UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO

DIVISIÓN DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS

CAMPUS GUANAJUATO

Tarea 7 (Cálculo Diferencial e Integral I)

Nombre:		
Grupo:	**Fecha:**	**Calificación:**
Profesor: Fernando Núñez Medina.		

Instrucciones: Escribe limpia y ordenadamente el procedimiento (si lo hay) de cada ejercicio y no escribas las respuestas en la hoja de la tarea.

1. (**Leyes de los exponentes**) Sean x y y números reales, y m y n números naturales tales que las expresiones algebraicas de los incisos siguientes están definidas. Prueba lo siguiente
   (a) $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$.
   (b) $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$.
   (c) $x^n \cdot y^n = (xy)^n$.
   (d) $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$.
   (e) $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$.
   Sugerencia: Los incisos (a), (c) y (e) son claros. Para probar los incisos (b) y (d), recuerda como se definió la división y ten presente el ejercicio 1 de la tarea 6.
2. Prueba que $1 > 0$. **Sugerencia:** Considera la proposición 11.
3. Prueba lo siguiente:
   (a) Si $x > 0$, entonces $x^{-1} > 0$.
   (b) Si $x < 0$, entonces $x^{-1} < 0$.
   Sugerencia: Procede por contradicción.
4. Sea A un subconjunto no vacío de números reales.
   (a) Prueba que si A es acotado inferiormente, entonces

$$\sup(-A) = -\inf(A).$$

(b) Prueba que si A es acotado superiormente, entonces

$$\inf(-A) = -\sup(A).$$

5. Sea $n \in \mathbb{N}$. Prueba lo siguiente:
   (a) Si $x < y \leq 0$ y n es par, entonces $y^n < x^n$.
   (b) Si $0 \leq x < y$ y n es par, entonces $x^n < y^n$.
   (c) Si $x < y$ y n es impar, entonces $x^n < y^n$.

   Sugerencia: Prueba primero que el inciso (b) se cumple en realidad para todo número natural n (usa el principio de inducción matemática) y trata de usar este resultado para probar los incisos (a) y (c).
6. Prueba que si r es un número racional y p es un número irracional, entonces $r+p$ y $r-p$ son números irracionales. Si, además, $r \neq 0$, entonces rp y r/p también son números irracionales.
7. Sean f una función. Prueba que f es una función 1-1 ssi $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ para todo $A, B \subset \operatorname{dom}(f)$.
8. Prueba que para todo par de números x y y se cumple lo siguiente:

   (a) $|x - y| \leq |x| + |y|$.
   (b) $|x| - |y| \leq |x - y|$.
   (c) $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

   Sugerencia: Trata de usar la desigualdad del triángulo.
9. Calcula los límites siguientes:
   (a) $\lim_{x\to 8}(x+2)\sqrt[3]{x}$.
   (b) $\lim_{x\to -1} \frac{x^2+4x+3}{x+1}$.
   (c) $\lim_{x\to -5} \ln(x+6)$.
   (d) $\lim_{x\to 1^+} 2x^3 - x + 5$.
   (e) $\lim_{x\to -\infty} e^x \arctan(x)$.
   (f) $\lim_{x\to \infty} \frac{5x^4-4x^2}{3x^4+2x}$.
   (g) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \sin(x) + \cos(x) + \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.
   (h) $\lim_{x\to \infty} 3x^3 - 2x^2 + x - 4$.
10. Prueba que $\lim_{x\to p} f(x) = L$ ssi $\lim_{h\to 0} f(p+h) = L$.