UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO

DIVISIÓN DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS

CAMPUS GUANAJUATO

Tarea 8 (Cálculo Diferencial e Integral I)

Nombre:		
Grupo:	**Fecha:**	**Calificación:**
Profesor: Fernando Núñez Medina.		

Instrucciones: Escribe limpia y ordenadamente el procedimiento (si lo hay) de cada ejercicio y no escribas las respuestas en la hoja de la tarea.

1. Prueba las leyes de los exponentes (ejercicio 1 de la tarea 7) cuando m y n son números enteros. **Sugerencia:** Recuerda que si $x \neq 0$ y n es un número natural, el número x^{-n} se define como $(x^n)^{-1}$ o como $(x^{-1})^n$ (véase el ejercicio 1 de la tarea 6).
2. Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$. Prueba lo siguiente:
   (a) Si $0 < x < 1$, entonces $x^n < x$.
   (b) Si $1 < x$, entonces $x < x^n$.
   Sugerencia: Prueba primero el caso en que $n = 2$.
3. Sean A y B subconjuntos de números reales. Definimos
$$A + B = \{a + b : a \in A \text{ y } b \in B\}.$$
   Prueba que si A y B son no vacíos y acotados superiormente, entonces
$$\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B).$$
   Sugerencia: Para probar que $\sup(A) + \sup(B) \leq \sup(A + B)$ procede de la manera siguiente: Dado $\epsilon > 0$, por la proposición 13, existen $a \in A$ y $b \in B$ tales que
$$\sup(A) - \frac{\epsilon}{2} < a \leq \sup(A)$$

y

$$\sup(B) - \frac{\epsilon}{2} < b \leq \sup(B).$$

Así,

$$\sup(A) + \sup(B) - \epsilon < a + b \leq \sup(A + B)$$

y, en consecuencia,

$$\sup(A) + \sup(B) - \epsilon < \sup(A + B).$$

Como $\epsilon > 0$ fue arbitrario, por el ejercicio 2 de la tarea 5 obtenemos que

$$\sup(A + B) \leq \sup(A) + \sup(B).$$

4. Sea $n \in \mathbb{N}$. Prueba lo siguiente:
   (a) Si $0 \leq x < y$ y n es par, entonces $\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y}$.
   (b) Si $x < y$ y n es impar, entonces $\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y}$.
   Sugerencia: Procede por contradicción y ten en cuenta el ejercicio 5 de la tarea 7.
5. Sean A, B y C subconjuntos de $\mathbb{R}$, $g : A \to B$ y $f : B \to C$, de manera que $f \circ g : A \to C$. Prueba lo siguiente:
   (a) Si f y g son 1-1, entonces $f \circ g$ es 1-1.
   (b) Si f y g son sobre, entonces $f \circ g$ es sobre.
   (c) Si f y g son biyectivas, entonces $f \circ g$ es biyectiva.
6. Sean x y y números reales. Prueba lo siguiente:

   (a) $\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|}$, si $x \neq 0$. (b) $\frac{|x|}{|y|} = \left|\frac{x}{y}\right|$, si $y \neq 0$.

   Sugerencia: Recuerda como se definió la división y usa la unicidad del inverso multiplicativo.
7. Calcula los límites siguientes.
   (a) $\lim_{x\to 2} \frac{2x-3}{x+5} + (x-2)\sin(x)$.
   (b) $\lim_{x\to -2} \frac{x^3+2x^2+x+2}{x+2}$.
   (c) $\lim_{x\to 4} \left(\sqrt{x} - 5\right)^{1000000}$.
   (d) $\lim_{x\to 0^-} \sin(x)$.
   (e) $\lim_{x\to\infty} \frac{7}{x^2+1}$.

(f) $\lim_{x\to\infty} \frac{5x^4-4x^2}{3x^3+2x}$.

(g) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} - \frac{7}{x^3} + \frac{9}{\tan(x-\pi/2)}$.

(h) $\lim_{x\to\infty} -3x^3 - 2x^2 + x - 4$.

(j) $\lim_{x\to\infty} (x^2+2x-1)\ln(x) + 5$.

8. **(Límites y desigualdades)** Considera dos funciones f y g definidas en un intervalo abierto I que contiene a p tales que $\lim_{x\to p} f(x)$ y $\lim_{x\to p} g(x)$ existen.

(a) Prueba que si

$$f(x) \leq g(x) \quad \text{para todo } x \in I,$$

entonces

$$\lim_{x\to p} f(x) \leq \lim_{x\to p} g(x).$$

(b) ¿Se cumplirá que si $f(x) < g(x)$ para todo $x \in I$, entonces $\lim_{x\to p} f(x) < \lim_{x\to p} g(x)$? Argumenta tu respuesta.

9. Calcula

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin(x)}{x}.$$

Sugerencia: Ten presente que $|\sin(x)| \leq 1$ para toda x.

10. Da un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que sea discontinua solo en un número finito de puntos $p_1, ..., p_n$.