E_1	E_2	E_3	E_4	Calif.

Matemáticas Elementales

Agosto - Diciembre de 2025

Tarea 9

Resuelve los siguientes ejercicios según el reglamento del curso y **entrega esta página** con los nombres de los integrantes de equipo colocados en lugar de estas líneas de instrucciones. Todas las demostraciones deben redactarse justificando formalmente todos los pasos necesarios.

La tarea debe resolverse **con la teoría vista en el curso o con resultados a lo más de los cursos de preparatoria**. Está prohibido utilizar resultados de otros cursos de este mismo semestre o de semestres posteriores. Tampoco está permitido utilizar trucos de alguna olimpiada relacionada con computación y/o matemáticas.

Cada inciso distinto debe ser resuelto por un alumno distinto y, en cada caso, deberá colocarse el nombre de la persona que redactó el inciso.

1. Con base en la definición de suma en $\mathbb{N}_0$ vista en clase, demuestra que se cumplen las siguientes propiedades para cualesquiera $n, m, k \in \mathbb{N}_0$.

   (a) $n + m = m + n$.
   (b) $n + (m + k) = (n + m) + k$.
   (c) Se cumple que $n < m$ si y solo si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $m = n + k$.
   (d) $n + k = m + k \iff n = m$.

2. Con base en las definiciones de suma y producto en $\mathbb{N}_0$ vistas en clase, demuestra que se cumplen las siguientes propiedades para cualesquiera $n, m, k \in \mathbb{N}_0$

   (a) $1 \cdot n = n = n \cdot 1$.
   (b) $m(n + 1) = mn + m$.
   (c) $m(n + k) = mn + mk$.
   (d) $(n + k)m = nm + km$.
   (e) $nm = mn$.

(f) $k(nm) = (kn)m$.

3. Demuestra que las operaciones de suma y producto en $\mathbb{Z}$ vistas en clase, satisfacen las siguientes propiedades para cualesquiera $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

   (a) $(a + b) + c = a + (b + c)$.

   (b) $a + 0 = a$.

   (c) $a + b = c + b \Longleftrightarrow a = c$.

   (d) $a(-b) = -(ab) = (-a)b$.

   (e) $a(bc) = (ab)c$.

   (f) $a(1) = 1(a) = a$.

   (g) $a(0) = 0 = 0(a)$.

   (h) $a(b + c) = ab + ac$.

   (i) $ab = ac \Longleftrightarrow b = c, \quad \forall a \neq 0$.

   (j) El inverso aditivo es único.

4. Dado $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ como se definió en clase, demuestra lo siguiente:

   (a) $+, \cdot$ son operaciones conmutativas.

   (b) $+, \cdot$ son asociativas.

   (c) Existen los neutros aditivos multiplicativo en $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$.

   (d) El neutro aditivo y el neutro multiplicativo en $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ son únicos.

   (e) $+, \cdot$ cumplen las leyes de la cancelación.

   (f) $\mathbb{Q}_{++}$ es cerrado bajo suma y producto.

   (g)
   $$\frac{a}{b} > \frac{a'}{b'}, \frac{c}{d} > \frac{c'}{d'} \Longrightarrow \frac{a}{b} + \frac{c}{d} > \frac{a'}{b'} + \frac{c'}{d'},$$

   (h)
   $$\frac{a}{b} > \frac{a'}{b'} \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{c}{d} > \frac{a'}{b'} + \frac{c}{d},$$

   (i)
   $$\frac{a}{b} > \frac{a'}{b'} \geq 0 \text{ y } \frac{c}{d} > \frac{c'}{d'} \geq 0 \Longrightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} > \frac{a'}{b'} \cdot \frac{c'}{d'},$$

   (j)
   $$\frac{a}{b} > \frac{a'}{b'}, \frac{c}{d} > 0 \Longrightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} > \frac{a'}{b'} \cdot \frac{c}{d},$$

(k)

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Longleftrightarrow -\frac{c}{d} > -\frac{a}{b}.$$