# BCS 理论

任杰

## BCS 有效作用量

### 电-声相互作用

自由声子的哈密顿量为:

$$\hat{H}_{ph} = \sum_{\boldsymbol{q},j} \omega_{\boldsymbol{q}} \hat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{q},j} a_{\boldsymbol{q},j} + \text{const.} \tag{1}$$

其中 $\omega_{\boldsymbol{q}}$ 是声子能量。声子是晶格振动的准粒子，与电子相互作用的微观机制是在电中性背景下由于晶格离开平衡位置产生局部电荷，从而对电子产生作用，即

$$\hat{V}_{el-ph} \simeq \gamma \int d^d r \hat{\rho}_e(\boldsymbol{r}) \hat{\rho}_{ind}(\boldsymbol{r}). \tag{2}$$

其中 $\gamma$ 是耦合常数，$\hat{\rho}_r$ 是电子密度算符，$\hat{\rho}_{ind}$ 是晶格畸变产生的电荷，其大小正比于晶格振动坐标 $\boldsymbol{u}$ 的散度:

$$\rho_{ind} \simeq \nabla \cdot \boldsymbol{u}. \tag{3}$$

量子化下的晶格简正坐标为:

$$\boldsymbol{u} = \sum_{\boldsymbol{q}} \boldsymbol{u}_{\boldsymbol{q}} e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{e}_j \frac{1}{\sqrt{2m\omega_q}} (a_{\boldsymbol{q},j} + a^{\dagger}_{-\boldsymbol{q},j}) e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}. \tag{4}$$

求散度得到:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \sum_{\boldsymbol{q},j} \frac{iq_j}{\sqrt{2m\omega_q}} (a_{\boldsymbol{q},j} + a^{\dagger}_{-\boldsymbol{q},j}) e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}. \tag{5}$$

电-声相互作用为:

$$\begin{aligned} \hat{V}_{el-ph} &= \gamma \sum_{\boldsymbol{q},j} \left[ \int d^d r \hat{\rho}_e(\boldsymbol{r}) e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}} \right] \frac{iq_j}{\sqrt{2m\omega_q}} \left( \hat{a}_{\boldsymbol{a},j} + \hat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{q},j} \right) \\ &= \gamma \sum_{\boldsymbol{q},j} \frac{iq_j}{\sqrt{2m\omega_q}} \hat{\rho}_{e,\boldsymbol{q}} \left( \hat{a}_{\boldsymbol{a},j} + \hat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{q},j} \right). \end{aligned} \tag{6}$$

其中电子密度算符傅立叶变换具体为:

$$\hat{\rho}_{e,\boldsymbol{q}} = \int d^d r\ \hat{c}^{\dagger}(\boldsymbol{r}) \hat{c}(\boldsymbol{r}) e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}} = \frac{1}{L^d} \int d^d r \sum_{\boldsymbol{k}_1,\boldsymbol{k}_2} \hat{c}^{\dagger}_{\boldsymbol{k}_1} \hat{c}_{\boldsymbol{k}_2} e^{i(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{k}_2-\boldsymbol{k}_1)\cdot\boldsymbol{r}} = \sum_{\boldsymbol{k}} \hat{c}^{\dagger}_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}} \hat{c}_{\boldsymbol{k}}. \tag{7}$$

## 电子-电子有效作用

考虑电-声相互作用后，电子-声子系统总配分函数为在路径积分下写为：

$$Z=\int D[\psi,\bar{\psi}]\int D[\phi,\bar{\phi}]\exp\left\{-S_{el}[\psi,\bar{\psi}]-S_{ph}[\phi,\bar{\phi}]-S_{el-ph}[\psi,\bar{\psi},\phi,\bar{\phi}]\right\}. \tag{8}$$

其中 $S_{ph},S_{el-ph}$ 分别为自由声子和电-声耦合作用量：

$$\begin{aligned} S_{ph}[\phi,\bar{\phi}] &= \sum_{q,j}\bar{\phi}_{q,j}(-i\omega_n+\omega_q)\phi_{q,j}, \\ S_{el-ph}[\psi,\bar{\psi},\phi,\bar{\phi}] &= \gamma\sum_{q,j}\frac{iq_j}{\sqrt{2m\omega_q}}\rho_q(\phi_{q,j}+\bar{\phi}_{-q,j}), \end{aligned} \tag{9}$$

其中 $\rho_q=\sum_k\bar{\psi}_{k+q}\psi_k$. 要得到电子直接通过电-声耦合产生的有效相互作用，需要将声子场积掉。注意自由声子和电-声耦合部分的作用量是二次型：

$$S_{ph}+S_{el-ph}=\sum_{q,j}\left[\bar{\phi}_{q,j}(-i\omega_n+\omega_q)\phi_{q,j}+\gamma\frac{iq_j}{\sqrt{2m\omega_q}}\rho_q(\phi_{q,j}+\bar{\phi}_{-q,j})\right]. \tag{10}$$

将其配平方后，得到：

$$S_{ph}+S_{el-ph}=\sum_{q,j}\left[\bar{\Phi}_{q,j}(-i\omega_n+\omega_q)\Phi_{q,j}+\frac{i\gamma^2q_j^2}{2m\omega_q(\omega_n+i\omega_q)}\right]. \tag{11}$$

其中

$$\begin{aligned} \Phi_{q,j} &= \phi_{q,j}+\frac{\gamma q_j}{\sqrt{2m\omega_q}(\omega_n+i\omega_q)}, \\ \bar{\Phi}_{q,j} &= \bar{\phi}_{q,j}-\frac{\gamma q_j}{\sqrt{2m\omega_q}(\omega_n+i\omega_q)}, \end{aligned} \tag{12}$$

二次项积分得到一个常数因子，可吸收至积分测度中，实际作用量贡献为：

$$S'_{ph}\simeq\sum_{q,j}\frac{i\gamma^2q_j^2}{2m\omega_q(\omega_n+i\omega_q)}=\frac{\gamma^2}{2m}\sum_q\frac{q^2}{\omega_n^2+\omega_q^2}. \tag{13}$$

上式第二个等号对 $(\omega_n,-\omega_n)$ 求了平均。最终，有效作用量为：

$$S_{eff}[\psi,\bar{\psi}]=S_{el}[\psi,\bar{\psi}]-\frac{\gamma^2}{2m}\sum_q\frac{q^2}{\omega_n^2+\omega_q^2}\rho_q\rho_{-q}. \tag{14}$$

将虚时变为实时，即做替换 $i\omega_n\to\omega$，相互作用势为：

$$V(\boldsymbol{q},\omega)=\frac{\gamma^2q^2}{2m(\omega^2-\omega_q^2)}. \tag{15}$$

当 $\omega<\omega_q$ 时，有效相互作用为吸引势。

### 有效作用量

费米面附近宽度为德拜频率 $\omega_D$ 的能壳内，电子为净吸引作用。当电-声耦合常数足够大，能壳内电子总相互作用是吸引的。BSC 模型近似将电子直接吸引势看作常数，其有效哈密顿量为：

$$\hat{H}_{BCS} = \int d^d r c_\sigma^\dagger(\boldsymbol{r}) \left(-\frac{\nabla^2}{2m} - \mu\right) c_\sigma(\boldsymbol{r}) - g \int d^d r c_\uparrow^\dagger(\boldsymbol{r}) c_\downarrow^\dagger(\boldsymbol{r}) c_\downarrow(\boldsymbol{r}) c_\uparrow(\boldsymbol{r}), \tag{16}$$

其中 $g$ 为有效耦合常数。此哈密顿量对应的欧几里德作用量为：

$$S[\psi, \bar{\psi}] = \int_0^\beta d\tau \int d^d r \left[\bar{\psi}_\sigma \left(\partial_\tau - \frac{\nabla^2}{2m} - \mu\right) \psi_\sigma - g \bar{\psi}_\uparrow \bar{\psi}_\downarrow \psi_\downarrow \psi_\uparrow\right]. \tag{17}$$

## 辅助场路径积分

### 辅助场作用量

现在，利用高斯积分公式，有恒等式：

$$\begin{aligned} & \exp\left\{g \int_0^\beta d\tau \int d^d r\ \bar{\psi}_\uparrow \bar{\psi}_\downarrow \psi_\downarrow \psi_\uparrow\right\} \\ = & \int D[\Delta, \bar{\Delta}] \exp\left\{-\int_0^\beta d\tau \int d^d r \left[\frac{1}{g}|\Delta|^2 - \bar{\Delta}\psi_\downarrow \psi_\uparrow - \Delta \bar{\psi}_\uparrow \bar{\psi}_\downarrow\right]\right\}, \end{aligned} \tag{18}$$

用其替换作用量中的相互作用项，得到配分函数为：

$$Z = \int D[\psi, \bar{\psi}] \int D[\Delta, \bar{\Delta}] \exp\left\{-\int_0^\beta d\tau \int d^d r \left[\frac{1}{g}|\Delta|^2 - \bar{\Psi}\hat{\mathcal{G}}^{-1}\Psi\right]\right\}. \tag{19}$$

其中引入了 Nambu spinor 算符：

$$\Psi = (\psi_\uparrow,\ \bar{\psi}_\downarrow)^T,\ \bar{\Psi} = \Psi^\dagger \tag{20}$$

此时格林函数 $\hat{\mathcal{G}}^{-1}$ 在自旋空间是一个 $2 \times 2$ 矩阵，其矩阵形式为：

$$\hat{\mathcal{G}}^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{G}_p^{-1} & \Delta \\ \bar{\Delta} & \hat{G}_h^{-1} \end{pmatrix}, \tag{21}$$

其中粒子格林函数部分为：

$$\hat{G}_p^{-1} = -\partial_\tau + \frac{\nabla^2}{2m} + \mu. \tag{22}$$

而空穴格林函数部分为：

$$\hat{G}_h^{-1} = -\partial_\tau - \frac{\nabla^2}{2m} - \mu. \tag{23}$$

以上符号的差异来源于粒子-空穴共轭：对于 Grassmann 二次型，粒子-空穴共轭相当于交换 $\psi, \bar{\psi}$ 位置，净效果为添上一负号；对于带有偏导数的项，利用分部积分：

$$\bar{\psi}\partial\psi = -(\partial\psi)\bar{\psi} \simeq \psi\partial\bar{\psi}. \tag{24}$$

现在，作用量中的费米场部分变为高斯形，因此可以积掉费米子自由度：

$$\int D[\psi,\bar{\psi}]\exp\left(-\bar{\Psi}\hat{\mathcal{G}}^{-1}\Psi\right)=\det\hat{\mathcal{G}}^{-1}=\exp\left(\mathrm{Tr}\ln\hat{\mathcal{G}}^{-1}\right). \tag{25}$$

注意此处取迹运算 Tr 包括自旋自由度和时空自由度 (用 tr 代表仅在自旋空间求迹)。最终，配分函数转换为关于辅助场 $\Delta,\bar{\Delta}$ 的路径积分：

$$Z=\int D[\Delta,\bar{\Delta}]e^{-S[\Delta,\bar{\Delta}]}, \tag{26}$$

其中关于辅助场 $\Delta,\bar{\Delta}$ 的作用量为：

$$S[\Delta,\bar{\Delta}]=\frac{1}{g}\int_0^\beta d\tau\int d^dr|\Delta|^2-\mathrm{Tr}\ln\hat{\mathcal{G}}^{-1}. \tag{27}$$

## 鞍点近似

对辅助场作用量取极值：

$$\begin{aligned}0&=\frac{\delta S}{\delta\bar{\Delta}(\boldsymbol{r},\tau)}\\&=\frac{1}{g}\Delta(\boldsymbol{r},\tau)-\mathrm{Tr}\left[\hat{\mathcal{G}}(\boldsymbol{r},\tau)\cdot\frac{\delta\hat{\mathcal{G}}^{-1}}{\delta\bar{\Delta}(\boldsymbol{r},\tau)}\right]\\&=\frac{1}{g}\Delta(\boldsymbol{r},\tau)-\mathrm{Tr}\left[\begin{pmatrix}-\partial_\tau+\frac{\nabla^2}{2m}+\mu & \Delta(\boldsymbol{r},\tau)\\ \bar{\Delta}(\boldsymbol{r},\tau) & -\partial_\tau-\frac{\nabla^2}{2m}-\mu\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}0 & 0\\ \delta^{(d)}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\delta(\tau-\tau') & 0\end{pmatrix}\right].\end{aligned} \tag{28}$$

注意以上求迹运算包括自旋空间求迹和场构型空间内求迹。在实空间下不容易对场构型求迹，可在动量空间完成，动量空间的一组基底为：

$$\psi_p=\sqrt{\frac{T}{L^d}}e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}-i\omega_n\tau} \tag{29}$$

在这组基底下，算符 $\hat{F}$ 矩阵元可通过在基底上的作用得到：

$$(\hat{F})_{p',p}=\int d\tau\int d^dr\ \bar{\psi}_{p'}\hat{F}\psi_p=\frac{T}{L^d}\int d\tau\int d^dr\left(e^{-i\boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{r}+i\omega_{n'}\tau}\hat{F}e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}-i\omega_n\tau}\right). \tag{30}$$

比如：

$$(\partial_\tau)_{p',p}=-i\delta_{pp'}\omega_n, \tag{31}$$

$$(\nabla)_{p',p}=i\delta_{pp'}\boldsymbol{p}, \tag{32}$$

$$(f(\boldsymbol{r},\tau))_{p',p}=\frac{T}{L^d}\delta_{pp'}f_p. \tag{33}$$

由此作用，得到格林函数动量空间矩阵元为：

$$(\hat{\mathcal{G}})_{p',p}=\begin{pmatrix}\delta_{pp'}(i\omega_n-\xi_{\boldsymbol{p}}) & \Delta_{p'-p}\\ \bar{\Delta}_{p-p'} & \delta_{pp'}(i\omega_n+\xi_{\boldsymbol{p}})\end{pmatrix}^{-1} \tag{34}$$

其中 $\xi_{\boldsymbol{p}}=\frac{\boldsymbol{p}^2}{2m}-\mu$，$\Delta_p$ 是 $\Delta(\boldsymbol{r},\tau)$ 的频率分量。而变分导数动量空间矩阵元为：

$$\left(\frac{\delta\hat{\mathcal{G}}^{-1}}{\delta\bar{\Delta}(\boldsymbol{r},\tau)}\right)_{p',p}=\frac{T}{L^d}\begin{pmatrix}0 & 0\\ e^{-i(\boldsymbol{p}'-\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{r}+i(\omega_{n'}-\omega_n)\tau} & 0\end{pmatrix}. \tag{35}$$

这样，我们可以写出上述求迹表达式。这里假设极值解 $\Delta=\Delta_0=\mathrm{const}$，极值解变为：

$$\frac{1}{g}\Delta_0=\frac{T}{L^d}\sum_p\begin{pmatrix}i\omega_n-\xi_{\boldsymbol{p}} & \Delta_0\\ \bar{\Delta}_0 & i\omega_n+\xi_{\boldsymbol{p}}\end{pmatrix}^{-1}_{12}=\frac{T}{L^d}\sum_{\boldsymbol{p},n}\frac{\Delta_0}{\omega_n^2+\xi_{\boldsymbol{p}}^2+|\Delta_0|^2}. \tag{36}$$

由此得到方程

$$\frac{1}{g}=\frac{T}{L^d}\sum_{\boldsymbol{p},n}\frac{1}{\omega_n^2+\lambda_{\boldsymbol{p}}^2}. \tag{37}$$

其中令 $\lambda_{\boldsymbol{q}}=(\xi_{\boldsymbol{p}}^2+|\Delta_0|^2)^{1/2}$. 对频率求和：

$$T\sum_n\frac{1}{\omega_n^2+\lambda_{\boldsymbol{p}}^2}=\sum_{z_*=\pm\lambda_{\boldsymbol{p}}}n_F(z_*)\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z^2-\lambda_{\boldsymbol{p}}^2}\right]_{z=z_*}=\frac{1-2n_F(\lambda_{\boldsymbol{p}})}{2\lambda_{\boldsymbol{p}}}. \tag{38}$$

动量空间求和中，只需考虑费米面附近 $\omega_D$ 的电子：

$$\frac{1}{g}=\frac{1}{L^d}\sum_{\boldsymbol{p}}\frac{1-n_F(\lambda_{\boldsymbol{p}})}{2\lambda_{\boldsymbol{p}}}=\int_{-\omega_D}^{\omega_D}d\xi\ \nu(\xi)\frac{1-n_F(\lambda(\xi))}{2\lambda(\xi)}, \tag{39}$$

其中 $\nu$ 是态密度。由于 $1-2n_F(\xi)=\tanh(\xi/2T)$，得到能隙方程：

$$\frac{1}{g\nu}=\int_0^{\omega_D}d\xi\frac{\tanh(\xi/2T)}{\lambda(\xi)}. \tag{40}$$

## Ginzburg-Landau 理论

在相边界附近，$\Delta$ 可看作微扰，可以将 BCS 有效作用量

$$S_{BCS}[\Psi,\bar{\Psi}]=\frac{1}{g}\int d\tau\int d^dr|\Delta|^2-\mathrm{Tr}\ln\hat{\mathcal{G}}^{-1}. \tag{41}$$

展开成 $\Delta$ 的级数。为此需要考虑 $\mathrm{Tr}\ln\hat{\mathcal{G}}^{-1}$ 关于 $\Delta$ 的级数展开。定义：

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{G}}_0^{-1}&\equiv\begin{pmatrix}\hat{G}_p^{-1} & 0\\ 0 & \hat{G}_h^{-1}\end{pmatrix},\\ \hat{\Delta}&\equiv\begin{pmatrix}0 & \Delta\\ \bar{\Delta} & 0\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{42}$$

由此可以做变换：

$$\mathrm{Tr}\ln\hat{\mathcal{G}}^{-1}=\mathrm{Tr}\ln\left[\hat{\mathcal{G}}_0^{-1}(1+\hat{\mathcal{G}}_0^{-1}\hat{\Delta})\right]=\mathrm{Tr}\ln\hat{\mathcal{G}}_0^{-1}+\mathrm{Tr}\ln[1+\hat{\mathcal{G}}_0^{-1}]. \tag{43}$$

右边第二项可以展开为：

$$\ln[1+\hat{\mathcal{G}}_0^{-1}\hat{\Delta}]=-\sum_n\frac{1}{2n}(\hat{\mathcal{G}}_0^{-1}\hat{\Delta})^{2n}. \tag{44}$$

注意展开式没有奇数次项，因为奇数次 $\hat{\mathcal{G}}_0^{-1}\hat{\Delta}$ 乘积是无迹矩阵。

## 二阶近似

首先将表达式展开到二阶项 $(n=1)$，其结果为：

$$-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\hat{\mathcal{G}}_0^{-1}\hat{\Delta})^2 = -\mathrm{Tr}[\hat{G}_p\bar{\Delta}\hat{G}_h\Delta] \tag{45}$$

同样，求迹操作在频率空间完成。首先考虑傅立叶变换：

$$(\hat{\mathcal{G}}_0)_{p',p} \quad \longrightarrow \quad \delta_{pp'}\begin{pmatrix} G_p & 0 \\ 0 & -G_{-p} \end{pmatrix}, \tag{46}$$

$$(\hat{\Delta})_{p',p} \quad \longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & \Delta_{p'-p} \\ \bar{\Delta}_{p-p'} & 0 \end{pmatrix}. \tag{47}$$

其中

$$G_p = \frac{1}{i\omega_n - \xi_{\boldsymbol{p}}}. \tag{48}$$

因此，展开到二阶项的作用量为：

$$S^{(2)} = \sum_q \Gamma_q^{-1}|\Delta(q)|^2,\ \Gamma_q^{-1} = \frac{1}{g} - \frac{T}{L^d}\sum_p G_p G_{q-p}. \tag{49}$$

现在考虑求和式 $\sum_p G_p G_{q-p}$. 首先对频率求和：

$$\begin{aligned} T\sum_m \frac{1}{i\omega_m - \xi_{\boldsymbol{p}}}\frac{1}{i\omega_n - i\omega_m - \xi_{\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}}} &= \sum_{z=z_*} n_F(z_*)\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z-\xi_{\boldsymbol{p}}}\frac{1}{i\omega_n - z - \xi_{\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}}}\right]_{z-z_*} \\ &= \frac{1-n_F(\xi_{\boldsymbol{p}}) - n_F(\xi_{\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}})}{i\omega_n - \xi_{\boldsymbol{p}} - \xi_{\boldsymbol{q}-\boldsymbol{p}}}. \end{aligned} \tag{50}$$

注意上式中 $q=(\boldsymbol{q},\omega_n)$ 是声子 4 动量。相变发生在 $\Gamma_q^{-1}=0$ 处。此时我们考虑时空均匀的解，即 $q=(0,0)$. 由于 $\xi_{\boldsymbol{p}} = \xi_{-\boldsymbol{p}}$：

$$\frac{T}{L^d}\sum_p G_p G_{-p} = \int_{-\omega_D}^{\omega_D} d\xi\nu(\xi)\frac{1-2n_F(\xi)}{2\xi}. \tag{51}$$

进一步化简上式之前，注意积分式正负频率对称，只需考虑正频部分。另外，由于分母 $\xi$ 存在，零温下该积分是发散的。有限温度时，在 $0<\xi<T$ 区间的积分被费米分布函数控制。实际贡献主要在 $T<\xi<\omega_D$ 区间，在此小区间态密度可近似为相同，因此得到：

$$\frac{T}{L^d}\sum_p G_p G_{-p} \simeq \nu\int_T^{\omega_D}\frac{d\xi}{\xi} = \nu\ln\left(\frac{\omega_D}{T}\right). \tag{52}$$

由此确定相变点为：

$$T_c \simeq \omega_D \exp\left(-\frac{1}{g\nu}\right). \tag{53}$$

### 四阶近似

当 $T < T_c$ 时，二次型的作用量变得不稳定，这时为得到对体系有效的描述，需要引入更高阶的微扰。二阶作用量的不稳定性源于时空均匀部分，而不是时空导数部分，因此对更高阶的微扰项，我们也只考虑时空均匀的部分，即：

$$S^{(4)} = \frac{1}{4}\mathrm{Tr}(\hat{\mathcal{G}}^{-1}\hat{\Delta})^4 \simeq \frac{1}{2n}\sum_p (G_p G_{-p})^2|\Delta|^4. \tag{54}$$

上式可近似为：

$$S^{(4)} \simeq \frac{\nu|\Delta|^4}{4}\sum_n \int_{-\omega_D}^{\omega_D} \frac{d\xi}{(\omega_n^2+\xi^2)^2} \propto \nu|\Delta|^4 \sum_n \frac{1}{\omega_n^3} \propto \nu T\left(\frac{|\Delta|}{T}\right)^4. \tag{55}$$

Ginzburg-Landau 经典作用量为：

$$S_{GL}[\Delta,\bar{\Delta}] = \beta\int d^d r\left[\frac{r}{2}|\Delta|^2 + \frac{c}{2}|\partial\Delta|^2 + u|\Delta|^4\right]. \tag{56}$$

从 Ginzburg-Landau 作用量看出，当 $r < 0$ 时，辅助场 $\Delta$ 具有的 U(1) 对称性发生自发破缺。

## 规范对称性自发破缺

### 规范不变作用量

费米场具有 U(1) 规范对称性：

$$\psi \;\rightarrow\; e^{i\theta}\psi, \tag{57}$$
$$\bar{\psi} \;\rightarrow\; e^{-i\theta}\bar{\psi}. \tag{58}$$

相应地，为了保证作用量是规范不变的，将对 $\psi$ 作用的时空导数算符替换为协变导数算符：

$$\partial_\tau \;\rightarrow\; \partial_\tau + ie\phi, \tag{59}$$
$$\nabla \;\rightarrow\; \nabla - ie\boldsymbol{A}. \tag{60}$$

其中电磁势在规范变换下：

$$\phi \;\rightarrow\; \phi - \frac{1}{e}\partial_\tau\theta, \tag{61}$$
$$\boldsymbol{A} \;\rightarrow\; \boldsymbol{A} + \frac{1}{e}\nabla\theta. \tag{62}$$

类似的，对共轭场 $\bar{\psi}$ 作用的时空导数算符在规范变换下：

$$\partial_\tau \;\rightarrow\; \partial_\tau - ie\phi, \tag{63}$$
$$\nabla \;\rightarrow\; \nabla + ie\boldsymbol{A}. \tag{64}$$

因此，考虑外电磁场情况下，辅助场 $\Delta$ 的有效作用量变为：

$$S[\Delta,\bar{\Delta}] = \frac{1}{g}\int d\tau\int d^d r|\Delta|^2 - \mathrm{Tr}\ln\hat{\mathcal{G}}^{-1}. \tag{65}$$

其中规范不变的格林函数为：

$$\hat{\mathcal{G}}^{-1}=\begin{pmatrix} -(\partial_\tau+i\phi)+\frac{1}{2m}(\nabla-i\boldsymbol{A})^2+\mu & \Delta \\ \bar{\Delta} & -(\partial_\tau-i\phi)-\frac{1}{2m}(\nabla+i\boldsymbol{A})^2-\mu \end{pmatrix}. \tag{66}$$

## 规范场微扰展开

对 Ginzburg-Landau 作用量，当 $T<T_c$ 时，$r(T)<0$，此时经典作用量在

$$|\Delta|=\Delta_0=\sqrt{\frac{-r}{4u}} \tag{67}$$

取得极值。极值场选取有一个整体相位不确定性：

$$\Delta=\Delta_0 e^{2i\theta}. \tag{68}$$

此相位也对应费米场的 U(1) 定域规范对称性。此作用量的经典基态对应一个确定的相位 $\theta$，此时规范对称性发生自发破缺。

我们从对称性破缺的基态开始，建立剩余自由度：规范场 $(\phi,\boldsymbol{A})$ 和相位 $\theta$ 的低能场论 (此时辅助场 $\Delta$ 绝对值固定，只剩一个相位自由度)。首先，我们引入一个规范变换：

$$\hat{U}(\boldsymbol{r},\tau)=\begin{pmatrix} e^{-i\theta(\boldsymbol{r},\tau)} & 0 \\ 0 & e^{i\theta(\boldsymbol{r},\tau)} \end{pmatrix} \tag{69}$$

此规范变换将 $\Delta_0 e^{2i\theta}$ 的相位消去：

$$\hat{\mathcal{G}}^{-1}\to\hat{U}^{-1}\hat{\mathcal{G}}^{-1}\hat{U}=\begin{pmatrix} -(\partial_\tau+i\tilde{\phi})+\frac{1}{2m}(\nabla-i\tilde{\boldsymbol{A}})^2+\mu & \Delta_0 \\ \Delta_0 & -(\partial_\tau-i\tilde{\phi})-\frac{1}{2m}(\nabla+i\tilde{\boldsymbol{A}})^2-\mu \end{pmatrix}. \tag{70}$$

其中 $\tilde{\phi},\tilde{\boldsymbol{A}}$ 是规范场相应的规范变换：

$$\tilde{\phi}=\phi+\partial_\tau\theta,\ \tilde{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{A}-\nabla\theta. \tag{71}$$

将格林函数中规范场部分显式写出来：

$$\hat{\mathcal{G}}^{-1}=\hat{\mathcal{G}}_0^{-1}-\hat{\mathcal{X}}_1-\hat{\mathcal{X}}_2. \tag{72}$$

其中

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{G}}_0^{-1} &= -\sigma_0\partial_\tau+\sigma_1\Delta_0+\sigma_3\left(\frac{\nabla^2}{2m}+\mu\right), && (73)\\
\hat{\mathcal{X}}_1 &= \sigma_3\tilde{\phi}+\frac{i}{2m}\sigma_0(\nabla\tilde{\boldsymbol{A}}+\tilde{\boldsymbol{A}}\nabla), && (74)\\
\hat{\mathcal{X}}_2 &= \sigma_3\frac{1}{2m}\tilde{\boldsymbol{A}}^2. && (75)
\end{aligned}$$

精确至二阶的展开式为：

$$\begin{aligned}
-\mathrm{Tr}\ln\left(\hat{\mathcal{G}}_0^{-1}-\hat{\mathcal{X}}_1-\hat{\mathcal{X}}_2\right) &= -\mathrm{Tr}\ln\hat{\mathcal{G}}_0^{-1}-\mathrm{Tr}\ln\left(1-\hat{\mathcal{G}}_0\hat{\mathcal{X}}_1-\hat{\mathcal{G}}_0\hat{\mathcal{X}}_2\right)\\
&= -\mathrm{Tr}\ln\hat{\mathcal{G}}_0^{-1}+\mathrm{Tr}\left(\hat{\mathcal{G}}_0\hat{\mathcal{X}}_1\right)+\mathrm{Tr}\left(\hat{\mathcal{G}}_0\hat{\mathcal{X}}_2+\frac{1}{2}\hat{\mathcal{G}}_0\hat{\mathcal{X}}_1\hat{\mathcal{G}}_0\hat{\mathcal{X}}_1\right). && (76)
\end{aligned}$$

首先考虑一阶微扰 $S^{(1)}=\mathrm{Tr}\left(\hat{\mathcal{G}}_0^{-1}\hat{\mathcal{X}}_1\right)$. 为了方便求迹，首先在动量空间写出前三个算符的傅立叶变换：

$$
\begin{aligned}
(\hat{\mathcal{G}}_0^{-1})_{p',p} &= \delta_{pp'}(i\sigma_0\omega_n+\sigma_1\Delta_0-\sigma_3\xi_{\boldsymbol{p}}), && (77)\\
(\hat{\mathcal{X}}_1)_{p',p} &= i\sigma_3\tilde{\phi}_{p'-p}-\delta_{pp'}\sigma_0\frac{(\boldsymbol{p}'+\boldsymbol{p})\cdot\tilde{\boldsymbol{A}}_{p'-p}}{2m}, && (78)\\
(\hat{\mathcal{X}}_2)_{p',p} &= \frac{1}{2m}\sigma_3(\tilde{\boldsymbol{A}}^2)_{p'-p}. && (79)
\end{aligned}
$$

求迹转换为动量求和：

$$
S^{(1)}[A]=\sum_p \mathrm{tr}\left[\hat{\mathcal{G}}_{0,p}\left(i\sigma_3\tilde{\phi}_0-\frac{1}{m}\sigma_0\boldsymbol{p}\cdot\tilde{\boldsymbol{A}}_0\right)\right]. \tag{80}
$$

注意上式已经对时空求迹。由于第二项含有 $\boldsymbol{p}$ 的奇数次项，因此为零，因此作用量变为：

$$
S^{(1)}[A]=i\tilde{\phi}_0\sum_p \mathrm{tr}\left(\hat{\mathcal{G}}_{0,p}\sigma_3\right)=i\tilde{\phi}_0\sum_p\left[\left(\hat{\mathcal{G}}_{0,p}\right)_{1,1}-\left(\hat{\mathcal{G}}_{0,p}\right)_{2,2}\right]. \tag{81}
$$

频率求和之后：

$$
\sum_{\boldsymbol{p}}\sum_n\left(\hat{\mathcal{G}}_{0,p}\right)_{1,1}=-\sum_{\boldsymbol{p}}\sum_n\left(\hat{\mathcal{G}}_{0,p}\right)_{2,2}=\frac{1}{T}\sum_{\boldsymbol{p}}n_F(\xi_{\boldsymbol{p}})=\frac{N_e}{T}. \tag{82}
$$

因此：

$$
S^{(1)}[A]=iN_e\beta\tilde{\phi}_0=iN_e\beta\int\frac{d\tau}{\beta}\int\frac{d^dr}{L^d}\phi(\boldsymbol{r},\tau)=in_e\int d\tau d^dr\phi(\boldsymbol{r},\tau). \tag{83}
$$

其中 $n\equiv N_e/L^d$，此贡献来源于静电场于电子耦合。现在考虑二阶微扰，首先考虑第一部分贡献：

$$
S^{(2,1)}=\mathrm{Tr}\left(\hat{\mathcal{G}}_0\hat{\mathcal{X}}_2\right). \tag{84}
$$

求迹为：

$$
S^{(2,1)}=\frac{(\tilde{\boldsymbol{A}}^2)_0}{2m}\sum_p\mathrm{tr}\left(\hat{\mathcal{G}}_{0,p}\sigma_3\right)=\frac{n_e}{2m}L^d\beta(\tilde{\boldsymbol{A}}^2)_0=\frac{n_e}{2m}\int d\tau d^dr\tilde{\boldsymbol{A}}^2(\boldsymbol{r},\tau). \tag{85}
$$

现在考虑第二部分贡献：

$$
S^{(2,2)}=\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\hat{\mathcal{G}}_0\hat{\mathcal{X}}_1\hat{\mathcal{G}}_0\hat{\mathcal{X}}_1\right). \tag{86}
$$

注意包含 $\boldsymbol{p}$ 奇数次项的部分求迹为零，因此作用量分为两部分，$S^{(2,2)}=S_A^{(2,2)}+S_B^{(2,2)}$：

$$
\begin{aligned}
S_A^{(2,2)} &= \sum_{p,q}\mathrm{tr}\left(-\hat{\mathcal{G}}_{0,p}\sigma_3\tilde{\phi}_q\hat{\mathcal{G}}_{0,p+q}\sigma_3\tilde{\phi}_{-p}\right), && (87)\\
S_B^{(2,2)} &= \sum_{p,q}\mathrm{tr}\left(\hat{\mathcal{G}}_{0,p}\frac{\sigma_0(2\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})\cdot\tilde{\boldsymbol{A}}_q}{2m}\hat{\mathcal{G}}_{0,p+q}\frac{\sigma_0(2\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})\cdot\tilde{\boldsymbol{A}}_{-q}}{2m}\right). && (88)
\end{aligned}
$$

在微扰意义下，规范场时空导数较小，即 $q\ll p$，因此做近似：

$$
\begin{aligned}
S_A^{(2,2)} &\approx -\sum_{p,q}\mathrm{tr}\left(\hat{\mathcal{G}}_{0,p}\sigma_3\tilde{\phi}_q\hat{\mathcal{G}}_{0,p}\sigma_3\tilde{\phi}_{-p}\right), && (89)\\
S_B^{(2,2)} &\approx \frac{1}{m^2}\sum_{p,q}\mathrm{tr}\left(\hat{\mathcal{G}}_{0,p}\sigma_0\boldsymbol{p}\cdot\tilde{\boldsymbol{A}}_q\hat{\mathcal{G}}_{0,p}\sigma_0\boldsymbol{p}\cdot\tilde{\boldsymbol{A}}_{-q}\right). && (90)
\end{aligned}
$$

利用等式:

$$\hat{\mathcal{G}}_{0,p} = \frac{-i\sigma_0\omega_n - \sigma_3\xi_{\boldsymbol{p}} + \sigma_1\Delta_0}{\omega_n^2 + \lambda_{\boldsymbol{p}}^2}, \tag{91}$$

得到 A 项:

$$S_A^{(2,2)} = \sum_{p,q} \frac{\tilde{\phi}_q\tilde{\phi}_{-q}(\omega_n^2 - \lambda_{\boldsymbol{p}}^2 + 2\Delta_0^2)}{(\omega_n^2 + \lambda_{\boldsymbol{p}}^2)^2} \tag{92}$$

对 B 项，利用恒等式:

$$\sum_{\boldsymbol{p}} (\boldsymbol{p}\cdot\tilde{\boldsymbol{A}}_q)(\boldsymbol{p}\cdot\tilde{\boldsymbol{A}}_{-q})F(\boldsymbol{p}^2) = \frac{\tilde{\boldsymbol{A}}_q\cdot\tilde{\boldsymbol{A}}_{-q}}{d}\sum_{\boldsymbol{p}} \boldsymbol{p}^2 F(\boldsymbol{p}^2). \tag{93}$$

其中 $F(\boldsymbol{p}^2)$ 是任意旋转不变函数，因此:

$$S_B^{(2,2)} = \sum_{p,q} \frac{-\omega_n^2 + \lambda_{\boldsymbol{p}}^2}{(\omega_n^2 + \lambda_{\boldsymbol{p}}^2)^2}\frac{\boldsymbol{p}^2\tilde{\boldsymbol{A}}_q\cdot\tilde{\boldsymbol{A}}_{-q}}{dm^2}. \tag{94}$$

现在变换回实空间:

$$S^{(2)}[A] = \int d\tau d^d r \left[c_1(\phi + \partial_\tau\theta)^2 + c_2(\boldsymbol{A} - \nabla\theta)^2\right]. \tag{95}$$

其中:

$$c_1 = \frac{T}{L^d}\sum_p \frac{\omega_n^2 - \lambda_{\boldsymbol{p}}^2 + 2\Delta_0^2}{(\omega_n^2 + \lambda_{\boldsymbol{p}}^2)^2}, \tag{96}$$

$$c_2 = \frac{n_e}{2m} + \frac{1}{dm^2}\frac{T}{L^d}\sum_p \frac{\boldsymbol{p}^2(-\omega_n^2 + \lambda_{\boldsymbol{p}}^2)}{(\omega_n^2 + \lambda_{\boldsymbol{p}})}. \tag{97}$$

首先考虑 $c_1$ 求和式。频率求和为:

$$\begin{aligned}
& T\sum_n \frac{\omega_n^2 - \lambda_{\boldsymbol{p}}^2 + 2\Delta_0^2}{(\omega_n^2 + \lambda_{\boldsymbol{p}}^2)^2} \\
= & \sum_{z_* = \pm\lambda_{\boldsymbol{p}}} \mathrm{Res}\left[\frac{n_F(z)(-z^2 - \lambda_{\boldsymbol{p}}^2 + 2\Delta_0^2)}{(z+\lambda_{\boldsymbol{p}})^2(z-\lambda_{\boldsymbol{p}})^2}\right]_{z=z_*} \\
= & \left[\frac{n_F(z)(-z^2 - \lambda_{\boldsymbol{p}}^2 + 2\Delta_0^2)}{(z+\lambda_{\boldsymbol{p}})^2}\right]'_{z=\lambda_{\boldsymbol{p}}} + \left[\frac{n_F(z)(-z^2 - \lambda_{\boldsymbol{p}}^2 + 2\Delta_0^2)}{(z-\lambda_{\boldsymbol{p}})^2}\right]'_{z=-\lambda_{\boldsymbol{p}}} \\
= & \frac{1}{2\lambda_{\boldsymbol{p}}}\left[-n'_F(\lambda_{\boldsymbol{p}})\xi_{\boldsymbol{p}}^2 - n_F(\lambda_{\boldsymbol{p}})\left(\frac{\Delta_0}{\lambda_{\boldsymbol{p}}}\right)^2 + n'_F(-\lambda_{\boldsymbol{p}})\xi_{\boldsymbol{p}}^2 + n_F(-\lambda_{\boldsymbol{p}})\left(\frac{\Delta_0}{\lambda_{\boldsymbol{p}}}\right)^2\right].
\end{aligned} \tag{98}$$

由于我们现在考虑的是 $T < T_c$ 情形，$T/\Delta \to 0$，此时频率求和的贡献几乎全部来源于含有费米分布 $n_F(-\lambda_{\boldsymbol{p}})$ 的项，即:

$$c_1 \simeq \frac{1}{L^d}\sum_{\boldsymbol{p}} \frac{\Delta_0^2}{2\lambda_{\boldsymbol{p}}^3} = \frac{\nu}{2}\int d\xi \frac{\Delta_0^2}{(\xi^2 + \Delta_0^2)^{3/2}} = \nu. \tag{99}$$

因此，我们得到了作用量的系数 $c_1$ 等于费米面附近的态密度 $\nu$. 下面考虑 $c_2$ 的求和式。频率求和为:

$$T\sum_n \frac{-\omega_n^2 + \lambda_{\boldsymbol{p}}^2}{(\omega_n^2 + \lambda_{\boldsymbol{p}}^2)^2} = \sum_{z_* = \pm\lambda_{\boldsymbol{p}}} \mathrm{Res}\left[\frac{n_F(z)(z^2 + \lambda_{\boldsymbol{p}}^2)}{(z+\lambda_{\boldsymbol{p}})^2(z-\lambda_{\boldsymbol{p}})^2}\right]_{z=z_*}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\frac{n_F(z)(z^2+\lambda_{\boldsymbol{p}}^2)}{(z+\lambda_{\boldsymbol{p}})^2}\right]'_{z=\lambda_{\boldsymbol{p}}} + \left[\frac{n_F(z)(z^2+\lambda_{\boldsymbol{p}}^2)}{(z-\lambda_{\boldsymbol{p}})^2}\right]'_{z=-\lambda_{\boldsymbol{p}}} \\
&= n_F'(\lambda_{\boldsymbol{p}}) \\
&= -\beta n_F(\lambda_{\boldsymbol{p}})(1-n_F(\lambda_{\boldsymbol{p}})). \qquad (100)
\end{aligned}$$

费米面附近 $\boldsymbol{p}^2 \approx 2m\mu$，由此得到：

$$c_2 = \frac{n_e}{2m} - \frac{\nu\mu}{dm}\int d\xi\ \beta n_F(\lambda)(1-n_F(\lambda)). \qquad (101)$$

定义超导电子密度：

$$n_s = n_e - \frac{2\nu\mu}{d}\int d\xi\ \beta n_F(\lambda)(1-n_F(\lambda)). \qquad (102)$$

在低温 $T \ll \Delta_0$ 时，$\lambda > \Delta_0 \gg T$，因此 $n_F(\lambda)\approx 0$，此时 $n_s \approx n_e$. 相反，在高温 $T \gg \delta_0$ 时：

$$\begin{aligned}
\int d\xi\beta n_F(\lambda)(1-n_F(\lambda)) &\approx \int_0^\infty d\xi\beta n_F(\lambda)(1-n_F(\lambda)) \\
&= -\int_0^\infty d\xi\partial_\xi n_F(\xi) = 1. \qquad (103)
\end{aligned}$$

此时

$$n_s \simeq \frac{n_e}{2m} - \frac{\nu\mu}{dm} = 0. \qquad (104)$$

第二个等式来自于电子密度与态密度关系：

$$\begin{aligned}
\nu &= \frac{\partial n_e}{\partial\xi} \\
&= \frac{\partial(V_d p^d)}{\partial p}\left(\frac{\partial(p^2/2m)}{\partial p}\right)^{-1} \\
&= \frac{dV_d p^{d-1}}{p/m} = \frac{dn_e}{2\mu}. \qquad (105)
\end{aligned}$$

## Meissner 效应

现在我们已经得到破缺对称性后的低能理论作用量：

$$S[A,\theta] = S_{E-M} + \int d\tau d^d r\left[\nu(\partial_\tau\theta+\phi)^2 + \frac{n_s}{2m}\left(\nabla\theta - \boldsymbol{A}\right)^2\right] \qquad (106)$$

其中

$$S_{E-M} = \int d\tau d^d r\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \qquad (107)$$

是电磁场作用量。现在考虑只有静磁场的情况，即要求：

$$\phi = 0,\ \partial_\tau\boldsymbol{A} = 0. \qquad (108)$$

此时，作用量可分为：

$$S[\boldsymbol{A},\theta] = S_{cl}[\boldsymbol{A},\theta] + \nu\int d\tau\int d^d r(\partial_\tau\theta)^2. \qquad (109)$$

其中 $S_{cl}$ 是经典作用量 (场量在虚时间上无涨落):

$$S_{cl}[\boldsymbol{A},\theta]=\frac{\beta}{2}\int d^dr\left[\frac{n_s}{m}(\nabla\theta-\boldsymbol{A})^2+(\nabla\times\boldsymbol{A})^2\right]. \tag{110}$$

此时，作用量中的量子量子涨落完全来源于第二项

$$\nu\int d\tau\int d^dr(\partial_\tau\theta)^2=\nu\sum_{\boldsymbol{q},n}\omega_n\theta_{\boldsymbol{q},n}\theta_{-\boldsymbol{q},-n}. \tag{111}$$

这项的大小与温度密切相关，当我们考虑较高温度 (但仍有 $T<T_c$) 时，$n>0$ 的松原频率贡献的作用量可能远大于 $S_{cl}$，此时我们就可以忽略这些“高能”的自由度，而只考虑经典部分作用量。下面考虑这个经典作用量给出的有效理论。首先，将作用量写在动量空间中:

$$\begin{aligned}S_{cl}[\boldsymbol{A},\theta]&=\frac{\beta}{2}\sum_{\boldsymbol{q}}\left[\frac{n_s}{m}(i\boldsymbol{q}\theta_{\boldsymbol{q}}-\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{q}})\cdot(-i\boldsymbol{q}\theta_{-\boldsymbol{q}}-\boldsymbol{A}_{-\boldsymbol{q}})+(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{q}})\cdot(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{A}_{-\boldsymbol{q}})\right]\\&=\frac{\beta}{2}\sum_{\boldsymbol{q}}\left[\frac{n_s}{m}(\theta_{\boldsymbol{q}}\boldsymbol{q}^2\theta_{-\boldsymbol{q}}-2i\theta_{\boldsymbol{q}}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{A}_{-\boldsymbol{q}}+\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{q}}\cdot\boldsymbol{A}_{-\boldsymbol{q}})+(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{q}})\cdot(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{A}_{-\boldsymbol{q}})\right]\end{aligned} \tag{112}$$

为得到规范场的有效理论，我们积掉 $\theta_q$ ，得到有效作用量:

$$S_{eff}[\boldsymbol{A}]=\frac{\beta}{2}\sum_{\boldsymbol{q}}\left[\frac{n_s}{m}\left(\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{q}}\cdot\boldsymbol{A}_{-\boldsymbol{q}}-\frac{(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{q}})\cdot(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{A}_{-\boldsymbol{q}})}{\boldsymbol{q}^2}\right)+(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{q}})\cdot(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{A}_{-\boldsymbol{q}})\right] \tag{113}$$

将矢势分解成横向和纵向分量:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{q}}&=\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{q}}^{\perp}+\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{q}}^{\parallel},\\\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{q}}^{\perp}&=\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{q}}-\frac{\boldsymbol{q}(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{q}})}{q^2},\\\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{q}}^{\parallel}&=\frac{\boldsymbol{q}(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{q}})}{q^2}.\end{aligned} \tag{114}$$

注意到

$$\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{q}}^{\perp}\cdot\boldsymbol{A}_{-\boldsymbol{q}}^{\perp}=\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{q}}\cdot\boldsymbol{A}_{-\boldsymbol{q}}-\frac{(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{q}})\cdot(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{A}_{-\boldsymbol{q}})}{\boldsymbol{q}^2}. \tag{115}$$

同时由于 $\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{q}}^{\parallel}=0$:

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{q}})\cdot(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{A}_{-\boldsymbol{q}})&=(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{q}}^{\perp})\cdot(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{A}_{-\boldsymbol{q}}^{\perp})\\&=\boldsymbol{q}^2\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{q}}^{\perp}\cdot\boldsymbol{A}_{-\boldsymbol{q}}^{\perp}\end{aligned} \tag{116}$$

第二个等号利用了恒等式:

$$(\boldsymbol{u}_1\times\boldsymbol{u}_2)\cdot(\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{v}_2)=(\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{v}_1)(\boldsymbol{u}_2\cdot\boldsymbol{v}_2)-(\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{v}_2)(\boldsymbol{u}_2\cdot\boldsymbol{v}_1). \tag{117}$$

由此得到作用量:

$$S_{eff}[\boldsymbol{A}]=\frac{\beta}{2}\sum_{\boldsymbol{q}}\left(\frac{n_s}{m}+\boldsymbol{q}^2\right)\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{q}}^{\perp}\cdot\boldsymbol{A}_{-\boldsymbol{q}}^{\perp}. \tag{118}$$

此时规范场 $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{q}}^{\perp}$ 的有效作用量含有一个质量项，这导致超导体内部的抗磁性。我们考虑这个经典作用量给出的运动方程：

$$\left(\frac{n_s}{m} - \nabla^2\right) \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = 0. \tag{119}$$

对方程两边作用 $\nabla\times$：

$$\left(\frac{n_s}{m} - \nabla^2\right) \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = 0. \tag{120}$$

此运动方程给出一个指数衰减的解：$\boldsymbol{B}(x) \sim \exp(-x/\lambda)$，其中 $\lambda = \sqrt{m/n_s}$.