UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO

DIVISIÓN DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
CAMPUS GUANAJUATO

Tarea 9 (Calculo Diferencial e Integral I)

Nombre: Ricardo León Martínez **Fecha:** 24/10/2025 **Calificación:** ______________

Profesor: Fernando Nuñez Medina

1. (Leyes de los radicales) Sean x y y números reales, y m y n números naturales tales que las expresiones algebraicas de los incisos siguientes están definidas. Prueba lo siguiente:

a) $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$.

b) $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$.

c) $\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$.

d) $\sqrt[p]{\sqrt[m]{x}} =^{n\cdot} \sqrt[m]{x}$.

Demostración. **a)** Sea $a = \sqrt[n]{x}$ y $b = \sqrt[n]{y}$. Por definicion de raiz n-esima se tiene $a^n = x$ y $b^n = y$. Entonces

$$(ab)^n = a^n b^b = xy.$$

La cantidad ab es, una raiz real de xy, se concluye que la raiz n-esima de xy concide con ab. Es decir

$$\sqrt[n]{xy} = ab = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}.$$

b) Sea $a = \sqrt[n]{x}$ y $b = \sqrt[n]{y}$. Entonces $a^n = x$ y $b^n = y$. Se verifica

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} = \frac{x}{y}.$$

Por tanto $\frac{a}{b}$ es una raiz real n-esima de x/y. Por lo que se obtiene

$$\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{a}{b} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$$

c) Sea $a = \sqrt[n]{x}$, de modo que $a^n = x$. Entonces

$$(a^m)^n = a^{mn} = (a^n)^m = x^m.$$

Asi a^m es una raiz real n-esima de x^m. De lo que se sigue que

$$\sqrt[n]{x^m} = a^m = (\sqrt[n]{x})^m.$$

d) Sea $b = \sqrt[m]{x}$, por lo que $b^m = x$. Sea Ademas $c = \sqrt[n]{b}$, entonces $c^n = b$. Combinando,

$$c^{mn} = (c^n)^m = b^m = x.$$

Es decir, c es una raiz real de x. Por la definicion de la raiz nm-esima se obtiene

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = c = \sqrt[nm]{x}.$$

$\blacksquare$

2. Sean A y B subconjuntos de números reales. Definimos

$$AB = \{ab : a \in A \text{ y } b \in B\}.$$

Prueba que si A y B son subconjuntos no vacíos y acotados superiormente de números reales positivos, entonces

$$\sup(AB) = \sup(A)\sup(B).$$

Sugerencia: Trata de imitar la prueba del ejercicio 3 de la tarea 8.

Demostración. Sea $\alpha = \sup(A)$ y $\beta = \sup(B)$. Puesto que A y B son reales positivos y son no vacios se tiene $\alpha > 0$ y $\beta > 0$. Para todo $a \in A$ y $b \in B$ se tiene $a \leq \alpha$ y $b \leq \beta$. Asi, $\alpha\beta$ es una cota superior de AB, de donde $\sup(AB) \leq \alpha\beta$. Ahora sea $\varepsilon > 0$. Debemos probar que existe $c \in AB$ tal que $c > \alpha\beta - \varepsilon$. Como $\alpha = \sup(A)$ y $\beta = \sup(B)$, existen $a \in A$ y $b \in B$ que por la proposicion 13 satisfacen

$$\alpha - \frac{\varepsilon}{2\beta} < a \leq \alpha, \qquad \beta - \frac{\varepsilon}{2\alpha} < b \leq \beta,$$

con $\alpha, \beta > 0$. Consideremos el producto $ab \in AB$. Entonces

$$\alpha\beta - ab = \alpha\beta - \alpha b + \alpha b - ab = \alpha(\beta - b) + b(\alpha - a).$$

Usando las desigualdades anteriores obtenemos

$$\alpha(\beta - b) < \alpha \cdot \frac{\varepsilon}{2\alpha} = \frac{\varepsilon}{2}, \qquad b(\alpha - a) < \beta \cdot \frac{\varepsilon}{2\beta} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

De esto se sigue que $\alpha\beta - ab < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$, es decir

$$ab > \alpha\beta - \varepsilon.$$

esto muestra que no existe cota superior menor que $\alpha\beta$. Asi, combinando las dos partes se concluye que $\sup(AB) = \alpha\beta = \sup(A)\sup(B)$. $\blacksquare$

3. Sea f una función definida en un intervalo I. Prueba lo siguiente:

a) Si f es creciente, entonces f es 1-1.

b) Si f es decreciente, entonces f es 1-1.

(b) Si f es 1-1, ¿será f creciente?, ¿será f decreciente? Argumenta tu respuesta.

Demostración. **a)** Supongamos que f es creciente y tomemos $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 \neq x_2$. Sin perdida de generalidad, supongamos $x_1 < x_2$. Por la hipotesis se tiene $f(x_1) < f(x_2)$. En particular $f(x_1) \neq f(x_2)$. Por tanto f es 1-1.
b) Analogo al inciso anterior. Si f es decreciente y $x_1 < x_2$ entonces $f(x_1) > f(x_2)$, por lo que nuevamente $f(x_1) \neq f(x_2)$. Asi f es 1-1. ■

4. Da un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sea discontinua en todo x. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Demostración. Sea $y \in \mathbb{R}$ cualquiera. Probaremos que f no es continua en y. Por definicion, f es continua en y si y solo si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tal que } |x - y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Sea $y \in \mathbb{Q}$. Entonces $f(y) = 1$. Sea $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Los irracionales son densos en $\mathbb{R}$, asi que en todo entorno de y existen puntos irracionales x con $|x - y| < \delta$. Para tales puntos, $f(x) = 0$. Entonces

$$|f(x) - f(y)| = |0 - 1| = 1 > \frac{1}{2}.$$

Por tanto, sin importar que $\delta > 0$ elijamos, el criterio de continuidad falla.
Ahora consideremos $y \notin \mathbb{Q}$. Entonces $f(y) = 0$. De nuevo, los racionales son densos en $\mathbb{R}$ por tanto, en cualquier entorno de y existen puntos racionales x con $|x - y| < \delta$. Para tales x, $f(x) = 1$. Asi

$$|f(x) - f(y)| = |1 - 0| = 1 > \frac{1}{2}.$$

Otra vez, el criterio de continuidad falla para todo $\delta > 0$. ■

5. Muestra que la ecuación $x^7 + 3x^5 - x - 2 = 0$ tiene una solución en el intervalo $[0, 1]$.

Demostración. Consideremos la funcion

$$f(x) = x^7 + 3x^5 - x - 2.$$

Evaluemos f en los extremos del intervalo

$$f(0) = -2 \text{ y } f(1) = 1.$$

Observemos que $f(0) = -2 < 0$ y $f(1) = 1 > 0$. Por el teorema del valor intermedio, dado que f es continua en $[0, 1]$, existe al menos un valor $c \in (0, 1)$ tal que

$$f(c) = 0.$$

Esto significa que la ecuacion $x^7 + 3x^5 - x - 2 = 0$ tiene una solucion en el intervalo $(0, 1)$. ■

6. Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \neq 2, \\ 5, & \text{si } x = 2. \end{cases}$$

a) Dibuja la gráfica de f.

b) Calcula, si existen, $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ y $\lim_{x\to 2^+} f(x)$.

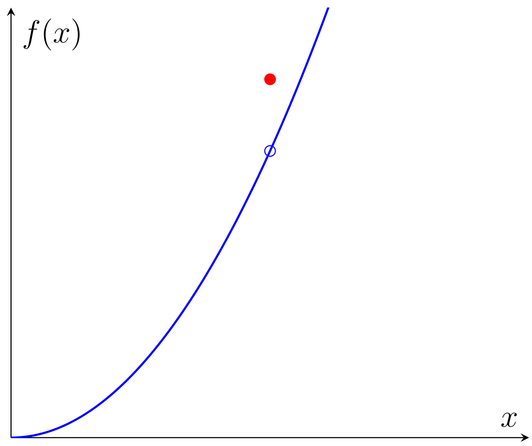
c) Determina si existe $\lim_{x\to 2} f(x)$ (argumenta tu respuesta). En caso afirmativo calcúlalo.

d) Determina si f es continua en 2. Argumenta tu respuesta.

e) Si f no es continua en 2, determina si la discontinuidad en 2 es esencial, de salto o removible.

f) Si f no es continua en 2, ¿puedes redefinir f en 2 para que lo sea? Argumenta tu respuesta.

Demostración. **a)**



b) Para todo $x \neq 2$ se tiene $f(x) = x^2$. Como x^2 es continua en todo R, los limites laterales de f al aproximarse a 2 coinciden con el valor de la funcion en ese punto

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 4, \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x) = 4.$$

Por tanto, ambos limites existen y son iguales a 4.
c) Dado que los limites laterales existen y son iguales, por el criterio de los limites laterales existen y es igual a 4

$$\lim_{x\to 2} f(x) = 4.$$

d) Por definicion, f es continua en $x = 2$ si y solo si $\lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$. hemos calculado que $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$ y $f(2) = 5$. Como $4 \neq 5$, se concluye que f no es continua en $x = 2$.
e) El limite $\lim_{x\to 2} f(x)$ existe pero es diferente de $f(2)$. Entonces, la discontinuidad es removible
f) Si definimos una nueva funcion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} x^2, x \neq 2, \\ 4, \quad x = 2. \end{cases}$$

entonces $\lim_{x\to 2} g(x) = 4 = g(2)$. Por tanto, g es continua en $x = 2$. ■

7. Prueba que la función $f(x) = x^2$ no es uniformemente continua.

Demostración. Supongamos, que f es uniformemente continua en $\mathbb{R}$. Entonces, por definicion, $\varepsilon = 1$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad |x - y| < \delta \Longrightarrow \left|x^2 - y^2\right| < 1.$$

Aplicando la propiedad arquimediana definimos

$$x := n, \qquad y := n + \frac{\delta}{2}.$$

Entonces $|x - y| = \frac{\delta}{2} < \delta$. Ahora calculamos la diferencia de cuadrados

$$\left|x^2 - y^2\right| = \left|n^2 - (n + \frac{\delta}{2})^2\right| = n\delta + \frac{\delta^2}{4}.$$

Dado que $n > \frac{1}{\delta}$ se tiene $n\delta > 1$, y por tanto

$$\left|x^2 - y^2\right| = n\delta + \frac{\delta^2}{4} > 1 + \frac{\delta^2}{4} > 1.$$

Por lo tanto la suposicion inicial es falsa. De donde se concluye que $f(x) = x^2$ no es uniformemente continua. ■

8. Sea f una función derivable en x. Prueba que

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

Demostración. Por definicion de derivada, sabemos que

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h},$$

si el limite existe. Sea $t = x + h$. Cuando $h \to 0$ y por tanto, $h = t - x \to 0$ cuando $t \to x$. Entonces,

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

Aplicando el ejercicio 10 de la tarea 7, que establece la equivalencia

$$\lim_{h \to 0} f(x + h) = L \text{ ssi } \lim_{t \to x} f(t) = L.$$

se deduce que ambos limites son iguales. Por tanto

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

Como el limite del lado izquierdo es precisamente $f'(x)$, se concluye que

$$f'(x) = \lim_{t \to x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x}.$$

■

9. Si $f(x) = (x-5)^3 + \sqrt{x-2}$, calcula $(f^{-1})'(3)$. Ten en cuenta que $f(6) = 3$.

Demostración. Dado $f(x) = (x-5)^3 + \sqrt{x-2}$ y $f(6) = 3$, tomamos $x = 3$. Entonces $f^{-1}(3) = 6$ y, por la derivada de la funcion inversa se tiene que,

$$f^{-1}(3) = \frac{1}{f'(f^{-1}(3))} = \frac{1}{f'(6)}.$$

Calculamos $f'(x)$ por algebra de derivadas, derivada de la funcion compuesta y por las derivadas comunes se sigue que:

$$f'(x) = 3(x-5)^2 + \frac{1}{2\sqrt{x-2}}.$$

Evaluando en $x = 6$ obtenemos

$$f'(6) = 3(6-5)^2 + \frac{1}{2\sqrt{6-2}} = \frac{13}{4}$$

Por tanto

$$f^{-1}(3) = \frac{1}{13/4} = \frac{4}{13}.$$

$\blacksquare$

10. Sea $f(x) = 5 - x^2$.

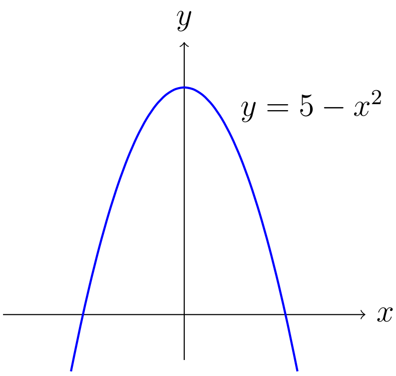
a) Dibuja la gráfica de f.

b) Encuentra la pendiente de la recta tangente T a la gráfica de f en el punto $(2, 1)$.

c) Encuentra la ecuación de T.

d) Dibuja la gráfica de T.

Solución. a)



b)

La pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en $x = 2$ está dada por la derivada $f'(2)$.

Calculamos primero $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(5 - x^2) = -2x.$$

Evaluamos en $x = 2$:

$$f'(2) = -2(2) = -4.$$

Por tanto, la pendiente de la recta tangente T en el punto $(2, 1)$ es

$$m = -4.$$

c)

La ecuación punto-pendiente de la recta tangente es

$$y - y_1 = m(x - x_1),$$

donde $(x_1, y_1) = (2, 1)$ y $m = -4$. Sustituyendo:

$$y - 1 = -4(x - 2).$$

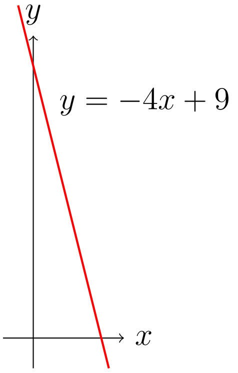
Despejando y:

$$y = -4x + 8 + 1 = -4x + 9.$$

Por tanto, la ecuación de la recta tangente es

$$y = -4x + 9.$$

d)



◀