



**UNIVERSIDAD DE GUANAJUATO**  
**DIVISIÓN DE CIENCIAS NATURALES Y EXACTAS**  
**CAMPUS GUANAJUATO**

**Tarea 6 (Cálculo Diferencial e Integral I)**

<b>Nombre:</b>		
<b>Grupo:</b>	<b>Fecha:</b>	<b>Calificación:</b>
<b>Profesor:</b> Fernando Núñez Medina.		

**Instrucciones:** Escribe limpia y ordenadamente el procedimiento (si lo hay) de cada ejercicio y no escribas las respuestas en la hoja de la tarea.

1. (**Potencias enteras negativas**) Sean  $x \neq 0$  y  $n$  un número natural. Usa la unicidad del inverso multiplicativo para probar que

$$(x^n)^{-1} = (x^{-1})^n.$$

En vista de esta ecuación se define  $x^{-n}$  como  $(x^n)^{-1}$  o como  $(x^{-1})^n$ .

2. Sean  $A$  un subconjunto de números reales y  $c \in \mathbb{R}$ . Definimos

$$cA = \{ca : a \in A\}.$$

Prueba que si  $A$  es no vacío y acotado superiormente, y  $c \geq 0$ , entonces

$$\sup(cA) = c \sup(A).$$

3. (**Binomio de Newton**) Sean  $a$  y  $b$  números reales y  $n$  un número natural. Prueba que

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \dots + \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{n} b^n.$$

**Sugerencia:** Usa el principio de inducción matemática y ten presente el ejercicio 4 de la tarea 5.

4. Prueba, mediante contraejemplos, que es falso que la suma, resta, producto y cociente de números irracionales sea un número irracional.
5. Sean  $f : A \rightarrow B$ ,  $C \subset A$  y  $D \subset B$ . Prueba lo siguiente:

$$(a) \ C \subset f^{-1}(f(C)). \qquad (b) \ f(f^{-1}(D)) \subset D.$$

6. **(Desigualdad del triángulo generalizada)** Prueba que si  $n \in \mathbb{N}$  y  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ , entonces

$$|x_1 + \dots + x_n| \leq |x_1| + \dots + |x_n|.$$

**Sugerencia:** Usa el principio de inducción matemática y ten presente la desigualdad del triángulo.

7. Prueba, usando la definición de límite, que  $\lim_{x \rightarrow 2} 3x = 6$ .
8. Prueba, usando la negación de la definición de límite, que es **falso** que  $\lim_{x \rightarrow 2} 3x = -1$ .
9. Calcula los límites siguientes:
  - (a)  $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^3 - 2x^2 + 4)$ .
  - (b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$ .
  - (c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x^2 + 1)$ .
  - (d)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} 2x^3 - x + 5$ .
  - (e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} + \arctan(x)$ .
  - (f)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 4x^2}{3x^4 + 2x}$ .
10. Prueba que  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = 0$  ssi  $\lim_{x \rightarrow p} |f(x)| = 0$ .