E_1	E_2	E_3	E_4	Calif.

Matemáticas Elementales

Agosto - Diciembre de 2025
Tarea 5

Resuelve los siguientes ejercicios según el reglamento del curso y **entrega esta página** con los nombres de los integrantes de equipo colocados en lugar de estas líneas de instrucciones. Todas las demostraciones deben redactarse justificando formalmente todos los pasos necesarios.

Antes de iniciar cada demostración, deberás indicar claramente cuáles son las hipótesis de cada ejercicio y qué es lo que debes demostrar en cada ejercicio.

La tarea debe resolverse con la teoría vista en el curso o con resultados a lo más de los cursos de preparatoria. Está prohibido utilizar resultados de otros cursos de este mismo semestre y/o trucos de alguna olimpiada relacionada con computación y/o matemáticas.

1. Calcula las siguientes sumas:
   (a) $\sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} j$.
   (b) $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (j+1)^{-1}$.
   (c) $\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j(j+1)}$.
2. Demuestra lo siguiente:
   (a) $\binom{n}{m}\binom{m}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{m-r}$.
   (b) $\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$.
   (c) Para números reales no negativos $x_1, \cdots, x_n$ es válida la desigualdad
   $$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}.$$
3. (a) Demuestra que para cada primo $p \geq 3$, $\binom{2p-1}{p-1} - 1$ es divisible entre p^2.

(b) Muestra que 3^{n+1} divide a $2^{3^n}+1$ para cada entero $n \geq 0$.

(c) Demuestra que para $n \geq 1$ se cumple que

$$\left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor,$$

donde $\lfloor x \rfloor$ es la parte entera inferior de x (función piso evaluada en x).

4. Realiza lo siguiente:

(a) Considera el arreglo $1, 2, \ldots, n$. Denotemos por $\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)$ un **reordenamiento o permutación** de $1, 2, \ldots, n$.

Por ejemplo, si tomamos $1, 2, 3$ y definimos σ como

$$\sigma(1) = 3, \sigma(2) = 1, \sigma(3) = 2,$$

σ es el reordenamiento que convierte a $1, 2, 3$ en $3, 1, 2$. En cambio, si definimos s como $s(1) = 2$, $s(2) = 3$ y $s(3) = 2$, s no es un reordenamiento, ya que no asigna el valor 1 a ninguno de los números en el arreglo original.

Supón que tenemos n de afirmaciones, $P(1), P(2), \ldots, P(n)$. Demuestra que todas las afirmaciones son equivalentes dos a dos si y sólo si para cualquier reordenamiento σ, aplicado a los índices, se cumple que $P(\sigma(n)) \Rightarrow P(\sigma(1))$ y $P(\sigma(k)) \Rightarrow P(\sigma(k+1))$ para todo $k = 1, 2, \ldots, n-1$.

(b) Jonás tiene un conejo al que apoda Cheñol Bunnyño. El Cheñol Bunnyño tiene un juguete de madera (para morder) que consta de n cuadrados acomodados en un patrón rectangular. El juguete completo o cualquier pieza más pequeña, puede partirse sobre la recta vertical o sobre la recta horizontal que separa los cuadrados.

El Cheñol Bunnyño es tan listo que, cada vez que muerde el juguete, separa un pedazo según las reglas descritas anteriormente (sólo separa un pedazo en cada mordida). Determina cuántas veces el Cheñol Bunnyño debe morder el juguete para que éste se parta en n piezas distintas (por supuesto, considera que el Cheñol Bunnyño **no** se come las piezas una vez separadas y no puede romper los cuadrados que forman el juguete).

5. (150 puntos extra sobre el total de las tareas, previo al promedio). Para $n \geq 2$, sean $a_1, \ldots, a_n$ números reales distintos entre sí y distintos de cero. Calcula la suma

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{p(a_j)}{\prod\limits_{k=1, k\neq j}^{n} (a_k - a_j)},$$

donde p es un polinomio arbitrario (con coeficientes reales) cuyo grado es $n-1$.

Sugerencia: considera primero el caso $p(x) = Cx^k$ para alguna constante real C y $k \leq n-1$.