自动控制原理

Principle of Automatic Control

第三章 CHAPTER 3

连续时间控制系统的时域分析

稳定高阶系统的近似

- 对于实际物理世界中更常见的高阶系统
- 常用稳定的一阶或二阶控制系统近似稳定的高阶控制系统
- 主导极点思想，忽略非主导极点和零点
- 将一阶或二阶系统的动态性能指标公式用于高阶系统
- 利用计算机仿真考察近似的程度

稳定高阶系统的近似

- 高阶系统自由响应各分量的衰减快慢由系统极点的位置决定
  - 极点在S平面左半部离虚轴越远，相应的分量衰减越快，对系统的影响越小
- 各分量所对应的系数取决于系数的零、极点分布。
  - 若一对零极点互相很接近，则在输出$y(t)$中与该极点对应的分量就几乎被抵消。
  - 当某极点靠近零点而远离其他极点和原点，则相应的系数越小，该自由分量的影响就小。
  - 若某极点远离零点和其他极点，越接近原点，则相应的系数就越大，该自由分量的影响也就越大。
- 系统的零、极点共同决定了系统自由响应曲线的形状。

对于系数很小（影响很小）的分量、远离虚轴衰减很快的分量常常可以忽略，此时高阶系统就可用低阶系统来近似估计。

稳定高阶系统的近似

主导极点（某些稳定高阶系统的低阶近似）

主导极点（1个或2个）特征：

附近无其它零极点

距虚轴较近（其实部绝对值小于其它极点实部绝对值的1/5）

$$\frac{10(s+8)}{(s+20)(s^2+2s+5)}=\frac{10(s-(-8))}{(s-(-20))(s-(-1+2j))(s-(-1-2j))}$$

$-1\pm 2j$是一对主导极点

$$\frac{10(s+8)}{(s+20)(s^2+2s+5)}=\frac{80(0.125s+1)}{20(0.05s+1)(s^2+2s+5)}$$

$$\approx\frac{4}{s^2+2s+5}$$

增益不变

根轨迹增益变

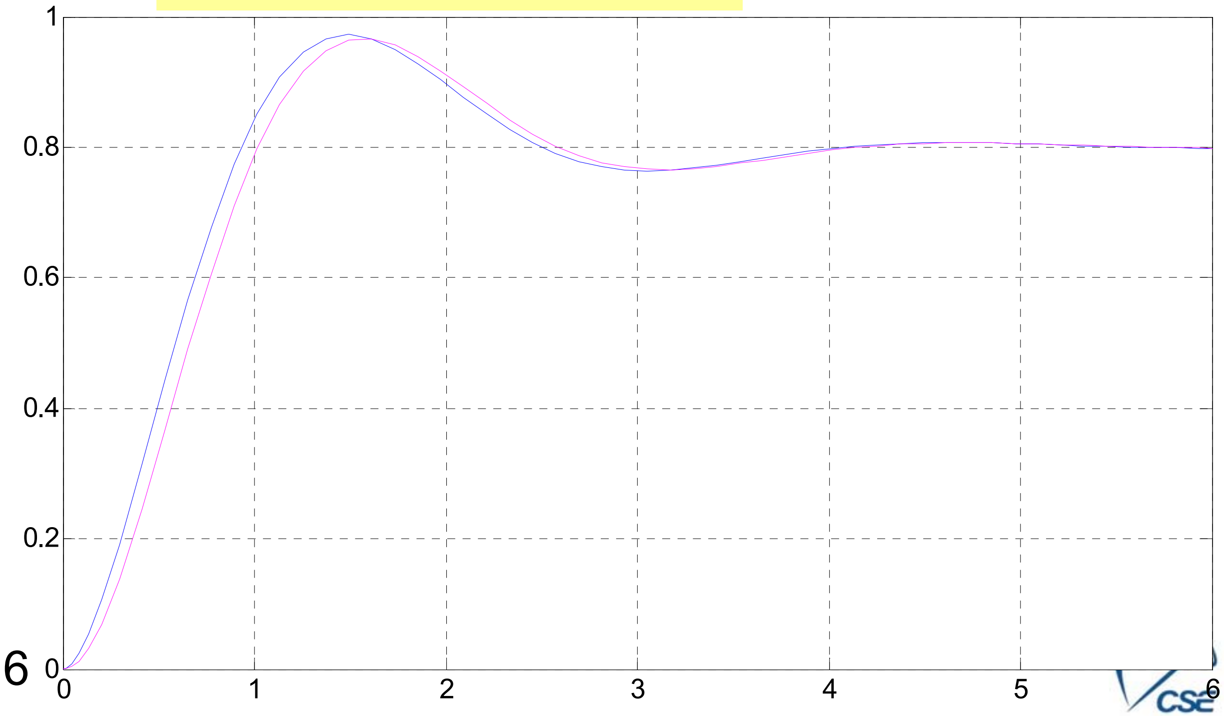
稳定高阶系统的近似

$$\frac{10(s+8)}{(s+20)\left(s^2+2s+5\right)} \approx \frac{4}{s^2+2s+5} = 0.8\frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$$

$$\omega_n = \sqrt{5} = 2.24$$
$$\zeta = 0.45$$

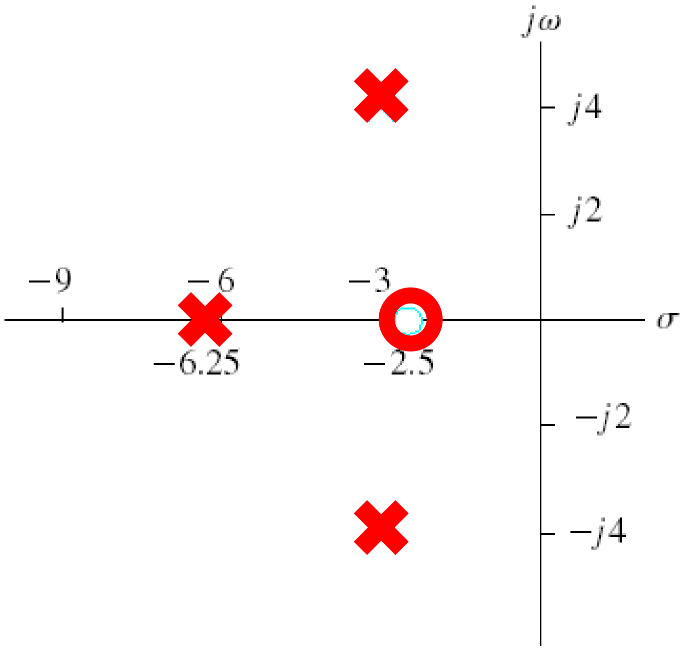
$$\sigma\% = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} = 20.53\%$$
$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 4$$

近似程度好



稳定高阶系统的近似

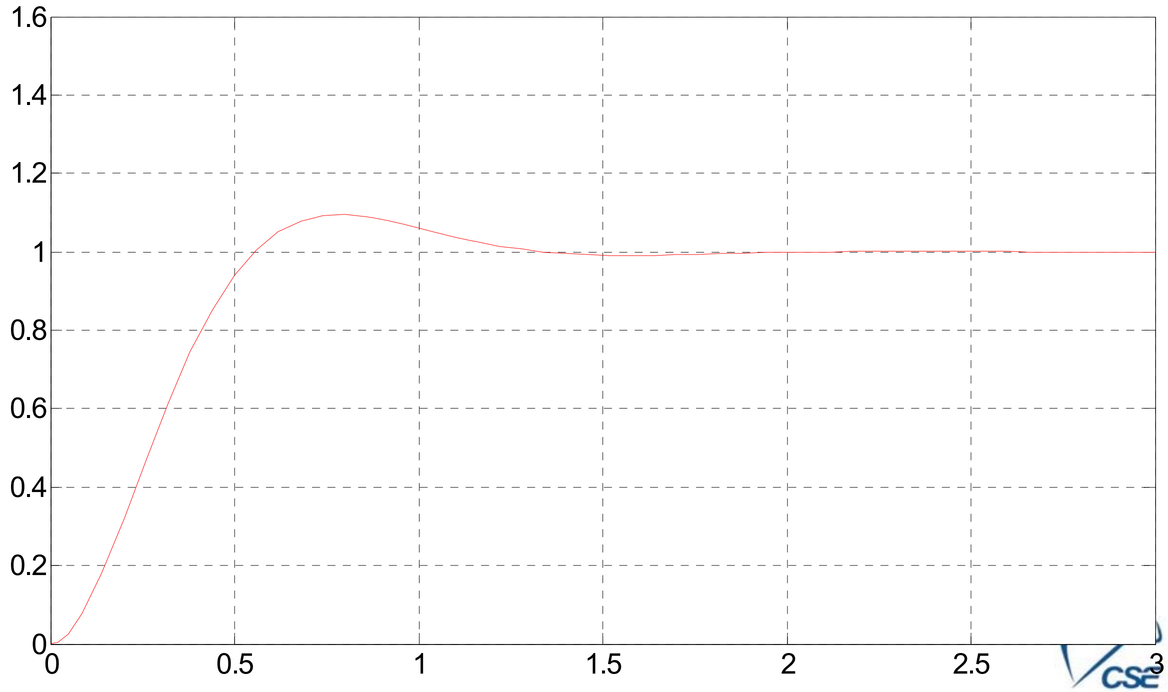
➢ 例：第三个极点和零点对二阶系统的影响



$$\Phi(s)=\frac{62.5(s+2.5)}{(s^2+6s+25)(s+6.25)}$$

$$=\frac{62.5\times 2.5(0.4s+1)}{6.25(s^2+6s+25)(0.16s+1)}\approx\frac{25}{s^2+6s+25}$$

$$\sigma=9.5\%, T_s=1.2s$$



稳定高阶系统的近似

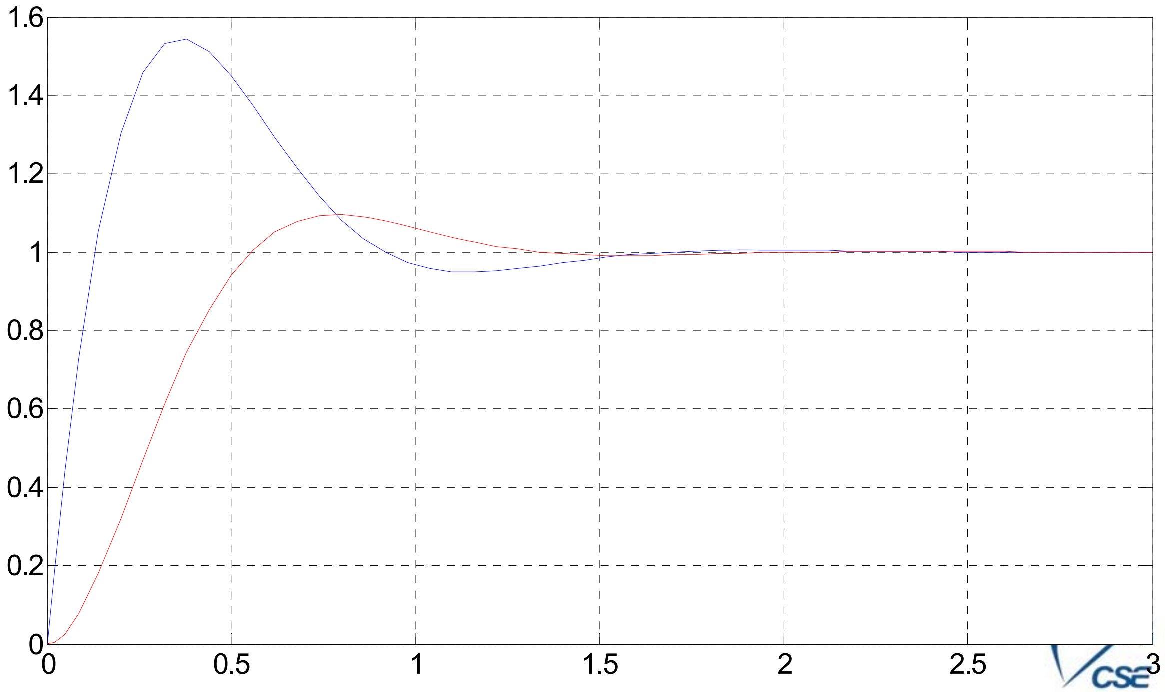
(1) 不忽略零点-2.5

$$\frac{25}{s^2+6s+25} \qquad \sigma = 9.5\%, T_s = 1.2s$$

$$\Phi(s) = \frac{62.5(s+2.5)}{(s^2+6s+25)(s+6.25)}$$

$$= \frac{62.5(s+2.5)}{6.25(s^2+6s+25)(0.16s+1)} \approx \frac{10(s+2.5)}{s^2+6s+25} \qquad \sigma = 55\%, T_s = 1.33s$$

零点：
使超调量加大
调节时间增加



稳定高阶系统的近似

(2) 不忽略极点-6.25

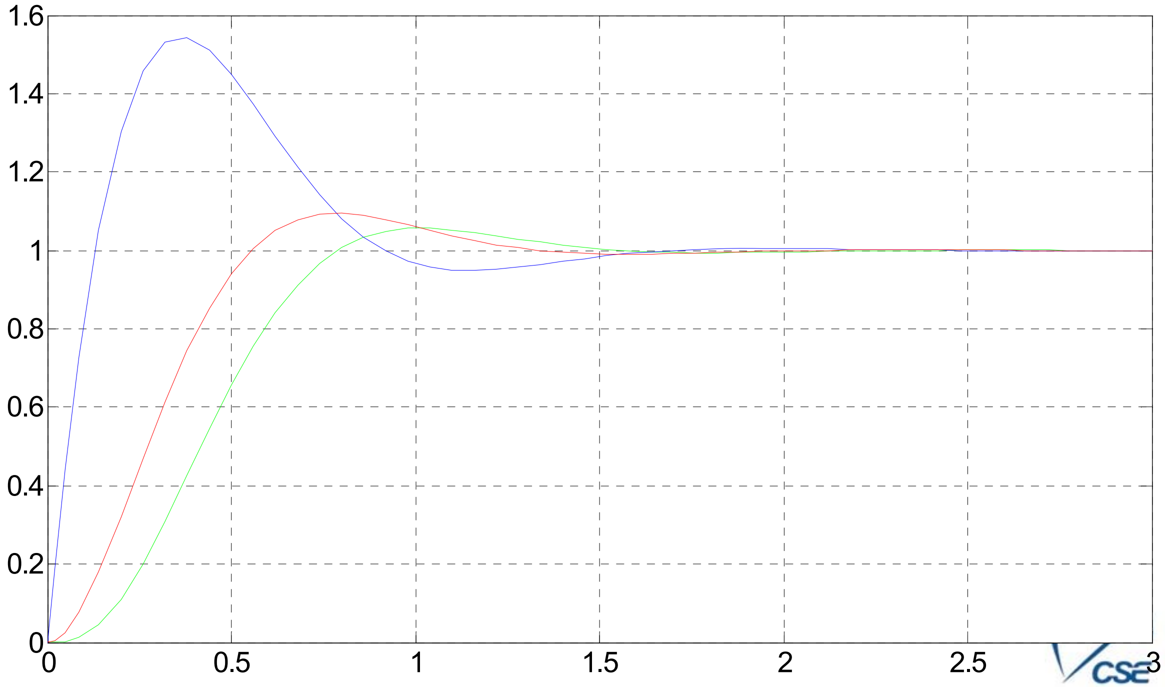
$$\frac{25}{s^2+6s+25} \quad \sigma=9.5\%, T_s=1.2s$$

$$\frac{10(s+2.5)}{s^2+6s+25} \quad \sigma=55\%, T_s=1.33s$$

$$\Phi(s)=\frac{62.5(s+2.5)}{(s^2+6s+25)(s+6.25)}$$

$$=\frac{62.5\times2.5(0.4s+1)}{(s^2+6s+25)(s+6.25)}\approx\frac{156.25}{(s^2+6s+25)(s+6.25)}$$

$$\sigma=5.5\%, T_s=1.4s$$



极点：
使超调量减小
调节时间增加

稳定高阶系统的近似

$$\frac{25}{s^2+6s+25} \quad \sigma = 9.5\%, T_s = 1.2s$$

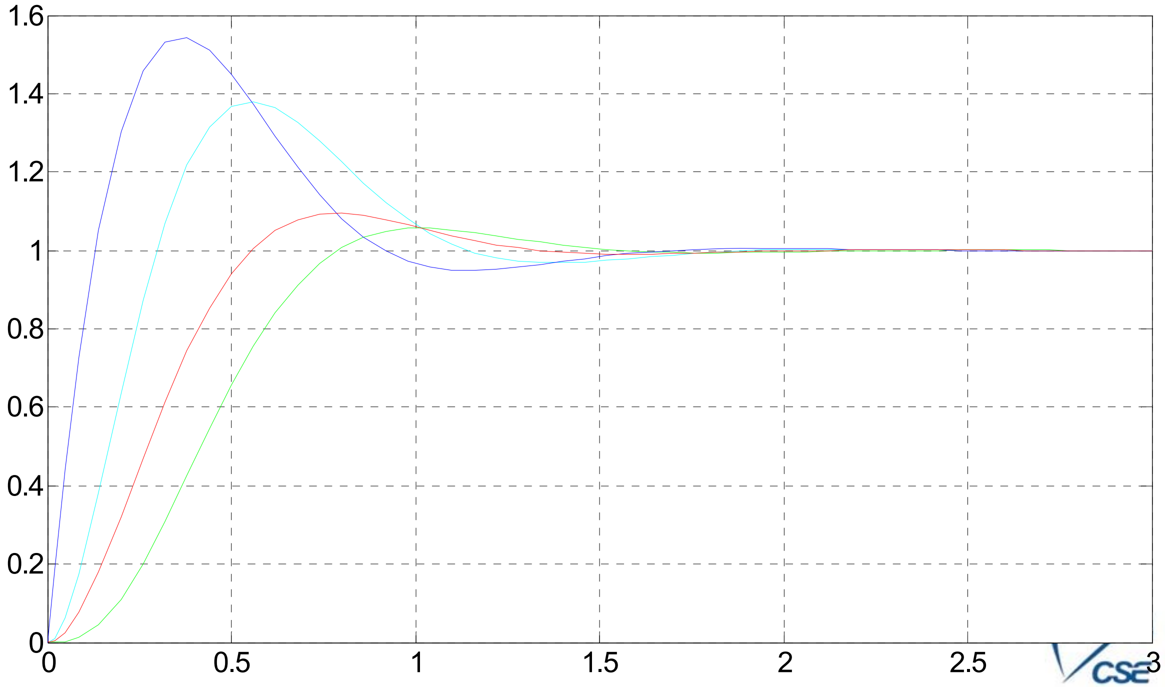
(3) 不忽略零点和极点

$$\frac{10(s+2.5)}{s^2+6s+25} \quad \sigma = 55\%, T_s = 1.33s$$

$$\frac{62.5(s+2.5)}{(s^2+6s+25)(s+6.25)}$$

$$\frac{156.25}{(s^2+6s+25)(s+6.25)} \quad \sigma = 5.5\%, T_s = 1.4s$$

$$\sigma = 38\%, T_s = 1.6s$$



- 增加零点使超调量加大

  调节时间增加

- 增加极点使超调量减小

  调整时间增加

状态空间模型的解算问题

状态空间模型

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$$ 状态方程

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)$$ 输出方程

已知初始状态$\boldsymbol{x}(0)$和输入$\boldsymbol{u}(t)$ $t \ge 0$

求$\boldsymbol{x}(t)$ $t \ge 0$

- 首先考虑齐次状态方程，即输入变量 $u(t)=0$

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)$$

– 如果 $n=1$，则状态方程为标量方程，表示了一个一阶系统。可以很容易求得标量方程的解

$$\dot{x}(t) = ax(t) \Rightarrow x(t) = e^{at}x(0)$$

– 假定初始时刻为 t_0，对于任意初始条件 $x(t_0)$，如果 $x(t_0)$ 已知，则有

$$x(t) = e^{a(t-t_0)}x(t_0)$$

$\dot{x}(t) = ax(t)$ ⟹ $x(t) = e^{at}x(0)$

指数函数 e^{at}的性质：$\dfrac{de^{at}}{dt} = ae^{at}$

. 如果 $n\neq 1$ $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t),\ A \in R^{n\times n}$

设 $x_{ij}(t)(i \in \{1,\cdots,m\},\ j \in \{1,\cdots,n\})$都是定义在区间$(a,b)$上的函数，

则 $m \times n$矩阵 $X(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{m1}(t) & x_{m2}(t) & \cdots & x_{mn}(t) \end{bmatrix}$

称为定义在区间(a,b)上的矩阵值函数

若 $x_{ij}(t)(i \in \{1,\cdots,m\},\ j \in \{1,\cdots,n\})$在区间$(a,b)$上均可导

则 $X(t)$在区间(a,b)上可导

$X(t)$的导数 $\dfrac{dX(t)}{dt} = \begin{bmatrix} \dfrac{dx_{11}(t)}{dt} & \dfrac{dx_{12}(t)}{dt} & \cdots & \dfrac{dx_{1n}(t)}{dt} \\ \dfrac{dx_{21}(t)}{dt} & \dfrac{dx_{22}(t)}{dt} & \cdots & \dfrac{dx_{2n}(t)}{dt} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{dx_{m1}(t)}{dt} & \dfrac{dx_{m2}(t)}{dt} & \cdots & \dfrac{dx_{mn}(t)}{dt} \end{bmatrix}$

$$\frac{d(At^q)}{dt} = \frac{d\left[a_{ij}t^q\right]}{dt} = \left[qa_{ij}t^{q-1}\right] = qAt^{q-1}$$

指数函数 e^{at} 的性质：$\dfrac{de^{at}}{dt} = ae^{at}$

$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t), A \in R^{n\times n}$

能否将 e^{at} 推广到方阵？

定义一种矩阵函数 $Y = f(X)$: $R^{n\times n} \to R^{n\times n}$ 具有性质 $\dfrac{df(At)}{dt} = Af(At)$?

复变函数对指数的定义

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^k}{k!} + \cdots, z \text{为复数}$$

$\forall X \in R^{n\times n}$，定义矩阵指数函数

$$\exp[X] = e^X = I + \frac{X}{1!} + \frac{X^2}{2!} + \frac{X^3}{3!} + \cdots + \frac{X^k}{k!} + \cdots$$

$$\forall A \in R^{n\times n}, \forall t \in (0,\infty), e^{At} = I + \frac{At}{1!} + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \cdots + \frac{(At)^k}{k!} + \cdots$$

$$\frac{de^{At}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(I + \frac{At}{1!} + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \cdots + \frac{(At)^k}{k!} + \cdots\right)$$

$$= A + \frac{2A^2t}{2!} + \frac{3A^3t^2}{3!} + \cdots + \frac{kA^kt^{k-1}}{k!} + \cdots$$

$$= A + A\frac{At}{1!} + A\frac{(At)^2}{2!} + \cdots + A\frac{(At)^{k-1}}{(k-1)!} + \cdots = Ae^{At} = e^{At}A$$

状态转移矩阵

$$\dot{x}(t) = ax(t) \Rightarrow x(t) = e^{at}x(0)$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) \Rightarrow \boldsymbol{x}(t) = e^{At}\boldsymbol{x}(0)$$

- **A 是方阵，exp[At] 是与 A 具有相同阶数的方阵**

- **对于线性定常系统，exp[At] 称为系统的状态转移矩阵 (state transition matrix, STM)，可记为**

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = e^{At} = \exp[\boldsymbol{A}t]$$

$$\boldsymbol{\Phi}(t-\tau) = e^{A(t-\tau)} = \exp[\boldsymbol{A}(t-\tau)]$$

$$e^{At} = I + \frac{At}{1!} + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \cdots + \frac{(At)^k}{k!} + \cdots$$

状态转移矩阵

如果 t 和 p 是相互独立的变量，则有

$$\exp[\boldsymbol{A}(t+p)] = \exp[\boldsymbol{A}t]\exp[\boldsymbol{A}p]$$

证： $$e^{At} \cdot e^{Ap} = (\boldsymbol{I} + \frac{\boldsymbol{A}t}{1!} + \frac{(\boldsymbol{A}t)^2}{2!} + \frac{(\boldsymbol{A}t)^3}{3!} + \cdots)(\boldsymbol{I} + \frac{\boldsymbol{A}p}{1!} + \frac{(\boldsymbol{A}p)^2}{2!} + \frac{(\boldsymbol{A}p)^3}{3!} + \cdots)$$

$$= \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A}(t+p) + \boldsymbol{A}^2(\frac{t^2}{2!} + tp + \frac{p^2}{2!}) + \boldsymbol{A}^3(\frac{t^3}{3!} + \frac{1}{2!}t^2p + \frac{1}{2!}tp^2 + \frac{p^3}{3!})\cdots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{A}^k \frac{(t+p)^k}{k!} = e^{A(t+p)}$$

基于上述结论，有

$$\exp[\boldsymbol{A}t]\exp[-\boldsymbol{A}t] = \exp[\boldsymbol{A}0] = I$$

$$\exp[-\boldsymbol{A}t]\exp[\boldsymbol{A}t] = \exp[\boldsymbol{A}0] = I$$

$$[\exp[\boldsymbol{A}t]]^{-1} = \exp[-\boldsymbol{A}t]$$

状态转移矩阵的计算

➢ 对于给定的矩阵 A，计算 STM 闭合形式的方法：

1) 方法 1——直接计算

2) 方法 2—— 利用拉普拉斯变换

3) 方法 3——矩阵 A 对角化

4) 方法 4——Cayley-Hamilton 定理

状态转移矩阵的计算1）直接计算

用定义式 $e^{At} = I + \frac{At}{1!} + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \cdots + \frac{(At)^k}{k!} + \cdots$

例 1 假定 A 矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$，求$\exp[At]$

解：

$$\because \ A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{及} \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = A$$

$$\therefore \ A = A^3 = A^5 = \cdots \quad \text{及} \quad A^2 = A^4 = A^6 = \cdots$$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots & \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^6}{6!} + \cdots \\ 0 & 1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots & t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots \\ 0 & t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots & 1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) & \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) - 1 \\ 0 & \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) & \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \\ 0 & \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) & \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) \end{bmatrix}$$

状态转移矩阵的计算2）拉氏变换

$$\dot{x}(t) = ax(t) \Rightarrow x(t) = e^{at}x(0)$$

➢ 求解 S 域内的解，有

$$\dot{x}(t) = ax(t) \xrightarrow{\text{LT}} sX(s) - x(0) = aX(s)$$

$$x(t) = L^{-1}[(s-a)^{-1}]x(0)$$

➢ 比较通过不同方式求得的解，它们应该相等。于是：

$$\boxed{e^{at} = L^{-1}[(s-a)^{-1}]}$$

状态转移矩阵的计算2）拉氏变换

设 $x_{ij}(t)(i\in\{1,\cdots,m\},\ j\in\{1,\cdots,n\},\ t\in(0,\infty))$的拉氏变换为 $X_{ij}(s)$，

$$X(t)=\begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{m1}(t) & x_{m2}(t) & \cdots & x_{mn}(t) \end{bmatrix}$$ 的拉氏变换定义为

$$X(s)=L[X(t)]=\begin{bmatrix} X_{11}(s) & X_{12}(s) & \cdots & X_{1n}(s) \\ X_{21}(s) & X_{22}(s) & \cdots & X_{2n}(s) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{m1}(s) & X_{m2}(s) & \cdots & X_{mn}(s) \end{bmatrix}$$

相应地， $X(s)$的反拉氏变换定义为

$$X(t)=L^{-1}[X(s)]=\begin{bmatrix} L^{-1}[X_{11}(s)] & L^{-1}[X_{12}(s)] & \cdots & L^{-1}[X_{1n}(s)] \\ L^{-1}[X_{21}(s)] & L^{-1}[X_{22}(s)] & \cdots & L^{-1}[X_{2n}(s)] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ L^{-1}[X_{m1}(s)] & L^{-1}[X_{m2}(s)] & \cdots & L^{-1}[X_{mn}(s)] \end{bmatrix}$$

状态转移矩阵的计算2）拉氏变换

若 $X(t)$ 的拉氏变换为 $X(s)$，则 $\dfrac{dX(t)}{dt}$ 的拉氏变换为

$$\begin{bmatrix} L\left[\dfrac{dx_{11}(t)}{dt}\right] & L\left[\dfrac{dx_{12}(t)}{dt}\right] & \cdots & L\left[\dfrac{dx_{1n}(t)}{dt}\right] \\ L\left[\dfrac{dx_{21}(t)}{dt}\right] & L\left[\dfrac{dx_{22}(t)}{dt}\right] & \cdots & L\left[\dfrac{dx_{2n}(t)}{dt}\right] \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ L\left[\dfrac{dx_{m1}(t)}{dt}\right] & L\left[\dfrac{dx_{m2}(t)}{dt}\right] & \cdots & L\left[\dfrac{dx_{mn}(t)}{dt}\right] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} sX_{11}(s) - x_{11}(0) & sX_{12}(s) - x_{12}(0) & \cdots & sX_{1n}(s) - x_{1n}(0) \\ sX_{21}(s) - x_{21}(0) & sX_{22}(s) - x_{22}(0) & \cdots & sX_{2n}(s) - x_{2n}(0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ sX_{m1}(s) - x_{m1}(0) & sX_{m2}(s) - x_{m2}(0) & \cdots & sX_{mn}(s) - x_{mn}(0) \end{bmatrix}$$

$$= sX(s) - X(0)$$

微分性质依然成立

类似可证，线性性质也依然成立

若 $X(t)$ 的拉氏变换为 $X(s)$，则 $AX(t)B$ 的拉氏变换为 $AX(s)B$

状态转移矩阵的计算2）拉氏变换

- 对比标量方程和状态方程，状态方程的解类似于标量方程的解；利用拉普拉斯变换求解状态方程

$n=1$ $\quad \dot{x}(t) = ax(t) \quad \rightarrow \quad x(t) = e^{at}x(0)$

$\vdots$

$n\neq 1$ $\quad \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{x}(t) = \underline{e^{\boldsymbol{A}t}}\boldsymbol{x}(0)$

LT

$$s\boldsymbol{X}(s) - \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}(s)$$

$$\boldsymbol{x}(t) = \underline{L^{-1}[(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}]}\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0)$$

于是

$$e^{\boldsymbol{A}t} = \boldsymbol{I} + \frac{\boldsymbol{A}t}{1!} + \frac{(\boldsymbol{A}t)^2}{2!} + \frac{(\boldsymbol{A}t)^3}{3!} + \cdots + \frac{(\boldsymbol{A}t)^k}{k!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\boldsymbol{A}t)^k}{k!} = L^{-1}[(sI - \boldsymbol{A})^{-1}]$$

状态转移矩阵的计算2）拉氏变换

例 假定 A 矩阵为 $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$， 求 $\exp[At]$

解：

$$\because \boldsymbol{\Phi}(s)=(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\begin{bmatrix}s & -1 & 0\\ 0 & s & -1\\ 0 & -1 & s\end{bmatrix}^{-1}=\frac{adj(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})}{\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})}=\begin{bmatrix}\frac{1}{s} & \frac{1}{s^2-1} & \frac{1}{s(s^2-1)}\\ 0 & \frac{s}{s^2-1} & \frac{1}{s^2-1}\\ 0 & \frac{1}{s^2-1} & \frac{s}{s^2-1}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{s} & \frac{1}{2}(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+1}) & \frac{1}{2}(\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s+1})-\frac{1}{s}\\ 0 & \frac{1}{2}(\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s+1}) & \frac{1}{2}(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+1})\\ 0 & \frac{1}{2}(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+1}) & \frac{1}{2}(\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s+1})\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=e^{At}=L^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}]=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2}(e^t-e^{-t}) & \frac{1}{2}(e^t+e^{-t})-1\\ 0 & \frac{1}{2}(e^t+e^{-t}) & \frac{1}{2}(e^t-e^{-t})\\ 0 & \frac{1}{2}(e^t-e^{-t}) & \frac{1}{2}(e^t+e^{-t})\end{bmatrix}$$

状态转移矩阵的计算2）拉氏变换

例　假定 A 矩阵为 $A=\begin{bmatrix}0 & 6\\ -1 & -5\end{bmatrix}$，求exp[$At$]

解：

$$\Phi(s)=[sI-A]^{-1}$$

$$e^{At}=\Phi(t)=L^{-1}[(sI-A)^{-1}]$$

$$\Phi(s)=(sI-A)^{-1}=\begin{bmatrix}s & -6\\ 1 & s+5\end{bmatrix}^{-1}=\frac{adj(sI-A)}{\det(sI-A)}$$

$$=\frac{1}{s^2+5s+6}\begin{bmatrix}s+5 & 6\\ -1 & s\end{bmatrix}$$

$$e^{At}=L^{-1}[(sI-A)^{-1}]=L^{-1}\begin{bmatrix}\frac{3}{s+2}-\frac{2}{s+3} & \frac{6}{s+2}-\frac{6}{s+3}\\ \frac{-1}{s+2}+\frac{1}{s+3} & \frac{-2}{s+2}+\frac{3}{s+3}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3e^{-2t}-2e^{-3t} & 6e^{-2t}-6e^{-3t}\\ -e^{-2t}+e^{-3t} & -2e^{-2t}+3e^{-3t}\end{bmatrix}$$

状态转移矩阵的计算3）矩阵对角化

如果 A 是对角阵，则 $\exp[At]$ 也是对角阵

$$A = diag[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n] \Longleftrightarrow e^{At} = diag[e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \cdots, e^{\lambda_n t}]$$

证：

$$e^{At} = I + \frac{At}{1!} + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \cdots + \frac{(At)^k}{k!} + \cdots$$

$$\exp\begin{bmatrix} \lambda_1 t & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 t & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n t \end{bmatrix} + \frac{1}{2!}\begin{bmatrix} \lambda_1^2 t^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^2 t^2 \end{bmatrix} + \cdots$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + \lambda_1 t + \frac{\lambda_1^2 t^2}{2!} + \cdots & & \\ & \ddots & \\ & & 1 + \lambda_n t + \frac{\lambda_n^2 t^2}{2!} + \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

状态转移矩阵的计算3）矩阵对角化

定理：当且仅当$A \in R^{n\times n}$有n个独立（线性无关）的特征向量时，存在非奇异方阵T使$T^{-1}AT$为对角矩阵，其中，T 的各列即是这n 个特征向量

例：$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}$ 能否对角化？若能，求变换阵

解：$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & -2\\ -2 & \lambda-1 & -2\\ -2 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix} = (\lambda-5)(\lambda+1)^2$

求λ=5的特征向量,$(\lambda I - A)\phi = 0$

$$\begin{bmatrix}\lambda-1 & -2 & -2\\ -2 & \lambda-1 & -2\\ -2 & -2 & \lambda-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4 & -2 & -2\\ -2 & 4 & -2\\ -2 & -2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{bmatrix} = 0$$

用高斯消去法，得$\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{bmatrix} = 0$，解为$\begin{bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}q\\ q\\ q\end{bmatrix}, 0 \neq q \in C$.取$q=1$, $\begin{bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$

状态转移矩阵的计算3）矩阵对角化

例：$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}$

求$\lambda=-1$的特征向量，$\begin{bmatrix}-2 & -2 & -2\\ -2 & -2 & -2\\ -2 & -2 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{bmatrix}=0$，解为$\begin{bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}q_1\\ q_2\\ -q_1-q_2\end{bmatrix}, 0\neq\begin{bmatrix}q_1\\ q_2\end{bmatrix}\in C^2$

取$q_1=1, q_2=0, \begin{bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -1\end{bmatrix}$，取$q_1=0, q_2=1, \begin{bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ -1\end{bmatrix}$

3个线性无关的特征向量$\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\ 0\\ -1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\ 1\\ -1\end{bmatrix}$ A可对角化

变换阵T即由n个线性无关的特征向量构成

$$T=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{bmatrix} \Rightarrow \Lambda=T^{-1}AT=\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

定理：属于不同特征值的特征向量是线性无关的

推论：若$A\in R^{n\times n}$有n个互异特征值，A可对角化

形为 $\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}$ 的矩阵称为约当块

$$e^{At} = I + \frac{At}{1!} + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \cdots + \frac{(At)^k}{k!} + \cdots$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}^m = \begin{bmatrix} \lambda^m & \frac{d(\lambda^m)}{d\lambda} & \frac{1}{2!}\frac{d^2(\lambda^m)}{d\lambda^2} & \cdots & \frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}(\lambda^m)}{d\lambda^{n-1}} \\ & \lambda^m & \frac{d(\lambda^m)}{d\lambda} & \ddots & \vdots \\ & & \lambda^m & \ddots & \frac{1}{2!}\frac{d^2(\lambda^m)}{d\lambda^2} \\ & & & \ddots & \frac{d(\lambda^m)}{d\lambda} \\ & & & & \lambda^m \end{bmatrix}$$

$$\exp\left[\begin{bmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix} t\right] = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{1}{2!}t^2e^{\lambda t} & \cdots & \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{\lambda t} \\ & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \ddots & \vdots \\ & & e^{\lambda t} & \ddots & \frac{1}{2!}t^2e^{\lambda t} \\ & & & \ddots & te^{\lambda t} \\ & & & & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

状态转移矩阵的计算3）矩阵对角化

由若干个约当块为对角块组成的块对角阵称为约当形矩阵

$$J=\begin{bmatrix}1&1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&4&0&0&0\\0&0&0&4&1&0\\0&0&0&0&4&1\\0&0&0&0&0&4\end{bmatrix}$$

$$e^{Jt}=\begin{bmatrix}e^{t}&te^{t}&0&0&0&0\\0&e^{t}&0&0&0&0\\0&0&e^{4t}&0&0&0\\0&0&0&e^{4t}&te^{4t}&\dfrac{t^2e^{4t}}{2}\\0&0&0&0&e^{4t}&te^{4t}\\0&0&0&0&0&e^{4t}\end{bmatrix}$$

定理：$\forall A\in R^{n\times n}$，存在非奇异方阵$T$使$T^{-1}AT$为约当形矩阵

状态转移矩阵的计算3）矩阵对角化

对于任意非奇异矩阵 $\boldsymbol{T}$，有

$$\exp[\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}t] = \boldsymbol{T}^{-1}\exp[\boldsymbol{A}t]\boldsymbol{T}$$

即 $$\boldsymbol{T}\exp[\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}t]\boldsymbol{T}^{-1} = \exp[\boldsymbol{A}t]$$

证：

$$\left(T^{-1}AT\right)^m = \left(T^{-1}AT\right)\left(T^{-1}AT\right)\left(T^{-1}AT\right)\cdots\left(T^{-1}AT\right) = T^{-1}A^mT$$

$$\begin{aligned}
\exp[T^{-1}ATt] &= I + \frac{T^{-1}ATt}{1!} + \frac{(T^{-1}ATt)^2}{2!} + \cdots \\
&= T^{-1}T + T^{-1}\frac{At}{1!}T + T^{-1}\frac{(At)^2}{2!}T + \cdots \\
&= T^{-1}\left(I + \frac{At}{1!} + \frac{(At)^2}{2!} + \cdots\right)T = T^{-1}\exp[At]T
\end{aligned}$$

状态转移矩阵的计算3）矩阵对角化

例：$A=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{bmatrix}$,求$e^{At}$

解：A可对角化，$T=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&-1&-1\end{bmatrix}$

$$T^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&1&1\\2&-1&-1\\-1&2&-1\end{bmatrix},\quad \Lambda=T^{-1}AT=\begin{bmatrix}5&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

$$e^{At}=Te^{\Lambda t}T^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{5t}&&\\&e^{-t}&\\&&e^{-t}\end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&1&1\\2&-1&-1\\-1&2&-1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}e^{5t}+2e^{-t}&e^{5t}-e^{-t}&e^{5t}-e^{-t}\\e^{5t}-e^{-t}&e^{5t}+2e^{-t}&e^{5t}-e^{-t}\\e^{5t}-e^{-t}&e^{5t}-e^{-t}&e^{5t}+2e^{-t}\end{bmatrix}$$

状态转移矩阵的计算3）矩阵对角化

对于友矩阵 $A(A=A_C)$，当矩阵具有n个不同的特征值 λ_i 时，可以很容易地求得 T（称为 Vandermonde 矩阵，即范德蒙矩阵）

$$A_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = diag[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n]$$

状态转移矩阵的计算4）Cayley-Hamilton定理

设$a_{ij}(\lambda)(i\in\{1,\cdots,m\}, j\in\{1,\cdots,n\})$均为多项式，以$a_{ij}(\lambda)$为元素的$m\times n$矩阵

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & \cdots & a_{1n}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & \cdots & a_{2n}(\lambda) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}(\lambda) & a_{m2}(\lambda) & \cdots & a_{mn}(\lambda) \end{bmatrix}$$

称为λ矩阵或多项式矩阵

多项式$a_{ij}(\lambda)(i\in\{1,\cdots,m\}, j\in\{1,\cdots,n\})$中的最高次数称为$A(\lambda)$的次数

如：方阵A的特征矩阵$\lambda I-A$是1次λ矩阵

如果$m\times n$维矩阵$A(\lambda)$的次数为k，则$A(\lambda)$可表示为

$$A(\lambda)=A_k\lambda^k+A_{k-1}\lambda^{k-1}+\cdots+A_1\lambda+A_0$$

其中$A_i(i\in\{1,\cdots,k\})$是$m\times n$常数矩阵，并且A_k为非零矩阵

如：$A(\lambda)=\begin{bmatrix} -\lambda+1 & \lambda^2 \\ \lambda & \lambda \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\lambda^2+\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\lambda+\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

➢ 凯莱-哈密尔顿(Cayley-Hamilton)定理

设$n\times n$维矩阵A的特征方程为 $|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0=0$

则， $\boldsymbol{A}^n+a_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1}+\cdots+a_1\boldsymbol{A}+a_0\boldsymbol{I}=0$

证 $(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\dfrac{adj(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})}{|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|}$ $\Rightarrow$ $adj(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\cdot(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$

*adj(λI-A)*是λ的*n*-1次矩阵 $\Rightarrow$ $\mathrm{adj}(\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{B}_{n-1}\lambda^{n-1}+\boldsymbol{B}_{n-2}\lambda^{n-2}+\cdots+\boldsymbol{B}_1\lambda+\boldsymbol{B}_0$

$$
\begin{aligned}
&(B_{n-1}\lambda^{n-1}+B_{n-2}\lambda^{n-2}+\cdots+B_1\lambda+B_0)(I\lambda-A)\\
&=B_{n-1}\lambda^n+(B_{n-2}-B_{n-1}A)\lambda^{n-1}+(B_{n-3}-B_{n-2}A)\lambda^{n-2}+\cdots+(B_0-B_1A)\lambda-B_0A\\
&=(\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0)I\\
&=I\lambda^n+a_{n-1}I\lambda^{n-1}+\cdots+a_1I\lambda+a_0I
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&B_{n-1}=I\\
&B_{n-2}-B_{n-1}A=a_{n-1}I\\
&B_{n-3}-B_{n-2}A=a_{n-2}I\\
&\quad\vdots\\
&B_0-B_1A=a_1I\\
&-B_0A=a_0I
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&B_{n-1}A^n=A^n\\
&B_{n-2}A^{n-1}-B_{n-1}A^n=a_{n-1}A^{n-1}\\
&B_{n-3}A^{n-2}-B_{n-2}A^{n-1}=a_{n-2}A^{n-2}\\
&\quad\vdots\\
&B_0A-B_1A^2=a_1A\\
&-B_0A=a_0I
\end{aligned}
$$

等式相加，得

$\boldsymbol{A}^n+a_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1}+\cdots+a_1\boldsymbol{A}+a_0\boldsymbol{I}=0$

状态转移矩阵的计算4）Cayley-Hamilton定理

➤ **凯莱-哈密尔顿(Cayley-Hamilton)定理**

设$n\times n$维矩阵A的特征方程为 $|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0=0$

则， $\boldsymbol{A}^n+a_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1}+\cdots+a_1\boldsymbol{A}+a_0\boldsymbol{I}=0$

$$A^n=-a_{n-1}A^{n-1}-\cdots-a_1A-a_0I$$

$$A^{n+1}=AA^n=A(-a_{n-1}A^{n-1}-a_{n-2}A^{n-2}\cdots-a_1A-a_0I)$$

$$=-a_{n-1}A^n-a_{n-2}A^{n-1}-\cdots-a_1A^2-a_0A$$

$$=-a_{n-1}(-a_{n-1}A^{n-1}-a_{n-2}A^{n-2}-\cdots-a_1A-a_0I)-a_{n-2}A^{n-1}-\cdots-a_1A^2-a_0A$$

$$=(a_{n-1}^2-a_{n-2})A^{n-1}+(a_{n-1}a_{n-2}-a_{n-3})A^{n-2}+\cdots+(a_{n-1}a_1-a_0)A+a_{n-1}a_0I$$

$$\vdots$$

➤ **推论1：矩阵A的 $k(k\geq n)$ 次幂可表示为A的 $(n-1)$ 阶多项式**

$$\boldsymbol{A}^k=\sum_{m=0}^{n-1}\beta_{mk}\boldsymbol{A}^m,k\geq n$$

状态转移矩阵的计算4）Cayley-Hamilton定理

- **推论1：** 矩阵A的 $k(k\geq n)$ 次幂可表示为A的 $(n$-$1)$ 阶多项式

$$A^k=\sum_{m=0}^{n-1}\beta_{mk}A^m,k\geq n$$

$$e^{At}=I+At+\frac{1}{2!}A^2t^2+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}A^{n-1}t^{n-1}+\frac{1}{n!}A^nt^n+\frac{1}{(n+1)!}A^{n+1}t^{n+1}+\cdots$$

$$=I+tA+\frac{t^2}{2!}A^2+\cdots+\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}A^{n-1}+\frac{t^n}{n!}\sum_{m=0}^{n-1}\beta_{mn}A^m+\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\sum_{m=0}^{n-1}\beta_{m,n+1}A^m+\cdots$$

$$=\sum_{m=0}^{n-1}\alpha_m(t)A^m$$

- **推论2：** 矩阵指数 e^{At} 可表示为A的 $(n$-$1)$ 阶多项式

$$e^{At}=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k(t)A^k$$

状态转移矩阵的计算4）Cayley-Hamilton定理

- **推论2：矩阵指数 e^{At} 可表示为A的 $(n\text{-}1)$ 阶多项式**

$$e^{At}=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k(t)A^k$$

如何确定$\alpha_k(t)$?

考虑A有n个互异特征值的情况，存在T使$T^{-1}AT=\mathrm{diag}[\lambda_1,\cdots,\lambda_n]=\Lambda$

$$T^{-1}e^{At}T=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k(t)T^{-1}A^kT \Leftrightarrow e^{\Lambda t}=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k(t)\Lambda^k$$

$$\begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t}\end{bmatrix}=\alpha_0(t)\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{bmatrix}+\alpha_1(t)\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}+\cdots+\alpha_{n-1}(t)\begin{bmatrix} \lambda_1^{n-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^{n-1}\end{bmatrix}$$

$$e^{\lambda_1 t}=\alpha_0(t)+\alpha_1(t)\lambda_1+\cdots+\alpha_{n-1}(t)\lambda_1^{n-1}$$

$$e^{\lambda_2 t}=\alpha_0(t)+\alpha_1(t)\lambda_2+\cdots+\alpha_{n-1}(t)\lambda_2^{n-1}$$

$$\vdots$$

$$e^{\lambda_n t}=\alpha_0(t)+\alpha_1(t)\lambda_n+\cdots+\alpha_{n-1}(t)\lambda_n^{n-1}$$

$$\begin{bmatrix}\alpha_0(t)\\ \alpha_1(t)\\ \vdots\\ \alpha_{n-1}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1}\\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t}\\ e^{\lambda_2 t}\\ \vdots\\ e^{\lambda_n t}\end{bmatrix}$$

状态转移矩阵的计算4）Cayl

$$\begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

$$e^{\boldsymbol{A}t} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(t)\boldsymbol{A}^k$$

例 5 假定 A 矩阵为 $A = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$，求$\exp[At]$

解：特征方程为 $|\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = \lambda^2 + 5\lambda + 6 = 0$

特征方程根为 $\lambda_1 = -2$，$\lambda_2 = -3$

$$\begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ e^{-3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^{-2t} - 2e^{-3t} \\ e^{-2t} - e^{-3t} \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \alpha_0(t)\boldsymbol{I} + \alpha_1(t)\boldsymbol{A}$$

$$= \begin{bmatrix} 3e^{-2t} - 2e^{-3t} & \\ & 3e^{-2t} - 2e^{-3t} \end{bmatrix} + (e^{-2t} - e^{-3t}) \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3e^{-2t} - 2e^{-3t} & 6e^{-2t} - 6e^{-3t} \\ -e^{-2t} + e^{-3t} & -2e^{-2t} + 3e^{-3t} \end{bmatrix}$$

状态空间模型的解算

$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$　　已知初始状态$\boldsymbol{x}(0)$和输入$\boldsymbol{u}(t)$,求$\boldsymbol{x}(t)$　$t\geq 0$

– **方法 1 直接求解方程（时域）**

$$A(t)=B(t)C(t)=\begin{bmatrix}a(t) & b(t)\\ c(t) & d(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e(t) & f(t)\\ g(t) & h(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a(t)e(t)+b(t)g(t) & a(t)f(t)+b(t)h(t)\\ c(t)e(t)+d(t)g(t) & c(t)f(t)+d(t)h(t)\end{bmatrix}$$

$$\frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t}=\begin{bmatrix}\dot{a}(t)e(t)+a(t)\dot{e}(t)+\dot{b}(t)g(t)+b(t)\dot{g}(t) & \dot{a}(t)f(t)+a(t)\dot{f}(t)+\dot{b}(t)h(t)+b(t)\dot{h}(t)\\ \dot{c}(t)e(t)+c(t)\dot{e}(t)+\dot{d}(t)g(t)+d(t)\dot{g}(t) & \dot{c}(t)f(t)+c(t)\dot{f}(t)+\dot{d}(t)h(t)+d(t)\dot{h}(t)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\dot{a}(t) & \dot{b}(t)\\ \dot{c}(t) & \dot{d}(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e(t) & f(t)\\ g(t) & h(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a(t) & b(t)\\ c(t) & d(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{e}(t) & \dot{f}(t)\\ \dot{g}(t) & \dot{h}(t)\end{bmatrix}=\frac{\mathrm{d}B(t)}{\mathrm{d}t}C(t)+B(t)\frac{\mathrm{d}C(t)}{\mathrm{d}t}$$

设$m\times n$矩阵值函数$M(t)$和$n\times p$矩阵值函数$N(t)$均可导，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[M(t)N(t)]=\frac{\mathrm{d}M(t)}{\mathrm{d}t}N(t)+M(t)\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$\int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=A(\beta)-A(\alpha)$$

对于矩阵值函数$A(t)=[a_{ij}(t)]$,定义$\int_\alpha^\beta A(t)\mathrm{d}t=\left[\int_\alpha^\beta a_{ij}(t)\mathrm{d}t\right]$

$$\int_\alpha^\beta AB(t)C\mathrm{d}t=A\int_\alpha^\beta B(t)\mathrm{d}tC$$

状态空间模型的解算

e^{-At} 是方阵，$x(t)$ 是 $n\times1$ 的状态向量，于是有

$$\frac{d}{dt}[e^{-At}\boldsymbol{x}(t)]=e^{-At}\dot{\boldsymbol{x}}(t)-e^{-At}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)=e^{-At}[\dot{\boldsymbol{x}}(t)-\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)]$$

对于状态方程

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$$

$$\frac{d}{dt}[e^{-At}\boldsymbol{x}(t)]=e^{-At}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$$

将该方程在 0 到 t 的时间区间上进行积分

$$e^{-At}\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}(0)=\int_0^t e^{-A\tau}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau$$

$$e^{At}[e^{-At}\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{x}(0)]=e^{At}\left[\int_0^t e^{-A\tau}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau\right]$$

$$\boldsymbol{x}(t)=e^{At}\boldsymbol{x}(0)+\int_0^t e^{A(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0)+\int_0^t\boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau\quad t\ge0$$

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t-t_0)\boldsymbol{x}(t_0)+\int_{t_0}^t\boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)d\tau,\ t\ge t_0$$

状态转移方程

令 $\beta=t-\tau$

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0)+\int_0^t\boldsymbol{\Phi}(\beta)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t-\beta)d\beta$$

状态空间模型的解算

$$\boldsymbol{x}(t)=e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0)+\int_0^t e^{\boldsymbol{A}(t-\tau)}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0)+\int_0^t \boldsymbol{\Phi}(t-\tau)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0)+\int_0^t \boldsymbol{\Phi}(\beta)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t-\beta)\mathrm{d}\beta$$

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{x}_{zi}(t)+\boldsymbol{x}_{zs}(t)$$

零状态响应：$x(0)=0$

零输入响应：$u(t)=0$

全响应 = 零输入响应+零状态响应

状态空间模型的解算

例　初始状态$x_1(0)=2, x_2(0)=1$，求单位阶跃 $u(t)=1$ 作用下的$y(t)$

$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix}0 & 6\\ -1 & -5\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)+2u(t)$$

解：由前例

$$\Phi(t)=e^{At}=\begin{bmatrix}3e^{-2t}-2e^{-3t} & 6e^{-2t}-6e^{-3t}\\ -e^{-2t}+e^{-3t} & -2e^{-2t}+3e^{-3t}\end{bmatrix}$$

$$\because \boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0)+\int_0^t \boldsymbol{\Phi}(\beta)\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t-\beta)\mathrm{d}\beta$$

$$=\begin{bmatrix}3e^{-2t}-2e^{-3t} & 6e^{-2t}-6e^{-3t}\\ -e^{-2t}+e^{-3t} & -2e^{-2t}+3e^{-3t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix}3e^{-2\beta}-2e^{-3\beta} & 6e^{-2\beta}-6e^{-3\beta}\\ -e^{-2\beta}+e^{-3\beta} & -2e^{-2\beta}+3e^{-3\beta}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\cdot 1\mathrm{d}\beta$$

$$=\begin{bmatrix}12e^{-2t}-10e^{-3t}\\ -4e^{-2t}+5e^{-3t}\end{bmatrix}+\int_0^t\begin{bmatrix}6e^{-2\beta}-6e^{-3\beta}\\ -2e^{-2\beta}+3e^{-3\beta}\end{bmatrix}\mathrm{d}\beta$$

$$=\begin{bmatrix}12e^{-2t}-10e^{-3t}\\ -4e^{-2t}+5e^{-3t}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1-3e^{-2t}+2e^{-3t}\\ e^{-2t}-e^{-3t}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+9e^{-2t}-8e^{-3t}\\ -3e^{-2t}+4e^{-3t}\end{bmatrix}$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1+9e^{-2t}-8e^{-3t}\\ -3e^{-2t}+4e^{-3t}\end{bmatrix}+2=3+6e^{-2t}-4e^{-3t}$$

状态空间模型的解算

– 方法 2 利用拉普拉斯变换（S 域）

状态方程

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$$

LT

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}(s) &= [s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}]^{-1}\boldsymbol{x}(0) + [s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}]^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s) \\ &= \boldsymbol{\Phi}(s)\boldsymbol{x}(0) + \boldsymbol{\Phi}(s)\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)\end{aligned}$$

LT^{-1}

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{x}(0) + L^{-1}[\boldsymbol{\Phi}(s)\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)]$$

状态空间模型的解算

例 初始状态$x_1(0)=2, x_2(0)=1$，求单位阶跃 $u(t)=1$ 作用下的$y(t)$

$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{bmatrix}0 & 6\\ -1 & -5\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)+2u(t)$$

$$\boldsymbol{X}(s)=\boldsymbol{\Phi}(s)\boldsymbol{x}(0)+\boldsymbol{\Phi}(s)\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}(s)$$

解： 由前例 $\boldsymbol{\Phi}(s)=\dfrac{1}{s^2+5s+6}\begin{bmatrix}s+5 & 6\\ -1 & s\end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{X}(s)=\frac{1}{s^2+5s+6}\begin{bmatrix}s+5 & 6\\ -1 & s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}+\frac{1}{s^2+5s+6}\begin{bmatrix}s+5 & 6\\ -1 & s\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\frac{1}{s}$$

$$=\frac{1}{s^2+5s+6}\begin{bmatrix}2s+16\\ s-2\end{bmatrix}+\frac{1}{s(s^2+5s+6)}\begin{bmatrix}6\\ s\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{2s^2+16s+6}{s(s+2)(s+3)}\\ \dfrac{s-1}{(s+2)(s+3)}\end{bmatrix}$$

$$y(t)=3+6e^{-2t}-4e^{-3t}$$

$$Y(s)=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{2s^2+16s+6}{s(s+2)(s+3)}\\ \dfrac{s-1}{(s+2)(s+3)}\end{bmatrix}+\frac{2}{s}=\frac{5s^2+25s+18}{s(s+2)(s+3)}=\frac{3}{s}+\frac{6}{s+2}-\frac{4}{s+3}$$

状态空间模型的解算

例 已知系统的状态转移矩阵为

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix} 3e^{-t}-2e^{-2t} & 3e^{-t}-3e^{-2t} \\ -4e^{-2t}+4e^{-t} & -3e^{-2t}+4e^{-t} \end{bmatrix}$$

请求出$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)$和$\boldsymbol{A}$。

解: (1) 根据状态转移矩阵的运算性质有

$$\boldsymbol{\Phi}^{-1}(t)=\boldsymbol{\Phi}(-t)=\begin{bmatrix} 3e^{t}-2e^{2t} & 3e^{t}-3e^{2t} \\ -4e^{2t}+4e^{t} & -3e^{2t}+4e^{t} \end{bmatrix}$$

(2)关于$\boldsymbol{\Phi}(t)$的微分有

$$\frac{d}{dt}\exp(\boldsymbol{A}t)=\boldsymbol{A}\exp(\boldsymbol{A}t)=\exp(\boldsymbol{A}t)\boldsymbol{A}$$

$$\left.\frac{d}{dt}\exp(\boldsymbol{A}t)\right|_{t=0}=\boldsymbol{A}\exp(0)=\boldsymbol{A}$$

$$\therefore \boldsymbol{A}=\left.\frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=\begin{bmatrix} -3e^{-t}+4e^{-2t} & -3e^{-t}+6e^{-2t} \\ 8e^{-2t}-4e^{-t} & 6e^{-2t}-4e^{-t} \end{bmatrix}_{t=0}=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Thanks !