UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO

DIVISIÓN DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
CAMPUS GUANAJUATO

Tarea 10 (Calculo Diferencia e Integral I)

Nombre: Ricardo León Martínez **Fecha:** 31/10/2025 **Calificación:** ____________

1. **(Potencias racionales)** Prueba que el inciso (c) del ejercicio 1 de la tarea 9 tambien se cumple si m es un numero entero, es decir, prueba que si x es un numero real, m es un numero entero y n es un numero natural tales que $(x^m)^{1/n}$ y $(x^{1/n})^m$ estan definidos, entonces

$$(x^m)^{\frac{1}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^m.$$

Demostración. Sean $x \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que las expresiones $(x^m)^{1/n}$ y $(x^{1/n})^m$ estén definidas.

Caso 1: $m \geq 0$.

En este caso, m es un número natural o cero.

Por definición de potencia entera positiva, tenemos

$$x^m = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{m \text{ veces}}.$$

Luego, aplicando la potencia racional $1/n$, se obtiene:

$$(x^m)^{1/n} = \sqrt[n]{x^m}.$$

Por otra parte,

$$x^{1/n} = \sqrt[n]{x} \implies (x^{1/n})^m = (\sqrt[n]{x})^m = \underbrace{\sqrt[n]{x} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{x}}_{m \text{ veces}} = \sqrt[n]{x^m}.$$

Por lo tanto,

$$(x^m)^{1/n} = (x^{1/n})^m \quad \text{para todo } m \geq 0.$$

Caso 2: $m < 0$.

Sea $m = -k$ con $k \in \mathbb{N}$. Entonces:

$$(x^m)^{1/n} = (x^{-k})^{1/n} = \left(\frac{1}{x^k}\right)^{1/n} = \frac{1}{(x^k)^{1/n}}.$$

Por otra parte,

$$(x^{1/n})^m = (x^{1/n})^{-k} = \frac{1}{(x^{1/n})^k}.$$

Pero, del caso anterior (válido para $k > 0$):

$$(x^{1/n})^k = (x^k)^{1/n}.$$

Por sustitución:

$$(x^{1/n})^{-k} = \frac{1}{(x^k)^{1/n}}.$$

Por tanto,

$$(x^m)^{1/n} = (x^{1/n})^m.$$

Esto es que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que ambas expresiones estén definidas, se cumple

$$(x^m)^{1/n} = (x^{1/n})^m.$$

■

2. Sea $f : I \to J$ una funcion sobre, donde I y J son intervalos. Prueba lo siguiente:

(a) Si f es creciente, entonces f es invertible y f^{-1} es creciente.

(b) Si f es decreciente, entonces f es invertible y f^{-1} es decreciente.

Demostración. Sea $f : I \to J$ con I, J intervalos y $J = f(I)$ el *rango* de f.

(a) f creciente entonces f es invertible y f^{-1} es creciente.

Inyectividad. Supongamos $x_1, x_2 \in I$ y $f(x_1) = f(x_2)$. Si $x_1 \neq x_2$, sin pérdida de generalidad supongamos $x_1 < x_2$. Como f es creciente, de $x_1 < x_2$ se sigue $f(x_1) < f(x_2)$, lo cual contradice $f(x_1) = f(x_2)$. Por tanto $x_1 = x_2$. Así f es inyectiva. Como f es inyectiva y su imagen es J, existe la función inversa $f^{-1} : J \to I$.

Monotonía de f^{-1}. Sean $y_1, y_2 \in J$ tales que $y_1 < y_2$. Definimos $x_1 = f^{-1}(y_1)$ y $x_2 = f^{-1}(y_2)$, de modo que $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$. Supongamos, por contrapositiva, que $x_1 \geq x_2$. Si $x_1 = x_2$ entonces $y_1 = f(x_1) = f(x_2) = y_2$, contradicción con $y_1 < y_2$. Si $x_1 > x_2$, por la estricta creciente de f se tendría $f(x_1) > f(x_2)$, es decir $y_1 > y_2$, nuevamente contradicción. Por tanto no puede suceder $x_1 \geq x_2$; necesariamente $x_1 < x_2$. Esto muestra que $y_1 < y_2$ implica $f^{-1}(y_1) = x_1 < f^{-1}(y_2) = x_2$. Es decir, f^{-1} es estrictamente creciente en J.

(b) f decreciente entonces f es invertible y f^{-1} es decreciente.

El argumento es análogo al caso (a) cambiando las desigualdades.

Inyectividad. Si $x_1 < x_2$ y f es decreciente entonces $f(x_1) > f(x_2)$. Por tanto no pueden existir $x_1 \neq x_2$ con $f(x_1) = f(x_2)$; así f es inyectiva y admite inversa $f^{-1} : J \to I$.

Monotonía de f^{-1}. Sean $y_1, y_2 \in J$ con $y_1 < y_2$ y $x_1 = f^{-1}(y_1),\ x_2 = f^{-1}(y_2)$. Si se tuviera $x_1 \leq x_2$ entonces por la decrecencia de f seguiría $f(x_1) \geq f(x_2)$, es decir $y_1 \geq y_2$, contradicción. Por tanto necesariamente $x_1 > x_2$. Así $y_1 < y_2$ implica $f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2)$, esto es, f^{-1} es decreciente.

■

3. Da un ejemplo de una funcion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sea continua solo en un punto $x = 0$, Definimos

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Demostración. Demostrar que f es continua únicamente en $x = 0$ y discontinua en todo $a \neq 0$, sin usar sucesiones.

Continuidad en 0. Sea $\varepsilon > 0$. Tomemos $\delta = \varepsilon$. Si x satisface $|x - 0| < \delta$, entonces

- si $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = x$ y por tanto $|f(x) - f(0)| = |x - 0| < \delta = \varepsilon$;
- si $x \notin \mathbb{Q}$, $f(x) = 0$ y por tanto $|f(x) - f(0)| = 0 < \varepsilon$.

Por lo tanto, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \varepsilon$ tal que $|x - 0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(0)| < \varepsilon$. Así f es continua en 0.

Discontinuidad en $a \neq 0$. Sea $a \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$. Pongo $\varepsilon = \dfrac{|a|}{2} > 0$. Como $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ son densos en $\mathbb{R}$, para todo $\delta > 0$ existen tanto racionales como irracionales en el intervalo $(a - \delta, a + \delta)$. Consideramos dos casos:

a) Si $a \in \mathbb{Q}$. Entonces $f(a) = a$. Sea $\delta > 0$. Tomemos cualquier número irracional $s \in (a - \delta, a + \delta)$. Entonces $|s - a| < \delta$ y $f(s) = 0$. Por tanto

$$|f(s) - f(a)| = |0 - a| = |a| = 2\varepsilon > \varepsilon.$$

Así, para todo $\delta > 0$ existe x con $|x - a| < \delta$ y $|f(x) - f(a)| > \varepsilon$, lo que muestra que f no es continua en a.

b) Si $a \notin \mathbb{Q}$. Entonces $f(a) = 0$. Sea $\delta > 0$. Tomemos un racional $q \in (a - \delta, a + \delta)$ que además satisfaga $|q - a| < \text{mín}\{\delta, \frac{|a|}{2}\}$ (esto es posible por la densidad de $\mathbb{Q}$). Entonces $|q - a| < \frac{|a|}{2}$, de modo que

$$|q| \geq \big|\, |a| - |q - a| \,\big| > |a| - \tfrac{|a|}{2} = \tfrac{|a|}{2} = \varepsilon.$$

Como $f(q) = q$, se obtiene

$$|f(q) - f(a)| = |q - 0| = |q| > \varepsilon.$$

Por tanto, para todo $\delta > 0$ existe x con $|x - a| < \delta$ y $|f(x) - f(a)| > \varepsilon$, lo que implica que f no es continua en a.

En ambos casos $a \neq 0$ se ha comprobado la existencia de $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existe x con $|x - a| < \delta$ y $|f(x) - f(a)| > \varepsilon$. Por tanto f es discontinua en todo $a \neq 0$.

■

4. (Derivada de la funcion exponencial) Como comentamos anteriormente, la funcion exponencial e^x es la funcion inversa de la funcion logaritmo natural $\ln(x)$. Sabiendo que para $x > 0$,

$$\ln'(x) = \frac{1}{x},$$

Prueba que la derivada de la funcion exponencial e^x es la funcion exponencial e^x.

Demostración. Sea $e^x : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ la función inversa de $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$. Entonces para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple

$$\ln(e^x) = x.$$

La función ln es diferenciable en todo $t > 0$ y su derivada es $\ln'(t) = \frac{1}{t}$. En particular, $\ln'(e^x) = \frac{1}{e^x}$ y esta cantidad es distinta de cero para todo $x \in \mathbb{R}$. Por el teorema de la derivada de la función inversa, se tiene que e^x es diferenciable en todo $x \in \mathbb{R}$ y su derivada viene dada por

$$(e^x)' = \frac{1}{\ln'(e^x)}.$$

Sustituyendo $\ln'(e^x) = \frac{1}{e^x}$ obtenemos

$$(e^x)' = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x.$$

De forma equivalente, aplicando directamente la regla de la cadena a $\ln(e^x) = x$:

$$\frac{1}{e^x} \cdot (e^x)' = 1 \quad \Longrightarrow \quad (e^x)' = e^x.$$

Por tanto, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x.$$

■

5. La recta tangente a la grafica de una funcion f en el punto $(1,2)$ pasa por el punto $(3,4)$. Encuentra $f(1)$ y $f'(1)$.

Solución. Puesto que $(1,2)$ pertenece a la gráfica de f, se tiene

$$f(1) = 2.$$

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(1,2)$ viene dada por

$$y - 2 = f'(1)(x - 1).$$

Dado que dicha recta pasa por $(3,4)$, sustituimos $(x,y) = (3,4)$ en la ecuación anterior y obtenemos

$$4 - 2 = f'(1)(3 - 1).$$

Por tanto

$$2 = 2\,f'(1) \quad \Longrightarrow \quad f'(1) = 1.$$

Así,

$$f'(1) = 1.$$

◀

6. Realiza lo siguiente:

(a) Dibuja la siguiente hiperbola

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1.$$

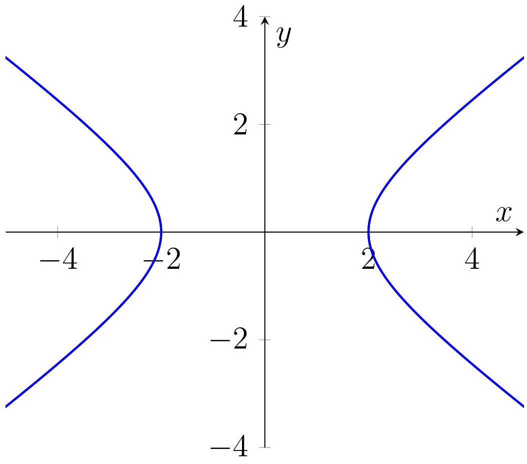
(b) Usa la derivacion implicita para calcular la pendiente de la racta tangente T a la hiperbola del inciso (a) en el punto $(3, \sqrt{5/2})$.

(c) Encuentra la ecuacion de T.

(d) Dibuja la grafica de T.

Solución.

(a) La grafica es



(b) Diferenciando implícitamente la ecuación de la hipérbola respecto de x obtenemos

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2}\right) = \frac{d}{dx}(1).$$

Calculando las derivadas,

$$\frac{2x}{4} - \frac{2y\,y'}{2} = 0,$$

de donde se simplifica a

$$\frac{x}{2} - y\,y' = 0.$$

Despejando y',

$$y' = \frac{x}{2y}.$$

En el punto $\left(3, \sqrt{5/2}\right)$ la pendiente es

$$y'\Big|_{(3,\sqrt{5/2})} = \frac{3}{2\sqrt{5/2}}.$$

Observando que $\sqrt{5/2} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$, se puede simplificar:

$$\frac{3}{2\sqrt{5/2}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

Por tanto la pendiente de la tangente en el punto dado es

$$m = \frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

(c) La ecuación punto-pendiente de la recta tangente T en $\left(3, \sqrt{5/2}\right)$ es

$$y - \sqrt{\tfrac{5}{2}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}\,(x - 3).$$

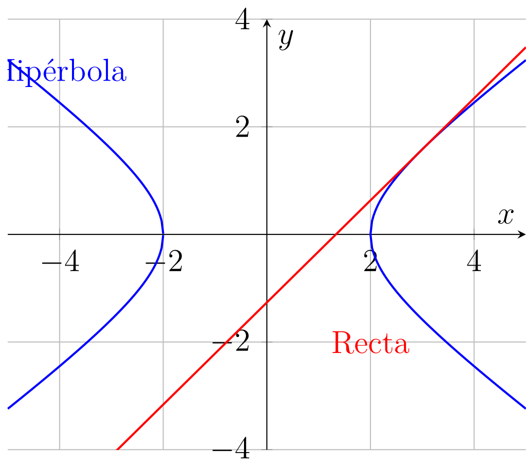
Usando $\sqrt{5/2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$ se puede reescribir T en forma explícita $y = mx + b$. Calculamos la ordenada al origen:

$$b = \sqrt{\tfrac{5}{2}} - m \cdot 3 = \frac{\sqrt{10}}{2} - 3 \cdot \frac{3\sqrt{10}}{10} = \sqrt{10}\Big(\frac{1}{2} - \frac{9}{10}\Big) = \sqrt{10}\Big(\frac{5-9}{10}\Big) = -\frac{2\sqrt{10}}{5}.$$

Así, la ecuación en forma pendiente-intersección es

$$y = \frac{3\sqrt{10}}{10}\,x - \frac{2\sqrt{10}}{5}\,.$$

(d) La grafica es



◄

7. Encuentra los intervalos abiertos donde la funcion $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ es creciente o decreciente utilizando la receta de la subseccion 5.8.1.

Solución.

a) Encontrar los puntos críticos de f. Calculamos la derivada:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\big(2x^3 - 3x^2 + 1\big) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1).$$

Los puntos críticos se obtienen resolviendo $f'(x) = 0$:

$$6x(x-1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 0 \quad \text{o} \quad x = 1.$$

b) Considerar los intervalos abiertos determinados por los puntos críticos:

$$(-\infty, 0), \quad (0,1), \quad (1, \infty).$$

c) Determinar el signo de $f'(x)$ en cada intervalo:

- Para $x \in (-\infty, 0)$: se tiene $x < 0$ y $x - 1 < 0$, por lo que $x(x-1) > 0$. Luego $f'(x) = 6x(x-1) > 0$.
- Para $x \in (0, 1)$: se tiene $x > 0$ y $x - 1 < 0$, por lo que $x(x-1) < 0$. Luego $f'(x) < 0$.
- Para $x \in (1, \infty)$: se tiene $x > 0$ y $x - 1 > 0$, por lo que $x(x-1) > 0$. Luego $f'(x) > 0$.

d) Concluir sobre la monotonía:

$$f \text{ es creciente en } (-\infty, 0) \cup (1, \infty), \qquad f \text{ es decreciente en } (0, 1).$$

e) (Clasificación de extremos.) Calculamos la segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(6x^2 - 6x\right) = 12x - 6.$$

Evaluando en los puntos críticos:

$$f''(0) = -6 < 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \text{ es un máximo local,}$$

$$f''(1) = 6 > 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1 \text{ es un mínimo local.}$$

Los valores de la función en los puntos críticos son

$$f(0) = 1, \qquad f(1) = 2 - 3 + 1 = 0,$$

por tanto f tiene un máximo local de valor 1 en $x = 0$ y un mínimo local de valor 0 en $x = 1$.

◀