洛伦兹群的旋量表示

任杰

首先简要介绍下本文的 motivation. 本人是凝聚态学生，之前一直将场论理解为二次量子化下的多体物理。在学习量子场论的过程中，对将不同的场归结为洛伦兹群的表示这一观点感到十分惊艳。然而感觉 Weinberg 语言过于数学化与晦涩，其他常规场论书 (Peskin 等) 几乎只是讲了个故事，从表示到场论逻辑较为跳跃。希望用较为具体的语言，整理洛伦兹群的旋量表示及各种推论。

1 无穷小洛伦兹变换

我们采用 $\eta_{\mu\nu} = diag\,(1, -1, -1, -1)$ 度规。洛伦兹矩阵是在合同变换下保持洛伦兹度规不变的 (实) 矩阵：

$$\Lambda^T \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

满足上述关系的矩阵组成一个 (连续) 矩阵群。在单位矩阵附近，我们考虑一些无穷小元素 $(\delta\omega)^{\mu}{}_{\nu}$：

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} \approx \delta^{\mu}{}_{\nu} + (\delta\omega)^{\mu}{}_{\nu}, \tag{2}$$

$$\left(\Lambda^T\right)_{\mu}{}^{\nu} \approx \delta_{\mu}{}^{\mu} + \left(\delta\omega^T\right)_{\mu}{}^{\nu}. \tag{3}$$

洛伦兹群关系要求：

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu} &= \left(\delta_{\mu}{}^{\rho} + (\delta\omega)^{\mu}{}_{\nu}\right)\eta_{\rho\sigma}\left(\delta^{\sigma}{}_{\nu} + \left(\delta\omega^T\right)_{\mu}{}^{\nu}\right) \\ &\approx \eta_{\mu\nu} + (\delta\omega)^{\mu}{}_{\nu}\eta_{\rho\sigma}\delta^{\sigma}{}_{\nu} + \delta_{\mu}{}^{\rho}\eta_{\rho\sigma}\left(\delta\omega^T\right)_{\mu}{}^{\nu} \\ &= \eta_{\mu\nu} + (\delta\omega)_{\mu\nu} + \left(\delta\omega^T\right)_{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{4}$$

因此洛伦兹群上无穷小元素的限制是反对称：$\delta\omega_{\mu\nu} = -\delta\omega_{\nu\mu}$. 这里无穷小矩阵两个下指标，为了写出通常意义下的矩阵形式，最好将其一个指标用度规提升：

$$(\delta\omega)^{\mu}{}_{\nu} = \eta^{\mu\sigma}\,(\delta\omega)_{\sigma\nu}. \tag{5}$$

而 4 维反对称实矩阵只有 6 个自由度，每个自由度的生成元矩阵为：

$$L^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; L^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; L^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

$$K^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; K^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; K^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

其中第二行 3 个矩阵由于乘上度规因子变为对称矩阵。这六个无穷小矩阵有直接的物理意义：第一行 3 个矩阵对应 3 个方向的空间转动，第二行 3 个矩阵对应 3 个方向的洛伦兹 boost。我们将三个空间转动的无穷小系数记为 $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$，三个 boost 方向无穷小系数记为 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$. 一般的洛伦兹变换可以写为一个指数形式：

$$\Lambda(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\beta}) = \exp(\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{J} + \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{K}). \tag{8}$$

2 洛伦兹代数

对于连续群，李氏定理告诉我们只要确定生成元直接的对易关系，相应连续群的局部结果就完全确定了。我们因此考虑洛伦兹群 6 个生成元的对易关系。

要确定这些对易关系，原则上我们可以将矩阵两两相乘再相减。这里直接给出结果：

$$\left[L^i, L^j\right] = \epsilon^{ijk} L^k, \tag{9}$$

$$\left[K^i, K^j\right] = -\epsilon^{ijk} L^k, \tag{10}$$

$$\left[L^i, K^j\right] = \epsilon^{ijk} K^k. \tag{11}$$

据此构造两组算符：

$$J_+^i = \frac{1}{2}\left(L^i + iK^i\right), \tag{12}$$

$$J_-^i = \frac{1}{2}\left(L^i - iK^i\right). \tag{13}$$

其中可以验证两组算符之间的对易关系为 0：

$$\begin{aligned} \left[J_+^i, J_-^j\right] &= \frac{1}{4}\left[L^i + iK^i, L^j - iK^j\right] \\ &= \frac{1}{4}\left(i\epsilon^{ijk} L^k + \epsilon^{ijk} K^k - \epsilon^{ijk} K^k - i\epsilon^{ijk} L^k\right) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{14}$$

而每组算符内部分别满足 $SU(2)$ 生成元的对易关系：

$$
\begin{aligned}
\left[J_+^i, J_+^j\right] &= \frac{1}{4}\left[L^i + iK^i, L^j + iK^j\right] \\
&= \frac{1}{4}\left(i\epsilon^{ijk}L^k - \epsilon^{ijk}K^k - \epsilon^{ijk}K^k + i\epsilon^{ijk}L^k\right) \\
&= \frac{i}{2}\epsilon^{ijk}\left(L^k + iK^k\right) \\
&= \frac{i}{2}\epsilon^{ijk}J_+^k. \qquad (15)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\left[J_-^i, J_-^j\right] &= \frac{1}{4}\left[L^i - iK^i, L^j - iK^j\right] \\
&= \frac{1}{4}\left(i\epsilon^{ijk}L^k + \epsilon^{ijk}K^k + \epsilon^{ijk}K^k + i\epsilon^{ijk}L^k\right) \\
&= \frac{i}{2}\epsilon^{ijk}\left(L^k - iK^k\right) \\
&= \frac{i}{2}\epsilon^{ijk}J_-^k. \qquad (16)
\end{aligned}
$$

因此，洛伦兹群的生成元可以被分为无关的两组满足 $SU(2)$ 代数的生成元，或者说存在李代数同构：

$$so(1,3) \approx su(2) \otimes su(2). \qquad (17)$$

利用 $su(2)$ 的全部 (不可约) 表示，我们在李代数意义下得到了洛伦兹群的全部 (不可约) 表示。我们用 (j_+, j_-) 标记每个不可约表示，对应表示的维数为 $(2j_+ + 1)(2j_- + 1)$, 我们可以列出最简单的几个表示和其物理对应：

(j_+, j_-)	维数	物理对应
$(0,0)$	1	标量场
$\left(\frac{1}{2},0\right)$	2	左手 weyl 旋量场
$\left(0,\frac{1}{2}\right)$	2	右手 Weyl 旋量场
$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$	4	4-矢量场
$\left(\frac{1}{2},0\right) \oplus \left(0,\frac{1}{2}\right)$	4	Dirac 旋量场 (可约)

下面我们着眼于每个具体的表示。

3 Weyl 旋量表示

我们首先讨论最简单的非平庸表示 $\left(\frac{1}{2},0\right)$, 即左手 Weyl 旋量场。这是一个二维表示，我们用一个具体写出表示空间的一个矢量：

$$\psi_L = \begin{pmatrix} \psi_L^1 \\ \psi_L^2 \end{pmatrix}. \qquad (18)$$

在洛伦兹变换下，此旋量场的变换为：

$$\psi_L^i \to (\Lambda_L)^i{}_j \psi_L^j. \tag{19}$$

其中 Λ_L 为一个 2×2 维矩阵，对应 $\left(\frac{1}{2},0\right)$ 表示的表示矩阵。要确定表示矩阵，我们注意到 $j_-=0$, 即第二个“自旋”为 0 ，用我们之前确定的生成元关系，有：

$$J_-^i \psi = 0,\ \forall i. \tag{20}$$

由此我们得到关于生成元的一个限制关系：

$$J_-^i = \frac{1}{2}\left(J^i - iK^i\right) = 0. \tag{21}$$

而对于另一组生成元：

$$J_+^i \psi = \frac{1}{2}\left(J^i + iK^i\right)\psi = J_-^i \psi. \tag{22}$$

此时，由于 J_-^i 满足 $su(2)$ 的对易关系，我们可以用泡利矩阵表示之 (这里我们插入 i 使得生成元幺正)：

$$iJ^i = iJ_-^i = \sigma^i; \tag{23}$$

$$iK^i = J_-^i = -i\sigma^i. \tag{24}$$

这样我们就确定了 $\left(\frac{1}{2},0\right)$ 的表示矩阵：

$$\Lambda_L = e^{\frac{1}{2}(-i\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\beta})\cdot\boldsymbol{\sigma}}. \tag{25}$$

我们看到表示矩阵像一个 $SU(2)$, 不过 boost 对应一个虚数转角。用同样的方法，我们可以得到 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 表示对应的矩阵：

$$\Lambda_R = e^{\frac{1}{2}(-i\boldsymbol{\theta}+\boldsymbol{\beta})\cdot\boldsymbol{\sigma}}. \tag{26}$$

这样,我们确定了洛伦兹群两个不等价二维不可约表示。在我们转而考虑更高维表示之前,我们先来看两个 Weyl 旋量表示的关系。

从指数矩阵的形式上看，左手右手的差别在于 boost 生成元的符号。我们可以用一个小 trick 将互换左右手表示。首先我们注意到共轭作用 σ^2 有翻转自旋的效果 (同时产生一个复共轭)：

$$\sigma^2\boldsymbol{\sigma}\sigma^2 = -\boldsymbol{\sigma}^*. \tag{27}$$

因此左右手表示存在关系：

$$\sigma^2\Lambda_L^*\sigma^2 = \Lambda_R, \tag{28}$$
$$\sigma^2\Lambda_R^*\sigma^2 = \Lambda_L. \tag{29}$$

我们发现，将左手矢量做变换：

$$\psi_L \to -i\sigma^2\psi_L^*. \tag{30}$$

变换后的矢量在洛伦兹变换下像右手旋量空间的矢量那样变化：

$$
\begin{aligned}
-i\sigma^2\psi_L^* &\rightarrow -i\sigma^2\Lambda_L^*\psi_L^* \\
&= -i\sigma^2\Lambda_L^*\sigma^2\sigma^2\psi_L^* \\
&= \Lambda_R\left(-i\sigma^2\psi_L^*\right).
\end{aligned} \tag{31}
$$

这个操作很像一个时间反演操作。因此，利用"时间反演"，我们有左右手表示的转换关系：

$$
\psi_R \approx -i\sigma^2\psi_L^*, \tag{32}
$$

$$
\psi_L \approx -i\sigma^2\psi_R^*. \tag{33}
$$

另一方面，对于一个手征的表示，以左手为例，我们可以用一个全反对称符号下降指标得到对偶矢量

$$
\psi_{L,i} = \epsilon_{ij}\psi_L^j = \left(\begin{array}{c} \psi_L^2 \\ -\psi_L^1 \end{array}\right). \tag{34}
$$

这是一个方便的记号，我们可以验证表示矢量与其对偶矢量缩并是一个洛伦兹不变量：

$$
\begin{aligned}
\psi_{L,i}\psi_L^i &= \epsilon_{ij}\psi_L^i\psi_L^j \\
&\rightarrow \epsilon_{ij}\left(\Lambda_L\right)^i{}_k\left(\Lambda_L\right)^j{}_l\psi_L^k\psi_L^l \\
&= \det\left(\Lambda_L\right)\epsilon_{kl}\psi_L^k\psi_L^l \\
&= \psi_{L,i}\psi_L^i.
\end{aligned} \tag{35}
$$

注意到 $\epsilon_{ij} = \left(i\sigma^2\right)_{ij}$, 因此这个洛伦兹不变量又可表示为：

$$
\begin{aligned}
\psi_{L,i}\psi_L^i &= i\psi_L^T\sigma^2\psi_L \\
&= \left(-i\sigma^2\psi_L^*\right)^\dagger\psi_L \\
&\approx \psi_R^\dagger\psi_L.
\end{aligned} \tag{36}
$$

4 矢量表示

现在我们来考虑 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 不可约表示。实际上，从矩阵的维数就可以看出这是这对应洛伦兹群的自身表示，因为洛伦兹群只有一个 4 维不可约表示。但我们在这里具体将这个 4-矢量写出来。

首先，$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 表示可以写成左手 Weyl 旋量与右手 Weyl 旋量表示的直积：

$$
\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2},0\right)\otimes\left(0,\frac{1}{2}\right). \tag{37}
$$

这启发我们用之前得到的二维表示来构造这个四维表示。我们可以用矢量直乘写出表示空间的矢量：

$$\psi = \psi_L \otimes \psi_R = \begin{pmatrix} \psi_L^1 \psi_R^1 \\ \psi_L^1 \psi_R^2 \\ \psi_L^2 \psi_R^1 \\ \psi_L^2 \psi_R^2 \end{pmatrix}. \tag{38}$$

同样地，表示矩阵可以写为两个矩阵直乘。表示空间中矢量变换关系写为：

$$\Lambda_{\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}\psi = \left(\Lambda_L \otimes \Lambda_R\right)\psi. \tag{39}$$

到这里，原则上我们已经具体给出了这个表示，但我们不满足于此。我们还希望直接看出 4-矢量变换来，这里我们就要用到旋量表示的“换手”trick：在直乘表达式中，我们让 ψ_R 躺下，即将直乘变为外积：

$$M = \psi_L \cdot \psi_R^T = \begin{pmatrix} \psi_L^1 \psi_R^1 & \psi_L^1 \psi_R^2 \\ \psi_L^2 \psi_R^1 & \psi_L^2 \psi_R^2 \end{pmatrix}.$$

我们看到，我们没改变 4 分量的任何一个，不过是对矢量做了个变形。我们用这个变形后矩阵承载 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 表示。其在洛伦兹变换下的变换形式现在变为：

$$M \to \Lambda_L M \Lambda_R^T. \tag{40}$$

转置的结果相当于取 $\boldsymbol{\sigma} \to \boldsymbol{\sigma}^*$. 这启发我们在插入一个 σ^2 矩阵：

$$\begin{aligned} M\sigma^2 &\to \Lambda_L M \sigma^2 \left(\sigma^2 \Lambda_R^T \sigma^2\right) \\ &= \Lambda_L \left(M\sigma^2\right) \bar{\Lambda}_R. \end{aligned} \tag{41}$$

其中：

$$\bar{\Lambda}_R = \Lambda_R = e^{\frac{1}{2}(i\boldsymbol{\theta}-\boldsymbol{\beta})\cdot\boldsymbol{\sigma}}. \tag{42}$$

而新定义的矩阵可以写为：

$$\begin{aligned} M\sigma^2 &= \psi_L \cdot \psi_R^T \sigma^2 \\ &= \psi_L \cdot \left(\sigma^2 \psi_R^*\right)^\dagger \\ &= i\psi_L \cdot \psi_L^\dagger. \end{aligned} \tag{43}$$

我们可以将矩阵 $M\sigma^2$ 参数化为：

$$M\sigma^2 = \begin{pmatrix} V^0 - V^3 & -V^1 + iV^2 \\ -V^1 - iV^2 & V^0 + V^3 \end{pmatrix}. \tag{44}$$

我们所期待的 4-矢量 V^μ 已经出现了。可以验证在洛伦兹变换下它的确像 4-矢量那样变换。要说吗这点，我们考虑一个无穷小变换：

$$\begin{aligned}
T_LMT_R &= \left(1-\frac{i}{2}\theta_i\sigma^i-\frac{1}{2}\beta_i\sigma^i\right)\left(V^0-V^i\sigma^i\right)\left(1+\frac{i}{2}\theta_i\sigma^i-\frac{1}{2}\beta_i\sigma^i\right)\\
&= V^0-V^i\sigma^i-\beta_i\sigma^iV^0+\frac{i}{2}\theta_iV^j\left[\sigma^i,\sigma^j\right]+\frac{1}{2}\beta_iV^j\left\{\sigma^i,\sigma^j\right\}\\
&= V^0-V^i\sigma^i-\beta_i\sigma^iV^0-\epsilon^{ijk}\theta_iV^j\sigma^k+\beta_iV^i\\
&= \left(V^0+\beta_iV^i\right)-\left(V^i+\beta_iV^0+\epsilon^{ijk}\theta_jV^k\right)\sigma^i.
\end{aligned} \tag{45}$$

我们可以将其与矢量无穷小洛伦兹变换比对:

$$\begin{pmatrix} 1 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3\\ \beta_1 & 1 & -\theta_3 & \theta_2\\ \beta_2 & \theta_3 & 1 & -\theta_1\\ \beta_3 & -\theta_2 & \theta_1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V^0\\ V^1\\ V^2\\ V^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} V^0+\beta_1V^1+\beta_2V^2+\beta_3V^3\\ V^1+\beta_1V^0+\theta_2V^3-\theta_3V^2\\ V^2+\beta_2V^0+\theta_3V^1-\theta_1V^3\\ V^3+\beta_3V^0+\theta_1V^2-\theta_2V^1\end{pmatrix}. \tag{46}$$

发现 V^μ 的确像 4-矢量那样变换。我们将 $\psi_L\cdot\psi_L^\dagger$ 具体乘开成矩阵形式并与参数化的矩阵比较:

$$\begin{pmatrix} \psi_L^1\psi_L^{*1} & \psi_L^1\psi_L^{*2}\\ \psi_L^2\psi_L^{*1} & \psi_L^2\psi_L^{*2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} V^0-V^3 & -V^1+iV^2\\ -V^1-iV^2 & V^0+V^3\end{pmatrix}. \tag{47}$$

可以得到:

$$V^\mu=i\psi_L^\dagger\bar{\sigma}^\mu\psi_L. \tag{48}$$

其中:

$$\bar{\sigma}^\mu:=\left(1,-\sigma^1,-\sigma^2,-\sigma^3\right). \tag{49}$$

当然，我们可以利用左右手表示的转换得到 4-矢量的另一个表达式:

$$V^\mu=i\psi_R^\dagger\sigma^\mu\psi_R. \tag{50}$$

其中:

$$\sigma^\mu:=\left(1,\sigma^1,\sigma^2,\sigma^3\right). \tag{51}$$

5 洛伦兹不变性

在讨论 Dirac (可约) 表示之前，我们来考虑目前为止我们讨论的表示对应的场。量子场论的基本原则是想办法构造满足洛伦兹不变的场拉氏量。

我们同样从最简单的情况开始，考虑左手 weyl 表示可能对应的场拉氏量。首先，对于旋量场，我们希望拉氏量含有场的一阶导数，而导数算符作用在场上有逆变矢量的变换规律，有了之前的铺垫，我们自然想到用 σ^μ 与其缩并得到洛伦兹不变的动能项:

$$i\psi_L^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_L. \tag{52}$$

这就对应了 Weyl 场拉氏量，对应零质量情形。考虑质量，我们就要在拉氏量中加入质量项，直接的想法是模仿

Klein-Gordon 方程加入类似于 $\psi_L^\dagger m\psi_L$ 的项，可惜这不是洛伦兹不变的。

幸运的是，对于旋量表示的矢量，我们已经提到过，可以用对偶矢量

$$\psi_i := \epsilon_{ij}\psi^j = \left(i\sigma^2\right)_{ij}\psi^i \tag{53}$$

缩并得到一个洛伦兹标量：

$$\psi_{Li}\psi_L^i = i\psi_L^T\sigma^2\psi_L. \tag{54}$$

因此，我们可以写下拉氏量：

$$\mathcal{L} = i\psi_L^\dagger\sigma^\mu\partial_\mu\psi_L + im\psi_L^T\sigma^2\psi_L. \tag{55}$$

到这里，我们似乎已经得到了想要的带质量的洛伦兹不变拉氏量。但这个拉氏量有一个严重的问题，即它的质量项没有 $U(1)$ 对称性，即在变换 $\psi_L \to e^{i\theta}\psi_L$ 下质量项改变。这个困难可以通过一个复对称化操作解决：

$$\begin{aligned}\mathcal{L}' &= \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}+\mathcal{L}^*\right)\\ &= i\chi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\chi + \frac{i}{2}m\left(\chi^T\sigma^2\chi - \chi^\dagger\sigma^2\chi^*\right).\end{aligned} \tag{56}$$

这里我们将 ψ_L 替换为 χ, 这个拉氏量就是 Majorana 拉氏量。Majorana 可以看作 Dirac 表示的一种等价变形。这里由于场是复的，实际上体系表示空间是 4 维的。这也启发我们写下一个 4 维表示。最直接的思路是把左右手表示放在一起：

$$\mathcal{L}_L = i\psi_L^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\psi_L + \frac{i}{2}m\left(\psi_L^T\sigma^2\psi_L - \psi_L^\dagger\sigma^2\psi_L^*\right), \tag{57}$$

$$\mathcal{L}_R = i\psi_R^\dagger\sigma^\mu\partial_\mu\psi_R + \frac{i}{2}m\left(\psi_R^T\sigma^2\psi_R - \psi_R^\dagger\sigma^2\psi_R^*\right). \tag{58}$$

在质量项上，做变换：$\psi_R \approx -i\sigma^2\psi_L^*$，$\psi_L \approx -i\sigma^2\psi_R^*$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \mathcal{L}_L + \mathcal{L}_R\\ &\approx i\psi_L^\dagger\sigma^\mu\partial_\mu\psi_L + i\psi_R^\dagger\sigma^\mu\partial_\mu\psi_R - m\left(\psi_L^\dagger\psi_R + \psi_R^\dagger\psi_L\right).\end{aligned} \tag{59}$$

并合并左右手旋量为 $\psi := (\psi_L, \psi_R)^T$:

$$\mathcal{L} = \psi^\dagger\begin{pmatrix} i\sigma^\mu\partial_\mu & -m\\ -m & i\sigma^\mu\partial_\mu\end{pmatrix}\psi. \tag{60}$$

我们就得到了 Dirac 场拉氏量。

6 Dirac 表示

现在我们知道，引入 $\left(\frac{1}{2},0\right)\oplus\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 这个可约表示但目的是描述电子拉氏量，表示空间是左右手 Weyl 旋量表示矢量直和：

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L^1 \\ \psi_L^2 \\ \psi_R^1 \\ \psi_R^2 \end{pmatrix}. \tag{61}$$

表示矩阵也就是相应两个旋量表示直和:

$$\Lambda_{Dirac} = \begin{pmatrix} \Lambda_L & 0 \\ 0 & \Lambda_R \end{pmatrix}. \tag{62}$$

我们在构造洛伦兹不变拉氏量时实际就已经得到了这个表示。这里我们可以将其写的更加洛伦兹不变些。在旋量表示一节中，我们知道了两组旋量构成的洛伦兹不变量：$\psi_R^\dagger \psi_L, \psi_L^\dagger \psi_R$，这启发我们定义矩阵：

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}. \tag{63}$$

并定义：

$$\bar{\psi} := \psi^\dagger \gamma^0. \tag{64}$$

这样洛伦兹不变量写为了紧凑形式：$\bar{\psi}\psi$. 另一方面，4-矢量表示可以写为：

$$\begin{aligned} V^\mu &= \begin{pmatrix} \psi_L^\dagger & \psi_R^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\sigma}^\mu & 0 \\ 0 & \sigma^\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \psi_L^\dagger & \psi_R^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\sigma}^\mu & 0 \\ 0 & \sigma^\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \\ &= \bar{\psi} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \psi. \end{aligned} \tag{65}$$

我们定义另外几个 gamma 矩阵：

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}. \tag{66}$$

根据我们前面的讨论，γ^μ 在洛伦兹变换下表现地像一个 4-矢量。我们在上节得到的 Dirac 拉氏量因此可以改写为：

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} \left(\gamma^\mu \partial_\mu - m \right) \psi. \tag{67}$$