**UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO**

**DIVISIÓN DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS**
**CAMPUS GUANAJUATO**

# Tarea 1 (Calculo Diferencia e Integral II)

**Nombre:** Ricardo León Martínez **Fecha:** 30/1/2026 **Calificación:** ____________

**Ejercicio 1**

Prueba la proposición 2.

*Demostración.* Por definición, $f$ es integrable si

$$\sup_{P\in\mathcal{P}} L(f,P) = \inf_{P\in\mathcal{P}} U(f,P).$$

A este numero se le denota por $\int_a^b f$. Ahora es inmediato de la definición de supremo que para cualquier partición $P$ se cumple

$$L(f,P) \leq \sup_{Q\in\mathcal{P}} L(f,Q) = \int_a^b f.$$

Analogamente,

$$\int_a^b f = \inf_{Q\in P} U(f,Q) \leq U(f,P).$$

Combinando ambas desigualdades obtenemos

$$L(f,P) \leq \int_a^b \leq U(f,P) \text{ para toda } P \in \mathcal{P}.$$

Ahora veamos que es unico, supongamos que existe un número $A$ tal que

$$L(f,P) \leq A \leq U(f,P) \text{ para toda } P \in \mathcal{P}.$$

Entonces $A$ es una cota superior par todas las sumas inferiores, luego

$$A \geq \sup_{p\in\mathcal{P}} L(f,P) = \int_a^b f.$$

Tambien $A$ es una cota inferior para todas las sumas superiores, luego

$$A \leq \inf_{P\in\mathcal{P}} U(f,P) = \int_a^b f.$$

Por tanto $A = \int_a^b f$. ■

**Ejercicio 2**

Definamos

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in [0,1), \\ 1, & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

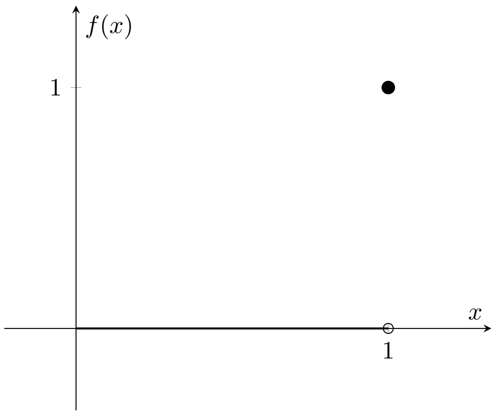
(a) Dibuja la gráfica de $f$.

(b) Determina si $f$ es integrable en [0,1]. Argumenta tu respuesta.

(c) Si $f$ es integrable, calcula $\int_0^1 f$.

*Solución.*

(a) Dibuja la gráfica de $f$.




(b) Determina si $f$ es integrable en [0,1]. Argumenta tu respuesta.
Es claro que $f$ es monótona creciente en $[0,1]$, pues es constante en $[0,1)$ y solo presenta un salto hacia arriba en el punto $x = 1$. Por la proposición 5, se concluye que $f$ es integrable en $[0,1]$.

(c) Para todo subintervalo $[t_{i-1}, t_i] \subset [0,1]$ se tiene

$$m_i,$$

pues en cualquier intervalo hay puntos $x < 1$ donde $f(x) = 0$. Por lo tanto

$$L(f, P) = 0,$$

para toda partición $P$. En consecuencia

$$\int_a^b f = 0.$$

▲

**Ejercicio 3**

Dada una función $f$ acotada en un intervalo $[a, b]$ y $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ una partición de $[a, b]$, para cada $i = 1. \ldots, n$, definimos

$$m_i^f = \text{ínf}\{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\}$$

y

$$M_i^f = \sup\{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\}.$$

Supongamos que $f$ y $g$ son funciones acotadas en un intervalo $[a, b]$, que $c$ es una constante y que $P$ es una partición de $[a, b]$. Prueba lo siguiente:

(a) $m_i^f + m_i^g \leq m_i^{f+g} \leq M_i^{f+g} \leq M_i^f + M_i^g$.

(b) Si $c \geq 0$, entonces $m_i^{cf} = cm_i^f$ y $M_i^{cf} = cM_i^f$.

(c) Si $c < 0$, entonces $m_i^{cf} = cM_i^f$ y $M_i^{cf} = cm_i^f$.

*Demostración.* (a) $m_i^f + m_i^g \leq m_i^{f+g} \leq M_i^{f+g} \leq M_i^f + M_i^g$.

Sea $I_i = [t_{i-1}, t_i]$. Definamos

$$A := \{f(x) : x \in I_i\}, \qquad B := \{g(x) : x \in I_i\},$$

y

$$C := \{f(x) + g(x) : x \in I_i\}.$$

Por definición,

$$m_i^f = \text{ínf}\, A, \quad m_i^g = \text{ínf}\, B, \quad m_i^{f+g} = \text{ínf}\, C,$$

$$M_i^f = \sup A, \quad M_i^g = \sup B, \quad M_i^{f+g} = \sup C.$$

Observemos que, para todo $x \in I_i$,

$$f(x) \in A \quad \text{y} \quad g(x) \in B,$$

por lo que

$$f(x) + g(x) \in A + B.$$

De aquí se sigue que

$$C \subseteq A + B.$$

Por un resultado conocido se tiene

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B.$$

Como $C \subseteq A + B$, se sigue que

$$\sup C \leq \sup(A + B),$$

y por lo tanto

$$M_i^{f+g} \leq M_i^f + M_i^g.$$

Análogamente,

$$\text{ínf}(A + B) = \text{ínf}\, A + \text{ínf}\, B.$$

Como $C \subseteq A + B$, se cumple

$$\text{ínf}(A + B) \leq \text{ínf}\, C,$$

y de aquí se obtiene

$$m_i^f + m_i^g \leq m_i^{f+g}.$$

Finalmente, como por definición siempre $\text{ínf}\, C \leq \sup C$, se concluye que

$$m_i^f + m_i^g \leq m_i^{f+g} \leq M_i^{f+g} \leq M_i^f + M_i^g.$$

(b) Si $c \geq 0$, entonces $m_i^{cf} = cm_i^f$ y $M_i^{cf} = cM_i^f$
Sea $I_i = [t_{i-1}, t_i]$. Definamos

$$A := \{f(x) : x \in I_i\} \qquad cA := \{cf(x) : x \in I_i\}.$$

Por definición,

$$\begin{aligned} m_i^{cf} &= \text{ínf}(cA), \quad cm_i^f = c\,\text{ínf}(A) \\ M_i^{cf} &= \sup(cA), \quad cM_i^f = c\sup(A). \end{aligned}$$

De un resultado conocido sabemos que $\text{ínf}(cA) = c\,\text{ínf}(A)$ de esto se tiene directamente

$$m_i^{cf} = cm_i^f.$$

Finalmente, sabiendo que $\sup(cA) = c\sup(A)$, obetenemos

$$M_i^{cf} = cM_i^f$$

(c) Si $x < 0$, entonces $m_i^{cf} = cM_i^f$ y $M_i^{cf} = cm_i^f$.
Sea $I_i$. Definanamos $A = \{f(x) : x \in I_i\}$ usando las definiciones del inciso anterior y de un resultado conocido que dice que si $c < 0$ entonces

$$\text{ínf}(-cA) = -c\sup(A) \qquad \sup(-cA) = -c\,\text{ínf}(A)$$

se sigue inmdiatamente que

$$m_i^{cf} = cM_i^f \qquad M_i^{cf} = cm_i^f.$$

■

## Ejercicio 4

Sean $f$ y $g$ funciones acotadas en un intervalo $[a, b]$ y $P$ una partición de $[a, b]$. Prueba que

$$L(f,P) + L(g,P) \leq L(f+g,P) \leq U(f+g,P) \leq U(f,P) + U(g,P).$$

**Sugerencia:** Considera el inciso (a) del ejercicio 8 de las notas (ejercicio 3 de esta tarea).

*Demostración.* Del inciso (a) del ejercicio 3 de esta tarea tenemos que

$$m_i^f + m_i^g \leq m_i^{f+g} \leq M_i^{f+g} \leq M_i^f + M_i^g.$$

Multiplicando por $(t_{i-1} - t_i)$ obtenemos

$$m_i^f(t_{i-1} - t_i) + m_i^g(t_{i-1} - t_i) \leq m_i^{f+g}(t_{i-1} - t_i) \leq M_i^{f+g}(t_{i-1} - t_i) \leq M_i^f(t_{i-1} - t_i) + M_i^g(t_{i-1} - t_i).$$

Se sigue que

$$\sum_{i=1}^{n} m_i^f(t_{i-1} - t_i) + \sum_{i=1}^{n} m_i^g(t_{i-1} - t_i) \leq \sum_{i=1}^{n} m_i^{f+g}(t_{i-1} - t_i) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i^{f+g}(t_{i-1} - t_i) \leq \sum_{i=1}^{n} M_i^f(t_{i-1} - t_i) + \sum_{i=1}^{n} M_i^g(t_{i-1} - t_i).$$

esto por definición de suma superior e inferior es

$$L(f,P) + L(g,P) \leq L(f+g,P) \leq U(f+g,P) \leq U(f,P) + U(g,P).$$

■

## Ejercicio 5

Sean $f$ una función acotada en un intervalo $[a, b]$, $c$ un número real y $P$ una partición de $[a.b]$. Prueba lo siguiente:

(a) Si $c \geq 0$, entonces

$$cL(f, P) = L(cf, P) \leq U(cf, P) = cU(f, P).$$

(b) Si $c < 0$, entonces

$$cU(f, P) = L(cf, P) \leq U(cf, P) = cL(f, P).$$

**Sugerencia:** Considera los incisos (b) y (c) del ejercicio 8 de las notas (ejercicio 3 de esta tarea).

*Demostración.* (a) Del inciso (b) del ejercicio 3 de esta tarea tenemos que si $c \geq 0$, entonces

$$m_i^{cf} = cm_i^f, \quad \text{y} \quad M_i^{cf} = cM_i^f.$$

tomando $m_i^{cf} = cm_i^f$ y multiplicandolo por $(t_{i-1} - t_i)$ obtenemos

$$m_i^{cf}(t_{i-1} - t_i) = cm_i^f(t_{i-1} - t_i).$$

Se sigue que

$$\sum_{i=1}^{n} m_i^{cf}(t_{i-1} - t_i) = c\sum_{i=1}^{n} m_i^f(t_{i-1} - t_i).$$

esto por definición es

$$L(f, p) = cL(f, P).$$

Ahora tomando $M_i^{cf} = cM_i^f$ y multiplicandolo por $(t_{i-1} - t_i)$ tenemos

$$M_i^{cf}(t_{i-1} - t_i) = cM_i^f(t_{i-1} - t_i).$$

Se sigue que

$$\sum_{i=1}^{n} M_i^{cf}(t_{i-1} - t_i) = c\sum_{i=1}^{n} M_i^f(t_{i-1} - t_i).$$

Nuevamente por definición se tiene

$$U(f, p) = cU(f, p).$$

Ahora del inciso (b) proposición 1 y juntando las igualdades tenemos

$$cL(f,P) = L(cf,P) \leq U(cf,P) = cU(f,P).$$

(b) Del inciso (c) del ejercicio 3 de esta tarea tenemos que si $c < 0$, entonces

$$m_i^{cf} = cM_i^f \quad \text{y} \quad M_i^{cf} = cm_i^f.$$

Tomando $m_i^{cf} = cM_i^f$ y multiplicandolo por $(t_{i-1} - t_i)$ obtenemos

$$m_i^{cf}(t_{i-1} - t_i) = cM_i^f(t_{i-1} - t_i),$$

se sigue que

$$\sum_{i=1}^{n} m_i^{cf}(t_{i-1} - t_i) = c\sum_{i=1}^{n} M_i^f(t_{i-1} - t_i)$$

esto por definición es

$$L(cf,P) = cU(f,P).$$

La prueba para $M_i^{cf} = cM_i^f$ es analoga. De estas dos igualdades y por la proposición 1 tenemos

$$cU(f,P) = L(cf,P) \leq U(cf,P) = cL(f,P).$$

■

**Ejercicio 6**

Sea $f$ una función integrable en un intervalo $[a,b]$ y $c$ un número real. Prueba que $cf$ es integrable $[a,b]$ y que

$$\int_a^b cf = c\int_a^b f.$$

**Sugerencia:** Trata de imitar la prueba del inciso (a) de la proposición 6 y considera el ejercicio 11 de las notas (ejercicio 5 de esta tarea).

*Demostración.* Para $c \geq 0$. Dado que f es integrable tenemos

$$\sup_{P\in\mathcal{P}} L(f,P) = \inf_{P\in\mathcal{P}} U(f,P)$$

al multiplicarlo por $c \geq 0$ a ambos lados obtenemos

$$c\sup_{P\in\mathcal{P}} L(f,P) = c\inf_{P\in\mathcal{P}} U(f,P)$$

se sigue que

$$\sup_{P\in\mathcal{P}} cL(f,P) = \operatorname*{ínf}_{P\in\mathcal{P}} cU(f,P)$$

finalmente por la el ejercicio 5 inciso (a) tenemos que

$$\sup_{P\in\mathcal{P}} L(cf,P) = \operatorname*{ínf}_{P\in\mathcal{P}} U(cf,P)$$

Por lo tanto

$$\int_a^b cf = c\int_a^b f.$$

Para el caso donde $c<0$. Como $f$ es integrable tenemos

$$\sup_{P\in\mathcal{P}} L(f,P) = \operatorname*{ínf}_{P\in\mathcal{P}} U(f,P)$$

multiplicando por $c<0$ obtenemos

$$-c\sup_{P\in\mathcal{P}} L(f,P) = -c\operatorname*{ínf}_{P\in\mathcal{P}} U(f,P)$$

Por propiedades del infimo y supremo se sigue que

$$\operatorname*{ínf}_{P\in\mathcal{P}} -cL(f,P) = \sup_{P\in\mathcal{P}} -cU(f,P)$$

Por el inciso (b) del ejercicio 5 de esta tarea tenemos

$$\operatorname*{ínf}_{P\in\mathcal{P}} U(-cf,P) = \sup_{P\in\mathcal{P}} L(-cf,P)$$

Asi,

$$\int_a^b -cf = -c\int_a^b.$$

Quedando asi demostrado para todos los casos. ■