UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO

DIVISIÓN DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
CAMPUS GUANAJUATO

Tarea 2 (Algebra Lineal I)

Nombre: Ricardo León Martínez **Fecha:** 9/2/2026 **Calificación:** ____________

En todos los problemas F es un campo $(\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Ejercicio 1

Demuestra que el intercambio de dos filas en una matris $m \times n$ con coeficientes en F, puede hacerse mediante un número finito de operaciones elementales fila de los otros dos tipos.

Demostración. Consideremos dos filas distintas, digamos la fila i y la fila j. Denotemos estas filas por

$$R_i, \quad R_j.$$

Reemplazamos la fila R_i por

$$R_i \to R_i + R_j.$$

Ahora las filas son

$$R_i = R_i + R_j, \qquad R_j = R_j.$$

Reemplazamos la fila R_j por

$$R_j \to R_i - R_j.$$

Sustituyendo el valor actual de R_i, obtenemos

$$R_j = (R_i + R_j) - R_j = R_i.$$

En este punto

$$R_i = R_i + R_j, \qquad R_j = R_i.$$

Reemplazando la fila R_i por

$$R_i \to R_i - R_j.$$

Sustituyendo,

$$R_i = (R_i + R_j) - R_i = R_j.$$

Después de estas tres operaciones elementales, las filas quedan

$$R_i = R_j, \qquad R_j = R_i,$$

es decir, las filas i y j han sido intercambiadas ■

Ejercicio 2

Sea $(A|B) \in M_{m\times(n+1)}(F)$ una matriz aumentada correspondiente a un sistema de m ecuaciones lineales en n variables. Demuestra que si $(A_1|B_1)$ es una matriz equivalente por filas a $(A|B)$ entonces toda solución del sistema correspondiente a $(A|B)$ es solución del sistema correspondiente a $(A_1|B_1)$.

Demostración. Como $A_1|B_1$ es equivalente por filas a $(A|B)$, los sistemas de ecuaciones lineales asociados a estas matrices son equivalentes. Por lo visto en clase sabemos que si dos sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes se sigue inmediatamente que ambos sistemas poseen exactamente el mismo conjunto solución. En particular toda solución del sistema asociado a $A_1|B_1$ es tambien solución del sistema asociado a $(A|B)$. ■

Ejercicio 3

Encuentra todas las soluciones que el sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 7x_3 + x_4 + 2x_5 = -2 \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 + x_5 = -1 \\ 2x_1 - 4x_3 + 3x_4 + x_5 = 3 \\ x_3 + 6x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$$

tiene en $\mathbb{Q}^5$.

Solución. Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 7x_3 + x_4 + 2x_5 = -2 \\ x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 + x_5 = -1 \\ 2x_1 - 4x_3 + 3x_4 + x_5 = 3 \\ x_3 + 6x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$$

La matriz aumentada de S es

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -3 & -7 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -4 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Multilicando la fila 1 por $\frac{1}{2}$ y restandola a la fila 2 tenemos

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -3 & -7 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Le restamos la fila 1 a la fila 3 obteniendo

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -3 & -7 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Multiplicamos la fila 2 por -6 y la restamos a la fila 6

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -3 & -7 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 17 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Por ultimo, intercambiamos las filas 4 y 3 obtenemos la matriz

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -3 & -7 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 17 & -1 & 5 \end{array}\right)$$

o bien el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - 7x_3 + x_4 + 2x_5 = -2 \\ \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + \frac{5}{2}x_4 = 0 \\ x_3 + 6x_4 + 2x_5 = 0 \\ 17x_4 - x_5 = 5 \end{cases} \tag{1}$$

De la ecuación 4 del sistema (1) tenemos

$$17x_4 = 5 + x_5 \implies x_4 = \frac{5}{17} + \frac{1}{17}x_5. \tag{2}$$

De la ecuacion 3 del sistema (1) y de (2)

$$x_3 = -6x_4 - 2x_5 = -6\left(\frac{5}{17} + \frac{1}{17}x_5\right) - 2x_5 = -\frac{30}{17} - \frac{40}{17}x_5. \tag{3}$$

De la ecuacion 2 del sistema (1) y de (3) y (2)

$$-\frac{1}{2}x_2 = \frac{1}{2}x_3 - \frac{5}{2}x_4 = \frac{1}{2}\left(-\frac{30}{17} - \frac{40}{17}x_5\right) - \frac{5}{2}\left(\frac{5}{17} + \frac{1}{17}x_5\right) = -\frac{-55}{34} - \frac{45}{34}x_5$$

luego,

$$x_2 = \frac{55}{17} - \frac{45}{17}x_5 \tag{4}$$

De la ecuacion (1) y de (4),(3) y (2)

$$\begin{aligned} 2x_1 = -2 + 3x_2 + 7x_3 - x_4 - 2x_5 &= -2 + 3\left(\frac{55}{17} - \frac{45}{17}x_5\right) + 7\left(-\frac{30}{17} - \frac{40}{17}x_5\right) - \left(\frac{5}{17} + \frac{1}{17}x_5\right) - 2x_5 \\ &= -\frac{84}{17} - \frac{180}{17}x_5 \end{aligned}$$

entonces,

$$x_1 = -\frac{42}{17} - \frac{90}{17}x_5.$$

Sea $x_5 = t$, con $t \in \mathbb{Q}$. Entonces

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left(-\frac{42}{17} - \frac{90}{17}t, \frac{55}{17} - \frac{45}{17}t, -\frac{30}{17} - \frac{40}{17}t, \frac{5}{17} + \frac{1}{17}t, t\right).$$

Así, el conjunto solución es

$$S = \{\left(-\frac{42}{17} - \frac{90}{17}t, \frac{55}{17} - \frac{45}{17}t, -\frac{30}{17} - \frac{40}{17}t, \frac{5}{17} + \frac{1}{17}t, t\right) : t \in \mathbb{Q}\}.$$

▲

Ejercicio 4

Sean $m, n \in \mathbb{N}$ y sea el r el número de pivotes de una matriz reducida por filas de tamaño $m \times n$ con coeficientes F. Demuestra que si $r < n$, entonces el sistema lineal homogéneo asociado tiene una infinidad de soluciones.

Demostración. Como A está en forma reducida por filas y tiene r pivotes, existen exactamente r columnas pivote. Dado que $r < n$, se sigue que no todas las columnas son columnas pivote. Por definición, toda columna que no es columna pivote corresponde a una variable libre del sistema homogéneo. En consecuencia, el sistema tiene al menos una variable libre. Sea x_j una de estas variables libres. Como el sistema es homogéneo, podemos asignar a x_j cualquier valor de F, y los valores de las demas variables quedan determinados por las ecuaciones del sistema. Como F es inifinito, existen infinitos valores posibles para x_j, y por lo tanto el sistema posee infinitas soluciones distintas. ■

Ejercicio 5

Determina si las siguientes matrices definidas sobre el campo de los números reales:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

son equivalentes por filas a la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si es así, describe las operaciones elementales de fila que aplicaste en cada caso.

Solución. Consideremos la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dividimos la fila 1 por 2

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Restamos la fila 1 a la fila 2

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Restamos la fila 1 a la fila 3

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 0 & \frac{7}{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

Dividimos la fila 2 por $-\frac{3}{2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{7}{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

Multiplicando la fila 2 por $\frac{7}{2}$ y la restamos a la fila 3

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Dividimos la fila 3 por $\frac{4}{3}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Multiplicamos la fila 3 por $-\frac{2}{3}$ y la restamos a la fila 2

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, multiplicamos la fila 2 por $-\frac{1}{2}$ y la restamos a la fila 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ahora consideremos la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Restamos la fila 2 a la fila 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Así, las dos matrices son equivalentes por filas a la matriz identidad. ▲