UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO

DIVISIÓN DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
CAMPUS GUANAJUATO

Tarea 4 (Algebra Lineal I)

Nombre: Ricardo León Martínez **Fecha:** 23/2/2026 **Calificación:** ______________

Sea F el campo $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$

Ejercicio 1

Demuestra por inducción en el número de filas que el producto de matrices con coeficientes en un capo F es asociativo.

Demostración. Sea $A = (a_{1r})$ una matriz $1 \times n$. Caso base $m = 1$. Para cada j, la entrada $(1, j)$ de $(AB)C$ es

$$((AB)C)_{1j} = \sum_{k=1}^{n} (AB)_{1k} c_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{r=1}^{p} a_{1r} b_{rk} \right) c_{kj}.$$

Por distributiidad en F

$$((AB)C)_{1j} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=1}^{p} a_{1r} b_{rk} c_{kj}.$$

Como las sumsa son finitas, podemos cambiar el orden

$$((AB)C)_{1j} = \sum_{r=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} a_{1r} b_{rk} c_{kj}.$$

Factorizando a_{1r},

$$((AB)C)_{1j} = \sum_{r=1}^{p} a_{1r} \left(\sum_{k=1}^{n} b_{rk} c_{kj} \right).$$

De esta forma, se obtiene

$$((AB)C)_{1j} = (A(BC))_{1j},$$

cuando A tiene una fila. Supongamos que el resultado es valido para matrices con m filas. Definimos

$$A = \begin{pmatrix} A' \\ r \end{pmatrix},$$

Donde A' tiene m filas y r es la ultima fila. Por hipotesis inductiva,

$$(A'B)C = A'(BC).$$

Por el caso base,

$$(rB)C = r(BC).$$

Por lo tanto, las primeras m filas coinciden y la ultima fila tambien coincide. Luego,

$$(AB)C = A(BC).$$

■

Ejercicio 2

Sean A,B matrices con coeficientes en un campo F, de tamaño 2×1, 1×2, respectivamente. Demuestra que AB no es invertible.

Demostración. Sea

$$A = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} c & d \end{pmatrix}$$

Entonces

$$AB = \begin{pmatrix} ac & ad \\ bc & bd \end{pmatrix}.$$

Si AB es invertible, entonces existe C tal que

$$(AB)C = I_2.$$

Pero observa que las columnas de AB son

$$\begin{pmatrix} ac \\ bc \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} ad \\ bd \end{pmatrix} = d \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Es decir, ambas columnas son multiplos de la misma matriz $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ Por lo tanto, no pueden coincidir on las columnas de la identidad

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

cuyas columnas

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

no son multiplos entre si. Esto nos da una contradicción, por lo tanto AB no es invertible. ■

Ejercicio 3

Determina si la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

es invertible.

Demostración. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

con $A \in M_{4\times 4}(F)$. Al aplicar operaciones elementales por filas a A, se obtiene

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dado que si toda matriz es equivalente a la identidad entonces esta matriz es invertible, se sigue inmediantamente que A es invertible. ■

Ejercicio 4

Sea A una matriz cuadrada $n \times n$ con coeficientes en F. Demuestra que si A no es invertible, entonces el sistema lineal homogéneo, $AX = 0$ tiene una infinidad de soluciones.

Demostración. Procederemos por contrapositiva. Si A no es invertible entonces su forma escalonada reducida no puede ser la identidad, se sigue que existe al menos una columna sin pivote, luego en el sistema asociado existe por lo menos una variable libre, por tanto el sistema tiene infinitas soluciones. ■

Ejercicio 5

Sea $A \in M_{n\times n}(F)$. Demuestra que si A tiene inversa derecho o inversa izquierda, entonces A es invertible.

Demostración. Supongamos que existe B tal que

$$AB = I_n.$$

Tambien supongamos que existe C tal que

$$CA = I_n.$$

Multiplicando la primera igualdad por C a la izquierda, se obtiene

$$CAB = CI_n.$$

Por la asociatividad del producto de matrices y por definicion de la identidad,

$$(CA)B = C.$$

Luego,

$$I_n B = C.$$

Nuevamente por definición de la identidad,

$$B = C.$$

Asi, como la inversa por la izquierda y por la derecha coinciden, se concluye que A es invertible. ∎

Ejercicio 6

Sea A una matriz $n \times n$. Demuestra que si A es invertible y $AB = 0_{n\times n}$ para alguna matriz B de tamaño $n \times n$, entonces $B = 0_{n\times n}$.

Demostración. Como A es invertible, existe $A^{-1} \in M_{n\times n}(F)$. Multiplicando la igualdad $AB = 0_{n\times n}$ por A^{-1} a la izquierda, se obtiene

$$A^{-1}AB = A^{-1}0_{n\times n}.$$

Por la asociatividad del producto de matrices,

$$(A^{-1}A)B = 0_{n\times n}.$$

Luego,

$$I_n B = 0_{n\times n},$$

y por definición de la matriz identidad,

$$B = 0_{n\times n}.$$

∎

Ejercicio 7

Sean

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

matrices con coeficientes en $\mathbb{R}$. Encuentra las matrices reducidas por filas y escalonadas R_1, R_2 equivalentes a A_1 y A_2, respectivamente. Encuentra las matrices invertibles P_1, P_2 tales que $R_1 = P_1 A_1$ y $R_2 = P_2 A_2$

Solución. Sea

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

Aplicamos las siguientes operaciones elementales

$$F_1/(2) \to F_1, \quad F_2 - 1 \cdot F_1 \to F_2, \quad F_2/(-3) \to F_2,$$
$$F_3 - 1 \cdot F_2 \to F_3, \quad F_3/(\frac{10}{3}) \to F_3, \quad F_2 - (-\frac{1}{3}) \cdot F_3 \to F_2.$$

Entonces obtenemos

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Las operaciones elementales que efectuamos corresponden a las siguientes matrices elementales

$$E_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad E_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{10} \end{pmatrix} \quad E_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por definición de matriz elemental,

$$E_6 E_5 E_4 E_3 E_2 E_1 A_1 = R_1.$$

Definimos

$$P_1 = E_6 E_5 E_4 E_3 E_2 E_1,$$

Como las matrices elementales son invertibles, P_1 es invertible. Calculando el producto, obtenemos

$$P_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{3}{20} & -\frac{3}{10} & \frac{1}{10} \\ -\frac{1}{20} & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}.$$

Sea

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aplicamos las siguientes operaciones elementales

$$F_2 - 1 \cdot F_1 \to F_2, \quad F_3 - 1 \cdot F_1 \to F_3, \quad F_2/(-2) \to F_2, \quad F_3 - (-2) \cdot F_2 \to F_3,$$
$$F_3/(-2) \to F_3, \quad F_2 - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot F_3 \to F_2, \quad F_1 - 1 \cdot F_3 \to F_1, \quad F_1 - 2 \cdot F_2 \to F_1.$$

Entonces obtenemos

$$R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Las operaciones elementales que efectuamos corresponden a las siguientes matrices elementales

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
$$E_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad E_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E_7 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad E_8 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por definición de matriz elemental,

$$E_8 E_7 E_6 E_5 E_4 E_3 E_2 E_1 A_2 = R_2.$$

Definimos

$$P_2 = E_8 E_7 E_6 E_5 E_4 E_3 E_2 E_1,$$

Como las matrices elementales son invertibles, P_2 es invertible. Calculando el producto, obtenemos

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

▲