Ejercicio 1, Inciso (a)
Sea A un conjunto no vacio arbitrario y sea

$$R = (a, a) : a \in A.$$

Demuestra que R es una relacion de equivalencia sobre A y que si S es cualquier otra relacion de equivalencia sobre A, entonces $R \subseteq S$. Ademas, halla la particion inducida por R.

Demostración. Primero, veamos que R es una relacion de equivalencia. Para todo $a \in A$, $(a, a) \in R$ por definición de R, por lo que R es reflexiva. Supongamos $(a, b) \in R$. Por definición de R, $a = b$. Entonces, por analogía con el caso anterior, $(b, a) = (a, a) \in R$. Así, R es simétrica. Supongamos $(a, b) \in R$ y $(b, c) \in R$. Por definición de R, $a = b$ y $b = c$, luego $a = c$. Entonces $(a, c) = (a, a) \in R$. Con esto hemos probado que R es transitiva. Asi, hemos probado que R es una relacion de equivalencia.
Ahora sea S una relacion de equivalencia sobre A, como S es reflexiva, para todo $a \in A$, $(a, a) \in S$. Pero, $R = \{(a, a) : a \in A\}$, luego $R \subseteq S$.
Por ultimo la clase de equivalencia de $a \in A$ es

$$[a] = \{x \in A, (a, x) \in R\}$$

Pero $(a, x) \in \mathbb{R}$ implica $a = x$, luego $[a] = \{a\}$. Por lo que la particion inducida por R es

$$\mathcal{P} = \{\{a\} : a \in A\}.$$

■

Ejercicio 2, inciso (a)
Sea $A = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus 0)$. Considera la realacion en A dada por

$$R = \{((a, b), (c, d)) \in A \times A : ad = bc\}$$

Demuestra que R es una relacion de equivalencia y halla la particion inducida por ella.

Demostración. Sea $(a, b) \in R$, tenemos que mostrar que $((a, b), (a, b)) \in R$. La condicion es $ab = ba$ lo cual es cierto por la conmutatividad del producto en $\mathbb{Z}$ por lo tanto R es reflexiva. Ahora supongamos que $((a, b), (c, d)) \in \mathbb{R}$ es decir, $ad = bc$, queremos ver que $cb = da$ pero $ad = bc$ implica $cb = da$ por la conmutatividad del producto en $\mathbb{Z}$, asi, R es simetrica. Por ultimo supongamos $((a, b), (c, d)) \in \mathbb{R}$ y $((c, d), (e, f)) \in \mathbb{R}$ es decir $ad = bc$ y $cf = dc$. De $ad = bc$ tenemos $adf = bcf$ y de igual forma de $cf = dc$ se tiene que $bcf = bdc$ entonces $adf = bdc$ con $d \neq 0$, cancelamos d, asi teniendo $af = bc$ por lo tanto R es transitiva. Asi, R es una relacion de equivalencia.

Por último, la clase de equivalencia de $(a,b) \in A$ es

$$[(a,b)] = \{(c,d) \in A : ad = bc\}.$$

Por lo que la partición inducida por R es

$$\mathcal{P} = \Big\{ \{\{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \frac{c}{d} = r\} : r \in \mathbb{Q}\}\Big\}.$$

$\blacksquare$

Ejercicio 3, inciso (a)
Sean $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y

$$R = \{((a,b),(c,d)) \in A \times A : a + d = b + c\}$$

demuestra que R es una relacion de equivalencia.

Demostración. Primero, veamos que R es una relación de equivalencia. Sea $(a,b) \in A$. Entonces

$$a + b = b + a,$$

por la conmutatividad de la suma en $\mathbb{N}$, por lo que $((a,b),(a,b)) \in R$. Así, R es reflexiva. Ahora supongamos que $((a,b),(c,d)) \in R$, es decir,

$$a + d = b + c.$$

Reordenando términos se obtiene

$$c + b = d + a,$$

lo cual muestra que $((c,d),(a,b)) \in R$, por lo tanto R es simétrica. Por último, supongamos que $((a,b),(c,d)) \in R$ y $((c,d),(e,f)) \in R$, es decir,

$$a + d = b + c \qquad \text{y} \qquad c + f = d + e.$$

sumando se tiene que

$$(a + d) + (c + f) = (b + c) + (d + e)$$

Por la asociatividad de la suma en $\mathbb{N}$ se sigue que

$$(a + f) + (d + c) = (b + c) + (d + c).$$

De esta manera

$$a + f = b + e,$$

por lo que $((a,b),(e,f)) \in R$. Así, R es transitiva. Con esto hemos probado que R es una relación de equivalencia. Ahora, la clase de equivalencia de $(a,b) \in A$ es

$$[(a,b)] = \{(c,d) \in A : a + d = b + c\}.$$

La partición inducida por R es entonces

$$\mathcal{P} = \Big\{ \{\{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a - b = k\} : k \in \mathbb{Z}\} \Big\}.$$

$\blacksquare$

Ejercicio 4, inciso a

Demuestra que $\mathbb{Q}^n$ es numerable.

Demostración. Procedamos por induccion. El caso $n = 1$ es claro ya que $\mathbb{Q}$ es numerable. Supongamos para $n = k$. Probemos para $n = k + 1$. Notemos que

$$\mathbb{Q}^k \times \mathbb{Q} = \mathbb{Q}^{k+1}.$$

Por el lema 1 se sigue que es verdadero para $n = k + 1$. Por lo tanto $\mathbb{Q}^n$ es numerable. $\blacksquare$