

UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO
DIVISIÓN DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
CAMPUS GUANAJUATO

Tarea 10 (Calculo Diferencia e Integral I)

Nombre: Ricardo León Martínez **Fecha:** 31/10/2025 **Calificación:** _____

- 1. (Potencias racionales)** Prueba que el inciso (c) del ejercicio 1 de la tarea 9 tambien se cumple si m es un numero entero, es decir, prueba que si x es un numero real, m es un numero entero y n es un numero natural tales que $(x^m)^{1/n}$ y $(x^{1/n})^m$ estan definidos, entonces

$$(x^m)^{\frac{1}{n}} = (x^{\frac{1}{n}})^m.$$

Demostración. Sean $x \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que las expresiones $(x^m)^{1/n}$ y $(x^{1/n})^m$ estén definidas.

Caso 1: $m \geq 0$.

En este caso, m es un número natural o cero.

Por definición de potencia entera positiva, tenemos

$$x^m = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{m \text{ veces}}.$$

Luego, aplicando la potencia racional $1/n$, se obtiene:

$$(x^m)^{1/n} = \sqrt[n]{x^m}.$$

Por otra parte,

$$x^{1/n} = \sqrt[n]{x} \implies (x^{1/n})^m = (\sqrt[n]{x})^m = \underbrace{\sqrt[n]{x} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{x}}_{m \text{ veces}} = \sqrt[n]{x^m}.$$

Por lo tanto,

$$(x^m)^{1/n} = (x^{1/n})^m \quad \text{para todo } m \geq 0.$$

Caso 2: $m < 0$.

Sea $m = -k$ con $k \in \mathbb{N}$. Entonces:

$$(x^m)^{1/n} = (x^{-k})^{1/n} = \left(\frac{1}{x^k}\right)^{1/n} = \frac{1}{(x^k)^{1/n}}.$$

Por otra parte,

$$(x^{1/n})^m = (x^{1/n})^{-k} = \frac{1}{(x^{1/n})^k}.$$

Pero, del caso anterior (válido para $k > 0$):

$$(x^{1/n})^k = (x^k)^{1/n}.$$

Por sustitución:

$$(x^{1/n})^{-k} = \frac{1}{(x^k)^{1/n}}.$$

Por tanto,

$$(x^m)^{1/n} = (x^{1/n})^m.$$

Esto es que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que ambas expresiones estén definidas, se cumple

$$(x^m)^{1/n} = (x^{1/n})^m.$$

■

2. Sea $f : I \rightarrow J$ una función sobre, donde I y J son intervalos. Prueba lo siguiente:

- (a) Si f es creciente, entonces f es invertible y f^{-1} es creciente.
- (b) Si f es decreciente, entonces f es invertible y f^{-1} es decreciente.

Demostración. Sea $f : I \rightarrow J$ con I, J intervalos y $J = f(I)$ el rango de f .

(a) f estrictamente creciente $\Rightarrow f$ es invertible y f^{-1} es creciente.

Injectividad. Supongamos $x_1, x_2 \in I$ y $f(x_1) = f(x_2)$. Si $x_1 \neq x_2$, sin pérdida de generalidad supongamos $x_1 < x_2$. Como f es creciente, de $x_1 < x_2$ se sigue $f(x_1) < f(x_2)$, lo cual contradice $f(x_1) = f(x_2)$. Por tanto $x_1 = x_2$. Así f es inyectiva. Como f es inyectiva y su imagen es J , existe la función inversa $f^{-1} : J \rightarrow I$.

Monotonía de f^{-1} . Sean $y_1, y_2 \in J$ tales que $y_1 < y_2$. Definimos $x_1 = f^{-1}(y_1)$ y $x_2 = f^{-1}(y_2)$, de modo que $f(x_1) = y_1$ y $f(x_2) = y_2$. Supongamos, por contrapositiva, que $x_1 \geq x_2$. Si $x_1 = x_2$ entonces $y_1 = f(x_1) = f(x_2) = y_2$, contradicción con $y_1 < y_2$. Si $x_1 > x_2$, por la estricta creciente de f se tendría $f(x_1) > f(x_2)$, es decir $y_1 > y_2$, nuevamente contradicción. Por tanto no puede suceder $x_1 \geq x_2$; necesariamente $x_1 < x_2$. Esto muestra que $y_1 < y_2$ implica $f^{-1}(y_1) = x_1 < f^{-1}(y_2) = x_2$. Es decir, f^{-1} es estrictamente creciente en J .

(b) f estrictamente decreciente $\Rightarrow f$ es invertible y f^{-1} es decreciente.

El argumento es análogo al caso (a) cambiando las desigualdades.

Injectividad. Si $x_1 < x_2$ y f es decreciente entonces $f(x_1) > f(x_2)$. Por tanto no pueden existir $x_1 \neq x_2$ con $f(x_1) = f(x_2)$; así f es inyectiva y admite inversa $f^{-1} : J \rightarrow I$.

Monotonía de f^{-1} . Sean $y_1, y_2 \in J$ con $y_1 < y_2$ y $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Si se tuviera $x_1 \leq x_2$ entonces por la decrecencia de f seguiría $f(x_1) \geq f(x_2)$, es decir $y_1 \geq y_2$, contradicción. Por tanto necesariamente $x_1 > x_2$. Así $y_1 < y_2$ implica $f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2)$, esto es, f^{-1} es decreciente. ■

3. Da un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que sea continua solo en un punto $x = 0$, Definimos

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Demostración. Demostraremos que f es continua en 0 y que es discontinua en todo $a \neq 0$.

Continuidad en 0. Sea $\varepsilon > 0$. Tomemos $\delta = \varepsilon$. Si $|x - 0| < \delta$ entonces:

- si $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = x$ y por tanto $|f(x) - f(0)| = |x - 0| < \delta = \varepsilon$; - si $x \notin \mathbb{Q}$, $f(x) = 0$ y $|f(x) - f(0)| = 0 < \varepsilon$.

Así, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \varepsilon$ tal que $|x - 0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(0)| < \varepsilon$. Por lo tanto f es continua en 0.

Discontinuidad en $a \neq 0$. Sea $a \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$. Consideramos dos casos:

1. $a \in \mathbb{Q}$. Entonces $f(a) = a \neq 0$. Existe una sucesión de números irracionales (y_n) tal que $y_n \rightarrow a$. Para cada n se tiene $f(y_n) = 0$. Por tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = 0 \neq a = f(a)$. Esto muestra que f no es continua en a .

2. $a \notin \mathbb{Q}$. Entonces $f(a) = 0$. Existe una sucesión de números racionales (r_n) con $r_n \rightarrow a$. Para cada n se tiene $f(r_n) = r_n$ y por tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} f(r_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = a \neq 0 = f(a)$. De nuevo f no es continua en a .

En ambos subcasos f es discontinua en a . Por tanto f es discontinua en todo punto $a \neq 0$.

por lo que $f(x)$ es continua solo en $x = 0$ y discontinua en todo $x \neq 0$. ■

4. Muestra que el rango de un polinomio de grado impar es todo \mathbb{R} .

Demostración. Sea $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ un polinomio real con coeficientes $a_i \in \mathbb{R}$ y $\deg p = n$ impar. Es decir, $n = 2k + 1$ para algún $k \in \mathbb{N}_0$, y $a_n \neq 0$.

1. *Comportamiento en los extremos.* Como n es impar, se tiene

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n = \begin{cases} +\infty, & a_n > 0, \\ -\infty, & a_n < 0, \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a_n x^n = \begin{cases} -\infty, & a_n > 0, \\ +\infty, & a_n < 0. \end{cases}$$

Dado que los términos de menor grado son de orden inferior frente a $a_n x^n$, se concluye que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = \begin{cases} +\infty, & a_n > 0, \\ -\infty, & a_n < 0, \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = \begin{cases} -\infty, & a_n > 0, \\ +\infty, & a_n < 0. \end{cases}$$

En particular, los límites en $+\infty$ y $-\infty$ tienen signos opuestos.

2. *Aplicación del Teorema del Valor Intermedio (TVI).* Sea $y \in \mathbb{R}$ arbitrario. Consideremos la función continua

$$q(x) := p(x) - y.$$

Por la observación anterior existen $X_1, X_2 \in \mathbb{R}$ con $X_1 < X_2$ tales que $q(X_1)$ y $q(X_2)$ tienen signos opuestos (por ejemplo, tomar X_1 suficientemente negativo y X_2 suficientemente positivo). Concretamente, si $a_n > 0$ entonces $q(X_1) < 0$ para X_1 muy negativo y $q(X_2) > 0$ para X_2 muy positivo; el caso $a_n < 0$ es análogo intercambiando signos.

Como q es continua en el intervalo $[X_1, X_2]$ y $q(X_1) \cdot q(X_2) < 0$, el Teorema del Valor Intermedio garantiza la existencia de $c \in (X_1, X_2)$ tal que

$$q(c) = 0.$$

Es decir, $p(c) - y = 0$, o bien $p(c) = y$.

3. *Conclusión.* Dado que $y \in \mathbb{R}$ era arbitrario, para cada y existe $c \in \mathbb{R}$ con $p(c) = y$. Así la imagen (rango) de p es \mathbb{R} . ■

5. (Derivada de la función exponencial) Como comentamos anteriormente, la función exponencial e^x es la función inversa de la función logaritmo natural $\ln(x)$. Sabiendo que para $x > 0$,

$$\ln'(x) = \frac{1}{x},$$

Prueba que la derivada de la función exponencial e^x es la función exponencial e^x .

Demostración. Sea $e^x : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ la función inversa de $\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple

$$\ln(e^x) = x.$$

La función \ln es diferenciable en todo $t > 0$ y su derivada es $\ln'(t) = \frac{1}{t}$. En particular, $\ln'(e^x) = \frac{1}{e^x}$ y esta cantidad es distinta de cero para todo $x \in \mathbb{R}$. Por el teorema de la derivada de la función inversa, se tiene que e^x es diferenciable en todo $x \in \mathbb{R}$ y su derivada viene dada por

$$(e^x)' = \frac{1}{\ln'(e^x)}.$$

Sustituyendo $\ln'(e^x) = \frac{1}{e^x}$ obtenemos

$$(e^x)' = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x.$$

De forma equivalente, aplicando directamente la regla de la cadena a $\ln(e^x) = x$:

$$\frac{1}{e^x} \cdot (e^x)' = 1 \implies (e^x)' = e^x.$$

Por tanto, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x.$$

■

6. La recta tangente a la grafica de una funcion f en el punto $(1, 2)$ pasa por el punto $(3, 4)$. Encuentra $f(1)$ y $f'(1)$.

Solución. Puesto que $(1, 2)$ pertenece a la gráfica de f , se tiene

$$f(1) = 2.$$

La ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(1, 2)$ viene dada por

$$y - 2 = f'(1)(x - 1).$$

Dado que dicha recta pasa por $(3, 4)$, sustituimos $(x, y) = (3, 4)$ en la ecuación anterior y obtenemos

$$4 - 2 = f'(1)(3 - 1).$$

Por tanto

$$2 = 2 f'(1) \implies f'(1) = 1.$$

Así,

$$f'(1) = 1.$$

◀

7. Realiza lo siguiente:

(a) Dibuja la siguiente hipérbola

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1.$$

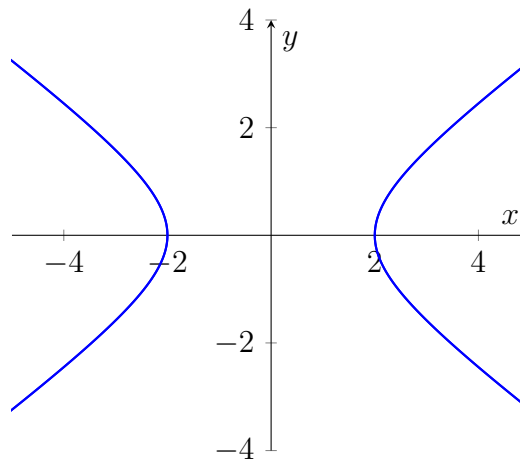
(b) Usa la derivación implícita para calcular la pendiente de la recta tangente T a la hipérbola del inciso (a) en el punto $(3, \sqrt{5/2})$.

(c) Encuentra la ecuación de T .

(d) Dibuja la gráfica de T .

Solución.

(a) La gráfica es



(b) Diferenciando implícitamente la ecuación de la hipérbola respecto de x obtenemos

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} \right) = \frac{d}{dx} (1).$$

Calculando las derivadas,

$$\frac{2x}{4} - \frac{2y y'}{2} = 0,$$

de donde se simplifica a

$$\frac{x}{2} - y y' = 0.$$

Despejando y' ,

$$y' = \frac{x}{2y}.$$

En el punto $(3, \sqrt{5/2})$ la pendiente es

$$y' \Big|_{(3, \sqrt{5/2})} = \frac{3}{2\sqrt{5/2}}.$$

Observando que $\sqrt{5/2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$, se puede simplificar:

$$\frac{3}{2\sqrt{5/2}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

Por tanto la pendiente de la tangente en el punto dado es

$$m = \frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

(c) La ecuación punto-pendiente de la recta tangente T en $(3, \sqrt{5/2})$ es

$$y - \sqrt{\frac{5}{2}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}(x - 3).$$

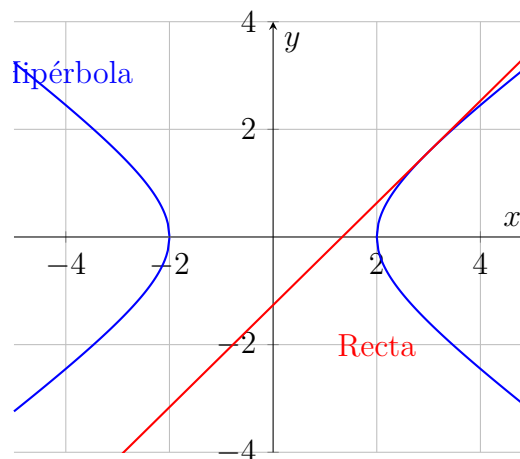
Usando $\sqrt{5/2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$ se puede reescribir T en forma explícita $y = mx + b$.
Calculamos la ordenada al origen:

$$b = \sqrt{\frac{5}{2}} - m \cdot 3 = \frac{\sqrt{10}}{2} - 3 \cdot \frac{3\sqrt{10}}{10} = \sqrt{10} \left(\frac{1}{2} - \frac{9}{10} \right) = \sqrt{10} \left(\frac{5-9}{10} \right) = -\frac{2\sqrt{10}}{5}.$$

Así, la ecuación en forma pendiente-intersección es

$$y = \frac{3\sqrt{10}}{10}x - \frac{2\sqrt{10}}{5}.$$

(d) La grafica es



8. Encuentra los intervalos abiertos donde la funcion $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ es creciente o decreciente utilizando la receta de la subseccion 5.8.1.