UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO

DIVISIÓN DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
CAMPUS GUANAJUATO

Tarea 3 (Calculo Diferencia e Integral II)

Nombre: Ricardo León Martínez **Fecha:** 13/2/2026 **Calificación:** ____________

Ejercicio 1

(Teorema del valor medio generalizado para integrales) Sean f y g funciones integrables en un intervalo $[a, b]$. Prueba que si f es continua y g no cambia de signo, entonces existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b fg = f(c) \int_a^b g.$$

Sugerencia: Supón primero que $g \geq 0$ (el caso en que $g \leq 0$ se sigue facilmente del caso en que $g \geq 0$). Ten en cuenta que

$$m \leq f(x) \leq M,$$

donde

$$m = \text{mín}\{f(x) : x \in [a, b]\}$$

y

$$M = \text{máx}\{f(x) : x \in [a, b]\}.$$

En consecuencia, por el ejercicio 2 de la tarea 3,

$$m \int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq M \int_a^b g.$$

Si $\int_a^b g = 0$, entonces $\int_a^b fg = 0$ y el resultado es claro. Si $\int_a^b g \neq 0$, entonces

$$m \leq \frac{1}{\int_a^b g} \int_a^b fg \leq M.$$

Intenta aplicar el teorema del valor intermedio.

Ejercicio 2

(Integral de una función impar) Prueba que si f es una función impar e integrable en un intervalo $[-a, a]$, entonces

$$\int_{-a}^{a} f = 0.$$

Sugerencia 1: Sean $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ una partición del intervalo $[0, a]$ y $Q = \{-t_0, \ldots, -t_n\}$; así, Q es una partición del intervalo $[-a, 0]$. Prueba que

$$L(f, Q) = -U(f, P)$$

y

$$U(f, Q) = -L(f, P)$$

y usalo para probar lo afirmado. **Sugerencia 2:** Trata de usar el ejercicio 4 de la tarea 3.

Ejercicio 3

Calcula las integrales siguientes:

(a) $\displaystyle\int \sin(x)\cos(x)dx.$

(b) $\displaystyle\int \frac{\ln(x)}{x}dx.$

Ejercicio 4

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx.$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{9+x^2}}dx.$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-2}}dx.$

Ejercicio 4

Calcula la integral

$$\int \frac{x+11}{x^2-5x-14}dx.$$

Ejercicio 4

Prueba que las integrales impropias en los incisos (c),(d) y (e) de la definición 10 no dependen del punto p en cuestión.