UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO

DIVISIÓN DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
CAMPUS GUANAJUATO

Tarea 11 (Calculo Diferencial e Integral I)

Nombre: Ricardo León Martínez **Fecha:** 06/11/2025 **Calificación:** ____________

1. Prueba las leyes de los exponentes cuando m y n son numeros racionales.

Demostración. Definición probada en la Tarea 10: Si $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $x > 0$, entonces

$$x^{m/n} = \left(x^{1/n}\right)^m = (x^m)^{1/n}.$$

Escribimos $m = \frac{a}{b}$, $n = \frac{c}{d}$, con $a, c \in \mathbb{Z}$, $b, d \in \mathbb{N}$.

(a) $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$

Sean $m = \frac{a}{b}$, $n = \frac{c}{d}$. Entonces

$$x^m = x^{a/b} = \left(x^{1/bd}\right)^{ad}, \quad x^n = x^{c/d} = \left(x^{1/bd}\right)^{bc}.$$

Multiplicamos

$$x^m \cdot x^n = \left(x^{1/bd}\right)^{ad} \cdot \left(x^{1/bd}\right)^{bc} = \left(x^{1/bd}\right)^{ad+bc}.$$

Pero $m + n = \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$, luego

$$x^{m+n} = x^{(ad+bc)/(bd)} = \left(x^{1/bd}\right)^{ad+bc}.$$

Por lo tanto, $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$.

(b) $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$

$$\frac{x^m}{x^n} = x^m \cdot x^{-n}.$$

Pero $-n = -\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, y por el inciso (a) para exponentes racionales

$$x^m \cdot x^{-n} = x^{m+(-n)} = x^{m-n}.$$

(c) $x^n \cdot y^n = (xy)^n$

Sea $n = \frac{c}{d}$.

$$x^n = x^{c/d} = \left(x^{1/d}\right)^c, \quad y^n = \left(y^{1/d}\right)^c.$$

Multiplicando

$$x^n \cdot y^n = \left(x^{1/d}\right)^c \left(y^{1/d}\right)^c = \left(x^{1/d} \cdot y^{1/d}\right)^c.$$

Pero $x^{1/d} \cdot y^{1/d} = (xy)^{1/d}$, luego

$$x^n \cdot y^n = \left((xy)^{1/d}\right)^c = (xy)^{c/d} = (xy)^n.$$

(d) $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \left(x \cdot y^{-1}\right)^n.$$

Por (c) para exponentes racionales

$$\left(x \cdot y^{-1}\right)^n = x^n \cdot (y^{-1})^n.$$

Pero $(y^{-1})^n = y^{-n} = \frac{1}{y^n}$, así que

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}.$$

(e) $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$

Sean $m = \frac{a}{b}$, $n = \frac{c}{d}$. Entonces

$$x^m = x^{a/b} = \left(x^{1/b}\right)^a.$$

Luego

$$(x^m)^n = \left[\left(x^{1/b}\right)^a\right]^{c/d}.$$

Por definición, esto es la raíz d-ésima de $\left(x^{1/b}\right)^{ac}$, es decir

$$(x^m)^n = \left(x^{ac/b}\right)^{1/d} = x^{ac/(bd)}.$$

Pero $m \cdot n = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, así que

$$x^{m \cdot n} = x^{ac/(bd)}.$$

Por lo tanto, $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$.

$\blacksquare$

2. **(Funciones trigonometricas Inversas)** Por el criterio de la recta horizontal para determinar si una funcion es 1-1, es claro que las funciones trigonometricas no son funciones 1-1 y, en consecuancia, no son invertibles, sin embargo, restringiremos su dominio para que si lo sean. Las restricciones que se suelen utilizar se muestran en el cuadro siguiente

Funcion	**Restriccion**	**Rango de la restriccion**
$\sin(x)$	$[-\pi/2, \pi/2]$	$[-1, 1]$
$\cos(x)$	$[0, \pi]$	$[-1, 1]$
$\tan(x)$	$(-\pi/2, \pi/2)$	$\mathbb{R}$
$\cot(x)$	$(0, \pi)$	$\mathbb{R}$
$\sec(x)$	$[0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
$\csc(x)$	$[-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2]$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

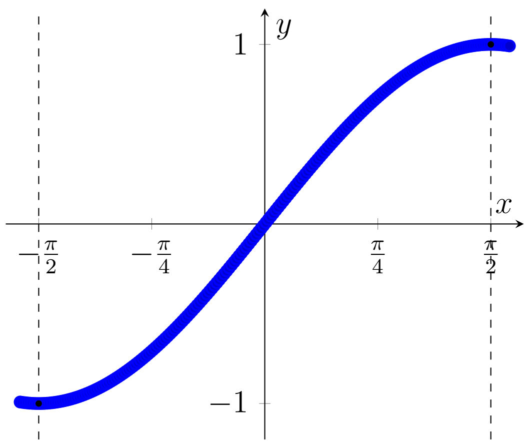
Las restricciones de las funciones trigonometricas señaladas en el cuadro anterior son 1-1 y sobre (su rango) y, en consecuencia, invertibles. A las funciones inversas de las restricciones señaladas en el cuadro anterior se les llama arcoseno, arcocoseno, arcotangente, arcocotangente, arcosecante, arcocosecante, y se les denota por $\arcsin(x)$, $\arccos(x)$, $\arctan(x)$, $\operatorname{arccot}(x)$, $\operatorname{arcsec}(x)$ y $\operatorname{arccsc}(x)$, respectivamente; son las llamadas funciones trigonometricas inversas.

(a) Dibuja las graficas de las restricciones del cuadro anterior.

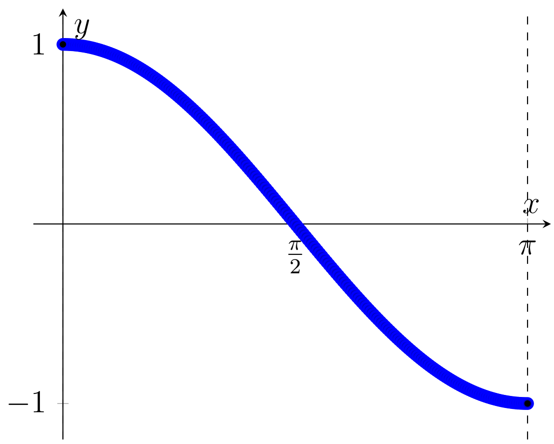
(b) A partir de las graficas del inciso (a) dibuja las graficas de las funciones trigonometricas inversas.

Solución. (a) Gráficas de las restricciones.

$\sin(x)$ en $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$



$\cos(x)$ en $[0, \pi]$



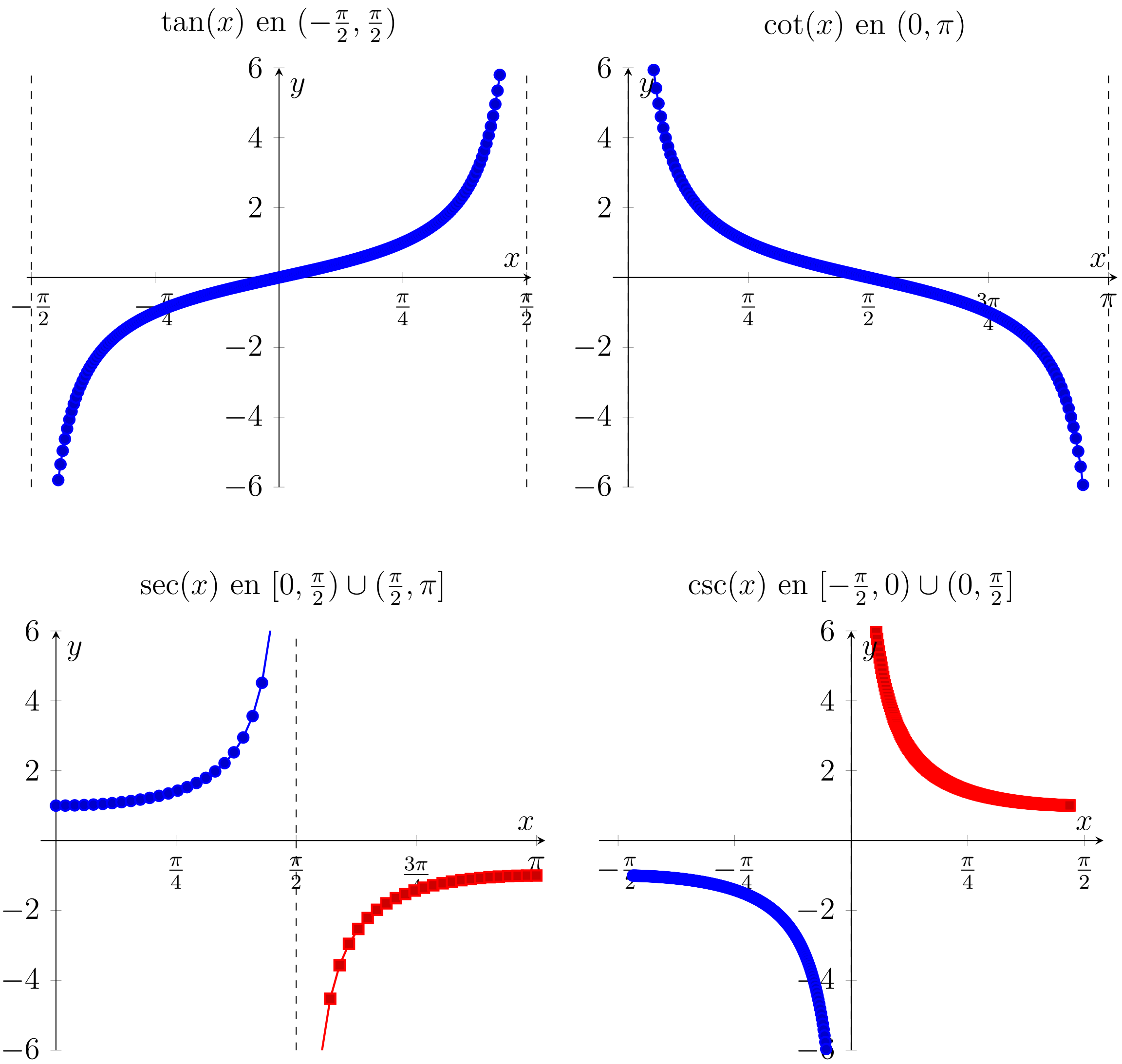


Figura 1: Gráficas de las funciones trigonométricas restringidas.

(b) Gráficas de las funciones trigonométricas inversas.

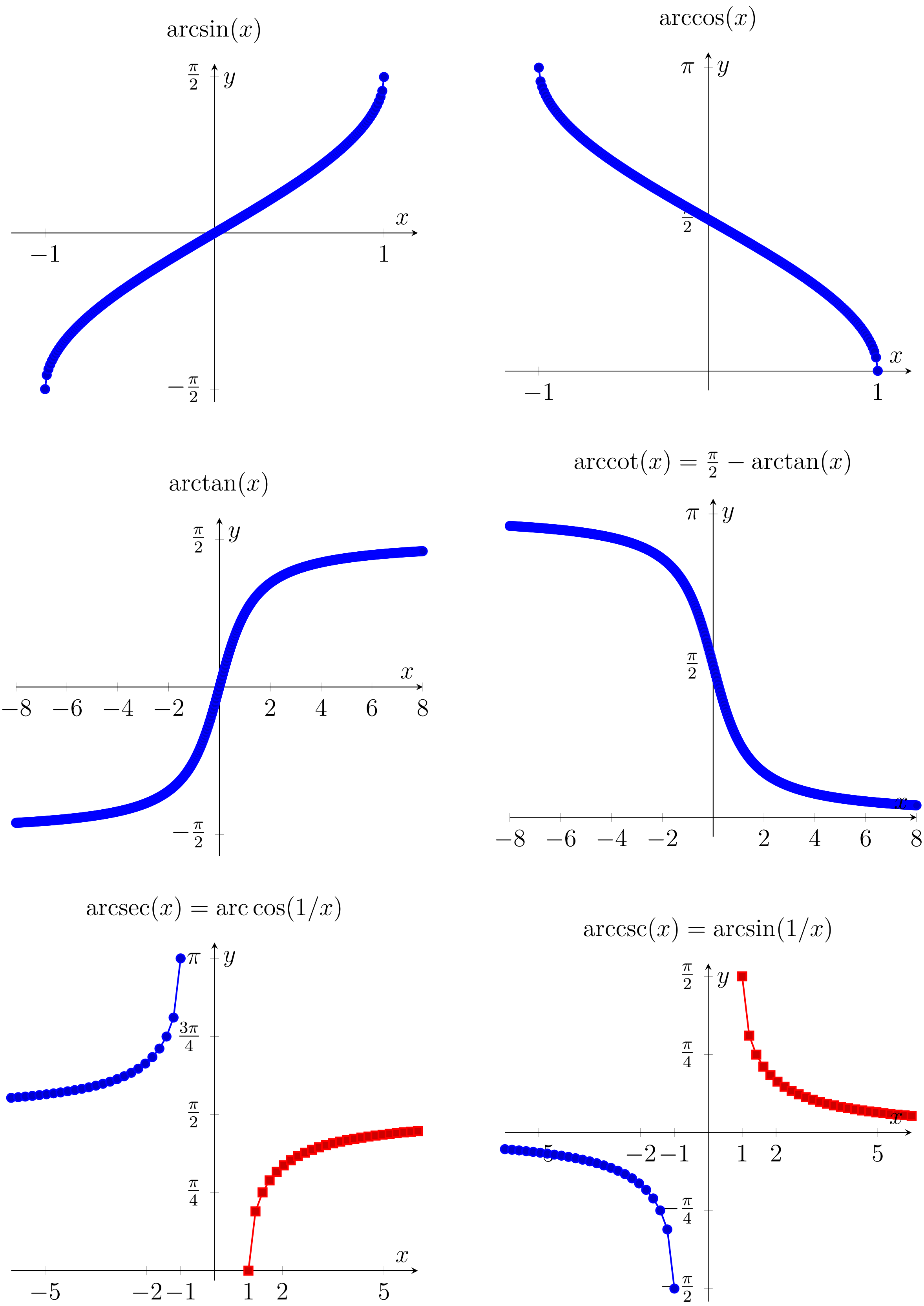


Figura 2: Gráficas de las funciones trigonométricas inversas con sus dominios principales.

◀

3. Da un ejemplo de una funcion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sea continua solo en un numero finito de puntos $p_1, \ldots, p_n$.

4. Prueba que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln(|x|) = \frac{1}{x}, \ x \neq 0.$$

Demostración. Para el caso $x > 0$ es claro ya que quedo demostrado en la tarea 10. Para el caso $x < 0$. En este caso $|x| = -x$, luego

$$\ln(|x|) = \ln(-x).$$

Aplicamos la regla de la cadena. Sea $u = -x$ entonces

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln(-x) = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}.$$

Por lo que se cumple para x<0. En ambos casos, la derivada de $\ln(|x|)$ es $\frac{1}{x}$ para todo $x \neq 0$. Por lo tanto

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln(|x|) = \frac{1}{x}, \ x \neq 0.$$

■

5. Prueba que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene derivada acotada, entonces es uniformemente continua.

Demostración. Supongamos que existe $M > 0$ tal que

$$|f'(x)| < M \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Queremos probar que f es uniformemente continua en $\mathbb{R}$, es decir

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que si } |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$. Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $|x - y| < \delta$. Sin perdida de generalidad, supongamos $x < y$. Por el teorema del valor medio, existe $c \in (x, y)$ tal que

$$f'(x) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

entonces

$$|f(y) - f(x)| = |f'(c)| \cdot |y - x| \leq M \cdot |y - x| < M \cdot \delta = M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

por lo tanto

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Asi, f es uniformemente continua en $\mathbb{R}$. ■

6. Construye la grafica de una funcion cuya derivada siempre sea positiva.

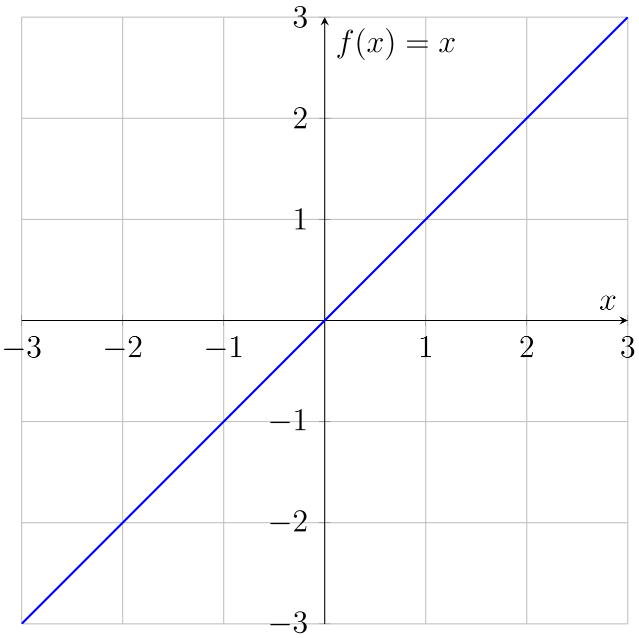
Solución. Una funcion que su derivada es siempre positiva es creciente en todo su dominio. En este caso la funcion lineal

$$f(x) = x.$$

cuya derivada es

$$f'(x) = 1 > 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

La grafica de $f(x) = x$ es



◀

7. Sea n un numero natural.

(a) Prueba, utilizando los resultados de la seccion 5.8.1, que si n es par, entonces la funcion x^n es decreciente en $(-\infty, 0]$ y es creciente en $[0, \infty)$.

(b) Prueba, utilizando los resultados de la seccion 5.8.1, que si n es impar, entonces la funcion x^n es creciente en todo $\mathbb{R}$.

Demostración. **(a)** Sea n par, $n \in \mathbb{N}$. Consideremos $f(x) = x^n$. Su derivada es

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

Como n es par, $n-1$ es impar. Para $x < 0$. Entonces $x^{n-1} < 0$, luego $f'(x) < 0$. Por el corolario 2 de la seccion 5.8.1, f es decreciente en $(-\infty, 0]$. Para $x > 0$. Entonces $x^{n-1} > 0$, luego $f'(x) > 0$. Por el corolario 2 de la seccion 5.8.1 f es creciente en $[0, \infty)$.
(b) Sea n impar, $n \in \mathbb{N}$. De nuevo $f(x) = x^n, f'(x) = x^{n-1}$. Ahora $n-1$ es par. Para $x < 0$. Entonces $x^{n-1} > 0$, luego $f'(x) > 0$. Para $x > 0$. Entonces $x^{n-1} > 0$, luego $f' > 0$. En $x = 0$, $f'(0) = 0$,pero en cualquier intervalo que no contenga solo el cero $f'(x) > 0$. Por el corolario 2 de la seccion 5.8.1, f es creciente en $(-\infty, \infty)$. ■

8. Analiza la grafica de la funcion $f(x) = x^3 + 3x^2$ siguiendo el procedimiento mencionado en la subseccion 5.8.5.

Solución.

1. **Dominio de** f.
   f es un polinomio, asi que su dominio es todo $\mathbb{R}$.
2. **Interseccion con los ejes**.
   Con el eje Y, si $x = 0 \implies f(0) = 0$. Por lo que interesecta en $(0, 0)$. Con el eje X, si $f(x) = 0 \implies x^3 + 3x^2 = 0 \implies x^2(x+3) = 0 \implies x = 0$ o $x = -3$. Por lo que intersecta en (-3,0) y (0,0).
3. **Simetria**
   $f(-x) = -x^3 + 3x^2$, no es par ni impar
4. **Intervalos abiertos donde f es creciento o decreciente**
   $f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$. Por lo tanto sus puntos criticos estan en $x = 0, x = -2$. En el intervalo $(-\infty, -2), f' > 0$ entonces es creciente, en $(-2, 0), f' < 0$ por lo tanto es decreciente. Por ultimo en $(0, \infty), f' > 0$ le sigue que es creciente.

5. **Determinar los intervalos donde f es cóncava hacia arriba o hacia abajo**
   Calculamos la segunda derivada:

   $$f''(x) = \frac{d}{dx}[3x^2 + 6x] = 6x + 6 = 6(x+1)$$

   Encontramos donde $f''(x) = 0$:

   $$6(x+1) = 0 \Rightarrow x = -1$$

   Analizamos el signo de $f''(x)$:

   - En $(-\infty, -1)$: $f''(x) < 0 \Rightarrow f$ es **cóncava hacia abajo**

- En $(-1,\infty)$: $f''(x) > 0 \Rightarrow f$ es **cóncava hacia arriba**

6. **Determinar los puntos de inflexión de la gráfica de f**

   El único punto donde cambia la concavidad es en $x = -1$:

   $$f(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 = -1 + 3 = 2$$

   Por lo tanto, el punto de inflexión es $(-1, 2)$.

7. **Determinar los mínimos locales y máximos locales de f**
   Del análisis de $f'(x)$ en el paso 4:

   1) En $x = -2$: $f'(x)$ cambia de positiva a negativa $\Rightarrow$ **máximo local**

   $$f(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 = -8 + 12 = 4$$

   2) En $x = 0$: $f'(x)$ cambia de negativa a positiva $\Rightarrow$ **mínimo local**

   $$f(0) = 0$$

8. **Determinar el mínimo global y el máximo global de f** Analizamos los límites en los extremos:

   $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 + 3x^2 = -\infty$$
   $$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^3 + 3x^2 = \infty$$

   Dado que $f(x) \to -\infty$ cuando $x \to -\infty$ y $f(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$, la función no tiene ni mínimo global ni máximo global.

9. **Determinar las asíntotas de la gráfica de f**

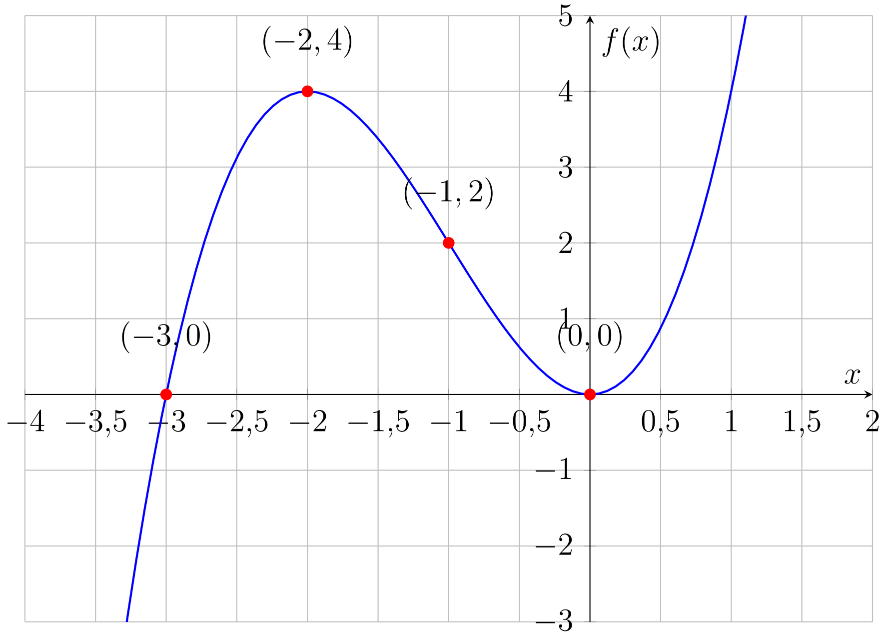
   1) Asíntotas verticales: No hay, pues f es polinomial y continua en todo $\mathbb{R}$
   2) Asíntotas horizontales:

   $$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty \Rightarrow \text{No hay asíntotas horizontales}$$

   3) Asíntotas oblicuas: No hay, pues es un polinomio de grado 3

   Por lo tanto, la gráfica de f no tiene asíntotas.

10. Grafica de f



◀