E_1	E_2	E_3	E_4	Calif.

Matemáticas Elementales

Agosto - Diciembre de 2025
Tarea 4

Resuelve los siguientes ejercicios según el reglamento del curso y **entrega esta página** con los nombres de los integrantes de equipo colocados en lugar de estas líneas de instrucciones. Todas las demostraciones deben redactarse justificando formalmente todos los pasos necesarios.

Antes de iniciar cada demostración, deberás indicar claramente cuáles son las hipótesis de cada ejercicio y qué es lo que debes demostrar en cada ejercicio.

La tarea debe resolverse con la teoría vista en el curso o con resultados a lo más de los cursos de preparatoria. Está prohibido utilizar resultados de otros cursos de este mismo semestre y/o trucos de alguna olimpiada relacionada con computación y/o matemáticas.

1. Dadas dos funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definimos la **composición** de f, g, denotada por $f \circ g$, como

$$(f \circ g)(x) := f(g(x)), \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Supón que g es continua en z y f es continua en $g(z)$. Demuestra que $f \circ g$ es continua en z.

2. (a) Define formalmente $\lim_{x\to y} f(x) = \pm\infty$ y demuestra que los límites laterales de $f(x) = 1/x$, cuando $x \to 0$, no coinciden y ninguno es finito.
   (b) Dadas dos funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $\lim_{x\to z} f(x)g(x)$ existe y es finito ¿se cumple que $\lim_{x\to z} f(x)$ y $\lim_{x\to z} g(x)$ existen y son finitos? Justifica formalmete tu respuesta.

3. Sean $f, g : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ funciones continuas, demuestra que $h : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ dada por

$$h(x) = [1 + g(x)]^{f(x)},$$

es continua.

4. Demuestra utilizando la definición que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ son funciones continuas, entonces $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) = \frac{f(x)}{1 + g(x)},$$

es continua.