# UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO

**DIVISIÓN DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS**
**CAMPUS GUANAJUATO**

# Tarea 1 (Algebra Lineal I)

**Nombre:** Ricardo León Martínez **Fecha:** 2/2/2026 **Calificación:** ____________

En todos los problemas, $F$ es el campo $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

### Ejercicio 1

Demuestra que el cero de $F$ es único y que para todo $a \in F \setminus \{0\}$, su inverso multiplicativo, $a^{-1}$ es único.

*Demostración.* Supongamos que $a, 0 \in F$ son elementos neutros para la suma. Entonces para toda $a \in F$ se cumple

$$a + 0 = a \quad \text{y} \quad a + b = a.$$

Sumando $-a$ a ambos lados de la segunda igualdad se obtiene $b = 0$, por lo que el 0 de $F$ es unico. Ahora sea $a \in F \setminus \{0\}$ y supongamos que $b, c \in F$ son tales que

$$ab = 1 \quad \text{y} \quad ac = 1.$$

Entonces,

$$b = b \cdot 1 = b(ac) = (ba)c = 1 \cdot c.$$

Por lo tanto el inverso multiplicativo de $a$ es unico. ∎

### Ejercicio 2

Considera el siguiente sistema de 3 ecuaciones lineales en 2 variables con coeficientes en F:

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

Encuentra el conjunto solución. ¿Existe alguna solución del sistema homogéneo? Justifica tus respuestas.

*Solución.* Consideremos el siguiente sistema de ecuaciones

$$S = \begin{cases} E_1 : x_1 + 6x_2 = 2 \\ E_2 : x_1 - x_2 = 2 \\ E_3 : x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

Resolviendo $E_2$ a $E_3$ se obtiene al par

$$(x_1, x_2) = (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}).$$

Pero este par no satisface a $E_1$. Ahora si resolvemos $E_1$ y $E_2$ obtenemos

$$(x_1, x_2) = (2, 0).$$

Pero esto no satisface $E_3$. Dado que no existe ningun par que satisfaga simultaneamente las tres ecuaciones, se concluye que el sistema es incompatible. Por lo tanto, el conjunto solución es

$$\text{Sol}(S) = \emptyset$$

Ahora consideremos el siguiente sistema de ecuaciones

$$A = \begin{cases} E_1 : x_1 + 6x_2 = 0 \\ E_2 : x_1 - x_2 = 0 \\ E_3 : x_1 + x_2 = 0. \end{cases}$$

De $E_2$ se tiene que $x_1 = x_2$ sustituyendo $x_2$ en $E_3$ se sigue que $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$ por lo tanto existe solucion para el sistema homogeneo y su conjunto solucion es,

$$\text{Sol}(A) = \{(0, 0)\}.$$

▲

**Ejercicio 3**

Sean $m, n \in \mathbb{N}$. Demuestra que la relación definida en el conjutno de sistemas de $m$ ecuaciones lineales en $n$ variables con coeficientes en $F$ de ser **ser equivalentes**, es una relación transitiva.

*Demostración.* Sea $S$ el conjunto de todos los sistmas de ecuaciones lineales, decimos que dos sistemas estan relacionados o que $S \sim S'$ si su conjunto solucion es el mismo. Ahora sean $S_1, S_2, S_3 \in S$ tales que

$$S_1 \sim S_2 \quad \text{y} \quad S_2 \sim S_3$$

Por definicion de la relacion $\sim$, se tiene

$$\mathrm{Sol}(S_1) = \mathrm{Sol}(S_2) \quad \text{y} \quad \mathrm{Sol}(S_2) = \mathrm{Sol}(S_3).$$

Por transitividad de la igualdad entre conjuntos, se sigue que

$$\mathrm{Sol}(S_1) = \mathrm{Sol}(S_3)$$

Nuevamente por la definicion de relacion entre sistemas de ecuaciones se concluye que

$$S_1 \sim S_3$$

Y por lo tanto es transititva. ■

**Ejercicio 4**

Sean $a_{ij}, b_j \in F$, $1 \leq i \leq 2$, $1 \leq j \leq 2$, con $a_{11} \neq 0$. Da condiciones necesarias y suficientes para el siguiente sistema lineal de 2 ecuaciones y 2 variables tenga conjunto solución no vacío:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

*Solución.* Para $a_{11} \neq 0$, podemos aplicar operaciones elementales y despejar $x_1$ de la primera ecuación obteniendo

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2.$$

Sustituyendo en la segunda ecuacion

$$a_{21}\left(\frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2\right) + a_{22}x_2 = b_2.$$

Reordenando

$$\left(a_{22} - \frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}}\right)x_2 = b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}b_1.$$

Ahora consideremos dos casos. Primero supongamos que

$$a_{22} - \frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}} \neq 0.$$

Entonces la ecuacion tiene solución unica para $x_2$, y por tanto eol sistema tiene solución. Ahora supongamos que

$$a_{22} - \frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}} = 0.$$

Entonces la ecuación se reduce a

$$0 \cdot x_2 = b_2.$$

Si

$$b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} b_1 = 0,$$

el sistema tiene infinitas soluciones.Si

$$b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} b_1 \neq 0,$$

el sistema no tiene solución. Asi el sistema tiene conjunto solución no vacio si y solo si cumple

$$a_{22} - \frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}} \neq 0 \qquad \text{o bien} \qquad \begin{cases} a_{22} - \frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}} = 0, \\ b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} b_1 = 0. \end{cases}$$

▲

**Ejercicio 5**

Determina si los siguientes sistemas de ecuaciones son equivalentes, y si lo son, expresa cada ecuación de uno como combinación lineal de las ecuaciones de otro:

(a) 3 ecuaciones y 3 variables:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 0 \\ \frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{5}{2}x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

(b) 3 ecuaciones y 3 variables:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 0 \\ \frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{5}{2}x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

*Solución.* Consideremos los dos siguientes sistemas de ecuaciones

$$S_1 = \begin{cases} -x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 0 \\ \frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{5}{2}x_3 = 0. \end{cases} \qquad S_2 = \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Veamos si son equivalentes. La matriz aumentanda de $S_1$ es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 8 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{5}{2} & 0 \end{array}\right)$$

Ahora multiplicamos la fila 1 por $-1$ y la restamos a la fila 2 obteniendo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 12 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{5}{2} & 0 \end{array}\right)$$

despues multiplicamos la fila 1 por $-\frac{1}{2}$ y la restamos a la fila 3 teniendo

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 12 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{9}{2} & 0 \end{array}\right)$$

finalmente multiplicamos la fila 2 por $\frac{3}{8}$ y la restamos a la fila 3 obteniendo la siguiente matriz

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

o bien el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + 4x_3 = 0 \\ \qquad 4x_2 + 12x_3 = 0. \end{cases} \tag{1}$$

De la ecuaciónn 2 de (1) obtenemos

$$4x_2 = 12_{x_3} \implies x_2 = -3x_3$$

y de la ecuación 1 de (1) se obtiene

$$-x_1 = -x_2 - 4x_3 = -(-3x_3) - 4x_3 = -x_3 \implies x_1 = x_3.$$

Sea $x_3 = t$, con $t \in \mathbb{R}$. Entonces

$$(x_1, x_2, x_3) = (t, -3t, t).$$

y asi su conjunto solución es

$$S = \{(t, -3t, t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Tomemos ahora $S_2$

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + 3_3 = 0 \end{cases}$$

de aqui se deduce inmediatamente

$$x_1 = x_3, \qquad x_2 = -3x_3.$$

Sea $x_3 = t$, con $t \in \mathbb{R}$. Entonces

$$(x_1, x_2, x_3) = (t, -3t, t).$$

y asi su conjunto solucion es

$$S = \{(t, -3t, t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Dado que los conjuntos solucion de $S_1$ y $S_2$ son iguales entonces los sitemas son equivalentes. Se verifica que cada ecuación de $S_1$ puede expresarse como combinación lineal de las ecuaciones de $S_2$. En efecto

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + 4x_3 &= -(x_1 - x_3) + (x_2 + 3x_3), \\ x_1 + 3x_2 + 8x_3 &= (x_1 - x_3) + 3(x_2 + 3x_3), \\ \frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{5}{2}x_3 &= \frac{1}{2}(x_1 - x_3) + (x_2 + 3x_3). \end{aligned}$$

Ahora consideremos el sistema $S_2'$ dado por

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Es claro que

$$x_1 = x_3, \qquad x_2 = -x_3.$$

y por lo tanto su conjunto solución es

$$S(S_2') = \{(t, -t, t) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Asi, ya que el conjunto solución de $S_2'$ no es igual al de $S_1$ no son sistemas equivalentes. ▲

## Ejercicio 6

¿Para qué valores de $a \in \mathbb{Q}$ el siguiente sistema tiene una infinidad de soluciones?

$$\begin{cases} ax_1 + 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + ax_2 = 0. \end{cases}$$

*Solución.* Queremos que exista $\lambda \in \mathbb{Q}$ tal que

$$(2x_1 + ax_2) = \lambda(ax_1 + 2x_2).$$

Igualamos coeficientes

$$\begin{cases} 2 = \lambda a \\ a = 2\lambda \end{cases}$$

De la segunda ecuación obtenemos

$$\lambda = \frac{a}{2}.$$

Sustituyendo en la primera

$$2 = a\left(\frac{a}{2}\right) \implies a^2 = 4.$$

Por lo tanto

$$a = \pm 2.$$

▲