UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO
DIVISIÓN DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
CAMPUS GUANAJUATO

Tarea 3 (Cálculo Diferencial e Integral I)

Nombre: Ricardo León Martínez
Grupo: A Fecha: 29/08/2025 Calificación:
Profesor: Fernando Núñez Medina.

Instrucciones: Escribe limpia y ordenadamente el procedimiento (si lo hay) de cada ejercicio y no escribas las respuestas en la hoja de la tarea.

1. Prueba los incisos (b) y (c) de la proposición 3.
Solución:
(b)
Si $A \subset B$, entonces $A \cup B = B$, $A \cap B = A$, $A \setminus B = \emptyset$

Si $A \subset B$, entonces $A \cup B = B$.
Demostración: Para probar la igualdad, demostramos las dos contenciones.

1. $\subset$**:** Sea $x \in A \cup B$. Entonces $x \in A$ o $x \in B$. Si $x \in A$, como $A \subset B$, entonces $x \in B$. Si $x \in B$, ya está, en ambos casos $x \in B$. Por lo tanto $A \cup B \subset B$.

2. $\supset$**:** Sea $x \in B$. Por la definición de la unión $x \in A \cup B$. Por lo tanto $A \cup B \supset B$.

Dado que ambas contenciones son ciertas, la igualdad queda demostrada.
■

Si $A \subset B$, entonces $A \cap B = A$.
Demostración: Para probar la igualdad, demostramos las dos contenciones.

1. $\subset$**:** Sea $x \in A \cap B$. Entonces $x \in A$ y $x \in B$. Si $x \in A$, entonces $x \in A \cap B$. Por lo tanto $A \cap B \subset A$ **2.** $\supset$**:** Sea $x \in A$. Como $A \subset B$, entonces $x \in B$. Así que $x \in A$ y $x \in B$, por definición de la intersección, $x \in A \cap B$. Por lo tanto $A \cap B \supset A$.

Dado que ambas contenciones son ciertas, la igualdad queda demostrada.
■

Si $A \subset B$, entonces $A \setminus B = \emptyset$.

Demostración: Para probar la igualdad, demostramos las dos contenciones.

1. $\subset$**:** Sea $x \in A \setminus B$. Entonces $x \in A$ y $x \notin B$ Si $x \in A$, como $A \subset B$, entonces $x \in B$, sin embargo como sabemos que $x \notin B$. Esto significa si $x \in A$, entonces necesariamente $x \in B$. Por lo que hemos llegado a una contradicción, en consecuencia no existe ningún elemento en $A \setminus B$. Por lo tanto $A \setminus B \subset \emptyset$

2. $\supset$**:** El conjunto vacío es subconjunto de cualquier otro conjunto. Por lo tanto $A \setminus B \supset \emptyset$

Dado que ambas contenciones son ciertas, la igualdad queda demostrada
■

(c)
Si $A \subset B$, entonces $A \cup C \subset B \cup C$, $A \cap C \subset B \cap C$, $C \setminus B \subset C \setminus A$

Si $A \subset B$, entonces $A \cup C \subset B \cup C$.
Demostración: Sea $x \in A \cup C$. Entonces $x \in A$ o $x \in C$. Si $x \in A$, como $A \subset B$, entonces $x \in B$, luego $x \in B \cup C$. Si $x \in C$, entonces $x \in B \cup C$. En ambos casos $x \in B \cup C$. Por lo tanto $A \cup C \subset B \cup C$.
■

Si $A \subset B$, entonces $A \cap C \subset B \cap C$.
Demostración: Sea $x \in A \cap C$. Entonces $x \in A$ y $x \in C$. Si $x \in A$, como $A \subset B$, entonces $x \in B$ Si $x \in C$, ya está, como $x \in C$ y $x \in B$, por la definición de intersección $x \in B \cap C$. Por lo tanto $A \cap C \subset B \cap C$
■

Si $A \subset B$, entonces $C \setminus B \subset C \setminus A$
Demostración: Sea $x \in C \setminus B$. Entonces $x \in C$ y $x \notin B$. Si $x \in C$, entonces $x \in C \setminus A$ Si $x \notin B$, como $A \subset B$, entonces $x \notin A$, luego $x \in C \setminus A$. En ambos casos $x \in C \setminus A$ por lo tanto $C \setminus B \subset C \setminus A$.
■

2. Prueba el inciso (b) de la proposición 5.
Solución:
Supongamos que existe un número real y tal que:

$$x \cdot y = x$$

Usando la regla de cancelación de producto obtenemos:

$$y = \frac{x}{x}$$

Por la unicidad del inverso multiplicativo llegamos a que:

$$y = 1$$

Por lo que el único número y tal que cumple con la expresión inicial es 1. Por lo tanto existe un solo neutro multiplicativo y es el uno.
■

3. Prueba que si x y y son números reales, entonces:

(a) $(+x)(+y) = +(xy)$.

(b) $(-x)(+y) = -(xy)$.

(c) $(+x)(-y) = -(xy)$.

(d) $(-x)(-y) = +(xy)$.

. **Demostración:**
(a) $(+x)(+y) = +(xy)$
Es claro pues $+x = x$, $+y = y$ y $+(xy) = xy$
■

(b) $(-x)(+y) = -(xy)$
Consideremos $(-x)(y)$
Escribimos $-x$ como $(-1) \cdot x$. Entonces:
$(-x)(y) = [(-1)x] \cdot y$
Por la asociatividad de la multiplicación:
$[(-1) \cdot x] \cdot y = (-1) \cdot (x \cdot y)$
Ahora por definición de producto con -1, se cumple que:
$(-1)(xy) = -(xy)$
Por lo tanto $(-x)(+y) = -(xy)$
■

(c) $(+x)(-y) = -(xy)$
Consideremos $(-y)(x)$
Escribimos $-y$ como $(-1) \cdot y$. Entonces:
$(x)(-y) = x \cdot [(-1) \cdot y]$
Por la asociatividad de la multiplicación:
$x \cdot [(-1) \cdot y] = (-1)(xy)$
Por definición del producto con -1 se cumple que:
$(-1)(xy) = -(xy)$
■

(d) $(-x)(-y) = (+xy)$
Escribimos los números negativos en términos de -1:

$$-x = (-1) \cdot x, \quad -y = (-1) \cdot y$$

Entonces su producto es:

$$(-x)(-y) = [(-1) \cdot x] \cdot [(-1) \cdot y]$$

Aplicando la asociatividad y la conmutatividad tenemos que:

$$[(-1) \cdot x] \cdot [(-1) \cdot y] = [(-1) \cdot (-1)] \cdot (x \cdot y)$$

Ahora calculamos $(-1) \cdot (-1)$
Sabemos que $0 = 0 \cdot 0$
pero $0 = (1 + (-1))$. Entonces:

$$0 \cdot 0 = (1 + (-1)) \cdot (1 + (-1))$$

Expandiendo con la distributividad:

$$\begin{aligned}(1+(-1))\cdot(1+(-1)) &= (1+(-1))\cdot 1 + (1+(-1))\cdot(-1)\\ &= 1\cdot 1 + (-1)\cdot 1 + 1\cdot(-1) + (-1)\cdot(-1)\\ &= 1 + (-1) + (-1) + (-1)(-1)\\ &= (1-1-1) + (-1)(-1)\\ &= -1 + (-1)(-1)\end{aligned}$$

Como $0\cdot 0 = 0$ tenemos que:

$$0 = -1 + (-1)(-1)$$

de aquí

$$(-1)\cdot(-1) = 1$$

sustituyendo en el tercer paso:

$$(-x)(-y) = [(-1)(-1)](x\cdot y) = 1\cdot(x\cdot y) = xy$$

Por lo tanto

$$(-x)(-y) = (xy)$$

■

4. Sea x y y números reales distintos de cero. Prueba, usando la unicidad del inverso multiplicativo, que

$$(xy)^{-1}{=}x^{-1}y^{-1}.$$

(b) El 1 es el único número real con la propiedad de que $x\cdot 1 = x$ para todo $x\in\mathbb{R}$

Demostración:

Por la unicidad del inverso multiplicativo sabemos que:

$$x\cdot x^{-1} = 1$$

Para xy tenemos:

$$xy\cdot(xy)^{-1} = 1$$

aplicando la regla de cancelación del producto en x tenemos:

$$x\cdot y\cdot(xy)^{-1}\cdot x^{-1} = 1 \Rightarrow (xy)^{-1}\cdot y = x^{-1}$$

aplicando nuevamente la regla de cancelación del producto, ahora en y, cumple que:

$$(xy)^{-1}\cdot y\cdot y^{-1} = x^{-1}\cdot y^{-1} \Rightarrow (xy)^{-1} = x^{-1}\cdot y^{-1}$$

Por lo tanto $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$

■

5. prueba que si $0 \leq x < y$ y $0 \leq z < w$, entonces $xz < yw$.
Demostración:
Consideremos la expresión:
$yw - xz$

Basta con demostrar que
$yw - xz > 0$,
ya que esto se sigue de
$xz < yw$.
Notemos que
$yw - xz = yw - xw + xw - xz = (y - x)w + x(w - z)$

Por lo que
$yw - xz = (y - x)w + (w - z)x$

Analicemos cada factor:
Como $x < y$, entonces $y - x > 0$.
Como $z < w$ y $z > 0$, obtenemos que $w > 0$. Por lo tanto $(y - x)w > 0$.
Como $w > z$, tenemos $w - z > 0$.
Además, como $x > 0$, entonces $(w - z)x > 0$.

Así que $yw - xz = (y - x)w + (w - z)x > 0$,

entonces $xz < yw$.
■

6. Prueba la proposición 12.
Demostración:

7. Prueba que para todo numero natural n se cumple que

$$n < n + 1.$$

Demostración:
Sea $P(n)$ la fórmula, consideremos el conjunto:

$$A = \{n \in \mathbb{N} : P(n)\}$$

Si cumple:

a) $1 \in A$
b) Si $k \in A$, entonces $k + 1 \in A$

Entonces $A = \mathbb{N}$

(a) Se cumple, pues $1 \in A$

(b) Supongamos que $k \in A$. Hay que probar que $k + 1 \in A$.

Puesto que $k \in A$ sabemos que $k < k + 1$

en consecuencia
$k+1<(k+1)+1$

entonces, queremos demostrar que:
$k+1<k+2$

sabemos que
$k<k+1$

sumamos 1 a ambos lados
$k+1<(k+1)+1$
Por lo que
$k+1<k+2$
que es lo que queríamos probar por lo que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple: $n<n+1$
■

8. Determina si las reglas de correspondencia f de los cuadros de los incisos siguientes son funciones (argumenta tu respuesta).

(a)

x	$f(x)$
1	0
2	5
3	7
4	7
5	8

(b)

x	$f(x)$
1	0
2	0
3	0
4	0
5	0

(c)

x	$f(x)$
1	3
2	3
3	5
4	7
4	6

Solución:

a) es una función ya que le asigna a cada elemento de x un único elemento de $f(x)$.

b) es una función ya que le asigna a cada elemento de x un único elemento de $f(x)$

c) No es una función ya que le asigna más de un elemento de x a un único elemento de $f(x)$

9. Calcula el dominio de las funciones siguientes:

(a) $f(x)=x^2-5$.

(b) $f(x)=\sqrt{x+2}$.

(c) $f(x)=\frac{2}{x-3}$.

Solución:

a) $f(x)=x^2-5$
ya que no tiene más restricciones el dominio de $f(x)$ es simplemente $\mathbb{R}$.

b) $f(x)=\sqrt{x+2}$
ya que la raíz cuadrada de números negativos no existe el dominio de la función $f(x)$ es

$$x : x \geq -2 = [-2, \infty)$$

c) $f(x) = \frac{2}{x-3}$
ya que la división por cero no está permitida el dominio de $f(x)$ es:

$$\mathbb{R} \setminus \{3\} = (-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$$