E_1	E_2	E_3	E_4	Calif.

Matemáticas Elementales

Agosto - Diciembre de 2025

Tarea 3

Resuelve los siguientes ejercicios según el reglamento del curso y **entrega esta página** con los nombres de los integrantes de equipo colocados en lugar de estas líneas de instrucciones. Todas las demostraciones deben redactarse justificando formalmente todos los pasos necesarios.

Antes de iniciar cada demostración, deberás indicar claramente cuáles son las hipótesis de cada ejercicio y qué es lo que debes demostrar en cada ejercicio.

La tarea debe resolverse con la teoría vista en el curso o con resultados a lo más de los cursos de preparatoria. Está prohibido utilizar resultados de otros cursos de este mismo semestre y/o trucos de alguna olimpiada relacionada con computación y/o matemáticas.

1. Demuestras los siguientes resultados, utilizando el método indicado en cada caso.

   (a) Para $n \in \mathbb{N}$ definimos

   $$n! := n(n-1)(n-2)\dots(2)(1).$$

   Además, definimos $0! := 1$. Para $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ con $k \leq n$ definimos el coeficiente binomial n en k como

   $$\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

   Para $n, k \in \mathbb{N}$, prueba por vía directa que

   $$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$$

   (b) Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Prueba por contrapositiva que si bc no es divisible entre a, entonces b y c no son divisibles entre a.

(c) Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Supón que existe $d \in \mathbb{Z}$ tal que a, b son divisibles entre d, pero c no es divisible entre d. Demuestra por contradicción que no existen $x, y \in \mathbb{Z}$ tales que

$$ax + by = c.$$

2. Sean $x, y \in \mathbb{R}$.

   (a) Demuestra que

   $$x^2 + y^2 - xy \geq 0 \text{ y } x^2 + y^2 + xy \geq 0.$$

   (b) Si x, y son ambos positivos, prueba que

   $$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2.$$

   (c) Prueba que

   $$\frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}} \geq 2.$$

3. (a) Sea $n \in \mathbb{Z}$ tal que n^2 es múltiplo de 3. Demuestra que n también es múltiplo de 3.

   (b) Demuestra que $\sqrt{3}$ no es racional.

4. Sean $a, b \in [0, 1]$ tales que $a < b$. Prueba que

   (a)

   $$0 \leq \frac{b - a}{1 - ab} \leq 1.$$

   (b)

   $$0 \leq \frac{a}{1 + b} + \frac{b}{1 + a} \leq 1.$$