UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO

DIVISIÓN DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
CAMPUS GUANAJUATO

Tarea 7 (Calculo Diferencial e Integral I)

Nombre: Ricardo León Martínez **Fecha:** 3/10/2025 **Calificación:** ____________

Profesor: Fernando Núñez Medina

1. Sean x y y números reales, y m y n números naturales tales que las expresiones algebraicas de los incisos siguientes están definidas. Prueba lo siguiente

(a) $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$.
(b) $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$.
(c) $x^n \cdot y^n = (xy)^n$.
(d) $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$.
(e) $(x^m)^n = x^{n \cdot m}$.

Demostración. **(a)** $x^m \cdot x^n = x^{n+m}$
Por definición de potencia,

$$x^m = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{m \text{ factores}}, \quad x^n = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ factores}}$$

La multiplicación $x^m \cdot x^n$ consiste en combinar ambas sucesiones de factores x, con lo cual el numero total de factores x es $m + n$. Por tanto

$$x^m \cdot x^n = \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{m+n} = x^{n+m}.$$

(b) $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$.
Veamos primero el caso $m \geq n$. Entonces

$$x^m = x^n \cdot x^{n-m}$$

si $x \neq 0$, al dividir por x^n obtenemos

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}.$$

si $m < n$, entonces $m - n < 0$. Usando la definición de potencia siempre que $x \neq 0$,

$$\frac{x^m}{x^n} = \frac{1}{\frac{x^n}{x^m}} = \frac{1}{x^{n-m}} = x^{m-n}.$$

por tanto
$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}.$$

(c) $x^n y^n = (xy)^n$.
Procedamos por inducción. El caso base $n = 1$, es claro puesto que $x\acute{z}y\acute{z} = xy = (xy)\acute{z}$.
Supongamos que es valido para $n = k$, es decir $x^k y^k = (xy)^k$. Entonces

$$x^{k+1}y^{k+1} = (x^k y^k) \cdot (xy) = (xy)^k \cdot (xy) = (xy)^{k+1},$$

por inducción la igualdad se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$.

(d) $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$ con $y \neq 0$.
Procedamos por inducción sobre n. El caso base $n = 1$ es claro puesto que $(x/y)^1 = x/y$.
Ahora supongamos que es valido para $n = k$. Entonces

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{k+1} = \left(\frac{x}{y}\right)^k \cdot \left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x^k}{y^k} \cdot \frac{x}{y} = \frac{x^{k+1}}{y^{k+1}}.$$

por inducción la igualdad se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$

(e)$(x^m)^n = x^{m \cdot n}$.
Procedamos por inducción sobre n. El caso base $n = 1$ es claro puesto que $(x^m)^1 = x^m = x^{m \cdot 1}$. Ahora supongamos que es valida para $n = k$, entonces

$$(x^m)^{k+1} = (x^m)^k \cdot (x^m) = x^{m \cdot k} \cdot x^m = x^{m \cdot k + m} = x^{m \cdot (k+1)}$$

por inducción la igualdad se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$. ∎

2. Prueba que $1 > 0$.

Demostración. Por la proposición 11 sabemos que, si $x \in \mathbb{R}$ y $x \neq 0$, entonces $x^2 > 0$. Ahora aplicando esta proposición con $x = 1$. Como $1 \neq 0$, se tiene $1^2 > 0$. Pero $1^2 = 1$ por tanto $1 > 0$.

∎

3. Prueba lo siguiente:

(a) Si $x > 0$, entonces $x^{-1} > 0$.

(b) Si $x < 0$, entonces $x^{-1} < 0$.

Demostración. **(a)** Supongamos $x > 0$. Procedamos por contradicción. Supongamos que $x^{-1} \leq 0$.
No puede ser $x^{-1} = 0$ porque $x \cdot x^{-1} = 1$, lo cual contradice $x \neq 0$. Por tanto $x^{-1} < 0$.
Como $x > 0$, al multiplicar la desigualdad $x^{-1} < 0$ por x la cual es estrictamente positiva, entonces la desigualdad se conserva, obteniendo

$$x \cdot x^{-1} < x \cdot 0 \quad \Longrightarrow \quad 1 < 0,$$

lo cual es una contradicción. Luego la hipótesis contraria es falsa por tanto $x^{-1} > 0$.

(b) Supongamos que $x < 0$. Procederemos nuevamente por contradicción. Supongamos que $x^{-1} \geq 0$.
No puede ser $x^{-1} = 0$ por la misma razon que el inciso a. Por tanto $x^{-1} > 0$. Al multiplicar la desigualdad $x^{-1} > 0$ por x que es estrictamente negativa, por la inversión del orden bajo el producto de números negativos tenemos que

$$x \cdot x^{-1} < x \cdot 0 \quad \Longrightarrow \quad 1 < 0,$$

nuevamente una contradicción. Así la hipótesis contraria es falsa y debe cumplirse que $x^{-1} < 0$.

■

4. Sea A un subconjunto no vació de números reales.

(a) Prueba que si A es acotado inferiormente, entonces

$$\sup(-A) = -\inf(A).$$

(b) Prueba que si A es acotado superiormente, entonces

$$\inf(-A) = -\sup(A).$$

Demostración. **(a)** Prueba que si A es acotado superiormente, entonces $\inf(-A) = -\sup(A)$.

Sea $m := \inf(A)$. como A es acotado inferiormente, m existe y cumple que $m \leq a$ para todo $a \in A$. Multiplicando por -1 obtenemos $-m \geq -a$ para todo $a \in A$. Es decir, $-m$ es una cota superior de $-A$. Ahora probaremos que $-m$ es la menor cota superior de $-A$, es decir, que es $\sup(-A)$. Sea M cualquier cota superior de $-A$. Entonces $-a \leq M$ para todo $a \in A$. Multiplicando por -1 obtenemos $a \geq -M$ para todo $a \in A$. Así $-M$ es una cota inferior de A. Por definición de ínfimo se tiene $-M \leq m$. Aplicando de nuevo multiplicación por -1 se obtiene $M \geq -m$. De aqui se sigue que cualquier cota superior M de $-A$ cumple $M \geq -m$. Por tanto $-m$ es la menor cota superior de $-A$, es decir $\sup(-A) = -m$.

(b) Prueba que si A es acotado superiormente, entonces $\inf(-A) = -\sup(A)$.

Sea $s := \sup(A)$. Como A esta acotado superiormente, s existe y cumple $a \leq s$ para todo $a \in A$. Multiplicando por -1 obtenemos $-a \geq -s$ para todo $a \in A$. Es decir, $-s$ es una cota inferior de $-A$. Demostraremos que $-s$ es la mayor cota inferior de $-A$, es decir $\inf(-A)$. Sea m cualquier cota inferior de $-A$. Entonces $m \leq -a$ para todo $a \in A$. Multiplicando por -1 se obtiene $-m \geq a$ para todo $a \in A$. Por tanto $-m$ es una cota superior de A. Por definición de supremo, $-m \geq s$. Multiplicando por -1 se obtiene $m \leq -s$. Así cualquier cota inferior m de $-A$ cumple $m \leq -s$, lo que implica que $-s$ es la mayor de las cotas inferiores de $-A$. Por tanto $\inf(-A) = -s$.

■

5. Sea $n \in \mathbb{N}$. Prueba lo siguiente:

(a) Si $x < y \leq 0$ y n es par, entonces $y^n < x^n$.

(b) Si $0 \leq x < y$ y n es par, entonces $x^n < y^n$.

(c) Si $x < y$ y n es impar, entonces $x^n < y^n$.

Demostración. Empezaremos por (b) y después lo usaremos para (a) y (c).
(b) Caso $0 \leq x < y$, n natural
procederemos por inducción, Caso base $n = 1$. Es trivial $x^1 = x < y = y^1$. Supongamos que para algun $k \geq 1$ se cumple

$$0 \leq x < y \quad \Longrightarrow \quad x^k < y^k.$$

consideremos $n = k + 1$ y $0 \leq x < y$. Luego $x^k \geq 0$ y $y^k \geq 0$. Ahora

$$x^{k+1} = x \cdot x^k \leq y \cdot x^k$$

y por la hipótesis inductiva $x^k < y^k$, multiplicando por $y \geq 0$ obtenemos

$$y \cdot x^k < y \cdot y^k = y^{k+1}.$$

Combinando las dos desigualdades se obtiene

$$x^{k+1} \leq y \cdot x^k < y^{k+1},$$

por lo que $x^{k+1} < y^{k+1}$. Por inducción, (b) vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

(a) Caso $x < y \leq 0$ y n par.
Escribamos $a := -y$ y $b := -x$. Dado $x < y \leq 0$ tenemos $\leq a < b$. Como n es par, $(-t)^n = t^n$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces

$$y^n = (-a)^n = a^n, \qquad x^n = (-b)^n = b^n.$$

por (b), aplicando $0 \leq a < b$, se tiene $a^n < b^n$. Por tanto

$$y^n = a^n < b^n = x^n,$$

que es exactamente $y^n < x^n$. Esto prueba (a).

(c) Caso $x < y$ y n impar.
veamos tres subcasos.
Caso 1:
Si $0 \leq x < y$, entonces por (b) da $x^n < y^n$, ya que (b) vale para todo n natural, en particular para impares.
Caso 2:
Si $x < y \leq 0$, procederemos como en (a) pero teniendo en cuenta que ahora n es impar. Definamos $a := -y$, $b := -x$, entonces $0 \leq a < b$. Para n impar se tiene $(-t)^n = -t^n$.
Luego

$$y^n = (-a)^n = -a^n, \qquad x^n = (-b)^n = -b^n.$$

Aplicando (b) a $0 \leq a < b$ obtenemos $a^n < b^n$. Multiplicando por -1 resulta

$$-a^n > -b^n,$$

es decir $y^n > x^n$, reescribiendo se obtiene exactamente $x^n < y^n$.
Caso 3:
Si $x < 0 < y$, como n es impar se preserva el signo al elevar a n por lo que $x^n < 0 < y^n$.
En particular $x^n < y^n$.
En los tres subcasos se cumple $x^n < y^n$. ∎

6. Prueba que si r es un numero racional y p es un numero irracional, entonces $r + p$ y $r - p$ son números irracionales. Si, ademas, $r \neq 0$, entonces rp y r/p también son números irracionales.

Demostración. *a)* $r + p$ es irracional.
Supongamos, por contradicción, que $r+p \in \mathbb{Q}$. Como $r \in \mathbb{Q}$, entonces la diferencia

$$p = (r + p) - r$$

es diferencia de dos números racionales, por lo que $p \in \mathbb{Q}$. Esto contradice la hipótesis $p \notin \mathbb{Q}$. Por tanto $r + p \notin \mathbb{Q}$.

b) $r - p$ es irracional.
supongamos, por contradicción, que $r - p \in \mathbb{Q}$. Entonces

$$p = r - (r - p)$$

es diferencia de dos racionales y por tanto racional, lo que contradice p irracional, le sigue que, $r - p \notin \mathbb{Q}$.

c) Si $r \neq 0$, entonces rp es irracional
Supongamos, por contradicción, que $rp \in \mathbb{Q}$. Como $r \in \mathbb{Q}$ y $r \neq 0$, el cociente

$$p = \frac{rp}{r}$$

es cociente de racionales con $r \neq 0$, por lo que $p \in \mathbb{Q}$, es contradicción. Por tanto $rp \notin \mathbb{Q}$,

d) Si $r \neq 0$, entonces r/p es irracional.
Supongamos, por contradicción, que $q := \frac{r}{p} \in \mathbb{Q}$. Entonces $p = \frac{r}{q}$. Pero r y q son racionales con $q \neq 0$, por lo que su cociente p seria racional, contradicción. Luego $\frac{r}{p} \in \mathbb{Q}$.

∎

7. Sea f una función. Prueba que f es una función $1 - 1$ ssi $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ para todo $A, B \subset \text{dom}\ (f)$.

Demostración. Primero notemos una inclusión que siempre es válida, sin hipótesis sobre f.

$f(A\cap B) \subset f(A)\cap f(B)$ para cualesquiera $A, B \subset \mathrm{dom}(f)$. Sea $y \in f(A\cap B)$. Entonces existe $x \in A\cap B$ tal que $f(x) = y$. Como $x \in A$ y $x \in B$, se tiene $y \in f(A)$ y $y \in f(B)$. Por tanto $y \in f(A) \cap f(B)$. Esto prueba la inclusión.

Ahora probaremos la suficiencia y la necesidad.

Empezamos por la suficiencia. Si f es inyectiva entonces $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ para todo A, B.

Como ya vimos, siempre se tiene $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. Para la inclusión contraria, sea $y \in f(A) \cap f(B)$. Entonces existen $a \in A$ y $b \in B$ tales que $f(a) = y = f(b)$. Por inyectividad se sigue $a = b$. Por tanto $a = b \in A \cap B$ y $y = f(a) \in f(A \cap B)$. Así $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$. Combinando ambas inclusiones obtenemos la igualdad.

Ahora con la necesidad. Si $f(A\cap B) = f(A)\cap f(B)$ para todo $A, B \subset \mathrm{dom}(f)$ entonces f es inyectiva.

Procedemos por contrapositiva. Supongamos que f no es inyectiva; entonces existen $a, b \in \mathrm{dom}(f)$ con $a \neq b$ y $f(a) = f(b)$. Consideremos los conjuntos $A = \{a\}$ y $B = \{b\}$. Entonces

$$A \cap B = \{a\} \cap \{b\} = \varnothing,$$

de modo que $f(A \cap B) = f(\varnothing) = \varnothing$. Por hipótesis, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$, así que

$$\varnothing = f(A) \cap f(B).$$

Pero $f(A) = \{f(a)\}$ y $f(B) = \{f(b)\}$. Como $f(a) = f(b)$ por elección, se tiene

$$f(A) \cap f(B) = \{f(a)\} \cap \{f(b)\} = \{f(a)\} \neq \varnothing,$$

contradicción. Por tanto no puede existir tal par distinto $a \neq b$ con $f(a) = f(b)$; entonces f es inyectiva.

■

8. Prueba que para todo par de numeros x y y se cumple lo siguiente

a) $|x - y| \leq |x| + |y|$.

b) $|x| - |y| \leq |x - y|$.

c) $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Demostración. **(a)**
Usando la desigualdad del triangulo

$$|x - y| = |x + (-y)| \leq |x| + |-y|.$$

Como $|-y| = |y|$, se obtiene

$$|x - y| \leq |x| + |y|.$$

(b)
Escribimos $x = (x - y) + y$ y aplicamos la desigualdad del triangulo

$$|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y|.$$

Reordenando terminos y restando $|y|$ en ambos miembros se obtiene

$$|x| - |y| \leq |x - y|.$$

(c)
Aplicando (b) intercambiando x y y obtenemos tambien

$$|y| - |x| \leq |y - x| = |x - y|.$$

Las dos desigualdades

$$|x| - |y| \leq |x - y| \quad y \quad |y| - |x| \leq |x - y|$$

implican que tanto $|x| - |y|$ como $|y| - |x|$ estan acotados superiormente por $|x - y|$. Por tanto el valor absoluto de la diferencia cumple con

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

■

9. Calcula los límites siguientes:

(a) $\lim_{x\to 8}(x+2)\sqrt[3]{x}$.

(b) $\lim_{x\to -1} \frac{x^2+4x+3}{x+1}$.

(c) $\lim_{x\to -5} \ln(x+6)$.

(d) $\lim_{x\to 1^+} 2x^3 - x + 5$.

(e) $\lim_{x\to -\infty} e^x \arctan(x)$.

(f) $\lim_{x\to \infty} \frac{5x^4-4x^2}{3x^4+2x}$.

(g) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \sin(x) + \cos(x) + \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

(h) $\lim_{x\to \infty} 3x^3 - 2x^2 + x - 4$.

Solución:

(a) $\lim\limits_{x\to 8}(x+2)\sqrt[3]{x}$.

Como las funciones polinómicas y la raíz cúbica son continuas en $x = 8$, basta sustituir:

$$\lim_{x\to 8}(x+2)\sqrt[3]{x} = (8+2)\sqrt[3]{8} = 10 \cdot 2 = 20.$$

—

(b) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+4x+3}{x+1}$.

Factorizamos el numerador:

$$x^2 + 4x + 3 = (x+1)(x+3).$$

Para $x \neq -1$ la fracción es $\dfrac{(x+1)(x+3)}{x+1} = x+3$. Por continuidad de $x+3$ en $x = -1$,

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2+4x+3}{x+1} = \lim_{x\to -1}(x+3) = -1 + 3 = 2.$$

—

(c) $\lim\limits_{x\to -5} \ln(x+6)$.

La función ln es continua en 1 y $x+6 \to 1$ cuando $x \to -5$; por tanto

$$\lim_{x\to -5} \ln(x+6) = \ln\Big(\lim_{x\to -5}(x+6)\Big) = \ln 1 = 0.$$

—

(d) $\lim\limits_{x\to 1^+} (2x^3 - x + 5)$.

El polinomio es continuo en $x = 1$; por tanto la derecha y la izquierda coinciden y

$$\lim_{x\to 1^+} (2x^3 - x + 5) = 2 \cdot 1^3 - 1 + 5 = 2 - 1 + 5 = 6.$$

—

(e) $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x \arctan(x)$.

Como $e^x \to 0$ cuando $x \to -\infty$ y $\arctan(x) \to -\frac{\pi}{2}$, la producta tiende a

$$0 \cdot \left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

—

(f) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^4 - 4x^2}{3x^4 + 2x}$.

Dividimos numerador y denominador por x^4 (término de mayor grado):

$$\frac{5 - 4/x^2}{3 + 2/x^3} \xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{5-0}{3+0} = \frac{5}{3}.$$

Por tanto

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^4 - 4x^2}{3x^4 + 2x} = \frac{5}{3}.$$

—

(g) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \dfrac{-\sin(x) + \cos(x) + \sin(x)}{\cos(x)}$.

Observemos que en el numerador $-\sin(x) + \sin(x) = 0$, luego para $x \neq \frac{\pi}{2}$ el cociente se simplifica a

$$\frac{-\sin(x) + \cos(x) + \sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\cos(x)}{\cos(x)} = 1.$$

Por tanto la función es constante igual a 1 en un entorno de $\frac{\pi}{2}$ (excepto en $x = \frac{\pi}{2}$ donde está indefinida), y la asíntota lateral existe y vale 1. Entonces

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \frac{-\sin(x) + \cos(x) + \sin(x)}{\cos(x)} = 1.$$

—

(h) $\lim\limits_{x\to\infty} (3x^3 - 2x^2 + x - 4)$.

El término con mayor potencia es $3x^3$ con coeficiente positivo, por tanto el polinomio tiende a $+\infty$ cuando $x \to \infty$.

$$\lim_{x\to\infty} (3x^3 - 2x^2 + x - 4) = +\infty.$$

10. Prueba que $\lim_{x\to p} f(x) = L$ ssi $\lim_{h\to 0} f(p+h) = L$.

Demostración. Recordemos la definición ε–δ del límite: $\lim_{x\to p} f(x) = L$ significa

$(*)$ $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ tal que $0 < |x-p| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon$.

Análogamente, $\lim_{h\to 0} f(p+h) = L$ significa

$(**)$ $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta' > 0$ tal que $0 < |h| < \delta' \implies |f(p+h) - L| < \varepsilon$.

Mostraremos la equivalencia la suficiencia y la necesidad.

Mostremos la suficiencia. Supongamos $\lim_{x\to p} f(x) = L$, es decir que $(*)$ es verdadera. Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ que satisface la implicación de $(*)$. Tomemos $\delta' = \delta$. Si h satisface $0 < |h| < \delta'$, entonces definimos $x := p+h$. Entonces $0 < |x-p| = |h| < \delta$, por lo que por $(*)$ se tiene $|f(x) - L| < \varepsilon$. Pero $f(x) = f(p+h)$, luego $|f(p+h) - L| < \varepsilon$. Así $(**)$ se cumple.

Ahora la necesidad. Ahora supongamos $\lim_{h\to 0} f(p+h) = L$, es decir $(**)$ es verdadera. Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta' > 0$ según $(**)$. Póngase $\delta = \delta'$. Si x satisface $0 < |x-p| < \delta$, entonces definimos $h := x-p$. Entonces $0 < |h| = |x-p| < \delta'$ y, por $(**)$, $|f(p+h)-L| < \varepsilon$. Pero $f(p+h) = f(x)$, por lo que $|f(x) - L| < \varepsilon$. Esto muestra que $(*)$ se cumple.

Habiendo demostrado ambas implicaciones, concluimos que $\lim_{x\to p} f(x) = L$ si y sólo si $\lim_{h\to 0} f(p+h) = L$.

■