UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO
DIVISIÓN DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
CAMPUS GUANAJUATO

Tarea 4 (Cálculo Diferencial e Integral I)

Nombre: Ricardo Leon Martinez
Grupo: A Fecha: 5/09/2025 Calificación:
Profesor: Fernando Núñez Medina.

Instrucciones: Escribe limpia y ordenadamente el procedimiento (si lo hay) de cada ejercicio y no escribas las respuestas en la hoja de la tarea.

1. Prueba el inciso (b) de la proposición 6.
Prueba:
Supongamos que existe otro número y distinto de 0 tal que
$$xy = 1$$
Usando la regla de cancelación del producto
$$y = 1 \cdot x^{-1}$$
Por la propiedad del neutro multiplicativo tenemos que
$$y = x^{-1}$$
Por lo que solo x^{-1} cumple con $x \cdot x^{-1} = 1$
$\blacksquare$

2. Sean x y y números reales. Prueba que si $xy = 0$, entonces $x = 0$ o $y = 0$.
Prueba:

Queremos probar que
$$xy = 0 \Rightarrow (x = 0 \vee y = 0)$$
Supongamos lo contrario, es decir supongamos que
$$xy = 0 \wedge x \neq 0 \wedge y \neq 0$$
Si $x \neq 0$ y $y \neq 0$ entonces tanto x como y tiene inverso multiplicativamente, en particular existe
$$\frac{1}{x} \quad \text{y} \quad \frac{1}{y}$$
Como $xy = 0$ usando la regla de cancelación para el producto en x, así:
$$y = 0 \cdot x^{-1}$$
Por la propiedad del cero tenemos
$$y = 0$$
Pero esto es una contradicción ya que supusimos un $y \neq 0$. Por lo tanto no es posible que $y \neq 0$ y $x \neq 0$ si $xy = 0$. Así, se cumple que:
$$xy = 0 \Rightarrow (x = 0 \vee y = 0).$$

3. (**Aritmética de las fracciones**) Sean x, y, z y w números reales tales que las expresiones algebraicas de los incisos siguientes están definidas. Prueba lo siguiente:

a) $\frac{x}{y} + \frac{z}{w} = \frac{wx+yz}{yw}$.

b) $\frac{x}{y} - \frac{z}{w} = \frac{wx-yz}{yw}$.

c) $\frac{x}{y} \cdot \frac{z}{w} = \frac{xz}{yw}$.

d) $\frac{x}{y} \div \frac{z}{w} = \frac{xw}{yz}$.

Prueba:

a) $\frac{x}{y} + \frac{z}{w} = \frac{wx+yz}{yw}$.

Tenemos que

$$\frac{wx+yz}{yw}$$

Por la definicion de la division

$$(wx+yz)(yw)^{-1}$$

Por la distribututividad

$$(wx(yw)^{-1} + yz(yw)^{-1})$$

Sabemos que

$$(xy)^{-1} = (x^{-1} \cdot y^{-1})$$

Así

$$(wx(y^{-1}w^{-1}) + yz(y^{-1}w^{-1}))$$

Por la asociatividad

$$(w \cdot w^{-1}(x \cdot y^{-1}) + y \cdot y^{-1}(z \cdot w^{-1}))$$

Por la definición de inverso multiplicativo

$$w \cdot w^{-1} = 1 \quad \text{y} \quad y \cdot y^{-1} = 1$$

por lo que

$$(1 \cdot (x \cdot y^{-1}) + 1 \cdot (z \cdot w^{-1}))$$

Por la propiedad del neutro multiplicativo

$$(x \cdot y^{-1}) + (z \cdot w^{-1})$$

Por la definición de división

$$\frac{x}{y} + \frac{z}{w}$$

Por lo tanto

$$\frac{x}{y} + \frac{z}{w} = \frac{wx+yz}{yw}$$

b) $\frac{x}{y} - \frac{z}{w} = \frac{wx-yz}{yw}$

Prueba:

es analoga a la anterior ya que solo cambia el signo

c) $\frac{x}{y} \cdot \frac{z}{w} = \frac{xz}{yw}$

Consideremos la expresión

$$\frac{x}{y} \cdot \frac{z}{w}$$

Por la definición de división

$$(xy^{-1})(zw^{-1})$$

Por asociatividad

$$(xz)(y^{-1}w^{-1})$$

Sabemos que

$$(xy)^{-1} = (x^{-1}y^{-1})$$

Así que

$$(xz)(yw)^{-1}$$

Por la definición de división

$$\frac{xz}{yw}$$

Por lo tanto

$$\frac{x}{y} \cdot \frac{z}{w} = \frac{xz}{yw}$$

d) $\frac{x}{y} \div \frac{z}{w}$

Por la definición de la división

$$(xy^{-1}) \cdot (zw^{-1})^{-1}$$

Sabemos que $(xy)^{-1} = (x^{-1}y^{-1})$

$$(xy^{-1}) \cdot (z^{-1} \cdot (w^{-1})^{-1})$$

Recordemos que $(x^{-1})^{-1} = x$

$$(xy^{-1}) \cdot (w \cdot z^{-1})$$

Por asociatividad

$$(xw)(y^{-1}z^{-1})$$

Luego

$$(xw)(yz)^{-1}$$

Por la definición de división

$$\frac{xw}{yz}$$

Por lo tanto

$$\frac{x}{y} \div \frac{z}{w} = \frac{xw}{yz}$$

■

4. Prueba que si $x, y \geq 0$ y $x + y = 0$, entonces $x = 0$ y $y = 0$.

Prueba:
Queremos probar que si $x, y \geq 0 \wedge x + y = 0 \Rightarrow x = 0 \wedge y = 0$.

Supongamos que $x \neq 0$ o $y \neq 0$. Como ambos son no negativos, al menos uno es positivo. Si $x > 0$, entonces $x + y > x > 0$, contradice $x + y = 0$ Si $y > 0$, entonces $x + y > y > 0$, contradice $x + y = 0$ Por lo tanto la suposición es falsa y debemos tener $x = 0$ y $y = 0$.
$\blacksquare$

5. Determina si existe el supremo de los conjuntos siguientes (argumenta tu respuesta). En caso de que exista, calcúlalo (argumenta tu respuesta). Para resolver este ejercicio puedes usar la proposición 17 en los incisos (c) y (d); la proposición 18 en el inciso (e) y la proposición 21 en los incisos (f) y (g).

a) $(-3, 5)$.
b) $(-3, 5]$.
c) $\mathbb{N}$.
d) $(0, \infty)$.
e) $\left\{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.
f) $\mathbb{Q} \cap (0, \sqrt{2})$.
g) $\mathbb{I} \cap (0, 1)$.

Prueba:
a)$(-3, 5)$.
Notemos que para todo $x \in S$ se cumple $x < 5$, de modo que 5 es una **cota superior de S.** Queremos ver que no existe ninguna cota superior menor que 5. Supongamos que $u < 5$ es cota superior. Como $5 - u > 0$, podemos considerar

$$x = \frac{u + 5}{2},$$

el cual satisface $u < x < 5$. Además, $x > -3$, por lo que $x \in S$. Esto contradice que u sea cota superior, pues encontramos un elemento de S mayor que u.

Por tanto, $\sup(S) = 5$. Nótese que $5 \notin S$, luego S no tiene máximo.

$$\boxed{\sup(-3, 5) = 5}$$

b) $(-3, 5]$.
Observemos que para todo $x \in T$ se cumple $x \leq 5$, por lo que 5 es una *cota superior* de T.

Además $5 \in T$, así que 5 es un elemento de T que es cota superior. En consecuencia 5 es la *menor* de las cotas superiores de T, es decir, el supremo de T, y a la vez es el máximo de T.

$$\boxed{\sup(T) = 5.}$$

c) $\mathbb{N}$.
Supongamos que existe un número real M que sea cota superior de $\mathbb{N}$. Por la **propiedad arquimediana**, siempre existe un natural n tal que $n > M$. Esto contradice la definición de cota superior.

Así, $\mathbb{N}$ no tiene supremo en $\mathbb{R}$, entonces

$$\boxed{\sup (N) \text{ no existe en } \mathbb{R}.}$$

d) $(0, \infty)$.
Sea $M \in \mathbb{R}$ arbitrario. Tomemos $x = M + 1$. Si $M \geq -1$, entonces $x > 0$ y $x \in (0, \infty)$, pero $x > M$, lo cual contradice que M sea cota superior. Si $M < -1$, entonces $1 \in (0, \infty)$ cumple $1 > M$, lo cual nuevamente contradice que M sea cota superior.

Por tanto, no existe cota superior real de T.

$$\boxed{\sup(0, \infty) \text{ no existe en } \mathbb{R}.}$$

e) $\left\{1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.
Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$1 - \frac{1}{n} < 1,$$

luego 1 es una cota superior de S.

Sea $u < 1$. Entonces $1 - u > 0$. Por la propiedad arquimediana existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > \frac{1}{1 - u}.$$

De la desigualdad anterior se obtiene

$$\frac{1}{n} < 1 - u \quad \Longrightarrow \quad 1 - \frac{1}{n} > u.$$

Como $1 - \frac{1}{n} \in S$, hemos encontrado un elemento de S mayor que u. Por tanto no puede existir una cota superior u estrictamente menor que 1. Combinando esto con que 1 es cota superior, concluimos que

$$\sup S = 1.$$

$$\boxed{\sup(S) = 1}$$

f) $\mathbb{Q} \cap (0, \sqrt{2})$. Primero: $\sqrt{2}$ es cota superior. Por definición todos los elementos de T son números racionales q con $0 < q < \sqrt{2}$. En particular $q \leq \sqrt{2}$ para todo $q \in T$, por lo que $\sqrt{2}$ es una cota superior de T.

Ahora: no existe cota superior estrictamente menor que $\sqrt{2}$. Sea $u < \sqrt{2}$. Como los racionales son densos en $\mathbb{R}$, existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que

$$u < q < \sqrt{2}.$$

Ese q pertenece a T y satisface $q > u$. Por lo tanto no puede existir una cota superior menor que $\sqrt{2}$.

Combinando ambas observaciones se sigue que

$$\sup(T) = \sqrt{2}.$$

$$\boxed{\sup(\mathbb{Q} \cap (0, \sqrt{2})) = \sqrt{2}}$$

g) $\mathbb{I} \cap (0, 1)$.
Observemos primero que todo elemento $x \in U$ satisface $0 < x < 1$. Por tanto 1 es una cota superior de U.

Supongamos ahora que existe una cota superior $u < 1$. Como los irracionales son densos en $\mathbb{R}$, para el intervalo abierto $(u, 1)$ existe un número irracional r tal que

$$u < r < 1.$$

Ese r pertenece a $\mathbb{I}$ y además $r \in (0, 1)$, por lo tanto $r \in U$. Pero $r > u$, lo que contradice que u sea cota superior de U.

De esta contradicción se deduce que no existe ninguna cota superior estrictamente menor que 1. Combinando esto con la observación inicial, concluimos que 1 es la menor cota superior de U, es decir,

$$\sup U = 1.$$

$$\boxed{\sup(\mathbb{I} \cap (0, 1)) = 1}$$