

UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO
DIVISIÓN DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
CAMPUS GUANAJUATO

Tarea 3 (Calculo Diferencia e Integral II)

Nombre: Ricardo León Martínez

Fecha: 13/2/2026

Calificación: _____

Ejercicio 1

(Teorema del valor medio generalizado para integrales) Sean f y g funciones integrables en un intervalo $[a, b]$. Prueba que si f es continua y g no cambia de signo, entonces existe $c \in [a, b]$ tal que

$$\int_a^b fg = f(c) \int_a^b g.$$

Sugerencia: Supón primero que $g \geq 0$ (el caso en que $g \leq 0$ se sigue fácilmente del caso en que $g \geq 0$). Ten en cuenta que

$$m \leq f(x) \leq M,$$

donde

$$m = \min\{f(x) : x \in [a, b]\}$$

y

$$M = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}.$$

En consecuencia, por el ejercicio 2 de la tarea 3,

$$m \int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq M \int_a^b g.$$

Si $\int_a^b g = 0$, entonces $\int_a^b fg = 0$ y el resultado es claro. Si $\int_a^b g \neq 0$, entonces

$$m \leq \frac{1}{\int_a^b g} \int_a^b fg \leq M.$$

Intenta aplicar el teorema del valor intermedio.

Ejercicio 2

(Integral de una función impar) Prueba que si f es una función impar e integrable en un intervalo $[-a, a]$, entonces

$$\int_{-a}^a f = 0.$$

Sugerencia 1: Sean $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ una partición del intervalo $[0, a]$ y $Q = \{-t_0, \dots, -t_n\}$; así, Q es una partición del intervalo $[-a, 0]$. Prueba que

$$L(f, Q) = -U(f, P)$$

y

$$U(f, Q) = -L(f, P)$$

y usalo para probar lo afirmado. **Sugerencia 2:** Trata de usar el ejercicio 4 de la tarea 3.

Ejercicio 3

Calcula las integrales siguientes:

(a) $\int \sin(x) \cos(x) dx.$

(b) $\int \frac{\ln(x)}{x} dx.$

Solución. (a) $\int \sin(x) \cos(x) dx.$

Hagamos $u = \sin(x)$ y $du = \cos(x) dx$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \int \sin(x) \cos(x) dx &= \int u du. \\ &= \frac{1}{2} u^2 \\ &= \frac{1}{2} \sin^2(x). \end{aligned}$$

(b) $\int \frac{\ln(x)}{x} dx.$

Sea $u = \ln(x)$ y $du = \frac{1}{x} dx$. En consecuencia

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln(x)}{x} dx &= \int u du \\ &= \frac{1}{2} u^2 \\ &= \frac{1}{2} \ln^2(x) \end{aligned}$$

Ejercicio 4

$$(a) \int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx.$$

$$(b) \int \frac{1}{\sqrt{9+x^2}} dx.$$

$$(c) \int \frac{1}{\sqrt{x^2-2}} dx.$$

Solución. (a) $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx.$

Hagamos $x = 2 \sin(\theta)$ y $dx = 2 \cos(\theta) d\theta$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx &= \int \frac{2 \cos(\theta)}{\sqrt{4-4 \sin^2(\theta)}} \\ &= \int \frac{2 \cos(\theta)}{\sqrt{4 \cos^2(\theta)}} \\ &= \theta. \end{aligned}$$

Notemos que $\theta = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$. Así,

$$\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right).$$

$$(b) \int \frac{1}{\sqrt{9+x^2}} dx.$$

Sea $x = 3 \tan(\theta)$ y $dx = 3 \sec^2(\theta) d\theta$. Entonces $\tan(\theta) = \frac{x}{3}$ y $\sec(\theta) = \frac{\sqrt{x^2+9}}{3}$. En consecuencia,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{9+x^2}} dx &= \int \frac{3 \sec^2(\theta)}{\sqrt{9+9 \tan^2(\theta)}} d\theta \\ &= \int \frac{3 \sec^2(\theta)}{\sqrt{9 \sec^2(\theta)}} d\theta \\ &= \int \sec(\theta) d\theta \\ &= \ln(|\sec(\theta) + \tan(\theta)|). \end{aligned}$$

Así,

$$\int \frac{1}{\sqrt{9+x^2}} dx = \ln\left(\left|\frac{\sqrt{x^2+9}}{3} + \frac{x}{3}\right|\right).$$

$$(c) \int \frac{1}{\sqrt{x^2-2}} dx.$$

Sea $x = \sqrt{2} \sec(\theta)$ y $dx = \sqrt{2} \sec(\theta) \tan(\theta) d\theta$. Entonces $\sec(\theta) = \frac{x\sqrt{2}}{2}$ y $\tan(\theta) = \frac{\sqrt{2x^2-4}}{2}$. En

consecuencia,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x^2-2}} dx &= \int \frac{\sqrt{2} \sec(\theta) \tan(\theta)}{\sqrt{2 \sec^2(\theta) - 2}} d\theta \\ &= \int \frac{\sqrt{2} \sec(\theta) \tan(\theta)}{\sqrt{2 \tan^2(\theta)}} d\theta \\ &= \int \sec(\theta) d\theta \\ &= \ln(|\sec(\theta) + \tan(\theta)|).\end{aligned}$$

Así,

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-2}} dx = \ln \left(\left| \frac{x\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2x^2-4}}{2} \right| \right).$$

▲

Ejercicio 4

Calcula la integral

$$\int \frac{x+11}{x^2-5x-14} dx.$$

Solución. Notemos que el integrando es una función racional propia, así que seguiremos el método citado para descomponerlo en fracciones simples. Descomponemos el denominador del integrando en factores lineales y cuadráticos irreducibles

$$x^2 - 5x - 14 = (x-7)(x+2).$$

Por el factor $(x-7)$ la descomposición del integrando en fracciones simples incluye una fracción de la forma

$$\frac{A}{x-7}$$

y por el factor $(x+2)$ la descomposición del integrando en fracciones simples incluye una fracción de la forma

$$\frac{B}{x+2}.$$

Así, la descomposición del integrando en fracciones simples es

$$\frac{x+11}{x^2-5x-14} = \frac{A}{x-7} + \frac{B}{x+2}. \quad (1)$$

Notemos que A y B cumplen (1) si y solo si A y B cumple que

$$x+11 = A(x+2) + B(x-7). \quad (2)$$

Reexpresemos (2) como

$$x+11 = (A+B)x + 2A - 7B. \quad (3)$$

Puesto que dos polinomios son iguales si sus coeficientes son iguales, de (3) obtenemos que A y B satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}A + B &= 1 \\2A - 7B &= 11\end{aligned}$$

cuya solución es $A = 2$ y $B = -1$. Por lo cual

$$\frac{x+11}{x^2-5x-14} = \frac{2}{x-7} - \frac{1}{x+2}$$

y, en consecuencia

$$\begin{aligned}\frac{x+11}{x^2-5x-14} &= 2 \int \frac{1}{x-7} dx - \int \frac{1}{x+2} \\&= 2 \ln(x-7) - \ln(x+2) .\end{aligned}$$



Ejercicio 5

Prueba que las integrales impropias en los incisos (c),(d) y (e) de la definición 10 no dependen del punto p en cuestión.