UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO

DIVISIÓN DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
CAMPUS GUANAJUATO

Tarea 2 (Elementos de Probabilidad y Estadistica)

Nombre: Ricardo León Martínez **Fecha:** 17/2/2026 **Calificación:** ______________

Ejercicio 1

En una tómbola se colocan n pelotas identificadas cada una por un número del 1 al n. En cada una de k ocasiones consecutivas, hacemos girar la tómbola, tomamos una pelota al azar, anotamos el número de la pelota que tomamos y, finalmente, la devolvemos a la tómbola.

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que la sucesión de números obtenida sea estrictamente creciente?

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que la sucesión de números obtenida sea no decreciente?

Solución. Sea $\Omega = \{1, \dots, n\}^k$ el espcio muestra de todas las suceciones posibles $(x_1, \dots, x_k)$ obtenidas al realizar k extracciones con reemplazo. Como en cada extraccion todas las pelotas son independientes

$$|\Omega| = n^k, \qquad \mathbb{P}(\{(x_1, \dots, x_k)\}) = \frac{1}{n^k}$$

Por tanto, para cualquier evento $A \subseteq \Omega$,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{n^k}.$$

(a) ¿Cuál es la probabilidad de que la sucesión de números obtenida sea estrictamente creciente?
Queremos encontrar las sucesiones $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$, con $k \in \{1, \dots, n\}$. Elegir una suceción estrictamente creciente equivale a elegir un subconjunto de k elementos distintos de $\{1, \dots, n\}$. Por lo tanto, el número de tales sucesiones es

$$\binom{n}{k}.$$

Asi la probabilidad es

$$\mathbb{P}(x_1 < \cdots < x_k) = \frac{\binom{n}{k}}{n^k} \qquad (k \leq n),$$

y es 0 si $k > n$.

(b) ¿Cuál es la probabilidad de que la sucesión de números obtenida sea no decreciente?
Ahora queremos contar las sucesiones $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_k$, con $i \in \{1, \dots, n\}$. Aqui se permiten

repeticiones. Sea a_j el numero de veces que aparece el valor j. Entonces

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = k, \qquad a_j \geq 0.$$

Cada solución $(a_1, \ldots, a_n)$ determina exactamnete una sucesión no decreciente. El numero de soluciones enteras no negativas de esa ecuación es el numero de combinaciones con repetición

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

Así, la probabilidad es

$$\mathbb{P}(x_1 \leq \cdots \leq x_k) = \frac{\binom{n+k-1}{k}}{n^k}.$$

▲

Ejercicio 2

¿Tres personas están en el primer piso de un edificio de diez pisos y cada una elige de manera aleatoria un piso de los nueve restantes al cual ir. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres personas vayan a pisos consecutivos?

(a) Si las elecciones son independientes, es decir, se permite que dos o tres vayan al mismo piso.

(b) Si las elecciones no son independientes, en el sentido de que deben ir a pisos distintos.

Solución.

(a) Si las elecciones son independientes, es decir, se permite que dos o tres vayan al mismo piso. Cada persona elige independientemente uno de los 9 pisos, por tanto

$$|\Omega| = 9^3.$$

Cada resultado tiene probabilidad $\frac{1}{9^3}$. Fijemos una terna consecutiva $\{k, k+1, k+2\}$. Para que ocurra el evento A, las tres personas deben ocupar exactamente esos tres pisos, pues si hubiera repetición no habría tres pisos distintos consecutivos. Para cada bloque existen

$$3! = 6$$

formas de asignar esos pisos a las tres personas. Como existen 7 bloques consecutivos,

$$|A| = 7 \cdot 3! = 42.$$

Así, la probabilidad es

$$\mathbb{P}_a(A) = \frac{42}{9^3} = \frac{42}{729} = \frac{14}{243}.$$

(b) Si las elecciones no son independientes, en el sentido de que deben ir a pisos distintos. Ahora el espacio muestral está formado por ternas ordenadas sin repetición. Número de maneras de asignar 3 pisos distintos a 3 personas

$$|\Omega'| = P(9,3) = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504.$$

El conteo favorable es el mismo que el anterior

$$|A| = 3 \cdot 3! = 42.$$

Así, la probabilidad es

$$\mathbb{P}_b(A) = \frac{42}{504} = \frac{1}{12}.$$

▲

Ejercicio 3

En un cajón de calcetines solamente 3 son azules. Si al escoger dos calcetines al azar tenemos que la probabilidad de que ambos sean azules es de $\frac{1}{2}$, ¿cuántos calcetines en total tiene el cajón?

Solución. Sea N el número total de calcentines en el cajón. Se sabe que exactamente 3 son azules y que se extraen dos calcetines al azar sin reemplazo. El espacio muestral está formado por todas las parejas no ordenadas de calcetines

$$|\Omega| = \binom{N}{2}.$$

El evento A es: ambos calcetines son azules. El numero de parejas favorables es

$$|A| = \binom{3}{2}$$

Por tanto

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{N}{2}}.$$

Sustituyendo los valores

$$\binom{3}{2} = 3, \qquad \binom{N}{2} = \frac{N(N-1)}{2}.$$

La condición del problema es

$$\frac{\binom{3}{2}}{\binom{N}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Sustituyendo

$$\frac{3}{\frac{N(N-1)}{2}} = \frac{1}{2}$$

Luego,

$$\frac{6}{N(N-1)} = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto

$$12 = N(N-1)$$
$$N^2 - N - 12 = 0.$$

Factorizamos

$$(N-4)(N+3) = 0.$$

Como $N > 0$,

$$N = 4.$$

Así, el cajon tiene exactamente 4 calcetines en total. ▲

Ejercicio 4

Supongamos que tomamos 5 cartas al azar de un mazo de póker estándar con 52 cartas (13 cartas numeradas por cada tipo entre corazones, tréboles, diamantes y picas). Encuentre la probabilidad de obtener lo siguiente:

(a) Cinco cartas del mismo tipo (palo).

(b) Exactamente un par (dos cartas con la misma numeración).

(c) Exactamente dos pares distintos.

(d) Exactamente una tercia (tres cartas con la misma numeración).

(e) Póker (cuatro cartas con la misma numeración).

Solución. El espacio muestral es

$$\Omega = \{\text{manos de 5 cartas}\}, \qquad |\Omega| = \binom{52}{5} = 2598960.$$

Por tanto, para cualquier evento A,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{\binom{52}{5}}.$$

(a) Cinco cartas del mismo tipo
Elegimos, el palo: 4 maneras. 5 cartas dentro de las 13 de ese palo $\binom{13}{5}$. Entonces

$$|A| = 4\binom{13}{4}.$$

Así, la probabilidad es

$$\mathbb{P}(a) = \frac{4\binom{13}{5}}{\binom{52}{5}} = \frac{5148}{2598960} \approx 0{,}00198.$$

(b) Exactamente un par

El valor del par: 13 maneras. Las 2 cartas de ese valor $\binom{4}{2}$. Los otros 3 valores distintos entre los 12 restantes: $\binom{12}{3}$. Para cada uno de esos valores, elegimos un palo: 4^3.

$$|B| = 13\binom{4}{2}\binom{12}{3}4^3.$$

Así, la probabilidad es

$$\mathbb{P}(b) = \frac{13\binom{4}{2}\binom{12}{3}4^3}{\binom{52}{5}} = \frac{1098240}{2598960} \approx 0{,}4226.$$

(c) Exactamente dos pares distintos

Elegimos, los 2 valores de los pares: $\binom{13}{2}$. Para cada par: $\binom{4}{2}^2$. El valor de la quinta carta: 11. Su palo: 4.

$$|C| = \binom{13}{4}\binom{4}{2}^2 \cdot 11 \cdot 4.$$

Así, la probabilidad es

$$\mathbb{P}(c) = \frac{123552}{2598960} \approx 0{,}0475.$$

(d) Exactamente una tercia

Valor de la tercia: 13. Las 3 cartas: $\binom{4}{3}$. 2 valores distintos entre los 12 restantes: $\binom{12}{2}$. Palo de cada una 4^2.

$$|D| = 13\binom{4}{3}\binom{12}{2}4^2.$$

Así, la probabilidad es

$$\mathbb{P}(d) = \frac{54912}{2598960} \approx 0{,}0211.$$

(e) Póker

Valor del póker: 13. Las 4 cartas: $\binom{4}{4} = 1$. La quinta carta: 12. Su palo: 4.

$$|E| = 13 \cdot 12 \cdot 4 = 624.$$

Así, la probabilidad es

$$\mathbb{P}(e) = \frac{624}{2598960} \approx 0{,}00024.$$

▲

Ejercicio 5

Cierta comunidad se compone de 20 familias en total. De estas, 4 familias tienen exactamente un hij@, 8 familias tienen exactamente dos hijos, 5 familias tienen exactamente tres hijos, 2 familias tienen exactamente cuatro hijos y 1 familia tiene exactamente cinco hijos.

(a) Si escogemos una familia al azar, ¿cuál es la probabilidad de que dicha familia tenga k hijos para $k = 1, 2, \ldots, 5$?

(b) Si escogemos un niño al azar, ¿cuál es la probabilidad de que dicho niñ@ pertenezca a una familia con exactamente k hijos para $k = 1, 2, \ldots, 5$?

Ejercicio 6

Supongamos que tenemos m pelotas distintas y m cajas distintas. Si colocamos al azar cada una de las pelotas en alguna de las cajas, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente una caja quede vacía?

Ejercicio 7

Cierta urna contiene 46 pelotas en total: 12 rojas, 16 azules y 18 verdes. Si tomamos 7 pelotas de la urna de manera aleatoria, ¿cuál es la probabilidad de obtener cada uno de los siguientes escenarios?

(a) 3 rojas, 2 azules y 2 verdes.

(b) Al menos 2 rojas.

(c) Todas las pelotas del mismo color.

(d) Exactamente 3 rojas o exactamente 3 azules.

Ejercicio 7

Consideremos el siguiente reordenamiento aleatorio de n elementos. Iniciamos con los números $1, 2, \ldots, n$ en ese mismo orden. Luego, en el primer paso, lanzamos una moneda balanceada con lados S (sol) y A (águila).

Si sale sol, dejamos al 1 en su lugar y pasamos al siguiente número. Si sale águila, colocamos 1 al final de la fila y pasamos al siguiente número. Repetimos este procedimiento hasta llegar al número n.

Por ejemplo, para $n = 4$, si la sucesión de lanzamientos es $SAAS$, el orden inicial $1, 2, 3, 4$ se convierte en $1, 4, 2, 3$.

Calcule la probabilidad de que $1, 2, \ldots, n$ terminen en el mismo orden.