

洛伦兹群的旋量表示

任杰

首先简要介绍下本文的 motivation. 本人是凝聚态学生, 之前一直将场论理解为二次量子化下的多体物理。在学习量子场论的过程中, 对将不同的场归结为洛伦兹群的表示这一观点感到十分惊艳。然而感觉 Weinberg 语言过于数学化与晦涩, 其他常规场论书 (Peskin 等) 几乎只是讲了个故事, 从表示到场论逻辑较为跳跃。希望用较为具体的语言, 整理洛伦兹群的旋量表示及各种推论。

无穷小洛伦兹变换

我们采用 $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ 度规。洛伦兹矩阵是在合同变换下保持洛伦兹度规不变的 (实) 矩阵:

$$\Lambda^T \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

满足上述关系的矩阵组成一个 (连续) 矩阵群。在单位矩阵附近, 我们考虑一些无穷小元素 $(\delta\omega)^\mu{}_\nu$:

$$\Lambda^\mu{}_\nu \approx \delta^\mu{}_\nu + (\delta\omega)^\mu{}_\nu, \quad (2)$$

$$(\Lambda^T)^\nu{}_\mu \approx \delta_\mu{}^\nu + (\delta\omega^T)^\nu{}_\mu. \quad (3)$$

洛伦兹群关系要求:

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu} &= (\delta_\mu{}^\rho + (\delta\omega)^\mu{}_\nu) \eta_{\rho\sigma} (\delta^\sigma{}_\nu + (\delta\omega^T)^\nu{}_\mu) \\ &\approx \eta_{\mu\nu} + (\delta\omega)^\mu{}_\nu \eta_{\rho\sigma} \delta^\sigma{}_\nu + \delta_\mu{}^\rho \eta_{\rho\sigma} (\delta\omega^T)^\nu{}_\mu \\ &= \eta_{\mu\nu} + (\delta\omega)_{\mu\nu} + (\delta\omega^T)_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (4)$$

因此洛伦兹群上无穷小元素的限制是反对称: $\delta\omega_{\mu\nu} = -\delta\omega_{\nu\mu}$. 这里无穷小矩阵两个下指标, 为了写出通常意义下的矩阵形式, 最好将其一个指标用度规提升:

$$(\delta\omega)^\mu{}_\nu = \eta^{\mu\sigma} (\delta\omega)_{\sigma\nu}. \quad (5)$$

而 4 维反对称实矩阵只有 6 个自由度, 每个自由度的生成元矩阵为:

$$L^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, L^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, L^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

$$K^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, K^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, K^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

其中第二行 3 个矩阵由于乘上度规因子变为对称矩阵。这六个无穷小矩阵有直接的物理意义：第一行 3 个矩阵对应 3 个方向的空间转动，第二行 3 个矩阵对应 3 个方向的洛伦兹 boost。我们将三个空间转动的无穷小系数记为 $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ ，三个 boost 方向无穷小系数记为 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ 。一般的洛伦兹变换可以写为一个指数形式：

$$\Lambda(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\beta}) = \exp(\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{J} + \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{K}). \quad (8)$$

洛伦兹代数

对于连续群，李氏定理告诉我们只要确定生成元直接的对易关系，相应连续群的局部结果就完全确定了。我们因此考虑洛伦兹群 6 个生成元的对易关系。

要确定这些对易关系，原则上我们可以将矩阵两两相乘再相减。这里直接给出结果：

$$[L^i, L^j] = \epsilon^{ijk} L^k, \quad (9)$$

$$[K^i, K^j] = -\epsilon^{ijk} L^k, \quad (10)$$

$$[L^i, K^j] = \epsilon^{ijk} K^k. \quad (11)$$

据此构造两组算符：

$$J_+^i = \frac{1}{2} (L^i + iK^i), \quad (12)$$

$$J_-^i = \frac{1}{2} (L^i - iK^i). \quad (13)$$

其中可以验证两组算符之间的对易关系为 0：

$$\begin{aligned} [J_+^i, J_-^j] &= \frac{1}{4} [L^i + iK^i, L^j - iK^j] \\ &= \frac{1}{4} (i\epsilon^{ijk} L^k + \epsilon^{ijk} K^k - \epsilon^{ijk} K^k - i\epsilon^{ijk} L^k) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

而每组算符内部分别满足 $SU(2)$ 生成元的对易关系：

$$\begin{aligned}
[J_+^i, J_+^j] &= \frac{1}{4} [L^i + iK^i, L^j + iK^j] \\
&= \frac{1}{4} (i\epsilon^{ijk} L^k - \epsilon^{ijk} K^k - \epsilon^{ijk} K^k + i\epsilon^{ijk} L^k) \\
&= \frac{i}{2} \epsilon^{ijk} (L^k + iK^k) \\
&= \frac{i}{2} \epsilon^{ijk} J_+^k.
\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
[J_-^i, J_-^j] &= \frac{1}{4} [L^i - iK^i, L^j - iK^j] \\
&= \frac{1}{4} (i\epsilon^{ijk} L^k + \epsilon^{ijk} K^k + \epsilon^{ijk} K^k + i\epsilon^{ijk} L^k) \\
&= \frac{i}{2} \epsilon^{ijk} (L^k - iK^k) \\
&= \frac{i}{2} \epsilon^{ijk} J_-^k.
\end{aligned} \tag{16}$$

因此，洛伦兹群的生成元可以被分为无关的两组满足 $SU(2)$ 代数的生成元，或者说存在李代数同构：

$$so(1, 3) \approx su(2) \otimes su(2). \tag{17}$$

利用 $su(2)$ 的全部 (不可约) 表示，我们在李代数意义下得到了洛伦兹群的全部 (不可约) 表示。我们用 (j_+, j_-) 标记每个不可约表示，对应表示的维数为 $(2j_+ + 1)(2j_- + 1)$ ，我们可以列出最简单的几个表示和其物理对应：

(j_+, j_-)	维数	物理对应
$(0, 0)$	1	标量场
$(\frac{1}{2}, 0)$	2	左手 weyl 旋量场
$(0, \frac{1}{2})$	2	右手 Weyl 旋量场
$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	4	4-矢量场
$(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$	4	Dirac 旋量场 (可约)

下面我们着眼于每个具体的表示。

Weyl 旋量表示

我们首先讨论最简单的非平庸表示 $(\frac{1}{2}, 0)$ ，即左手 Weyl 旋量场。这是一个二维表示，我们用一个具体写出表示空间的一个矢量：

$$\psi_L = \begin{pmatrix} \psi_L^1 \\ \psi_L^2 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

在洛伦兹变换下，此旋量场的变换为：

$$\psi_L^i \rightarrow (\Lambda_L)^i_j \psi_L^j. \quad (19)$$

其中 Λ_L 为一个 2×2 维矩阵，对应 $(\frac{1}{2}, 0)$ 表示的表示矩阵。要确定表示矩阵，我们注意到 $j_- = 0$ ，即第二个“自旋”为 0，用我们之前确定的生成元关系，有：

$$J_-^i \psi = 0, \quad \forall i. \quad (20)$$

由此我们得到关于生成元的一个限制关系：

$$J_-^i = \frac{1}{2} (J^i - iK^i) = 0. \quad (21)$$

而对于另一组生成元：

$$J_+^i \psi = \frac{1}{2} (J^i + iK^i) \psi = J_-^i \psi. \quad (22)$$

此时，由于 J_-^i 满足 $su(2)$ 的对易关系，我们可以用泡利矩阵表示之（这里我们插入 i 使得生成元么正）：

$$iJ_-^i = iJ_-^i = \sigma^i; \quad (23)$$

$$iK^i = J_-^i = -i\sigma^i. \quad (24)$$

这样我们就确定了 $(\frac{1}{2}, 0)$ 的表示矩阵：

$$\Lambda_L = e^{\frac{1}{2}(-i\theta - \beta) \cdot \sigma}. \quad (25)$$

我们看到表示矩阵像一个 $SU(2)$ ，不过 boost 对应一个虚数转角。用同样的方法，我们可以得到 $(0, \frac{1}{2})$ 表示对应的矩阵：

$$\Lambda_R = e^{\frac{1}{2}(-i\theta + \beta) \cdot \sigma}. \quad (26)$$

这样，我们确定了洛伦兹群两个不等价二维不可约表示。在我们转而考虑更高维表示之前，我们先来看两个 Weyl 旋量表示的关系。

从指数矩阵的形式上看，左手右手的差别在于 boost 生成元的符号。我们可以用一个小 trick 将互换左右手表示。首先我们注意到共轭作用 σ^2 有翻转自旋的效果（同时产生一个复共轭）：

$$\sigma^2 \sigma \sigma^2 = -\sigma^*. \quad (27)$$

因此左右手表示存在关系：

$$\sigma^2 \Lambda_L^* \sigma^2 = \Lambda_R, \quad (28)$$

$$\sigma^2 \Lambda_R^* \sigma^2 = \Lambda_L. \quad (29)$$

我们发现，将左手矢量做变换：

$$\psi_L \rightarrow -i\sigma^2 \psi_L^*. \quad (30)$$

变换后的矢量在洛伦兹变换下像右手旋量空间的矢量那样变化：

$$\begin{aligned}
 -i\sigma^2\psi_L^* &\rightarrow -i\sigma^2\Lambda_L^*\psi_L^* \\
 &= -i\sigma^2\Lambda_L^*\sigma^2\psi_L^* \\
 &= \Lambda_R(-i\sigma^2\psi_L^*).
 \end{aligned} \tag{31}$$

这个操作很像一个时间反演操作。因此，利用“时间反演”，我们有左右手表示的转换关系：

$$\psi_R \simeq -i\sigma^2\psi_L^*, \tag{32}$$

$$\psi_L \simeq -i\sigma^2\psi_R^*. \tag{33}$$

另一方面，对于一个手征的表示，以左手为例，我们可以用一个全反对称符号下降指标得到对偶矢量

$$\psi_{L,i} = \epsilon_{ij}\psi_L^j = \begin{pmatrix} \psi_L^2 \\ -\psi_L^1 \end{pmatrix}. \tag{34}$$

这是一个方便的记号，我们可以验证表示矢量与其对偶矢量缩并是一个洛伦兹不变量：

$$\begin{aligned}
 \psi_{L,i}\psi_L^i &= \epsilon_{ij}\psi_L^i\psi_L^j \\
 &\rightarrow \epsilon_{ij}(\Lambda_L)^i{}_k(\Lambda_L)^j{}_l\psi_L^k\psi_L^l \\
 &= \det(\Lambda_L)\epsilon_{kl}\psi_L^k\psi_L^l \\
 &= \psi_{L,i}\psi_L^i.
 \end{aligned} \tag{35}$$

注意到 $\epsilon_{ij} = (i\sigma^2)_{ij}$ ，因此这个洛伦兹不变量又可表示为：

$$\begin{aligned}
 \psi_{L,i}\psi_L^i &= i\psi_L^T\sigma^2\psi_L \\
 &= (-i\sigma^2\psi_L^*)^\dagger\psi_L \\
 &\simeq \psi_R^\dagger\psi_L.
 \end{aligned} \tag{36}$$

矢量表示

现在我们来考虑 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 不可约表示。实际上，从矩阵的维数就可以看出这是这对应洛伦兹群的自身表示，因为洛伦兹群只有一个 4 维不可约表示。但我们在具体将这个 4-矢量写出来。

首先， $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 表示可以写成左手 Weyl 旋量与右手 Weyl 旋量表示的直积：

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 0\right) \otimes \left(0, \frac{1}{2}\right). \tag{37}$$

这启发我们用之前得到的二维表示来构造这个四维表示。我们可以用矢量直乘写出表示空间的矢量：

$$\psi = \psi_L \otimes \psi_R = \begin{pmatrix} \psi_L^1 \psi_R^1 \\ \psi_L^1 \psi_R^2 \\ \psi_L^2 \psi_R^1 \\ \psi_L^2 \psi_R^2 \end{pmatrix}. \quad (38)$$

同样地，表示矩阵可以写为两个矩阵直乘。表示空间中矢量变换关系写为：

$$\Lambda_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} \psi = (\Lambda_L \otimes \Lambda_R) \psi. \quad (39)$$

到这里，原则上我们已经具体给出了这个表示，但我们不满足于此。我们还希望直接看出 4-矢量变换来，这里我们就要用到旋量表示的“换手” trick：在直乘表达式中，我们让 ψ_R 躺下，即将直乘变为外积：

$$M = \psi_L \cdot \psi_R^T = \begin{pmatrix} \psi_L^1 \psi_R^1 & \psi_L^1 \psi_R^2 \\ \psi_L^2 \psi_R^1 & \psi_L^2 \psi_R^2 \end{pmatrix}.$$

我们看到，我们没改变 4 分量的任何一个，不过是对矢量做了个变形。我们用这个变形后矩阵承载 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 表示。其在洛伦兹变换下的变换形式现在变为：

$$M \rightarrow \Lambda_L M \Lambda_R^T. \quad (40)$$

转置的结果相当于取 $\sigma \rightarrow \sigma^*$ 。这启发我们在插入一个 σ^2 矩阵：

$$\begin{aligned} M \sigma^2 &\rightarrow \Lambda_L M \sigma^2 (\sigma^2 \Lambda_R^T \sigma^2) \\ &= \Lambda_L (M \sigma^2) \bar{\Lambda}_R. \end{aligned} \quad (41)$$

其中：

$$\bar{\Lambda}_R = \Lambda_R = e^{\frac{1}{2}(i\theta - \beta) \cdot \sigma}. \quad (42)$$

而新定义的矩阵可以写为：

$$\begin{aligned} M \sigma^2 &= \psi_L \cdot \psi_R^T \sigma^2 \\ &= \psi_L \cdot (\sigma^2 \psi_R^*)^\dagger \\ &= i \psi_L \cdot \psi_L^\dagger. \end{aligned} \quad (43)$$

我们可以将矩阵 $M \sigma^2$ 参数化为：

$$M \sigma^2 = \begin{pmatrix} V^0 - V^3 & -V^1 + iV^2 \\ -V^1 - iV^2 & V^0 + V^3 \end{pmatrix}. \quad (44)$$

我们所期待的 4-矢量 V^μ 已经出现了。可以验证在洛伦兹变换下它的确像 4-矢量那样变换。要说吗这点，我们考虑一个无穷小变换：

$$\begin{aligned}
T_L M T_R &= \left(1 - \frac{i}{2}\theta_i \sigma^i - \frac{1}{2}\beta_i \sigma^i\right) (V^0 - V^i \sigma^i) \left(1 + \frac{i}{2}\theta_i \sigma^i - \frac{1}{2}\beta_i \sigma^i\right) \\
&= V^0 - V^i \sigma^i - \beta_i \sigma^i V^0 + \frac{i}{2}\theta_i V^j [\sigma^i, \sigma^j] + \frac{1}{2}\beta_i V^j \{\sigma^i, \sigma^j\} \\
&= V^0 - V^i \sigma^i - \beta_i \sigma^i V^0 - \epsilon^{ijk} \theta_i V^j \sigma^k + \beta_i V^i \\
&= (V^0 + \beta_i V^i) - (V^i + \beta_i V^0 + \epsilon^{ijk} \theta_j V^k) \sigma^i.
\end{aligned} \tag{45}$$

我们可以将其与矢量无穷小洛伦兹变换比对：

$$\begin{pmatrix} 1 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \beta_1 & 1 & -\theta_3 & \theta_2 \\ \beta_2 & \theta_3 & 1 & -\theta_1 \\ \beta_3 & -\theta_2 & \theta_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V^0 \\ V^1 \\ V^2 \\ V^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V^0 + \beta_1 V^1 + \beta_2 V^2 + \beta_3 V^3 \\ V^1 + \beta_1 V^0 + \theta_2 V^3 - \theta_3 V^2 \\ V^2 + \beta_2 V^0 + \theta_3 V^1 - \theta_1 V^3 \\ V^3 + \beta_3 V^0 + \theta_1 V^2 - \theta_2 V^1 \end{pmatrix}. \tag{46}$$

发现 V^μ 的确像 4-矢量那样变换。我们将 $\psi_L \cdot \psi_L^\dagger$ 具体乘开成矩阵形式并与参数化的矩阵比较：

$$\begin{pmatrix} \psi_L^1 \psi_L^{*1} & \psi_L^1 \psi_L^{*2} \\ \psi_L^2 \psi_L^{*1} & \psi_L^2 \psi_L^{*2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V^0 - V^3 & -V^1 + iV^2 \\ -V^1 - iV^2 & V^0 + V^3 \end{pmatrix}. \tag{47}$$

可以得到：

$$V^\mu = i\psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \psi_L. \tag{48}$$

其中：

$$\bar{\sigma}^\mu := (1, -\sigma^1, -\sigma^2, -\sigma^3). \tag{49}$$

当然，我们可以利用左右手表示的转换得到 4-矢量的另一个表达式：

$$V^\mu = i\psi_R^\dagger \sigma^\mu \psi_R. \tag{50}$$

其中：

$$\sigma^\mu := (1, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3). \tag{51}$$

洛伦兹不变性

在讨论 Dirac (可约) 表示之前，我们来考虑目前为止我们讨论的表示对应的场。量子场论的基本原则是想办法构造满足洛伦兹不变的场拉氏量。

我们同样从最简单的情况开始，考虑左手 weyl 表示可能对应的场拉氏量。首先，对于旋量场，我们希望拉氏量含有场的一阶导数，而导数算符作用在场上有逆变矢量的变换规律，有了之前的铺垫，我们自然想到用 σ^μ 与其缩并得到洛伦兹不变的动能项：

$$i\psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L. \tag{52}$$

这就对应了 Weyl 场拉氏量，对应零质量情形。考虑质量，我们就要在拉氏量中加入质量项，直接的想法是模仿

Klein-Gordon 方程加入类似于 $\psi_L^\dagger m \psi_L$ 的项，可惜这不是洛伦兹不变的。

幸运的是，对于旋量表示的矢量，我们已经提到过，可以用对偶矢量

$$\psi_i := \epsilon_{ij} \psi^j = (i\sigma^2)_{ij} \psi^j \quad (53)$$

缩并得到一个洛伦兹标量：

$$\psi_L^\dagger \psi_L = i \psi_L^T \sigma^2 \psi_L. \quad (54)$$

因此，我们可以写下拉氏量：

$$\mathcal{L} = i \psi_L^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi_L + i m \psi_L^T \sigma^2 \psi_L. \quad (55)$$

到这里，我们似乎已经得到了想要的带质量的洛伦兹不变拉氏量。但这个拉氏量有一个严重的问题，即它的质量项没有 $U(1)$ 对称性，即在变换 $\psi_L \rightarrow e^{i\theta} \psi_L$ 下质量项改变。这个困难可以通过一个复对称化操作解决：

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' &= \frac{1}{2} (\mathcal{L} + \mathcal{L}^*) \\ &= i \chi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \chi + \frac{i}{2} m (\chi^T \sigma^2 \chi - \chi^\dagger \sigma^2 \chi^*). \end{aligned} \quad (56)$$

这里我们将 ψ_L 替换为 χ ，这个拉氏量就是 Majorana 拉氏量。Majorana 可以看作 Dirac 表示的一种等价变形。这里由于场是复的，实际上体系表示空间是 4 维的。这也启发我们写下一个 4 维表示。最直接的思路是把左右手表示放在一起：

$$\mathcal{L}_L = i \psi_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L + \frac{i}{2} m (\psi_L^T \sigma^2 \psi_L - \psi_L^\dagger \sigma^2 \psi_L^*), \quad (57)$$

$$\mathcal{L}_R = i \psi_R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi_R + \frac{i}{2} m (\psi_R^T \sigma^2 \psi_R - \psi_R^\dagger \sigma^2 \psi_R^*). \quad (58)$$

在质量项上，做变换： $\psi_R \rightarrow -i\sigma^2 \psi_L^*$, $\psi_L \rightarrow -i\sigma^2 \psi_R^*$ ：

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_L + \mathcal{L}_R \\ &\approx i \psi_L^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi_L + i \psi_R^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu \psi_R - m (\psi_L^\dagger \psi_R + \psi_R^\dagger \psi_L). \end{aligned} \quad (59)$$

并合并左右手旋量为 $\psi := (\psi_L, \psi_R)^T$ ：

$$\mathcal{L} = \psi^\dagger \begin{pmatrix} i\sigma^\mu \partial_\mu & -m \\ -m & i\sigma^\mu \partial_\mu \end{pmatrix} \psi. \quad (60)$$

我们就得到了 Dirac 场拉氏量。

Dirac 表示

现在我们知道，引入 $(\frac{1}{2}, 0) \oplus (0, \frac{1}{2})$ 这个可约表示的目的是描述电子拉氏量，表示空间是左右手 Weyl 旋量表示矢量直和：

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L^1 \\ \psi_L^2 \\ \psi_R^1 \\ \psi_R^2 \end{pmatrix}. \quad (61)$$

表示矩阵也就是相应两个旋量表示直和：

$$\Lambda_{Dirac} = \begin{pmatrix} \Lambda_L & 0 \\ 0 & \Lambda_R \end{pmatrix}. \quad (62)$$

我们在构造洛伦兹不变拉氏量时实际就已经得到了这个表示。这里我们可以将其写的更加洛伦兹不变些。在旋量表示一节中，我们知道了两组旋量构成的洛伦兹不变量： $\psi_R^\dagger \psi_L, \psi_L^\dagger \psi_R$ ，这启发我们定义矩阵：

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (63)$$

并定义：

$$\bar{\psi} := \psi^\dagger \gamma^0. \quad (64)$$

这样洛伦兹不变量写为了紧凑形式： $\bar{\psi}\psi$ 。另一方面，4-矢量表示可以写为：

$$\begin{aligned} V^\mu &= \begin{pmatrix} \psi_L^\dagger & \psi_R^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\sigma}^\mu & 0 \\ 0 & \sigma^\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \psi_L^\dagger & \psi_R^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\sigma}^\mu & 0 \\ 0 & \sigma^\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \\ &= \bar{\psi} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \psi. \end{aligned} \quad (65)$$

我们定义另外几个 gamma 矩阵：

$$\gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}. \quad (66)$$

根据我们前面的讨论， γ^μ 在洛伦兹变换下表现地像一个 4-矢量。我们在上节得到的 Dirac 拉氏量因此可以改写为：

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi. \quad (67)$$