

# Jordan-Wigner 变换

任杰

## 自旋与费米子算符的联系

### 单粒子情形

单粒子费米子系统是一个简单两能级系统，只有占据与非占据两个状态。分别用  $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$  表示。对于费米子体系，产生湮灭算符为：

$$\begin{cases} c|1\rangle = |0\rangle \\ c|0\rangle = 0 \end{cases}, \begin{cases} c^\dagger|1\rangle = 0 \\ c^\dagger|0\rangle = |1\rangle \end{cases}. \quad (1)$$

这样，算符的矩阵表示可以写作：

$$c = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma^-, \quad (2)$$

$$c^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \sigma^+. \quad (3)$$

可以看出费米子产生湮灭算符和自旋系统中的泡利升降算符相同。在单粒子希尔伯特空间中，费米子和泡利算符可以互相转化。

### 多粒子情形

一般的，量子多体算符/矢量可以看作一些列单体算符/矢量的张量积。如对于一维自旋链，我们可以用单体基矢  $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$  张成整个多体系统的基矢  $|\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N\rangle$ ：

$$|\psi\rangle = \sum_{\{\sigma_i\}} \psi[\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N] |\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N\rangle, \quad (4)$$

$$|\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_N\rangle = \otimes_{i=1}^N |\sigma_i^z\rangle \quad (5)$$

类似的，多体算符也可以用单体算符张量积表示，如

$$\sigma_i^+ = (\otimes_{j=1}^{i-1} \mathbb{I}_j) \otimes \sigma^+ \otimes (\otimes_{j=i+1}^N \mathbb{I}_j) \quad (6)$$

这样，对于自旋系统，我们可以用矢量和矩阵直积的方法，将多体问题化为一个  $2^N$  维线性代数问题。现在回头看费米子系统，类比自旋链，我们想直接通过直积得到费米子的多体产生湮灭算符表示：

$$c_i = (\otimes_{j=1}^{i-1} \mathbb{I}_j) \otimes c \otimes (\otimes_{j=i+1}^N \mathbb{I}_j), \quad (7)$$

$$c_i^\dagger = (\otimes_{j=1}^{i-1} \mathbb{I}_j) \otimes c^\dagger \otimes (\otimes_{j=i+1}^N \mathbb{I}_j) \quad (8)$$

需要注意的是，多粒子体系中，由于对易关系的要求，这样的直积表示是错误的。费米子要求的对易关系为：

$$\{c_i, c_j^\dagger\} = \delta_{ij}, \{c_i, c_j\} = 0. \quad (9)$$

可以验证，上述直积表示不满足  $i \neq j$  时的对易关系。事实上  $i \neq j$  时的反对易关系蕴含着费米子算符是一个高度非局域算符，而算符的直积表示只适用于局域的算符。举例来说，对一个两费米子体系：

$$c_2^\dagger |0, 0\rangle = |0, 1\rangle, \quad (10)$$

$$c_2^\dagger |1, 0\rangle = c_2^\dagger c_1^\dagger |0, 0\rangle = -c_1^\dagger c_2^\dagger |0, 0\rangle = -|1, 1\rangle. \quad (11)$$

在 1 处的费米子占据状态会改变作用于 2 处的费米子算符的结果。为了得到正确的对易关系，我们引入一非局域链算符

$$K_i = \otimes_{j=1}^{i-1} (-\sigma_j^z) = \otimes_{j=1}^{i-1} (1 - 2c_j^\dagger c_j) \quad (12)$$

从而将费米子算符写为：

$$c_i = K_i \otimes c \otimes (\otimes_{j=i+1}^N \mathbb{I}_j), \quad (13)$$

$$c_i^\dagger = K_i \otimes c^\dagger \otimes (\otimes_{j=i+1}^N \mathbb{I}_j). \quad (14)$$

相当与在原来的基础上引入了一条从 1 到  $i$  的链，这条链保证了费米子多体算符的对易性。这也自然引出了自旋算符与费米子算符的变换关系。

## Jordan-Wigner 变换

Jordan-Wigner 变换是自旋算符与费米子算符之间的转换，可以将一些自旋问题转化为费米子问题。从之前对费米子的讨论中，我们实际上已经得到了 Jordan-Wigner 变换公式：

$$\begin{cases} \sigma_i^+ &= K_i c_i^\dagger \\ \sigma_i^- &= K_i c_i \end{cases}, \quad (15)$$

$$\begin{cases} \sigma_i^x &= K_i (c_i + c_i^\dagger) \\ \sigma_i^y &= iK_i (c_i - c_i^\dagger) \\ \sigma_i^z &= 2c_i^\dagger c_i - 1 \end{cases} \quad (16)$$

$$K_i = \prod_{j<i} (-\sigma_j^z) = \prod_{j<i} (1 - 2c_j^\dagger c_j) \quad (17)$$

## 例子

下面我们用 Jordan-Wigner 变换处理一个经典自旋模型——横场伊辛模型。该模型哈密顿量为：

$$\hat{H} = \sum_i \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + h \sigma_i^z. \quad (18)$$

经过 Jordan-Wigner 变换后:

$$\sigma_i^x \sigma_{i+1}^x = -\left(c_i - c_i^\dagger\right)\left(c_{i+1} + c_{i+1}^\dagger\right), \quad (19)$$

$$\sigma_i^z = 2c_i^\dagger c_i - 1, \quad (20)$$

$$\hat{H} = \sum_i \left(c_i^\dagger c_{i+1} + c_i^\dagger c_{i+1}^\dagger + h.c.\right) + h \sum_i \left(2c_i^\dagger c_i - 1\right). \quad (21)$$

由于平移对称性, 做傅里叶变换:

$$\begin{cases} c_l &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_k c_k e^{+ikl} \\ c_l^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_k c_k^\dagger e^{-ikl} \end{cases}. \quad (22)$$

$$\hat{H} = \sum_k \begin{pmatrix} c_k^\dagger & c_{-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h + \cos(k) & -i \sin(k) \\ i \sin(k) & -h - \cos(k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_k \\ c_{-k}^\dagger \end{pmatrix} \quad (23)$$

再对每个小矩阵对角化, 就得到了体系的能谱:

$$E(k) = \sqrt{(h + \cos k)^2 + \sin^2 k} \quad (24)$$

## 参考文献

- [1] Nagaosa, Quantum field theory in strongly correlated electronic systems.
- [2] Xiao-Gang Wen, Quantum field theory of many-body systems.