Analyt. geom. v rovině 1 – cvičení 2:

1. Jsou dány vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{u}$ a velikost vektoru $\vec{v}$.
   $\vec{a} = (3; -4), \vec{b} = (-2; 3), \vec{c} = (-10; 15), \vec{d} = (-12; 16), \vec{u} = (-2; u_2), |\vec{v}| = 3\sqrt{13}$.

   a) Mezi $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ najděte dvojice rovnoběžných vektorů.

   $\vec{a} = -\frac{1}{4}\vec{d} \rightarrow \underline{\vec{a} \parallel \vec{d}}$

   $\vec{b} = \frac{1}{5}\vec{c} \rightarrow \underline{\vec{b} \parallel \vec{c}}$

   b) Určete chybějící souřadnice $\vec{u}$ tak, aby $\vec{u} \parallel \vec{a}$.

   $(-2; u_2) = k \cdot (3; -4) \rightarrow -2 = k \cdot 3 \rightarrow k = -\frac{2}{3} \rightarrow u_2 = \left(-\frac{2}{3}\right) \cdot (-4) \rightarrow$

   $\rightarrow \underline{u_2 = \frac{8}{3}}$

   c) Určete $\vec{v}$ tak, aby měl danou velikost a $\vec{v} \parallel \vec{b}$. $\vec{v} = k \cdot \vec{b} = (-2k; 3k)$

   $\vec{v} = \sqrt{(-2k)^2 + (3k^2)} = \sqrt{13k^2} \rightarrow \sqrt{13k^2} = 3\sqrt{13} \rightarrow 13k^2 = 117 \rightarrow$

   $\rightarrow k = \pm 3 \rightarrow \underline{\vec{v}(\mp 6; \pm 9)}$

2. Na souřadnicové ose y určete bod A tak, aby měl od bodu $B = [-6; -5]$ vzdálenost 10. $A[0; a_2]$ $\vec{AB}(-6; -5 - a_2)$

   $|AB| = \sqrt{36 + (a_2 + 5)^2} = \sqrt{36 + a_2^2 + 10a_2 + 25} = 10 \rightarrow a_2^2 + 10a_2 + 61 = 100 \rightarrow$

   $\rightarrow a_2^2 + 10a_2 - 39 = 0 \rightarrow a_2 = 3; -13 \rightarrow \underline{A[0; 3]\ \bar{A}[0; -13]}$

3. Vypočítejte skalární součin daných vektorů a rozhodněte, zda jsou na sebe kolmé:
   $\vec{u} = (2; -1), \vec{v} = (3; 6)$

   $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 6 = \underline{0 \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v}}$

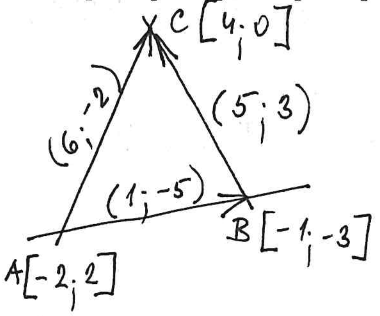
4. Určete vektor $\vec{u}$ tak, aby měl velikost 10 a přitom byl kolmý k vektoru $\vec{v} = (-1; 2)$. $\vec{u}(u_1, u_2)$

   $u_1^2 + u_2^2 = 100 \wedge -1 \cdot u_1 + 2 \cdot u_2 = 0 \rightarrow u_1 = 2u_2 \rightarrow (2u_2)^2 + u_2^2 = 100 \rightarrow$

   $\rightarrow 5u_2^2 = 100 \rightarrow u_2^2 = 20 \rightarrow u_2 = \begin{cases} 2\sqrt{5} \\ -2\sqrt{5} \end{cases} \rightarrow u_1 = \begin{cases} 4\sqrt{5} \\ -4\sqrt{5} \end{cases}$

   $\underline{\vec{u}(4\sqrt{5}; 2\sqrt{5})\ \vec{u}'(-4\sqrt{5}; -2\sqrt{5})}$

5. Určete velikosti vnitřních úhlů a stran trojúhelníka ABC:
   $A = [-2; 2], B = [-1; -3], C = [4; 0]$



   $\underline{a} = |\vec{BC}| = \sqrt{25 + 9} = \underline{\sqrt{34}}$

   $\underline{b} = |\vec{AC}| = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} = \underline{2\sqrt{10}}$

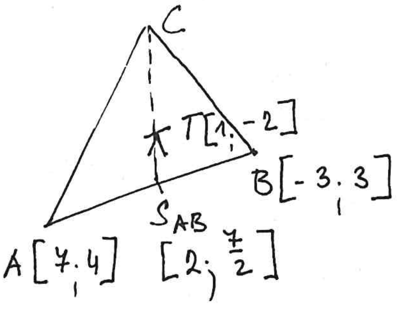
   $\underline{c} = |\vec{AB}| = \sqrt{1 + 25} = \underline{\sqrt{26}}$

   $\cos\alpha = \frac{6 + 10}{\sqrt{26} \cdot 2\sqrt{10}} = \frac{16}{\sqrt{1040}} \rightarrow \underline{\alpha \doteq 60{,}26°}$

   $\cos\beta = \frac{-5 + 15}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{34}} = \frac{10}{\sqrt{884}} \rightarrow \underline{\beta \doteq 70{,}35°}$

   $\gamma \doteq 49{,}39°$

6. V trojúhelníku ABC jsou dány vrcholy $A = [7; 4], B = [-3; 3]$ a jeho těžiště $T = [1; -2]$. Určete souřadnice vrcholu C.



   $S_{AB}\left[2; \frac{7}{2}\right]$ $\vec{S_{AB}T}\left(-1; -\frac{11}{2}\right) = \vec{v}$

   $\underline{C} = T + 2 \cdot \vec{v} = [1; -2] + (-2; -11) = \underline{[-1; -13]}$

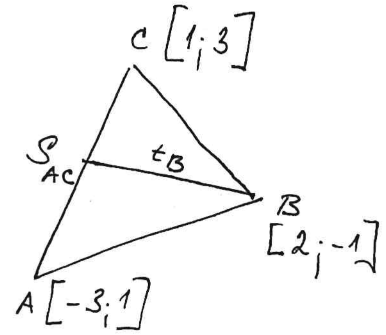
7. Určete vektor $\vec{v}$, který je kolmý k vektoru $\vec{u} = (5;12)$ a má velikost $|\vec{v}| = 32{,}5$. $\vec{v}(v_1, v_2)$

$5 \cdot v_1 + 12 \cdot v_2 = 0 \rightarrow v_1 = -\frac{12}{5} v_2$

$\sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 32{,}5 \rightarrow \left(-\frac{12}{5}\right)^2 v_2^2 + v_2^2 = 1056{,}25 \rightarrow \frac{169}{25} v_2^2 = 1056{,}25 \rightarrow$

$\rightarrow v_2^2 = 156{,}25 \rightarrow v_2 = \pm 12{,}5$

$\vec{v}(-30;\ 12{,}5),\ \vec{v}'(30;\ -12{,}5)$



8. Určete délku těžnice t_b v trojúhelníku ABC, je-li: $A = [-3;1], B = [2;-1], C = [1;3]$.

$S_{AC} = [-1;2]$; $\overrightarrow{S_{AC}B}(3;-3)$

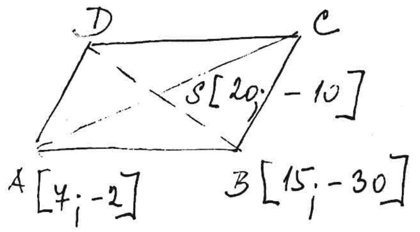
$t_B = \sqrt{3^2 + (-3)^2} = \sqrt{18} \rightarrow t_B = 3\sqrt{2}$

9. Jsou dány body $A = [7;1], B = [-3;5], C = [4;-6], D = [2;d_2]$. Určete druhou souřadnici bodu D tak, aby vektory $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{CD}$ byly na sebe kolmé.

$\overrightarrow{AB}(-10;4),\ \overrightarrow{CD}(-2;d_2+6) \rightarrow -10 \cdot (-2) + 4(d_2+6) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 20 + 4d_2 + 24 = 0 \rightarrow d_2 = -11$

10. Určete souřadnice vrcholů C a D rovnoběžníku ABCD, jestliže S je průsečík jeho úhlopříček a platí: $A = [7;-21], B = [15;-30], S = [20;-10]$.

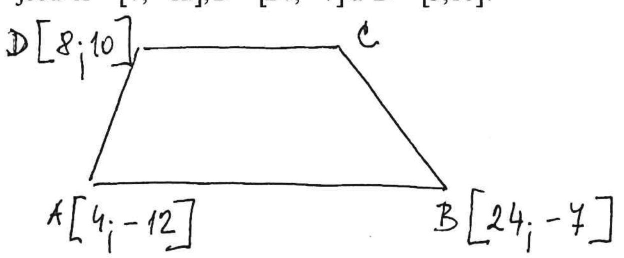


$\overrightarrow{AS}(13;-8)$; $C = S + \overrightarrow{AS} = [33;-18]$

$\overrightarrow{BS}(5;20)$; $D = S + \overrightarrow{BS} = [25;10]$

11. Určete souřadnice vrcholu C lichoběžníku ABCD, když velikosti základen jsou ve vztahu $|AB| = \frac{5}{2}.|CD|$ a souřadnice daných vrcholů jsou $A = [4;-12], B = [24;-7]$ a $D = [8;10]$.

$\rightarrow |CD| = \frac{2}{5} \cdot |AB|$

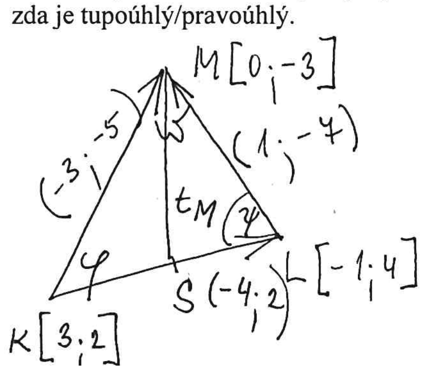


$\overrightarrow{AB}(20;5)$

$C = D + \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} = [8;10] + (8;2) \rightarrow$

$C = [16;12]$

12. Je dán trojúhelník KLM, $K[3;2], L[-1;4], M[0;-3]$. Určete velikost těžnice t_M. Určete souřadnice těžiště trojúhelníku. Rozhodněte, zda je tupoúhlý/pravoúhlý.



$S[1;3]$ $\overrightarrow{SM}(-1;-6) \rightarrow t_M = \sqrt{1+36} = \sqrt{37}$

$T_{KLM}\left[\frac{3-1+0}{3};\ \frac{2+4-3}{3}\right] = \left[\frac{2}{3};1\right]$

$\cos\varphi = \frac{12-10}{\text{velikosti}} > 0 \rightarrow \varphi$ ostrý

$\cos\psi = \frac{4 \cdot 1 + (-2)\cdot(-7)}{\ldots} > 0 \rightarrow \psi$ ostrý

$\cos\omega = \frac{-3+35}{\ldots} > 0 \rightarrow \omega$ ostrý