

群同调与上同调简介

任杰

2020 年 6 月 25 日

本文将给出群同调与上同调的基本定义，并计算几个最简单的例子，希望给群同调与上同调一个直观的认识。

1 Free resolution

我们先给出形式再做说明。Free resolution 是一个正合序列 (exact sequence):

$$\cdots \rightarrow F_2 \xrightarrow{\partial_2} F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\partial_0} \mathcal{M} \xrightarrow{0} 0 \quad (1)$$

其中 \mathcal{M} 为 G -module, 定义为一个阿贝尔群, 并且有群作用:

$$m \in \mathcal{M} \Rightarrow g \cdot m \in \mathcal{M}, \forall g \in G. \quad (2)$$

正合序列意味着

$$\ker(\partial_i) = \text{imag}(\partial_{i+1}). \quad (3)$$

设 \mathcal{M} 由一组基底 $\{m_1, m_2, \dots, m_k\}$ 生成 (但不一定是自由生成), 要使得序列正合, 可定义一个 R -module F_1 :

$$F_0 = \mathcal{R}^k = \mathcal{R}e_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{R}e_k \quad (4)$$

其中 \mathcal{R} 为一个 group-ring:

$$\mathcal{R} = \mathbb{Z}[G] = \sum_{g \in G} c_g \cdot g, \quad c_g \in \mathbb{Z}. \quad (5)$$

此时 F_0 由 $\{e_1, \dots, e_k\}$ 自由生成, 其中同态映射 ∂_0 效果为:

$$e_i \mapsto m_i \quad (6)$$

$$re_i \mapsto r \cdot m_i \quad (7)$$

设该映射的核 $\ker(\partial_0)$ 一组基为 $\{b_1, \dots, b_l\}$, 同样 $\ker(\partial_0)$ 不一定由这组基自由生成, 但同样可以构造

$$F_1 = \mathcal{R}^l = \mathcal{R}c_1 \oplus \dots \oplus \mathcal{R}c_l \quad (8)$$

而 $\partial_1 : c_i \mapsto b_i$, 以此类推。Free resolution 就是这样一个将 G-module 写开成一个自由群正合序列的过程。最终我们只保留阶数不小于 0 的部分:

$$F_* : \dots \xrightarrow{\partial_3} F_2 \xrightarrow{\partial_2} F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \quad (9)$$

注意 Free resolution 的选取不唯一, 但可以证明不同的选取只相差一个链同伦, 不会影响后面的结果。

例: bar resolution

Bar resolution 是一个一般的 free resolution 构造方法。考虑 $\mathcal{M} = \mathbb{Z}$, G 在 module \mathcal{M} 上作用平凡: $g \cdot 1 = 1$,

$$\dots \rightarrow F_2 \xrightarrow{\partial_2} F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\partial_0} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} 0 \quad (10)$$

此时各阶 R-module 有一组简单基底

$$F_0 = \mathcal{R}[\] \quad (11)$$

$$[\] \xrightarrow{\partial_0} 1 \quad (12)$$

此时 $\ker \partial_0 = \text{span} \{g[\] - [\], \forall g \in G\}$, 因此再定义

$$F_1 = \bigoplus_{g \in G} \mathcal{R}[g] \quad (13)$$

$$[g] \xrightarrow{\partial_1} g[\] - [\] \quad (14)$$

可以验证此时 $\ker \partial_1 = \text{span} \{g[h] - [gh] + [g], \forall g, h \in G\}$, 再定义

$$F_2 = \bigoplus_{g, h \in G} \mathcal{R}[g|h] \quad (15)$$

$$[g|h] \xrightarrow{\partial_2} g[h] - [gh] + [g] \quad (16)$$

这个过程可以一直做下去, 这组基底一般形式为

$$[g_1|g_2|\dots|g_n] \xrightarrow{\partial_n} g_1[g_2|\dots|g_n] - [g_1g_2|g_3|\dots|g_n] + [g_1|g_2g_3|\dots|g_n] + \dots + [g_1|g_2|\dots|g_{n-1}] \quad (17)$$

注意到

$$e[\] - [\] = 0 \quad (18)$$

即 $e[\] - [\]$ 实际上不在 $\ker \partial_1$ 中。以此类推, 我们可以丢掉 bar resolution 中所有形如 $[g_1] \cdots [e] \cdots [g_n]$ 的基底。以上构造是一般的。但这个基底往往有很多冗余, 因此具体计算几乎不会使用这组基底。

2 群同调

要定义群的同调, 还需要一步 co-invariant 操作

$$F_i \mapsto F_i / (m = g \cdot m) \quad (19)$$

对于 free module, 模掉这个等价关系相当于把系数 \mathcal{R} 换为 \mathbb{Z} , 对于上述的 bar resolution, co-invariant 操作后的链序列为:

$$\mathcal{F}_*: \cdots \rightarrow \bigoplus_{g, h \in G} \mathbb{Z}[g|h] \xrightarrow{\partial_2} \bigoplus_{g \in G} \mathbb{Z}[g] \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}[\] \xrightarrow{\partial_0} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} 0 \quad (20)$$

群 G 的**同调群**定义为序列 \mathcal{F}_* 的同调群

$$H_n(G, \mathbb{Z}) \equiv H_n(\mathcal{F}_*) \quad (21)$$

例: $G = \mathbb{Z}_2$:

对于这个简单的群, 可以直接使用 bar resolution 计算群同调。此时 $G = \{e, \tau\}, \tau^2 = 1$, 各阶 \mathbb{Z} module 都只有一个基底 $[\tau] \cdots [\tau]$:

$$\cdots \rightarrow \mathbb{Z}[\tau|\tau] \xrightarrow{\partial_2} \mathbb{Z}[\tau] \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}[\] \xrightarrow{\partial_0} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} 0 \quad (22)$$

各阶映射对应基变换为:

$$[\] \mapsto 1 \quad (23)$$

$$[\tau] \mapsto [\] - [\] = 0 \quad (24)$$

$$[\tau|\tau] \mapsto [\tau] - [e] + [\tau] = 2[\tau] \quad (25)$$

其一般形式为:

$$[\tau] \cdots [\tau]_n \mapsto \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n = 1 \pmod{2} \\ 2[\tau] \cdots [\tau]_{n-1} & n = 0 \pmod{2} \end{cases} \quad (26)$$

因此经过 co-invariant 操作后的序列为：

$$\mathcal{F}_* : \cdots \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \quad (27)$$

读出 \mathbb{Z}_2 群的同调群为

$$H_n(\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0 \\ \mathbb{Z}_2 & n = 1 \pmod{2} \\ 0 & n = 0 \pmod{2} \end{cases} \quad (28)$$

3 群上同调

群上同调定义是类似的，通过对偶作用：

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{F}_* : & \cdots & & F_2 & \xrightarrow{\partial_2} & F_1 & \xrightarrow{\partial_1} & F_0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}^* : & \cdots & \longleftarrow & \text{hom}(F_2, \mathcal{M}) & \xleftarrow{d_1} & \text{hom}(F_1, \mathcal{M}) & \xleftarrow{d_0} & \text{hom}(F_0, \mathcal{M}) \end{array} \quad (29)$$

群上同调定义为：

$$H^n(G, \mathcal{M}) \equiv H^n(\mathcal{F}^*) \quad (30)$$

注意群上同调依赖 G-module 的选取， \mathcal{M} 也被称做群上同调的系数 (group cohomology with coefficient)。对于自由群而言，其对偶空间为：

$$\text{hom}(\mathbb{Z}^k, \mathcal{M}) = \mathcal{M}^k. \quad (31)$$

而上边缘算子 d_i 和下边缘算子 ∂_{i+1} 是分别对应的：

$$\langle d_i C^i, C_{i+1} \rangle = \langle C^i, \partial_{i+1} C_{i+1} \rangle \quad (32)$$

例 1： $H^n(\mathbb{Z}_k, \mathbb{Z})$:

这里 \mathbb{Z} 是群 \mathbb{Z}_k 平凡作用的 module. 对循环群，由于只有一个生成元，此时计算可以大大简化。循环群的 group-ring 为：

$$\mathcal{R} = \mathbb{Z}[G] = \mathbb{Z}[t] / (t^k - 1) \quad (33)$$

其中等价关系 $t^k - 1 = 0$ 可分解为：

$$t^k - 1 = (t - 1)(t^{k-1} + t^{k-2} + \cdots + 1) = 0 \quad (34)$$

构造 F_0 与 ∂_0 :

$$\mathcal{R}e_0 \rightarrow \mathbb{Z} \quad (35)$$

$$e_0 \mapsto 1 \quad (36)$$

注意到此时

$$\ker \partial_0 = \text{span} \{ (t-1)e_0 \} \quad (37)$$

根据等价关系的分解, 我们可以继续构造只包含一个基底的 F_1 与 ∂_1 :

$$\mathcal{R}e_1 \rightarrow \mathcal{R}e_1 \quad (38)$$

$$e_1 \mapsto (t-1)e_0 \quad (39)$$

此时

$$\ker \partial_1 = \text{span} \{ Ne_1 \}, \quad N = t^{k-1} + t^{k-2} + \dots + 1 \quad (40)$$

更高阶的 F_i 可按此方法周期构造, 最终经过 co-invariant 操作后的序列为:

$$\mathcal{F}_* : \dots \xrightarrow{t-1} \mathcal{R} \xrightarrow{N} \mathcal{R} \xrightarrow{t-1} \mathcal{R} \xrightarrow{1} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} 0 \quad (41)$$

对偶作用后:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{F}_* : & \rightarrow & \mathcal{R} & \xrightarrow{t-1} & \mathcal{R} & \xrightarrow{N} & \mathcal{R} & \xrightarrow{t-1} & \mathcal{R} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}^* : & \leftarrow & \mathbb{Z} & \xleftarrow{0} & \mathbb{Z} & \xleftarrow{k} & \mathbb{Z} & \xleftarrow{0} & \mathbb{Z} \end{array} \quad (42)$$

因为群在 \mathbb{Z} 上作用是平凡的, $t-1 \mapsto 0, N \mapsto k$,

$$H^n(\mathbb{Z}_k, \mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0 \\ 0 & n = 1 \pmod{2} \\ \mathbb{Z}_k & n = 0 \pmod{2} \end{cases} \quad (43)$$

例 2: $H^n(\mathbb{Z}_k, U(1))$:

这里 \mathbb{Z}_k 在 $U(1)$ 上作用也是平凡的。我们希望群乘是加法, 因此将 $U(1)$ 写作 \mathbb{R}/\mathbb{Z} :

$$H^n(\mathbb{Z}_k, U(1)) \approx H^n(\mathbb{Z}_k, \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \quad (44)$$

这样我们只需将例 1 的结果稍加修改得到:

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{F}_* : & \rightarrow & \mathcal{R} & \xrightarrow{t-1} & \mathcal{R} & \xrightarrow{N} & \mathcal{R} & \xrightarrow{t-1} & \mathcal{R} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{F}^* : & \leftarrow & \mathbb{R}/\mathbb{Z} & \xleftarrow{0} & \mathbb{R}/\mathbb{Z} & \xleftarrow{k} & \mathbb{R}/\mathbb{Z} & \xleftarrow{0} & \mathbb{R}/\mathbb{Z}
\end{array} \tag{45}$$

这时和整数情况稍有不同，简单计算得到上同调群为：

$$H^n(\mathbb{Z}_k, U(1)) = \begin{cases} \mathbb{R}/\mathbb{Z} = U(1) & n = 0 \\ \mathbb{Z}_k & n = 1 \pmod{2} \\ 0 & n = 0 \pmod{2} \end{cases} \tag{46}$$

例 3: $H^n(\mathbb{Z}_k \times \mathbb{Z}_T, U_T(1))$:

其中 $\mathbb{Z}_T = \{e, \tau\}$ 是时间反演算符，在 module $U_T(1)$ 上的作用为：

$$e \cdot 1 = 1 \tag{47}$$

$$\tau \cdot 1 = -1 \tag{48}$$

我们可以将 $\mathbb{Z}_k \times \mathbb{Z}_T$ 写作 \mathbb{Z}_{2k} ,

$$H^n(\mathbb{Z}_k \times \mathbb{Z}_T, U_T(1)) \approx H^n(\mathbb{Z}_{2k}, \mathbb{R}/\mathbb{Z}) \tag{49}$$

此时群的唯一生成元为 τ , τ 在 $U_T(1)$ 上作用将单位元取逆。因此 $t-1 \mapsto -1, N \mapsto 0$,

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{F}_* : & \rightarrow & \mathcal{R} & \xrightarrow{t-1} & \mathcal{R} & \xrightarrow{N} & \mathcal{R} & \xrightarrow{t-1} & \mathcal{R} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{F}^* : & \leftarrow & \mathbb{R}/\mathbb{Z} & \xleftarrow{-2} & \mathbb{R}/\mathbb{Z} & \xleftarrow{0} & \mathbb{R}/\mathbb{Z} & \xleftarrow{-2} & \mathbb{R}/\mathbb{Z}
\end{array} \tag{50}$$

稍加计算得到：

$$H^n(\mathbb{Z}_k \times \mathbb{Z}_T, U_T(1)) = \begin{cases} 0 & n = 1 \pmod{2} \\ \mathbb{Z}_2 & n = 0 \pmod{2} \end{cases} \tag{51}$$

4 Remark

以上的例子可以展示出群上同调计算的基本流程。但实际上对于多个生成元的群，很难像循环群那样轻易地构造出简单的 free resolution，这时群上同调计算困难的地方。