UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO
DIVISIÓN DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS
CAMPUS GUANAJUATO

Tarea 2 (Cálculo Diferencial e Integral I)

Nombre: Ricardo Leon Martinez
Grupo: A Fecha: 22/08/2025 Calificación:
Profesor: Fernando Núñez Medina.

Instrucciones: Escribe limpia y ordenadamente el procedimiento (si lo hay) de cada ejercicio y no escribas las respuestas en la hoja de la tarea.

1. Encuentra $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ y $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ si $A_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$ para cada $n \in \mathbb{N}$.
Solución:

Para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $A_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$.

La unión de todos los A_n es:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \{1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N}.$$

La intersección de todos los A_n es:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing,$$

porque para cualquier número natural k, existe $n > k$ tal que $k \notin A_n$.

2. Prueba los incisos (c) y (d) de la proposición 2.
Demostración:

(c) Leyes distributivas

I) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
Demostración:
($\subseteq$) Sea $x \in A \cup (B \cap C)$. Entonces $x \in A$ o $x \in B \cap C$.

- Si $x \in A$, entonces $x \in A \cup B$ y $x \in A \cup C$, luego $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- Si $x \in B \cap C$, entonces $x \in B$ y $x \in C$, luego $x \in A \cup B$ y $x \in A \cup C$, por tanto $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

($\supseteq$) Sea $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Entonces $x \in A \cup B$ y $x \in A \cup C$.

- Si $x \in A$, entonces $x \in A \cup (B \cap C)$.
- Si $x \notin A$, entonces $x \in B$ y $x \in C$, luego $x \in B \cap C$, por tanto $x \in A \cup (B \cap C)$. $\blacksquare$

II) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Demostración:
($\subseteq$) Sea $x \in A \cap (B \cup C)$. Entonces $x \in A$ y $x \in B \cup C$.

- Si $x \in B$, entonces $x \in A \cap B$.
- Si $x \in C$, entonces $x \in A \cap C$.

En ambos casos, $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
($\supseteq$) Sea $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Entonces $x \in A \cap B$ o $x \in A \cap C$.

- Si $x \in A \cap B$, entonces $x \in A$ y $x \in B$, luego $x \in B \cup C$, por tanto $x \in A \cap (B \cup C)$.
- Si $x \in A \cap C$, entonces $x \in A$ y $x \in C$, luego $x \in B \cup C$, por tanto $x \in A \cap (B \cup C)$. ■

(d) Leyes de De Morgan

I) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$
Demostración:
($\subseteq$) Sea $x \in A \setminus (B \cup C)$. Entonces $x \in A$ y $x \notin B \cup C$, luego $x \notin B$ y $x \notin C$. Por tanto, $x \in A \setminus B$ y $x \in A \setminus C$, es decir, $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
($\supseteq$) Sea $x \in (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$. Entonces $x \in A \setminus B$ y $x \in A \setminus C$, luego $x \in A$, $x \notin B$ y $x \notin C$. Por tanto, $x \notin B \cup C$, así que $x \in A \setminus (B \cup C)$.

II) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ ■
Demostración:
($\subseteq$) Sea $x \in A \setminus (B \cap C)$. Entonces $x \in A$ y $x \notin B \cap C$, luego $x \notin B$ o $x \notin C$.

- Si $x \notin B$, entonces $x \in A \setminus B$.
- Si $x \notin C$, entonces $x \in A \setminus C$.

En ambos casos, $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.
($\supseteq$) Sea $x \in (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$. Entonces $x \in A \setminus B$ o $x \in A \setminus C$.

- Si $x \in A \setminus B$, entonces $x \in A$ y $x \notin B$, luego $x \notin B \cap C$, por tanto $x \in A \setminus (B \cap C)$.
- Si $x \in A \setminus C$, entonces $x \in A$ y $x \notin C$, luego $x \notin B \cap C$, por tanto $x \in A \setminus (B \cap C)$. ■

3. Prueba el inciso (b) de la proposición 4.
Demostración (Ley de cancelación para el producto):

Queremos probar que si $x \neq 0$ y $xy = z$, entonces $y = \frac{z}{x}$.

Partimos de la igualdad:

$$xy = z.$$

Multiplicamos ambos lados por el inverso multiplicativo de x (que existe porque $x \neq 0$):

$$x^{-1}(xy) = x^{-1}z.$$

Por la asociatividad del producto:

$$(x^{-1}x)y = x^{-1}z.$$

Como $x^{-1}x = 1$, tenemos:

$$1 \cdot y = x^{-1}z.$$

Y por la propiedad del neutro multiplicativo:

$$y = x^{-1}z = \frac{z}{x}.$$

■

4. Sea x un número real. Prueba, usando la unicidad del inverso aditivo, lo siguiente:

(a) $(-1)x = -x$.
Demostración:
Por definición, el inverso aditivo de x es el número $-x$ que cumple:

$$x + (-x) = 0.$$

Calculemos:

$$x + (-1)x = 1 \cdot x + (-1)x = (1 + (-1))x = 0 \cdot x = 0.$$

Por lo tanto, $(-1)x$ también es un inverso aditivo de x. Como el inverso aditivo es único, concluimos que:

$$(-1)x = -x.$$

■

(b) $-(-x) = x$.
Demostración:
Por definición, $-x$ es el inverso aditivo de x, es decir:

$$x + (-x) = 0.$$

Esto también significa que x es el inverso aditivo de $-x$, es decir:

$$(-x) + x = 0.$$

Pero por definición, el inverso aditivo de $-x$ es $-(-x)$. Como el inverso aditivo es único, concluimos que:

$$-(-x) = x.$$

■

5. Sea x un número real distinto de cero. Prueba, usando la unicidad del inverso multiplicativo, que

$$(x^{-1})^{-1} = x.$$

Demostración:

Por definición, x^{-1} es el inverso multiplicativo de x, es decir:

$$x \cdot x^{-1} = 1.$$

Esto también significa que x es el inverso multiplicativo de x^{-1}. Pero por definición, el inverso multiplicativo de x^{-1} es $(x^{-1})^{-1}$. Como el inverso multiplicativo es único, concluimos que:

$$(x^{-1})^{-1} = x.$$

■

6. Prueba que si $x \leq y$ y $y \leq x$, entonces $x = y$.
Demostración:

Por hipótesis, $x \leq y$ y $y \leq x$. Esto significa que:

$$y - x \geq 0 \quad \text{y} \quad x - y \geq 0.$$

Sumando estas dos desigualdades:

$$(y - x) + (x - y) \geq 0 + 0,$$

es decir,

$$0 \geq 0.$$

Como la única posibilidad es que ambas diferencias sean cero, tenemos:

$$y - x = 0 \quad \text{y} \quad x - y = 0,$$

lo que implica que $x = y$.

■

7. Prueba que si $x < y$ y $z < w$, entonces $x + z < y + w$.
Demostración:

Por hipótesis, $x < y$ y $z < w$, lo que significa:

$$y - x > 0 \quad \text{y} \quad w - z > 0.$$

Sumando estas dos desigualdades:

$$(y - x) + (w - z) > 0 + 0,$$

es decir,

$$(y + w) - (x + z) > 0.$$

Por lo tanto, $x + z < y + w$.

■

8. Sea A un conjunto no vacío. Prueba que si $x < c$ para toda $x \in A$, entonces

$$\sup(A) \leq c.$$

Demostración:

Por hipótesis, para todo $x \in A$ se tiene $x < c$, lo que implica $x \leq c$. Por tanto, c es una cota superior de A.

Por definición, $\sup(A)$ es la menor cota superior de A. Como c es una cota superior de A, debe cumplirse que:

$$\sup(A) \leq c.$$

■