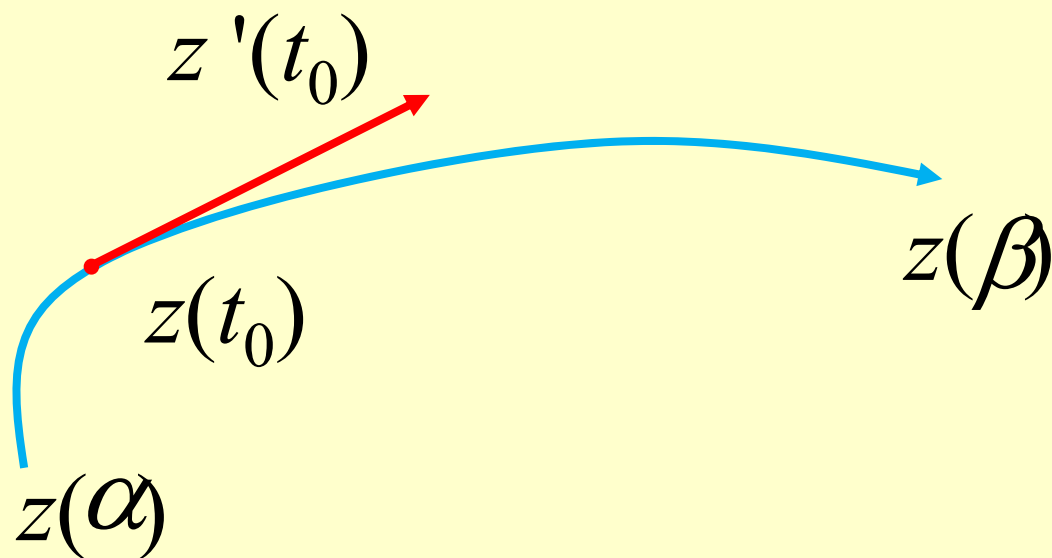


第六章 保角映射

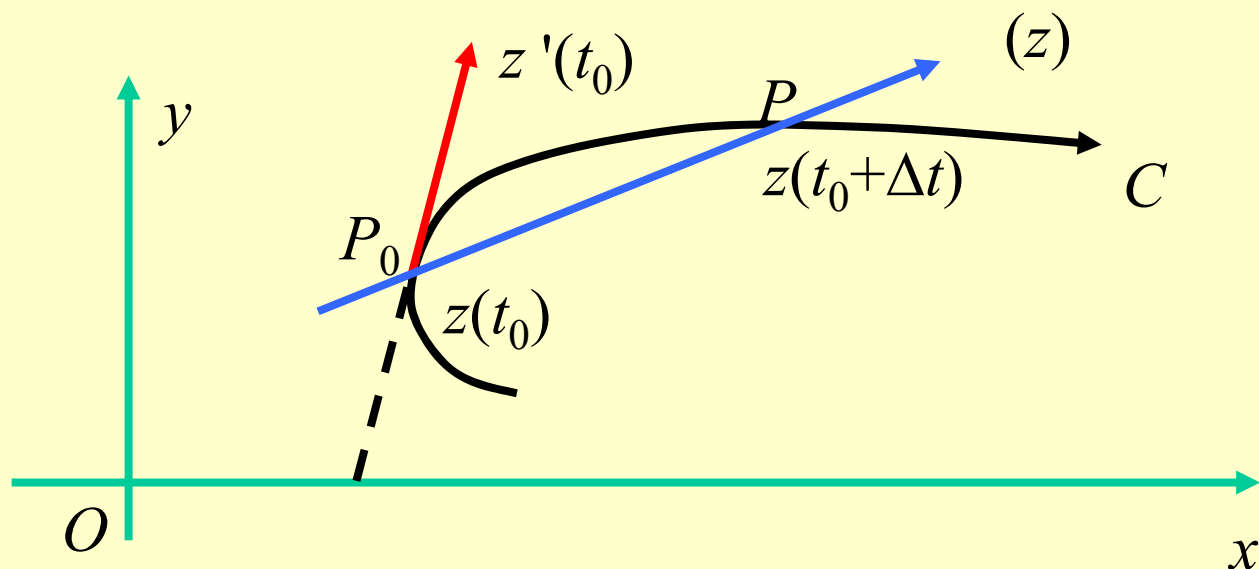
§ 1 保角映射的概念

z 平面内的任一条有向曲线 C 可用 $z=z(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$ 表示, 它的正向取为 t 增大时点 z 移动的方向, $z(t)$ 为一条连续函数.

如果 $z'(t_0) \neq 0$, $\alpha \leq t \leq \beta$ 则表示 $z'(t)$ 的向量(把起点放取在 z_0 . 以下不一一说明)与 C 相切于点 $z_0 = z(t_0)$.



事实上, 如果通过 C 上两点 P_0 与 P 的割线 P_0P 的正向对应于 t 增大的方向, 则这个方向与表示 $\frac{z(t_0 + \Delta t) - z(t_0)}{\Delta t}$ 的方向相同.



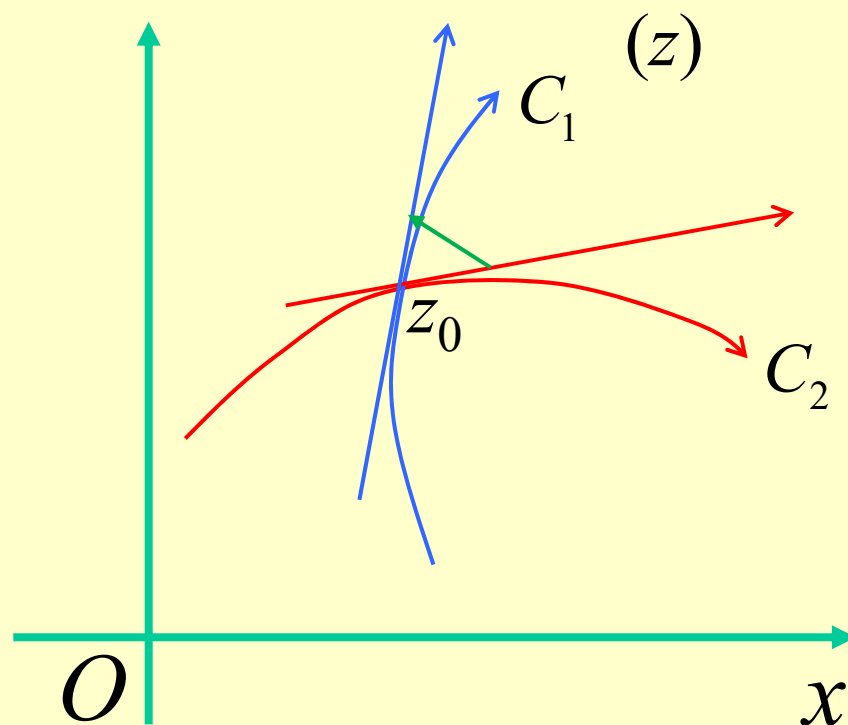
当点 P 沿 C 无限趋向于点 P_0 , 割线 P_0P 的极限位置就是 C 上 P_0 处的切线. 因此, 表示 $z'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{z(t_0 + \Delta t) - z(t_0)}{\Delta t}$ 的向量与 C 相切于点 $z_0 = z(t_0)$, 且方向与 C 的正向一致.

我们有 $z'(t_0)$ 可以写成指数表示方式: 其中

$\text{Arg } z'(t_0)$ 就是 z_0 处 C 的切线正向与 x 轴正向间的夹角;

如何定义两条曲线之间的夹角:

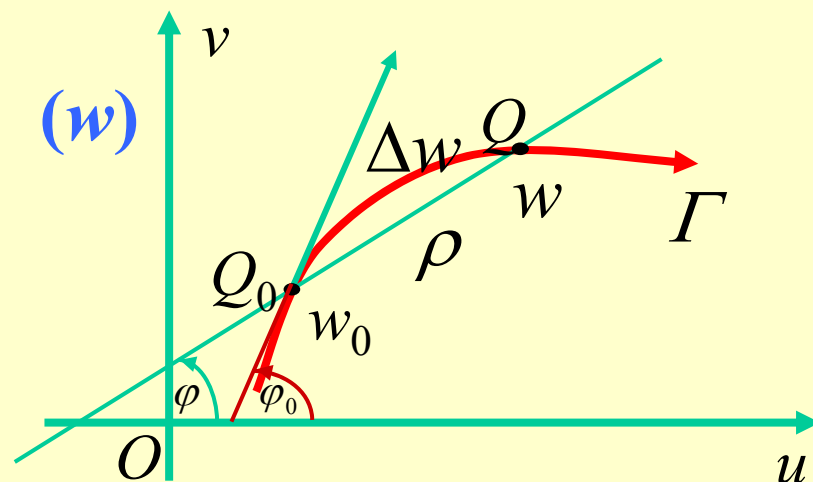
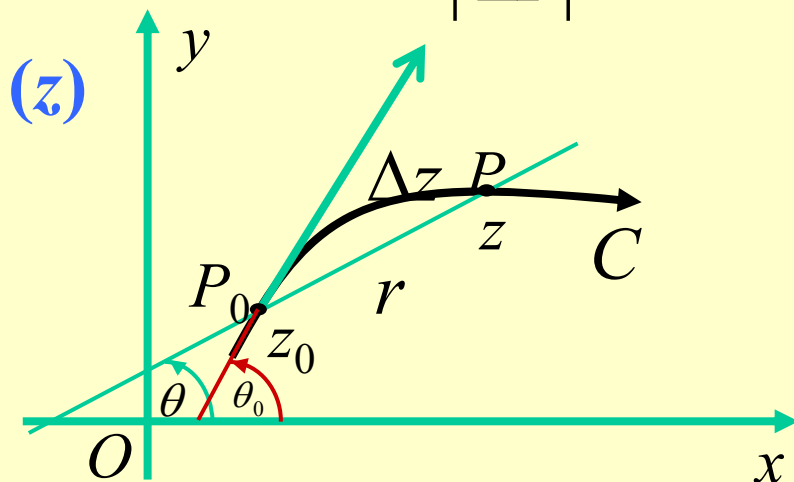
相交于一点的两条曲线 C_1 与 C_2 正向之间的夹角就是它们交点处切线正向间夹角.

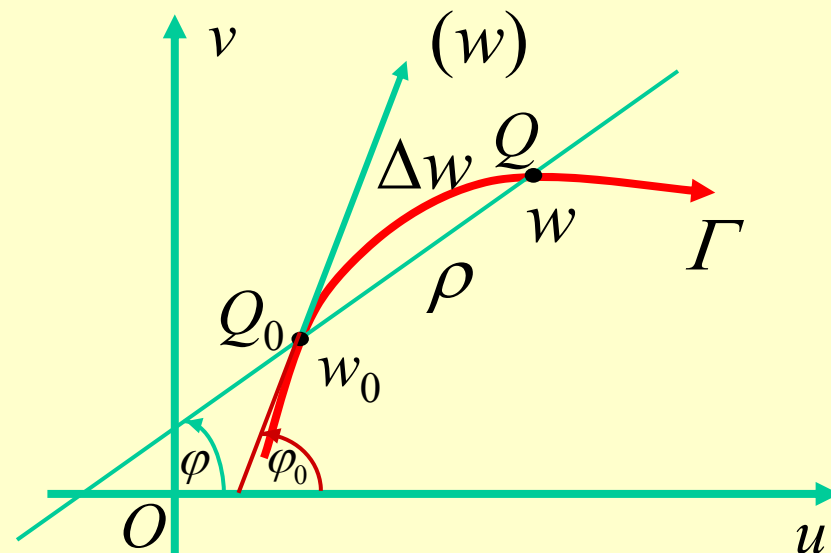
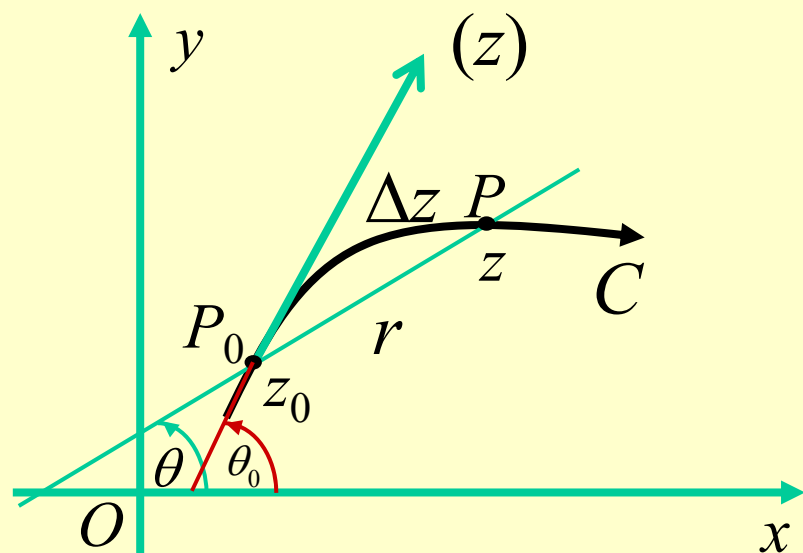


1.解析函数的导数的几何意义 设函数 $w=f(z)$ 在区域 D 内解析, z_0 为 D 内的一点, 且 $f'(z_0) \neq 0$. 又设 C 为 z 平面内通过点 z_0 的一条有向光滑曲线: $z=z(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, 且 $z_0=z(t_0)$, $z'(t_0) \neq 0$, $\alpha \leq t \leq \beta$. 映射 $w=f(z)$ 将 C 映射成 w 平面内通过点 z_0 的对应点 $w_0=f(z_0)$ 的一条有向光滑曲线 $\Gamma: w=f[z(t)]$, $\alpha \leq t \leq \beta$.

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{w - w_0}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{x\Delta \rightarrow \infty} \frac{|\Delta w| e^{i\varphi}}{|\Delta z| e^{i\theta}} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| e^{i(\varphi - \theta)}$$

$$|f'(z_0)| = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right|, \operatorname{Arg} f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (\varphi - \theta) = \varphi_0 - \theta_0$$





根据复合函数求导法, 有 $w'(t_0) = f'(z_0)z'(t_0) \neq 0$.

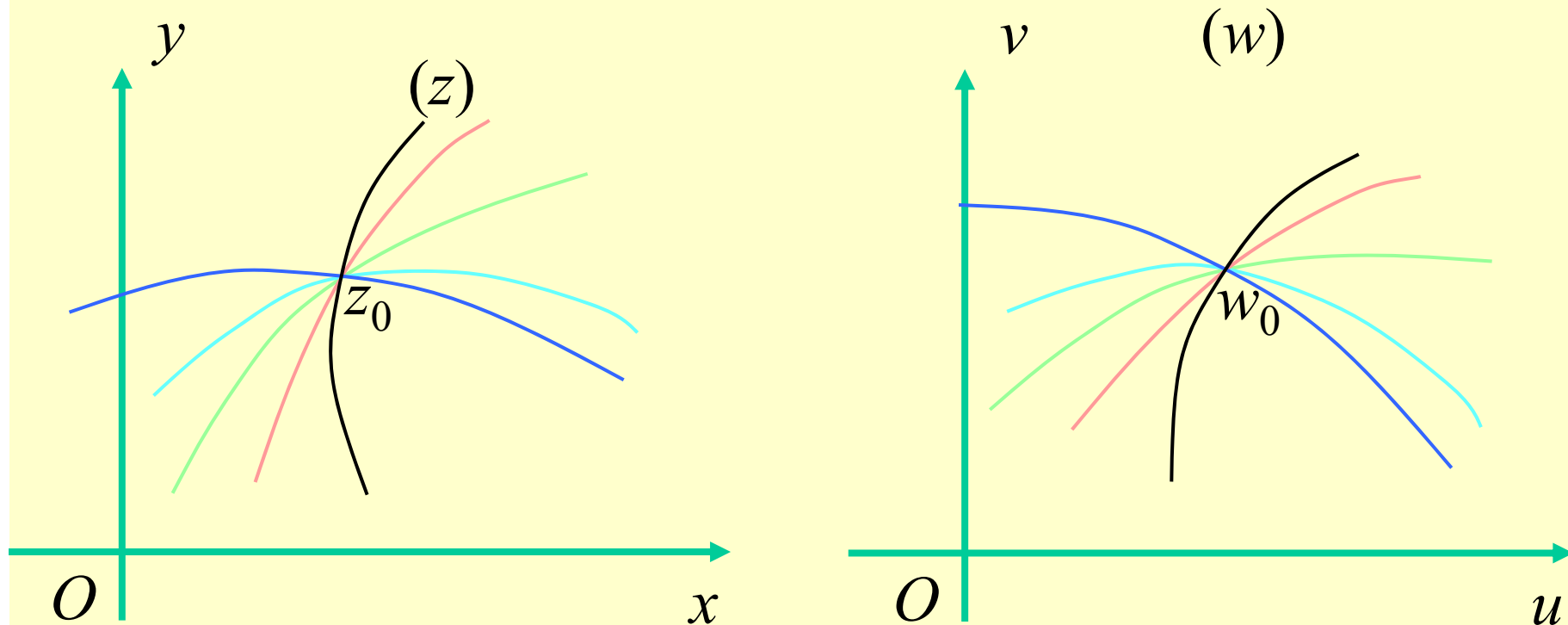
因此, 在 Γ 上点 w_0 处也有切线存在, 且切线正向与 u 轴正向的夹角是 $\text{Arg } w'(t_0) = \text{Arg } f'(z_0) + \text{Arg } z'(t_0)$.

即 $\text{Arg } f'(z_0) = \text{Arg } w'(t_0) - \text{Arg } z'(t_0) = \varphi_0 - \theta_0$.

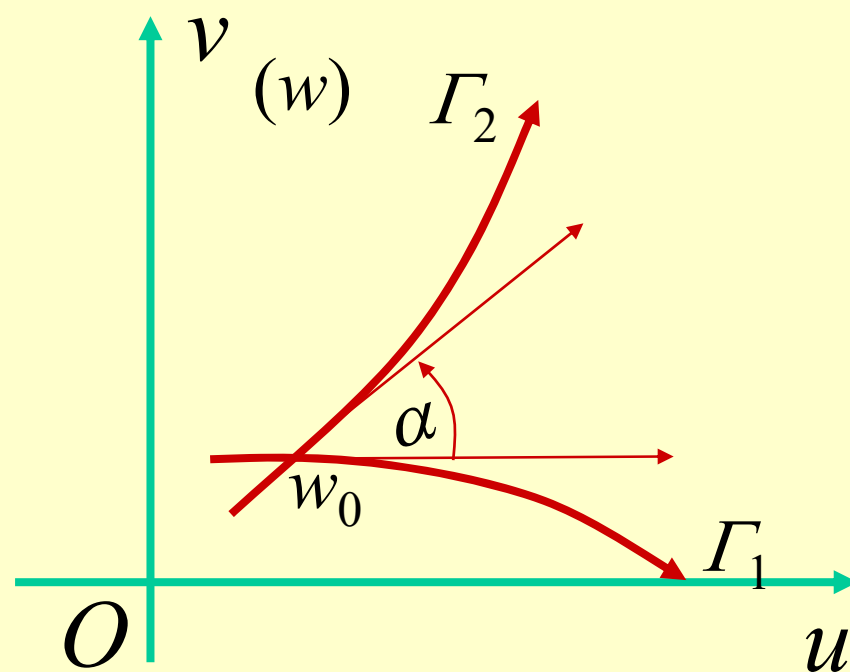
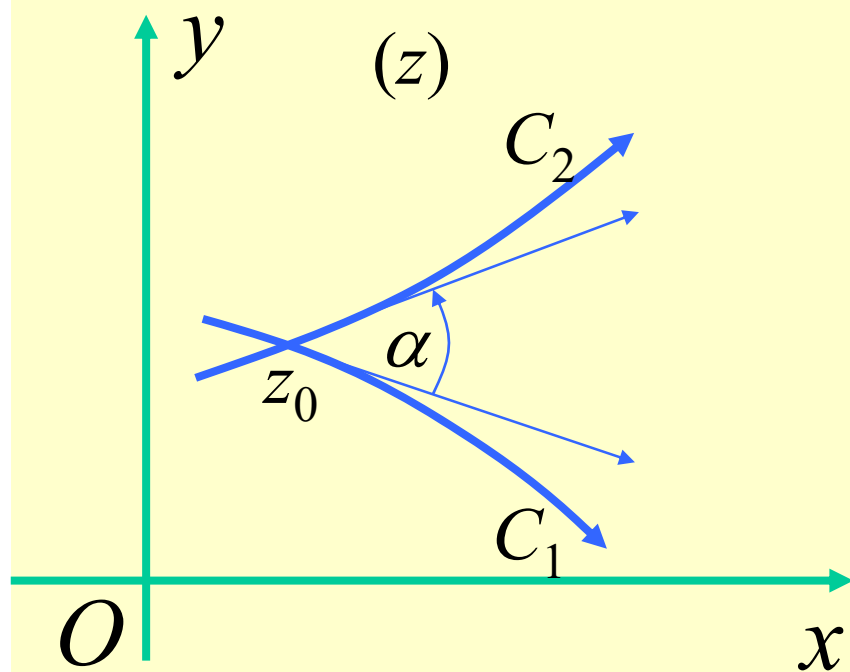
若原来的切线的正向与映射过后的切线的正向之间的夹角理解为曲线 C 经过 $w=f(z)$ 映射后在 z_0 处的转动角, 则

1) 导数 $f'(z_0) \neq 0$ 的辐角 $\text{Arg } f'(z_0)$ 是曲线 C 经过 $w=f(z)$ 映射后在 z_0 处的转动角;

2) **转动角**的大小与方向跟**曲线C**的形状与方向**无关**. 所以这种映射具有转动角的不变性.



通过 z_0 点的可能的曲线有无限多条, 其中的每一条都具有这样的性质, 即映射到 w 平面的曲线在 w_0 点都转动了一个角度 **$\text{Arg } f'(z_0)$** .



相交于点 z_0 的任何两条曲线 C_1 与 C_2 之间的夹角, 在其**大小和方向**上都**等同于**经 $w=f(z)$ 映射后 C_1 与 C_2 对应的曲线 Γ_1 与 Γ_2 之间的夹角, 所以这种映射具有保持两曲线间夹角与方向不变的性质. 这种性质称为保角性.

$$\left(\varphi_1 - \theta_1 = \varphi_2 - \theta_2 \Rightarrow \theta_2 - \theta_1 = \varphi_2 - \varphi_1 = \alpha \right)$$

$$3) \quad |f'(z_0)| = \lim_{x \rightarrow z_0} \left| \frac{w - w_0}{z - z_0} \right| = \lim_{x \rightarrow z_0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| \quad \text{称为曲线 } C \text{ 在 } z_0 \text{ 的伸缩率.}$$

上式表明 $|f'(z)|$ 是两象点间距离和两原象点间距离比值的极限, 从而可视为映射 $w=f(z)$ 在点 z_0 处沿曲线 C 的伸缩率, 它与曲线 C 的形状及方向无关. 所以这种映射又具有伸缩率不变性.

$$\text{上式可视为 } |f(z) - f(z_0)| \approx |f'(z_0)| |z - z_0|$$

$|f'(z_0)| > 1$, 表示从 z_0 出发的任一无穷小距离伸长;

$|f'(z_0)| < 1$, 表示从 z_0 出发的任一无穷小距离缩短;

$|f'(z_0)| = 1$, 表示从 z_0 出发的任一无穷小距离不变;

例1 求 $w=f(z)=z^3$ 在 $z=0, z=i$ 处的导数值,并说明几何意义。

解: $w=f(z)=z^3$ 在全平面解析, $f'(z)=3z^2$ 。

1) $f'(i)=3i^2 = -3 = 3e^{i\pi}$ 在 $z=i$ 处具有伸缩率不变和保角性。

伸缩率为3, 旋转角为 π 。

2) $f'(0)=0, f(z)=z^3$ 在 $z=0$ 处显然不具有保角性。

定理一 设函数 $w=f(z)$ 在区域 D 内**解析**, z_0 为 D 内的一点,

且 $f'(z_0) \neq 0$, 则映射 $w=f(z)$ 在 z_0 具有两个性质:

1) 保角性. 即通过 z_0 的两条曲线间的夹角跟经过映射后所

得两曲线间的夹角在**大小和方向上保持不变**。

2) 伸缩率的不变性. 即通过 z_0 的任何一条曲线的伸缩率均为 $|f'(z_0)|$ 而与其形状和方向无关。

2. 保角映射的概念

定义 设函数 $w = f(z)$ 在 z_0 的邻域内是一一(双射)的, 在 z_0 具有保角性, 则称 $w = f(z)$ 在 z_0 是保角映射/共形映射.

如果映射 $w = f(z)$ 在 D 内的每一点都是保角的就称 $w = f(z)$ 是区域 D 内的保角映射.

如果映射 $w = f(z)$ 在 D 内的任意一点, 存在一个邻域使 $f(z)$ 在邻域内是保角的, 则称 $w = f(z)$ 是区域 D 内的局部保角映射.

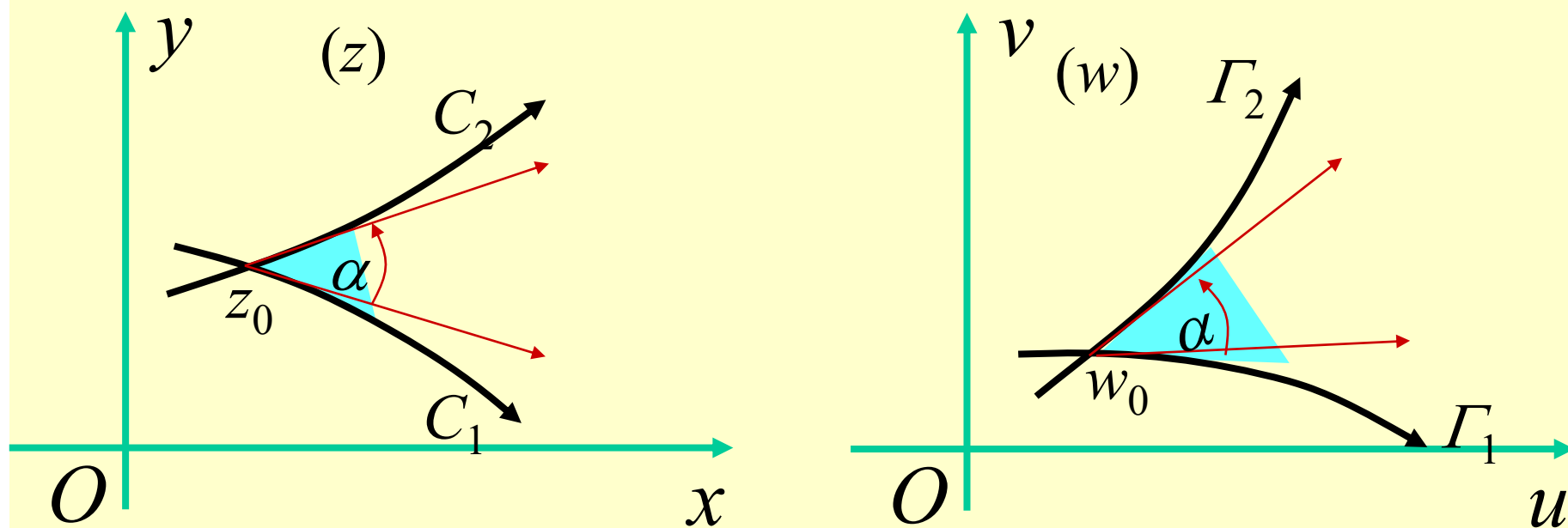
定理二 如果函数 $w=f(z)$ 在 z_0 **解析**, 且 $f'(z_0) \neq 0$, 则映射 $w=f(z)$ 在 z_0 是**保角的**, 而且 $\text{Arg } f'(z_0)$ 表示这个映射在 z_0 的转动角, $|f'(z_0)|$ 表示伸缩率.

如果**解析函数** $w=f(z)$ 在 D 内是**一一**的, 且处处有 $f'(z) \neq 0$, 则映射 $w=f(z)$ 是 D 内的保角映射.

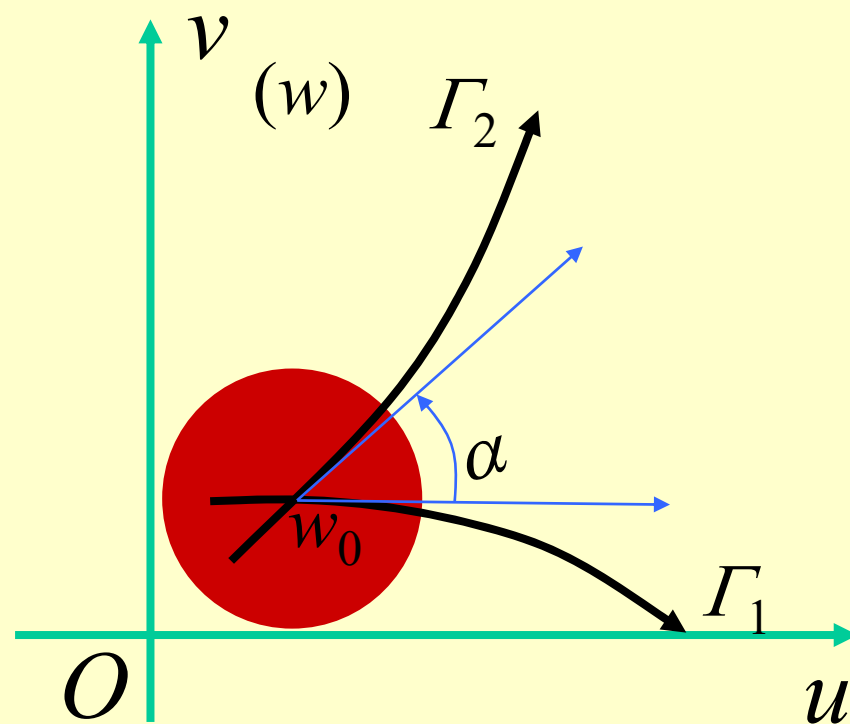
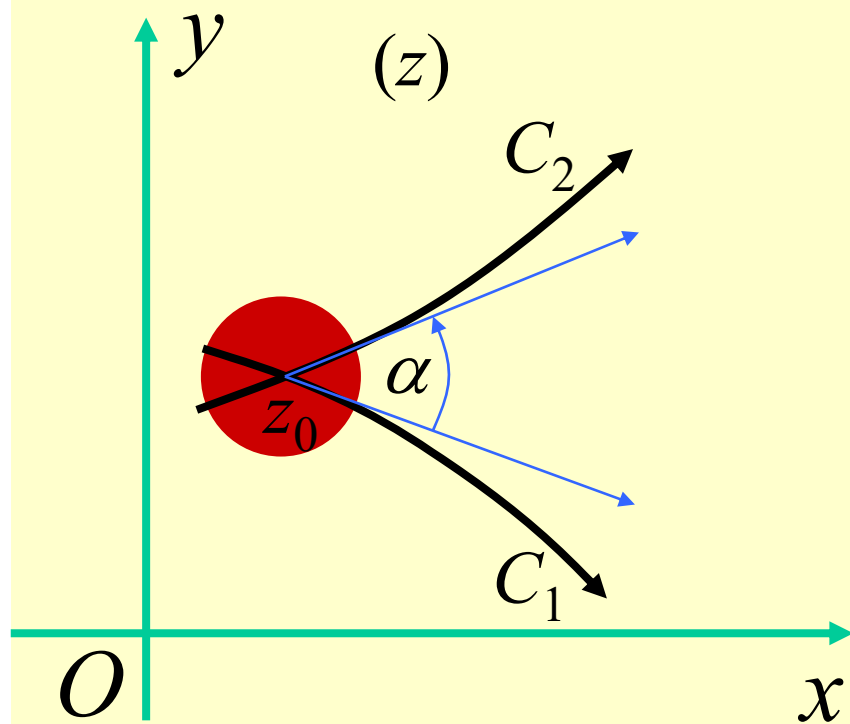
保角映射是把区域**单值**映射成区域, 在每一点保角。

例如函数 $w=e^z$ 在 $0 < \text{Im } z < 2\pi$ 是保角的

定理一的几何意义.



在 D 内作以 z_0 为其一个顶点的小三角形, 在映射下, 得到一个以 w_0 为其一个顶点的小曲边三角形, 这两个三角形对应边长之比近似为 $|f'(z_0)|$, 有一个角相等, 则这两个三角形近似相似.



伸缩率 $|f'(z)| \approx \frac{|w - w_0|}{|z - z_0|}$ 由此看出映射 $w = f(z)$

也将很小的圆 $|z - z_0| = \delta$ 近似地映射成圆

$$|w - w_0| = |f'(z_0)| \delta.$$

§ 2 分式线性映射

研究保角映射的**基本任务**是:

给定一个区域 D 以及另一个区域 G , 要求找到 D 到 G 的保角映射 $f(z)$ 以及**唯一性**条件.

分式线性映射

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \left(\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d} \rightarrow ad - bc \neq 0 \right)$$

$$\frac{dw}{dz} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \Rightarrow \frac{dw}{dz} \neq 0$$

逆映射: $cwz + dw - az - b = 0$

$$z = \frac{-dw + b}{cw - a}, (-a)(-d) - bc \neq 0$$

两个分式线性映射的复合, 仍是一个分式线性映射.

例如

$$w = \frac{\alpha\zeta + \beta}{\gamma\zeta + \delta} (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0),$$

$$\zeta = \frac{\alpha'z + \beta'}{\gamma'z + \delta'} (\alpha'\delta' - \beta'\gamma' \neq 0),$$

则

$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

$$\text{式中 } (ad - bc) = (\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha'\delta' - \beta'\gamma') \neq 0$$

将一般的分式线性映射**分解**为一些简单映射的复合

$$w = \frac{\alpha\zeta + \beta}{\gamma\zeta + \delta} = \left(\beta - \frac{\alpha\delta}{\gamma} \right) \frac{1}{\gamma\zeta + \delta} + \frac{\alpha}{\gamma}.$$

$$\text{令 } \zeta_1 = \gamma\zeta + \delta$$

$$\zeta_2 = \frac{1}{\zeta_1}$$

$$\text{则 } w = A\zeta_2 + B, (A, B \text{ 为常数})$$

由此可见, 一个一般形式的分式线性映射是由下列三种特殊映射复合而成:

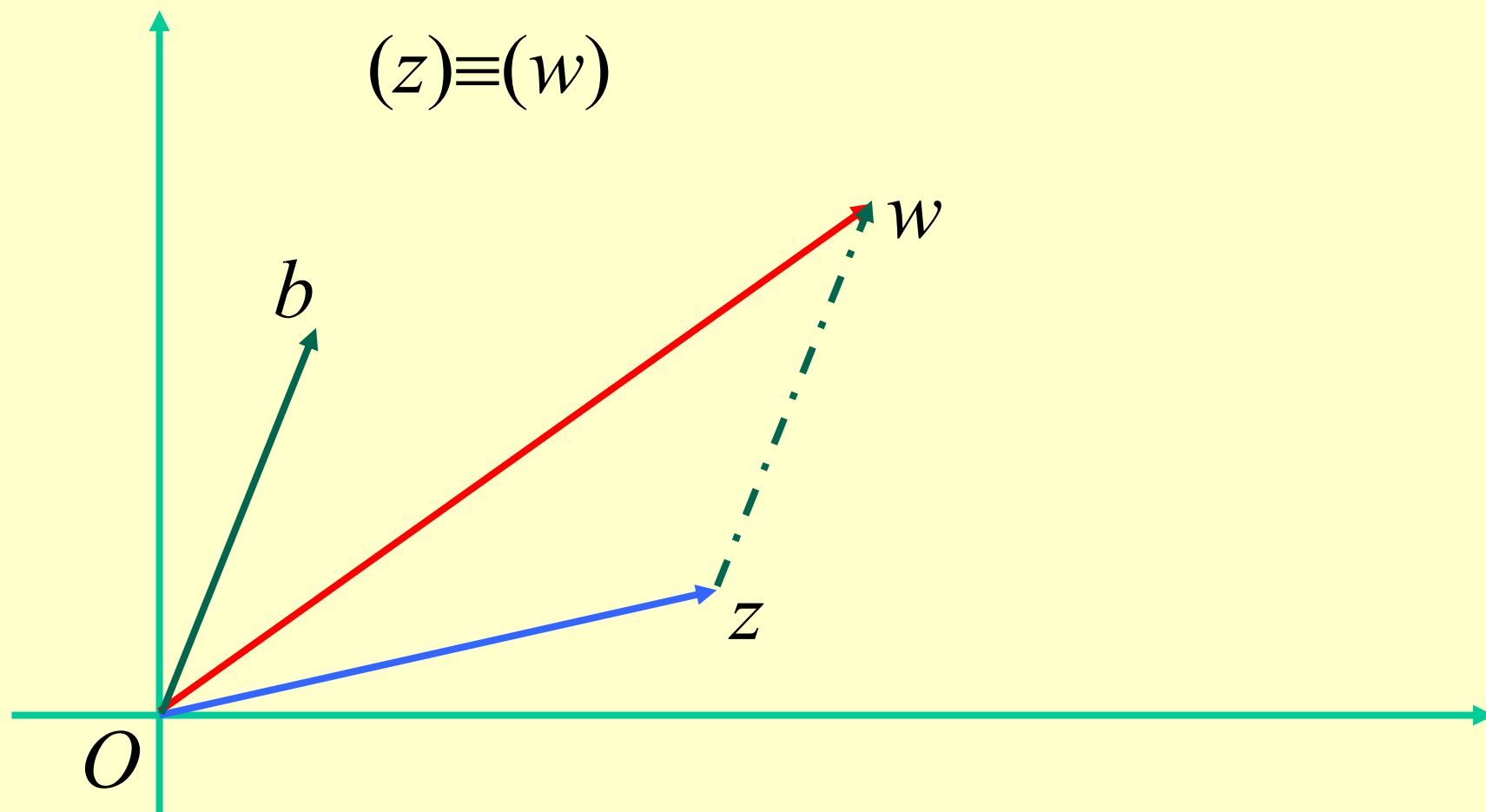
$$\text{i)} \quad w = z + b;$$

$$\text{ii)} \quad w = az;$$

$$\text{iii)} \quad w = \frac{1}{z}$$

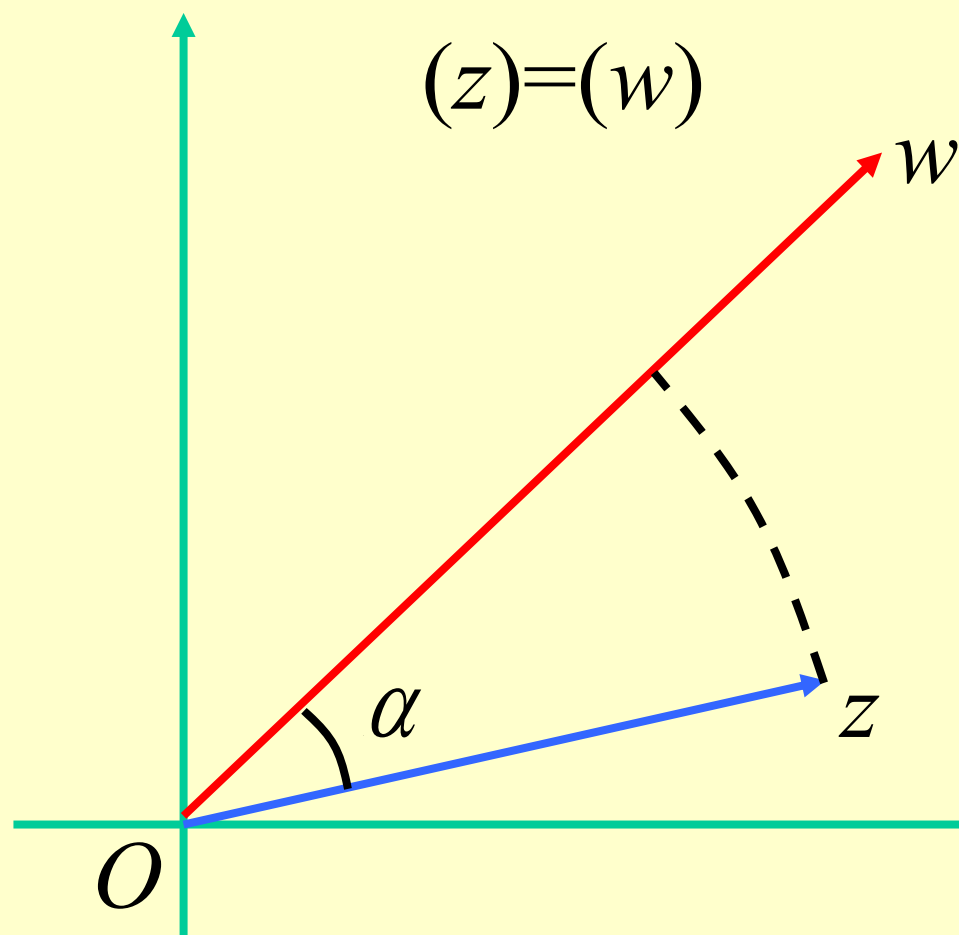
下面讨论三种映射, 为了方便, 暂且将 w 平面看成是与 z 平面重合的.

i) $w=z+b$. 这是一个平移映射. 因为复数相加可以化为向量相加, z 沿向量 b 的方向平移一段距离 $|b|$ 后, 就得到 w .

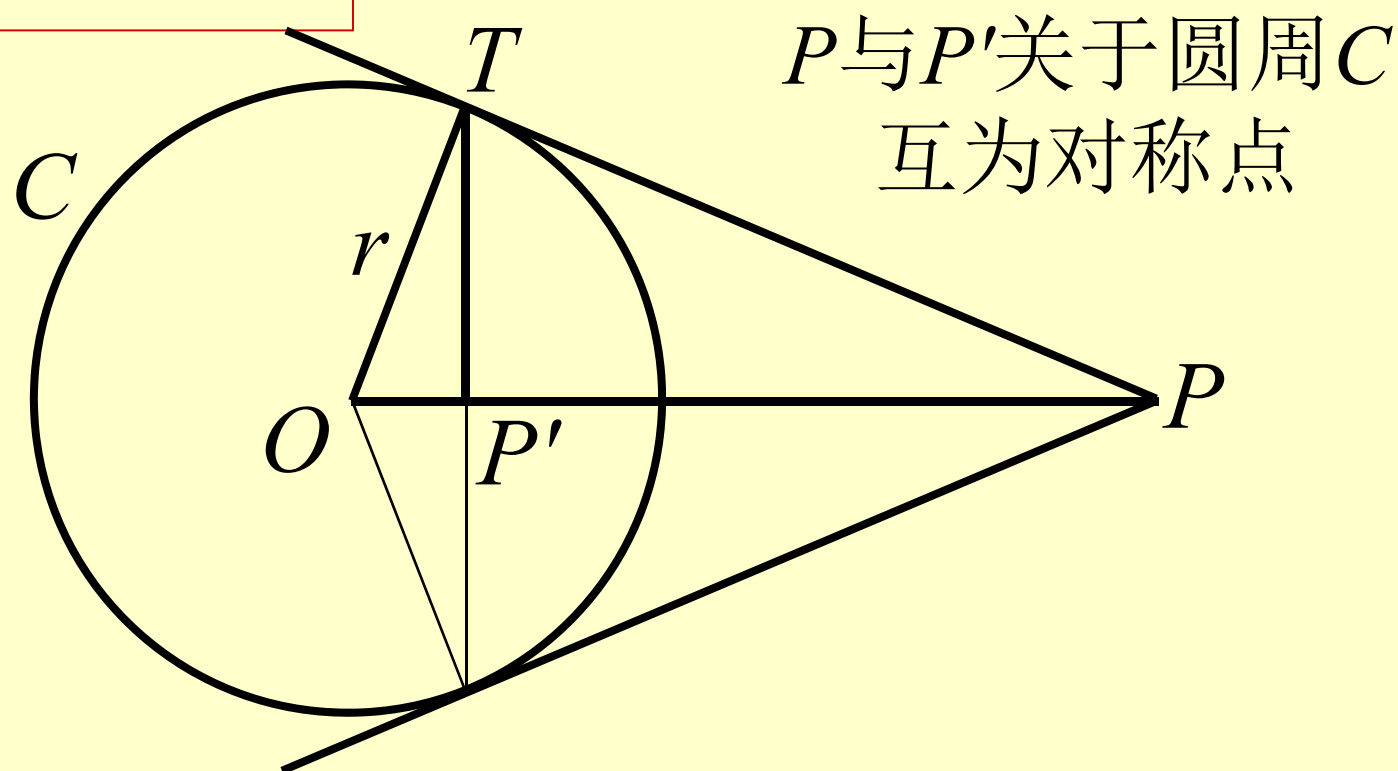


ii) $w=az, a \neq 0$. 这是一个旋转与伸长(或缩短)的映射.

设 $a = \lambda e^{i\alpha}$ 将 z 先转一个角度 α , 再将 $|z|$ 伸长(或缩短) λ 后, 就得到 w .



圆周的对称点



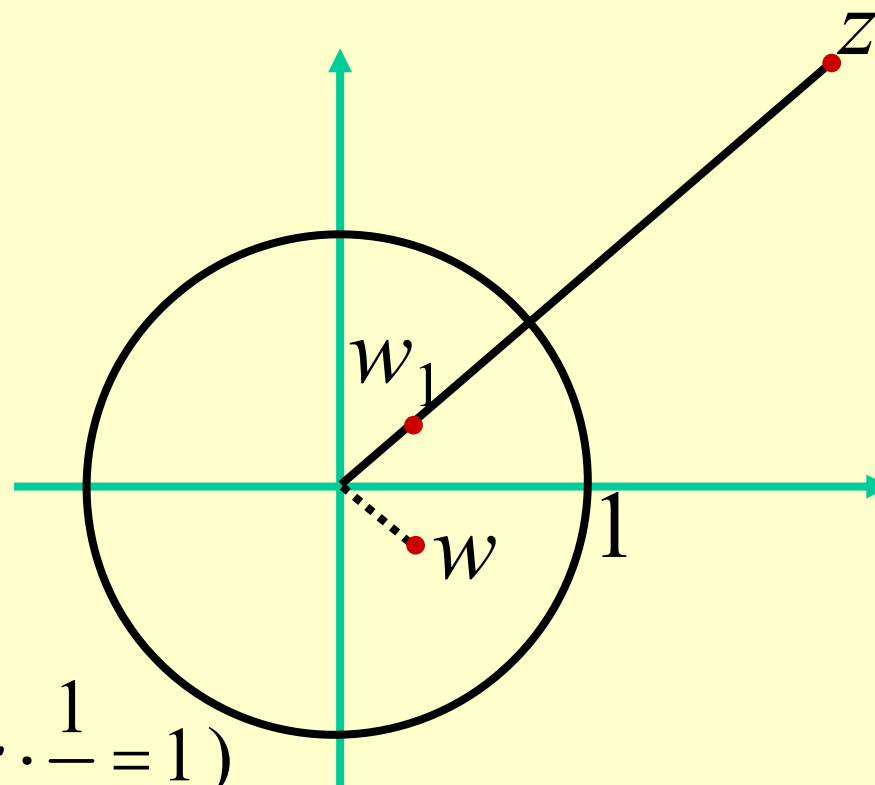
$$OP \bullet OP' = r^2,$$

因为 $\triangle OP'T$ 相似于 $\triangle OPT$. 因此,

$$OP':OT=OT:OP, \text{ 即 } OP \bullet OP' = OT^2 = r^2.$$

$$\text{iii) } w = \frac{1}{z} \Rightarrow w_1 = \frac{1}{\bar{z}}, w = \bar{w}_1$$

$$(z = re^{i\theta}, w_1 = \frac{1}{r}e^{i\theta}, |z| \cdot |w_1| = r \cdot \frac{1}{r} = 1)$$



要从 z 作出 $w = \frac{1}{z}$,应先作出点 z 关于圆周 $|z|=1$

对称的点 w_1 ,然后再作出点 w_1 关于实轴对称的点即得 w .

分式线性映射的几何性质

1. 保角性

首先讨论 iii) $w = \frac{1}{z}$, 这时 $w' = \left(\frac{1}{z}\right)' = -\frac{1}{z^2}$

当 $z \neq 0, z \neq \infty$ 时是解析函数, 因此是保角映射. 而当 $z = 0$ 时 $w = \infty, z = \infty$ 时 $w = 0$, 对这两点作保形映射的补充规定, 任何穿过 $z = 0$ 点的两条曲线在 0 点的夹角, 就是 $w = 1/z$ 在无穷远处的两条曲线的夹角. 则 $1/z$ 在整个扩充复平面是保角的.

而i)与ii)是**平移**，**旋转**和**伸缩**变换显然是保角的，所构成的复合映射 $w=az+b$ 在整个扩充复平面上是保角的,而分式线性映射是上述三种映射复合而构成的,因此有

定理一 分式线性映射在扩充复平面上是**一一对应的**,且具有**保角性**.

2.保圆性

映射 $w=az+b$ 和 $w=1/z$ 都具有将圆周映射成圆周的
特性，（这里将直线看作是无穷大半径的圆） 这
种性质称作保圆性. 映射 $w=az+b$ 显然具有保圆性，
下面说明 $w=1/z$ 具有保圆性.

$$\text{令 } z = x + iy, w = \frac{1}{z} = u + iv$$

$$\text{则 } u = \frac{x}{x^2 + y^2}, v = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

$$\text{或 } x = \frac{u}{u^2 + v^2}, y = \frac{-v}{u^2 + v^2}$$

因此, 映射 $w=1/z$ 将方程 $a(x^2+y^2)+bx+cy+d=0$ 变为方程 $d(u^2+v^2)+bu-cv+a=0$ 。

当 $a \neq 0, d \neq 0$: 圆周映射为圆周;

当 $a \neq 0, d = 0$: 圆周映射成直线;

当 $a = 0, d \neq 0$: 直线映射成圆周;

当 $a = 0, d = 0$: 直线映射成直线.

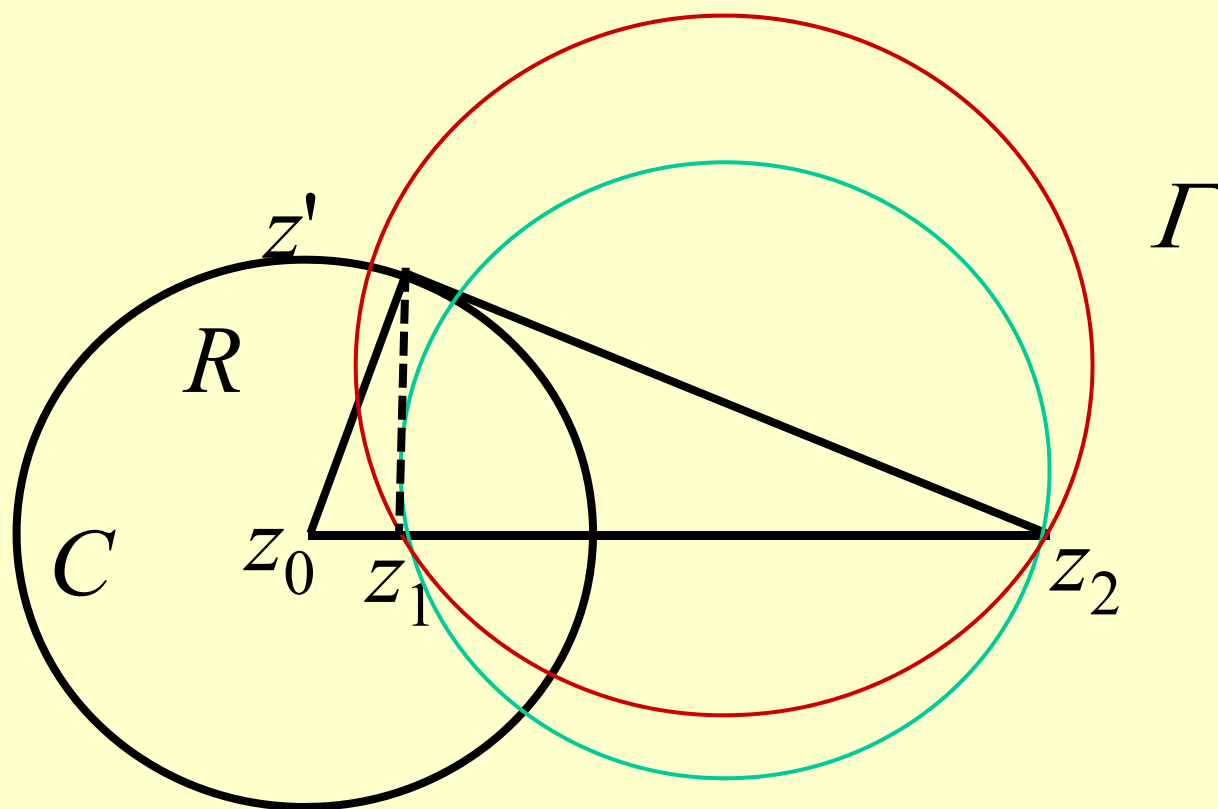
这就是说, 映射 $w=1/z$ 把圆周映射成圆周. 或者说, 映射 $w=1/z$ 具有保圆性.

定理二 分式线性映射将扩充 z 平面上的圆周映射成扩充 w 平面上的圆周, 即具有保圆性.

根据保圆性, 在分式线性映射下, 如果给定的圆周或直线上没有点映射成无穷远点, 则它就映射成半径为有限的圆周; 如果有一个点映射成无穷远点, 它就映射成直线.

3. 保对称点性

z_1, z_2 是关于圆周 C 的一对对称点的**充要条件**
是经过 z_1, z_2 的任何圆周 Γ 都与 C 正交.



定理三 设点 z_1, z_2 是关于圆周 C 的一对对称点, 则在分式线性映射下, 它们的象点 w_1 与 w_2 也是关于 C 的象曲线 Γ 的一对对称点.

[证] 设经过 w_1 与 w_2 的任一圆周 Γ' 是经过 z_1 与 z_2 的圆周 Γ 由分式线性映射过来的. 由于 Γ 与 C 正交, 而分式线性映射具有保角性, 所以 Γ' 与 C' (C 的象)也必正交, 因此, w_1 与 w_2 是一对关于 C' 的对称点.

§ 3 唯一决定分式线性映射的条件

分式线性映射 $\frac{az+b}{cz+d}$

中含有四个常数 a, b, c, d . 但是, 如果用这四个数中的一个去除分子和分母, 就可将分式中的四个常数化为三个常数. 所以, 上式中实际上只有三个独立的常数. 因此, 只需给定三个条件, 就能决定一个分式线性映射.

定理 在 z 平面上任意给定三个**相异**的点
 z_1, z_2, z_3 , 在 w 平面上也任意给定三个
相异的点 w_1, w_2, w_3 , 则存在唯一的分
式线性映射, 将 $z_k (k=1,2,3)$ 依次映射
成 $w_k (k=1,2,3)$.

[证] 设 $w = \frac{az + b}{cz + d}$ ($ad - bc \neq 0$), 将 z_k ($k = 1, 2, 3$) 依次映射成 w_k ($k = 1, 2, 3$), 即

$$w_k = \frac{az_k + b}{cz_k + d}. \quad (k = 1, 2, 3)$$

因而有 $w - w_k = \frac{(z - z_k)(ad - bc)}{(cz + d)(cz_k + d)}, (k = 1, 2)$

及 $w_3 - w_k = \frac{(z_3 - z_k)(ad - bc)}{(cz_3 + d)(cz_k + d)}. (k = 1, 2)$

由此得

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}. \quad (6.3.1)$$

这就是所求的分式线性映射. 如果有另外一个分式线性映射, 也把 z 平面上三个相异点 z_1, z_2, z_3 依次映射成 w 平面上的三个相异点 w_1, w_2, w_3 , 则重复上面的步骤, 消去常数后, 最后得到的仍然是(6.3.1)式. 所以(6.3.1)式是由三对相异的对应点唯一确定的分式线性映射.

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} \cdot \frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}. \quad (6.3.1)$$

若 $f(z_i) = w_i$ ($i = 1, 2$), 则 $\frac{w - w_1}{w - w_2} = k \frac{z - z_1}{z - z_2}$ (k - 待定复常数)

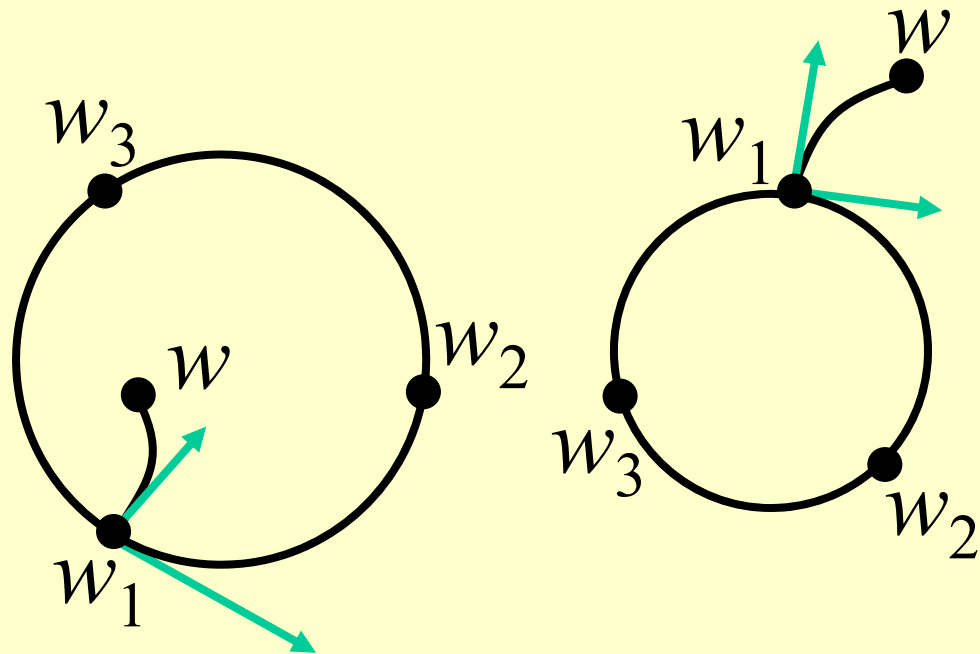
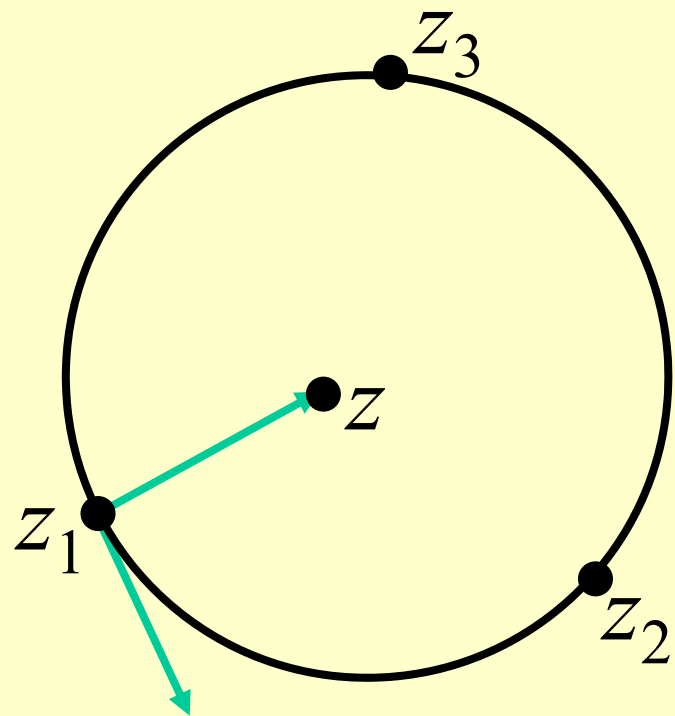
进一步, 若 $f(z_1) = 0$, $f(z_2) = \infty$, 则 $w = k \frac{z - z_1}{z - z_2}$.

现在研究, 在给定两个圆周 C 与 C' , 在圆周上分别取定三个点, 必能找到一个分式线性映射将 C 映射成 C' . 但是这个映射会将 C 内部映射成什么呢?

如果在 C 内任取一点 z_0 , 而点 z_0 的象在 C' 的内部, 则 C 的内部就映射成 C' 的内部;

如果 z_0 的象在 C' 的外部, 则 C 的内部就映射成 C' 的外部.

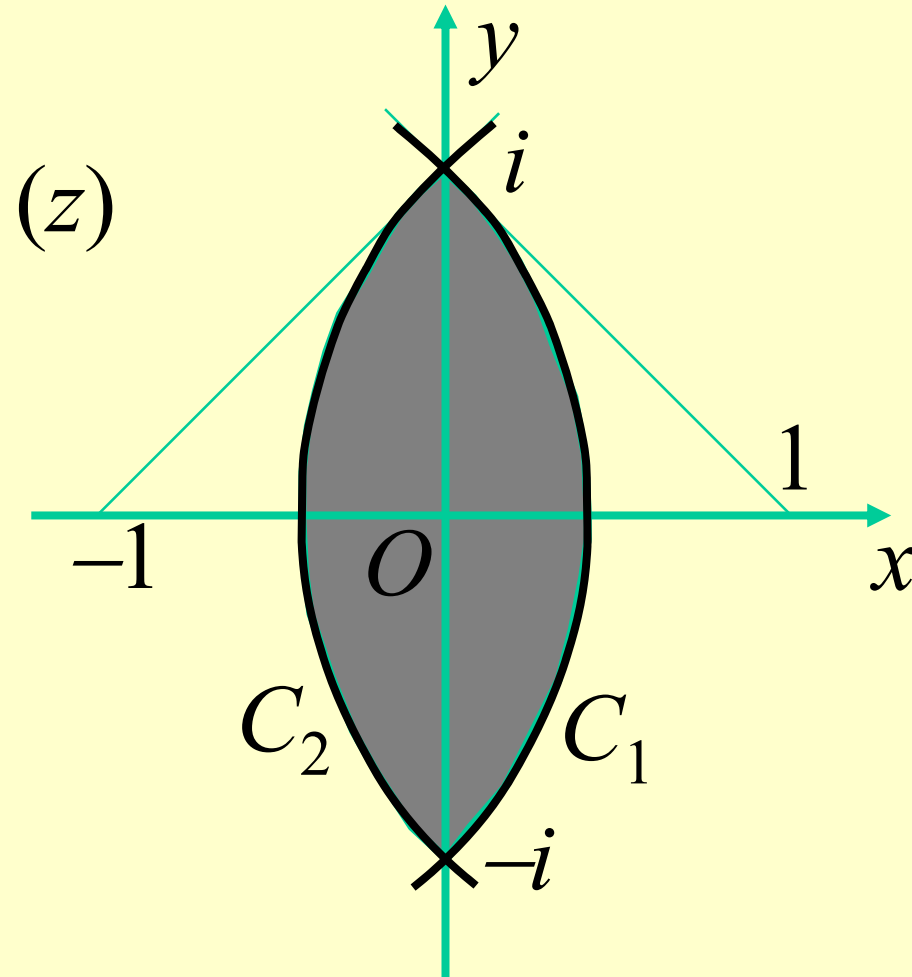
或者在 C 上取定三点 z_1, z_2, z_3 , 它们在 C' 的象分别为 w_1, w_2, w_3 . 如果 C 依 $z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow z_3$ 的绕向与 C' 依 $w_1 \rightarrow w_2 \rightarrow w_3$ 的绕向相同, 则 C 的内部就映射成 C' 的内部, 否则映射成 C' 的外部。



现讨论在 z 平面内两个圆包围的区域的映射情况.
根据前面的讨论可知:

- (I) 当二圆周上没有点映射成无穷远点时, 这二圆周的弧所围成的区域映射成二圆弧所围成的区域;
- (II) 当二圆周上有一个点映射成无穷远点时, 这二圆周的弧所围成的区域映射成一圆弧与一直线所围成的区域;
- (III) 当二圆周交点中的一个映射成无穷远点时, 这二圆周的弧所围成的区域映射成角形区域.

例 1 中心在 $z=1$ 与 $z=-1$, 半径为 $\sqrt{2}$ 的二圆弧所围区域, 在映射 $w = \frac{z-i}{z+i}$ 下映射成什么区域?



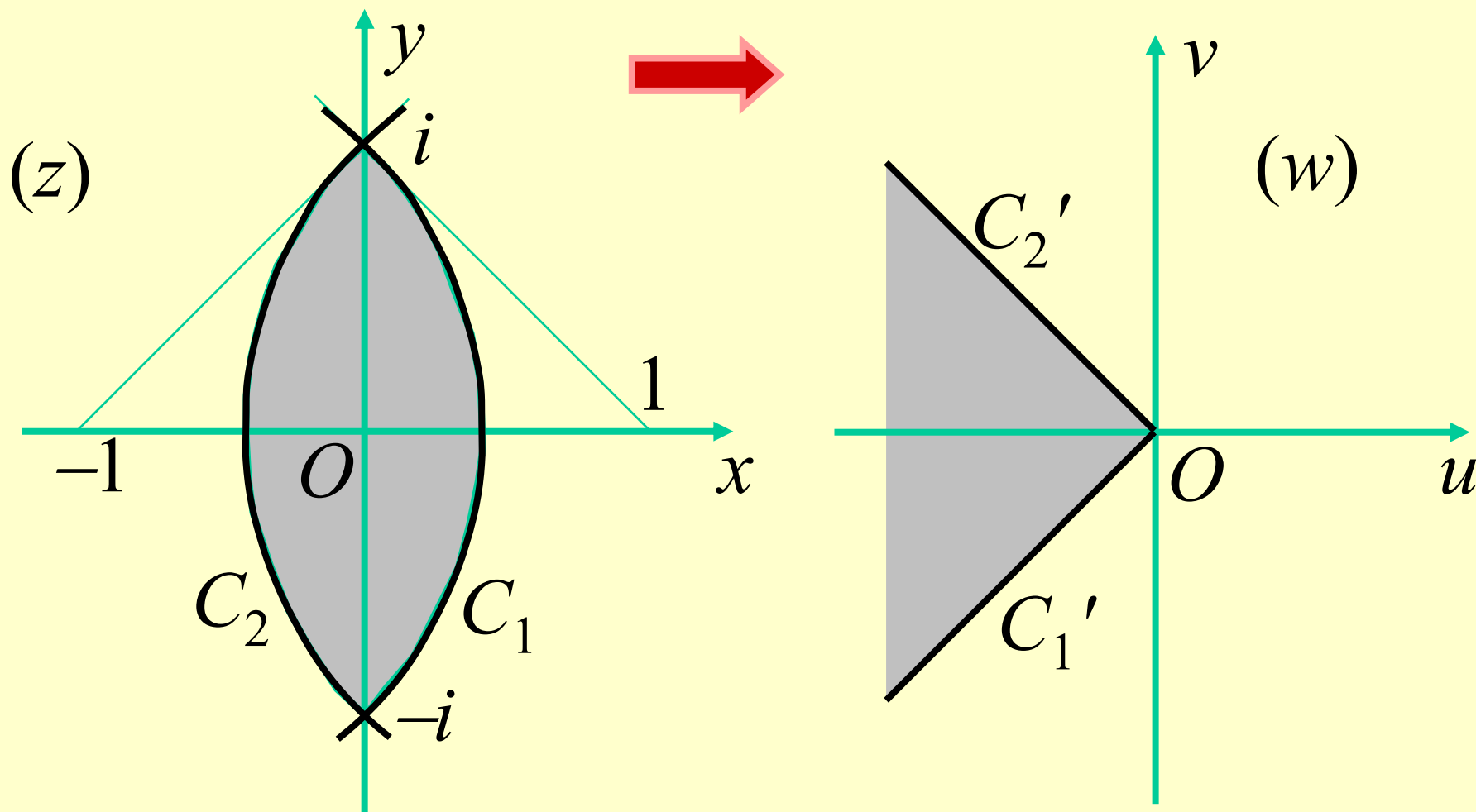
[解] 所设的两个圆弧的交点为 $-i$ 与 i , 且相互正交. 交点 $-i$ 映射成无穷远点, i 映射成原点. 因此所给的区域经映射后映射成以原点为顶点的角形区域, 张角等于 $\pi/2$.

取 C_1 与正实轴的交点 $z = \sqrt{2} - 1$, 对应点是

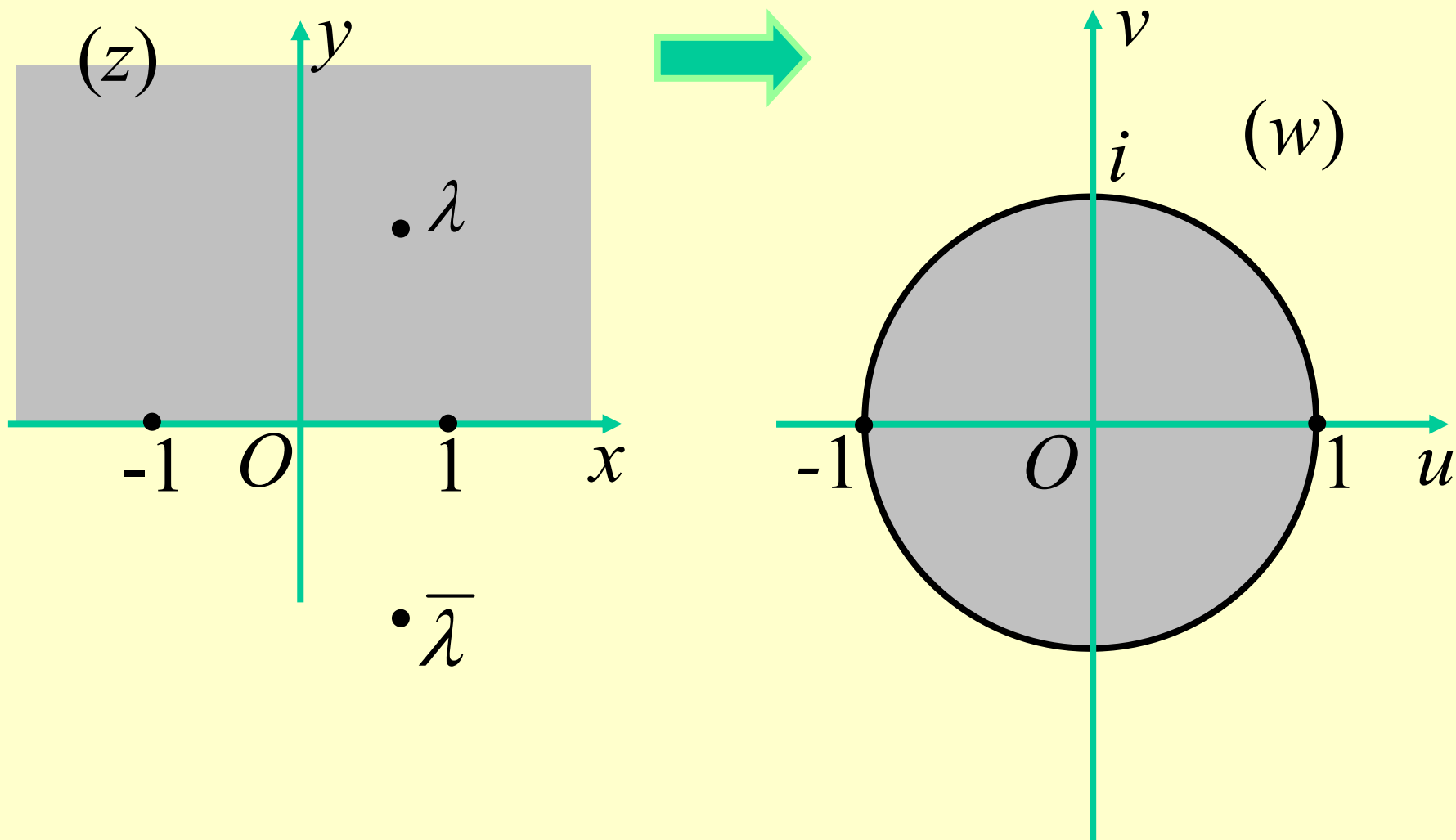
$$w = \frac{\sqrt{2} - 1 - i}{\sqrt{2} - 1 + i} = \frac{(1 - \sqrt{2}) + i(1 - \sqrt{2})}{2 - \sqrt{2}}.$$

此点在第三象限的分角线 C_1' 上. 由保角性知 C_2 映射为第二象限的分角线 C_2 .

映射的角形区如图所示



例2 求将上半平面 $\text{Im}(z) > 0$ 映射成单位圆 $|w| < 1$ 的分式线性映射.



[解法一] 在 x 轴上任意取定三点: $z_1=-1, z_2=0, z_3=1$ 使它们对应于 $|w|=1$ 上三点: $w_1=1, w_2=i, w_3=-1$, 则因 $z_1 \rightarrow z_2 \rightarrow z_3$ 跟 $w_1 \rightarrow w_2 \rightarrow w_3$ 的绕向相同, 由(6.3.1)式得所求的分式线性映射为

$$\frac{w-1}{w-i} \cdot \frac{-1-i}{-1-1} = \frac{z+1}{z-0} \cdot \frac{1-0}{1+1}.$$

化简后即得

$$w = \frac{z-i}{iz-1} = -i \frac{z-i}{z+i} \quad (6.3.2)$$

注意: 如果选取其他三对不同点, 势必也能得出满足要求的, 但不同于(6.3.3)的分式线性映射. 此可见, 把上半平面映射成单位圆的分式线性映射不是唯一的, 而是有无穷多.

[解法二] 将上半平面看成半径为无穷大的圆域, 实轴就是圆域的边界圆周. 因为分式线性映射具有保圆性, 因此它必能将上半平面 $\text{Im}(z) > 0$ 映射成单位圆 $|w| < 1$. 由于上半平面总有一点 $z = \lambda$ 要映成单位圆周 $|w| = 1$ 的圆心 $w = 0$,

实轴要映射成单位圆,而 $z = \lambda$ 与 $z = \bar{\lambda}$ 是关于实轴的一对对称点, $w = 0$ 与 $w = \infty$ 是与之对应的关于圆周 $|w| = 1$ 的一对对称点.所以根据分式线性映射具有保对称点不变的性质知, $z = \bar{\lambda}$ 必映成 $w = \infty$.

从而所求的分式线性映射具有下列形式:

$$w = k \left(\frac{z - \lambda}{z - \bar{\lambda}} \right). \quad \text{其中 } k \text{ 为常数.}$$

因为 $|w| = |k| \left| \frac{z - \lambda}{z - \bar{\lambda}} \right|$, 而实轴上的点 z 对应着 $|w| = 1$

上的点, 这时 $\left| \frac{z - \lambda}{z - \bar{\lambda}} \right| = 1$, 所以 $|k| = 1$, 即 $k = e^{i\theta}$, 这里

θ 是任意实数. 因此所求的分式线性映射的一般

形式为 $w = e^{i\theta} \left(\frac{z - \lambda}{z - \bar{\lambda}} \right), (\text{Im}(\lambda) > 0) \quad (6.3.3)$

反之, 形如上式的分式线性映射必将上半平面 $\text{Im}(z) > 0$ 映射成单位圆 $|w| < 1$. 因为当 z 取实数时

$$w = k \left(\frac{z - \lambda}{z - \bar{\lambda}} \right).$$

即把实轴映射成 $|w|=1$. 又因为上半平面中的 $z=\lambda$ 映射成 $w=0$, 所以(6.3.3)必将 $\text{Im}(z)>0$ 映射成 $|w|<1$.

当 (6.3.3) 中取 $\lambda = i$, $\theta = -\frac{\pi}{2}$ 时即得解法一的结果:

$$w = -i \frac{z - i}{z + i}.$$

当 (6.3.3) 中取 $\lambda = i$, $\theta = 0$ 时即得:

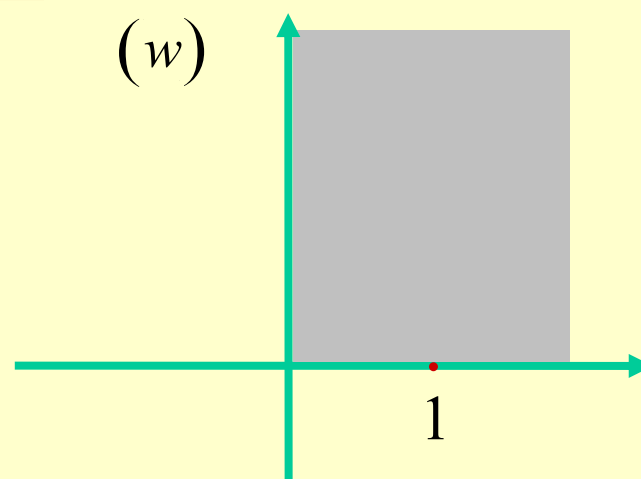
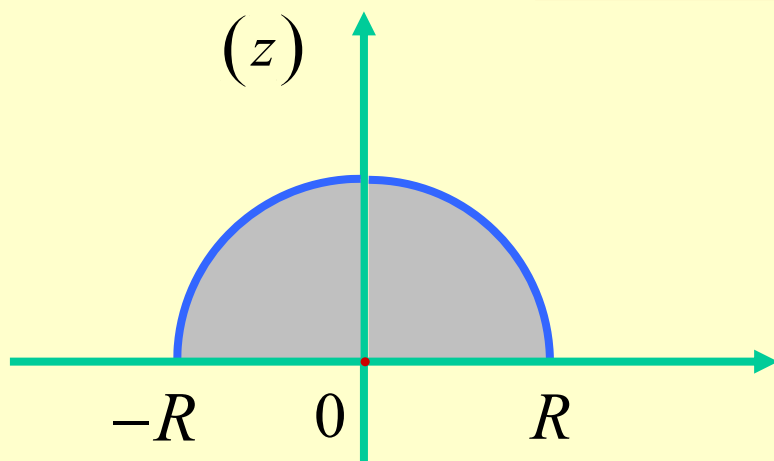
$$w = \frac{z - i}{z + i}.$$

例3 求映 $\begin{cases} 0 < |z| < R \\ 0 < \arg z < \pi \end{cases}$ 为 $\begin{cases} \operatorname{Im} z > 0 \\ \operatorname{Re} z > 0 \end{cases}$ 的分式线性映射。

[解] 令 $z = -R \mapsto w = 0$; $z = R \mapsto w = \infty \Rightarrow w = k \frac{z + R}{z - R}$.

再取 $z = 0 \mapsto w = 1 \Rightarrow w = k(-1) = 1 \Rightarrow k = -1 \Rightarrow$

$$w = -\frac{z + R}{z - R}.$$



例4 求将上半平面 $\text{Im}(z)>0$ 映射成单位圆 $|w|<1$ 且满足 $w(2i)=0$, $\arg w'(2i)=0$ 的分式线性映射.

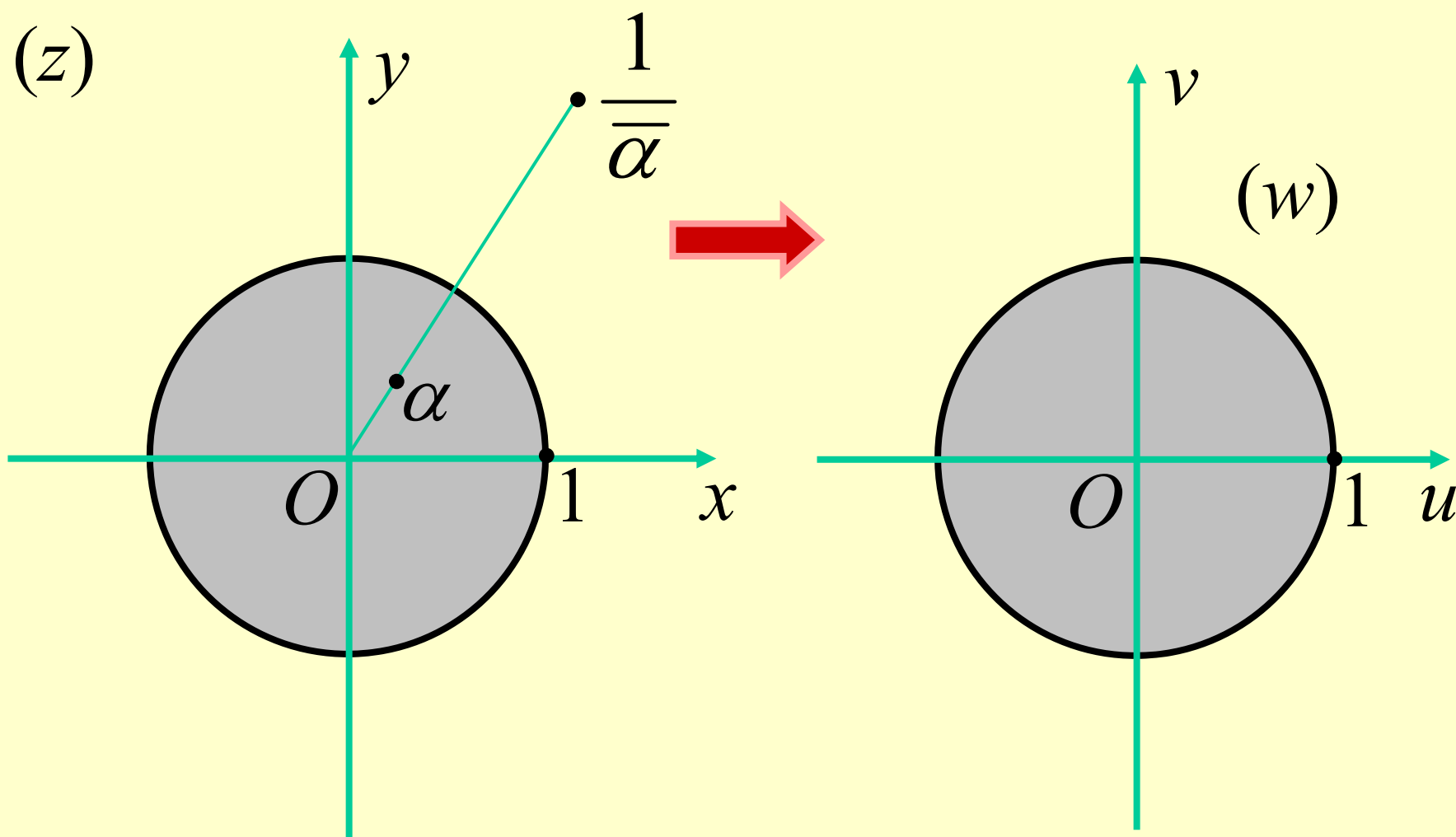
解: 由条件 $w(2i)=0$ 知, 所求的映射要将上半平面中的点 $z=2i$ 映射成单位圆周的圆心 $w=0$. 所以由(6.3.3)

得 $w = e^{i\theta} \left(\frac{z-2i}{z+2i} \right)$. 故有 $w'(z) = e^{i\theta} \frac{4i}{(z+2i)^2}$,

$$w'(z) = e^{i\theta} \frac{4i}{(z+2i)^2}, \quad \arg w'(2i) = \theta - \frac{\pi}{2} = 0, \quad \theta = \frac{\pi}{2}.$$

从而得所求的映射为 $w = i \left(\frac{z-2i}{z+2i} \right)$.

例5 求将单位圆 $|z|<1$ 映射成单位圆 $|w|<1$ 的分式线性映射. 要求: 任意一点 $\alpha \rightarrow$ 圆心



[解] 设 z 平面上单位圆 $|z|<1$ 内部的一点 α 映射成 w 平面上的单位圆 $|w|<1$ 的中心 $w=0$. 这时与

点 α 对称于单位圆周 $|z|=1$ 的点 $\frac{1}{\bar{\alpha}}$ 应该被映射成

w 平面上的无穷远点(即与 $w=0$ 对称的点).因此,

当 $z=\alpha$ 时, $w=0$, 而当 $z=\frac{1}{\bar{\alpha}}$ 时, $w=\infty$. 满足这些条

件的分式线性映射具有如下的形式

$$w = k \frac{z - \alpha}{z - \frac{1}{\bar{\alpha}}} = k \bar{\alpha} \left(\frac{z - \alpha}{\bar{\alpha} z - 1} \right) = k' \left(\frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha} z} \right), \quad \text{其中 } k' = -k \bar{\alpha}$$

由于 z 平面上单位圆周上的点要映成 w 平面上单位圆周上的点, 所以当 $|z|=1, |w|=1$. 将圆周 $|z|=1$ 上的点

$z=1$ 代入上式, 得 $|k'| \left| \frac{1-\alpha}{1-\bar{\alpha}} \right| = |w| = 1$

又因 $|1-\alpha| = |1-\bar{\alpha}|$,

所以 $|k'|=1$, 即 $k'=e^{i\theta}$. 这里 θ 是任意实数.

因此, 将单位圆 $|z|<1$ 映射成单位圆 $|w|<1$ 的分式线性映射的一般表示式是

$$w = e^{i\varphi} \left(\frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z} \right). \quad (|\alpha| < 1) \quad (6.3.5)$$

反之, 形如上式的映射必将单位圆 $|z|<1$ 映射成单位圆 $|w|<1$. 这是因为圆周 $|z|=1$ 上的点 $z=e^{i\theta}$ (θ 为实数)映射成圆周 $|w|=1$ 上的点:

$$|w| = \left| e^{i\phi} \left(\frac{e^{i\theta} - \alpha}{1 - \bar{\alpha} e^{i\theta}} \right) \right| = \left| \frac{e^{i\theta} - \alpha}{e^{-i\theta} - \bar{\alpha}} \right| = \frac{|\cos \theta - \operatorname{Re}(\alpha) + i(\sin \theta - \operatorname{Im}(\alpha))|}{|\cos \theta - \operatorname{Re}(\alpha) - i(\sin \theta - \operatorname{Im}(\alpha))|} = 1.$$

同时单位圆 $|z|<1$ 内有一点 $z=\alpha$ 映射成 $w=0$. 所以(6.3.5)必将单位圆 $|z|<1$ 映射成单位圆 $|w|<1$.

例6 求将单位圆映射成单位圆且满足条件

$w(1/2)=0$, $w'(1/2)>0$ 的分式线性映射.

[解] 由条件 $w(1/2)=0$ 知, 所求的映射要将 $z=1/2$

映射成 $|w|<1$ 的中心. 所以由 (6.3.5) 得

$$w = e^{i\varphi} \left(\frac{z - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}z} \right), w' \left(\frac{1}{2} \right) = e^{i\varphi} \frac{\left(1 - \frac{1}{2}z \right) + \left(z - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{2}}{\left(1 - \frac{1}{2}z \right)^2} \bigg|_{z=\frac{1}{2}} = e^{i\varphi} \frac{4}{3}$$

故 $\arg w'\left(\frac{1}{2}\right) = \varphi$, 由于 $w'\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ 为正实数, 从而 $\arg w'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$,

即 $\varphi = 0$. 所以所求映射为 $w = \frac{z - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}z} = \frac{2z - 1}{2 - z}$.

例7 求将 $\text{Im}(z) > 0$ 映射成 $|w - 2i| < 2$ 且满足条件 $w(2i) = 2i$,

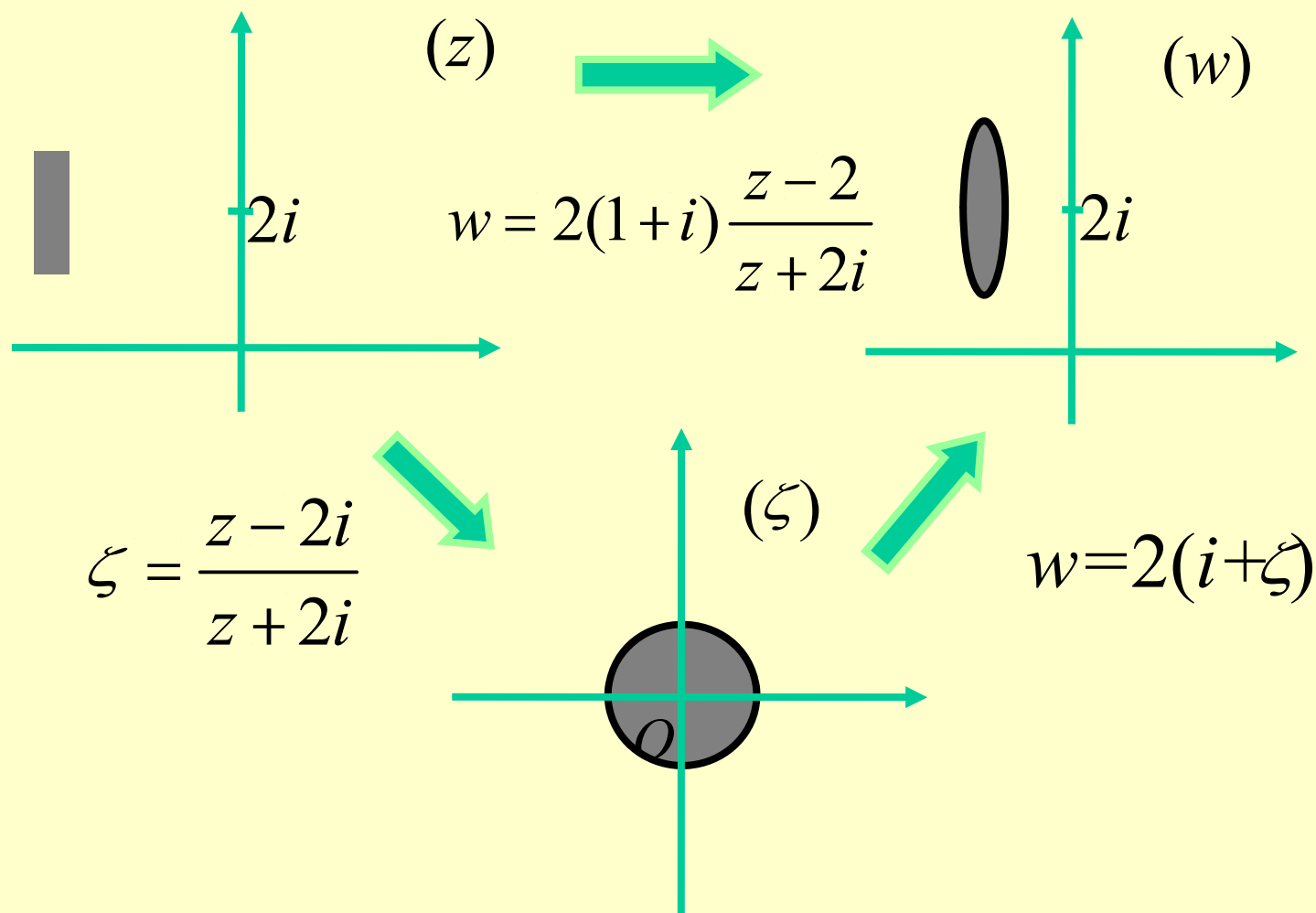
$\arg w'(2i) = -\pi/2$ 的分式线性映射.

[解] 容易看出, 映射 $\zeta = (w - 2i)/2$ 将 $|w - 2i| < 2$ 映射成 $|\zeta| < 1$. 但将 $\text{Im}(z) > 0$ 映射成 $|\zeta| < 1$ 且满足 $\zeta(2i) = 0$ 的映射易知为

$$\zeta = e^{i\theta} \left(\frac{z - 2i}{z + 2i} \right) \Rightarrow \frac{w - 2i}{2} = e^{i\theta} \left(\frac{z - 2i}{z + 2i} \right) \Rightarrow w'(2i) = 2e^{i\theta} \frac{1}{4i},$$

$\arg w'(2i) = \arg(2e^{i\theta}) - \arg(4i) = \theta - \frac{\pi}{2}$. 由 $\arg w'(2i) = -\frac{\pi}{2}$, 得 $\theta = 0$.

于是所求映射为 $\frac{w-2i}{2} = \frac{z-2i}{z+2i}$ 或 $w = 2(1+i)\frac{z-2}{z+2i}$.



§ 4 几个初等函数所构成的映射

1. 幂函数 $w=z^n$ ($n \geq 2$ 为自然数) 在 z 平面内处处可导, 它的导数是 $\frac{dw}{dz} = nz^{n-1}$, 因而当 $z \neq 0$ 时, $\frac{dw}{dz} \neq 0$.

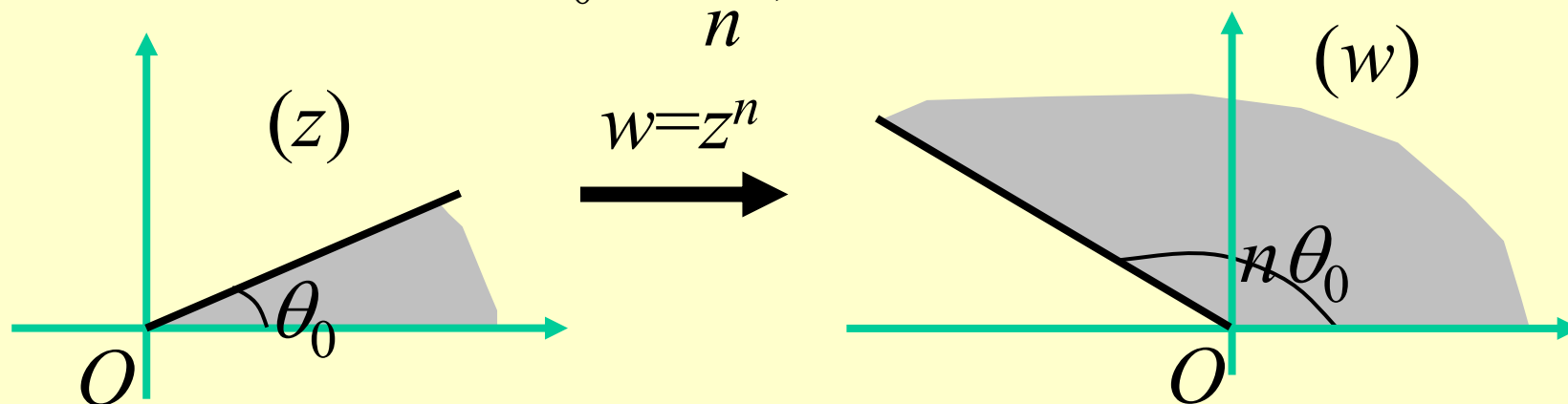
所以, 在 z 平面内除去原点外, 由 $w=z^n$ 所构成的映射处处保角.

$$z = re^{i\theta}, w = \rho e^{i\varphi} \xrightarrow{w=z^n} \begin{cases} \rho = r^n \text{ 圆周} \mapsto \text{圆周}; \\ \varphi = n\theta \text{ 射线} \mapsto \text{射线}. \end{cases}$$

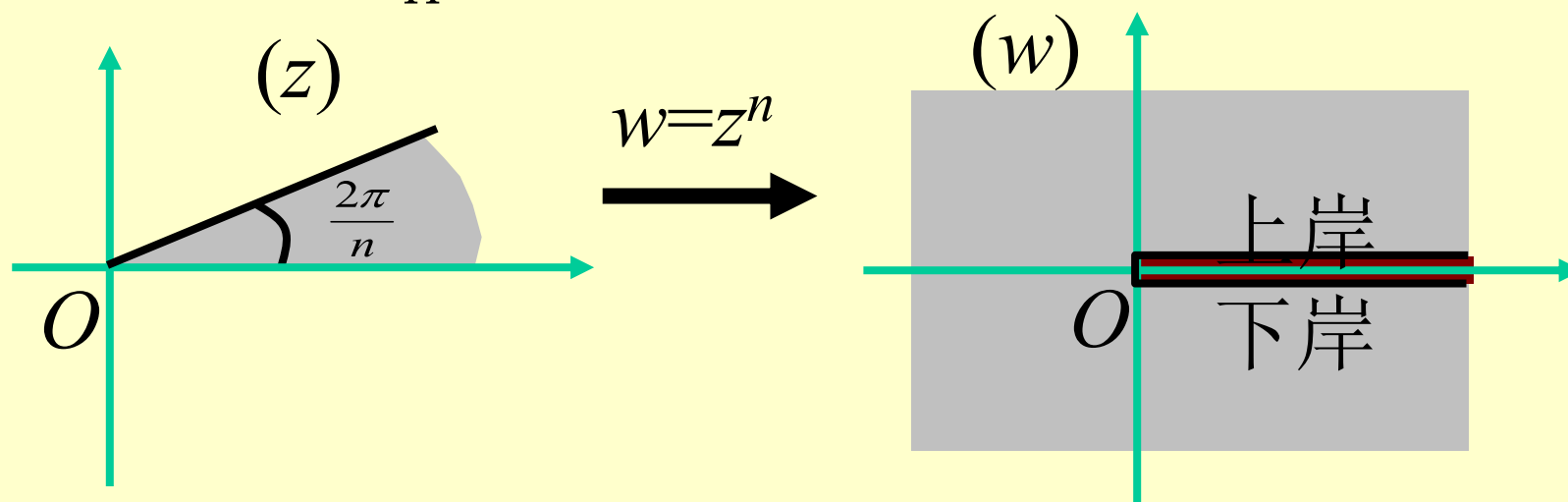
映射的特点是: 把以原点为顶点的角形域映射成以原点为顶点的角形域, 但张角变成了原来的 n 倍.

角形域: $0 < \theta < \theta_0 \mapsto$ 角形域: $0 < \varphi < n\theta_0$

(由单值性可知 $\theta_0 < \frac{2\pi}{n}$)



特别, $0 < \theta < \frac{2\pi}{n} \mapsto$ 沿实轴剪开的 w 平面: $0 < \varphi < 2\pi$.



根式函数 $z = \sqrt[n]{w} : 0 < \varphi < n\theta_0 \mapsto 0 < \theta < \theta_0 \ (\theta_0 < \frac{2\pi}{n})$

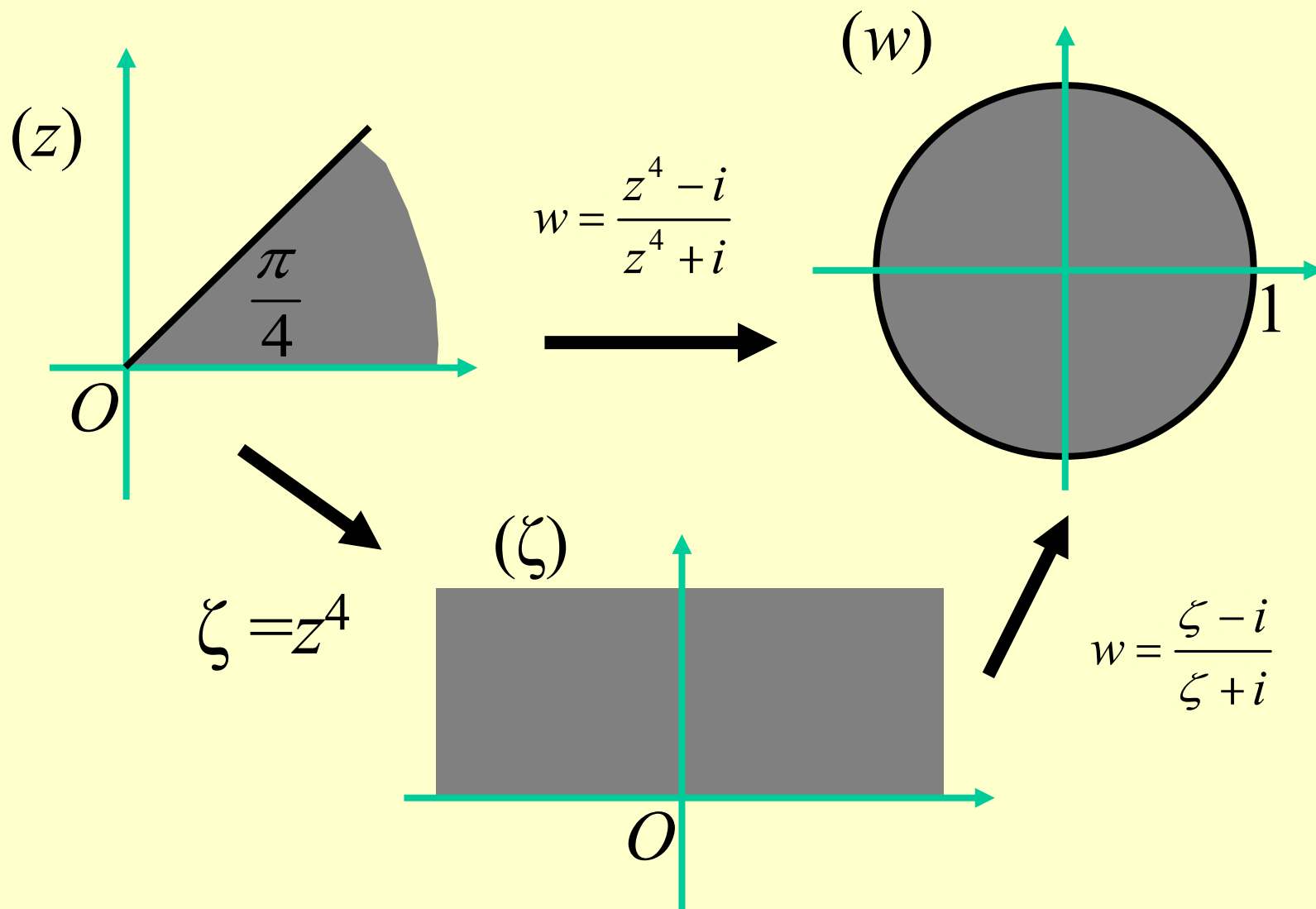
于是 $w = z^n$ 和 $z = \sqrt[n]{w}$ 的映射特点是**扩大**与**缩小**角形域。

例1 求把角形域 $0 < \arg z < \pi/4$ 映射成单位圆 $|w| < 1$ 的一个映射.

[解] $\zeta = z^4$ 将所给角形域 $0 < \arg z < \pi/4$ 映射成上半平面 $\text{Im}(\zeta) > 0$. 又从上节的例2知, 映射

$w = \frac{\zeta - i}{\zeta + i}$ 将上半平面映射成单位圆 $|w| < 1$. 因此

所求映射为 $w = \frac{z^4 - i}{z^4 + i}$.



$$0 < \arg z < \frac{\pi}{4} \quad \xrightarrow{\zeta = z^4} \quad \text{Im} \zeta > 0 \quad \xrightarrow{w = \frac{\zeta - i}{\zeta + i}} \quad |w| < 1.$$

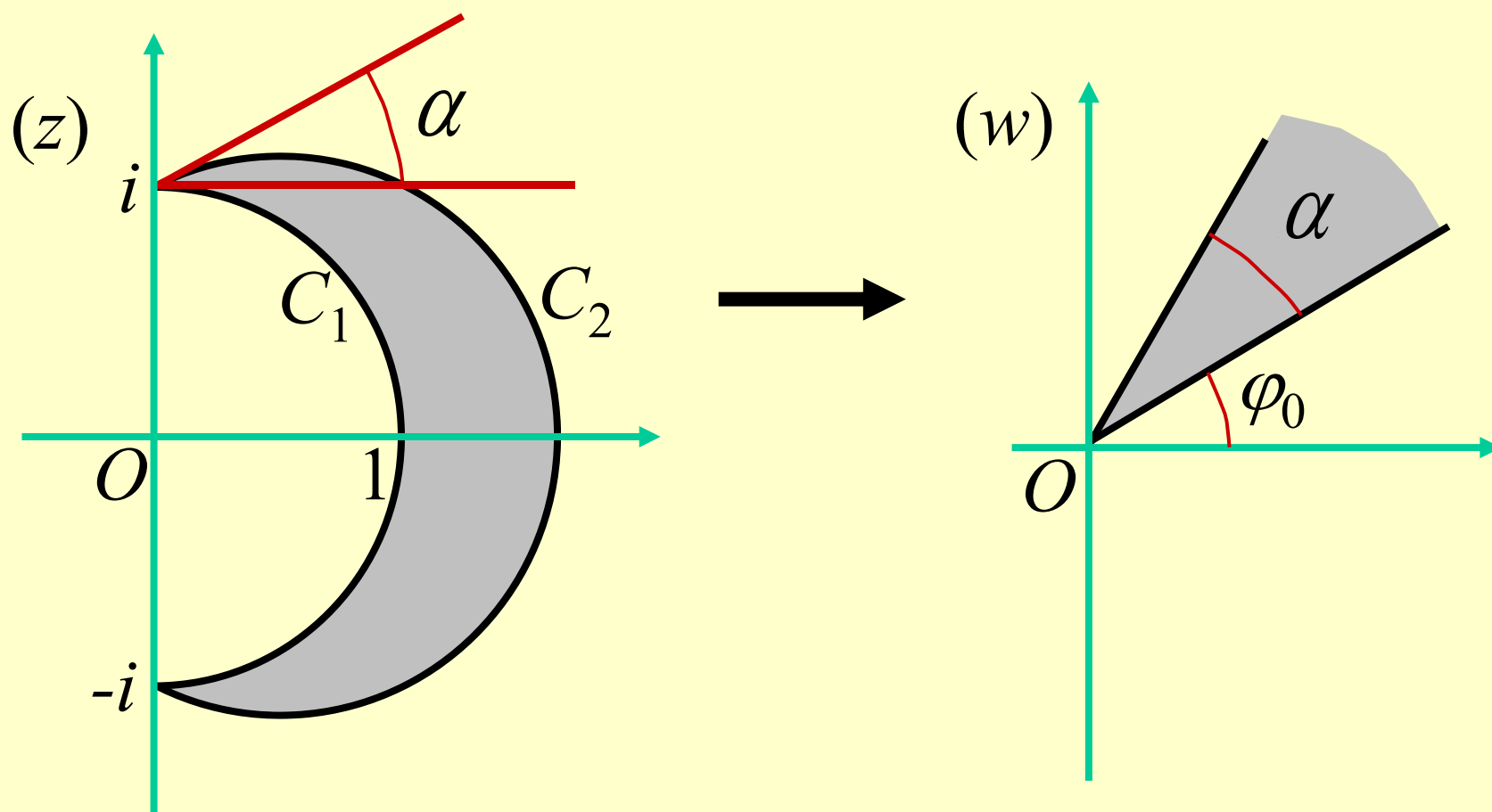
例2 求 $\begin{cases} 0 < |z| < 1 \\ 0 < \arg z < \frac{\pi}{2} \end{cases}$ 映为单位圆 $|w| < 1$ 的一个映射.

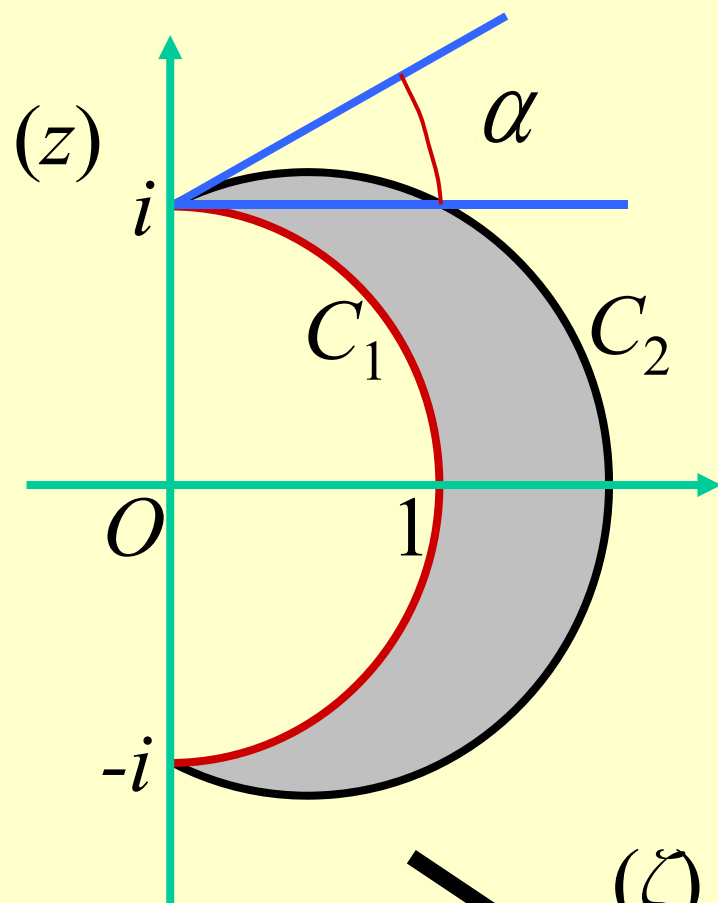
解: $\begin{cases} 0 < |z| < 1 \\ 0 < \arg z < \frac{\pi}{2} \end{cases} \xrightarrow{\xi = z^2} \begin{cases} 0 < |\xi| < 1 \\ 0 < \arg \xi < \pi \end{cases}$

$\xrightarrow{t = -\frac{\xi+1}{\xi-1}} \begin{cases} \operatorname{Im} t > 0 \\ \operatorname{Re} t > 0 \end{cases} \xrightarrow{s = t^2} \operatorname{Im} s > 0$

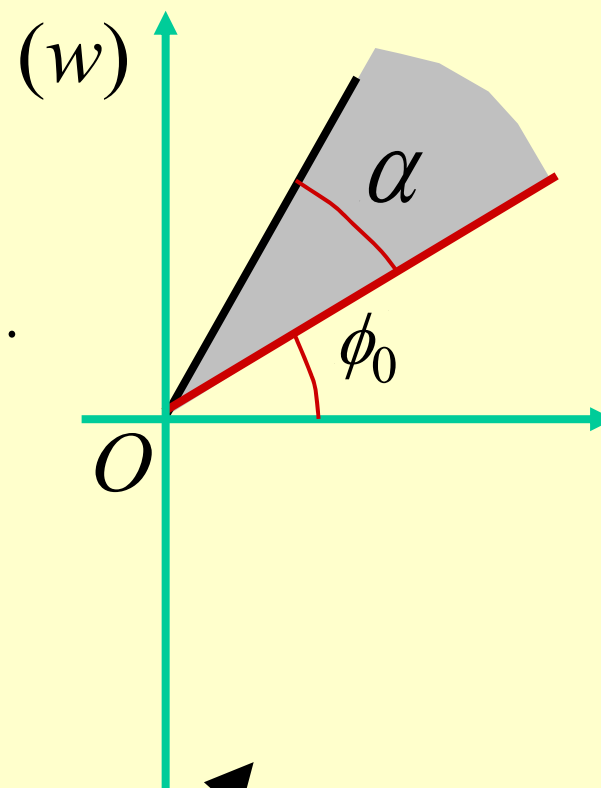
$\xrightarrow{w = \frac{s-i}{s+i}} |w| < 1 \Rightarrow w = \frac{\left(\frac{z^2+1}{z^2-1}\right)^2 - i}{\left(\frac{z^2+1}{z^2-1}\right)^2 + i}.$

例3 求把下图中由圆弧 C_2 与 C_3 所围成的交角为 α 的月牙域映射成角形域 $\phi_0 < \arg w < \phi_0 + \alpha$ 的一个映射.

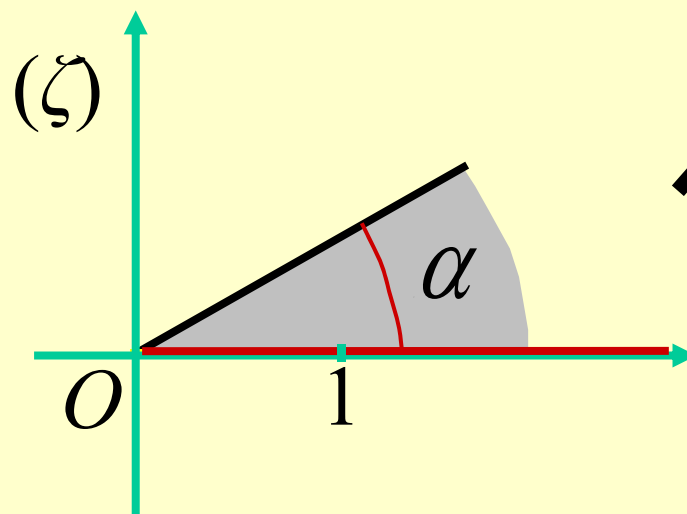




$$w = e^{i(\phi_0 + \frac{\pi}{2})} \left(\frac{z-i}{z+i} \right).$$



$$\zeta = i \left(\frac{z-i}{z+i} \right)$$



$$w = e^{i\phi_0} \zeta$$

[解] 令 C_1, C_2 的交点 $z=i$ 与 $z=-i$ 分别映射成 ζ 平面中的 $\zeta=0$ 与 $\zeta=\infty$, 将所给月牙域映射成 ζ 平面中的角形域的映射是具有以下形式的分式线性函数:

$$\zeta = k \left(\frac{z-i}{z+i} \right) \quad \text{其中 } k \text{ 为待定的复常数.}$$

$$\text{令 } z=1 \mapsto \zeta=1 \Rightarrow \zeta = k \left(\frac{1-i}{1+i} \right) = -ik = 1 \Rightarrow k = i$$

这样, $\zeta = i \left(\frac{z-i}{z+i} \right)$ 就把 C_1 映射成 ζ 平面上的正实轴.

根据保角性, 所给的月牙域映射成角形域 $0 < \arg \zeta < \alpha$.

$$\text{由此得所求的映射为 } w = ie^{i\varphi_0} \left(\frac{z-i}{z+i} \right) = e^{i(\varphi_0 + \frac{\pi}{2})} \left(\frac{z-i}{z+i} \right).$$

2. 指数函数 $w = e^z$ 由于在 z 平面内 $w' = e^z \neq 0$ 。所以，由 $w = e^z$ 所构成的映射是 $0 < y < 2\pi$ 上的保角映射。

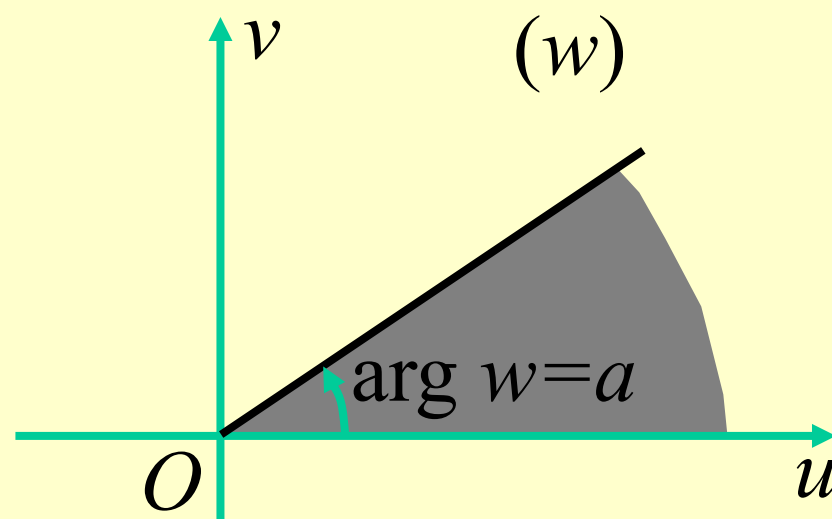
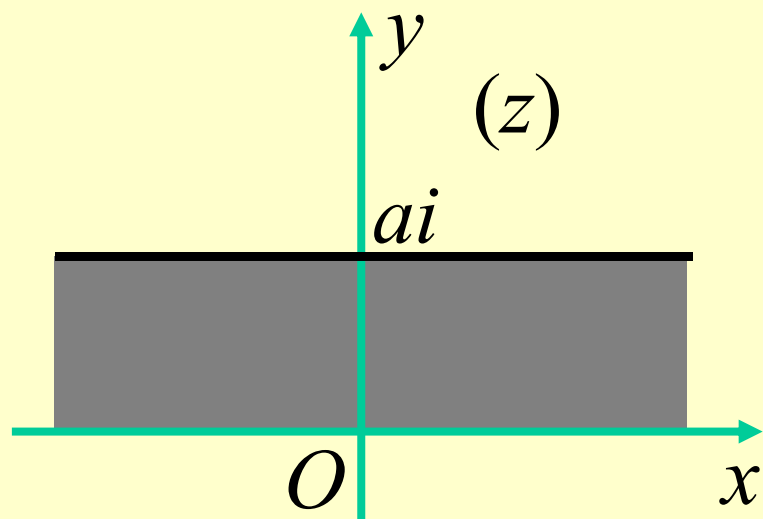
设 $z = x + iy$, $w = re^{i\theta}$, 则 $w = e^z = \underline{e^{x+iy} = re^{i\theta}}$ 推出：

$r = e^x$: z 平面上垂直线映射成 w 平面上圆周；

$\theta = y$: z 平面上水平直线映射成 w 平面上射线。

带形域 $0 < \text{Im}(z) < a < 2\pi$ 映射成角形域 $0 < \arg w < a$ 。

特别是带形域 $0 < \text{Im}(z) < 2\pi$ 映射成沿正实轴剪开的 w 平面： $0 < \arg w < 2\pi$ 。它们间的点是一一对应的。

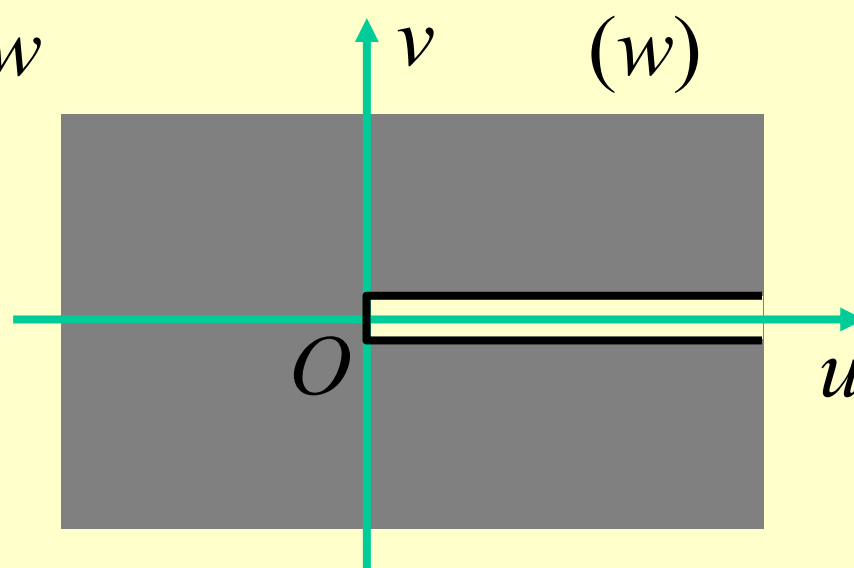
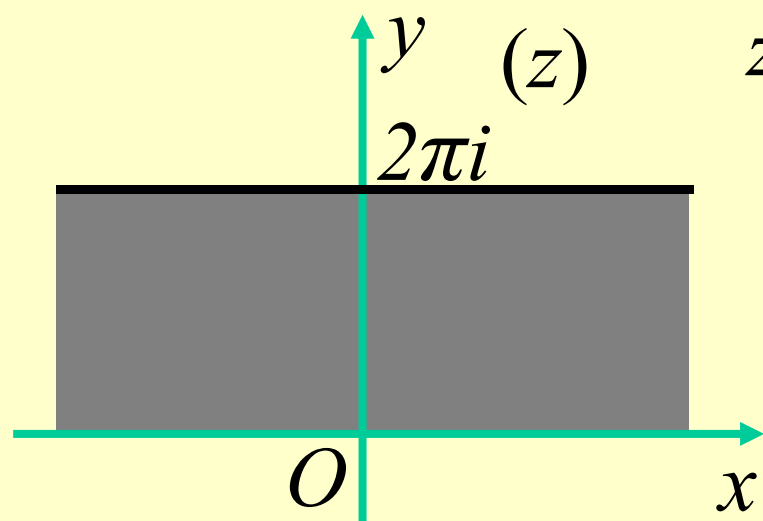


$$w = e^z$$

→

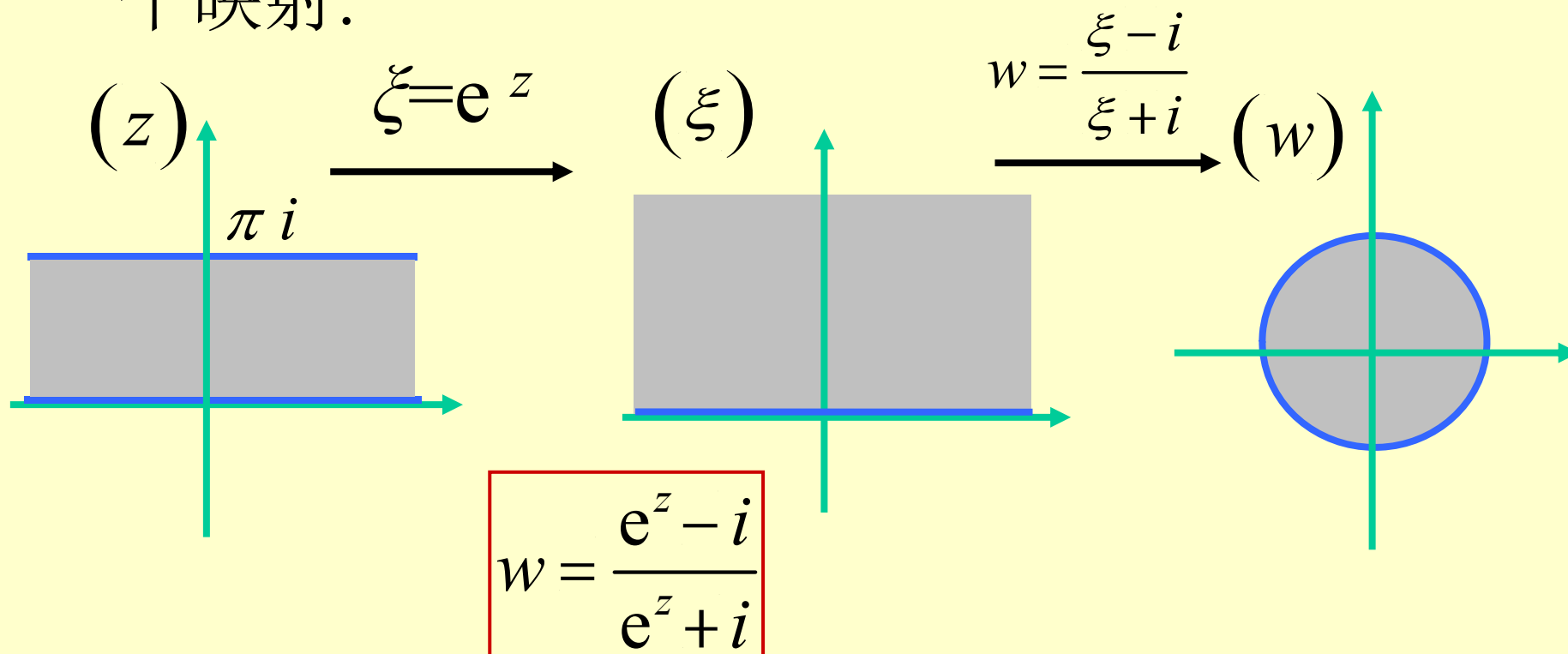
←

$$z = \ln w$$

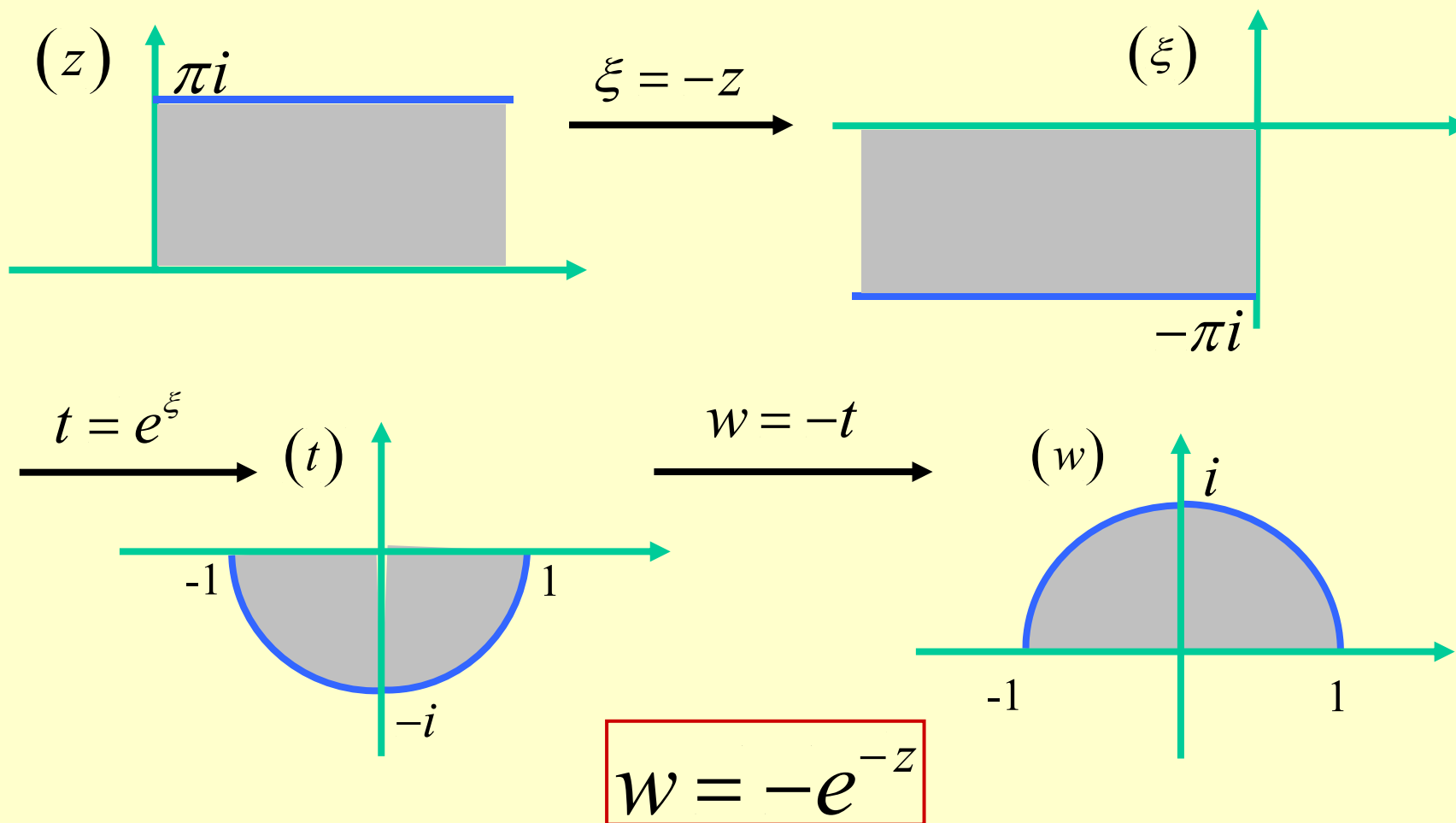


由指数函数 $w = e^z$ 所构成的映射的特点是: 把水平的带形域 $0 < \text{Im}(z) < a (a < 2\pi)$ 映射成角形域 $0 < \arg w < a$.

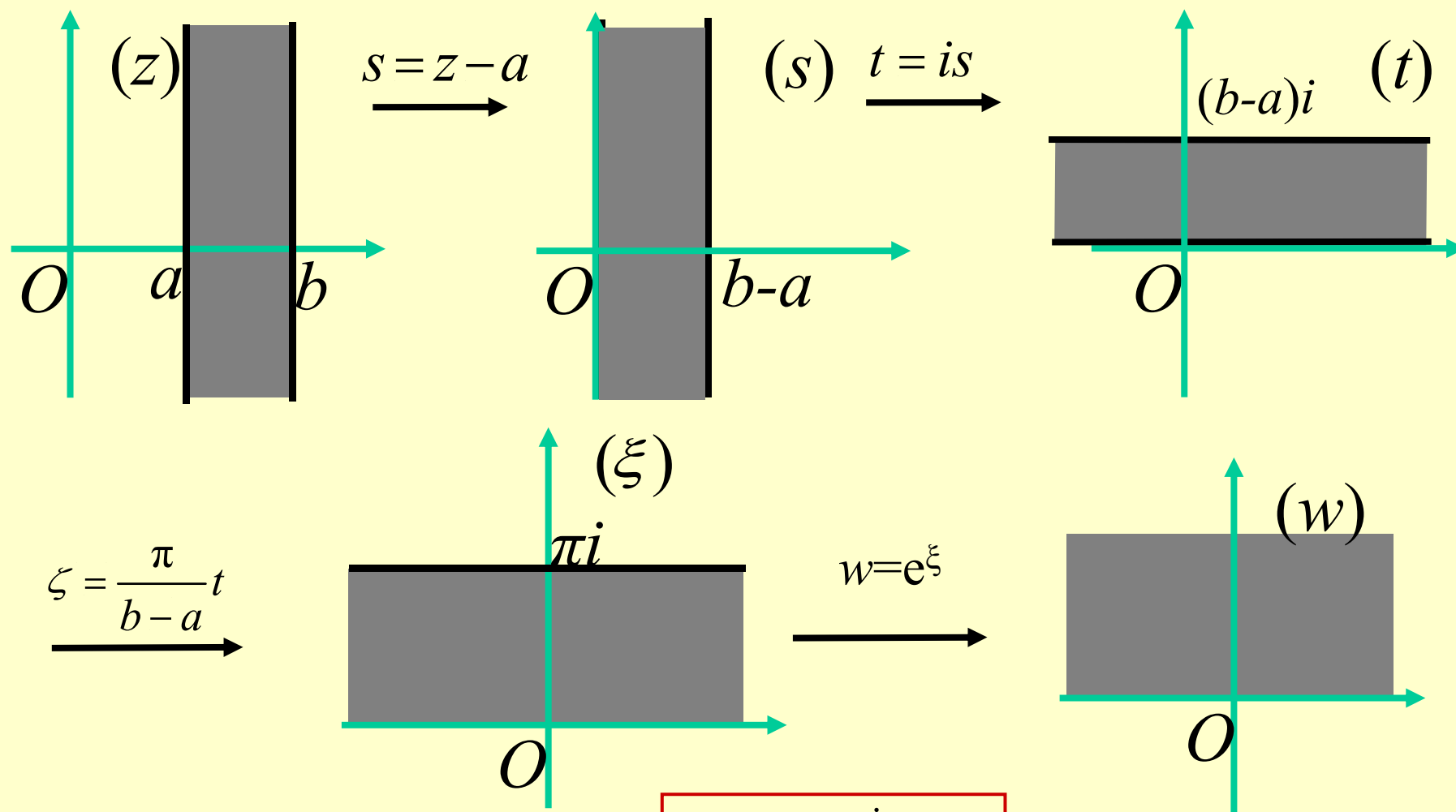
例4 求把带形域 $0 < \text{Im}(z) < \pi$ 映射成单位圆 $|w| < 1$ 的一个映射.



例4 求映射把如图所示的半带状域映成上半单位圆。

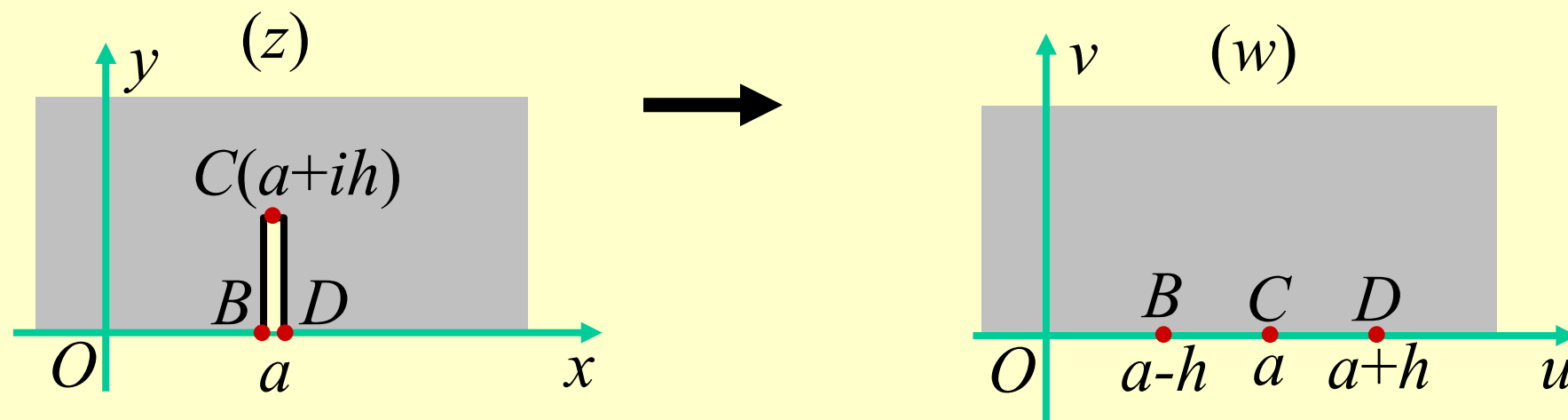


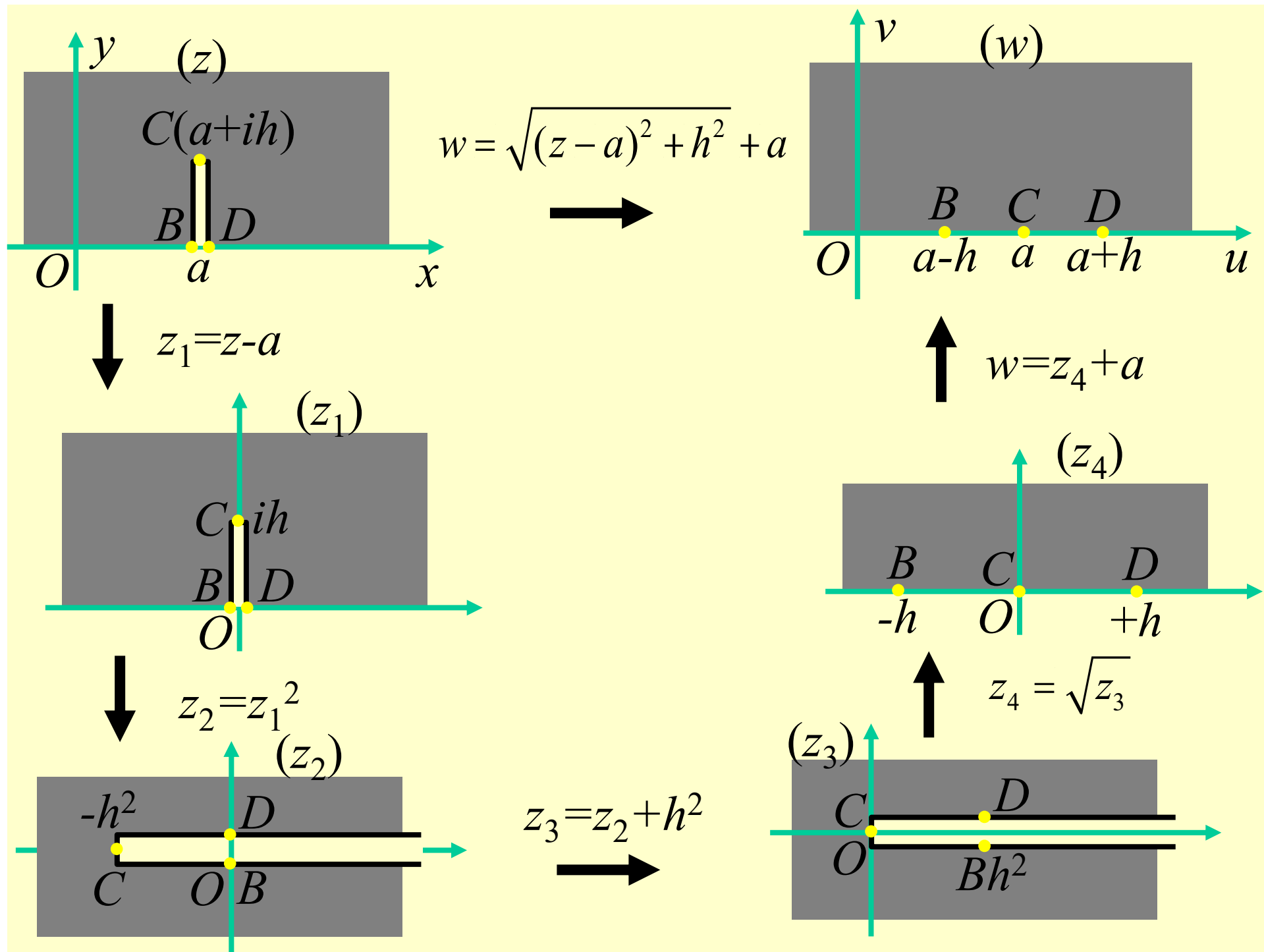
例5 求把带形域 $a < \operatorname{Re}(z) < b$ 映射成上半平面 $\operatorname{Im}(w) > 0$ 的一个映射.



$$w = e^{\frac{\pi i}{b-a}(z-a)}$$

例6 求把具有割痕 $\text{Re}(z)=a, 0<\text{Im}(z)<h$ 的上半平面映射成上半平面的一个映射.





[解] 不难看出, 解决本题的**关键**显然是要设法将垂直于 x 轴的**割痕的两侧**和 **x 轴之间的夹角展平**. 由于映射 $w=z^2$ 能将顶点在原点处的角度增大到两倍, 所以利用这个映射可以达到将割痕展平的目的.

首先, 把上半 z 平面向左平移一个距离 $a: z_1 = z - a$.

第二, 由映射 $z_2 = z_1^2$, 得到具有割痕 $\operatorname{Re}(z_2) > -h^2$,

$\operatorname{Im}(z_2) = 0$ 的 z_2 平面.

第三, 把 z_2 平面向右作一距离为 h^2 的平移: $z_3 = z_2 + h^2$,

便得到去掉了正实轴的 z_3 平面.

第四, 通过映射 $z_4 = \sqrt{z_3}$, 便得到上半 z_4 平面

最后,把 z_4 平面向右作一距离为 a 的平移:

$w = z_4 + a$,便得到 w 平面中的上半平面.

把所有的映射复合起来就得到所求出映射:

$$w = \sqrt{(z - a)^2 + h^2} + a$$