UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO

DIVISIÓN DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
CAMPUS GUANAJUATO

Tarea 3 (Algebra Lineal I)

Nombre: Ricardo León Martínez **Fecha:** 13/2/2026 **Calificación:** ______________

En todos los problemas F es un campo que contiene a $\mathbb{Q}$.

Ejercicio 1

Enumera todas las posibles matrices reducidas por filas y escalonadas de tamaño 3×4. Escribe 0 y 1 donde corresponda; y usa * para lugares donde pueda ir cualquier elemento de F.

Ejercicio 2

Responde si es falso (F) o verdadero (V) y justifica tu respuesta:

(a) Si un sistema de ecuaciones lineales $A\mathbf{x} = \mathbf{B}$ tiene más variables que ecuaciones, entonces el sistema tiene infinitas soluciones.

(b) Un sistema consistente tiene una solución única si y solo si no existen variables libres.

(c) Si el sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene al menos una variable libre, entonces el sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{B}$ tiene infinitas soluciones para cualquier matriz $\mathbf{B}$.

(d) Si el sistema de ecuaciones lineales $A\mathbf{x} = \mathbf{B}$ tiene al menos una variable libre, entonces el sistema es consistente.

Ejercicio 3

En este problema se trabajará sobre $\mathbb{R}$. Encuentra la matriz reducida por filas y escalonada equivalente a:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \\ 11 & 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

encuentra las soluciones del sistema homogéneo correspondiente. Finalmente, determina cuáles son las variables independientes y dependientes en cada caso.

Solución. Sea

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La matriz reducida por filas y escalonada es

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, el sistema homogéneo asociado es $R_1\mathbf{x}_1 = 0$. Es decir, explicitamente

$$\begin{cases} x_1 = 0. \end{cases}$$

La primera columna contiene un pivote. Por tanto, x_1 es variable dependiente. No hay variables libres. El conjunto solución es

$$S_1 = \{0\}.$$

Sea

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \\ 11 & 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

La matriz reducida por filas y escalonada es

$$R_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, el sistema homogéneo asociado es $R_2\mathbf{x}_2 = 0$. Es decir, explicitamente

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

En la primera y en la segunda columna contienen un pivote. Por lo tanto, x_1 y x_2 son variables dependientes. No hay variables libres. El conjunto solucion es

$$S_2 = \{(0,0)\}$$

Sea

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

La matriz reducida por fila y escalonada es

$$R_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Por tanto, el sistema homogéneo asociado es $R_3\mathbf{x}_3 = 0$. Es decir explicitamente

$$\begin{cases} x_1 + \frac{3}{2}x_3 = 0 \\ x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 0 \end{cases}$$

En la primera y en la segunda columna contiene un pivote. Por lo tanto x_1 y x_2 son variables dependientes. Como en la tercera columna no contiene pivote x_3 es una variable libre. Así, sea $x_3 = t$ con $t \in \mathbb{R}$. El conjunto solución es

$$S_3 = \left\{(-\frac{3}{2}t, \frac{1}{2}t, t)\right\}.$$

Sea

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz reducida por filas y escalonada es

$$R_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, el sistema homogéneo asociado a $R_4\mathbf{x}_4 = 0$. Es decir, explicitamente

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Las tres columnas contienen pivote. Por lo tanto x_1, x_2 y x_3 son variables dependientes. No hay variables libres. El conjunto solución es

$$S_4 = \{(0, 0, 0)\}$$

▲

Ejercicio 4

En este problema se trabajará sobre $\mathbb{R}$. Considera el sistema

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= b_1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= b_2 \\ x_1 - 3x_2 &= b_3, \end{aligned}$$

encuentra todas las ternas (b_1, b_2, b_3) para las que el sistema tiene alguna solución (justifica tu respuesta).

Ejercicio 5

Sea $A \in M_{n\times n}(F)$. Demuestra que A es equivalente por filas a la matriz identidad si y solo si, el sistema homogéneo asociado a A tiene solo la solución trivial $(0, \ldots, 0) \in F^n$.