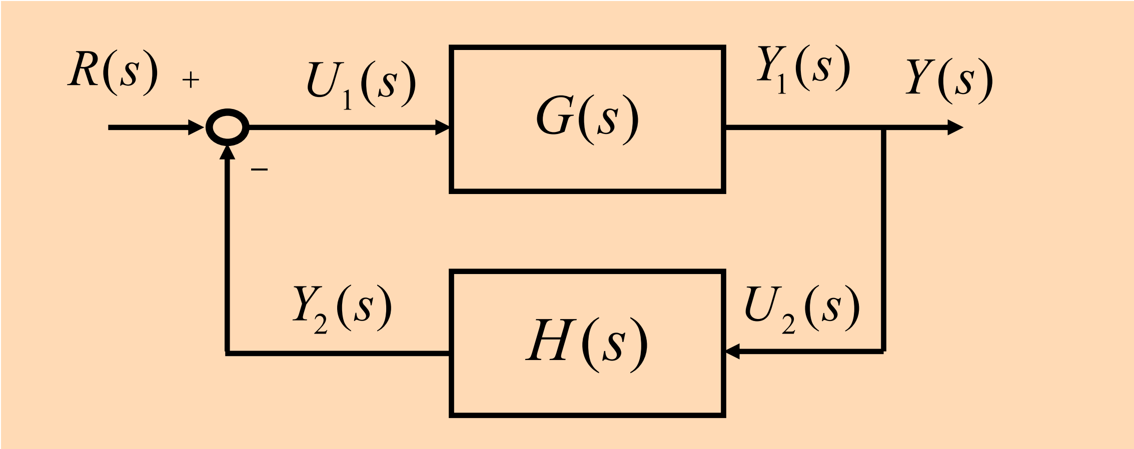


电路系统的机理建模（方块图）

负反馈

（negative feedback）

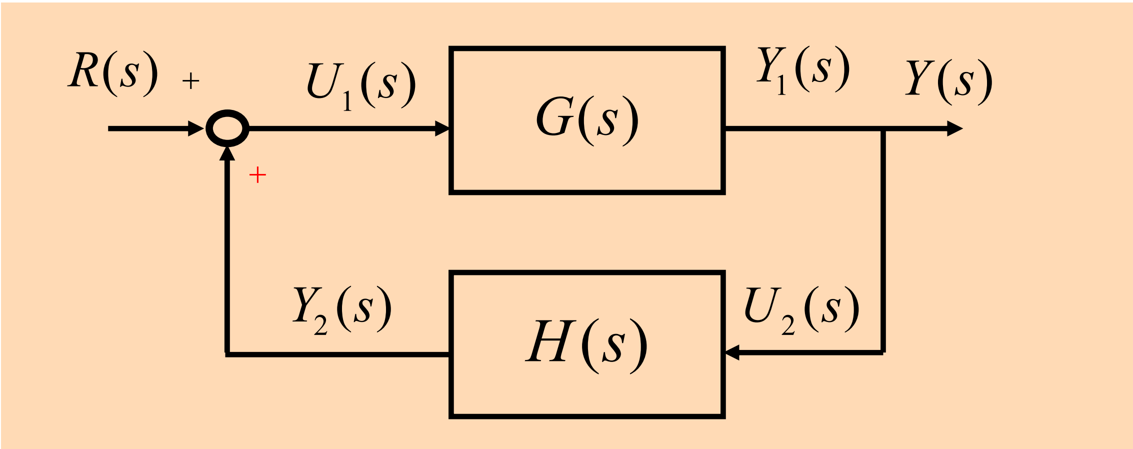
$$\Phi(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$



正反馈

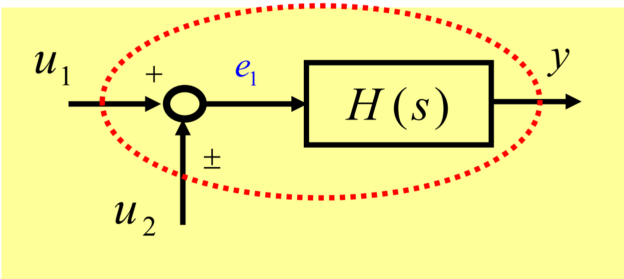
（positive feedback）

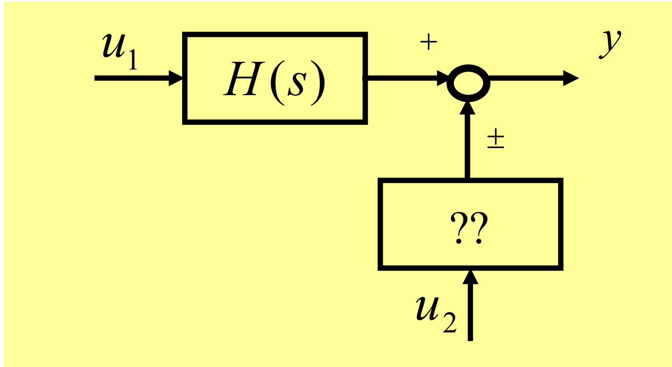
$$\Phi(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{G(s)}{1-G(s)H(s)}$$



电路系统的机理建模（方块图）

求和点移动

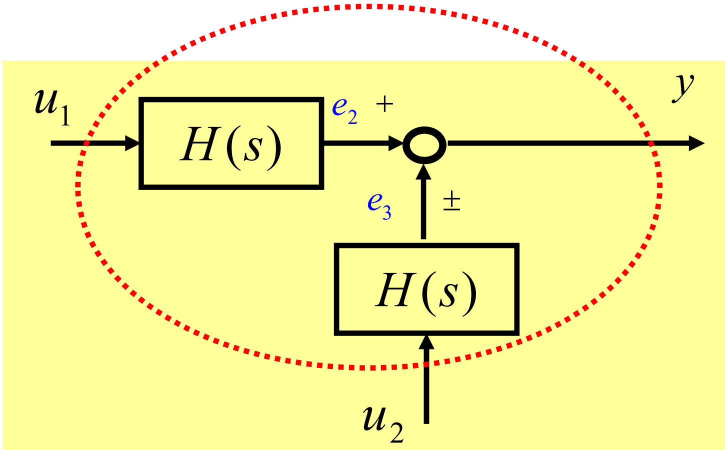




$$Y(s) = H(s)(U_1(s) \pm U_2(s))$$
$$= H(s)U_1(s) \pm H(s)U_2(s)$$

$$Y(s) = H(s)U_1(s) \pm ?? \cdot U_2(s)$$

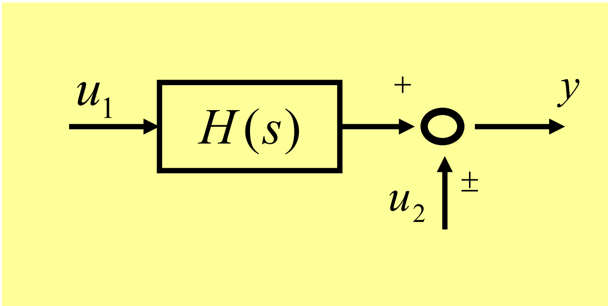
$$?? = H(s)$$



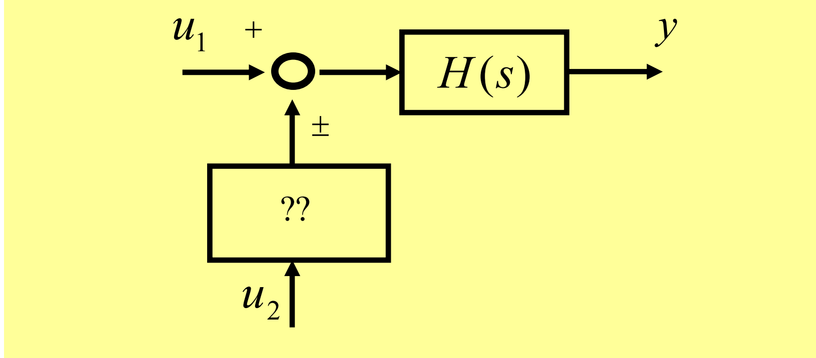
$$Y(s) = H(s)U_1(s) \pm H(s)U_2(s)$$

原则：在变换前后的方块图中，同名“变量对”之间的传递函数不变

电路系统的机理建模（方块图）

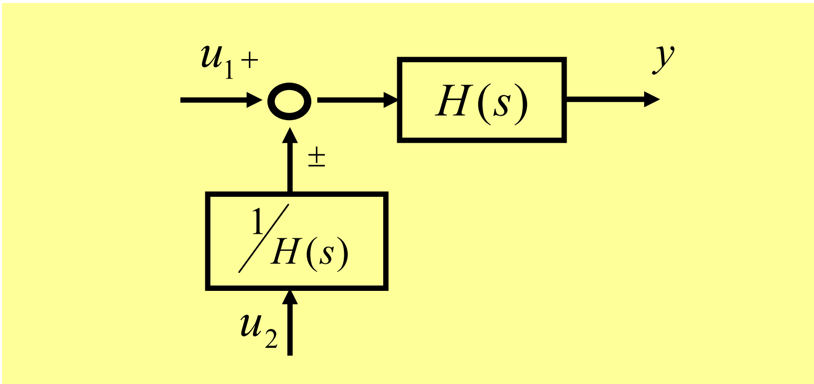


求和点移动



$$Y(s)=H(s)U_1(s)+U_2(s)$$

$$Y(s)=H(s)\{U_1(s)+??\cdot U_2(s)\}$$



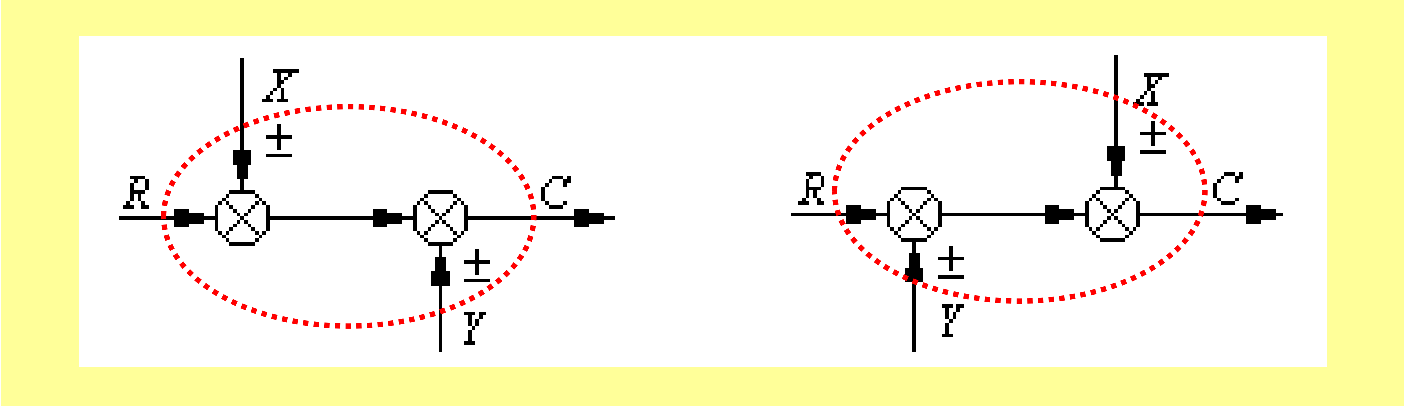
$$??\cdot H(s)U_2(s)=U_2(s)$$

$$??=H(s)^{-1}$$

原则：在变换前后的方块图中，同名“变量对”之间的传递函数不变

电路系统的机理建模（方块图）

➢ 相邻两个求和点前后移动的等效变换



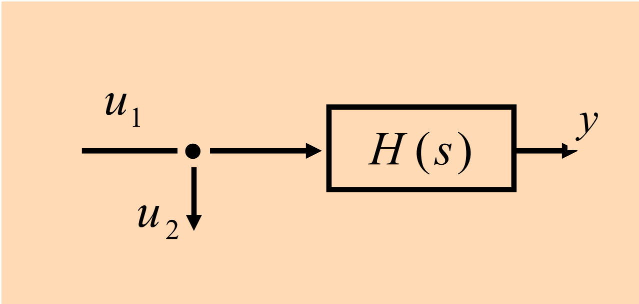
$$C = R \pm X \pm Y$$

相邻多个求和点可以任意换位

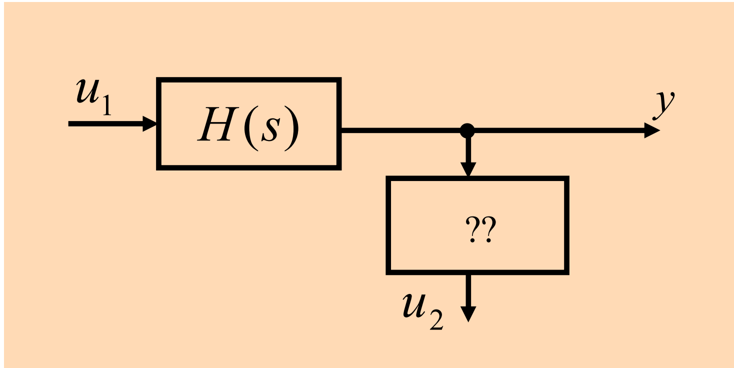
原则：在变换前后的方块图中，同名“变量对”之间的传递函数不变

电路系统的机理建模（方块图）

引出点移动



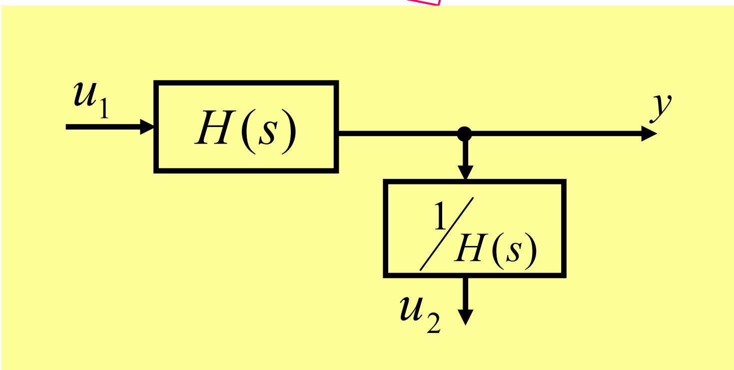
$$Y(s)=H(s)U_1(s);U_2(s)=U_1(s)$$



$$Y(s)=H(s)U_1(s)$$

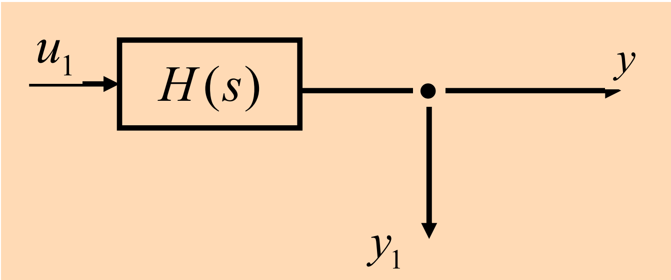
$$U_2(s)=??\cdot H(s)U_1(s)=U_1(s)$$

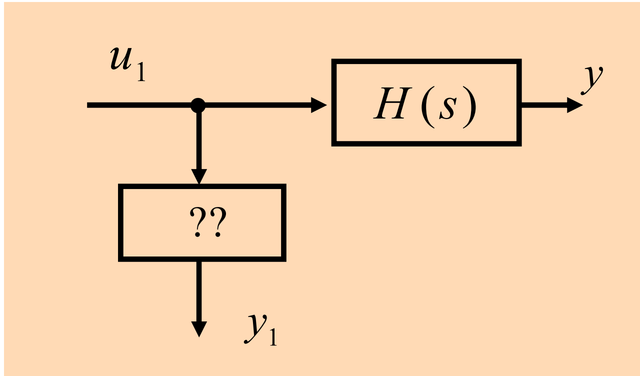
$$??=H(s)^{-1}$$



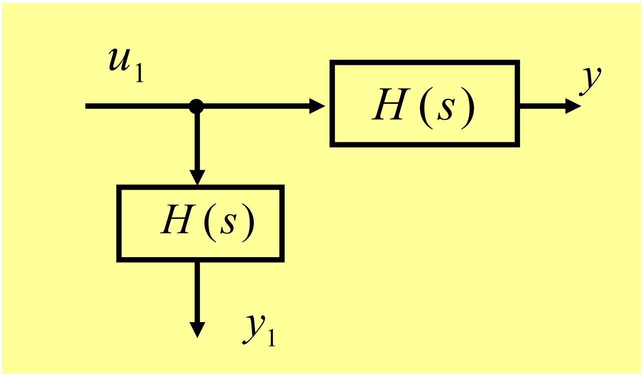
电路系统的机理建模（方块图）

引出点移动





$$Y(s)=H(s)U_1(s);Y_1(s)=Y(s)$$



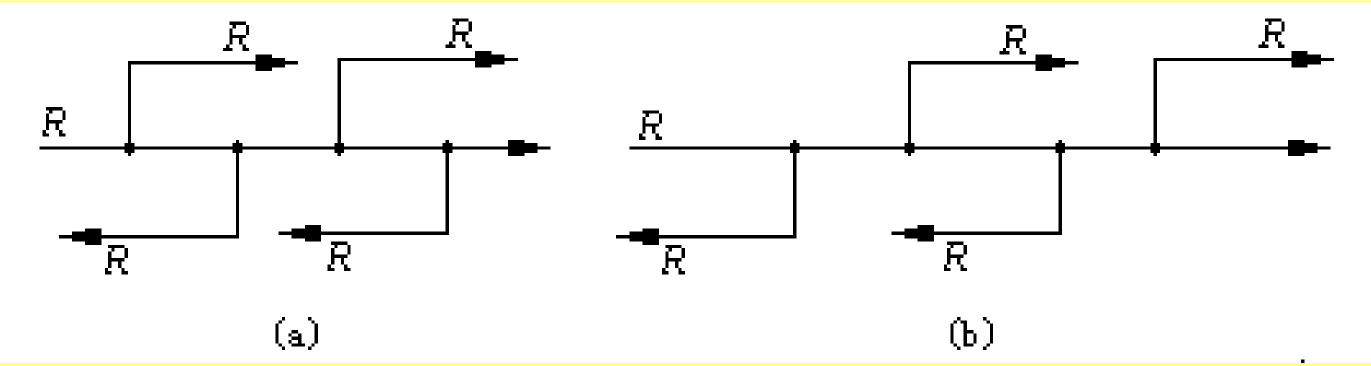
$$Y(s)=H(s)U_1(s)$$

$$Y_1(s)=U_1(s)\cdot ??=Y(s)$$

$$??=H(s)$$

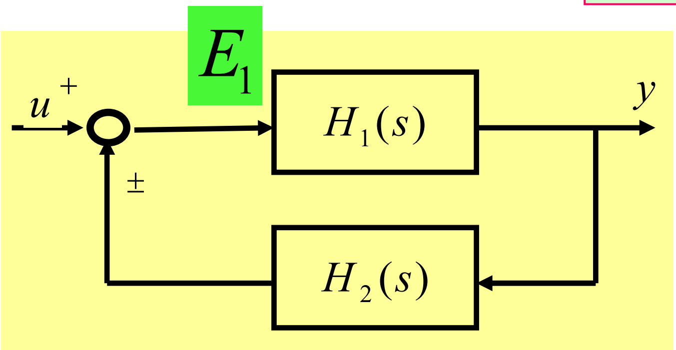
电路系统的机理建模（方块图）

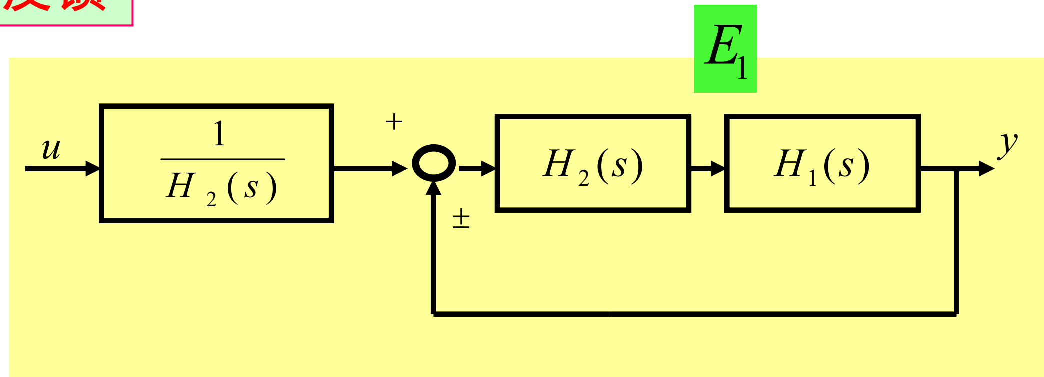
➢ 相邻多个引出点可以任意换位



电路系统的机理建模（方块图）

等效单位反馈





$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{H_1(s)}{1\mp H_1(s)H_2(s)}$$

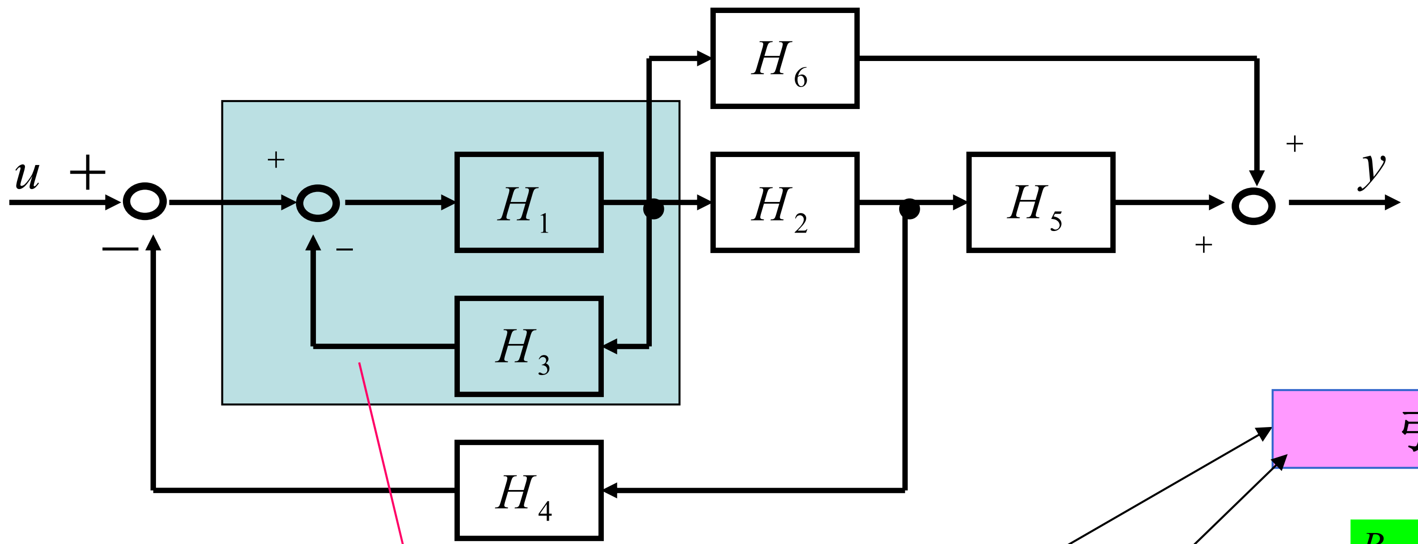
$$G(s)=\frac{1}{\cancel{H_2(s)}}\cdot\frac{H_1(s)\cancel{H_2(s)}}{1\mp H_1(s)H_2(s)}$$

$$E_1(s)=U(s)\pm H_2(s)Y(s)$$

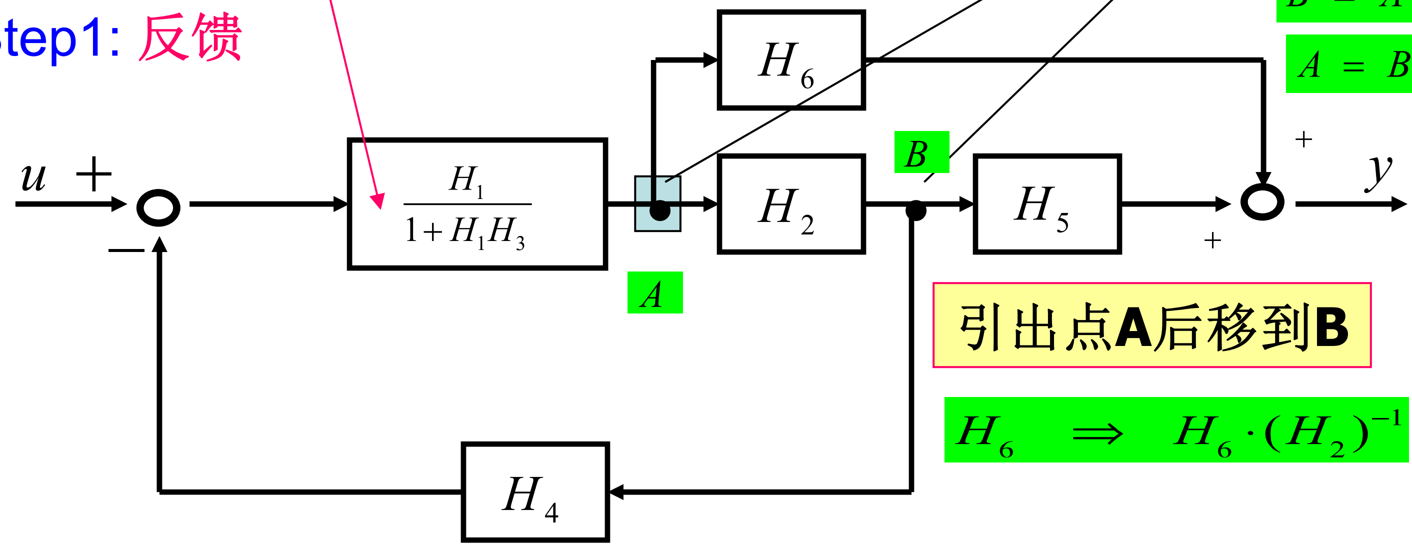
$$E_1(s)=\left(U(s)\frac{1}{H_2(s)}\pm Y(s)\right)H_2(s)$$
$$=U(s)\pm H_2(s)Y(s)$$

电路系统的机理建模（方块图）

例: 求如下系统的传递函数



- Step1: 反馈



$B = A \cdot H_2$

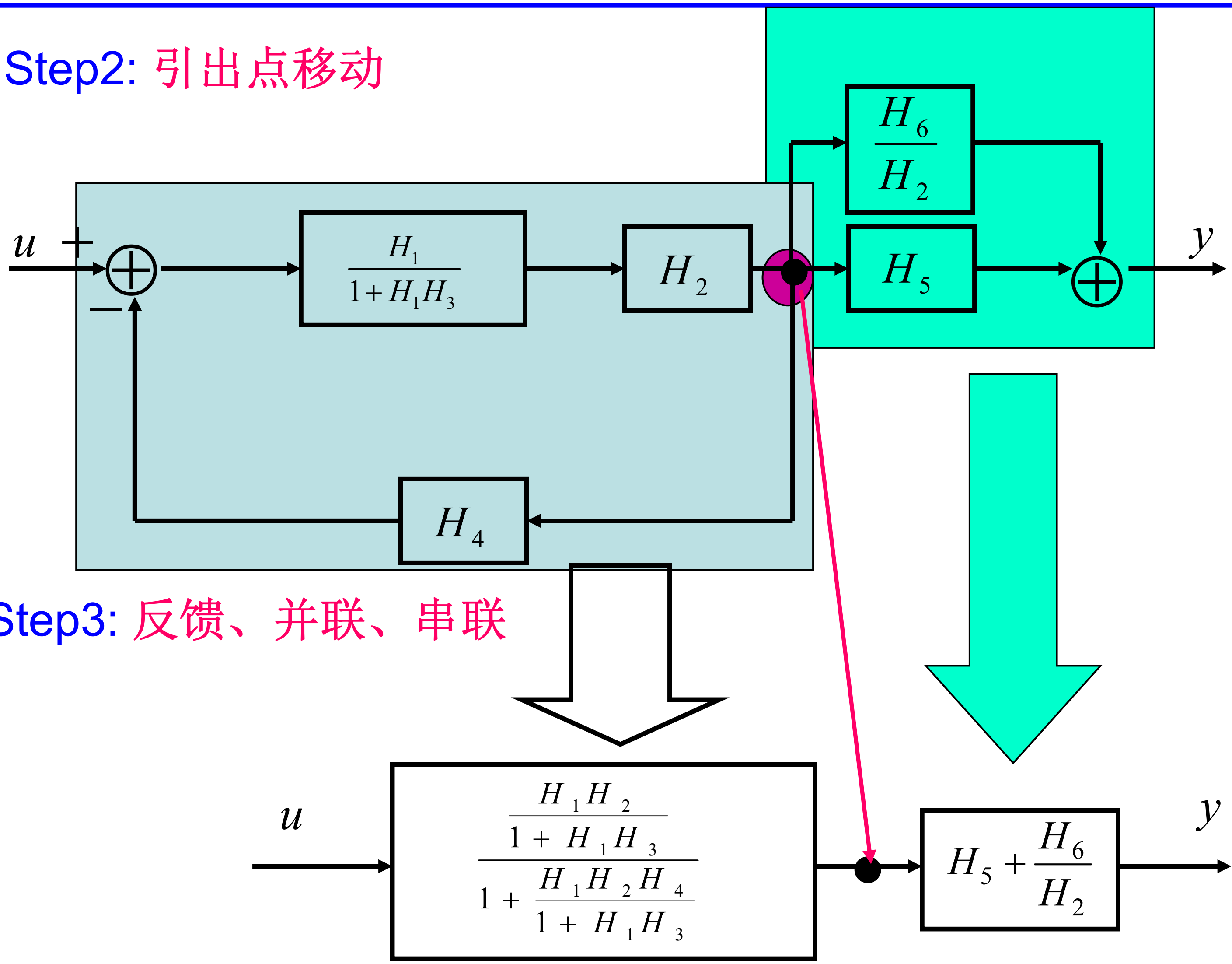
$A = B \cdot (H_2)^{-1}$

引出点A后移到B

$H_6 \Rightarrow H_6 \cdot (H_2)^{-1}$

电路系统的机理建模（方块图）

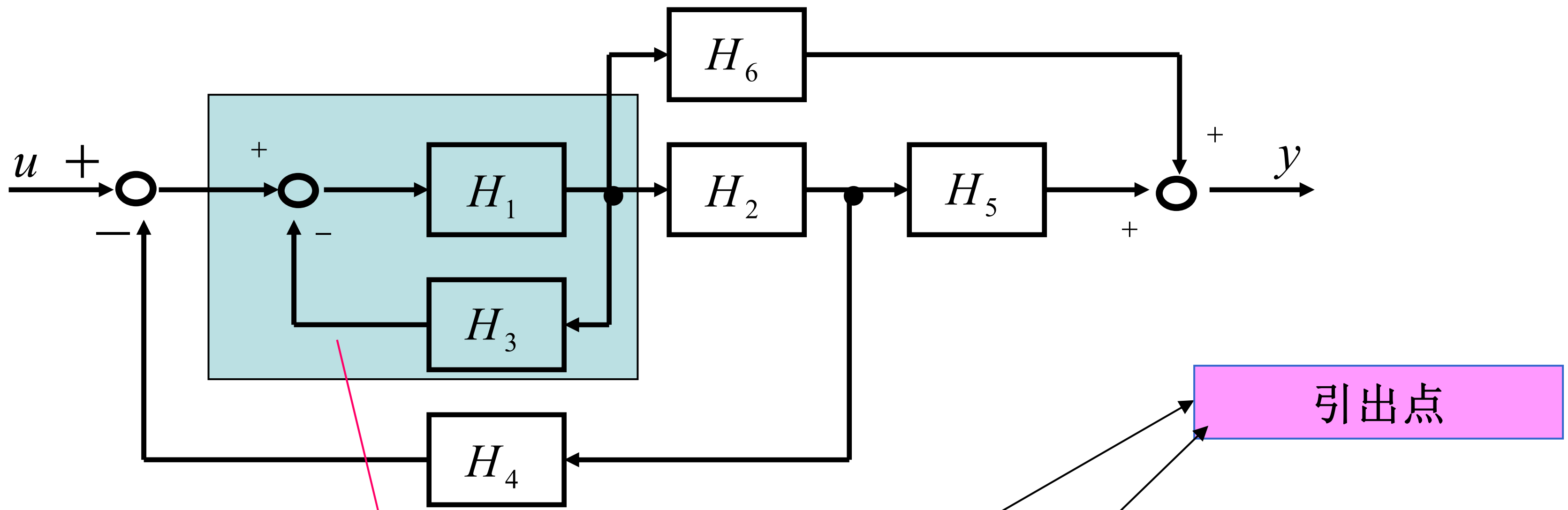
- Step2: 引出点移动



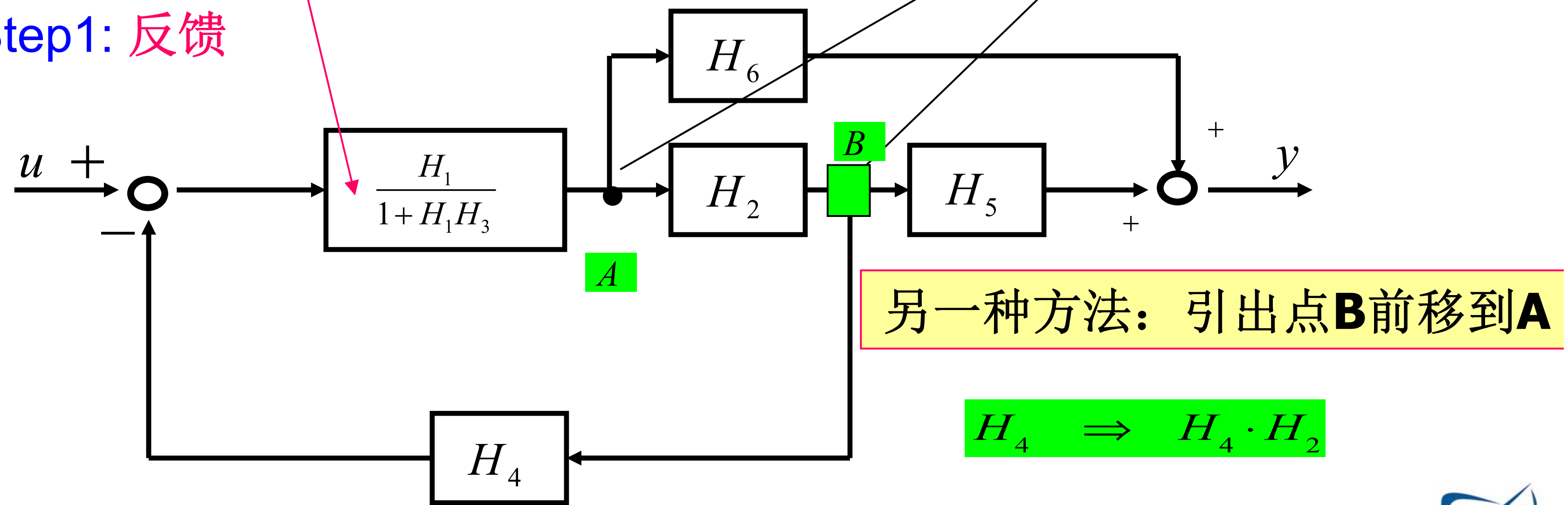
- Step3: 反馈、并联、串联

电路系统的机理建模（方块图）

例: 求如下系统的传递函数



- Step1: 反馈

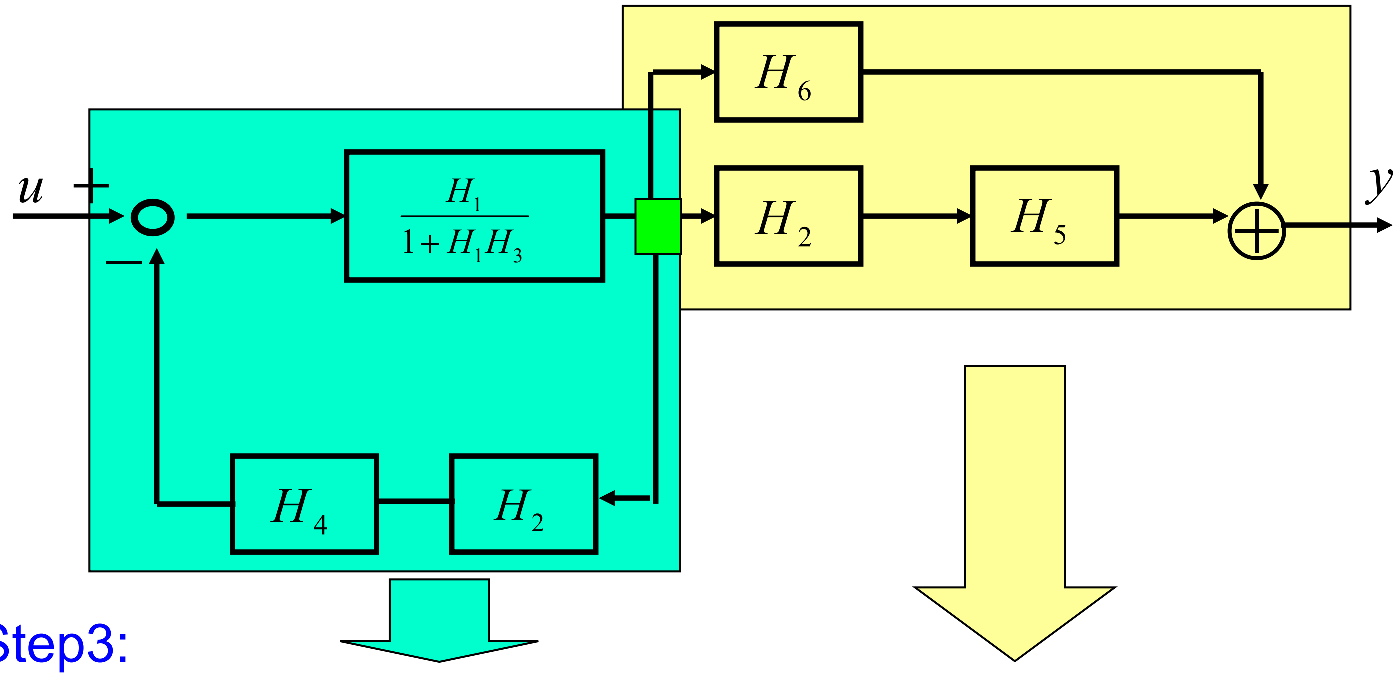


另一种方法：引出点B前移到A

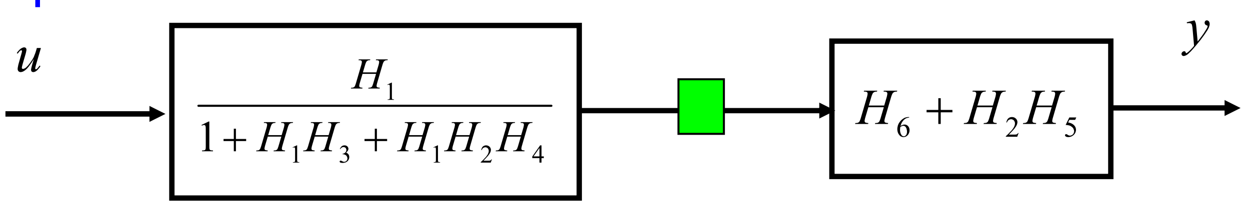
$H_4 \Rightarrow H_4 \cdot H_2$

电路系统的机理建模（方块图）

- Step2:



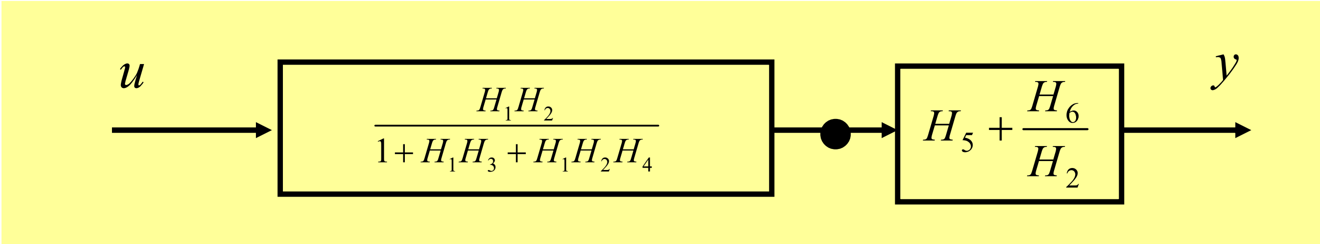
- Step3:



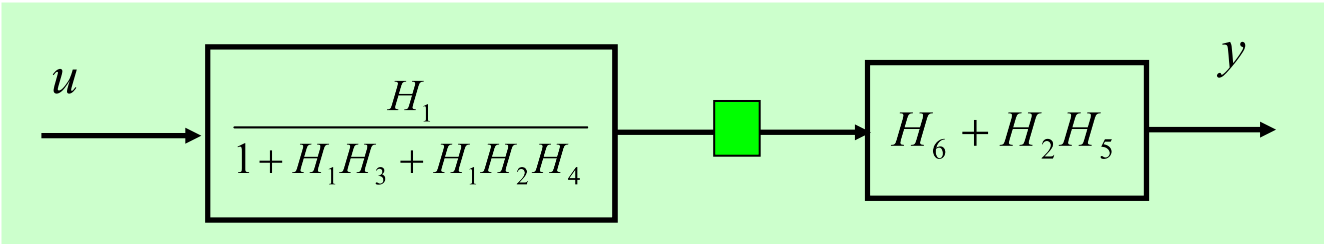
电路系统的机理建模（方块图）

◆ 获得传递函数

引出点A后移



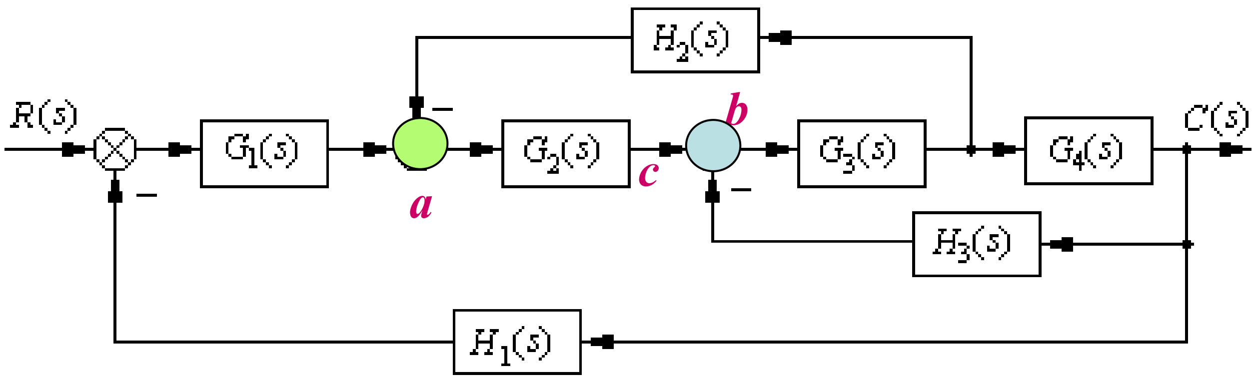
引出点B前移



$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{\dfrac{H_1H_2}{1+H_1H_3}}{1+\dfrac{H_1H_2H_4}{1+H_1H_3}}\left(H_5+\frac{H_6}{H_2}\right)=\frac{H_1H_2H_5+H_1H_6}{1+H_1H_3+H_1H_2H_4}$$

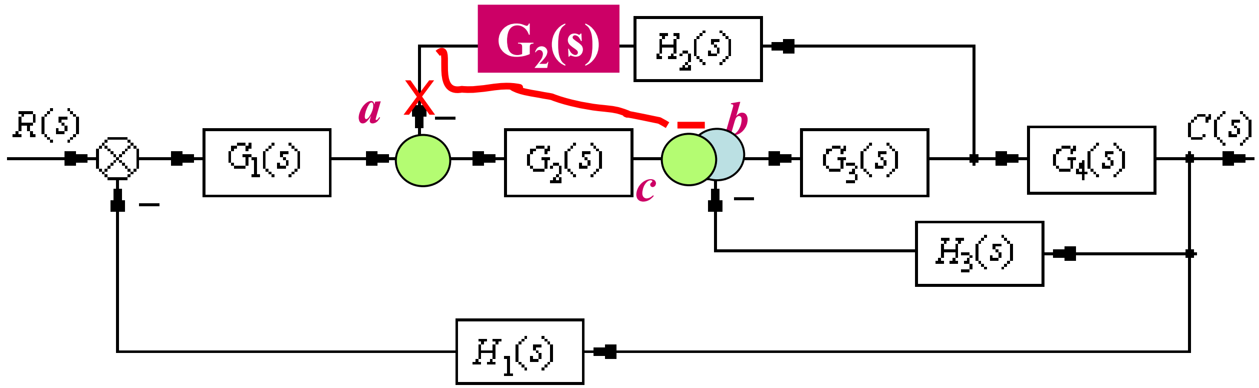
电路系统的机理建模（方块图）

例: 求如下系统的传递函数



2个求和点：a，b

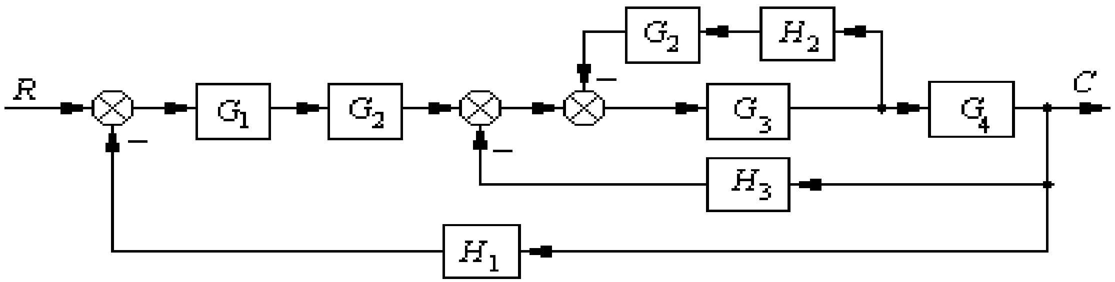
- Step1: (1) 将 ○ 从a移动到c



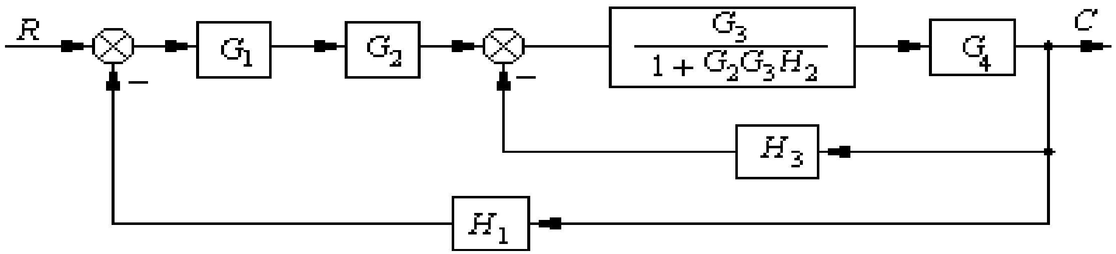
(2)○ 和○换位

电路系统的机理建模（方块图）

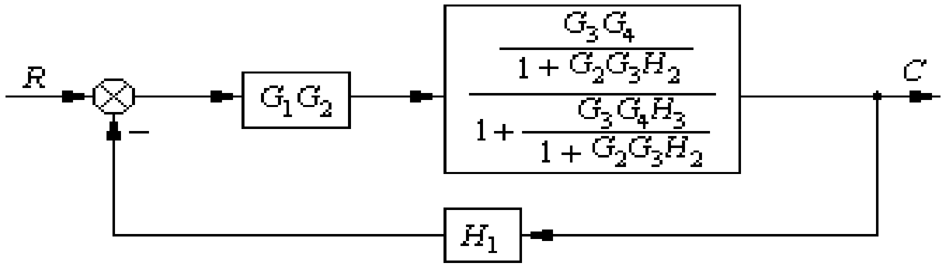
Step2:



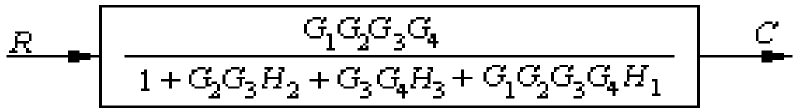
(a)



(b)



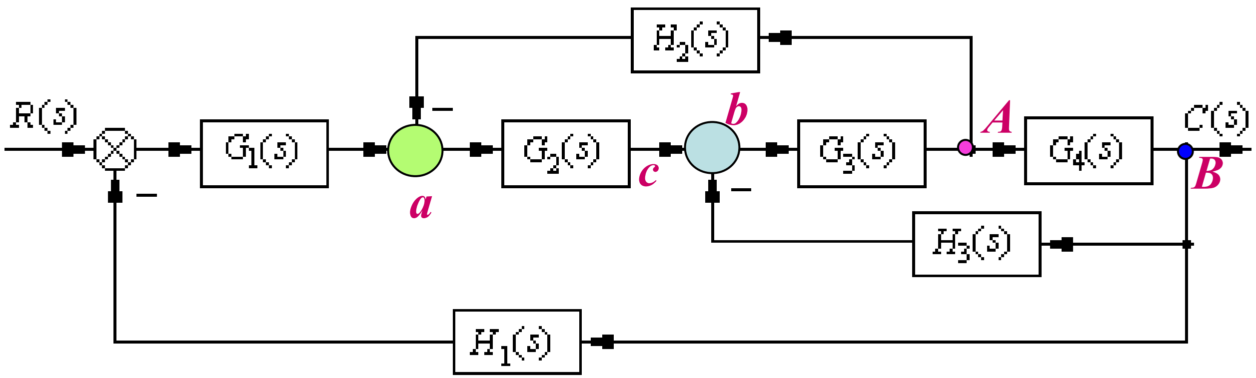
(c)



(d)

电路系统的机理建模（方块图）

例: 求如下系统的传递函数



其它3种解法:

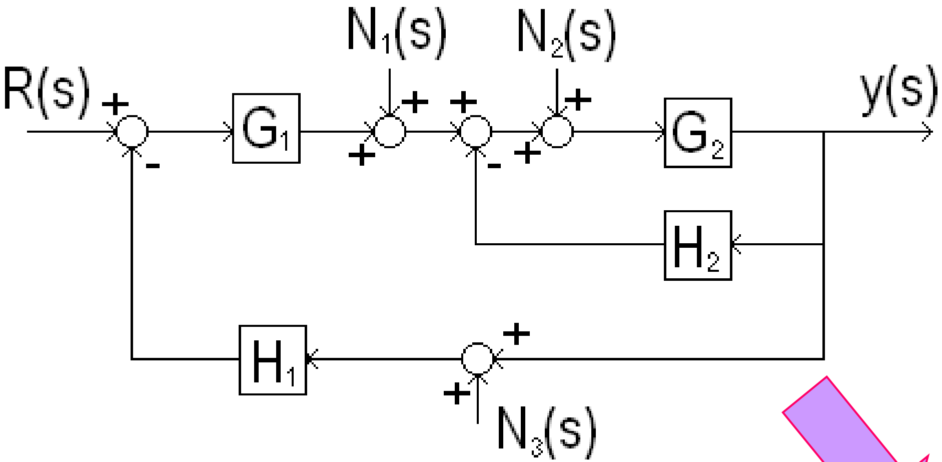
求和点b移动到求和点a附近

引出点A移动到引出点B附近

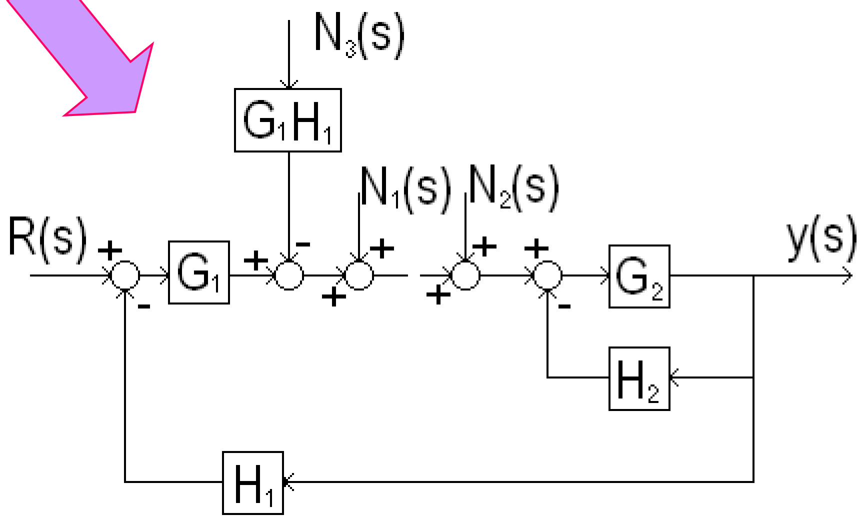
引出点B移动到引出点A附近

电路系统的机理建模（方块图）

◆例： 求如图所示系统输出的表达式



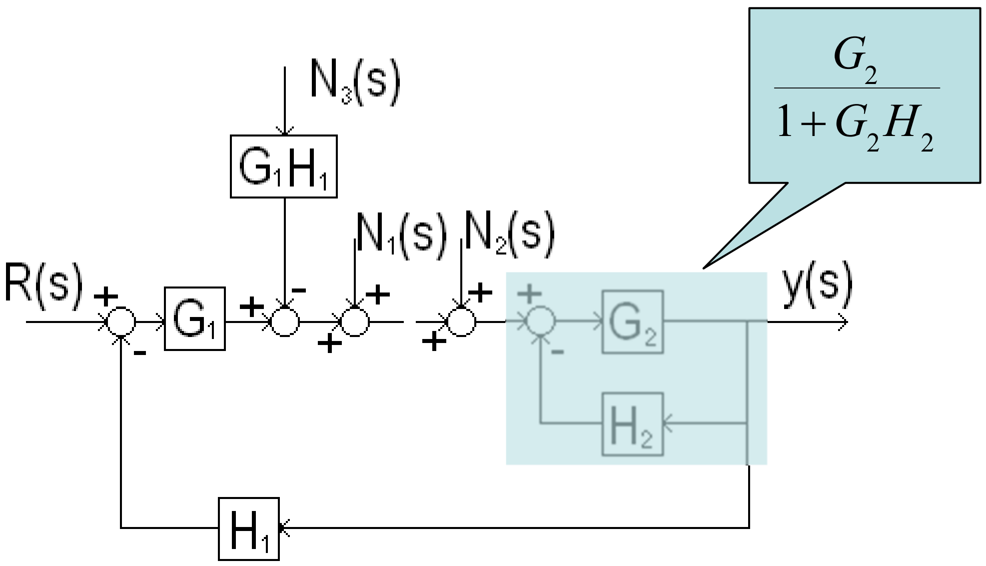
解：移动相加点：N_2前移，N_3越过H_1、G_1前移



电路系统的机理建模（方块图）

$$Y(s)=\frac{G_1\dfrac{G_2}{1+G_2H_2}}{1+G_1H_1\dfrac{G_2}{1+G_2H_2}}R(s)+\frac{\dfrac{G_2}{1+G_2H_2}}{1+G_1H_1\dfrac{G_2}{1+G_2H_2}}\left(N_1(s)+N_2(s)-G_1H_1N_3(s)\right)$$

$$=\frac{G_2N_1(s)+G_2N_2(s)-G_1H_1G_2N_3(s)+G_1G_2R(s)}{1+G_2H_2+G_1H_1G_2}$$



电路系统的机理建模（方块图）

◆例: 系统框图见图2-1，要求将系统等效变换成图2-2、图2-3框图结构，并求H(s)，G(s)表达式

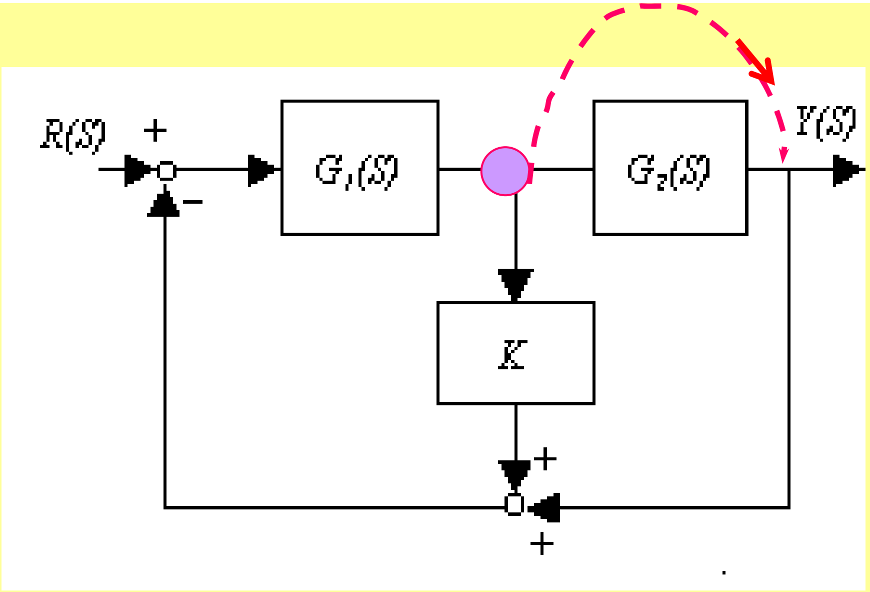


图 2-1

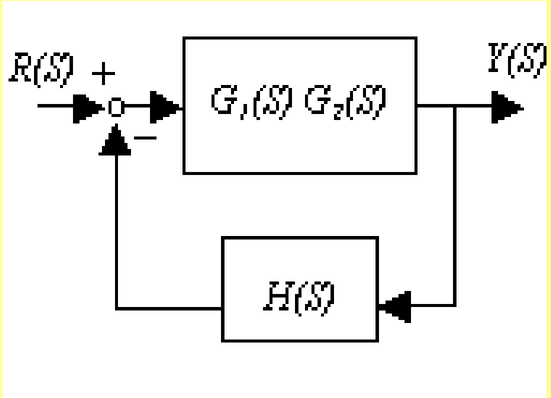


图 2-2

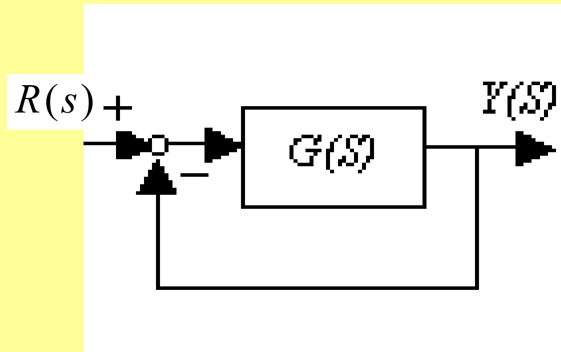


图 2-3

电路系统的机理建模（方块图）

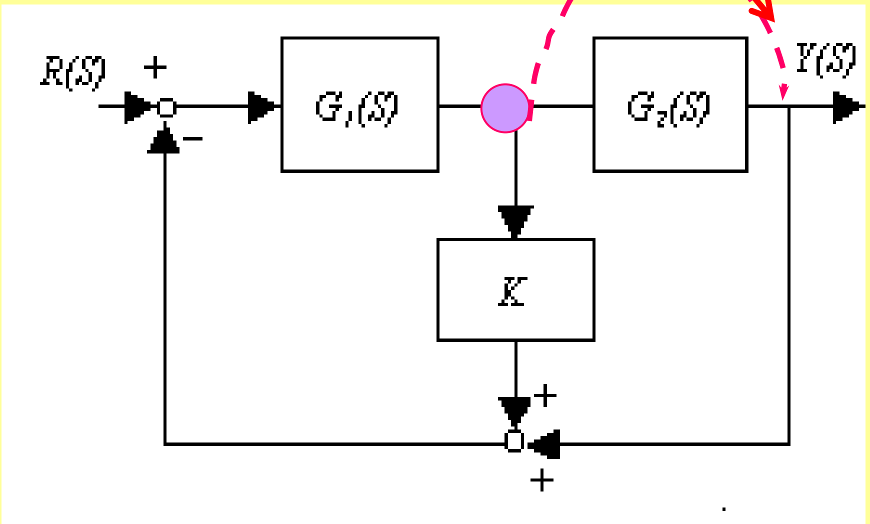
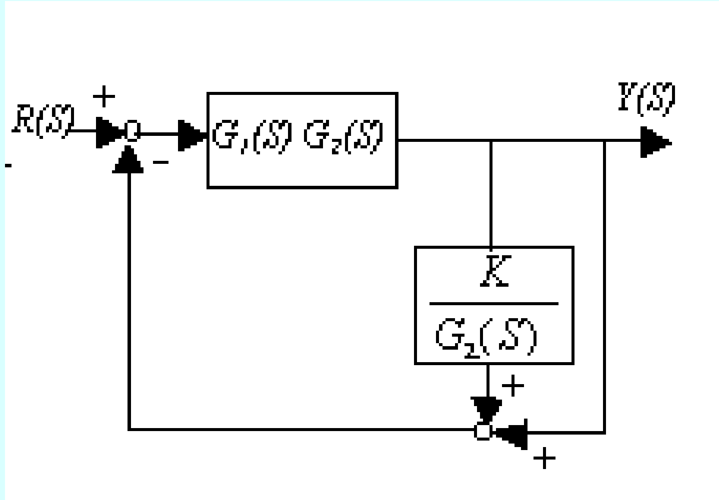


图 2-1



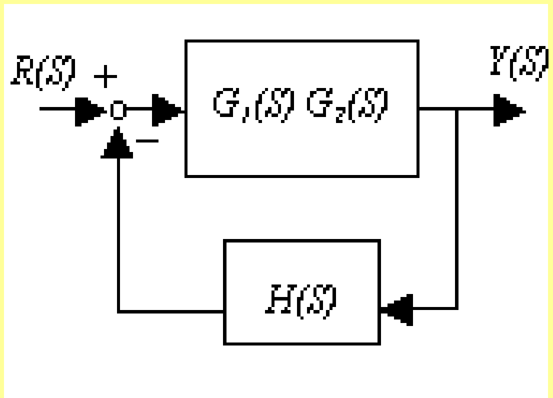


图 2-2

$$H(s)=1+\frac{K}{G_2(s)}$$

电路系统的机理建模（方块图）

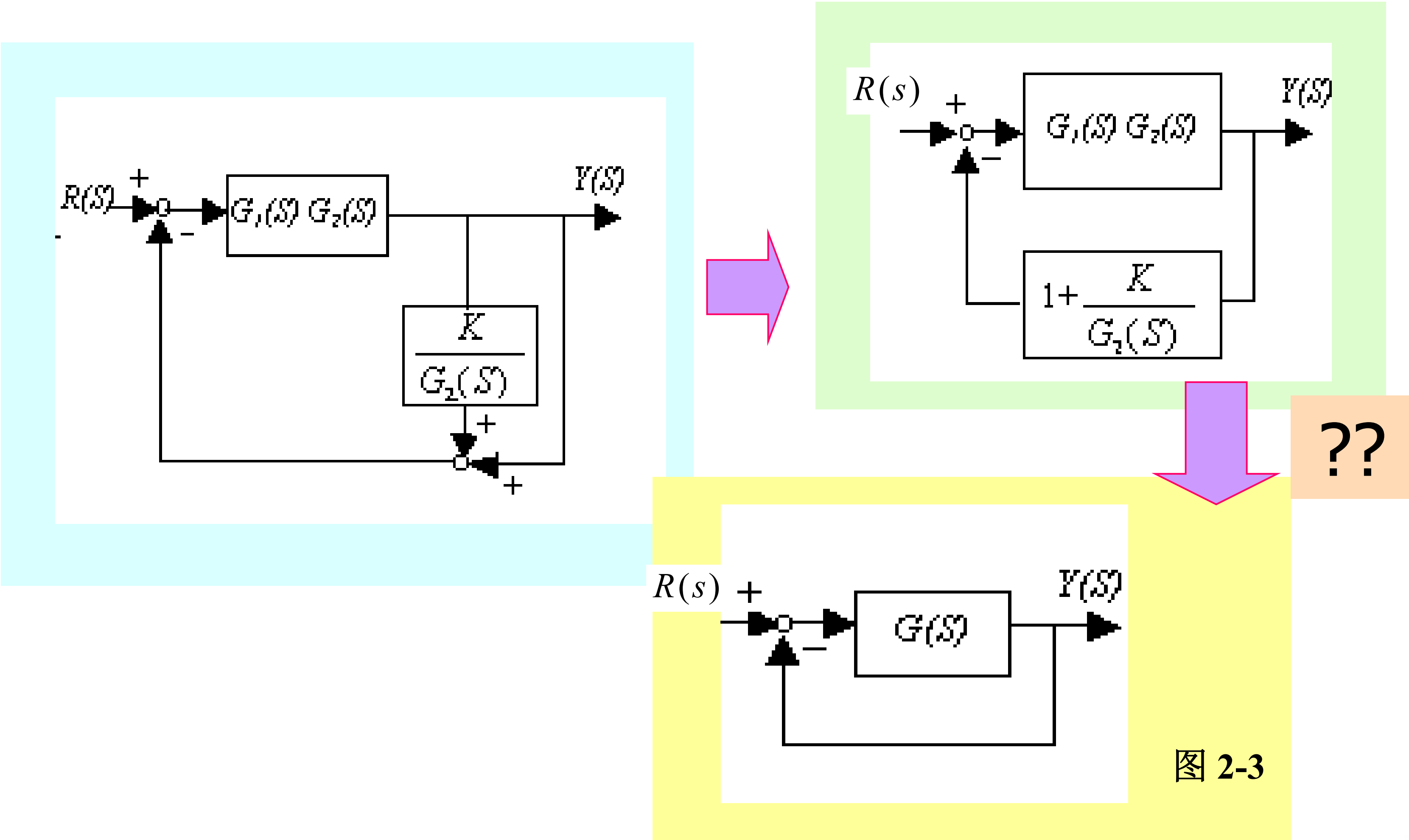
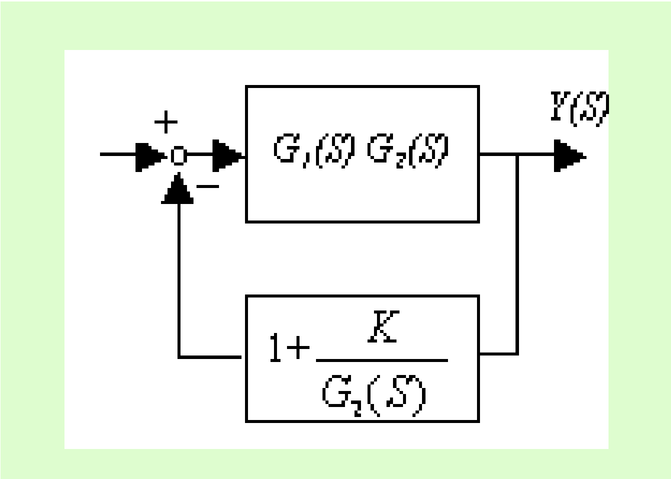
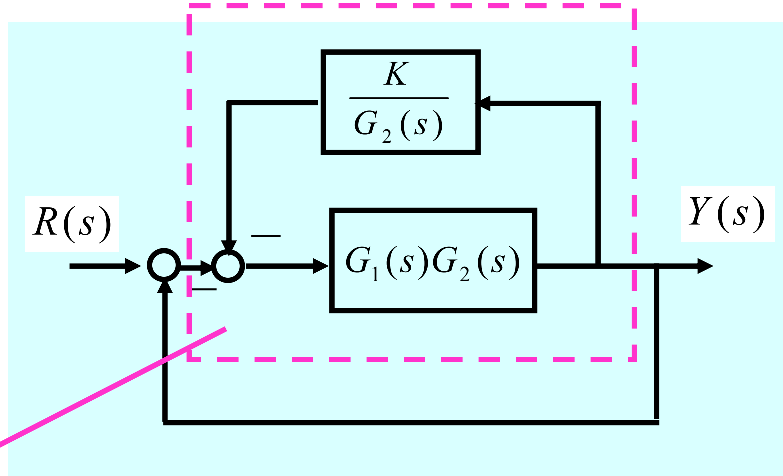


图 2-3

电路系统的机理建模（方块图）





$$G(s)=\frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)\cdot\dfrac{K}{G_2(s)}}$$

$$=\frac{G_1(s)G_2(s)}{1+KG_1(s)}$$

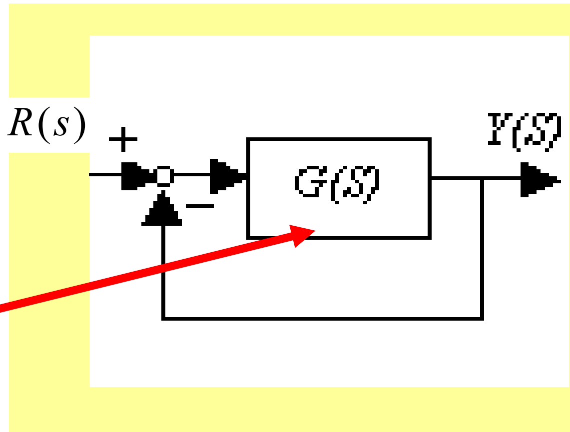


图 2-3

电路系统的机理建模（方块图）

- 另一种方法求G(s)和H(s)

利用闭环传函相等(代数方法)

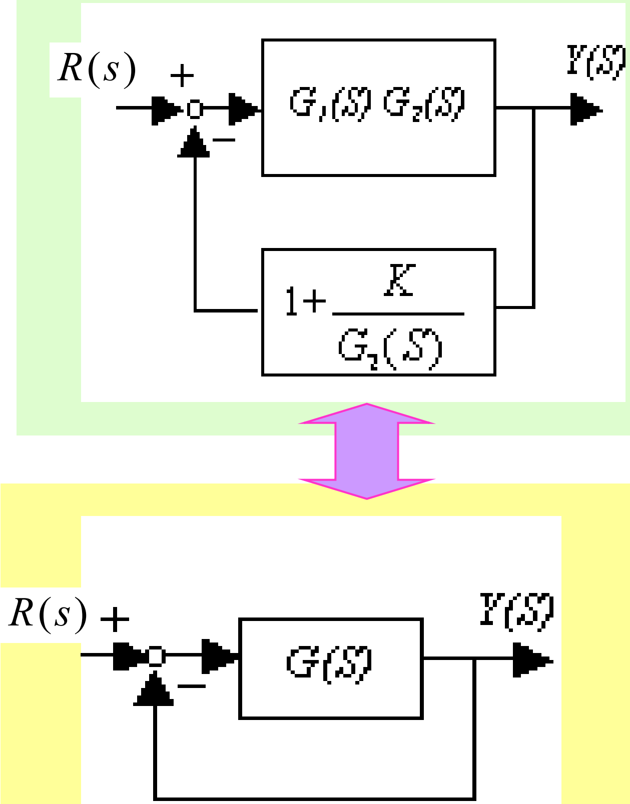


图 2-3

$$\Phi(s)=\frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)\left(1+\frac{K}{G_2(s)}\right)}=\frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)+KG_1(s)}$$

$$\Phi(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)}$$

$$\Phi(s)+\Phi(s)G(s)=G(s)$$

$$\Phi(s)=(1-\Phi(s))G(s)$$

$$G(s)=\frac{\Phi(s)}{1-\Phi(s)}$$

$$G(s)=\frac{\dfrac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)+KG_1(s)}}{1-\dfrac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)+KG_1(s)}}=\frac{G_1(s)G_2(s)}{1+KG_1(s)}$$

电路系统的机理建模（方块图）

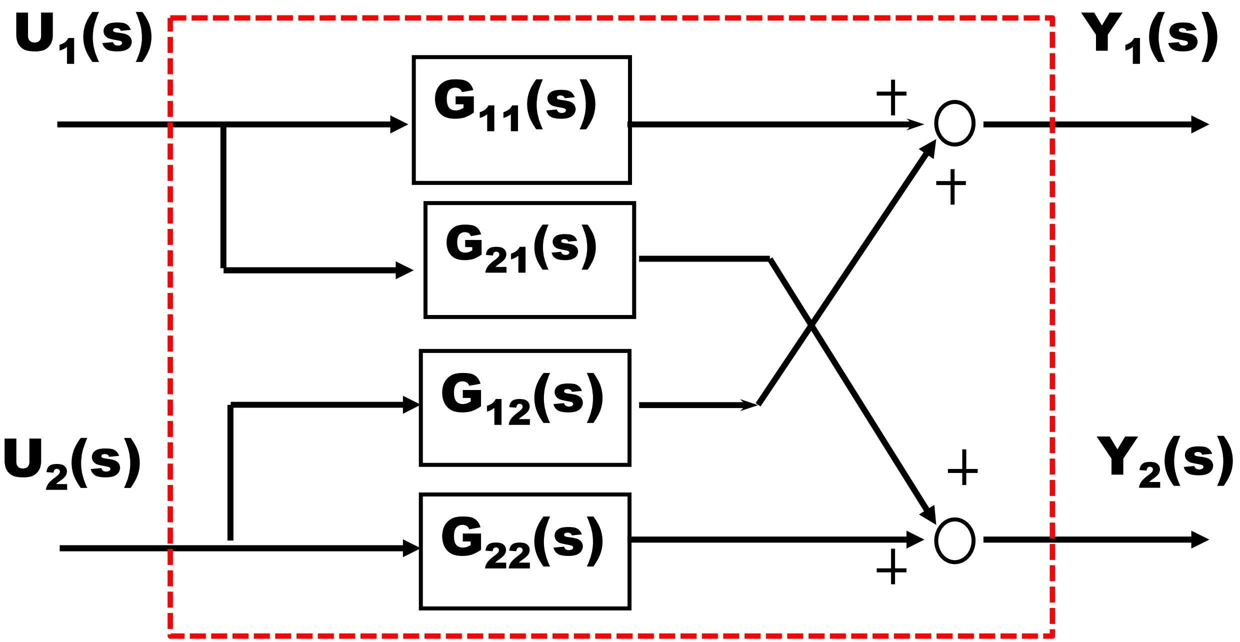
简化方块图求总传递函数的要点

1. 确定输入量与输出量。如果作用在系统上的输入量有多个(分别作用在系统的不同部位)，则必须分别对每个输入量逐个进行结构变换，求得各自的传递函数；对于有多个输出量的情况，也应分别变换。
2. 若方块图中有交叉结构，按**同名变量对间传递函数不变原则**，将交叉消除，化为无交叉的多回路
3. 对多回路结构，可由里向外进行变换(或按照要求进行方块图的简化)，直至变换为一个等效的方框，即得到所求的传递函数。

电路系统的机理建模（方块图）

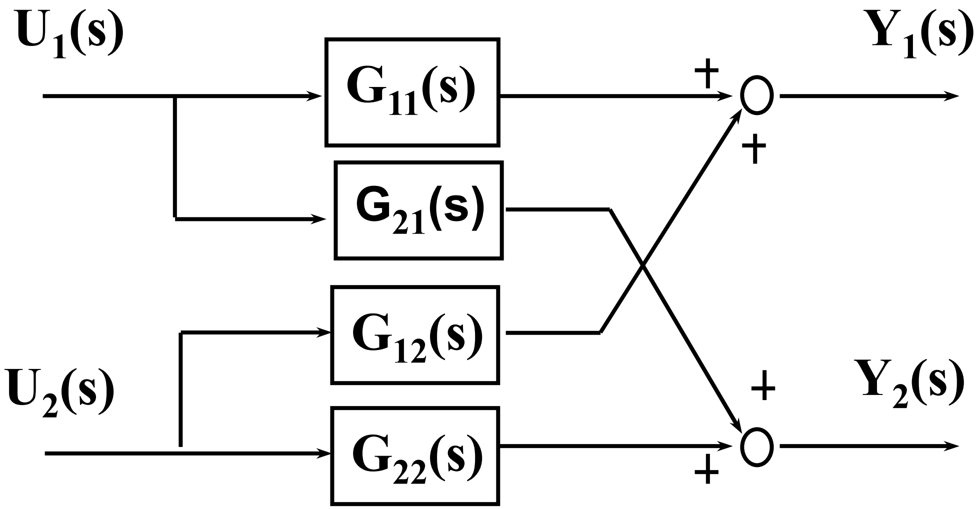
多变量系统的传递函数矩阵表示

将描述单输入单输出(SISO)系统的传递函数推广到多输入多输出(MIMO)系统，就可用传递函数矩阵来描述多变量系统



如图所示两变量系统，当初始条件为零时，Y_1=? Y_2=?

电路系统的机理建模（方块图）



写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$

传递函数矩阵

如图所示两变量系统，当初始条件为零时，可以用拉氏变换式表示：

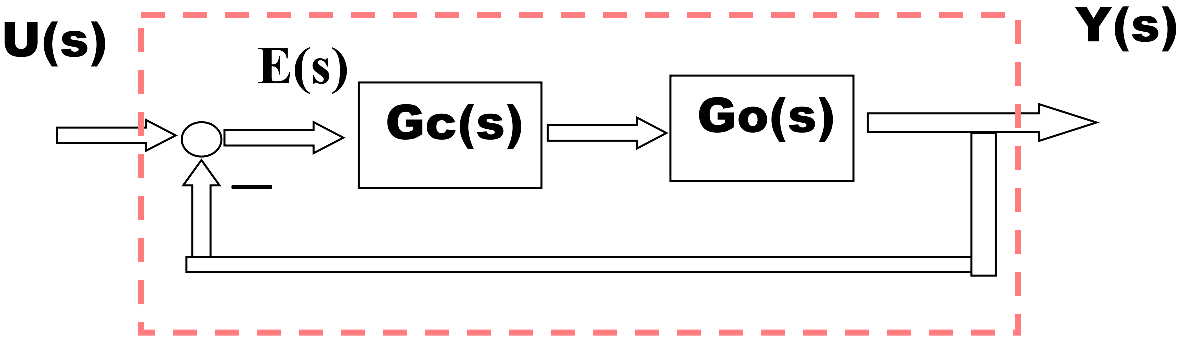
$$Y_1(s) = G_{11}(s)U_1(s) + G_{12}(s)U_2(s)$$
$$Y_2(s) = G_{21}(s)U_1(s) + G_{22}(s)U_2(s)$$

$$\boldsymbol{Y(s) = G(s) \cdot U(s)}$$

传递函数矩阵G(s)拓宽了传递函数的概念，它适用于r个输入、m个输出的系统，这时的G(s)为mxr维矩阵，其元素$G_{ij}(s)$表示第j个输入对象i个输出的传递函数。

电路系统的机理建模（方块图）

对于MIMO系统，在画方块图时，往往采用带箭头的双线表示信息流向



对于多变量系统的方块图运算，特别要注意乘法的前后次序不能颠倒

$$Y(s) = G(s)E(s) = G_0(s)G_c(s)E(s)$$

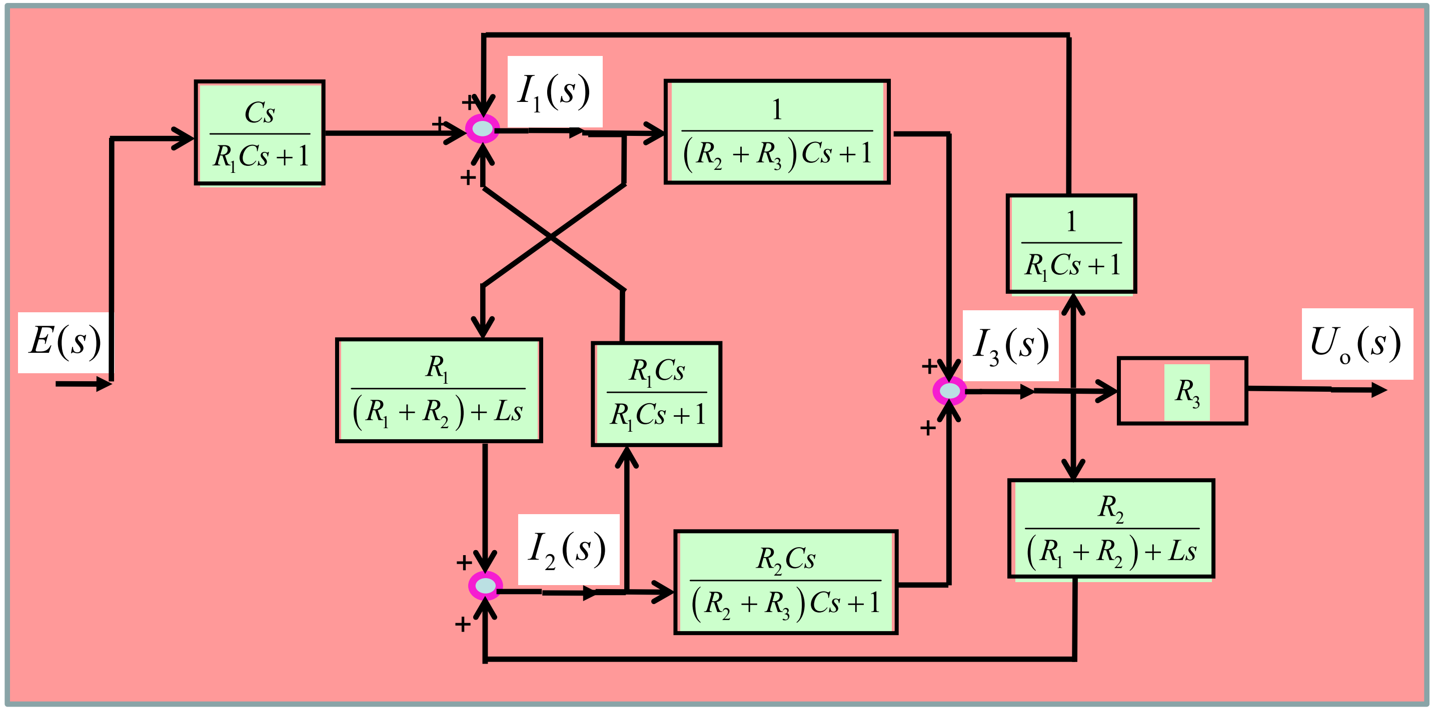
G(s)称为系统的开环传递函数矩阵

$$Y(s) = \Phi(s)U(s) = \left[I + G(s)\right]^{-1} G(s)U(s)$$

$$= G(s)\left[I + G(s)\right]^{-1} U(s)$$

Φ(s)称为系统的闭环传递函数矩阵

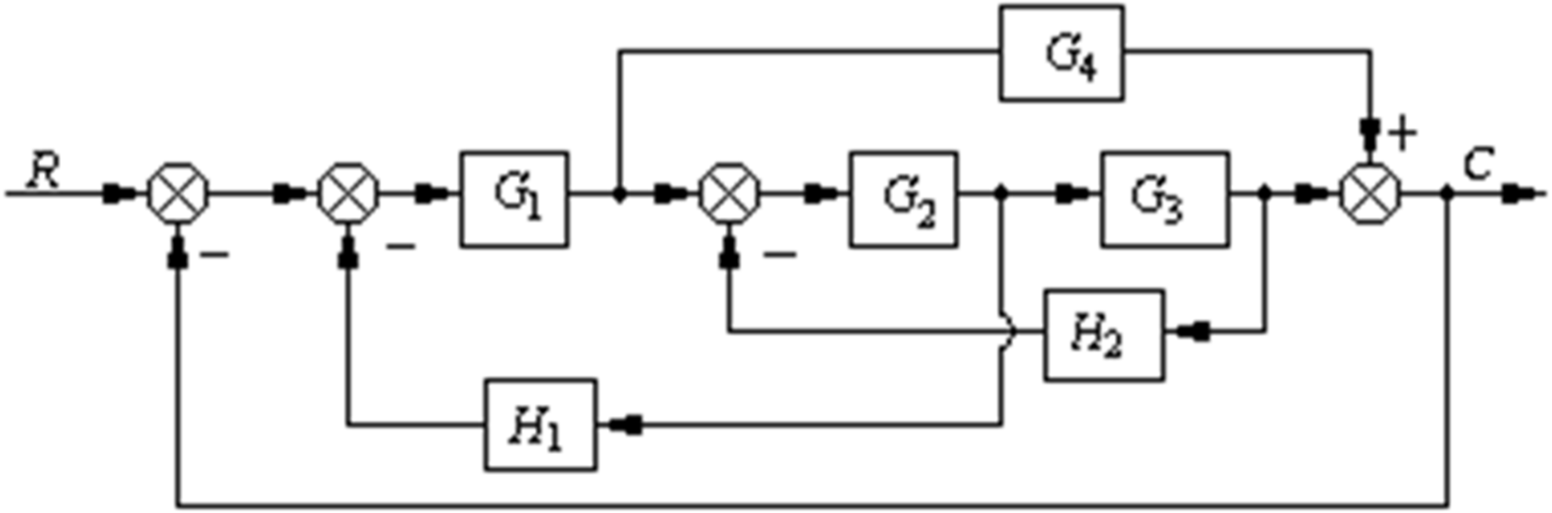
电路系统的机理建模（信号流图）



化简此方块图，几何方法比代数方法繁

几何方法和代数方法各擅胜场

电路系统的机理建模（信号流图）



需要研究系统化的代数方法

信号流图（SFG，Signal Flow Graph）
梅逊增益公式（简称梅逊公式）

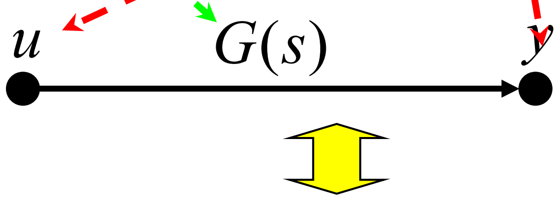
Samuel Jefferson Mason
（1921-1974）

Mason, Samuel J. (July 1956). "Feedback Theory - Further Properties of Signal Flow Graphs". *Proceedings of the IRE*: 920–926.

电路系统的机理建模（信号流图）

信号流图（SFG）定义

- 信号流图是由节点和支路组成的信号传递网络
  - 节点表示系统中的变量（信号）
  - 系统元件的传递函数可以由连接两个节点的有向支路表示。



$$y = G(s)u$$

•连接两个节点的支路相当于单向乘法器：方向由箭头表示；乘法运算因子（传递函数或增益）置于相应的支路上。

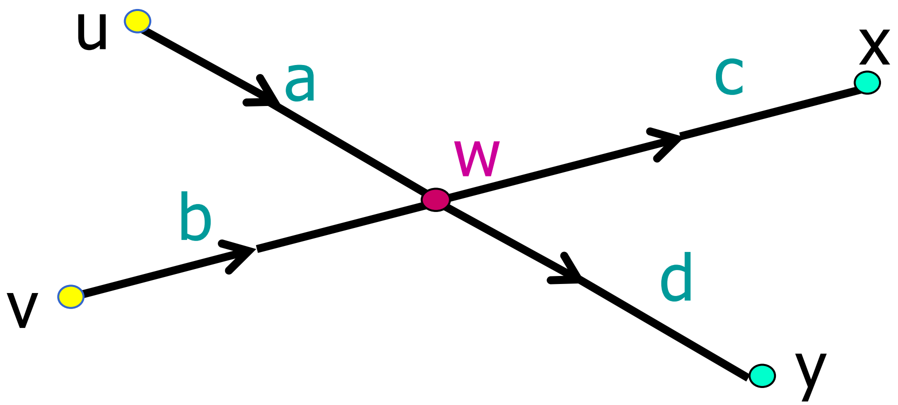
注意：增益可正可负

电路系统的机理建模（信号流图）

- 节点还具有两种作用：

  (1)　对所有来自于流入支路的信号作加法运算

  (2)　将流入信号之和传输给所有的流出支路



$$w = au + bv$$

$$x = cw = c(au + bv)$$

$$y = dw = d(au + bv)$$

- 因此，可以利用 **SFG** 表示输入输出关系

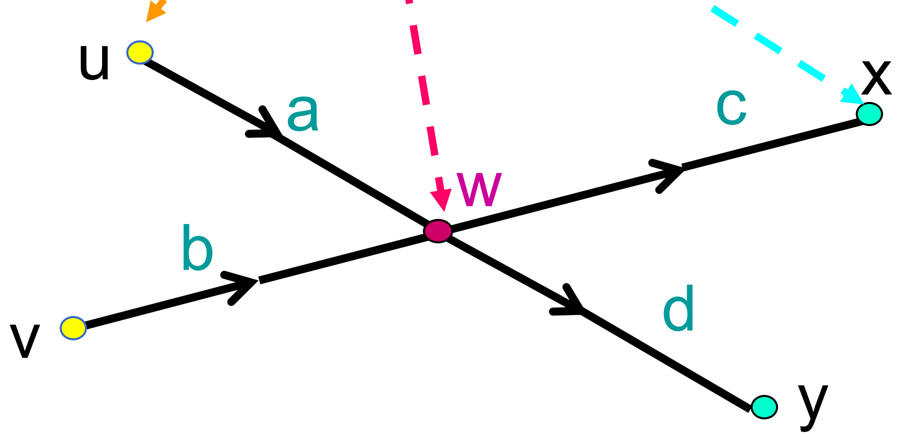
电路系统的机理建模（信号流图）

- 节点有三种类型

  (1) 源节点 （独立节点、输入节点）：仅有流出支路

  (2) 阱节点 （非独立节点、输出节点）：仅有流入支路

  (3) 混合节点 （一般节点）



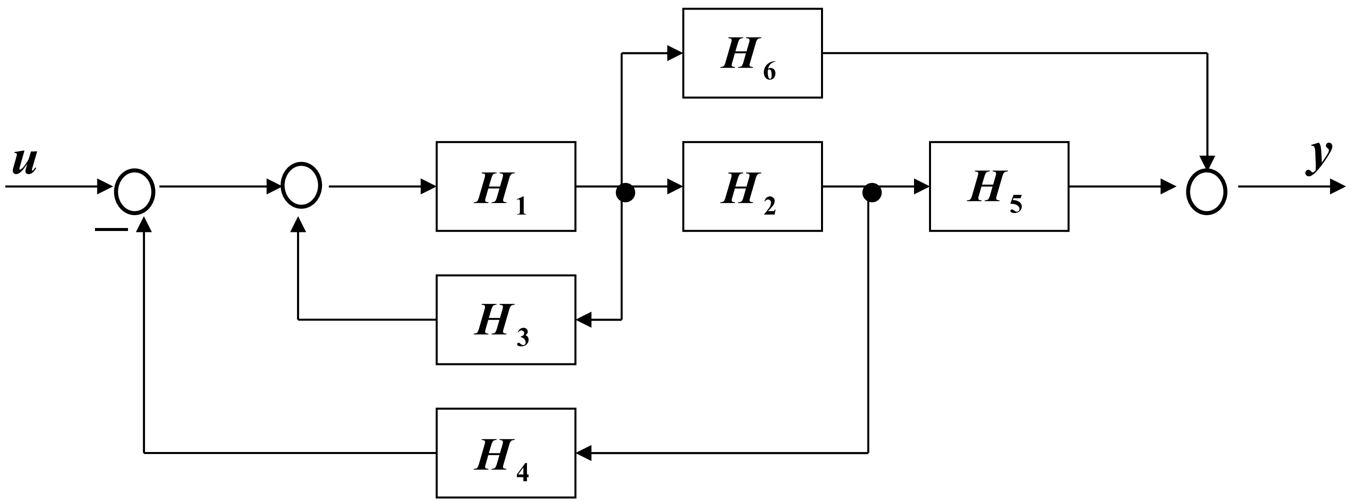
电路系统的机理建模（信号流图）

结构图：　输入 → 相加点 / 引出点 / 信号线 → 方框 → 输出

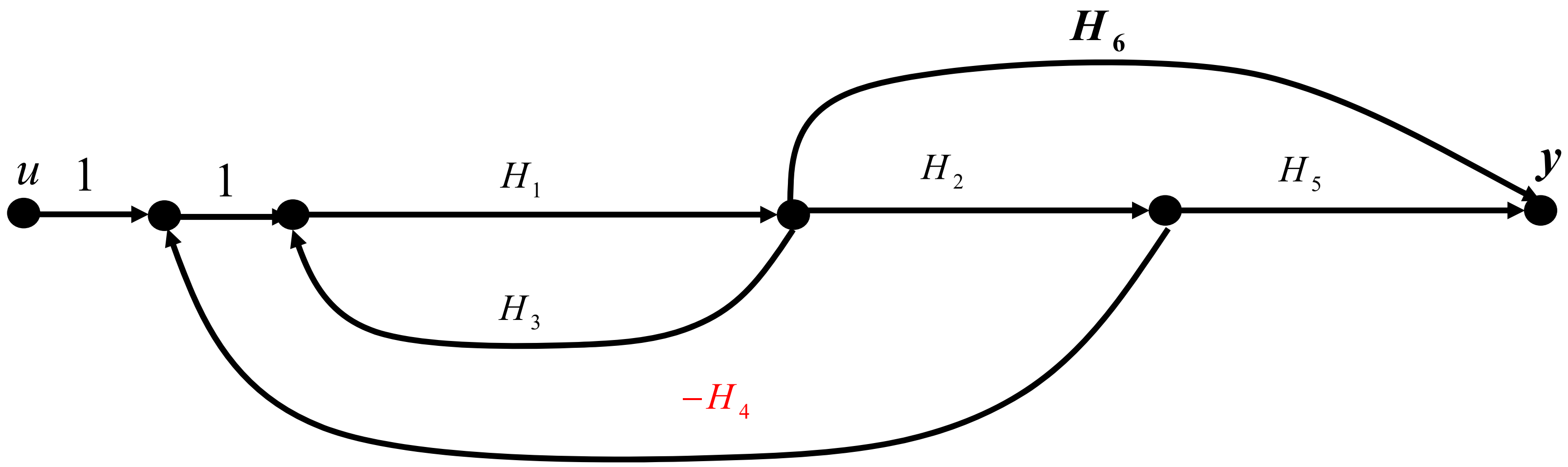
信号流图：　源节点 → 混合节点 → 支路 → 阱节点

电路系统的机理建模（信号流图）

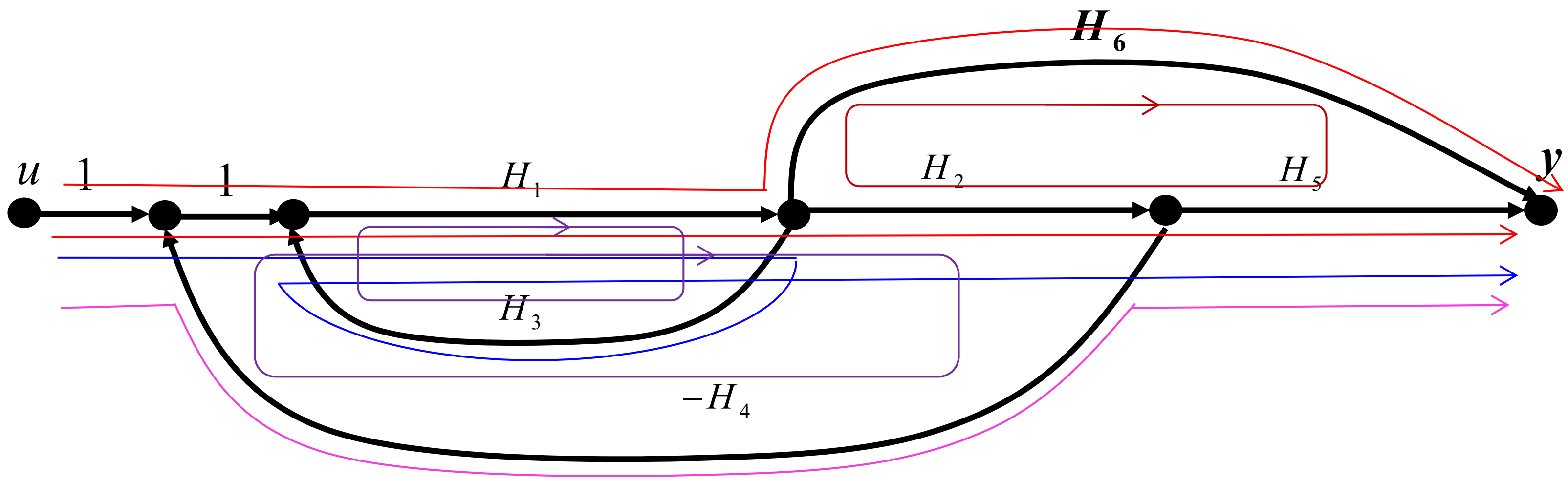
例：试用信号流图表示如下系统



解：



电路系统的机理建模（信号流图）



前向通路：从源节点到阱节点的一条可循箭头方向走通的有向路径，该路径与其上的节点相交不多于一次

前向通路增益：前向通路中各支路增益的乘积

回路：一条可循箭头方向走通的闭合有向路径，该路径与其上的节点相交不多于一次

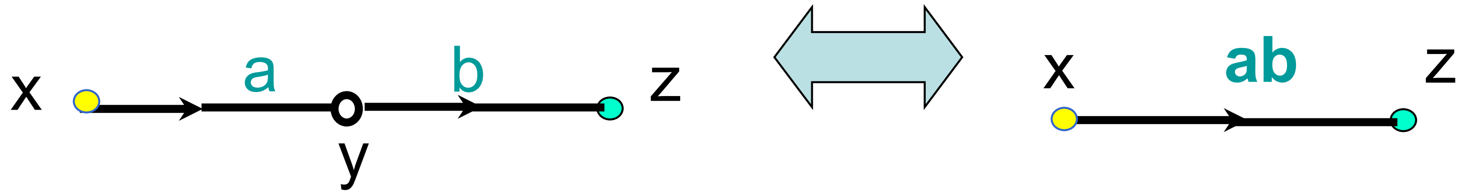
回路增益：回路中各支路增益的乘积

电路系统的机理建模（信号流图）

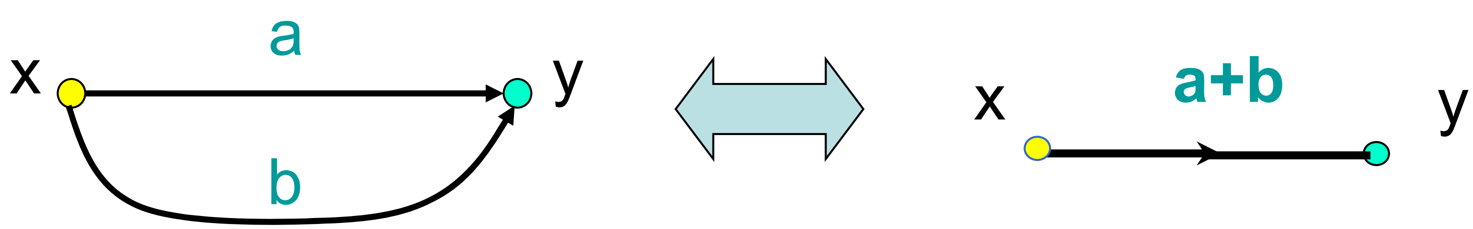
信号流图（SFG）的若干变换

- **串联通路**

原始图 等效图

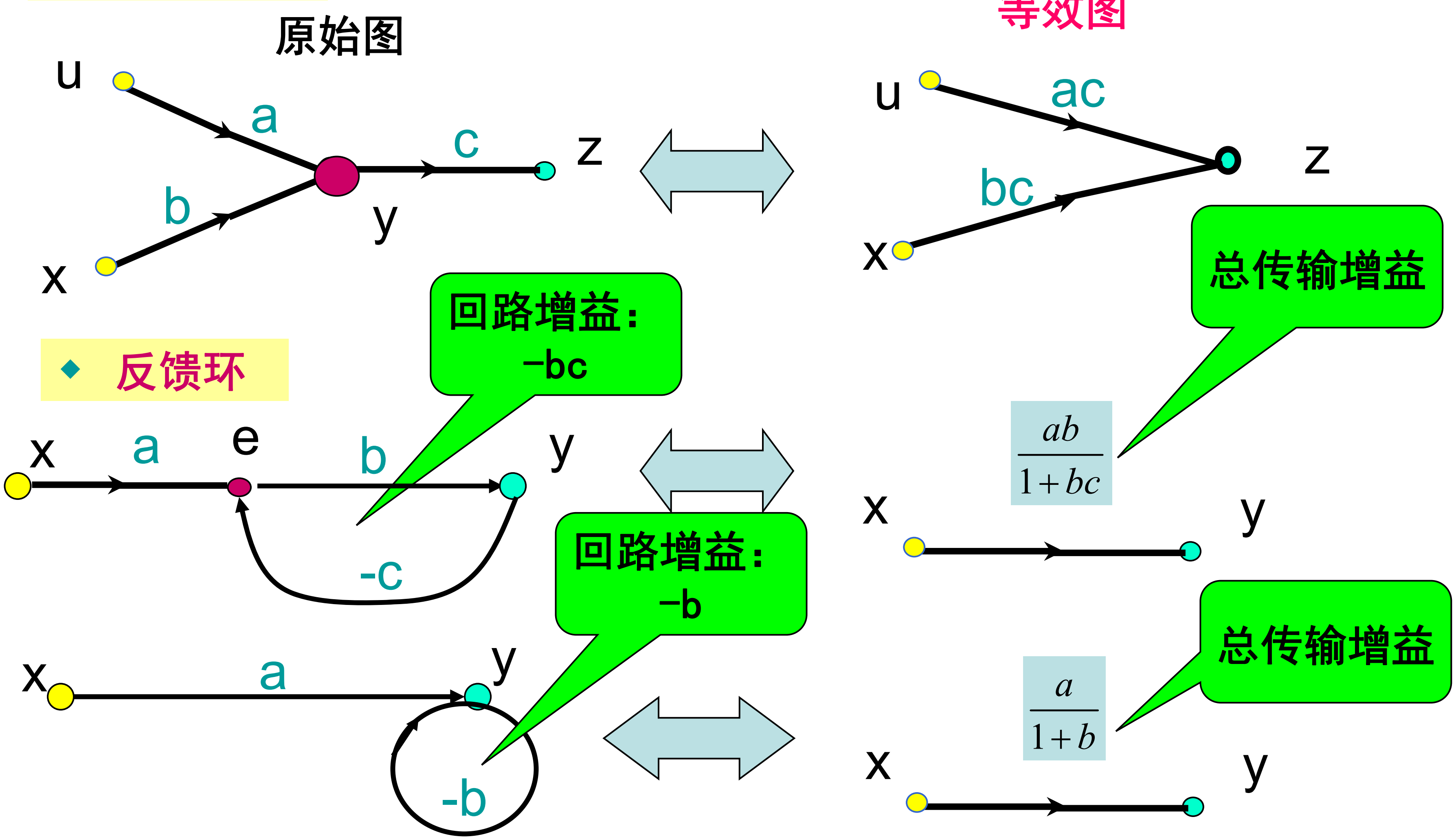


- **并联通路**



电路系统的机理建模（信号流图）

- 节点消除
- 反馈环



回路增益相当于开环传函，总传输增益相当于从输入到输出的传递函数

电路系统的机理建模（信号流图）

◆ 反馈环

$$C = GE$$
$$B = HC$$
$$E = R - B$$

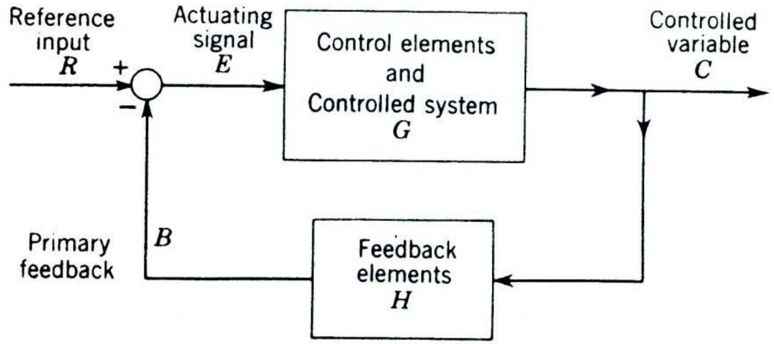


FIGURE 5.6
Block diagram of a feedback system.

$$C = \frac{G}{1+GH} R$$

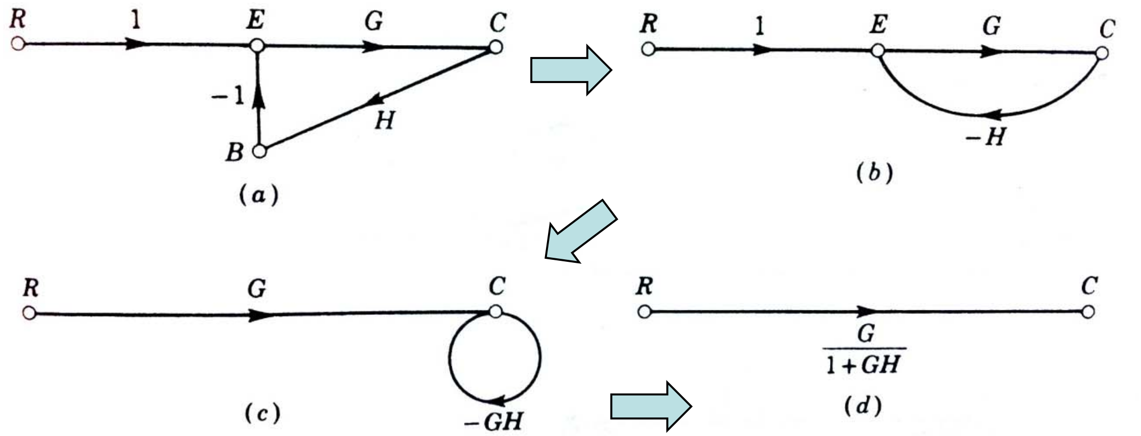
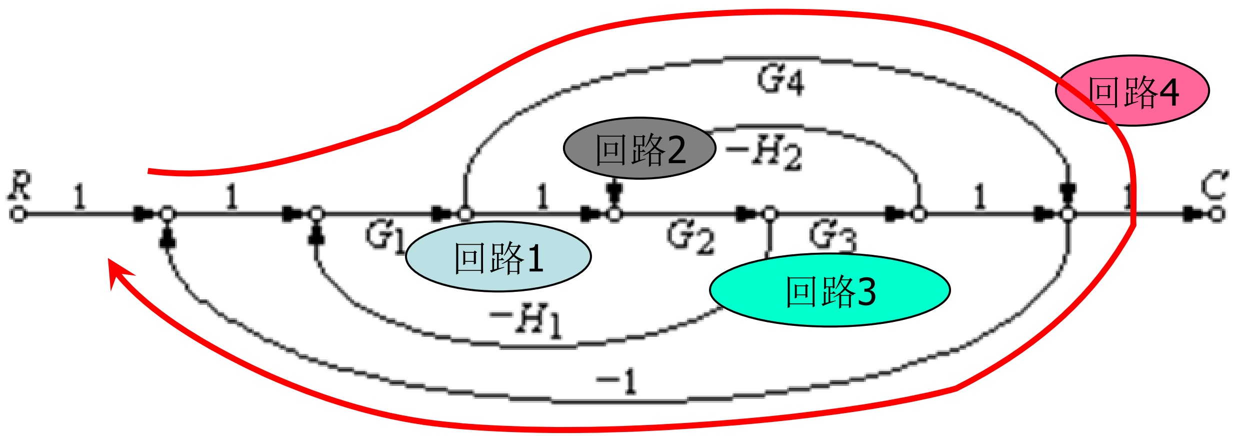


FIGURE 5.24
Successive reduction of the flow graph for the feedback system of Fig. 5.6.

电路系统的机理建模（信号流图）

梅逊增益公式

一个信号流图中的2个回路没有任何公共节点，则称这2个回路**不接触**，反之称这2个回路**接触**



回路2与回路4不接触
其它任意2个回路接触

$\sum L_1$ ： 所有不同回路的回路增益之和

$\sum L_2$ ： 每两个互不接触回路的回路增益乘积之和

$\sum L_3$ ： 每三个互不接触回路的回路增益乘积之和

………

信号流图的**特征式**

$$\Delta = 1 - \sum L_1 + \sum L_2 - \sum L_3 + \cdots\cdots$$

电路系统的机理建模（信号流图）

n　从源节点到阱节点所有前向通路的条数

T_i　从源节点到阱节点的第i条前向通路的增益

一个信号流图中的1个回路和1条前向通路没有任何公共节点，则称它们不接触，反之称它们接触

Δ_i　在Δ中，将与第i条前向通路相接触的回路的增益置0后所得到的结果，称为余子式

T　从源节点到阱节点的总传输增益

梅逊增益公式

$$T = \frac{1}{\Delta}\sum_{i}^{n} T_i \Delta_i$$

$$\Delta = 1 - \sum L_1 + \sum L_2 - \sum L_3 + \cdots\cdots$$

注意：当前向通道接触所有的回路时，Δ_i　等于　1

电路系统的机理建模（信号流图）

信号流图（SFG）分析

- 一般地，任意复杂系统的 SFG 如图 a 所示。

  （注意，所有的源节点在系统框图左边，而所有的阱节点在系统框图右边）

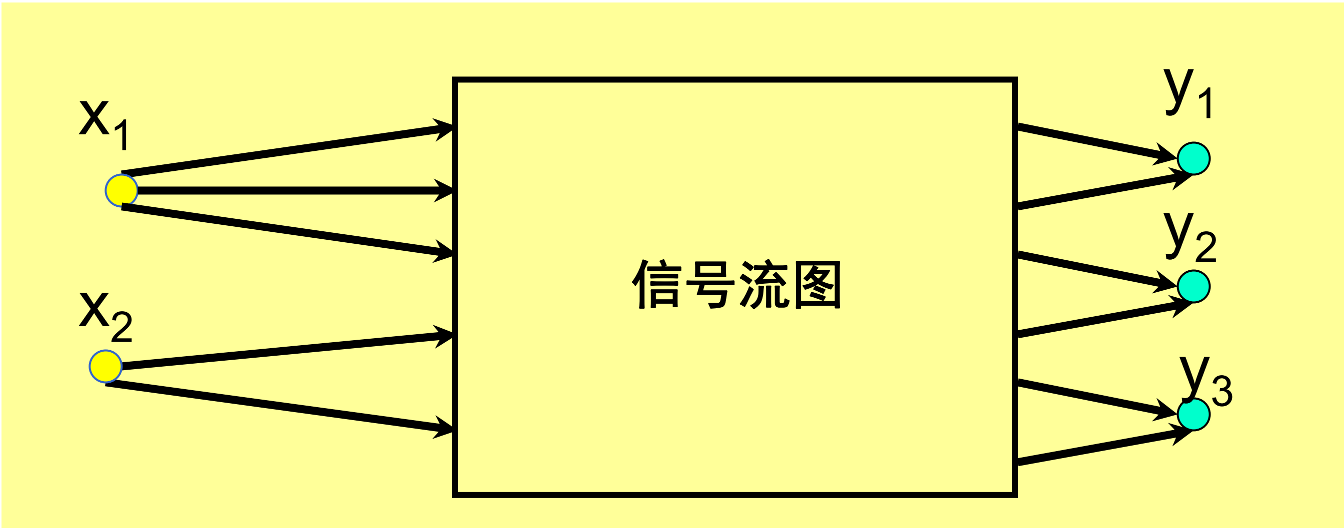
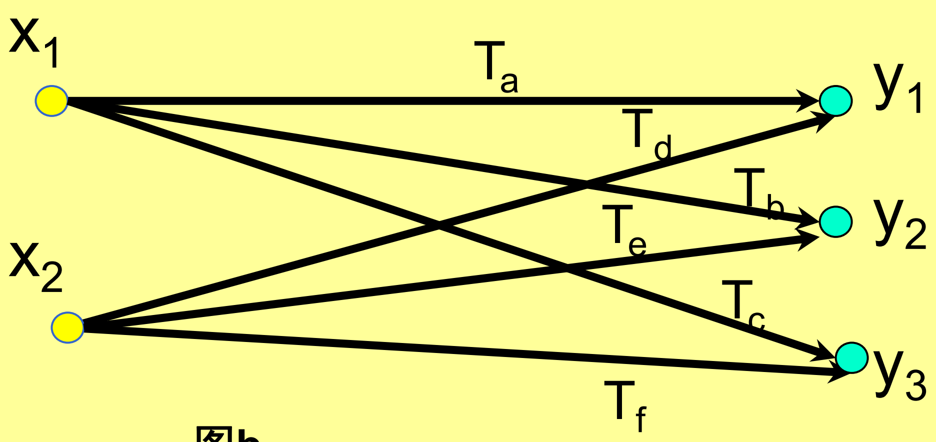


图 a

电路系统的机理建模（信号流图）

- 内部节点的作用效果可以通过梅逊增益公式求出T_a, T_b, T_c, T_d, T_e 和T_f，从而得到如图 b 所示的等效图



图b

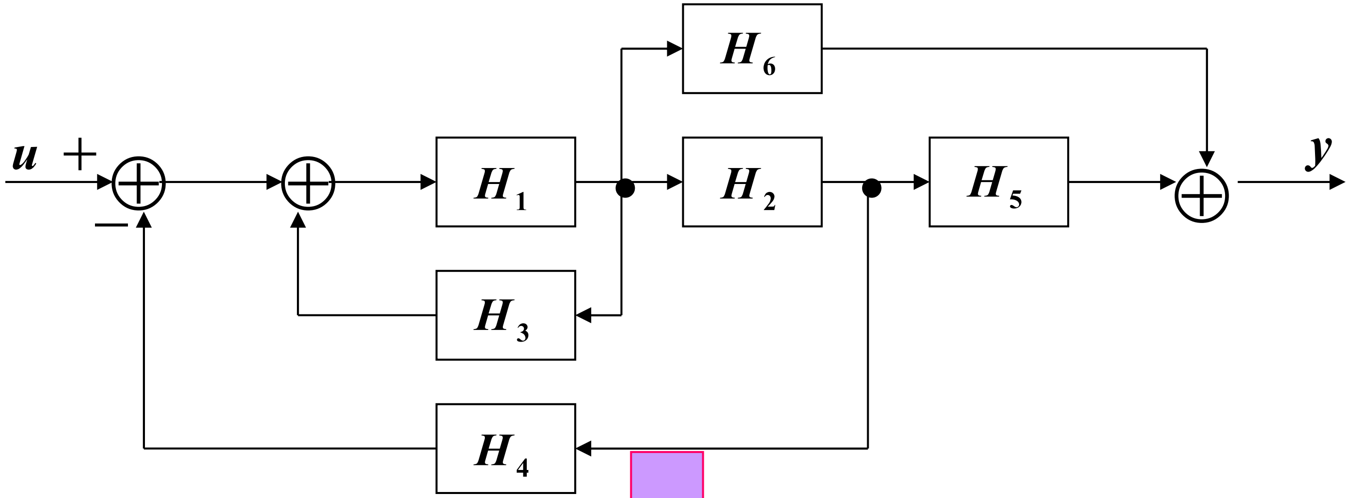
$$y_1 = T_a x_1 + T_d x_2$$

$$y_2 = T_b x_1 + T_e x_2$$

$$y_3 = T_c x_1 + T_f x_2$$

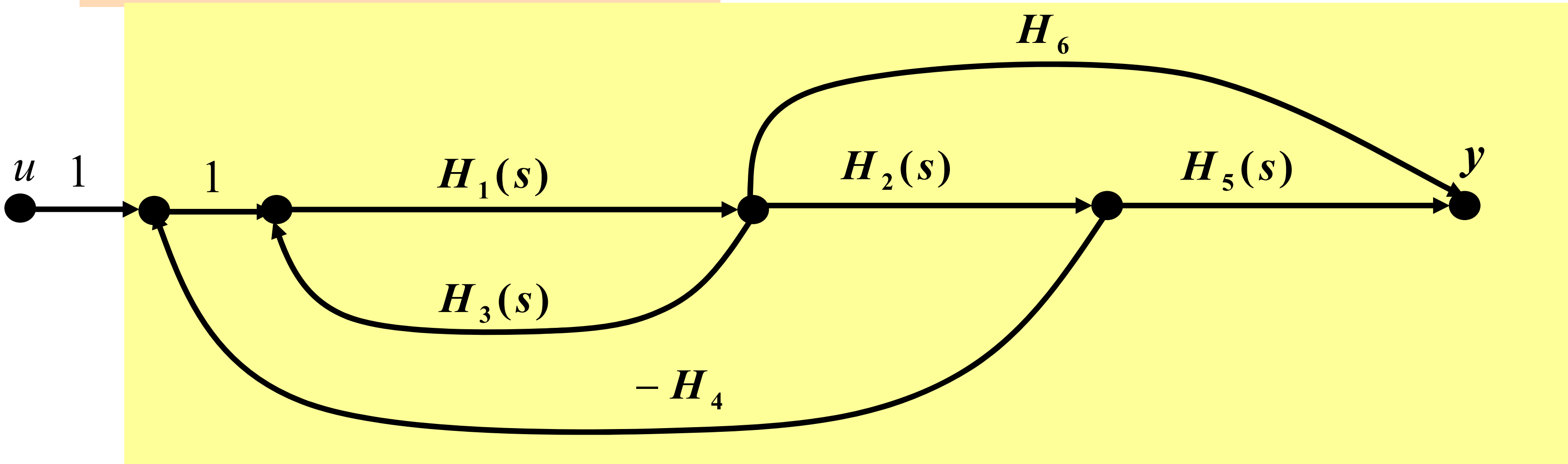
梅逊增益公式：例1

例：求取如下图所示系统中从u到y的传递函数

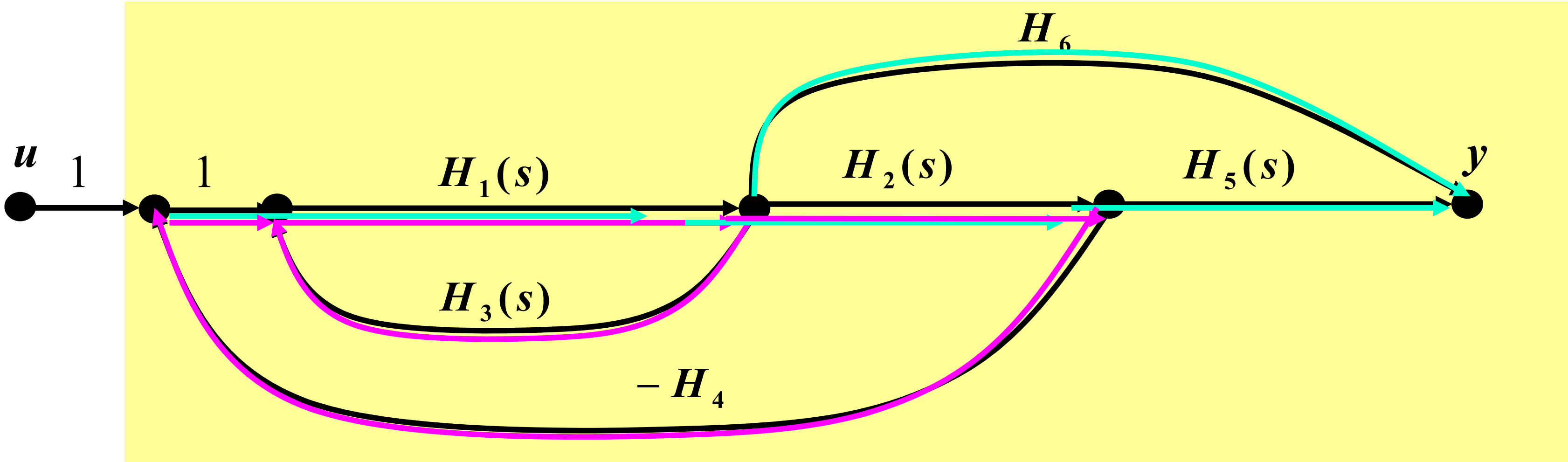


解：

系统的信号流图如下图所示



梅逊增益公式：例1



步骤 1： 确定回路增益

回路 1： $H_1(s)H_3(s)$

回路 2： $-H_1(s)H_2(s)H_4(s)$

步骤 2： 确定特征式

回路1与回路2接触 $\Sigma L_2 = \Sigma L_3 = \cdots = 0$

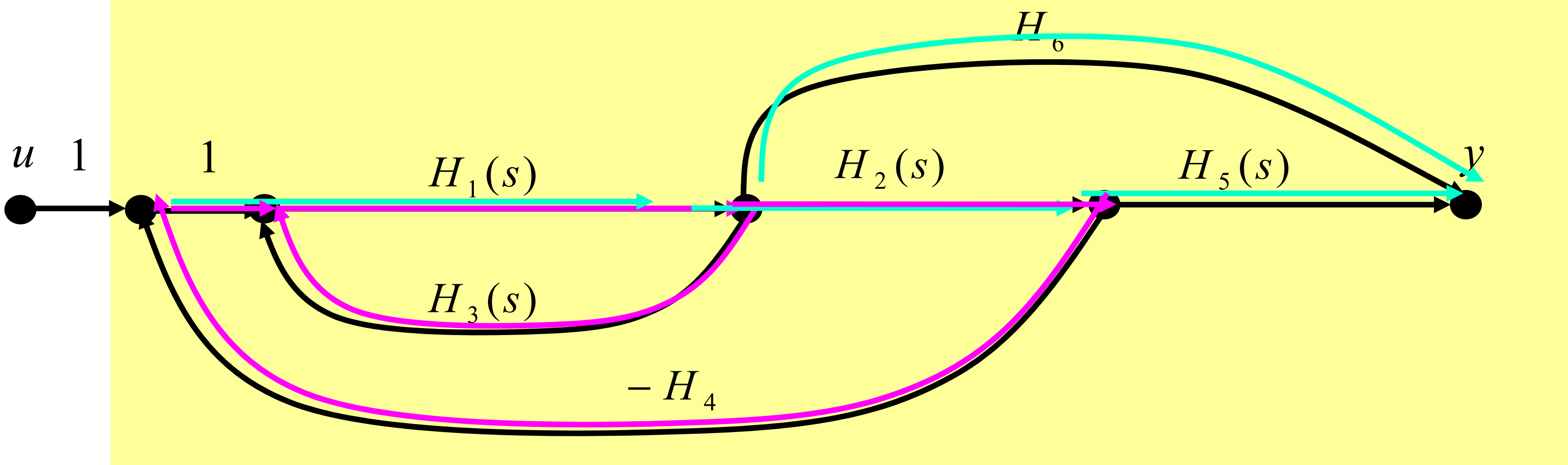
$$\Delta = 1 - \Sigma L_1$$
$$= 1 - H_1(s)H_3(s) + H_1(s)H_2(s)H_4(s)$$

步骤 3： 确定从节点 *u* 到节点 *y* 的前向通道增益

通道 1： $T_1(s) = H_1(s)H_2(s)H_5(s)$

通道 2： $T_2(s) = H_1(s)H_6(s)$

梅逊增益公式：例1



步骤 4：计算Δ_1，确定与通道 1 不接触的回路——无， $\Delta_1 = 1$

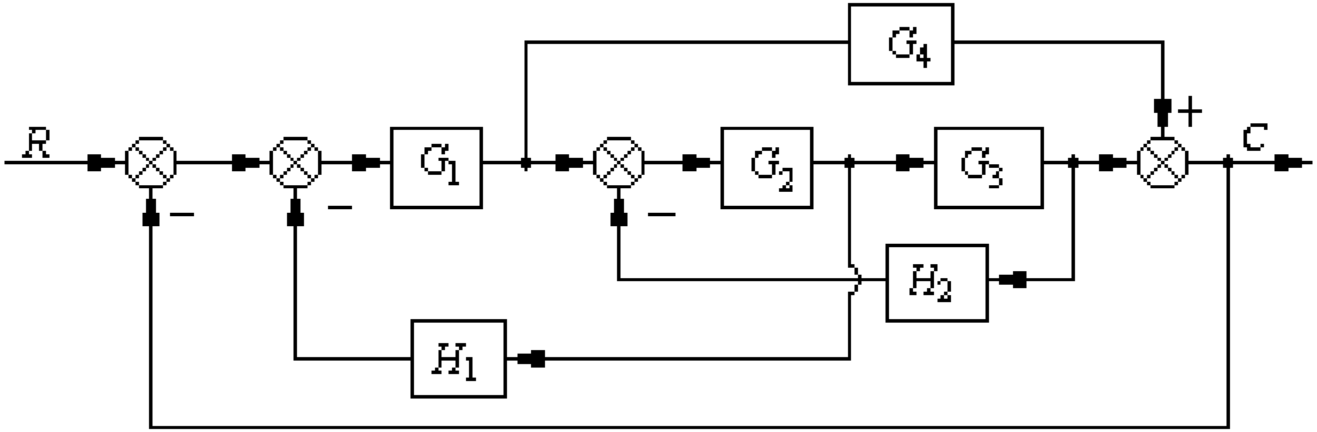
步骤 5：计算Δ_2，确定与通道 2 不接触的回路——无， $\Delta_2 = 1$

步骤 6：利用**梅逊公式**得到传递函数

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{\Delta}\left(T_1\Delta_1 + T_2\Delta_2\right) = \frac{H_1H_2H_5 + H_1H_6}{1 - H_1H_3 + H_1H_2H_4}$$

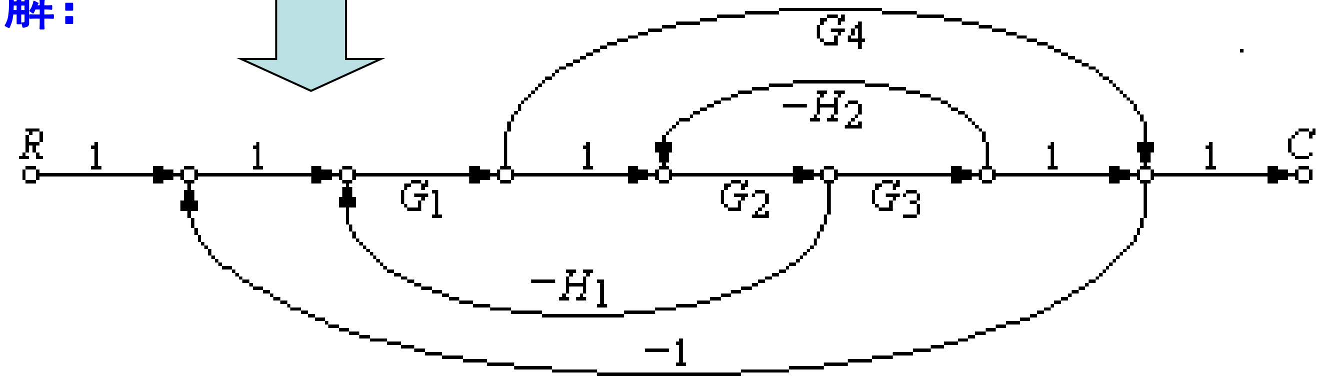
梅逊增益公式：例2

例 ： 求取如图(a)所示系统的整体传递函数。



(a) 结构图

解：



(b) 信号流图

梅逊增益公式：例2

步骤 1: 确定回路增益

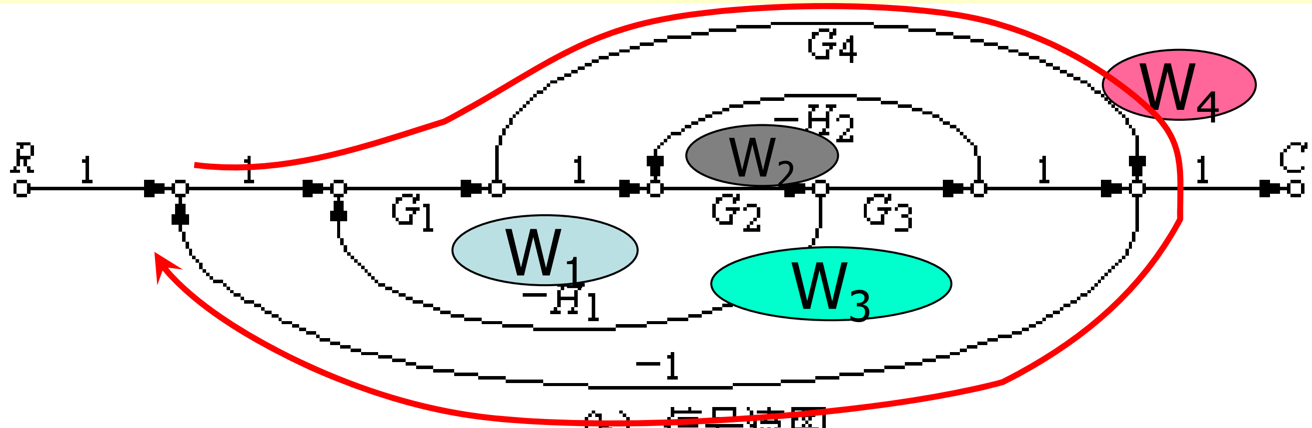
有4个回路：$W_1= -G_1G_2H_1$，$W_2= -G_2G_3H_2$
$W_3= -G_1G_2G_3$，$W_4= -G_1G_4$

其中只有 W_2 和 W_4 不接触，$\Sigma L_2=(-G_2G_3H_2)(-G_1G_4)$

步骤 2: 计算系统流图特征式

$D=1- \Sigma L_1 + \Sigma L_2$

$=1+G_1G_2H_1+G_2G_3H_2+G_1G_2G_3+G_1G_4+G_1G_2G_3G_4H_2$



(b) 信号流图

梅逊增益公式：例2

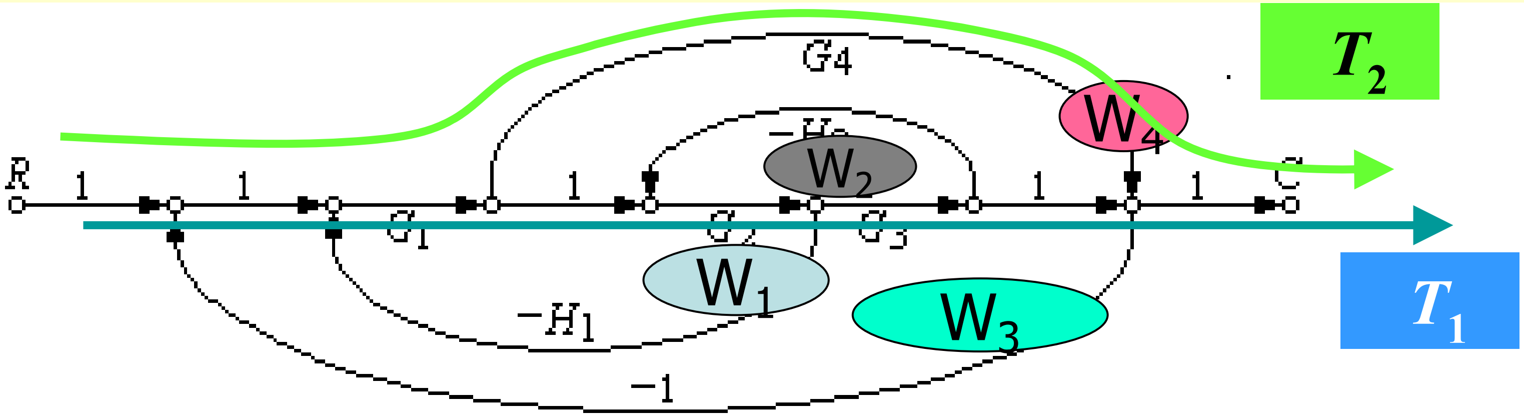
步骤 3: 确定从节点 *R* 到节点 *C* 的前向通道增益

有 2 条前向通道，n=2

$T_1=G_1G_2G_3$，它接触所有回路，于是$\Delta_1=1$

$T_2=G_1G_4$，它与回路 2 不接触，$W_2= -G_2G_3H_2$，于是

$$\Delta_2= 1-W_2=1+ G_2G_3H_2$$



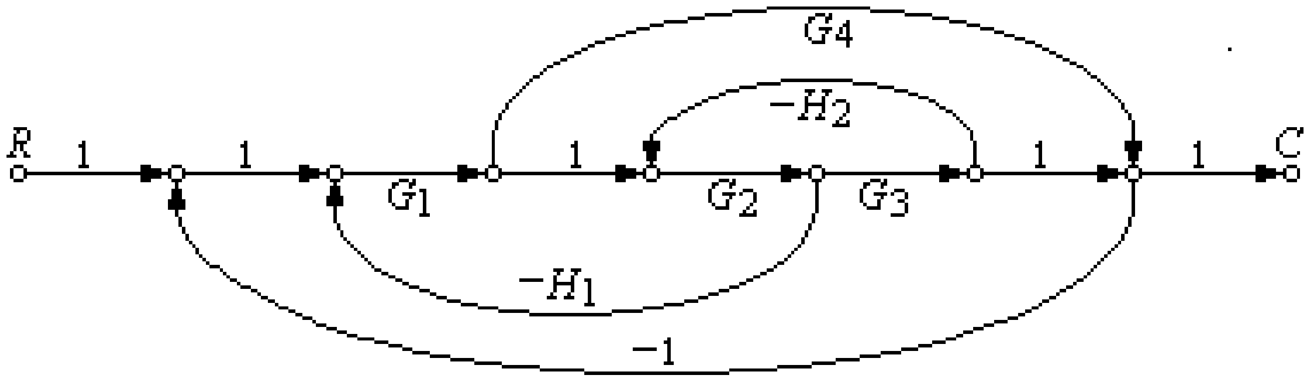
(b) 信号流图

梅逊增益公式：例2

步骤 4: 利用梅逊公式得到系统整体传递函数

$$\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{1}{\Delta}(T_1\Delta_1+T_2\Delta_2)$$

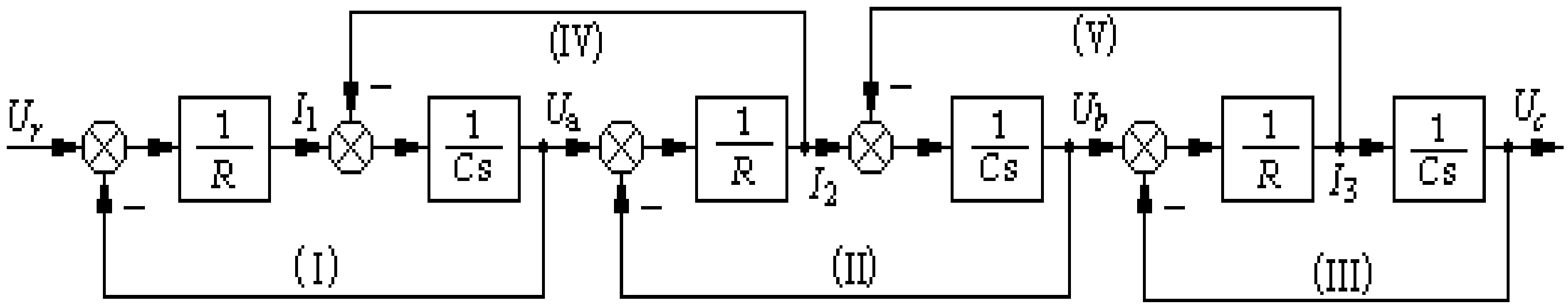
$$=\frac{G_1G_2G_3+G_1G_4(1+G_2G_3H_2)}{1+G_1G_2H_1+G_2G_3H_2+G_1G_2G_3+G_1G_4+G_1G_2G_3G_4H_2}$$



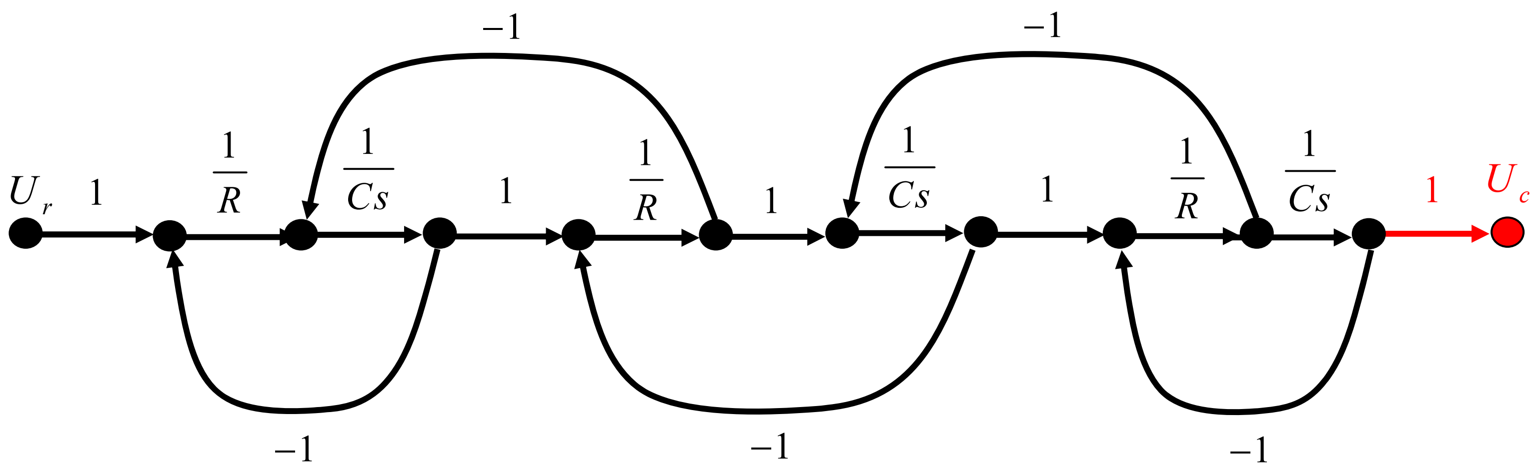
(b) 信号流图

梅逊增益公式：例3

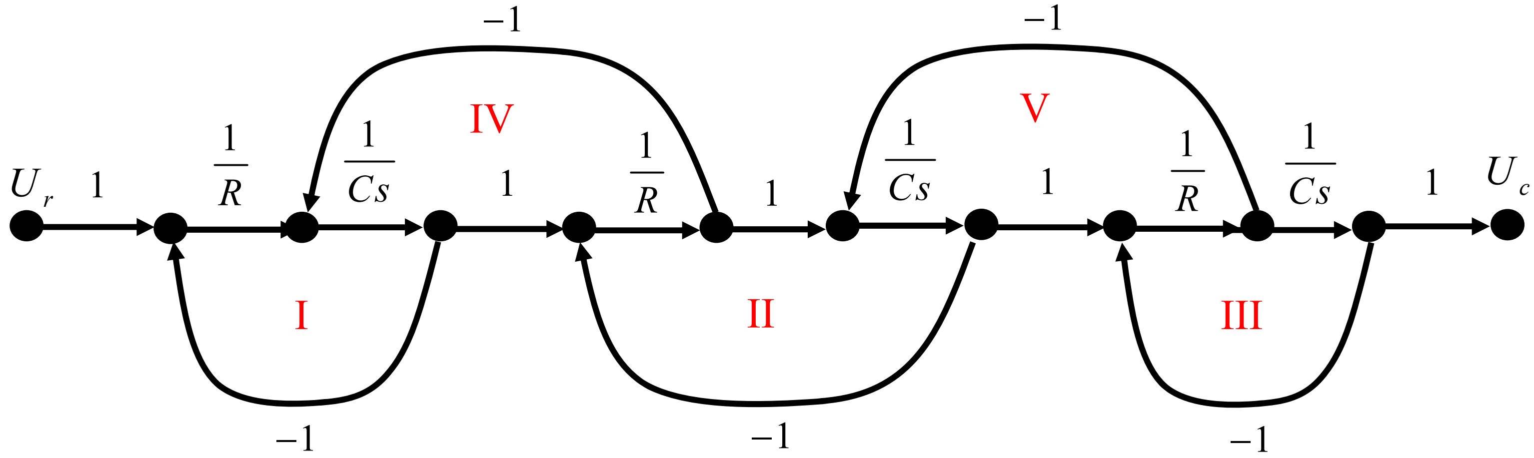
例：针对如下图所示系统，求取U_c/U_r



解：



梅逊增益公式：例3



5 个回路

$$W_1 = W_2 = \cdots = W_5 = -\frac{1}{RCs}$$

$$\sum L_1 = -\frac{5}{RCs}$$

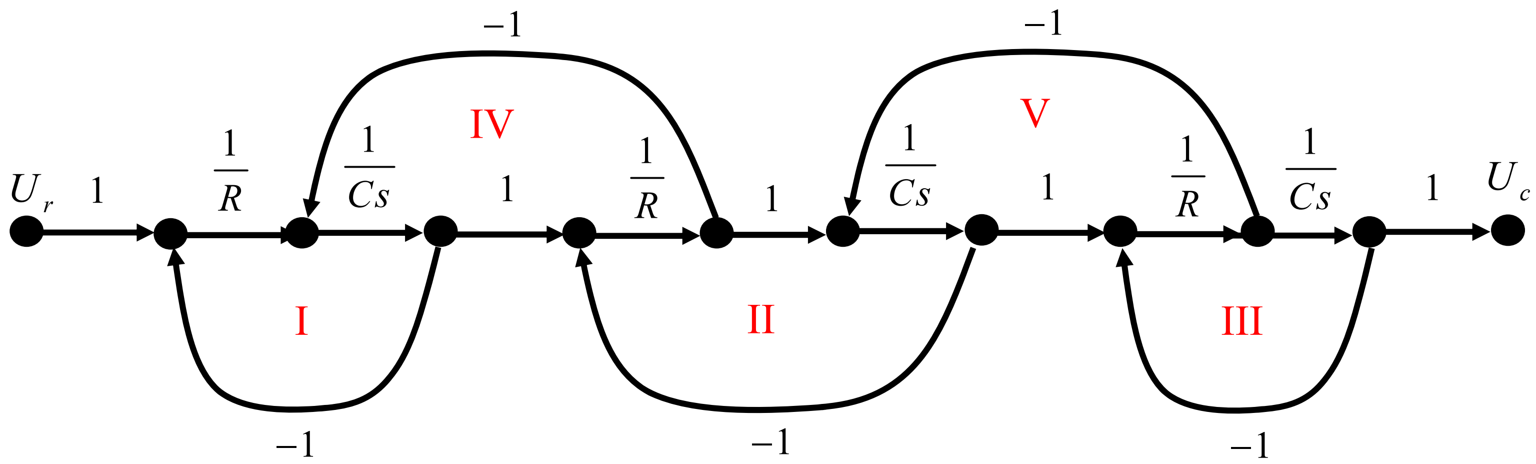
6 组两两互不接触回路， Ⅰ-Ⅱ、Ⅰ-Ⅲ、Ⅰ-Ⅴ、Ⅱ-Ⅲ、Ⅲ-Ⅳ 及 Ⅳ-Ⅴ

$$\sum L_2 = 6\left(-\frac{1}{RCs}\right)\left(-\frac{1}{RCs}\right) = \frac{6}{R^2C^2s^2}$$

1组三个互不接触的回路， Ⅰ-Ⅱ-Ⅲ

$$\sum L_3 = \left(-\frac{1}{RCs}\right)\left(-\frac{1}{RCs}\right)\left(-\frac{1}{RCs}\right) = -\frac{1}{R^3C^3s^3}$$

梅逊增益公式：例3



$$\Delta = 1 - \sum L_1 + \sum L_2 - \sum L_3 = 1 + \frac{5}{RCs} + \frac{6}{R^2C^2s^2} + \frac{1}{R^3C^3s^3}$$

1 条前向通道，n=1 $T_1 = \dfrac{1}{R^3C^3s^3}$ **该前向通道接触所有回路，Δ_1=1**

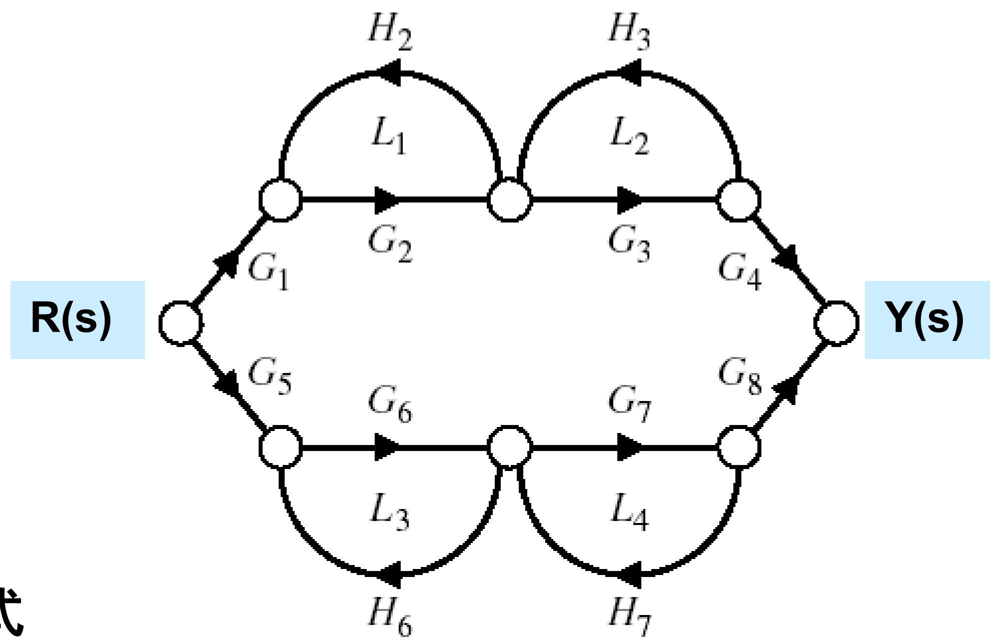
$$\frac{U_c(s)}{U_r(s)} = \frac{T_1\Delta_1}{\Delta} = \frac{\dfrac{1}{R^3C^3s^3}}{1 + \dfrac{5}{RCs} + \dfrac{6}{R^2C^2s^2} + \dfrac{1}{R^3C^3s^3}} = \frac{1}{R^3C^3s^3 + 5R^2C^2s^2 + 6RCs + 1}$$

梅逊增益公式：例4

例 4: 针对如下图所示系统，求解 Y(s)/R(s)。

解：步骤 1: 确定回路增益

共有 4 条反馈回路：L_1, L_2, L_3 和 L_4；以及 4 组两两互不接触的回路：L_1L_3, L_1L_4, L_2L_3 和 L_2L_4；没有互不接触的 3 个回路。



步骤 2: 确定系统信号流图特征式

$$\Delta(s) = 1 - L_1 - L_2 - L_3 - L_4 + L_1L_3 + L_1L_4 + L_2L_3 + L_2H_4$$

梅逊增益公式：例4

例 4: 针对如下图所示系统，求解 Y(s)/R(s)。

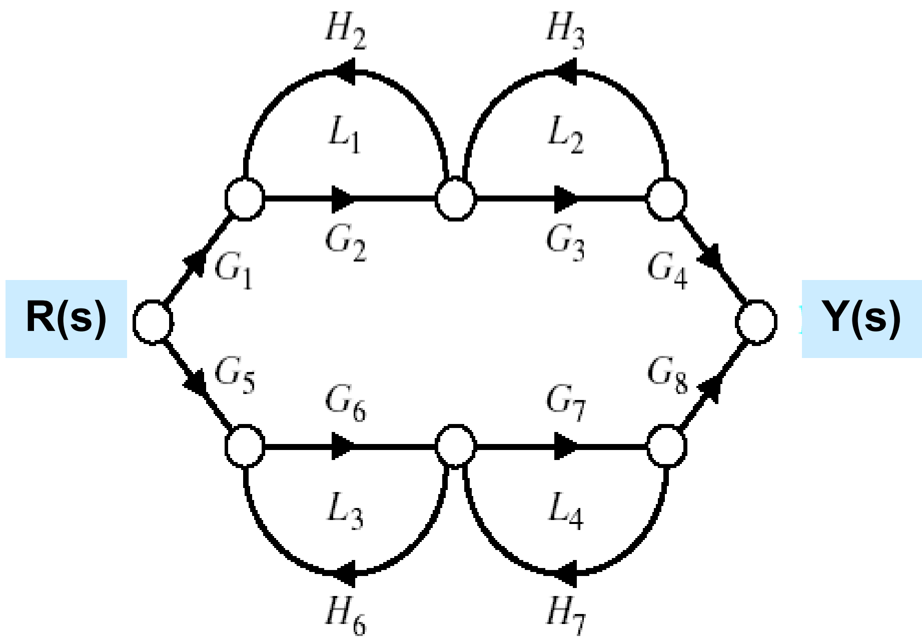
步骤 3: 确定前向通道增益

n=2: $P_1=G_1G_2G_3G_4$,

该前向通道与 L_3 和 L_4 不接触，因此有$\Delta_1=1-L_3-L_4$

$P_2=G_5G_6G_7G_8$,

该前向通道与 L_1 和 L_2 不接触，因此有$\Delta_2=1-L_1-L_2$



Two-path interacting system.

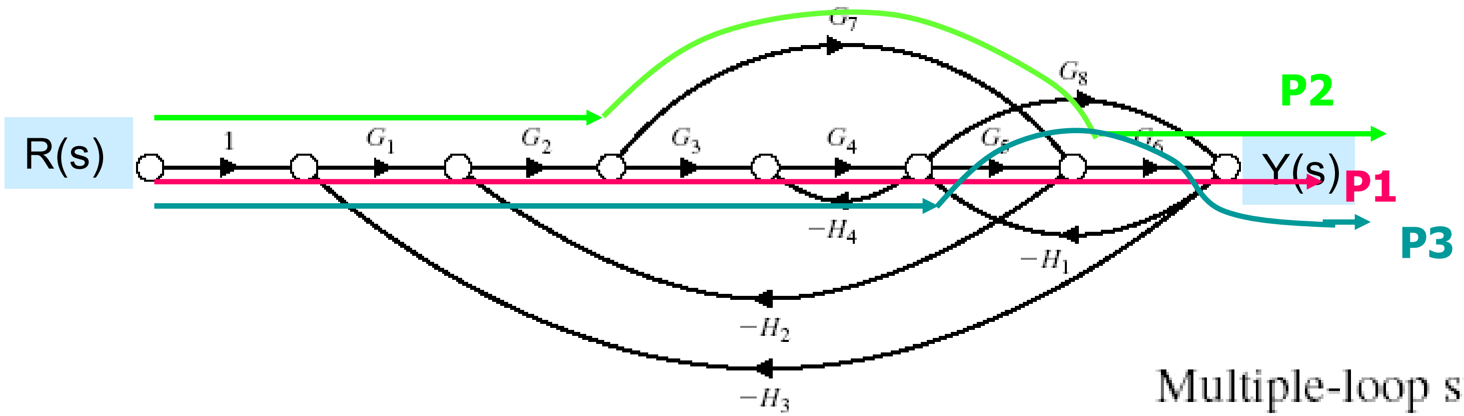
步骤 4: 得到系统整体传递函数

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{\left[G_1\cdot G_2\cdot G_3\cdot G_4\cdot\left(1-L_3-L_4\right)\right]+\left[G_5\cdot G_6\cdot G_7\cdot G_8\cdot\left(1-L_1-L_2\right)\right]}{1-L_1-L_2-L_3-L_4+L_1\cdot L_3+L_1\cdot L_4+L_2\cdot L_3+L_2\cdot L_4}$$

梅逊增益公式：例5

例 5: 针对如下图所示系统，求解 **Y(s)/R(s)**。

解:



Multiple-loop system.

步骤 1: 确定从 ***r*** 到 ***y*** 的前向通道增益

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{P_1 + P_2 \cdot \Delta_2 + P_3}{\Delta}$$

共有 3 条前向通道:

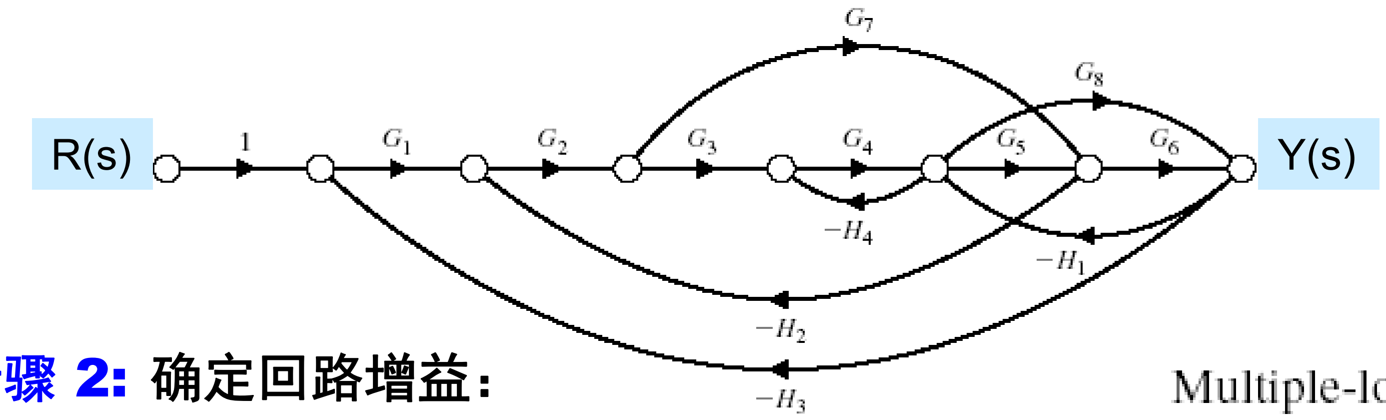
$P_1 = G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 \cdot G_4 \cdot G_5 \cdot G_6$ $P_2 = G_1 \cdot G_2 \cdot G_7 \cdot G_6$ $P_3 = G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 \cdot G_4 \cdot G_8$

$$\Delta = 1 - \left(L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + L_6 + L_7 + L_8\right) + \left(L_5 \cdot L_7 + L_5 \cdot L_4 + L_3 \cdot L_4\right)$$

$\Delta_1 = \Delta_3 = 1$ $\Delta_2 = 1 - L_5 = 1 + G_4 \cdot H_4$

梅逊增益公式：例5

例 5: 针对如下图所示系统，求解 **Y(s)/R(s)**。



Multiple-loop system.

步骤 2: 确定回路增益：

共有 **8** 个回路，回路增益分别是：

$L_1=-G_{123456}H_3$

$L_2=-G_{2345}H_2$

$L_3=-G_8H_1$

$L_4=-G_{27}H_2$

$L_5=-G_4H_4$

$L_6=-G_{12348}H_3$

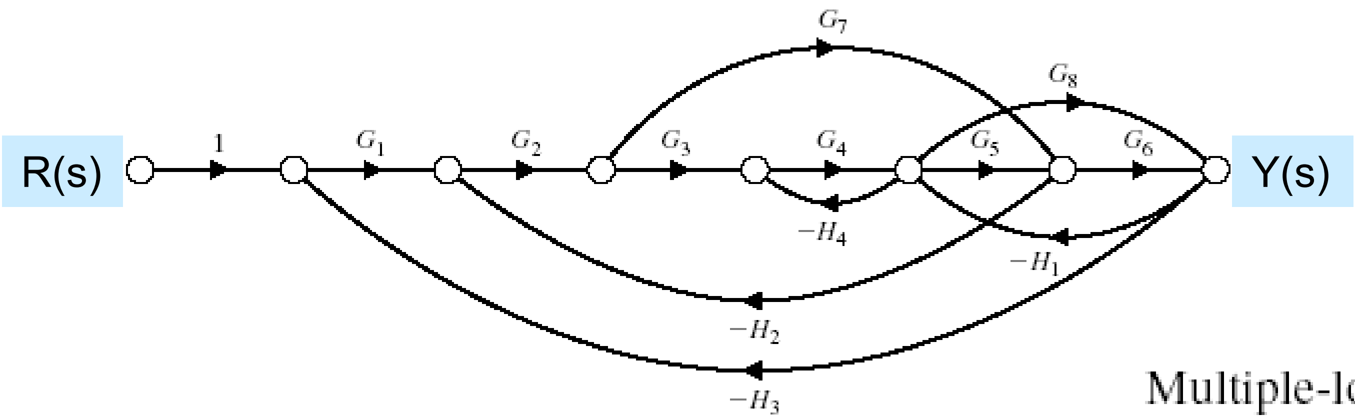
$L_7=-\ G_{1276}H_3$

$L_8=-G_{56}H_1$

还有 **3** 组两两互不接触的回路：L_4L_5, L_5L_7, L_4L_3

梅逊增益公式：例5

例 5: 针对如下图所示系统，求解 **Y(s)/R(s)**。



Multiple-loop system.

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{P_1 + P_2 \cdot \Delta_2 + P_3}{\Delta}$$

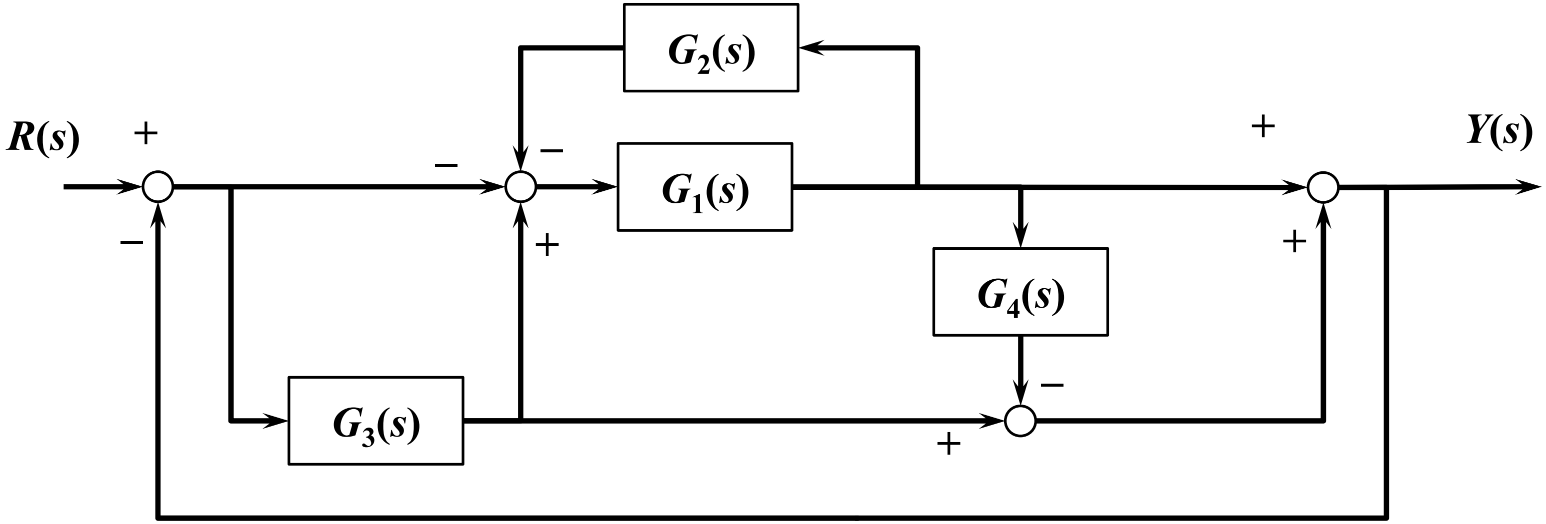
$P_1 = G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 \cdot G_4 \cdot G_5 \cdot G_6$ $\quad$ $P_2 = G_1 \cdot G_2 \cdot G_7 \cdot G_6$ $\quad$ $P_3 = G_1 \cdot G_2 \cdot G_3 \cdot G_4 \cdot G_8$

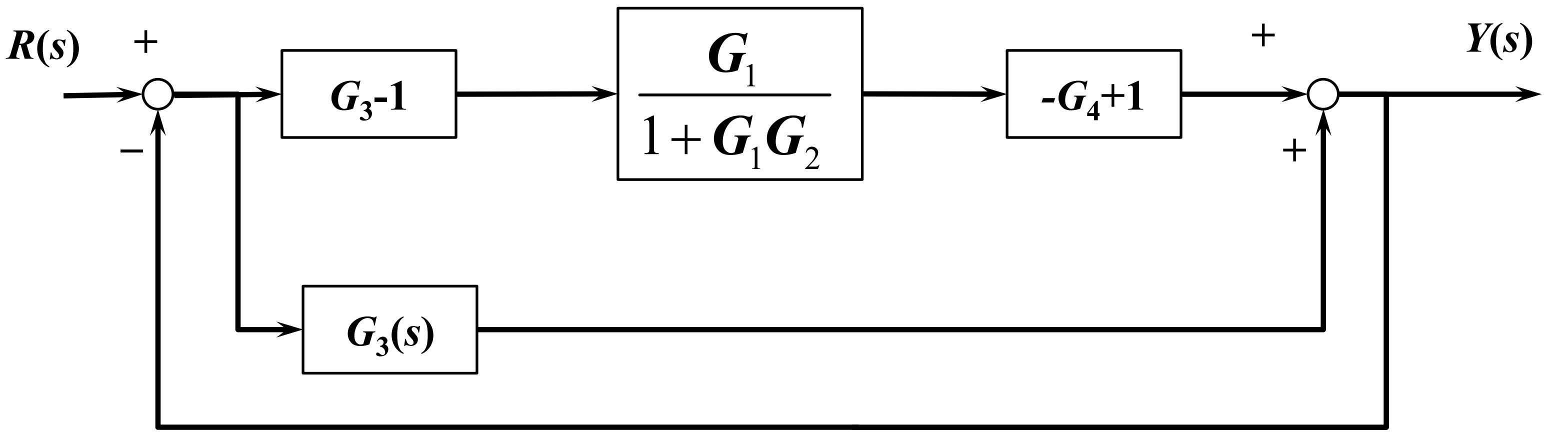
$$\Delta = 1 - \left(L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 + L_6 + L_7 + L_8\right) + \left(L_5 \cdot L_7 + L_5 \cdot L_4 + L_3 \cdot L_4\right)$$

$\Delta_1 = \Delta_3 = 1$ $\quad$ $\Delta_2 = 1 - L_5 = 1 + G_4 \cdot H_4$

电路系统的机理建模（信号流图）

例：针对如下图所示系统，求解 Y(s)/R(s)　（用方块图化简法，还是梅逊增益公式?）

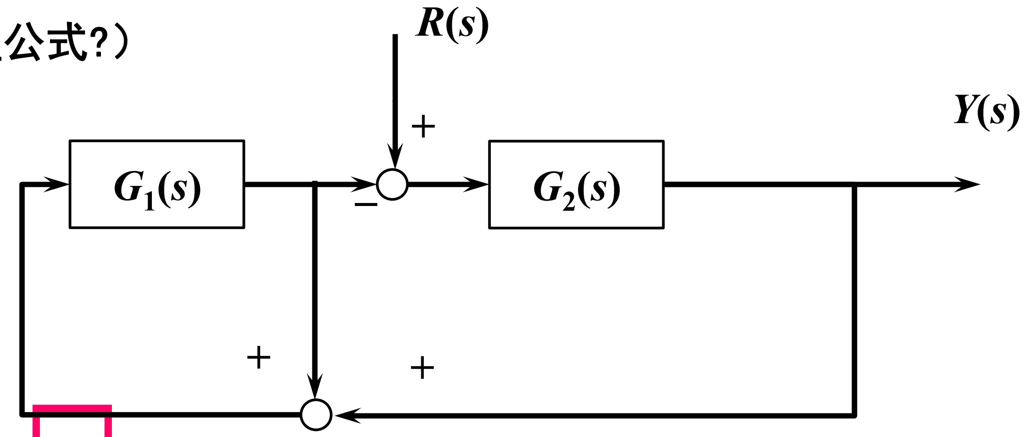




电路系统的机理建模（信号流图）

例：针对如下图所示系统，求解 Y(s)/R(s)。

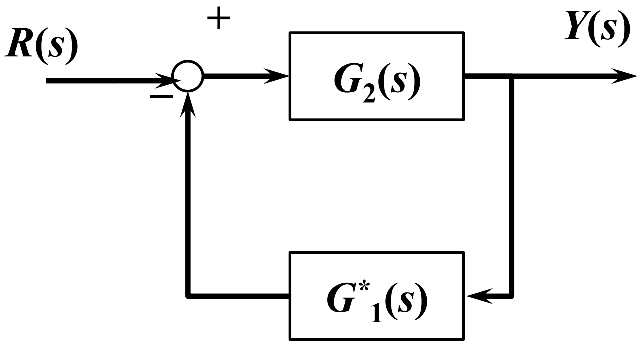
（用方块图化简法，还是梅逊增益公式?）



解：

处理左侧正反馈回路：

$$G_1^*(s)=\frac{G_1(s)}{1-G_1(s)}$$



$$G_{闭环}(s)=\frac{G_2(s)}{1+G_2(s)G_1^*(s)}$$

$$\therefore G(s)=\frac{G_2(s)}{1+\dfrac{G_1(s)}{1-G_1(s)}G_2(s)}=\frac{G_2(s)-G_1(s)G_2(s)}{1-G_1(s)+G_1(s)G_2(s)}$$

Thanks!