UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO

DIVISIÓN DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS

CAMPUS GUANAJUATO

Tarea 5 (Cálculo Diferencial e Integral I)

Nombre:		
Grupo:	**Fecha:**	**Calificación:**
Profesor: Fernando Núñez Medina.		

Instrucciones: Escribe limpia y ordenadamente el procedimiento (si lo hay) de cada ejercicio y no escribas las respuestas en la hoja de la tarea.

1. **(Leyes de los signos para la división)** Prueba que si x y y son números reales, con $y \neq 0$, entonces
   (a) $\frac{+x}{+y} = +\frac{x}{y}$.
   (b) $\frac{-x}{+y} = -\frac{x}{y}$.
   (c) $\frac{+x}{-y} = -\frac{x}{y}$.
   (d) $\frac{-x}{-y} = +\frac{x}{y}$.
   Las leyes de los signos para la división se resumen de manera conveniente como
   $$\begin{array}{cccccc} + & \text{entre} & + & \text{da} & + \\ - & \text{entre} & + & \text{da} & - \\ + & \text{entre} & - & \text{da} & - \\ - & \text{entre} & - & \text{da} & + \end{array}$$
   Sugerencia 1: El inciso (a) es claro, pues $+x = x$, $+y = y$ y $+(x/y) = x/y$. Usa la unicidad del inverso aditivo para probar los incisos (b) y (c). Finalmente, deduce (d) de los incisos (b) y (c). **Sugerencia 2:** Para probar (b), usa las leyes de los signos para la multiplicación, y para probar (c), usa que $(-y)^{-1} = -\left(y^{-1}\right)$ y las leyes de los signos para la multiplicación.
2. Prueba que si $x < y + \epsilon$ para todo $\epsilon > 0$, entonces $x \leq y$.

3. Sean A y B subconjuntos no vacíos y acotados de números reales tales que $A \subset B$. Prueba que
$$\operatorname{ínf}(B) \leq \operatorname{ínf}(A) \leq \sup(A) \leq \sup(B).$$
4. **(Coeficientes binomiales)** Dados n y k números enteros con $0 \leq k \leq n$ definimos el *coeficiente binomial*
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$
Recuerda que el número factorial de un número natural n se define como $n! = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$ y que $0! = 1$.
(a) Sea n un número natural. Prueba que
$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$
(b) Sean n y k números naturales con $k \leq n$. Prueba que
$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$
5. Prueba que la suma, resta, producto y cociente de números racionales es un número racional.
6. Sean $f : A \to B$ y $C \subset B$. Definimos la *imagen inversa* del conjunto C bajo la función f como el conjunto
$$f^{-1}(C) = \{x \in A : f(x) \in C\}.$$
Dados $C, D \subset B$, prueba lo siguiente:
(a) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.
(b) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.
(c) $f^{-1}(C \backslash D) = f^{-1}(C) \backslash f^{-1}(D)$.
7. A partir de la definición del valor absoluto de un número, prueba la proposición 31.
8. Prueba, usando la definición de límite, que $\lim_{x\to 1} x + 2 = 3$.
9. Prueba, usando la negación de la definición de límite, que es **falso** que $\lim_{x\to 1} x + 2 = 5$.
10. Prueba que $\lim_{x\to p} f(x) = L$ ssi $\lim_{x\to p} f(x) - L = 0$.