Ejercicio 1, Inciso a

Demostración. Para $m \in \mathbb{N}_0$, consideremos el siguiente conjunto

$$S = \{n \in \mathbb{N}_0 : m + n = n + m\}.$$

Probemos que $S \subseteq \mathbb{N}_0$ es un conjunto de sucesores. Primero notemos que, por definicion de la suma se tiene

$$m + 0 = m = 0 + m,$$

y por lo tanto $0 \in S$. Supongamos ahora que $n \in S$, esto significa que

$$m + n = n + m.$$

Por definicion de la suma se tiene que

$$S_m(n+) = s(m + n) \quad \text{y} \quad S_{n+}(m) = s(n + m).$$

Como $m + n = n + m$, se obtiene

$$S_m(n+) = s(m + n) = s(n + m) = S_{n+}(m),$$

por lo que, $n+ \in S$. Asi, S es un conjunto de sucesores que contiene al 0. Por el teorema 4.1, se sigue que $S = \mathbb{N}_0$. En consecuencia, para todo $n \in \mathbb{N}_0$ se cumple

$$m + n = n + m.$$

■

Ejercicio 1, Inciso b

Demostración. Para $n, m \in \mathbb{N}_0$, definimos el conjunto

$$S = \{k \in \mathbb{N}_0 : n + (m + k) = (n + m) + k\}.$$

Probemos que $S \subseteq \mathbb{N}_0$ es un conjunto de sucesores. Por definición de la suma y lo probado en el inciso anterior,

$$m + 0 = m, \qquad n + m = n + m,$$

y ademas

$$n + (m + 0) = n + m = (n + m) + 0.$$

Por lo tanto, $0 \in S$. Sea ahora $k \in S$ esto es,

$$n + (m + k) = (n + m) + k. \tag{1}$$

Consideremos $k+$. Usando la definición de la suma, se tiene

$$S_m(k+) = s(m + k), \qquad S_n(S_m(k+)) = n + s(m + k),$$

y también

$$S_{n+m}(k+) = s((n + m) + k)$$

De (1), obtenemos

$$n + s(m + k) = s(n + (m + k)) = s((n + m) + k).$$

Se sigue que

$$n + (m + k+) = (n + m) + k+,$$

lo cual prueba que $k+ \in S$. Así, S es un conjunto de sucesores que contiene al 0. Por el teorema 4.1, se concluye que $S = \mathbb{N}_0$. Por lo tanto, para todo $k \in \mathbb{N}_0$ se cumple

$$n + (m + k) = (n + m) + k.$$

■

Ejercicio 2, Inciso a

Demostración. Primero probemos que $1 \cdot n = n$. Consideremos el conjunto

$$S = \{n \in \mathbb{N}_0 : 1 \cdot n = n\}.$$

Por definición del producto,

$$1 \cdot 0 = 0,$$

de modo que $0 \in S$. Supongamos $n \in S$ esto es,

$$1 \cdot n = n.$$

Entonces, por la definición del producto y de la suma,

$$1 \cdot s(n) = 1 \cdot n + 1 = n + 1 = s(n).$$

Así, $s(n) \in S$. Por lo tanto, S es un conjunto de sucesores que contiene al 0. Por el teorema 4.1, se sigue que $S = \mathbb{N}_0$, y por ende

$$1 \cdot n = n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}_0.$$

Ahora probemos que $n \cdot 1 = n$. como $1 = s(0)$, por la definición del producto,

$$n \cdot 1 = n \cdot s(0) = n \cdot 0 + n.$$

Pero $n \cdot 0 = 0$ y $0 + n = n$, de modo que

$$n \cdot 1 = 0 + n = n.$$

De donde se sigue el resultado. ■

Ejercicio 2, Inciso b

Demostración. Recordemos que $n + 1 = n+$ por el teorema 4.3. Usando esta igualdad y la definición del producto, obtenemos

$$m(n + 1) = m(n+) = P_m(n+).$$

Por como se define a P_m, se tiene

$$P_m(n+) = S_m(P_m(n)),$$

y por la definición de S_m,

$$S_m(P_m(n)) = m + P_m(n).$$

Como $P_m(n) = mn$, entonces

$$m(n + 1) = m + mn.$$

Dado que la suma es conmutativa, se sigue le resultado. ■

Ejercicio 3, Inciso a

Demostración. Sean

$$a = [(a_1, a_2)], \qquad b = [(b_1, b_2)], \qquad c = [(c_1, c_2)]$$

sus representaciones en $\mathbb{Z}$. Por definición de la suma en $\mathbb{Z}$,

$$a + b = [(a_1 + b_1, a_2 + b_2)].$$

Entonces,

$$(a + b) + c = [(a_1 + b_1) + c_1, (a_2 + b_2) + c_2)].$$

Por otra parte,

$$b + c = [(b_1 + c_1, b_2 + c_2)],$$

y por la misma definición

$$a + (b + c) = [(a_1 + (b_1 + c_1), a_2 + (b_2 + c_2))].$$

Así,

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

■

Ejercicio 3, Inciso b

Demostración. Sea $a = [(a_1, a_2)]$ su representación en $\mathbb{Z}$. El entero 0 corresponde a la clase $[(0, 0)]$. Por definición de la suma en $\mathbb{Z}$,

$$a + 0 = [(a_1, a_2)] + [(0, 0)] = [(a_1 + 0, a_2 + 0)] = [(a_1, a_2)].$$

Por lo tanto,

$$a + 0 = a.$$

■

Ejercicio 3, Inciso c

Demostración. Sean

$$a = [(a_1, a_2)], \qquad b = [(b_1, b_2)] \qquad c = [(c_1, c_2)]$$

sus representaciones en $\mathbb{Z}$. Por definición de la suma en $\mathbb{Z}$,

$$a+b=[(a_1+b_1,a_2+b_2)], \qquad c+b=[(c_1+b_1,c_2+b_2)].$$

Usando el criterio de igualdad en $\mathbb{Z}$,

$$[(x,y)]=[(u,v)] \Longleftrightarrow x+v=y+u,$$

se tiene que

$$a+b=c+b$$

si y solo si

$$(a_1+b_1)+(c_2+b_2)=(a_2+b_2)+(c_1+b_1). \tag{1}$$

Aplicando asociatividad,

$$\begin{aligned}(a_1+b_1)+(c_2+b_2)&=a_1+(b_1+(c_2+b_2)),\\ (a_2+b_2)+(c_1+b_1)&=a_2+(b_2+(c_1+b_1)).\end{aligned}$$

Aplicando conmutatividad,

$$\begin{aligned}b_1+(c_2+b_2)&=c_2+(b_1+b_2),\\ b_2+(c_1+b_1)=c_1+(b_2+b_1)&=c_1+(b_1+b_2).\end{aligned}$$

sustituyendo esto en (1), obtenemos

$$a_1+(c_2+(b_1+b_2))=a_2+(c_1+(b_1+b_2)). \tag{2}$$

Por asociatividad nuevamente,

$$a_1+c_2+(b_1+b_2)=a_2+c_1+(b_1+b_2). \tag{3}$$

Por el ejercicio 1 inciso d de esta tarea sabemos que

$$x+u=y+u \Longleftrightarrow x=y.$$

Aplicando esto a (3) con $u=b_1+b_2, x=a_1+c_1$ y $y=a_2+c_1$ se obtiene

$$a_1+c_2=a_2+c_1.$$

Por definición de igualdad en $\mathbb{Z}$,

$$[(a_1, a_2)] = [(c_1, c_2)],$$

es decir

$$a = c.$$

La suficiencia es inmediata sustituyendo $a = c$ en la definición de la suma, concluyendo así el resultado. ■

Ejercicio 4, Inciso a

Demostración. Sean $[(a,b)]_q$ y $[(c,d)]_q$ elementos de $\mathbb{Q}$ con $b \neq 0$ y $d \neq 0$. Por definición de la suma en $\mathbb{Q}$,

$$[(a,b)]_q + [(c,d)]_q = [(ad + bc, bc)]_q,$$

mientras que

$$[(c,d)]_q + [(a,b)]_q = [(cb + da, db)]_q.$$

Como en $\mathbb{Z}$ la suma y el producto son conmutativos, se tiene $ad + bc = cb + da$ y $bd = db$. Entonces, por la proposición 4.12, ambas expresiones representan la misma clase, de modo que

$$[(a,b)]_q + [(c,d)]_q = [(c,d)]_q + [(a,b)]_q.$$

Para el producto, de la definición se obtiene

$$[(a,b)]_q \cdot [(c,d)]_q = [(ac, bd)]_q, \qquad [(c,d)]_q \cdot [(a,b)]_q = [(ca, db)]_q.$$

Dado que en $\mathbb{Z}$ se cumple $ac = ca$ y $bd = db$, estas dos parejas determinan la misma clase en $\mathbb{Q}$. Por lo tanto,

$$[(a,b)]_q \cdot [(c,d)]_q = [(c,d)]_q \cdot [(a,b)]_q.$$

Así, las dos operaciones son conmutativas. ■

Ejercicio 4, Inciso b

Demostración. Sean $[(a,b)]_q, [(c,d)]_q, [(e,f)]_q \in \mathbb{Q}$ con $b,d,f \neq 0$. Por definición de la suma en $\mathbb{Q}$,

$$\Big([(a,b)]_q + [(c,d)]_q\Big) + [(e,f)]_q = [(ad+bc, bd)]_q + [(e,f)]_q = \Big((ad+bc)f + bde, bdf\Big)_q,$$

mientras que

$$[(a,b)]_q + \Big([(c,d)]_q + [(e,f)]_q\Big) = [(a,b)]_q + [(cf+de, df)]_q = \Big(a(df) + b(cf+de), bdf\Big)_q.$$

Por asociatividad y conmutatividad de la suma y el producto en $\mathbb{Z}$ se tiene

$$(ad+bc)f + bde = adf + bcf + bde = a(df) + b(cf+de),$$

y ademas $(bd)f = b(df)$. Por la proposición 4.12, las parejas anteriores representan la misma clase, por lo que

$$\Big([(a,b)]_q + [(c,d)]_q\Big) + [(e,f)]_q = [(a,b)]_q + \Big([(c,d)]_q + [(e,f)]_q\Big).$$

Por la definición del producto en $\mathbb{Q}$,

$$\Big([(a,b)]_q \cdot [(c,d)]_q\Big) \cdot [(e,f)]_q = [(ac,bd)]_q \cdot [(e,f)]_q = \Big((ac)e, (bd)f\Big)_q,$$

y

$$[(a,b)]_q \cdot \Big([(c,d)]_q \cdot [(e,f)]_q\Big) = [(a,b)]_q \cdot [(cd, df)]_q = \Big(a(ce), b(df)\Big)_q.$$

Por la asociatividad del producto en $\mathbb{Z}$ se cumple $(ac)e = a(ce)$ y $(bd)f = b(df)$, luego las dos parejas son la misma clase y

$$\Big([(a,b)]_q \cdot [(c,d)]_q\Big) \cdot [(e,f)]_q = [(a,b)]_q \cdot \Big([(c,d)]_q \cdot [(e,f)]_q\Big)$$

Por lo tanto ambas operaciones son asociativas. ∎

Ejercicio 4, Inciso c

Demostración. Sean $[(a,b)]_q \in \mathbb{Q}$ con $b \neq 0$. Consideremos las clases $[(0,1)]_q$ y $[(1,1)]_q$. Por definición de la suma en $\mathbb{Q}$,

$$[(a,b)] + [(0,1)]_q = [(a \cdot 1 + b \cdot 0, b \cdot 1)]_q = [(a,b)]_q.$$

Por lo tanto $[(0,1)]_q$ es neutro aditivo. Por la definición del producto en $\mathbb{Q}$,

$$[(a,b)]_q \cdot [(1,1)]_q = [(a \cdot 1, b \cdot 1)]_q = [(a,b)]_q.$$

Así, $[(1,1)]_q$ es neutro multiplicativo. ■

Ejercicio 4, Inciso d

Demostración. Sea $e \in \mathbb{Q}$ un neutro aditivo, para todo $a \in \mathbb{Q}$ se cumple

$$a + e = a.$$

Sea $e' \in \mathbb{Q}$ otro neutro aditivo, de modo que también

$$a + e' = a$$

para todo $a \in \mathbb{Q}$. Tomando $a = e'$ en la igualdad que define a e, obtenemos

$$e' + e = e'.$$

Tomando ahora $a = e$ en al igualdad que define a e', obtenemos

$$e + e' = e.$$

Como la suma en conmutativa en $\mathbb{Q}$, $e + e' = e' + e$. Sustituyendo en las igualdades anteriores se obtiene

$$e = e'.$$

Por lo tanto el neutro aditivo es único. Sea ahora $u \in \mathbb{Q}$ un neutro multiplicativo, para todo $a \in \mathbb{Q}$,

$$a \cdot u = a.$$

Sea $u' \in \mathbb{Q}$ otro neutro multiplicativo, con

$$a \cdot u' = a$$

para todo $a \in \mathbb{Q}$. Tomando $a = u'$ en la igualdad para u, se obtiene

$$u' \cdot u = u'.$$

Tomando $a = u$ en la igualdad para u',

$$u \cdot u' = u.$$

Como el producto en $\mathbb{Q}$ es conmutativo, $u \cdot u' = u' \cdot u$. Sustituyendo en las igualdades anteriores se obtiene

$$u = u'.$$

Asi, el neutro multiplicativo es único. $\blacksquare$