2020~2021 学年秋学期

《复变函数与积分变换》

林 智

浙江大学数学科学学院

基本信息

061B0020 复变函数与积分变换　2-2

预修课程： 微积分 (I，II)

基本信息

061B0020 复变函数与积分变换 2-2
预修课程： 微积分 (I，II)

教师： 林 智 (linzhi80@zju.edu.cn)
课时： 周三/五 1~2 节，西一-1-215
收发作业： “学在浙大”，周三午夜前

基本信息

061B0020 复变函数与积分变换　2-2
预修课程： 微积分 (I，II)

教师： 林　智 (linzhi80@zju.edu.cn)
课时： 周三/五 1~2 节，西一-1-215
收发作业： "学在浙大"，周三午夜前
评分标准 (暂定): 作业 (50%)+期中测验 (20%)+ 期末考 (30%)

基本信息

061B0020 复变函数与积分变换　2-2
预修课程： 微积分 (I，II)

教师： 林　智 (linzhi80@zju.edu.cn)
课时： 周三/五 1∼2 节，西一-1-215
收发作业： "学在浙大"，周三午夜前
评分标准 (暂定): 作业 (50%)+期中测验 (20%)+ 期末考 (30%)

教材:《**复变函数与拉普拉斯变换**》**(第三版)，金忆丹，浙大出版社**
主要参考书：　《**复变函数**》**，钟玉泉，高等教育出版社**

课程内容

复变函数是高等院校理工科学生必须具备的数学知识，它是高等微积分的重要后继课程之一，它的理论与方法广泛应用于自然科学与工程科学的许多领域，如信电工程、信息工程、控制工程、理论物理与流体力学、热力学等各领域，是专业理论研究和实际应用方面不可缺少的数学工具。

课程内容

复变函数是高等院校理工科学生必须具备的数学知识，它是高等微积分的重要后继课程之一，它的理论与方法广泛应用于自然科学与工程科学的许多领域，如信电工程、信息工程、控制工程、理论物理与流体力学、热力学等各领域，是专业理论研究和实际应用方面不可缺少的数学工具。

教学目标和课程要求

本课程是按全国大学工科的上程数学教学大纲要求而开设的。要求学生掌握基本的复变函数理论、概念与方法。课程内容力求精炼、清晰、明了：例题与习题的配备及每—部分的思考题力求使学生加深理解概念与方法，得到一定的抽象思维、逻辑思维及运算上的训练。

教学安排（暂定）

序号	内　　容	作业收发
1	预备知识	发：作业一
2	解析函数	发：作业二；收：作业一
3	复变函数的积分	发：作业三；收：作业二
4	级数	发：作业四；收：作业三
5	留数；期中小测	发：作业五；收：作业四
6	保角映射	发：作业六；收：作业五
7	拉普拉斯变换	发：作业七；收：作业六
8	习题课	收：作业七

第一章 预备知识

引言

引言

- 十六世纪中叶，意大利人 Cardano(1501-1576) 在研究一元三次方程时首先发现了负数开平方的需要:

$$40 = (5+\sqrt{-15}) \times (5-\sqrt{-15})$$

引言

- 十六世纪中叶，意大利人 Cardano(1501-1576) 在研究一元三次方程时首先发现了负数开平方的需要:

$$40 = (5 + \sqrt{-15}) \times (5 - \sqrt{-15})$$

- 当时不受理解和重视——“虚数”;

引言

- 十六世纪中叶，意大利人 Cardano(1501-1576) 在研究一元三次方程时首先发现了负数开平方的需要:

$$40 = (5 + \sqrt{-15}) \times (5 - \sqrt{-15})$$

- 当时不受理解和重视——“虚数”;
- 直到十七与十八世纪，随着微积分的产生与发展，情况才有好转;

引言

- 十六世纪中叶，意大利人 Cardano(1501-1576) 在研究一元三次方程时首先发现了负数开平方的需要:

$$40 = (5+\sqrt{-15}) \times (5-\sqrt{-15})$$

- 当时不受理解和重视——“虚数”;
- 直到十七与十八世纪，随着微积分的产生与发展，情况才有好转;
- 欧拉公式:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

§1.1 复数及其表示法

§1.1 复数及其表示法

一对有序实数(x, y) 构成一个复数

记为: $z = x + \mathrm{i}\, y.$

其中 x 和 y 分别称作 z 的实部和虚部,

记为: $x = \mathrm{Re}(z)$ 和 $y = \mathrm{Im}(z)$

§1.1 复数及其表示法

一对有序实数(x, y) 构成一个复数

记为: $z = x + \mathrm{i}\, y.$

其中 x 和 y 分别称作 z 的实部和虚部,

记为: $x = \mathrm{Re}(z)$ 和 $y = \mathrm{Im}(z)$

复数 $\bar{z} = x - \mathrm{i}\, y$ 称为 z 的共轭

§1.1 复数及其表示法

一对有序实数(x, y) 构成一个复数

记为: $z = x + \mathrm{i}\, y.$

其中 x 和 y 分别称作 z 的实部和虚部,

记为: $x = \mathrm{Re}(z)$ 和 $y = \mathrm{Im}(z)$

复数 $\bar{z} = x - \mathrm{i}\, y$ 称为 z 的共轭

两个复数相等 $\Longleftrightarrow$ 他们的实部和虚部都相等

特别地: $z = x + i\, y = 0 \Longleftrightarrow x = y = 0$

§1.1 复数及其表示法（续）

复数的表示法有两种:

§1.1 复数及其表示法（续）

复数的表示法有两种:

一、代数形式: $z = x + \mathrm{i}y$

1. 点表示: $z = x + \mathrm{i}y \Longleftrightarrow$ 平面 XOY 上的点$z(x, y)$
2. 向量表示: $z = x + \mathrm{i}y \Longleftrightarrow$ 平面 XOY 上的矢量$\vec{z}$

§1.1 复数及其表示法（续）

复数的表示法有两种:

一、代数形式: $z = x + \mathrm{i}y$

1. 点表示: $z = x + \mathrm{i}y \Longleftrightarrow$ 平面 XOY 上的点$z(x, y)$
2. 向量表示: $z = x + \mathrm{i}y \Longleftrightarrow$ 平面 XOY 上的矢量$\vec{z}$

这里, 平面 XOY 被称为复平面, 水平的 x 轴称为实轴, 垂直的 y 轴称为虚轴。

§1.1 复数及其表示法（续）

§1.1 复数及其表示法（续）

二、指数形式（三角形式）:从直角坐标到极坐标

由坐标变换: $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$

$$z = x + \mathrm{i}y \Longrightarrow z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta) \qquad \text{（三角表示式）}$$

又根据欧拉公式: $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$

$$z = x + \mathrm{i}y \Longrightarrow z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \qquad \text{（指数表示式）}$$

§1.1 复数及其表示法（续）

二、指数形式（三角形式）:从直角坐标到极坐标

由坐标变换: $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$

$$z = x + \mathrm{i}y \Longrightarrow z = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$$ （三角表示式）

又根据欧拉公式: $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$

$$z = x + \mathrm{i}y \Longrightarrow z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$$ （指数表示式）

其中:

复数 z 的模: $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z| = |\vec{z}|$;

复数 z 的幅角: $\theta = \mathrm{Arg}\ z$

关于幅角“函数”$\mathrm{Arg}(z)$ ★★★★★

关于幅角“函数”$\operatorname{Arg}(z)$ ★★★★★

由复数的指数表示式可发现:

关于幅角“函数”$\mathrm{Arg}(z)$ ★★★★★

由复数的指数表示式可发现:

一个不为 0的复数有无穷多个幅角

关于幅角“函数”$\mathrm{Arg}(z)$ ★★★★★

由复数的指数表示式可发现：

一个不为 0的复数有无穷多个幅角?!

关于幅角“函数”$\mathrm{Arg}(z)$ ★★★★★

由复数的指数表示式可发现:

一个不为 0的复数有无穷多个幅角?! 这是一个集合!

关于幅角“函数”$\mathrm{Arg}(z)$ ★★★★★

由复数的指数表示式可发现:

一个不为 0的复数有无穷多个幅角?! 这是一个集合!

其中落在区间$(-\pi,\pi]$的角 θ_0 称为 $\mathrm{Arg}\, z$ 的主值

关于幅角“函数”Arg(z) ★★★★★

由复数的指数表示式可发现：

一个不为 0的复数有无穷多个幅角?! 这是一个集合!

其中落在区间$(-\pi, \pi]$的角 θ_0 称为 Arg z 的主值

记为： $\theta_0 = \arg z$

从而： $\mathrm{Arg}\ z = \theta_0 + 2k\pi = \arg z + 2k\pi, k = 0, \pm 1, \cdots$

关于幅角“函数”$\mathrm{Arg}(z)$ ★★★★★

由复数的指数表示式可发现:

一个不为 0的复数有无穷多个幅角?! 这是一个集合!

其中落在区间$(-\pi,\pi]$的角 θ_0 称为 $\mathrm{Arg}\ z$ 的主值

记为: $\theta_0 = \arg\ z$

从而: $\mathrm{Arg}\ z = \theta_0 + 2k\pi = \arg\ z + 2k\pi, k = 0, \pm 1, \cdots$

$\arg\ z(|z| \neq 0)$ 的计算方法

$$\arg\ z = \begin{cases} \arctan(y/x) \quad , \quad z\text{在第一、四象限} \\ \\ \end{cases}$$

关于幅角“函数”$\mathrm{Arg}(z)$ ★★★★★

由复数的指数表示式可发现：

一个不为 0的复数有无穷多个幅角?! 这是一个集合!

其中落在区间$(-\pi,\pi]$的角 θ_0 称为 $\mathrm{Arg}\ z$ 的主值

记为：$\theta_0 = \arg z$

从而：$\mathrm{Arg}\ z = \theta_0 + 2k\pi = \arg z + 2k\pi, k = 0, \pm 1, \cdots$

$\arg z (|z| \neq 0)$ 的计算方法

$$\arg z = \begin{cases} \arctan(y/x) & , \quad z\text{在第一、四象限} \\ \pi + \arctan(y/x) & , \quad z\text{在第二象限} \end{cases}$$

关于幅角“函数”$\mathrm{Arg}(z)$ ★★★★★

由复数的指数表示式可发现:

一个不为 0的复数有无穷多个幅角?! 这是一个集合!

其中落在区间$(-\pi,\pi]$的角 θ_0 称为 $\mathrm{Arg}\ z$ 的主值

记为: $\theta_0=\arg\ z$

从而: $\mathrm{Arg}\ z=\theta_0+2k\pi=\arg\ z+2k\pi, k=0,\pm1,\cdots$

$\arg\ z(|z|\neq 0)$ 的计算方法

$$\arg\ z=\begin{cases}\arctan(y/x) & ,\ z\text{在第一、四象限}\\ \pi+\arctan(y/x) & ,\ z\text{在第二象限}\\ -\pi+\arctan(y/x) & ,\ z\text{在第三象限}\end{cases}$$

复数两种表示形式之间的互相转换

例 1：将下列复数化为三角表示式与指数表示式.

$$1)\ z=-\sqrt{12}-2\mathrm{i};\qquad 2)\ z=\sin\frac{\pi}{5}+\mathrm{i}\cos\frac{\pi}{5}.$$

§1.2 复数的运算

1. 四则运算：与实数四则运算相容

§1.2 复数的运算

1. 四则运算：与实数四则运算相容

设 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$， $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$

§1.2 复数的运算

1. 四则运算：与实数四则运算相容

设 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$, $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$

- $$\begin{aligned} z_1 \pm z_2 &= [\mathrm{Re}(z_1) \pm \mathrm{Re}(z_2)] + \mathrm{i}[\mathrm{Im}(z_1) \pm \mathrm{Im}(z_2)] \\ &= x_1 \pm x_2 + \mathrm{i}(y_1 \pm y_2); \end{aligned}$$

§1.2 复数的运算

1. 四则运算：与实数四则运算相容

设 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1, \quad z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$

- $$\begin{aligned} z_1 \pm z_2 &= [\mathrm{Re}(z_1) \pm \mathrm{Re}(z_2)] + \mathrm{i}[\mathrm{Im}(z_1) \pm \mathrm{Im}(z_2)] \\ &= x_1 \pm x_2 + \mathrm{i}(y_1 \pm y_2); \end{aligned}$$
- $z_1 * z_2 = x_1x_2 - y_1y_2 + \mathrm{i}(x_1y_2 + x_2y_1)$

§1.2 复数的运算

1. 四则运算：与实数四则运算相容

设 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$，$z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$

- $$\begin{aligned} z_1 \pm z_2 &= [\mathrm{Re}(z_1) \pm \mathrm{Re}(z_2)] + \mathrm{i}[\mathrm{Im}(z_1) \pm \mathrm{Im}(z_2)] \\ &= x_1 \pm x_2 + \mathrm{i}(y_1 \pm y_2); \end{aligned}$$
- $z_1 * z_2 = x_1x_2 - y_1y_2 + \mathrm{i}(x_1y_2 + x_2y_1)$——??

§1.2 复数的运算

1. 四则运算：与实数四则运算相容

设 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1, \quad z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$

- $$\begin{aligned} z_1 \pm z_2 &= [\mathrm{Re}(z_1) \pm \mathrm{Re}(z_2)] + \mathrm{i}[\mathrm{Im}(z_1) \pm \mathrm{Im}(z_2)] \\ &= x_1 \pm x_2 + \mathrm{i}(y_1 \pm y_2); \end{aligned}$$
- $z_1 * z_2 = x_1x_2 - y_1y_2 + \mathrm{i}(x_1y_2 + x_2y_1)$——??
- $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i}\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

§1.2 复数的运算

1. 四则运算：与实数四则运算相容

设 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$, $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$

- $$\begin{aligned} z_1 \pm z_2 &= [\mathrm{Re}(z_1) \pm \mathrm{Re}(z_2)] + \mathrm{i}[\mathrm{Im}(z_1) \pm \mathrm{Im}(z_2)] \\ &= x_1 \pm x_2 + \mathrm{i}(y_1 \pm y_2); \end{aligned}$$
- $z_1 * z_2 = x_1x_2 - y_1y_2 + \mathrm{i}(x_1y_2 + x_2y_1)$——??
- $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i}\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \quad (z_2 \neq 0)$$

§1.2 复数的运算

复数的四则运算也满足:

§1.2 复数的运算

复数的四则运算也满足：

- 交换律：$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$; $z_1 z_2 = z_2 z_1$;

§1.2 复数的运算

复数的四则运算也满足：

- 交换律：$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$; $z_1 z_2 = z_2 z_1$;
- 结合律：$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$;
  $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$;

§1.2 复数的运算

复数的四则运算也满足:

- 交换律: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$; $z_1 z_2 = z_2 z_1$;
- 结合律: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$;
  $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$;
- 分配律: $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

§1.2 复数的运算

复数的四则运算也满足:

- 交换律: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$; $z_1 z_2 = z_2 z_1$;
- 结合律: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$;
  $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$;
- 分配律: $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

复数加减法的几何意义:

§1.2 复数的运算

复数的四则运算也满足:

- 交换律: $z_1+z_2=z_2+z_1$; $z_1z_2=z_2z_1$;
- 结合律: $z_1+(z_2+z_3)=(z_1+z_2)+z_3$;
  $z_1(z_2z_3)=(z_1z_2)z_3$;
- 分配律: $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$

复数加减法的几何意义:

向量加减法平行四边形法则

**复数乘法的几何意义：从指数表示说起

**复数乘法的几何意义：从指数表示说起

$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$

**复数乘法的几何意义：从指数表示说起

$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$

1. 乘积的模等于模的乘积：$|z_1 z_2| = r_1 r_2 = |z_1||z_2|$；

**复数乘法的几何意义：从指数表示说起

$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$

1. 乘积的模等于模的乘积：$|z_1 z_2| = r_1 r_2 = |z_1||z_2|$;
2. 乘积的幅角等于幅角之和：
$$\operatorname{Arg} z_1 z_2 = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$$

**复数乘法的几何意义：从指数表示说起

$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$

1. 乘积的模等于模的乘积：$|z_1 z_2| = r_1 r_2 = |z_1||z_2|$;
2. 乘积的幅角等于幅角之和：

$$\operatorname{Arg} z_1 z_2 = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$$

——定理 1

**复数乘法的几何意义：从指数表示说起

$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$

1. 乘积的模等于模的乘积：$|z_1 z_2| = r_1 r_2 = |z_1||z_2|$;
2. 乘积的幅角等于幅角之和：

$$\operatorname{Arg} z_1 z_2 = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$$

——定理 1

等式 $\operatorname{Arg} z_1 z_2 = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$ 的含义:

等式的两边都是无限集合，两边的集合相等，即每给定等式左边的一个数，就有等式右边的一个数与之对应，反之亦然.

复数乘法的几何意义

$z_1 z_2$ 相当于将 z_2 的模扩大 $|z_1|$ 倍，并旋转一个角度 $\operatorname{Arg} z_1$。

复数乘法的几何意义

$z_1 z_2$ 相当于将 z_2 的模扩大 $|z_1|$ 倍，并旋转一个角度 $\operatorname{Arg} z_1$。

例 2：设 $z_1 = -1$, $z_2 = \mathrm{i}$. 求：$z_1 z_2$, $\operatorname{Arg} z_1 z_2$ 以及 $\arg z_1 z_2$。

复数除法的几何意义：与乘法对偶

按照乘积的定义，当 $z_1 \neq 0$ 时，有

$$z_2 = \frac{z_2}{z_1} z_1 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} |z_2| = \left|\frac{z_2}{z_1}\right| |z_1| \\ \operatorname{Arg} z_2 = \operatorname{Arg} \frac{z_2}{z_1} + \operatorname{Arg} z_1 \end{cases}$$

复数除法的几何意义: 与乘法对偶

按照乘积的定义, 当 $z_1 \neq 0$ 时, 有

$$z_2 = \frac{z_2}{z_1} z_1 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} |z_2| = \left|\dfrac{z_2}{z_1}\right| |z_1| \\ \operatorname{Arg} z_2 = \operatorname{Arg} \dfrac{z_2}{z_1} + \operatorname{Arg} z_1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} \left|\dfrac{z_2}{z_1}\right| = \dfrac{|z_2|}{|z_1|} \\ \operatorname{Arg} \dfrac{z_2}{z_1} = \operatorname{Arg} z_2 - \operatorname{Arg} z_1 \end{cases}$$

复数除法的几何意义：与乘法对偶

按照乘积的定义，当 $z_1 \neq 0$ 时，有

$$z_2 = \frac{z_2}{z_1} z_1 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} |z_2| & = \left|\dfrac{z_2}{z_1}\right| |z_1| \\ \operatorname{Arg} z_2 & = \operatorname{Arg} \dfrac{z_2}{z_1} + \operatorname{Arg} z_1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} \left|\dfrac{z_2}{z_1}\right| & = \dfrac{|z_2|}{|z_1|} \\ \operatorname{Arg} \dfrac{z_2}{z_1} & = \operatorname{Arg} z_2 - \operatorname{Arg} z_1 \end{cases}$$

定理 2：两个复数的商的模等于它们的模的商，两个复数的商的辐角等于被除数与除数的幅角之差。

2. 乘方与开方运算

2. 乘方与开方运算

1) 乘方

$$z^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

2. 乘方与开方运算

1) 乘方

$$z^n = r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = r^n(\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta)$$

De Moivre 公式: $r = 1$ 时的乘方

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta$$

2) 开方

2) 开方

若复数 w 满足 $w^n = z$:

则称 w 为 z 的 n次方根，记为 $w = \sqrt[n]{z}$。

2) 开方

若复数 w 满足 $w^n = z$:

则称 w 为 z 的 n次方根，记为 $w = \sqrt[n]{z}$。

De Moivre 公式: $r = 1$ 时的乘方

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta$$

2) 开方

若复数 w 满足 $w^n = z$:

则称 w 为 z 的 n次方根，记为 $w = \sqrt[n]{z}$。

De Moivre 公式: $r = 1$ 时的乘方

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta$$

写成指数形式，两边同时取 n 次方

$$|w|^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\operatorname{Arg} w} = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\operatorname{Arg} z}$$

2) 开方

若复数 w 满足 $w^n = z$:

则称 w 为 z 的 n次方根，记为 $w = \sqrt[n]{z}$。

De Moivre 公式: $r = 1$ 时的乘方

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta$$

写成指数形式，两边同时取 n 次方

$$|w|^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\operatorname{Arg} w} = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\operatorname{Arg} z}$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} |w| & = & \sqrt[n]{|z|} \\ \operatorname{Arg} w & = & \dfrac{\arg z + 2k\pi}{n}, \end{array}\right.$$

2) 开方

若复数 w 满足 $w^n = z$:

则称 w 为 z 的 n次方根，记为 $w = \sqrt[n]{z}$。

De Moivre 公式: $r = 1$ 时的乘方

$$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta$$

写成指数形式，两边同时取 n 次方

$$|w|^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\operatorname{Arg} w} = |z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\operatorname{Arg} z}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} |w| = \sqrt[n]{|z|} \\ \operatorname{Arg} w = \dfrac{\arg z + 2k\pi}{n}, \ k = 0, 1, \cdots, n-1 \end{cases}$$

2) 开方（续）

从而

$$
\begin{aligned}
\sqrt[n]{z} &= \sqrt[n]{|z|}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\dfrac{\arg z+2k\pi}{n}} \\
&= r^{1/n}\left(\cos\frac{\arg z+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\arg z+2k\pi}{n}\right), \\
&\quad k=0,1,\cdots,n-1.
\end{aligned}
$$

2) 开方（续）

从而

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{z} &= \sqrt[n]{|z|}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\dfrac{\arg z+2k\pi}{n}}\\ &= r^{1/n}\left(\cos\frac{\arg z+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\arg z+2k\pi}{n}\right),\\ &\quad k=0,1,\cdots,n-1.\end{aligned}$$

几何解释

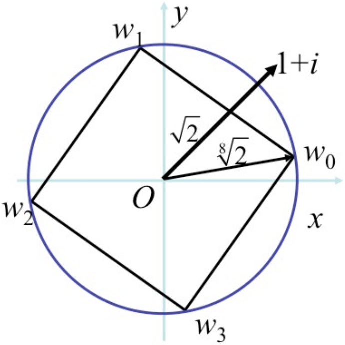
$z^{1/n}$ 的 n 个值就是以原点为中心，$r^{1/n}$ 为半径的圆的内接正 n 边形的 n 个顶点。

2) 开方（续）

例 3：求 $\sqrt[4]{1+\mathrm{i}}$。

2) 开方（续）

例 3：求 $\sqrt[4]{1+\mathrm{i}}$。



思考

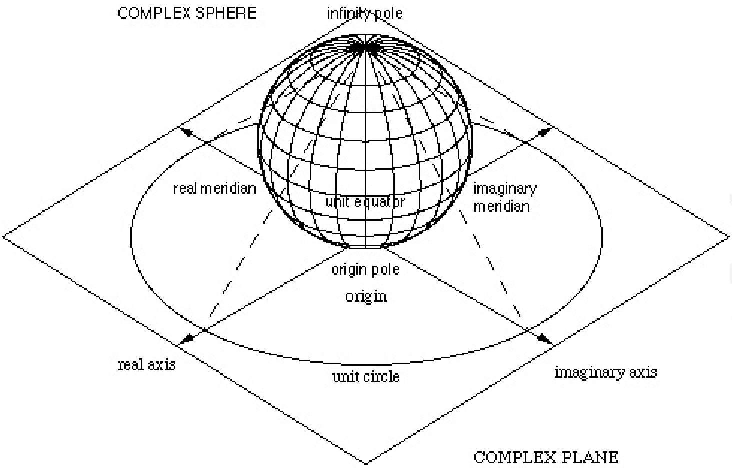
pp. 17 思考题一

1.(4), 2, 4 最后一项

作业一-A （09/23 23:59 前提交至“学在浙大”）

pp. 18 习题一：1.(3); 2.(2); 4; 5.(1)(2); 7; 8.

§1.3 复球面与无穷远点


COMPLEX SPHERE
infinity pole
real meridian
unit equator
imaginary
meridian
origin pole
origin
real axis
unit circle
imaginary axis
COMPLEX PLANE

球极平面投影 (Stereographic Projection)

球极平面投影 (Stereographic Projection)

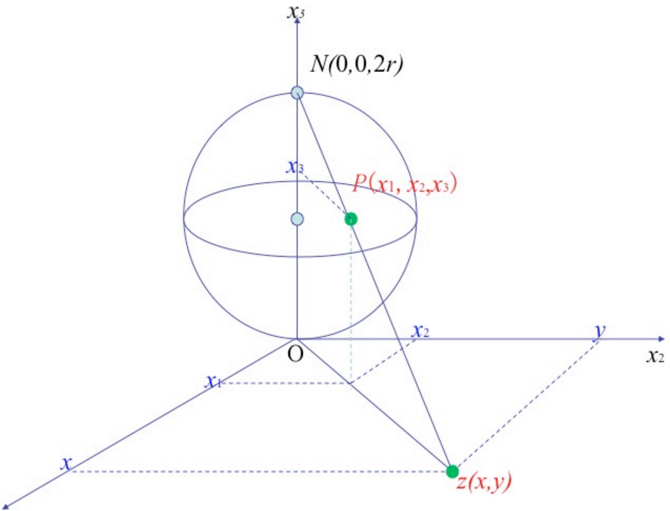
除了平面坐标表示外，复数还可以用球面上的点来表示

球极平面投影 (Stereographic Projection)

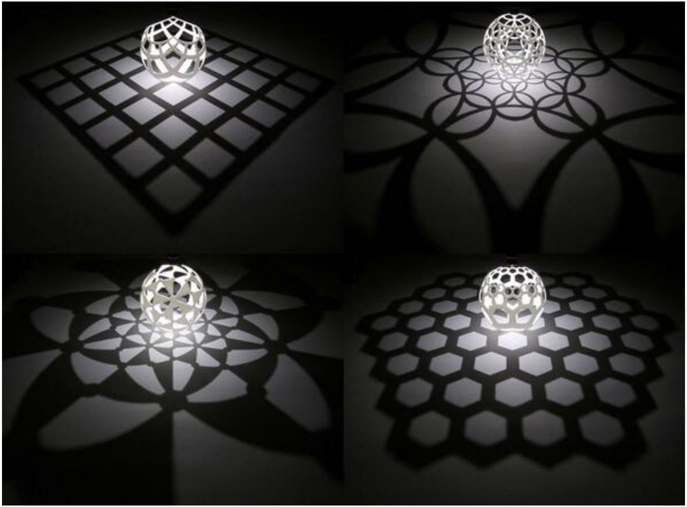
除了平面坐标表示外，复数还可以用球面上的点来表示

作一球与复平面切于原点。则对复平面内任一点 Z，用直线将 Z 与球北极 N 相连，与球面相交于 P 点，则球面上除 N 点外所有点和复平面上的所有点一一对应。

球极平面投影 (Stereographic Projection)



球极平面投影 (Stereographic Projection)



球极平面投影 (Stereographic Projection)

思考

设球直径为 $2r = 1$,

球极平面投影 (Stereographic Projection)

思考

设球直径为 $2r = 1$,

1. 复平面上的单位圆在球面上的投影曲线是??

球极平面投影 (Stereographic Projection)

思考

设球直径为 $2r = 1$,

1. 复平面上的单位圆在球面上的投影曲线是??
2. 复平面上单位圆以外的点球面投影区域为??

球极平面投影 (Stereographic Projection)

思考

设球直径为 $2r = 1$,

1. 复平面上的单位圆在球面上的投影曲线是??
2. 复平面上单位圆以外的点球面投影区域为??
3. 能将球北极也和复平面上的点对应起来吗?

球极平面投影 (Stereographic Projection)

思考

设球直径为 $2r = 1$,

1. 复平面上的单位圆在球面上的投影曲线是??
2. 复平面上单位圆以外的点球面投影区域为??
3. 能将球北极也和复平面上的点对应起来吗?
   可以,将无穷远点加入复平面:$\mathbb{C} \Longrightarrow \bar{\mathbb{C}}$。从而得到复球面。

球极平面投影 (Stereographic Projection)

思考

设球直径为 $2r = 1$,

1. 复平面上的单位圆在球面上的投影曲线是??
2. 复平面上单位圆以外的点球面投影区域为??
3. 能将球北极也和复平面上的点对应起来吗?
   可以，将无穷远点加入复平面：$\mathbb{C} \Longrightarrow \bar{\mathbb{C}}$。从而得到复球面。
4. 如果要求复球面为单位球, 能把复平面上的单位圆映为复球面的赤道吗?

扩充复数域和扩充复平面

引入一个“新”的数：∞

扩充复数域和扩充复平面

引入一个“新”的数：∞

$\Longleftrightarrow$ 引进一个“理想点”：无穷远点 ∞

扩充复数域和扩充复平面

引入一个“新”的数：∞

$\Longleftrightarrow$ 引进一个“理想点”：无穷远点 ∞

约定：

$$\frac{a}{0} = \infty \, (a \neq 0), \quad \frac{a}{\infty} = 0 \, (a \neq \infty), \quad \frac{\infty}{a} = \infty \, (a \neq \infty)$$

$$a \cdot \infty = \infty \cdot a = \infty \, (a \neq 0),$$

$$a \pm \infty = \infty \pm a = \infty \, (a \neq \infty)$$

§1.4 复平面上的点集

§1.4 复平面上的点集

1. 平面点集的几个概念

(1) 邻域

平面上以 z_0 为中心, δ(任意的正数) 为半径的圆: $|z-z_0|<\delta$ 内部的点的集合称为 z_0 的邻域, 而称由不等式 $0<|z-z_0|<\delta$ 所确定的点集为 z_0 的去心邻域。

§1.4 复平面上的点集

1. 平面点集的几个概念

(1) 邻域

平面上以 z_0 为中心，δ(任意的正数) 为半径的圆：$|z-z_0|<\delta$ 内部的点的集合称为 z_0 的邻域，而称由不等式 $0<|z-z_0|<\delta$ 所确定的点集为 z_0 的去心邻域。

无穷远点的邻域

包括无穷远点自身在内且满足 $|z|>M>0$ 的点的集合

§1.4 复平面上的点集

1. 平面点集的几个概念

(1) 邻域

平面上以 z_0 为中心, δ(任意的正数) 为半径的圆: $|z-z_0|<\delta$ 内部的点的集合称为 z_0 的邻域, 而称由不等式 $0<|z-z_0|<\delta$ 所确定的点集为 z_0 的去心邻域。

无穷远点的邻域

包括无穷远点自身在内且满足 $|z|>M>0$ 的点的集合——即圆 $|z|=M$ 的外部且包含无穷远点本身。

不包括无穷远点本身、仅满足 $|z|>M$ 的所有点称为无穷远点的去心邻域, 也记作 $M<|z|<\infty$。

1. 平面点集的几个概念（续）

1. 平面点集的几个概念（续）

(2) 内点和开集

设 G 为一平面点集，z_0 为 G 中任意一点。如果存在 z_0 的一个邻域，该邻域内所有点都属于 G，则称 z_0 为 G 的内点

如果 G 内的每个点都是它的内点，则称 G 为开集。

1. 平面点集的几个概念（续）

(2) 内点和开集

设 G 为一平面点集，z_0 为 G 中任意一点。如果存在 z_0 的一个邻域，该邻域内所有点都属于 G，则称 z_0 为 G 的内点

如果 G 内的每个点都是它的内点，则称 G 为开集。

(3) 边界点、边界

设 G 为复平面内的一个点集，如果点 z_0 的任意小的邻域内既包含有 G 中的点又包含不属于 G 中的点，这样的点 z_0 称为 G 的边界点。

G 的所有边界点组成 G 的边界，通常记做 ∂G。

1. 平面点集的几个概念（续）

1. 平面点集的几个概念（续）

(4) 区域

平面点集 G 称为一个区域，如果它满足下列两个条件:

1. 平面点集的几个概念（续）

(4) 区域

平面点集 G 称为一个区域，如果它满足下列两个条件:

1. G 是一个开集;
2. G 是连通的——即 G 中任何两点都可以用完全属于 G 的一条折线连接起来。

区域 G 与它的边界一起构成闭区域或闭域，记为 $\overline{G}$。

1. 平面点集的几个概念（续）

(4) 区域

平面点集 G 称为一个区域, 如果它满足下列两个条件:

1. G 是一个开集;
2. G 是连通的——即 G 中任何两点都可以用完全属于 G 的一条折线连接起来。

区域 G 与它的边界一起构成闭区域或闭域, 记为 $\overline{G}$。

(5) 有界区域

如果存在正数 M, 使对于一切 $z \in G$, 有 $|z| \le M$, 则称 G 为有界区域。

1. 平面点集的几个概念（续）

(4) 区域

平面点集 G 称为一个区域, 如果它满足下列两个条件:

1. G 是一个开集;
2. G 是连通的——即 G 中任何两点都可以用完全属于 G 的一条折线连接起来。

区域 G 与它的边界一起构成闭区域或闭域, 记为 $\overline{G}$。

(5) 有界区域

如果存在正数 M, 使对于一切 $z \in G$, 有 $|z| \leq M$, 则称 G 为有界区域。否则, 称 G 为无界区域。

1. 平面点集的几个概念（续）

1. 平面点集的几个概念（续）

(6) 简单曲线与光滑曲线

设 $C: z = z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)\,(a \le t \le b)$ 为一条连续曲线，$z(a)$ 与 $z(b)$ 分别为 C 的起点与终点。

1. 平面点集的几个概念（续）

(6) 简单曲线与光滑曲线

设 C: $z = z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)\,(a \le t \le b)$ 为一条连续曲线，$z(a)$ 与 $z(b)$ 分别为 C 的起点与终点。

对于满足 $a < t_1 < b, a \le t_2 \le b$ 的 t_1 与 t_2，若存在 $t_1 \ne t_2$ 而有 $z(t_1) = z(t_2)$ 时，点 $z(t_1)$ 称为曲线 C 的重点。

1. 平面点集的几个概念（续）

(6) 简单曲线与光滑曲线

设 C: $z = z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)\ (a \le t \le b)$ 为一条连续曲线，$z(a)$ 与 $z(b)$ 分别为 C 的起点与终点。

对于满足 $a < t_1 < b, a \le t_2 \le b$ 的 t_1 与 t_2，若存在 $t_1 \ne t_2$ 而有 $z(t_1) = z(t_2)$ 时，点 $z(t_1)$ 称为曲线 C 的重点。

没有重点的连续曲线 C，称为简单曲线或若尔当 (Jordan) 曲线。如果简单曲线 C 的起点与终点闭合，即 $z(a) = z(b)$，则曲线 C 称为简单闭曲线。

1. 平面点集的几个概念（续）

(6) 简单曲线与光滑曲线

设 C: $z = z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)\ (a \le t \le b)$ 为一条连续曲线, $z(a)$ 与 $z(b)$ 分别为 C 的起点与终点。

对于满足 $a < t_1 < b, a \le t_2 \le b$ 的 t_1 与 t_2, 若存在 $t_1 \ne t_2$ 而有 $z(t_1) = z(t_2)$ 时, 点 $z(t_1)$ 称为曲线 C 的重点。

没有重点的连续曲线 C, 称为简单曲线或若尔当 (Jordan) 曲线。如果简单曲线 C 的起点与终点闭合, 即 $z(a) = z(b)$, 则曲线 C 称为简单闭曲线。

几个例子

1. 平面点集的几个概念（续）

1. 平面点集的几个概念（续）

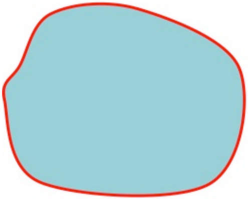
(7) 单/多连通区域

复平面上的一个区域 G, 如果在其中任作一条简单闭曲线, 而曲线的内部总属于 G, 就称为**单连通域**; 一个区域如果不是单连通域, 就称为**多连通域**。

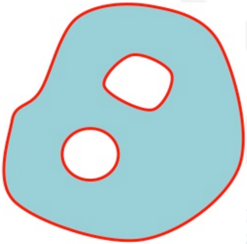
1. 平面点集的几个概念（续）

(7) 单/多连通区域

复平面上的一个区域 G, 如果在其中任作一条简单闭曲线, 而曲线的内部总属于 G, 就称为**单连通域**; 一个区域如果不是单连通域, 就称为**多连通域**。



单连通域



多连通域

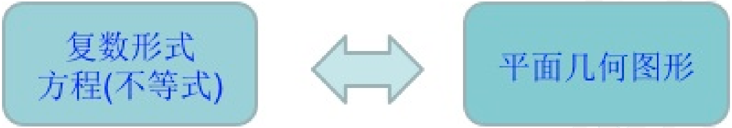
2. 平面图形的复数表示

2. 平面图形的复数表示

由于平面图形上的点可以用复数表示，因而很多平面图形能用复数形式 (模或辐角) 的方程 (或不等式) 来表示; 反之，也可以通过某些给定的复数形方程 (或不等式) 来确定它所表示的平面图形。

2. 平面图形的复数表示

由于平面图形上的点可以用复数表示，因而很多平面图形能用复数形式 (模或辐角) 的方程 (或不等式) 来表示; 反之，也可以通过某些给定的复数形方程 (或不等式) 来确定它所表示的平面图形。



一些例子

一些例子

例 1：将通过两点 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ 与 $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ 的直线用复数方程来表示

一些例子

例 1：将通过两点 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ 与 $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ 的直线用复数方程来表示

例 2：求下列方程所表示的曲线:

1. $|z + \mathrm{i}| = 2$;
2. $|z - 2\mathrm{i}| = |z + 2|$;
3. $\mathrm{Im}(\mathrm{i} + \bar{z}) = 4$。

一些例子

例 1：将通过两点 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ 与 $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ 的直线用复数方程来表示

例 2：求下列方程所表示的曲线:

1. $|z + \mathrm{i}| = 2$;
2. $|z - 2\mathrm{i}| = |z + 2|$;
3. $\mathrm{Im}(\mathrm{i} + \overline{z}) = 4$。

例 3：求下列不等式所表示的几何图形::

1. $|z - a| = R$;
2. $\alpha < \arg z < \beta$, $-\pi < \alpha < \beta \leq \pi$;

作业一-B （09/23 23:59 前提交至“学在浙大”）

pp. 18 习题一：10.(2); 11; 13; 14.(2)(4)(6)(8)