

UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO
DIVISIÓN DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
CAMPUS GUANAJUATO

Tarea 12 (Calculo Diferencial e Integral I)

Nombre: Ricardo León Martínez Fecha: 14/11/2025 Calificación: _____

- 1.** Prueba que si $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y $A \subset B$, entonces $f|_A : A \rightarrow \mathbb{R}$ es continua.

Demostración. Tomemos un punto arbitrario $a \in A$ y sea $\varepsilon > 0$. Como f es continua en B y $a \in B$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in B$ con $|x - a| < \delta$, se cumple que

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Ahora, si $x \in A$ y $|x - a| < \delta$, entonces $x \in B$, y por lo tanto

$$|f|_A(x) - f|_A(a)| = |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Esto muestra que $f|_A$ es continua en a . Como $a \in A$ fue arbitrario, $f|_A$ es continua en A . ■

- 2. (Las funciones continuas mandan intervalos cerrados y acotados en intervalos cerrados y acotados)** Prueba que si f es continua en $[a, b]$, entonces $f([a, b]) = [m, M]$, donde $m = \min\{f(x) : x \in [a, b]\}$ y $M = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}$.

Demostración. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Por el Teorema del mínimo y máximo, f tiene mínimo y máximo en $[a, b]$. Es decir, existen $x_m, x_M \in [a, b]$ tales que:

$$m = f(x_m) = \min\{f(x) : x \in [a, b]\}, \quad M = f(x_M) = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}.$$

Además, por el Teorema del Valor Intermedio, como f es continua en $[a, b]$, toma todos los valores entre m y M . Es decir, para todo $y \in [m, M]$, existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = y$. Por lo tanto:

$$f([a, b]) = [m, M].$$

■

- 3.** Prueba que si $f : B \rightarrow C$ y $g : A \rightarrow B$ son funciones uniformemente continuas, entonces $f \circ g : A \rightarrow C$ es uniformemente continua.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como f es uniformemente continua, existe $\delta_1 > 0$ tal que para todo $y_1, y_2 \in B$ con $|y_1 - y_2| < \delta_1$, se cumple

$$|f(y_1) - f(y_2)| < \varepsilon.$$

Ahora, como g es uniformemente continua, para $\delta_1 > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x_1, x_2 \in A$ con $|x_1 - x_2| < \delta$, se cumple

$$|g(x_1) - g(x_2)| < \delta_1.$$

Por lo tanto, si $x_1, x_2 \in A$ con $|x_1 - x_2| < \delta$, entonces

$$|g(x_1) - g(x_2)| < \delta_1,$$

y en consecuencia

$$|f(g(x_1)) - f(g(x_2))| < \varepsilon.$$

Así, $f \circ g$ es uniformemente continua. ■

4. (Derivada de las funciones trigonométricas inversas) Usa la proposición 62 (derivada de una función inversa) para mostrar lo siguiente

$$(a) \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1.$$

$$(b) \arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1.$$

$$(c) \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

$$(d) \text{arccot}'(x) = \frac{-1}{1+x^2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

$$(e) \text{arcsec}'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, & x > 1, \\ \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}, & x < -1. \end{cases}$$

$$(f) \text{arccsc}'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}, & x > 1, \\ \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}, & x < -1. \end{cases}$$

Demostración. (a) Sea $f(y) = \sin(y)$ con $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Entonces f es derivable en su dominio, con derivada:

$$f'(y) = \cos(y) \quad \text{para } y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Su inversa es $f^{-1}(x) = \arcsin(x)$, definida para $x \in (-1, 1)$. Por la proposición 62

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Sustituyendo

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}.$$

Usamos la identidad trigonométrica $\cos^2(y) + \sin^2(y) = 1$. Para $y = \arcsin(x)$, tenemos

$$\cos^2(\arcsin(x)) = 1 - \sin^2(\arcsin(x)) = 1 - x^2.$$

Como $\arcsin(x) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, entonces $\cos(\arcsin(x)) > 0$, luego

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Por lo tanto

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad -1 < x < 1.$$

- (b) Sea $f(y) = \cos(y)$ con $y \in (0, \pi)$. Entonces f es derivable en su dominio, con derivada

$$f'(y) = -\sin(y) \quad \text{para } y \in (0, \pi).$$

Su inversa es $f^{-1}(x) = \arccos(x)$, definida para $x \in (-1, 1)$. Por la proposición 62

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(\arccos(x))}.$$

Sustituyendo

$$\arccos'(x) = \frac{1}{-\sin(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sin(\arccos(x))}.$$

Usamos la identidad trigonométrica $\sin^2(y) + \cos^2(y) = 1$. Para $y = \arccos(x)$, tenemos

$$\sin^2(\arccos(x)) = 1 - \cos^2(\arccos(x)) = 1 - x^2.$$

Como $\arccos(x) \in (0, \pi)$, entonces $\sin(\arccos(x)) > 0$, luego

$$\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}.$$

Por lo tanto

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad -1 < x < 1.$$

- (c) Sea $f(y) = \tan(y)$ con $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Entonces f es derivable en su dominio, con derivada

$$f'(y) = \sec^2(y) \quad \text{para } y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Su inversa es $f^{-1}(x) = \arctan(x)$, definida para $x \in (-\infty, \infty)$. Por la proposición

62

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Sustituyendo

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\sec^2(\arctan(x))}.$$

Usamos la identidad trigonométrica $\tan^2(y) + 1 = \sec^2(y)$. Para $y = \arctan(x)$, tenemos

$$\sec^2(\arctan(x)) = \tan^2(\arctan(x)) + 1 = x^2 + 1.$$

Por lo tanto

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

- (d) Sea $f(y) = \cot(y)$ con $y \in (0, \pi)$. Entonces f es derivable en su dominio, con derivada

$$f'(y) = -\csc^2(y) \quad \text{para } y \in (0, \pi).$$

Su inversa es $f^{-1}(x) = \operatorname{arccot}(x)$, definida para $x \in (-\infty, \infty)$. Por la proposición 62

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Sustituyendo

$$\operatorname{arccot}'(x) = \frac{1}{-\csc^2(\operatorname{arccot}(x))} = -\frac{1}{\csc^2(\operatorname{arccot}(x))}.$$

Usamos la identidad trigonométrica $1 + \cot^2(y) = \csc^2(y)$. Para $y = \operatorname{arccot}(x)$, tenemos

$$\csc^2(\operatorname{arccot}(x)) = 1 + \cot^2(\operatorname{arccot}(x)) = 1 + x^2.$$

Por lo tanto

$$\operatorname{arccot}'(x) = -\frac{1}{1+x^2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

- (e) Sea $f(y) = \sec(y)$ con $y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Entonces f es derivable en su dominio, con derivada

$$f'(y) = \sec(y) \tan(y) \quad \text{para } y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right).$$

Su inversa es $f^{-1}(x) = \operatorname{arcsec}(x)$, definida para $x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$. Por la proposición 62

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Sustituyendo

$$\operatorname{arcsec}'(x) = \frac{1}{\sec(\operatorname{arcsec}(x)) \tan(\operatorname{arcsec}(x))} = \frac{1}{x \tan(\operatorname{arcsec}(x))}.$$

Usamos la siguiente relacion

$$\tan(\text{arcsec}(x)) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 1}, & x \geq 1, \\ -\sqrt{x^2 - 1}, & x \leq -1. \end{cases}$$

Para el caso $x > 1$ Entonces $\text{arcsec}(x) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\tan(\text{arcsec}(x)) > 0$, luego

$$\text{arcsec}'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Asi, para el caso $x < -1$ Entonces $\text{arcsec}(x) \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\tan(\text{arcsec}(x)) < 0$, luego

$$\text{arcsec}'(x) = \frac{1}{x(-\sqrt{x^2 - 1})} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Por lo tanto

$$\text{arcsec}'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}, & x > 1, \\ \frac{-1}{x\sqrt{x^2 - 1}}, & x < -1. \end{cases}$$

- (f) Sea $f(y) = \csc(y)$ con $y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$. Entonces f es derivable en su dominio, con derivada

$$f'(y) = -\csc(y)\cot(y) \quad \text{para } y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right).$$

Su inversa es $f^{-1}(x) = \text{arccsc}(x)$, definida para $x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$.

Por la proposición 62

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Sustituyendo

$$\text{arccsc}'(x) = \frac{1}{-\csc(\text{arccsc}(x))\cot(\text{arccsc}(x))} = -\frac{1}{x\cot(\text{arccsc}(x))}.$$

Usamos la relacion dada

$$\cot(\text{arccsc}(x)) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 1}, & x \geq 1, \\ -\sqrt{x^2 - 1}, & x \leq -1. \end{cases}$$

Para el caso $x > 1$ Entonces $\text{arccsc}(x) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $\cot(\text{arccsc}(x)) > 0$, luego

$$\text{arccsc}'(x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Así, para el caso $x < -1$ Entonces $\text{arccsc}(x) \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, $\cot(\text{arccsc}(x)) < 0$, luego

$$\text{arccsc}'(x) = -\frac{1}{x(-\sqrt{x^2-1})} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

Por lo tanto

$$\text{arccsc}'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}, & x > 1, \\ \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, & x < -1. \end{cases}$$

■

- 5.** Encuentra los mínimos y máximos globales de la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ en el intervalo $[-1, 1]$.

Solución. Calculamos la derivada

$$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

Igualamos a cero

$$3x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0, \quad x = 2$$

Solo $x = 0$ está en el intervalo $(-1, 1)$. Ahora evaluamos la función en los puntos críticos y extremos del intervalo. En $x = -1$

$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 1 = -1 - 3 + 1 = -3.$$

En $x = 0$

$$f(0) = 0 - 0 + 1 = 1.$$

En $x = 1$

$$f(1) = 1^3 - 3(1)^2 + 1 = 1 - 3 + 1 = -1.$$

Por lo tanto tiene máximo global en $f(0) = 1$ y tiene mínimo global en $f(-1) = -3$ ◀

- 6.** Supongamos que un diseñador de recipientes desea construir un recipiente cilíndrico de cartón sin tapa. Se requiere que el cilindro tenga volumen V de $27\pi\text{cm}^3$. ¿Cuáles serán las dimensiones del cilindro que minimicen la cantidad de cartón empleado para construirlo?

Solución. Sea r : radio de la base (cm) h : altura del cilindro (cm) Volumen del cilindro:

$$V = \pi r^2 h = 27\pi \Rightarrow r^2 h = 27 \Rightarrow h = \frac{27}{r^2}$$

Área de cartón sin tapa

$$A = \text{área lateral} + \text{área base} = 2\pi r h + \pi r^2$$

Sustituyendo h

$$A(r) = 2\pi r \left(\frac{27}{r^2} \right) + \pi r^2 = \frac{54\pi}{r} + \pi r^2$$

Para encontrar los puntos críticos derivamos

$$A'(r) = -\frac{54\pi}{r^2} + 2\pi r$$

Igualamos a cero

$$\begin{aligned} -\frac{54\pi}{r^2} + 2\pi r &= 0 \Rightarrow 2\pi r = \frac{54\pi}{r^2} \\ 2r = \frac{54}{r^2} &\Rightarrow 2r^3 = 54 \Rightarrow r^3 = 27 \Rightarrow r = 3 \text{ cm} \end{aligned}$$

Verificar que es mínimo con el criterio de la segunda derivada

$$A''(r) = \frac{108\pi}{r^3} + 2\pi$$

$$A''(3) = \frac{108\pi}{27} + 2\pi = 4\pi + 2\pi = 6\pi > 0$$

Por lo que es un mínimo. Ahora para encontrar la altura

$$h = \frac{27}{r^2} = \frac{27}{9} = 3 \text{ cm}$$

Así, Las dimensiones que minimizan el cartón son Radio: $r = 3$ cm Altura: $h = 3$ cm ◀

7. Expresa los polinomios siguientes como polinomios de Taylor

- (a) $f(x) = 5.$
- (b) $f(x) = 2x + 1.$
- (c) $f(x) = 4x^2 - 9x + 6.$
- (d) $f(x) = x^{10} - 2x^3 + 3x^2 + 7x - 11.$

Solución. (a) $f(x) = 5$

Cálculo de derivadas:

$$f(1) = 5, \quad f'(x) = 0$$

$$P_{0,1}^f(x) = 5$$

(b) $f(x) = 2x + 1$

Cálculo de derivadas:

$$f(1) = 2(1) + 1 = 3$$

$$f'(x) = 2 \Rightarrow f'(1) = 2, \quad f''(x) = 0$$

$$P_{1,1}^f = f(1) + f'(1)(x - 1) = 3 + 2(x - 1) = 2x + 1$$

(c) $f(x) = 4x^2 - 9x + 6$

Cálculo de derivadas:

$$f(1) = 4(1)^2 - 9(1) + 6 = 1$$

$$f'(x) = 8x - 9 \Rightarrow f'(1) = -1$$

$$f''(x) = 8 \Rightarrow f''(1) = 8, \quad f'''(x) = 0$$

$$P_{2,1}^f = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 = 1 - (x-1) + 4(x-1)^2$$

(d) $f(x) = x^{10} - 2x^3 + 3x^2 + 7x - 11$

Cálculo de derivadas:

$$f(1) = 1^{10} - 2(1)^3 + 3(1)^2 + 7(1) - 11 = -2$$

$$f'(1) = 10(1)^9 - 6(1)^2 + 6(1) + 7 = 17$$

$$f''(1) = 90(1)^8 - 12(1) + 6 = 84$$

$$f'''(1) = 720(1)^7 - 12 = 708$$

$$f^{(4)}(1) = 5040(1)^6 = 5040$$

$$f^{(5)}(1) = 30240(1)^5 = 30240$$

$$f^{(6)}(1) = 151200(1)^4 = 151200$$

$$f^{(7)}(1) = 604800(1)^3 = 604800$$

$$f^{(8)}(1) = 1814400(1)^2 = 1814400$$

$$f^{(9)}(1) = 3628800(1) = 3628800$$

$$f^{(10)}(1) = 3628800$$

Polinomio de Taylor de orden 10:

$$\begin{aligned} P_{10,1}^f = & -2 + 17(x-1) + 42(x-1)^2 + 118(x-1)^3 + 210(x-1)^4 + 252(x-1)^5 \\ & + 210(x-1)^6 + 120(x-1)^7 + 45(x-1)^8 + 10(x-1)^9 + (x-1)^{10} \end{aligned}$$

Para cada polinomio f de grado n , el polinomio de Taylor P_n centrado en 1 coincide exactamente con f porque el término de resto $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-1)^{n+1}$ se anula al ser $f^{(n+1)}(x) = 0$ para todo x . ◀

8. Realiza lo siguiente:

(a) Calcula los polinomios de taylor centrados en 0 de la función $\cos(x)$.

(b) Estima el número $\cos(2)$ con una exactitud de tres cifras decimales.

Solución.

- (a) Primero calculemos las derivadas de $f(x) = \cos(x)$ y sus respectivos valores en $x = 0$:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \cos(x) &\Rightarrow f(0) &= 1 \\
 f'(x) &= -\sin(x) &\Rightarrow f'(0) &= 0 \\
 f''(x) &= -\cos(x) &\Rightarrow f''(0) &= -1 \\
 f'''(x) &= \sin(x) &\Rightarrow f'''(0) &= 0 \\
 f^{(4)}(x) &= \cos(x) &\Rightarrow f^{(4)}(0) &= 1 \\
 f^{(5)}(x) &= -\sin(x) &\Rightarrow f^{(5)}(0) &= 0 \\
 f^{(6)}(x) &= -\cos(x) &\Rightarrow f^{(6)}(0) &= -1 \\
 f^{(7)}(x) &= \sin(x) &\Rightarrow f^{(7)}(0) &= 0 \\
 f^{(8)}(x) &= \cos(x) &\Rightarrow f^{(8)}(0) &= 1
 \end{aligned}$$

Como podemos ver alternan su valor entre 1 y -1 , mientras que todas las derivadas de orden impar en 0 son iguales a 0. Específicamente

$$f^{(2k)}(0) = (-1)^k \quad \text{y} \quad f^{(2k+1)}(0) = 0, \quad \text{para } k = 0, 1, 2, \dots$$

Sustituyendo los valores de las derivadas en la fórmula del polinomio de Taylor, obtenemos:

$$\begin{aligned}
 P_{0,0}^{\cos}(x) &= 1 \\
 P_{1,0}^{\cos} &= 1 \\
 P_{2,0}^{\cos}(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} \\
 P_{3,0}^{\cos}(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} \\
 PP_{4,0}^{\cos}(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \\
 P_{5,0}^{\cos}(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \\
 P_{6,0}^{\cos}(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \\
 P_{7,0}^{\cos}(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \\
 P_{8,0}^{\cos}(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}
 \end{aligned}$$

Dado que los términos de potencia impar tienen coeficiente cero, la suma se realiza solo sobre índices pares. Así, el polinomio de Taylor de orden n para $\cos(x)$

centrado en 0 es:

$$P_{n,0}^{\cos}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

- (b) Para aproximar $\cos(2)$ con una exactitud de tres cifras decimales, utilizamos polinomios de Taylor de la función coseno centrados en 0. El polinomio de Taylor para $\cos(x)$ está dado por

$$P_{n,0}^{\cos} = \sum_{k=0}^n$$

Implementamos un programa en Python que calcula sucesivas aproximaciones incrementando el grado del polinomio. El criterio de parada se basa en que la diferencia entre dos aproximaciones consecutivas sea menor a 0,0005, garantizando así tres cifras decimales exactas. A continuacion el programa

Listing 1: Programa para aproximar $\cos(2)$

```

1          import math
2
3          # Polinomio de Taylor para cos(x) centrado en 0
4          def taylor_cos(x, n):
5              suma = 0
6              for k in range(n + 1):
7                  if k % 2 == 0: # Solo terminos pares
8                      termino = ((-1) ** (k // 2)) * (x ** k) / math.factorial(k)
9                      suma += termino
10             return suma
11
12          # Calcular cos(2) con exactitud de 3 cifras
13          decimales
14          x = 2
15          n = 0
16          while True:
17              aproximacion = taylor_cos(x, n)
18              print("n={} : cos(2) ~={:.6f}".format(n,
19                  aproximacion))
20
21          # Verificar si tenemos 3 cifras decimales
22          estables
23          if n >= 4:
24              approx_anterior = taylor_cos(x, n-2)
25              if abs(aproximacion - approx_anterior)
26                  < 0.0005:
27                  break

```

```
24  
25             n += 2  
26  
27         print("\nResultado final: cos(2) ~=  
28             {:.3f}".format(aproximacion))
```

Asi, el resultado obtenido es

$$\cos(2) \approx -0,416$$

