UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO

DIVISIÓN DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS

CAMPUS GUANAJUATO

Tarea 4 (Cálculo Diferencial e Integral I)

Nombre:		
Grupo:	**Fecha:**	**Calificación:**
Profesor: Fernando Núñez Medina.		

Instrucciones: Escribe limpia y ordenadamente el procedimiento (si lo hay) de cada ejercicio y no escribas las respuestas en la hoja de la tarea.

1. Prueba el inciso (b) de la proposición 6.
2. Sean x y y números reales. Prueba que si $xy = 0$, entonces $x = 0$ o $y = 0$. **Sugerencia**: Procede por contradicción.
3. **(Aritmética de las fracciones)** Sean x, y, z y w números reales tales que las expresiones algebraicas de los incisos siguientes están definidas. Prueba lo siguiente:
   (a) $\frac{x}{y} + \frac{z}{w} = \frac{wx+yz}{yw}$.
   (b) $\frac{x}{y} - \frac{z}{w} = \frac{wx-yz}{yw}$.
   (c) $\frac{x}{y} \cdot \frac{z}{w} = \frac{xz}{yw}$.
   (d) $\frac{x}{y} \div \frac{z}{w} = \frac{xw}{yz}$.
   Sugerencia: Recuerda como se definió la resta y la división de números reales.
4. Prueba que si $x, y \geq 0$ y $x + y = 0$, entonces $x = 0$ y $y = 0$.
5. Determina si existe el supremo de los conjuntos siguientes (argumenta tu respuesta). En caso de que exista, calcúlalo (argumenta tu respuesta). Para resolver este ejercicio puedes usar la proposición 17 en los incisos (c) y (d); la proposición 18 en el inciso (e) y la proposición 21 en los incisos (f) y (g).

   (a) $(-3, 5)$.
   (b) $(-3, 5]$.
   (c) $\mathbb{N}$.
   (d) $(0, \infty)$.

(e) $\left\{1-\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}.$

(f) $\mathbb{Q} \cap \left(0, \sqrt{2}\right).$

(g) $\mathbb{I} \cap (0,1).$

6. Sea $m \in \mathbb{N}$. Prueba que para todo número natural n se cumple que
$$m < m + n.$$
En consecuencia, m es el mínimo del conjunto $\{m, m+1, m+2, ...\}$.
Sugerencia: Usa el principio de inducción matemática sobre n.
7. Sean $f : A \to B$ y $C, D \subset A$. Prueba lo siguiente:
(a) $f(C \cup D) = f(C) \cup f(D).$
(b) $f(C \cap D) \subset f(C) \cap f(D).$
8. ¿Qué efecto tiene la transformación $-f(-x)$ sobre la gráfica de una función f?
9. Calcula el rango de las funciones siguientes utilizando su gráfica y la proposición **??**.

(a) $f(x) = x^2 - 5.$

(b) $g(x) = x^3 + 2x + 7.$

(c) $h(x) = \frac{2}{x-3}.$

(d) $i(x) = \sin(x) + 2.$

(e) $j(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x \leq 0, \\ 1, & \text{si } x > 0. \end{cases}$

(f) $k(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \leq 3, \\ x+1, & \text{si } x > 3. \end{cases}$

(g) $l(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \neq 2, \\ 5, & \text{si } x = 2. \end{cases}$

10. Determina si las funciones siguientes son 1-1 o sobre (recuerda que si no se especifica el codominio de una función, se supone, por sencillez, que su codominio es todo $\mathbb{R}$).

(a) $f(x) = x^2 + 1.$

(b) $g(x) = \sqrt{x+1} + 1.$

(c) $h(x) = 2x^3 + x.$