| $E_1$ | $E_2$ | $E_3$ | $E_4$ | Calif. |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

# Matemáticas Elementales

Agosto - Diciembre de 2025
Tarea 8

Resuelve los siguientes ejercicios según el reglamento del curso y **entrega esta página** con los nombres de los integrantes de equipo colocados en lugar de estas líneas de instrucciones. Todas las demostraciones deben redactarse justificando formalmente todos los pasos necesarios.

La tarea debe resolverse **con la teoría vista en el curso o con resultados a lo más de los cursos de preparatoria**. Está prohibido utilizar resultados de otros cursos de este mismo semestre o de semestres posteriores. Tampoco está permitido utilizar trucos de alguna olimpiada relacionada con computación y/o matemáticas.

Cada inciso distinto debe ser resuelto por un alumno distinto y, en cada caso, deberá colocarse el nombre de la persona que redactó el inciso.

1. Realiza lo siguiente:

   (a) Sea $A$ un conjunto no vacío arbitrario y sea

   $$R = \{(a, a) : a \in A\}.$$

   Demuestra que $R$ es una relación de equivalencia sobre $A$ y que si $S$ es cualquier otra relación de equivalencia sobre $A$, entonces $R \subseteq S$. Además, halla la partición inducida por $R$.

   (b) Considera en $\mathbb{R}$ la relación $R = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : a^2 - b^2 = a - b\}$. Demuestra que $R$ es una relación de equivalencia y halla la partición inducida por $R$.

   (c) Determina si la siguiente "demostración" es correcta o no. En caso de que no sea correcta, halla el error.

   **Proposición**. Sea $A$ un conjunto arbitrario no vacío y sea $\sim$ una relación binaria sobre $A$ que es simétrica y transitiva, se cumple que $\sim$ es reflexiva.

   **Prueba**: *Sean $x, y \in A$ tales que $x \sim y$. Por simetría tenemos que $y \sim x$ y por transitividad obtenemos también que $x \sim x$.* ■

2. Sea $A = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$. Considera la relación en $A$ dada por

$$R = \left\{ \Big((a,b),(c,d)\Big) \in A \times A : ad = bc \right\}.$$

   (a) Demuestra que $R$ es una relación de equivalencia y halla la partición inducida por ella.

   (b) Denotemos por $\sim$ a la relación de equivalencia $R$ y sea

$$\begin{aligned} f : (A/\sim) \times (A/\sim) &\longrightarrow A/\sim \\ \big([(a,b)],[(c,d)]\big) &\mapsto [(ad+bc, bd)]. \end{aligned}$$

   Demuestra que $f$ es una función bien definida.

   (c) ¿Se cumple que $Rango(f) = A/\sim$ para $f$ como en el inciso anterior? Justifica formalmente tu respuesta.

3. Sean $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ y

$$R = \{((a,b),(c,d)) \in A \times A : a + d = b + c\}.$$

   En todo el ejercicio se considerará la relación $R$.

   (a) Demuestra que $R$ es una relación de equivalencia.

   (b) Denotemos por $\sim$ a la relación $R$ y sea

$$\begin{aligned} g : (A/\sim) \times (A/\sim) &\to (A/\sim) \\ \Big([(a,b)],[(c,d)]\Big) &\mapsto [(a\cdot c + b\cdot d, a\cdot d + b\cdot c)]. \end{aligned}$$

   Determina si $g$ es una función bien definida y si lo es, halla su rango.

4. Demuestra que los siguientes conjuntos son numerables:

   (a) $\mathbb{Q}^n$.

   (b) $\mathbb{Z}^n$.

   (c) $\{(a,b) \subseteq \mathbb{R} : a < b, a, b \in \mathbb{Q}\}$.

   (d) $\{q \in \mathbb{Q} : q \in [0,1]\}$.