E_1	E_2	E_3	E_4	Calif.

Matemáticas Elementales

Agosto - Diciembre de 2025

Tarea 6

Resuelve los siguientes ejercicios según el reglamento del curso y **entrega esta página** con los nombres de los integrantes de equipo colocados en lugar de estas líneas de instrucciones. Todas las demostraciones deben redactarse justificando formalmente todos los pasos necesarios.

Antes de iniciar cada demostración, deberás indicar claramente cuáles son las hipótesis de cada ejercicio y qué es lo que debes demostrar en cada ejercicio.

La tarea debe resolverse con la teoría vista en el curso o con resultados a lo más de los cursos de preparatoria. Está prohibido utilizar resultados de otros cursos de este mismo semestre y/o trucos de alguna olimpiada relacionada con computación y/o matemáticas.

Cada inciso distinto debe ser resuelto por un alumno distinto y, en cada caso, deberá colocarse el nombre de la persona que redactó el inciso.

En cada ejercicio, cada inciso distinto debe ser resuelto y redactado por un miembro distinto del equipo.

1. Para las sucesiones de conjuntos $\{A_n\}_n$ dadas en cada inciso, demuestra que ellas convergen y halla su límite.

   (a)
   $$A_n = \left(\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}\right).$$

   (b)
   $$A_n = \left[1 - \frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n}\right].$$

   (c)
   $$A_n = [0, g(n)],$$
   donde $g(n) = 1 + 1/n^2$.

   (d)
   $$A_n = \{k \in \mathbb{N} : k \leq n\}.$$

2. Para las sucesiones de conjuntos $\{A_n\}_n$ dadas en cada inciso, halla

$$\inf_{k\geq n} A_k, \sup_{k\geq n} A_k.$$

Además, determina si la sucesión converge y, en caso afirmativo, especifica su límite.

(a)

$$A_n = \begin{cases} (-n,1) & \text{si } n \text{ es impar,} \\ (1,n) & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

(b)

$$A_1 = \{1\}, A_n = \left\{\frac{n}{n+1}\right\} \text{ para } n \geq 2.$$

(c)

$$A_1 = (0, 1/2], A_n = \left(\frac{1}{n-1} + \frac{n-2}{2}, \frac{1}{n-1} + \frac{n-2}{2}\right], n \geq 2.$$

(d)

$$A_1 = \varnothing, A_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}\right), \text{ para } n \geq 2.$$

3. Sea $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ una colección de números reales.

(a) Supón que existe N tal que $x_n \neq x_m$ para cualesquiera $n, m \geq N$ distintos. Demuestra que

$$\lim_{n\to\infty} \{x_n\} = \varnothing.$$

(b) Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que $f(n) = x_n$. Supón que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n\to\infty} f(n) = x$. Demuestra que el límite $\lim_{n\to\infty}\{x, x_n\}$ existe y hállalo explícitamente.

4. Sean $\{A_n\}_n, \{B_n\}_n$ dos sucesiones de conjuntos tales que $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ y $\lim_{n\to\infty} B_n = B$. Demuestra o refuta las siguientes igualdades:

(a)

$$\lim_{n\to\infty} (A_n \cap B_n) = A \cap B.$$

(b)

$$\lim_{n\to\infty} (A_n \cup B_n) = A \cup B.$$

5. Ejercicio extra: Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que $\lim_{n\to\infty} f(n) = x$ para algún $x \in (0, \infty]$ (x puede ser infinito). Sea $A_n := [0, f(n)]$ para $n \in \mathbb{N}$, demuestra o refuta que

$$\lim_{n\to\infty} A_n = [0, x].$$

Nota: Este ejercicio contará como una tarea cuya calificación sólo podrá ser 0 ó 100 (100 si todos los argumentos son correctos y no hay errores graves de redacción. En caso contrario, se calificará con cero). Deberá entregarse en físico (escrito a mano o impreso) de manera individual (sólo se darán puntos a las personas que lo entreguen) y la fecha máxima de entrega será el 17 de noviembre a las 9:30. Se aplicarán los mismos criterios del reglamento que se aplican a las tareas.