Tarea 6, Matemáticas elementales
Ejercicio 1 inciso a), Ejericio 3 inciso a), Ejercicio 4, inciso a)

Said Huizar Dorantes. LIC. EN MATEMÁTICAS
Axel Magaña Falcón. LIC. EN COMPUTACIÓN MATEMÁTICA
Egny Alejandrina Madrid. LIC. EN MATEMÁTICAS
Ricardo León Martínez. LIC. EN MATEMÁTICAS

28 de octubre de 2025

Ejercicio 1 Inciso a)
Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = (x-1)^2$. Halla el rango de f.
Solución. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x-1)^2$. Para determinar su rango, buscamos todos los valores reales y que puede tomar la función. Dado que el cuadrado de cualquier número real es siempre no negativo, se tiene $(x-1)^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, de modo que $f(x) \geq 0$ en todo punto de su dominio. Por lo tanto, todos los valores de f pertenecen al conjunto $[0, \infty)$.
Para comprobar que cada número real no negativo se alcanza efectivamente, consideremos un $y \geq 0$ arbitrario y resolvamos la ecuación

$$y = (x-1)^2.$$

Al extraer raíz cuadrada en ambos lados se obtiene $x - 1 = \pm\sqrt{y}$, y por tanto $x = 1 \pm \sqrt{y}$, que son números reales para todo $y \geq 0$. Esto muestra que, para cualquier $y \geq 0$, existe al menos un $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$.
En consecuencia, el conjunto de valores posibles de f es

$$R_f = [0, \infty),$$

por lo que el rango de la función está dado por $[0, \infty)$. ◀

Ejercicio 3 Inciso a)
Sean $f : A \to B$ y $A' \subset A$, $B' \subset B$. Demuestra que si f es inyectiva, entonces

$$f^{-1}(f(A')) = A'.$$

Demostración. Veamos primero que $A' \subset f^{-1}(f(A'))$. Sea $a \in A'$. Entonces $f(a) \in f(A')$ por definicion de imagen directa. Por definicion de imagen inversa, $a \in f^{-1}(f(A'))$ puesto que $f(a) \in f(A')$. Como a fue arbitrario, se tiene $A' \subset f^{-1}(f(A'))$.
Ahora veamos que $f^{-1}(f(A')) \subset A'$. Sea $x \in f^{-1}(f(A'))$. Entonces $f(x) \in f(A')$. Por definicion de $f(A')$ existe $a' \in A'$ tal que $f(x) = f(a')$. Como f es inyectiva, de $f(x) = f(a')$ se deduce $x = a'$. Por tanto $x \in A'$. Como x fue arbitrario, resulta $f^{-1}(f(A')) \subset A'$. Por doble contencion se obtiene

$$f^{-1}(f(A')) = A'.$$

■

Ejercicio 4 Inciso a)
Sea A un conjunto no vacio. Demuestra por definicion que

$$\{\{x\} : x \in A\},$$

es una particion de A.

Demostración. Sea $\Omega = A$ un conjunto no vacío y consideremos la clase $\mathcal{F} = \{A_x : x \in A\}$, donde para cada $x \in A$ se define $A_x = \{x\}$. Nótese primero que, por construcción, cada conjunto A_x es no vacío, pues contiene al elemento x. Si tomamos dos índices distintos $x, y \in A$ con $x \neq y$, entonces $A_x \cap A_y = \{x\} \cap \{y\} = \varnothing$, de modo que los conjuntos de la clase son disjuntos dos a dos. Por otra parte, dado que para todo $a \in A$ se cumple $a \in \{a\} = A_a$, se tiene que

$$\bigcup_{x \in A} A_x = A = \Omega.$$

En consecuencia, la clase $\mathcal{F} = \{A_x : x \in A\}$ constituye una partición de Ω.

■