Tarea 1: Cálculo Diferencial e Integral I

Ricardo León Martínez
Grupo A
23 de agosto de 2025

Problema 1

Expresa los conjuntos siguientes mediante alguna condición.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}, \quad \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$$

(a) $\{1, 3, 5, 7, \dots\}$.
Solución:

$$A = \{\, x \in \mathbb{N} \mid x = 2k - 1,\ k \in \mathbb{N} \,\}$$

(b) $\{2, 4, 6, 8, \dots\}$.
Solución:

$$B = \{\, x \in \mathbb{N} \mid x = 2k,\ k \in \mathbb{N} \,\}$$

(c) $\{9, 10, 11, 12, \dots\}$.
Solución:

$$C = \{\, x \in \mathbb{N} \mid x \geq 9 \,\}$$

(d) $\{7, 8, \dots, 93, 94\}$.
Solución:

$$D = \{\, x \in \mathbb{N} \mid 7 \leq x \leq 94 \,\}$$

(e) $\{1, 2, 4, 8, 16, \dots\}$.
Solución:

$$E = \{\, x \in \mathbb{N} \mid x = 2^n,\ n \in \mathbb{N}_0 \,\}$$

(f) $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$.
Solución:

$$F = \left\{ x \in \mathbb{Q} \,\middle|\, x = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

Problema 2

Sean $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$, $C = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $D = \{3, 4, 5\}$ y $E = \{a, e, i, o, u\}$ y $F = \{a, e, o\}$. Calcula lo siguiente:

(a) $A \cup B$, $B \cup C$ y $D \cup F$.
Solución:

$$A \cup B = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, \quad B \cup C = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, \quad D \cup F = \{3,4,5,a,e,o\}.$$

(b) $A \cap B$, $B \cap C$ y $D \cap F$.
Solución:

$$A \cap B = \{5,6,7,8,9\}, \qquad B \cap C = \varnothing, \qquad D \cap F = \varnothing.$$

(c) $B \cup C \cup D$ y $B \cap C \cap D$.
Solución:

$$B \cup C \cup D = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, \qquad B \cap C \cap D = \varnothing,$$

(d) $B \cup D \cup E$ y $B \cap D \cap E$.
Solución:

$$B \cup D \cup E = \{3,4,5,6,7,8,9,a,e,i,o,u\}, \qquad B \cap D \cap E = \varnothing,$$

(e) $A \setminus B$, $B \setminus A$, $B \setminus C$ y $A \setminus D$.
Solución:

$$\begin{aligned} A \setminus B &= \{0,1,2,3,4\}, \\ B \setminus A &= \{5,6,7,8,9\}, \\ B \setminus C &= \{5,6,7,8,9\}, \\ A \setminus D &= \{1,2,6,7,8,9\}. \end{aligned}$$

(f) $A \setminus E$, $E \setminus A$, $E \setminus F$ y $F \setminus E$.
Solución:

$$\begin{aligned} A \setminus E &= \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}, \\ E \setminus A &= \{a,e,i,o,u\}, \\ E \setminus F &= \{i,u\}, \\ F \setminus E &= \varnothing. \end{aligned}$$

Problema 3

Encuentra $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ y $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ si $A_n = \{1,2,\ldots,n\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Solución:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \mathbb{N}, \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{1\}$$

Problema 4

(El producto cruz de dos conjuntos no es conmutativo) Muestra un par de conjuntos A y B tales que $A \times B \neq B \times A$.
Solución:

$$A = \{1, 2\}, \quad B = \{a\}.$$

$$A \times B = \{(1, a), (2, a)\}, \qquad B \times A = \{(a, 1), (a, 2)\}.$$

$$A \times B \neq B \times A \quad (\text{pues } (1, a) \neq (a, 1)).$$

Problema 5

(Unicidad del conjunto vacío) Prueba que el conjunto vacío es el único conjunto sin elementos.

Demostración. Demostración de que el conjunto vacío es único: Supongamos que A es un conjunto sin elementos. Queremos probar que $A = \emptyset$.

1. **Demostrar que $A \subseteq \emptyset$:**
   Para que $A \subseteq \emptyset$, todo elemento de A debe estar en $\emptyset$. Como A no tiene elementos, la afirmación "si $X \in A$, entonces $X \in \emptyset$" es cierta. Por lo tanto, $A \subseteq \emptyset$.

2. **Demostrar que $\emptyset \subseteq A$:**
   La contención $\emptyset \subseteq A$ siempre es cierta para cualquier conjunto A, pues no existe ningún X tal que $X \in \emptyset$ y $X \notin A$.

Como $A \subseteq \emptyset$ y $\emptyset \subseteq A$, concluimos que $A = \emptyset$. Esto prueba que el conjunto vacío es único. □

Problema 6

Prueba el inciso (b) de la proposición 2.

Demostración. demostramos $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$:

1. **$\subseteq$:**
   Sea $x \in A \cup (B \cup C)$. Entonces $x \in A$ o $x \in B \cup C$.
   - Si $x \in A$, entonces $x \in A \cup B$, luego $x \in (A \cup B) \cup C$.
   - Si $x \in B \cup C$, entonces $x \in B$ o $x \in C$.
   En ambos casos, $x \in (A \cup B) \cup C$.

2. **$\supseteq$:**
   Sea $x \in (A \cup B) \cup C$. Entonces $x \in A \cup B$ o $x \in C$.
   - Si $x \in A \cup B$, entonces $x \in A$ o $x \in B$.
   Si $x \in A$, entonces $x \in A \cup (B \cup C)$.
   Si $x \in B$, entonces $x \in B \cup C$, luego $x \in A \cup (B \cup C)$.
   - Si $x \in C$, entonces $x \in B \cup C$, luego $x \in A \cup (B \cup C)$.

Por tanto, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$. $\square$

Problema 7

Prueba el inciso (a) la proposición 3.

1. $A \cup \emptyset = A$

Demostración. Para demostrar que dos conjuntos son iguales, debemos mostrar que son subconjuntos mutuos.
- $A \cup \emptyset \subseteq A$: Si $x \in A \cup \emptyset$, entonces $x \in A$ o $x \in \emptyset$. Pero $x \in \emptyset$ es falso, por lo tanto $x \in A$.
- $A \subseteq A \cup \emptyset$: Si $x \in A$, entonces $x \in A \cup \emptyset$.
Por lo tanto, $A \cup \emptyset = A$. $\square$ $\square$

2. $A \cap \emptyset = \emptyset$

Demostración. - Si $x \in A \cap \emptyset$, entonces $x \in A$ y $x \in \emptyset$. Pero $x \in \emptyset$ es falso, por lo tanto no existe ningún elemento en $A \cap \emptyset$.
- $\emptyset \subseteq A \cap \emptyset$ (el conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto).
Por lo tanto, $A \cap \emptyset = \emptyset$. $\square$ $\square$

3. $A \setminus \emptyset = A$

Demostración. - $A \setminus \emptyset \subseteq A$: Si $x \in A \setminus \emptyset$, entonces $x \in A$ y $x \notin \emptyset$, por lo tanto $x \in A$.
- $A \subseteq A \setminus \emptyset$: Si $x \in A$, entonces $x \in A$ y $x \notin \emptyset$, por lo tanto $x \in A \setminus \emptyset$.
Por lo tanto, $A \setminus \emptyset = A$. $\square$ $\square$

4. $\emptyset \setminus A = \emptyset$

Demostración. - Si $x \in \emptyset \setminus A$, entonces $x \in \emptyset$ y $x \notin A$. Pero $x \in \emptyset$ es falso, por lo tanto no existe ningún elemento en $\emptyset \setminus A$.
- $\emptyset \subseteq \emptyset \setminus A$ (el conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto).
Por lo tanto, $\emptyset \setminus A = \emptyset$. $\square$ $\square$