UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO

DIVISIÓN DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
CAMPUS GUANAJUATO

Tarea 3 (Calculo Diferencia e Integral II)

Nombre: Ricardo León Martínez **Fecha:** 13/2/2026 **Calificación:** ______________

Ejercicio 1

Muestre un ejemplo de una función f tal que $|f|$ sea integrable en un intervalo $[a, b]$ y f no lo sea.

Solución. Sea $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo y definamos la función

$$f : [a, b] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ -1, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Para todo $x \in [a, b]$ se tiene

$$|f(x)| = 1.$$

Luego $|f|$ es la función constante igual a 1, la cual es integrable y,

$$\int_a^b |f(x)| dx = \int_a^b 1 dx = b - a.$$

En cualquier subintervalo de $[a, b]$, la función f toma los valores de 1 y -1 pues los raciones e irracionales son densos en $\mathbb{R}$. Por lo tanto, para toda partición P,

$$L(f, P) = -(b - a), \qquad U(f, P) = (b - a).$$

En consecuencia, las sumas inferiores y superiores no coinciden por lo tanto f no es integrable en $[a, b]$. ▲

Ejercicio 2

Sean f y g funciones integrables en un intervalo $[a,b]$ tales que $g \geq 0$ y para toda $x \in [a,b]$,

$$m \leq f(x) \leq M.$$

Prueba que

$$m\int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq M\int_a^b g.$$

Demostración. Sabemos que para toda $x \in [a,b]$,

$$m \leq f(x) \leq M.$$

Multiplicando la desigualda por $g \geq 0$,

$$mg \leq fg \leq Mg.$$

Por la linealidad y monotonia de la integral definida se concluye que,

$$m\int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq M\int_a^b g.$$

■

Ejercicio 3

(Teorema del valor intermedio para integrales) Prueba que si f es una función continua en un intervalo $[a,b]$, entonces existe $c \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b f = f(c)(b-a).$$

Demostración. Tengamos en cuenta que

$$m = \min\{f(x) : x \in [a,b]\}$$

y

$$M = \max\{f(x) : x \in [a,b]\}.$$

En consecuencia por el ejercicio 4 de la tarea 2,

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f \leq M.$$

Definamos

$$A := \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Por el paso anterior,

$$A \in [m, M].$$

Dado que f es continua en $[a,b]$, su imagen es el intervalo cerrado $[m,M]$. Por el teorema del valor intermedio, existe un punto $c \in [a,b]$ tal que

$$f(c) = A$$

Mutliplicando la igualdad anterior por $b-a$, obtenemos

$$\int_a^b f(x)dx == f(c)(b-a).$$

$\blacksquare$

Ejercicio 4

(Integral de una función par) Prueba que si f es una función par e integrable en un intervalo $[-a,a]$, entonces

$$\int_{-a}^a f = 2\int_0^a f.$$

Sugerencia: Sean $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ una partición del intervalo $[0,a]$ y $Q = \{-t_0, \ldots, -t_n\}$; así Q es una partición del intervalo $[-a,0]$. Prueba que

$$L(f,Q) = L(f,P)$$

y

$$U(f,Q) = U(f,P)$$

y usalo para probar lo afirmado.

Demostración. Sean $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ una partición del intervalo $[0,a]$ y $Q = \{-t_0, \ldots, -t_n\}$; así Q es una partición del intervalo $[-a,0]$. Consideremos un subintervalo $[t_{i-1}, t_i] \subset [0,a]$. El subintervalo correspondiente en Q es $[-t_i, -t_{i-1}] \subset [-a,0]$. Como f es par

$$\{f(x) : x \in [-t_i, -t_{i-1}]\} = \{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\}.$$

Por lo tanto,

$$\inf_{x\in[-t_i,-t_{i-1}]} f(x) = \inf_{x\in[t_{i-1},t_i]} f(x),$$

y de manera analoga,

$$\sup_{x\in[-t_i,-t_{i-1}]} f(x) = \sup_{x\in[t_{i-1},t_i]} f(x)$$

Sean $L(f,P)$ y $U(f,P)$ las sumas inferiores y superiores asociadas a P en $[0,a]$, y por $L(f,Q), U(f,Q)$ las correspondientes a Q en $[-a,0]$. Como los infimos y supremos de los subintervalos coinciden, se obtiene

$$L(f,Q) = L(f,P), \qquad U(f,Q) = U(f,P).$$

Sea $R = P \cup Q$ la particion de $[-a,a]$ inducida por P y Q. Entonces,

$$\begin{aligned} L(f,R) &= L(f,P) + L(f,Q) = 2L(f,P), \\ U(f,R) &= u(f,P) + U(f,Q) = 2U(f,P) \end{aligned}$$

Tomando supremo dobre todas las particiones P de $[0,a]$, obtenemos

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$$

■

Ejercicio 5

Sea n un numero natural. Muestra la fórmula

$$\int \sin^n(x)dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}(x)\cos(x) + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}(x)dx.$$

Demostración. Procederemos por inducción. Para $n=1$ es claro ya que

$$\begin{aligned} \int \sin(x)dx &= -\sin^0(x)\cos(x) + 0\int \sin^{-1}(x)dx \\ &= -\cos(x). \end{aligned}$$

Ahora supongamos que es cierto para $n=k$. Probaremos la iguadad para $n=k+1$. Consideremos la siguiente integral.

$$\int \sin^{k+1}(x)dx = \int \sin^k(x)\sin(x)dx.$$

Integremos por partes, tomemos $u = \sin^k(x)$ y $dv = \sin(x)dx$, entonces $du = k\sin^{k-1}(x)\cos(x)dx$ y

$v = -\cos(x)$. Así,

$$
\begin{aligned}
\int u dv &= uv - \int v du. \\
&= -\sin^k(x)\cos(x) + \int \cos(x) k \sin^{k-1}(x)\cos(x) dx \\
&= -\sin^k(x)\cos(x) + k\int \sin^{k-1}(x)\cos^2(x) dx \\
&= -\sin^k(x)\cos(x) + k\int \sin^{k-1}(x)(1-\sin^2(x)) dx \\
&= -\sin^k(x)\cos(x) + k\int \sin^{k-1}(x) - \sin^{k+1}(x) dx \\
&= -\sin^k(x)\cos(x) + k\int \sin^{k-1}(x) dx - k\int \sin^{k+1}(x) dx.
\end{aligned}
$$

Luego,

$$\int \sin^{k+1}(x)dx = -\sin^k(x)\cos(x) + k\int \sin^{k-1}(x)dx - k\int \sin^{k+1}(x)dx.$$

Despejando,

$$(k+1)\int \sin^{k+1}(x)dx = -\sin^k(x)\cos(x) + k\int \sin^{k-1}(x)dx$$

y por lo tanto

$$\int \sin^{k+1}(x)dx = -\frac{1}{k+1}\sin^k(x)\cos(x) + \frac{k}{k+1}\int \sin^{k-1}(x)dx$$

De esta forma se cumple para $n = k+1$. Así, la igualdad queda demostrada por inducción para todo $n \in \mathbb{N}$. ∎

Ejercicio 6

Calcula las integrales siguientes:

(a) $\displaystyle\int \left(e^x + \frac{3}{x} - 1\right) dx.$

(b) $\displaystyle\int \left(7\sec^2(x) + 8\sqrt{x}\right) dx.$

(c) $\displaystyle\int x^2 \cos(x)\, dx.$

(d) $\displaystyle\int x \ln(x)\, dx.$

(e) $\displaystyle\int \sin(2x-5)\, dx.$

(f) $\displaystyle\int x^2 \ln\left(x^3+1\right) dx.$

Solución.

(a) $\displaystyle\int (e^x + \frac{3}{x} - 1)dx.$
Puesto que

$$\int e^x dx = e^x, \int \frac{1}{x}dx = \ln(x) \text{ y } \int dx = x.$$

Entonces por la linealidad de la integral indefinida obtenemos que

$$\begin{aligned}\int \left(e^x + \frac{3}{x} - 1\right) dx &= \int e^x dx + 3\int \frac{1}{x} dx - \int dx \\ &= e^x + 3\ln(x) - x.\end{aligned}$$

(b) $\int \left(7\sec^2(x) + 8\sqrt{x}\right)$.
Puesto que

$$\int \sec^2(x)dx = \tan(x) \text{ y } \int \sqrt{x}dx = \frac{2\sqrt{x^3}}{3}.$$

Entonces por la linealidad de la integral indefinida obtenemos que

$$\begin{aligned}\int \left(7\sec^2(x) + 8\sqrt{x}\right) dx &= 7\int \sec^2(x)dx + 8\int \sqrt{x}dx \\ &= 7\tan(x) + \frac{16\sqrt{x^3}}{3}.\end{aligned}$$

(c) $\int x^2 \cos(x)dx$.
Sea $u = x^2$ y $dv = \cos(x)dx$. Entonces $du = 2xdx$ y $v = \sin(x)$. En consecuencia,

$$\begin{aligned}\int x^2 \cos(x)dx &= \int udv \\ &= uv - \int vdu \\ &= x^2 \sin(x) - \int \sin(x)\cos(x)dx.\end{aligned}$$

Hagamos $u = \sin(x)$ y $du = \cos(x)dx$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\int \sin(x)\cos(x)dx &= \int udu \\ &= \frac{1}{2}u^2 \\ &= \frac{1}{2}\sin^2(x)\end{aligned}$$

Así,

$$\int x^2 \cos(x)dx = x^2 \sin(x) - \frac{1}{2}\sin^2(x).$$

(d) $\int x\ln(x)dx$.

Sea $u = \ln(x)$ y $dv = xdx$. Entonces $du = \frac{1}{x}dx$ y $v = \frac{x^2}{2}$. En consecuencia

$$\begin{aligned}\int x\ln(x)dx &= \int udv \\ &= uv - \int vdu \\ &= \frac{x^2\ln(x)}{2} - \frac{1}{2}\int x^2 \cdot \frac{1}{x}dx \\ &= \frac{x^2\ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4}.\end{aligned}$$

(e) $\displaystyle\int \sin(2x+5)$.
Hagamos $u = 2x - 5$ y $du = 2dx$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\int \sin(2x-5)dx &= \frac{1}{2}\int \sin(u)du \\ &= \frac{1}{2}\cos(u) \\ &= \frac{1}{2}\cos(2x-5).\end{aligned}$$

(d) $\displaystyle\int x^2\ln\left(x^3+1\right)dx$. Hagamos $u = x^3 + 1$ y $du = 3x^2dx$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\int x^2\ln\left(x^3+1\right)dx &= \frac{1}{3}\int \ln(u)du \\ &= \frac{1}{3}u\ln(u) - u \\ &= \frac{1}{3}(x^3+1)\ln\left(x^3+1\right) - (x^3+1).\end{aligned}$$

▲

Ejercicio 7

(a) $\int \sqrt{4-x^2}dx$.

(b) $\int \sqrt{9+x^2}dx$.

(c) $\int \sqrt{x^2-2}dx$.

Solución.

(a) $\displaystyle\int \sqrt{4-x^2}dx$.
Hagamos $x = 2\sin(\theta)$ y $dx = 2\cos(\theta)d\theta$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\int \sqrt{4-x^2}dx &= \int \sqrt{4-4\sin^2(\theta)}2\cos(\theta)d\theta \\ &= \int \sqrt{4\cos^2(\theta)}2\cos(\theta)d\theta \\ &= 4\int \cos^2(\theta)d\theta.\end{aligned}$$

Recordemos la identidad

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}.$$

Así,

$$\begin{aligned}
4\int \cos^2(\theta)du &= 4\int \frac{1+\cos(2\theta)}{2} \\
&= 2\int d\theta + 2\int \cos(2\theta)d\theta \\
&= 2\theta + \sin(\theta).
\end{aligned}$$

Notemos que $\theta = arcsin(\frac{x}{2})$. En consecuencia

$$\int \sqrt{4-x^2} = 2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2}.$$

(b) $\displaystyle\int \sqrt{9+x^2}dx$.

Hagamos $x = 3\tan(\theta)$ y $dx = 3\sec^2(\theta)d\theta$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{9+x^2}dx &= \int \sqrt{9+9\tan^2(\theta)}3\sec^2(\theta)d\theta \\
&= \int \sqrt{9\sec^2(\theta)}3\sec^2(\theta)d\theta \\
&= 9\int \sec^3(\theta)d\theta.
\end{aligned}$$

Sea $u = \sec(\theta)$ y $dv = sec^2(\theta)d\theta$. Entoncs $du = sec(\theta)\tan(\theta)d\theta$ y $v = \tan(\theta)$. En consecuencia

$$\begin{aligned}
\int \sec^3(u) &= \int udv \\
&= uv - \int vdu \\
&= sec(\theta)\tan(\theta) - \int \tan^2(\theta)\sec(\theta)d\theta \\
&= sec(\theta)\tan(\theta) - \int \sec^3(\theta) - \sec(\theta)d\theta \\
&= sec(\theta)\tan(\theta) - \int \sec^3(\theta)d\theta + \int \sec(\theta)d\theta.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\int \sec^3(\theta) = sec(\theta)\tan(\theta) - \int \sec^3(\theta)d\theta + \ln\left(|\sec(\theta)+\tan(\theta)|\right).$$

Despejando,

$$2\int \sec^3(\theta)d\theta = sec(\theta)\tan(\theta) + \ln\left(|\sec(\theta)+\tan(\theta)|\right)$$

y por lo tanto

$$\int \sec^3(\theta)d\theta = \frac{1}{2}sec(\theta)\tan(\theta) + \frac{1}{2}\ln\left(|\sec(\theta)+\tan(\theta)|\right).$$

Notemos que $\theta = \arctan\left(\frac{x}{3}\right)$. Así

$$\int \sqrt{9+x^2}dx = \frac{9x}{6}\sec\left(\arctan\left(\frac{x}{3}\right)\right) + \frac{9}{2}\ln\left(\left|sec\left(\arctan\left(\frac{x}{3}\right)\right) + \frac{x}{3}\right|\right).$$

(c) $\int \sqrt{x^2-2}dx$.
Hagamos $x = \sqrt{2}\sec(\theta)$ con $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ y $dx = \sqrt{2}\sec(\theta)\tan(\theta)$. En consecuencia

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x^2-2}dx &= \int \sqrt{2\sec^2(\theta)-2}\sqrt{2}\sec(\theta)\tan(\theta)d\theta \\ &= \int \sqrt{2\tan^2(\theta)}\sqrt{2}\sec(\theta)\tan(\theta)d\theta \\ &= \sqrt{2}\int \tan^2(\theta)\sec(\theta) \\ &= \sqrt{2}\int \sec^3(\theta)d\theta - \sqrt{2}\int \sec(\theta)d\theta\end{aligned}$$

Luego, por el inciso anteior

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\int \sec^3(\theta)d\theta - \sqrt{2}\int \sec(\theta)d\theta =& \frac{\sqrt{2}}{2}sec(\theta)\tan(\theta) + \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left(\left|\sec(\theta)+\tan(\theta)\right|\right) \\ &- \ln\left(\left|\sec(\theta)+\tan(\theta)\right|\right).\end{aligned}$$

Notemos que $\theta = \operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$. Así,

$$\int \sqrt{x^2-2}dx = \frac{x}{2}\tan\left(\operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right) + \frac{\sqrt{2}-2}{2}\ln\left(\left|\frac{x}{\sqrt{2}} + \tan\left(\operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right)\right|\right).$$

▲