資訊之芽手寫作業

第二周

李杰穎

1. 請回答以下問題：

(a)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}}=\frac{3}{1}=3$$

(b)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}=\frac{0}{1+0}=0$$

(c)

$$(1)\ \text{先證明} f(n)\in O(2^n)\Rightarrow f(n)\in O(2^{n+1})$$

$$\because f(n)\in O(2^n)$$

$$\therefore \forall k\geq 0, \lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{2^n}=k$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{2^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{2^n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^{n+1}}=k\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}k(\text{仍為常數})$$

$$\therefore f(n)\in O(2^{n+1}) \tag{1}$$

$$(2)\ \text{再證明} f(n)\in O(2^{n+1})\Rightarrow O(2^n)$$

$$\because f(n)\in O(2^{n+1})$$

$$\therefore \forall k\geq 0, \lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{2^{n+1}}=k$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{2^n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{2^n}=2k(\text{仍為常數})$$

$$\therefore f(n)\in O(2^n) \tag{2}$$

$$\therefore \text{由}(1),(2)\text{得證}$$

(d) 令 $f(n) = (n+1)!$，則：

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} n+1$$

並非收斂為常數，故 $f(n) \in O((n+1)!) \Rightarrow f(n) \in O(n!)$ 不成立。

故原命題不成立。

(e)