2019-2020 学年春夏学期复变函数回忆卷

整理人：CC98 用户 magisco22

1.(25 分) 叙述下列公式或定理

i.Cauchy 积分公式

ii.Liouville 定理

iii.Jensen 公式

iv. 留数公式

v.Rouche 定理

2.(10 分) 计算积分

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,dx, \qquad \int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,dx, \qquad a>0$$

3.(10 分) 已知公式

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(m+\tau)^2}=\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\tau)}$$

求证：

$$\sum_{m\geq 1,m\text{ odd}}\frac{1}{m^2}=\frac{\pi^2}{8}, \qquad \sum_{m\geq 1}\frac{1}{m^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

4.(10 分) 已知

$$F(x)=\prod_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^n}$$

求证：

$$\log F(x)\sim\frac{\pi^2}{6(1-x)} \qquad \text{当}x\to 1, 0<x<1$$

5.(10 分) 求证：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \cdot \pi$$

6.(10 分) 求证：

$$\int_{0}^{2\pi} \frac{d\theta}{(a+\cos\theta)^2} = \frac{2\pi a}{(a^2-1)^{3/2}}, \qquad a > 1$$

7.(10 分) 估计方程 $z^4 - 6z + 3 = 0$ 在圆环 $1 < |z| < 2$ 中的根的个数

8.(10 分) 若 f 在单位圆盘 $|z| < 1$ 中有界且全纯，$f(0) \neq 0$，记 $z_1 . z_2, \cdots, z_n, \cdots$ 是 f 在单位圆盘内的零点，求证：

$$\sum_{n} (1 - |z_n|) < \infty$$

9.(5 分) 忘记了，应该要比前面题难一个档次