확률의 의미

- 지금까지 우리는 표본집합의 부분집합인 사건에 대해 확률값이라는 숫자를 할당했다. 이 "확률값"이라는 숫자가 갖는 의미는 여러가지 해석이 있을 수 있고, 그 중에 대표적으로

1) "빈도주의"(Frequentist) 2) "베이지안"(Bayesian) 관점이다.

빈도주의적 관점의 의미 (Frequentist)

- 반복적으로 선택된 표본이 사건 A의 원소가 될 경향(propensity)을 그 사건의 확률이라고 한다.
- 예를 들어, 동전을 던져 앞면이 나오는 사건의 확률 값이 0.5 라는 것은 빈도주의 관점으로 보았을 때, 실제로 동전을 반복하여 던졌을 경우, 동전을 던진 전체 횟수에 확률값을 곱한 숫자만큼 해당 사건이 발생한다고 본다. 예를 들어, 10,000번 던지면 10,000 × 0.5 = 5000번 앞면이 나온다는것.

베이지안 관점에서 확률의미

- 베이지안 관점은 이미 발생한 사건에 대해 알고자 하는 노력이다. 위의 동전 문제에서 동전을 던진 사람이 동전을 손에 숨긴채 "앞면이 나왔다"고 주장한다고 가정하자. 이 때는 사건의 확률을 빈도주의처럼 "미래에 특정한 사건속하는 일이 발생할 가능성"이 아니라 "이미 발생한 일이 특정한 사건에 속할 가능성"이 된다. 베이지안 관점에서 확률은 "이미 발생한 일은 특정한 사건에 속한다는 가설, 명제, 혹은 주장의 신뢰도"라고도 볼수있다.

- 4개의 보기중에서 하나의 정답을 고르는 4지 선다형 객관식 문제를 풀때도, 우리는 베이지안 확률을 사용한다. 예로 나는 1번부터 4번까지 보기를 읽고, 마음속으로 다음과 같이 할당한다 며,

"1번은 답이 아니다. 2번과 3번은 그럴싸한데, 4번의 가능성은 2번 3번의 가능성의 반도안되" 라고 했으면, {1, 2, 3, 4}라는 표본집합이 있을 때, 다음과 같이 확률을 할당한 것

$$p(\{1\}) = 0$$
$$p(\{2\}) = 0.4$$
$$p(\{3\}) = 0.4$$
$$p(\{4\}) = 0.2$$

⇒ 여기서의 확률의 정의는 무언가 반복 or 빈도와는 관계가 X

⇒ $p(\{1\})$은 "정답이 1이다"라는 주장에 대한 신뢰도일뿐.

베이지안 관점에서 사건의 의미

- 따라서 베이지안 확률론의 관점에서 사건이란 "발생한 표본이 포함되어 있을 가능성이 있는 원소의 집합"이며 다른 의미로 "이 사건에 속한 원소집합 안에 발생한 표본"는 명제 혹은 주장.
- 사건의 확률은 "발생한 표본이 그 부분 집합에 있을 가능성", "어떤 가설이 진실일 가능성", "이 사건에 속한 원소 집합안에 발생한 표본이 있다"는 명제 혹은 주장의 신뢰도

사건의 발생

↳ 확률론에서 사건이 일어났다 혹은 발생했다 하는 말은 그 사건, 즉 그 원소안에 결말로 표본이 있음을 알게 되었다는 것을 말함. 다른 말로는 해당 사건이 말하고 있는 주장이 사실임을 알게되었다는 뜻으로 추가적인 정보가 들어왔음을 뜻한다.

확률의 성질

성질 1 − 공집합일 확률

− 공집합인 사건의 확률은 0 이다.

(증명)

확률의 정의로부터 사건 A와 B가 공통원소가 없다면 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$가 된다.

$B = \emptyset$ 인 경우 A와 B의 공통원소가 없으며, $A \cup \emptyset = A$ 라는 사실을 이용하면,

$$P(A \cup \emptyset) = P(A) = P(A) + P(\emptyset)$$

$$\boxed{\therefore P(\emptyset) = 0}$$

성질 2 − 여집합일 확률

−어떤 사건의 여집합인 사건의 확률은 (1− 원래사건의 확률)과 같다.

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

(증명)

확률의 정의로부터 사건 A와 사건 B의 공통원소가 없다면, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$B = A^c$ 인 경우 A와 B의 공통원소가 없다

$$P(A \cup A^c) = P(\Omega) = 1 = P(A) + P(A^c)$$

$$\boxed{\therefore P(A^c) = 1 - P(A)}$$

성질 3) 포함-배제 원리.

- 두 사건의 합집합의 확률은 각 사건의 확률을 합에서 두 사건의 교집합의 확률을 빼보고 같다.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

(증명)

$$
\begin{aligned}
P(A\cup B) &= P(A\cup(B\cap A^c)) \\
&= P(A)+P(B\cap A^c) \\
&= P(A)+P(B\cap A^c)+P(A\cap B)-P(A\cap B) \\
&= P(A)+P((B\cap A^c)\cup(A\cap B))-P(A\cap B) \\
&= P(A)+P(B)-P(A\cap B)
\end{aligned}
$$

성질 4) 전체 확률의 법칙

- 복수사건 C_i가 다음을 만족하는 사건들인 경우,

  - 서로 교집합이 없고

$$C_i\cap C_j=\phi \quad (i\neq j)$$

  - 모두 합쳤을 때 (합집합) 전체 표본공간이면

$$C_1\cup C_2\cup\cdots=\Omega$$

⇓

모든 사건 A에 대한 다음 등식이 성립한다. 즉, 사건의 A 확률은 사건 A와 사건 C_i가 동시에 발생할 사건의 확률의 합과 같다.

$$P(A)=\sum_i P(A\cap C_i)$$

(증명)

$$
\begin{aligned}
A &= A\cap\Omega \\
&= A\cap(C_1\cup C_2\cup\ldots) \\
&= (A\cap C_1)\cup(A\cap C_2)\cdots
\end{aligned}
$$

$A\cap C_i$는 모두 서로 공통 원소가 없다. 따라서 확률의 성의에 따라 다음 등식 성립.

$$P(A)=P(A\cap C_1)+P(A\cap C_2)+\cdots+P(A\cap C_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A\cap C_i)$$

결합 확률과 조건부 확률

〈범인 찾기 문제〉

- 살인 사건이 발생했다고 가정. 베이지안 확률론 관점에서 전체 용의자 목록은 바로 표본 공간이다.
- 우리가 알고 싶은 것은 전체 용의자 목록(표본 공간)에서 누가 범인(선택된 표본)인가 하는 점이다.
- 현재 표본공간은 20명이며 이중 남자가 12명, 여자가 8명이다.
- 만약 담당 형사가 범인은 남자라고 생각한다면, "범인이 남자이다"라는 주장은 확률론적 관점에서 남성인 용의자로만 이루어진 사건이 된다. 이를 사건 A라고 하자.
- 이때, 우리가 관심을 갖는 것은 "범인이 남자"라는 사건 A의 신뢰도 즉, 사건 A의 확률 P(A)이다. 아무런 추가 정보가 없으면, 모든 사람이 범인일 가능성 갖기 때문에, 범인이 남자일 확률 P(A)는 다음과 같이 전체 용의자의 수로 남자인 용의자 수를 나눈 값이다.

$$P(A) = \frac{12}{12+8} = \frac{12}{20} = 0.6$$

- 이때, 새로운 사건 B가 발생. 범인의 머리카락이 길다는 사건 B가 발생
- 이 사건 B는 확률론적으로 머리카락이 긴 사람의 목록이라는 표본공간의 새로운 부분집합(집합인)
- 그리고 사건 B가 발생했다는 것은, 이 용의자 목록에 진짜로 범인이 포함되어 있다는 뜻.
- 현재 표본공간 즉, 전체 용의자 목록에 머리 긴 사람 10명, 짧은 사람 10명이 있다. 만약 이 사건이 진실이라는 보장이 없으면, 사건 B에 대한 확률 P(B)의 신뢰도는 다음과 같다.

$$P(B) = \frac{10}{10+10} = 0.5$$

- 지금까지의 상황 Summary
  - 1) 살인 사건 발생. 총 용의자 20명.
    - 남자 12, 여자 8명
    - 머리 긴 사람 10, 짧은 사람 10
  - 2) 범인이 남자일 확률
    - 남자의 집합(A)에 범인이 속해있다는 주장의 신뢰도: $P(A) = 0.6$
  - 3) 범인의 머리가 길 확률
    - 머리가 긴 사람의 집합(B)에 범인이 속해있다는 주장의 신뢰도: $P(B) = 0.5$

결합확률과 조건부 확률

- 베이지안 확률론은 두 사건 A와 B의 관계를 알고 있다면, 사건 B가 발생하였다는 사실로부터, 기존에 알고 있던 사건 A에 대한 확률 $P(A)$를 좀더 정확한 확률로 바꿀수 있는 방법을 알려준다. 이를 위해 "결합확률"과 "조건확률"이라는 두 개념을 정의해야 한다.

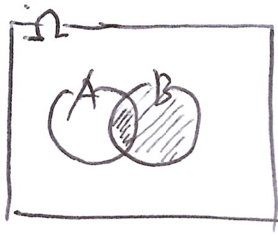
- 결합확률 (Joint Probability)

↳ 사건 A와 B가 동시에 발생할 확률. 즉, 사건 A도 진실 사건 B도 진실이므로 A와 B의 교집합의 확률을 계산하는 것과 같다.

$$P(A \cap B) \text{ or } P(A, B)$$

- 결합확률과 대비되는 개별사건 확률 $P(A)$ or $P(B)$는 => 주변확률 (Marginal probability)
- 또한, B가 사실인 경우의 사건 A에 대한 확률을 사건 B에 대한 사건 A의 조건부확률 (Conditional probability)이라고 하며 $P(A|B)$와 같이 표기

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$



↳ 조건부 확률이 위와 같이 정의된 근거는 다음과 같다.

1. 사건 B가 사실이므로 모든 가능한 표본은 사건 B에 포함되어야 한다.
   ↳ 표본공간 $\Omega \rightarrow B$가 된다.
2. 사건 A의 원소는 모두 사건 B의 원소도 되므로 사실상 $A \cap B$의 원소가 된다.
   ↳ $A \longrightarrow A \cap B$
3. 따라서, 사건 A의 확률 즉, 신뢰도는 원래의 신뢰도를 새로운 표본 공간의 신뢰도로 정규화한 값이라고 할 수 있다.

※ 조건부 확률 $P(A|B)$ - 사건 B가 발생한 경우의 사건 A의 확률
- 표본이 이벤트 B에 속한다는 새로운 사실을 알았을 때,
- 이 표본이 사건 A에 속한다는 사실의 정확성이 어떻게 변하는지 알려준다

ex) 범인찾기 문제에서, $P(A)$: 범인이 남자일 확률
$P(B)$: 범인이 머리가 길 확률
$P(A|B)$: 범인이 머리가 길다는 사실을 알게 되었을 때, 달라진 "범인이 남자일 확률"

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- 여기서 주의사항은 사건 A와 사건 B의 결합확률 $P(A \cap B)$는 기존의 사건 A나 사건 B의 확률과는 전혀 무관한 별개 정보이다. 즉, 수학적으로 계산해서 구할수 없으므로, 외부에서 주어지지 않으면 안될 것이다.

- $P(A, B)$는 여러가지 경우가 가능.

example) 12명중의 머리가 긴 남자는 3명 일수도 있고

①

	(머리가 길다) $P(B)$	(짧다) $P(B^c)$	
(남자) $P(A)$	3명	9명	12명.
(여자) $P(A^c)$	7명	1명	8명
	10명	10명	

example) 12명중에 머리긴 남자 6명.

②

	$P(B)$	$P(B^c)$	
$P(A)$	6	6	12
$P(A^c)$	4	4	8
	10	10	

- 2가지 조건의 조건부 확률 $P(A|B)$를 구해보자.

example ①의 경우

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{3/\cancel{20}}{10/\cancel{20}} = \frac{3}{10}$$

→ 이것의 의미는 원래 사건 A의 확률 $P(A)$가 0.6 즉 60%였으므로 범인이 머리가 길다는 정보로 남자가 범인일 확률은 절반으로 떨어짐.

example ②의 경우

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{6/20}{10/\cancel{20}} = \frac{6}{10}$$

- 이 경우에는 새로운 정보가 주어지던지 않았던지 상자가 범인일 확률은 변함 없다.
  이런 경우 사건 A와 사건 B는 Independent (독립)하다고 한다.

$\boxed{\text{독립}}$

4 수학적으로 사건 A와 사건 B의 결합 확률값이 다음과 같은 관계가 성립하면,
  두 사건 A와 B는 서로 독립이라고 정의한다.

$$P(A,B) = P(A)P(B)$$

— 독립인 경우 조건부 확률이 같아짐을 알 수 있다. 즉 사건 B가 발생하던, 하지 않던
  사건 A에는 영향이 없다는 것.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)\cancel{P(B)}}{\cancel{P(B)}} = P(A).$$

$\boxed{\text{원인과 결과, 근거와 추론, 가정과 조건부 결론}}$

— 조건부 확률 $P(A|B)$에서 사건 (주장/명제) B, A는 각각
  - "가정과 그 가정에 따른 조건부 결론" 또는
  - "원인과 결과" 또는
  - "근거와 추론"이 될 수 있다.

- 조건부 확률의 정의를 바꿔쓰면

$$P(A,B) = P(A|B)P(B)$$

- 이 식은 다음과 같이 볼 수 있다.
  - A, B가 모두 발생할 확률은 B라는 사건이 발생할 확률과 그 사건이 발생한 경우, 다시 A가 발생할 경우의 곱