Ejercicio 1(a) Para la sucesiones de conjuntos $\{A_n\}_n$ dadas en cada inciso, demuestra que ellas convergen y halla su limite (a)

$$A_n = \left(\frac{-1}{n}, \frac{1}{n}\right).$$

Demostración. Recordemos que por definicion:

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k, \quad \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

$\liminf A_n = \{0\}$
Primero mostremos $\{0\} \subseteq \liminf A_n$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, $0 \in A_k$ para todo $k \geq n$, pues $0 \in (-1/k, 1/k)$. Entonces $0 \in \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ para todo n, luego $0 \in \liminf A_n$. Ahora mostremos $\liminf A_n \subseteq \{0\}$. Sea $x \in \liminf A_n$. Entonces existe n_0 tal que $x \in A_k$ para todo $k \geq n_0$. Es decir, $|x| < 1/k$ para todo $k \geq n_0$. Si $x \neq 0$, entonces $|x| > 0$. Tomando $k > 1/|x|$, se tiene $1/k < |x|$, contradicción. Luego $x = 0$ Por tanto, $\liminf A_n = \{0\}$.
$\limsup A_n = \{0\}$
Primero mostremos $\limsup A_n \subseteq \{0\}$. Sea $x \in \limsup A_n$. Entonces para todo n existe $k_n \geq n$ tal que $x \in A_{k_n}$, es decir, $|x| < 1/k_n$. Si $x \neq 0$, $|x| > 0$. Tomemos $n > 1/|x|$. Existe $k_n \geq n$ con $|x| < 1/k_n \leq 1/n < |x|$, contradicción. Luego $x = 0$. Ahora mostremos $\{0\} \subseteq \limsup A_n$. Para cada n, $0 \in A_k$ para todo k, en particular para algún $k \geq n$. Luego $0 \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ para todo n, así $0 \in \limsup A_n$. Por tanto, $\limsup A_n = \{0\}$. Como los limites son iguales entonces la sucecion de conjuntos converge a $\{0\}$. ■

Ejercicio 2(a) Para la suecion de conjuntos $\{A_n\}_n$ dadas en cada inciso, halla

$$\inf_{k\geq n} A_k, \sup_{k\geq n} A_k.$$

Ademas su la suecion converge y en caso afirmativo, especifica su limite.

$$A_n = \begin{cases} (-n, 1) & \text{si n es impar,} \\ (1, n) & \text{si n es par.} \end{cases}$$

Solución.
Priero calculemos $\inf_{k\geq n} A_k$. Observemos que:

$$\text{Si } k \text{ es impar } A_k = (-k, 1) \quad \text{Si } k \text{ es par } A_k = (1, k)$$

Para n fijo, consideremos:

$$\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \left[\bigcap_{k\geq n} (-k, 1)\right] \cap \left[\bigcap_{k\geq n} (1, k)\right].$$

Primer término para k impar:

$$\bigcap_{k\geq n}(-k,1)=(-\infty,1)$$

pues $-k\to-\infty$ cuando k impar crece.
Segundo término:

$$\bigcap_{k\geq n}(1,k)=\varnothing$$

pues para cualquier $x\in\mathbb{R}$:
Si $x>1$, existe k par tal que $k<x$, luego $x\notin(1,k)$
Si $x\leq 1$, $x\notin(1,k)$ para todo k par
Por tanto:

$$\inf_{k\geq n}A_k=\varnothing.$$

Cálculo de $\sup_{k\geq n}A_k$

$$\sup_{k\geq n}A_k=\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k=\left[\bigcup_{k\geq n}(-k,1)\right]\cup\left[\bigcup_{k\geq n}(1,k)\right].$$

Primer término:

$$\bigcup_{k\geq n}(-k,1)=(-\infty,1)$$

Segundo término:

$$\bigcup_{k\geq n}(1,k)=(1,\infty)$$

Unión: $(-\infty,1)\cup(1,\infty)=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Verifiquemos que $1\notin A_k$ para todo k:
Si k impar: $A_k=(-k,1)$
Si k par: $A_k=(1,k)$
Por tanto

$$\sup_{k\geq n}A_k=\mathbb{R}\setminus\{1\}.$$

Calculo límite inferior y superior.

$$\liminf_{n\to\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\inf_{k\geq n}A_k=\bigcup_{n=1}^{\infty}\varnothing=\varnothing.$$

$$\limsup_{n\to\infty}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\sup_{k\geq n}A_k=\bigcap_{n=1}^{\infty}(\mathbb{R}\setminus\{1\})=\mathbb{R}\setminus\{1\}.$$

Ahora notemos que

$$\liminf A_n=\varnothing\neq\mathbb{R}\setminus\{1\}=\limsup A_n.$$

Por tanto, la sucesión no converge. ◀

Ejercicio 3(a) Sea $\{x_n,n\in\mathbb{N}\}$ una coleccion de numeros reales.

Supon que existe N tal que $x_n \neq x_m$ para cualesquiera $n, m \geq N$ distintos. Demuestra que

$$\lim_{n\to\infty} \{x_n\} = \varnothing$$

Demostración. Recordemos las definiciones:

$$\liminf_{n\to\infty} C_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} C_k,$$

$$\limsup_{n\to\infty} C_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} C_k.$$

En este caso, $C_n = \{x_n\}$.
Cálculo de $\limsup C_n$
Sea $y \in \limsup C_n$. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $k \geq n$ tal que $y \in C_k = \{x_k\}$, es decir, $y = x_k$. En particular para $n = N$, existe $k_1 \geq N$ con $y = x_{k_1}$. Para $n = k_1 + 1$, existe $k_2 \geq k_1 + 1$ con $y = x_{k_2}$.
Pero $k_2 > k_1 \geq N$, y $x_{k_1} = x_{k_2} = y$, lo que contradice la hipótesis de que $x_n \neq x_m$ para $n, m \geq N$ distintos.
Por tanto, no existe tal y, es decir:

$$\limsup_{n\to\infty} C_n = \varnothing.$$

Cálculo de $\liminf C_n$
Sabemos que $\liminf C_n \subseteq \limsup C_n$.
Como $\limsup C_n = \varnothing$, entonces:

$$\liminf_{n\to\infty} C_n = \varnothing.$$

le sigue que

$$\liminf C_n = \limsup C_n = \varnothing,$$

luego

$$\lim_{n\to\infty} \{x_n\} = \varnothing.$$

■

Ejercicio 4(a) Sean $\{A_n\}_n, \{B_n\}_n$ dos sucesiones de conjuntos tales que $\lim_{n\to\infty} A_n = A$ y $\lim_{n\to\infty} B_n = B$. Demuestra o refuta las siguientes igualdades

$$\lim_{n\to\infty} (A_n \cap B_n) = A \cap B.$$

Solución. **Respuesta:** La igualdad es falsa en general.
Contraejemplo:

Definamos:
$$A_n = \left(0, 1 + \frac{(-1)^n}{n}\right), \quad B_n = \left(1 - \frac{(-1)^n}{n}, 2\right).$$
Cálculo de $\lim A_n$:
Para n par: $A_n = \left(0, 1 + \frac{1}{n}\right)$
Para n impar: $A_n = \left(0, 1 - \frac{1}{n}\right)$
$$\liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k \geq n} A_k = (0, 1], \quad \limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} A_k = (0, 1]$$
Luego $\lim A_n = (0, 1]$.
Cálculo de $\lim B_n$:
Para n par: $B_n = \left(1 - \frac{1}{n}, 2\right)$
Para n impar: $B_n = \left(1 + \frac{1}{n}, 2\right)$
$$\liminf B_n = [1, 2), \quad \limsup B_n = [1, 2)$$
Luego $\lim B_n = [1, 2)$.
Entonces:
$$A \cap B = (0, 1] \cap [1, 2) = \{1\}.$$
Cálculo de $A_n \cap B_n$:
Si n par: $A_n \cap B_n = \left(1 - \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right)$
Si n impar: $A_n \cap B_n = \varnothing$
Cálculo de $\lim(A_n \cap B_n)$:
$$\liminf(A_n \cap B_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k \geq n} (A_k \cap B_k) = \varnothing$$
pues para todo n existe $k \geq n$ impar con $A_k \cap B_k = \varnothing$.
$$\limsup(A_n \cap B_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k \geq n} (A_k \cap B_k) = \{1\}$$
Como $\liminf \neq \limsup$, $\lim(A_n \cap B_n)$ no existe.

◀