第四章 随机变量的数字特征

数学期望

方差

协方差、相关系数

其它数字特征

问题的提出：

在一些实际问题中，我们需要了解随机变量的分布函数外，更关心的是随机变量的某些特征。

例：

- 在评定某地区粮食产量的水平时，最关心的是平均产量；
- 在检查一批棉花的质量时，既需要注意纤维的平均长度，又需要注意纤维长度与平均长度的偏离程度；
- 考察杭州市区居民的家庭收入情况，我们既知家庭的年平均收入，又要研究贫富之间的差异程度。

例: **谁的技术比较好?**

甲,乙两个射手,他们的某次射击成绩分别为

甲射手

击中环数	8	9	10
次数	10	80	10

乙射手

击中环数	8	9	10
次数	20	65	15

试问哪个射手技术较好?

解：计算甲的平均成绩：

$$\frac{8\times 10+9\times 80+10\times 10}{100}=8\times\frac{10}{100}+9\times\frac{80}{100}+10\times\frac{10}{100}=9$$

计算乙的平均成绩：

$$\frac{8\times 20+9\times 65+10\times 15}{100}=8\times\frac{20}{100}+9\times\frac{65}{100}+10\times\frac{15}{100}=8.95$$

所以甲的成绩好于乙的成绩。

4.1 数学期望

（一）数学期望定义

定义：设离散型随机变量**X**的分布律为

$$P(X=x_k)=p_k \quad k=1,2,\cdots$$

若级数 $\sum_{k=1}^{+\infty}|x_k|p_k<\infty$，则称级数 $\sum_{k=1}^{+\infty}x_k p_k$ 的值为**X**的数学期望，记为**E(X)**，即

$$\boxed{E(X)=\sum_{k=1}^{+\infty}x_k p_k}$$

定义：设连续型随机变量*X*的概率密度函数为*f*(*x*)，若积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)dx<\infty$,

则称积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$ **的值为*X*的数学期望，记为*E*(*X*)，即**

$$\boxed{E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx}$$

<u>数学期望简称期望，又称均值。</u>

例1.1 澳门赌场猜大小游戏中有买4点的游戏，游戏规则如下，掷3颗骰子，点数之和为4赌场输，赌场赔率1赔50,否则其押金归赌场所有,问此规则对赌场还是赌客更有利?

解：显然赌客猜中4点的概率为3/216=1/72.

设一赌客押了1元,那么根据规则,他赢50元的概率为1/72，输1元的概率为71/72. 因此经过一次赌博,他能"期望"得到的金额为:

$$49\times\frac{1}{72}+(-1)\times\frac{71}{72}=-0.3056<0$$

所以对赌场有利.

例1.2 设随机变量X的分布律为

$$P\left(X=(-1)^{k+1}\frac{3^k}{k}\right)=\frac{2}{3^k},\quad k=1,2,\cdots.$$

证明X不存在数学期望.

证明:由于 $\sum_{k=1}^{+\infty}|x_k|p_k=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{3^k}{k}\cdot\frac{2}{3^k}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2}{k}=+\infty,$

即该无穷级数是发散的，由数学期望定义知，X不存在数学期望.

例1.3 设随机变量X的概率密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)},-\infty<x<\infty,$$

证明X不存在数学期望.

证明：由于 $\int_{-\infty}^{\infty}|x|f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}|x|\frac{1}{\pi(1+x^2)}dx$

$$=\int_{0}^{\infty}\frac{2x}{\pi(1+x^2)}dx=\frac{1}{\pi}\ln(1+x^2)\Big|_{0}^{\infty}=\infty$$

由数学期望定义知，X不存在数学期望.

例1.4　设 $X \sim P(\lambda)$(泊松分布),求$E(X)$。

解：X的分布律：$P(X=k)=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$　$k=0,1,\cdots$　$\lambda>0$

X的数学期望为：

$$E(X)=\sum_{k=0}^{+\infty} k\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$=\lambda e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=\lambda$$

即　$E(X)=\lambda$

例1.5　设X服从参数为$\lambda(\lambda>0)$的指数分布，求$E(X)$.

解：X的密度函数为$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{0}^{+\infty}x\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx$$

$$=-xe^{-\lambda x}\Big|_{0}^{+\infty}+\int_{0}^{+\infty}e^{-\lambda x}dx=-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_{0}^{+\infty}=\frac{1}{\lambda}.$$

例1.6 设X与Y独立同分布，密度函数与分布函数为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}\quad F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

令$N=\min(X,Y), M=\max(X,Y)$，求$E(N), E(M)$.

解：N的分布函数为$F_N(x)=1-(1-F(x))^2$,

因此，密度函数为$f_N(x)=\begin{cases}2\lambda e^{-2\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$

由上例，$E(N)=E(\min(X,Y))=\dfrac{1}{2\lambda}$.

M的分布函数为$F_M(x) = (F(x))^2,$

因此，密度函数为$f_M(x) = \begin{cases} 2\lambda e^{-\lambda x} - 2\lambda e^{-2\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$

由上例，$E(M) = \int_0^\infty x f_M(x) dx$

$$= 2\int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x} dx - \int_0^\infty x 2\lambda e^{-2\lambda x} dx$$

$$= \frac{2}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda} = \frac{3}{2\lambda}.$$

例1.7 某厂生产的电子产品,其寿命(单位:年)服从指数分布,概率密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}e^{-x/3}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}$$

若每件产品的生产成本为350元,出售价格为500元,并向顾客承诺,如果售出一年之内发生故障,则免费调换一件;如果在三年之内发生故障,则予以免费维修,维修成本为50元.在这样的价格体系下,请问:该厂每售出一件产品,其平均净收入为多少?

解：记某件产品寿命为X(年),售出一件产品的净收入为Y(元)，则

$$Y=\begin{cases}500-350\times 2, & 若0<X\leq 1,\\ 500-350-50, & 若1<X\leq 3,\\ 500-350, & 若X>3.\end{cases}$$

由于X服从指数分布，那么

$$P\{Y=-200\}=P\{0<X\leq 1\}=\int_0^1\frac{1}{3}e^{-x/3}dx=1-e^{-1/3},$$

$$P\{Y=100\}=P\{1<X\leq 3\}=\int_1^3\frac{1}{3}e^{-x/3}dx=e^{-1/3}-e^{-1},$$

$$P\{Y=150\}=P\{X>3\}=\int_3^{+\infty}\frac{1}{3}e^{-x/3}dx=e^{-1}.$$

即Y的分布律为

Y	-200	100	150
p	$1-e^{-1/3}$	$e^{-1/3}-e^{-1}$	e^{-1}

因此售出一件产品的平均净收入为

$$E(Y)=-200\times(1-e^{-1/3})+100\times(e^{-1/3}-e^{-1})+150\times e^{-1}$$

$$=-200+300e^{-1/3}+50e^{-1}\approx 33.35(\text{元}).$$

（二）随机变量函数的数学期望

定理：设$Y = g(X)$(连续函数),

(1)X是离散型随机变量，分布律为：

$$P(X = x_k) = p_k,\quad k = 1, 2, \cdots$$

$\sum_{k=1}^{\infty} |g(x_k)| p_k < \infty$，则有 $\boxed{E(Y) = E[g(X)] = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k) p_k;}$

(2)X是连续型随机变量，密度函数为$f(x)$,

$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)| f(x) dx < \infty$，则有

$$\boxed{E(Y) = E(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx.}$$

定理的重要意义在于，求$E(Y)$时，不必算出Y的分布律或概率密度函数，只利用X的分布律或概率密度函数;

可以将定理推广到两个或两个以上随机变量的函数的情况.

定理(续)：设$Z=h(X,Y)$(连续函数),

(3) 二元离散型随机变量(X,Y)的分布律为：

$$P(X=x_i,Y=y_j)=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots$$

$E(Z)$存在，则有

$$\boxed{E(Z)=E[h(X,Y)]=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}h(x_i,y_j)p_{ij};}$$

(4) 二元连续型随机变量(X,Y)的密度函数为$f(x,y)$,

$E(Z)$存在，则有

$$\boxed{E(Z)=E(h(X,Y))=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}h(x,y)f(x,y)dxdy.}$$

例1.8　设二维随机变量(X,Y)的联合分布律为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	0.1	0.25	0.15
1	0.15	0.2	0.15

求随机变量$Z=\sin\dfrac{\pi(X+Y)}{2}$的数学期望。

解：$E(Z)=E[\sin\frac{\pi(X+Y)}{2}]$

$$
\begin{aligned}
&=\sin\frac{\pi(0+0)}{2}\times 0.1+\sin\frac{\pi(1+0)}{2}\times 0.15\\
&+\sin\frac{\pi(0+1)}{2}\times 0.25+\sin\frac{\pi(1+1)}{2}\times 0.2\\
&+\sin\frac{\pi(0+2)}{2}\times 0.15+\sin\frac{\pi(1+2)}{2}\times 0.15\\
&=0.25
\end{aligned}
$$

例1.9 设随机变量(X,Y)的联合密度函数为：

$$f(x,y)=\begin{cases} xe^{-x(1+y)}, & x>0, y>0, \\ 0, & 其他, \end{cases}$$

求$E(X)$, $E(XY)$.

解：$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dydx$

$$=\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} x\cdot xe^{-x(1+y)}dydx$$

$$=\int_{0}^{+\infty} xe^{-x}[\int_{0}^{+\infty} xe^{-xy}\mathrm{d}y]\mathrm{d}x$$

$$=\int_{0}^{+\infty} xe^{-x}\mathrm{d}x=1,$$

例1.9 设随机变量(X,Y)的联合密度函数为：

$$f(x,y)=\begin{cases} x\mathrm{e}^{-x(1+y)}, & x>0, y>0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

求$E(X)$, $E(XY)$.

解：$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dydx$

$$=\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} xy\cdot x\mathrm{e}^{-x(1+y)}dydx$$

$$=\int_{0}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}[\int_{0}^{+\infty} y\cdot x\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}y]\mathrm{d}x$$

$$=\int_{0}^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=1.$$

例1.10 某商店经销某种商品，每周进货量X与需求量Y是相互独立的随机变量，都~$U[10,20]$. 商店每售出一单位商品可获利1万元，若需求量超过进货量，商店可从其他处调剂供应，此时每单位商品获利0.5万元；求商店经销该商品每周所获利润的数学期望.

解：设Z表示该种商品每周所得的利润，则

$$Z = g(X, Y) = \begin{cases} Y, & \text{若} Y \le X, \\ 0.5(X+Y), & \text{若} Y > X, \end{cases}$$

X和Y相互独立，因此(X,Y)的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 1/100, & 10 \le x \le 20, 10 \le y \le 20, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f(x, y) dxdy$$

$$= \int_{10}^{20} dx \int_{10}^{x} y \times 1/100\, dy + \int_{10}^{20} dx \int_{x}^{20} 0.5(x+y) \times 1/100\, dy$$

≈ 1.42(万元）

例1.11 设按季节出售的某种应时产品的销售量X(单位:吨) 服从[5,10]上的均匀分布.

若销售出一吨产品可盈利$C_1 = 2$万元;

但若在销售季节未能售完,造成积压,则每吨产品将会净亏损$C_2=0.5$万元.

若该厂家需要提前生产该种商品,为使厂家能获得最大的期望利润,问:应在该季生产多少吨产品最为合适?

解：设应在该季生产a吨产品 $(5 \le a \le 10)$，所获利润为Y万元，则Y依赖于销售量X及产量a，

$$Y = g(X, a) = \begin{cases} c_1 a, & 若 X \ge a, \\ c_1 X - c_2(a - X), & 若 X < a, \end{cases}$$

$$则 E(Y) = E(g(X, a)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, a) f_X(x) dx$$

$$= \int_5^a (2.5x - 0.5a) \cdot \frac{1}{5} dx + \int_a^{10} \frac{2a}{5} dx = -\frac{a^2}{4} + \frac{9a}{2} - \frac{25}{4}.$$

令 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}E(Y)=0$, 得$a$=9,

又由于此时 $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}a^2}E(Y)=-\frac{1}{2}<0$,

所以$a=9$时，$E(Y)$达到最大值.

（三）数学期望的特性

1.设C是常数，则有$E(C)=C$,

2.设X是随机变量, C是常数,则有$E(CX)=CE(X)$,

3.设X,Y是随机变量, 则有$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$,

合起来为$E(aX+bY+c)=aE(X)+bE(Y)+c$.

推广到任意有限个随机变量线性组合：

$$E(c_0+\sum_{i=1}^{n}c_iX_i)=c_0+\sum_{i=1}^{n}c_iE(X_i)$$

4.设X,Y是相互独立随机变量, 则有

$$E(XY)=E(X)\,E(Y),$$

推广到任意有限个相互独立随机变量之积:

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)=\prod_{i=1}^{n} E(X_i),$$

其中X_i, $i=1,\ldots,n$相互独立.

证明：

1. C是常数，$P(X=C)=1, E(X)=E(C)=1\times C=C$

下面仅对连续型随机变量给予证明

2. $E(CX)=\int_{-\infty}^{+\infty} Cxf(x)dx = C\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = CE(X)$

3. $E(X+Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x+y)f(x,y)dxdy$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dxdy+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)dxdy$

$=E(X)+E(Y)$

$$4.\ \ E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf_X(x)f_Y(y)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}xf_X(x)dx\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)dy$$

$$=E(X)E(Y).$$

例1.12　计算机程序随机产生$0\sim 9$中的数字. 记X_i为第i次产生的数字，$i=1,2,\cdots n$. 将这n个数依次排列，得到一数，记为Y, 求$E(Y)$.

解：由题意知，X_i独立同分布，$i=1,2,\cdots,n$，

其分布律为

$$P\{X_i=k\}=1/10, k=0,1,\cdots,9.$$

故 $E(X_i)=\sum_{k=0}^{9} k\cdot\frac{1}{10}=4.5.$

又 $Y=\sum_{i=1}^{n}10^{i-1}X_i$， 从而

$$E(Y)=\sum_{i=1}^{n}10^{i-1}E(X_i)$$

$$=4.5\times\sum_{i=1}^{n}10^{i-1}=\frac{10^n-1}{2}.$$

例1.13 一专用电梯载着12位乘客从一层上升，最高11层. 假设中途没有乘客进入，每位乘客独立等概率地到达各层. 如果没有乘客到达某层楼，电梯在该层就不停. 记电梯停留次数为X，求$E(X)$.

(设电梯到达11层后乘客全部下完)

解：引入随机变量：

$$X_i=\begin{cases}0 & 第i层没有人到达,\\ 1 & 第i层有人到达,\end{cases}\quad i=2,3,\cdots,11,$$

易知：$X=X_2+X_3+\cdots+X_{11}$

$$E(X_i)=P(X_i=1)=P(第i层有人到达)$$

$$=1-(0.9)^{12}$$

$$E(X)=E(X_2)+E(X_3)+\cdots+E(X_{11})$$

$$=10[1-(0.9)^{12}]=7.176(次).$$

本题是将X分解成数个随机变量之和，然后利用随机变量和的数学期望等于随机变量数学期望之和来求数学期望，这种处理方法具有一定的普遍意义。

例1.14　设随机变量X_1, X_2, X_3, X_4相互独立，$X_i \sim P(i),\quad i=1,2,3,4,$求行列式

$$Y=\begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{vmatrix}$$

的数学期望$E(Y)$.

解：根据例1.4，泊松分布期望$E(X_i)=i, i=1,2,3,4.$

$$Y = X_1X_4 - X_2X_3$$

由性质4，$E(Y)=E(X_1X_4)-E(X_2X_3)$

$$=E(X_1)E(X_4)-E(X_2)E(X_3)$$

$$=1\times4-2\times3=-2.$$

4.2 方差

设有一批灯泡寿命为：一半约**950**小时，另一半约**1050**小时→平均寿命为1000小时；

另一批灯泡寿命为：一半约**1300**小时，另一半约**700**小时→平均寿命为1000小时；

问题：哪批灯泡的质量更好？

单从平均寿命这一指标无法判断，进一步考察灯泡寿命X与均值1000小时的偏离程度。

方差—正是体现这种意义的数学特征。

（一）方差的定义

定义 设X是随机变量，若$E\left\{[X-E(X)]^2\right\}$存在，则称其为$X$的方差，记为$Var(X)$或$D(X)$，即

$$\boxed{Var(X)=E\left\{[X-E(X)]^2\right\}}$$

将$\sqrt{Var(X)}$记为$\sigma(X)$，称为X的标准差或均方差，它与X有相同的量纲.

方差$Var(X)$刻画了X取值的分散程度，若X取值比较集中，则$Var(X)$较小，反之，若X取值比较分散，则$Var(X)$较大. 因此$Var(X)$是衡量X取值分散程度的一个指标.

对于离散型随机变量*X*,

其分布律为：$P(X = x_i) = p_i$，$i = 1, 2, \cdots$

$$\boxed{Var(X) = \sum_{i=1}^{\infty}[x_i - E(X)]^2 p_i}$$

对于连续型随机变量*X*,其密度函数为$f(x)$,

$$\boxed{Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}[x - E(X)]^2 f(x)dx.}$$

此外，利用数学期望的性质，可得方差的计算公式：

$$\boxed{Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2}$$

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= E\left\{[X-E(X)]^2\right\} \\
&= E\left\{X^2-2XE(X)+[E(X)]^2\right\} \\
&= E(X^2)-2E(X)E(X)+[E(X)]^2 \\
&= E(X^2)-[E(X)]^2
\end{aligned}
$$

例2.1设随机变量X具有0-1分布，其分布律为：

$P(X=0)=1-p$，$P(X=1)=p$，求$Var(X)$。

解：$$E(X)=0\cdot(1-p)+1\cdot p=p$$

$$E(X^2)=0^2\cdot(1-p)+1^2\cdot p=p$$

所以 $$Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$=p-p^2=p(1-p)$$

例2.2　设$X \sim P(\lambda)$，求 $Var(X)$。

解：X的分布律为：$P(X=k)=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$　$k=0,1,\cdots$　$\lambda>0$

由例1.4 已算得$E(X)=\lambda$,

$$\text{而 } E(X^2)=E\left[X(X-1)+X\right]=E[X(X-1)]+E(X)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}+\lambda=\lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}+\lambda$$

$$=\lambda^2 e^{-\lambda}e^{\lambda}+\lambda=\lambda^2+\lambda$$

所以 $Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\lambda$

即泊松分布的均值与方差相等，都等于参数λ

例2.3　设$X \sim U(a,b)$，求$Var(X)$。

解：X的密度函数为： $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a<x<b \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

$$E(X)=\int_a^b \frac{x}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\times\frac{x^2}{2}\Big|_a^b=\frac{a+b}{2},$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx=\int_a^b x^2\frac{1}{b-a}dx$$

$$=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}=\frac{a^2+b^2+ab}{3}$$

$$Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$=\frac{a^2+b^2+ab}{3}-\frac{a^2+b^2+2ab}{4}=\frac{(b-a)^2}{12}$$

例2.4 设随机变量X服从指数分布，其密度函数为： $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x>0 \\ 0 & x\le 0\end{cases}$ $\lambda>0$，求$Var(X)$.

解：由前面的例1.5知$E(X)=1/\lambda$,

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx = \int_0^{+\infty}x^2\lambda e^{-\lambda x}dx$$

$$=-x^2e^{-\lambda x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}2xe^{-\lambda x}dx=2/\lambda^2,$$

于是 $Var(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$

$$=2/\lambda^2-1/\lambda^2=1/\lambda^2.$$

(二)方差的性质：

1. 设C是常数，则$Var(C)=0$

2. 设X是随机变量，C是常数，则有$Var(CX)=C^2Var(X)$

3. 设X,Y是两个随机变量，则有

$$Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)+2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$

特别, 若X,Y相互独立, 则有$Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)$.

综合上述三项，设X,Y相互独立，a,b,c是常数，

则$Var(aX+bY+c)=a^2Var(X)+b^2Var(Y)$

推广到任意有限个独立随机变量线性组合的情况

$$Var(c_0+\sum_{i=1}^{n}c_iX_i)=\sum_{i=1}^{n}c_i^2Var(X_i)$$

4. $Var(X)=0 \Leftrightarrow P(X=C)=1,\quad$ 且 $C=E(X).$

证明：1. $Var(C)=E\left\{[C-E(C)]^2\right\}=0$

$$2.\ \ Var(CX)=E(CX)^2-[E(CX)]^2$$

$$=C^2E(X^2)-C^2[E(X)]^2$$

$$=C^2\left\{E(X^2)-[E(X)]^2\right\}$$

$$=C^2D(X)$$

3. $Var(X+Y)=E\left\{[(X+Y)-E(X+Y)]^2\right\}$

$$=E\left\{[(X-E(X))+(Y-E(Y))]^2\right\}$$

$$=E\left\{[X-E(X)]^2\right\}+E\left\{[Y-E(Y)]^2\right\}+2E\left\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\right\}$$

$$=Var(X)+Var(Y)+2E\left\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\right\}$$

当X,Y相互独立时，$X-E(X)$与$Y-E(Y)$相互独立,

故$E\left\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\right\}=E[X-E(X)]E[Y-E(Y)]=0$,

所以$Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)$.

4. 证略。

例2.5　设$X \sim B(n,p)$，求$E(X),Var(X)$。

解：随机变量X是n重伯努利试验中事件A发生的次数，设$P(A)=p$.　引入随机变量：

$$X_k=\begin{cases}1, & A\text{在第}k\text{次试验发生,}\\ 0, & A\text{在第}k\text{次试验不发生,}\end{cases} \qquad k=1,2,\cdots n,$$

于是$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立，服从同一$(0-1)$分布：

X_k	0	1
p	1-p	p

易知：$X=X_1+X_2+\cdots+X_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$

故知：$E(X)=E(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=np$

$$Var(X)=Var(\sum_{i=1}^{n}X_i)=\sum_{i=1}^{n}Var(X_i)=np(1-p),$$

即 $E(X)=np,\ \ Var(X)=np(1-p).$

以n, p为参数的二项分布变量，可分解为n个相互独立且都服从以p为参数的$(0-1)$分布的随机变量之和。

例2.6　设$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，求$E(X),Var(X)$。

先求标准正态变量$Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$的数学期望和方差

Z的概率密度为：$\varphi(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$

于是 $E(Z)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}te^{-\frac{t^2}{2}}dt=0,$

$$Var(Z)=E(Z^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}t^2e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}te^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=1.$$

$$E(Z)=0,\quad Var(Z)=1,$$

因为$X=\mu+\sigma Z$，故$E(X)=E(\mu+\sigma Z)=\mu,$

$$Var(X)=Var(\mu+\sigma Z)=\sigma^2 Var(Z)=\sigma^2.$$

即正态分布的两个参数μ,σ^2

分别是该分布的数学期望和方差。

表1 几种常见分布的均值与方差

分布	分布率或 密度函数	数学期望	方差
0—1分布	$P(X=k)=p^k(1-p)^{1-k}$ $k=0,1$	p	$p(1\text{-}p)$
二项分布$B(n,p)$	$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{1-k}$ $k=0,1,\ldots,n$	np	$np(1\text{-}p)$
泊松分布 $P(\lambda)$	$P(X=k)=\lambda^k e^{-\lambda}/k!$ $k=0,1,\ldots,$	λ	λ
均匀分布U(a,b)	$f(x)=\begin{cases}1/(b-a), a<x<b\\ 0, \quad 其它\end{cases}$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
指数分布 $E(\lambda)$	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, x>0\\ 0, \quad 其它\end{cases}$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$
正态分布$N(\mu,\sigma^2)$	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $-\infty<x<\infty$	μ	σ^2

独立的n个正态变量的线性组合仍服从正态分布：

若$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2) \quad i=1,2,\cdots n$ 且它们相互独立

则它们的线性组合：

$$\boxed{\begin{aligned}&C_0 + C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n \\ &\sim N(C_0 + C_1\mu_1 + \cdots + C_n\mu_n, \quad C_1^2\sigma_1^2 + C_2^2\sigma_2^2 + \cdots + C_n^2\sigma_n^2)\end{aligned}}$$

$C_1, C_2 \cdots C_n$是不全为0的常数

如: $X \sim N(1,3)$，$Y \sim N(2,4)$且X, Y相互独立，

则$Z = 2X - 3Y \sim N(-4, 48)$

例2.7　设$X \sim N(22.40, 0.03^2), Y \sim N(22.50, 0.04^2)$，且$X$和$Y$相互独立，计算$P(X < Y)$.

解：$P(X<Y) = P(X - Y < 0)$

由于　$X - Y \sim N(-0.10, 0.05^2)$

故有　$P(X<Y) = P(X - Y < 0)$

$$= \Phi\left(\frac{0-(-0.10)}{0.05}\right)$$

$$= \Phi(2) = 0.9772.$$

定义：设随机变量X具有数学期望 $E(X)=\mu$

方差 $Var(X)=\sigma^2\neq 0$，记 $\boxed{X^*=\dfrac{X-\mu}{\sigma}}$

则称 X^* 为 X 的标准化变量.

显然，$E(X^*)=0$，$Var(X^*)=1$，且 X^* 无量纲.

证：$E(X^*)=\dfrac{1}{\sigma}E(X-\mu)=\dfrac{1}{\sigma}[E(X)-\mu]=0$,

$$Var(X^*)=E(X^{*2})-[E(X^*)]^2=E[(\frac{X-\mu}{\sigma})^2]$$

$$=\frac{1}{\sigma^2}E[(X-\mu)^2]=\frac{\sigma^2}{\sigma^2}=1.$$

4.3 协方差与相关系数

定义 $E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$

称为随机变量X与Y的协方差，记为：$Cov(X,Y)$，即

$$\boxed{Cov(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}.}$$

- 协方差的计算公式：

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$

- 方差性质的补充：

$$Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)+2Cov(X,Y)$$

协方差的性质：

1. $Cov(X,Y)=Cov(Y,X);$

2. $Cov(X,X)=Var(X);$

3. $Cov(aX,bY)=ab\cdot Cov(X,Y),$ 其中a,b为两个实数；

4. $Cov(X_1+X_2,Y)=Cov(X_1,Y)+Cov(X_2,Y);$

5. 当$Var(X)Var(Y)\neq 0$时，有

$$(Cov(X,Y))^2\leq Var(X)Var(Y),$$

其中等号当且仅当X与Y之间有严格的线性关系，

即存在常数a,b，使$P(Y=a+bX)=1.$

思考题：

$$(1)Cov(aX+bY,cX+dY)=?$$

$$(2)Var(aX+bY+c)=?$$

$$(3)Var(\sum_{i=1}^{n}X_i)=?$$

答案：

$$(1)\ acVar(X)+bdVar(Y)+(ad+bc)Cov(X,Y),$$

$$(2)a^2Var(X)+b^2Var(Y)+2abCov(X,Y),$$

$$(3)\sum_{i=1}^{n}Var(X_i)+2\sum_{1\le i<j\le n}Cov(X_i,X_j).$$

定义 $\boxed{\rho_{XY} = \dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}}$

称为X与Y的相关系数. 它无量纲的量.

$$\rho_{XY} = Cov\left(\frac{X-E(X)}{\sqrt{Var(X)}}, \frac{X-E(Y)}{\sqrt{Var(Y)}}\right)$$

相关系数的性质:

1. $|\rho_{XY}| \le 1$

2. $|\rho_{XY}| = 1 \Leftrightarrow$ 存在常数a,b，使$P(Y = a + bX) = 1$

特别的，$\rho_{XY} = 1$时，$b > 0$；$\rho_{XY} = -1$时，$b < 0$

证明：考虑以X的线性函数$a+bX$来近似表示Y,

以均方误差$e(a,b)=E\left\{[Y-(a+bX)]^2\right\}$

来衡量用$a+bX$近似表达Y的好坏程度,

$e(a,b)$越小，$a+bX$与Y的近似程度越好。

下面来求最佳近似式：$e(a_0,b_0)=\min\limits_{a,b}e(a,b)$

续

下面来求最佳近似式：$e(a_0,b_0)=\min\limits_{a,b} e(a,b)$

计算得：$e(a,b)$

$$=E(Y^2)+b^2E(X^2)+a^2-2bE(XY)+2abE(X)-2aE(Y)$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial e(a,b)}{\partial a}=2a+2bE(X)-2E(Y)=0\\ \dfrac{\partial e(a,b)}{\partial b}=2bE(X^2)-2E(XY)+2aE(X)=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a_0=E(Y)-b_0E(X)\\ b_0=\dfrac{Cov(X,Y)}{Var(X)}\end{cases}$$

续

已得：$a_0 = E(Y) - b_0 E(X), b_0 = \dfrac{Cov(X,Y)}{Var(X)}$

$$此时 e(a_0, b_0) = E\left\{[Y-(a_0+b_0X)]^2\right\}$$

$$= Var[Y-(a_0+b_0X)] + \left\{E\left[Y-(a_0+b_0X)\right]\right\}^2$$

$$= Var(Y - b_0X)$$

$$= Var(Y) + b_0^2 Var(X) - 2b_0 Cov(X,Y)$$

$$= Var(Y) - \frac{[Cov(X,Y)]^2}{Var(X)}$$

$$= (1-\rho_{XY}^2)Var(Y)$$

$$a_0 = E(Y) - b_0 E(X), b_0 = \frac{Cov(X,Y)}{Var(X)}$$

$$e(a_0, b_0) = E\{[Y - (a_0 + b_0 X)]^2\} = (1 - \rho_{XY}^2) Var(Y)$$

1. 由$e(a_0, b_0) \geq 0 \Rightarrow 1 - \rho_{XY}^2 \geq 0 \Rightarrow |\rho_{XY}| \leq 1$

2. $|\rho_{XY}| = 1 \Leftrightarrow E\left\{\left[Y - (a_0 + b_0 X)\right]^2\right\} = 0$

$\Leftrightarrow Var\left[Y - (a_0 + b_0 X)\right] = 0$且$E[Y - (a_0 + b_0 X)] = 0$

$\Leftrightarrow P\{Y - (a_0 + b_0 X) = 0\} = 1$

特别，当$\rho_{XY} > 0$时，$Cov(X,Y) > 0$，$b_0 = \dfrac{Cov(X,Y)}{D(X)} > 0$

当$\rho_{XY} < 0$时，$Cov(X,Y) < 0$，$b_0 < 0$

相关系数ρ_{XY}是一个用来表征X,Y之间线性关系紧密程度的量

当$|\rho_{XY}|$较大时，$e(a_0,b_0)$较小，表明X,Y线性关系的程度较好；

当$|\rho_{XY}|=1$时， $e(a_0,b_0)=0$，表明X,Y之间以概率1存在线性关系；

当$|\rho_{XY}|$较小时，$e(a_0,b_0)$较大，表明X,Y线性关系的程度较差；

当$\rho_{XY}>0$时，称X与Y为正相关；

当$\rho_{XY}<0$时，称X与Y为负相关；

定义：$\boxed{\rho_{XY}=0,}$ 称X与Y不相关或零相关.

随机变量X与Y不相关，即$\rho_{XY}=0$的等价条件有：

1. $Cov(X,Y)=0$

2. $E(XY)=E(X)E(Y)$

3. $Var(X+Y)=Var(X)+Var(Y)$

从而可知，当X与Y相互独立$\Rightarrow$ X与Y一定不相关

反之，若X与Y不相关，X与Y却不一定相互独立

例3.1　设X, Y服从同一分布，其分布律为：

X	-1	0	1
p	$1/4$	$1/2$	$1/4$

已知 $P\{|X|=|Y|\}=0$ ，判断X和Y是否不相关？是否独立？

解： 先求X, Y的联合分布律：

$X \backslash Y$	-1	0	1	$p_{\bullet j}$
-1	0	$1/4$	0	$1/4$
0	$1/4$	0	$1/4$	$1/2$
1	0	$1/4$	0	$1/4$
$p_{i\bullet}$	$1/4$	$1/2$	$1/4$	

$$E(X)=(-1)\times 1/4+0\times 1/2+1\times 1/4=0, \qquad E(XY)=0,$$

所以，$Cov(X,Y)=0$,即X与Y不相关.

$$P(X=-1,Y=-1)=0, \quad P(X=-1)P(Y=-1)=1/4\times 1/4$$

$$P(X=-1,Y=-1)\neq P(X=-1)P(Y=-1)$$

所以，X与Y不独立。

例3.2 设(X,Y)服从二元正态分布，它的概率密度函数为：

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\exp\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}]\}$$

求X和Y的相关系数，并证明X与Y相互独立$\Leftrightarrow X$与Y不相关.

解：由于X,Y的边际概率密度函数为：

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\quad -\infty<x<+\infty;$$

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}\quad -\infty<y<+\infty$$

所以$E(X)=\mu_1, Var(X)=\sigma_1^2$；$E(Y)=\mu_2, Var(Y)=\sigma_2^2$

续

而$Cov(X,Y)=E\{(X-\mu_1)(Y-\mu_2)\}$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu_1)(y-\mu_2)f(x,y)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x-\mu_1)}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}dx\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(y-\mu_2)}{\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_2^2}[y-(\mu_2+\frac{\rho\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1))]^2\right\}dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x-\mu_1)}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\cdot[\mu_2+\frac{\rho\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1)-\mu_2]dx$$

$$=\frac{\rho\sigma_2}{\sigma_1}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x-\mu_1)^2}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}dx$$

$$=\frac{\rho\sigma_2}{\sigma_1}\cdot\sigma_1^2=\rho\sigma_1\sigma_2$$

于是$\rho_{XY}=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}}=\rho.$

即二元正态变量(X,Y)的概率密度中的参数ρ就是X,Y的相关系数，因而二元正态变量的分布完全可由X,Y各自的均值、方差以及它们的相关系数所确定。

若(X,Y)服从二元正态分布，那么

X和Y相互独立$\Leftrightarrow \rho=0$

现在知道，$\rho_{XY}=\rho$，从而知：

对于二元正态变量(X,Y)来说，

X和Y不相关$\Leftrightarrow$ X与Y相互独立

4.4 其它数字特征

定义：设X和Y是随机变量

若$E(X^k)$ $k=1,2,\cdots$存在，

则称它为X的k阶(原点)矩；

若$E\left\{[X-E(X)]^k\right\}$ $k=1,2,\cdots$存在，

则称它为X的k阶中心矩；

若$E\left\{X^kY^l\right\}$存在 $k,l=1,2,\cdots$存在，

则称它为X和Y的$k+l$阶混合(原点)矩；

若$E\left\{[X-E(X)]^k[Y-E(Y)]^l\right\}$ $k,l=1,2,\cdots$存在，

则称它为X,Y的$k+l$阶混合中心矩；

显 然 ， 最 常 用 到 的 是 一 、 二 阶 矩

定义：X为连续型随机变量，其分布函数和概率密度函数分别为$F(x)$和$f(x)$,称满足条件

$$P\{X > x_\alpha\} = 1 - F(x_\alpha) = \int_{x_\alpha}^{+\infty} f(x)dx = \alpha$$

的实数x_α为随机变量X（或此分布）的上（侧）α分位数.

特别地，当$\alpha = 1/2$时，$x_{1/2}$称为X的中位数；

当$\alpha = 1/4$时，$x_{1/4}$称为X的上1/4分位数；

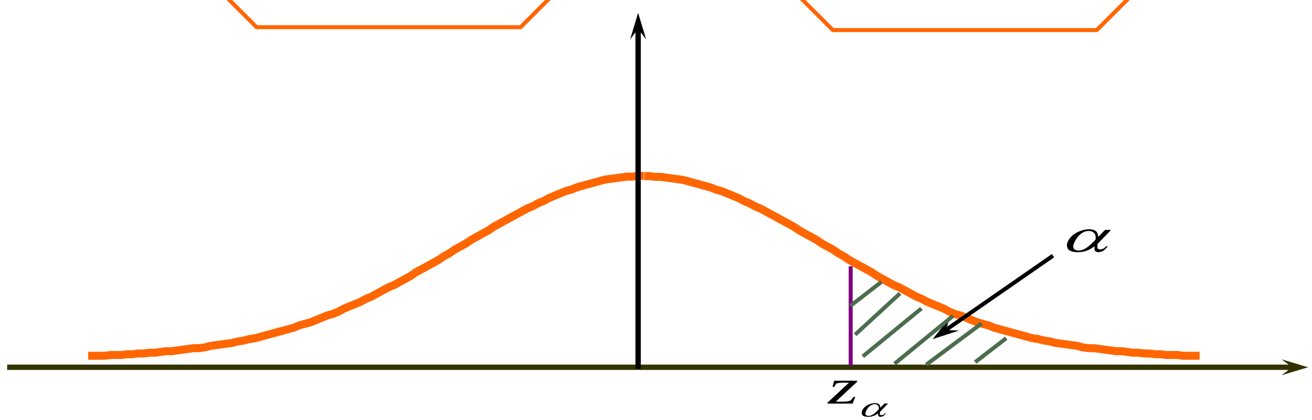
当$\alpha = 3/4$时，$x_{3/4}$称为X的上3/4分位数.

设$X \sim N(0,1)$,若z_α满足条件$P\{X > z_\alpha\} = \alpha, 0 < \alpha < 1$

则称点z_α为标准正态分布的上α分位数.

$$z_{1/2} = 0$$

$$z_{1-\alpha} = -z_\alpha$$



*Excel*中"NORM.S.INV"用于查询标准正态分布的分位数.

4.5 多元随机变量的数字特征

定义：设 n 元随机变量 $\mathbf{X}=(X_1,X_2,\cdots X_n)^T$，若其每一分量的数学期望都存在，则称

$$E(\mathbf{X})=(E(X_1),E(X_2),\cdots E(X_n))^T$$

为n元随机变量$\mathbf{X}$的数学期望(向量).

定义：设二元随机变量(X_1,X_2)的四个二阶中心矩存在，

将它们排成矩阵：$\begin{pmatrix} Var(X_1) & Cov(X_1,X_2) \\ Cov(X_2,X_1) & Var(X_2) \end{pmatrix}$,

称为(X_1,X_2)的协方差矩阵.

定义：设 n 元随机变量$(X_1, X_2, \cdots X_n)$，$Cov(X_i, X_j)$

都存在，$i, j = 1, 2, \cdots n$

称矩阵$\begin{pmatrix} Var(X_1) & Cov(X_1, X_2) & \cdots & Cov(X_1, X_n) \\ Cov(X_2, X_1) & Var(X_2) & \cdots & Cov(X_2, X_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Cov(X_n, X_1) & Cov(X_n, X_2) & \cdots & Var(X_n) \end{pmatrix}$

为n元随机变量$(X_1, X_2, \cdots X_n)$的协方差矩阵.

协方差矩阵是一个对称的非负定矩阵.

利用协方差矩阵，可由二元正态变量的概率密度推广，得到n元正态变量的概率密度。

已知(X_1, X_2)服从二元正态分布，其概率密度为：

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

引入列向量：$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$，$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$,

(X_1, X_2)的协方差矩阵为：$C = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$

它的行列式为 $|C| = \sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)$

C的逆矩阵为$C^{-1} = \frac{1}{|C|}\begin{pmatrix} \sigma_2^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{1-\rho^2}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2} \\ -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2} & \frac{1}{\sigma_2^2} \end{pmatrix}$$

经计算,$(X-\mu)^T C^{-1}(X-\mu)$

$$=\frac{1}{1-\rho^2}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]$$

于是(X_1, X_2)的概率密度可写成:

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{2}{2}}|C|^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(X-\mu)^T C^{-1}(X-\mu)\right\}$$

上式容易推广到n元正态变量$(X_1,X_2,\cdots X_n)$的情况

引入列向量：$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\quad \mathbf{a}=\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E(X_1) \\ E(X_2) \\ \vdots \\ E(X_n) \end{pmatrix}$,

B是$(X_1,X_2,\cdots X_n)$的协方差矩阵,

$(X_1,X_2,\cdots X_n)$的概率密度定义为：

$$f(x_1,x_2,\cdots x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|B|^{\frac{1}{2}}}exp\left\{-\frac{1}{2}(X-\mathbf{a})^T B^{-1}(X-\mathbf{a})\right\}$$

n元正态变量具有以下四条重要性质：

1. n元正态变量$(X_1, X_2, \cdots X_n)^T$中的任意子向量$(X_{i_1}, X_{i_2}, \cdots, X_{i_k})^T$ $(1 \le k \le n)$也服从k元正态分布. 特别地，每一个分量$X_i, i = 1, 2, \cdots n$都是正态变量；反之，若$X_1, X_2, \cdots X_n$都是正态变量，且相互独立，则$(X_1, X_2, \cdots X_n)$是n元正态变量；

2. n元随机变量$(X_1, X_2, \cdots X_n)$服从n元正态分布 $\Leftrightarrow$ $X_1, X_2, \cdots X_n$的任意线性组合$l_1 X_1 + l_2 X_2 + \cdots + l_n X_n$服从一元正态分布其中$l_1, l_2, \cdots l_n$不全为零

3. 若$(X_1, X_2, \cdots X_n)$服从n元正态分布，设$Y_1, Y_2, \cdots Y_k$是$X_j\,(j=1,2,\cdots n)$的线性函数，则$(Y_1, Y_2, \cdots Y_k)$也服从多元正态分布；

这一性质称为正态变量的线性变换不变性

4. 设$(X_1, X_2, \cdots X_n)$服从n元正态分布，

则$X_1, X_2, \cdots X_n$相互独立$\Leftrightarrow X_1, X_2, \cdots X_n$两两不相关

$\Leftrightarrow$协方差矩阵为对角矩阵.

例5.1　设二元随机变量(X,Y)服从二元正态分布，

$X \sim N(0,1)$, $Y \sim N(1,4)$, X与Y的相关系数$\rho = -\frac{1}{2}$.

求：（1）$Var(2X-Y)$;　(2)$P(2X>Y)$;

(3)$Z_1 = X+Y, Z_2 = X-Y$, 求(Z_1, Z_2)的分布.

解：(1) 由于$\rho_{XY}=\dfrac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$，故

$$Cov(X,Y)=\rho_{XY}\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}=-\frac{1}{2}\times 1\times 2=-1.$$

$$Var(2X-Y)=Var(2X)+Var(Y)+2Cov(2X,-Y)$$

$$=4Var(X)+Var(Y)-4Cov(X,Y)$$

$$=4\times 1+4-4\times(-1)=12.$$

(2) 由于(X,Y)服从二元正态，故X与Y的任意线性组合都服从一元正态。所以

$$2X-Y\sim N(-1,12).$$

那么
$$
\begin{aligned}
&P(2X>Y)\\
&=P(2X-Y>0)\\
&=P\left(\frac{2X-Y-(-1)}{\sqrt{12}}>\frac{0-(-1)}{\sqrt{12}}\right)\\
&=1-\Phi\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right).
\end{aligned}
$$

（3）根据正态变量的线性变换不变性，

(Z_1, Z_2)也服从二元正态分布.

$$E(Z_1) = E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 1;$$

$$E(Z_2) = E(X-Y) = E(X) - E(Y) = -1;$$

$$Var(Z_1) = Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y)$$

$$= 1 + 4 + 2\times(-1) = 3;$$

$$Var(Z_2) = Var(X-Y) = Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X,Y)$$

$$= 1 + 4 - 2\times(-1) = 7;$$

$$Cov(Z_1, Z_2) = Cov(X+Y, X-Y) = Var(X) - Var(Y) = -3;$$

$$\rho_{Z_1Z_2} = \frac{Cov(Z_1, Z_2)}{\sqrt{Var(Z_1)Var(Z_2)}} = \frac{-3}{\sqrt{3\times 7}} = -\sqrt{\frac{3}{7}};$$

故$(Z_1, Z_2) \sim N(1, -1, 3, 7, -\sqrt{\frac{3}{7}})$.

课件待续!

THE END

2020/11/12