

场论中的对称性

任杰

2020 年 6 月 25 日

1 连续对称性与守恒律

1.1 无穷小变换

对称性可以被定义为坐标和场的一组变换，这组变换使得系统在任何区间内的作用量不变，因此在对称变换下，系统的运动规律不变。我们这里只考虑连续对称性，考虑坐标和场的无穷小变换：

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu, \quad (1)$$

$$\phi_r(x) \rightarrow \phi'_r(x') = \phi_r(x) + \delta\phi_r(x), \quad (2)$$

注意场的变换定义成由坐标变换前后对应的同一点上，因此与坐标变换无关。也就是说一个连续对称性包含坐标和场这两个独立的无穷小变换，其中如果一个对称变换完全由坐标变换造成，我们称之为时空对称性；反之，如果一个对称变换完全由场变化造成，我们称之为内秉对称性。一个连续对称性要求，在一组无穷小变换下，作用量积分在任何区域内不变，即：

$$\int_{\Omega'} d^4x' \mathcal{L}'(x') = \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(x), \quad (3)$$

其中：

$$\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(\phi'_r(x'), \partial\phi'_r/\partial x'^\mu), \quad (4)$$

上式中 Ω' 是原区域 Ω 经过坐标变换后对应的区域。

1.2 诺特定理

诺特定理告诉我们一个连续对称性对应一个守恒量。我们在这一节中将证明这点。为了证明的方便，我们对场定义一个总变分：

$$\tilde{\delta}\phi_r(x) := \phi'_r(x) - \phi_r(x), \quad (5)$$

这个变分实际上包含了场的内秉变化和坐标变换，它和场内秉变化的关系为（保留至一阶意义下）：

$$\begin{aligned} \tilde{\delta}\phi_r(x) &= \phi'_r(x) - \phi'_r(x') + \phi'_r(x') - \phi_r(x) \\ &= \delta\phi_r(x) - \delta x^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \phi'_r(x) \\ &\simeq \delta\phi_r(x) - \delta x^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \phi_r(x), \end{aligned} \quad (6)$$

这个变分定义在坐标的同一点上，因此可以和微分算符对易，这使得数学处理更加方便。接下来我们写出作用力积分：

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{\Omega'} d^4x' \mathcal{L}'(x') - \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(x) \\ &= \int_{\Omega} d^4x \delta \mathcal{L}(x) + \int_{\Omega'} d^4x' \mathcal{L}(x) - \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(x).\end{aligned}\quad (7)$$

为计算第二第三项，我们需要首先计算雅可比矩阵（保留至一阶意义下）：

$$\left| \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \right| = \left| \delta_{\nu}^{\mu} + \frac{\partial \delta x^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \right| = \left(1 + \frac{\partial \delta x^{\mu}}{\partial x^{\mu}} \right).\quad (8)$$

因此第二第三项可以化简为：

$$\begin{aligned}\int_{\Omega'} d^4x' \mathcal{L}(x) - \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(x) &= \int_{\Omega} d^4x \left(1 + \frac{\partial \delta x^{\mu}}{\partial x^{\mu}} \right) \mathcal{L}(x) - \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(x) \\ &= \int_{\Omega} d^4x \frac{\partial \delta x^{\mu}}{\partial x^{\mu}} \mathcal{L}(x).\end{aligned}\quad (9)$$

我们将上述变分式写成包含总变分的形式：

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{\Omega} d^4x \left[\delta \mathcal{L}(x) + \frac{\partial \delta x^{\mu}}{\partial x^{\mu}} \mathcal{L}(x) \right] \\ &= \int_{\Omega} d^4x \left[\tilde{\delta} \mathcal{L}(x) + \delta x^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \mathcal{L}(x) + \frac{\partial \delta x^{\mu}}{\partial x^{\mu}} \mathcal{L}(x) \right] \\ &= \int_{\Omega} d^4x \left[\tilde{\delta} \mathcal{L}(x) + \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} (\mathcal{L}(x) \delta x^{\mu}) \right].\end{aligned}\quad (10)$$

上面定义的总变分表现地像一个“真正的”变分，将它作用于拉氏量密度上得到：

$$\begin{aligned}\tilde{\delta} \mathcal{L}(x) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi_r)} \tilde{\delta} (\partial_{\mu} \phi_r) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} \tilde{\delta} \phi_r(x) \\ &= \partial_{\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi_r)} \tilde{\delta} \phi_r(x) \right] + \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_r} - \partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi_r)} \right) \right] \tilde{\delta} \phi_r(x).\end{aligned}$$

代入上式，并利用欧拉-拉格朗日方程化简：

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_{\Omega} d^4x \partial_{\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi_r)} \tilde{\delta} \phi_r(x) + \mathcal{L}(x) \delta x^{\mu} \right] \\ &= \int_{\Omega} d^4x \partial_{\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi_r)} \delta \phi_r(x) - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi_r)} \frac{\partial \phi_r}{\partial x^{\nu}} \delta x^{\nu} - \mathcal{L}(x) \delta x^{\mu} \right) \right] \\ &= \int_{\Omega} d^4x \partial_{\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi_r)} \delta \phi_r(x) - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi_r)} \frac{\partial \phi_r}{\partial x^{\nu}} - \delta^{\mu}_{\nu} \mathcal{L}(x) \right) \delta x^{\nu} \right].\end{aligned}\quad (11)$$

对称性要求对所有 Ω ， $\delta S = 0$ ，所以被积函数应为 0，这样，我们就得到了一个无散度的流：

$$f^{\mu} := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi_r)} \delta \phi_r(x) - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi_r)} \frac{\partial \phi_r}{\partial x^{\nu}} - \delta^{\mu}_{\nu} \mathcal{L}(x) \right) \delta x^{\nu},\quad (12)$$

$$\partial_{\mu} f^{\mu} = \partial_t f^0 + \nabla \cdot \mathbf{f} = 0.\quad (13)$$

这个无散流给出了系统守恒量：

$$Q := \int d^3x f^0. \quad (14)$$

2 能量-动量张量

2.1 时空平移不变性

第一个例子是我们提到过的时空对称性，这个对称性只由时空平移不变性生成，无穷小变换可以写为：

$$\begin{cases} \delta x^\mu &= \epsilon^{\mu\nu} \alpha_\nu \\ \delta \phi_r &= 0 \end{cases}. \quad (15)$$

考虑一个沿着 x^ν 方向的无穷小平移，对称性给出的守恒流为：

$$f^\mu = - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_r)} \frac{\partial \phi_r}{\partial x^\nu} - \delta^\mu_\nu \mathcal{L}(x) \right) \alpha_\nu. \quad (16)$$

我们据此定义能量-动量张量：

$$\Theta^\mu{}_\nu := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_r)} \frac{\partial \phi_r}{\partial x^\nu} - \delta^\mu_\nu \mathcal{L}(x), \quad (17)$$

能量量张量可以直接给出守恒量，时间方向的平移不变性给出守恒量：

$$E = \int d^3x \Theta^0{}_0 = \int d^3x \left[\pi_r(x) \dot{\phi}_r(x) - \mathcal{L}(x) \right]. \quad (18)$$

这正是哈密顿量密度在空间积分，也即能量守恒。而空间方向平移不变性给出另外 3 个守恒量：

$$P_\nu = \int d^3x \Theta^0{}_\nu = \int d^3x \pi_r(x) \partial_\nu \phi_r(x). \quad (19)$$

这是场的动量密度积分，即动量守恒。

2.2 电磁场中的能动张量

电磁场（无源）的拉氏量密度定义为：

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (20)$$

其中电磁场张量

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \quad (21)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ E^1 & 0 & -B^3 & B^2 \\ E^2 & B^3 & 0 & -B^1 \\ E^3 & -B^2 & B^1 & 0 \end{pmatrix} \quad (22)$$

以 A^μ 为正则坐标，经过同样的计算可以得到电磁场的能动张量：

$$\Theta^{\mu\nu} = \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} - F^{\mu\sigma} \partial^\nu A_\sigma. \quad (23)$$

该能动张量给出了电磁场的能量和动量：

$$E = \int d^3x \Theta^{00} = \int d^3x \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2}{2}, \quad (24)$$

$$P^i = \int d^3x \Theta^{0i} = \int d^3x (\mathbf{E} \times \mathbf{B})^i. \quad (25)$$

3 守恒荷

3.1 内秉对称性

第二个例子是场本身的内秉对称性。考虑场本身的无穷小变换：

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x') = \phi(x) + i\epsilon \lambda_{rs} \phi_s(x). \quad (26)$$

该变换对应的守恒流为：

$$f^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_r)} \delta \phi_r = i\epsilon \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_r)} \lambda_{rs} \phi_s(x). \quad (27)$$

相应的守恒量为：

$$Q = \int d^3x \pi_r(x) \lambda_{rs} \phi_s(x). \quad (28)$$

3.2 $U(1)$ 守恒荷

其中一个重要的情况就是一些复场中的 $U(1)$ 对称性：

$$\phi' = e^{-i\epsilon} \phi, \quad (29)$$

$$\phi'^* = e^{i\epsilon} \phi^*. \quad (30)$$

这种变换对应的守恒量称为场携带的守恒荷：

$$Q = (-i) \int d^3x [\pi(x) \phi(x) - \pi^*(x) \phi^*(x)]. \quad (31)$$

4 角动量

4.1 洛伦兹对称性

一个洛伦兹协变的理论要求作用量积分在洛伦兹变换下不变。洛伦兹变换对应的无穷小变换为：

$$x'^\mu = x^\mu + \delta\omega^{\mu\nu} x_\nu. \quad (32)$$

$$\phi'_r(x') = \left(1 - \frac{i}{2} \delta\omega_{\mu\nu} (J^{\mu\nu})_{rs}\right) \phi_s(x), \quad (33)$$

注意其中既有坐标的变换，又有场的变换。对坐标的洛伦兹变换保持内积不变，因此：

$$\begin{aligned} x'^{\mu} x'_{\mu} &= (x^{\mu} + \delta\omega^{\mu\nu} x_{\nu})(x_{\mu} + \delta\omega_{\mu}^{\sigma} x_{\sigma}) \\ &= x^{\mu} x_{\mu} + (\delta\omega_{\mu\nu} + \delta\omega_{\nu\mu}) x_{\mu} x_{\nu} + O(\delta^2), \end{aligned} \quad (34)$$

这说明 $\delta\omega_{\mu\nu}$ 是反对称的。相应的，场变换的生成元 $\mathcal{J}^{\mu\nu}$ 也是反对称的。因此洛伦兹群只包含 6 个生成元，对应 3 个空间转动和三个方向的 boost。代入诺特流表达式中：

$$\begin{aligned} f^{\mu} &= -\frac{i}{2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi_r)} \delta\omega_{\nu\lambda} (J^{\nu\lambda})_{rs} \phi_s(x) - \Theta^{\mu\nu} \delta\omega_{\nu\lambda} x^{\lambda} \\ &= \frac{1}{2} \delta\omega_{\nu\lambda} \left[-i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi_r)} (J^{\nu\lambda})_{rs} \phi_s(x) - \Theta^{\mu\nu} x^{\lambda} + \Theta^{\mu\nu} x^{\lambda} \right] \\ &:= \frac{1}{2} \delta\omega_{\nu\lambda} M^{\mu\nu\lambda}, \end{aligned} \quad (35)$$

我们得到了一个守恒流：

$$M^{\mu\nu\lambda} := -i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi_r)} (J^{\nu\lambda})_{rs} \phi_s(x) - \Theta^{\mu\nu} x^{\lambda} + \Theta^{\mu\nu} x^{\lambda}. \quad (36)$$

相应的守恒量为：

$$\begin{aligned} M^{\nu\lambda} &= \int d^3x M^{0\nu\lambda} \\ &= \int d^3x [-i\pi_r (J^{\nu\lambda})_{rs} \phi_s - \Theta^{0\nu} x^{\lambda} + \Theta^{0\nu} x^{\lambda}] \\ &= \int d^3x [-i\pi_r (J^{\nu\lambda})_{rs} \phi_s - (\pi_r x^{\lambda} \partial^{\nu} \phi_r - x^{\lambda} g^{0\nu} \mathcal{L}) + (\pi_r x^{\nu} \partial^{\lambda} \phi_r - x^{\nu} g^{0\lambda} \mathcal{L})] \\ &= \int d^3x [-i\pi_r (J^{\nu\lambda})_{rs} \phi_s + \pi_r (x^{\nu} \partial^{\lambda} - x^{\lambda} \partial^{\nu}) \phi_r + (x^{\lambda} g^{0\nu} - x^{\nu} g^{0\lambda}) \mathcal{L}]. \end{aligned} \quad (37)$$

考虑空间分量，此守恒量对应场的角动量，其中我们还可以将角动量拆成坐标部分和内秉部分，分别对应轨道角动量和自旋角动量：

$$L^{ij} := \int d^3x [\pi_r(x) (x^i \partial^j - x^j \partial^i) \phi_r(x)], \quad (38)$$

$$S^{ij} := (-i) \int d^3x [\pi_r(x) (J^{ij})_{rs} \phi_s(x)]. \quad (39)$$

4.2 电磁场的自旋角动量

电磁场拉氏量密度代入角动量表达式后得到：

$$M^{ij} = \Theta^{0i} x^j - \Theta^{0j} x^i + (F^{0j} A^i - F^{0i} A^j). \quad (40)$$

其中内秉自旋部分角动量为：

$$S^{ij} = \int d^3x (E^i A^j - E^j A^i), \quad (41)$$

$$\mathbf{S} = \int d^3x \mathbf{E} \times \mathbf{A}. \quad (42)$$