Ejercicio 1 Inciso a

Demostración. Sea

$$a := \sqrt[n]{\alpha}, \qquad b := \sqrt[n]{\beta}.$$

Por la Proposición 4.24 sabemos que $a^n = \alpha$ y $b^n = \beta$. Por la Proposición 4.23 inciso 2 se tiene

$$(ab)^n = a^n b^n = \alpha\beta.$$

De nuevo por la Proposición 4.24, el número real cuya n-ésima potencia es $\alpha\beta$ es único por tanto

$$ab = \sqrt[n]{\alpha\beta}.$$

Se sigue que

$$\sqrt[n]{\alpha}\ \sqrt[n]{\beta} = \sqrt[n]{\alpha\beta}.$$

■

Ejercicio 3, Inciso d

Demostración. Sea $a, b \in \mathbb{Z}$ y sea k un entero positivo. Tenemos que

$$d = (a, b).$$

Por definicion del maximo comun divisor existen enteros r, s tales que

$$d = ar + bs.$$

Multiplicando por k ambos lados obtenemos

$$kd = (ka)r + (kb)s,$$

en donde kd es una combinacion lineal de ka y kb. Por el corolario 5.4, cualquier combinacion lineal positiva minima de dos enteros es igual a su maximo comun divisor. Por lo tanto

$$(ka, kb) \leq kd. \tag{1}$$

Ahora, como $d = (a, b)$, se tiene $d|a$ y $d \mid b$. Como $k > 0$, se sigue que

$$kd \mid ka, \qquad kd \mid kb,$$

lo cual significa que kd es un divisor comun de ka y kb. Por el teorema 5.2,

$$kd \leq (ka, kb). \tag{2}$$

De (1) y (2) obtenemos la igualdad

$$(ka, kb) = kd = k(a, b).$$

Sea ahora $m = [a, b]$. Por definicion de mcm, $a \mid m$ y $b \mid m$. Multiplicando por k ambos lados tenemos

$$ka \mid km, \qquad kb \mid km,$$

por lo que km es un multiplo comun de ka y kb. Luego,

$$[ka, kb] \leq km. \tag{3}$$

Por otro lado, todo multiplo comun de ka y kb es multiplo de k. Si M es un multiplo comun de ka y kb, entonces $ka \mid M$ y $kb \mid M$, de forma que $M' \in \mathbb{Z}$ tal que $M = kM'$. Como $a \mid M'$ y $b \mid M'$, se sigue que $m = [a, b]$ divide a M'. Por lo tanto,

$$km \mid M,$$

y asi km divide a todo multiplo comun de ka y kb. Por la proposicion 5.13,

$$km \leq [ka, kb]. \tag{4}$$

De (3) y (4) se sigue que

$$[ka, kb] = km = k[a, b].$$

Asi, para todo k entero positivo y todo $a, b \in \mathbb{Z}$, se cumple

$$(ka, kb) = k(a, b), \qquad [ka, kb] = k[a, b].$$

$\blacksquare$

Ejercicio 3, inciso e

Solución.

1. 329, 1005.

Aplicando la division euclideana entre 1005 y 329 obtenemos

$$\begin{aligned}
&1005 = 329 \cdot 3 + 13,\\
&329 = 18 \cdot 18 + 5,\\
&18 = 5 \cdot 3 + 3,\\
&5 = 3 \cdot 1 + 2,\\
&3 = 2 \cdot 1 + 1,\\
&2 = 1 \cdot 2 + 0.
\end{aligned}$$

El ultimo residuo no nulo es 1. Por la proposicion 5.15 se sigue que

$$(329, 1005) = 1.$$

2. 1302, 1224.
Aplicando la division euclideano entre 1302 y 1224 obtenemos

$$\begin{aligned}
&1302 = 1224 \cdot 1 + 78,\\
&1224 = 78 \cdot 15 + 54,\\
&78 = 54 \cdot 1 + 24,\\
&54 = 24 \cdot 2 + 6,\\
&24 = 6 \cdot 4 + 0.
\end{aligned}$$

El ultimo residuo no nulo es 6. Por la proposicion 5.15 se sigue que

$$(1302, 1224) = 6.$$

3. 1816, -1789.
Aplicando la division euclideana entre 1816 y 1789 obtenemos

$$\begin{aligned}
&1816 = 1789 \cdot 1 + 27,\\
&1789 = 27 \cdot 66 + 7,\\
&27 = 7 \cdot 3 + 6,\\
&7 = 6 \cdot 1 + 1,\\
&6 = 1 \cdot 6 + 0.
\end{aligned}$$

El ultimo residuo no nulo es 1. Por la proposicion 5.15 se sigue que

$$(1816, 1789) = 1,$$

y por tanto $(1816, -1789) = 1$.

4. -666, -12309.

Aplicando la division euclideana entre 666 y 12309 obtenemos

$$\begin{aligned}
&12309 = 666 \cdot 18 + 321,\\
&666 = 321 \cdot 2 + 21,\\
&321 = 24 \cdot 13 + 9,\\
&24 = 9 \cdot 2 + 6,\\
&9 = 6 \cdot 1 + 3,\\
&6 = 3 \cdot 2 + 0.
\end{aligned}$$

El ultimo residuo no nulo es 3. Por proposicion 5.15 se sigue que

$$(666, 12309) = 3,$$

y entonces $(-666, -12309) = 1$.

◀

Ejercicio 3, Inciso f.

Solución.

1. $35x + 17y = 14$.

Aplicamos la division euclideana entre 35 y 17 obteniendo

$$\begin{aligned}
35 &= 17 \cdot 2 + 1\\
17 &= 1 \cdot 17 + 0.
\end{aligned}$$

El ultimo residuo no nulo es 1. Por la proposicion 5.15 se sigue que

$$(35, 17) = 1.$$

En particular $d = 1$ divide a 14, por lo que, por la proposicion 5.16, la ecuacion diofantina tiene soluciones enteras. Del primer paso de la division euclideana obtenemos inmediatamente que

$$1 = 35 - 17 \cdot 2.$$

Multiplicando por 14 ambos lados

$$14 = 35 \cdot 14 + 17 \cdot (-28).$$

De aqui podemos ver una solucion particular dada por

$$x_0 = 14, \qquad y_0 = -28.$$

Como $d = 1$, las soliciopnes enteras a la ecuacion $35x + 17y = 14$ vienen dadas por el corolario 5.6 obteniendo

$$x = x_0 + \frac{17}{1}t = 14 + 17t, \qquad y = y_0 - \frac{35}{1}t = -28 - 35t,$$

Asi, las soluciones enteras son

$$x = 14 + 17t, \qquad y = -28 - 35t, \qquad t \in \mathbb{Z}.$$

2. $1242x + 1476y = 49$.
Aplicamos la division euclideana entre 1242 y 1476 obteniendo

$$\begin{aligned}
&1476 = 1242 \cdot 1 + 234, \\
&1242 = 234 \cdot 5 + 72, \\
&234 = 72 \cdot 3 + 18, \\
&72 = 18 \cdot 4 + 0.
\end{aligned}$$

El ultimo residuo no nulo es 18. Por la proposicion 5.15 se sigue que

$$(1242, 1476) = 18.$$

En particular $d = 18$. Dado que $18 \nmid 49$, por la proposicion 5.16 la ecuacion diofantina no tiene soluciones enteras.

3. $15x + 21y = 10$.
Aplicamos la division euclideana entre 15 y 21 obteniendo

$$\begin{aligned}
&21 = 15 \cdot 1 + 6, \\
&15 = 6 \cdot 2 + 3, \\
&6 = 3 \cdot 2 + 0.
\end{aligned}$$

El ultimo residuo no nulo es 3. Por la proposicion 5.15 se tiene

$$(15, 21) = 3.$$

Como $3 \nmid 10$, por la proposicion 5.16 la ecuacion no tiene soluciones enteras.

4. $696x + 408y = 48$.

Aplicamos la division euclideana entre 696 y 408 obteniendo

$$\begin{aligned}
696 &= 408 \cdot 1 + 288, \\
408 &= 288 \cdot 1 + 120, \\
288 &= 120 \cdot 2 + 48, \\
120 &= 48 \cdot 2 + 24, \\
48 &= 24 \cdot 2 + 0.
\end{aligned}$$

El ultimo residuo no nulo es 24. Por la proposicion 5.15 se tiene

$$(696, 408) = 24.$$

Como $24 \mid 48$, por la proposicion 5.16 la ecuacion tiene soluciones enteras. Del de la division euclideana obtenemos

$$24 = 120 - 48 \cdot 2.$$

Pero

$$48 = 288 - 120 \cdot 2,$$

entonces

$$24 = 120 - (288 - 120 \cdot 2) \cdot 2 = 120 \cdot 5 - 288 \cdot 2.$$

Sustituimos $120 = 408 - 288 \cdot 1$

$$24 = 408 \cdot 5 - (696 - 408) \cdot 7 = 408 \cdot 12 - 697 \cdot 7.$$

Y sustituimos $288 = 696 - 408 \cdot 1$

$$24 = 408 \cdot 5 - (696 - 408) \cdot 7 = 408 \cdot 12 - 696 \cdot 7.$$

Por lo tanto

$$24 = (-7) \cdot 696 + 12 \cdot 408.$$

Multiplicando la igualdad anterior por 2 tenemos que

$$48 = (-14) \cdot 696 + 24 \cdot 408.$$

De aqui vemos una solucion particular de la ecuacion dada por

$$x_0 = -14, \qquad y_0 = 24.$$

Si $d = 24$, entonces la familia general de soluciones dadas por el corolario 5.6 son

$$x = x_0 + \frac{408}{24}t = -14 + 17t, \qquad y = y_0 - \frac{696}{24}t = 24 - 29t$$

Asi, las soluciones enteras son

$$x = -14 + 17t, \qquad y = 24 - 29t, \qquad t \in \mathbb{Z}.$$

5. Sea n un entero, aplicamos la division euclideana obteniendo

$$\begin{aligned} 6n + 1 &= 2 \cdot (3n) + 1, \\ 3n &= 1 \cdot (3n) + 0. \end{aligned}$$

El utlimo residuo no nulo es 1. Por la proposicion 5.15 se tiene

$$(6n + 1, 3n) = 1.$$

Dado que $1 \mid 12$, por la proposicion 5.16 la ecacion tiene soluciones enteras para todo entero n. De la division euclideana se obtiene inmediatamente que

$$1 = (6n + 1) - 2 \cdot (3n).$$

Multiplicando por 12 ambos lados se tiene que

$$12 = (6n + 1) \cdot 12 + 3n \cdot (-24).$$

De aqui tenemos una solucion particular dada por

$$x_0 = 12, \qquad y_0 = -24.$$

Como $d = 1$, entonces la familia general de soluciones dadas por el corolario 5.6 son

$$x = x_0 + \frac{3n}{1}t = 12 + 3nt, \qquad y = y_0 - \frac{6n + 1}{1}t = -24 - (6n + 1)t.$$

Asi las soluciones enteras para cada n entero son

$$x = 12 + 3nt, \qquad y = -24 - (6n + 1)t, \qquad t \in \mathbb{Z}.$$

◀

Ejercicio 4 Inciso h

Demostración. Procedemos por inducción sobre n. *Caso* $n = 2$. Como m_1 y m_2 son primos relativos, existen enteros t y u tales que

$$m_1 t + m_2 u = 1$$

por la proposicion 5.10. Multiplicando por a_1 y a_2 y combinando se obtiene

$$x := a_1 m_2 u + a_2 m_1 t,$$

y se verifica directamente que

$$x \equiv a_1 \pmod{m_1}, \qquad x \equiv a_2 \pmod{m_2}.$$

Como m_1 y m_2 son primos relativos, la solución es única módulo $m_1 m_2$. Supongamos para $n-1$ módulos, y consideremos ahora $m_1, \ldots, m_n$. Por la hipótesis inductiva existe un entero x_0 tal que

$$x_0 \equiv a_i \pmod{m_i} \qquad (i = 1, \ldots, n-1).$$

Sea

$$M' := m_1 m_2 \cdots m_{n-1}.$$

Como los m_i son primos relativos dos a dos, M' y m_n también lo son. Por la proposicion 5.10 existen enteros t, u tales que

$$M't + m_n u = 1.$$

Consideremos entonces

$$x := x_0 + (a_n - x_0)\, t\, M'.$$

Si $i \leq n-1$, entonces $m_i \mid M'$, por lo que

$$x \equiv x_0 \equiv a_i \pmod{m_i}.$$

Además, como $M't \equiv 1 \pmod{m_n}$, se tiene

$$x \equiv x_0 + (a_n - x_0) \equiv a_n \pmod{m_n}.$$

Por tanto x satisface todas las congruencias. La unicidad módulo $m_1 m_2 \cdots m_n$ sigue de que dichos módulos son primos relativos dos a dos, por lo que su producto divide la diferencia de dos soluciones comunes. ■

Ejercicio 4 Inciso i
Solución.

1. $16x - 9 \equiv 0 \pmod{35}$.
Primero notemos que

$$16x - 9 \equiv 0 \pmod{35} \Rightarrow 16x \equiv 9 \pmod{35}.$$

Por el algorimo de euclides obtenemos

$$\begin{aligned} 35 &= 16 \cdot 2 + 3 \\ 16 &= 3 \cdot 5 + 1 \\ 3 &= 1 \cdot 3 + 0. \end{aligned}$$

El ultimo residuo no nulo es 1. Por la proposicion 5.15,

$$(16, 35) = 1$$

Como $(16, 35) = 1$, por la proposicion 5.10 existe un entero t tal que

$$16t \equiv 1 \pmod{35}$$

Tomando $t \equiv 11 \pmod{35}$, multiplicando por t la congruencia dada obtenemos

$$x \equiv 9t \equiv 9 \cdot 11 \equiv 99 \equiv 29 \pmod{35}.$$

Asi, la solucion es

$$x \equiv 29 \pmod{35}.$$

2. $200x + 315 \equiv 0 \pmod{441}$
Primero notemos que

$$200x + 315 \equiv 0 \pmod{441} \Rightarrow 200x \equiv -315 \pmod{441}.$$

Del algoritmo de euclides obtenemos

$$
\begin{aligned}
&441 = 200 \cdot 2 + 41,\\
&200 = 41 \cdot 4 + 36,\\
&41 = 36 \cdot 1 + 5,\\
&36 = 5 \cdot 7 + 1,\\
&5 = 5 \cdot 1 + 0.
\end{aligned}
$$

El utlimo residuo no nulo es 1. Por la proposicion 5.15

$$(200, 441) = 1.$$

Como $(200, 441) = 1$, por la proposicion 5.10 existe un entero t tal que

$$200t \equiv 1 \pmod{441}.$$

Tomando $t \equiv 86 \pmod{441}$, multiplicamos la congruencia dada por t obteniendo

$$x \equiv -315 \cdot \equiv -315 \cdot 86 \equiv 252 \pmod{441}.$$

Asi, la solucion es

$$x \equiv 252 \pmod{441}.$$

3. $(2n + 1)x + 7 \equiv 0 \pmod{4n}$
Primero notemos que

$$(2n + 1)x + 7 \equiv 0 \pmod{441} \Rightarrow (2n + 1)x \equiv -7 \pmod{441}.$$

Por el algoritmo de euclides obtenemos

$$
\begin{aligned}
&4n = (2n + 1) \cdot 1 + (2n - 1),\\
&2n + 1 = (2n - 1) \cdot 1 + 2,\\
&2n - 1 = 2 \cdot (n - 1) + 1,\\
&2 = 1 \cdot 2 + 0.
\end{aligned}
$$

El utlimo residuo no nulo es 1. Por la proposicion 5.15

$$(2n + 1, 4n) = 1.$$

Por la proposicion 5.10 existe un entero t tal que

$$(2n+1)t \equiv 1 \pmod{4n}.$$

multiplicando la congruencia por ese t se obtiene

$$x \equiv -7t \pmod{4n}$$

donde t es cualquier entero que satisfaga $(2n+1)t \equiv 1 \pmod{4n}$.

4. $(3n-2)x + 5n \equiv 0 \pmod{9n-9}$
Primero notemos que

$$(3n-2)x + 5n \equiv 0 \pmod{9n-9} \Rightarrow (3n-2)x \equiv -5n \pmod{9n-9},$$

Por el algoritmo de euclides obtenemos

$$\begin{aligned}
&9n-9 \equiv (3n-2)\cdot 2 + (3n-5),\\
&3n-2 = (3n-5)\cdot 1 + 3,\\
&3n-5 = 2\cdot(n-2) + 1,\\
&3 = 1\cdot 3 + 0.
\end{aligned}$$

El ultimo residuo no nulo es 1, Por la proposicion 5.15

$$(3n-2, 9n-9) = 1.$$

Por la proposicion 5.10 existe un entero t tal que

$$(3n-2)t \equiv 1 \pmod{9n-9}.$$

Multiplicando la congruencia dada por ese t se obtiene

$$x \equiv -5nt \pmod{9n-9},$$

donde t satisface $(3n-2)t \equiv 1 \pmod{9n-9}$.

◀

Ejercicio 4 Inciso j
Solución.

1. $\begin{cases} x \equiv 0 \pmod{3}, \\ x \equiv 0 \pmod{8}. \end{cases}$

Por el algoritmo de euclides obtenemos

$$\begin{aligned}
8 &= 3 \cdot 2 + 2, \\
3 &= 2 \cdot 1 + 1, \\
2 &= 1 \cdot 2 + 0.
\end{aligned}$$

Como el ultimo residuo no nulo es 1 por la proposicion 5.15

$$(3, 8) = 1.$$

Dado que $x \equiv 0 \pmod{3}$ y $x \equiv 0 \pmod{8}$, y los modulos son coprimos la solucion es

$$x \equiv 0 \pmod{mcm(3, 8)}.$$

Pero $mcm(3, 8) = 24$. Por lo tanto

$$x \equiv 0 \pmod{2}4.$$

2. $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{25}, \\ x \equiv 7 \pmod{35}. \end{cases}$

Por el algoritmo de euclides obtenemos

$$\begin{aligned}
35 &= 25 \cdot 1 + 10, \\
25 &= 10 \cdot 2 + 5, \\
10 &= 5 \cdot 2 + 0.
\end{aligned}$$

Como el ultimo residuo no nulo es 5, por la proposicion 5.15 se tiene

$$(25, 35) = 5$$

Si existiera una solucion x, entonces por definicion deberia cumplirse que

$$5 \mid (1 - 7) = -6$$

Pero $5 \nmid -6$. Asi, por la proposicion 5.16, el sistema no tiene solucion.

3. $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{17}, \\ x \equiv 4 \pmod{21}, \\ x \equiv 4 \pmod{25}. \end{cases}$

Por el algoritmo de Euclides obtenemos (entre 21 y 17):

$$\begin{aligned} 21 &= 17 \cdot 1 + 4, \\ 17 &= 4 \cdot 4 + 1, \\ 4 &= 1 \cdot 4 + 0. \end{aligned}$$

Como el último residuo no nulo es 1, por la Proposición 5.15 se tiene

$$(17, 21) = 1$$

Por tanto existe por la proposicion 5.16 existe solucion comun modulo 357. Buscamos k tal que

$$x = 3 + 17k \equiv 4 \pmod{21},$$

es decir

$$17k \equiv 1 \pmod{21}.$$

Tomando $k = 5$ resulta

$$x \equiv 3 + 17 \cdot 5 = 88 \pmod{357}.$$

Ahora resolvemos el sistema

$$\begin{cases} x \equiv 88 \pmod{357}, \\ x \equiv 5 \pmod{25}. \end{cases}$$

Por el algoritmo de Euclides obtenemos (entre 357 y 25):

$$\begin{aligned} 357 &= 25 \cdot 14 + 7, \\ 25 &= 7 \cdot 3 + 4, \\ 7 &= 4 \cdot 1 + 3, \\ 4 &= 3 \cdot 1 + 1, \\ 3 &= 1 \cdot 3 + 0. \end{aligned}$$

Como el último residuo no nulo es 1, por la Proposición 5.15 se tiene

$$(357, 25) = 1.$$

Por tanto ya que los modulos son coprimos y por la proposicion 5.16 existe solucion comun unica modulo $357 \cdot 25 = 8925$. Buscamos t tal que

$$x = 88 + 357t \equiv 5 \pmod{25},$$

es decir

$$357t \equiv 5 - 88 \equiv -83 \equiv 17 \pmod{25}.$$

Reduciendo 357 módulo 25: $357 = 25 \cdot 14 + 7$, luego $357 \equiv 7 \pmod{25}$. La congruencia queda

$$7t \equiv 17 \pmod{25}.$$

Multiplicando por 18 obtenemos

$$t \equiv 18 \cdot 17 = 306 \equiv 6 \pmod{25}.$$

Tomando $t = 6$ se obtiene

$$x = 88 + 357 \cdot 6 = 2230.$$

Por tanto la solución común de las tres congruencias es única módulo 8925 y viene dada por

$$x \equiv 2230 \pmod{8925}.$$

◄