E_1	E_2	E_3	E_4	Calif.

Matemáticas Elementales

Agosto - Diciembre de 2025

Tarea 10

Resuelve los siguientes ejercicios según el reglamento del curso y **entrega esta página** con los nombres de los integrantes de equipo colocados en lugar de estas líneas de instrucciones. Todas las demostraciones deben redactarse justificando formalmente todos los pasos necesarios.

La tarea debe resolverse **con la teoría vista en el curso o con resultados a lo más de los cursos de preparatoria**. Está prohibido utilizar resultados de otros cursos de este mismo semestre o de semestres posteriores. Tampoco está permitido utilizar trucos de alguna olimpiada relacionada con computación y/o matemáticas.

Cada inciso distinto debe ser resuelto por un alumno distinto y, en cada caso, deberá colocarse el nombre de la persona que redactó el inciso.

1. Considera $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ como se definieron en clase.

   Dado un entero $n \geq 2$ y un real $x > 0$, consideramos

   $$\alpha_n := \{r \in \mathbb{R} : r^n < x\}.$$

   Definimos

   $$\sqrt[n]{x} := \sup \alpha_n.$$

   Demuestra que para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+, n \in \mathbb{Z}^+, m \in \mathbb{Z}^+$, se cumple lo siguiente:

   (a) $\sqrt[n]{\alpha}\sqrt[n]{\beta} = \sqrt[n]{\alpha\beta}$

   (b) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{\alpha}} = \sqrt[mn]{\alpha}$

   (c) $\left(\sqrt[n]{\alpha}\right)^m = \sqrt[n]{\alpha^m}$

   (d) $\sqrt[n]{\alpha^m} = \sqrt[s]{\alpha^r} \iff \frac{m}{n} = \frac{r}{s}$.

2. Considera $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{N}_0$ como se construyeron en clase. Definimos una función $F : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}$ tal que $F(0) = 1$ y para $n \in \mathbb{N}$, $F(n) = n \cdot F(n-1)$. a F le llamaremos **factorial** de n y escribiremos $n! = F(n)$.

   Sea

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

   (a) Considera $b_1 = 1$ y b_n para $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ tal que $b_n = -\frac{1}{n!} + b_{n-1}$ y

$$\frac{1}{(n+1)!} < b_n < 3.$$

   Demuestra que $a_n < 3 - b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Sea

$$A_n := \{q \in \mathbb{Q} : q < a_n\}.$$

   Demuestra que el conjunto

$$e := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n,$$

   es un número real. Dicho número real es la base del logaritmo neperiano.

3.

   (a) Sean $a, b \in \mathbb{Z}$. Demuestra que

$$(a, b) = (|a|, |b|)\,.$$

   (b) Demuestra que si $d = (a, b)$ y $d = ar + bs$, entonces $(r, s) = 1$.

   (c) Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ y $d = (a, b)$. Sean a', b' tales que $a = da'$, $b = db'$. Demuestra que si $a|c$ y $b|c$, entonces $a'b'd|c$.

   (d) Sea k un entero positivo, demuestra que

$$(ka, kb) = k(a, b), \quad [ka, kb] = k[a, b], \quad \forall a, b \in \mathbb{Z}.$$

(e) Utiliza el algoritmo de Euclides para hallar el MCD de las siguientes parejas de números. Además, utiliza este mismo algoritmo para escribir al MCD de cada pareja como combinación lineal de los números en dicha pareja.

   i. 329, 1005.
   ii. 1302, 1224.
   iii. 1816, -1789.
   iv. -666, -12309.

(f) Determina cuáles de las siguientes ecuaciones diofantinas tienen soluciones enteras. Para aquellas en las que sea posible, halla el conjunto de todas sus soluciones enteras.

   i. $35x + 17y = 14$;
   ii. $1242x + 1476y = 49$;
   iii. $15x + 21y = 10$.
   iv. $696x + 408y = 48$
   v. $(6n + 1)x + 3ny = 12$

4.

(a) Utilizando el principio del buen orden, demuestra que todo entero mayor a 1 es divisible entre al menos un número primo.

(b) Demuestra que el conjunto de números primos no es finito.

(c) Demuestra que si $a \equiv b(\text{mod } m)$ y $b \equiv c(\text{mod } m)$, entonces
$$a \equiv c(\text{mod } m).$$

(d) Prueba que $a \equiv 0(\text{mod } m)$ si y solo si $m|a$.

(e) Demuestra que que si $a \equiv b(\text{mod } m)$ entonces $ac \equiv bc(\text{mod } m)$ para cualquier entero c.

(f) Demuestra que si $a + c \equiv b + c(\text{mod } m)$, entonces
$$a \equiv b(\text{mod } m).$$

(g) Demuestra que si $ac \equiv bc(\text{mod}\, m)$ y m y c son primos entre sí entonces $a \equiv b(\text{mod } m)$.

(h) Supón que $m_1, m_2, \ldots, m_n$ son primos relativos dos a dos. Demuestra que las congruencias
$$x \equiv a_1 \left(\text{mod} m_1\right), x \equiv a_2 \left(\text{mod} m_2\right), \cdots, x \equiv a_n \left(\text{mod} m_n\right),$$
tienen solución común.

(i) Resuelve las siguientes congruencias:

   i. $16x - 9 \equiv 0(\mathrm{mod} 35)$.
   ii. $200x + 315 \equiv 0(\mathrm{mod} 441)$.
   iii. $(2n+1)x + 7 \equiv 0(\mathrm{mod} 4n)$.
   iv. $(3n-2)x + 5n \equiv 0(\mathrm{mod} 9n - 9)$.

(j) Resuelve los siguientes sistemas de congruencias:

   i. $\begin{array}{l} x \equiv 0 \pmod 3 \\ x \equiv 0 \pmod 8 \end{array}$
   ii. $\begin{array}{l} x \equiv 1 \pmod{25} \\ x \equiv 7 \pmod{35} \end{array}$
   iii. $\begin{array}{l} x \equiv 3 \pmod{17} \\ x \equiv 4 \pmod{21} \\ x \equiv 5 \pmod{25} \end{array}$