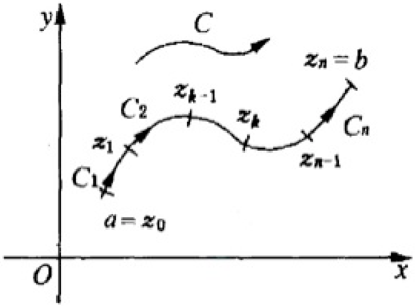
第三章复变函数的积分

§3.1 复积分的定义与计算

定义: 设有向曲线 C: $z = z(t)\,(\alpha \le t \le \beta)$ 以 $a = z(\alpha)$ 为起点，$b = z(\beta)$ 为终点，$f(z)$ 在 C 上有定义。把曲线任意分割成 n 小段，分点为 $a = z_0 < z_1 < \cdots < z_{k-1} < z_k < \cdots < z_n = b$。



在每一子弧段 $C_k = \overline{z_{k-1}z_k}$ 上任取一点 ζ_k, $k = 1, 2, \cdots, n$ 并作和式:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$$

其中 $\Delta z_k = z_k - z_k - 1$, $\zeta_k = z(\tau_k)$, $k = 1, \cdots, n$.

复积分的定义（续）

记 $\Delta s_k = |\overline{z_{k-1}z_k}|$ 为子弧段 C_k 的长度并令 $\delta = \max_k \Delta s_k$. 如当分点无限增多 $(n\to\infty)$ 且 $\delta\to 0$ 时，前述和式 S_k 的极限存在，则称 $f(z)$ 沿曲线 C 可积，记作

$$
\begin{aligned}
S = \int_C f(z)\mathrm{d}z &= \lim_{\substack{n\to\infty,\\ \delta\to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k \\
&= \lim_{\substack{n\to\infty,\\ \rho\to 0}} \sum_{k=1}^{n} f(z(\tau_k))\frac{z_k - z_{k-1}}{t_k - t_{k-1}}(t_k - t_{k-1}) \\
&= \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

其中 $\rho = \max_k |\Delta t_k|$, 因此当 $\delta\to 0$ 时 $\rho\to 0$, $\tau_k\to t_k$。

注：

1. 如果 C 为闭曲线，积分也记作 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z$, 这样的积分也称为围道积分；

2. 如果 C 为以 1 为中心，1 为半径的圆周，积分也记作 $\oint_{|z-1|=1} f(z)\mathrm{d}z$;

3. 如果 C 为闭区间，$f(z)=u(x)$，则复积分的定义就是一元实函数的定积分。

复积分的计算

定理 3.1.1 假设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在曲线 C 上连续，则函数 $f(z)$ 的复积分一定存在且有

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_C u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y+\mathrm{i}\int_C v\mathrm{d}x+u\mathrm{d}y.$$

证明： 设 $z_k=x_k+\mathrm{i}y_k$, $k=1,2,\cdots,n$.
$\Delta z_k=z_k-z_{k-1}=\Delta x_k+\mathrm{i}\Delta y_k$, $\zeta_k=\xi_k+\mathrm{i}\eta_k$. 则

$$S_n=\sum_{k=1}^n f(\zeta_k)\Delta z_k=\sum_{k=1}^n\big[u(\xi_k,\eta_k)+\mathrm{i}v(\xi_k,\eta_k)\big](\Delta x_k+\mathrm{i}\Delta y_k)$$

定理 3.1.1 的证明（续）

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n}\left[u(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k - v(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k\right] \\
&\quad + \mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\left[v(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k + u(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k\right] \\
&\to \int_C u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y + \mathrm{i}\int_C v\,\mathrm{d}x + u\,\mathrm{d}y,
\end{aligned}
$$

当 $n\to\infty, \max_k z_k \to 0$。

复积分的计算

定理 3.1.2 假设 $f(z)$ 在曲线 C 上连续，C 的参数表示式为 $z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t)\,(\alpha\leq t\leq\beta)$。则函数 $f(z)$ 在 C 上可积且

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)\mathrm{d}t.$$

证明：

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_C u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y+\mathrm{i}\int_C v\mathrm{d}x+u\mathrm{d}y$$

$$=\int_\alpha^\beta u(x(t),y(t))x'(t)\mathrm{d}t-v(x(t),y(t))y'(t)\mathrm{d}t$$

$$+\mathrm{i}\int_\alpha^\beta v(x(t),y(t))x'(t)\mathrm{d}t+u(x(t),y(t))y'(t)\mathrm{d}t$$

定理 3.1.2 的证明（续）

$$
\begin{aligned}
&\int_C f(z)\mathrm{d}z \\
=\ &\int_\alpha^\beta \left[u(x(t), y(t)) + \mathrm{i}v(x(t), y(t))\right]\left[x'(t) + \mathrm{i}y'(t)\right]\mathrm{d}t \\
=\ &\int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

复积分的性质

设 $f(z)$、$g(z)$ 在逐段光滑的有向曲线 C 上连续

1. 线性性: $\int_C (af + bg)\mathrm{d}z = a\int_c f\mathrm{d}z + b\int_c g\mathrm{d}z,\ a, b \in \mathbb{C}$
2. 设 C^- 为 C 的逆向曲线，则 $\int_{C^-} f(z)\mathrm{d}z = -\int_C f(z)\mathrm{d}z$
3. $C = C_1 + C_2 \Longrightarrow \int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z$
4. $\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \leq \int_C |f(z)||\mathrm{d}z| = \int_C |f(z)|\mathrm{d}s \leq ML$
   (需假设 $f(z)$ 在 C 上有界, $|f(z)| \leq M$, L 为 C 的长度)

一些例子

例 1：在以下曲线上计算 $\int_C |z| \mathrm{d}z$

1) $C: \alpha = \mathrm{i} \to \beta = -\mathrm{i}$ 的直线段；

2) C: 左半平面以原点为中心逆时针方向的单位半圆周

解：1) 线段 $\alpha\beta$ 的参数方程为 $z = \mathrm{i}t\,(t \in [-1, 1])$

$$\mathrm{d}z = \mathrm{i}\mathrm{d}t,\ |z| = |\mathrm{i}t| = |t| \Longrightarrow$$

$$\int_C |z|\mathrm{d}z = \int_1^{-1} |t|\mathrm{i}\mathrm{d}t = -\mathrm{i}\left(\int_{-1}^{0} -t\mathrm{d}t + \int_0^1 t\mathrm{d}t\right) = -\mathrm{i}$$

2) C 的参数方程为 $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},\ \theta \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

$$\mathrm{d}z = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta,\ |z| = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = 1 \Longrightarrow \int_C |z|\mathrm{d}z = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} = -2\mathrm{i}$$

——积分值与路径有关!!

一些例子（续）

例 2：计算 $I=\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-z_0)^n}$, $n\in\mathbb{Z}$, $C:\ |z-z_0|=r>0$

解：1) C 的参数方程为 $z=z_0+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $0\le\theta\le 2\pi \Longrightarrow \mathrm{d}z=\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta$

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta}{(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n}=\mathrm{i}r^{1-n}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(1-n)\theta}\mathrm{d}\theta=\frac{r^{1-n}}{1-n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(1-n)\theta}\Big|_0^{2\pi}$$ ——除非, $n=1$!!

请牢牢记住这个积分★★★★★★★★★★

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z-z_0}=2\pi\mathrm{i},\ C:\ |z-z_0|=r>0$$

一些例子（续）

例 3: 证明 $\left|\oint_C \frac{z+1}{z-1}\mathrm{d}z\right| \leq 8\pi,\ C: |z-1| = 2 > 0$

证明:
$$\left|\oint_C \frac{z+1}{z-1}\mathrm{d}z\right| \leq \oint_C \left|\frac{z+1}{z-1}\right||\mathrm{d}z| = \oint_C \frac{|z+1|}{2}|\mathrm{d}z|$$
$$\leq \oint_C \frac{|z-1|+2}{2}|\mathrm{d}z| = 2\oint_C |\mathrm{d}z| = 8\pi$$

再例如
$$\oint_{|z|=1}\left|\frac{\mathrm{d}z}{z}\right| =? \qquad \oint_{|z|=1}\frac{\mathrm{d}z}{|z|} =? \qquad \oint_{|z|=1}\frac{|\mathrm{d}z|}{z} =?$$

一些例子（续）

例 4：计算 $\displaystyle\int_{C_i} z^2 \mathrm{d}z$, $C_i = C_1, C_2$ 如图所示

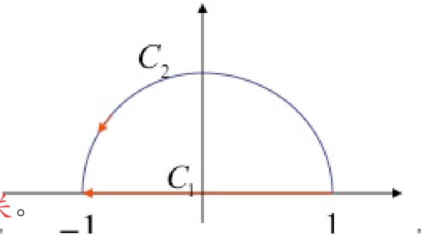
解：$C_1 : z = x, y = 0, x : -1 \to 1$

$\Longrightarrow \int_{C_1} z^2\, dz = \int_1^{-1} x^2 \mathrm{d}x = -\dfrac{2}{3}$;

$C_2 : z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \theta : 0 \to \pi$

$\Longrightarrow \int_{C_2} z^2\, dz = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{d}\theta = -\dfrac{2}{3}$;

——这里，积分与路径无关,仅与起点和终点有关。



另外，显然有 $\displaystyle\oint_{C=\pm(C_1-C_2)} z^2 \mathrm{d}z = 0$。

§3.2 柯西积分定理

定理 1 (Cauchy, 1825)：如果函数 $f(z)$ 在单连通域 D 内处处解析，则它在 D 内任何一条封闭曲线 C 上积分为零。

注 1：定理中的曲线 C 可以不是简单曲线；此定理成立的条件之一是曲线 C 要属于区域 D——完全被包含即可

注 2：如果曲线 C 是 D 的边界 $(C = \partial D)$，函数 $f(z)$ 在 D 内与 C 上解析，即在闭区域 $D + C$ 上解析；甚至 $f(z)$ 只需在 D 内解析，在闭区域 $D + C$ 上连续，则 $f(z)$ 在边界上的积分仍然有 $\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0$

黎曼的证明 (1851)

假设 $f'(z)$ 连续,令 $z=x+\mathrm{i}y, f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$, 则

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=\oint_C u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y+\mathrm{i}\oint_C v\mathrm{d}x+u\mathrm{d}y$$

由于 $f'(z)$ 连续, $f'(z)=u_x+\mathrm{i}v_x=v_y-\mathrm{i}u_y$。因此由之前定理, u_x, u_y, v_x, v_y 都是连续的,且满足 CR 方程。由格林公式可以得到:

$$\oint_C u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y=\iint_D[-v_x-u_y]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

$$\oint_C v\mathrm{d}x+u\mathrm{d}y=\iint_D[u_x-v_y]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

□

1900 年古莎（Goursat）证明

不需假设 $f'(z)$ 的连续性

推论

如果函数 $f(z)$ 在单连通域 D 内处处解析, C 属于 D, $\Longrightarrow$

则 $\displaystyle\int_C f(z)\mathrm{d}z$ 与路径无关，仅与起点和终点有关

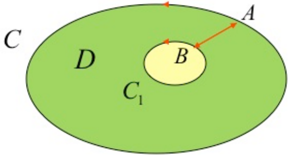
推广到多连通域的情形

曲线的方向：逆时针方向

边界曲线的正向：当点沿着曲线前进时，区域 D 始终在曲线的左边

定理 2 假设 C 及 C_1 为任意两条简单闭曲线，C_1 在 C 内部。设函数 $f(z)$ 在 C 及 C_1 所围的二连域 D 内解析，在边界上连续，则

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \oint_{C_1} f(z)\mathrm{d}z$$



证明：在 C 上任取一点 A，在 C_1 上任取一点 B，则由简单闭曲线 $\Gamma = C^+ + \overrightarrow{AB} + C_1^- + \overrightarrow{BA}$ 围成了一个单连通域 $\Longrightarrow \oint_\Gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$

这说明。。。。。。

解析函数沿简单闭曲线积分不因闭曲线在区域内作连续变形而改变它的值——闭路变形原理

推论（复合闭路定理）：

设 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 为互不包含且互不相交的简单闭曲线，它们都被包含在简单闭曲线 C 中。D 为由边界曲线 $\Gamma = C \cup C_1^- \cup C_2^- \cup \cdots \cup C_n^-$ 所围成的多连通区域，$f(z)$ 在 D 内解析，在 $\overline{D} = D \cup \Gamma$ 上连续，则

$$\oint_\Gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \quad \text{或} \quad \oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{n} \oint_{C_i} f(z)\,\mathrm{d}z$$

例 1: 求 $\displaystyle\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z^2-z}$, C 为包含 0 与 1 的任何正向简单闭曲线

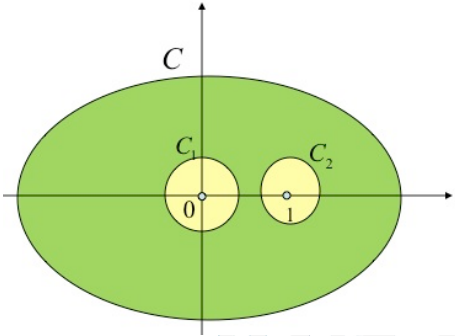
解： 方法一： 闭路变形原理

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z^2-z} = \oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z-1} - \oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z}$$

$$= \oint_{C_2} \frac{\mathrm{d}z}{z-1} - \oint_{C_1} \frac{\mathrm{d}z}{z}$$

$$= 2\pi\mathrm{i} - 2\pi\mathrm{i}$$

$$= 0$$



例 1: 求 $\oint_C \frac{dz}{z^2 - z}$, C 为包含 0 与 1 的任何正向简单闭曲线

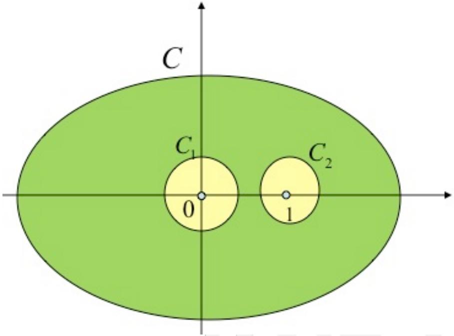
方法二：复合闭路原理

$$\oint_C \frac{dz}{z^2-z} = \oint_{C_1} \frac{dz}{z^2-z} + \oint_{C_2} \frac{dz}{z^2-z}$$

$$= \oint_{C_1} \frac{dz}{z-1} - \oint_{C_1} \frac{dz}{z}$$

$$+ \oint_{C_2} \frac{dz}{z-1} - \oint_{C_2} \frac{dz}{z}$$

$$= 0 - 2\pi i + 2\pi i - 0 = 0$$



原函数定理（不定积分）

由柯西积分定理推论得，解析函数的积分与路径无关

因此，固定起点 z_0 时可以在 D 上定义一个变上限的单值函数，记为

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$$

定理：（原函数定理）

设函数 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析，则 $F(z)$ 在 D 内也解析，且 $F'(z)=f(z)$.

原函数定理的证明

只要对 D 内的任意一点 z 证明 $F'(z) = f(z)$ 即可

即要证明：$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$，当 $|\Delta z| < \delta$ 时，有

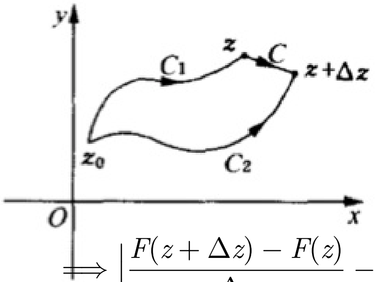
$$\left| \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| < \varepsilon.$$

证明：$f(z)$ 解析 $\Longrightarrow f(z)$ 连续，即：

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ 当} |\zeta - z| < \delta \text{ 时，有} |f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$$

以及：$f(z) = \dfrac{f(z)}{\Delta z} \displaystyle\int_z^{z+\Delta z} \mathrm{d}\zeta = \dfrac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} f(z)\mathrm{d}\zeta$

原函数定理的证明（续）



$$\begin{aligned}\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} &= \frac{1}{\Delta z}\int_{C_2} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta - \frac{1}{\Delta z}\int_{C_1} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta \\ &= \frac{1}{\Delta z}\int_{C} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \left|\frac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z} - f(z)\right| = \frac{1}{\Delta z}\left|\int_{z}^{z+\Delta z}[f(\zeta)-f(z)]\mathrm{d}\zeta\right|$$

$$\le \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z}\left|f(\zeta)-f(z)\right|\mathrm{d}\zeta$$

$$\le \frac{1}{\Delta z}\int_{z}^{z+\Delta z}\varepsilon\mathrm{d}\zeta = \varepsilon, \qquad \square$$

原函数定理相关

注： 条件“$f(z)$ 是解析函数”可以替换为：

1. $f(z)$ 在单连通区域 D 上连续；
2. $\int f(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ 沿区域 D 内任一围道积分值为 0.

定义： 在区域 D 内，如果 $f(z)$ 连续，则称符合条件

$$\Phi'(z) = f(z), \ \forall z \in D$$

的函数 $\Phi(z)$ 为 $f(z)$ 的一个不定积分或原函数

两个推论

推论 1

$f(z)$ 的任意原函数 $\Phi(z)$ 在 D 内都可以写成

$$\Phi(z) = F(z) + C = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta + C, \quad C \in \mathbb{C}$$

推论 2 (牛顿-莱布尼茨公式)

若 $\Phi(z)$ 为 $f(z)$ 在单区域 D 内的任一原函数，则

$$\int_{z_0}^{z_1} f(\zeta)\mathrm{d}\zeta = \Phi(z_1) - \Phi(z_0)$$

一些例子

例 1：在单连通区域 $D: \arg z \in (-\pi, \pi)$ 内，求 $f(z) = \dfrac{1}{z}$ 的原函数

例 2：计算下列积分

1. $\displaystyle\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z^2}$，其中 C 为右半圆：$|z| = 3, \mathrm{Re}(z) \geq 0$，起点为 $-3\mathrm{i}$，终点为 $3\mathrm{i}$
2. $\displaystyle\oint_{|z-1|=1/2} \sqrt{z}\,\mathrm{d}z$，其中 $\sqrt{z}$ 取 $\sqrt{1} = -1$ 那一支

一些例子（续）

例 3：计算 $\displaystyle\int_C \frac{\mathrm{d}z}{z}$，其中 C 为连接 $1+\mathrm{i}$ 为连接 $2\mathrm{i}$ 的直线

解法 1（利用曲线的参数方程直接计算）

$$C: z(t) = z_1 + t(z_2 - z_1) = (1-t) + \mathrm{i}(1+t),\ 0 \le t \le 1$$

$$\text{因此：}\mathrm{d}z = z'(t)\mathrm{d}t = (-1+\mathrm{i})\mathrm{d}t$$

$$\Longrightarrow \int_C \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int_0^1 \frac{(\mathrm{i}-1)\mathrm{d}t}{(1-t)+(1+t)\mathrm{i}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}[(\mathrm{i}-1)t]}{(\mathrm{i}-1)t+(1+\mathrm{i})}$$

$$= \ln\left[1+\mathrm{i}+(\mathrm{i}-1)t\right]\Big|_0^1 = \ln(2\mathrm{i}) - \ln(1+\mathrm{i}) = \cdots$$

作业三-A （10/14 23:59 前提交至“学在浙大”）

pp. 80 习题三：1.(2), 2, 4, 5, 6.(2), 7.(2)(4)(6)

§3.3 柯西积分分式

分析: 设 $z_0 \in D$, 若 $f(z)$ 在 D 内解析，则由闭路变形原理

$$\oint_C \frac{f(z)\mathrm{d}z}{z-z_0} = \oint_{|z-z_0|=\delta} \frac{f(z)\mathrm{d}z}{z-z_0} \to f(z_0)\oint_{|z-z_0|=\delta} \frac{\mathrm{d}z}{z-z_0}$$

当 $\delta \to 0$。

定理 (柯西积分公式)

如果 $f(z)$ 在区域 D 内处处解析, C 完全含于 D 内的任何一条正向简单闭曲线, z_0 为 C 内的任一点, 则

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \frac{f(z)\mathrm{d}z}{z-z_0}$$

解析函数可用复积分表示

两个推论

推论 1：如果 C 是圆周 $z = z_0 + Re^{i\theta}$，则柯西积分公式为

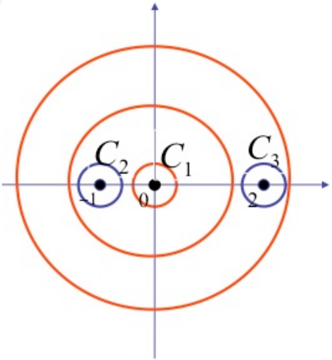
$$
\begin{aligned}
f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f(z_0+Re^{i\theta})}{Re^{i\theta}}\,iRe^{i\theta}\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+Re^{i\theta})\mathrm{d}\theta = f(z_0+Re^{i\xi})
\end{aligned}
$$

即：一个解析函数在圆心的值，等于它在圆周上的平均值

推论 2：设 $f(z)$ 在二连域 D 内解析，在边界上连续，则

$$
f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)\mathrm{d}z}{z-z_0} - \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(z)\mathrm{d}z}{z-z_0}, \qquad \forall z_0 \in D
$$

例 1：计算 $I = \oint_C \dfrac{e^z dz}{z(z+1)(z-2)}$, $C: |z| = r \, (r \neq 1, 2)$



情形 1：$0 < r < 1$

$$I = \oint_{C_1} \frac{\frac{e^z}{(z+1)(z-2)}}{z} dz = \frac{2\pi i \, e^z}{(z+1)(z-2)}\bigg|_{z=0} = -\pi i$$

情形 2：$1 < r < 2$

$$I = \oint_{C_1} + \oint_{C_2} = -\pi i + \oint_{C_2} \frac{\frac{e^z}{z(z-2)}}{z+1} dz$$

$$= -\pi i + \frac{2\pi i \, e^z}{z(z-2)}\bigg|_{z=-1} = -\pi i + \frac{2\pi i}{3e}$$

情形 3/4/...???

§3.4 解析函数的高阶导数

一个解析函数不仅有一阶导数...

而且有各高阶导数(任意阶可导)，它们的值也可用函数在边界上的值通过积分来表示。

这一点和实变函数完全不同

一个实变函数在某一区间上可导，它的导数在这区间上是否连续也不一定，更不要说它有高阶导数存在了

§3.4 解析函数的高阶导数

定理:解析函数 $f(z)$ 的 n 阶导数 $(n \in \mathbb{Z}^+)$ 仍为解析函数且

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \mathrm{d}z$$

其中 C 为在函数 $f(z)$ 的解析区域 D 内围绕 z_0 的任何一条正向简单曲线，而且它的内部全含于 D。

证明：设 z_0 为 D 内任意一点。先证 $n = 1$ 的情形，即要证

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

证明（续）

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} \mathrm{d}z - \frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z} \\
= \; & \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \left[\frac{f(z)}{(z-z_0)^2} - \frac{f(z)}{(z-z_0)(z-z_0-\Delta z)} \right] \mathrm{d}z \\
= \; & \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_C \frac{\Delta z f(z)}{(z-z_0)^2(z-z_0-\Delta z)} \mathrm{d}z = I
\end{aligned}
$$

事实

$$\lim_{\Delta z \to 0} I = 0 \qquad \text{——证明略}$$

高阶情形 $(n \geq 2)$

数学归纳法!

高阶导数公式的作用

不在于通过积分来求导，而在于通过求导来求积分，即

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z = \frac{2\pi\mathrm{i}}{n!} f^{(n)}(z_0)$$

例子

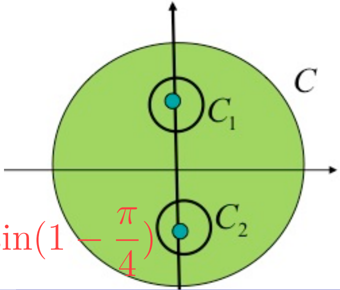
求下列积分的值，其中 C 为正向圆周：$|z| = r > 1$

$$1)\ \oint_C \frac{\cos(\pi z)}{(z-1)^5}\mathrm{d}z; \qquad 2)\ \oint_C \frac{\mathrm{e}^z}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z$$

解：2) $\displaystyle\oint_C \frac{\mathrm{e}^z}{(z^2+1)^2}\mathrm{d}z = \oint_{C_1} + \oint_{C_2}$

$$= \oint_{C_1} \frac{\frac{\mathrm{e}^z}{(z+\mathrm{i})^2}}{(z-\mathrm{i})^2}\mathrm{d}z + \oint_{C_2} \frac{\frac{\mathrm{e}^z}{(z-\mathrm{i})^2}}{(z+\mathrm{i})^2}\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi\mathrm{i}\left(\frac{\mathrm{e}^z}{(z+\mathrm{i})^2}\right)'\Big|_{z=\mathrm{i}} + 2\pi\mathrm{i}\left(\frac{\mathrm{e}^z}{(z-\mathrm{i})^2}\right)'\Big|_{z=-\mathrm{i}} = \mathrm{i}\pi\sqrt{2}\sin\left(1-\frac{\pi}{4}\right)$$



柯西不等式

$f(z)$ 在 $C_R: |z-z_0|=R>0$ 内解析，在 C_R 上连续，则

$$|f^{(n)}(z_0)| \le \frac{Mn!}{R^n}, \qquad (M=\max_{C^R}|f(z)|)$$

证明:

$$\begin{aligned}
|f^{(n)}(z_0)| &= \left|\frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}z\right| \\
&\le \frac{n!}{2\pi}\oint_C \frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{n+1}}|\mathrm{d}z| \\
&\le \frac{Mn!}{2\pi R^{n+1}}\oint_C |\mathrm{d}z|
\end{aligned}$$

Liouville 定理：全平面的有界解析函数必为常数

证明：

$n = 1$, $R \to \infty$, Cauchy 不等式，$\Longrightarrow f(z) \equiv 0.$

注

"$f(z)$ 在全平面解析"+"$\mathrm{Re}(f(z)) \leq M$"同样可推得"$f(z)$ 是常数"。——只需考虑函数 $F(z) = \mathrm{e}^{f(z)}$

最大模原理

设 D 为有界单连通或复闭路多连通区域, $f(z)$ 在 D 内解析, 在 $\bar{D} = D \cup \partial D$ 上连续， 则 $|f(z)|$ 在 ∂D 上取到最大值

证明: $\forall z_0 \in D$, 记 $d = \mathrm{dist}(z_0, \partial D)$ 以及 $L = L(\partial D)$, $M = \max_{\partial D} |f(z)|$

$$
\begin{aligned}
[f(z_0)]^n &= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\partial D} \frac{[f(z)]^n}{z - z_0} \mathrm{d}z \\
|f(z_0)|^n &\leq \frac{1}{2\pi} \oint_{\partial D} \frac{|f(z)|^n}{|z - z_0|} |\mathrm{d}z| \leq \frac{M^n L}{2\pi d} \\
|f(z_0)| &\leq M \left(\frac{L}{2\pi d} \right)^{1/n} \to M, n \to \infty
\end{aligned}
$$

作业三-B （(10/14 23:59 前提交至“学在浙大”)

pp. 80 习题三：8.(2)(4), 11, 12.(1)(3)(5)(7), 13, 15