UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO
DIVISIÓN DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
CAMPUS GUANAJUATO

Tarea 6 (Cálculo Diferencial e Integral I)

Nombre: Ricardo Leon Martinez
Grupo: A Fecha: 26/09/2025 Calificación:
Profesor: Fernando Núñez Medina.

Instrucciones: Escribe limpia y ordenadamente el procedimiento (si lo hay) de cada ejercicio y no escribas las respuestas en la hoja de la tarea.

1. Sean $x \neq 0$ y n un numero natural. Usa la unicidad del inverso multiplicativo para probar que

$$(x^n)^{-1} = (x^{-1})^n.$$

Demostración. Sea $x \in \mathbb{R}$ con $x \neq 0$ y $n \in \mathbb{N}$. Consideremos el producto

$$x^n \cdot (x^{-1})^n.$$

Por las leyes de las potencias, se cumple que

$$x^n(x^{-1})^n = (x \cdot x^{-1})^n = 1^n = 1.$$

De este modo, $(x^{-1})^n$ es un inverso multiplicativo de x^n. Como el inverso multiplicativo de un número distinto de cero es único, se concluye que

$$(x^n)^{-1} = (x^{-1})^n.$$

Por tanto, para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $x \neq 0$, obtenemos

$$x^{-n} = (x^n)^{-1} = (x^{-1})^n.$$

■

2. Sean A un subconjunto no vació de números reales y $c \in \mathbb{R}$. Definimos

$$cA = \{ca : a \in A\}.$$

Prueba que si A es no vació y acotado superiormente, y $c \geq 0$, entonces

$$\sup(cA) = c\sup(A).$$

Demostración. Primero probemos que $c\sup(A)$ es una cota superior de cA. Si $a \in A$, entonces $a \leq \sup(A)$. Multiplicando ambos lados por $c \geq 0$ se obtiene

$$ca \leq c\sup(A).$$

Como esto funciona para todo $a \in A$, se sigue que $c\sup(A)$ es una cota superior de cA.

Ahora probemos que $c\sup(A)$ es la menor de dichas cotas. Sea $\varepsilon > 0$. Como $\sup(A)$ es el supremo de A, existe $a \in A$ tal que

$$\sup(A) - \frac{\varepsilon}{c} < a \leq \sup(A).$$

Multiplicando por $c \geq 0$, obtenemos

$$c\sup(A) - \varepsilon < ca \leq c\sup(A).$$

Así, $ca \in cA$ y se cumple que está arbitrariamente cerca de $c\sup(A)$ por debajo.

Por lo tanto, $c\sup(A)$ es efectivamente el supremo de cA, es decir,

$$\sup(cA) = c\sup(A).$$

∎

3. Sean a y b números reales y n un numero natural. Prueba que

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n.$$

Demostración. Caso base ($n = 1$). Se tiene

$$(a+b)^1 = a + b = \binom{1}{0}a^1b^0 + \binom{1}{1}a^0b^1,$$

puesto que $\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$. Por tanto es verdadera para $n = 1$.

Paso inductivo. Supongamos que para algún $n \geq 1$ se cumple

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k.$$

Multiplicando por $(a+b)$:

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1}b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^{k+1}.$$

En la segunda suma realizamos el cambio de índice $j = k+1$:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}b^{k+1} = \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^{(n+1)-j}b^j.$$

Reescribiendo la primera suma con $j = k$ y sumando término a término:

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{(n+1)-j}b^j + \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^{(n+1)-j}b^j.$$

Separando los extremos y agrupando los términos para $1 \leq j \leq n$:

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n}{0}a^{n+1} + \sum_{j=1}^{n}(\binom{n}{j} + \binom{n}{j-1})a^{(n+1)-j}b^j + \binom{n}{n}b^{n+1}.$$

Usando la identidad de Pascal $\binom{n}{j} + \binom{n}{j-1} = \binom{n+1}{j}$ y que $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, concluimos

$$(a+b)^{n+1} = \sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}a^{(n+1)-j}b^j.$$

Por el principio de inducción la fórmula vale para todo $n \in \mathbb{N}$. ∎

4. Prueba, mediante contraejemplos, que es falso que la suma, resta, producto y cociente de números irracionales sea un numero irracional.

Demostración. Mostraremos con contraejemplos que es falso que la suma, la resta, el producto y el cociente de irracionales sean siempre irracionales.

Suma. Sean $r = \sqrt{2}$ y $s = \sqrt{2}$. Ambos son irracionales, pero

$$r + s = \sqrt{2} - \sqrt{2} = 1.$$

Resta. Sean $r = \sqrt{2}$ y $s = \sqrt{2}$. Entonces

$$r - s = \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0.$$

Producto. Sean $r = \sqrt{2}$ y $s = \sqrt{2}$. Entonces

$$r \cdot s = (\sqrt{2})(\sqrt{2}) = 2.$$

Cociente. Sean $r = \sqrt{2}$ y $s = \sqrt{2}$. Entonces

$$\frac{r}{s} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1.$$

En todos los casos, dos irracionales pueden dar como resultado números no irracionales, de modo que las afirmaciones dadas son falsas. ∎

5. Sean $f : A \to B, C \subset A$ y $D \subset B$. Prueba lo siguiente

$$C \subset f^{-1}(f(C)). \qquad f(f^{-1}(D)) \subset D.$$

Demostración. Recordemos las definiciones:

$$f(C) = \{f(x) \in B : x \in C\}, \quad f^{-1}(D) = \{x \in A : f(x) \in D\}.$$

(a) Probemos que $C \subset f^{-1}(f(C))$.

Sea $x \in C$. Queremos mostrar que $x \in f^{-1}(f(C))$. Por definición, $f(x) \in f(C)$. Pero $f^{-1}(f(C)) = \{a \in A : f(a) \in f(C)\}$. Como $x \in A$ y $f(x) \in f(C)$, se sigue que $x \in f^{-1}(f(C))$. Por lo tanto, $C \subset f^{-1}(f(C))$.

(b) Probemos que $f(f^{-1}(D)) \subset D$.

Sea $y \in f(f^{-1}(D))$ arbitrario. Queremos mostrar que $y \in D$. Por definición, existe $x \in f^{-1}(D)$ tal que $y = f(x)$. Pero si $x \in f^{-1}(D)$, entonces $f(x) \in D$. Luego, $y = f(x) \in D$. Por lo tanto, $f(f^{-1}(D)) \subset D$. ■

6. Prueba que si $n \in \mathbb{N}$ y $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$, entonces

$$|x_1 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + \cdots |x_n|$$

Demostración. Usaremos inducción matemática sobre n.

Caso base: Para $n = 1$, la desigualdad es trivialmente cierta:

$$|x_1| \leq |x_1|.$$

Para $n = 2$, sabemos que vale la desigualdad del triángulo usual:

$$|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|.$$

Paso inductivo: Supongamos que la desigualdad es cierta para $n = k$, es decir:

$$|x_1 + \cdots + x_k| \leq |x_1| + \cdots + |x_k|.$$

Probemos para $n = k + 1$:

$$\begin{aligned}
|x_1 + \cdots + x_k + x_{k+1}| &= |(x_1 + \cdots + x_k) + x_{k+1}| \\
&\leq |x_1 + \cdots + x_k| + |x_{k+1}| \quad \text{(por la desigualdad del triángulo)} \\
&\leq (|x_1| + \cdots + |x_k|) + |x_{k+1}| \quad \text{(por hipótesis)} \\
&= |x_1| + \cdots + |x_k| + |x_{k+1}|.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la desigualdad es válida para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

7. Prueba, usando la definición de limite, que $\lim_{x \to 2} 3x = 6$.

Demostración. Queremos demostrar que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - 2| < \delta$ entonces $|3x - 6| < \varepsilon$.

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Consideremos:

$$|3x - 6| = 3|x - 2|.$$

Queremos que $3|x - 2| < \varepsilon$, lo cual equivale a:

$$|x - 2| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Por lo tanto, si elegimos $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, entonces cuando $0 < |x - 2| < \delta$ se cumple:

$$|3x - 6| = 3|x - 2| < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Así, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \frac{\varepsilon}{3} > 0$ tal que si $0 < |x - 2| < \delta$ entonces $|3x - 6| < \varepsilon$. Esto prueba que $\lim_{x \to 2} 3x = 6$. ■

8. Prueba, usando la negación de la definición de limite, que es falso que $\lim_{x\to 3} 3x = -1$.

Demostración. La definición de límite dice: $\lim_{x\to p} f(x) = L$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - p| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Su negación es: $\lim_{x\to p} f(x) \neq L$ si existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existe algún x con $0 < |x - p| < \delta$ pero $|f(x) - L| \geq \varepsilon$.

Queremos probar que $\lim_{x\to 2} 3x \neq -1$.

Sea $f(x) = 3x$, $p = 2$, $L = -1$. Tomemos $\varepsilon = 1$.

Para cualquier $\delta > 0$, elegimos $x = 2$ (pero espera, x debe satisfacer $0 < |x - 2| < \delta$). Mejor elegimos $x = 2 + \frac{\delta}{2}$, que cumple $0 < |x - 2| = \frac{\delta}{2} < \delta$.

Calculamos:

$$|f(x) - (-1)| = |3x + 1| = |3(2 + \frac{\delta}{2}) + 1| = |6 + \frac{3\delta}{2} + 1| = |7 + \frac{3\delta}{2}|.$$

Como $\delta > 0$, tenemos $7 + \frac{3\delta}{2} > 7 > 1$, luego:

$$|f(x) - (-1)| > 1 = \varepsilon.$$

Por lo tanto, para $\varepsilon = 1$ y para todo $\delta > 0$, existe $x = 2 + \frac{\delta}{2}$ tal que $0 < |x - 2| < \delta$ pero $|3x - (-1)| \geq \varepsilon$. Esto prueba que $\lim_{x\to 2} 3x \neq -1$. ■

9. Calcula los limites siguientes:

a) $\lim_{x\to 1} (3x^3 - 2x^2 + 4)$.

b) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{x-1}$.

c) $\lim_{x\to 0} \cos(x^2 + 1)$.

d) $\lim_{x\to 1} 2x^3 - x + 5$.

e) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} + \arctan(x)$.

f) $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^3-4x^2}{3x^4+2x}$.

Solución:

a) Aplicamos las propiedades de los límites:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}(3x^3 - 2x^2 + 4) &= \lim_{x\to 1} 3x^3 - \lim_{x\to 1} 2x^2 + \lim_{x\to 1} 4 \quad \text{(Límite de la suma/diferencia)} \\
&= 3\lim_{x\to 1} x^3 - 2\lim_{x\to 1} x^2 + \lim_{x\to 1} 4 \quad \text{(Límite del producto por constante)} \\
&= 3(1)^3 - 2(1)^2 + 4 \quad \text{(Límite de una potencia y de una constante)} \\
&= 3(1) - 2(1) + 4 \\
&= 3 - 2 + 4 = 5.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lim_{x\to 1}(3x^3 - 2x^2 + 4) = 5$.

b) Analizamos directamente el límite:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x-1}$$

Si sustituimos $x=1$ obtenemos $\frac{1+2-3}{1-1}=\frac{0}{0}$, que es una forma indeterminada.
Factorizamos el numerador:

$$x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$$

Entonces:

$$\frac{x^2+2x-3}{x-1}=\frac{(x-1)(x+3)}{x-1}=x+3 \quad \text{para } x\neq 1$$

Aplicamos las propiedades de los límites:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x-1} &= \lim_{x\to 1}(x+3) \\
&= \lim_{x\to 1}x+\lim_{x\to 1}3 \quad \text{(Límite de la suma)} \\
&= 1+3 \quad \text{(Límite de la función identidad y de constante)} \\
&= 4
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x-1}=4$.

c) Aplicamos las propiedades de los límites:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\cos\left(x^2+1\right) &= \cos\left(\lim_{x\to 0}(x^2+1)\right) \quad \text{(Por continuidad del coseno)} \\
&= \cos\left(\lim_{x\to 0}x^2+\lim_{x\to 0}1\right) \quad \text{(Límite de la suma)} \\
&= \cos\left((0)^2+1\right) \quad \text{(Límite de la potencia y de constante)} \\
&= \cos(0+1) \\
&= \cos(1)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lim_{x\to 0}\cos\left(x^2+1\right)=\cos(1)$.

d) Aplicamos las propiedades de los límites laterales:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^-}(2x^3-x+5) &= \lim_{x\to 1^-}2x^3-\lim_{x\to 1^-}x+\lim_{x\to 1^-}5 \quad \text{(Límite de la suma/diferencia)} \\
&= 2\lim_{x\to 1^-}x^3-\lim_{x\to 1^-}x+\lim_{x\to 1^-}5 \quad \text{(Límite del producto por constante)} \\
&= 2(1)^3-1+5 \\
&= 2(1)-1+5 \\
&= 2-1+5=6
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lim_{x\to 1^-}2x^3-x+5=6$.

e) Aplicamos las propiedades de los límites en el infinito:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}+\arctan(x)\right) &= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}+\lim_{x\to\infty}\arctan(x) \quad \text{(Límite de la suma)} \\
&= 0+\lim_{x\to\infty}\arctan(x) \quad \left(\text{Límite de } \frac{1}{x} \text{ cuando } x\to\infty\right) \\
&= 0+\frac{\pi}{2} \quad \text{(Límite conocido de } \arctan(x)\text{)} \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}+\arctan(x)=\frac{\pi}{2}$.

f) Para límites en el infinito de funciones racionales, dividimos numerador y denominador por la mayor potencia de x:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{5x^3-4x^2}{3x^4+2x} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5x^3}{x^4}-\frac{4x^2}{x^4}}{\frac{3x^4}{x^4}+\frac{2x}{x^4}} \quad \text{(Dividiendo por } x^4\text{)} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{5}{x}-\frac{4}{x^2}}{\frac{3}{1}+\frac{2}{x^3}} \\
&= \frac{\lim_{x\to\infty} \frac{5}{x} - \lim_{x\to\infty} \frac{4}{x^2}}{\lim_{x\to\infty} 3 + \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x^3}} \quad \text{(Límite del cociente)} \\
&= \frac{0-0}{3+0} \quad \text{(Límites de términos con } x \text{ en denominador)} \\
&= \frac{0}{3} = 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^3-4x^2}{3x^4+2x} = 0$.

10. Prueba que $\lim_{x\to p} f(x) = 0$ ssi $\lim_{x\to p} |f(x)| = 0$.

Demostración. Demostramos la doble implicación:

Demostremos la suficiencia, supongamos que $\lim_{x\to p} f(x) = 0$. Queremos probar que $\lim_{x\to p} |f(x)| = 0$.

Por definición, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x-p| < \delta$ entonces $|f(x) - 0| < \varepsilon$.

Pero $|f(x) - 0| = |f(x)|$, y por propiedades del valor absoluto tenemos:

$$||f(x)| - 0| = ||f(x)|| = |f(x)|$$

Por lo tanto, si $|f(x)| < \varepsilon$, entonces $||f(x)| - 0| < \varepsilon$.

Así, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x-p| < \delta$ entonces $||f(x)| - 0| < \varepsilon$, lo que prueba que $\lim_{x\to p} |f(x)| = 0$.

Ahora demostremos la necesidad, supongamos que $\lim_{x\to p} |f(x)| = 0$. Queremos probar que $\lim_{x\to p} f(x) = 0$.

Por definición, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x-p| < \delta$ entonces $||f(x)| - 0| < \varepsilon$.

Pero $||f(x)| - 0| = |f(x)|$, y tenemos la desigualdad:

$$|f(x) - 0| = |f(x)| = ||f(x)|| = ||f(x)| - 0|$$

Por lo tanto, si $||f(x)| - 0| < \varepsilon$, entonces $|f(x) - 0| < \varepsilon$.

Así, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x-p| < \delta$ entonces $|f(x) - 0| < \varepsilon$, lo que prueba que $\lim_{x\to p} f(x) = 0$.

Hemos demostrado ambas implicaciones, por lo que la equivalencia es válida. ■