UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO

DIVISIÓN DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
CAMPUS GUANAJUATO

Tarea 3 (Calculo Diferencia e Integral II)

Nombre: Ricardo León Martínez **Fecha:** 13/2/2026 **Calificación:** ____________

Ejercicio 1

(Teorema del valor medio generalizado para integrales) Sean f y g funciones integrables en un intervalo $[a, b]$. Prueba que si f es continua y g no cambia de signo, entonces existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b fg = f(c) \int_a^b g.$$

Sugerencia: Supón primero que $g \geq 0$ (el caso en que $g \leq 0$ se sigue facilmente del caso en que $g \geq 0$). Ten en cuenta que

$$m \leq f(x) \leq M,$$

donde

$$m = \min\{f(x) : x \in [a, b]\}$$

y

$$M = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}.$$

En consecuencia, por el ejercicio 2 de la tarea 3,

$$m \int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq M \int_a^b g.$$

Si $\int_a^b g = 0$, entonces $\int_a^b fg = 0$ y el resultado es claro. Si $\int_a^b g \neq 0$, entonces

$$m \leq \frac{1}{\int_a^b g} \int_a^b fg \leq M.$$

Intenta aplicar el teorema del valor intermedio.

Demostración. Supongamos que $g \geq 0$, el caso en que $g \leq 0$ se sigue facilmente del caso en que

$g \geq 0$. Tengamos en cuenta que

$$m = \text{mín}\{f(x) : x \in [a,b]\}$$

y

$$M = \text{máx}\{f(x) : x \in [a,b]\}.$$

En consecuencia por el ejercicio 2 de la tarea 3,

$$m \int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq M \int_a^b g.$$

Si $\int_a^b g = 0$, entonces $\int_a^b fg = 0$ y el resultado es claro. Si $\int_a^b g \neq 0$, entonces

$$m \leq \frac{1}{\int_a^b g} \int_a^b fg \leq M.$$

Definamos

$$A := \frac{1}{\int_a^b g} \int_a^b fg.$$

Por el paso anterior,

$$A \in [m, M].$$

Dado que f es continua en $[a,b]$, su imagen es el intervalo cerrado $[m, M]$. Por el teorema del valor intermedio, existe un punto $c \in [a,b]$ tal que

$$f(c) = A$$

Mutliplicando la igualdad anterior por $\int_a^b g$, obtenemos

$$\int_a^b fg = f(c) \int_a^b g.$$

■

Ejercicio 2

(Integral de una función impar) Prueba que si f es una función impar e integrable en un intervalo $[-a, a]$, entonces

$$\int_{-a}^{a} f = 0.$$

Sugerencia 1: Sean $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ una partición del intervalo $[0, a]$ y $Q = \{-t_0, \ldots, -t_n\}$; así, Q es una partición del intervalo $[-a, 0]$. Prueba que

$$L(f, Q) = -U(f, P)$$

y

$$U(f, Q) = -L(f, P)$$

y usalo para probar lo afirmado. **Sugerencia 2:** Trata de usar el ejercicio 4 de la tarea 3.

Demostración. Sea f una función impar e integrable en $[-a, a]$. Entonces

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{para todo } x \in [-a, a].$$

Sea $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ una partición de $[0, a]$, con

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = a,$$

y sea

$$Q = \{-t_0, \ldots, -t_n\}$$

la partición correspondiente de $[-a, 0]$, ordenada crecientemente:

$$-a = -t_n < \cdots < -t_1 < -t_0 = 0.$$

Para cada $i = 1, \ldots, n$, consideremos los subintervalos

$$I_i = [t_{i-1}, t_i] \quad \text{y} \quad J_i = [-t_i, -t_{i-1}].$$

Sea

$$m_i = \inf\{f(x) : x \in I_i\}, \qquad M_i = \sup\{f(x) : x \in I_i\}.$$

Como f es impar, para $x \in J_i$ se tiene $x = -y$ con $y \in I_i$, y por tanto

$$f(x) = f(-y) = -f(y).$$

De aquí se deduce que

$$\inf_{x \in J_i} f(x) = -\sup_{y \in I_i} f(y) = -M_i,$$

y

$$\sup_{x \in J_i} f(x) = -\inf_{y \in I_i} f(y) = -m_i.$$

Observando que

$$|J_i| = t_i - t_{i-1} = |I_i|,$$

se obtiene

$$L(f,Q) = \sum_{i=1}^{n} (-M_i)(t_i - t_{i-1}) = -U(f,P),$$

y

$$U(f,Q) = \sum_{i=1}^{n} (-m_i)(t_i - t_{i-1}) = -L(f,P).$$

Ahora, como

$$\int_{-a}^{a} f = \int_{-a}^{0} f + \int_{0}^{a} f,$$

y por definición de integral como supremo de sumas inferiores e ínfimo de sumas superiores, se tiene

$$\int_{-a}^{0} f = \sup_{Q \in \mathcal{P}} L(f,Q) = \sup_{P \in \mathcal{P}} (-U(f,P)) = -\inf_{P \in \mathcal{P}} U(f,P) = -\int_{0}^{a} f.$$

Por lo tanto,

$$\int_{-a}^{a} f = \int_{-a}^{0} f + \int_{0}^{a} f = -\int_{0}^{a} f + \int_{0}^{a} f = 0.$$

■

Ejercicio 3

Calcula las integrales siguientes:

(a) $\displaystyle\int \sin(x)\cos(x)dx$.

(b) $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x}dx$.

Solución. (a) $\displaystyle\int \sin(x)\cos(x)dx$.
Hagamos $u = \sin(x)$ y $du = \cos(x)dx$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\int \sin(x)\cos(x)dx &= \int u du. \\ &= \frac{1}{2}u^2 \\ &= \frac{1}{2}\sin^2(x).\end{aligned}$$

(b) $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x}dx$.

Sea $u = \ln(x)$ y $du = \frac{1}{x}dx$. En consecuencia

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln(x)}{x}dx &= \int udu \\ &= \frac{1}{2}u^2 \\ &= \frac{1}{2}\ln^2(x)\end{aligned}$$

▲

Ejercicio 4

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx.$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{9+x^2}}dx.$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-2}}dx.$

Solución. (a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx.$
Hagamos $x = 2\sin(\theta)$ y $dx = 2\cos(\theta)\,d\theta$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx &= \int \frac{2\cos(\theta)}{\sqrt{4-4\sin^2(\theta)}} \\ &= \int \frac{2\cos(\theta)}{\sqrt{4\cos^2(\theta)}} \\ &= \theta.\end{aligned}$$

Notemos que $\theta = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$. Así,

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right).$$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{9+x^2}}dx.$
Sea $x = 3\tan(\theta)$ y $dx = 3\sec^2(\theta)\,d\theta$. Entonces $\tan(\theta) = \frac{x}{3}$ y $\sec(\theta) = \frac{\sqrt{x^2+9}}{3}$. En consecuencia,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{9+x^2}}dx &= \int \frac{3\sec^2(\theta)}{\sqrt{9+9\tan^2(\theta)}}d\theta \\ &= \int \frac{3\sec^2(\theta)}{\sqrt{9\sec^2(\theta)}}d\theta \\ &= \int \sec(\theta)\,d\theta \\ &= \ln\left(|\sec(\theta)+\tan(\theta)|\right).\end{aligned}$$

Así,

$$\int \frac{1}{\sqrt{9+x^2}}dx = \ln\left(\left|\frac{\sqrt{x^2+9}}{3}+\frac{x}{3}\right|\right).$$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-2}}dx$.

Sea $x = \sqrt{2}\sec(\theta)$ y $dx = \sqrt{2}\sec(\theta)\tan(\theta)\,d\theta$. Entonces $\sec(\theta) = \frac{x\sqrt{2}}{2}$ y $\tan(\theta) = \frac{\sqrt{2x^2-4}}{2}$. En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sqrt{x^2-2}}dx &= \int \frac{\sqrt{2}\sec(\theta)\tan(\theta)}{\sqrt{2\sec^2(\theta)-2}}d\theta \\
&= \int \frac{\sqrt{2}\sec(\theta)\tan(\theta)}{\sqrt{2\tan^2(\theta)}}d\theta \\
&= \int \sec(\theta)d\theta \\
&= \ln\left(|\sec(\theta)+\tan(\theta)|\right).
\end{aligned}$$

Así,

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-2}}dx = \ln\left(\left|\frac{x\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2x^2-4}}{2}\right|\right).$$

▲

Ejercicio 5

Calcula la integral

$$\int \frac{x+11}{x^2-5x-14}dx.$$

Solución. Notemos que el integrando es una funcion racional propia, así que seguiremos el método citado para descomponerlo en fracciones simples. Descomponemos el denominador del integrando en factores lineales y cuadraticos irreducibles

$$x^2-5x-14 = (x-7)(x+2).$$

Por el factor $(x-7)$ la descomposición del integrando en fracciones simples incluye una fraccion de la forma

$$\frac{A}{x-2}$$

y por el factor $(x+2)$ la descomposición del integrando en fracciones simples incluye una fracción de la forma

$$\frac{B}{x+2}.$$

Así, la descomposición del integrando en fracciones simples es

$$\frac{x+11}{x^2-5x-14} = \frac{A}{x-7}+\frac{B}{x+2}. \tag{1}$$

Notemos que A y B cumplen (1) si y solo si A y B cumple que

$$x + 11 = A(x + 2) + B(x - 7). \tag{2}$$

Reexpresemos (2) como

$$x + 11 = (A + B)x + 2A - 7B. \tag{3}$$

Puesto que dos polinomios son iguales si sus coeficientes son iguales, de (3) obtenemos que A y B satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} A + B &= 1 \\ 2A - 7B &= 11 \end{aligned}$$

cuya solución es $A = 2$ y $B = -1$. Por lo cual

$$\frac{x + 11}{x^2 - 5x - 14} = \frac{2}{x - 7} - \frac{1}{x + 2}$$

y, en consecuencia

$$\begin{aligned} \frac{x + 11}{x^2 - 5x - 14} &= 2\int \frac{1}{x - 7} dx - \int \frac{1}{x + 2} \\ &= 2 \ln (x - 7) - \ln (x + 2) . \end{aligned}$$

▲

Ejercicio 5

Prueba que las integrales impropias en los incisos (c),(d) y (e) de la definición 10 no dependen del punto p en cuestión.

Demostración. Para (c), supongamos que existe un punto p tal que la integral impropia en (a, b) está bien definida. Tomemos ahora un punto p' y supongamos que $p < p'$ (el otro caso es análogo). Notemos que para $a < x < p$ se tiene

$$\int_x^{p'} f = \int_x^{p} f + \int_p^{p'} f,$$

porque f es integrable en todo subintervalo cerrado de (a, b), en particular en $[x, p']$.

Luego, como $\lim_{x\to a^+} \int_x^p f$ existe (aunque podría no ser finito) y además

$$\left| \int_p^{p'} f \right| < \infty$$

por ser f integrable en $[p, p']$, se tiene que el límite

$$\lim_{x\to a^+} \int_x^{p'} f$$

existe (podría no ser finito), pues
$$\int_x^{p'} f = \int_x^{p} f + \int_p^{p'} f$$
y el segundo término es constante respecto de x. Por lo tanto,

$$\int_a^{p'} f = \lim_{x\to a^+} \int_x^{p'} f = \lim_{x\to a^+} \int_x^{p} f + \int_p^{p'} f = \int_a^{p} f + \int_p^{p'} f.$$

De igual manera, se tiene que
$$\int_{p'}^{b} f = \int_p^{b} f - \int_p^{p'} f.$$
En efecto, para $p' < y < b$,
$$\int_{p'}^{y} f = \int_p^{y} f - \int_p^{p'} f,$$
y pasando al límite cuando $y \to b^-$ se obtiene la igualdad.

Estas igualdades garantizan que
$$\int_a^{p'} f + \int_{p'}^{b} f$$
no presenta la forma $\infty - \infty$ o $-\infty + \infty$, ya que

$$\int_a^{p'} f + \int_{p'}^{b} f = \left(\int_a^{p} f + \int_p^{p'} f\right) + \left(\int_p^{b} f - \int_p^{p'} f\right),$$

y el término $\int_p^{p'} f$ es un número real finito que se cancela, por lo que la suma coincide exactamente con
$$\int_a^{p} f + \int_p^{b} f,$$
la cual está bien definida por hipótesis y no es de tipo indeterminado.

Finalmente,
$$\int_a^{p} f + \int_p^{b} f = \int_a^{p'} f + \int_{p'}^{b} f,$$
con lo que la integral impropia en (a, b) no depende del punto intermedio elegido. Para (d), supongamos que existe un punto $p \in (a, \infty)$ tal que la integral impropia en (a, ∞) está bien definida, es decir,
$$\int_a^{\infty} f = \int_a^{p} f + \int_p^{\infty} f,$$
sin que aparezca una indeterminación del tipo $\infty - \infty$.

Tomemos ahora un punto $p' \in (a, \infty)$ y supongamos $p < p'$ (el otro caso es análogo).

Notemos que para $a < x < p$ se tiene

$$\int_x^{p'} f = \int_x^{p} f + \int_p^{p'} f,$$

porque f es integrable en todo intervalo cerrado y acotado, en particular en $[x, p']$.

Luego, como $\lim_{x\to a^+}\int_x^p f$ existe (aunque podría no ser finito) y además

$$\left|\int_p^{p'} f\right| < \infty$$

por ser f integrable en $[p,p']$, se tiene que el límite

$$\lim_{x\to a^+}\int_x^{p'} f$$

existe (podría no ser finito), pues

$$\int_x^{p'} f = \int_x^p f + \int_p^{p'} f$$

y el segundo término es constante respecto de x. Por lo tanto,

$$\int_a^{p'} f = \lim_{x\to a^+}\int_x^{p'} f = \lim_{x\to a^+}\int_x^p f + \int_p^{p'} f = \int_a^p f + \int_p^{p'} f.$$

De igual manera, para $p' < y$ se tiene

$$\int_{p'}^{y} f = \int_p^y f - \int_p^{p'} f,$$

Pasando al límite cuando $y\to\infty$, se obtiene

$$\int_{p'}^{\infty} f = \int_p^\infty f - \int_p^{p'} f.$$

Estas igualdades garantizan que

$$\int_a^{p'} f + \int_{p'}^{\infty} f$$

no presenta la forma $\infty-\infty$ o $-\infty+\infty$, ya que

$$\int_a^{p'} f + \int_{p'}^{\infty} f = \left(\int_a^p f + \int_p^{p'} f\right) + \left(\int_p^\infty f - \int_p^{p'} f\right),$$

y el término $\int_p^{p'} f$ es un número real finito que se cancela, por lo que la suma coincide exactamente con

$$\int_a^p f + \int_p^\infty f,$$

la cual está bien definida por hipótesis y no es de tipo indeterminado.

Finalmente,

$$\int_a^p f + \int_p^\infty f = \int_a^{p'} f + \int_{p'}^{\infty} f,$$

con lo que la integral impropia en (a,∞) no depende del punto intermedio elegido. Para (e), supongamos que existe un punto $p\in\mathbb{R}$ tal que la integral impropia en $(-\infty,\infty)$ está bien definida, es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f = \int_{-\infty}^{p} f + \int_p^\infty f,$$

sin que aparezca una indeterminación del tipo $\infty-\infty$.

Tomemos ahora un punto $p' \in \mathbb{R}$ y supongamos $p < p'$ (el otro caso es análogo).

Notemos que para $x < p$ se tiene
$$\int_x^{p'} f = \int_x^p f + \int_p^{p'} f,$$
porque f es integrable en todo intervalo cerrado y acotado, en particular en $[x, p']$.

Luego, como $\lim_{x\to-\infty} \int_x^p f$ existe (aunque podría no ser finito) y además
$$\left| \int_p^{p'} f \right| < \infty$$
por ser f integrable en $[p, p']$, se tiene que el límite
$$\lim_{x\to-\infty} \int_x^{p'} f$$
existe (podría no ser finito), pues
$$\int_x^{p'} f = \int_x^p f + \int_p^{p'} f$$
y el segundo término es constante respecto de x. Por lo tanto,
$$\int_{-\infty}^{p'} f = \lim_{x\to-\infty} \int_x^{p'} f = \lim_{x\to-\infty} \int_x^p f + \int_p^{p'} f = \int_{-\infty}^p f + \int_p^{p'} f.$$

De igual manera, para $p' < y$ se tiene
$$\int_{p'}^y f = \int_p^y f - \int_p^{p'} f,$$
por aditividad en el intervalo compacto $[p, y]$. Pasando al límite cuando $y \to \infty$, se obtiene
$$\int_{p'}^\infty f = \int_p^\infty f - \int_p^{p'} f.$$

Estas igualdades garantizan que
$$\int_{-\infty}^{p'} f + \int_{p'}^\infty f$$
no presenta la forma $\infty - \infty$ o $-\infty + \infty$, ya que
$$\int_{-\infty}^{p'} f + \int_{p'}^\infty f = \left(\int_{-\infty}^p f + \int_p^{p'} f \right) + \left(\int_p^\infty f - \int_p^{p'} f \right),$$
y el término $\int_p^{p'} f$ es un número real finito que se cancela, por lo que la suma coincide exactamente con
$$\int_{-\infty}^p f + \int_p^\infty f,$$
la cual está bien definida por hipótesis y no es de tipo indeterminado.

Finalmente,
$$\int_{-\infty}^p f + \int_p^\infty f = \int_{-\infty}^{p'} f + \int_{p'}^\infty f,$$

con lo que la integral impropia en $(-\infty, \infty)$ no depende del punto intermedio elegido. $\blacksquare$