UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO

DIVISIÓN DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
CAMPUS GUANAJUATO

Tarea 3 (Calculo Diferencia e Integral II)

Nombre: Ricardo León Martínez **Fecha:** 13/2/2026 **Calificación:** ______________

Ejercicio 1

(Teorema del valor medio generalizado para integrales) Sean f y g funciones integrables en un intervalo $[a, b]$. Prueba que si f es continua y g no cambia de signo, entonces existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b fg = f(c) \int_a^b g.$$

Sugerencia: Supón primero que $g \geq 0$ (el caso en que $g \leq 0$ se sigue facilmente del caso en que $g \geq 0$). Ten en cuenta que

$$m \leq f(x) \leq M,$$

donde

$$m = \text{mín}\{f(x) : x \in [a, b]\}$$

y

$$M = \text{máx}\{f(x) : x \in [a, b]\}.$$

En consecuencia, por el ejercicio 2 de la tarea 3,

$$m \int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq M \int_a^b g.$$

Si $\int_a^b g = 0$, entonces $\int_a^b fg = 0$ y el resultado es claro. Si $\int_a^b g \neq 0$, entonces

$$m \leq \frac{1}{\int_a^b g} \int_a^b fg \leq M.$$

Intenta aplicar el teorema del valor intermedio.

Demostración. Supongamos que $g \geq 0$, el caso en que $g \leq 0$ se sigue facilmente del caso en que

$g \geq 0$. Tengamos en cuenta que

$$m = \min\{f(x) : x \in [a, b]\}$$

y

$$M = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}.$$

En consecuencia por el ejercicio 2 de la tarea 3,

$$m \int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq M \int_a^b g.$$

Si $\int_a^b g = 0$, entonces $\int_a^b fg = 0$ y el resultado es claro. Si $\int_a^b g \neq 0$, entonces

$$m \leq \frac{1}{\int_a^b g} \int_a^b fg \leq M.$$

Definamos

$$A := \frac{1}{\int_a^b g} \int_a^b fg.$$

Por el paso anterior,

$$A \in [m, M].$$

Dado que f es continua en $[a, b]$, su imagen es el intervalo cerrado $[m, M]$. Por el teorema del valor intermedio, existe un punto $c \in [a, b]$ tal que

$$f(c) = A$$

Mutliplicando la igualdad anterior por $\int_a^b g$, obtenemos

$$\int_a^b fg = f(c) \int_a^b g.$$

■

Ejercicio 2

(Integral de una función impar) Prueba que si f es una función impar e integrable en un intervalo $[-a, a]$, entonces

$$\int_{-a}^{a} f = 0.$$

Sugerencia 1: Sean $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ una partición del intervalo $[0, a]$ y $Q = \{-t_0, \ldots, -t_n\}$; así, Q es una partición del intervalo $[-a, 0]$. Prueba que

$$L(f, Q) = -U(f, P)$$

y

$$U(f, Q) = -L(f, P)$$

y usalo para probar lo afirmado. **Sugerencia 2:** Trata de usar el ejercicio 4 de la tarea 3.

Ejercicio 3

Calcula las integrales siguientes:

(a) $\displaystyle\int \sin(x)\cos(x)dx.$

(b) $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x}dx.$

Solución. (a) $\displaystyle\int \sin(x)\cos(x)dx.$
Hagamos $u = \sin(x)$ y $du = \cos(x)dx$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\int \sin(x)\cos(x)dx &= \int u du. \\ &= \frac{1}{2}u^2 \\ &= \frac{1}{2}\sin^2(x).\end{aligned}$$

(b) $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x}dx.$
Sea $u = \ln(x)$ y $du = \frac{1}{x}dx$. En consecuencia

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln(x)}{x}dx &= \int u du \\ &= \frac{1}{2}u^2 \\ &= \frac{1}{2}\ln^2(x)\end{aligned}$$

$\blacktriangle$

Ejercicio 4

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx.$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{9+x^2}}dx.$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-2}}dx.$

Solución. (a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx.$
Hagamos $x = 2\sin(\theta)$ y $dx = 2\cos(\theta)\, d\theta$. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx &= \int \frac{2\cos(\theta)}{\sqrt{4-4\sin^2(\theta)}} \\ &= \int \frac{2\cos(\theta)}{\sqrt{4\cos^2(\theta)}} \\ &= \theta.\end{aligned}$$

Notemos que $\theta = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$. Así,

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right).$$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{9+x^2}}dx.$
Sea $x = 3\tan(\theta)$ y $dx = 3\sec^2(\theta)\, d\theta$. Entonces $\tan(\theta) = \frac{x}{3}$ y $\sec(\theta) = \frac{\sqrt{x^2+9}}{3}$. En consecuencia,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{9+x^2}}dx &= \int \frac{3\sec^2(\theta)}{\sqrt{9+9\tan^2(\theta)}}d\theta \\ &= \int \frac{3\sec^2(\theta)}{\sqrt{9\sec^2(\theta)}}d\theta \\ &= \int \sec(\theta)\, d\theta \\ &= \ln\left(\left|\sec(\theta)+\tan(\theta)\right|\right).\end{aligned}$$

Así,

$$\int \frac{1}{\sqrt{9+x^2}}dx = \ln\left(\left|\frac{\sqrt{x^2+9}}{3}+\frac{x}{3}\right|\right).$$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-2}}dx.$
Sea $x = \sqrt{2}\sec(\theta)$ y $dx = \sqrt{2}\sec(\theta)\tan(\theta)\, d\theta$. Entonces $\sec(\theta) = \frac{x\sqrt{2}}{2}$ y $\tan(\theta) = \frac{\sqrt{2x^2-4}}{2}$. En

consecuencia,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x^2-2}}dx &= \int \frac{\sqrt{2}\sec(\theta)\tan(\theta)}{\sqrt{2\sec^2(\theta)-2}}d\theta\\ &= \int \frac{\sqrt{2}\sec(\theta)\tan(\theta)}{\sqrt{2\tan^2(\theta)}}d\theta\\ &= \int \sec(\theta)d\theta\\ &= \ln(|\sec(\theta)+\tan(\theta)|).\end{aligned}$$

Así,

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-2}}dx = \ln\left(\left|\frac{x\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2x^2-4}}{2}\right|\right).$$

▲

Ejercicio 4

Calcula la integral

$$\int \frac{x+11}{x^2-5x-14}dx.$$

Solución. Notemos que el integrando es una funcion racional propia, así que seguiremos el método citado para descomponerlo en fracciones simples. Descomponemos el denominador del integrando en factores lineales y cuadraticos irreducibles

$$x^2-5x-14=(x-7)(x+2).$$

Por el factor $(x-7)$ la descomposición del integrando en fracciones simples incluye una fraccion de la forma

$$\frac{A}{x-2}$$

y por el factor $(x+2)$ la descomposición del integrando en fracciones simples incluye una fracción de la forma

$$\frac{B}{x+2}.$$

Así, la descomposición del integrando en fracciones simples es

$$\frac{x+11}{x^2-5x-14}=\frac{A}{x-7}+\frac{B}{x+2}. \tag{1}$$

Notemos que A y B cumplen (1) si y solo si A y B cumple que

$$x+11=A(x+2)+B(x-7). \tag{2}$$

Reexpresemos (2) como

$$x+11=(A+B)x+2A-7B. \tag{3}$$

Puesto que dos polinomios son iguales si sus coeficientes son iguales, de (3) obtenemos que A y B satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} A + B &= 1 \\ 2A - 7B &= 11 \end{aligned}$$

cuya solución es $A = 2$ y $B = -1$. Por lo cual

$$\frac{x+11}{x^2-5x-14} = \frac{2}{x-7} - \frac{1}{x+2}$$

y, en consecuencia

$$\begin{aligned} \frac{x+11}{x^2-5x-14} &= 2\int \frac{1}{x-7}dx - \int \frac{1}{x+2} \\ &= 2\ln(x-7) - \ln(x+2). \end{aligned}$$

▲

Ejercicio 5

Prueba que las integrales impropias en los incisos (c),(d) y (e) de la definición 10 no dependen del punto p en cuestión.

Demostración. Para (c), supongamos que existe un punto p tal que la integral impropia en (a, b) esta bien definida. Tomemos un punto P' y supongamos que $p < p'$ el otro caso es analogo. Notemos que para $a < x < p$ se tiene ■