資訊之芽手寫作業

第二周

李杰穎

1. 請回答以下問題：

(a)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}}=\frac{3}{1}=3$$

(b)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}=\frac{0}{1+0}=0$$

(c)

$$(1)\ \text{先證明} f(n)\in O(2^n)\Rightarrow f(n)\in O(2^{n+1})$$

$$\because f(n)\in O(2^n)$$

$$\therefore \exists k\geq 0, \lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{2^n}=k$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{2^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{2^n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^{n+1}}=k\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}k(\text{仍為常數})$$

$$\therefore f(n)\in O(2^{n+1}) \tag{1}$$

$$(2)\ \text{再證明} f(n)\in O(2^{n+1})\Rightarrow O(2^n)$$

$$\because f(n)\in O(2^{n+1})$$

$$\therefore \exists k\geq 0, \lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{2^{n+1}}=k$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{2^n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{2^n}=2k(\text{仍為常數})$$

$$\therefore f(n)\in O(2^n) \tag{2}$$

$$\therefore \text{由}(1),(2)\text{得證}$$

(d) 令 $f(n) = (n+1)!$，則：

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} n+1$$

並非收斂為常數，故 $f(n) \in O((n+1)!) \Rightarrow f(n) \in O(n!)$ 不成立。

故原命題不成立。

(e) $\because f(n) \in O(n)$，我們不妨令 $f(n) = 2n$，則：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{f(n)}}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}}{2^n} = \lim_{n\to\infty} 2^n$$

並非收斂為常數，故 $2^{f(n)} \in O(2^n)$ 不成立。

故原命題不成立。

2. 考慮：

$$\begin{aligned}
&\lim_{m\to\infty} \frac{f(2^m)}{2^m \log_2 2^m} \\
&= \lim_{m\to\infty} \frac{2f(2^{m-1}) + 2^{m+1}}{m \cdot 2^m} \\
&= \lim_{m\to\infty} \frac{4 \cdot f(2^{m-2}) + 2 \cdot 2^{m+1}}{m \cdot 2^m} \\
&= \lim_{m\to\infty} \frac{2^{m-1} + (m-1) \cdot 2^{m+1}}{m \cdot 2^m} \\
&= \lim_{m\to\infty} \frac{2^{m-1}(1+4m-4)}{2 \cdot m \cdot 2^{m-1}} \\
&= \lim_{m\to\infty} \frac{4m-3}{2m} = \frac{4}{2} = 2(\text{為一常數})
\end{aligned}$$

$$\therefore \forall m \in \mathbb{N}, n = 2^m, f(n) \in O(n \log_2 n)$$

$$\because f(n) \in O(n \log_2 n) \iff f(n) \leq 3n \log_2$$

$\therefore$ 原命題成立

3. 考慮:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{n^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor^2 + \lceil \frac{n}{2} \rceil^2 + n^2}{n^2}
\end{aligned}$$

$$\because n^2 > \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil^2 > \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^2 > \cdots > x_2^2 > x_1^2$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x_1^2}{n^2} + \frac{x_2^2}{n^2} + \cdots + \frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor^2}{n^2} + \frac{\lceil \frac{n}{2} \rceil^2}{n^2} + \frac{n^2}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}} = \frac{0+0+\cdots+0+0+1}{1} = 1(\text{為一常數})$$

$$\therefore f(n) \in O(n^2)$$

$$\because f(n) \in O(n^2) \iff f(n) \leq 2n^2 - 1$$

$\therefore$ 原命題成立