习题

1. 已知一速度矢量如下 $^{B}V = \begin{bmatrix} 10.0 \\ 20.0 \\ 30.0 \end{bmatrix}$

又已知 $^{A}_{B}T = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.500 & 0.000 & 11.0 \\ 0.500 & 0.866 & 0.000 & -3.0 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 & 9.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，计算$^{A}V$

习题

2. 已知下列坐标系之间的位姿关系

$$
{}^{U}_{A}T = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.500 & 0.000 & 11.0 \\ 0.500 & 0.866 & 0.000 & -1.0 \\ 0.000 & 0.000 & 1.000 & 8.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad {}^{B}_{A}T = \begin{bmatrix} 1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.0 \\ 0.000 & 0.866 & -0.500 & 10.0 \\ 0.000 & 0.500 & 0.866 & -20.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{C}_{U}T = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.500 & 0.000 & -3.0 \\ 0.433 & 0.750 & -0.500 & -3.0 \\ 0.250 & 0.433 & 0.866 & 3.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

求 ${}^{B}_{C}T$

习题

3. 已知

$$
{}^{A}_{B}T = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.43 & 0.86 & 5.0 \\ 0.87 & -0.50 & 0.00 & -4.0 \\ 0.43 & 0.75 & -0.50 & 3.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

${}^{B}_{A}T$ 中的(2,4)元素是什么？

${}^{B}_{C}T$

习题

4. 对任何 $R \in SO(3)$，试证明R的行列式等于1

5. 对任何 $R \in SO(3)$和任何 $P \in \mathbb{R}^3$，试证明 $|RP| = |P|$

习题

6. 已知：$\alpha=\pi/3, \beta=-\pi/6, \gamma=3\pi/4$，求 $R_{Y'X'Z'}(\alpha,\beta,\gamma)$ 和 $R_{X'Z'X'}(\alpha,\beta,\gamma)$

7. 试求 $\alpha,\beta,\gamma,a,b,c$ ，使得

$$R_{ZYX}(\gamma,\beta,\alpha)=\begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & a \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{4} & b \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{4} & c \end{bmatrix} \in SO(3)$$

习题

8. 在论证Z-Y-X欧拉角的β角的范围为$[-\pi/2,\pi/2]$时，我们运用了三角函数等式

$$R_z(\pm\pi+\alpha)R_y(\pm\pi-\beta)R_x(\pm\pi+\gamma)=R_z(\alpha)R_y(\beta)R_x(\gamma)$$

其实，也可论证Z-Y-Z欧拉角的β角的范围为$[0,\pi]$，请给出此论证要运用的三角函数等式，并证明你给出的等式

$^B_C T$

习题

9. 参考系{A}固定不动，坐标系{B}作了以下几次的变动：

1) 姿态不变，原点移动到{B}中的点 ${}^{B}P$；

2) 绕{A}中的单位向量 ${}^{A}K$ 旋转 θ 角度；

3) 姿态不变，原点移动，从旧原点到新原点的向量为 ${}^{A}Q$；

4) 绕{B}中的单位向量 ${}^{B}L$ 旋转 ϕ 角度.

上述变动前后{B}相对于{A}的位姿分别为 ${}^{A}_{B}T$ 和 $T_1\,{}^{A}_{B}T T_2$，已知

$$T_1 = \begin{bmatrix} 0.866 & -0.500 & 0.000 & -3.0 \\ 0.433 & 0.750 & -0.500 & -3.0 \\ 0.250 & 0.433 & 0.866 & 3.0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_2 = \begin{bmatrix} 0.911 & -0.244 & 0.333 & 2 \\ 0.333 & 0.911 & -0.244 & -2 \\ -0.244 & 0.333 & 0.911 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

试求 ${}^{B}P, {}^{A}K, {}^{A}Q, {}^{B}L, \theta, \phi$（旋转角的范围为 $[0,\pi]$）

习题

10. 试用单位四元数计算向量$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$绕轴$\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$旋转45°后形成的新向量.

11. 已知两组欧拉参数

$$\begin{bmatrix}\eta\\ \varepsilon\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},\begin{bmatrix}\xi\\ \sigma\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{8} & \frac{\sqrt{2}}{8}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

试求他们的Grossmann积$\begin{bmatrix}\tau\\ \rho\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\eta\\ \varepsilon\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}\xi\\ \sigma\end{bmatrix}$以及这三组欧拉参数对应的旋转矩阵$R_{\varepsilon}(\eta)$，$R_{\sigma}(\xi)$，$R_{\rho}(\tau)$并验证$R_{\varepsilon}(\eta)R_{\sigma}(\xi)=R_{\rho}(\tau)$

习题

12. (教材题目2.20)假定一个矢量Q绕一个单位矢量$\hat{K}$旋转θ形成一个新的矢量$Q^{'}$，即

$$Q^{'} = R_K(\theta)Q$$

用(2-80)推导Rodrigues公式

$$Q^{'} = Q\cos\theta + \sin\theta\left(\hat{K}\times Q\right) + (1-\cos\theta)\left(\hat{K}\cdot Q\right)\hat{K}$$

习题

13. 原点不变条件下的3维向量的转换公式 ${}^{A}P = {}^{A}_{B}R\,{}^{B}P$

记 ${}^{B}P = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} \quad {}^{A}P = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$

旋转矩阵基于欧拉参数表达为

$$
{}^{A}_{B}R = R_{\varepsilon}(\eta) = \begin{bmatrix} 2(\eta^2+\varepsilon_1^2)-1 & 2(\varepsilon_1\varepsilon_2-\eta\varepsilon_3) & 2(\varepsilon_1\varepsilon_3+\eta\varepsilon_2) \\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_2+\eta\varepsilon_3) & 2(\eta^2+\varepsilon_2^2)-1 & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3-\eta\varepsilon_1) \\ 2(\varepsilon_1\varepsilon_3-\eta\varepsilon_2) & 2(\varepsilon_2\varepsilon_3+\eta\varepsilon_1) & 2(\eta^2+\varepsilon_3^2)-1 \end{bmatrix}
$$

试证明：上述3维向量的转换公式可基于单位四元数表达为

$$
ix_2 + jy_2 + kz_2 = \left(\eta + i\varepsilon_1 + j\varepsilon_2 + k\varepsilon_3\right)\left(ix_1 + jy_1 + kz_1\right)\left(\eta + i\varepsilon_1 + j\varepsilon_2 + k\varepsilon_3\right)^*
$$

习题

14. Craig教材《机器人学导论》习题3.3
15. Craig教材《机器人学导论》习题3.4
16. Craig教材《机器人学导论》习题4.2
17. Craig教材《机器人学导论》习题4.4
18. 试证明Craig教材《机器人学导论》中的式（3-6）