

UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO
DIVISIÓN DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
CAMPUS GUANAJUATO

Tarea 4 (Álgebra Lineal I)

Nombre: Ricardo León Martínez

Fecha: 23/2/2026

Calificación: _____

Sea F el campo \mathbb{Q} , \mathbb{R} o \mathbb{C}

Ejercicio 1

Demuestra por inducción en el número de filas que el producto de matrices con coeficientes en un campo F es asociativo.

Ejercicio 2

Sean A, B matrices con coeficientes en un campo F , de tamaño 2×1 , 1×2 , respectivamente. Demuestra que AB no es invertible.

Ejercicio 3

Determina si la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

es invertible.

Proof. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

con $A \in M_{4 \times 4}(F)$. Al aplicar operaciones elementales por filas a A , se obtiene

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dado que si toda matriz es equivalente a la identidad entonces esta matriz es invertible, se sigue inmediatamente que A es invertible. ■

Ejercicio 4

Sea A una matriz cuadrada $n \times n$ con coeficientes en F . Demuestra que si A no es invertible, entonces el sistema lineal homogéneo, $AX = 0$ tiene una infinidad de soluciones.

Proof. Procederemos por contrapositiva. Si A no es invertible entonces su forma escalonada reducida no puede ser la identidad, se sigue que existe al menos una columna sin pivote, luego en el sistema asociado existe por lo menos una variable libre, por tanto el sistema tiene infinitas soluciones. ■

Ejercicio 5

Sea $A \in M_{n \times n}(F)$. Demuestra que si A tiene inversa derecho o inversa izquierda, entonces A es invertible.

Ejercicio 6

Sea A una matriz $n \times n$. Demuestra que si A es invertible y $AB = 0_{n \times n}$ para alguna matriz B de tamaño $n \times n$, entonces $B = 0_{n \times n}$.

Proof. Como A es invertible, existe $A^{-1} \in M_{n \times n}(F)$. Multiplicando la igualdad $AB = 0_{n \times n}$ por A^{-1} a la izquierda, se obtiene

$$A^{-1}AB = A^{-1}0_{n \times n}.$$

Por la asociatividad del producto de matrices,

$$(A^{-1}A)B = 0_{n \times n}.$$

Luego,

$$I_n B = 0_{n \times n},$$

y por definición de la matriz identidad,

$$B = 0_{n \times n}.$$

■

Ejercicio 7

Sean

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

matrices con coeficientes en \mathbb{R} . Encuentra las matrices reducidas por filas y escalonadas R_1 , R_2 equivalentes a A_1 y A_2 , respectivamente. Encuentra las matrices invertibles P_1 , P_2 tales que $R_1 = P_1 A_1$ y $R_2 = P_2 A_2$