E_1	E_2	E_3	E_4	Calif.

Matemáticas Elementales

Agosto - Diciembre de 2025

Tarea 6

Resuelve los siguientes ejercicios según el reglamento del curso y **entrega esta página** con los nombres de los integrantes de equipo colocados en lugar de estas líneas de instrucciones. Todas las demostraciones deben redactarse justificando formalmente todos los pasos necesarios.

Antes de iniciar cada demostración, deberás indicar claramente cuáles son las hipótesis de cada ejercicio y qué es lo que debes demostrar en cada ejercicio.

La tarea debe resolverse con la teoría vista en el curso o con resultados a lo más de los cursos de preparatoria. Está prohibido utilizar resultados de otros cursos de este mismo semestre y/o trucos de alguna olimpiada relacionada con computación y/o matemáticas.

En cada ejercicio, cada inciso distinto debe ser resuelto y redactado por un miembro distinto del equipo.

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = (x-1)^2$. Realiza lo siguiente:

   (a) Halla el rango de f.

   (b) Halla la imagen directa bajo f de
   $$A = [0, \infty), B = \mathbb{N}, C = \mathbb{Z}, D = [-1, 1].$$

   (c) Halla la imagen inversa bajo f de
   $$A = [0, \infty), B = \mathbb{N}, C = \mathbb{Z}, D = [-1, 1].$$

   (d) Determina si f es inyectiva y/o suprayectiva.

2. Sean $f : A \to B$ y $g : B \to C$ funciones biyectivas.

   (a) Demuestra que $g \circ f$ es biyectiva.

(b) Demuestra que para todo $G \subseteq C$, se cumple

$$(g \circ f)^{-1}(G) = (f^{-1} \circ g^{-1})(G).$$

3. Sean $f : A \to B$ y $A' \subset A$, $B' \subset B$.

   (a) Demuestra que si f es inyectiva, entonces

   $$f^{-1}(f(A')) = A'.$$

   (b) Demuestra que si f es suprayectiva, entonces

   $$f(f^{-1}(B')) = B'.$$

   (c) Demuestra que, en general,

   $$A' \subseteq f^{-1}(f(A')), f(f^{-1}(B')) \subseteq B'.$$

4.

   (a) Sea A un conjunto no vacío. Demuestra por definición que

   $$\{\{x\} : x \in A\},$$

   es una partición de A.

   (b) Sea $f : \mathbb{R} \to (0, 1)$ dada por $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$. Demuestra que f es una biyección.

   (c) Considera la colección de subconjuntos de $\mathbb{R}$ dada por

   $$\{[-n, n], n \in \mathbb{N}\}.$$

   Determina formalmente si esta colección es una partición de $\mathbb{R}$.

   (d) Para cada $x \in \mathbb{R}$ definamos

   $$E_x := \{y \in \mathbb{R} : x - y \in \mathbb{Q}\}.$$

   Determina formalmente si $\{E_x : x \in \mathbb{R}\}$ es una partición de $\mathbb{R}$. **Nota**: Si para x, y distintos se cumple que $E_x = E_y$, solo se considera una vez al conjunto dado. Es decir, se debe entender que la colección $\{E_x : x \in \mathbb{R}\}$ consta de todos los conjuntos E_x distintos.