UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO

DIVISIÓN DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS

CAMPUS GUANAJUATO

Tarea 12 (Cálculo Diferencial e Integral I)

Nombre:		
Grupo:	**Fecha:**	**Calificación:**
Profesor: Fernando Núñez Medina.		

Instrucciones: Escribe limpia y ordenadamente el procedimiento (si lo hay) de cada ejercicio y no escribas las respuestas en la hoja de la tarea.

1. Prueba que si $f : B \to \mathbb{R}$ es continua y $A \subset B$, entonces $f|_A : A \to \mathbb{R}$ es continua.
2. **(Las funciones continuas mandan intervalos cerrados y acotados en intervalos cerrados y acotados)** Prueba que si f es continua en $[a, b]$, entonces $f([a, b]) = [m, M]$, donde $m = \min \{f(x) : x \in [a, b]\}$ y $M = \max \{f(x) : x \in [a, b]\}$.
3. Prueba que si $f : B \to C$ y $g : A \to B$ son funciones uniformemente continuas, entonces $f \circ g : A \to C$ es uniformemente continua.
4. **(Derivada de las funciones trigonométricas inversas)** Usa la proposición 62 (derivada de una función inversa) para mostrar lo siguiente:
   (a) $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1.$
   (b) $\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1.$
   (c) $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad -\infty < x < \infty.$
   (d) $\operatorname{arccot}'(x) = \frac{-1}{1+x^2}, \quad -\infty < x < \infty.$
   (e) $\operatorname{arcsec}'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, & x > 1, \\ \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}, & x < -1. \end{cases}$
   (f) $\operatorname{arccsc}'(x) = \begin{cases} \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}, & x > 1, \\ \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, & x < -1. \end{cases}$

Sugerencia: Por la proposición 62 (derivada de una función inversa) sabemos que si $f(x) = \sin(x)$, entonces

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(f^{-1}(x))}, \quad -1 < x < 1.$$

Puesto que $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ para todo numero real x, resulta que

$$\sin^2\left(f^{-1}(x)\right) + \cos^2\left(f^{-1}(x)\right) = 1, \quad -1 < x < 1$$

y, en consecuencia, que

$$\frac{1}{\cos(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1,$$

lo cual prueba el inciso (a). La prueba del inciso (b) es similar a la prueba del inciso (a). Para probar el inciso (c) usa que $\tan^2(x) + 1 = \sec^2(x)$; para probar el inciso (d) usa que $1 + \cot^2(x) = \csc^2(x)$; para probar el inciso (e) usa que[1]

$$\tan(\operatorname{arcsec}(x)) = \begin{cases} \sqrt{x^2-1}, & \text{si } x \geq 1, \\ -\sqrt{x^2-1}, & \text{si } x \leq -1. \end{cases}$$

Finalmente, para probar el inciso (f) usa que[2]

$$\cot(\operatorname{arccsc}(x)) = \begin{cases} \sqrt{x^2-1}, & \text{si } x \geq 1, \\ -\sqrt{x^2-1}, & \text{si } x \leq -1. \end{cases}$$

5. Encuentra los mínimos y máximos globales de la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ en el intervalo $[-1, 1]$.
6. Supongamos que un diseñador de recipientes desea construir un recipiente cilíndrico de cartón sin tapa. Se requiere que el cilindro tenga un volumen V de $27\pi\ cm^3$. ¿Cuáles serán las dimensiones del cilindro que minimicen la cantidad de cartón empleado para construirlo.
7. Expresa los polinomios siguientes como polinomios centrados en 1.

[1] Verificaremos esta igualdad en el curso de Cálculo II.
[2] Verificaremos esta igualdad en el curso de Cálculo II.

(a) $f(x) = 5.$

(b) $f(x) = 2x + 1.$

(c) $f(x) = 4x^2 - 9x + 6.$

(d) $f(x) = x^{10} - 2x^3 + 3x^2 + 7x - 11.$

Sugerencia: Basta con encontrar el polinomio de Taylor de f de grado el grado de f centrado en 1, ¿por qué?

8. Realiza lo siguiente:
   (a) Calcula los polinomios de Taylor centrados en 0 de la función $\cos(x)$.
   (b) Estima el número $\cos(2)$ con una exactitud de tres cifras decimales.

   Sugerencia: Usa el hecho de que puedes hacer $2^n/n!$ tan pequeño como quieras tomando n suficientemente grande.