BCS 理论

任杰

BCS 有效作用量

电-声相互作用

自由声子的哈密顿量为:

$$\hat{H}_{ph} = \sum_{\boldsymbol{q},j} \omega_{\boldsymbol{q}} \hat{a}_{\boldsymbol{q},j}^{\dagger} a_{\boldsymbol{q},j} + \text{const.} \tag{1}$$

其中 $\omega_{\boldsymbol{q}}$ 是声子能量。声子是晶格振动的准粒子,与电子相互作用的微观机制是在电中性背景下由于晶格离开平衡位置产生局部电荷,从而对电子产生作用,即

$$\hat{V}_{el-ph} \simeq \gamma \int d^d r \hat{\rho}_e(\boldsymbol{r}) \hat{\rho}_{ind}(\boldsymbol{r}). \tag{2}$$

其中 γ 是耦合常数,$\hat{\rho}_r$ 是电子密度算符,$\hat{\rho}_{ind}$ 是晶格畸变产生的电荷,其大小正比于晶格振动坐标 $\boldsymbol{u}$ 的散度:

$$\rho_{ind} \simeq \nabla \cdot \boldsymbol{u}. \tag{3}$$

量子化下的晶格简正坐标为:

$$\boldsymbol{u} = \sum_{\boldsymbol{q}} \boldsymbol{u_q} e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{e}_j \frac{1}{\sqrt{2m\omega_q}} (a_{\boldsymbol{q},j} + a_{-\boldsymbol{q},j}^{\dagger}) e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}. \tag{4}$$

求散度得到:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \sum_{\boldsymbol{q},j} \frac{iq_j}{\sqrt{2m\omega_q}} (a_{\boldsymbol{q},j} + a_{-\boldsymbol{q},j}^{\dagger}) e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}}. \tag{5}$$

电-声相互作用为:

$$\begin{aligned}
\hat{V}_{el-ph} &= \gamma \sum_{\boldsymbol{q},j} \left[\int d^d r \hat{\rho}_e(\boldsymbol{r}) e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}} \right] \frac{iq_j}{\sqrt{2m\omega_q}} \left(\hat{a}_{\boldsymbol{a},j} + \hat{a}_{\boldsymbol{q},j}^{\dagger} \right) \\
&= \gamma \sum_{\boldsymbol{q},j} \frac{iq_j}{\sqrt{2m\omega_q}} \hat{\rho}_{e,\boldsymbol{q}} \left(\hat{a}_{\boldsymbol{a},j} + \hat{a}_{\boldsymbol{q},j}^{\dagger} \right).
\end{aligned} \tag{6}$$

其中电子密度算符傅立叶变换具体为:

$$\hat{\rho}_{e,\boldsymbol{q}} = \int d^d r \, \hat{c}^{\dagger}(\boldsymbol{r}) \hat{c}(\boldsymbol{r}) e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}} = \frac{1}{L^d} \int d^d r \sum_{\boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{k}_2} \hat{c}_{\boldsymbol{k}_1}^{\dagger} \hat{c}_{\boldsymbol{k}_2} e^{i(\boldsymbol{q}+\boldsymbol{k}_2-\boldsymbol{k}_1)\cdot\boldsymbol{r}} = \sum_{\boldsymbol{k}} \hat{c}_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}}^{\dagger} \hat{c}_{\boldsymbol{k}}. \tag{7}$$

电子-电子有效作用

考虑电-声相互作用后，电子-声子系统总配分函数为在路径积分下写为：

$$Z = \int D[\psi, \bar{\psi}] \int D[\phi, \bar{\phi}] \exp\left\{-S_{el}[\psi, \bar{\psi}] - S_{ph}[\phi, \bar{\phi}] - S_{el-ph}[\psi, \bar{\psi}, \phi, \bar{\phi}]\right\}. \tag{8}$$

其中 S_{ph}, S_{el-ph} 分别为自由声子和电-声耦合作用量：

$$\begin{aligned} S_{ph}[\phi, \bar{\phi}] &= \sum_{q,j} \bar{\phi}_{q,j}(-i\omega_n + \omega_q)\phi_{q,j}, \\ S_{el-ph}[\psi, \bar{\psi}, \phi, \bar{\phi}] &= \gamma \sum_{q,j} \frac{iq_j}{\sqrt{2m\omega_q}}\rho_q(\phi_{q,j} + \bar{\phi}_{-q,j}), \end{aligned} \tag{9}$$

其中 $\rho_q = \sum_k \bar{\psi}_{k+q}\psi_k$. 要得到电子直接通过电-声耦合产生的有效相互作用，需要将声子场积掉。注意自由声子和电-声耦合部分的作用量是二次型：

$$S_{ph} + S_{el-ph} = \sum_{q,j}\left[\bar{\phi}_{q,j}(-i\omega_n + \omega_q)\phi_{q,j} + \gamma\frac{iq_j}{\sqrt{2m\omega_q}}\rho_q(\phi_{q,j} + \bar{\phi}_{-q,j})\right]. \tag{10}$$

将其配平方后，得到：

$$S_{ph} + S_{el-ph} = \sum_{q,j}\left[\bar{\Phi}_{q,j}(-i\omega_n + \omega_q)\Phi_{q,j} + \frac{i\gamma^2 q_j^2}{2m\omega_q(\omega_n + i\omega_q)}\right]. \tag{11}$$

其中

$$\begin{aligned} \Phi_{q,j} &= \phi_{q,j} + \frac{\gamma q_j}{\sqrt{2m\omega_q}(\omega_n + i\omega_q)}, \\ \bar{\Phi}_{q,j} &= \bar{\phi}_{q,j} - \frac{\gamma q_j}{\sqrt{2m\omega_q}(\omega_n + i\omega_q)}, \end{aligned} \tag{12}$$

二次项积分得到一个常数因子，可吸收至积分测度中，实际作用量贡献为：

$$S'_{ph} \simeq \sum_{q,j} \frac{i\gamma^2 q_j^2}{2m\omega_q(\omega_n + i\omega_q)} = \frac{\gamma^2}{2m}\sum_q \frac{q^2}{\omega_n^2 + \omega_q^2}. \tag{13}$$

上式第二个等号对 $(\omega_n, -\omega_n)$ 求了平均。最终，有效作用量为：

$$S_{eff}[\psi, \bar{\psi}] = S_{el}[\psi, \bar{\psi}] - \frac{\gamma^2}{2m}\sum_q \frac{q^2}{\omega_n^2 + \omega_q^2}\rho_q\rho_{-q}. \tag{14}$$

将虚时变为实时，即做替换 $i\omega_n \to \omega$，相互作用势为：

$$V(\boldsymbol{q}, \omega) = \frac{\gamma^2 q^2}{2m(\omega^2 - \omega_q^2)}. \tag{15}$$

当 $\omega < \omega_q$ 时，有效相互作用为吸引势。

有效作用量

费米面附近宽度为德拜频率 ω_D 的能壳内，电子为净吸引作用。当电-声耦合常数足够大，能壳内电子总相互作用是吸引的。BSC 模型近似将电子直接吸引势看作常数，其有效哈密顿量为：

$$\hat{H}_{BCS} = \int d^d r c_\sigma^\dagger(\boldsymbol{r}) \left(-\frac{\nabla^2}{2m} - \mu \right) c_\sigma(\boldsymbol{r}) - g \int d^d r c_\uparrow^\dagger(\boldsymbol{r}) c_\downarrow^\dagger(\boldsymbol{r}) c_\downarrow(\boldsymbol{r}) c_\uparrow(\boldsymbol{r}), \tag{16}$$

其中 g 为有效耦合常数。此哈密顿量对应的欧几里德作用量为：

$$S[\psi, \bar{\psi}] = \int_0^\beta d\tau \int d^d r \left[\bar{\psi}_\sigma \left(\partial_\tau - \frac{\nabla^2}{2m} - \mu \right) \psi_\sigma - g \bar{\psi}_\uparrow \bar{\psi}_\downarrow \psi_\downarrow \psi_\uparrow \right]. \tag{17}$$

辅助场路径积分

辅助场作用量

现在，利用高斯积分公式，有恒等式：

$$\exp\left\{ g \int_0^\beta d\tau \int d^d r \; \bar{\psi}_\uparrow \bar{\psi}_\downarrow \psi_\downarrow \psi_\uparrow \right\}$$
$$= \int D[\Delta, \bar{\Delta}] \exp\left\{ -\int_0^\beta d\tau \int d^d r \left[\frac{1}{g} |\Delta|^2 - \bar{\Delta} \psi_\downarrow \psi_\uparrow - \Delta \bar{\psi}_\uparrow \bar{\psi}_\downarrow \right] \right\}, \tag{18}$$

用其替换作用量中的相互作用项，得到配分函数为：

$$Z = \int D[\psi, \bar{\psi}] \int D[\Delta, \bar{\Delta}] \exp\left\{ -\int_0^\beta d\tau \int d^d r \left[\frac{1}{g} |\Delta|^2 - \bar{\Psi} \hat{\mathcal{G}}^{-1} \Psi \right] \right\}. \tag{19}$$

其中引入了 Nambu spinor 算符：

$$\Psi = (\psi_\uparrow, \; \bar{\psi}_\downarrow)^T, \; \bar{\Psi} = \Psi^\dagger \tag{20}$$

此时格林函数 $\hat{\mathcal{G}}^{-1}$ 在自旋空间是一个 2×2 矩阵，其矩阵形式为：

$$\hat{\mathcal{G}}^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{G}_p^{-1} & \Delta \\ \bar{\Delta} & \hat{G}_h^{-1} \end{pmatrix}, \tag{21}$$

其中粒子格林函数部分为：

$$\hat{G}_p^{-1} = -\partial_\tau + \frac{\nabla^2}{2m} + \mu. \tag{22}$$

而空穴格林函数部分为：

$$\hat{G}_h^{-1} = -\partial_\tau - \frac{\nabla^2}{2m} - \mu. \tag{23}$$

以上符号的差异来源于粒子-空穴共轭：对于 Grassmann 二次型，粒子-空穴共轭相当于交换 $\psi, \bar{\psi}$ 位置，净效果为添上一负号；对于带有偏导数的项，利用分部积分：

$$\bar{\psi} \partial \psi = -(\partial \psi) \bar{\psi} \simeq \psi \partial \bar{\psi}. \tag{24}$$

现在，作用量中的费米场部分变为高斯形，因此可以积掉费米子自由度：

$$\int D[\psi, \bar{\psi}] \exp\left(-\bar{\Psi}\hat{\mathcal{G}}^{-1}\Psi\right) = \det \hat{\mathcal{G}}^{-1} = \exp\left(\text{Tr}\ln\hat{\mathcal{G}}^{-1}\right). \tag{25}$$

注意此处取迹运算 Tr 包括自旋自由度和时空自由度 (用 tr 代表仅在自旋空间求迹)。最终，配分函数转换为关于辅助场 $\Delta, \bar{\Delta}$ 的路径积分：

$$Z = \int D[\Delta, \bar{\Delta}] e^{-S[\Delta, \bar{\Delta}]}, \tag{26}$$

其中关于辅助场 $\Delta, \bar{\Delta}$ 的作用量为：

$$S[\Delta, \bar{\Delta}] = \frac{1}{g} \int_0^\beta d\tau \int d^d r |\Delta|^2 - \text{Tr}\ln\hat{\mathcal{G}}^{-1}. \tag{27}$$

鞍点近似

对辅助场作用量取极值：

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\delta S}{\delta \bar{\Delta}(\boldsymbol{r}, \tau)} \\
&= \frac{1}{g}\Delta(\boldsymbol{r}, \tau) - \text{Tr}\left[\hat{\mathcal{G}}(\boldsymbol{r}, \tau) \cdot \frac{\delta \hat{\mathcal{G}}^{-1}}{\delta \bar{\Delta}(\boldsymbol{r}, \tau)}\right] \\
&= \frac{1}{g}\Delta(\boldsymbol{r}, \tau) - \text{Tr}\left[\begin{pmatrix} -\partial_\tau + \frac{\nabla^2}{2m} + \mu & \Delta(\boldsymbol{r}, \tau) \\ \bar{\Delta}(\boldsymbol{r}, \tau) & -\partial_\tau - \frac{\nabla^2}{2m} - \mu \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \delta^{(d)}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\delta(\tau - \tau') & 0 \end{pmatrix}\right].
\end{aligned} \tag{28}$$

注意以上求迹运算包括自旋空间求迹和场构型空间内求迹。在实空间下不容易对场构型求迹，可在动量空间完成，动量空间的一组基底为：

$$\psi_p = \sqrt{\frac{T}{L^d}} e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r} - i\omega_n \tau} \tag{29}$$

在这组基底下，算符 $\hat{F}$ 矩阵元可通过在基底上的作用得到：

$$(\hat{F})_{p',p} = \int d\tau \int d^d r \ \bar{\psi}_{p'}\hat{F}\psi_p = \frac{T}{L^d} \int d\tau \int d^d r \left(e^{-i\boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{r} + i\omega_{n'}\tau}\hat{F}e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r} - i\omega_n\tau}\right). \tag{30}$$

比如：

$$(\partial_\tau)_{p',p} = -i\delta_{pp'}\omega_n, \tag{31}$$

$$(\nabla)_{p',p} = i\delta_{pp'}\boldsymbol{p}, \tag{32}$$

$$(f(\boldsymbol{r}, \tau))_{p',p} = \frac{T}{L^d}\delta_{pp'}f_p. \tag{33}$$

由此作用，得到格林函数动量空间矩阵元为：

$$(\hat{\mathcal{G}})_{p',p} = \begin{pmatrix} \delta_{pp'}(i\omega_n - \xi_{\boldsymbol{p}}) & \Delta_{p'-p} \\ \bar{\Delta}_{p-p'} & \delta_{pp'}(i\omega_n + \xi_{\boldsymbol{p}}) \end{pmatrix}^{-1} \tag{34}$$

其中 $\xi_{\boldsymbol{p}} = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} - \mu$，$\Delta_p$ 是 $\Delta(\boldsymbol{r}, \tau)$ 的频率分量。而变分导数动量空间矩阵元为：

$$\left(\frac{\delta \hat{\mathcal{G}}^{-1}}{\delta \bar{\Delta}(\boldsymbol{r}, \tau)} \right)_{p', p} = \frac{T}{L^d} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ e^{-i(\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p}) \cdot \boldsymbol{r} + i(\omega_{n'} - \omega_n)\tau} & 0 \end{pmatrix}. \tag{35}$$

这样，我们可以写出上述求迹表达式。这里假设极值解 $\Delta = \Delta_0 = \text{const}$，极值解变为：

$$\frac{1}{g} \Delta_0 = \frac{T}{L^d} \sum_p \begin{pmatrix} i\omega_n - \xi_{\boldsymbol{p}} & \Delta_0 \\ \bar{\Delta}_0 & i\omega_n + \xi_{\boldsymbol{p}} \end{pmatrix}^{-1}_{12} = \frac{T}{L^d} \sum_{\boldsymbol{p}, n} \frac{\Delta_0}{\omega_n^2 + \xi_{\boldsymbol{p}}^2 + |\Delta_0|^2}. \tag{36}$$

由此得到方程

$$\frac{1}{g} = \frac{T}{L^d} \sum_{\boldsymbol{p}, n} \frac{1}{\omega_n^2 + \lambda_{\boldsymbol{p}}^2}. \tag{37}$$

其中令 $\lambda_{\boldsymbol{q}} = (\xi_{\boldsymbol{p}}^2 + |\Delta_0|^2)^{1/2}$。对频率求和：

$$T \sum_n \frac{1}{\omega_n^2 + \lambda_{\boldsymbol{p}}^2} = \sum_{z_* = \pm \lambda_{\boldsymbol{p}}} n_F(z_*) \text{Res} \left[\frac{1}{z^2 - \lambda_{\boldsymbol{p}}^2} \right]_{z = z_*} = \frac{1 - 2n_F(\lambda_{\boldsymbol{p}})}{2\lambda_{\boldsymbol{p}}}. \tag{38}$$

动量空间求和中，只需考虑费米面附近 ω_D 的电子：

$$\frac{1}{g} = \frac{1}{L^d} \sum_{\boldsymbol{p}} \frac{1 - n_F(\lambda_{\boldsymbol{p}})}{2\lambda_{\boldsymbol{p}}} = \int_{-\omega_D}^{\omega_D} d\xi \, \nu(\xi) \frac{1 - n_F(\lambda(\xi))}{2\lambda(\xi)}, \tag{39}$$

其中 ν 是态密度。由于 $1 - 2n_F(\xi) = \tanh(\xi/2T)$，得到能隙方程：

$$\frac{1}{g\nu} = \int_0^{\omega_D} d\xi \frac{\tanh(\xi/2T)}{\lambda(\xi)}. \tag{40}$$

Ginzburg-Landau 理论

在相边界附近，Δ 可看作微扰，可以将 BCS 有效作用量

$$S_{BCS}[\Psi, \bar{\Psi}] = \frac{1}{g} \int d\tau \int d^d r |\Delta|^2 - \text{Tr} \ln \hat{\mathcal{G}}^{-1}. \tag{41}$$

展开成 Δ 的级数。为此需要考虑 $\text{Tr} \ln \hat{\mathcal{G}}^{-1}$ 关于 Δ 的级数展开。定义：

$$\begin{aligned}
\hat{\mathcal{G}}_0^{-1} &\equiv \begin{pmatrix} \hat{G}_p^{-1} & 0 \\ 0 & \hat{G}_h^{-1} \end{pmatrix}, \\
\hat{\Delta} &\equiv \begin{pmatrix} 0 & \Delta \\ \bar{\Delta} & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{42}$$

由此可以做变换：

$$\text{Tr} \ln \hat{\mathcal{G}}^{-1} = \text{Tr} \ln \left[\hat{\mathcal{G}}_0^{-1}(1 + \hat{\mathcal{G}}_0^{-1} \hat{\Delta}) \right] = \text{Tr} \ln \hat{\mathcal{G}}_0^{-1} + \text{Tr} \ln[1 + \hat{\mathcal{G}}_0^{-1}]. \tag{43}$$

右边第二项可以展开为：

$$\ln[1 + \hat{\mathcal{G}}_0^{-1} \hat{\Delta}] = -\sum_n \frac{1}{2n} (\hat{\mathcal{G}}_0^{-1} \hat{\Delta})^{2n}. \tag{44}$$

注意展开式没有奇数次项，因为奇数次 $\hat{\mathcal{G}}_0^{-1}\hat{\Delta}$ 乘积是无迹矩阵。

二阶近似

首先将表达式展开到二阶项 $(n=1)$，其结果为：

$$-\frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\hat{\mathcal{G}}_0^{-1}\hat{\Delta})^2 = -\mathrm{Tr}[\hat{G}_p\bar{\Delta}\hat{G}_h\Delta] \tag{45}$$

同样，求迹操作在频率空间完成。首先考虑傅立叶变换：

$$(\hat{\mathcal{G}}_0)_{p',p} \longrightarrow \delta_{pp'}\begin{pmatrix} G_p & 0 \\ 0 & -G_{-p} \end{pmatrix}, \tag{46}$$

$$(\hat{\Delta})_{p',p} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \Delta_{p'-p} \\ \bar{\Delta}_{p-p'} & 0 \end{pmatrix}. \tag{47}$$

其中

$$G_p = \frac{1}{i\omega_n - \xi_{\boldsymbol{p}}}. \tag{48}$$

因此，展开到二阶项的作用量为：

$$S^{(2)} = \sum_q \Gamma_q^{-1}|\Delta(q)|^2, \ \Gamma_q^{-1} = \frac{1}{g} - \frac{T}{L^d}\sum_p G_p G_{q-p}. \tag{49}$$

现在考虑求和式 $\sum_p G_p G_{q-p}$. 首先对频率求和：

$$\begin{aligned}
T\sum_m \frac{1}{i\omega_m - \xi_{\boldsymbol{p}}}\frac{1}{i\omega_n - i\omega_m - \xi_{\boldsymbol{q-p}}} &= \sum_{z=z_*} n_F(z_*)\mathrm{Res}\left[\frac{1}{z-\xi_{\boldsymbol{p}}}\frac{1}{i\omega_n - z - \xi_{\boldsymbol{q-p}}}\right]_{z-z_*} \\
&= \frac{1 - n_F(\xi_{\boldsymbol{p}}) - n_F(\xi_{\boldsymbol{q-p}})}{i\omega_n - \xi_{\boldsymbol{p}} - \xi_{\boldsymbol{q-p}}}.
\end{aligned} \tag{50}$$

注意上式中 $q = (\boldsymbol{q}, \omega_n)$ 是声子 4 动量。相变发生在 $\Gamma_q^{-1} = 0$ 处。此时我们考虑时空均匀的解，即 $q = (0,0)$. 由于 $\xi_{\boldsymbol{p}} = \xi_{-\boldsymbol{p}}$：

$$\frac{T}{L^d}\sum_p G_p G_{-p} = \int_{-\omega_D}^{\omega_D} d\xi \nu(\xi)\frac{1 - 2n_F(\xi)}{2\xi}. \tag{51}$$

进一步化简上式之前，注意积分式正负频率对称，只需考虑正频部分。另外，由于分母 ξ 存在，零温下该积分是发散的。有限温度时，在 $0 < \xi < T$ 区间的积分被费米分布函数控制。实际贡献主要在 $T < \xi < \omega_D$ 区间，在此小区间态密度可近似为相同，因此得到：

$$\frac{T}{L^d}\sum_p G_p G_{-p} \simeq \nu\int_T^{\omega_D}\frac{d\xi}{\xi} = \nu\ln\left(\frac{\omega_D}{T}\right). \tag{52}$$

由此确定相变点为：

$$T_c \simeq \omega_D\exp\left(-\frac{1}{g\nu}\right). \tag{53}$$

四阶近似

当 $T < T_c$ 时，二次型的作用量变得不稳定，这时为得到对体系有效的描述，需要引入更高阶的微扰。二阶作用量的不稳定性源于时空均匀部分，而不是时空导数部分，因此对更高阶的微扰项，我们也只考虑时空均匀的部分，即：

$$S^{(4)} = \frac{1}{4}\text{Tr}(\hat{\mathcal{G}}^{-1}\hat{\Delta})^4 \simeq \frac{1}{2n}\sum_p (G_p G_{-p})^2 |\Delta|^4. \tag{54}$$

上式可近似为：

$$S^{(4)} \simeq \frac{\nu|\Delta|^4}{4}\sum_n \int_{-\omega_D}^{\omega_D}\frac{d\xi}{(\omega_n^2 + \xi^2)^2} \propto \nu|\Delta|^4\sum_n\frac{1}{\omega_n^3} \propto \nu T\left(\frac{|\Delta|}{T}\right)^4. \tag{55}$$

Ginzburg-Landau 经典作用量为：

$$S_{GL}[\Delta, \bar{\Delta}] = \beta\int d^d r\left[\frac{r}{2}|\Delta|^2 + \frac{c}{2}|\partial\Delta|^2 + u|\Delta|^4\right]. \tag{56}$$

从 Ginzburg-Landau 作用量看出，当 $r < 0$ 时，辅助场 Δ 具有的 U(1) 对称性发生自发破缺。

规范对称性自发破缺

规范不变作用量

费米场具有 U(1) 规范对称性：

$$\psi \quad \rightarrow \quad e^{i\theta}\psi, \tag{57}$$

$$\bar{\psi} \quad \rightarrow \quad e^{-i\theta}\bar{\psi}. \tag{58}$$

相应地，为了保证作用量是规范不变的，将对 ψ 作用的时空导数算符替换为协变导数算符：

$$\partial_\tau \quad \rightarrow \quad \partial_\tau + ie\phi, \tag{59}$$

$$\nabla \quad \rightarrow \quad \nabla - ie\boldsymbol{A}. \tag{60}$$

其中电磁势在规范变换下：

$$\phi \quad \rightarrow \quad \phi - \frac{1}{e}\partial_\tau\theta, \tag{61}$$

$$\boldsymbol{A} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{A} + \frac{1}{e}\nabla\theta. \tag{62}$$

类似的，对共轭场 $\bar{\psi}$ 作用的时空导数算符在规范变换下：

$$\partial_\tau \quad \rightarrow \quad \partial_\tau - ie\phi, \tag{63}$$

$$\nabla \quad \rightarrow \quad \nabla + ie\boldsymbol{A}. \tag{64}$$

因此，考虑外电磁场情况下，辅助场 Δ 的有效作用量变为：

$$S[\Delta, \bar{\Delta}] = \frac{1}{g}\int d\tau\int d^d r|\Delta|^2 - \text{Tr}\ln\hat{\mathcal{G}}^{-1}. \tag{65}$$

其中规范不变的格林函数为：

$$\hat{\mathcal{G}}^{-1} = \begin{pmatrix} -(\partial_\tau + i\phi) + \frac{1}{2m}(\nabla - i\boldsymbol{A})^2 + \mu & \Delta \\ \bar{\Delta} & -(\partial_\tau - i\phi) - \frac{1}{2m}(\nabla + i\boldsymbol{A})^2 - \mu \end{pmatrix}. \tag{66}$$

规范场微扰展开

对 Ginzburg-Landau 作用量，当 $T < T_c$ 时，$r(T) < 0$，此时经典作用量在

$$|\Delta| = \Delta_0 = \sqrt{\frac{-r}{4u}} \tag{67}$$

取得极值。极值场选取有一个整体相位不确定性：

$$\Delta = \Delta_0 e^{2i\theta}. \tag{68}$$

此相位也对应费米场的 U(1) 定域规范对称性。此作用量的经典基态对应一个确定的相位 θ，此时规范对称性发生自发破缺。

我们从对称性破缺的基态开始，建立剩余自由度：规范场 $(\phi, \boldsymbol{A})$ 和相位 θ 的低能场论 (此时辅助场 Δ 绝对值固定，只剩一个相位自由度)。首先，我们引入一个规范变换：

$$\hat{U}(\boldsymbol{r}, \tau) = \begin{pmatrix} e^{-i\theta(\boldsymbol{r}, \tau)} & 0 \\ 0 & e^{i\theta(\boldsymbol{r}, \tau)} \end{pmatrix} \tag{69}$$

此规范变换将 $\Delta_0 e^{2i\theta}$ 的相位消去：

$$\hat{\mathcal{G}}^{-1} \to \hat{U}^{-1}\hat{\mathcal{G}}^{-1}\hat{U} = \begin{pmatrix} -(\partial_\tau + i\tilde{\phi}) + \frac{1}{2m}(\nabla - i\tilde{\boldsymbol{A}})^2 + \mu & \Delta_0 \\ \Delta_0 & -(\partial_\tau - i\tilde{\phi}) - \frac{1}{2m}(\nabla + i\tilde{\boldsymbol{A}})^2 - \mu \end{pmatrix}. \tag{70}$$

其中 $\tilde{\phi}, \tilde{\boldsymbol{A}}$ 是规范场相应的规范变换：

$$\tilde{\phi} = \phi + \partial_\tau \theta, \quad \tilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A} - \nabla\theta. \tag{71}$$

将格林函数中规范场部分显式写出来：

$$\hat{\mathcal{G}}^{-1} = \hat{\mathcal{G}}_0^{-1} - \hat{\mathcal{X}}_1 - \hat{\mathcal{X}}_2. \tag{72}$$

其中

$$\hat{\mathcal{G}}_0^{-1} = -\sigma_0\partial_\tau + \sigma_1\Delta_0 + \sigma_3\left(\frac{\nabla^2}{2m} + \mu\right), \tag{73}$$

$$\hat{\mathcal{X}}_1 = \sigma_3\tilde{\phi} + \frac{i}{2m}\sigma_0(\nabla\tilde{\boldsymbol{A}} + \tilde{\boldsymbol{A}}\nabla), \tag{74}$$

$$\hat{\mathcal{X}}_2 = \sigma_3\frac{1}{2m}\tilde{\boldsymbol{A}}^2. \tag{75}$$

精确至二阶的展开式为：

$$\begin{aligned} -\operatorname{Tr}\ln\left(\hat{\mathcal{G}}_0^{-1} - \hat{\mathcal{X}}_1 - \hat{\mathcal{X}}_2\right) &= -\operatorname{Tr}\ln\hat{\mathcal{G}}_0^{-1} - \operatorname{Tr}\ln\left(1 - \hat{\mathcal{G}}_0\hat{\mathcal{X}}_1 - \hat{\mathcal{G}}_0\hat{\mathcal{X}}_2\right) \\ &= -\operatorname{Tr}\ln\hat{\mathcal{G}}_0^{-1} + \operatorname{Tr}\left(\hat{\mathcal{G}}_0\hat{\mathcal{X}}_1\right) + \operatorname{Tr}\left(\hat{\mathcal{G}}_0\hat{\mathcal{X}}_2 + \frac{1}{2}\hat{\mathcal{G}}_0\hat{\mathcal{X}}_1\hat{\mathcal{G}}_0\hat{\mathcal{X}}_1\right). \end{aligned} \tag{76}$$

首先考虑一阶微扰 $S^{(1)} = \text{Tr}\left(\hat{\mathcal{G}}_0^{-1}\hat{\mathcal{X}}_1\right)$. 为了方便求迹，首先在动量空间写出前三个算符的傅立叶变换：

$$(\hat{\mathcal{G}}_0^{-1})_{p',p} = \delta_{pp'}(i\sigma_0\omega_n + \sigma_1\Delta_0 - \sigma_3\xi_{\boldsymbol{p}}), \tag{77}$$

$$(\hat{\mathcal{X}}_1)_{p',p} = i\sigma_3\tilde{\phi}_{p'-p} - \delta_{pp'}\sigma_0\frac{(\boldsymbol{p}'+\boldsymbol{p})\cdot\tilde{\boldsymbol{A}}_{p'-p}}{2m}, \tag{78}$$

$$(\hat{\mathcal{X}}_2)_{p',p} = \frac{1}{2m}\sigma_3(\tilde{\boldsymbol{A}}^2)_{p'-p}. \tag{79}$$

求迹转换为动量求和：

$$S^{(1)}[A] = \sum_p \text{tr}\left[\hat{\mathcal{G}}_{0,p}\left(i\sigma_3\tilde{\phi}_0 - \frac{1}{m}\sigma_0\boldsymbol{p}\cdot\tilde{\boldsymbol{A}}_0\right)\right]. \tag{80}$$

注意上式已经对时空求迹。由于第二项含有 $\boldsymbol{p}$ 的奇数次项，因此为零，因此作用量变为：

$$S^{(1)}[A] = i\tilde{\phi}_0\sum_p \text{tr}\left(\hat{\mathcal{G}}_{0,p}\sigma_3\right) = i\tilde{\phi}_0\sum_p\left[\left(\hat{\mathcal{G}}_{0,p}\right)_{1,1} - \left(\hat{\mathcal{G}}_{0,p}\right)_{2,2}\right]. \tag{81}$$

频率求和之后：

$$\sum_{\boldsymbol{p}}\sum_n \left(\hat{\mathcal{G}}_{0,p}\right)_{1,1} = -\sum_{\boldsymbol{p}}\sum_n\left(\hat{\mathcal{G}}_{0,p}\right)_{2,2} = \frac{1}{T}\sum_{\boldsymbol{p}} n_F(\xi_{\boldsymbol{p}}) = \frac{N_e}{T}. \tag{82}$$

因此：

$$S^{(1)}[A] = iN_e\beta\tilde{\phi}_0 = iN_e\beta\int\frac{d\tau}{\beta}\int\frac{d^d r}{L^d}\phi(\boldsymbol{r},\tau) = in_e\int d\tau d^d r\phi(\boldsymbol{r},\tau). \tag{83}$$

其中 $n \equiv N_e/L^d$，此贡献来源于静电场于电子耦合。现在考虑二阶微扰，首先考虑第一部分贡献：

$$S^{(2,1)} = \text{Tr}\left(\hat{\mathcal{G}}_0\hat{\mathcal{X}}_2\right). \tag{84}$$

求迹为：

$$S^{(2,1)} = \frac{(\tilde{\boldsymbol{A}}^2)_0}{2m}\sum_p \text{tr}\left(\hat{\mathcal{G}}_{0,p}\sigma_3\right) = \frac{n_e}{2m}L^d\beta(\tilde{\boldsymbol{A}}^2)_0 = \frac{n_e}{2m}\int d\tau d^d r\tilde{\boldsymbol{A}}^2(\boldsymbol{r},\tau). \tag{85}$$

现在考虑第二部分贡献：

$$S^{(2,2)} = \frac{1}{2}\text{tr}\left(\hat{\mathcal{G}}_0\hat{\mathcal{X}}_1\hat{\mathcal{G}}_0\hat{\mathcal{X}}_1\right). \tag{86}$$

注意包含 $\boldsymbol{p}$ 奇数次项的部分求迹为零，因此作用量分为两部分，$S^{(2,2)} = S_A^{(2,2)} + S_B^{(2,2)}$：

$$S_A^{(2,2)} = \sum_{p,q}\text{tr}\left(-\hat{\mathcal{G}}_{0,p}\sigma_3\tilde{\phi}_q\hat{\mathcal{G}}_{0,p+q}\sigma_3\tilde{\phi}_{-p}\right), \tag{87}$$

$$S_B^{(2,2)} = \sum_{p,q}\text{tr}\left(\hat{\mathcal{G}}_{0,p}\frac{\sigma_0(2\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})\cdot\tilde{\boldsymbol{A}}_q}{2m}\hat{\mathcal{G}}_{0,p+q}\frac{\sigma_0(2\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q})\cdot\tilde{\boldsymbol{A}}_{-q}}{2m}\right). \tag{88}$$

在微扰意义下，规范场时空导数较小，即 $q \ll p$，因此做近似：

$$S_A^{(2,2)} \approx -\sum_{p,q}\text{tr}\left(\hat{\mathcal{G}}_{0,p}\sigma_3\tilde{\phi}_q\hat{\mathcal{G}}_{0,p}\sigma_3\tilde{\phi}_{-p}\right), \tag{89}$$

$$S_B^{(2,2)} \approx \frac{1}{m^2}\sum_{p,q}\text{tr}\left(\hat{\mathcal{G}}_{0,p}\sigma_0\boldsymbol{p}\cdot\tilde{\boldsymbol{A}}_q\hat{\mathcal{G}}_{0,p}\sigma_0\boldsymbol{p}\cdot\tilde{\boldsymbol{A}}_{-q}\right). \tag{90}$$

利用等式：

$$\hat{\mathcal{G}}_{0,p} = \frac{-i\sigma_0\omega_n - \sigma_3\xi_{\boldsymbol{p}} + \sigma_1\Delta_0}{\omega_n^2 + \lambda_{\boldsymbol{p}}^2}, \tag{91}$$

得到 A 项：

$$S_A^{(2,2)} = \sum_{p,q} \frac{\tilde{\phi}_q\tilde{\phi}_{-q}(\omega_n^2 - \lambda_{\boldsymbol{p}}^2 + 2\Delta_0^2)}{(\omega_n^2 + \lambda_{\boldsymbol{p}}^2)^2} \tag{92}$$

对 B 项，利用恒等式：

$$\sum_{\boldsymbol{p}} (\boldsymbol{p}\cdot\tilde{\boldsymbol{A}}_q)(\boldsymbol{p}\cdot\tilde{\boldsymbol{A}}_{-q})F(\boldsymbol{p}^2) = \frac{\tilde{\boldsymbol{A}}_q\cdot\tilde{\boldsymbol{A}}_{-q}}{d}\sum_{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{p}^2 F(\boldsymbol{p}^2). \tag{93}$$

其中 $F(\boldsymbol{p}^2)$ 是任意旋转不变函数，因此：

$$S_B^{(2,2)} = \sum_{p,q} \frac{-\omega_n^2 + \lambda_{\boldsymbol{p}}^2}{(\omega_n^2 + \lambda_{\boldsymbol{p}}^2)^2} \frac{\boldsymbol{p}^2\tilde{\boldsymbol{A}}_q\cdot\tilde{\boldsymbol{A}}_{-q}}{dm^2}. \tag{94}$$

现在变换回实空间：

$$S^{(2)}[A] = \int d\tau d^d r \left[c_1(\phi + \partial_\tau\theta)^2 + c_2(\boldsymbol{A} - \nabla\theta)^2 \right]. \tag{95}$$

其中：

$$c_1 = \frac{T}{L^d}\sum_{p} \frac{\omega_n^2 - \lambda_{\boldsymbol{p}}^2 + 2\Delta_0^2}{(\omega_n^2 + \lambda_{\boldsymbol{p}}^2)^2}, \tag{96}$$

$$c_2 = \frac{n_e}{2m} + \frac{1}{dm^2}\frac{T}{L^d}\sum_{p} \frac{\boldsymbol{p}^2(-\omega_n^2 + \lambda_{\boldsymbol{p}}^2)}{(\omega_n^2 + \lambda_{\boldsymbol{p}}^2)}. \tag{97}$$

首先考虑 c_1 求和式。频率求和为：

$$
\begin{aligned}
&T\sum_n \frac{\omega_n^2 - \lambda_{\boldsymbol{p}}^2 + 2\Delta_0^2}{(\omega_n^2 + \lambda_{\boldsymbol{p}}^2)^2} \\
&= \sum_{z_* = \pm\lambda_{\boldsymbol{p}}} \text{Res}\left[\frac{n_F(z)(-z^2 - \lambda_{\boldsymbol{p}}^2 + 2\Delta_0^2)}{(z + \lambda_{\boldsymbol{p}})^2(z - \lambda_{\boldsymbol{p}})^2} \right]_{z = z_*} \\
&= \left[\frac{n_F(z)(-z^2 - \lambda_{\boldsymbol{p}}^2 + 2\Delta_0^2)}{(z + \lambda_{\boldsymbol{p}})^2} \right]'_{z = \lambda_{\boldsymbol{p}}} + \left[\frac{n_F(z)(-z^2 - \lambda_{\boldsymbol{p}}^2 + 2\Delta_0^2)}{(z - \lambda_{\boldsymbol{p}})^2} \right]'_{z = -\lambda_{\boldsymbol{p}}} \\
&= \frac{1}{2\lambda_{\boldsymbol{p}}}\left[-n_F'(\lambda_{\boldsymbol{p}})\xi_{\boldsymbol{p}}^2 - n_F(\lambda_{\boldsymbol{p}})\left(\frac{\Delta_0}{\lambda_{\boldsymbol{p}}}\right)^2 + n_F'(-\lambda_{\boldsymbol{p}})\xi_{\boldsymbol{p}}^2 + n_F(-\lambda_{\boldsymbol{p}})\left(\frac{\Delta_0}{\lambda_{\boldsymbol{p}}}\right)^2 \right].
\end{aligned} \tag{98}
$$

由于我们现在考虑的是 $T < T_c$ 情形，$T/\Delta \to 0$，此时频率求和的贡献几乎全部来源于含有费米分布 $n_F(-\lambda_{\boldsymbol{p}})$ 的项，即：

$$c_1 \simeq \frac{1}{L^d}\sum_{\boldsymbol{p}} \frac{\Delta_0^2}{2\lambda_{\boldsymbol{p}}^3} = \frac{\nu}{2}\int d\xi \frac{\Delta_0^2}{(\xi^2 + \Delta_0^2)^{3/2}} = \nu. \tag{99}$$

因此，我们得到了作用量的系数 c_1 等于费米面附近的态密度 ν. 下面考虑 c_2 的求和式。频率求和为：

$$T\sum_n \frac{-\omega_n^2 + \lambda_{\boldsymbol{p}}^2}{(\omega_n^2 + \lambda_{\boldsymbol{p}}^2)^2} = \sum_{z_* = \pm\lambda_{\boldsymbol{p}}} \text{Res}\left[\frac{n_F(z)(z^2 + \lambda_{\boldsymbol{p}}^2)}{(z + \lambda_{\boldsymbol{p}})^2(z - \lambda_{\boldsymbol{p}})^2} \right]_{z = z_*}$$

$$= \left[\frac{n_F(z)(z^2 + \lambda_{\boldsymbol{p}}^2)}{(z + \lambda_{\boldsymbol{p}})^2} \right]'_{z=\lambda_{\boldsymbol{p}}} + \left[\frac{n_F(z)(z^2 + \lambda_{\boldsymbol{p}}^2)}{(z - \lambda_{\boldsymbol{p}})^2} \right]'_{z=-\lambda_{\boldsymbol{p}}}$$

$$= n_F'(\lambda_{\boldsymbol{p}})$$

$$= -\beta n_F(\lambda_{\boldsymbol{p}})(1 - n_F(\lambda_{\boldsymbol{p}})). \tag{100}$$

费米面附近 $\boldsymbol{p}^2 \approx 2m\mu$，由此得到：

$$c_2 = \frac{n_e}{2m} - \frac{\nu\mu}{dm} \int d\xi \ \beta n_F(\lambda)(1 - n_F(\lambda)). \tag{101}$$

定义超导电子密度：

$$n_s = n_e - \frac{2\nu\mu}{d} \int d\xi \ \beta n_F(\lambda)(1 - n_F(\lambda)). \tag{102}$$

在低温 $T \ll \Delta_0$ 时，$\lambda > \Delta_0 \gg T$，因此 $n_F(\lambda) \approx 0$，此时 $n_s \approx n_e$. 相反，在高温 $T \gg \delta_0$ 时：

$$\int d\xi \beta n_F(\lambda)(1 - n_F(\lambda)) \approx \int_0^\infty d\xi \beta n_F(\lambda)(1 - n_F(\lambda))$$

$$= -\int_0^\infty d\xi \partial_\xi n_F(\xi) = 1. \tag{103}$$

此时

$$n_s \simeq \frac{n_e}{2m} - \frac{\nu\mu}{dm} = 0. \tag{104}$$

第二个等式来自于电子密度与态密度关系：

$$\nu = \frac{\partial n_e}{\partial \xi}$$

$$= \frac{\partial(V_d p^d)}{\partial p} \left(\frac{\partial(p^2/2m)}{\partial p} \right)^{-1}$$

$$= \frac{dV_d p^{d-1}}{p/m} = \frac{dn_e}{2\mu}. \tag{105}$$

Meissner 效应

现在我们已经得到破缺对称性后的低能理论作用量：

$$S[A, \theta] = S_{E-M} + \int d\tau d^d r \left[\nu(\partial_\tau \theta + \phi)^2 + \frac{n_s}{2m} \left(\nabla\theta - \boldsymbol{A} \right)^2 \right] \tag{106}$$

其中

$$S_{E-M} = \int d\tau d^d r \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tag{107}$$

是电磁场作用量。现在考虑只有静磁场的情况，即要求：

$$\phi = 0, \ \partial_\tau \boldsymbol{A} = 0. \tag{108}$$

此时，作用量可分为：

$$S[\boldsymbol{A}, \theta] = S_{cl}[\boldsymbol{A}, \theta] + \nu \int d\tau \int d^d r (\partial_\tau \theta)^2. \tag{109}$$

其中 S_{cl} 是经典作用量 (场量在虚时间上无涨落):

$$S_{cl}[\boldsymbol{A}, \theta] = \frac{\beta}{2} \int d^d r \left[\frac{n_s}{m} (\nabla\theta - \boldsymbol{A})^2 + (\nabla \times \boldsymbol{A})^2 \right]. \tag{110}$$

此时，作用量中的量子量子涨落完全来源于第二项

$$\nu \int d\tau \int d^d r (\partial_\tau \theta)^2 = \nu \sum_{\boldsymbol{q}, n} \omega_n \theta_{\boldsymbol{q}, n} \theta_{-\boldsymbol{q}, -n}. \tag{111}$$

这项的大小与温度密切相关，当我们考虑较高温度 (但仍有 $T < T_c$) 时，$n > 0$ 的松原频率贡献的作用量可能远大于 S_{cl}，此时我们就可以忽略这些 "高能" 的自由度，而只考虑经典部分作用量。下面考虑这个经典作用量给出的有效理论。首先，将作用量写在动量空间中：

$$\begin{aligned}
S_{cl}[\boldsymbol{A}, \theta] &= \frac{\beta}{2} \sum_{\boldsymbol{q}} \left[\frac{n_s}{m} (i\boldsymbol{q}\theta_{\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{q}}) \cdot (-i\boldsymbol{q}\theta_{-\boldsymbol{q}} - \boldsymbol{A}_{-\boldsymbol{q}}) + (\boldsymbol{q} \times \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{q}}) \cdot (\boldsymbol{q} \times \boldsymbol{A}_{-\boldsymbol{q}}) \right] \\
&= \frac{\beta}{2} \sum_{\boldsymbol{q}} \left[\frac{n_s}{m} (\theta_{\boldsymbol{q}} \boldsymbol{q}^2 \theta_{-\boldsymbol{q}} - 2i\theta_{\boldsymbol{q}} \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{A}_{-\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{q}} \cdot \boldsymbol{A}_{-\boldsymbol{q}}) + (\boldsymbol{q} \times \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{q}}) \cdot (\boldsymbol{q} \times \boldsymbol{A}_{-\boldsymbol{q}}) \right]
\end{aligned} \tag{112}$$

为得到规范场的有效理论，我们积掉 $\theta_{\boldsymbol{q}}$，得到有效作用量：

$$S_{eff}[\boldsymbol{A}] = \frac{\beta}{2} \sum_{\boldsymbol{q}} \left[\frac{n_s}{m} \left(\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{q}} \cdot \boldsymbol{A}_{-\boldsymbol{q}} - \frac{(\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{q}}) \cdot (\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{A}_{-\boldsymbol{q}})}{\boldsymbol{q}^2} \right) + (\boldsymbol{q} \times \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{q}}) \cdot (\boldsymbol{q} \times \boldsymbol{A}_{-\boldsymbol{q}}) \right] \tag{113}$$

将矢势分解成横向和纵向分量：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{q}} &= \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{q}}^{\perp} + \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{q}}^{\parallel}, \\
\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{q}}^{\perp} &= \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{q}} - \frac{\boldsymbol{q}(\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{q}})}{\boldsymbol{q}^2}, \\
\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{q}}^{\parallel} &= \frac{\boldsymbol{q}(\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{q}})}{\boldsymbol{q}^2}.
\end{aligned} \tag{114}$$

注意到

$$\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{q}}^{\perp} \cdot \boldsymbol{A}_{-\boldsymbol{q}}^{\perp} = \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{q}} \cdot \boldsymbol{A}_{-\boldsymbol{q}} - \frac{(\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{q}}) \cdot (\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{A}_{-\boldsymbol{q}})}{\boldsymbol{q}^2}. \tag{115}$$

同时由于 $\boldsymbol{q} \times \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{q}}^{\parallel} = 0$：

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{q} \times \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{q}}) \cdot (\boldsymbol{q} \times \boldsymbol{A}_{-\boldsymbol{q}}) &= (\boldsymbol{q} \times \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{q}}^{\perp}) \cdot (\boldsymbol{q} \times \boldsymbol{A}_{-\boldsymbol{q}}^{\perp}) \\
&= \boldsymbol{q}^2 \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{q}}^{\perp} \cdot \boldsymbol{A}_{-\boldsymbol{q}}^{\perp}
\end{aligned} \tag{116}$$

第二个等号利用了恒等式：

$$(\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{u}_2) \cdot (\boldsymbol{v}_1 \times \boldsymbol{v}_2) = (\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{v}_1)(\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{v}_2) - (\boldsymbol{u}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2)(\boldsymbol{u}_2 \cdot \boldsymbol{v}_1). \tag{117}$$

由此得到作用量：

$$S_{eff}[\boldsymbol{A}] = \frac{\beta}{2} \sum_{\boldsymbol{q}} \left(\frac{n_s}{m} + \boldsymbol{q}^2 \right) \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{q}}^{\perp} \cdot \boldsymbol{A}_{-\boldsymbol{q}}^{\perp}. \tag{118}$$

此时规范场 $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{q}}^{\perp}$ 的有效作用量含有一个质量项，这导致超导体内部的抗磁性。我们考虑这个经典作用量给出的运动方程：

$$\left(\frac{n_s}{m} - \nabla^2\right)\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = 0. \tag{119}$$

对方程两边作用 $\nabla\times$：

$$\left(\frac{n_s}{m} - \nabla^2\right)\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = 0. \tag{120}$$

此运动方程给出一个指数衰减的解：$\boldsymbol{B}(x) \sim \exp(-x/\lambda)$，其中 $\lambda = \sqrt{m/n_s}$.