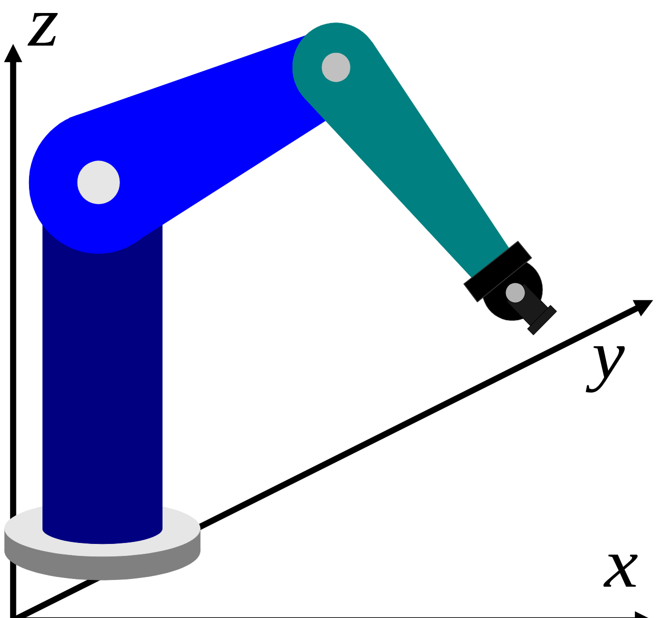
2.7 串联机构中的运动学参量

概述

- 多关节操作臂由一系列连杆和关节构成
- 操作臂运动学研究操作臂的位置、速度和加速度等，不考虑对操作臂施加的力或力矩
- **操作臂运动学中的位置研究包括正运动学问题和逆运动学问题**



- 正运动学问题
  - 已知各关节变量，求取操作臂末端位姿
- 逆运动学问题
  - 已知操作臂末端位姿，求取各关节变量

概述

- **正运动学**

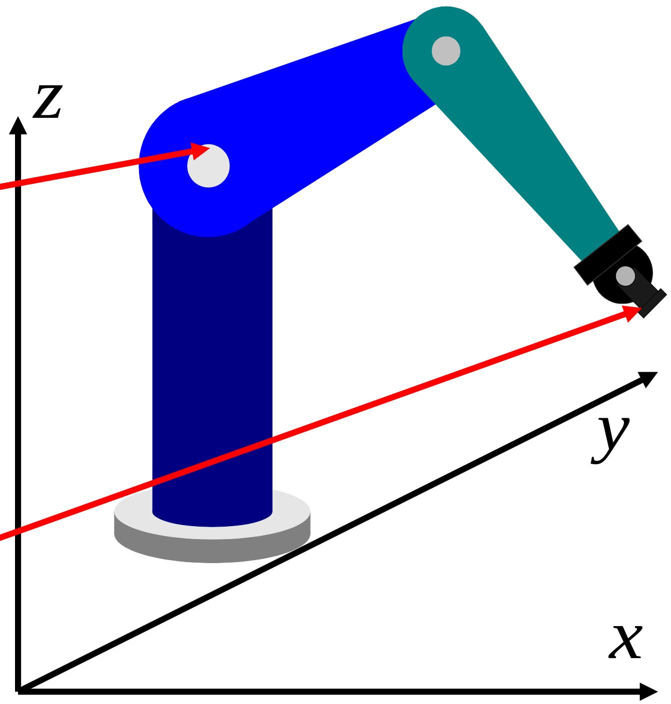
给定关节角变量

$$(q_1, q_2, \cdots, q_N)$$

$$(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$$

得到末端位置和姿态

用于机构设计



概述

- **逆运动学**

给定末端位置和姿态

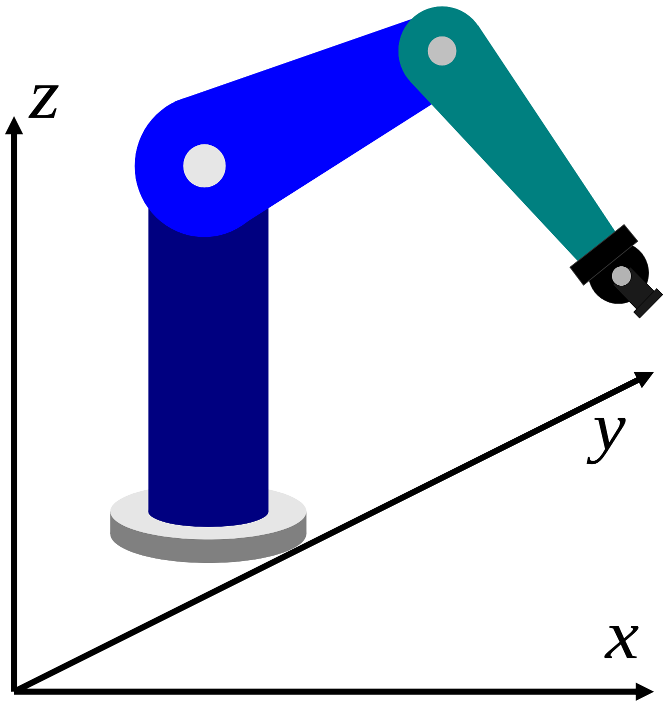
$$(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$$

$$\downarrow$$

$$(q_1, q_2, \cdots, q_N)$$

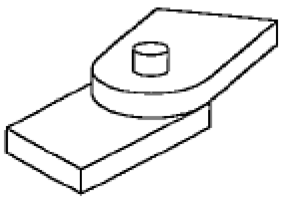
得到各关节角变量

用于运动控制

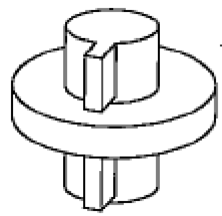


关节与连杆

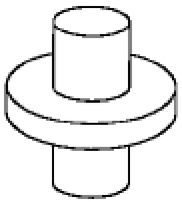
- 使两个刚体直接接触而又能产生一定相对运动的联接称为运动副，机器人的运动副也称关节，连杆即指由关节所联的刚体
- 若运动副联结的两刚体之间为面与面的接触，则称运动副为低副。六种常用的低副：



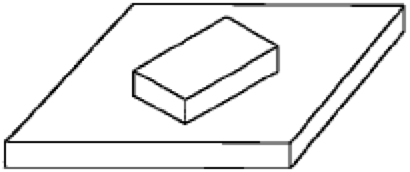
转动副（转动关节）



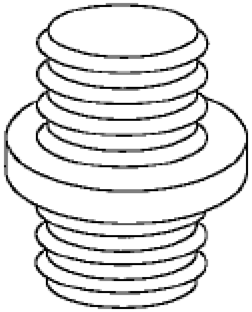
移动副（滑动关节或移动关节）



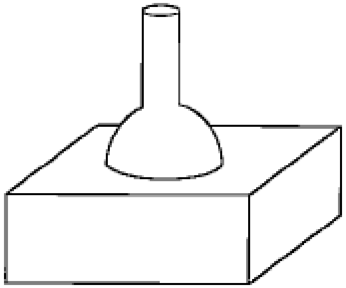
圆柱副



平面副



螺旋副

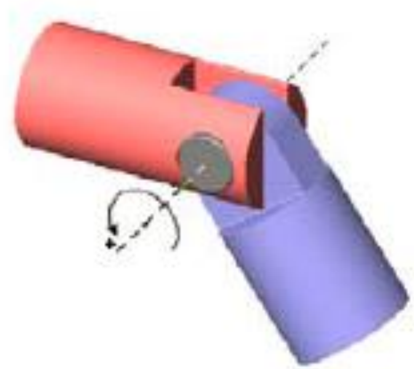


球面副

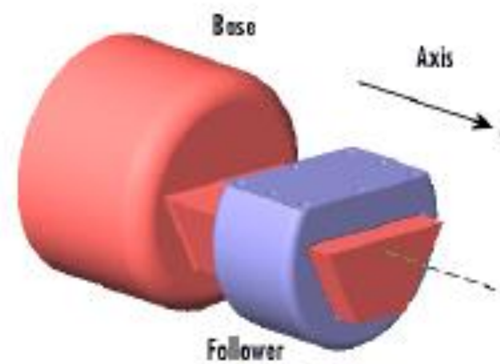
本课程中的关节仅限转动副和移动副

关节与连杆

- **连杆与关节：**
  - ➢操作臂可以看成由一系列刚体通过关节连接而成的一个运动链
  - ➢这些刚体称为连杆，通过关节将两个相邻的连杆连接起来
- **单自由度关节**
  - ➢旋转关节
  - ➢移动关节



旋转关节

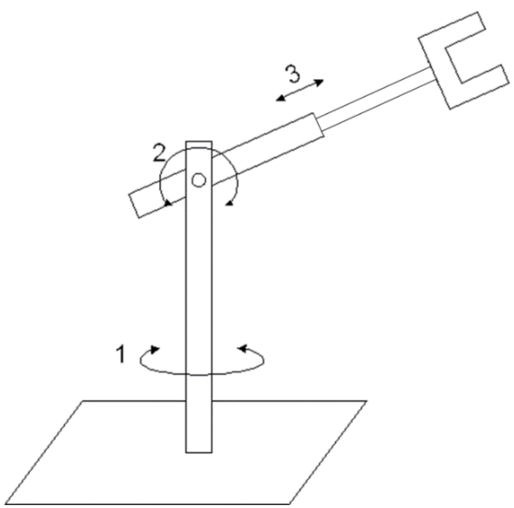


移动关节

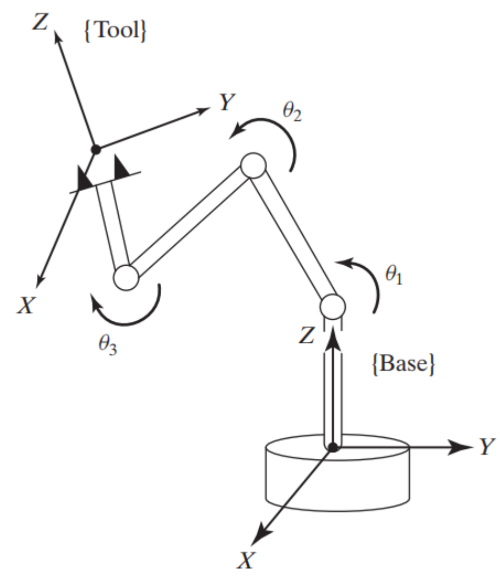
- **多自由度关节**
  - ➢可以看成多个单自由度关节与长度为零的连杆构成

串联机械臂（串联机器人）

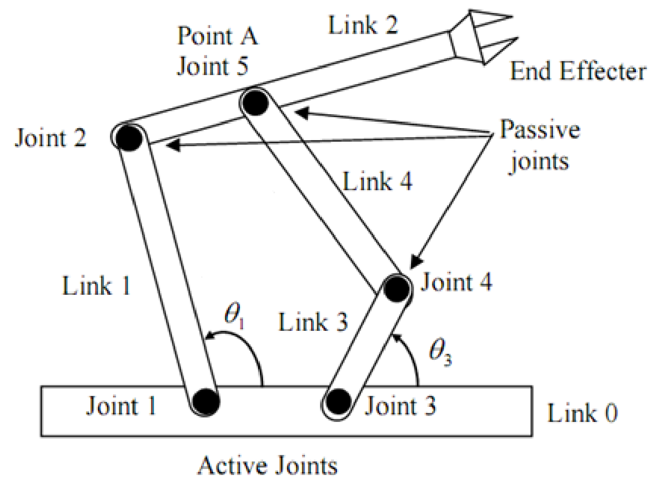
- **串联机构**：多个连杆通过关节以串联形式连接成首尾不封闭的机械结构



串联机械臂



串联机械臂



非串联机械臂

本课程仅研究串联机械臂（串联机器人）

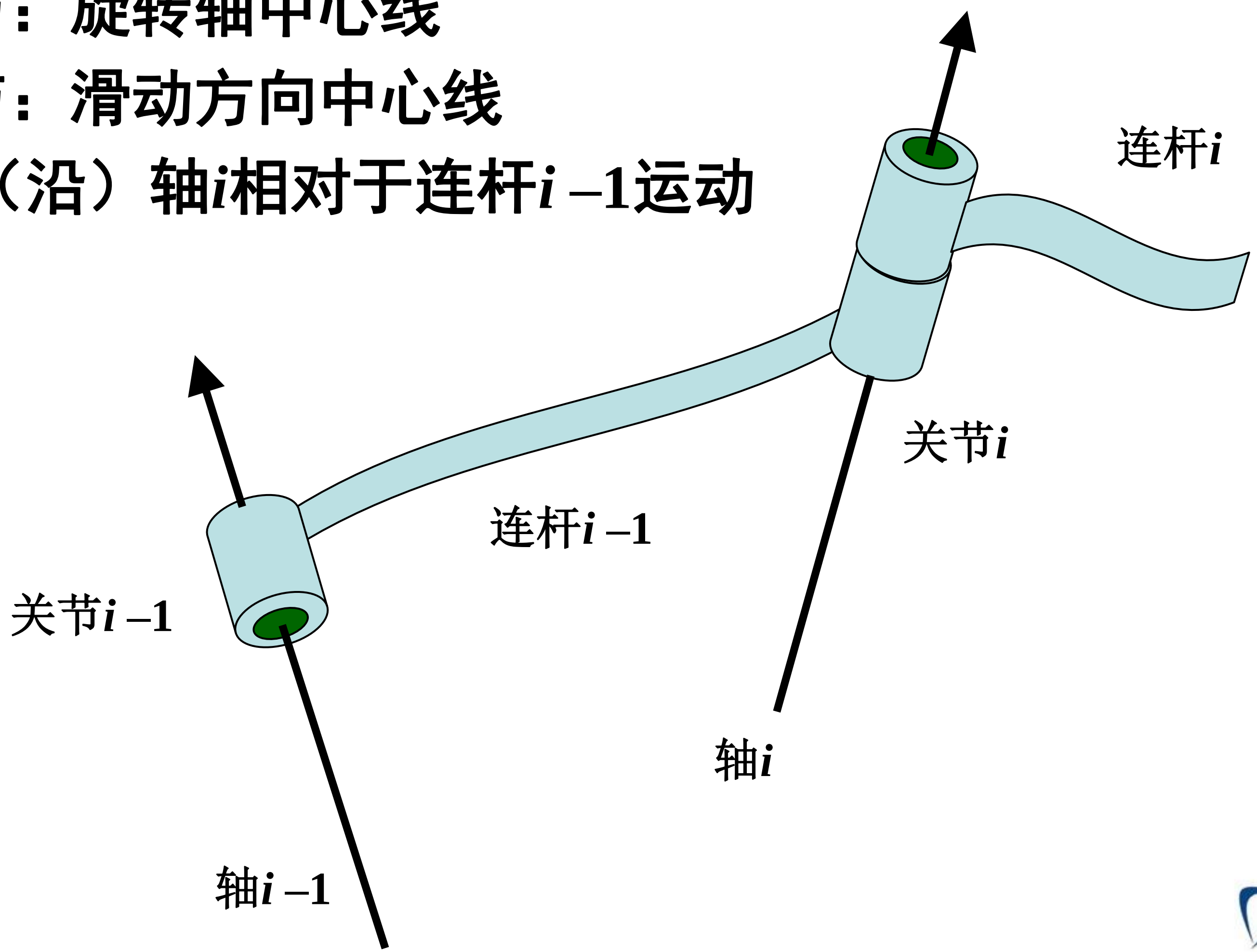
串联机械臂（串联机器人）

- 从串联机器人进行编号
  - 固定基座为连杆0
  - 第一个可动连杆为连杆1
  - 以此类推，机器人最末端的连杆为连杆N
  - 连杆0与连杆1通过关节1连接，…，连杆N-1与连杆N通过关节N连接

- 为了确定末端执行器在3维空间的位置和姿态，串联机器人至少需要6个关节

关节轴线

- 用空间中的直线“轴*i*”表示关节*i*的轴线
- 轴*i*的正方向由设计者指定
- 旋转关节：旋转轴中心线
- 滑动关节：滑动方向中心线
- 连杆*i*绕（沿）轴*i*相对于连杆*i* –1运动



Denavit-Hartenberg参数（连杆长度、连杆转角）

- 若轴$i-1$和轴i不平行，它们有唯一的公垂线段

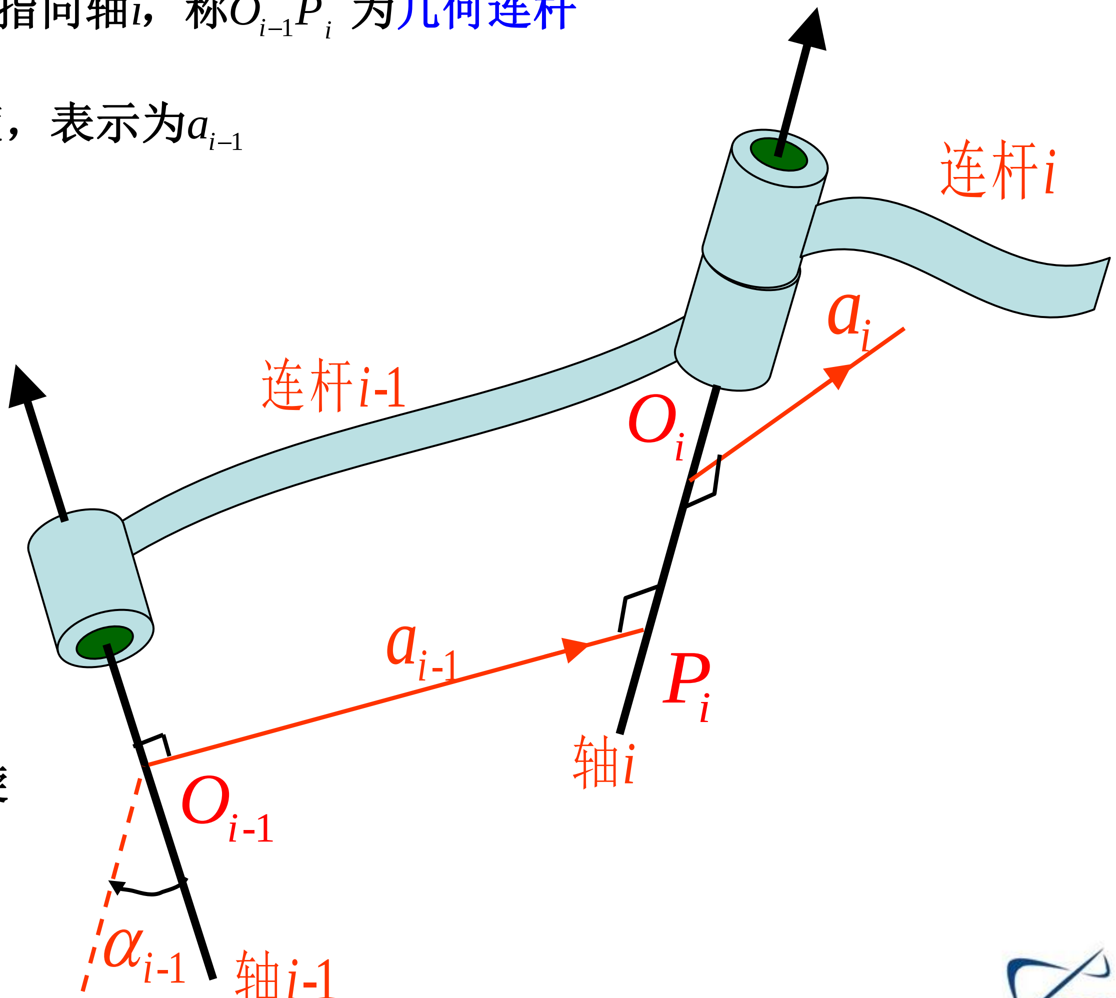
  若轴$i-1$和轴i平行，它们的公垂线段不唯一，可按需取一条公垂线段

  公垂线段$\overrightarrow{O_{i-1}P_i}$的正方向为轴$i-1$指向轴$i$，称$\overrightarrow{O_{i-1}P_i}$为几何连杆

- 连杆长度：公垂线段$\overrightarrow{O_{i-1}P_i}$的长度，表示为$a_{i-1}$

  当$a_{i-1}=0$时，我们并不将零长度的$\overrightarrow{O_{i-1}P_i}$视为传统的零向量，而是在与轴$i$−1和轴$i$同时垂直的方向中选一个作为$\overrightarrow{O_{i-1}P_i}$的正方向

- 连杆转角：过轴$i-1$作一个平面垂直于$\overrightarrow{O_{i-1}P_i}$，然后将轴$i$投影到该平面上，按照轴$i-1$绕$\overrightarrow{O_{i-1}P_i}$旋转到轴$i$投影的思路以右手螺旋法则确定轴$i-1$与轴$i$夹角的值，此夹角即为连杆转角$\alpha_{i-1}$

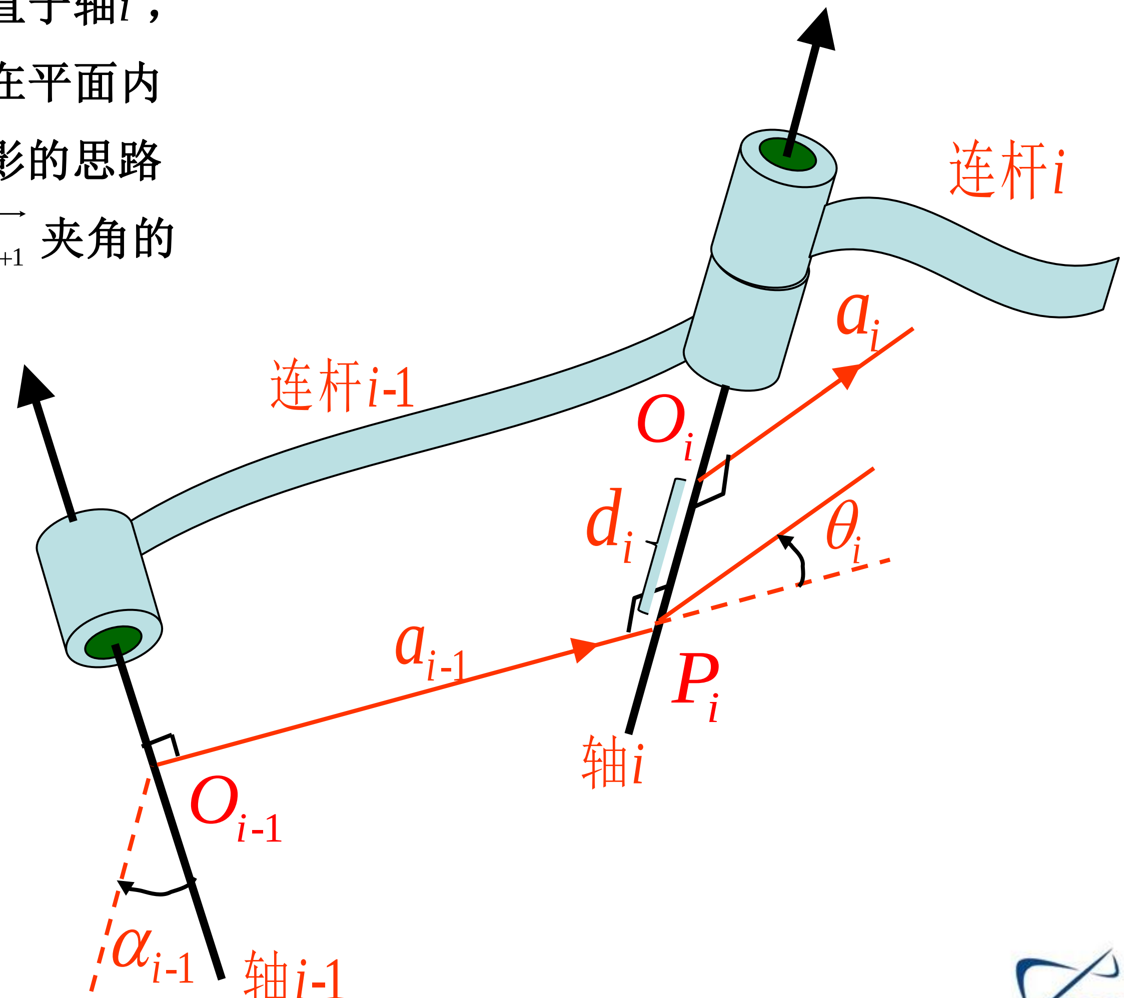


Denavit-Hartenberg参数（连杆偏距、关节角）

- 连杆偏距：从P_i到O_i的有向距离，记为d_i

- 关节角：过$\overrightarrow{O_{i-1}P_i}$作一个平面垂直于轴$i$，然后将$\overrightarrow{O_iP_{i+1}}$投影到该平面上，在平面内按照$\overrightarrow{O_{i-1}P_i}$绕轴$i$旋转到$\overrightarrow{O_iP_{i+1}}$投影的思路以右手螺旋法则确定$\overrightarrow{O_{i-1}P_i}$与$\overrightarrow{O_iP_{i+1}}$夹角的值，此旋转角度即为关节角$\theta_i$

- 连杆长度a_{i-1}、连杆转角α_{i-1}、连杆偏距d_i和关节角θ_i都称为关节i的运动学参量



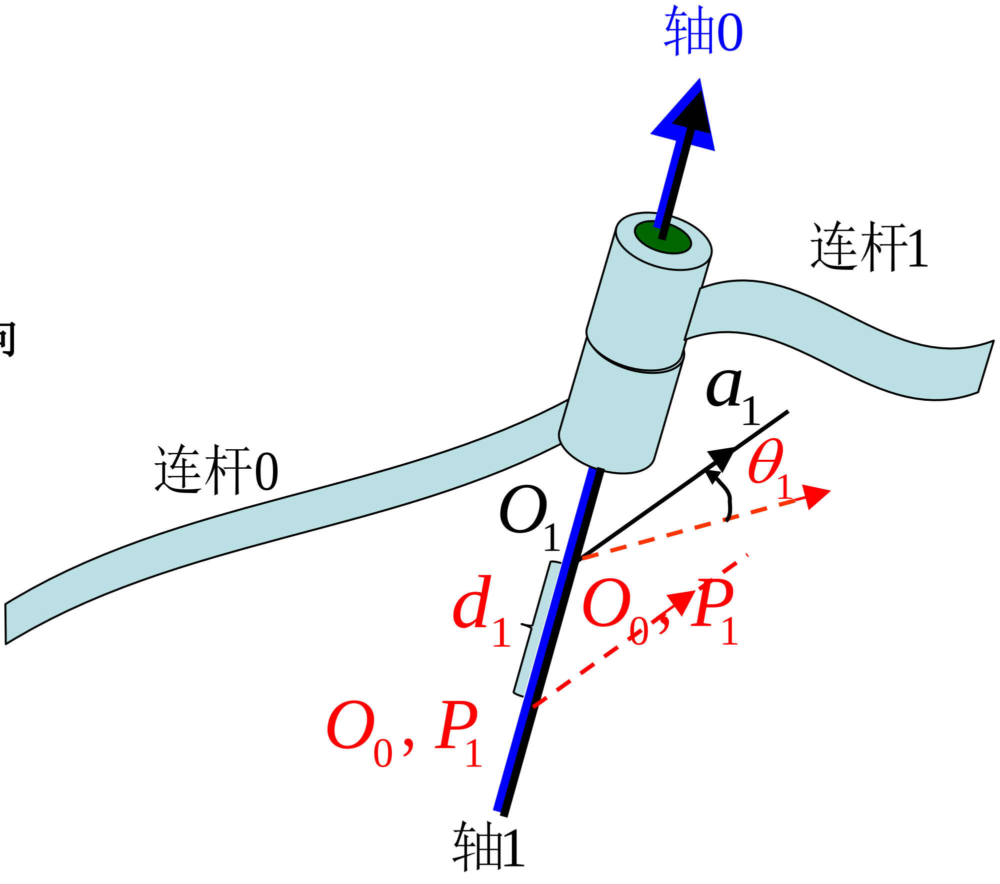
关节1的运动学参量（首关节约定）

- 设定一个虚拟的轴0与轴1重合，即取$a_0 = 0, \alpha_0 = 0$

- 若关节1是转动关节，取d_1=0，而$\overrightarrow{O_0P_1}$的方向则任取与轴1垂直的某个方向，取$\overrightarrow{O_0P_1}$的方向就是决定$\overrightarrow{O_1P_2}$的零位方向

- 若关节1是滑动关节，取θ_1=0，而$\overrightarrow{O_0P_1}$的位置则任取轴1上的某个点，取$\overrightarrow{O_0P_1}$的位置就是决定$\overrightarrow{O_1P_2}$的零位位置

- $\overrightarrow{O_0P_1}$ 是一个固定不动的几何连杆

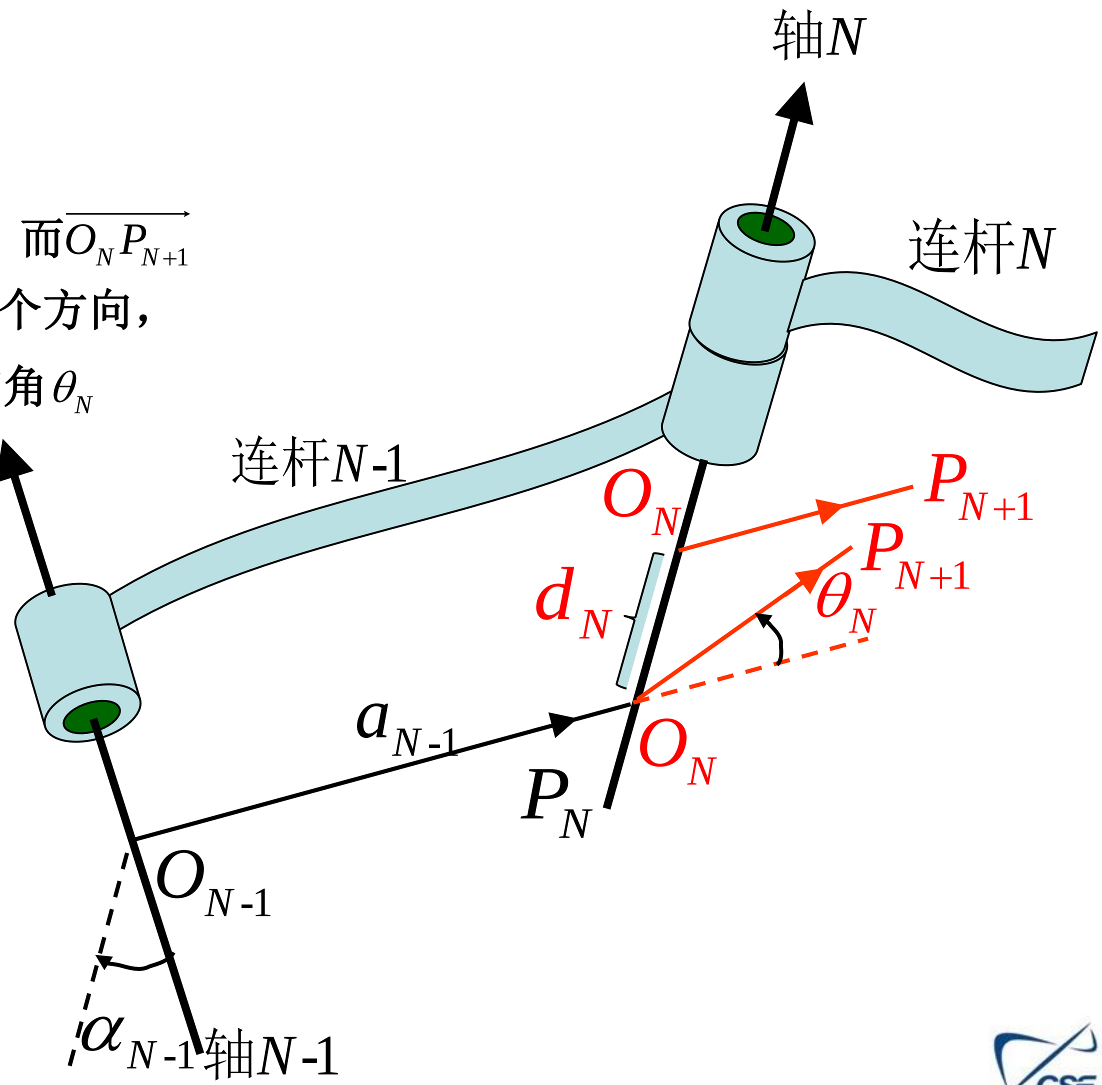


关节N的运动学参量（尾关节约定）

- 轴$N-1$ 和轴N 存在，a_{N-1} 和α_{N-1} 已知，需要选取长度任意的$\overrightarrow{O_N P_{N+1}}$

- 若关节N 是转动关节，取d_N=0，而$\overrightarrow{O_N P_{N+1}}$的方向则任取与连杆$N$ 固连的某个方向，$\overrightarrow{O_N P_{N+1}}$ 与$\overrightarrow{O_{N-1} P_N}$ 的夹角即是关节角θ_N

- 若关节N 是滑动关节，取θ_N=0，而点O_N 则任取轴N 上与连杆N 固连的某个点，O_N 与P_N 的相对位移即决定了连杆偏距d_N



2.8 建立坐标系的改进D-H方法

（ MDH, modified DH ）

运动学参量表

- a_{i-1}和α_{i-1}是固定不变的参数，不会随着关节$\boldsymbol{i}$的运动而变化

- 若关节$\boldsymbol{i}$是转动关节，则$\boldsymbol{d_i}$是固定不变的参数，$\boldsymbol{\theta_i}$是会随着关节$\boldsymbol{i}$的运动而变化的关节变量，即：

  3个连杆参数$a_{i-1}, \alpha_{i-1}, \boldsymbol{d_i}$　　1个关节变量$\boldsymbol{\theta_i}$

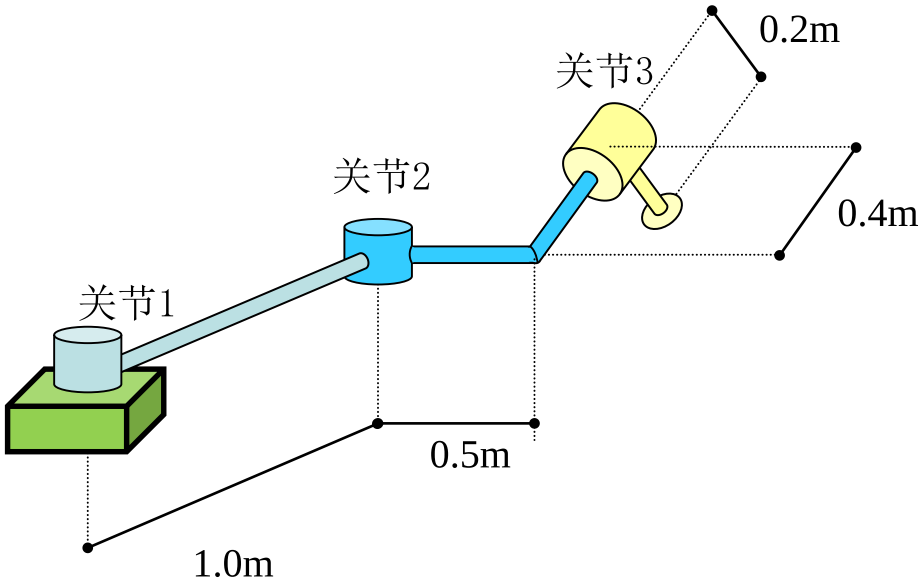
- 若关节$\boldsymbol{i}$是滑动关节，则$\boldsymbol{\theta_i}$是固定不变的参数，$\boldsymbol{d_i}$是会随着关节$\boldsymbol{i}$的运动而变化的关节变量，即：

  3个连杆参数$a_{i-1}, \alpha_{i-1}, \boldsymbol{\theta_i}$　　1个关节变量$\boldsymbol{d_i}$

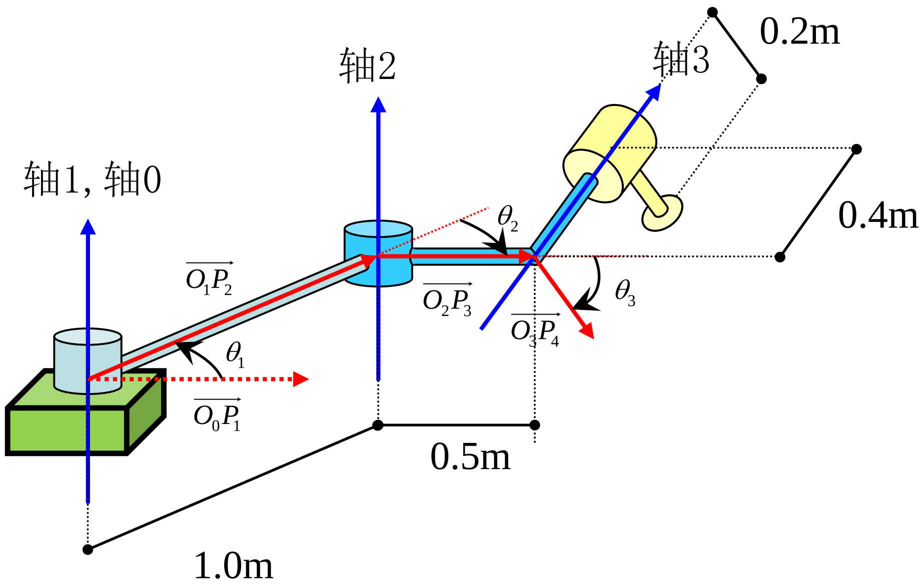
- 一个有N个关节的串联机构，有$4N$个运动学参量，其中$3N$个是连杆参数、N个是关节变量，它们包含了串联机构的全部空间几何信息

运动学参量表

例2.8.1：下图所示为一个3关节串联机械臂，该臂的末端装有吸盘作为操作工具。试在此机构上建立几何连杆、写出各连杆参数的值并列出各关节变量



运动学参量表



运动学参量表

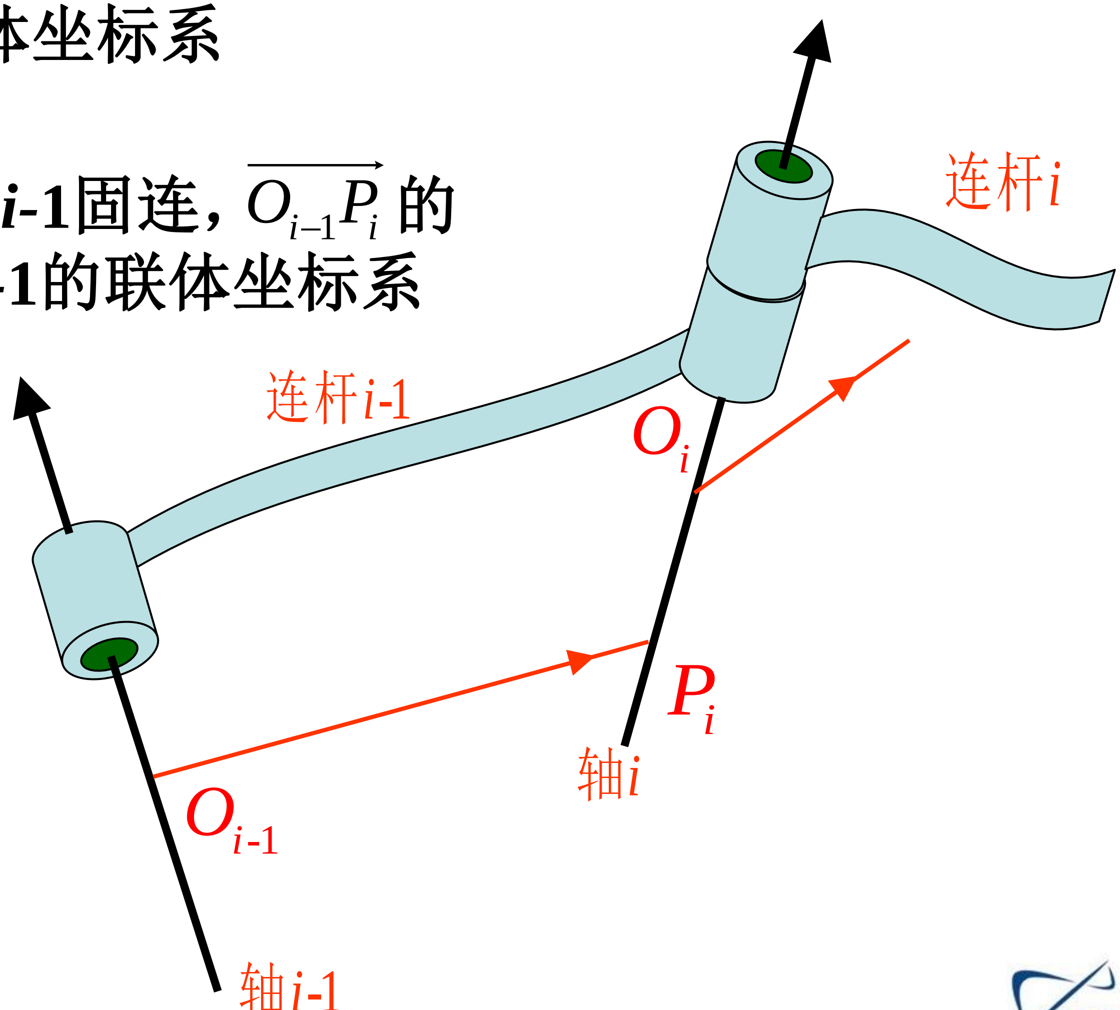
关节i	α_{i-1}(rad)	a_{i-1}(m)	d_i(m)	θ_i(rad)
1	0	0	0	θ_1
2	0	1	0	θ_2
3	$-\pi/2$	0.5	0	θ_3

运动学参量表结果不唯一

连杆联体坐标系的配置

- 串联机器人是一个多体系统（N+1个刚体），描述机器人的运动即是描述N+1个刚体的运动，因此需要建立每个刚体（实物连杆）的联体坐标系

- 几何连杆 $\overrightarrow{O_{i-1}P_i}$ 与连杆i-1固连，$\overrightarrow{O_{i-1}P_i}$ 的联体坐标系也是连杆i-1的联体坐标系



连杆联体坐标系的配置

- **改进的D-H（Denavit-Hartenberg）方法**

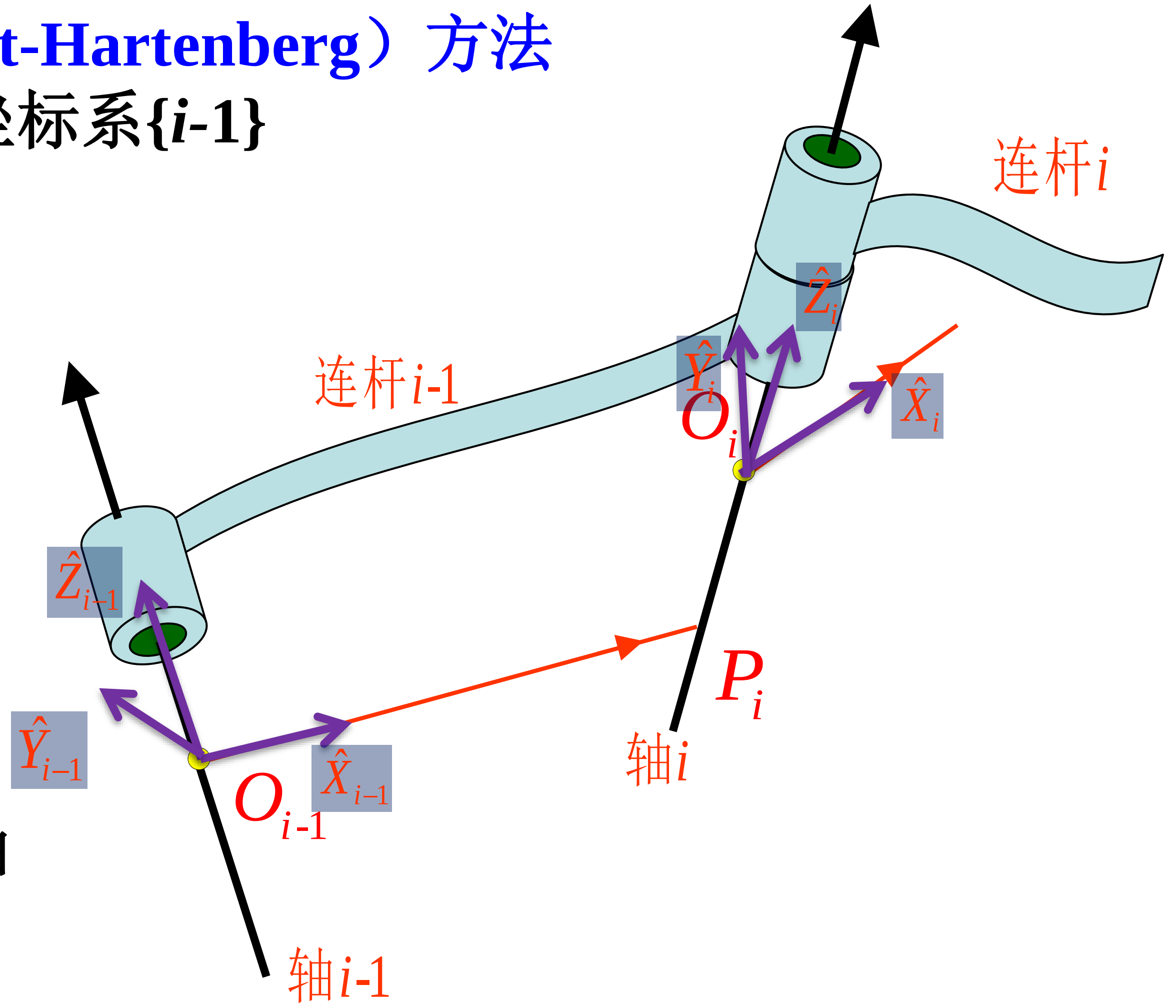
  建立连杆i-1的联体坐标系{i-1}

O_{i-1}为{i-1}的原点

轴i-1为{i-1}的Z轴

$\overrightarrow{O_{i-1}P_i}$为{$i$-1}的X轴

右手定则定{i-1}的Y轴

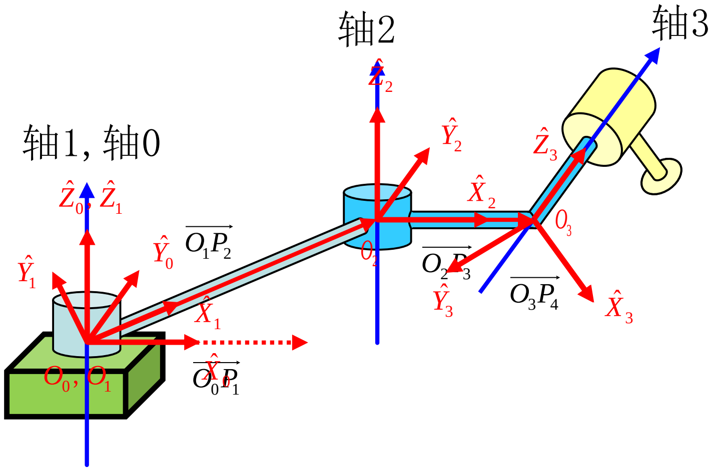


Matlab的Link函数的方法选项

’modefied’为改进D-H法；’standard’或缺省为标准D-H法

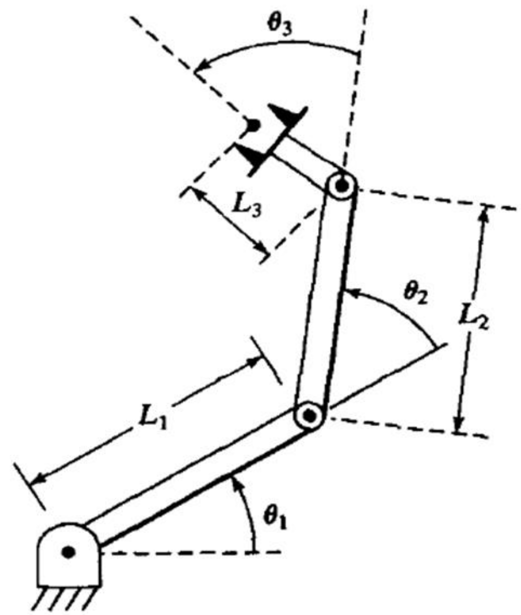
连杆联体坐标系的配置

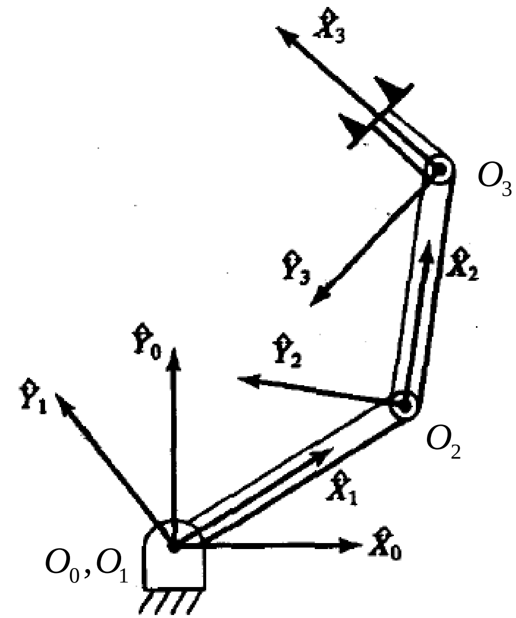
例2.8.2：采用改进D-H方法建立例2.8.1的连杆联体坐标系



连杆联体坐标系的配置

例2.8.3：采用改进D-H方法建立如图机器人的连杆联体坐标系





运动学参量表

关节i	α_{i-1}(rad)	a_{i-1}(m)	d_i(m)	θ_i(rad)
1	0	0	0	θ_1
2	0	L_1	0	θ_2
3	0	L_2	0	θ_3

改进D-H方法建立的连杆联体坐标系不唯一

2.9 机器人的正运动学计算

相邻连杆联体坐标系的变换

$$ {}^{i-1}_{i}T = \left[\begin{array}{c:c} R_x(\alpha_{i-1}) & 0 \\ \hdashline 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & a_{i-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c:c} R_z(\theta_i) & 0 \\ \hdashline 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] $$

$$ = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ \sin\theta_i\cos\alpha_{i-1} & \cos\theta_i\cos\alpha_{i-1} & -\sin\alpha_{i-1} & -\sin\alpha_{i-1}d_i \\ \sin\theta_i\sin\alpha_{i-1} & \cos\theta_i\sin\alpha_{i-1} & \cos\alpha_{i-1} & \cos\alpha_{i-1}d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

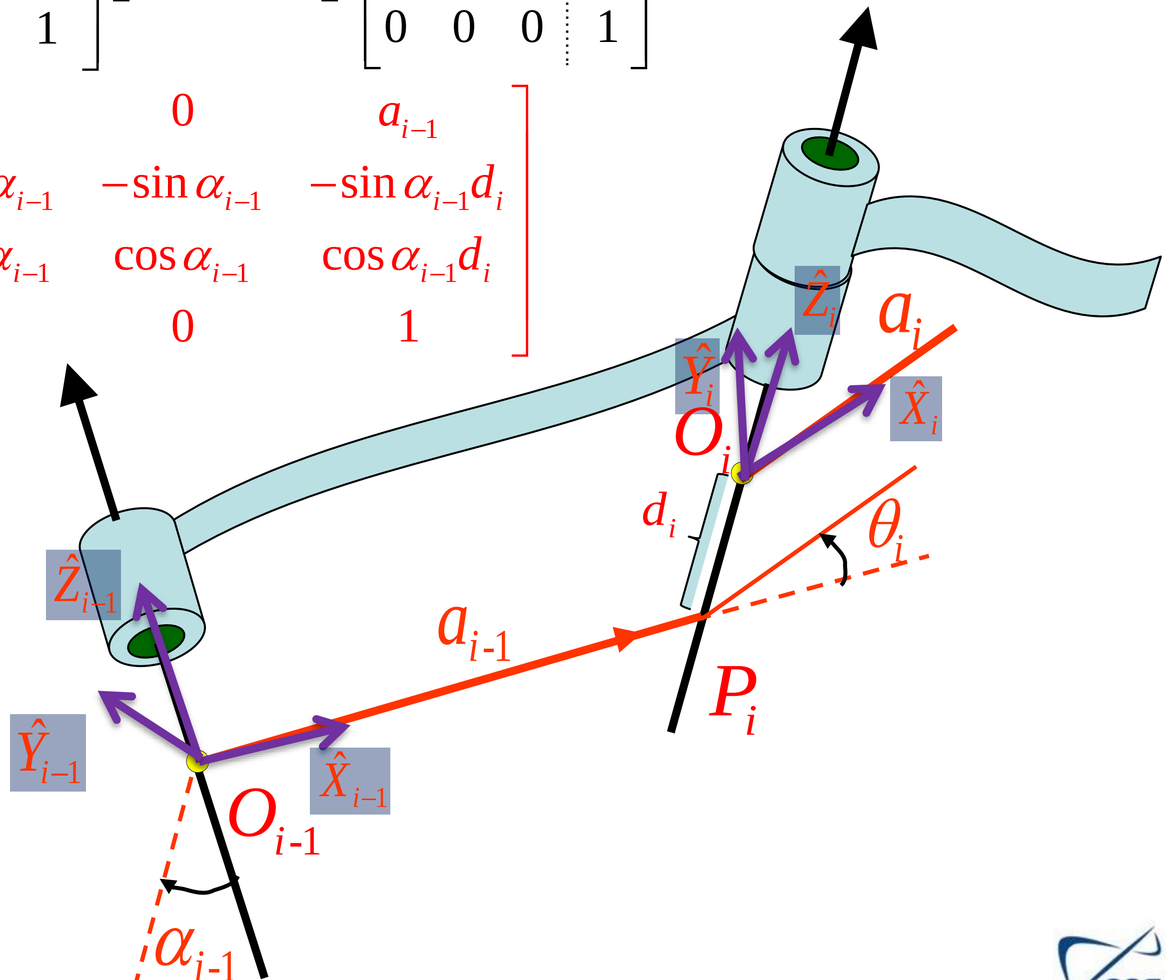
{*i*-1}经四步变换成为{*i*}

绕联体X轴旋转 α_{i-1}

沿联体X轴滑动 a_{i-1}

绕联体Z轴旋转θ_i

沿联体Z轴滑动d_i



正运动学问题及其求解

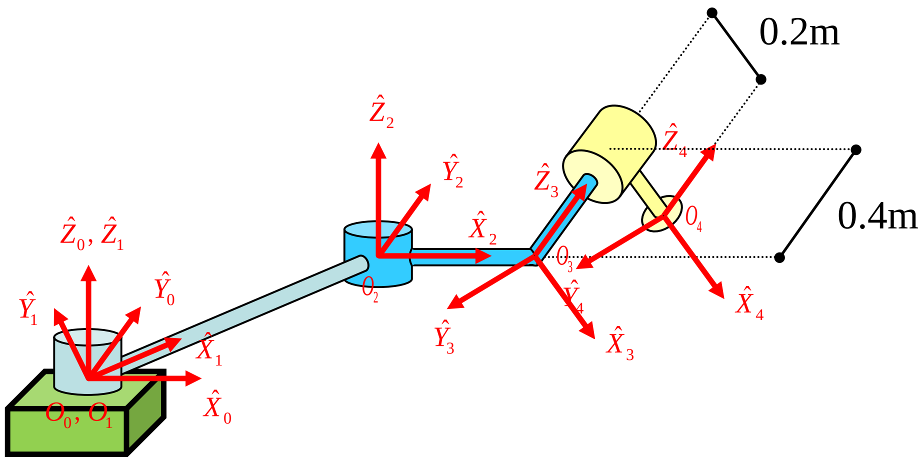
正运动学问题：已知各关节变量的值，以基座坐标系为参考系，求末端工具联体坐标系的位姿

解法： $${}^{0}_{n}T = {}^{0}_{1}T\,{}^{1}_{2}T \cdots {}^{n-1}_{n}T$$

$${}^{i-1}_{i}T = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ \sin\theta_i \cos\alpha_{i-1} & \cos\theta_i \cos\alpha_{i-1} & -\sin\alpha_{i-1} & -\sin\alpha_{i-1} d_i \\ \sin\theta_i \sin\alpha_{i-1} & \cos\theta_i \sin\alpha_{i-1} & \cos\alpha_{i-1} & \cos\alpha_{i-1} d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

正运动学问题及其求解

为描述例2.8.1中的操作工具吸盘，建立了吸盘联体坐标系{4}，其原点为吸盘中心、姿态与{3}相同

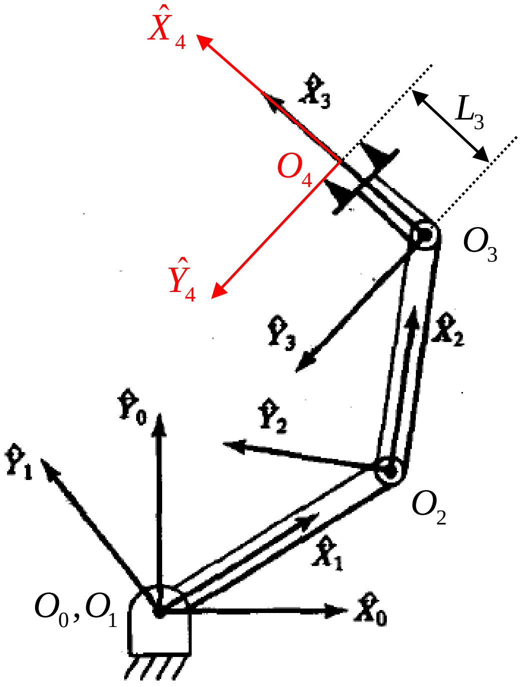


$$
{}_4^3T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}_4^0T(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = {}_1^0T(\theta_1)\,{}_2^1T(\theta_2)\,{}_3^2T(\theta_3)\,{}_4^3T
$$

正运动学问题及其求解

对2.8.3的机器人，建立工具的联体坐标系{4}，其原点为夹具末端中点、姿态与{3}相同

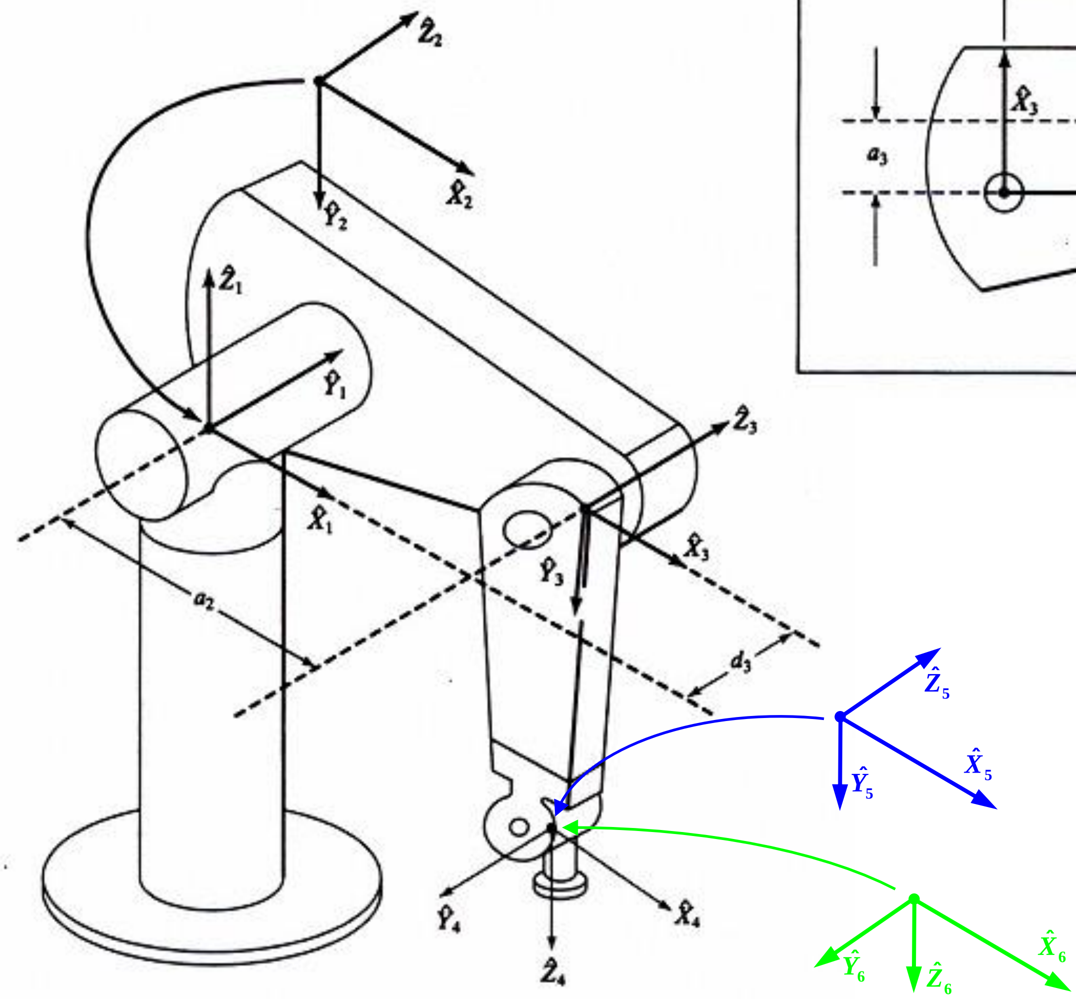


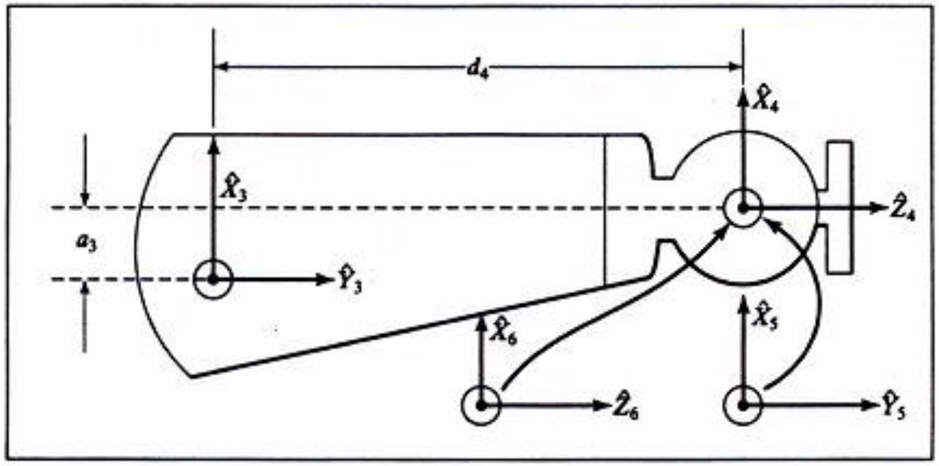
$$
{}^3_4T = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & L_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]
$$

$$
{}^0_4T(\theta_1,\theta_2,\theta_3) = {}^0_1T(\theta_1)\,{}^1_2T(\theta_2)\,{}^2_3T(\theta_3)\,{}^3_4T
$$

典型机器人：PUMA 560机器人

- 6R机构，轴4、5、6相互垂直且交于一点





D-H 连杆参数表

关节i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
1	0	0	0	θ_1
2	−90°	0	0	θ_2
3	0	a_2	d_3	θ_3
4	−90°	a_3	d_4	θ_4
5	90°	0	0	θ_5
6	−90°	0	0	θ_6

典型机器人：P

$$ {}^{i-1}_{i}T = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ \sin\theta_i\cos\alpha_{i-1} & \cos\theta_i\cos\alpha_{i-1} & -\sin\alpha_{i-1} & -\sin\alpha_{i-1}d_i \\ \sin\theta_i\sin\alpha_{i-1} & \cos\theta_i\sin\alpha_{i-1} & \cos\alpha_{i-1} & \cos\alpha_{i-1}d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

- **求出每对相邻坐标系的齐次变换矩阵**

$$ {}^{0}_{1}T = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^{1}_{2}T = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_2 & -c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^{2}_{3}T = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & a_2 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{3}_{4}T = \begin{bmatrix} c\theta_4 & -s\theta_4 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ -s\theta_4 & -c\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^{4}_{5}T = \begin{bmatrix} c\theta_5 & -s\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s\theta_5 & c\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^{5}_{6}T = \begin{bmatrix} c\theta_6 & -s\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_6 & -c\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

典型机器人：PUMA 560机器人

$$ {}^{3}_{4}T = \begin{bmatrix} c\theta_4 & -s\theta_4 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ -s\theta_4 & -c\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^{4}_{5}T = \begin{bmatrix} c\theta_5 & -s\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ s\theta_5 & c\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^{5}_{6}T = \begin{bmatrix} c\theta_6 & -s\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_6 & -c\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

从 ${}^{4}_{5}T$ 和 ${}^{5}_{6}T$ 相乘开始:

$$ {}^{4}_{6}T = {}^{4}_{5}T\,{}^{5}_{6}T = \begin{bmatrix} c_5c_6 & -c_5s_6 & -s_5 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ s_5c_6 & -s_5s_6 & c_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{3}_{6}T = {}^{3}_{4}T\,{}^{4}_{6}T = \begin{bmatrix} c_4c_5c_6 - s_4s_6 & -c_4c_5s_6 - s_4c_6 & -c_4s_5 & a_3 \\ s_5c_6 & -s_5s_6 & c_5 & d_4 \\ -s_4c_5c_6 - c_4s_6 & s_4c_5s_6 - c_4c_6 & s_4s_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

典型机器人：PUMA 560机器人

$$ {}^{1}_{2}T = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_2 & -c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^{2}_{3}T = \begin{bmatrix} c\theta_3 & -s\theta_3 & 0 & a_2 \\ s\theta_3 & c\theta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

因为关节2和关节3是平行的，所以 ${}^{1}_{2}T$ 和 ${}^{2}_{3}T$ 的乘积用和角公式得到一个简化的表达式，只要两个旋转关节轴平行就可以这样处理，因此得到:

$$ {}^{1}_{3}T = {}^{1}_{2}T\,{}^{2}_{3}T = \begin{bmatrix} c_{23} & -s_{23} & 0 & a_2c_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ -s_{23} & -c_{23} & 0 & -a_2s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$ c_{23} = \cos(\theta_2+\theta_3), s_{23} = \sin(\theta_2+\theta_3) $$

典型机器人：

$$
{}^{3}_{6}T=\begin{bmatrix} c_4c_5c_6-s_4s_6 & -c_4c_5s_6-s_4c_6 & -c_4s_5 & a_3 \\ s_5c_6 & -s_5s_6 & c_5 & d_4 \\ -s_4c_5c_6-c_4s_6 & s_4c_5s_6-c_4c_6 & s_4s_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
{}^{1}_{3}T=\begin{bmatrix} c_{23} & -s_{23} & 0 & a_2c_2 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ -s_{23} & -c_{23} & 0 & -a_2s_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

继续矩阵相乘：

$$
{}^{1}_{6}T={}^{1}_{3}T\,{}^{3}_{6}T=\begin{bmatrix} {}^{1}r_{11} & {}^{1}r_{12} & {}^{1}r_{13} & {}^{1}p_x \\ {}^{1}r_{21} & {}^{1}r_{22} & {}^{1}r_{23} & {}^{1}p_y \\ {}^{1}r_{31} & {}^{1}r_{32} & {}^{1}r_{33} & {}^{1}p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{1}r_{11}&=c_{23}[c_4c_5c_6-s_4s_6]-s_{23}s_5s_6\\
{}^{1}r_{21}&=-s_4c_5c_6-c_4s_6\\
{}^{1}r_{31}&=-s_{23}[c_4c_5c_6-s_4s_6]-c_{23}s_5c_6\\
{}^{1}r_{12}&=-c_{23}[c_4c_5s_6+s_4c_6]+s_{23}s_5s_6\\
{}^{1}r_{22}&=s_4c_5s_6-c_4c_6\\
{}^{1}r_{32}&=s_{23}[c_4c_5s_6+s_4c_6]+c_{23}s_5s_6\\
{}^{1}r_{13}&=-c_{23}c_4s_5-s_{23}c_5\\
{}^{1}r_{23}&=s_4s_5\\
{}^{1}r_{33}&=s_{23}c_4s_5-c_{23}c_5\\
{}^{1}p_x&=a_2c_2+a_3c_{23}-d_4s_{23}\\
{}^{1}p_y&=d_3\\
{}^{1}p_z&=-a_3s_{23}-a_2s_2-d_4c_{23}
\end{aligned}
$$

典型机器人：PUMA 560机器人

最后，得到六个连杆坐标变换阵的乘积:

$$ {}^0_6T = {}^0_1T\,{}^1_6T = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & p_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & p_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

$$
\begin{aligned}
r_{11} &= c_1[c_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_5) - s_{23}s_5c_5] + s_1(s_4c_5c_6 + c_4s_6) \\
r_{21} &= s_1[c_{23}(c_4c_5c_6 - s_4s_6) - s_{23}s_5c_6] - c_1(s_4c_5c_6 + c_4s_6) \\
r_{31} &= -s_{23}[c_4c_5c_6 - s_4s_6] - c_{23}s_5c_6 \\
r_{12} &= c_1[c_{23}(-c_4c_5s_6 - s_4c_6) + s_{23}s_5s_5] + s_1(c_4c_6 - s_4c_5s_6) \\
r_{22} &= s_1[c_{23}(-c_4c_5s_6 - s_4c_6) + s_{23}s_5s_6] - c_1(c_4c_6 - s_4c_5s_6) \\
r_{32} &= -s_{23}[c_4c_5s_6 - s_4c_6] + c_{23}s_5s_6 \\
r_{13} &= -c_1[c_{23}c_4s_5 + s_{23}c_5] - s_1s_4s_5 \\
r_{23} &= -s_1[c_{23}c_4s_5 + s_{23}c_5] + c_1s_4s_5 \\
r_{33} &= s_{23}c_4s_5 - c_{23}c_5 \\
p_x &= c_1[a_2c_2 + a_3c_{23} - d_4s_{23}] - d_3s_1 \\
p_y &= s_1[a_2c_2 + a_3c_{23} - d_4s_{23}] + d_3c_1 \\
p_z &= -a_3s_{23} - a_2s_2 - d_4c_{23}
\end{aligned}
$$

关节空间和笛卡尔空间

- 对于具有N个关节的串联机器人，其N个关节变量可形成一个N×1的关节矢量。所有关节矢量构成的空间称为关节空间。关节空间中的每一个关节矢量都确定了机器人的一个位形

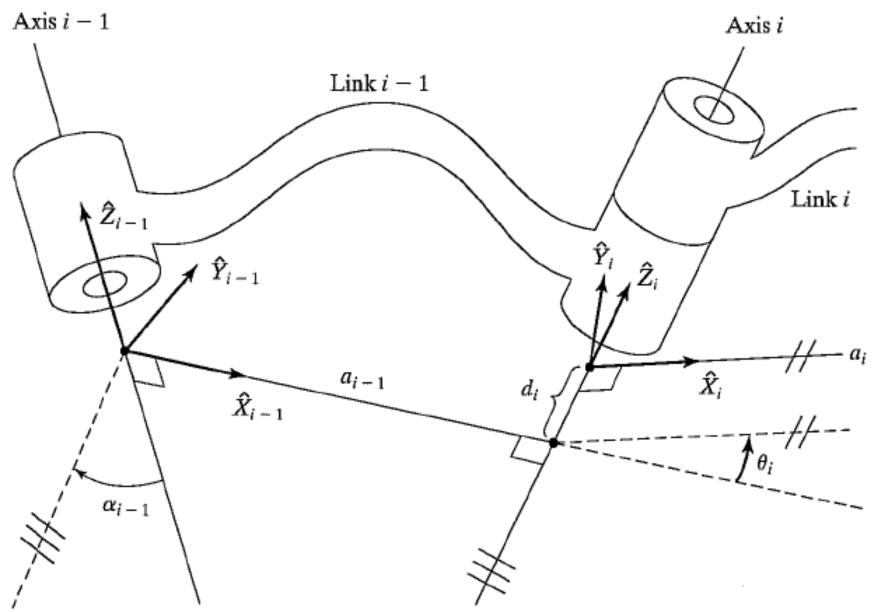
- 笛卡尔空间：该空间中的每一个元素可以确定刚体的一个位姿，刚体位置在直角参考系中度量，刚体姿态按照旋转矩阵、欧拉角、固定角、等效轴角、单位四元数或其他合适的描述方式度量

- 正运动学　　关节空间→笛卡尔空间

讨论：坐标系选择

复习一下：MDH坐标系

- *i*-1和 *i* 坐标系之间的变换包含四个基本变换
  - 绕 X_{i-1} 轴旋转 α_{i-1} 使Z_{i-1} 轴与Z_i 轴平行。
  - 沿 X_{i-1} 轴平移 a_{i-1} 使 Z_{i-1} 轴 与Z_i 轴一致。
  - 绕 Z_i 轴旋转θ_i 使 X_{i-1} 轴与 X_i 轴平行。
  - 沿 Z_i 轴平移 d_i 使坐标原点O_{i-1} 和 O_i 一致，两坐标系完全一致。



复习一下：MDH坐标系

- ***i*-1和 *i*坐标系之间的D-H 变换矩阵**
  - ***i*坐标系中的位置和方位在*i*-1坐标系中的表示由如下的齐次变换矩阵决定**

参考坐标系

源坐标系

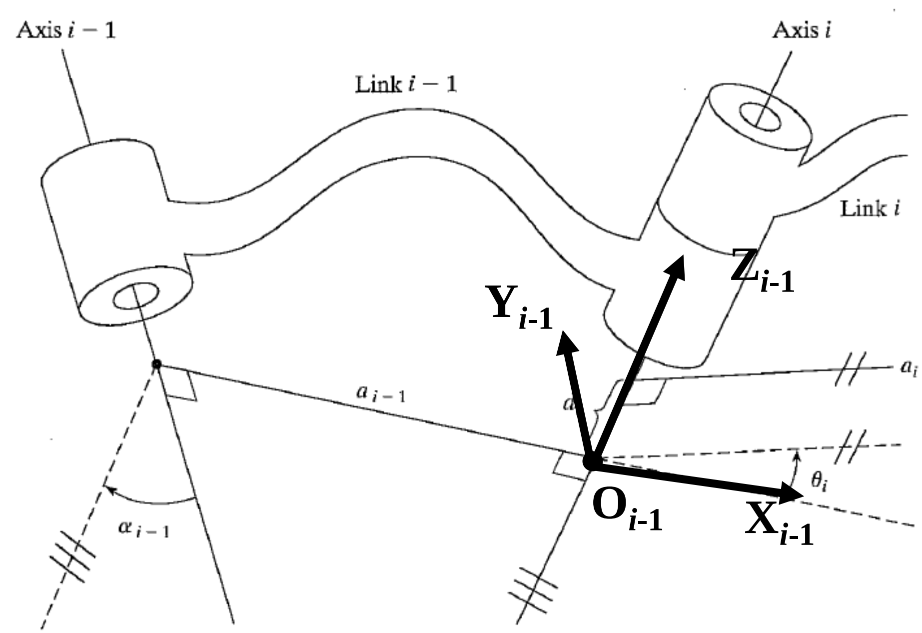
$$
{}^{i-1}_{i}T = R(x_{i-1},\alpha_{i-1})T(x_{i-1},a_{i-1})R(z_i,\theta_i)T(z_i,d_i)
$$

$$
= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha_{i-1} & -S\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & S\alpha_{i-1} & C\alpha_{i-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{i-1} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & 0 \\ S\theta_i & C\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ S\theta_i C\alpha_{i-1} & C\theta_i C\alpha_{i-1} & -S\alpha_{i-1} & -d_i S\alpha_{i-1} \\ S\theta_i S\alpha_{i-1} & C\theta_i S\alpha_{i-1} & C\alpha_{i-1} & d_i C\alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

另一种选择：经典（标准）DH坐标系（SDH, Standard DH）

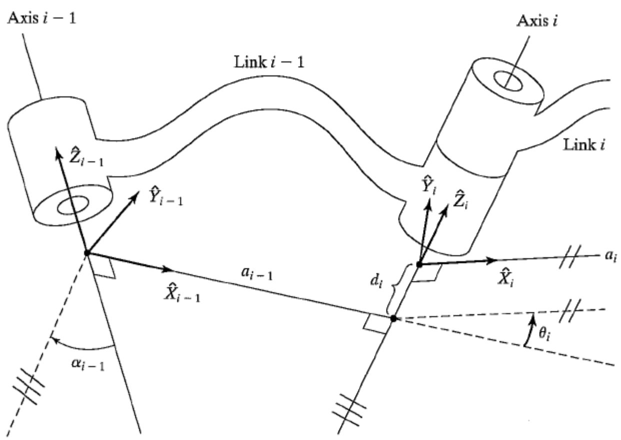
- 相同的D-H参数，不同的连杆坐标系选择，得到的D-H变换阵不同
- 关键在于约定定义在建模时一定要保持一致

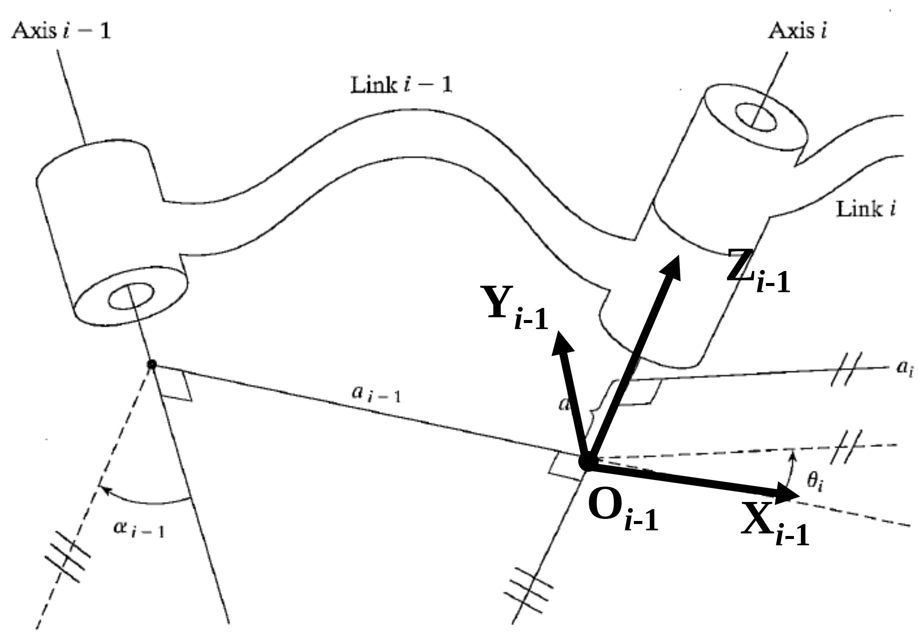


- 主要不同：坐标系原点的选取不同。

MDH与SDH对比

- 对比



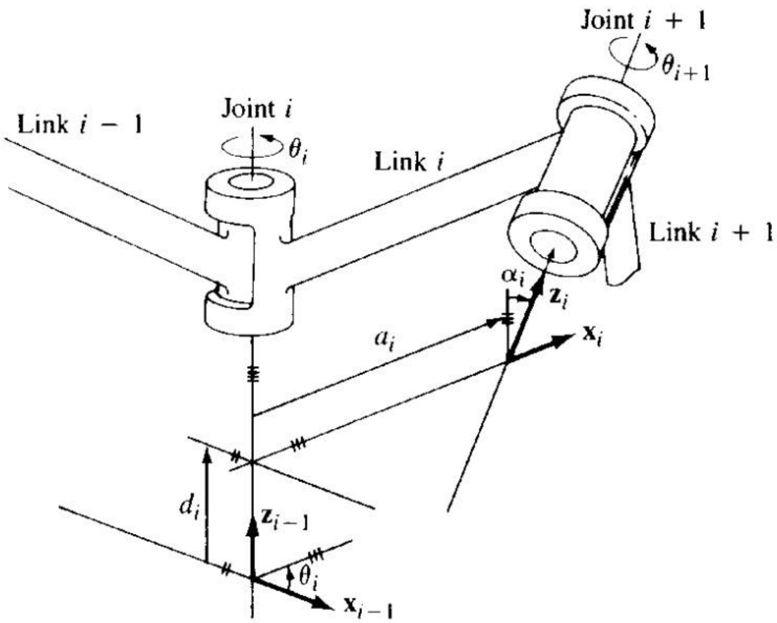


- 第一种（MDH）
- 取关节轴线J_i 和 J_{i+1}的公垂线与 J_i 轴的交点为第i坐标系的原点。
- 关节i的轴J_i为Z_i轴

- 第二种（SDH）
- 取关节轴线J_{i-1} 和 J_i的公垂线与 J_i 轴的交点为第i-1坐标系的原点。
- 关节i的轴J_i为Z_{i-1}轴

SDH坐标系

- *i*-1和 *i*坐标系之间的变换包含四个基本变换
  - 绕 Z_{i-1} 轴旋转 θ_i 使X_{i-1}轴与X_i 轴平行。
  - 沿Z_{i-1} 轴平移 d_i使 X_{i-1} 轴 与X_i轴一致。
  - 沿X_i 轴平移a_i 使坐标原点O_{i-1} 和 O_i 一致（ X_{i-1} 轴 与X_i轴仍然保持一致）。
  - 绕 X_i轴旋转α_i 使两坐标系完全一致。



SDH坐标系

➢ ***i*-1和 *i*坐标系之间的D-H 变换矩阵**

– ***i*坐标系中的位置和方位在*i*-1坐标系中的表示由如下的齐次变换矩阵决定**

参考坐标系

源坐标系

$$
{}^{i-1}_{i}T = R(z_{i-1},\theta_i)T(z_{i-1},d_i)T(x_i,a_i)R(x_i,\alpha_i)
$$

$$
= \begin{bmatrix} C\theta_i & -S\theta_i & 0 & 0 \\ S\theta_i & C\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C\alpha_i & -S\alpha_i & 0 \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} C\theta_i & -C\alpha_i S\theta_i & S\alpha_i S\theta_i & a_i C\theta_i \\ S\theta_i & C\alpha_i C\theta_i & -S\alpha_i C\theta_i & a_i S\theta_i \\ 0 & S\alpha_i & C\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

DH变换矩阵与MDH坐标系不同，但若首尾坐标系相同，得到的运动学方程一致。

运动学模型总结

- 推导运动学模型的步骤：
  – 建立D-H坐标系结构
  – 找到D-H连杆参数
  – 计算相邻关节的变换矩阵
  – 计算运动学模型的变换矩阵
  – 如有必要，采用固定角表示或Euler角表示

Thanks !