

E_1	E_2	E_3	E_4	Calif.

Resuelve los siguientes ejercicios justificando totalmente cada paso en tu procedimiento. La falta de alguna justificación y/o la mala redacción, serán severamente penalizadas.

El examen debe resolverse utilizando únicamente tinta azul estándar y sin escribir en esta hoja algo mas que tu nombre y numero de inscripción.

Utiliza ambos lados de las hojas de respuestas e indica claramente donde termina un ejercicio/inciso y comienza uno nuevo.

Puedes utilizar todos los resultados vistos en cursos previos siempre y cuando estos no sean lo que se pide demostrar. **No** puede utilizar resultados probados en las tareas y/o en las ayudantías. En caso de requerir alguno de tales resultados, deberás incluir su demostración.

Se penalizarán los pasos innecesarios.

La calificación final del examen será el promedio de las puntuaciones obtenidas en cada ejercicio.

1. (100 pts.) Demuestra que $f : A \rightarrow B$ es una función biyectiva si y solo si para todo $b \in B$ se cumple

$$|f^{-1}(\{b\})| = 1.$$

2. (25 pts. c/u) Para cada colección de conjuntos $\{A_n, n \in \mathbb{N}\}$, calcula $\bigcup_{n \geq 1} A_n$ e $\bigcap_{n \geq 1} A_n$, (deberás demostrar formalmente que las uniones e intersecciones coinciden con los conjuntos que hallaste).

- (a) $A_n = [1 + 1/n, 2]$.
- (b) $A_n = \{(-1)^k : k \leq n, k \in \mathbb{N}\}$.
- (c) $A_n = \{(-1)^k : k \geq n, k \in \mathbb{N}\}$.
- (d) $A_n = \{(-1)^n n\}$.

3. (100 pts.) Sea $f : A \rightarrow B$ con $A, B \subseteq \mathbb{R}$ una función estrictamente monótona. Pruebe que f es inyectiva.
4. (100 pts.) Demuestre por inducción matemática que para todo k natural mayor a 1, se cumple que $k^n - 1$ es múltiplo de $k - 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

5. (100 pts.) Demuestra la siguiente igualdad

$$\sum_{j=1}^n (-1)^j j \binom{n}{j} = 0.$$