UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO

DIVISIÓN DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
CAMPUS GUANAJUATO

Tarea 5 (Calculo Diferencial e Integral I)

Ricardo León Martínez 19/09/2025 **Calificación:** ____________

1. **(Leyes de los signos para la división)** Pruebe que si x y y son numeros reales, con $y \neq 0$, entonces

   a) $\frac{+x}{+y} = +\frac{x}{y}$.
   b) $\frac{-x}{+y} = -\frac{x}{y}$.
   c) $\frac{+x}{-y} = -\frac{x}{y}$.
   d) $\frac{-x}{-y} = +\frac{x}{y}$.

Demostracion:
inciso (a).
El inciso a) es claro, pues $+x = x$, $+y = y$ y $+(x/y) = x/y$.

inciso (b).
Notemos que, por definición,

$$\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1} \qquad (b \neq 0).$$

Entonces

$$\frac{-x}{y} = (-x) \cdot y^{-1}.$$

Escribimos $-x$ como $(-1) \cdot x$. Así,

$$(-x) \cdot y^{-1} = ((-1) \cdot x) \cdot y^{-1}.$$

Por asociatividad de la multiplicación,

$$((-1) \cdot x) \cdot y^{-1} = (-1) \cdot (x \cdot y^{-1}).$$

Por unicidad del inverso aditivo, tenemos que

$$(-1) \cdot (x \cdot y^{-1}) = -(x \cdot y^{-1}) = -\frac{x}{y}.$$

Por lo tanto

$$\frac{-x}{+y} = -\frac{x}{y}.$$

Inciso (c).
Usando la definición de división,

$$\frac{x}{-y} = x \cdot (-y)^{-1}$$

por la unicidad del inverso multiplicativos sabemos que $(-y)^{-1} = -y^{-1}$.
De esto se sigue

$$\frac{x}{-y} = x \cdot (-y)^{-1} = x \cdot (-y^{-1}) = -(x \cdot y^{-1}) = -\frac{x}{y},$$

Por lo tanto

$$\frac{x}{-y} = -\frac{x}{y}.$$

Inciso (d).
sabemos que $(-1) \cdot x = -x$ y aplicando la definición de división tenemos que,

$$\frac{-x}{-y} = (-x) \cdot (-y^{-1}) = ((-1) \cdot x) \cdot ((-1) \cdot y^{-1}).$$

Por asociatividad

$$((-1) \cdot x) \cdot ((-1) \cdot y^{-1}) = ((-1) \cdot (-1)) \cdot (x \cdot y^{-1}).$$

Ya sabemos que $(-1) \cdot (-1) = 1$, por lo que

$$((-1) \cdot (-1)) \cdot (x \cdot y^{-1}) = 1 \cdot (x \cdot y^{-1}) = x \cdot y^{-1} = \frac{x}{y}.$$

Por tanto

$$\frac{-x}{-y} = \frac{x}{y}.$$

■

2. Prueba que si $x < y + \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, entonces $x \leq y$.
Demostración:
Supongamos, por contradicción, que $x > y$. Entonces $x - y > 0$. Tomemos $\varepsilon_0 := x - y$.
Por lo que tenemos

$$x < y + \varepsilon_0 = y + (x - y) = x,$$

lo cual es imposible ya que $x < x$ lo cual no puede suceder

■

3. Sean A y B subconjuntos no vacíos y acotados de números reales tales que $A \subset B$.
Prueba que

$$\inf(B) \leq \inf(A) \leq \sup(A) \leq \sup(B).$$

Demostración:
como A y B son no vacios y acotados, existen $\inf(B), \inf(A), \sup(A), \sup(B)$ en $\mathbb{R}$.

a) $\text{ínf}(B) \leq \text{ínf}(A)$.
Sea $a \in A$. Dado que $A \subset B$, se tiene $a \in B$. Por definición de ínfimo de B, $\text{ínf}(B)$ es una cota inferior de B; en particular $\text{ínf}(B) \leq a$. Como esto vale para todo $a \in A$, $\text{ínf}(B)$ es una cota inferior de A. Por definición del ínfimo como la mayor de las cotas inferiores, se sigue $\text{ínf}(B) \leq \text{ínf}(A)$.

b) $\text{ínf}(A) \leq \sup(A)$.
Sea $a \in A$. Por definicion de infimo y supremo, $\text{ínf}(A) \leq a \leq \sup(A)$. Tomando, por ejemplo, cualquier $a \in A$ obtenemos de manera inmediata que $\text{ínf}(A) \leq \sup(A)$.

c) $\sup(A) \leq \sup(B)$. Sea $a \in A$. Nuevamente, $a \in B$ porque $A \subset B$. Por definicion de supremo de B, $\sup(B)$ es una cora superior de B, luego $a \leq \sup(B)$ para todo $a \in A$. De ello se deduce que $\sup(B)$ es una cota superior de A; por lo tanto $\sup(A) \leq \sup(B)$.

Combinando (a),(b) y (c) se obtiene que:

$$\text{ínf}(B) \leq \text{ínf}(A) \leq \sup(A) \leq \sup(B).$$

$\blacksquare$

4. (Coeficientes binomiales) Dados n y k números enteros con $0 \leq k \leq n$ definimos el coeficiente binomial

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

a) Sea n un numero natural. Prueba que

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

b) Sean n y k números naturales con $n \leq n$. Prueba que

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

Demostración:
(a)
Por definición,

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!n!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = 1,$$

y

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!0!} = \frac{n!}{n! \cdot 1} = 1.$$

(b)
Ponemos ambos sumandos con un mismo denominador:

$$\binom{n}{k-1} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \frac{n!k}{k!(n-k)!} = \frac{n!(n-k+1)}{k!(n-k+1)!}.$$

Sumando,

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k+1)!}(k + (n-k+1)) = \frac{n!}{k!(n-k+1)!}(n+1).$$

Como $(n+1)n! = (n+1)!$, tenemos

$$\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = \binom{n+1}{k}.$$

■

5. Prueba que la suma, resta, producto y cociente de números racionales es un umero racional.
Demostración:
Recordemos que

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}.$$

Sean $\frac{p}{q}, \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ con p, q, r y $s \in \mathbb{Z}$ y $q \neq 0,\ s \neq 0$

a) **Suma.**

$$\frac{p}{q} = \frac{r}{s} = \frac{ps+qr}{qs}.$$

Como $ps + qr \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, la razon $\frac{ps+qr}{qs}$ es un numero racional. Luego $\frac{p}{q} + \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$.

b) **Resta.**
Teniendo en cuenta que $-\frac{r}{s} = \frac{-r}{s}$ con $-r \in \mathbb{Z}$, se reduce al caso de la suma:

$$\frac{p}{q} - \frac{r}{s} = \frac{p}{q} + \left(-\frac{r}{s}\right) = \frac{ps-qr}{qs} \in \mathbb{Q}.$$

c) **Producto.**

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s} = \frac{pr}{qs}.$$

Aquí $pr \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, por tanto $\frac{pr}{qs} \in \mathbb{Q}$.

d) **Cociente.**
si ademas $\frac{r}{s} \neq 0$, entonces

$$\frac{\frac{p}{q}}{\frac{r}{s}} = \frac{p}{q} \cdot \frac{s}{r} = \frac{ps}{qr}.$$

ya que $ps \in \mathbb{Z}$ y $qr \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Por lo tanto el cociente esta en $\mathbb{Q}$ siempre que el divisor sea distinto de cero.

■

6. Sea $f : A \to B$ y $C \subset B$. Definamos la imagen inversa del conjunto C bajo la funcion f como el conjunto

$$f^{-1}(C) = \{x \in A : f(x) \in C\}.$$

Dados $C, D \subset B$, prueba lo siguiente:

a) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

b) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

c) $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$.

Demostración:
Sea $f : A \to B$ y sean $C, D \subset B$. Recordemos que

$$f^{-1}(E) = \{x \in A : f(x) \in E\}.$$

(a) Demostremos que $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

($\subseteq$) Sea $x \in f^{-1}(C \cup D)$. Entonces $f(x) \in C \cup D$, es decir, $f(x) \in C$ o $f(x) \in D$. En el primer caso $x \in f^{-1}(C)$, en el segundo $x \in f^{-1}(D)$. Por tanto $x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

($\supseteq$) Sea $x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$. Entonces $x \in f^{-1}(C)$ o $x \in f^{-1}(D)$. Si $x \in f^{-1}(C)$, entonces $f(x) \in C \subseteq C \cup D$. Si $x \in f^{-1}(D)$, entonces $f(x) \in D \subseteq C \cup D$. En cualquier caso $f(x) \in C \cup D$, es decir, $x \in f^{-1}(C \cup D)$.

Concluimos que $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.

(b) Demostremos que $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

($\subseteq$) Sea $x \in f^{-1}(C \cap D)$. Entonces $f(x) \in C \cap D$, es decir, $f(x) \in C$ y $f(x) \in D$. Por lo tanto $x \in f^{-1}(C)$ y $x \in f^{-1}(D)$, luego $x \in f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

($\supseteq$) Sea $x \in f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$. Entonces $x \in f^{-1}(C)$ y $x \in f^{-1}(D)$, lo que equivale a $f(x) \in C$ y $f(x) \in D$. Por tanto $f(x) \in C \cap D$, es decir, $x \in f^{-1}(C \cap D)$.

Concluimos que $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.

(c) Demostremos que $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$.

($\subseteq$) Sea $x \in f^{-1}(C \setminus D)$. Entonces $f(x) \in C \setminus D$, es decir, $f(x) \in C$ y $f(x) \notin D$. Por tanto $x \in f^{-1}(C)$ y $x \notin f^{-1}(D)$, luego $x \in f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$.

($\supseteq$) Sea $x \in f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$. Entonces $x \in f^{-1}(C)$ y $x \notin f^{-1}(D)$, es decir, $f(x) \in C$ y $f(x) \notin D$. Por definición $f(x) \in C \setminus D$, de modo que $x \in f^{-1}(C \setminus D)$.

Concluimos que $f^{-1}(C \setminus D) = f^{-1}(C) \setminus f^{-1}(D)$.

$\blacksquare$

7. A partir de la definición del valor absoluto de un numero, prueba la proposición 31.
Demostración:
Por definición, para todo $t \in \mathbb{R}$ se cumple

$$-|t| \leq t \leq |t|.$$

Aplicamos esta propiedad a x y a y:

$$-|x| \leq x \leq |x|, \qquad -|y| \leq y \leq |y|.$$

Sumando miembro a miembro las desigualdades obtenemos

$$-(|x| + |y|) \ \leq \ x + y \ \leq \ |x| + |y|.$$

Por definición de valor absoluto, la condición anterior equivale a

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

■

8. Prueba, usando la definición de limite, que $\lim_{x\to 1} x + 2 = 3$.
Demostración:
Queremos probar que $\lim\limits_{x\to 1}(x + 2) = 3$ según la definición ε-δ.

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Tomemos

$$\delta := \varepsilon.$$

Entonces, si x satisface $0 < |x - 1| < \delta$, se tiene

$$\Big|(x + 2) - 3\Big| = |x - 1|.$$

Por la elección de δ llegamos a

$$|x - 1| < \delta = \varepsilon,$$

de donde $\Big|(x + 2) - 3\Big| < \varepsilon$. Así, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x - 1| < \delta$ implica $\Big|(x + 2) - 3\Big| < \varepsilon$. Por la definición de límite concluimos que

$$\lim_{x\to 1}(x + 2) = 3.$$

■

9. Prueba, usando la negación de la definición de limite, que es falso que $\lim_{x\to 1} x+2 = 5$.
Demostración:
Según la negación de la definición, basta encontrar $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $\delta > 0$, exista x con $0 < |x - 1| < \delta$ y $|(x + 2) - 5| \geq \varepsilon$.

Tomemos $\varepsilon := 1$. Sea $\delta > 0$ arbitrario y tomemos

$$x := 1 + \frac{\delta}{2}.$$

Entonces $0 < |x - 1| = \frac{\delta}{2} < \delta$. Ahora,

$$|(x + 2) - 5| = |x - 3| = \left|\frac{\delta}{2} - 2\right|.$$

Como $\frac{\delta}{2}$ es un número real no negativo, se cumple $\left|\frac{\delta}{2} - 2\right| \geq 1$. Por tanto, $|(x+2)-5| \geq 1 = \varepsilon$. En consecuencia, es falso que

$$\lim_{x\to 1}(x + 2) = 5.$$

■

10. Prueba que $\lim_{x\to p} f(x) = L$ ssi $\lim_{x\to p} f(x) - L = 0$.
Demostración:
Supongamos que $\lim_{x\to p} f(x) = L$.Por definición de límite, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Pero $|f(x) - L| = |[f(x) - L] - 0|$, por lo que:

$$0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |[f(x) - L] - 0| < \varepsilon$$

Esto significa precisamente que:

$$\lim_{x\to p}[f(x) - L] = 0$$

Supongamos ahora que $\lim_{x\to p}[f(x) - L] = 0$. Queremos probar que $\lim_{x\to p} f(x) = L$. Por definición de límite, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |[f(x) - L] - 0| < \varepsilon$$

Simplificando:

$$0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Esto significa precisamente que:

$$\lim_{x\to p} f(x) = L$$

■