



自动控制理论

第五章 根轨迹方法

Chapter 5 Root Locus



浙江大学控制科学与工程学系

CONTROL SCIENCE AND ENGINEERING

SINCE 1956



第五章内容

- 概述
- 根轨迹的绘制方法
- 广义根轨迹
- 基于根轨迹的系统性能分析
- 基于根轨迹的系统补偿器设计



系统性能分析——回顾

稳（稳定性）

全部闭环极点位于左半开平面

快（暂态性能）

主导极点（某些稳定高阶系统的低阶近似）

主导极点（**1**个或**2**个）特征：

附近无其它零极点

距虚轴较近（其实部绝对值小于其它极点实部绝对值的**1/5**）

主导根轨迹分支：根轨迹中最接近于虚轴的**1**条或**2**条根轨迹分支

二阶系统的标准形式

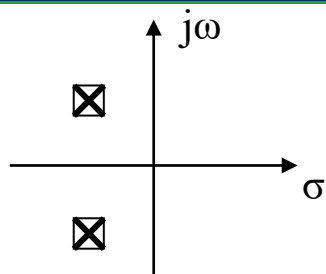
$$\begin{aligned}\frac{C(s)}{R(s)} &= \frac{K}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \\ &= \frac{K}{(s - s_1)(s - s_2)}\end{aligned}$$

阻尼比： ζ

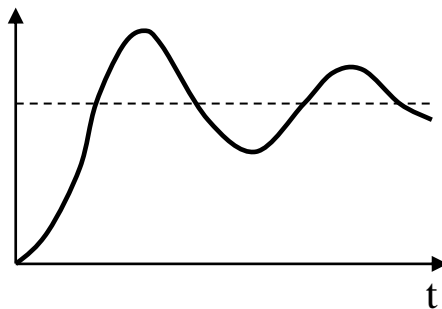
自然频率： ω_n



系统性能分析——回顾

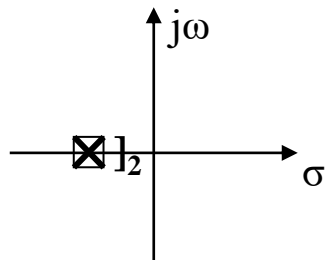


$$s_{1,2} = \sigma \pm j\omega_d$$

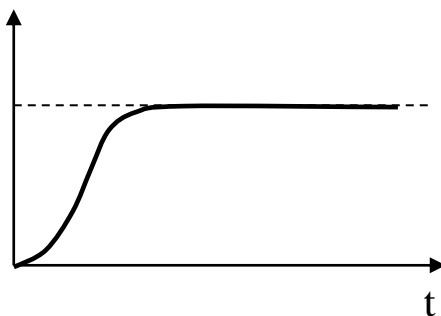


欠阻尼, $\sigma = -\zeta\omega_n, \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$

$$0 < \zeta < 1$$

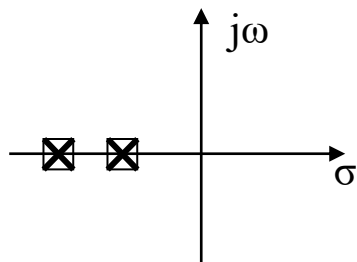


$$s_{1,2} = \sigma$$

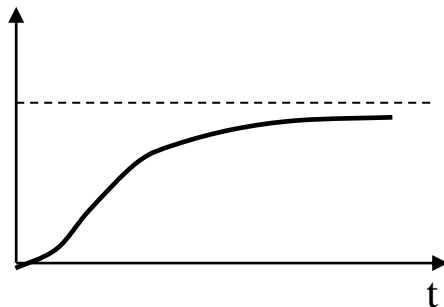


临界阻尼, $\sigma = -\zeta\omega_n$

$$\zeta = 1$$



$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

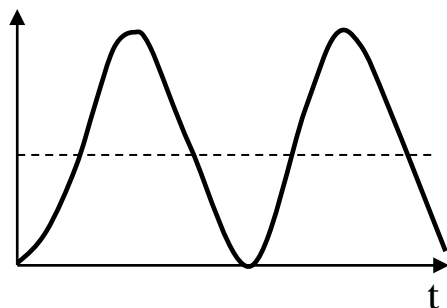
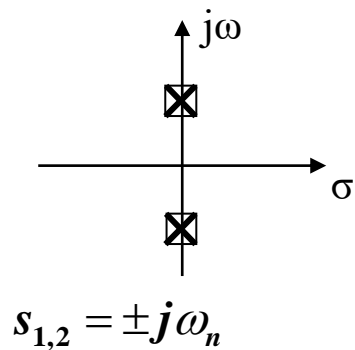


过阻尼

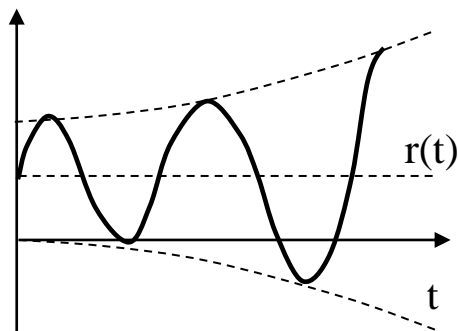
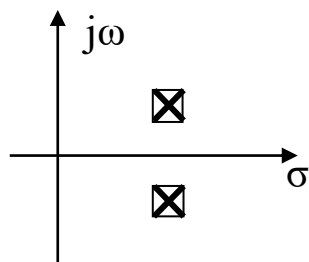
$$\zeta > 1$$



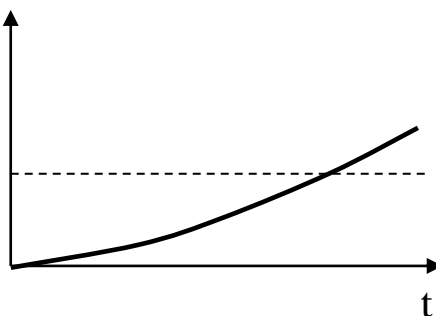
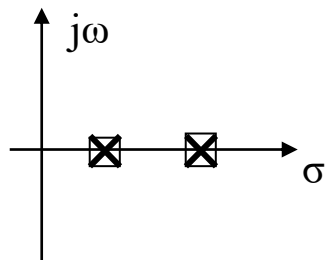
系统性能分析——回顾



$\zeta=0$ 无阻尼



$-1 < \zeta < 0$ 指数增大振荡



$\zeta < -1$ 指数增大

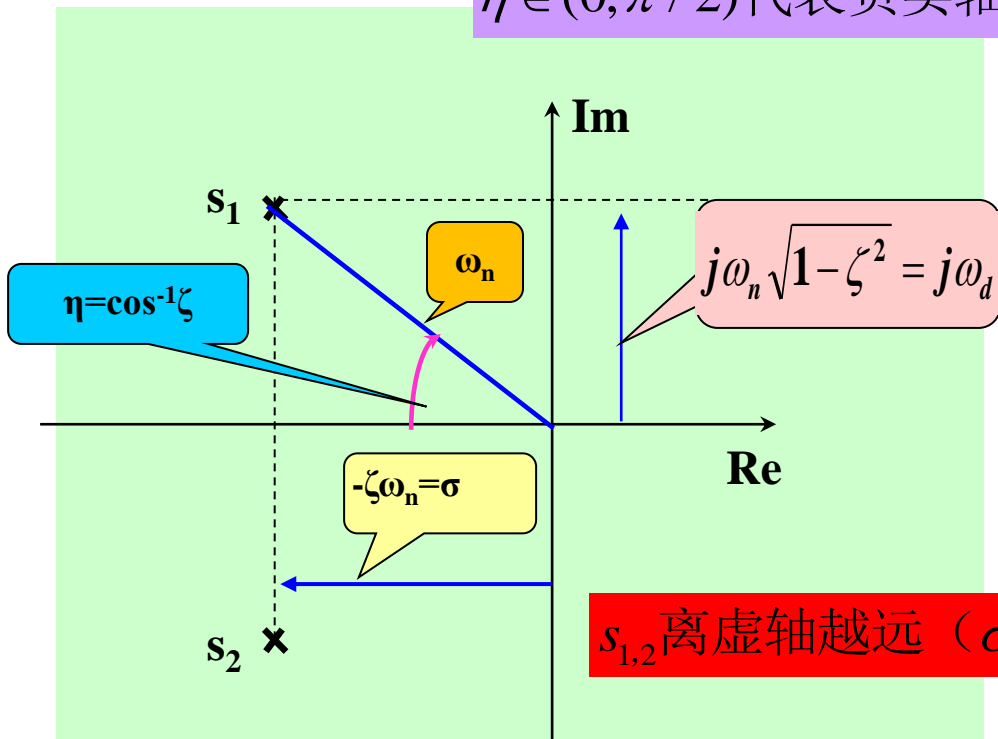


根轨迹概述 —— 根轨迹定性分析

工程上常设计闭环极点，目标为带合适阻尼比的欠阻尼系统($0 < \zeta < 1$)

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = \sigma \pm j\omega_d$$

$\eta \in (0, \pi/2)$ 代表负实轴与向量 s_1 的夹角（顺时针方向为正）



角 η 越大（ ζ 越小），则超调越大

$s_{1,2}$ 离虚轴越远（ σ 越小或 $|\sigma|$ 越大），则调节时间越短



系统性能分析——回顾

准（稳态性能）

单位负反馈系统的“型”取决于原点处的开环极点

无位于原点的开环极点，0型系统

有1个位于原点的开环极点，1型系统

有2个位于原点的开环极点，2型系统

...

单位负反馈系统的稳态误差系数与根轨迹增益有关

单位负反馈系统开环传递函数 $G(s) = \frac{K(s+2)}{(s+10)(s+0.5)}$

0型系统

$$\text{稳态位置误差系数 } K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \frac{K \times 2}{10 \times 0.5} = 0.4K$$

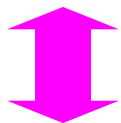


系统性能分析——核心步骤

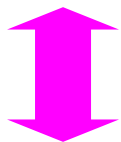
通常由系统的动态性能指标来在主导根轨迹分支上确定主导极点

一般步骤：

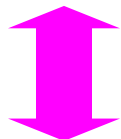
动态性能指标：调节时间 t_s ，超调 $\sigma\%$ ，上升时间 t_r ，峰值时间 t_p



阻尼比 ζ ，自然频率 ω_n ，阻尼振荡频率 ω_d ，主导极点实部 σ



在主导根轨迹分支上选择合适的主导极点



基于主导极点，应用幅值条件计算相应的根轨迹增益



系统性能分析——核心步骤

其它根轨迹分支上的特征根可以用下列任一方法求取：

方法 1: 确定其它根轨迹分支上的点,使其满足具有与主导极点相同的根轨迹增益

方法 2: 如果除了一个实根或者一对共轭复根之外,其余特征根均已知,则可用下列任一方法确定未知的特征根

- 1) 除以由已知特征根构成的特征多项式,商为未知特征根构成的多项式
- 2) 对于 $m \leq n-2$ 的系统,采用规则 9 求取系统的特征根



系统性能分析——举例

例5-24 已知负反馈控制系统前向通道传递函数 **$G(s)$** 与反馈通道传递函数 **$H(s)$** ,绘制根轨迹,并给出单位阶跃响应 **$c(t)$** (其中主导极点的 **$\zeta=0.5$**)

$$G(s) = \frac{K_1}{s(s^2/2600 + s/26 + 1)}, \quad K_1 > 0$$

$$H(s) = \frac{1}{0.04s + 1}$$

解: 将 **$G(s)$** 、 **$H(s)$** 重写

$$G(s) = \frac{2600K_1}{s(s^2 + 100s + 2600)} \quad H(s) = \frac{25}{s + 25}$$

则

$$G(s)H(s) = \frac{65000K_1}{s(s + 25)(s^2 + 100s + 2600)} = \frac{K}{s^4 + 125s^3 + 5100s^2 + 65000s}$$

$$K = 65000K_1$$



系统性能分析——举例

1) 开环极点: $n = 4$ $p_1 = 0, p_2 = -25, p_3 = -50 + j10, p_4 = -50 - j10$

开环零点: $w = 0$

2) 4条根轨迹分支

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+25)(s^2+100s+2600)}$$

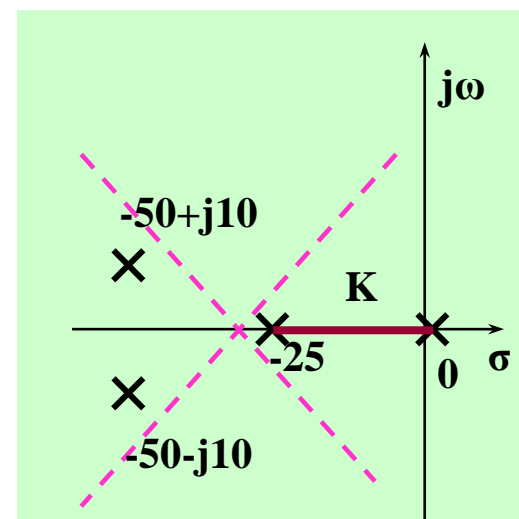
3) 实轴上的根轨迹: $[-25, 0]$

4) 渐近线与实轴的夹角

$$\gamma = \frac{(1+2h)180^\circ}{n-w} = \frac{(1+2h)180^\circ}{4} = \pm 45^\circ, \pm 135^\circ$$

渐近线与实轴的交点

$$\sigma_0 = \frac{p_1 + p_2 + p_3 + p_4}{n-w} = \frac{0 - 25 - 50 - 50}{4} = -31.25$$





系统性能分析——举例

5) 实轴上的分离点 d

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+25)(s^2+100s+2600)}$$

方法 1

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d+25} + \frac{1}{d+25-j10} + \frac{1}{d+25+j10} = 0$$

方法 2

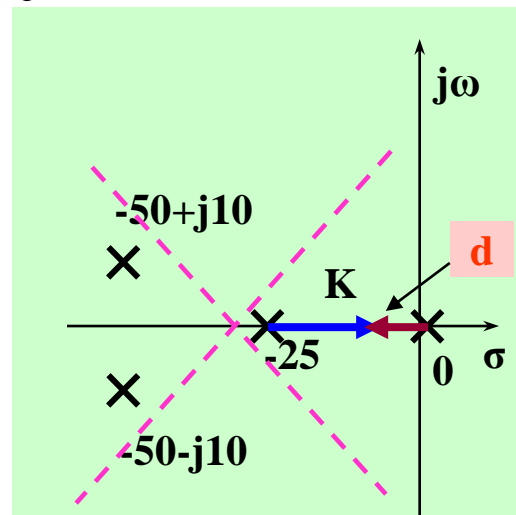
$$-K = s^4 + 125s^3 + 5100s^2 + 65000s$$

$$\left. \frac{d(-K)}{ds} \right|_{s=d} = 4d^3 + 375d^2 + 10200d + 65000 = 0$$

$$d = -9.15$$

分离角:

$$\frac{(2k+1)180^\circ}{l} = \frac{(2k+1)180^\circ}{2} = \begin{cases} 90^\circ \\ -90^\circ \end{cases}$$





系统性能分析——举例

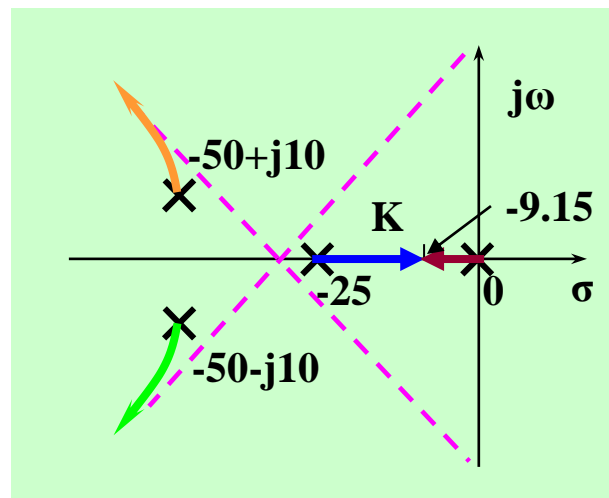
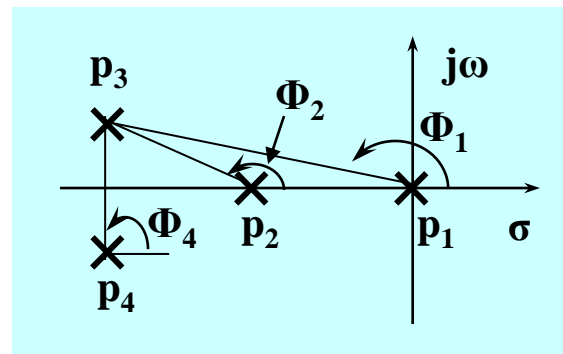
6) 极点 $-50+j10$ 处的出射角 Φ_{3D}

$$\begin{aligned}\phi_{3D} &= (1+2h)180^\circ - (\phi_1 + \phi_2 + \phi_4) \\ &= (1+2h)180^\circ - (168.7^\circ + 158.2^\circ + 90^\circ) \\ &= 123.1^\circ\end{aligned}$$

同样地,

极点 $-50-j10$ 处的出射角为 -123.1°

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+25)(s^2+100s+2600)}$$





系统性能分析——举例

7) 根轨迹与虚轴的交点:

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+25)(s^2+100s+2600)}$$

$$\Delta(s) = s^4 + 125s^3 + 5100s^2 + 65000s + 65000K_1$$

根据Routh表:

s^4	1	5100	65000 K_1
s^3	1	520(after division by 125)	
s^2	1	14.2 K_1 (after division by 4580)	
s^1	520-14.2 K_1		
s^0	14.2 K_1		

$$520 - 14.2K_1 = 0 \Rightarrow K_1 = 36.6$$

由 s^2 行构造辅助方程:

$$s^2 + 14.2K_1 = 0 \Rightarrow s = \pm j\sqrt{14.2K_1} = \pm j22.8$$



系统性能分析——举例

8) 绘制 $\zeta=0.5$ 的射线, 其中 η

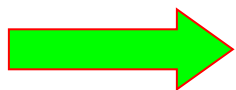
$$\eta = \cos^{-1} 0.5 = 60^\circ$$

由图可以得到主导极点

$$s_{1,2} = -6.6 \pm j11.4$$

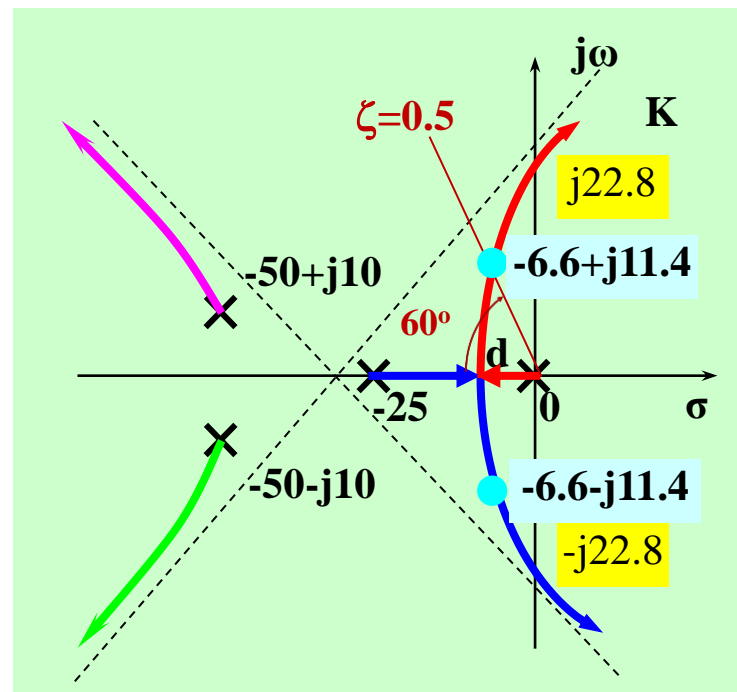
9) 增益

$$K = 65000K_1 = \left(|s| \cdot |s+25| \cdot |s+50-j10| \cdot |s+50+j10| \right) \Big|_{s=-6.6+j11.4}$$



$$K = 598800 = 65000K_1, \quad K_1 = 9.21$$

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+25)(s^2+100s+2600)}$$





系统性能分析——举例

10) 满足幅值 $K=598800$ 的其余特征根

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+25)(s^2+100s+2600)}$$

方法 1

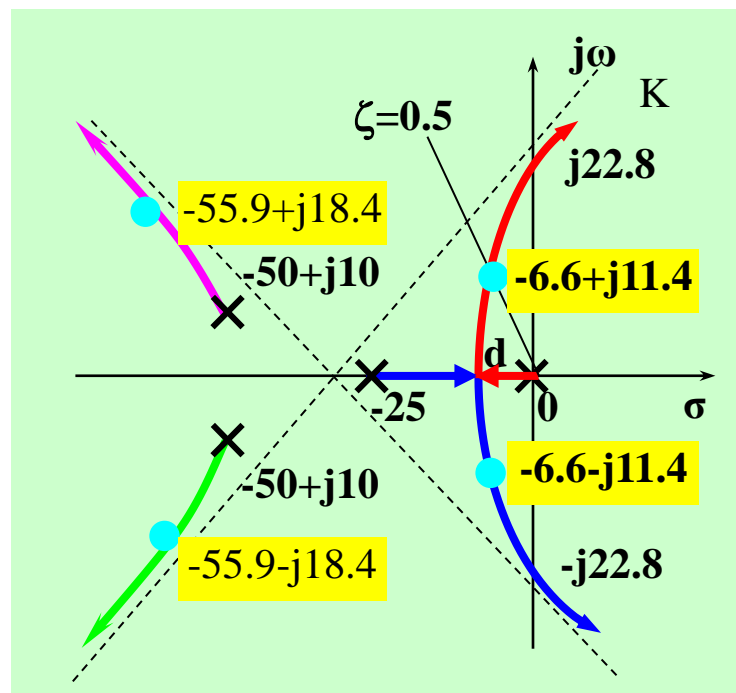
$$1 + G(s)H(s) = s^4 + 125s^3 + 5100s^2 + 65000s + 598800 = 0$$

$$\begin{aligned} & \frac{s^4 + 125s^3 + 5100s^2 + 65000s + 598800}{(s + 6.6 + j11.4)(s + 6.6 - j11.4)} \\ &= \frac{s^4 + 125s^3 + 5100s^2 + 65000s + 598800}{s^2 + 13.2s + 173.52} \\ &= s^2 + 111.8s + 3463 \end{aligned}$$

$$\therefore s_{3,4} = -55.9 \pm j18.4$$

方法 2

因为满足分母阶次 $n \geq$ 分子阶次 $w+2$, 故可用法则九 (根之和) 法则来确定根的实部





系统性能分析——举例

方法 2

由法则九（根之和）

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+25)(s^2+100s+2600)}$$

$$\begin{aligned} 0 - 25 + (-50 + j10) + (-50 - j10) \\ = (-6.6 + j11.4) + (-6.6 - j11.4) + (\sigma + j\omega_d) + (\sigma - j\omega_d) \end{aligned}$$



$$s_{3,4} = -55.9 \pm j18.4$$

$$\Phi(s) = \frac{G}{1+GH} = \frac{\frac{N_1}{D_1}}{1 + \frac{N_1 N_2}{D_1 D_2}} = \frac{N_1 D_2}{\text{closed-loop roots}}$$

$$G(s) = \frac{2600K_1}{s(s^2+100s+2600)}$$

$$H(s) = \frac{25}{s+25}$$



11) 闭环传递函数

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{24040(s+25)}{s^4 + 125s^3 + 5100s^2 + 65000s + 65000K_1}$$



系统性能分析——举例

12) 阶跃响应 $c(t)$

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+25)(s^2+100s+2600)}$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{24040(s+25)}{(s+6.6+j11.4)(s+6.6-j11.4)(s+55.9+j18)(s+55.9-j18)}$$

$$C(s) = \frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s+6.6-j11.4} + \frac{A_2}{s+6.6+j11.4} + \frac{A_3}{s+55.9-j18} + \frac{A_4}{s+55.9+j18}$$

$$A_0 = 1.0 \quad A_1 = 0.604 \angle (-201.7^\circ) \quad A_3 = 0.14 \angle (-63.9^\circ)$$

响应 $c(t)$

$$c(t) = 1 + 1.21e^{-6.6t} \sin(11.4t - 111.7^\circ) + 0.28e^{-55.9t} \sin(18t + 26.1^\circ)$$

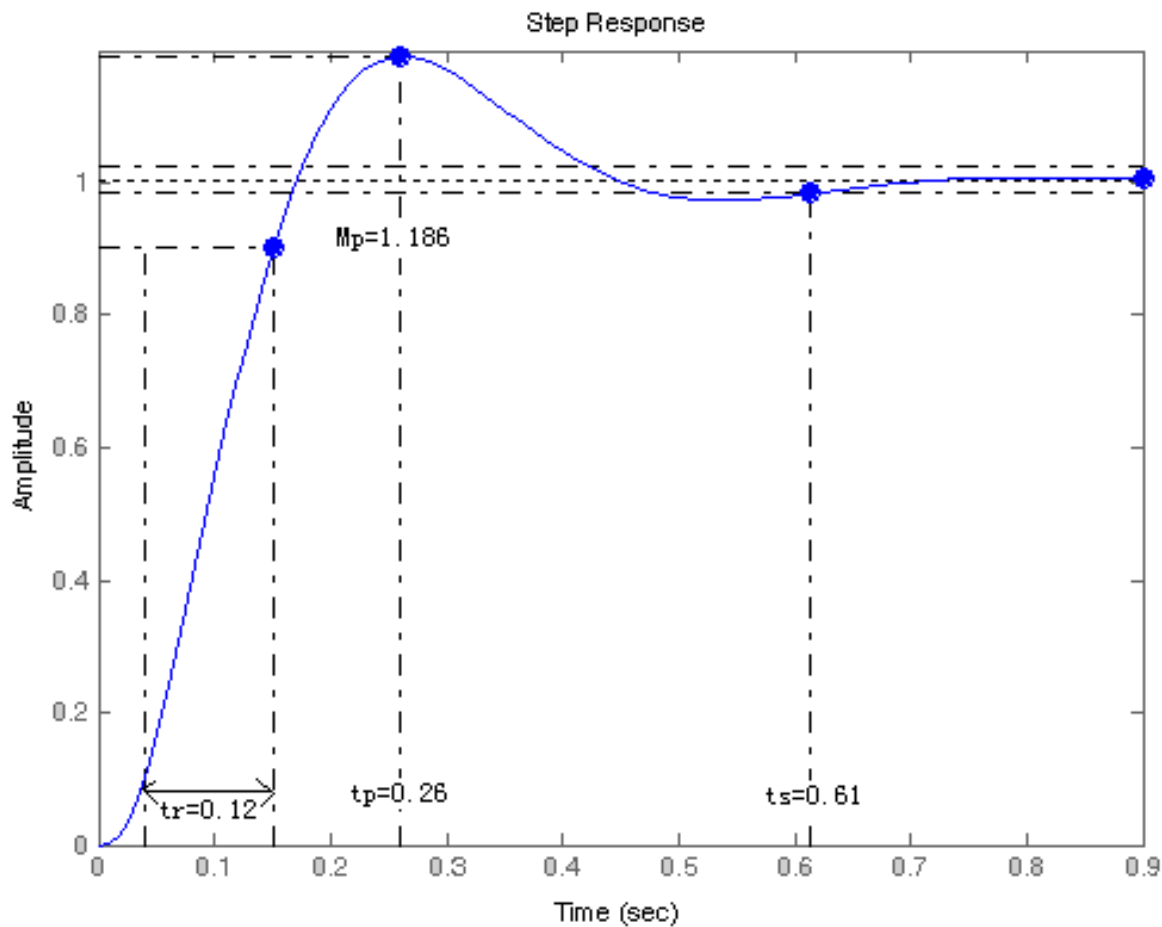
可以忽略



系统性能分析——举例

仿真 $c(t)$

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+25)(s^2+100s+2600)}$$





系统性能分析——举例

例5-26 已知某单位负反馈控制系统开环传递函数

$$G(s) = \frac{K(s+1)}{s(s-1)}, K > 0$$

- (1)** 绘制根轨迹
- (2)** 对任意**K**，系统是否稳定？若否，则确定使系统稳定的**K**值范围
确定使闭环系统持续振荡的参数 **K** 和频率 **ω**
- (3)** 若调节时间**4s**，确定**K**值和对应的特征根

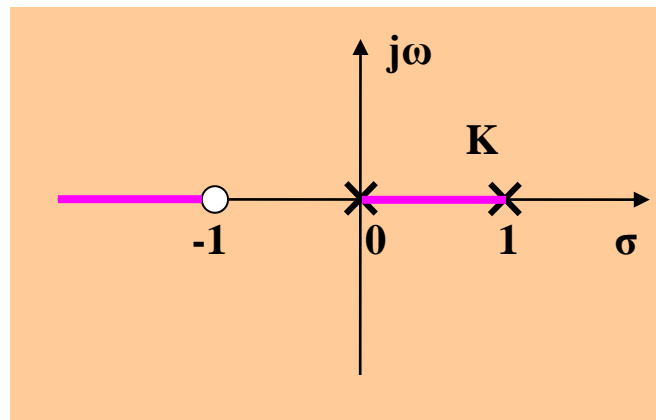
解：(1) 绘制根轨迹

1) 开环极点： $n = 2, p_1 = 0, p_2 = 1$

开环零点： $w = 1, z_1 = -1$

2) 2条根轨迹分支

3) 实轴上的根轨迹： $(-\infty, -1], [0, 1]$





系统性能分析——举例

4) 渐近线与实轴的夹角

$$\gamma = \frac{(1+2h)180^\circ}{n-w} = \frac{(1+2h)180^\circ}{1} = 180^\circ$$

$$G(s) = \frac{K(s+1)}{s(s-1)}$$

5) 实轴上的分离点 d

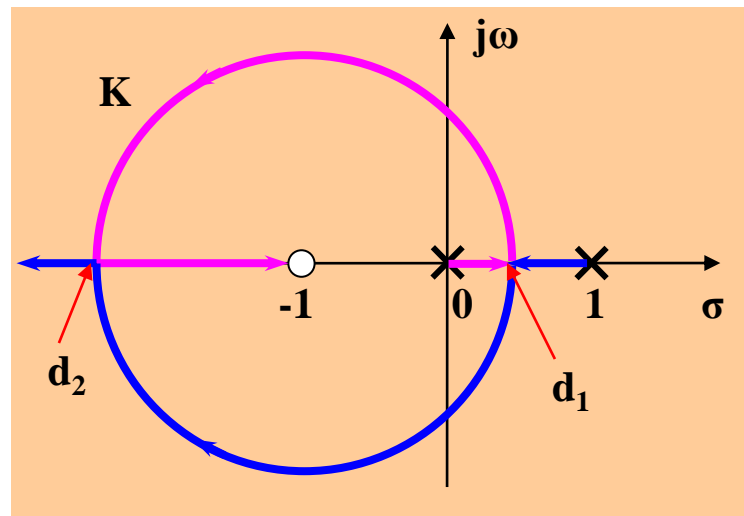
$$\because -K = \frac{s(s-1)}{s+1}$$

$$\left. \frac{d(-K)}{ds} \right|_{s=d} = s^2 + 2s - 1 = 0$$

$$\begin{aligned} d_1 &= -1 + \sqrt{2} = 0.414 \\ d_2 &= -1 - \sqrt{2} = -2.414 \end{aligned}$$

$$\text{分离角: } \frac{(2k+1)180^\circ}{l} = \frac{(2k+1)180^\circ}{2} = \begin{cases} 90^\circ \\ -90^\circ \end{cases}$$

根轨迹的主要部分是以 $(-1, j0)$ 为圆心, 以 **1.414** 为半径的圆





系统性能分析——举例

(2) 确定闭环系统稳定的**K**值范围,以及使系统等幅振荡(持续振荡)的**K**和频率 **ω** .

$$G(s) = \frac{K(s+1)}{s(s-1)}$$

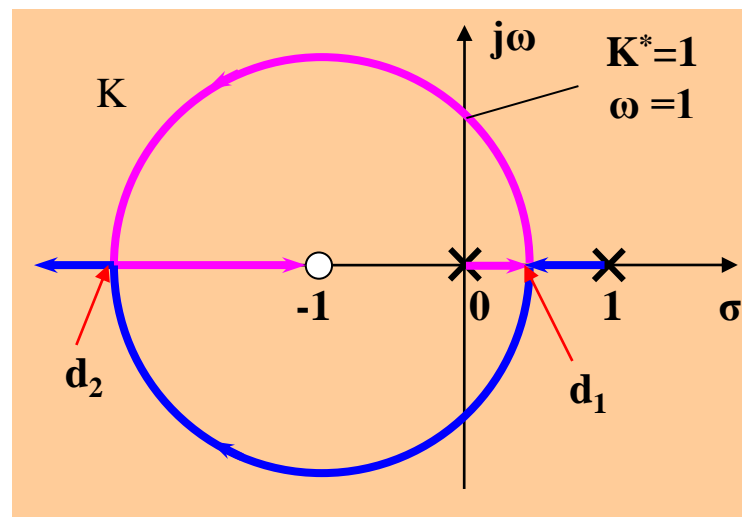
或者:从特征方程:

$$\Delta(s) = s^2 + (K-1)s + K = 0$$

很容易获得临界稳定的**K**为**1**, 当 **$K > 1$** , 系统稳定.

当 **$K=1$** , 等幅振荡的频率为 **$\omega=1$**

$$K^* = \frac{|s - p_1| \cdot |s - p_2|}{|s - z|} = \frac{\sqrt{2} \cdot 1}{\sqrt{2}} = 1$$





系统性能分析——举例

(3) 调节时间4s. 确定K值和相应的特征根

$$t_s = \frac{3.5}{\zeta\omega_n} = 4 \Rightarrow \sigma = -\zeta\omega_n = -0.875$$

$$G(s) = \frac{K(s+1)}{s(s-1)}$$

由图, 根据三角形以及半径**1.414**

$$\omega_d^2 = (\sqrt{2})^2 - (1 + \sigma)^2 = 1.984$$

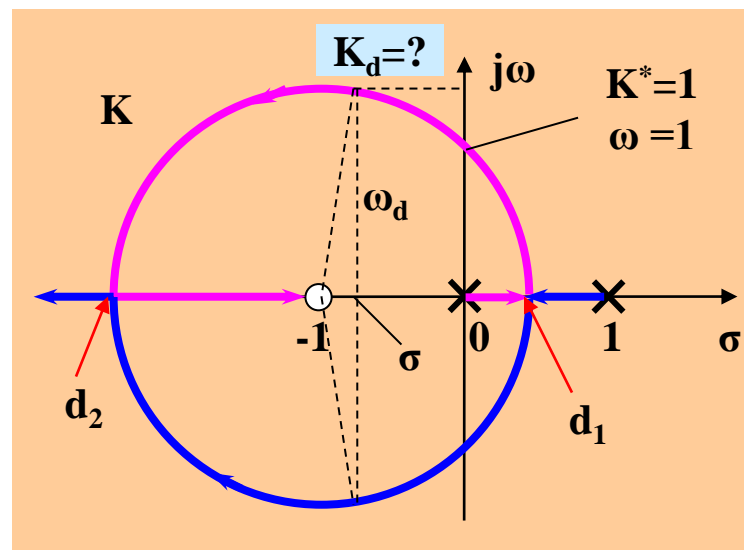
$$\omega_d = 1.41$$

相应的特征根

$$s_{1,2} = -0.875 \pm j1.41$$

运用幅值条件

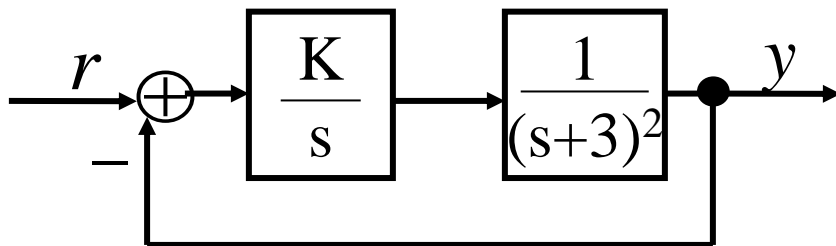
$$K_d = \frac{\sqrt{0.875^2 + 1.41^2} \cdot \sqrt{1.875^2 + 1.41^2}}{\sqrt{2}} = 2.753$$





系统性能分析——举例

例5-27 已知某单位负反馈闭环系统如图所示 ($K>0$)



请由根轨迹确定使系统工作在欠阻尼状态下的**K值范围**，且系统在斜坡输入下的稳态误差小于**0.2**

解：开环传递函数 **$G(s)$**

$$G(s) = \frac{K}{s(s+3)^2}$$

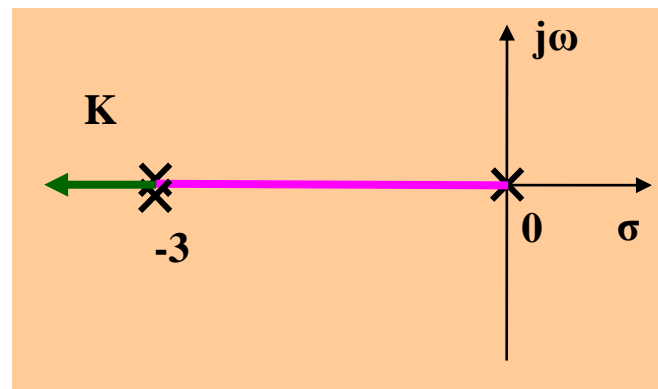
(1) 绘制根轨迹

1) 开环极点: $n = 3, p_1 = 0, p_{2,3} = -3$

开环零点: $w = 0$

2) 3条根轨迹分支

3) 实轴上的根轨迹($-\infty, -3$), $[-3, 0]$





系统性能分析——举例

4) 渐近线与实轴的夹角与交点

$$\gamma = \frac{(1+2h)180^\circ}{3} = \pm 60, 180^\circ \quad \sigma_0 = \frac{p_1 + p_2 + p_3}{n} = -2$$

$$G(s) = \frac{K}{s(s+3)^2}$$

5) 实轴上区间[-3, 0]的分离点

$$-K = s^3 + 6s^2 + 9s$$

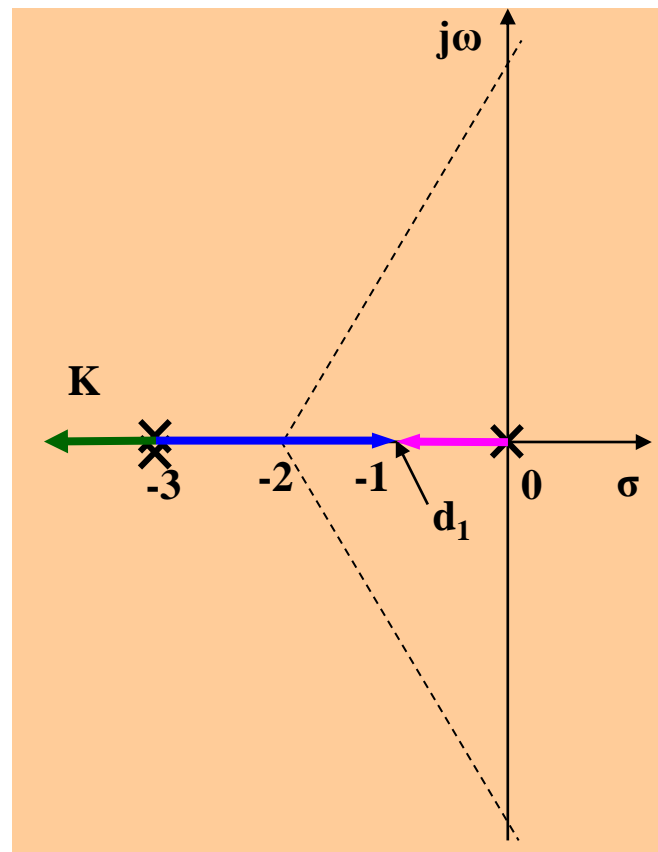
$$\left. \frac{d(-K)}{ds} \right|_{s=d} = 3s^2 + 12s + 9 = 0$$

$$d_1 = -1$$

$$d_2 = -3$$

分离角:

$$\frac{(2k+1)180^\circ}{l} = \frac{(2k+1)180^\circ}{2} = \begin{cases} 90^\circ \\ -90^\circ \end{cases}$$





系统性能分析——举例

6) 根轨迹与虚轴的交点

特征方程:

$$\Delta(s) = s^3 + 6s^2 + 9s + K$$

Routh表:

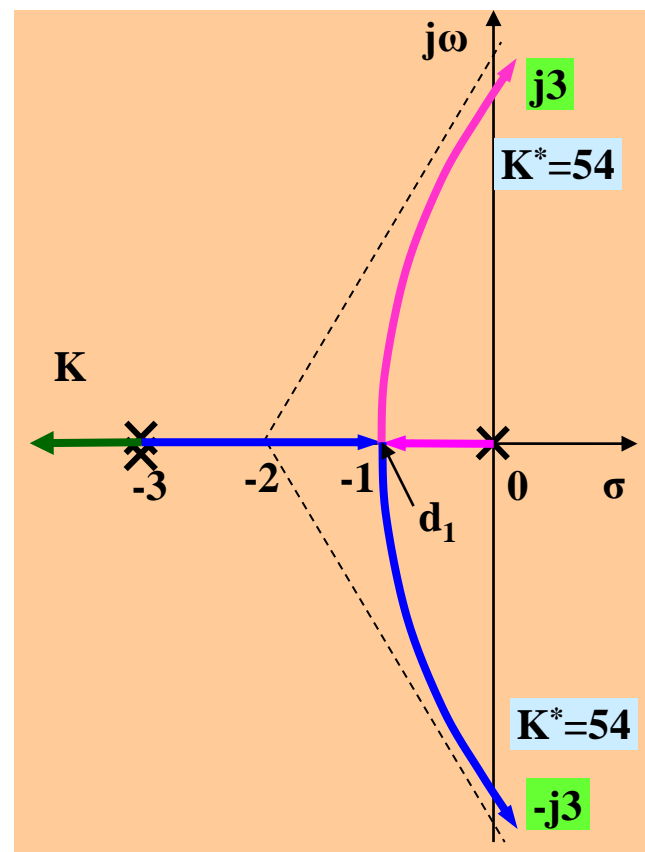
s^3	1	9
s^2	6	K
s^1	$\frac{54-K}{6}$	0
s^0	K	

$K = 54$

由 s^2 行构造辅助方程 :

$$6s^2 + K = 0 \Rightarrow s = \pm j\sqrt{\frac{K}{6}} = \pm j3$$

$$G(s) = \frac{K}{s(s+3)^2}$$





系统性能分析——举例

(2) 由根轨迹, 系统在欠阻尼状态下的**K**值范围

d₁处的**K**值 $K_d = \left| s(s+3)^2 \right|_{s=d_1=-1} = 4$

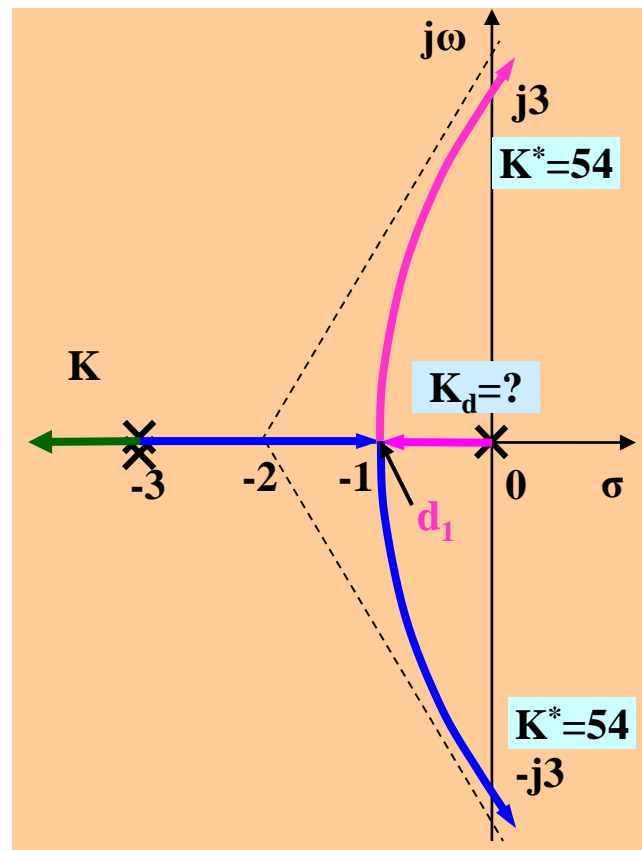
$\therefore 4 < K < 54$ 系统欠阻尼

(3) 如果输入是斜坡函数, 稳态误差 **e_{ss}** 为 (系统是 **1型**)

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{\lim_{s \rightarrow 0} sG(s)} = \frac{9}{K} \leq 0.2 \quad \longrightarrow \quad K \geq 45$$

因此, 满足要求的**K**值范围 $45 \leq K \leq 54$

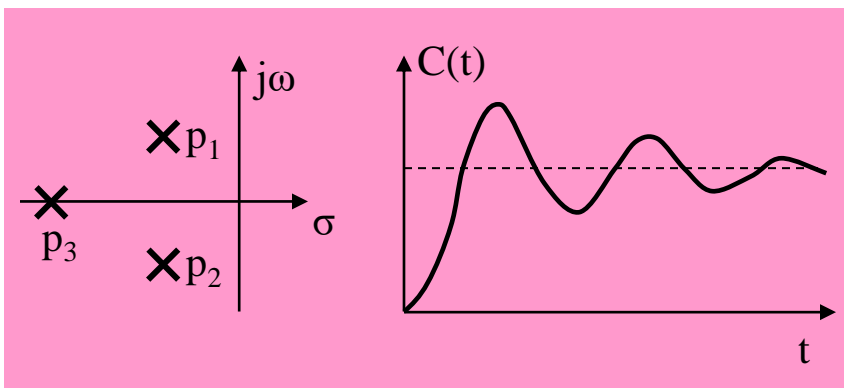
$$G(s) = \frac{K}{s(s+3)^2}$$





系统性能分析——附加极点

考虑一个具有复数极点和一个附加负实数极点 p_3 的系统，如图所示，闭环传递函数为



$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s - p_3)}$$

$$K = -\omega_n^2 p_3$$

单位阶跃输入下的系统输出响应为

$$c(t) = 1 + 2|A_1|e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \phi) + A_3 e^{p_3 t}$$

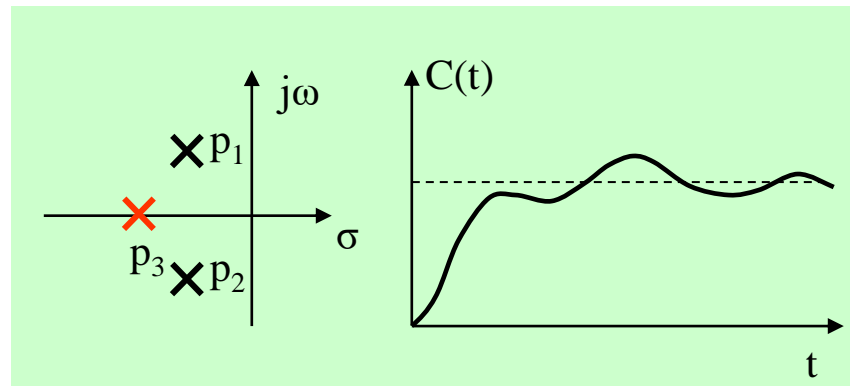
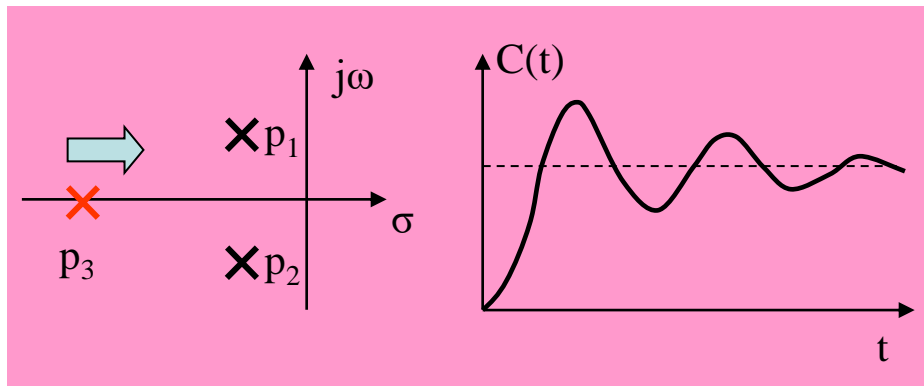
$$A_3 = \left. \frac{-\omega_n^2 p_3}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \right|_{s=p_3} = \left. \frac{-\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \right|_{s=p_3} < 0$$



系统性能分析——附加极点

系统的响应:

$$c(t) = 1 + 2|A_1|e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \phi) + A_3 e^{p_3 t}$$



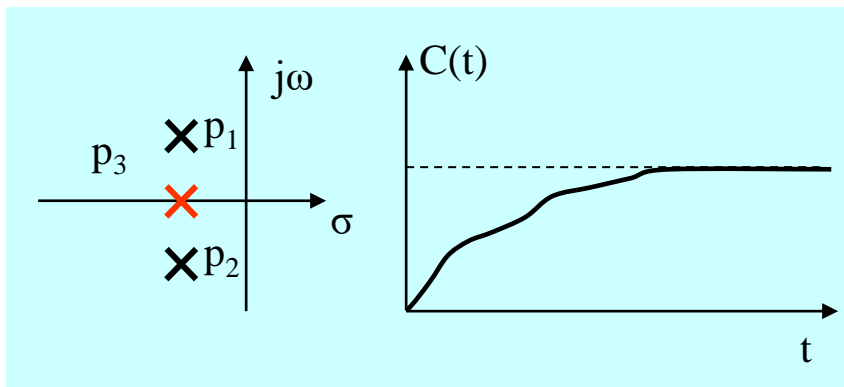
- 当极点 p_3 向右侧移动, $|A_3|$ 增大, 超调减少
- 当 p_3 接近但仍然在复数极点的左侧时, 时域上第一个峰值小于稳态值, 最大超调可能出现在第二个峰值或后面的峰值

$$A_3 = \frac{-\omega_n^2 p_3}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \Big|_{s=p_3} = \frac{-\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \Big|_{s=p_3} < 0$$

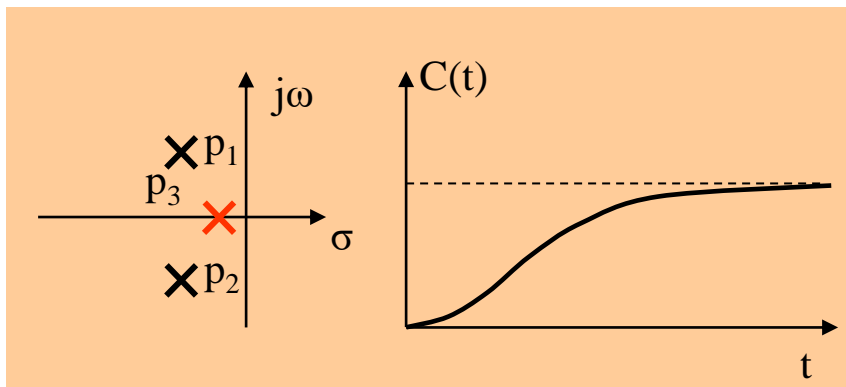


系统性能分析——附加极点

系统的响应:



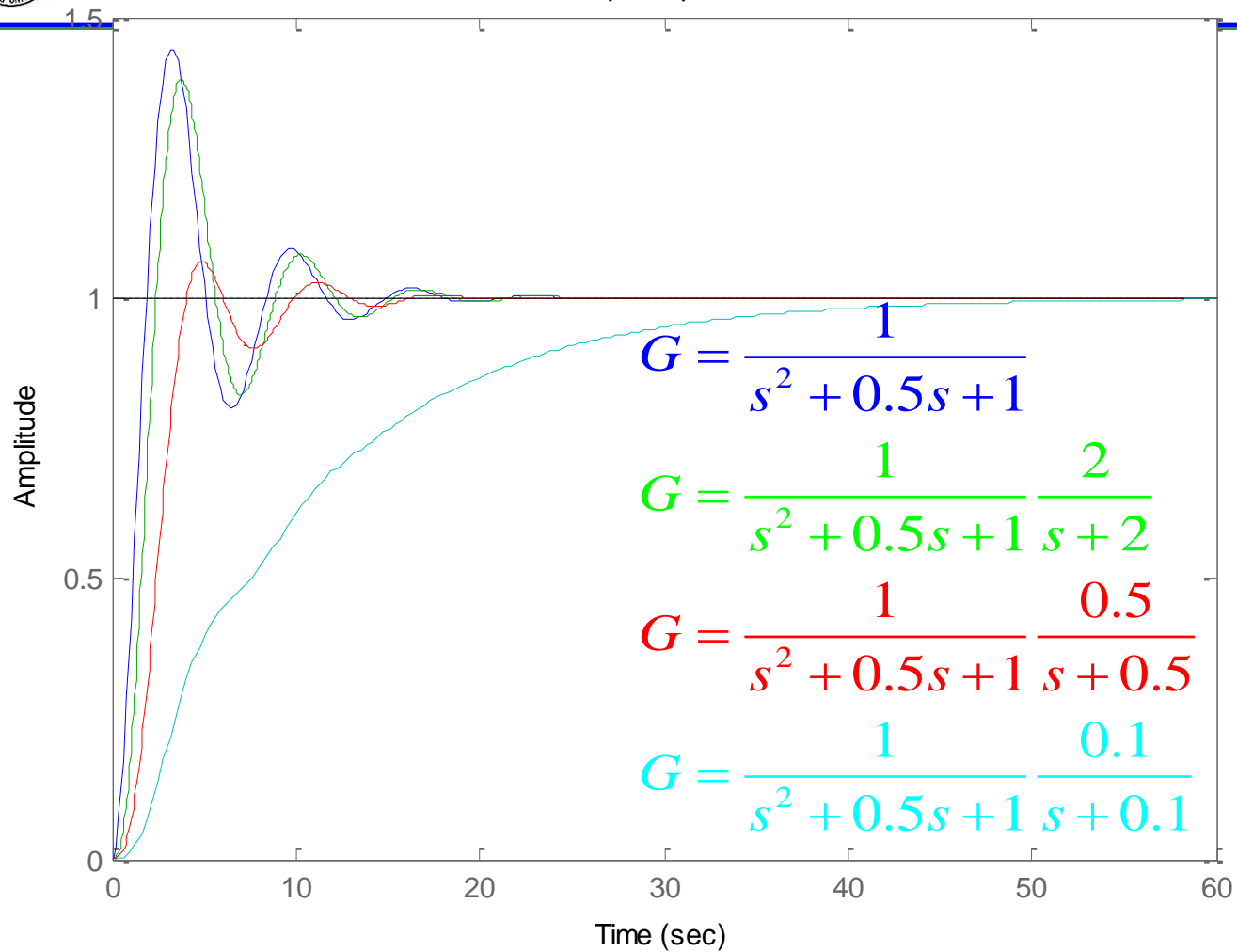
- 当 p_3 位于复数极点在实轴的投影处, 响应是单调的, 没有超调. 相当于临界阻尼, 复数极点则导致时域响应出现波纹(ripple)



- 当 p_3 位于复数极点的右侧, 则 p_3 的作用反而超过其它2个极点, 系统响应特点为过阻尼



Step Response





系统性能分析——附加极点

结论:

- ❖ 由实数极点 p_3 作用的瞬态项为 $A_3 e^{p_3 t}$, 其中 $A_3 < 0$, 因此超调 M_p 减少
- ❖ 幅值 A_3 取决于 p_3 相对于复数极点的位置. p_3 越靠左侧, 幅值 A_3 越小, 对系统响应的影响越小.
- ❖ 若 p_3 在复数极点 p_1 和 p_2 左侧5倍以远的位置, 对系统响应的影响可以忽略不计

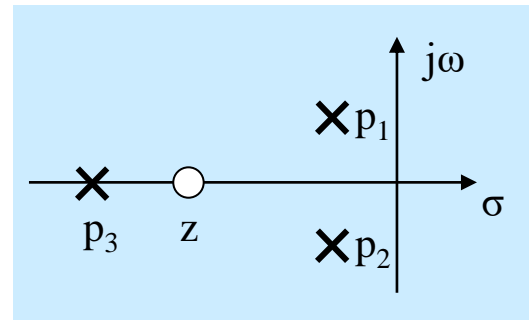


系统性能分析——附加极点与零点

除了增加实数极点之外，再增加一个实数零点，则会进一步影响系统的瞬态响应

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K(s-z)}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s-p_3)}$$

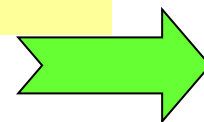
$$K = \frac{\omega_n^2 p_3}{z}$$



单位阶跃响应

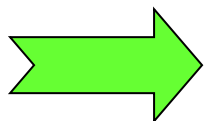
$$c(t) = 1 + 2|A_1|e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \phi) + A_3 e^{p_3 t}$$

$$A_3 = \left. \frac{\omega_n^2 \frac{p_3}{z} (s-z)}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \right|_{s=p_3} = \left. \frac{\omega_n^2 \left(\frac{p_3}{z} - 1 \right)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \right|_{s=p_3} = K_1 \left(\frac{p_3}{z} - 1 \right) \quad K_1 > 0$$

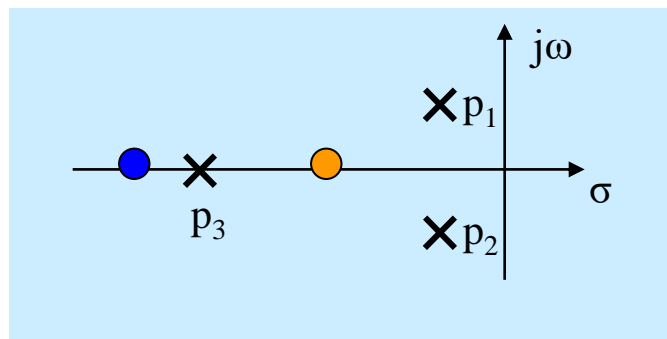




系统性能分析——附加极点与零点



$$A_3 = K_1 \left(\frac{p_3}{z} - 1 \right)$$



A_3 的符号取决于实数零极点的相对位置

- 1) 若零点 z 在 p_3 的左侧，则 A_3 为负
- 2) 若零点 z 在 p_3 的右侧，则 A_3 为正
- 3) 若零点 z 接近于 p_3 ，则 A_3 很小，这项瞬态响应则相对较小



系统性能分析——附加极点与零点

结论:

- ❖ 若零点 z 在极点 p_3 的左侧, A_3 为负, 且响应与仅有复数极点的系统响应相似, 但超调减小
- ❖ 若零点 z 在极点 p_3 的右侧, A_3 为正, 超调比仅有复数极点的系统响应大



系统性能分析——附加极点举例

例5-28 考虑一单位负反馈系统开环传递函数为

$$G_x(s) = \frac{K_x}{s(s^2 + 4.2s + 14.4)} = \frac{K_x}{s(s + 2.1 + j3.1607)(s + 2.1 - j3.1607)}$$

设计控制器，使闭环系统满足：

$$K_1 = K_x/14.4, \quad K_1 \geq 1.5s^{-1}$$

$$1 < M_p \leq 1.123,$$

$$t_s \leq 3s \quad e(t)_{ss} = 0,$$

$$t_p \leq 1.6s$$



系统性能分析——附加极点举例

确定 $\zeta, \omega_d, \omega_n$ 采用下列几个式子

$$M_p = 1.123 = 1 + \exp \frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} \rightarrow \zeta = 0.555$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \rightarrow \omega_d > 1.9636$$

$$t_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \rightarrow \omega_n > 2.4024$$

$$K_1 = K_x / 14.4, \quad 1 < M_p \leq 1.123,$$

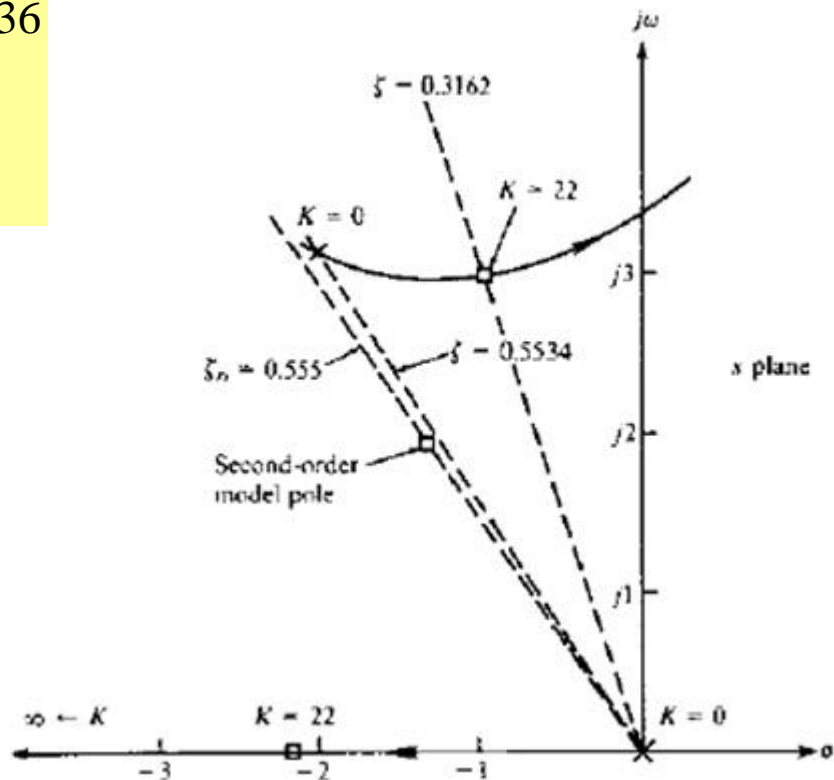
$$t_s \leq 3s \quad e(t)_{ss} = 0,$$

$$t_p \leq 1.6s, \quad K_1 \geq 1.5s^{-1}$$

闭环系统的主导极点：

$$s_{1,2} = -1.3333 \pm j1.9984$$

由图可以看出：无法得到期望的主导极点，必须进行再次设计





系统性能分析——附加极点

$$K_1 = K_x / 14.4, \quad 1 < M_p \leq 1.123,$$

$$t_s \leq 3s \quad e(t)_{ss} = 0,$$

$$t_p \leq 1.6s, \quad K_1 \geq 1.5s^{-1}$$

第二次设计：

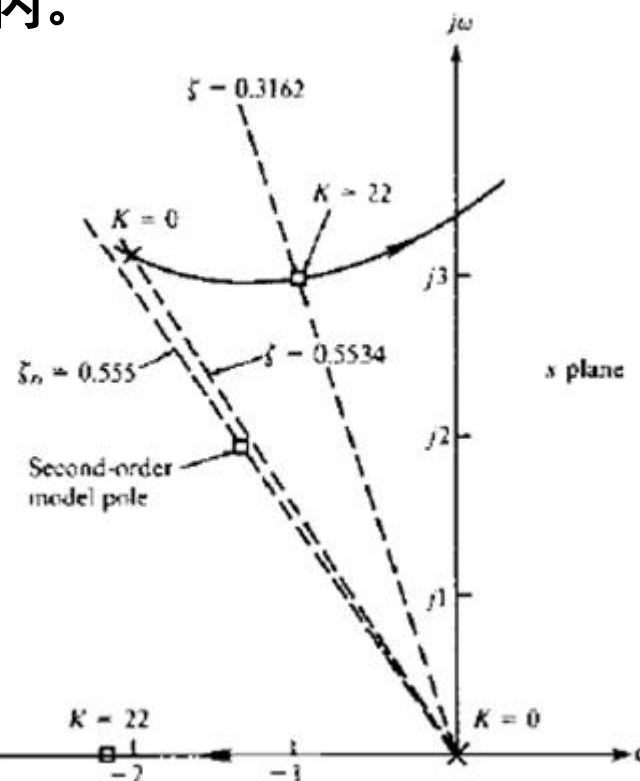
由于第三个根 p_3 对应瞬态响应 $A_3 e^{p_3 t}$ ，若该瞬态响应为负，则将降低由复数极点产生的超调，因此，可以选择较小的阻尼比 ζ ，第三个极点的作用是使得超调在要求的范围内。

为了同时满足 $K_1 > 1.5$ ，因此根轨迹上的根选择 $s_{1,2} = -1 \pm j3$ ，相应的根轨迹增益 $K_x = 22$ （使得 $K_1 = 1.528$ ），闭环传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{22}{(s + 1 - j3)(s + 1 + j3)(s + 2.2)}$$

单位阶跃输入下：

$$M_p \approx 1.123, \quad t_p \approx 1.51s, \quad t_s \approx 2.95s$$





Thanks!