
Cálculo Integral de Una Variable



Notas del curso impartido por

Fernando Nuñez Medina

Departamento de Matemáticas

Universidad de Guanajuato

Escritas por

Ricardo León Martínez

Departamento de Matemáticas

Universidad de Guanajuato

Índice general

1	La Integral	3
1.1	Introducción	3

Capítulo 1

La Integral

La integral de riemann, o simplemente la integral, es otro de los conceptos fundamentales del Cálculo. En este capítulo veremos su definición y sus propiedades básicas. Enbrte otras cosas, con la integral definiremos el área bajo la curva de una función (más adelante veremos con presición que significa esto) y posteriormente veremos que, sorprendentemente, está relacionada con la derivada.

1.1. Introducción

En este texto trabajaremos con la definición de integral dada por Gastón Darboux (1842-1917). En el apéndice A damos la definición original de integral dad por Bernard Riemann (1822-1866) y mostramos que ambas son equivalentes. En la practica, la definición de integral dada por Darboux es mas sencilla de manejar que la dada por Riemann, por lo cual en este texto trabajaremos con la definición de Darboux. De aquí en adelante, a menos que se especifique lo contrario, cuando consideremos un intervalo cerrado $[a, b]$, supondremos que $a < b$.

Definición 1: Partición de un intervalo

Una partición de un intervalo $[a, b]$ es una colección de puntos $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ tal que

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b.$$

Denotaremos por $\mathcal{P}[a, b]$, o simplemente por \mathcal{P} si no hay confusión, al conjunto de todas las particiones de $[a, b]$. Al número

$$\|P\| = \max\{t_i - t_{i-1} : i = 1, \dots, n\},$$

Le llamaremos la norma de la partición P , es decir, $\|P\|$ es el máximo de las longitudes de los intervalos $[t_{i-1}, t_i], i = 1, \dots, n$.

Definición 2: Refinamiento de una partición

Dadas dos particiones P y Q de un intervalo $[a, b]$, se dice que Q es un refinamiento de P (o que Q es mas fina que P) si $P \subset Q$. Notemos que $P \cup Q$ sigue siendo partición de $[a, b]$; a $P \cup Q$ se le llama el refinamiento común de P y Q .

Definición 3: Sumas inferiores y superiores

Sea f una función acotada en un intervalo $[a, b]$ y consideremos una partición $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ de $[a, b]$. Para cada $i = 1, \dots, n$ definimos

$$m_i = \inf\{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\}$$

y

$$M_i = \sup\{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i]\}.$$

Definimos la suma inferior de f respecto de P como

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i(t_i - t_{i-1})$$

y la suma superior de f respecto de P como

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i(t_i - t_{i-1})$$

Es claro que $m_i \leq M_i$ para $i = 1, \dots, n$; en consecuencia,

$$L(f, P) \leq U(f, P). \quad (1.1)$$

La proposición siguiente establece otras propiedades de la sumas inferiores y de las sumas superiores que usaremos posteriormente.

Proposición 1

Sea f una función acotada en un intervalo $[a, b]$ y supongamos que P y Q son particiones de $[a, b]$. Se cumple lo siguiente:

- (a) Si Q es un refinamiento de P , es decir, si $P \subset Q$, entonces

$$L(f, P) \leq L(f, Q) \text{ y } U(f, Q) \leq U(f, P).$$

(b)

$$L(f, P) \leq U(f, Q). \quad (1.2)$$

(c)

$$\sup_{P \in \mathcal{P}} L(f, P) \leq \inf_{P \in \mathcal{P}} U(f, P). \quad (1.3)$$

En base al inciso (a) podemos decir que las sumas inferiores (superiores) son monótonas crecientes (decrecientes) respecto a los refinamientos. El inciso (b) afirma que cualquier suma inferior es menor o igual que cualquier suma superior, sin importar que particiones se consideren

Demostración. (a) Supongamos que $P \subset Q$. Probaremos que $L(f, P) \leq L(f, Q)$, la prueba de que $U(f, Q) \leq U(f, P)$ es similar. Si $P = Q$ es claro que $L(f, P) \leq L(f, Q)$. Supongamos ahora que Q tiene más puntos que P . Consideremos primero el caso en que Q contiene un punto más que P , digamos que $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ y que $Q = \{t_0, t_1, \dots, t_{j-1}, c, t_j, \dots, t_n\}$, para algún $1 \leq j \leq n$. Sea m_i como en la definición 3, es decir,

$$m_i = \inf\{f(x) : x \in [t_{i-1}, t_i], \quad 1 \leq i \leq n.$$

Definamos

$$s_1 = \inf\{f(x) : x \in [t_{j-1}, c]\}$$

y

$$s_2 = \inf\{f(x) : x \in [c, t_j]\}.$$

Así, $m_j \leq s_1$ y $m_j \leq s_2$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} L(f, P) &= \sum_{i=1}^n m_i(t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{j-1} m_i(t_j - t_{j-1}) + \sum_{i=j+1}^n m_i(t_i - t_{i-1}) \end{aligned}$$

■