

# 费米气体 RPA

任杰

## 傅立叶变换系数

对平移不变的场而言，物理量计算往往在动量空间中完成。为避免混淆傅立叶变换系数，我们在此明确函数和场的傅立叶变换，这里的规定和 Altland & Simons, *Condensed Matter Field Theory* 书中的规定是一样的。

场的傅立叶变换系数规定为：

$$\psi_p = \frac{1}{\sqrt{\beta L^3}} \int d^4x e^{-ip \cdot x} \psi(x), \quad (1)$$

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\beta L^3}} \sum_p e^{+ip \cdot x} \psi_p. \quad (2)$$

其中记 4 坐标和 4 动量为：

$$x \equiv (\mathbf{r}, \tau), \quad (3)$$

$$p \equiv (\mathbf{p}, \omega_n), \quad (4)$$

$$p \cdot x \equiv \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - \omega_n \tau. \quad (5)$$

坐标积分和动量求和为：

$$\int d^4x \equiv \int_0^\beta d\tau \int d^3r, \quad (6)$$

$$\sum_p \equiv \sum_{\omega_n} \sum_{\mathbf{p}} \quad (7)$$

函数的傅立叶变换采用另一种归一化：

$$f_{\mathbf{q}} = \int d^3r e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} f(\mathbf{r}), \quad (8)$$

$$f(\mathbf{r}) = \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{q}} e^{+i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}} f_{\mathbf{q}} \quad (9)$$

许多时候，我们会取热力学极限： $L \rightarrow \infty$ ，此时动量求和变为积分：

$$\frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{p}} \longrightarrow \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}, \quad (10)$$

## 作用量

相互作用费米气体的作用量为：

$$S = S_0 + S_1, \quad (11)$$

$$S_0 = \int d^4x \bar{\psi}_\sigma(x) \left( \partial_\tau - \frac{\nabla^2}{2m} - \mu \right) \psi_\sigma(x), \quad (12)$$

$$S_1 = \frac{1}{2} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \bar{\psi}_\sigma(x_1) \bar{\psi}_{\sigma'}(x_2) V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \psi_{\sigma'}(x_2) \psi_\sigma(x_1). \quad (13)$$

其中  $V(\mathbf{r})$  是库伦相互作用：

$$V(\mathbf{r}) = \frac{e^2}{r}. \quad (14)$$

在动量空间中，作用量表达为求和式：

$$S_0 = \sum_p \bar{\psi}_{p,\sigma} \left( -i\omega_n + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \mu \right) \psi_{p,\sigma}, \quad (15)$$

$$S_1 = \frac{T}{2L^3} \sum_{p_1, p_2, q} \bar{\psi}_{p_1+q, \sigma} \bar{\psi}_{p_2-q, \sigma'} V(\mathbf{q}) \psi_{p_2, \sigma'} \psi_{p_1, \sigma}. \quad (16)$$

其中  $V(\mathbf{q})$  是库伦势的傅立叶变换：

$$V(\mathbf{q}) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} e^2 \int d^3r \frac{e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - \alpha r}}{r} \quad (17)$$

$$= \lim_{\alpha \rightarrow 0} e^2 \int_0^{+\infty} r^2 dr \int_{-1}^{+1} d(\cos \theta) \int_0^{2\pi} d\theta \frac{e^{-iqr \cos \theta - \alpha r}}{r} \quad (18)$$

$$= \lim_{\alpha \rightarrow 0} 2\pi e^2 \int_0^{+\infty} dr \cdot r e^{-\alpha r} \frac{e^{-iqr} - e^{iqr}}{-iqr} \quad (19)$$

$$= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{2\pi e^2}{iq} \int_0^{+\infty} dr (e^{iqr - \alpha r} - e^{-iqr - \alpha r}) \quad (20)$$

$$= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{2\pi e^2}{iq} \left[ \frac{-1}{iq - \alpha} - \frac{-1}{-iq - \alpha} \right] \quad (21)$$

$$= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{4\pi e^2}{q^2 + \alpha^2} \quad (22)$$

$$= \frac{4\pi e^2}{q^2}. \quad (23)$$

作用量的指数做级数展开为：

$$e^{-S} = e^{-S_0} e^{-S_1} = e^{-S_0} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} S_1^n. \quad (24)$$

## 高斯积分与频率求和

### Grassmann 代数

Grassmann 数满足性质：

$$\psi_1 \psi_2 = -\psi_2 \psi_1, \quad (25)$$

$$f(\psi) = 1 + f'(0)\psi, \quad (26)$$

$$\int d\psi = 0, \quad (27)$$

$$\int \psi d\psi = 1. \quad (28)$$

由此，Grassmann 高斯型实际上是二次型：

$$e^{-a\bar{\psi}\psi} = 1 - a\bar{\psi}\psi. \quad (29)$$

因此高斯积分为：

$$\int d\bar{\psi}d\psi e^{-\bar{\psi}a\psi} = \int d\bar{\psi}d\psi (1 - a\bar{\psi}\psi) \quad (30)$$

$$= a \int d\bar{\psi}d\psi \psi \bar{\psi} \quad (31)$$

$$= a, \quad (32)$$

多变量情形为：

$$\int d\bar{\psi}d\psi e^{-\bar{\psi}a\psi + \bar{u}\psi + \bar{\psi}v} = a e^{\bar{u}v}, \quad (33)$$

$$\int d\bar{\psi}d\psi e^{-\bar{\psi}^T \mathbf{A} \psi + \bar{\mathbf{u}}^T \cdot \psi + \bar{\psi}^T \cdot \mathbf{v}} = \det \mathbf{A} e^{\bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{v}}. \quad (34)$$

### Wick 定理

泛函平均值  $\langle \dots \rangle$  定义为：

$$\langle \dots \rangle \equiv \frac{\int D[\bar{\psi}, \psi] (\dots) \exp(-\bar{\psi}^T \mathbf{A} \psi)}{\int D[\bar{\psi}, \psi] \exp(-\bar{\psi}^T \mathbf{A} \psi)}, \quad (35)$$

其中积分测度为：

$$D[\psi^\dagger, \psi] \equiv \prod_i d\psi_i^* d\psi_i. \quad (36)$$

Wick 定理可用于计算  $2n$  点关联函数：

$$\langle \psi_{i_1} \cdots \psi_{i_n} \bar{\psi}_{j_1} \cdots \bar{\psi}_{j_n} \rangle. \quad (37)$$

为计算此关联函数，引入生成泛函：

$$Z[\mathbf{u}, \mathbf{v}] \equiv \frac{\int D[\bar{\psi}, \psi] \exp(-\bar{\psi}^T \mathbf{A} \psi + \bar{\mathbf{u}}^T \cdot \psi + \bar{\psi}^T \cdot \mathbf{v})}{\int D[\bar{\psi}, \psi] \exp(-\bar{\psi}^T \mathbf{A} \psi)} \quad (38)$$

$$= \exp(\bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{v}) \quad (39)$$

$$= \prod_{i,j} \exp[\bar{u}_i (\mathbf{A}^{-1})_{ij} v_j]. \quad (40)$$

关联函数可由对生成泛函求若干偏导得到：

$$\langle \psi_{i_1} \cdots \psi_{i_n} \bar{\psi}_{j_1} \cdots \bar{\psi}_{j_n} \rangle = \frac{\partial^{2n} F[\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v}]}{\partial \bar{u}_{i_1} \cdots \partial \bar{u}_{i_n} \partial v_{j_1} \cdots \partial v_{j_n}} \Big|_{\bar{\mathbf{u}}=\mathbf{v}=0} \quad (41)$$

$$= \frac{\partial^n}{\partial \bar{u}_{i_1} \cdots \partial \bar{u}_{i_n}} \prod_{mn} \bar{u}_m (\mathbf{A}^{-1})_{mj_n} \Big|_{\mathbf{u}=0} \quad (42)$$

$$= \sum_P \text{sign} P \cdot (\mathbf{A}^{-1})_{i_1 j_{P1}} \cdots (\mathbf{A}^{-1})_{i_n j_{Pn}} \quad (43)$$

## 松原频率求和

利用费米分布函数

$$n_F(z) \equiv \frac{1}{\exp(\beta z) + 1}, \quad (44)$$

频率求和  $\frac{1}{\beta} \sum_l f(\omega_l)$  可以转化为复平面内的回路积分：

$$\frac{1}{\beta} \sum_l f(\omega_l) = - \oint \frac{dz}{2\pi i} n_F(z) f(i\omega_l \rightarrow z). \quad (45)$$

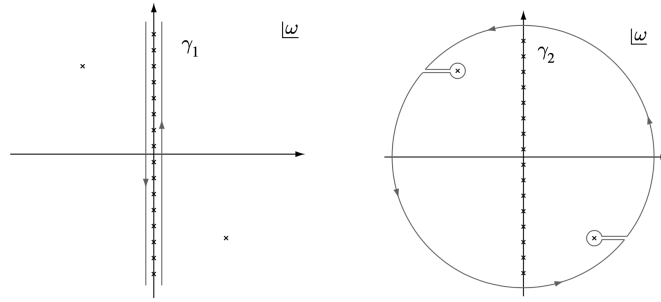


图 1: 积分回路

如果函数  $f(i\omega_l \rightarrow z)$  在  $z \rightarrow \infty$  快速趋于 0 (快于  $z^{-1}$ )，且在复平面有极点，则利用留数定理，回路积分进一步化为：

$$\frac{1}{\beta} \sum_l f(\omega_l) = \sum_{z_k} \text{Res}[n_F(z) f(i\omega_l \rightarrow z)]_{z=z_k}. \quad (46)$$

## 自由费米气体

自由场作用量为：

$$S_0 = \sum_p \sum_{\sigma} \bar{\psi}_p^{\sigma} \left( -i\omega_l + \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \mu \right) \psi_p^{\sigma}. \quad (47)$$

自由场的泛函平均为：

$$\langle \cdots \rangle_0 = \frac{\int D[\bar{\psi}, \psi] (\cdots) \exp(-S_0)}{\int D[\bar{\psi}, \psi] \exp(-S_0)}. \quad (48)$$

## 格林函数

自由费米气体的格林函数为

$$G_p \equiv -\langle \psi_p \bar{\psi}_p \rangle = \frac{1}{i\omega_n - \xi_p}, \quad (49)$$

其中  $\xi_{\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \mu$ . 对频率求和的结果为:

$$\frac{1}{\beta} \sum_n G_p = \frac{1}{\beta} \sum_n \frac{1}{i\omega_n - \xi_{\mathbf{p}}} \quad (50)$$

$$= \sum_{z_k} \text{Res} \left[ \frac{1}{e^{\beta z} + 1} \frac{1}{z - \xi_{\mathbf{p}}} \right] \Big|_{z=z_k} \quad (51)$$

$$= n_F(\xi_{\mathbf{p}}). \quad (52)$$

## 自由能

配分函数为:

$$Z^{(0)} = \prod_{p, \sigma} [\beta(-i\omega_l + \xi_{\mathbf{p}})]. \quad (53)$$

自由能为

$$F^{(0)} = -T \ln Z^{(0)} \quad (54)$$

$$= -2T \sum_p \ln [\beta(-i\omega_l + \xi_{\mathbf{p}})]. \quad (55)$$

松原频率求和可转换为复平面内回路积分。 $\ln$  函数在复平面上有割线，回路转换为绕割线的积分，也就是实轴上下部分的积分:

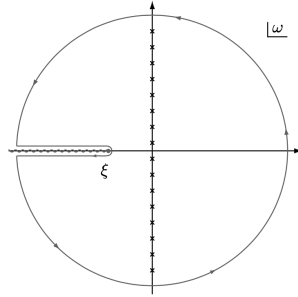


图 2: 含有割线的积分回路

$$\sum_n \ln [\beta(-i\omega_n + \xi_{\mathbf{p}})] = -\beta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{2\pi i} n_F(z) \ln \left( \frac{z^+ - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \mu}{z^- - \frac{\mathbf{k}^2}{2m} + \mu} \right) \quad (56)$$

$$\xrightarrow{b.p.} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{2\pi i} \ln(1 + e^{-\beta z}) \left[ \frac{1}{z - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \mu + i\eta} - \frac{1}{z - \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \mu - i\eta} \right] \quad (57)$$

$$= \ln \left( 1 + e^{-\beta(\epsilon_{\mathbf{p}} - \mu)} \right), \quad (58)$$

其中我们利用了等式:

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \pm i\eta} = \mp i\pi \delta(x) + \mathcal{P} \left( \frac{1}{x} \right). \quad (59)$$

因此自由能为:

$$F^{(0)} = -2T \sum_{\mathbf{p}} \ln \left( 1 + e^{-\beta(\epsilon_{\mathbf{p}} - \mu)} \right). \quad (60)$$

低温极限下：

$$F^{(0)} \approx 2 \sum_{p < p_F} \left( \frac{p^2}{2m} - \mu \right) \quad (61)$$

$$= \frac{2L^3}{(2\pi)^3} \cdot 4\pi \cdot \int_0^{p_F} dp \cdot p^2 \cdot \frac{p^2 - p_F^2}{2m} \quad (62)$$

$$= -\frac{2L^3}{(2\pi)^3} \cdot 4\pi \cdot \frac{p_F^5}{15m} \quad (63)$$

$$= -\frac{L^3 p_F^5}{15\pi^2 m} \quad (64)$$

注意到总粒子数为：

$$N = \sum_{p < p_F} \sum_{\sigma} 1 \quad (65)$$

$$= \frac{2L^3}{(2\pi)^3} \cdot \frac{4\pi}{3} p_F^3. \quad (66)$$

所以自由能可进一步化简为：

$$F^{(0)} \approx -\frac{2L^3}{(2\pi)^3} \cdot \frac{4\pi}{3} p_F^3 \cdot \frac{p_F^2}{5m} \quad (67)$$

$$= -\frac{2}{5} N \mu. \quad (68)$$

## 自由能 RPA

考虑配分函数各阶微扰展开：

$$Z = \int D[\bar{\psi}, \psi] e^{-S_0} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} S_1^n \quad (69)$$

$$= Z^{(0)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \langle S_1^n \rangle_0. \quad (70)$$

其中，泛函平均  $\langle S_1^n \rangle_0$  可通过计算  $n$  条相互作用线的泡泡图得到：

$$\begin{aligned}
& \left( \text{bubble} + \text{bubble} \right) + \left( \text{bubble} \text{ bubble} + \text{bubble} \text{ bubble} + \text{bubble} \text{ bubble} + \text{bubble} \text{ bubble} \right) \\
& + \text{bubble} \text{ wavy} \text{ bubble} + \text{bubble} \text{ wavy} \text{ bubble} + \text{bubble} \text{ wavy} \text{ bubble} + \text{bubble} \text{ wavy} \text{ bubble} + \text{higher order} \\
& = \sum_n \frac{1}{n!} \left( \text{bubble} + \text{bubble} + \text{bubble} + \text{bubble} + \text{bubble} + \text{bubble} \right)^n
\end{aligned}$$

图 3: 集团分解

利用简单的排列组合技巧, 这些泡泡图又可以按照联通泡泡图分组:

$$Z = Z^{(0)} \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \langle S_1^m \rangle_0^c \right)^n \quad (71)$$

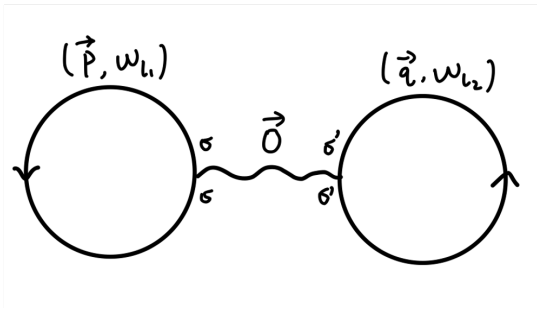
$$= Z^{(0)} \exp \left( \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \langle S_1^m \rangle_0^c \right). \quad (72)$$

对上式取对数, 就得到了自由能的各阶微扰展开项:

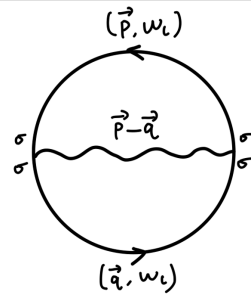
$$F = F^{(0)} - T \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \langle S_1^m \rangle_0^c. \quad (73)$$

## 一阶微扰

一阶微扰对应两张图:



(a) Hatree



(b) Fock

$$F^{(1)} = \frac{T^2}{2L^3} \sum_{p_1, p_2, k} \sum_{\sigma, \sigma'} \left\langle \bar{\psi}_{p_1+k}^{\sigma} \bar{\psi}_{p_2-k}^{\sigma'} V(\mathbf{k}) \psi_{p_2}^{\sigma'} \psi_{p_1}^{\sigma} \right\rangle_0^c \quad (74)$$

$$= F_{\text{Hatree}}^{(1)} + F_{\text{Fock}}^{(1)}, \quad (75)$$

分别对应 Hartree 项贡献和 Fock 项贡献:

$$F_{Hartree}^{(1)} = \frac{2T^2}{L^3} \sum_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2} G_{\mathbf{p}_1} G_{\mathbf{p}_2} V(\mathbf{0}) = 0, \quad (76)$$

$$F_{Fock}^{(1)} = -\frac{T^2}{L^3} \sum_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2} G_{\mathbf{p}_2} G_{\mathbf{p}_1} V(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \quad (77)$$

$$= -\frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2} n_F(\xi_{\mathbf{p}_1}) n_F(\xi_{\mathbf{p}_2}) \frac{4\pi e^2}{|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2|^2} \quad (78)$$

$$= -L^3 \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3} n_F(\xi_{\mathbf{p}_1}) n_F(\xi_{\mathbf{p}_2}) \frac{4\pi e^2}{|\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2|^2}. \quad (79)$$

在低温极限下:

$$F_{Fock}^{(1)} \approx -\frac{2e^2 L^3}{(2\pi)^5} \int_{p, q < p_F} \frac{d^3 p d^3 q}{|\mathbf{p} - \mathbf{q}|^2}. \quad (80)$$

其中积分为:

$$I = \int_{p, q < p_F} d^3 p d^3 q \frac{1}{|\mathbf{p} - \mathbf{q}|^2} \quad (81)$$

$$= 4\pi \int_0^{p_F} p^2 dp \int_0^{p_F} q^2 dq \int_{-1}^{+1} d(\cos \theta) \int_0^{2\pi} d\theta \frac{1}{p^2 + q^2 - 2pq \cos \theta} \quad (82)$$

$$= 8\pi^2 \int_0^{p_F} p^2 dp \int_0^{p_F} q^2 dq \int_{-1}^{+1} \frac{d(p^2 + q^2 - 2pq \cos \theta)}{-2pq} \frac{1}{p^2 + q^2 - 2pq \cos \theta} \quad (83)$$

$$= 8\pi^2 \int_0^{p_F} p^2 dp \int_0^{p_F} q^2 dq \frac{1}{pq} \ln \left| \frac{p+q}{p-q} \right| \quad (84)$$

$$= 16\pi^2 \int_0^{p_F} p^3 dp \int_0^1 dt \left[ t \ln \left( \frac{1+t}{1-t} \right) \right] \quad (85)$$

$$= 16\pi^2 \int_0^{p_F} p^3 dp \left[ \int_0^1 dx (x-1) \ln x + \int_1^2 dx (x-1) \ln x \right] \quad (86)$$

$$= 16\pi^2 \int_0^{p_F} p^3 dp \left[ \frac{t^2 \ln t}{2} - \frac{t^2}{4} + t - t \ln t \right] \Big|_0^2 \quad (87)$$

$$= 16\pi^2 \int_0^{p_F} p^3 dp \quad (88)$$

$$= (2\pi)^2 p_F^4. \quad (89)$$

因此自由能的一阶微扰为:

$$F^{(1)} = F_{Fock}^{(1)} = -\frac{2e^2 L^3 p_F^4}{(2\pi)^3}. \quad (90)$$

## 无规相近似

各阶微扰中最大贡献来源于项链图:



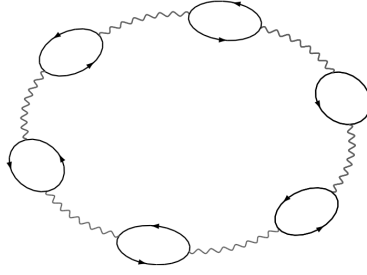


图 4: RPA 项链图

其大小为:

$$F_{RPA}^{(n)} = -\frac{T}{2n} \sum_q \left( \frac{2T}{L^3} \sum_p G_p G_{p+q} \right)^n, \quad (91)$$

其中  $2n$  是费曼图的对称因子。要计算第  $n$  阶微扰, 首先考虑极化算符:

$$\Pi_q \equiv \frac{2T}{L^3} \sum_{\mathbf{p}} \sum_{\omega_p} G_p G_{p+q} \quad (92)$$

$$= \frac{2T}{L^3} \sum_{\mathbf{p}} \sum_{\omega_p} \frac{1}{i\omega_p - \epsilon_{\mathbf{p}} + \mu} \cdot \frac{1}{i(\omega_p + \omega_q) - \epsilon_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} + \mu} \quad (93)$$

$$= \frac{2}{L^3} \sum_{\mathbf{p}} \frac{n_F(\xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}) - n_F(\xi_{\mathbf{p}})}{-i\omega_q + \xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} - \xi_{\mathbf{p}}} \quad (94)$$

$$= \frac{2}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{n_F(\xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}) - n_F(\xi_{\mathbf{p}})}{-i\omega_q + \xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} - \xi_{\mathbf{p}}}. \quad (95)$$

为进一步化简上式, 考虑能量关于小  $\mathbf{q}$  改变量的微元:

$$\xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} - \xi_{\mathbf{p}} \approx \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}}{m} \quad (96)$$

由此得到费米分布

$$n_F(\xi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}}) - n_F(\xi_{\mathbf{p}}) \approx \frac{\partial n_F}{\partial \epsilon}(\xi_{\mathbf{p}}) \cdot \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}}{m} \quad (97)$$

$$\approx -\delta^{(3)}(\xi_{\mathbf{p}}) \cdot \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}}{m}. \quad (98)$$

因此, 上述积分可化简为:

$$\Pi_q \approx \frac{-2}{(2\pi)^3} \int p_F^2 dp \delta^{(3)}(\xi_{\mathbf{p}}) \int_{-1}^{+1} d(\cos \theta) \int_0^{2\pi} d\phi \frac{p_F q \cos \theta / m}{-i\omega_q + p_F q \cos \theta / m} \quad (99)$$

$$= -\frac{1}{2\pi^2} \int p_F^2 dp \delta^{(3)}(\xi_{\mathbf{p}}) \int_{-1}^{+1} d(\cos \theta) \frac{v_F q \cos \theta}{-i\omega_q + v_F q \cos \theta} \quad (100)$$

$$= -\frac{1}{2\pi^2} \int p_F^2 dp \delta^{(3)}(\xi_{\mathbf{p}}) \left[ 1 + \frac{i\omega_q}{2v_F q} \ln \left( \frac{i\omega_q + v_F q}{i\omega_q - v_F q} \right) \right] \quad (101)$$

$$= -\frac{mp_F}{\pi^2} \left[ 1 - \frac{i\omega_q}{2v_F q} \ln \left( \frac{i\omega_q + v_F q}{i\omega_q - v_F q} \right) \right]. \quad (102)$$

其中我们利用了关系：

$$\delta(f(z)) = \sum_{z_k} \frac{\delta(z - z_k)}{|f'(z_k)|}. \quad (103)$$

只考虑这种项链图的微扰展开称为无规相近似，在此近似下的自由能为：

$$F_{RPA} = \frac{T}{2} \sum_q \ln(1 - V(q)\Pi_q). \quad (104)$$

## 自能图

相互作用线的自能费曼图为：

$$\begin{aligned} \text{wavy line} &= \text{wavy line} + \text{wavy line with loop} + \text{wavy line with two loops} + \dots \\ &= \text{wavy line} + \text{wavy line with loop} \end{aligned}$$

图 5: 相互作用自能展开

由此得到的有效作用势为：

$$V_{eff}(q) = V(q) + V(q)\Pi_q V_{eff}(q) \quad (105)$$

$$= \frac{V(q)}{1 - V(q)\Pi_q} \quad (106)$$

$$\equiv \frac{V(q)}{\epsilon(q)}, \quad (107)$$

其中定义介电常数  $\epsilon(q)$ ：

$$\epsilon(q) \equiv 1 - V(q)\Pi_q. \quad (108)$$

对小动量  $q$  和小频率  $\omega_n \ll qv_F$ ：

$$\Pi(q, \omega_q) \approx -\frac{mp_F}{\pi^2} \equiv -\nu_0. \quad (109)$$

在此极限下：

$$V(q) \approx \frac{1}{V^{-1}(q) + \nu_0} = \frac{4\pi e^2}{q^2 + 4\pi e^2 \nu_0} \equiv \frac{4\pi e^2}{q^2 + \lambda^{-2}}. \quad (110)$$

其中  $\lambda \equiv (4\pi e^2 \nu_0)^{-1/2}$  称为 Thomas-Fermi 屏蔽长度。为明确其物理意义，将相互作用势变回实空间：

$$V(r) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \frac{4\pi e^2}{q^2 + \lambda^{-2}} \quad (111)$$

$$= \frac{e^2}{\pi} \int_0^{+\infty} q^2 dq \int_{-1}^{+1} d(\cos\theta) \frac{e^{iqr \cos\theta}}{q^2 + \lambda^{-2}} \quad (112)$$

$$= \frac{e^2}{i\pi r} \int_0^{+\infty} dq \frac{q}{q^2 + \lambda^{-2}} (e^{+iqr} - e^{-iqr}) \quad (113)$$

$$= \frac{e^2}{i\pi r} \int_{-\infty}^{+\infty} dq \frac{q}{q^2 + \lambda^{-2}} e^{+iqr}. \quad (114)$$

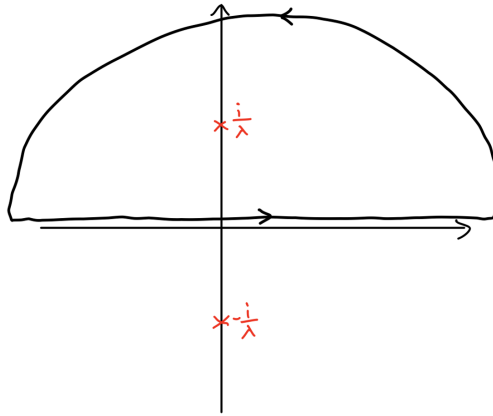


图 6: 积分回路

利用留数定理：

$$\text{Res} \left[ \frac{q}{q^2 + \lambda^{-2}} e^{+iqr} \right] \Big|_{q=\frac{i}{\lambda}} = \frac{1}{2} e^{-\frac{r}{\lambda}}, \quad (115)$$

得到屏蔽库伦势为：

$$V(r) = \frac{e^2}{r} e^{-\frac{r}{\lambda}}. \quad (116)$$

有效势在实空间指数衰减，衰减特征长度就是 Thomas-Fermi 屏蔽长度  $\lambda$ .