Jordan-Wigner 变换

任杰

自旋与费米子算符的联系

单粒子情形

单粒子费米子系统是一个简单两能级系统，只有占据与非占据两个状态。分别用 $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ 表示。对于费米子体系，产生湮灭算符为：

$$\begin{cases} c\,|1\rangle = |0\rangle \\ c\,|0\rangle = 0 \end{cases}, \begin{cases} c^\dagger\,|1\rangle = 0 \\ c^\dagger\,|0\rangle = |1\rangle \end{cases}. \tag{1}$$

这样，算符的矩阵表示可以写作：

$$c = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma^-, \tag{2}$$

$$c^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \sigma^+. \tag{3}$$

可以看出费米子产生湮灭算符和自旋系统中的泡利升降算符相同。在单粒子希尔伯特空间中，费米子和泡利算符可以互相转化。

多粒子情形

一般的，量子多体算符/矢量可以看作一些列单体算符/矢量的张量积。如对于一维自旋链，我们可以用单体基矢 $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ 张成整个多体系统的基矢 $|\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_N\rangle$：

$$|\psi\rangle = \sum_{\{\sigma_i\}} \psi\,[\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_N]\,|\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_N\rangle\,, \tag{4}$$

$$|\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_N\rangle = \otimes_{i=1}^N |\sigma_i^z\rangle \tag{5}$$

类似的，多体算符也可以用单体算符张量积表示, 如

$$\sigma_i^+ = \left(\otimes_{j=1}^{i-1} \mathbb{I}_j\right) \otimes \sigma^+ \otimes \left(\otimes_{j=i+1}^{N} \mathbb{I}_j\right) \tag{6}$$

这样，对于自旋系统，我们可以用矢量和矩阵直积的方法，将多体问题化为一个 2^N 维线性代数问题。现在回头看费米子系统，类比自旋链，我们想直接通过直积得到费米子的多体产生湮灭算符表示：

$$\begin{aligned} c_i &= \left(\otimes_{j=1}^{i-1}\mathbb{I}_j\right)\otimes c\otimes\left(\otimes_{j=i+1}^{N}\mathbb{I}_j\right), && (7)\\ c_i^\dagger &= \left(\otimes_{j=1}^{i-1}\mathbb{I}_j\right)\otimes c^\dagger\otimes\left(\otimes_{j=i+1}^{N}\mathbb{I}_j\right) && (8)\end{aligned}$$

需要注意的是，多粒子体系中，由于对易关系的要求，这样的直积表示是错误的。费米子要求的对易关系为：

$$\left\{c_i, c_j^\dagger\right\} = \delta_{ij},\ \{c_i, c_j\} = 0. \tag{9}$$

可以验证，上述直积表示不满足 $i \neq j$ 时的对易关系。事实上 $i \neq j$ 时的反对易关系蕴含着费米子算符是一个高度非局域算符，而算符的直积表示只适用于局域的算符。举例来说，对一个两费米子体系：

$$c_2^\dagger\left|0,0\right\rangle = \left|0,1\right\rangle, \tag{10}$$

$$c_2^\dagger\left|1,0\right\rangle = c_2^\dagger c_1^\dagger\left|0,0\right\rangle = -c_1^\dagger c_2^\dagger\left|0,0\right\rangle = -\left|1,1\right\rangle. \tag{11}$$

在 1 处的费米子占据状态会改变作用于 2 处的费米子算符的结果。为了得到正确的对易关系，我们引入一非局域链算符

$$K_i = \otimes_{j=1}^{i-1}\left(-\sigma_j^z\right) = \otimes_{j=1}^{i-1}\left(1-2c_j^\dagger c_j\right) \tag{12}$$

从而将费米子算符写为：

$$\begin{aligned} c_i &= K_i\otimes c\otimes\left(\otimes_{j=i+1}^{N}\mathbb{I}_j\right), && (13)\\ c_i^\dagger &= K_i\otimes c^\dagger\otimes\left(\otimes_{j=i+1}^{N}\mathbb{I}_j\right). && (14)\end{aligned}$$

相当与在原来的基础上引入了一条从 1 到 i 的链，这条链保证了费米子多体算符的对易性。这也自然引出了自旋算符与费米子算符的变换关系。

Jordan-Wigner 变换

Jordan-Wigner 变换是自旋算符与费米子算符之间的转换，可以将一些自旋问题转化为费米子问题。从之前对费米子的讨论中，我们实际上已经得到了 Jordan-Wigner 变换公式：

$$\begin{cases}\sigma_i^+ &= K_i c_i^\dagger\\ \sigma_i^- &= K_i c_i\end{cases}, \tag{15}$$

$$\begin{cases}\sigma_i^x &= K_i\left(c_i + c_i^\dagger\right)\\ \sigma_i^y &= iK_i\left(c_i - c_i^\dagger\right)\\ \sigma_i^z &= 2c_i^\dagger c_i - 1\end{cases} \tag{16}$$

$$K_i = \prod_{j<i}\left(-\sigma_j^z\right) = \prod_{j<i}\left(1-2c_j^\dagger c_j\right) \tag{17}$$

例子

下面我们用 Jordan-Wigner 变换处理一个经典自旋模型——横场伊辛模型。该模型哈密顿量为：

$$\hat{H}=\sum_i \sigma_i^x\sigma_{i+1}^x+h\sigma_i^z. \tag{18}$$

经过 Jordan-Wigner 变换后：

$$\begin{aligned}\sigma_i^x\sigma_{i+1}^x &= -\left(c_i-c_i^\dagger\right)\left(c_{i+1}+c_{i+1}^\dagger\right), &(19)\\ \sigma_i^z &= 2c_i^\dagger c_i-1, &(20)\\ \hat{H} &= \sum_i\left(c_i^\dagger c_{i+1}+c_i^\dagger c_{i+1}^\dagger+h.c.\right)+h\sum_i\left(2c_i^\dagger c_i-1\right). &(21)\end{aligned}$$

由于平移对称性，做傅里叶变换：

$$\begin{cases}c_l &= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_k c_k e^{+ikl}\\ c_l^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_k c_k^\dagger e^{-ikl}\end{cases}. \tag{22}$$

$$\hat{H}=\sum_k\left(\begin{array}{cc}c_k^\dagger & c_{-k}\end{array}\right)\left(\begin{array}{cc}h+\cos(k) & -i\sin(k)\\ i\sin(k) & -h-\cos(k)\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}c_k\\ c_{-k}^\dagger\end{array}\right) \tag{23}$$

再对每个小矩阵对角化，就得到了体系的能谱：

$$E(k)=\sqrt{(h+\cos k)^2+\sin^2 k} \tag{24}$$

参考文献

[1] Nagaosa, Quantum field theory in strongly correlated electronic systems.

[2] Xiao-Gang Wen, Quantum field theory of many-body systems.