群同调与上同调简介

任杰

本文将给出群同调与上同调的基本定义，并计算几个最简单的例子，希望给群同调与上同调一个直观的认识。

Free resolution

我们先给出形式再做说明。Free resolution 是一个正合序列 (exact sequence)：

$$\xrightarrow{\cdots} \quad F_2 \quad \xrightarrow{\partial_2} \quad F_1 \quad \xrightarrow{\partial_1} \quad F_0 \quad \xrightarrow{\partial_0} \quad \mathcal{M} \quad \xrightarrow{0} \quad 0 \tag{1}$$

其中 $\mathcal{M}$ 为 G-module，定义为一个阿贝尔群，并且有群作用:

$$m \in \mathcal{M} \Rightarrow g \cdot m \in \mathcal{M}, \forall g \in G. \tag{2}$$

正合序列意味着

$$\ker\left(\partial_i\right) = imag\left(\partial_{i+1}\right). \tag{3}$$

设 $\mathcal{M}$ 由一组基底 $\{m_1, m_2, \cdots, m_k\}$ 生成 (但不一定是自由生成)，要使得序列正合，可定义一个 R-module F_1 ：

$$F_0 = \mathcal{R}^k = \mathcal{R}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{R}e_k \tag{4}$$

其中 $\mathcal{R}$ 为一个 group-ring:

$$\mathcal{R} = \mathbb{Z}\left[G\right] = \sum_{g \in G} c_g \cdot g, \ c_g \in \mathbb{Z}. \tag{5}$$

此时 F_0 由 $\{e_1, \cdots, e_k\}$ 自由生成，其中同态映射 ∂_0 效果为:

$$e_i \quad \mapsto \quad m_i \tag{6}$$

$$re_i \quad \mapsto \quad r \cdot m_i \tag{7}$$

设该映射的核 $\ker\left(\partial_0\right)$ 一组基为 $\{b_1, \cdots, b_l\}$, 同样 $\ker\left(\partial_0\right)$ 不一定由这组基自由生成，但同样可以构造

$$F_1 = \mathcal{R}^l = \mathcal{R}c_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{R}c_l \tag{8}$$

而 ∂_1 ： $c_i \mapsto b_i$, 以此类推。Free resolution 就是这样一个将 G-module 写开成一个自由群正合序列的过程。最终我们只保留阶数不小于 0 的部分:

$$F_* : \quad \cdots \quad \xrightarrow{\partial_3} \quad F_2 \quad \xrightarrow{\partial_2} \quad F_1 \quad \xrightarrow{\partial_1} \quad F_0 \tag{9}$$

注意 Free resolution 的选取不唯一，但可以证明不同的选取只相差一个链同伦，不会影响后面的结果。

例: bar resolution

Bar resolution 是一个一般的 free resolution 构造方法。考虑 $\mathcal{M}=\mathbb{Z}$, G 在 module $\mathcal{M}$ 上作用平凡: $g\cdot 1=1$,

$$\xrightarrow{\cdots} F_2 \xrightarrow{\partial_2} F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\partial_0} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} 0 \tag{10}$$

此时各阶 R-module 有一组简单基底

$$F_0 = \mathcal{R}\,[\,] \tag{11}$$

$$[\,] \xmapsto{\partial_0} 1 \tag{12}$$

此时 $\ker\partial_0 = span\,\{g\,[\,]-[\,]\,,\forall g\in G\}$, 因此再定义

$$F_1 = \bigoplus_{g\in G}\mathcal{R}\,[g] \tag{13}$$

$$[g] \xmapsto{\partial_1} g\,[\,]-[\,] \tag{14}$$

可以验证此时 $\ker\partial_1 = span\,\{g\,[h]-[gh]+[g]\,,\forall g,h\in G\}$，再定义

$$F_2 = \bigoplus_{g,h\in G}\mathcal{R}\,[g|\,h] \tag{15}$$

$$[g|\,h] \xmapsto{\partial_2} g\,[h]-[gh]+[g] \tag{16}$$

这个过程可以一只做下去，这组基底一般形式为

$$[g_1|g_2|\cdots|g_n] \xmapsto{\partial_n} g_1\,[g_2|\cdots|g_n]-[g_1g_2|g_3|\cdots|g_n]+[g_1|g_2g_3|\cdots|g_n]+\cdots+[g_1|g_2|\cdots|g_{n-1}] \tag{17}$$

注意到

$$e\,[\,]-[\,]=0 \tag{18}$$

即 $e\,[\,]-[\,]$ 实际上不在 $\ker\partial_1$ 中。以此类推，我们可以丢掉 bar resolution 中所有形如 $[g_1|\cdots|e|\cdots|g_n]$ 的基底。以上构造是一般的。但这个基底往往有很多冗余，因此具体计算几乎不会使用这组基底。

群同调

要定义群的同调，还需要一步 co-invariant 操作

$$F_i \mapsto F_i/\,(m=g\cdot m) \tag{19}$$

对于 free module, 模掉这个等价关系相当于把系数 $\mathcal{R}$ 换为 $\mathbb{Z}$, 对于上述的 bar resolution, co-invariant 操作后的链序列为:

$$\mathcal{F}_*:\ \xrightarrow{\cdots} \bigoplus_{g,h\in G}\mathbb{Z}\,[g|\,h] \xrightarrow{\partial_2} \bigoplus_{g\in G}\mathbb{Z}\,[g] \xrightarrow{\partial_1} \mathbb{Z}\,[\,] \xrightarrow{\partial_0} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} 0 \tag{20}$$

群 G 的**同调群**定义为序列 $\mathcal{F}_*$ 的同调群

$$H_n\,(G,\mathbb{Z}) \equiv H_n\,(\mathcal{F}_*) \tag{21}$$

例：$G=\mathbb{Z}_2$：

对于这个简单的群，可以直接使用 bar resolution 计算群同调。此时 $G=\{e,\tau\},\tau^2=1$, 各阶 Z module 都只有一个基底 $[\tau|\cdots|\tau]$:

$$\xrightarrow{\cdots}\quad \mathbb{Z}[\tau|\tau]\quad \xrightarrow{\partial_2}\quad \mathbb{Z}[\tau]\quad \xrightarrow{\partial_1}\quad \mathbb{Z}[\,]\quad \xrightarrow{\partial_0}\quad \mathbb{Z}\quad \xrightarrow{0}\quad 0 \tag{22}$$

各阶映射对应基变换为:

$$[\,] \quad\mapsto\quad 1 \tag{23}$$

$$[\tau] \quad\mapsto\quad [\,]-[\,]=0 \tag{24}$$

$$[\tau|\tau] \quad\mapsto\quad [\tau]-[e]+[\tau]=2[\tau] \tag{25}$$

其一般形式为:

$$[\tau|\cdots|\tau]_n \mapsto \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n=1 \mod 2 \\ 2[\tau|\cdots|\tau]_{n-1} & n=0 \mod 2 \end{cases} \tag{26}$$

因此经过 co-invariant 操作后的序列为:

$$\mathcal{F}_*:\quad \cdots \quad \xrightarrow{2}\quad \mathbb{Z}\quad \xrightarrow{0}\quad \mathbb{Z}\quad \xrightarrow{2}\quad \mathbb{Z}\quad \xrightarrow{0}\quad \mathbb{Z} \tag{27}$$

读出 $\mathbb{Z}_2$ 群的同调群为

$$H_n(\mathbb{Z}_2,\mathbb{Z})=\begin{cases} \mathbb{Z} & n=0 \\ \mathbb{Z}_2 & n=1 \mod 2 \\ 0 & n=0 \mod 2 \end{cases} \tag{28}$$

群上同调

群上同调定义是类似的，通过对偶作用:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{F}_*: \xrightarrow{\cdots} & F_2 & \xrightarrow{\partial_2} & F_1 & \xrightarrow{\partial_1} & F_0 \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}^*: \xleftarrow{\cdots} & \hom(F_2,\mathcal{M}) & \xleftarrow{d_1} & \hom(F_1,\mathcal{M}) & \xleftarrow{d_0} & \hom(F_0,\mathcal{M}) \end{array} \tag{29}$$

群上同调定义为:

$$H^n(G,\mathcal{M})\equiv H^n(\mathcal{F}^*) \tag{30}$$

注意群上同调依赖 G-module 的选取，$\mathcal{M}$ 也被称做群上同调的系数 (group cohomology with coefficient)。对于自由群而言，其对偶空间为:

$$\hom\left(\mathbb{Z}^k,\mathcal{M}\right)=\mathcal{M}^k. \tag{31}$$

而上边缘算子 d_i 和下边缘算子 ∂_{i+1} 是分别对应的:

$$\left\langle d_iC^i, C_{i+1}\right\rangle=\left\langle C^i,\partial_{i+1}C_{i+1}\right\rangle \tag{32}$$

例 1：$H^n(\mathbb{Z}_k,\mathbb{Z})$ ：

这里 $\mathbb{Z}$ 是群 $\mathbb{Z}_k$ 平凡作用的 module. 对循环群，由于只有一个生成元，此时计算可以大大简化。循环群的 group-ring 为:

$$\mathcal{R}=\mathbb{Z}[G]=\mathbb{Z}[t]/\left(t^k-1\right) \tag{33}$$

其中等价关系 $t^k-1=0$ 可分解为:

$$t^k-1=(t-1)\left(t^{k-1}+t^{k-2}+\cdots+1\right)=0 \tag{34}$$

构造 F_0 与 ∂_0 :

$$\mathcal{R}e_0 \quad \rightarrow \quad \mathbb{Z} \tag{35}$$

$$e_0 \quad \mapsto \quad 1 \tag{36}$$

注意到此时

$$\ker\partial_0=span\{(t-1)\,e_0\} \tag{37}$$

根据等价关系的分解，我们可以继续构造只包含一个基底的 F_1 与 ∂_1 :

$$\mathcal{R}e_1 \quad \rightarrow \quad \mathcal{R}e_1 \tag{38}$$

$$e_1 \quad \mapsto \quad (t-1)\,e_0 \tag{39}$$

此时

$$\ker\partial_1=span\{Ne_1\}\,,\ N=t^{k-1}+t^{k-2}+\cdots+1 \tag{40}$$

更高阶的 F_i 可按此方法周期构造，最终经过 co-invariant 操作后的序列为:

$$\mathcal{F}_*:\quad \cdots \quad \xrightarrow{t-1} \quad \mathcal{R} \quad \xrightarrow{N} \quad \mathcal{R} \quad \xrightarrow{t-1} \quad \mathcal{R} \quad \xrightarrow{1} \quad \mathbb{Z} \quad \xrightarrow{0} \quad 0 \tag{41}$$

对偶作用后:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathcal{F}_*: & \rightarrow & \mathcal{R} & \xrightarrow{t-1} & \mathcal{R} & \xrightarrow{N} & \mathcal{R} & \xrightarrow{t-1} & \mathcal{R} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathcal{F}^*: & \leftarrow & \mathbb{Z} & \xleftarrow{0} & \mathbb{Z} & \xleftarrow{k} & \mathbb{Z} & \xleftarrow{0} & \mathbb{Z}
\end{array} \tag{42}$$

因为群在 $\mathbb{Z}$ 上作用是平凡的，$t-1\mapsto 0, N\mapsto k$,

$$H^n(\mathbb{Z}_k,\mathbb{Z})=\begin{cases}\mathbb{Z} & n=0 \\ 0 & n=1 \mod 2 \\ \mathbb{Z}_k & n=0 \mod 2\end{cases} \tag{43}$$

例 2： $H^n\left(\mathbb{Z}_k, U\left(1\right)\right)$ **：**

这里 $\mathbb{Z}_k$ 在 $U\left(1\right)$ 上作用也是平凡的。我们希望群乘是加法，因此将 $U(1)$ 写作 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$:

$$H^n\left(\mathbb{Z}_k, U\left(1\right)\right) \approx H^n\left(\mathbb{Z}_k, \mathbb{R}/\mathbb{Z}\right) \tag{44}$$

这样我们只需将例 1 的结果稍加修改得到：

$$\begin{array}{cccccccc} \mathcal{F}_*: & \rightarrow & \mathcal{R} & \xrightarrow{t-1} & \mathcal{R} & \xrightarrow{N} & \mathcal{R} & \xrightarrow{t-1} & \mathcal{R} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}^*: & \leftarrow & \mathbb{R}/\mathbb{Z} & \xleftarrow{0} & \mathbb{R}/\mathbb{Z} & \xleftarrow{k} & \mathbb{R}/\mathbb{Z} & \xleftarrow{0} & \mathbb{R}/\mathbb{Z} \end{array} \tag{45}$$

这时和整数情况稍有不同，简单计算得到上同调群为：

$$H^n\left(\mathbb{Z}_k, U\left(1\right)\right) = \begin{cases} \mathbb{R}/\mathbb{Z} = U\left(1\right) & n = 0 \\ \mathbb{Z}_k & n = 1 \mod 2 \\ 0 & n = 0 \mod 2 \end{cases} \tag{46}$$

例 3： $H^n\left(\mathbb{Z}_k \times \mathbb{Z}_T, U_T\left(1\right)\right)$**：**

其中 $\mathbb{Z}_T = \{e, \tau\}$ 是时间反演算符，在 module $U_T(1)$ 上的作用为：

$$e \cdot 1 = 1 \tag{47}$$

$$\tau \cdot 1 = -1 \tag{48}$$

我们可以将 $\mathbb{Z}_k \times \mathbb{Z}_T$ 写作 $\mathbb{Z}_{2k}$,

$$H^n\left(\mathbb{Z}_k \times \mathbb{Z}_T, U_T\left(1\right)\right) \approx H^n\left(\mathbb{Z}_{2k}, \mathbb{R}/\mathbb{Z}\right) \tag{49}$$

此时群的唯一生成元为 τ, τ 在 $U_T(1)$ 上作用将单位元取逆。因此 $t-1 \mapsto -1, N \mapsto 0$,

$$\begin{array}{cccccccc} \mathcal{F}_*: & \rightarrow & \mathcal{R} & \xrightarrow{t-1} & \mathcal{R} & \xrightarrow{N} & \mathcal{R} & \xrightarrow{t-1} & \mathcal{R} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}^*: & \leftarrow & \mathbb{R}/\mathbb{Z} & \xleftarrow{-2} & \mathbb{R}/\mathbb{Z} & \xleftarrow{0} & \mathbb{R}/\mathbb{Z} & \xleftarrow{-2} & \mathbb{R}/\mathbb{Z} \end{array} \tag{50}$$

稍加计算得到：

$$H^n\left(\mathbb{Z}_k \times Z_T, U_T\left(1\right)\right) = \begin{cases} 0 & n = 1 \mod 2 \\ \mathbb{Z}_2 & n = 0 \mod 2 \end{cases} \tag{51}$$

Remark

以上的例子可以展示出群上同调计算的基本流程。但实际上对于多个生成元的群，很难像循环群那样轻易地构造出简单的 free resolution，这时群上同调计算困难的地方。