



The background image shows a coastal area from an aerial perspective. A large, light-colored landmass, possibly a delta or a coastal plain, extends from the bottom left towards the top right. A deep blue body of water surrounds the land. A prominent, light-colored, winding feature, likely a river or a coastal inlet, cuts through the landmass, creating a series of curves and inlets. The overall scene is a mix of earthy tones and deep blues.

UNIDAD DIDÁCTICA
MATEMÁTICAS
DEL PLANETA TIERRA

FUNDACIÓN ESPAÑOLA PARA LA CIENCIA Y LA TECNOLOGÍA

UNIDAD DIDÁCTICA MATEMÁTICAS DEL PLANETA TIERRA



GOBIERNO
DE ESPAÑA

MINISTERIO
DE ECONOMÍA
Y COMPETITIVIDAD



FUNDACIÓN ESPAÑOLA
PARA LA CIENCIA
Y LA TECNOLOGÍA



Esta publicación está disponible gratuitamente, en formato pdf, en el apartado de publicaciones de la página web: <http://www.fecyt.es>, con el fin de facilitar su acceso a la comunidad educativa.

La FECYT expresa su más sincero agradecimiento a todas las personas e instituciones que han colaborado desinteresadamente con la cesión de textos e imágenes.

Edita y coordina

Unidad Didáctica "Matemáticas del Planeta Tierra": Fundación Española para la Ciencia y la Tecnología (FECYT)
Anexo "Matemáticas del Planeta Tierra. Cuaderno de Actividades": Fundación SM

Coordinación de contenidos

Manuel de León Rodríguez (Instituto de Ciencias Matemáticas, ICMAT)
Ágata A. Timón (Instituto de Ciencias Matemáticas, ICMAT)

Revisor didáctico

Luis Rico

Redacción de textos

Marta Casanellas
Antonio Córdoba
Diego Córdoba
Vanesa Daza
Manuel de León
Marco Antonio Fontelos López
Antonio Gómez Tato
José Manuel González Vida
Tomás L. Gómez
Enrique Macías Virgós
Ana María Mancho
David Martín de Diego
Rafael Montenegro
Mª Luz Muñoz Ruiz
Juan José Nieto Roig
Rafael Orive Illera
Carlos Parés
Christiane Rousseau
Juan José Rué
Carlos Vázquez Cendón
Ana Zumalacárregui

Foto de portada: "Baño de diamantes". Autora: María Estela Arana Urbano.

Obra seleccionada de la 9^a edición del Certamen de Fotografía Científica FOTCIENCIA.

Diseño, maquetación e impresión: Editorial MIC

Depósito Legal: M-13154-2013

NIPO: 720-13-031-3

e-NIPO: 720-13-030-8

En todos los casos se prohíbe el uso no autorizado de las imágenes.

ÍNDICE

I. PRESENTACIÓN	7
II. PRÓLOGO	9
BLOQUE 1: CIENCIAS DE LA TIERRA	10
1.1 EL POSICIONAMIENTO SOBRE LA TIERRA	15
1.2 TIERRA, EL PLANETA “SÓLIDO”	29
1.3 LA TIERRA: UN PLANETA CON MARES Y ATMÓSFERA	47
BLOQUE 2: LA VIDA EN LA TIERRA	62
2.1 MODELOS MATEMÁTICOS DE LAS EPIDEMIAS	67
2.2 LAS MATEMÁTICAS DE LA EVOLUCIÓN Y LA BIODIVERSIDAD	81
2.3 LAS MATEMÁTICAS NOS AYUDAN A CRECER	97
2.4 MATEMÁTICAS PARA EL ESTUDIO Y TRATAMIENTO DE LAS ENFERMEDADES	113
2.5 EL GENOMA HUMANO	131
BLOQUE 3: SOSTENIBILIDAD	150
3.1 METEOROLOGÍA Y CLIMA	155
3.2 MATEMÁTICAS Y ECONOMÍA	171
3.3 CATÁSTROFES INDUCIDAS POR EL HOMBRE	193
3.4 MATEMÁTICAS Y REDES	211
3.5 LAS MATEMÁTICAS QUE HACEN SEGURA LA RED	229
3.6 ENERGÍA	247
BLOQUE 4: LOS ALREDEDORES DE LA TIERRA Y MÁS ALLÁ	264
4.1. SISTEMA SOLAR	269
4.2. EL PLANETA TIERRA EN EL UNIVERSO	287
III. JUSTIFICACIÓN DE LA ESTRUCTURA DE LA OBRA	303
IV. GLOSARIO	321
V. ÍNDICE DE AUTORES	335

I. PRESENTACIÓN

El 5 de marzo de 2013 se celebró en París el acto de apertura del Año Internacional de las Matemáticas del Planeta Tierra. A lo largo del año, sociedades científicas, universidades, centros de investigación y otras organizaciones en todo el mundo celebraron numerosas actividades, tanto científicas como de divulgación, con el objetivo de destacar el papel de las matemáticas en la resolución de algunos de los desafíos a los que se enfrenta nuestro planeta.

Las matemáticas no suelen ser una de las materias más populares entre los escolares. El ejercicio de abstracción que, en ocasiones, se les exige, hace que muchos de ellos pierdan el interés. Y los docentes deben buscar fórmulas que motiven a sus estudiantes a encontrar la utilidad de los conceptos matemáticos y su aplicación a problemas de gran actualidad.

El cambio climático, las catástrofes inducidas por el hombre, la previsión de enfermedades basándose en modelos matemáticos o el trasfondo matemático de las redes, tan utilizadas en la actualidad por la sociedad, son algunas de las materias tratadas en esta unidad didáctica, elaborada por especialistas en las mismas. La revisión de un experto en didáctica de las matemáticas ha permitido, por otra parte, contextualizar los contenidos

en el currículo de estudiantes de enseñanza secundaria y bachillerato. Así, cada capítulo se inicia con una breve presentación y una serie de indicaciones donde se pueden encontrar los objetivos y contenidos del currículo escolar a los que responde. Asimismo, se señalan otras asignaturas que pueden tener relación con la materia tratada en el capítulo.

Los ejercicios, anécdotas y ejemplos que se hallan en cada uno de los capítulos de la obra, así como los materiales auxiliares que se presentan al final de cada capítulo –películas, lecturas recomendadas o páginas web con información de interés– ofrecen a los docentes herramientas para la realización de actividades en el aula que apoyen su labor.

Esperamos que esta unidad didáctica, como el resto de las hasta ahora editadas por la Fundación Española para la Ciencia y la Tecnología, sirva para hacer un poco más conscientes a los jóvenes de la importancia que tiene la ciencia en su vida cotidiana.

José Ignacio Fernández Vera
Director general
Fundación Española para la Ciencia y la Tecnología

II. PRÓLOGO

Esta unidad didáctica nace dentro de una iniciativa internacional de gran relevancia, la proclamación de 2013 como Año de las Matemáticas del Planeta Tierra (Mathematics Planet Earth, MPE 2013). Esta declaración ha tenido su origen en las sociedades matemáticas e institutos de investigación de Estados Unidos y Canadá, y posteriormente ha recibido el apoyo de la Unión Matemática Internacional (IMU) y la UNESCO.

El objetivo del MPE 2013 es señalar la importancia de las matemáticas para conocer y gestionar mejor el funcionamiento de nuestro planeta –su propia estructura, la vida que alberga, los fenómenos en su corteza, en su atmósfera y en sus océanos, la influencia de la actividad humana, nuestro entorno astronómico– y también para estar mejor preparados ante catástrofes que nos alcanzan a veces de una manera terrible. Las matemáticas son indispensables para avanzar en esta comprensión de la casa que habitamos y, en gran medida, nuestra propia supervivencia como especie depende de la misma. Aunque es casi imposible trazar un panorama exhaustivo de todas estas circunstancias, esta unidad pretende dar una visión lo más completa posible.

Si bien esta obra puede ser leída por cualquier persona interesada en estos temas, los destinatarios finales son los profesores y alumnos de educación secundaria y, con tal propósito, se incluyen análisis didácticos de los contenidos y propuestas de ejercicios y actividades para las aulas. A través de este trabajo se quiere ofrecer una visión de las matemáticas, a veces estudiadas sin una justificación clara, como herramienta indispensable para comprender y controlar según nuestros intereses el mundo que nos rodea y como base de cualquier desarrollo tecnológico, imprescindible para hacer sostenible la vida de la especie en nuestro planeta.

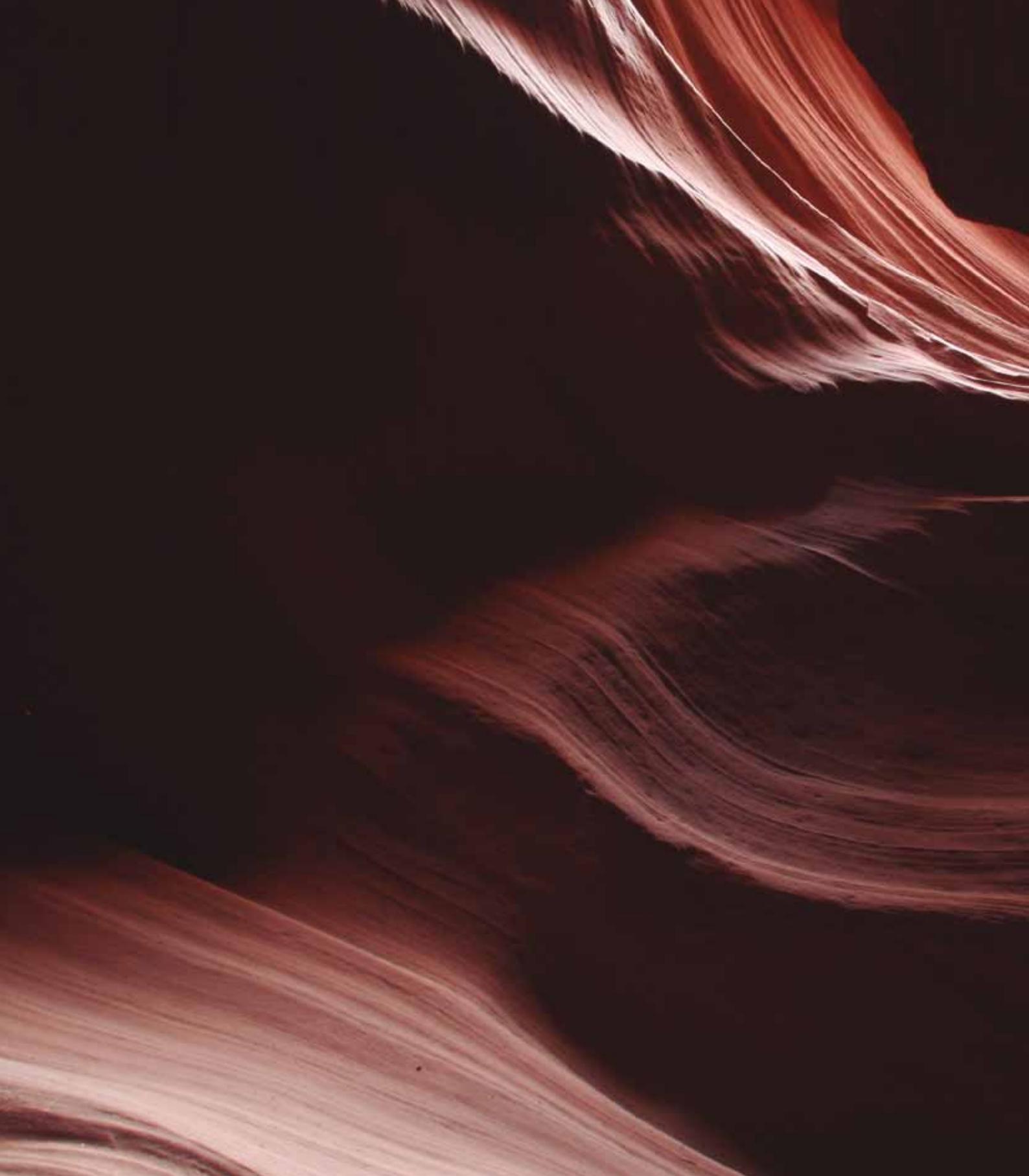
Se ha dividido la obra en 16 capítulos, desarrollado cada uno de ellos por expertos en el tema y con materiales complementarios (libros, películas, series televisivas, portales de Internet) que pueden resultar de utilidad en las clases para amenizar e ilustrar los textos.

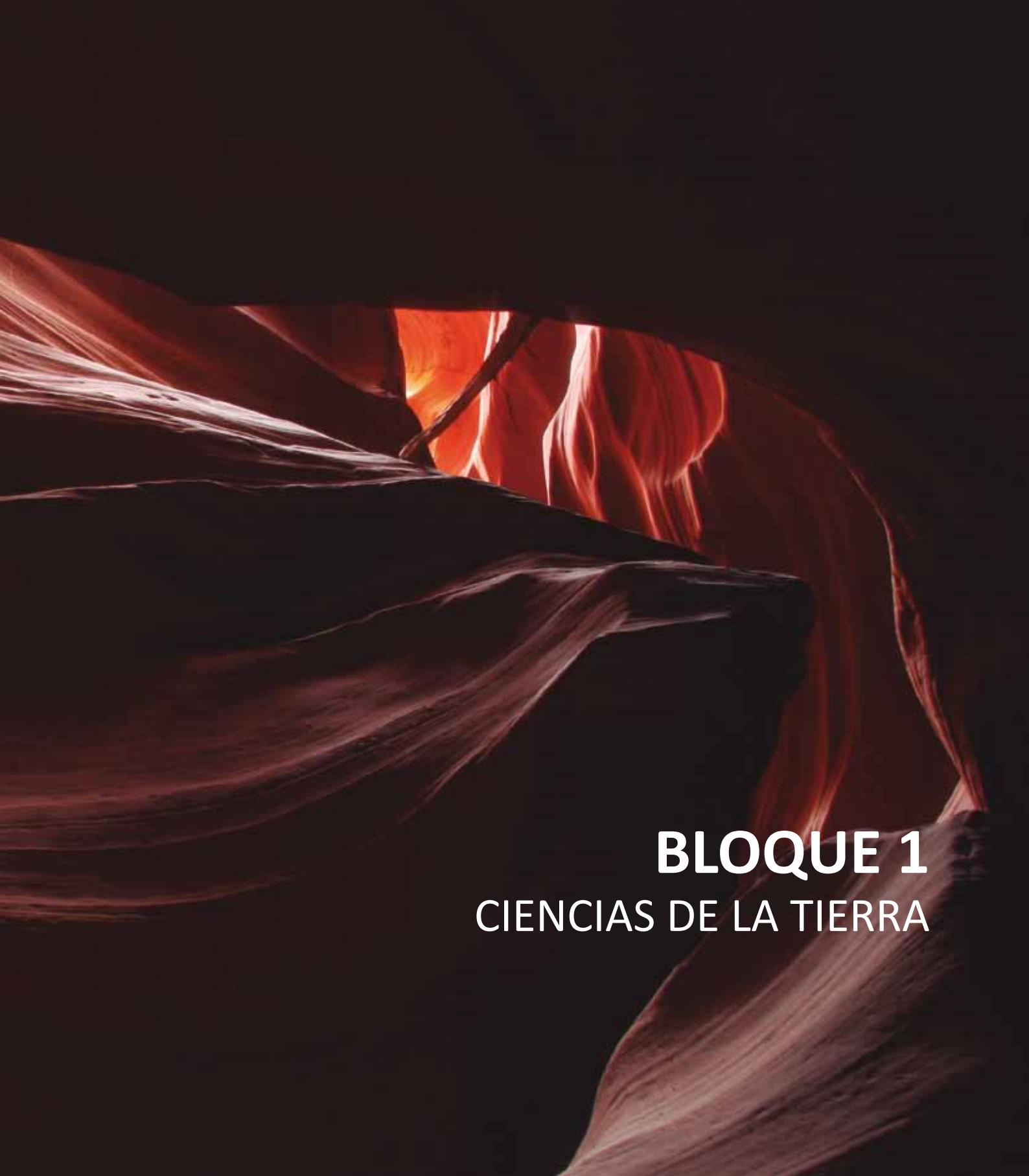
Manuel de León

Director del Instituto de Ciencias Matemáticas, ICMAT

Ágata Timón García-Longoria

Responsable de Comunicación y
Divulgación del Instituto de Ciencias Matemáticas, ICMAT



The background image shows a slot canyon with layered rock walls. Sunlight streams through the opening at the top, creating a bright glow and casting long shadows. The rock has a reddish-brown hue with darker streaks.

BLOQUE 1

CIENCIAS DE LA TIERRA

La huella del tiempo

Autor: Miguel Gómez Boronat. FOTCIENCIA9

Cuando hablamos de ciencia no podemos olvidar las impresionantes formaciones rocosas que se encuentran en la superficie de la Tierra. Un ejemplo de estas formaciones lo constituye el Antelope Canyon (o "Cañón del Antílope" en castellano), un estrecho cañón localizado en el suroeste de Estados Unidos. Para formar este increíble paisaje, el terreno geológico se ha ido horadando durante miles de años como consecuencia del paso de corrientes de agua, dando como resultado un estrecho espacio arenoso delimitado por unas paredes anaranjadas que pueden llegar a alcanzar los 40 metros de altura. Sus pasillos están ocupados por sinuosas curvas y oquedades bellamente iluminadas por la entrada de los rayos del sol, como si de una catedral se tratase.

EL POSICIONAMIENTO SOBRE LA TIERRA

Christiane Rousseau

1.1

Objetivos, contenido y criterios de evaluación de acuerdo con los Reales Decretos de Enseñanzas Mínimas, (1467/2007 de 2 noviembre para Bachillerato y 1631/2007 de 29 de diciembre para Educación Secundaria Obligatoria).

Este capítulo pretende mostrar los fundamentos matemáticos del Sistema de Posicionamiento Global (GPS), la herramienta que permite establecer una posición determinada sobre la superficie de la Tierra con un nivel de precisión considerable. El fundamento matemático básico está basado en la idea, aparentemente simple, de lugar geométrico. El razonamiento consiste en calcular varias medidas, lineales o angulares, relativas a un objeto o posición, para deducir que este se encuentra en la intersección de varios lugares geométricos, de modo que se puede establecer su posición exacta.

En el cálculo de posición varios satélites miden su distancia a un objeto sobre la superficie de la Tierra. A partir de cada medida el receptor GPS deduce que el objeto se encuentra sobre una esfera centrada en dicho satélite. Al interseccar cuatro de estas esferas se encuentra el punto en que está situado el objeto o posición buscados.

La autora explica y detalla cómo funciona el GPS en la práctica para obtener la exactitud suficiente y aborda algunos de los problemas de precisión que se plantean. Además muestra algunas aplicaciones geológicas y geográficas, como son medir la altitud exacta de las montañas, su crecimiento anual, o bien medir los movimientos relativos de las placas. También dedica un apartado extenso a las aplicaciones a la cartografía, comparando su empleo en

los distintos tipos de proyecciones y en la corrección de las distorsiones que cada una de ellas produce.

La lectura y el trabajo con este capítulo responden especialmente a los objetivos 03 y 04 de la asignatura Ciencias para el Mundo Contemporáneo, común para primer curso de bachillerato. Estos son:

03. Obtener, analizar y organizar informaciones de contenido científico, utilizar representaciones y modelos, hacer conjjeturas, formular hipótesis y realizar reflexiones fundadas que permitan tomar decisiones fundamentadas y comunicarlas a los demás con coherencia, precisión y claridad.

04. Adquirir un conocimiento coherente y crítico de las tecnologías de la información, la comunicación y el ocio presentes en su entorno, propiciando un uso sensato y racional de las mismas para la construcción del conocimiento científico, la elaboración del criterio personal y la mejora del bienestar individual y colectivo.

Adicionalmente, la información relativa a los problemas de posicionamiento sobre la Tierra que se aborda en este capítulo sirve para ampliar contenidos y objetivos de la asignatura Geografía, para la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales.

INTRODUCCIÓN

¿Dónde estamos? Desde tiempos inmemoriales el ser humano ha necesitado saber en qué punto espacial se sitúa en cada momento. En las sociedades prehistóricas se trataba de volver a los campamentos después de la caza. Actualmente, los exploradores y navegantes necesitan encontrar su ruta a través de la naturaleza, mientras los conductores tienen que orientarse en el entramado de calles y carreteras. El **Sistema de Posicionamiento Global** (Global Positioning System) es una herramienta moderna que nos permite establecer nuestra posición con un alto nivel de precisión. Aunque además, si estás perdido en un velero en alta mar solo es útil saber tu posición si también sabes a dónde quieres ir. Por eso, para encontrar el camino correcto también necesitamos la ayuda de los mapas. ¿Cómo funciona el GPS y cómo se dibujan los mapas de la Tierra? Estos son los temas principales que vamos a tratar en este capítulo.

EL SISTEMA DE POSICIONAMIENTO GLOBAL (GPS)

Antiguamente el hombre utilizaba herramientas elementales para establecer su posición: la brújula magnética, el astrolabio y más tarde el **sextante**. El sextante nos permite medir ángulos desde el horizonte hasta una estrella o el mismo Sol, y de esta manera obtener un **lugar geométrico** relativo al observador. Si el observador calcula varias medidas, puede deducir que se encuentra en la intersección de varios lugares geométricos y, por lo tanto, establecer su posición exacta. Sorprendentemente, tales razonamientos geométricos elementales aún son necesarios en las sofisticadas técnicas modernas de localización. En el caso del sextante, le permitiría al observador deducir algunos datos acerca de su posición relativa a una estrella. En el caso del sistema GPS, el receptor mide algunos datos sobre su posición relativa a una red de satélites, cuya posición se conoce. Entremos en mayor detalle. ¿Cómo funciona el sistema?

El Departamento de Defensa de Estados Unidos ultimó la **constelación de satélites** GPS en julio de 1995 y quedó autorizado su uso para el público en general. En su pri-

mer despliegue, el sistema se componía de 24 satélites, y estaba diseñado de tal manera que al menos 21 de ellos estarían funcionando durante un 98% del tiempo. En 2011 el sistema aumentó a 30 satélites NAVSTAR, al menos 24 de los cuales estaban en pleno funcionamiento, mientras los otros o proporcionaban una precisión mayor al sistema o garantizaban su seguridad en el caso de que fallase uno de los satélites. Los satélites se sitúan a 20.200 km de la superficie de la Tierra y se distribuyen en órbitas contenidas en seis planos diferentes (los planos orbitales). Cada plano tiene una inclinación de 55 grados respecto al ecuador terrestre (figura 1) y contiene al menos cuatro satélites por plano orbital, casi equidistantes los unos de los otros. Cada satélite tarda 11 horas y 58 minutos en hacer una órbita circular alrededor de la Tierra y **se sitúan de tal manera que se puedan localizar al menos 4 satélites sobre la Tierra en cualquier momento**. Ahora veremos el porqué.

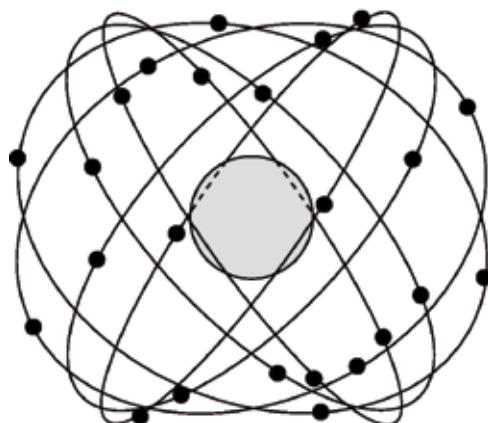


Figura 1. Los 24 satélites en 6 planos orbitales. Imagen: Christiane Rousseau.

CÁLCULO DE POSICIÓN MEDIANTE UN RECEPTOR GPS

Toda esta constelación de satélites, ¿cómo permite calcular la posición exacta de un receptor? La posición de los satélites se conoce en todo momento y, además, estos emiten señales electromagnéticas a una frecuencia preestablecida. Hace falta un receptor especial para

utilizar el sistema que graba las señales y las utiliza para calcular el tiempo del recorrido de las señales al restar la hora grabada de su llegada de la hora conocida de su salida. Al hacer una computación de estos datos de un satélite determinado, el receptor calcula la distancia que lo separa de este satélite (esta distancia es simplemente el tiempo del recorrido de la señal multiplicado por la velocidad de la luz, que es la velocidad de propagación de las señales). Los puntos que están a una distancia determinada del satélite forman una esfera.

Por lo tanto, a partir de cada medida el receptor puede deducir que se encuentra sobre una esfera centrada en dicho satélite. Basta intersecar cuatro de estas esferas para encontrar el punto en el que está situado el observador. En general, la intersección de dos esferas forma un círculo (figura 2 a). Puesto que, en general, un círculo y una esfera se cruzan en dos puntos (figura 2 b), a partir de solo tres medidas el receptor puede deducir que se encuentra en uno de estos dos puntos (figura 3). Una cuarta medida permitiría al receptor descartar uno de los puntos de intersección y, por lo tanto, establecer su posición con exactitud. Sin embargo, esto no es necesario, ya que los satélites se sitúan de tal manera que el otro punto se encuentre muy lejos de la superficie de la Tierra, y queda descartado por no ser nada realista. Entonces, ¿por qué necesitamos al menos cuatro satélites en órbita para poder utilizar el sistema GPS?

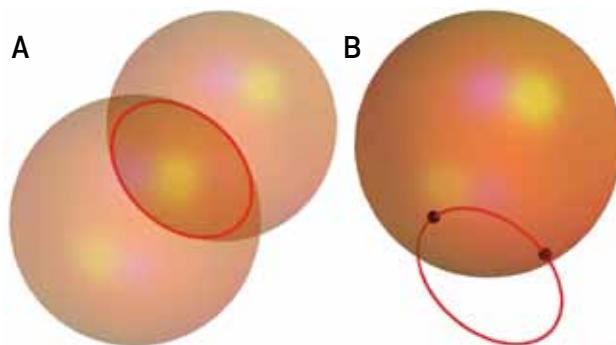


Figura 2. La intersección de las dos primeras esferas formando un círculo (a). Este círculo corta la tercera esfera en dos puntos (b). Imagen: Christiane Rousseau.

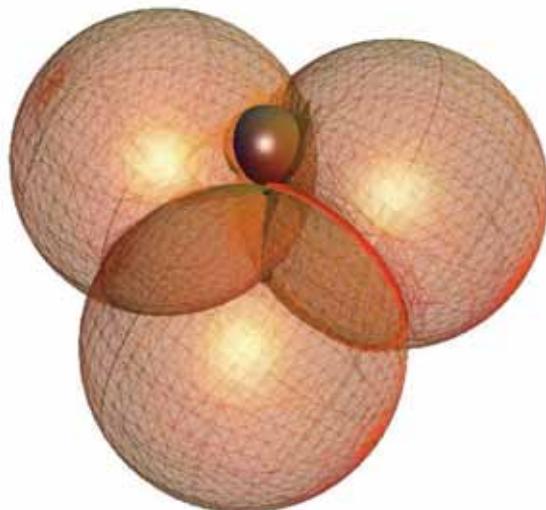


Figura 3. Los dos puntos de intersección de las tres esferas. Uno de los puntos marca la posición del receptor sobre la Tierra y el otro punto se descarta por no ser nada realista. Imagen: Christiane Rousseau.

DEMASIADO SENCILLO PARA FUNCIONAR

El análisis descrito arriba parte de la hipótesis subyacente de que tanto los relojes de los satélites como el del receptor están perfectamente sincronizados. Esto es posible si se trata de los costosos **relojes atómicos** de los satélites, pero no del reloj barato del receptor, que tiene la precisión suficiente para cronometrar recorridos cortos pero carece de la precisión necesaria para mantenerse sincronizado con los relojes de los satélites. Por lo tanto, ¿cómo nos las arreglamos en la práctica?

ADAPTÁNDOSE A RESTRICCIONES PRÁCTICAS

Volvamos a lo que hicimos en el caso idóneo. Considerando el problema analíticamente, teníamos tres incógnitas: las coordenadas x , y , z de la posición del receptor. Así que nos hacían falta tres medidas para poder encontrar un número finito de soluciones; cada medida nos daba un lugar geométrico (la esfera) en el espacio tridimensional.

Si el reloj del receptor no está sincronizado con los de los satélites, entonces tenemos otra incógnita, a saber: el desplazamiento τ entre el reloj del receptor y los de los satélites. Si el receptor calcula el tiempo de recorrido (ficticio) de las señales entre los cuatro satélites y el receptor, entonces el receptor se halla en los puntos de intersección de los cuatro lugares geométricos en un espacio-tiempo de cuatro dimensiones (x, y, z, τ). Una vez más, estos cuatro lugares geométricos tienen dos puntos de intersección, y uno de estos puntos se descarta por no ser realista. Los detalles de los cálculos pueden encontrarse en Rousseau y Saint-Aubin (2008).

OBTENER LA PRECISIÓN SUFICIENTE

Hay otros aspectos a tener en cuenta para conseguir la precisión deseada:

- Se puede aumentar la precisión si hay más de cuatro satélites. Puesto que cada medida siempre contiene un error, no sabemos si el receptor se encuentra en una esfera, sino solamente que se halla dentro de una esfera maciza. Cuando las esferas macizas se cruzan formando un ángulo pequeño, la zona de intersección tiene un diámetro mucho mayor que el que se forma cuando estas esferas se cruzan con un ángulo grande. Por lo tanto, si se pueden seleccionar los satélites, siempre resulta preferible seleccionarlos de manera que las esferas se crucen formando ángulos grandes. Esta idea puede explicarse con la ayuda de la figura 4, donde se dibujan círculos en vez de esferas para que el concepto quede más claro.



Figura 4. Un ángulo de intersección pequeño a la izquierda (pérdida de precisión) y un ángulo grande a la derecha. Imagen: Christiane Rousseau.

- Por otro lado, tenemos que admitir que hemos hecho trampas. Hacen falta unas correcciones relativistas.

De hecho, la alta velocidad de los satélites ralentiza sus relojes, mientras la gran masa terrestre los acelera. La suma neta de los dos errores no es igual a cero y ha de tenerse en cuenta.

- El proceso que hemos descrito proporciona una precisión de 20 metros. Una fuente de error reside en la velocidad de la señal, que es variable según su rumbo por la atmósfera. Si se trata de un GPS diferencial el proceso es el siguiente: en un receptor GPS cercano cuya posición se conoce, se compara el tiempo real del recorrido con el tiempo del recorrido ideal, lo cual nos permite calcular la velocidad de la señal con más exactitud. Al comunicarse esta información al receptor, se puede mejorar la precisión hasta 1 cm.

ALGUNAS APLICACIONES

Las aplicaciones son muchas y algunas de ellas muy populares. A continuación, describimos otras más desconocidas.

- Un receptor GPS constituye una referencia temporal. Esto puede parecer sorprendente, ya que hemos dicho que el reloj del receptor es un reloj barato que no se mantiene en sincronización con los relojes de los satélites. No obstante, también hemos dicho que el receptor puede resolver un sistema de cuatro ecuaciones en las cuatro incógnitas x, y, z, τ . Una vez que el receptor haya resuelto este sistema, ya se sabe el desplazamiento τ entre su reloj y los de los satélites, y por eso puede sincronizar su reloj con los de los satélites. Así que los receptores GPS constituyen una manera eficaz de sincronizar detectores. Por ejemplo, puede tratarse de pararrayos o de detectores de ondas sísmicas después de un terremoto. En el caso de la red eléctrica de un país entero, los receptores GPS se acoplan a detectores colocados en todos los nodos, de manera que cada nodo puede constatar la hora exacta en que un problema surge en las líneas de alta tensión, y así localizar el problema de manera aproximada. En Canadá, en la provincia de Quebec, todos los equipos a lo largo de las líneas de alta tensión están sincronizados con GPS. En esta provincia las líneas de alta tensión son muy largas, con tramos que pasan por áreas remotas,

y suelen producirse problemas durante tormentas de nieve. Es por eso que cualquier información sobre el lugar aproximado del fallo es muy útil.

- Los GPS se utilizan para medir tanto la altitud exacta de las montañas como su crecimiento anual. Gracias a la ayuda de GPS se pudo establecer que el monte Everest era más alto que el K2 y, por lo tanto, la montaña más alta del mundo.
- La corteza terrestre se compone de 12 inmensas placas tectónicas cuyos contornos no son sencillos de determinar. La velocidad de desplazamiento de las placas puede variar de 2 a 10 cm cada año. Los receptores GPS se utilizan para medir los movimientos relativos de las placas, pero una de las dificultades de medir estos desplazamientos es que no hay un punto fijo sobre la Tierra, ya que todas las placas se están desplazando sobre el manto viscoso. Las mediciones recientes realizadas con GPS nos permiten refinar la cartografía de las placas, y los geofísicos todavía están descubriendo nuevas placas pequeñas: en los modelos más recientes hay al menos 52 placas tectónicas. Es interesante señalar también que algunos puntos que parecían pertenecer a la misma placa se desplazan entre sí.

LA CARTOGRAFÍA

¿Cómo se puede dibujar un mapa de la Tierra? La Tierra tiene forma de esfera, pero un mapa se dibuja sobre una hoja de papel. Y si pruebas a ajustar una hoja de papel a una esfera, pronto te darás cuenta de que no lo puedes hacer sin crear un número infinito de pliegues. De hecho, Carl Friedrich Gauss (1777-1855) demostró que es imposible dibujar un mapa de la Tierra y al mismo tiempo conservar todos los ángulos y la razón de las distancias. ¿Por qué? Porque una esfera tiene una curvatura positiva en cada punto, mientras un plano tiene una curvatura cero. Tanto un cilindro como un cono tienen una curvatura cero, y se pueden cortar a lo largo de una generatriz y desenrollarse en forma de un plano.

Por lo tanto, ningún mapa terrestre puede conservar las distancias. Los mapas terrestres normalmente se dibu-

jan utilizando proyecciones de los puntos de una esfera a un plano (en cuyo caso la proyección se llama acimutal) o a un cono o a un cilindro. La posición relativa a la esfera del plano, cono o cilindro sobre el que se proyecta depende de la región que se quiere representar sobre el mapa con el fin de limitar cualquier distorsión. Por ejemplo, si se quiere hacer un mapa de la Antártida se podría utilizar una proyección sobre un lugar tangente al Polo Sur (figura 5). Si se quiere hacer un mapa de la región ecuatorial se utilizaría un cilindro tangente al Ecuador (figura 8). Y un cono tangente al paralelo 40 Norte sería una buena opción para un mapa de España (figura 6).

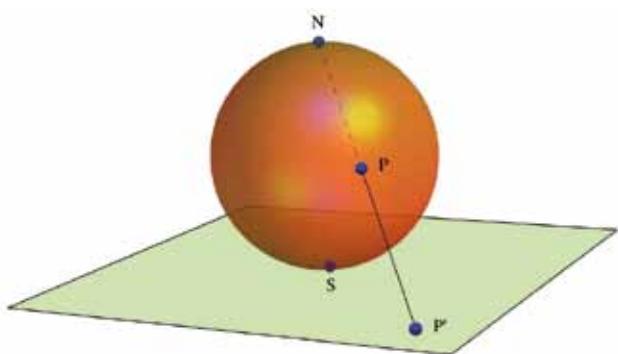


Figura 5. La proyección estereográfica. Imagen: Christiane Rousseau.

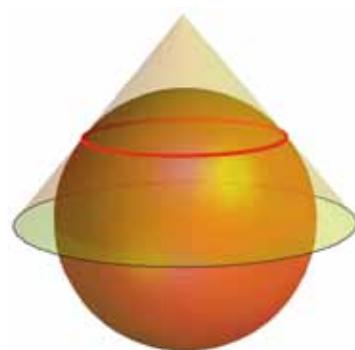


Figura 6. Un cono tangente a la esfera al paralelo 40 Norte. Imagen: Christiane Rousseau.

Aunque no podemos conservar todas las distancias, sí podemos conservar las propiedades parciales. ¿Cuáles son estas propiedades? Depende de lo que nos interese. Así, si queremos comparar la extensión de los países

damos prioridad a las proyecciones que conserven la razón de las áreas. Tales proyecciones se conocen como **equivalentes**. Arquímedes (287-212 a. C.) ya sabía que la proyección horizontal sobre un cilindro es equivalente (figura 7), pero su contribución fue olvidada y la proyección horizontal sobre un cilindro tangente al Ecuador ahora se conoce como la proyección de Lambert por Jean-Henri Lambert (1728-1777). Algunas proyecciones conservan los ángulos y se dice que estas proyecciones son **conformes**. Este es el caso de la proyección estereográfica a través del Polo Norte (figura 5), un hecho que el griego Hiparcos (190-120 a. C.) ya sabía. Cuando se está lejos del polo, es más frecuente el uso de la proyección Mercator (por Gérald Mercator, 1512-1594), que proyecta la Tierra sobre un cilindro infinito (figura 8).

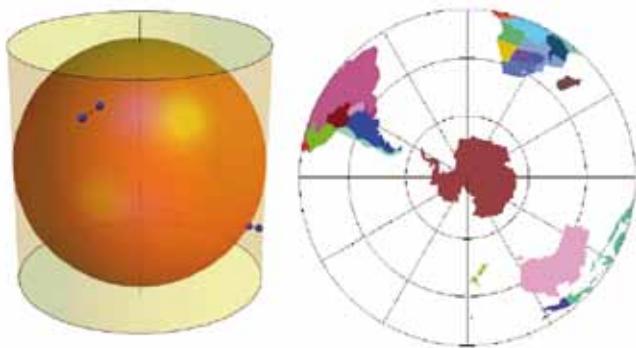


Figura 7. La proyección horizontal de Lambert. Imagen: Christiane Rousseau.

¿Cuáles son las ventajas de una **proyección conforme** si se quiere dibujar un mapa? En un mapa obtenido mediante la proyección Mercator, los paralelos se representan

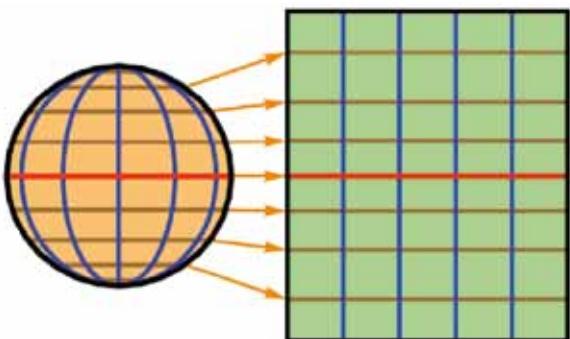


Figura 8. La proyección de Mercator (a) Proyección. (b) Mapa para la latitud 80 °S y 80 °N. Imagen: Christiane Rousseau.

por líneas horizontales y los meridianos por líneas verticales: una línea recta en el mapa forma un ángulo constante con los meridianos, y por eso si se está lejos de los polos la recta forma un ángulo constante con las líneas del campo magnético. Si se mantiene el rumbo con una brújula se seguirá una de estas líneas. En un mapa de este tipo, un recorrido representado por un segmento entre dos puntos se llama el recorrido loxodrómico entre los dos puntos. No es la distancia más corta entre los dos puntos. La distancia más corta se llama el recorrido ortodrómico, que consiste en la proyección del arco pequeño del círculo máximo que une los puntos correspondientes y parece más larga (figura 9).

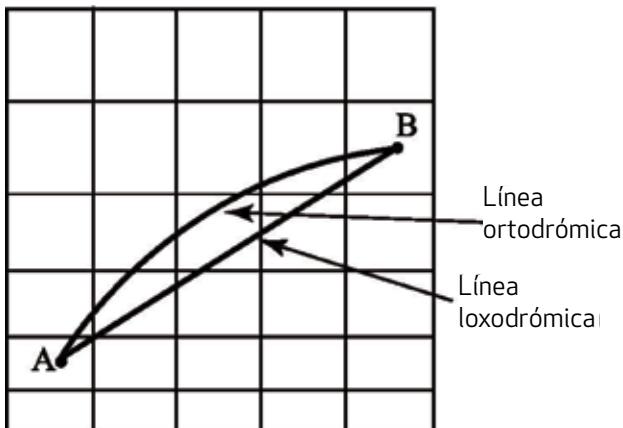


Figura 9. Las distancias ortodrómica y loxodrómica entre dos puntos A y B. Imagen: Christiane Rousseau.

Es extraordinario que Hiparco, Arquímedes, Lambert y Mercator pudiesen descubrir las propiedades geométricas de estas proyecciones sin servirse del cálculo diferencial, que no fue desarrollado por Newton hasta la segunda mitad del siglo XVII.

Estas proyecciones son únicamente algunas de las que existen. Hay muchas otras, como por ejemplo la proyección sinusoidal (figura 10) que también es equivalente.



Figura 10. La proyección sinusoidal es equivalente. Imagen: Christiane Rousseau.

UN CRITERIO PARA QUE UNA PROYECCIÓN SEA EQUIVALENTE

Para simplificar, supongamos que la Tierra es una esfera de radio 1: esto es posible si seleccionamos la unidad de

longitud adecuada. Supongamos también que λ es la longitud y φ la latitud. Las coordenadas (x, y, z) de un punto en la esfera de longitud λ y latitud φ se expresan como sigue:

$$(x, y, z) = (\cos \lambda \cos \varphi, \sin \lambda \cos \varphi, \sin \varphi)$$

Consideraremos un región pequeña R acotada por los meridianos de longitud λ y $\lambda + \delta\lambda$, y por los paralelos de latitud φ y $\varphi + \delta\varphi$ (figura 11).

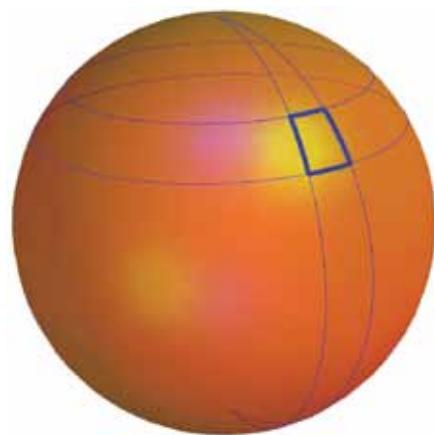


Figura 11. Una pequeña región sobre la esfera. Imagen: Christiane Rousseau

Su área es aproximadamente la de un rectángulo pequeño. Puesto que el paralelo en la latitud φ es un círculo de longitud $2\pi \cos(\varphi)$, el lado horizontal del rectángulo pequeño tiene una longitud aproximadamente igual a $\cos(\varphi)\delta\lambda$. El lado vertical tiene una longitud aproximadamente igual a $\delta\varphi$. Por lo tanto, el área aproximada de la región pequeña R se calcula de la siguiente manera:

$$A = \cos \varphi \delta \lambda \delta \varphi$$

Para probar que la proyección es equivalente, basta con demostrar que la región correspondiente R' en el mapa tiene la misma área.

EL CASO DE LA PROYECCIÓN HORIZONTAL SOBRE UN CILINDRO

Es fácil comprobar que el punto (x, y, z) de longitud λ y latitud φ se superponen en el punto.

$$(x', y', z') = (\cos \lambda, \sin \lambda, \sin \varphi)$$

La imagen R' de la pequeña región R es exactamente un rectángulo. El lado inferior horizontal de la región se traslada al lado inferior horizontal de un rectángulo de longitud $\delta\lambda$. Los lados verticales se trasladan a los lados verticales de un rectángulo de longitud $\cos(\varphi)\delta\varphi$. De esta manera se obtienen la misma área A que antes.

EJERCICIO

El caso de la proyección sinusoidal

Comprueba que es equivalente. Con este propósito, se necesita una fórmula para la proyección sinusoidal, que es la siguiente: un punto (x, y, z) de longitud λ y latitud φ se transfiere al punto $(x', y') = (\lambda \cos(\varphi), \varphi)$.

EL CASO DE LA PROYECCIÓN ACIMUTAL DE LAMBERT

En este caso usamos una proyección sobre un plano tangente a la esfera en un punto dado, la cual minimiza la distorsión alrededor del punto escogido. La figura 12 muestra tres proyecciones alrededor de tres puntos diferentes.

En primer lugar damos la fórmula para la proyección cuando proyectamos sobre un plano tangente al Polo Sur: un punto (x, y, z) de longitud λ y latitud φ se super-



Figura 12. La proyección acimutal de Lambert es equivalente. Cerca del Polo Sur (a). Cerca del Polo Norte (b). Alrededor de $(\lambda, \phi) = (0,0)$ (c). Imagen: Christiane Rousseau.

pone en el punto (x', y') con las coordenadas polares (r, θ) dadas por el resultado de la siguiente fórmula:

$$(r, \theta) = \left(2 \cos \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4} \right), \lambda \right)$$

donde el ángulo φ se expresa mediante radianes. Por lo tanto,

$$(x', y') = \left(2 \cos \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \cos \lambda, 2 \cos \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \sin \lambda \right)$$

En este caso la región R' no es un rectángulo: está acotada de dos arcos circulares y dos segmentos (figura 13).

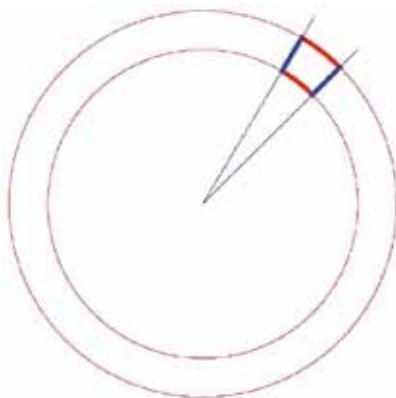


Figura 13. La imagen de la región pequeña en la esfera. Imagen: Christiane Rousseau.

¿Cuál es el origen de esta fórmula? Consideremos un plano tangente a la esfera al Polo Sur S , y un punto $P = (x, y, z)$ sobre la esfera de longitud λ y latitud φ . La imagen de P según la proyección es el punto P' con coordenadas polares (r, θ) , donde $\theta = \lambda$ y $r = |PS|$ es la longitud del segmento PS . En términos geométricos, en el plano del meridiano de longitud λ , P se obtiene tal y como se muestra en la figura 14.

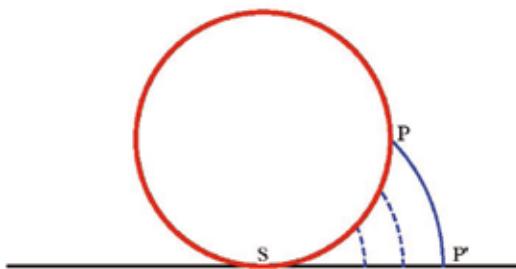


Figura 14. Construcción de la proyección acimutal de Lambert al dibujarse un arco circular con centro en S que pasa a través de P . Imagen: Christiane Rousseau.

He aquí la idea que demuestra que es equivalente: la longitud de los arcos circulares en la figura 13 es aproximadamente $2\cos(\varphi/2 - \pi/2)\delta\lambda$. La longitud de los segmentos se expresa aproximadamente como sigue:

$$\left| \frac{dr}{d\varphi} \right| \delta\varphi = \left| \sin \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right| \delta\varphi$$

Por lo tanto, el área de la región pequeña es aproximadamente igual a:

$$\left| \sin \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) \right| \delta\lambda \delta\varphi = \cos \varphi \delta\lambda \delta\varphi$$

MINIMIZAR LA DISTORSIÓN

La mayor parte de lo que hemos presentado hasta ahora se conoce hace siglos. Sin embargo, este tipo de problema sigue planteando retos a la ciencia actual. El matemático John Milnor, galardonado con la Medalla Fields en 1962, quería determinar la proyección que minimizara la distorsión de las distancias cerca de un punto dado. ¿Pero qué quiere decir distorsión? Dados dos puntos P y Q , supongamos que $d(P,Q)$ son sus distancias en la esfera; es decir, la longitud del arco más pequeño del círculo máximo que los une. Si se representan estos puntos en el mapa con los puntos P' y Q' , su distancia $d'(P',Q') = |P'Q'|$ será la longitud del segmento lineal $P'Q'$. Si no hay distorsión, la razón $d'(P',Q')/d(P,Q)$ será constante. Consideremos una región R diferente de la esfera entera, y una proyección de R al plano para la que existen constantes $\sigma_1 \leq 1$ y $\sigma_2 \geq 1$ y tales que para todo $P, Q \in R$ con $P \neq Q$, se cumple

$$\sigma_1 < \frac{d'(P', Q')}{d(P, Q)} < \sigma_2$$

Cuanto más cerca de 1 estén σ_1 y σ_2 , más pequeña será la deformación. Se define la distorsión como el número:

$$\delta = \log \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$$

Se puede comprobar que la distorsión es cero cuando $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, que aumenta cuando σ_1 o σ_2 se alejan de 1. John Milnor demostró que siempre existe una proyección que minimiza la distorsión δ sobre una región dada.

En el caso específico en el que la región R está acotada por un círculo sobre la esfera (figura 15), Milnor demostró que esta proyección óptima es la proyección acimutal equidistante. Si el tamaño de esta región se expresa por el ángulo α (mediante radianes) tal como aparece en la figura 15, la distorsión se define por el siguiente cálculo:

$$\delta = \log \frac{\alpha}{\sin \alpha}$$

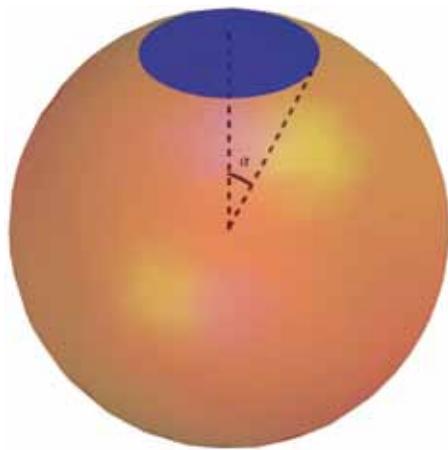


Figura 15. Una región de la esfera acotada por un círculo. Imagen: Christiane Rousseau.

¿Cómo se define esta proyección? Supongamos que el plano es tangente al Polo Sur. Esta proyección envía el meridiano de longitud λ a la semirrecta que forma un ángulo λ con el semieje positivo horizontal. Consideremos un punto P de longitud λ y latitud φ , y supongamos que (r, θ) son las coordenadas polares de su proyección P' . Por lo tanto, $\theta = \lambda$. La proyección también conserva las distancias a lo largo del meridiano (figura 16).

Puesto que el ángulo que va del centro de la esfera a P es $\pi/2 + \varphi$, entonces $\pi/2 + \varphi$ es también la longitud del arco que va de S a P (sin olvidar que φ es negativo en el hemisferio sur). Por lo tanto, se obtiene que $r = \pi/2 + \varphi$. De aquí

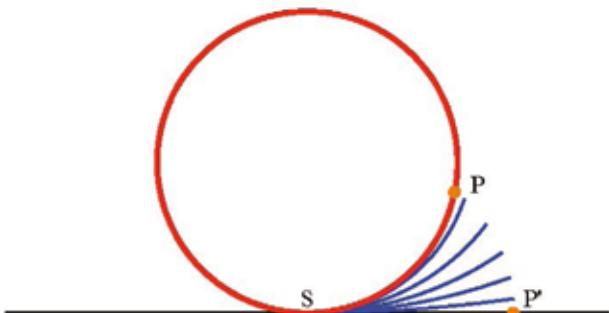


Figura 16. La construcción de la proyección acimutal equidistante: se desenrolla el arco a lo largo del meridiano a la vez que se conserva su longitud. Imagen: Christiane Rousseau.

se sigue que la imagen de P es el punto P' con las siguientes coordenadas: $\phi \varphi$

$$(x', y') = \left(\left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) \cos \lambda, \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right) \sin \lambda \right)$$

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Milnor, J. (1969): "A problem in cartography". *The American Mathematical Monthly*, vol. 76, n° 10, pp. 1101-1112.

En este ameno artículo, John Milnor, medallista Fields, introduce una medida de la distorsión que se ocasiona al trazar un mapa, y estudia cuándo esta es óptima. Los conceptos utilizados son elementales y asequibles con una formación mínima en matemáticas.

Rousseau, C. y Saint-Aubin, Y. (2008): *Mathematics and technology*. New York: Springer, col. Springer Undergraduate Texts in Mathematics and Technology.

Este libro tiene sus orígenes en un curso homónimo cuyo objetivo era mostrar el papel que desempeñan las matemáticas en la creación de tecnologías. Las aplicaciones van desde el uso del GPS a los mercados financieros, incluyendo la medicina, la criptografía, la corrección de errores, Google, etcétera. El libro puede ser utilizado total o parcialmente para impartir un curso con las premisas de nociones de cálculo, álgebra lineal y teoría de probabilidades.

MATERIALES AUXILIARES

LIBROS

Baselga, S. (2010): *Una historia de la medida de la Tierra. Desde los griegos al GPS*. Tres Cantos (Madrid): Nivola, col. Violeta.

Este libro trata de las cuestiones de la forma y de las dimensiones del planeta que habitamos. Se muestran, a lo largo de toda la historia de la humanidad, los avances en la investigación sobre la medida de la Tierra.

Ibáñez, R. (2010): *El sueño del mapa perfecto: cartografía y matemáticas*. Barcelona: RBA Coleccionables, col. El mundo es matemático.

Este libro trata de la imposibilidad de hacer un mapa perfecto de la Tierra: siempre contendrá errores, ya que para plasmar en dos dimensiones la superficie de la Tierra no hay otra alternativa que deformar la realidad. El autor relata la historia de cómo se llegó a tal conclusión y los intentos por paliar este problema, lo que constituye un episodio fascinante de la historia de las matemáticas.

Kehlmann, D. (2006): *La medición del mundo*. Madrid: Maeva.

Daniel Kehlmann nos habla de la medición del mundo a través de dos personajes extraordinarios: Alexander

von Humboldt, naturalista, viajero y aventurero empedernido de inagotable curiosidad, y Carl Friedrich Gauss, matemático y astrónomo. En su relato se reencuentran en Berlín en 1828, ya mayores, y evocan sus años de juventud en los que se dedicaron a la descomunal empresa de medir el mundo.

Maalouf, A. (1990): *León el Africano*. Barcelona: Círculo de Lectores (ed. orig.: 1986).

El autor francés Amin Maalouf narra la biografía novelada de León el africano, el gran viajero renacentista del siglo nacido en Granada alrededor de 1488.

DOCUMENTALES Y MATERIAL AUDIOVISUAL

La medición de la longitud geográfica: historia. Disponible en <https://www.youtube.com/watch?v=m6E48z0K-IWc>.

The satellite story (2007). Este documental de la BBC muestra el impacto del uso de los satélites para determinar la posición sobre la Tierra en las estrategias militares y la navegación, pero también en el campo de las comunicaciones y del espionaje. Con motivo del 50 aniversario del lanzamiento del primer satélite, el Sputnik, se reflexiona ampliamente sobre el desarrollo de este artilugio. Disponible en <http://www.bbc.co.uk/programmes/b008fmdq>.

TIERRA, EL PLANETA "SÓLIDO"

Rafael Orive Illera

1.2

Objetivos, contenido y criterios de evaluación de acuerdo con los Reales Decretos de Enseñanzas Mínimas, (1467/2007 de 2 noviembre para Bachillerato y 1631/2007 de 29 de diciembre para Educación Secundaria Obligatoria).

Este capítulo considera la evolución de la superficie del planeta Tierra, con el movimiento de los continentes y el cambio de su topografía. Estos cambios se manifiestan en terremotos y erupciones volcánicas, a cuyo estudio y descripción matemática se dedica este trabajo.

En el texto se describe el interior de nuestro planeta y se muestran distintos modelos que explican matemáticamente los fenómenos que en él se producen. También muestra algunas características principales de la Tierra como planeta y presenta algunas curiosidades.

Comienza con la consideración de la Tierra como un medio elástico, donde se propagan las ondas sísmicas, pequeñas deformaciones debidas al efecto de una fuerza o tensión en algún punto. El análisis de las ondas sísmicas permitió comprender la dinámica de las capas más externas del planeta, fenómeno conocido como *tectónica de placas* y también la *deriva de los continentes*. En el capítulo se presentan las ecuaciones de la elasticidad, que describen los movimientos sísmicos, formuladas por el físico e ingeniero francés Claude-Louis Navier. Estas ecuaciones son un sistema formado por 15 incógnitas (tensiones, desplazamientos y deformaciones), relacionadas mediante 15 ecuaciones en derivadas parciales con respecto al tiempo y en las tres direcciones espaciales. También se introduce la ecuación de ondas, que define los desplazamientos en las tres direcciones espaciales del interior del planeta al resolver el sistema de las ecuaciones de elasticidad.

Vulcanólogos y sismólogos usan instrumentos de medida para predecir la magnitud de las catástrofes naturales y adoptar las decisiones oportunas para minimizar posibles daños. El autor muestra, mediante ejemplos, cómo las herramientas matemáticas se pueden aplicar

a la prevención de desastres naturales y se centra en dos cuestiones: en la predicción del fenómeno, al señalar la magnitud, el tipo y la localización del fenómeno; y en la determinación de las consecuencias que tendrá. Los métodos usados en estas cuestiones incluyen técnicas del análisis matemático y estadístico. En particular, la estadística se ha adaptado a este campo cuyas aplicaciones en geociencias forman una rama propia. Se usan diferentes modelos de ecuaciones en derivadas parciales, que se abordan mediante el análisis numérico.

El capítulo, de gran riqueza y profundidad conceptual, contribuye a mostrar el uso de herramientas matemáticas y físicas para modelar fenómenos geológicos, con un nivel ligeramente superior al que se estudia en bachillerato. Los contenidos de este capítulo son especialmente adecuados para la asignatura Ciencias de la Tierra y medioambientales en el bachillerato de la modalidad de Ciencias y Tecnología, y contribuyen destacadamente al desarrollo de las siguientes capacidades:

O1. Comprender el funcionamiento de la Tierra y de los sistemas terrestres y sus interacciones, como fundamento para la interpretación de las repercusiones globales de algunos hechos aparentemente locales y viceversa.

O4. Analizar las causas que dan lugar a riesgos naturales, conocer los impactos derivados de la explotación de los recursos y considerar diversas medidas de prevención y corrección.

O5. Investigar científicamente los problemas ambientales, mediante técnicas variadas de tipo fisicoquímico, biológico, geológico y matemático, y reconocer la importancia de los aspectos históricos, sociológicos, económicos y culturales en los estudios sobre el medio ambiente.

INTRODUCCIÓN

Por nuestro conocimiento de la región de la Tierra que habitamos, la superficie, podíamos pensar que el planeta es roca sólida y que permanece estable a lo largo del tiempo. Sin embargo, a lo largo de la historia hemos vivido y experimentado fenómenos como las erupciones volcánicas y temblores que muestran que esto no es así, que algo sucede debajo del suelo que pisamos.

El estudio de las Ciencias de la Tierra se ha iniciado muy recientemente. Principalmente, durante el pasado siglo XX, geólogos y físicos han desarrollado teorías científicas basándose en la observación de la naturaleza y en la experimentación, concluyendo que esa apariencia sólida y estable de nuestro planeta no es cierta. Hasta entonces se creía que estaba formado por distintas capas sólidas y huecas, como podemos leer en *Viaje al centro de la Tierra*, del novelista francés Jules Verne (1828-1905).

Ahora sabemos que el interior del planeta no es simplemente roca sólida y no permanece estable. La superficie del planeta también evoluciona con el movimiento de sus continentes, cambiando su topografía. Estos cambios se manifiestan por fenómenos puntuales como los terremotos y las erupciones volcánicas, pero son debidos a la propia estructura del planeta.

En este capítulo describiremos cómo es el interior de nuestro planeta y cómo las matemáticas nos permiten explicar fenómenos que en él se producen.

IDEAS BÁSICAS

La Tierra es el planeta más denso del Sistema Solar. También es el planeta terrestre (rocoso) más grande. Las características principales pueden consultarse en la tabla 1. Tiene forma de **esferoide**, es decir, de esfera ligeramente achatada en los polos, por lo que el diámetro de la Tierra en el ecuador es mayor (43 km más) que en los polos.

Este achatamiento (figura 1) produce situaciones curiosas, como que los picos de las montañas más altas

Tabla 1. Características

Masa	5.9736×10^{24} kg
Volumen	$1,083^{21} \times 10^{12}$ km ³
Densidad	5,515 g/cm ³
Área de superficie	510.072.000 km ² 148.940.000 km ² tierra (29,2 %), 361.132.000 km ² agua (70,8 %)
Radio Ecuatorial	6378,1 km, Polar 6356,8 km, Medio 6371,0 km

no sean los puntos más alejados del centro de la Tierra: efectivamente, las cimas de las montañas más cercanas al ecuador son los puntos de la superficie terrestre más distantes del centro de la Tierra aunque no sean las cimas más elevadas sobre el nivel del mar. Es el caso del volcán Chimborazo (Ecuador), a 6.310 m sobre el nivel del mar, pero solamente a una longitud de 1° y 29' al sur del ecuador.

Además, hay una desviación con respecto el esferoide ideal por las protuberancias de la superficie, que no es



Figura 1: La Tierra "ligeramente" achatada. Autor: luis.labenderar.

lisa. El mayor saliente es el Everest, que mide 8.848 m sobre el nivel del mar y, por tanto, provoca una desviación menor que la exigida a una bola de billar (0,22%).

$$\text{desviación} = \frac{\text{desviación máxima}}{\text{radio medio Tierra}} = \frac{8.848}{6371} = 0,0014 = 0,14\%$$

Sin embargo, las matemáticas que sustentan el modelo, dando expresiones analíticas a los fenómenos físicos, se desarrollaron unos cientos de años antes, en los siglos XVIII-XIX. Esta época se conoce como el Siglo de las Luces por el gran avance de la ciencia en el mundo occidental y las numerosas aplicaciones que surgieron y fomentaron el desarrollo industrial y el avance de la sociedad.

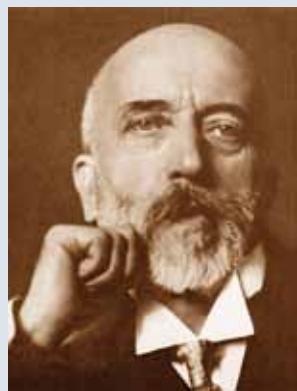
EL INTERIOR DEL PLANETA

Introduciéndonos en las profundidades de la Tierra, se observa que está formada por diferentes capas, cada una de ellas con sus propias características constitutivas. Vamos a diferenciarlas principalmente por la densidad, pero también por el estado (fluido o sólido) y por la temperatura.

Los científicos consideran la Tierra un sólido deformable; es decir, un sólido que –como un bloque de cemento–, sufre variaciones por efectos de fuerzas o pesos muy grandes. Estas variaciones son pequeñas pero perceptibles y pueden producir fracturas llegado el caso de actuación de tensiones muy grandes.

Se han definido las partes del interior del planeta, que se considera un medio elástico, estudiando la propagación de las **ondas sísmicas**. Las ondas sísmicas son pequeñas deformaciones que se propagan por el planeta debido al efecto de una fuerza o tensión en algún punto del mismo. La propagación de ondas sísmicas que nos interesa conocer marca la dinámica cuando las variaciones son pequeñas, dentro del orden de magnitud de la Tierra.

La utilización de las ondas sísmicas para el conocimiento del interior del planeta no tuvo lugar hasta el siglo XX, momento en que matemáticos, físicos y sismólogos consideraron este método. Entre los protagonistas de este desarrollo científico se encuentran: Andrija Mohorovicic, sismólogo croata (1857-1936); Inge Lehmann, sismóloga danesa (1888-1993); Beno Gutenberg, sismólogo alemán (1889-1960); Harold Jeffreys, matemático geofísico inglés (1891-1989); Charles Richter, físico-sismólogo estadounidense (1900-1985); Keith Bullen, matemático y geofísico neozelandés (1906-1976).



Andrija Mohorovičić (Volosko, 1857-1936), meteorólogo y sismólogo croata, fue uno de los primeros científicos en deducir, basándose en las ondas sísmicas, la discontinuidad de superficie y velocidad que separa la

corteza terrestre del manto. A partir de los datos recogidos, estimó que el espesor de la capa superior (corteza) es de aproximadamente 54 kilómetros. Actualmente, se sabe que la corteza alcanza los 5-9 kilómetros de grosor bajo la superficie del fondo oceánico, mientras que bajo la superficie continental el espesor se encuentra entre los 25 y los 60 kilómetros. La superficie que separa la corteza del manto se denomina discontinuidad de Mohorovičić o Moho.

LAS ECUACIONES DE LA ELASTICIDAD

El conjunto de las **ecuaciones de la elasticidad** se conoce como formulación de Navier (1785-1836), ingeniero y físico francés alumno del matemático francés Fourier (1768-1830). El sistema está formado por 15 incógnitas

(tensiones, desplazamientos y deformaciones) con 15 ecuaciones en derivadas parciales, derivadas con respecto al tiempo y las tres direcciones espaciales. Tres son ecuaciones de conservación del movimiento; seis relacionan los desplazamientos con las deformaciones conocidas como Saint-Venant, por el ingeniero y matemático francés Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant (1797-1886); finalmente, seis ecuaciones identifican el material y son conocidas como de Lamé, por el matemático francés Gabriel Lamé (1795-1870) y Hooke, en honor al científico experimental inglés Robert Hooke (1635-1702).

Para determinar estas ecuaciones se necesitó un siglo y medio de desarrollo científico, desde los iniciales experimentos de Hooke en los que observó que los sólidos se podían comportar como muelles, hasta la definición de los coeficientes de Lamé que identificaban el material elástico, lineal, isotrópico y homogéneo en 1850. Para obtener la formulación de Navier se precisó de la determinación de las leyes fundamentales de la física por Newton (Woolsthorpe, Inglaterra, 1642-1727), donde el propio Hooke jugó un papel protagonista, y el desarrollo del cálculo diferencial e integral donde matemáticos como Leibniz, Euler, Fourier, Cauchy y Gauss, fueron actores principales.

LA ECUACIÓN DE ONDAS

Las ondas sísmicas definen desplazamientos en las tres direcciones espaciales μ del interior del planeta al resolver el sistema de las ecuaciones de elasticidad. Las ondas sísmicas que nos interesan para conocer el interior del planeta son las ondas internas o de cuerpo. Estas ondas pueden ser de dos tipos: primarias (onda P) o secundarias (onda S), según los efectos que producen. Las primarias, denotadas por ψ , actúan contrayendo y expandiendo el medio. Las secundarias, con componentes en las tres direcciones espaciales, $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$, producen traslados. En consecuencia, los desplazamientos se escriben de la siguiente manera:

$$\mathbf{u} = \nabla\varphi + \nabla \times \psi$$

donde ∇ es el gradiente, es decir, las derivadas en las distintas direcciones espaciales, y $\nabla \times$ denota el irrotacional, es decir, el gradiente aplicado al producto vectorial. Estas expresiones generan la solución \mathbf{u} que define las deformaciones del sistema de ecuaciones de elasticidad.

Se pueden simplificar las hipótesis de manera que la función φ que identifican las ondas primarias, satisface la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0$$

donde α cambia dependiendo del medio. Esta ecuación se conoce como **ecuación de ondas**.

Esta ecuación diferencial es el modelo más sencillo del problema de la cuerda vibrante, fenómeno que sucede en algunos instrumentos musicales –como las cuerdas de la guitarra–, pero que también se extiende a otros fenómenos como la transmisión del sonido, de la luz, las ondas en la superficie del agua, etcétera. Este problema fue considerado por grandes matemáticos del siglo XVIII como el francés Jean le Rond D'Alembert (1717-1783), el suizo Leonhard Euler (1707-1783), el flamenco Daniel Bernoulli (1700-1782) y el francés Joseph-Louis Lagrange (1736-1813).

La solución de la ecuación de ondas en la recta real es conocida como **fórmula de d'Alambert**, que se expresa de la siguiente manera:

Dada una onda φ que inicialmente tiene una posición y una velocidad definidas por unas funciones f y g , respectivamente. Es decir,

$$\varphi(x, 0) = f(x) \quad \text{y} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, 0) = g(x)$$

entonces,

$$\varphi(x, t) = \frac{f(x + \alpha t) + f(x - \alpha t)}{2} + \frac{1}{2\alpha} \int_{(x - \alpha t)}^{(x + \alpha t)} g(s) ds$$

El lector puede comprobar que esta fórmula verifica la ecuación de ondas y las condiciones iniciales.

Producido inicialmente ciertas vibraciones especiales (asociadas a una forma de onda determinada por la constante κ dependiente del medio), la solución de la ecuación de ondas se escribe como combinación de funciones trigonométricas:

$$\varphi(x, t) = A \cos(\alpha kt + \kappa x) + B \cos(\alpha kt - \kappa x)$$

Análogamente, una fórmula similar se obtiene para las ondas secundarias pero con parámetros β y $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, distintos en general de los α y K . En particular,

$$\alpha = \sqrt{\frac{K + \frac{4}{3}\mu}{\rho}} \quad \beta = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$$

donde K es la incompresibilidad, μ es la rigidez y ρ es la densidad del medio. Estas características son las que nos permiten diferenciarlas unas de otras y medirlas a lo largo de su viaje en el interior del planeta. Durante este trayecto se encuentran con un interior no tan homogéneo como parece, ya que a ciertas distancias de la superficie se producen cambios bruscos de estos valores que determinan las ondas P y S. Este fenómeno se conoce como *refracción*. Para explicarlo, vamos a considerar el fenómeno análogo que se produce con la luz, la cual también se comporta como una onda.

EJERCICIO

Llena un vaso transparente con agua e introduce en él un palo recto. Al mirar de frente el vaso, observamos que el palo parece doblado en la interfaz entre el aire y el agua. Si llenas otros vasos con distintos tipos de líquidos, puedes ver que el ángulo formado cambia, dependiendo de las características del líquido. Si mides los distintos ángulos podrás, de forma adicional, identificar las propiedades del líquido.

LAS DISCONTINUIDADES DE LA TIERRA

Con este método identificamos distintas interfaces según la profundidad al centro de la Tierra. Las discontinuidades conocidas son:

- Una primera, muy cercana a la superficie, que recibe el nombre de discontinuidad de Mohorovicic y que se identificó por primera vez en 1909.
- A unos 230 km de profundidad se encuentra la discontinuidad de Lehmann, identificada por la sismóloga del mismo nombre en la década de 1950.
- A 800 km de profundidad se encuentra la discontinuidad de Repetti.
- A 2.900 km de profundidad se sitúa la discontinuidad de Gutenberg, descubierta por él en 1914.
- A 5.100 km de profundidad, se ubica la discontinuidad de Bullen, también conocida como discontinuidad de Wiechert-Lehmann, descubierta por ella en 1936.

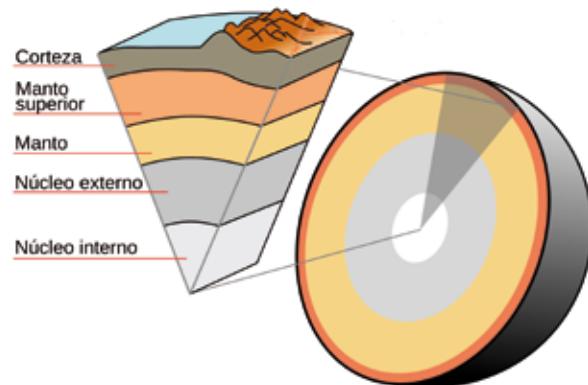


Figura 2: Capas de la Tierra. Autor: Jeremy Kemp. Fuente: <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Earth-crust-cutaway-spanish.svg>.

En la zona de 0-800 km de profundidad, las ondas P y S son muy cambiantes, fruto de la heterogeneidad de esta región. La primera interfaz, la discontinuidad de Mohorovicic,

separa la parte más externa del planeta "sólido", que se conoce como corteza. La profundidad de esta capa es muy desigual, dependiendo de si estamos bajo los océanos, corteza oceánica de unos 10 km de profundidad y formada principalmente por basaltos, o de si estamos bajo los continentes, corteza continental de hasta 70 km de profundidad y formada principalmente por silicatos.

Por debajo de la corteza está el manto. La capa entre la discontinuidad de Mohorovicic y de Repetti se conoce como manto superior. Esta región juega un papel muy destacado en el movimiento de la corteza, más conocido como tectónica de placas, que veremos más adelante. La región de 800-2.900 km de profundidad se conoce como manto inferior. El manto en su parte superior se comporta como un sólido, es decir, es un cuerpo rocoso. Pero, según va aumentando la profundidad y aumentando la temperatura, el manto se hace más plástico y tiene algún comportamiento más cercano a los fluidos, aunque sigue siendo un sólido.

Por debajo del manto, tras la discontinuidad de Gutenberg, se encuentra el núcleo, el cual se divide por la discontinuidad de Wiechert-Lehmann en una parte externa y líquida, núcleo externo, y otra interna y sólida, el núcleo interno. La rigidez del núcleo fue confirmada en 1971.

LA TECTÓNICA DE PLACAS Y LOS MODELOS DE CONVECCIÓN

EJERCICIO

El análisis de las ondas sísmicas permitió, entre otras cosas, comprender la dinámica de las capas más externas del planeta (litosfera), explicada mediante la teoría de la tectónica de placas. Dicha teoría explica los desplazamientos de dichas placas sobre el manto terrestre como consecuencia de la diferencia entre la alta temperatura interior del planeta y la baja temperatura de la atmósfera. Es algo parecido a lo que sucede con una sopa grasienda o con la leche. Si llevas a

ebullición y dejas en reposo durante un cierto tiempo estos líquidos, puedes observar que, en su superficie, se forman una serie de capas, como la nata sobre la leche. Al calentar de nuevo los líquidos, verás que las capas formadas empiezan a moverse ligeramente, empujando unas a otras. En el planeta este fenómeno ha sido estudiado y explicado por la teoría de la tectónica de placas, inicialmente conocida como la deriva de los continentes.

La teoría de la deriva continental fue propuesta por el meteorólogo alemán Alfred Wegener (1880-1936) en los años veinte del siglo pasado. Wegener observó que la costa este del continente americano y la costa oeste de Europa y África encajaban como si fueran piezas de un puzzle y que lo mismo sucedía con formaciones geológicas a ambos lados del Océano Atlántico, por lo que supuso que previamente habían estado unidas y se habían desplazado, dando lugar a la configuración actual de los continentes. Sin embargo, Wegener no pudo explicar a qué era debido este desplazamiento y los principales geólogos del momento, encabezados por Jeffreys, le acusaron de presentar solo las observaciones que confirmaban sus conjeturas y no otras muchas más que no coincidían con sus hipótesis. Esto provocó que la teoría de la deriva de los continentes quedara apartada hasta los años sesenta, cuando estudios de la edad del suelo oceánico en el Atlántico mostraron que progresaba por igual al este o al oeste de la dorsal oceánica atlántica y que esta edad era mayor cuanto más alejados nos encontráramos de la dorsal oceánica atlántica.

Para comprender la deriva de los continentes es preciso un mayor análisis de la región externa del planeta. El análisis de las ondas sísmicas y, en particular, de su velocidad, permitió observar que debajo de la corteza existe una capa de gran dureza situada a una profundidad de 100-200 km, que usualmente no se deforma. Cada pieza de litosfera con su corteza se conoce como placa tectónica. Por debajo de las placas, en el manto superior, existe una región deformable (más plástica) sobre la que "flotan" las placas (véase la interpretación de la figura 3).

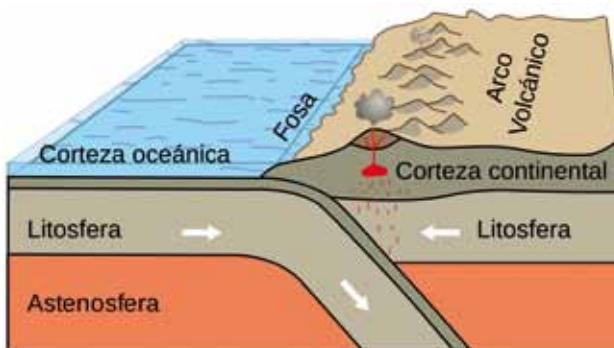


Figura 3: Corteza y manto superior. Fuente: USGS.

Existe casi una veintena de placas mayores, cuyos límites pueden apreciarse por los focos de los epicentros de los terremotos, aunque existe un número mucho mayor de placas menores que permiten explicar fenómenos sísmicos más localizados.

Actualmente somos capaces de conocer a qué velocidad se desplazan las placas tectónicas gracias a la precisión de los sistemas GPS, que han sido comentados en el capítulo 1.1. Las placas se mueven normalmente con una velocidad de hasta 2,5 centímetros/año. La dirección de estos movimientos marca los diferentes tipos de límites de las placas. Estos pueden ser:

- Divergentes, cuando las placas se alejan unas de otras.
- Convergentes, cuando una placa choca contra otra. Aquí se puede producir subducción cuando una placa oceánica se hunde bajo la continental o cinturón orogénico cuando las dos placas se comprimen.
- Transformantes, cuando una placa se desliza contra otra.

Como ya hemos dicho, el movimiento de las placas se debe a la diferencia de temperatura que existe entre la región inferior de la litosfera (100°C) y la región inferior de la astenosfera (900°C). Esto genera una serie de movimientos de las rocas en estado plástico de la astenosfera conocidos como **convección de Rayleigh-Bérnard**, definido por el físico francés Henri Bérnard (1874-1939), que consisten en la circulación de las zonas calientes a las frías (figura 4).

El sistema para analizar estos problemas en la astenosfera es muy complejo. Pero, suponiendo una serie de hipótesis –como que se comporta como un fluido incompresible y que eliminamos algunos de los términos no lineales–, se obtiene un sistema de ecuaciones formalizado por el matemático francés Joseph Boussinesq (1842-1929):

$$\nabla \cdot u = 0$$

$$\nabla p = \Delta u + (0, 0, RT)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \cdot \nabla T = \Delta T$$

donde u es el campo de velocidades, T es la temperatura, p es la presión y R es la constante de Rayleigh.

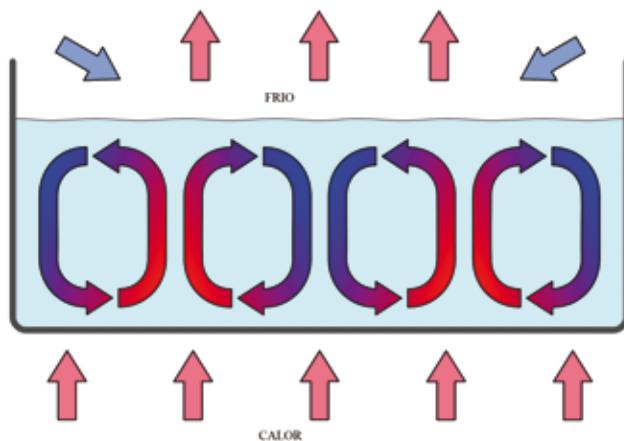


Figura 4. Convección de Rayleigh-Bérnard. Autor: Eyrion. Fuente: <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:ConvectionCells.svg>.

El sistema de ecuaciones de Boussinesq refleja dos clases de movimientos cuya combinación permite explicar la tectónica de placas. Las corrientes de convección son las que originan el movimiento de las placas tectónicas y las direcciones de las corrientes son marcadas por las plumas de convección. Las plumas de convección son columnas ascendentes de fluido a una velocidad mayor y de alta temperatura que ascienden hasta que se nivela su

temperatura y se detienen, dando lugar a una forma de un hongo.

Este fenómeno es similar al que observamos en una cazuela hirviendo con las burbujas que vemos crecer y se rompen. Las plumas de convección se visualizan en la superficie terrestre en algunas zonas de la corteza marina, creando zonas de islas volcánicas, como las islas Hawái o Canarias (figura 5).



Figura 5. Paisaje volcánico, Timanfaya. Autor: R. Orive.

DESASTRES NATURALES

Hay muchos fenómenos que nos permiten observar, de manera indirecta, los movimientos del interior del planeta, como:

- Las *erupciones volcánicas*, producidas por la ascensión de magmas a la corteza terrestre desde la astenosfera (figura 5).
- Los *terremotos* son sacudidas de la corteza terrestre producidas por la liberación de energía acumulada en forma de ondas sísmicas. Normalmente se producen por rupturas en las fallas, es decir, en los bordes de las placas tectónicas.
- Los *maremotos o tsunamis* son olas de enorme energía y tamaño que se producen cuando algún fenómeno ex-

traordinario, normalmente terremotos, desplaza verticalmente una gran masa de agua.

Estos fenómenos naturales tienen devastadores efectos sobre la naturaleza del planeta y nuestra vida. Podemos recordar algunos de los que se produjeron en los últimos años:

- La erupción del volcán Eyjafjallajökull en Islandia. Se inició a finales de 2009 pero su continua actividad produjo una enorme nube de gases que provocó el cierre del espacio aéreo europeo durante días en 2010.
- La erupción del volcán Puyehue en Chile durante 2011. Su nube de gases y cenizas alcanzó una extensión de 3.000 km e hizo necesaria la evacuación de los habitantes de los alrededores.
- El terremoto de L'Aquila en Italia de abril de 2009. Causó 308 víctimas mortales, miles de heridos y la evacuación de casi toda la ciudad.
- El terremoto de Haití de enero de 2010. Su epicentro se situó en la capital del país, Puerto Príncipe, y provocó más de 200.000 pérdidas humanas.
- El terremoto de Lorca en Murcia de mayo de 2011, con nueve víctimas y parte de la ciudad devastada.
- El maremoto del 26 de diciembre de 2004, producido tras un terremoto de magnitud 9.1 en la escala Richter cerca de la isla de Sumatra y que ocasionó alrededor de 280.000 fallecidos.
- El *tsunami* de Japón del 11 de marzo de 2011, acontecido tras un terremoto de magnitud 9.0 en la escala Richter. Afectó en todo el Pacífico y causó cerca de 20.000 víctimas en Japón, además de daños en la central nuclear de Fukushima, que abrieron una crisis nuclear a escala mundial.

Las matemáticas se aplican al estudio de la prevención de estos desastres en dos cuestiones fundamentales:

en la predicción del fenómeno y, en particular, cuando la catástrofe es inminente, señalar la magnitud, el tipo y la localización del fenómeno; y en la determinación de las consecuencias que tendrán.

PREDICCIÓN

Generalmente suele haber señales externas que anuncian la inminencia de una erupción o de un terremoto, como un aumento de emisiones de gases, movimientos sísmicos, erupciones magmáticas y deformaciones de la superficie. Los vulcanólogos y los sismólogos usan una serie de instrumentos para tomar medidas que permitan predecir la magnitud de la catástrofe y así adoptar las decisiones adecuadas para minimizar posibles daños, como por ejemplo:

- Sismógrafos, que detectan la intensidad de los movimientos sísmicos.
- Instrumentos para medir la electricidad porque el magma genera corrientes eléctricas.
- Gravímetros, que miden las variaciones del campo gravitacional de la Tierra.
- Termómetros especiales para medir las variaciones de temperaturas.
- Satélites que analizan la composición de los gases de la atmósfera.
- El sistema GPS, que nos permite conocer los cambios de posición como desplazamientos y cambios en la elevación del suelo.

Una parte importante de las tareas es la monitorización de todos estos parámetros, que requiere técnicas matemáticas no muy sofisticadas como tomar medidas, presentar un desarrollo temporal de las muestras, extraer espacialmente los datos obtenidos en una serie de

puntos y representar gráficamente los resultados. Los métodos usados en estos temas incluyen herramientas del análisis matemático y estadístico. En particular, la estadística se ha adaptado a este campo, creándose una rama propia en geociencias.

Por otro lado, para estudiar los movimientos sísmicos, deformaciones de la naturaleza, anomalías de la gravedad, etcétera, se usan las **series temporales**. En todos estos estudios es preciso ordenar los datos que se reciben para que la información sea relevante. Este análisis se puede hacer en el dominio temporal o en el de las frecuencias, esto último se conoce como análisispectral. La idea es que cualquier función periódica $f(t)$ puede identificarse a través de una familia de funciones ortogonales de la misma manera que podemos identificar una posición knowing sus coordenadas. Esta identificación se conoce como **serie de Fourier**:

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)]$$

donde los coeficientes se definen por

$$a_n = \frac{2}{\tau} \int_0^\tau f(t) \cos(\omega_n t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{\tau} \int_0^\tau f(t) \sin(\omega_n t) dt$$

y $\omega_n = n \pi / \tau$ son las frecuencias. Así, cada frecuencia lleva acompañada una información, sus coeficientes, y para el estudio de nuestros fenómenos nos interesa la información que viene en un número de frecuencias determinadas.

El origen de esta relación de $f(t)$ con $S(t)$ está en el estudio de la transferencia de calor en conductores llevado a cabo por el matemático francés Joseph Fourier a principios del siglo XIX. Es un instrumento muy útil, pero sin embargo falla al representar funciones no periódicas. Así, durante el pasado siglo XX, se han desarrollado otras herramientas matemáticas como las ondículas o wavelets que persiguen la misma idea; es decir, descomponer la información de una función con respecto a una familia ortogonal de funciones.

Predecir estos fenómenos es muy complejo. Primero, a partir de datos incompletos recogidos experimentalmente,

tenemos que reconstruir lo que está sucediendo en el medio. Además, por otro lado, para estudiar las deformaciones del terreno se usan modelos muy simplificados que no representan la realidad de manera tan precisa como se querría. Se supone que el medio es elástico, isotrópico y homogéneo, lo que no se corresponde muy bien con la realidad porque, desde el punto de vista de la mecánica de medios continuos, por ejemplo, los volcanes son heterogéneos y presentan estratificaciones que afectan a la propagación del magma y, por lo tanto, a las deformaciones que ocasiona esto en la superficie. Y una vez elaborados los modelos, se realizan simulaciones para conocer posibles evoluciones de la estructura de los medios continuos, para lo que utilizamos los llamados elementos finitos, de los que más adelante hablaremos.

Por lo tanto, para anticipar una erupción o un terremoto, se han señalado una serie de fenómenos precursores que ocurren antes de ellos y sirven de señal de alerta. Pero no es una relación unívoca, es decir, pueden suceder los fenómenos precursores y no desencadenarse la catástrofe, aunque sí existe la posibilidad de que ocurra. Por el contrario, también sucede que, sin mostrarse ningún precursor, se produzca un desastre natural. Así, tanto en vulcanología como en sismología es fundamental el análisis de las catástrofes naturales que se suceden, dado que nos permite tener mayor información sobre lo que nos vamos a encontrar en el futuro. El desarrollo tecnológico actual nos permite obtener una mayor información de los fenómenos que actualmente suceden y que antes no conocíamos.

Cuando hablamos de posibilidad de que ocurra un fenómeno en matemáticas nos adentramos en la teoría de la probabilidad, que determina cuantitativamente la posibilidad de que un suceso se produzca. La probabilidad se empieza a cimentar en el siglo XVI, pero es con los trabajos del matemático francés Pierre Laplace (1749-1827) y el inglés Thomas Bayes (1702-1761) cuando se establece la base de esta rama de las matemáticas.

La **regla de Laplace** determina que la probabilidad de un suceso imposible es 0 y la probabilidad de un suceso seguro es 1. En definitiva, la probabilidad de un suceso A en

el caso en que todos los sucesos sean igual de probables, es igual al número de casos favorables a A dividido por el número total de resultados posibles. Unido a la definición de probabilidad condicionada $P(A / B) \cdot P(B) = P(B / A) \cdot P(A)$, obtenemos la **fórmula de Bayes**:

$$P(A_j / B) = \frac{P(B/A_j) \cdot P(A_j)}{P(B/A_1) \cdot P(A_1) + \dots + P(B/A_n) \cdot P(A_n)}$$

Esta fórmula es muy útil para predecir un terremoto. Si consideramos que A_1, \dots, A_n son las anomalías o precursores de los fenómenos a estudiar, $P(B / A_j)$ determina la probabilidad de que ocurra un fenómeno habiendo sucedido la anomalía A_j y $P(A_j / B)$ determina la probabilidad de que se observe una anomalía al producirse un fenómeno.

Así, por otros efectos precursores podemos saber que estamos cerca de que se produzca una erupción volcánica o un terremoto. Naturalmente, las anomalías son muy diferentes a la hora de distinguir erupciones o terremotos aunque, además, sería útil distinguir entre ambos, ya que no es igual una erupción volcánica que un terremoto. Las erupciones volcánicas sí se pueden predecir con mayor seguridad –son fenómenos más progresivos–; sin embargo, los terremotos ocurren de manera más abrupta, por tanto es difícil saber cuándo va a ocurrir un terremoto y qué magnitud va a tener. Además, dentro de las propias erupciones o terremotos, hay que diferenciar dentro de las propias características geológicas de las diferentes regiones de la Tierra.

Por ejemplo, en 2012 tuvo lugar una erupción volcánica en la isla de Hierro y, a lo largo del proceso, se pudo recibir una información detallada del fenómeno. Sin embargo, en el terremoto de L'Aquila, los científicos italianos anunciaron horas previas a la catástrofe que existían muy pocas posibilidades de que ocurriera. El mundo científico ha vivido con perplejidad cómo la justicia italiana ha dictado penas contra dichos científicos por el fracaso de su dictamen. Es sorprendente comprobar cómo en algunos casos la sociedad utiliza la ciencia para dictaminar hechos como irrefutables cuando siempre la ciencia ha avanzado a partir del reconocimiento de nuestra propia ignorancia.

ESTUDIANDO LAS CONSECUENCIAS

La erupción de un volcán puede producir ríos de lava, pero también nubes de ceniza y gases que pueden provocar daños muy graves. Una nube de cenizas volcánicas puede ser transportada a regiones muy lejanas y, por lo tanto, es esencial disponer de buenos modelos de las corrientes. Las matemáticas que nos permiten conocer cómo se va a comportar una nube de cenizas o de gases son las que rigen los movimientos de los fluidos, en concreto, la ecuación de Navier-Stokes. Estas matemáticas son las mismas que se emplean en los modelos meteorológicos y que se detallan en los capítulos 1.3 y 3.1.

El avance que se ha producido en la previsión meteorológica es enorme y se ha basado en tres puntos. Primero, una mayor cantidad de datos reales de presión, humedad, velocidad de los vientos en distintos niveles de la atmósfera obtenidos principalmente vía satélite pero también con radares y a través de las clásicas estaciones meteorológicas. En segundo lugar, un mayor conocimiento matemático de los diferentes modelos de ecuaciones en derivadas parciales que involucran a estos fenómenos. Sin embargo, estas ecuaciones en general no se pueden obtener explícitamente. Para ello se ha desarrollado otra área de las matemáticas que permite calcular soluciones muy cercanas a las fórmulas obtenidas en nuestros modelos. Esto se conoce como el *análisis numérico*. Además, sumado al enorme avance computacional que se ha desarrollado en las últimas décadas, esto nos permite realizar una gigantesca cantidad de cálculos en muy poco tiempo que nos dan predicciones cada vez mejores de los fenómenos naturales.

Ahora hablaremos del método numérico más utilizado para la aproximación de soluciones de ecuaciones en derivadas parciales que modelan el comportamiento de una región Ω , los elementos finitos (FEM), desarrollado a partir de la década de los cincuenta del pasado siglo. La idea del método es descomponer la región Ω en una partición (mallado), como se muestra en la figura 6, para trabajar con unas funciones específicas, los elementos finitos. Estos consisten en utilizar una familia de funciones positivas φ_j que no son ortogonales pero que son cero excepto en una

pequeña región del mallado. Una forma de definir cada una de estas φ_j es que vale 1 en el vértice x_j , decrece hasta 0 en los lados opuestos al vértice y se extiende por 0 en el resto. Así, la forma de la función es como si fuera una pirámide. Como consecuencia de trabajar con este tipo de funciones, el sistema de ecuaciones en derivadas parciales que modela nuestro fenómeno se transforma en un número finito de ecuaciones diferenciales ordinarias o simplemente en un conjunto de ecuaciones algebraicas, las cuales nos permiten expresiones explícitas de las soluciones.

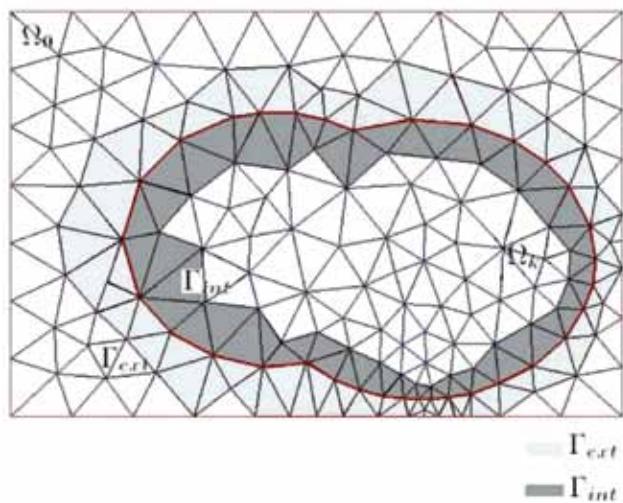


Figura 6. Ejemplo de un mallado para el estudio del movimiento de una nube de cenizas. Autor: M. Cea.

Una posible consecuencia de un terremoto bajo el océano son los *tsunamis*, aunque estos también pueden producirse por la caída de un meteorito o por un desprendimiento de una montaña sobre un lago. Esto origina una ola que se mantiene siempre por encima del nivel del agua y que se propaga a gran velocidad. En particular, el maremoto del Océano Índico de diciembre de 2004 produjo una ola de unos 10 metros sobre el nivel del mar que viajó a una velocidad de 900 km/h.

Los primeros estudios sobre la propagación de una ola solitaria son debidos al ingeniero naval inglés John Scott Russell (1808-1882), quien mediante experimentos en

canales generaba una ola solitaria que se propagaba a una velocidad c:

$$c^2 = g(h + a),$$

donde g es la constante de la gravedad, a la amplitud de la ola y h la profundidad del canal. Estos experimentos provocaron un gran rechazo en el mundo científico de su momento dado que la ola no se dispersaba, es decir, no iba atenuando su perfil.

A finales del siglo XIX, los matemáticos holandeses Diederik J. Korteweg (1848-1941) y Gustav de Vries (1866-1934) propusieron la siguiente ecuación en derivadas parciales para el estudio del perfil de la ola que lleva su nombre:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + (A + B\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mu \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^3} = 0$$

donde A , B y μ , dependen de las constantes físicas. En consecuencia, la [ecuación de KdV](#) incluye la suma del comportamiento de tres ecuaciones de naturaleza muy distinta. Una ecuación dispersiva, la [ecuación de Airy](#), matemático inglés (1801-1892):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mu \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

Otra la [ecuación de Burgers](#) sin viscosidad, físico holandés (1895-1981):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + B \mu \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0$$

cuya naturaleza no lineal puede generar discontinuidades, ondas de choque. Y por último la [ecuación del transporte](#):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

definiendo que el perfil $u(x, t)$ es el perfil inicial $u_0(X)$ moviéndose a una velocidad A , es decir, $u(x, t) = u_0(X - At)$

Actualmente, el análisis de los modelos asociados a los [tsunamis](#) es bien conocido y se logra diferenciar los comportamientos en aguas profundas a cuando nos acercamos a la costa. En consecuencia, se han creado sistemas de alerta ante la posibilidad de un maremoto en distintas

zonas del globo. Sin embargo, la predicción de ellos sigue siendo poco precisa, ya que, aun conociendo el epicentro de un gran terremoto subacuático y el tiempo que puede tardar en llegar un maremoto a la costa, no se dispone de sistemas de medición que permitan determinar que efectivamente se ha producido la ola gigante. Como resultado de todo esto, es común que se produzcan falsas alarmas.



Figuras 7a y 7b. Señalización de evacuación y zona segura de tsunami. Fuente 7 a: <http://www.flickr.com/photos/twicepix/2003401730/> Fuente 7 b: <http://www.flickr.com/photos/gotencool/7058871493/>.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Constantin, A. (2011): *Nonlinear water waves with applications to wave-current interactions and tsunamis*. Philadelphia: SIAM, col. CBMS-NSF, Regional Conference Series in Applied Mathematics, vol. 81.

El matemático Adrian Constantin presenta un abanico de modelos del problema de las olas y de las oscilaciones en fluidos y un análisis matemático de dichos problemas.

Davies, G. F. (2011): *Mantle Convection for Geologists*. Cambridge: Cambridge University Press.

Libro de referencia que analiza todos los fenómenos de convección en el interior de la Tierra, así como sus consecuencias y la percepción de ellas en la estructura externa e interna del planeta.

Fowler, A. (2011): *Mathematical Geoscience*. Londres: Springer-Verlag London, col. Interdisciplinary Applied Mathematics, vol. 36.

Andrew Fowler es un matemático reconocido por sus contribuciones en el área de la modelización matemática de fenómenos naturales. En este libro hace una detallada presentación de los modelos matemáticos en fenómenos de geociencias: erupciones volcánicas, convección del manto, fluidos en medios porosos, cambio climático, etcétera.

Fowler, C. M. R. (2005): *The Solid Earth: an introduction to global geophysics* (2^a ed.). Cambridge: Cambridge University Press.

Esta colección de lecciones introductorias para estudiantes de geociencias presenta un amplio contenido físico y de cálculo avanzado, haciendo especial énfasis tanto en las leyes o principios físicos como en la instrumentación y en la obtención de datos. Facilita la comprensión de la complejidad de nuestro planeta con muchos ejemplos.

Isaaks, E. H. y Srivastava, R. M. (1989): *An introduction to applied geostatistics*. Oxford: Oxford University Press. Aquí encontramos una serie de sencillas herramientas estadísticas y de probabilidad, utilizadas para el análisis de datos en geociencias, el estudio de posibles catástrofes naturales, etcétera.

Lowrie, W. (2011): *A student's guide to geophysical equations*. Cambridge: Cambridge University Press.

Guía para conocer las clásicas ecuaciones de la gravedad, la rotación de la Tierra, los modelos de las mareas, la convección del calor en el interior de la Tierra, el geomagnetismo y la sismología.

Martí Molist, J. (2011): *Los volcanes*. Madrid: Los Libros de la Catarata, col. ¿Qué sabemos de?, vol. 23.

Libro de divulgación que presenta de una manera atractiva lo que sabemos sobre las erupciones volcánicas, por qué y dónde se producen, cómo es el magma, etcétera.

Scholz, C. H. (2002): *The mechanics of earthquakes and faulting* (2^a ed.). Cambridge: Cambridge University Press. En esta publicación se describen los fenómenos de las fracturas y de las fricciones en las rocas, y cómo se derivan de ellas la dinámica de las placas y el origen de los terremotos.

Vega, L. (2001): "La ola solitaria". *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, vol. 4, nº 3, pp. 528-566. Madrid: RSME.

Artículo del matemático español Luis Vega en el que repasa los conocimientos matemáticos que tenemos del problema de la ola solitaria (tsunami). Recomendable para un acercamiento más profundo de las matemáticas sobre este problema.

MATERIALES AUXILIARES

PELÍCULAS

Las catástrofes naturales son un tema recurrente del cine comercial en los últimos años. Aprovechando los cada vez más espectaculares efectos especiales, los guionistas han encontrado en ellas la temática perfecta para enfrentar a los protagonistas a un enemigo inmiserible y así suscitar el entusiasmo de un público ansioso de acción. Por desgracia, muchas de las películas en las que la catástrofe es la protagonista principal carecen de rigor científico. Invito a los lectores a buscar errores cien-

tíficos en las películas de la temática que caigan en sus manos. Algunos largometrajes del género son:

El núcleo (Jon Amiel, 2003). Por razones desconocidas, el corazón del planeta Tierra ha detenido su movimiento giratorio, lo que causará en pocos meses un tremendo desastre natural, eliminando la vida tal y como la conocemos. Para evitar esta catástrofe, un grupo de científicos viaja al centro de la Tierra e intenta hacer girar su núcleo a base de explosiones.

Un pueblo llamado Dante's Peak (Roger Donaldson, 1996). En esta película se muestra cómo nadie hace caso al vulcanólogo hasta que el desastre se avecina. Así sucede con el vulcanólogo Harry Dalton (Pierce Brosnan), que detecta una extraña actividad sísmica y avisa de una posible erupción en las cercanías de Dante's Peak, un tranquilo pueblecito del Noroeste coronado por un inmenso volcán apagado.

Volcano (Mick Jackson, 1997). Un volcán aparece en medio de Los Ángeles, amenazando con un desastre de imaginables consecuencias.

San Francisco (Woody Van Dyke, 1936). En esta película protagonizada por Clark Gable se relata la historia del terremoto que sacudió la ciudad de San Francisco en 1906. Obtuvo cuatro nominaciones a los Óscar, incluyendo mejor película y mejor actor (Spencer Tracy).

Terremoto (Mark Robson, 1974). En esta película, de nuevo, un joven sismólogo predice un terremoto de gran intensidad, pero no le toman en serio hasta que la catástrofe se vuelva inminente. El alcalde no se atrevió a dar la orden de evacuación por temor a que el pánico se apoderara de la población, limitándose simplemente a tomar medidas preventivas.

2012 (Roland Emmerich, 2009). En esta película se refleja el fin del mundo supuestamente pronosticado por los mayas con volcanes, terremotos, maremotos, etcétera.

La aventura de Poseidón (Ronald Neame, 1972). Un gran tsunami azota el Poseidón, un lujoso trasatlántico que navega de Estados Unidos a Europa, dentro del cual 1.500 personas celebran la Nochevieja.

Tidal wave (Shirô Moritani, 1973). Un enorme maremoto hace desaparecer Japón.

Lo imposible (Juan Antonio Bayona, 2012). El maremoto del 26 de diciembre de 2004 visto por el cine español.

SERIE

La amenaza de Casandra (Ernie Barbarash, 2009). Esta miniserie de dos capítulos relata la colisión de varios meteoritos en la Tierra. La catástrofe siembra el pánico entre la población y solo un investigador experto en el tema podrá impedir la inminente destrucción del planeta.

DOCUMENTAL

Supervolcano: The truth about Yellowstone (Fiona Scott, 2005). Documental de la BBC. A continuación de la película *Supervolcano*, este documental de dos episodios revela las últimas investigaciones acerca de la posible catástrofe de Yellowstone. Los expertos que monitorizan el volcán y aquellos que intentan predecir la próxima supererupción hablan de la posibilidad de que suceda la catástrofe.

LA TIERRA: UN PLANETA CON MARES Y ATMÓSFERA

Antonio Córdoba y Diego Córdoba

1.3

Objetivos, contenido y criterios de evaluación de acuerdo con los Reales Decretos de Enseñanzas Mínimas, (1467/2007 de 2 noviembre para Bachillerato y 1631/2007 de 29 de diciembre para Educación Secundaria Obligatoria).

Este capítulo introduce algunos problemas, actuales e históricos, de la mecánica de fluidos de manera bien ejemplificada y documentada. La redacción, junto con la precisión en los términos y conceptos, están muy cuidadas y la elección de gráficas e imágenes es oportuna y acertada.

Como introducción se presenta al lector la predicción del tiempo atmosférico y los movimientos del mar como objetivos de la mente humana. La mecánica de fluidos se presenta como un campo que atañe a tres estados de la materia (líquido, gas y plasma) y por esta razón, sus fines, problemas y proyectos son tan variados como las situaciones en las que interviene un fluido, que pueden depender de la temperatura, la gravedad o la presencia de campos magnéticos. Se destacan también aspectos históricos y culturales, extraídos de los trabajos y antecedentes históricos de autores como Arquímedes, Pascal; Bernouilli, Lagrange, Euler (cálculo diferencial, ecuaciones de los fluidos); Navier y Stokes (viscosidad).

El método interrogativo seguido por los autores proporciona interés a la lectura del capítulo con las cuestiones elegidas. Gotas: ¿por qué son las gotas esféricas? Olas: ¿qué son las olas? Medios porosos: ¿cómo cambia la dinámica de un fluido en un medio poroso? ¿cómo se produce la aparición, o en su contrario ausencia, de singularidades en la evolución de un fluido? En todas estas cuestiones se muestra y ejemplifica la utilidad de las matemáticas para entender los fenómenos planteados.

El texto se ubica entre el análisis matemático, las simulaciones numéricas y la física de los medios continuos. Su lectura se puede seguir desde un cierto nivel de conocimiento matemático, sobre todo en su primera parte.

La comprensión de la segunda parte, singularmente la formulación analítica de conceptos y de las leyes que se derivan, supera el nivel de conocimiento de los estudiantes de bachillerato; para su comprensión sería necesaria una preparación matemática más completa y específica sobre las técnicas y conceptos matemáticos en que se basan los modelos que se presentan.

Por otro lado, los conceptos y procedimientos que se plantean resultan muy adecuados para la asignatura Ciencias de la Tierra y Medioambientales. Singularmente, el capítulo resulta especialmente oportuno para introducir y desarrollar algunas de las ideas y conceptos presentados en el segundo contenido de la asignatura:

C2. Los sistemas fluidos externos y su dinámica.

- La atmósfera: estructura y composición. Actividad reguladora y protectora. Inversiones térmicas. Recursos energéticos relacionados con la atmósfera. Contaminación atmosférica: detección, prevención y corrección. El agujero de la capa de ozono. Aumento del efecto invernadero. El cambio climático global.
- La hidrosfera. Masas de agua. El balance hídrico y el ciclo del agua. Recursos hídricos: usos, explotación e impactos. La contaminación hídrica: detección, prevención y corrección de aguas contaminadas. Determinación en muestras de agua de algunos parámetros químicos y biológicos e interpretación de los resultados en función de su uso.

También la lectura y el trabajo de este capítulo responden a los objetivos de la asignatura Ciencias para el Mundo Contemporáneo.

LA MECÁNICA DE FLUIDOS

La presencia de una atmósfera rica en oxígeno y de abundante agua en los océanos es una característica fundamental para la vida en el planeta Tierra. Predecir el tiempo atmosférico, comprender la naturaleza de los vientos, desde los amables céfiros hasta los devastadores tornados y huracanes, y entender la naturaleza de los movimientos del mar, olas, mareas y **corrientes**, han sido desde siempre objetivos que la mente humana, tanto por razones de supervivencia como por curiosidad científica, se ha dedicado a explorar y conocer.

El resultado de ese empeño es la mecánica de fluidos, un campo excepcionalmente amplio que atañe a tres estados de la materia (líquido, gas y plasma) cuyos fines, problemas y proyectos son tan variados como innumerables son las situaciones físicas en las que interviene un fluido, desarrollando dinámicas que pueden depender de factores tales como la temperatura, la gravedad o la presencia de campos magnéticos en el caso particular de los plasmas.



Figura 1. Líquido (agua). Fotografía: Antonio Córdoba.

El estudio de los fluidos se encuentra en la interfaz entre el análisis matemático, las simulaciones numéricas y la física de los medios continuos, y tiene una larga historia con momentos estelares como el descubrimiento por

Arquímedes de su famoso principio ("todo cuerpo sumergido en un fluido experimenta un impulso vertical que es igual al peso del fluido desalojado"), base de la flotación y con el que pudo determinar la composición de la corona del rey Herón de Siracusa. Este descubrimiento le provocó tanto entusiasmo que salió desnudo por las calles gritando "Eureka" (lo conseguí), según reza esa leyenda del legado científico del gran periodo alejandrino que forma ya parte importante de nuestra cultura. Algunos siglos después, ya en pleno barroco, Blaise Pascal formuló el importante concepto de **presión** estableciendo una buena base teórica para la hidrostática, con sus consecuencias prácticas en las prensas hidráulicas.



Figura 2. Los primeros estudios de dinámica de fluidos fueron protagonizados por Arquímedes de Siracusa (287-212 a. C.) y Blaise Pascal (1623-1662). Fuente: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Archimedes_bath.jpg.



Figura 3: Blaise Pascal (1623-1662). Fuente: <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pascal-old.png>.

Siguiendo en el tiempo nos encontramos con la contribución fundamental de los ilustrados, Daniel Bernoulli, Joseph Lagrange y Leonhard Euler, quienes, haciendo uso del magnífico instrumento del cálculo diferencial, derivaron las ecuaciones fundamentales de los fluidos en movimiento. Proeza que fue luego completada con el añadido de los términos de **viscosidad** por Navier y Stokes, ya en pleno romanticismo.



4a



4b



4c

Figura 4a. Daniel Bernoulli (1700-1782).
Fuente: <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Daniel.Bernoulli.001.jpg>.

Figura 4b. Joseph Louis Lagrange (1736-1813). Fuente: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Joseph-Louis_Lagrange.jpeg.

Figura 4c. Retrato de Leonhard Euler (1707-1783). Fuente: http://commons.wikimedia.org/wiki/Leonhard_Euler.

A pesar de la importancia práctica de sus problemas y de los esfuerzos de muchos grandes matemáticos durante varios siglos, quedan todavía algunas cuestiones fundamentales en la mecánica de fluidos que esperan respuesta.

La hidrodinámica es un campo inmenso de interés para los matemáticos, pero también para los físicos, los ingenieros y los meteorólogos. En muchos fenómenos de la naturaleza se han originado modelos o sistemas de ecuaciones que atañen a los fluidos y que, de alguna manera, se derivan de las leyes fundamentales que veremos a lo largo del capítulo.

La labor de los matemáticos consiste en estudiar estos modelos, demostrar su consistencia lógica (es decir, que están bien propuestos), y sacar las consecuencias en forma de teoremas y predicciones del comportamiento de sus soluciones. He aquí una pequeña muestra de fenómenos que se pueden observar a través de la potente lente de las matemáticas.

FRENTES DE AIRE FRÍO Y AIRE CALIENTE

De las ecuaciones de Navier-Stokes, a las que dedicaremos gran parte del capítulo, se deducen ecuaciones que sirven para construir modelos de evolución de los frentes atmosféricos. Son las ecuaciones quasi-geostróficas (Q.G.) derivadas de las anteriores para el caso de un fluido en movimiento de rotación (sobre la superficie de la Tierra), cuando se tienen en cuenta algunas aproximaciones razonables en latitudes medias al efecto de la rotación terrestre y la aceleración de Coriolis.

En la versión de superficie (S.Q.G.) se reducen a ecuaciones en dos variables espaciales que son las que sirven para modelar la evolución de frentes atmosféricos, pero que presentan muchas de las dificultades del modelo tridimensional de Navier-Stokes, especialmente el hecho de que el campo de velocidades venga descrito por unos operadores de naturaleza no-local (R transformadas de Riesz), como le ocurre a la presión en (N.S.).

TORBELLINOS

A menudo los fluidos desarrollan estructuras en forma de torbellinos, también conocidos como vórtices, que son capaces de concentrar una gran cantidad de energía en una región pequeña del espacio, y que poseen una gran capacidad destructiva. Estos vórtices pueden subsistir por largos períodos de tiempo y desplazarse en el espa-

cio, como hacen los huracanes y los tornados. Estudiar la evolución de estas soluciones de las ecuaciones de los fluidos y demostrar matemáticamente sus propiedades es una tarea muy interesante.

GOTAS

¿Por qué son las gotas esféricas? La razón está en la tendencia de su superficie a ocupar la mínima área posible, y da lugar a fenómenos muy interesantes de cambio de topología. Un ejemplo es un chorro de agua que rompe en un conjunto de puntos desconectados entre sí, dando lugar a gotas. Pero también resulta interesante el fenómeno contrario (por ejemplo, el chapapote), cuando un líquido viscoso dentro de otro que lo sea menos, puede desarrollar filamentos que llegan casi al tamaño molecular.

ONDAS: OLAS

¿Qué son las olas? Se trata de soluciones en forma de onda para las ecuaciones de Euler o Navier-Stokes, que veremos a continuación, análogas a las soluciones en forma de onda para el electromagnetismo (ondas de radio o de televisión). Estas ondas pueden tener longitudes del orden de centímetros –como son las llamadas capilares–, o tener longitudes kilométricas –como los devastadores tsunamis–. Pueden también aparecer, bajo ciertas circunstancias, en algunos tipos de nubes. Todas ellas presentan problemas matemáticos que son fascinantes y nos interesa investigar.

MEDIOS POROSOS

¿Cómo cambia la dinámica de un fluido en un medio poroso? ¿Cómo se mueven las aguas subterráneas? El ingeniero Henry Darcy, en 1856, dedujo de forma experimental que el fluido se rige por lo que hoy en día se conoce como la [ley de Darcy](#)

$$\frac{V}{K} v = -\nabla p - (0, gp)$$

donde la velocidad v (incompresible) y la presión p dependen de la viscosidad V , la permeabilidad K del me-

dio isotrópico, la densidad ρ del fluido y la aceleración de la gravedad g . Pero se trata de una velocidad promedio, en la escala mesoscópica que corresponde a los poros, de la de las partículas fluidas que aparecen en las ecuaciones de Navier-Stokes. Los problemas matemáticos que surgen en esta dirección tienen un interés industrial en actividades como la extracción de petróleo o la distribución de aguas subterráneas.

UN PROBLEMA DEL MILENIO

En este capítulo abordaremos una de las cuestiones fundamentales de la mecánica de fluidos que aún está abierta, relativa a las llamadas ecuaciones de Navier-Stokes. El Instituto Clay, un centro de investigación matemática de financiación privada estadounidense, la ha señalado como uno de los problemas del milenio y ha ofrecido el premio de un millón de dólares por su solución (http://www.claymath.org/millennium/Navier-Stokes_Equations/).

Se trata de la aparición, o por el contrario ausencia, de singularidades en la evolución de un fluido –según las ecuaciones de Navier-Stokes–, cuando se parte de un estado inicial que carece de ellas. Además de ser una cuestión de principios para todo modelo de evolución, se trata de una pregunta fundamental en el empeño de entender las matemáticas de la [turbulencia](#). Lo que



Figura 5a. C. Navier (1785-1836). Fuente: http://en.wikipedia.org/wiki/File:Claude-Louis_Navier.jpg.

Figura 5b. George Gabriel Stokes, 1875. Fuente: Popular Science Monthly Volume 7.

sigue a continuación es un intento de transmitir la naturaleza y el interés que tiene ese problema del milenio.

El agua y el aire son fluidos fundamentales de la naturaleza realmente inspiradores para entender el modelo matemático del medio continuo. Un concepto fundamental es el de partícula fluida, que no debemos asociar sin más a las nociones de átomo o molécula, a los que la ciencia nos tiene ahora bastante acostumbrados pero que, con permiso de Leucipo y Demócrito, son conceptos posteriores al de partícula fluida introducida por los matemáticos de la Ilustración. Pensemos en la circulación nocturna de los coches por las autopistas que concurren a una gran ciudad después de las vacaciones. Vistos desde una cierta altura, con sus luces rojas en la retaguardia, o los faros frontales de luz blanca, parecen partículas luminosas que se mueven de forma más o menos ordenada, aunque a veces sea algo caótica y accidentada, y forman perfectamente un fluido que discurre por cauces que se unen y bifurcan, entrando o saliendo de ese gran contenedor de automóviles que es la ciudad.

Podemos obtener otra metáfora fluida interesante en la salida de un estadio de fútbol, observando la escena desde un edificio suficientemente alto de la proximidad. Visto desde la lejanía se trata de un flujo de personas, partículas fluidas cuyas **trayectorias** individuales convergen o divergen, dando lugar a aglomeraciones y rarefacciones en las que varían la densidad y la presión.

EL MEDIO CONTINUO

Según Aristóteles, "El continuo puede ser definido como aquello que es divisible en partes que, a su vez, pueden ser divididas, y así hasta el infinito".

No es una mala aproximación, teniendo además en cuenta las dificultades de los griegos para superar el descubrimiento pitagórico de los números irracionales y manejar el continuo de la recta real, cuyos engranajes no fueron suficientemente lubricados hasta mucho tiempo después. Haciendo breve una larga historia, podemos decir que para los ilustrados, Bernoulli, Euler y Lagrange, la descripción matemática de un fluido involucra lo siguiente:

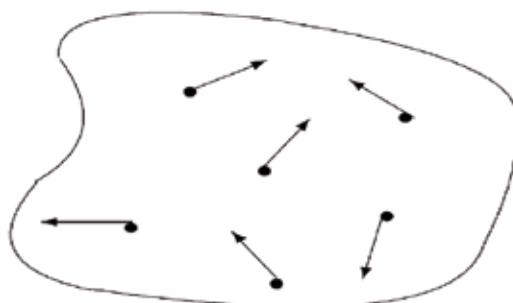


Figura 6. Dominio D y campo de velocidades. Imagen: Diego y Antonio Córdoba.

D es un dominio del espacio euclíadiano R^3 ($o R^2$);

$x \in D$ representa a una partícula del fluido;

$\rho(x, t)$ es la densidad del fluido en el punto x en el instante t .

$u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t))$ es la velocidad que tendría una partícula situada en el punto x del espacio y en el tiempo t .

$p = p(x, t)$ es la presión en el seno del fluido, en el punto espacial x y en el instante de t .

Como hemos puntualizado, la representación ideal de una partícula fluida asociándola a un punto $x = (x_1, x_2, x_3)$ del espacio euclíadiano es una argucia legítima del modelo matemático, pero lo que signifique en cada caso (coche, espectador o "partícula de agua o de aire"), dependerá de sus características especiales. En particular, para los dos fluidos fundamentales, aire y agua, no debe confundirse con una molécula, sino con un grupo de ellas, que será lo suficientemente amplio para que podamos asociarles una velocidad común, una especie de promedio de las de sus componentes moleculares que, ahora sabemos, siguen trayectorias caóticas y carentes de dirección. Es decir, el concepto de partícula de agua o de aire es una idealización matemática que ha resultado muy útil para entender la dinámica de estos fluidos, pero que no se corresponde con una entidad real, ni tiene mucho sentido tampoco que pretendamos definir cuántas moléculas la componen.

Existen dos puntos de vista, o maneras alternativas y complementarias, de mirar a un fluido, que tradicionalmente se denominan formulación euleriana o lagrangiana, respectivamente, en honor de sus dos grandes creadores: Leonhard Euler y Joseph Lagrange.

Según Euler, un fluido queda descrito por el campo de velocidades que nos indica la velocidad de la partícula que en el instante de tiempo t se encuentra ubicada en la posición $x = (x_1, x_2, x_3)$ de un sistema fijo de coordenadas espaciales. La evolución de ese campo de velocidades, que gráficamente podemos imaginar fotografiado en cada tiempo t para obtener su imagen u en forma de un vector $u(x, t) = (u_1, u_2, u_3)$ con origen en el punto x , describe completamente el movimiento del fluido. Por lo que en esta formulación euleriana se trata de encontrar las leyes o ecuaciones que han de satisfacer el campo de velocidades demostrando que están bien propuestas: a partir de una observación inicial del campo en el tiempo $t = 0$, probar que existe una solución única compatible con ese dato, del que además depende continuamente.

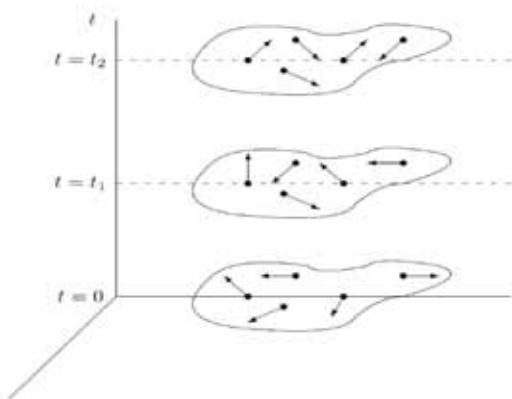


Figura 7. Dominio $D u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t))$. Imagen: Diego y Antonio Córdoba.

En la formulación lagrangiana se hace énfasis en el flujo de las partículas que aparecen descritas por unas etiquetas que, generalmente, designan su posición inicial. Es decir, consideramos que el fluido está determinado por las funciones, $x = x(a, t)$, que nos indican la posición x que tiene la partícula que en el instante $t = 0$ se encontraba en el punto $a = (a_1, a_2, a_3)$.

De manera que ahora, si miramos al fluido, no tomamos una fotografía de su campo de velocidades, sino que nos fijamos en cada partícula y seguimos su trayectoria en el tiempo.

En estas figuras el eje vertical es el tiempo mientras que el espacio se ha representado en las coordenadas hori-

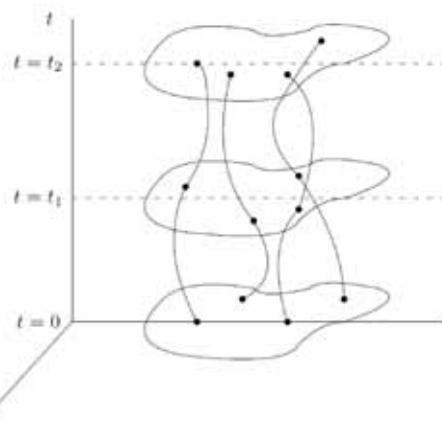


Figura 8. Trayectorias lagrangianas. $u(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t), u_3(x, t))$. Imagen: Diego y Antonio Córdoba.

zontales, lo que resulta evidente en dimensión 2 y requiere una cierta imaginación para dimensión 3.

Naturalmente ambos puntos de vista son equivalentes, lo que se expresa a través de una ecuación diferencial:

$$\frac{dx}{dt} = u(x, t)$$

En honor del otro gran ilustrado, Daniel Bernoulli, podemos mencionar la ecuación que lleva su nombre

$$\frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} + gh = \text{constante}$$

Donde ρ es la densidad, p la presión, h la altura y g la aceleración de la gravedad. Y esta ecuación tiene numerosas aplicaciones prácticas, por ejemplo en la fontanería, al permitirnos calcular la presión ejercida sobre una cañería conociendo la sección y el flujo de agua que la atraviesa.

TERMINOLOGÍA

Las ecuaciones de los fluidos representan una de las cimas de la modelización matemática que fue posible escalar a partir de la base que representa el cálculo diferencial de Newton y Leibniz. Son también un exponente de aquel siglo prodigioso e ilustrado cuyos matemáticos se propusieron seriamente aplicar el cálculo a los dominios de Eolo y de Neptuno. En el empeño se crearon términos

y lenguaje que luego han sido de utilidad en otras muchas áreas de las matemáticas y de la ciencia. Un ejemplo son las nociones de divergencia y de rotacional de un campo de vectores:

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{u}) = \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)$$

El primero, la **divergencia**, está asociada al principio de conservación de la masa que, en un fluido de densidad constante, es equivalente a la conservación del volumen. Resulta que si la divergencia es positiva entonces las trayectorias, en promedio, se separan, y de ahí el nombre de divergencia. Por el contrario, si es negativa, entonces las trayectorias convergen en media. Luego, para que el volumen se conserve, es decir, para que el fluido sea incompresible, es preciso que la divergencia se anule y, en ese caso de densidad constante, obtenemos también la ley de conservación de la masa.

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}) > 0$$



$$\operatorname{div}(\mathbf{u}) < 0$$



$$\text{incompresibilidad} \rightarrow \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0$$

En la mecánica de fluidos el rotacional del campo de velocidades se denomina **vorticidad** y es un carácter fundamental en la teoría. La vorticidad se deduce, pues, de la velocidad a través de la fórmula diferencial:

$$\omega(x, t) = \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)$$

Ocurre, sin embargo, que en el caso de los fluidos incompresibles o de divergencia nula, podemos invertir

la fórmula anterior y obtener la velocidad a partir de la vorticidad, lo que es conocido como la ley de Biôt y Savart (en cuya deducción desempeña un papel importante la solución fundamental del operador laplaciano que en el caso de dimensión 3 viene dada, salvo una constante, por la función $1/\|x\|$, mientras que en dimensión espacial 2 se trata de $\log \|x\|$):

$$\mathbf{u}(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{y} \times \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x} + \mathbf{y}, t)}{\|\mathbf{y}\|^3} dy$$

La vorticidad es un término que nos sirve para cuantificar la rotación local de un fluido:

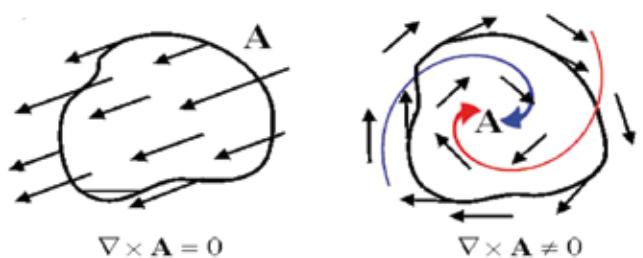


Figura 9. La vorticidad. Imagen: Diego y Antonio Córdoba.

En el caso de dimensión espacial $n=2$, la vorticidad resulta ser un escalar

$$\omega = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$$

Pero en dimensión $n=3$ es el vector

$$\boldsymbol{\omega} = \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)$$

Con ayuda del cálculo diferencial el campo de velocidades, cerca de un punto dado x , puede ser aproximado por la suma de tres términos que se corresponden con una translación y un giro, junto a una dilatación en unas direcciones y una contracción en las restantes. La translación viene dada por el vector $\mathbf{u}(x)$, pero las otras están asociadas a la matriz de las derivadas parciales de las

componentes del campo de velocidades, también denominada jacobiana:

$$Ju = \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right)$$

El giro depende de la parte antisimétrica

$$\Omega u = \frac{Ju - (Ju)^t}{2}$$

donde A^t designa a la matriz transpuesta de A . Las dilataciones-contracciones están, por el contrario, asociadas a la parte simétrica:

$$Du = \frac{Ju + (Ju)^t}{2}$$

Resulta que podemos integrar explícitamente las ecuaciones de las trayectorias correspondientes a cada término local del campo, y resulta lo siguiente:

Traslación:

$$x = x_0 + tu(x_0)$$

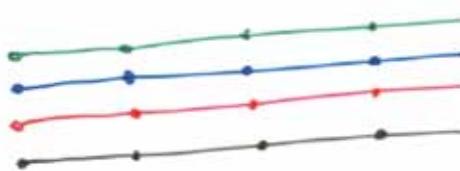


Figura 10. Traslación. Imagen: Diego y Antonio Córdoba.

Dilatación + Estrechamiento: Por la simetría de la matriz $D^t = D$, en un apropiado sistema de coordenadas podemos escribirlo en forma diagonal

$$Du(x_0) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

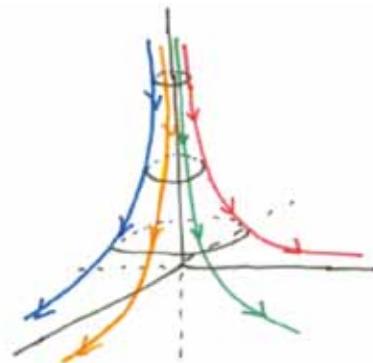


Figura 11. Dilatación + Estrechamiento. Imagen: Diego y Antonio Córdoba.

Rotación:

$$\Omega u(x_0) \cdot (x - x_0) = \frac{1}{2} \omega \wedge (x - x_0)$$

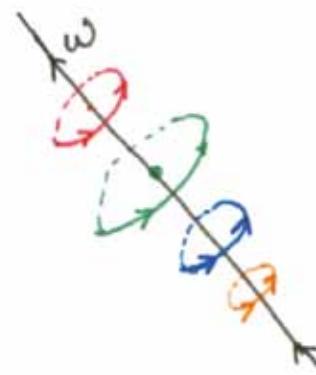


Figura 12. Rotación. Imagen: Diego y Antonio Córdoba.

donde \wedge representa el producto vectorial.

Pero esa imagen local transmite también lo complicado que puede resultar el movimiento de las partículas cuando se mezclan la translación con la dilatación en unas direcciones y estrechamientos en las otras de esos chorros de fluido que, a su vez, pueden estar rotando con velocidades angulares diversas.

LAS ECUACIONES DE EULER Y DE NAVIER-STOKES

Las ecuaciones fundamentales de los fluidos incompresibles fueron deducidas por Euler (cuando el fluido es inviscido o carente de viscosidad) y por Navier-Stokes, quienes introdujeron el término **viscoso** en las ecuaciones de Euler. Reflejan las leyes fundamentales de conservación de la masa y de la energía, pero despreciando algunos efectos como son los debidos a la temperatura o la salinidad, que pueden llegar a ser sin embargo muy importantes en modelos más complejos.

Al contrario de lo que ocurre con otras teorías clásicas, como son el electromagnetismo y la mecánica cuántica, que están descritas por ecuaciones lineales (las de Maxwell y Schrödinger, respectivamente), el movimiento de los fluidos está gobernado por un sistema de ecuaciones en derivadas parciales que no son lineales. Esta es la razón por la que el conocimiento de fenómenos turbulentos de gran impacto en la naturaleza, y en nuestra vida cotidiana, no ha alcanzado todavía el nivel de otras teorías.

El mismo Leonardo da Vinci ya llamó la atención acerca de la complejidad que puede alcanzar el movimiento caótico de los fluidos cuando estos entran en un régimen turbulento. Más recientemente, Richard Feynman designó a la turbulencia como "*the most important unsolved problem in classical physics*", mientras que se atribuye a Einstein la siguiente frase: "Voy a preguntar a Dios dos cuestiones: el porqué de la relatividad y el porqué de la turbulencia. Soy optimista en obtener respuesta a la primera de ellas".

Para obtener las ecuaciones consideramos la ley de la conservación de la masa y la segunda ley de Newton.

La ley de conservación de la masa en un fluido de densidad constante, que podemos siempre hacer igual a uno sin pérdida de generalidad, es equivalente a la conservación del volumen, es decir, a la **incompresibilidad** que viene descrita por la ecuación $\text{div}(u) = 0$. En cuanto a la ley de conservación del momento, o segunda ley de Newton, nos da lugar a un sistema de tres ecuaciones diferenciales: si $u(x(t; y), t)$ designa la velocidad en el momento de tiempo t que tiene la partícula que se en-

contraba en la posición inicial y ($y = x(0; y)$), entonces la aceleración viene dada por la derivada:

$$\frac{d}{dt} u(x(a, t), t) = \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla_x u \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla_x u$$

La segunda ley de Newton (suponiendo que la densidad es igual a 1) da lugar a la identidad:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla_x u \right) = F_{\text{internas}} + F_{\text{externas}}$$

Donde aparecen las fuerzas externas (gravitación, campos eléctricos o magnéticos); y las internas que modelan la interacción entre las distintas partículas fluidas, y son responsables de lo que se denomina viscosidad. He aquí las ecuaciones:

Euler: Fluidos perfectos

$$\text{div}(u) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla_x u = -\nabla_x p$$

Donde p = presión, $u = (u_1, u_2, u_3)$ velocidad, por tanto, obtenemos un sistema de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas.

Navier-Stokes: Fluidos viscosos

$$\text{div}(u) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla_x u = -\nabla_x p + \nu \Delta u$$

$\nu > 0$ es el coeficiente de viscosidad. Sin pérdida de generalidad hemos supuesto que la densidad ρ es igual a uno en ambos sistemas de ecuaciones.

El caso de los fluidos perfectos no requiere más análisis que la aplicación del cálculo diferencial a las leyes fundamentales de la mecánica enunciadas por Newton, pero la modelización de la viscosidad llevada a cabo por Navier y Stokes necesita de algunas hipótesis adicionales sobre la naturaleza de nuestro fluido. Existiendo modelos más complejos, caso de los fluidos viscoelásticos como la saliva, o esos materiales con los que ahora se fabrican cómodos colchones, en los que la viscosidad

hay que introducirla de manera algo más complicada. En cualquier caso, la aparición del laplaciano, definido para cualquier función f :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}$$

$$\Delta u = (\Delta u_1, \Delta u_2, \Delta u_3)$$

con un coeficiente positivo en la ecuación es consistente con otras teorías de difusión y de rozamiento. En este texto no se analizará la naturaleza de los términos viscosos en las ecuaciones de los fluidos, pero si queremos hacer constar que se trata de un área activa de modelización para materiales interesantes que se desvían del modelo newtoniano descrito en las ecuaciones anteriores. En cualquier caso, el principio de Arquímedes y la ecuación de Bernoulli antes aludidos son consecuencias de estas leyes fundamentales cuya deducción es un ejercicio del cálculo diferencial que manejaban los ilustrados del siglo XVIII.

Estamos, pues, en condiciones de formular el "problema del milenio" que se pregunta sobre la naturaleza de las ecuaciones obtenidas:

Problema del milenio: Dada una velocidad inicial $u(x, 0) = u_0(x)$ suficientemente lisa (suficientemente diferenciable), por ejemplo de clase C^∞ y soporte compacto y tal que $\operatorname{div}(u_0) = 0$: ¿existe una solución lisa $u(x, t)$ válida en todo tiempo $t > 0$? Partiendo de un dato liso, ¿es posible generar singularidades al cabo de un tiempo finito?

Se trata, pues, de una cuestión fundamental, por lo que puede sorprender a muchos que esté todavía abierta. Sus dificultades estriban, creemos, en dos características importantes:

- No linealidad del término convectivo $u \cdot \nabla u$
- No localidad de la presión: ocurre que la presión está relacionada con el campo de velocidades a través de la fórmula $-\Delta p = \operatorname{div}(u \cdot \nabla u)$ que es fácil de deducir de las ecuaciones de Navier-Stokes con un poco de destreza en el uso del cálculo diferencial. Se trata, pues, de una relación diferencial que permite despejar la presión y escribirla en términos de las componentes del campo u . Sin embargo, cuando esto se hace (se integra

la relación anterior) la expresión resultante involucra "integrales" de las funciones $u_j u_k$ pero esas "integrales" dependen de los valores de la velocidad en todo el espacio, y no solo en la vecindad del punto considerado. En otras palabras, la presión en un punto del fluido depende de las velocidades de todas sus partículas y no solo aquellas cercanas a él. Esta no-localidad de la presión es también responsable de que las ecuaciones de los fluidos resulten ser tan difíciles.

Estas son las razones por las que aún seguimos sin conocer la respuesta a una cuestión tan básica. La deducción de las ecuaciones fue un hito de las matemáticas de la Ilustración y una expresión de la potencia del cálculo y de la mente humana capaz de modelar los dominios de Eolo y de Neptuno. Pero enseguida cundió el desánimo entre aquellos ilustrados, porque tenían las ecuaciones pero no sabían resolverlas. He aquí algunos comentarios fehacientes de ese estado de frustración que, creemos, fue en gran parte motivado por las matemáticas de los fluidos: "Me parece que la mina de las matemáticas es ya muy profunda y, a menos que descubramos nuevas vetas, pronto será necesario abandonarla. La física y la química ofrecen ahora yacimientos mucho más fáciles y brillantes". Lagrange (carta a D'Alembert, 1781).

"Me atrevo a afirmar que, en menos de un siglo, no tendremos ni tres grandes matemáticos en Europa. Esta ciencia quedará muy pronto en el estado donde los Bernoullis, Clairaut, D'Alembert y Lagrange la han dejado". Diderot (1754)

El progreso en el conocimiento de las ecuaciones de los fluidos experimentó un desarrollo crucial en el año 1933, cuando Jean Leray obtuvo unos resultados fundamentales que mostraron que el modelo estaba bien propuesto. Es decir, si la velocidad inicial es lisa (suficientemente diferenciable) entonces durante un intervalo de tiempo existe una solución única que depende continuamente de los datos iniciales.

El trabajo de Leray sería inconcebible sin el desarrollo que el análisis matemático había experimentado durante todo el siglo XIX y comienzos del XX. Uno de los grandes impulsores de este desarrollo fue Riemann, quien extendió la noción de integral y de derivada, llegando a formular el concepto de derivada débil, o en el sentido de las distribuciones que diríamos ahora, en su empeño

de entender la unicidad de los desarrollos trigonométricos. Luego vendría Lebesgue, quien, con su noción de integral, abrió el paso al análisis funcional en espacios que ahora llamamos de Lebesgue o de Sobolev, y son el marco en el que hemos aprendido a buscar la existencia de las soluciones de nuestras ecuaciones.

Leray introdujo la noción de solución débil, o turbulenta según su terminología, y la estrategia de regularización de las ecuaciones por medio de viscosidades artificiales, obteniendo luego sus soluciones "débiles" como límites viscosos de las soluciones aproximantes, y dejando para un posterior análisis la importante propiedad de la diferenciabilidad y unicidad de las soluciones así obtenidas. Y en eso estamos.

Un desarrollo interesante ha venido asociado a la noción de vorticidad, dando lugar a una formulación de las ecuaciones que pone el énfasis en la evolución de ese vector (escalar en el caso bidimensional) de importancia crítica. En el año 1984, en un trabajo conjunto de los matemáticos Beale-Kato-Majda, obtuvieron un criterio para la existencia de singularidades de la solución en un tiempo T:

Singularidad en tiempo T si y solo si

$$\int_0^T \sup_x |\omega^{(x,t)}| dt = \infty$$

Ecuación de la vorticidad:

n=2:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \cdot \nabla_x \omega = 0$$

n=3:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \cdot \nabla_x \omega = \omega R \omega$$

donde

$$R\omega = R(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

$$= (R_{11}\omega_1 + R_{12}\omega_2 + R_{13}\omega_3 + R_{21}\omega_1 + R_{22}\omega_2 + R_{23}\omega_3 + R_{31}\omega_1 + R_{32}\omega_2 + R_{33}\omega_3)$$

siendo cada R_{jk} una transformación que convierte una función dada f en otra $R_{jk}f$ a través de un proceso de in-

tegración que está asociada a unos núcleos, $K_{jk}(x,y)$, que son singulares en la diagonal $x=y$. No obstante, pueden ser calculadas explícitamente y presentan unas cancelaciones (cambios de signo) que permiten darles sentido a las integrales.

$$R_{jk}f(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x-y|>\epsilon} K_{jk}(x,y) f(y) dy$$

pero se trata de un capítulo muy importante del análisis matemático contemporáneo cuya discusión queda fuera del contenido de esta unidad.

Estas ecuaciones, en el caso particular de dos dimensiones, muestran cómo allí la vorticidad se conserva a lo largo de las trayectorias y explican un resultado anterior de Yubovich, quien obtuvo la regularidad y la unicidad en ese caso.

Pese a que el problema del milenio sigue sin resolverse, ello no ha supuesto un obstáculo para que los desarrollos matemáticos alrededor del modelo hayan servido para entender los fenómenos atmosféricos, u obtener aplicaciones prácticas que permiten diseñar barcos y aviones. Pero sería muy conveniente saber, por ejemplo cuando uno se sube a un avión, que las soluciones existen y son únicas y suaves. El problema del milenio es, pues, una cuestión básica que clama por su respuesta. No obstante no es, ni mucho menos, el único tema importante en la mecánica de fluidos.

EJERCICIOS

1. Deduce el principio de Arquímedes de las ecuaciones de Euler.
2. Deduce la ecuación de Bernoulli de las ecuaciones de Euler.
3. Demuestra que si la vorticidad de un fluido, en dimensión dos, tiene simetría radial entonces es una solución estacionaria de las ecuaciones de Euler.

MATERIALES AUXILIARES

PELÍCULAS

Twister (Jan de Bont, 1996). Dos grupos de científicos que persiguen tormentas para estudiar los comportamientos de los tornados compiten por ser los primeros en analizar estos peculiares fenómenos meteorológicos desde dentro de un tornado. Su objetivo es analizar en profundidad la mayor tormenta que caerá sobre Oklahoma en el último medio siglo. Aunque no se da un enfoque científico, los tornados son el elemento central de la película.

DOCUMENTALES Y MATERIAL AUDIOVISUAL

The blue planet (2001). Serie documental de la BBC sobre los océanos del planeta Tierra. Cada uno de los episodios está dedicado a un aspecto diferente de la vida mari-

na. Disponible en <http://www.bbc.co.uk/programmes/b008044n>.

The winds (Tony Bulley, 2011). Este documental de la BBC, dentro de la serie *The Weather*, explica el fenómeno del viento y resalta algunas historias relacionadas con esta fuerza de la naturaleza. Disponible en <http://www.bbc.co.uk/programmes/b00jzjhx>.

The life and times of El Niño (2005). Documental de la BBC dedicado a El Niño, el fenómeno meteorológico cíclico consistente en una superposición de aguas cálidas procedentes del hemisferio norte inmediatamente al norte del ecuador, sobre las aguas de emersión muy frías que caracterizan la corriente de Humboldt. El Niño provoca estragos a escala zonal (en la zona intertropical) debido a las intensas lluvias, afectando principalmente a América del Sur, tanto en las costas atlánticas como en las del Pacífico. Disponible en <http://www.youtube.com/watch?v=MzcKBeW44ao>.



A close-up photograph of a large group of monarch butterflies (Danaus plexippus) resting on a dark, textured surface, likely a tree branch. The butterflies are oriented with their wings closed, showing their dark orange undersides. The scene is set against a dark background, possibly a forest at night, with some bright highlights reflecting off the butterflies' wings and the surrounding environment.

BLOQUE 2

LA VIDA EN LA TIERRA

Maravillas de la evolución

Autor: Alejandro Báez Rubio. FOTCIENCIA9

La idea de la evolución biológica ha sido, sin duda alguna, una de las teorías científicas que más han marcado la cultura y el pensamiento humano. Entre otras cosas porque es asombroso cómo ha dado lugar a fenómenos que, en cierto modo, han empequeñecido la imaginación del ser humano. Un ejemplo de las maravillas a las que puede dar lugar es la sorprendente migración realizada por millones de mariposas monarcas desde una amplia región de Norteamérica para reunirse todas ellas en unos pocos bosques de coníferas en Michoacán, México. Mariposas que, congregadas en este lugar, son capaces de romper el sonido del silencio con sus suaves aleteos.

MODELOS MATÉMATICOS DE LAS EPIDEMIAS

Juan José Nieto Roig

2.1

Objetivos, contenido y criterios de evaluación de acuerdo con los Reales Decretos de Enseñanzas Mínimas, (1467/2007 de 2 noviembre para Bachillerato y 1631/2007 de 29 de diciembre para Educación Secundaria Obligatoria).

El autor de este capítulo se propone dar respuesta a varios interrogantes, todos ellos relacionados con la modelización de los fenómenos epidémicos, es decir, fenómenos de infección, contagio y transmisión de enfermedades. Entre estas cuestiones destacan la definición de epidemia y epidemiología y la determinación de los factores que intervienen en una epidemia. Asimismo se explica qué es un modelo epidemiológico y se pone de relieve cómo la estadística y los modelos matemáticos ayudan a prever, entender o reducir los efectos de una epidemia.

En la primera parte, el autor hace una introducción histórica e incorpora datos y momentos relevantes en la comprensión de los fenómenos de contagio e infección, en los que se introdujo el manejo de herramientas y técnicas estadísticas para la interpretación, el estudio y la prevención de tales fenómenos. Se muestra el desarrollo de la epidemiología como disciplina que estudia los factores que intervienen o contribuyen a la aparición y propagación de epidemias y aquellos otros que se proponen impedir su propagación.

Después de mostrar la utilidad de diversos modelos estadísticos, el autor introduce la idea de sistema dinámico (SD) como un concepto matemático y físico que describe la evolución en el tiempo de un sistema. Utiliza este concepto para estudiar cómo evoluciona el núme-

ro de personas sanas e infectadas en una población, o bien las fases de infección de una enfermedad en una persona.

Los modelos matemáticos ayudan a estudiar el sistema original, explican los efectos de sus distintas componentes y predicen su comportamiento futuro, a corto o largo plazo. De esta manera se utilizan los modelos epidemiológicos, para cuya construcción se necesitan conocer: la población que se considera (una región, país, ciudad, etcétera), cómo se transmite la enfermedad, y cómo puede una persona recuperarse de la enfermedad o bien causarle la muerte. A partir de estas nociones introductorias, precisas y bien seleccionadas, se describe de modo asequible para un alumno de bachillerato cuatro de estos modelos, que atienden a distintas condiciones.

La lectura de este capítulo es especialmente indicada para los contenidos señalados en la asignatura común Ciencias para el Mundo Contemporáneo, contenidos C1 y C3, y para la asignatura Biología de la Modalidad de Ciencias y Tecnología, contenidos C4 y C5. El uso de los modelos matemáticos explicados contribuye a una mejor comprensión de los fenómenos biológicos contemplados. Vemos en la tabla resumen con la vinculación curricular de este capítulo que hay un total de seis asignaturas relacionadas, las cuales conectan a 29 objetivos, 9 contenidos y 15 criterios de evaluación.

INTRODUCCIÓN

En un planeta cada vez más poblado y con una red de relaciones intensificada por la globalización, el estudio y comprensión de las epidemias supone uno de los grandes retos de la ciencia, con el fin de atenuar sus efectos y controlar sus consecuencias. Las matemáticas y, en particular, los estudios estadísticos de dinámica de poblaciones y de modelos epidemiológicos, son herramientas indispensables en esta rama de la medicina. En este capítulo trataremos de abordar las siguientes cuestiones:

¿Qué es una epidemia?, ¿de qué trata la epidemiología?, ¿cómo se pueden determinar los factores que intervienen en una epidemia?, ¿cómo se dispersan las epidemias dentro de una población?, ¿se puede controlar una epidemia?, ¿qué es un modelo epidemiológico?, ¿cómo pueden la estadística y los modelos matemáticos contribuir a entender, prevenir o reducir los efectos de una epidemia?

Según el diccionario de la Real Academia Española, **epidemia** es una palabra de origen griego ($\epsilon \pi \delta \eta \mu \alpha$) que significa: enfermedad que se propaga durante algún tiempo por un país, acometiendo simultáneamente a gran número de personas. Una enfermedad se convierte en una epidemia cuando afecta a una parte desproporcionadamente grande de personas dentro de una población, comunidad o región geográfica.

Hay epidemias de enfermedades no muy graves, como pueden ser el catarro o la gripe común, pero también hay epidemias de enfermedades muy graves, e incluso mortales, como puede ser la fiebre hemorrágica viral del Ébola, una enfermedad infecciosa y altamente contagiosa. Por ello, cualquier aspecto de una epidemia que nos permita reducir su propagación es de vital importancia.

La **epidemiología** es el tratado de las epidemias y el **epidemiólogo/ga** es una persona versada en epidemiología. La epidemiología es una rama de la medicina y trata, por tanto, de la propagación de las enfermedades, en el espacio y en el tiempo, al objeto de determinar los factores que intervienen o contribuyen a su aparición y propagación.

La primera cuestión que debemos plantearnos para entender una epidemia es: ¿cómo podemos determinar los factores que intervienen en una epidemia?

Una vez detectados los factores que hacen que aumenten los casos de una epidemia, la segunda cuestión será: ¿cómo podemos impedir su propagación?, ¿habrá alguna forma de reducir o controlar los casos?

Seguro que todos conocemos e incluso hemos padecido alguna enfermedad que ha afectado a muchas personas de nuestro entorno: un catarro, una gripe, un virus que nos ha producido dolores de cabeza, vómitos, diarrea, etcétera, o alguna intoxicación alimentaria. En esos casos cotidianos solemos poder deducir la causa y no suele haber consecuencias graves; sin embargo, otros sí que pueden tener efectos devastadores.

EJERCICIO

Trata de resolver un sencillo caso para descubrir por qué ha aumentado tanto el número de jóvenes ingresados en Urgencias en http://epi-teacher.org/dd/disease-detectives_es.pdf.

LAS PRIMERAS EPIDEMIAS

El griego Hipócrates, considerado el padre de la medicina, empezó a clasificar las enfermedades en agudas, crónicas, endémicas y epidémicas y, de hecho, puede considerarse como el primer epidemiólogo: es la primera persona de la que se tiene constancia que examinó la relación entre la enfermedad y el medio ambiente.

Aunque hoy en día tenemos una idea clara del origen de muchas enfermedades (contaminación, excesos en la ingesta de ciertos alimentos, tabaco, consumo de drogas, actividades de riesgo...), en la antigüedad no estaban claras las causas de las mismas.

Hipócrates consideraba que la enfermedad se debía a la falta de armonía de cuatro sustancias líquidas que contenía el cuerpo humano: los humores. Para paliar la enfermedad era necesario devolver el equilibrio de los cuatro humores. También introdujo el término endémico (enfermedades que se encuentran en ciertas zonas geográficas



Figura 1. Estatua en Cos que representa a Hipócrates enseñando a sus discípulos. Autor: Tedmek. Fuente: http://wikipedia.orange.es/wiki/Archivo:Kos_sto_ipp.JPG.

pero no en otras) y el de epidémico (enfermedades que surgen durante cierto tiempo).

Se considera que el inglés John Graunt (1620-1674), quien publicó en 1662 el libro *Natural and Political Observations Made upon the Bills of Mortality*, es uno de los precursores de la epidemiología y de la demografía, aunque realmente las bases de la epidemiología moderna fueron sentadas por Girolamo Fracastoro (1478-1553) en su obra *De contagione et contagiosis morbis* (*Sobre el contagio y las enfermedades contagiosas*) publicada en Venecia en 1546, donde expone sucintamente sus ideas: pequeños cuerpos capaces de autorreplicarse que no podemos ver, que producen las enfermedades y que pasan de una persona a otra.

Como casi siempre, la historia de la ciencia y la tecnología van de la mano. La construcción de microscopios de cierta potencia permitió a Anton van Leeuwenhoek (1632-1723) comprobar visualmente en 1675 la existencia de los "pequeños cuerpos" sugerida por Fracastoro.

Tres siglos más tarde, el científico francés Louis Pasteur (1822-1895) y el científico alemán Robert Koch (1843-1910) confirmarían sus teorías. Fueron, además, de los primeros en promover la higiene como medio de prevenir ciertas enfermedades. En los siglos siguientes esta fue una de las mayores aportaciones para reducir la inciden-



Figura 2. Réplica de un microscopio de van Leeuwenhoek. Autor: Jeroen Rouwakema. Fuente: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Leeuwenhoek_Microscope.png?uselang=es.

cia de ciertas enfermedades y sobre todo la desinfección introducida por el cirujano británico Joseph Lister hacia 1865 a la vista de los trabajos de Louis Pasteur.



Figura 3. Billete de 10 francos suizos con la imagen de Euler. Fuente: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Euler-10_Swiss_Franc_banknote_%28front%29.jpg.

Hasta ese momento la gran contribución por parte de las matemáticas a la epidemiología fue el estudio estadístico, aunque existe una notable excepción de un trabajo del matemático Daniel Bernoulli (1700-1782) en el que analizaba las muertes debidas a la viruela y demostraba teóricamente la eficacia de la inoculación siempre que el riesgo de muerte fuese inferior al 11%. Este trabajo, anunciado en 1760 y finalmente publicado en 1766, tiene ciertos puntos en común con los trabajos del famoso matemático Leonhard Euler (1707-1783).

La epidemia de cólera en Europa durante el siglo XIX abre el capítulo de la epidemiología moderna. El cólera es una enfermedad aguda, diarreica, provocada por la bacteria *Vibrio cholerae*, la cual se manifiesta como una infección intestinal. Los especialistas mantienen que, probablemente, llegó a Europa desde la India y pronto comenzó a provocar muertes en Europa en las primeras décadas del siglo XIX.

En Hungría se tienen los primeros registros en 1830, y ya en 1831 se había cobrado alrededor de 300.000 víctimas.



Figura 4. Mapa original de John Snow donde pueden verse las acumulaciones de los casos de cólera en la epidemia de Londres de 1854. Fuente: <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Snow-cholera-map.jpg?uselang=es>.

A mediados del siglo XIX hubo una epidemia de cólera en Londres, y todavía se desconocía la causa que hacía que la gente tuviera dicha enfermedad. John Snow (1813-1858), un médico inglés precursor de la epidemiología, incluso considerado padre de la epidemiología moderna, marcó sobre un plano del distrito de Soho, en Londres, los casos y los pozos de agua. De esta manera, localizó en



Figura 5. Réplica de la bomba de agua situada muy cerca de la ubicación original, en Broadwick Street en Londres (antiguamente Broad Street). Se erigió en el año 1992 en memoria de John Snow. Imagen: Ana M. Correas.

1854 el foco culpable de la infección: un pozo situado en Broad Street, en pleno corazón de la epidemia.

De esta manera pudo conjeturar que el cólera se transmitía bebiendo agua contaminada. Sin embargo, y como sucede de forma repetida a lo largo de los tiempos, las medidas preventivas sugeridas por Snow para impedir nuevos brotes no fueron aceptadas o puestas en práctica hasta después de su muerte.

A principios del siglo XX se empezaron a introducir en la epidemiología algunos métodos matemáticos nuevos. Así, por ejemplo, el premio Nobel de Medicina del año 1902, Ronald Ross, que demostró que la malaria se transmite por los mosquitos, había desarrollado un modelo matemático que es considerado por algunos como una de sus principales contribuciones al estudio de la epidemiología de la malaria.



Figura 6. Sir Ronald Ross (1857-1932).

En el modelo matemático de la malaria de Ross desarrollado hasta 1902 y publicado en 1915, t denota el tiempo y P la población total. Está formado por 12 ecuaciones en las que aparece la tasa de variación de diversas variables como por ejemplo la tasa de variación de la población representada por dP/dt en la ecuación 6. n , m , i , e representan, respectivamente, las tasas de natalidad, mortalidad, inmigración y emigración de la población no afectada por la enfermedad, y v es la suma de esas cuatro tasas; N , M , I , E , V son las mismas tasas pero para la población afectada por la enfermedad; otras constantes relevantes en el modelo son la proporción de la población afectada que se recupera por unidad de tiempo, r , y la tasa de infección, c .

Anderson Gray McKendrick y W.O. Kermack, figuras destacadas de la medicina, introdujeron en una serie de artículos científicos las bases de los modelos deterministas de los

546 THE BRITISH MEDICAL JOURNAL

SOME A PRIORI PATHOMETRIC EQUATIONS.

[MARCH 27, 1915]

SOME A PRIORI PATHOMETRIC EQUATIONS.

BY

SIR RONALD ROSS, K.C.B., F.R.S.

In the second edition of my book on the *Prevention of Malaria* (Murray, 1911) I published a considerable amount of work (which had occupied me for a long time) on what may be called pathometry—that is, the mathematical study of epidemiology. In these studies I followed the *a priori* method: in other words, I assumed a knowledge of the fundamental laws governing the time-to-time variations of disease in a population of living creatures; formed the corresponding difference- and differential-equations; and then sought by solving these to ascertain the more remote laws which should govern the variations if my assumptions were correct. My work was concerned chiefly with insect-borne diseases; but on page 678 I gave brief, but not quite complete, integrated equations on the general theme, these equations being obtained on the supposition that the total population remains constant during the considered period of time. A year ago, however, I was able to remove this restriction by integrating the original differential equations even when the population varies, and I have now found a simplification which enables us to state the equations in forms which are easy to analyse and which will be readily understood by any one who has some knowledge of the calculus. Thus put, they give us an elegant (though tentative) mathematical theory both of epidemic and endemic communicable diseases.

The theory is of course based upon certain probable assumptions; but its utility lies in this very point, because it enables us to test these assumptions by comparing the resulting curves with those derived from observation or statistics—a verification which cannot otherwise be obtained. My full paper on the subject is more suitable for mathematical than for medical publications; but you may possibly consent to publish the following very brief statement for the information of some epidemiologists who, I believe, will be interested in it. I will first give the identities and equations and will then add a short explanation.

1. $v = n - m + i - e$
2. $V = N - M + I - E$
3. $K = c - (v - V)$
4. $L = I - (N + r)/K$
5. $\frac{dx}{dt} = Kx(L - x)$
6. $\frac{dP}{dt} = vP - (v - V)Px$
7. $x = x_0 \frac{L}{x_0 + (L - x_0)e^{-KLt}}$
8. $P = P_0 e^{\frac{vt}{K}} \left(\frac{x}{x_0} e^{-\frac{KLt}{K}} \right)^{\frac{v-V}{K}}$
9. $KLt = \log_e \frac{L - x_0}{x_0} - \log_e \frac{L - x}{x}$
10. $f = cx(I - x)$
11. $\frac{df}{dt} = cKx(L - x)(I - 2x)$
12. $\frac{d^2f}{dt^2} = cK^2x(L - x) \{ L - 2(2L + I)x + 6x^2 \}$

that is, lose infectivity and also acquired immunity. The symbol x denotes the proportion of the total population P who are affected by the disease and living at the end of the time t , and x_0 is this proportion at the beginning of the inquiry when $t = 0$. The symbol f denotes the current proportion of new cases to total population at the time t , and, when multiplied by P , gives the current number of new cases—that is, the curve generally shown in statistics of epidemics.

I call the important constant c the *infection rate*; and these equations are based on the assumption that each affected individual infects or reinfects c other individuals in unit of time, and that c is a constant. But some of the individuals to whom he thus gives the infection may be affected already, and we must allow for this. The actual number of affected individuals at the time t will be xP ; and by supposition these will infect or reinfect $c xP$ individuals; but of these only the ones which are not affected at the time t will be new cases. The actual number of new cases, F , will then be given by the proportion,

$$F : cxP :: (P - xP) : P$$

that is $F = cxP(I - x)$. But $f = F/P$; therefore finally we get the equation (10). This equation may, however, be also deduced from the fundamental differential equations (5) and (6) described in my book. The magnitude of c , as of the other constants, will, of course, depend on the unit of time taken. It is always positive, but must not be so small as to render KL negative.

The Curve of Affected Individuals, x , is an S-shaped curve beginning at x_0 when $t = 0$, and approximating to a limit L when t is large. Its tangential, $\frac{dx}{dt}$, is a symmetrical bell-shaped curve with a maximum which $= \frac{1}{2}KL^2$ when $x = \frac{1}{2}L$ and $KLt = \log_e \frac{L - x_0}{x_0}$. The Curve of New Cases, f , is especially important as it should agree when multiplied by P with observed curves if our assumptions are sound. It begins at a small value when x_0 is small and $t=0$, and then rises more or less rapidly, reaching its maximum, $\frac{1}{2}c$, when $x = \frac{1}{2}L$ and then falling again and approximating to limit which $= cL(I-L)$ when t is large. In this case (Type I) it has an irregular bell shape, but one which tails away more gradually than it rises. But if L is not greater than $\frac{1}{2}$, x never exceeds the value $\frac{1}{2}$ and consequently f loses this bell shape and becomes an S-shaped curve (Type II) which constantly rises towards the limit $cL(I-L)$. The former would appear to be the curve of true epidemic outbreaks, and the latter of slowly increasing endemic maladies. In both cases the value of f when t is large expresses and explains the endemic persistence of the disease in a locality.

The curve f is also much modified if (as usual) the reversion factor r does not come into play until months or years after infection, in which case f will at first approximate very closely to the curve $\frac{dx}{dt}$ and then tail off more slowly. Moreover, the infection rate, c , may be changed by local conditions, as for instance those of climate and season, which may favour or disfavour the transference of infection from individual to individual. It is impossible to examine these and other consequences of the equations except at considerable length; but I should add that the functions are usually easy to manage in finite terms, and seem to me, judging from general knowledge both of epidemic and endemic diseases, to be likely to agree with the facts.

Figura 7. Artículo original de Sir Ronald Ross, publicado en la revista The British Medical Journal (1915).

procesos epidémicos. Dichos modelos se enmarcan dentro de la **teoría general de los sistemas dinámicos**. En su artículo de 1927 describieron que existe un umbral a partir del cual una enfermedad se propaga y dieron una fórmula para predecir el tamaño final de una epidemia.

Otro gran avance fue la publicación en 1954 de un estudio preliminar (dentro del *British Doctors Study* llevado a cabo desde 1951 hasta 2001 y encabezado inicialmente por Richard Doll y Austin Bradford Hill) que indicaba la sospecha de la relación entre tabaco y cáncer de pulmón. En 1956 se presentaban evidencias estadísticas de que el consumo de tabaco aumentaba el riesgo de padecer cáncer de pulmón. Puede llamar la atención este hallazgo, pero piénsese que fumar fue considerado incluso saludable en épocas pasadas. Este ejemplo muestra la importancia de la estadística y las matemáticas en los estudios médicos en general y epidemiológicos en particular.

Entre otros casos de grandes epidemias se encuentra la gripe asiática que se inició al norte de China en febrero de 1957. Este fue el primer virus (gripe A, variante H2N2) aislado en Pekín. De China pasó a mediados de abril de ese año a Hong Kong y Singapur, desde donde se difundió a la India y Australia. Durante los meses de mayo y junio el virus se extendió por todo el oriente. En julio y agosto, pasó a África y posteriormente a Europa y Estados Unidos entre octubre y noviembre. En menos de diez meses el virus alcanzó una distribución mundial.

En el año 2009, la gripe A originó una pandemia (término que significa una enfermedad epidémica que se extiende a muchos países o que ataca a casi todos los individuos de una localidad o región) causada por una variante (H1N1) del virus de 1957. La situación generó un estado de alarma mundial. En enero de 2013 las muertes causadas por gripe en Estados Unidos supusieron el 7,3% del total, por lo que las autoridades sanitarias declararon el *estado de epidemia* al superar el umbral del 7,2%. La vacuna (para la variante del año 2013, el H3N2) tiene una eficacia del 62%.

El descubrimiento de Snow, que nos puede parecer hoy en día tan sencillo, se repite una y otra vez. En los primeros casos del tristemente famoso síndrome de inmunodeficiencia adquirida (SIDA), que aparecieron a principios de los años ochenta del siglo XX, se desconocía su

origen y la forma de transmisión. Antes de determinar la causa de la infección, el método estadístico permitió deducir que el número de contactos sexuales era un factor de riesgo para el SIDA. El virus de la inmunodeficiencia humana (VIH) es un lentiavirus (de la familia *Retroviridae*) causante del SIDA, considerado como el agente de la naciente epidemia de SIDA. Fue descubierto en Francia en 1983 por el equipo de Luc Montagnier (nacido en 1932 y premio Nobel de Medicina en 2008).

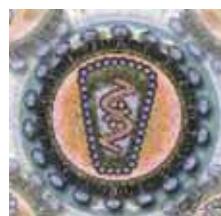


Figura 8. Corte del VIH. Fuente: © Copyright 2011 Los Alamos National Security, LLC.

MODELOS MATEMÁTICOS

A continuación veremos cómo los modelos matemáticos ayudan a estudiar y controlar las epidemias, pero antes veamos con detenimiento qué es un modelo matemático.

Un modelo matemático es una descripción de un sistema cualquiera usando el lenguaje y conceptos matemáticos. Algunos de ellos, como ya hemos visto, son los modelos estadísticos y los sistemas dinámicos. La gran ventaja de los modelos matemáticos es que pueden ayudar a estudiar el sistema original, explicar los efectos de las distintas componentes del mismo y predecir su comportamiento futuro, a corto o largo plazo. Todo ello con un coste económico bajo y, en el caso de un modelo médico, sin necesidad de experimentar en humanos o animales.

Un modelo estadístico es simplemente una formalización de las relaciones que existen entre las distintas, o al menos las más relevantes, variables que influyen en un sistema o proceso. Así, por ejemplo, una gráfica como la que ilustra las tasas de nuevos diagnósticos de VIH en España durante los años 2006 a 2011 y por categoría de transmisión puede muy bien servir para diseñar un modelo estadístico sobre esa enfermedad e inferir estrategias a seguir.

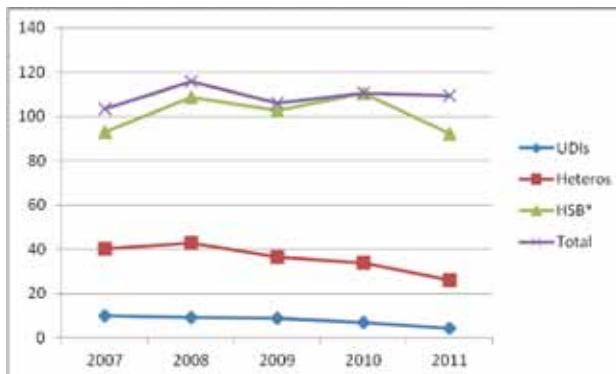


Figura 9. Tasas (por millón de habitantes) de nuevos diagnósticos de VIH en España. Datos de 11 comunidades autónomas del Instituto de Salud Carlos III. Distribución por año de diagnóstico y categoría de transmisión.

Un **sistema dinámico** (SD) es un concepto matemático y físico que describe la evolución en el tiempo de un sistema. Puede ser, por poner un ejemplo físico, un péndulo, pero en nuestro caso podemos pensar en una población y cómo evolucionan los números de personas sanas e infectadas, o las fases de infección de una enfermedad en una persona.

La gran ventaja de los SD es que pueden adaptarse a distintas escalas, desde lo microscópico o nano (como se refleja en la unidad didáctica *Nanociencia y nanotecnología. Entre la ciencia ficción del presente y la tecnología del futuro*, FECYT) a lo macroscópico.

MODELOS EPIDEMIOLÓGICOS

Un modelo matemático en el ámbito de la epidemiología será, naturalmente, un modelo epidemiológico. Para construir el modelo se necesitan hacer algunas consideraciones sobre:

- La población que se considera (una región, país, ciudad, etcétera).
- Cómo se transmite la enfermedad.
- Cómo puede una persona recuperarse de la enfermedad o si esta puede causar la muerte.

En cuanto a la población, hay que tener en cuenta si está aislada o no. Hoy en día es difícil una población aislada debido a la facilidad de movimientos migratorios. Así-

mismo hay que poder clasificar a cada individuo según el grado con que le afecte la enfermedad y en muchos casos la distribución temporal, geográfica, edad o sexo.

EJERCICIO

Piensa en la última vez que en clase hubo alguien enfermo de gripe. Haz una estadística de los que tuvieron gripe y durante cuánto tiempo. ¿Qué factores influyeron? ¿Crees que te contagió algún compañero/a? ¿Contagiarías a alguien? Realiza la misma actividad con los datos de otras enfermedades o infecciones para otro grupo o clase de tu centro.

En el modelo original de McKendrick-Kermack un individuo podía estar en uno de los dos estados siguientes:

- S (de Susceptible, es decir, que puede contraer la enfermedad).
- I (de Infectado).

Además, si la enfermedad es contagiosa y una persona infectada entra en contacto con una que no lo está, pasará a estar infectada:

- $S \rightarrow I$.
- De manera que si N es la población total, que se supone constante, se tiene $S + I = N$.

En términos más formales:

$$S(t) + I(t) = N$$

donde $S(t)$ e $I(t)$ representan el número de susceptibles e infectados en el instante t , respectivamente. Es claro que cuanto más se haya extendido la enfermedad, o sea, cuanto mayor sea $I(t)$, la probabilidad de contagio será mayor. Este hecho se traduce matemáticamente en las siguientes leyes:

$$\frac{dS}{dt} = -f(S,I), \quad \frac{dI}{dt} = f(S,I)$$

donde $\frac{dS}{dt}$ y $\frac{dI}{dt}$ representan la tasa de variación instantánea de las dos poblaciones $S(t)$ e $I(t)$ y la función $f(S,I)$ depende de cada enfermedad.

Uno de los grandes retos de la modelización es determinar para cada enfermedad o caso la función f . Hay algunos rasgos generales de f , como por ejemplo, que f debe ser creciente en ambas variables. El modelo más simple es:

$$f(S,I) = \beta SI$$

y el término βI recibe el nombre de **fuerza de infección**, donde la constante β es la tasa de contacto por susceptible y por infectado. En este caso se tiene:

$$\frac{dI}{dt} = \beta(N-I) I$$

que es una ecuación conocida con el nombre de logística y que, una vez resuelta, indica que la epidemia se extenderá hasta infectar a toda la población. Esto es así porque hemos supuesto que un individuo, una vez infectado, permanece en ese estado para siempre. Pero este sencillo modelo, conocido por **Modelo SI**, no siempre sirve para describir las epidemias, y en muchos casos hace falta introducir otros factores y grupos para adaptar el modelo a las distintas enfermedades y casos.

Si por ejemplo un infectado puede curarse, entonces tendremos el **Modelo SIS**:

$$S \rightarrow I \rightarrow S$$

con

$$\frac{dS}{dt} = -f(S,I) + g(I), \quad \frac{dI}{dt} = f(S,I) - g(I),$$

donde el término $g(I)$ es la recuperación de los enfermos. Por ejemplo $g(I) = \gamma I$ siendo γ la tasa de recuperación. El modelo es ahora más elaborado y difícil de resolver. Una cantidad que juega un papel muy importante es el índice reproductivo básico, que es el número de contactos esperado por parte de un infectado, y se cuantifica:

$$R_0 = \frac{\beta N}{\gamma}$$

de manera que si $R_0 < 1$, entonces la epidemia desaparecerá, pero si $R_0 > 1$, entonces la enfermedad será endémica, de ahí la importancia de determinar R_0 para distintas enfermedades y poblaciones.

Además de las poblaciones S e I en otros casos es necesario distinguir las siguientes poblaciones:

- E (expuesto a la enfermedad pero todavía no infectado).
- R (recuperado; no está infectado ya sea porque ha adquirido inmunidad, aislamiento o muerte).
- P (portador; en algunas enfermedades uno puede estar infectado pero no manifestar ningún síntoma de la enfermedad durante mucho tiempo o incluso durante toda la vida).

Además hay que tener en cuenta si la infección está causada por un virus (como en la rubeola), por una bacteria (tuberculosis), un protozoo (malaria), un parásito (tenia), o incluso artrópodos (garrapata). Asimismo, conviene distinguir, tal y como ya se indicó, entre epidemias y endemias.

De esta manera se puede introducir el Modelo SIR:

$$S \rightarrow I \rightarrow R$$

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI, \quad \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I, \quad \frac{dR}{dt} = \gamma I$$

en el que también juega un papel fundamental el parámetro R_0 .

Si se quiere incorporar, por ejemplo, la edad (e), habría que considerar $S(e, t)$, $I(e, t)$, $R(e, t)$, que darían las poblaciones de susceptibles, infectados y recuperados de edad e en el instante t . Ahora la dinámica vendría dada por un sistema de ecuaciones en derivadas parciales.

Si consideramos la población P –portadora– que en algunas enfermedades como la tuberculosis puede ser de gran relevancia, tendríamos un modelo más complejo, pero más adecuado para algunas enfermedades. En otros casos se necesita considerar la población E –expuestos– y se considera el Modelo SEIR.

$$S \rightarrow E \rightarrow I \rightarrow R$$

con cuatro ecuaciones.

Si se vacuna un cierto grupo de la población denotada por V , tendríamos otra ecuación más que enriquece la dinámica. Tradicionalmente se vacuna a los niños cuando alcanzan cierta edad, pero recientemente se ha

considerado la estrategia de vacunar de forma periódica, un grupo amplio de la población. Los modelos matemáticos indican que puede ser una estrategia adecuada para erradicar ciertas enfermedades y ya se ha implementado la llamada *vacunación por impulsos* en algunos casos con buenos resultados.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Diccionario de la Lengua Española (2001, 22^a ed.). Real Academia Española.

Disponible en <http://lema.rae.es/drae/>.

Bernoulli, D. (1766): "Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole, et des avantages de l'inoculation pour la prévenir". *Mémoires de mathématiques et de physiques tirés des registres de l'Académie Royale des Sciences de l'année 1760*, pp. 1-45. Paris: Histoire de l'Académie Royale des Sciences.

Trabajo original de Daniel Bernoulli donde demostraba teóricamente las ventajas de la inoculación.

Diekmann O. y Heesterbeek J. A. P. (2000): *Mathematical epidemiology of infectious diseases: model building, analysis and interpretation*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons.

Monografía muy completa y de gran calidad sobre los distintos aspectos de la epidemiología matemática.

FECYT (ed.) (2010): *Nanociencia y nanotecnología*. Entre la ciencia ficción del presente y la tecnología del futuro. Madrid: FECYT.

Unidad didáctica de la Fundación Española para la Ciencia y la Tecnología, análoga a esta, sobre nanotecnología.

Gao, S., L. Chen, J. J. Nieto y Torres A. (2006): "Analysis of a delayed epidemic model with pulse vaccination and saturation incidence". *Vaccine*, vol. 24, nº 35-36, pp. 6037-6045.

Artículo técnico donde se plantean y desarrollan las ventajas de la vacunación por impulsos.

Kermack, W. O. y McKendrick, A. G. (1927): "A contribution to the mathematical theory of epidemics". *Proceedings of the Royal Society of London*, ser. A, vol. 115, pp. 700-721.

Primer trabajo original de los autores donde sentaron las bases de los modelos matemáticos de los procesos epidémicos.

d'Onofrio, A. (2002): "Stability properties of pulse vaccination strategy in SEIR epidemic model". *Mathematical Biosciences*, vol. 179, nº 1, pp. 57-72.

Trabajo técnico sobre la vacunación por impulsos.

Murray, J. D. (1989): *Mathematical biology*. Berlin: Springer-Verlag.

Monografía clásica sobre los aspectos básicos y más avanzados de la biología matemática.

MATERIALES AUXILIARES

LIBROS

Defoe, D. (1722): *Diario de la peste*.

Varias editoriales han editado en castellano esta obra, considerada como una de las más importantes de la literatura inglesa de todos los tiempos. En ella Daniel Defoe relata de forma escalofriante los horribles acontecimientos que coincidieron con la epidemia de peste que asoló Londres y sus alrededores entre 1664 y 1666.

Camus, A. (1947): *La peste*.

La obra relata cómo unos doctores descubren el sentido de la solidaridad al realizar su labor humanitaria en la ciudad de Orán mientras su población es asolada por la enfermedad.

Matheson, R. (2007): *Soy leyenda*. Barcelona: Ediciones Minotauro, col. Pegasus (ed. orig.: 1954).

Una de las obras más célebres de su autor, *Soy leyenda* describe la agonía de Robert Neville, superviviente de una pandemia provocada por una guerra bacteriológica que ha convertido a sus habitantes en zombis. La novela sirvió de inspiración a George A. Romero, autor de un clásico del terror, *La noche de los muertos vivientes*.

PÁGINAS WEB

<http://webadventures.rice.edu/stu/Games/Espanol.html>. Videojuego en el que los Reconstructores resuelven distintos casos de epidemias.

<http://www.disease-detectives.org/>. Página inicial de los detectives de enfermedades que incluye diverso material didáctico, entre otros, un juego de mesa.

http://epi-teacher.org/dd/disease-detectives_es.pdf. Cómic en el cual los protagonistas, dos niños de 11 y 12 años, los detectives de enfermedades, resuelven su primer caso.

<http://www.montclair.edu/Detectives/>. Página de la Universidad de Montclair para la formación en epidemiología y que permite desarrollar un currículo en epidemiología. Muy útil para profesores.

<http://www.isciii.es/ISCIII/es/contenidos/fd-servicios-cientifico-tecnicos/fd-vigilancias-alertas/fd-enfermedades/sida.shtml>. Documentos de la página oficial del Instituto de Salud Carlos III. En concreto esta web contiene alertas médicas sobre el SIDA.

PELÍCULAS

Contagio (Steven Soderbergh, 2011). Esta película, de corte muy realista, narra cómo, de repente, un virus mortal se propaga por todo el mundo diezmando la población.

Soy leyenda (Francis Lawrence, 2007). Adaptación de la novela homónima escrita por Richard Matheson en 1954. Una doctora modifica genéticamente el virus de la viruela para tratar de encontrar una cura para el cáncer. El virus muta, generando una pandemia mundial que convierte a la humanidad en zombis. ¡Un hombre es el único superviviente!

LAS MATEMÁTICAS DE LA EVOLUCIÓN Y LA BIODIVERSIDAD

Marta Casanellas

2.2

Objetivos, contenido y criterios de evaluación de acuerdo con los Reales Decretos de Enseñanzas Mínimas, (1467/2007 de 2 noviembre para Bachillerato y 1631/2007 de 29 de diciembre para Educación Secundaria Obligatoria).

En este capítulo se presenta el fenómeno de la vida como uno de los grandes retos de la ciencia y se pretende contribuir a su comprensión. Para ello la autora presenta la reconstrucción del *árbol de la vida*, es decir, el estudio del proceso evolutivo de las especies vivas en el planeta Tierra, mediante el empleo de herramientas matemáticas junto con la identificación de las características de especies y de sus genomas.

El capítulo comienza caracterizando la filogenética como la disciplina que se dedica a la reconstrucción y análisis del proceso evolutivo. La primera parte de este capítulo presenta las nociones filogenéticas iniciales y es de gran interés para estudiantes de bachillerato, ya que muestra grafos matemáticos sencillos que modelizan con claridad los conceptos darwinianos. Darwin afirmó que todas las especies terrestres tienen un ancestro común, y para representar el transcurrir de la evolución introdujo un grafo que mostraba esa evolución, al cual llamó *árbol filogenético*. Las ramas del árbol son las distintas especies que surgen de un mismo nodo; los extremos del árbol, las hojas, son las especies que actualmente existen en la Tierra y cuyos vértices o nodos internos representan ancestros comunes a algunas de estas especies.

A continuación se presenta la filogenética como un área de constante interacción entre matemáticas, estadística, biología e informática. La autora nos recuerda que las aplicaciones reconstruyen el pasado, se aplican para la detección de genes dentro del genoma; en epidemiología, para el estudio del origen de virus; en ecología, para el estudio de la biodiversidad y la clasificación de nuevas especies; y también en lingüística, para la clasificación de lenguas.

El estudio de las relaciones entre especies (filogenética) se basaba hasta fechas recientes en los caracteres morfológicos y fisiológicos de las mismas; en la actualidad

se basa en la evolución molecular, gracias a la posibilidad de secuenciar proteínas y moléculas de ADN y encontrar similitudes entre ellas. Pero para tratar con la gran cantidad de datos disponibles se hizo necesario encontrar fundamentos matemáticos más sólidos para modelar los procesos; se trata pues de una rama científica, moderna y en expansión. La segunda parte del capítulo utiliza nociones más avanzadas, no asequibles a los estudiantes con carácter general, pero que sirven para mostrar la complejidad de los problemas de las bases genéticas de la teoría evolutiva y sirven para estimular la curiosidad de profesores y alumnos motivados. Algunas de las cuestiones y métodos que se presentan están aún en discusión y forman parte de temas abiertos en ciencia avanzada.

Con la nueva información aportada por los estudios genéticos, las herramientas matemáticas adquieren mayor potencia en el estudio de las especies. La combinatoria permite discutir y calcular el número de árboles posibles que relacionan tres o más especies, lo cual contribuye al estudio de su evolución. El método de distancias, en el que la distancia mide la diferencia entre dos secuencias de ADN, utiliza técnicas de recuento de regularidades y combinaciones de secuencias, para lo cual habría que tener también en cuenta los cambios ocultos que se hayan producido entre ellas durante la evolución. Los modelos probabilísticos de Markov contribuyen a mejorar el estudio matemático de la evolución.

Mostrar a los estudiantes de bachillerato las bases técnicas y conceptuales de la evolución, de los descubrimientos que la avalan, de las disciplinas que las sustentan y de las bases matemáticas con las que se abordan es una aportación central para la formación intelectual de los estudiantes de estos niveles. Son ocho las asignaturas de bachillerato vinculadas con este capítulo, en su mayoría para un solo contenido, pero en cada una de las cuales son de interés la información y las preguntas planteadas.

INTRODUCCIÓN

La particularidad más importante del planeta Tierra es la vida que alberga. Entender el fenómeno de la vida es uno de los grandes retos de la ciencia. En particular, para describir el proceso de formación desde el primer organismo unicelular hasta la diversidad de especies que habitan el planeta actualmente se necesitan recursos científicos de muchas disciplinas. En este capítulo abordaremos el problema de la reconstrucción del **árbol de la vida**, que explica el proceso evolutivo de todas las especies vivientes en el planeta Tierra a partir de la información que tenemos al alcance: las características de los grupos de especies y sus genomas. Queremos entender qué grupos de especies aparecieron en cada momento del proceso y cuándo se produjo cada evento de creación de nuevas especies.

A principios del siglo XX, se estudiaban para ello las características morfológicas de las especies, pero esta disciplina dio un giro importante en los años sesenta y setenta con la llegada de datos moleculares y, más recientemente, con la secuenciación de genomas. Ya en los años setenta se produjeron las primeras incursiones de las matemáticas en **filogenética**, el área que se dedica a la reconstrucción y análisis del proceso evolutivo. Pero no ha sido hasta el comienzo del nuevo milenio cuando la gran cantidad de datos disponibles ha hecho necesarios fundamentos matemáticos para modelar estos procesos.

Hoy en día la filogenética es un área de constante interacción entre las matemáticas, la estadística, la biología y la informática. Sus aplicaciones no solo se ciñen a la reconstrucción del pasado sino que se aplican en genómica (para la detección de genes dentro del genoma), epidemiología (para el estudio del origen de los virus), ecología (para el estudio de la biodiversidad y la clasificación de nuevas especies), o incluso en lingüística (para la clasificación de lenguas).

Empezamos este capítulo con una introducción a la noción matemática de **árbol filogenético**. Seguidamente estudiamos la cantidad de árboles filogenéticos y la posibilidad de definir distancias entre especies. Finalmente se muestran dos de los métodos de

reconstrucción filogenética más usados hoy en día. Las nociones matemáticas avanzadas requeridas para entender el capítulo son solo el factorial de un número natural y el logaritmo.

EL ÁRBOL FILOGÉNICO

La teoría de la evolución de Darwin afirma que todas las especies terrestres tienen un ancestro común. El mismo Darwin representó la evolución en un árbol llamado árbol filogenético. Matemáticamente hablando, un árbol es un grafo (es decir, un conjunto de vértices unidos entre sí por aristas) conexo y sin ciclos, tal como aparece en la figura 1.

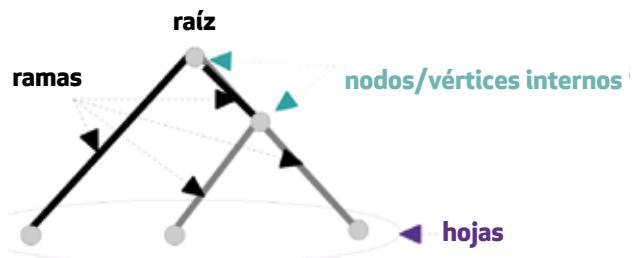


Figura 1. Representación matemática de un árbol, con la raíz arriba y las hojas abajo. Las ramas del árbol corresponden a las aristas del grafo. En esta figura contamos cuatro ramas y cinco vértices. Las hojas unidas por las ramas en gris forman cerezas. Imagen: Marta Casanellas.

Un árbol filogenético es pues un árbol cuyas hojas están etiquetadas con nombres de especies que actualmente existen en la Tierra y cuyos vértices internos representan ancestros comunes a estas especies. En la figura 2 se muestra un árbol filogenético pintado por Darwin, y en la figura 3 se puede ver un árbol filogenético del grupo de los homínidos.

Hasta los años sesenta, el estudio de las relaciones ancestrales entre especies (desarrollado por la filogenética) se basaba en caracteres morfológicos y fisiológicos de las especies, pero desde que se ha tenido la posibilidad de secuenciar proteínas y moléculas de ADN se basa en la evolución molecular. En las moléculas de ADN del núcleo de las células está codificada la

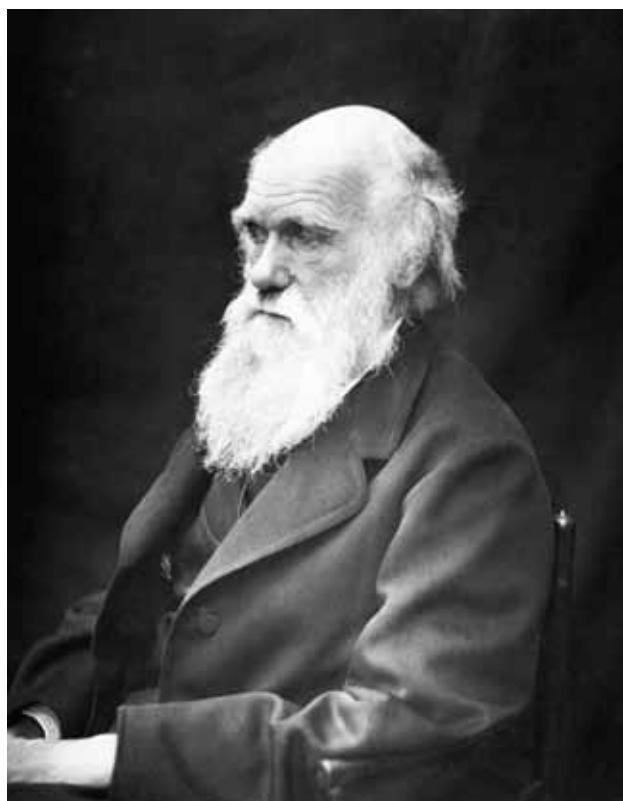
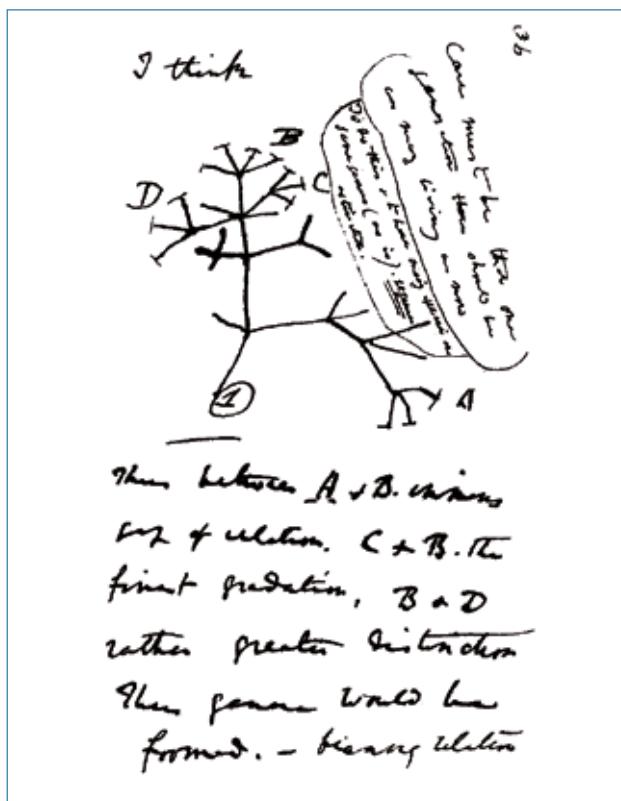


Figura 2. A la izquierda, Charles Darwin (1809-1882). Autor: J. Cameron. Fuente: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Charles_Darwin_01.jpg. A la derecha, árbol filogenético pintado por Charles Darwin en su cuaderno "Transmutación de las especies". Fuente: Departamento de inglés de la Universidad de Georgia.

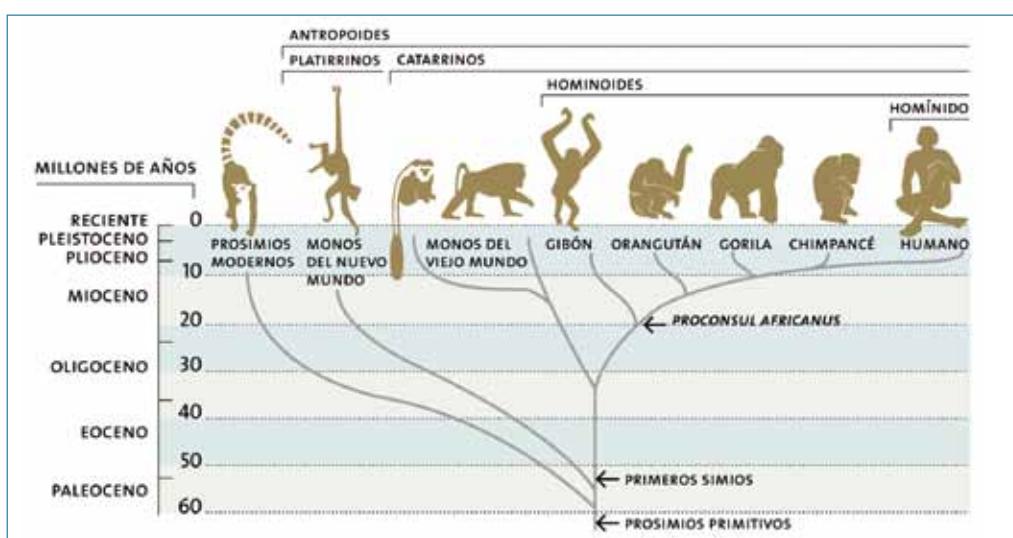


Figura 3. Árbol filogenético de los homínidos. Autor: Levin Luciano. Fuente: http://www.educ.ar/dinamico/UnidadHtm_ml_get_7f39cd5d-c843-11e0-808c-e7f760fda940/index.htm.

información hereditaria de un organismo: el genoma (figura 4). El primer genoma de una especie eucariota fue secuenciado en 1996, y desde entonces la cantidad de especies cuyo genoma ha sido secuenciado sigue aumentando rápidamente. Hoy en día hay unas 180 especies eucariotas secuenciadas, entre las que se encuentra la especie humana, secuenciada en el año 2001 (aunque la secuencia no fue completa hasta 2006). El genoma de las especies secuenciadas está públicamente disponible en www.ensembl.org, entre otras páginas web.

Las moléculas de ADN están formadas por cuatro tipos de nucleótidos: adenina, citosina, guanina y timina, que denotaremos por A, C, G, y T, respectivamente. Puesto que las moléculas de ADN tienen estructura de doble hélice y los enlaces están formados por A-T y C-G, para dar una molécula de ADN solo hay que dar la secuencia de nucleótidos

de una de sus cadenas. Por ejemplo la secuencia ACTT denota la molécula de ADN formada por estos nucleótidos y sus correspondientes en la otra cadena: TGAA.

La evolución de una especie se traduce en cambios en su genoma: supresión e inserción de nucleótidos y mutaciones (también llamadas sustituciones) de nucleótidos.

¿Cada cuánto tiempo hay una mutación en el genoma? Depende de la especie de la que estemos hablando. Por ejemplo, en humanos se estima que la razón de mutación es de unos 130 nucleótidos por generación (dentro de los 3.200 millones de pares de nucleótidos que contiene el genoma humano).

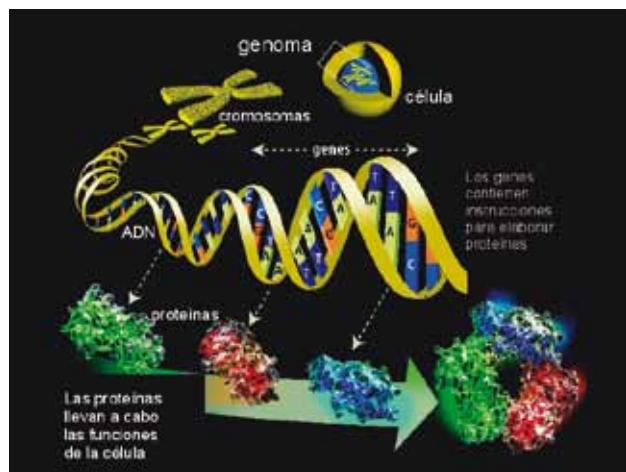


Figura 4. Gráfica del genoma humano. Fuente: <http://genomicscience.energy.gov>.

La filogenética no es solo relevante para el estudio de la evolución sino también para sus aplicaciones en la detección del origen de virus, o para encontrar genes en la especie humana por comparativa con las otras especies.

EL NÚMERO DE ÁRBOLES POSIBLES

Hasta los años ochenta se creía que los chimpancés y los gorilas estaban más relacionados entre ellos que con los humanos (figura 5(a)), pero en 1990, a partir del estudio de la evolución molecular, se propuso la relación

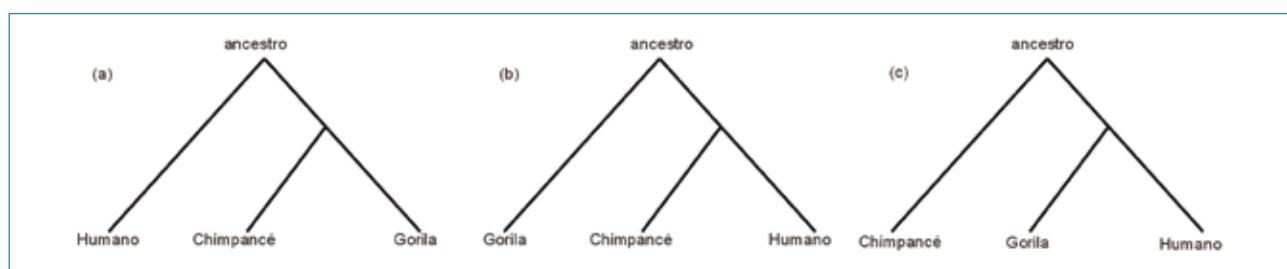


Figura 5. Los tres posibles árboles filogenéticos relacionando gorila, chimpancé y humano. El árbol (a) era considerado el correcto hasta 1990, pero hoy en día sabemos que las relaciones evolutivas de estas especies vienen representadas en el árbol (b). Autora: Marta Casanellas.

evolutiva representada en la figura 5(b), que es la aceptada hoy en día, en la que son el chimpancé y el humano los que presentan mayor relación.



AACTTCATGCTACCGA-GGCCTGTAATTGCATGA-GATCAT

Figura 6 a. Lémur de cola anillada (Lemur catta). Fuente: <http://www.lafotografis.com/Animales/Lemur-Cola-Anillada.jpg/foto.html%5D%5Bimg%5Dhttp://www.lafotografis.com/fotos/199-6/Lemur-Cola-Anillada.jpg>.



AAGGTCAATTCTCAACGA-GGCATGTAACTGCATGA-CATGAT

Figura 6 b. Macaco de Sri Lanka (Macaca sinica). Autor: BluesyPete. Fuente: http://fr.wikipedia.org/wiki/Fichier:Macaque_%C3%A0_toque,_Femelle.JPG.



AACGTCAATTCTACCGA-TGCCTGTAATTGCCTGA-CATCAT

Figura 6 c. Tarsero filipino. Fuente: http://en.wikipedia.org/wiki/File:Tarsier_Hugs_Mossy_Branch.jpg.

Pero ¿cómo se puede deducir el árbol filogenético solo a partir de las especies actuales? Por ejemplo, basándonos en las tres secuencias de la figura 6 pertenecientes a los primates lémur, macaco y tarsero, ¿cuál sería árbol filogenético de estas tres especies?

Primero tenemos que preguntarnos cuántos árboles posibles hay que relacionen las tres especies. Si los árboles los pensamos con una raíz que representa el ancestro común a todas las especies del árbol, los pintamos con la raíz arriba y asumimos que cada especie ancestral ha dado lugar exactamente a dos especies posteriores (estos árboles se llaman binarios). Entonces hay tres árboles posibles de tres especies, como se muestra en la figura 5. Pero ¿y si tuviéramos cuatro especies? Claramente la cuarta especie se podría añadir a una rama del árbol de tres especies, o podría haberse especiado antes del grupo de tres especies, así para cada árbol de tres especies obtenemos cinco árboles de cuatro hojas, lo que da lugar a un total de 15 árboles de cuatro especies (figura 7).

Para generalizar este argumento y encontrar el número de árboles binarios con raíz para cualquier número de especies, hay que contar primero cuántas ramas tiene un árbol de n hojas. Está claro que los árboles de tres hojas tienen cuatro ramas, y que cuando añadimos una nueva especie se crean dos nuevas ramas. Luego los

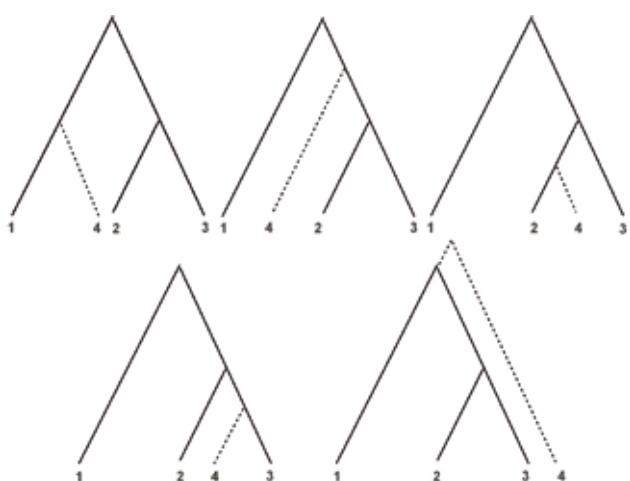


Figura 7. Los cinco árboles de cuatro especies que se consiguen añadiendo una cuarta hoja al árbol de tres especies 1,2 y 3, que tiene 2 y 3 formando cerezas (figura 1). Autora: Marta Casanellas.

árboles binarios con raíz de cuatro especies tienen seis ramas, los de cinco tienen ocho, etcétera, y en general un árbol de m especies tiene $2(m-1)$ ramas.

Con esto ya podemos calcular el número de árboles de cualquier número de especies. Por ejemplo, hemos visto que hay 15 árboles posibles de cuatro hojas, y para cada uno de ellos tenemos siete posibilidades para añadir una nueva especie (seis correspondientes a las ramas y una descendiendo por encima de la raíz), así habrá $7 \cdot 15 = 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 = 105$ árboles posibles de cinco especies. Para seis especies, habrá $9 \cdot 105 = 9 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1 = 945$ puesto que los árboles de cinco especies tienen ocho ramas y hay también la posibilidad de colocarla descendiendo por encima de la raíz. Por inducción podemos deducir que el número de árboles binarios con raíz de n especies es $(2n-3) \cdot (2n-5) \cdot (2n-7) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1$. En efecto, $2n-3 = 2(n-2)+1$ es el número de posibilidades de colocar una nueva especie en un árbol que tiene $n-1$ especies (y por tanto $2(n-2)$ ramas). La cantidad $(2n-3) \cdot (2n-5) \cdot (2n-7) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 1$ se llama doble factorial, y se denota por $(2n-3)!!$. Así, si m es un número natural, su doble factorial es $m!! = m \cdot (m-2) \cdot (m-4) \cdot \dots$ hasta llegar a 1 si m es impar o a dos si m es par.

Como hemos observado con los ejemplos de tres, cuatro, cinco y seis especies, el número de árboles posibles aumenta muy rápidamente. A continuación ponemos una tabla para mostrar el crecimiento (más que exponencial) del número de árboles. Para tener una idea de las cantidades de que estamos hablando podemos tener en cuenta, por ejemplo, que el número de protones del universo es del orden de 10^{89} . Como consecuencia, para 20 especies o más no será posible comprobar todas las posibilidades de árboles que podrían formar, sino que hay que usar alternativas para encontrar el árbol más plausible.

Teniendo en cuenta la cantidad de árboles posibles que hay para cada número de especies, habrá que introducir métodos más sofisticados para estudiar su evolución. Veremos ahora cuáles son los métodos más usados para encontrar el árbol filogenético de las especies dadas por secuencias de ADN. Hay dos tipos de métodos, unos basados en establecer distancias entre secuencias de ADN y los otros directamente basados en los caracteres de secuencias.

EJERCICIO

Completa la siguiente tabla:

NÚMERO DE ESPECIES	NÚMERO DE ÁRBOLES
3	3
4	15
5	105
6	945
7	
8	
9	
10	34.459.425
20	$8,20 \cdot 10^{21}$
30	
40	
50	$2,75 \cdot 10^{76}$
60	$5,86 \cdot 10^{96}$
70	
80	$3,43 \cdot 10^{139}$

MÉTODOS DE DISTANCIAS

Se determina previamente lo que en filogenética se llama una **distancia evolutiva** (aunque no corresponde a una métrica matemáticamente hablando) como una magnitud que mide la separación entre secuencias. Por ejemplo, si consideramos las tres secuencias de la figura 6, podríamos establecer que la distancia entre lémur y macaco es ocho, puesto que sus secuencias difieren en ocho nucleótidos, entre lémur y tarsero es cuatro, y entre macaco y tarsero es siete. Basándonos en estas distancias podríamos deducir que lémur y tarsero son las especies más cercanas y formarían cerezas en el árbol que ha dado lugar a la evolución de estas tres

especies (es decir, formarían un árbol como el de la figura 5(a) cambiando humano por macaco, y chimpancé y gorila por lémur y tarsero, respectivamente).

Sin embargo, las diferencias entre las secuencias de las especies actuales no tienen por qué reflejar cambios que haya habido en las secuencias de sus ancestros durante la evolución. Así, por ejemplo, la secuencia TTGA en una especie ancestral puede mutar primero a TAGA y luego a TCGA, acumulando así dos diferencias entre la especie ancestral y su descendiente de las que solo podemos ver una diferencia a partir de la secuencia inicial TTGA y la final TCGA. Es por ello que para medir la diferencia entre dos secuencias de ADN habría que tener también en cuenta los cambios ocultos que se hayan producido entre ellas durante la evolución. Esto se hace mediante modelos matemáticos de evolución, usualmente los llamados modelos probabilísticos de Markov.

Una vez se ha establecido un modelo de evolución, la distancia filogenética entre dos secuencias se define como la cantidad que estima el máximo de verosimilitud de la cantidad de cambios acumulados entre las dos secuencias durante la evolución. Por ejemplo, para el modelo evolutivo más sencillo, el denominado modelo de **Jukes-Cantor**, el número de cambios esperados (contando los cambios ocultos) entre dos secuencias

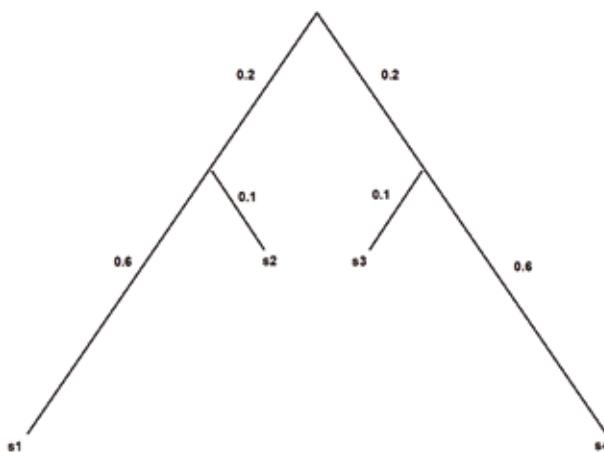


Fig.8. Árbol filogenético de cuatro especies s_1, s_2, s_3 y s_4 donde la distancia entre ellas y sus ancestros se indica por el número situado encima de las ramas, representado gráficamente por la longitud de las ramas. Imagen: Marta Casanellas.

de ADN es $-3/4\ln(1-4p/3)$ si p es la fracción de nucleótidos distintos entre las dos secuencias. Esta cantidad se llama distancia de Jukes-Cantor.

EJERCICIO

Calcula las distancias de Jukes-Cantor para las secuencias de la figura 6 y comprueba que dan 0,23 (lémur-macaco), 0,10 (lémur-tarsero), y 0,20 (macaco-tarsero).

Otro punto a tener en cuenta es que no siempre hay que unir aquellas especies cuya distancia sea menor. Por ejemplo, en el árbol filogenético de la figura 8 donde la distancia entre las dos especies de los extremos de cada rama está indicada por el número correspondiente, la distancia entre las especies s_2 y s_3 sería 0.6 ($=0.1+0.2+0.2+0.1$), mientras que la distancia entre las especies s_1 y s_2 que están formando una cereza del árbol es 0.7 ($=0.6+0.1$). El método más usado en reconstrucción filogenética, el **neighbor-joining** ("unión de vecinos"), no junta aquellas especies que están a menor distancia sino aquellas que minimizan la distancia entre ellas y maximizan la distancia a las otras especies. Aunque se fundamenta en un resultado matemático (el teorema de recolectar cerezas, *cherry picking theorem*), para que este método funcione las distancias tienen que ser adaptables a un árbol (salvo errores permitidos).

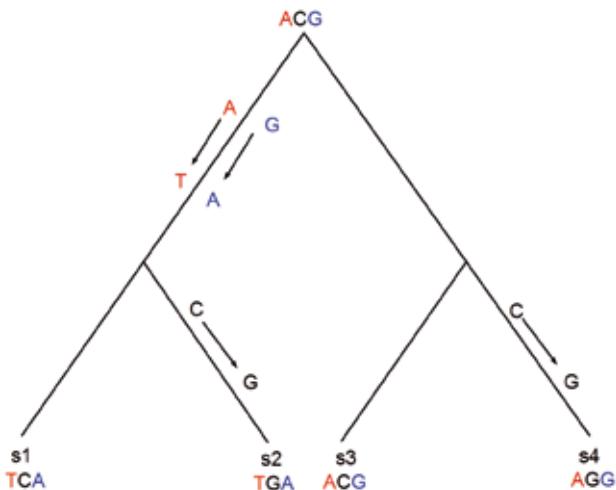
EJERCICIO (NEIGHBOR-JOINING)

Tenemos cuatro especies s_1, s_2, s_3, s_4 , cuyas distancias (calculadas de alguna forma) son $d(s_1, s_2) = 0.7$, $d(s_1, s_3) = 1.1$, $d(s_1, s_4) = 1.6$, $d(s_2, s_3) = 0.6$, $d(s_2, s_4) = 1.1$, y $d(s_3, s_4) = 0.7$. Definimos $R(s_1, s_2)$ como la suma de distancias de las especies s_1 y s_2 a las otras especies del árbol (es decir $R(s_1, s_2)$ es $d(s_1, s_3)+d(s_1, s_4)+d(s_2, s_3)+d(s_2, s_4)$).

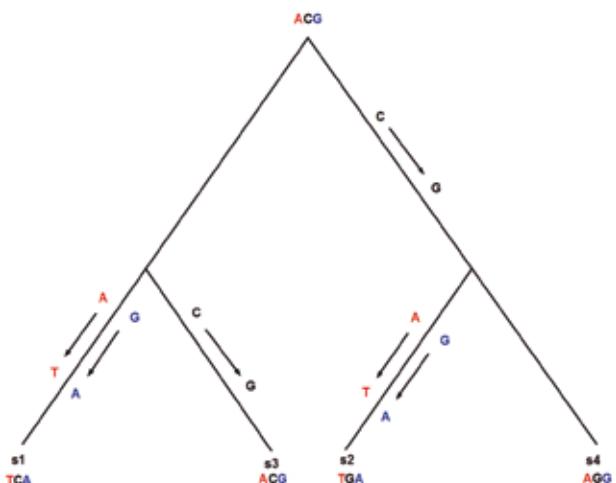
$d(s2,s4)$). Análogamente definimos $R(s1,s3)$, $R(s1,s4)$, $R(s2,s3)$, $R(s2,s4)$, y $R(s3,s4)$. El método de reconstrucción filogenética neighbor-joining junta en el árbol las dos especies para las cuales el valor R es mayor. Comprobad que en este caso, neighbor-joining junta $s1$ y $s2$. Estas distancias aparecen representadas en la figura 8, así que este método reconstruye correctamente este árbol partiendo solamente de las distancias entre las especies.

El método de máximo de parsimonia asigna a cada árbol filogenético un coste correspondiente al menor número de cambios necesarios a lo largo del proceso evolutivo sobre el árbol para las secuencias dadas. Este método se explica con un ejemplo a continuación, y el algoritmo para el cálculo del coste se puede hallar en el libro de Allman y Rhodes citado en la bibliografía.

Máximo de parsimonia.



Supongamos que tenemos las secuencias de ADN $s1$: TCA, $s2$: TGA, $s3$: ACG, y $s4$: AGG.



MÉTODOS DE CARACTERES DE SECUENCIAS: MÁXIMO DE PARSIMONIA

El segundo tipo de métodos se basa directamente en los caracteres, es decir no usa la información de distancias sino que trata con las secuencias directamente. Este tipo de métodos deberían ser más acertados, pero como veremos cuenta con desventajas importantes. El método más usado de este tipo es el *máximo de parsimonia*, que se basa en el principio de que la naturaleza es parsimoniosa, es decir que el árbol filogenético preferido por la naturaleza debe ser aquel que involucre el menor número de cambios posibles.

Debate: El principio del método de máximo de parsimonia está siendo muy debatido actualmente. ¿Es la naturaleza parsimoniosa? ¿Tú qué crees? ¿A la naturaleza le dan pereza los cambios y tiene tendencia a quedarse como está?

En el árbol que tiene s_1 , s_2 unidas en una cereza, se puede probar que el mínimo número de cambios necesarios en la evolución para llegar a estas secuencias es cuatro. En la figura mostramos una secuencia ancestral que minimiza los cambios necesarios.

Sin embargo, si el árbol junta las s_1 y s_3 , entonces el menor número de cambios necesarios es seis, como mostramos en la figura. Así, el coste del primer árbol sería cuatro y el del segundo sería seis. Se puede demostrar que, para todos los árboles posibles de cuatro especies, el primer árbol es el que tiene coste menor, luego este sería el árbol escogido por el máximo de parsimonia.

La mayor desventaja de este método es que, aunque el cálculo del coste es sencillo, hay que efectuarlo para todos los árboles posibles. Como hemos visto más arriba, el número de árboles aumenta de forma más que exponencial respecto al número de especies, lo que hace que este método sea inviable para 20 especies o más. Para un mayor número de especies, hay variantes del método que no avalúan el coste de cada árbol posible sino solo de un subconjunto de árboles.

Hay programas de reconstrucción filogenética disponibles en Internet, por ejemplo T-REX en <http://www.trex.uqam.ca/>. Aunque se pueden usar libremente, es necesario conocer bien el método que estamos usando en cada momento. Pero no todos los científicos son rigurosos en este sentido, y pueden afirmar haber construido el árbol de 133 secuencias por el método de máximo de parsimonia (que ya hemos visto que es imposible), como sucede en Cann *et al. Nature*, 345 (1987), pp. 31-36.

OTROS MÉTODOS

Hemos visto los dos métodos más usados en reconstrucción filogenética: máximo de parsimonia y *neighbor-join-*

ing, cada uno de ellos con sus ventajas e inconvenientes. Hay otros métodos también muy usados que se basan en modelos probabilísticos de evolución (como el modelo de Jukes-Cantor mencionado antes) y luego usan herramientas como la estimación del máximo de verosimilitud o los métodos bayesianos. Sin embargo, estas estrategias, aunque podrían ser más precisas para pocas especies, también tienen sus inconvenientes. El primero es que, como el máximo de parsimonia, no son viables para más de veinte especies puesto que han de efectuarse para cada árbol posible. El segundo es que los modelos de evolución también se basan en hipótesis que no tienen por qué ser ciertas (por ejemplo, que todos los nucleótidos de una secuencia de ADN mutan a la misma velocidad o siguiendo el mismo árbol filogenético).

Debate. La mayoría de modelos evolutivos usados hoy en día suponen que la evolución es reversible. Esta hipótesis es necesaria para poder, por ejemplo, tomar como distancia entre dos especies actuales la suma de distancias de las ramas entre una y otra en el árbol filogenético. Pero ¿por qué razón tendría que ser la evolución reversible? Esta es otra de las cuestiones que los biólogos debaten hoy en día. ¿Qué opinas tú?

BIODIVERSIDAD

Otro aspecto relacionado con los árboles filogenéticos es la biodiversidad. Se puede medir la biodiversidad de un subgrupo de especies con la diversidad filogenética, es decir, con la suma de longitudes de las ramas del subárbol formado por estas especies. Las longitudes de rama en un árbol filogenético representan la cantidad de mutaciones acumuladas durante la evolución entre las dos especies de la rama, así que si un grupo de especies están separadas por ramas de muy poca

longitud, serán especies que no distan mucho de su ancestro común, es decir, no son muy diversas. Conocer la diversidad filogenética es relevante a la hora de adoptar medidas de preservación de especies, puesto que es preciso intensificar esta tarea en especies que representen la biodiversidad del planeta. Así pues, en la filogenética no solo es importante describir la forma de los árboles, sino también las longitudes de sus ramas, que estiman la cantidad de mutaciones acumuladas entre las especies o tiempo molecular. Estas cantidades son proporcionales al tiempo astronómico si las especies consideradas mutan a la misma velocidad.

A la vista de las dificultades de los métodos de reconstrucción filogenética presentados, queda por ver cómo se conseguirá el proyecto de construir el árbol de la vida: el árbol evolutivo que forman las entre cinco y cien millones de especies que habitan el planeta Tierra hoy en día.

EJERCICIO

Consideramos cuatro especies de insectos cuya filogenia ha sido muy discutida recientemente: la mosca del vinagre (*Drosophila melanogaster*), la mariposa o gusano de seda (*Bombyx mori*), el piojo del cabello humano (*Pediculus humanus*), y la *Mengenilla moldrzyki* (unos insectos parásitos de otros insectos).

1. Busca imágenes de estas cuatro especies. ¿puedes decidir cuál es su árbol filogenético?
2. Busca su árbol filogenético en Internet.
3. Si las siguientes secuencias fueran sus genomas,

Dros. Mel.:	CGTCATTCTCACCGAT-GCCTGTACTTGCCTGACATCATAA
Bomb. Mori:	GGTCATTCTCAACGAG-GCATGTAACTGCATGACATGATAA

Ped. Hum.:	CTTCATGCTCACCGAG-GCCTGTAATTGCATGAGATCATAA
Men. Mold.:	CGTCATGCTCACCGAG-GCCTGTAATTGCATGACATCATAA

usa la distancia de Jukes-Cantor y el método *neighbor-joining* para encontrar el árbol filogenético que formarían estas especies.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Allman, E. S. y Rhodes, J. A. (2003): *Mathematical models in biology: an introduction*. Cambridge: Cambridge University Press.

Libro introductorio a los modelos matemáticos básicos para distintas áreas de la biología como la dinámica de poblaciones, la genética, la biología molecular y los árboles filogenéticos. Es una obra auto-contenida que incluye las nociones matemáticas básicas necesarias para seguir el libro (álgebra de matrices y probabilidad). Además, incluye listados de ejercicios para resolver en Matlab. En este libro se puede encontrar el detalle de todos los contenidos de este capítulo.

Durbin, R., Eddy, S. R., Krogh, A. y Mitchison, G. (1998): *Biological sequence analysis: probabilistic models of proteins and nucleic acids*. Cambridge: Cambridge University Press.

Este libro contiene el desarrollo de los temas de este capítulo pero desde el punto de vista de la bioinformática. Es el libro básico de bioinformática y es muy útil para entender la problemática de la biología computacional actual.

Felsenstein, J. (2004): *Inferring phylogeny*. Sunderland: Sinauer Associates, Inc.

Este libro de nivel avanzado explica todos los métodos usados en filogenética hoy en día. Es el libro de referencia para todos aquellos científicos que trabajan en filogenética.

Ridley, M. (2006): *Genome: the autobiography of a species in 23 chapters*. New York: Harper Collins.

Este es un libro divulgativo donde se discute sobre el papel del material genético en nuestro comportamiento, enfermedades, etcétera. Además de ser muy útil para iniciarse en la disciplina de la genómica, es un libro muy interesante y ameno.

http://en.wikipedia.org/wiki/Neighbor_joining. Más información sobre la técnica de Neighbor joining para crear árboles filogenéticos.

[http://en.wikipedia.org/wiki/Maximum_parsimony_\(phylogenetics\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Maximum_parsimony_(phylogenetics)). Más información sobre el principio de máxima parsimonia.

<http://www.pbs.org/wgbh/evolution/change/family/>. All in the family es una web interactiva en la que el usuario debe de construir árboles de la vida con especies propuestas.

<http://www.wellcometreeoflife.org/interactive>. Tree of life interactive. Este recurso interactivo en licencia Creative Commons permite al usuario acercarse a los orígenes de la vida en la Tierra. Ofrece información sobre las especies y muestra su relación evolutiva.

MATERIALES AUXILIARES

PÁGINAS WEB

www.ensembl.org. Ensembl es una base de datos de genomas.

http://en.wikipedia.org/wiki/Phylogenetic_tree. Sobre la definición e historia del árbol filogenético.

<http://www.cuadernosdecampo.es/Website/Biodiversidad/biodiversidad.aspx>. Los cuadernos de campo de Doñana recogen las observaciones y comentarios de los técnicos cualificados durante sus recorridos por el parque nacional. Contienen anotaciones sobre una gran cantidad de especies animales, generalmente vertebrados (y sobre todo aves), pero también sobre vegetación, estado del agua en la marisma o las lagunas, etcétera.

<http://tolweb.org/tree/>. Tree of life project (árbol de la vida) contiene más de 10.000 páginas web con información sobre biodiversidad, las características de los diferentes grupos de organismos y su evolución. Es el resultado de un esfuerzo colaborativo de biólogos y entusiastas de la naturaleza de todo el mundo.

CÓMIC

Byrne, E. y Gurr, S. (2013): *Darwin: a graphic biography*. Washington: Smithsonian Books.

Biografía de Charles Darwin en forma de novela gráfica.

DOCUMENTALES Y MATERIAL AUDIOVISUAL

Charles Darwin and the tree of life (2009). Documental sobre Charles Darwin y su revolucionaria teoría de la evolución producida en 2009 por la BBC para conmemorar el bicentenario del nacimiento del gran científico inglés. Disponible en <http://www.bbc.co.uk/programmes/b00hd5mf>. Versión reducida y libre en <http://tolweb.org/tree/home.pages/media.html>.

The making of the fittest. Esta serie de cortos se ha diseñado para mostrar a los estudiantes ejemplos memorables de la evolución en acción. Cada capítulo está producido por directores premiados e ilustra el papel de la mutación y la selección natural en acción.

Disponible en <http://www.hhmi.org/bioInteractive/shortFilms/index.html>.

La voz de la evolución (Noah Morowitz, 2005). Documental producido por A&E Network que relata la vida de Charles Darwin, pasando por los momentos clave que marcaron su biografía: desde los más personales (como la muerte de su hija y de su madre, su matrimonio, etcé-

tera) hasta los científicos (como la publicación del Origen de las especies). Disponible en http://asambleademajas.com/videos/detalle_video.php?idvideo=753.

La guerra de la ciencia (James Van der Pool, 2006). Producido por la BBC, este documental de 49 minutos de duración recoge el enfrentamiento constante entre ciencia y religión por la teoría de la evolución.

LAS MATEMÁTICAS NOS AYUDAN A CRECER

David Martín de Diego

2.3

Objetivos, contenido y criterios de evaluación de acuerdo con los Reales Decretos de Enseñanzas Mínimas, (1467/2007 de 2 noviembre para Bachillerato y 1631/2007 de 29 de diciembre para Educación Secundaria Obligatoria).

Las sucesiones numéricas son un tema matemático destacable, ya que con su estudio se inicia a los estudiantes de secundaria en los procesos de abstracción y generalización. Es decir, al proporcionar tres o cuatro números naturales y preguntar ¿cuál es el siguiente?, se plantea un ejercicio considerable de abstracción a los estudiantes de estos niveles, ya que se está hablando de la regla que siguen, a la que se ajustan los números proporcionados, identificados como primero, segundo, tercero, etcétera. Con ello se pregunta por la estructura que comparten los números dados, según su posición y, a continuación, se pide construir un nuevo número, el siguiente, que comparta esa misma estructura con los anteriores en función también de su posición.

La generalización presenta un mayor nivel de exigencia y surge con la pregunta: ¿cuál es el término general? Es decir, se pide expresar la regla, la ley que comparten los números proporcionados y cualquier otro que se relacione con ellos según la regla inferida en el primer paso de abstracción. La generalización supone expresar cualquier término en función, en cada caso, de la posición que dicho término ocupa, esto es, escribir el término general como función de su posición enésima.

Las sucesiones son la expresión de cambios discretos que están dados por los valores sucesivos que toma una función cuya variable son los números naturales.

Entre los tipos de leyes que siguen las sucesiones destacan las leyes de recurrencia, entre las cuales se encuentra la llamada sucesión de Fibonacci.

Conocemos familias de fenómenos de crecimiento que quedan modeladas por la sucesión de Fibonacci. Estos fenómenos son conocidos desde antiguo y se encuentran en documentos históricos. Son interesantes porque los fenómenos que modelan se pueden descubrir en el arte y encontrar en la naturaleza, donde contribuyen a entender la filotaxis o reglas del crecimiento de algunas especies vegetales.

También la sucesión de Fibonacci está relacionada con la proporción áurea que surge de la división de un segmento s en dos partes, x y s-x, tales que la razón entre el segmento total y la parte mayor es igual a la razón entre dicha parte mayor y la menor: $s/x = x/s-x$

Desde antiguo son conocidas importantes figuras y propiedades geométricas ligadas a la razón áurea. La presencia de la razón áurea en la naturaleza y en el arte es igualmente muy ubicua y su localización en la historia proporciona ejemplos de interés. En este capítulo se muestran algunos casos importantes de esas figuras y de las relaciones implicadas, que pueden seguirse fácilmente con un nivel medio de conocimientos matemáticos.

Las materias curriculares vinculadas con este capítulo comprenden también las asignaturas de Matemáticas de educación secundaria obligatoria, razón por la cual las hemos incluido en el listado de materias vinculadas.

INTRODUCCIÓN

Algunas veces la propia naturaleza inspira a los matemáticos en sus definiciones y desarrollos. Por ejemplo, las ecuaciones diferenciales fueron inicialmente tratadas por Newton para estudiar el movimiento planetario. Su estudio continuó a medida que se afianzó su utilidad en las ciencias naturales, especialmente en la física, con problemas importantes como la ley del movimiento de Newton, las ecuaciones de Euler para la hidrodinámica, la ecuación de calor de Fourier, etcétera.

Pero también sucede de manera opuesta. De repente, por sorpresa se observa en la naturaleza una construcción matemática ideada de manera abstracta en el pensamiento de un investigador. Así sucede con la [sucesión](#) de Fibonacci o en las simetrías de las plantas.

El crecimiento en la naturaleza parece estar dictado por patrones matemáticos: desde el número áureo que se distingue en la estructura de una caracola, hasta la tasa de crecimiento de los tallos de las plantas. Todo son números. Observar estas curiosas apariciones de las matemáticas en la naturaleza nos ayuda a observar el universo con otros ojos y a apreciar la belleza que destila el orden invisible bajo el aparente caos.

En este capítulo estudiaremos algunos de los objetos matemáticos que de manera más recurrente se reflejan en el planeta Tierra: la serie de Fibonacci, el número áureo, etcétera, mostrando el contexto en el que se idearon tanto en la mente del pensador como en las formas en las que aparecen reflejadas en la naturaleza.

LA SERIE DE FIBONACCI

Si nos plantearan en un test de lógica la siguiente serie

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13...,

y nos preguntaran ¿cuál es el número que sigue a esta secuencia?, quizás muchos encontraríamos como posible regla de formación, la siguiente:

"Para obtener el número buscado sumo los dos términos que le preceden".

Así, nuestra solución sería el número 21 y podríamos seguir indefinidamente, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181...

Matemáticamente, esta regla de formación de términos se escribe como

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 3,$$

con $f_1 = 1$ y $f_2 = 1$.¹

Esta serie de números puede parecer una más de las que surgen en la retorcida mente de examinadores y evaluadores. Sin embargo, detrás de ella se esconden infinidad de propiedades a cual más bella y sorprendente; muchas relacionadas, como veremos, con patrones de crecimiento en la naturaleza.

Originariamente, la secuencia aparece en un problema de reproducción de conejos que, libremente transcrita, nos diría:

"Un hombre pone una pareja de conejos, macho y hembra, en un recinto vallado. Sabiendo que estos paren una vez cada mes, que los nacidos también son macho y hembra y que, a su vez, estos empiezan a parir al segundo mes de su nacimiento, calcular el número de parejas que habrá al cabo de n meses".

La respuesta, si lo pensamos un poco, nos la da el término n -ésimo de la sucesión que anteriormente habíamos presentado. El problema anteriormente descrito del crecimiento de la población de conejos aparece como un ejercicio del *Liber Abaci* escrito en 1202 por Leonardo de Pisa, más conocido como [Fibonacci](#).

1. Otra sucesión interesante surge tomando la misma ley $L_n = L_{(n-1)} + L_{(n-2)}$, $n \geq 3$, pero con $L_1 = 1$ y $L_2 = 3$. Se obtiene así la sucesión de Lucas 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123...



Fibonacci. Fuente:
[http://en.wikipedia.org/wiki/
File:Fibonacci.jpg](http://en.wikipedia.org/wiki/File:Fibonacci.jpg).

Leonardo de Pisa (1170 -1250) era hijo de un mercader y diplomático llamado Bonacci. De ahí el apodo de Fibonacci (*filius Bonacci*) por el que se le conoce. El trabajo de su padre le ayudó a viajar por el próximo Oriente, lo que le permitió conocer el sistema hindo-árabico para escribir los números. Es decir, el sistema posicional con diez dígitos con un símbolo para el cero: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

En su libro el *Liber Abaci* o *Libro del ábaco* describe las reglas de la suma, resta, multiplicación y división con el nuevo sistema numérico, en contraposición, al sistema basado en los números romanos y al cálculo con ábaco usado por los mercaderes de entonces. Además, el libro aborda problemas de teoría de números, como criterios de divisibilidad, descomposición en factores primos y el ya referido problema de crecimiento de la población de conejos.

LA RAZÓN ÁUREA Y LA SUCESIÓN DE FIBONACCI

En 1753, el matemático Robert Simson (1687-1768), profesor de la Universidad de Glasgow, observó que, aunque los números de Fibonacci crecían en magnitud, el cociente de dos términos consecutivos tiende hacia uno de los

más famosos números de las matemáticas, la **razón áurea**. Así, tenemos que:

$$\frac{1}{1} = 1 \quad \frac{2}{1} = 2 \quad \frac{3}{2} = 1,5 \quad \frac{5}{3} = 1,666 \\ \frac{8}{5} = 1,6 \quad \frac{13}{8} = 1,625 \quad \frac{21}{13} = 1,615$$

Matemáticamente, lo que intentamos calcular es

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n}$$

Suponiendo que existe este límite, es fácil deducir cuál debe ser su valor. Para ello, si llamamos Φ al valor de dicho límite, llegamos a que

$$\Phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n + f_{n-1}}{f_n} = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n-1}}{f_n} = 1 + \frac{1}{\Phi}$$

o, de otro modo,

$$\frac{\Phi + 1}{\Phi} = \Phi$$

que despejando, nos da la ecuación cuadrática $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$, cuya solución positiva es

$$\Phi = \frac{(1+\sqrt{5})}{2} \approx 1.61803398$$

Este número Φ que, como vemos, está íntimamente ligado con la sucesión de Fibonacci, era conocido por matemáticos y artistas más de mil años antes. Se le llama de muchos modos: **razón áurea, número áureo, número de oro, razón extrema y media o proporción áurea son algunos de sus nombres**. La letra griega phi, Φ , se utiliza en honor al famoso escultor y arquitecto griego Fidias (490-430 a. C.).

En los famosos **Elementos de Euclides**, escrito hacia el 300 a. C., ya encontramos referencias al número de oro. Los elementos constan de trece libros y en el sexto encontramos su definición más clásica:

"Se dice que una línea ABC está dividida según la proporción áurea (o razón extrema y media) cuando la relación de la parte mayor con la parte menor sea igual a la relación entre toda la línea y la parte mayor".



Figura 1: La proporción áurea. Autor: David Martín de Diego.

Expliquemos la anterior aserción usando las matemáticas, que siempre nos ayudan a ordenar las ideas. Si llamamos x a la longitud del segmento AB e y a la longitud del segmento BC tendremos que C divide al segmento en razón áurea si

$$\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y}$$

es decir,

$$1 + \frac{y}{x} = \frac{x}{y}$$

Si ahora llamamos $\frac{x}{y} = \phi$, obtenemos la ya conocida ecuación del número de oro

$$1 + \frac{1}{\phi} = \phi$$

De esta última expresión se deduce que

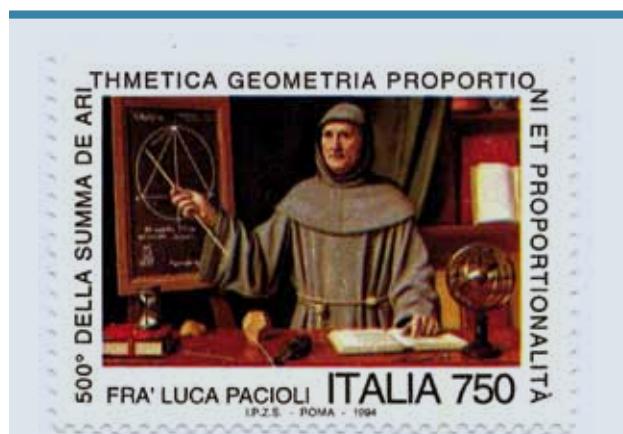
$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\phi}} = \dots = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots}}}} = [1, 1, 1, 1, \dots]$$

y así podemos expresar ϕ como una fracción continua en la que solo aparece el número 1 ¡Sorprendente y notable expresión!

Pero además, ¡no es la única! De la expresión $\phi^2 = \phi + 1$, llegamos a que

$$\phi = \sqrt{1 + \Phi} = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \Phi}} = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$$

No es de extrañar que Johannes Kepler dijese que "la geometría tiene dos tesoros; uno de ellos es el teorema de Pitágoras y el otro es el número de oro".



Fuente: http://en.wikipedia.org/wiki/File:Luca_Pacioli_%28Gemaelde%29.jpeg

Luca Pacioli (1445-1517) fue un matemático y monje franciscano italiano. Su obra más influyente fue *Summa de aritmética geometría proportioni et proportionalità*, publicada en 1494 y que supone un auténtico compendio de la matemática conocida hasta el momento. En ella hace referencia a la necesidad de lograr la proporcionalidad en la arquitectura. La referencia se hace más explícita en su libro *De Divina proportione*, publicado en 1509, donde se fijan las proporciones adecuadas para lograr la belleza excelsa, que por supuesto están relacionadas con el número ϕ .

Luca Pacioli decía del número de oro o proporción áurea en su libro *De Divina proportione*:

"... Llamada así por sus propiedades excelsas, supremas, excellentísimas, incomprensibles, inestimables, innumerables, admirables, inefables, singulares..., que corresponde por semejanza a Dios mismo".

Sería interminable enumerar las maravillosas propiedades que están detrás de este notable número. Destacaremos algunas más en las próximas secciones que nos serán útiles en lo sucesivo.

EL NÚMERO DE ORO Y EL PENTÁGONO REGULAR

En un pentágono regular con lado unidad, cada diagonal tiene longitud Φ y, además, cada dos diagonales que se intersecan se dividen precisamente en la proporción áurea; es decir,

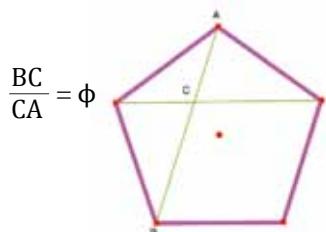


Figura 2. Número de oro en el pentágono regular. Autor: David Martín de Diego.

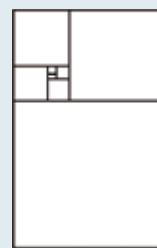
EJERCICIO

EL RECTÁNGULO ÁUREO

Decimos que un rectángulo es áureo si la razón o proporcionalidad entre sus lados sigue la razón áurea. Es decir, el cociente entre la longitud mayor y el lado menor es precisamente el número áureo.



Este rectángulo tiene una propiedad muy interesante, pues a partir de uno de ellos se pueden construir nuevos rectángulos áureos iterativamente siguiendo un procedimiento muy sencillo. Así, si quitas un cuadrado de longitud del lado menor, encuentras un nuevo rectángulo áureo en la parte que nos queda.



Este proceso puede seguir hasta el infinito trazando una espiral construida a partir de rectángulos áureos.

EL ÁNGULO ÁUREO

La definición del número de oro como división de un segmento en su proporción áurea también se puede extender a la circunferencia. Así, si dividimos una circunferencia de tal modo que

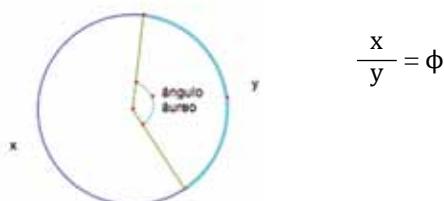


Figura 3. Ángulo áureo. Autor: David Martín de Diego.

entonces, utilizando una simple regla de tres, llegamos a que el ángulo buscado es de $2\pi/(1 + \phi)$ radianes, que es aproximadamente, $137,5^\circ$. Veremos, más adelante, cómo este ángulo en principio tan extraño aparece de forma recurrente en la naturaleza.

Es interesante observar que una manera de aproximarse a este ángulo es la siguiente:

$$360^\circ \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{f_{n+2}} = 360^\circ \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n/f_{n+1}}{f_{n+2}/f_{n+1}} = 360^\circ \cdot \frac{1}{\phi^2} = 360^\circ \cdot \frac{1}{1+\phi} \simeq 137,5^\circ$$

EL NÚMERO ÁUREO ES UN NÚMERO IRRACIONAL

Podemos encontrar distintas familias destacadas dentro de los números, por ejemplo; números naturales, (1, 2, 3, 4...), números enteros (...,-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,...), números racionales que se presentan como razón o cociente de dos enteros (-2/3, 0, 1, 4/5...) y números irracionales que no pueden expresarse como razón de dos números enteros.

Veamos que el número ϕ pertenece a esta última categoría. Lo demostraremos usando la reducción al absurdo, un método de demostración que presupone de inicio que lo que queremos demostrar no es cierto y, entonces, se llega a una contradicción.

Así, supongamos de inicio que el número ϕ no es irracional y, por tanto, es racional. Bajo este supuesto, podemos expresar $\phi = \frac{p}{q}$ como una fracción irreducible (es decir, el único divisor común de numerador p y denominador q es 1) con $q < p$. Como el número ϕ verifica, por definición, $\phi^2 - \phi - 1 = 0$, entonces $(\frac{p}{q})^2 - \frac{p}{q} - 1 = 0$. O, de otro modo, $p(p-q) = q^2$. Por tanto, p debe dividir a q^2 y, en consecuencia, también a q . Así, p debe ser igual a 1 pues hemos supuesto que la fracción era irreducible. Del mismo modo, la ecuación $p(p-q) = q^2$ también se llega a que $q(p+q) = p^2$ y con un razonamiento similar llegaríamos a que $q=1$. Esto significa que ϕ debe ser 1, pero obviamente esta no es una solución de la ecuación $\phi^2 - \phi - 1 = 0$ llegando a una contradicción. Por tanto, el número ϕ es irracional.

Lo más curioso es que el número de oro ϕ es el número más irracional de todos, en el sentido de que se approxima muy mal por números racionales (es decir, no vamos a encontrar aproximaciones tan buenas como son 22/7 para el número π o 7/5 para $\sqrt{2}$).

EL NÚMERO ÁUREO EN LA NATURALEZA

Como ya hemos advertido, el número áureo es un valor muy especial que se encuentra tanto en algunas figuras geométricas como en la naturaleza. Asimismo, se atribuye un carácter estético a los objetos cuyas medidas guardan la proporción áurea. A lo largo de la historia, se ha atribuido su inclusión en el diseño de diversas obras de arquitectura y otras artes, aunque algunos de estos casos han sido cuestionados por los estudiosos de las matemáticas y el arte.

A continuación veremos algunos ejemplos destacados en los que aparece la sucesión de Fibonacci o la relación que esconden sus términos: el número áureo.

LA SORPRENDENTE FORMA DE LAS CARACOLAS

Cuando contemplamos una caracola como la de la imagen es imposible no sorprenderse por su belleza, por su maravillosa espiral que crece y crece a medida que la caracola se desarrolla.



Figura 4. Caracola de Nautilus. Autor: Chris 73. Fuente: <http://en.wikipedia.org/wiki/File:NautilusCutawayLogarithmicSpiral.jpg>.

En la imagen vemos una caracola de Nautilus, que es un tipo de molusco cefalópodo. A medida que va creciendo se van formando cámaras interiores, llegando a tener hasta 30 de ellas en su interior. Este proceso de crecimiento del Nautilus produce una bella estructura espiral que es fácilmente visible cuando se corta como en la fotografía.

La espiral que conforma a la caracola podría muy bien estar relacionada con la sucesión de Fibonacci. Si recordamos los rectángulos áureos, que se iban anidando unos con otros, y unimos los vértices diagonales de los cuadrados que aparecen en la figura por medio de cuartos de circunferencia, obtendremos una aproximación de la espiral que aparece en la caracola.

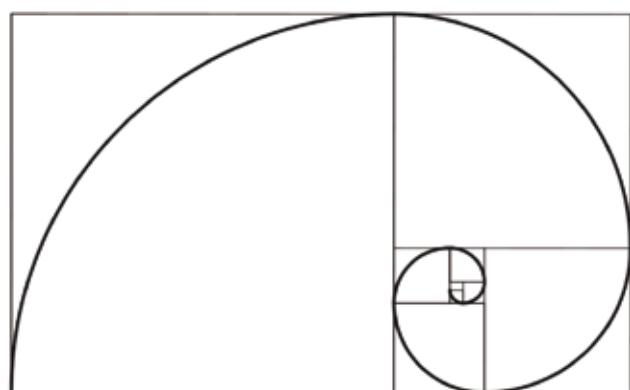


Figura 5. Espiral de Fibonacci. Autor: Dicklyon. Fuente: http://en.wikipedia.org/wiki/File:Fibonacci_spiral_34.svg.

Sin embargo, debemos avisar de que la belleza del número de oro ha hecho que muchos autores vean representado este número en muchas manifestaciones de la naturaleza y humanas, siendo algunas de ellas bastante controvertidas (por ejemplo, las representaciones del número de oro en las pirámides de Egipto).

Así, podría ocurrir en las representaciones de las caracolas, pues algunos autores han comprobado experimentalmente que la espiral del Nautilus puede no coincidir exactamente con la espiral que surge del número de oro.

FILOTAXIA O CÓMO CRECEN LAS PLANTAS

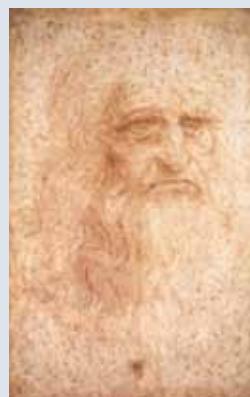
Otra sorprendente aparición de los números de la sucesión de Fibonacci surge en el estudio de los patrones con los que se disponen las hojas alrededor del tallo de una planta, la disposición de semillas o los pétalos de una flor. La rama de la botánica que estudia dichos patrones se conoce como **filotaxia** (palabra de origen griego compuesta por *phyllon*, que significa hoja, y *taxis*, que significa orden).

El famoso geómetra H. S. Coxeter comentó sobre este aspecto:

"La filotaxia no es una ley universal, pero sí es una fascinante tendencia".

Leonardo da Vinci observó que en algunas plantas las hojas se ordenaban a lo largo del tallo en espirales en grupos de cinco. La explicación científica que daba Leonardo a este hecho podría estar en maximizar la exposición al rocío en las hojas. En sus palabras:

"La hoja vuelve siempre su cara superior hacia el cielo porque pueda así recibir con toda su superficie el rocío



Leonardo da Vinci (1452-1519), artista y científico italiano. Su genialidad puede comprobarse en campos tan dispares como la pintura, arquitectura, matemáticas, ingeniería, física, anatomía o filosofía. Célebre por sus cuadros *La Gioconda* y *La última cena*, así como sus geniales invenciones, fue también el ilustrador de la *De Divina Proportione* de Luca Pacioli. Fue un firme defensor de la relación entre arte y matemáticas.

que lentamente desciende del árbol. Las hojas se distribuyen sobre sus plantas de modo que se incomoden lo menos posible: terciándose unas de otras, tal como podemos ver en la hiedra que cubre los muros. Esta alternancia sirve a dos fines, a saber: dejar intervalos por los que el aire y el sol puedan penetrar y, una segunda razón, permitir que las gotas caídas de la primera hoja puedan caer sobre la cuarta, o en otros árboles, sobre la sexta." (*Botánica para pintores y elementos del paisaje*).

¿Por qué las plantas adoptan algunas disposiciones preferidas frente a otras? La respuesta debe estar en la ocupación óptima del espacio para recibir la luz del sol o interaccionar con el ambiente próximo del modo más idóneo. Como ya supondrá nuestro lector, en estos patrones es muy frecuente encontrar los números de Fibonacci 1, 2, 3, 5, 8, 13... y, por tanto, también el número de oro $\phi = (1+\sqrt{5})/2$. Veamos a continuación cuál es esta sorprendente relación entre la morfología y crecimiento de las plantas y la sucesión de Fibonacci.

Mientras el tallo de un planta crece, a la vez van naciendo hojas en un ángulo determinado, que es un múltiplo racional de 360° . Las hojas de arriba impiden parcialmente que llegue la luz o la humedad a las más bajas. Imaginemos hojas saliendo cada 180° , es decir, cada media vuelta ($1/2$), en este caso la tercera hoja estará justamente encima de la primera y así sucesivamente. Disposiciones con ángulos de 90° , es decir ($1/4$), tampoco parecen las más idóneas. La naturaleza tiende a elegir aproximaciones racionales del número más irracional de todos, el número de oro.

Así, si consideramos la fracción que tiene como numerador el número de giros que hay que dar alrededor del tallo hasta que una hoja queda justamente en la vertical de la primera, y como denominador el número de hojas que crecen entre estas dos posiciones, entonces obtenemos precisamente una fracción del tipo $\frac{f_{n-2}}{f_n}$ con $n \geq 3$; es decir, el numerador y el denominador normalmente consisten en un número de Fibonacci y su segundo sucesor, respectivamente.

El ángulo de divergencia es el ángulo de separación entre dos hojas consecutivas y se calcula como $360^\circ \cdot \frac{f_{n-2}}{f_n}$. Estos términos, como ya sabemos, tienden hacia el **ángulo áureo**.

La siguiente tabla muestra algunas de estas fracciones, el correspondiente ángulo de divergencia y algunos tipos de plantas en los que aparecen.

Fracción	Ángulo de divergencia	Tipo de planta
1/2	180°	Olmo, tilo
1/3	120°	Haya, avellano, zarzamora
2/5	144°	Roble, manzano, acebo, albaricoque
3/8	135°	Chopo, álamo
5/13	$138^\circ 27'$	Sauce, almendro
...	...	
$1/\phi^2$	$360^\circ \cdot \frac{1}{1+\phi} \approx 137,5^\circ$	

Tabla 1. Ejemplos de filotaxia.

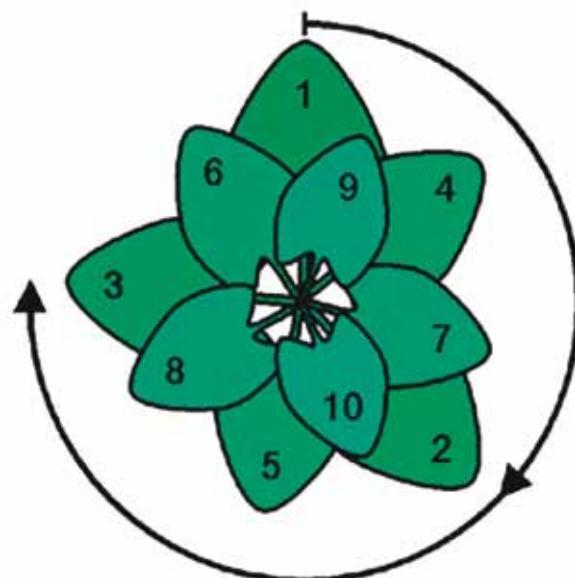


Figura 6. Ángulo áureo en las plantas. Fuente: http://en.wikipedia.org/wiki/File:Goldener_Schnitt_Blaatstand.png.

Pero ¿cómo la planta ha desarrollado, a lo largo de la evolución, esta disposición inteligente de las hojas a lo largo del tallo? Evidentemente el objetivo que se consigue es realizar la fotosíntesis de manera más eficiente (con mayor exposición al sol), por tanto, evitando que haya muchas hojas exactamente en la vertical de las otras hojas. Para lograr esta estructura, las hojas de las plantas se inician a partir de unas estructuras llamadas primordios foliares. Una hormona, la auxina, juega un papel de activador del **primordio**, siendo esencial en su formación, posición y desarrollo. Al formarse, el primordio absorbe auxina, que inhibe el desarrollo de otras hojas hasta una determinada distancia relacionada con el ángulo de divergencia y, por tanto, con el número de oro.

Por supuesto, todo lo anteriormente dicho se ha basado en hipótesis idealizadas sobre las plantas que no se suelen cumplir en condiciones reales, pero, en cualquier caso, el ángulo de 137.5° sigue siendo el más observado en la naturaleza.



Wilhelm Hofmeister

(1824-1877), biólogo y botánico alemán. Contribuyó, entre otros temas, al entendimiento de los mecanismos que originan la filotaxia. Sus observaciones todavía son claves para entender los fundamentos de estos patrones en las plantas.

Fuente: http://en.wikipedia.org/wiki/File:Wilhelm_Hofmeister.jpg.

SOBRE PIÑAS, GIRASOLES, ESPIRALES Y FIBONACCI

Otro lugar donde también podemos encontrarnos el número de oro es en la distribución de las semillas de



Figura 7. Fuente: <http://pixabay.com/en/sun-flower-yellow-flower-nature-16688/>.

algunas plantas. Se aprecian espirales que también van a tener relación con la sucesión de Fibonacci y la razón áurea. Estas espirales siguen una distribución ordenada, y se pueden observar espirales en sentidos contrarios (levógiras y dextrógiras). Si nos armamos de paciencia y contamos las espirales en cada sentido, podemos formar pares de números. En los girasoles es muy frecuente



Figura 8. Fuente: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Sunflower_fibonacci.jpg.89.144.jpg.

encontrar los siguientes pares $(21, 34)$, $(55, 89)$ y $(144, 233)$ –este último, en girasoles especialmente grandes–; en cambio, en las piñas encontraremos frecuentemente las parejas $(5, 8)$ y $(8, 13)$. Si volvemos a nuestra ya conocida sucesión de Fibonacci $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233\dots$ vemos que las parejas encontradas en girasoles y piñas son pares consecutivos de la sucesión de Fibonacci.

Un estudio estadístico de piñas en pinos en Noruega comprobó que el 95% de las piñas mostraban una pareja con números de la sucesión de Fibonacci y un 4% mostraban números de la sucesión de Lucas. ¡Sorprendente!

Una explicación de este hecho podría estar en que el ángulo áureo es el único ángulo que permite un empaquetamiento de las semillas sin dejar huecos mientras la planta sigue creciendo.

En los siguientes dibujos vemos un empaquetamiento de 1.000 semillas utilizando diferentes ángulos (figuras 9-11).

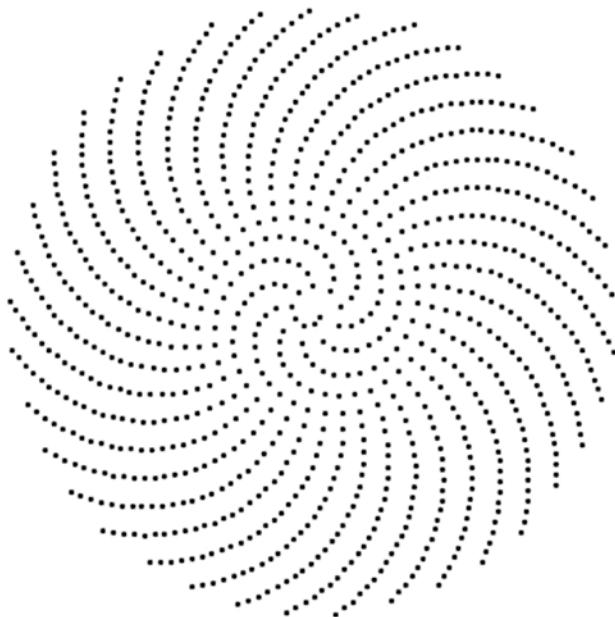


Figura 10. Ángulo de $137,55^\circ$, otra buena aproximación, en este caso por exceso.
Imagen: David Martín de Diego.

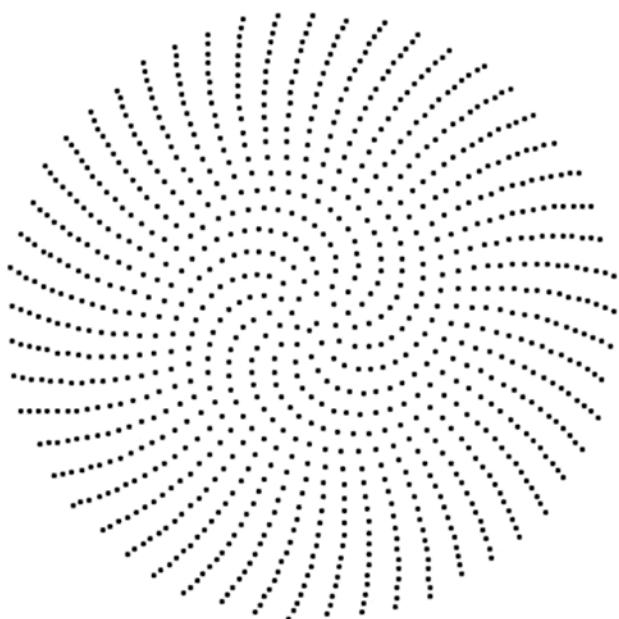


Figura 9. Ángulo de $137,4^\circ$, una buena aproximación del ángulo áureo por defecto.
Imagen: David Martín de Diego.

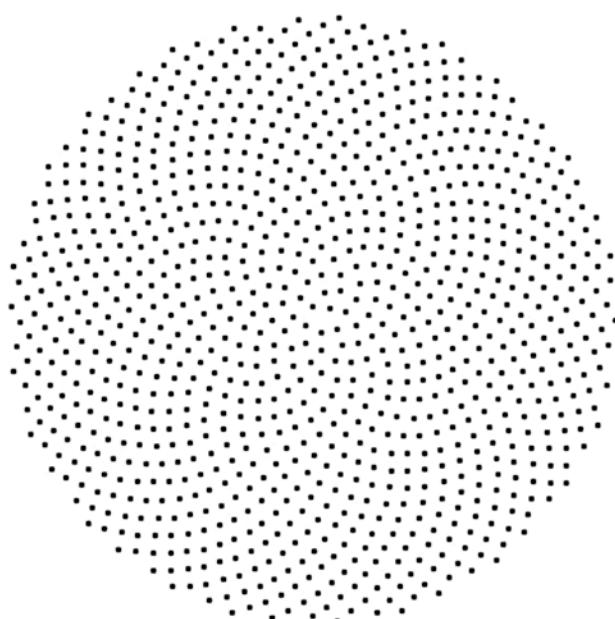


Figura 11. Empaquetamiento sin huecos al utilizar el ángulo áureo. Imagen: David Martín de Diego.

Desde la parte central de la planta se van produciendo nuevas generaciones que aparecen desplazadas por un ángulo que es, precisamente, el ángulo áureo. Esta configuración permite empaquetar las semillas distribuyéndolas de un modo uniforme mientras la planta crece.

ME QUIERE, NO ME QUIERE

Cuando estamos enamorados y no claramente correspondidos solemos contar los pétalos de una flor esperando encontrar la respuesta a nuestro dilema: ¿me quiere o no me quiere? En este caso contamos en sistema binario: sí o no.



Figura 12. *Erodium cicutarium*. Autor: Aiwok. Fuente: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Erodium_cicutarium_2.jpg.

Si nos ajustamos a nuestro sistema decimal volvemos a encontrar los números de la sucesión de Fibonacci. Así, el lirio tiene tres pétalos², la rosa silvestre tiene cinco, ocho la sanguinaria y algunos tipos de rosas; 13, las caléndulas; 21, la achicoria; 34 y 55 algunos tipos de margaritas. ¿Casualidad? La explicación vuelve a estar en los criterios de optimización en el crecimiento de la planta que ya hemos explicado.

2. Los lirios tienen tres pétalos y tres sépalos. Los pétalos y los sépalos son tan similares que parecen a la vista seis pétalos.

EJERCICIOS

1. ¿Podrías explicar la razón por la que la sucesión de Fibonacci nos permite convertir fácilmente millas en kilómetros del siguiente modo?:

$$3 \text{ millas} \cong 5 \text{ km}$$

$$5 \text{ millas} \cong 8 \text{ km}$$

$$8 \text{ millas} \cong 13 \text{ km}$$

$$13 \text{ millas} \cong 21 \text{ km}$$

$$21 \text{ millas} \cong 34 \text{ km...?}$$

2. Imagina que solamente disponemos de monedas de 1 y 2 € y tenemos que pagar una cantidad de n €. ¿De cuántas formas podemos pagar si importa el orden, es decir, no es lo mismo pagar primero 2€ y luego 1€, que al revés? ¿Y si no importa el orden?

3. Dados dos números cualesquiera, construye empezando con estos números una sucesión como la de Fibonacci, es decir, que cada término sea la suma de los dos anteriores. Encuentra la expresión del término general. Prueba que la suma de los diez primeros términos de la sucesión es igual a 11 veces el séptimo término.

4. Este cuadrado

8	1	6
3	5	7
4	9	2

es un cuadrado mágico: la suma de cada línea, de cada columna y de cada diagonal es el mismo número (15 en este caso).

Construye el cuadrado

F8	F1	F6
F3	F5	F7
F4	F9	F2

que es igual a

21	1	8
2	5	13
3	34	1

Calcula el producto de los números de cada línea y de cada columna. Compara la suma de los productos de las tres líneas con la suma de los productos de las tres columnas. Comprueba si es cierto también para la sucesión obtenida en el ejercicio 3.

5. Toma tres números consecutivos de la sucesión de Fibonacci. Compara el producto de los extremos con el cuadrado del número central.

6. Toma cuatro números consecutivos de la sucesión de Fibonacci. Compara el producto de los extremos con el producto de los dos números centrales.

7. Queremos subir una escalera. En cada paso podemos subir uno o dos escalones. ¿De cuántas formas diferentes tendremos para subir una escalera de 6 escalones? ¿Y si tiene n escalones?

ACTIVIDAD. Divide tu altura por la distancia entre tu ombligo y la planta de tus pies. ¿Se parece al número de oro? Haz la misma experiencia con tus compañeros.

Alonso, A. y Bermúdez, T. (2002): "De conejos y números. La sorprendente sucesión de Fibonacci". *La Gaceta de la RSME*, vol. 5.1., pp. 175-196.

Excelente artículo que explica la relación de la sucesión de Fibonacci y el número de oro, mostrando también su sorprendente relación con patrones en la naturaleza, en el arte, etcétera.

Corbalán, F. (2010): *La proporción áurea: el lenguaje matemático de la belleza*. Barcelona: RBA Libros.

Fernando Corbalán es uno de los mejores divulgadores de las matemáticas. En este libro nos seduce con las propiedades de la proporción áurea y la sucesión de Fibonacci. El libro está repleto de referencias históricas. Es un recorrido fascinante por la relación, a través de la relación áurea, de las matemáticas con la obra de pintores y arquitectos de todas las épocas, pero también con las formas que crea la naturaleza, desde una pequeña flor al cosmos. Desde la antigüedad la proporción áurea se ha relacionado con la armonía en el arte y en la naturaleza, hasta el punto de merecer el apelativo de "divina".

Huntley, H. E. (1970): *The divine proportion: a study in mathematical beauty*. Mineola, New York: Courier Dover Publications.

En este libro podemos ver cómo el número de oro aparece en teorías de crecimiento biológico, en los tonos musicales, en la numerología de Pitágoras, en las secciones cónicas, el triángulo de Pascal, etcétera.

Livio, M. (2008): *La proporción áurea*. Barcelona: Ariel. Libro de divulgación, exquisitamente editado, sobre la razón áurea. Se cuenta la historia y las distintas propiedades matemáticas del número phi, además de sus muchas apariciones en el mundo real. Mario Livio, director de la División de Ciencias del Hubble Space Telescope Science Institute, aporta una visión cotidiana del tema accesible para lectores poco acostumbrados a los ensayos de este tipo.

Moreno Castillo, R. (2004): *Fibonacci: el primer matemático medieval*. Madrid: Nivola.

Libro dedicado a la vida de Leonardo de Pisa y sus aportaciones al mundo de las matemáticas. Referencia indispensable.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Adam, J. A. (2003): *Mathematics in Nature: modelling patterns in the nature world*. Princeton: Princeton University Press.

Libro que comenta distintos patrones que aparecen en la naturaleza y su descripción matemática, lo que lo hace ideal para motivar a los alumnos en clase.

MATERIALES AUXILIARES

PÁGINAS WEB

<http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/fibnat.html>. En esta web se recopilan referencias de la sucesión de Fibonacci en la naturaleza: ¿por qué aparecen los números de Fibonacci y el número áureo en la naturaleza?

<http://britton.disted.camosun.bc.ca/fibslide/jbfibslide.htm>. En esta web se incluyen fotografías que ilustran la presencia de la sucesión de Fibonacci en las flores.

<http://www.goldennumber.net/>. Esta web recopila otras sorprendentes apariciones del número de oro.

<http://mathworld.wolfram.com/GoldenRatio.html>. En esta página se destacan otras propiedades matemáticas del número de oro.

<http://www.mathsisfun.com/numbers/golden-ratio.html>. Una página divertida sobre el número de oro.

<http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fibonacci/>. Página web de Ron Knott, matemático y divulgador, sobre la sucesión de Fibonacci.

DOCUMENTALES Y MATERIAL AUDIOVISUAL

"Más por Menos: El número áureo". *La aventura del saber*, TVE-2. La serie educativa "Más por menos" consta de 12 documentales de 18 minutos cada uno. Persigue acer-

car al gran público aquellos aspectos de las matemáticas que convierten a esta materia científica en algo atractivo, interesante y útil en un sinfín de manifestaciones de nuestra actividad cotidiana. Este capítulo se dedica especialmente al número áureo. Disponible en <http://www.rtve.es/alacarta/videos/mas-por-menos/aventura-del-saber-serie-mas-menos-numero-aureo/1290977/>.

Phi-The golden ratio and the mathematics of beauty. Este breve vídeo educativo de la BBC explica el número áureo, motivando su interés con las distintas apariciones de esta proporción en el arte o en la naturaleza. Además, se incluyen ideas relacionadas con el tema para llevar a cabo en clase. Disponible en <http://www.bbc.co.uk/learningzone/clips/phi-the-golden-ratio-and-the-mathematics-of-beauty/11295.html>.

The beauty of the golden ratio. Este segundo vídeo educativo de la BBC presenta las características del número áureo y, para llevar a cabo en clase, ideas relacionadas con el tema. Disponible en <http://www.bbc.co.uk/learningzone/clips/the-beauty-of-the-golden-ratio/9017.html>.

Redes 82: Las simetrías del universo. Entrevista de TVE-2 al matemático y famoso divulgador Marcus du Sautoy sobre las simetrías del universo, con motivo del lanzamiento de su último libro. Disponible en <http://blip.tv/redes-82-las-simetr%C3%ADAs-del-universo-4737631>.

PODCAST DE RADIO

"The Fibonacci sequence podcast". Radio 4 (BBC). Podcast dedicado a la sucesión de Fibonacci. Disponible en <http://www.bbc.co.uk/programmes/b008ct2j>.

MATEMÁTICAS PARA EL ESTUDIO Y TRATAMIENTO DE LAS ENFERMEDADES

Marco Antonio Fontelos López

2.4

Objetivos, contenido y criterios de evaluación de acuerdo con los Reales Decretos de Enseñanzas Mínimas, (1467/2007 de 2 noviembre para Bachillerato y 1631/2007 de 29 de diciembre para Educación Secundaria Obligatoria).

El tema del capítulo se contextualiza en el marco de la biosfera, que comprende la atmósfera, la hidrosfera y la litosfera próximas a la superficie de la Tierra, ya que este es el espacio en el que tienen lugar los procesos de interacción de los seres vivos entre ellos y con el entorno.

El autor muestra cómo la modelización matemática contribuye al análisis y comprensión de algunas enfermedades, a la previsión de su desarrollo y a la planificación de la intervención mediante tratamientos para curarla y erradicarla. Para ilustrar este argumento se estudian tres ejemplos de enfermedades de gran incidencia social por la agresividad de sus patologías y la mortandad que de ellas se deriva: los procesos cancerosos, el SIDA (síndrome de inmunodeficiencia adquirida) y las enfermedades neurodegenerativas como la esclerosis múltiple. En cada uno se emplea un proceso de modelización diferente, ajustado en cada caso al proceso biológico que modeliza.

En relación con el cáncer, el autor calcula el ritmo de crecimiento de las células cancerígenas y expone algunos modelos que muestran el proceso de propagación de la enfermedad. A partir del modelo plantea preguntas como la de saber cómo crece un tumor. Para dar respuesta, deduce la ecuación exponencial que describe dicho crecimiento, así como su ajuste con otros factores que lo retrasan.

El SIDA se produce por una disminución drástica en el número de células de un cierto tipo (los linfocitos CD4, encargados de coordinar la respuesta a cualquier organismo extraño que entra al cuerpo humano) que son atacados por el virus VIH (virus de inmunodeficiencia humana). Cuando el número de estas células disminuye, la persona sufre de inmunodeficiencia, lo cual significa

que no puede defenderse de otros virus, bacterias y parásitos que causan enfermedades, y por tanto la hace vulnerable para sufrir enfermedades que una persona sana sería capaz de atacar y eliminar. La modelización matemática, mediante sistemas de ecuaciones diferenciales, de una infección viral permite entender la relación entre la producción de los virus y de células CD4, de manera que se pueda optimizar el tratamiento mediante medicación y mejorar la vida de los enfermos.

Finalmente, el autor presenta una serie de modelos utilizados para entender e interpretar enfermedades neurovegetativas. Las neuronas, y en especial sus axones, se ven dañadas por diversos mecanismos; como resultado pierden parcial o totalmente su capacidad de transmisión, causando los síntomas típicos de adormecimiento, cosquilleo, espasmos, parálisis, fatiga y alteraciones en la vista. La modelización de los procesos de transmisión de información de las neuronas permite analizar cómo varían estos mecanismos en los enfermos de esclerosis múltiple con el fin de comprender las causas de sus trastornos. El autor muestra el modelo de Hodgkin y Huxley, que explica cómo se transmite el impulso nervioso, y permite reflejar los efectos de la desmielinización para la velocidad de propagación del impulso nervioso.

La lectura del capítulo es muy instructiva; los argumentos generales se siguen con facilidad y las explicaciones derivadas de los modelos matemáticos son precisas e instructivas. El texto es de especial interés para alumnos de bachillerato que vayan a seguir un grado de la rama biosanitaria, ya que les ayudará a entender la profundidad de reflexión que se consigue en los estudios médicos mediante la modelización matemática.

INTRODUCCIÓN

La biosfera es el sistema formado por el conjunto de los seres vivos del planeta Tierra y el medio físico que les rodea, que ellos contribuyen a conformar. Es, en esencia, la región del planeta en la cual se desarrolla la vida y, como tal, comprende las zonas de la atmósfera, hidrosfera y litosfera próximas a la superficie de la Tierra donde tienen lugar los procesos de interacción de los seres vivos entre ellos, y con el entorno.

Las distintas relaciones –entre los seres vivos, con su entorno– afectan tremadamente a la configuración del planeta y, en particular, a los seres humanos. Por ello es importante entender y conocer estos procesos. Algunas de las interacciones entre especies son potencialmente perjudiciales para una de ellas, como por ejemplo entre un humano y un virus. Otras veces es el entorno el que desencadena la aparición de un proceso patológico en los seres vivos, como sucede con muchos procesos cancerosos. En este capítulo estudiaremos este tipo de fenómenos, centrándonos en aquellos que afectan directamente a los seres humanos: las enfermedades y su tratamiento.

Veremos cómo las matemáticas ayudan a analizar los mecanismos básicos en el desarrollo de algunas enfermedades y nos pueden orientar en la búsqueda de tratamientos efectivos mediante tres ejemplos. Nos centramos especialmente en tres de las enfermedades que más preocupan a los seres humanos en estos momentos: los procesos cancerosos, el *sida* (síndrome de inmunodeficiencia adquirida) y las enfermedades *neurodegenerativas* como la esclerosis múltiple.

Como veremos, en todos estos procesos las matemáticas han supuesto un instrumento crucial en su comprensión y, en algunos casos, han sido la clave para su tratamiento efectivo. La introducción de la metodología científica en la medicina y, consecuentemente, de la matemática que conlleva, ha sido una de las más importantes revoluciones científicas del siglo XX. Los tres ejemplos de aplicación de las matemáticas que hemos elegido, de entre los muchos existentes, han dado lugar a importantes desarrollos científicos premiados con premios Nobel y, mucho más allá de eso, han contribuido a salvar millones de vidas.

TUMORES CANCEROSOS Y METÁSTASIS

El **cáncer** es un conjunto de enfermedades caracterizadas por el desarrollo de células anormales con un crecimiento incontrolado que reproducen más o menos atípicamente las células del tejido en el que aparecen. Estas células pueden comportarse de diferentes modos pero, en general, sin el tratamiento adecuado, provocan la muerte. Actualmente el cáncer causa cerca del 13% de todas las muertes en el mundo. Las matemáticas nos ayudan a entender el ritmo de crecimiento de las células cancerígenas y a construir modelos que permitan entender el proceso de propagación de la enfermedad.

Los cánceres se propagan por el cuerpo a través de dos mecanismos: **invasión** y **metástasis**. La invasión es la migración y la penetración directa de las células cancerosas en los tejidos vecinos. La metástasis es la capacidad de las células del cáncer de penetrar en los vasos sanguíneos y linfáticos, viajar a través de la circulación sanguínea y crecer en tejidos normales en otra parte del cuerpo.

Los estudios que investigan las condiciones necesarias para la metástasis del cáncer muestran que el crecimiento de los **tumores** y la producción de sus metástasis requieren que, previamente, se desarrolle una nueva red de los vasos sanguíneos, mediante un proceso llamado **angiogénesis**.

La angiogénesis del tumor es la proliferación de una red de vasos sanguíneos que penetra en el tumor, proporcionándole nutrientes, oxígeno y retirando los residuos. La angiogénesis tumoral puede estar favorecida por las propias células cancerosas, capaces de producir moléculas que envían señales al tejido normal circundante. Estas señales activan ciertos genes en el tejido huésped que responde con la síntesis de proteínas que estimulan el crecimiento de nuevos vasos sanguíneos.

¿CÓMO CRECE UN TUMOR?

Durante el crecimiento de un tumor cancerígeno tiene lugar una proliferación de células malignas. El proceso

normal de división celular, llamado mitosis, requiere normalmente de señales externas para llevarse a cabo. En el proceso canceroso, las mitosis se producen sin necesidad de este tipo de señales y las divisiones tienen lugar de forma descontrolada. Veamos un ejemplo: supongamos que tenemos una célula cancerosa y que el tiempo entre dos divisiones celulares es de un día. El primer día habrá una célula, que se dividirá al final del día, habiendo el segundo día 2 células, $2 \times 2 = 4$ el tercero, etcétera. En el día n habrá, por tanto, 2^{n-1} células. Para hacernos una idea, después de un mes de 31 días tendremos

$$N_c = 2^{30} = 1.073.741.824 \text{ células}$$

Es decir, más de mil millones. Parece un número enorme de células pero veamos en qué tamaño se traduce. Si consideramos que las células son esferas de radio r_c de unas 10 millonésimas de metro (una centésima de milímetro), tendremos que el volumen total V_c es

$$V_c = N_c \frac{4}{3} \pi r_c^3 = 4.5 \text{ cm}^3$$

y si imaginamos el tumor como una esfera, su radio R sería tal que

$$R = \left(\frac{3V_c}{4\pi} \right)^{\frac{1}{3}} = 1.1 \text{ cm}$$

con lo que tendríamos un tumor de poco más de un centímetro de radio. No obstante, el tumor seguiría creciendo y, el día n , tendría un radio $R(n)$ tal que

$$\frac{4}{3} \pi R^3(n) = 2^{n-1} \frac{4}{3} \pi r_c^3$$

es decir,

$$R(n) = (2^{n-1} r_c^3)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{n-1}{3}} r_c$$

Como

$$R(n) = 2^{\frac{n-1}{3}} r_c = 2 \times 2^{\frac{n-4}{3}} r_c = 2 \times R(n-3)$$

concluimos que el tumor duplica su radio cada 3 días. Al cabo de otro mes, su radio sería de poco más de un decímetro de radio, ¡mayor que casi cualquier órgano del

cuerpo humano! Este tipo de crecimiento es de tipo exponencial, ya que el radio crece en la forma

$$R(t) = R_0 e^{kt}$$

siendo t el número de días desde el primer día ($n=1$), $R_0 = r_c$ el radio inicial del tumor, y $k = (\ln 2)/3$.

Pero hemos hecho una suposición que no es realista: estamos afirmando que todas las células se dividen a la vez al final de cada día. En realidad, lo adecuado es tomar dos tiempos muy próximos, t y $t + \Delta t$, con Δt muy pequeño, y comparar el número de células en el tumor en ambos tiempos. La diferencia será debida al número de células creadas en el intervalo Δt y que será, por tanto, proporcional al número de células que hay (una fracción de ellas será la que se divida en el intervalo de tiempo Δt) y al intervalo de tiempo:

$$N_c(t + \Delta t) - N_c(t) = rN_c(t)\Delta t$$

siendo r la fracción de células que se dividen por unidad de tiempo. De la ecuación anterior deducimos

$$\frac{N_c(t + \Delta t) - N_c(t)}{\Delta t} = rN_c(t)$$

y si hacemos ahora Δt tender a cero y recordamos la definición de derivada, obtenemos la relación

$$\frac{dN_c(t)}{dt} = rN_c(t)$$

Es decir, $N_c(t)$ es una función cuya derivada es proporcional a ella misma. Hay una función que cumple esta propiedad: la exponencial e^{rt} . De hecho, cualquier constante C multiplicada por dicha función la cumple. Por tanto,

$$N_c(t) = Ce^{rt}$$

Si nos fijamos ahora en lo que ocurre en $t = 0$, vemos que $N_c(0) = C$, lo que nos permite determinar C (= una sola célula inicialmente). En cuanto al radio, obtenemos

$$R(t) = R_0 e^{\frac{rt}{3}}$$

siendo $R_0 = r_c$. Comparando con la fórmula obtenida arriba, vemos que $r = \ln 2$.

En realidad, la situación es un poco mejor. Si miramos la imagen de un tumor en la figura 1a nos damos cuenta de que hay claramente dos tipos de células: las centrales y las que están cerca del borde. Las centrales son células necróticas, que ya no proliferan debido a la falta de oxígeno y otro tipo de nutrientes que las células necesitan para subsistir. Las células próximas al borde son las únicas que reciben nutrientes y, por tanto, proliferan. ¿Cómo de rápido crece un tumor si solo proliferan las células que están cerca del borde? Para ser más precisos, asumimos que solo las células que están a una distancia (que denominamos δ), o menor, del borde pueden proliferar. El volumen de células que proliferan es, por tanto, el de un casquete esférico:

$$\frac{4}{3}\pi(R^3 - (R - \delta)^3) = 4\pi R^2 \delta - 4\pi R \delta^2 + \frac{4}{3}\pi \delta^3$$

que, cuando δ es muy pequeño comparado con R , se puede aproximar por $4\pi R^2 \delta$. De manera que el número de células en el día $n+1$, $N_c(n+1)$, es igual al número de células en el día n , $N_c(n)$, más el número de células nuevas que han sido creadas durante un día, igual al número de células del casquete esférico:

$$\text{Células nuevas} = \frac{4\pi R^2(n)\delta}{\frac{4}{3}\pi r_c^3}$$

Por tanto, como el número de células es el volumen total dividido por el volumen de una célula, $N_c(n) = R^3(n)/r_c^3$, se tiene

$$\frac{R^3(n+1)}{r_c^3} = \frac{4\pi R^2(n)\delta}{\frac{4}{3}\pi r_c^3} + \frac{R^3(n)}{r_c^3}$$

Simplificando,

$$R^3(n+1) = 3\delta R^2(n) + R^3(n)$$

expresión que nos permite calcular $R(n+1)$ conocido $R(n)$. Escribamos $R(n+1) = R(n)+A$ y como $(R(n) + A)^3 = R^3(n) + 3R^2(n)A + 3R(n)A^2 + A^3$, tendremos despejando

$$3R^2(n)A + 3R(n)A^2 + A^3 = 3\delta R^2(n)$$

y, dividiendo por $R^2(n)$,

$$3A + 3 \frac{A^2}{R(n)} + \frac{A^3}{R^2(n)} = 3\delta$$

de modo que, cuando $R(n)$ se hace grande se tiene que aproximadamente

$$3A = 3\delta$$

y por tanto, para valores grandes de n ,

$$R(n+1) = R(n) + \delta$$

lo que implica que

$$R(n+1) \approx \delta n$$

Es decir, el radio del tumor crece linealmente en el tiempo, lo cual supone un crecimiento mucho más lento que el exponencial. Para hacernos una idea, si δ tiene el espesor de 10 células, es decir 0,1 mm., entonces el radio del tumor crecería 0,1 mm. al día y tardaría 900 días (entre 2 y 3 años) en tener un radio de 10 cm partiendo de un radio inicial de 1 cm.

Pero además existe otro factor que retarda el crecimiento de un tumor que aún no hemos considerado: la existencia limitada de nutrientes. Esta es una limitación natural para todo proceso de crecimiento en biología: al igual que la Tierra no tiene recursos ilimitados para sostener un crecimiento exponencial de seres humanos (crecimiento maltusiano), un tumor con billones de células no puede

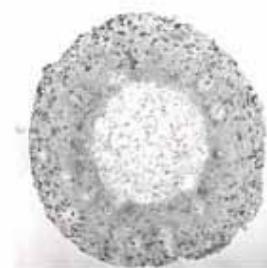


Figura 1a. Sección de un tumor aproximadamente esférico donde se puede ver la diferencia entre células necrosadas en el centro y células activas en la periferia.

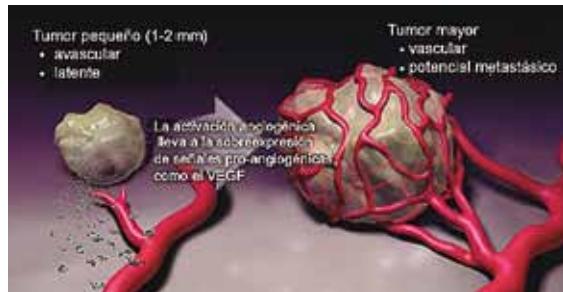


Figura 1b. Tumor vascularizado. Figura obtenida de <http://www.angiogenesis.es/portal/eipf/pb/avastin/Anti-VEGFA/elvegfyelcrecimiento>. Todo el proceso se puede encontrar en <http://www.youtube.com/watch?v=WXTsxPPcTE>.

ser mantenido y la mayoría de células, incluyendo las del borde, morirán, a no ser que el tumor se las ingenie para buscar medios de subsistencia. Es en este punto donde el cáncer se convierte en una enfermedad realmente perversa: el tumor atrae hacia sí vasos sanguíneos que lo rodean y nutren mediante el proceso de angiogénesis, tal como ilustra la figura 1b.

Es más, una vez en contacto con vasos sanguíneos, las células cancerígenas comienzan a viajar en la corriente sanguínea y llegan así a otras partes del cuerpo, invadiéndolas. Por tanto, para tratar el cáncer es muy importante entender cómo funciona el proceso de angiogénesis y qué podemos hacer para evitarlo.

ANGIOGÉNESIS Y METÁSTASIS: EL PAPEL DE LA QUIMIOTAXIS

La angiogénesis es, en general, el proceso de formación de nuevos vasos sanguíneos a partir de vasos preexistentes. Nosotros hemos hablado de ella en el contexto de un proceso patológico (el desarrollo de un cáncer), pero es un proceso biológico general de una importancia tremenda. Es el fenómeno mediante el que los embriones consiguen atraer hacia sí las vías de transporte de nutrientes de la madre y una herida tiende a cerrarse, por ejemplo.

Pero ¿qué es lo que determina hacia dónde tienen que crecer y dirigirse los vasos sanguíneos? La clave está en

otro fenómeno de crucial importancia en biología llamado **quimiotaxis**.

La quimiotaxis es el proceso por el cual los organismos (bacterias, células, e incluso organismos pluricelulares como insectos) se mueven en respuesta a estímulos químicos externos. Para hacernos una idea de cómo funcionan los mecanismos quimiotácticos y sus consecuencias, supongamos que estamos en la calle a la hora de comer, sin ningún tipo de indicación, y deseamos localizar un lugar donde sirvan comida. Lo que haremos será andar de forma más o menos aleatoria hasta que olamos algo que se parezca a una comida de nuestro gusto. Una vez tengamos la indicación de que esa comida está a nuestro alrededor, paramos y giramos la cabeza para intentar determinar con nuestro olfato en qué dirección es el olor más intenso. Una vez localizada la dirección, nos movemos siguiéndola mientras que con el olfato comprobamos si es la correcta o, por el contrario, debemos ir corrigiéndola mientras nos movemos. Si somos cientos de personas hambrientas, acudiremos todos al mismo tiempo al puesto de comida, lo colapsaremos, y serán incapaces de servirnos. Para evitar esto, la biología ha modificado el mecanismo de modo que, en quimiotaxis, no es la comida la que atrae sino una señal que emiten los individuos que van a buscar comida o los que ya la han encontrado y vuelven con ella.

Un ejemplo claro es el de las hormigas: cuando caminan en busca de comida, van secretando una sustancia química llamada feromonía. Simultáneamente, mientras caminan, olfatean el entorno y corrigen su dirección de movimiento cuando detectan con sus antenas (donde reside su sentido del olfato, con más de 400 receptores del olor, cinco veces más que cualquier otra especie de insectos) una dirección con alta concentración de feromonía. Este proceso termina produciendo hileras de hormigas en las que unas persiguen a otras, tal y como muestra la figura 2, y que conectan el hormiguero con las fuentes de alimento; habitualmente a través del camino más corto entre ambos.

Es notable cómo seres con una inteligencia tan limitada (unas 10.000 **neuronas**) y con un sentido de la visión muy reducido o incluso atrofiado para algunas especies, son capaces de usar mecanismos quimiotácticos para realizar tareas complejas de localización y transporte óptimo de alimentos hacia el hormiguero.



Figura 2: Hilera de hormigas generada mediante quimiotaxis.

Volviendo a la angiogénesis, ¿cuál es el mecanismo por el cual el tumor consigue vascularizarse? Pues bien, el tumor secreta una sustancia llamada “factor de crecimiento endotelial vascular” (VEGF: *Vascular Endothelial Growth Factor*) que induce a ciertas células de los vasos sanguíneos circundantes a secretar otras sustancias que rompen sus paredes y a moverse en la dirección del estímulo químico, a la vez que proliferan. Es un mecanismo muy parecido al de las hileras de hormigas discutido arriba, solo que ahora son hileras de células que forman un vaso sanguíneo.

¿Qué papel juega la matemática en todo esto? Lamentablemente, en el caso de los tumores la situación no es tan simple como la hemos descrito arriba. Hay muchos tipos de células distintas en un vaso sanguíneo y, literalmente, decenas de sustancias químicas intercambiadas entre ellas y con el tumor. Así como unas cuantas decenas de reacciones químicas que tienen lugar en las células para transformar unas sustancias químicas en otras. Desentrañar cuáles de estos procesos son los más determinantes en el desarrollo del proceso angiogénico implica cuantificar el efecto de cada uno de ellos mediante modelos matemáticos basados en la estequiometría química de las reacciones (balances de masa) y los procesos de atracción quimiotáctica. El objetivo final de este tipo de estudios es determinar cuál es el “eslabón más débil de la cadena”, para diseñar fármacos con que atacarlo y frenar así el proceso angiogénico.

EL SIDA: ¿CÓMO DISEÑAR UN CÓCTEL DE FÁRMACOS?

El sida consiste en la incapacidad del sistema inmunitario para hacer frente a las infecciones y otros procesos patológicos producida por una disminución drástica en el número de células de un cierto tipo (CD4) que son atacadas por el [virus VIH](#) (virus de inmunodeficiencia humana). Normalmente, los glóbulos blancos y anticuerpos atacan y destruyen a cualquier organismo extraño que entra en el cuerpo humano, y esta respuesta es coordinada por los linfocitos CD4. El VIH ataca específicamente a estos linfocitos y entra en ellos. Una vez dentro, el virus transforma su material genético de cadena simple (ARN) a uno de cadena doble (ADN) para incorporarlo al material genético propio del huésped (persona infectada) y lo utiliza para replicarse o hacer copias de sí mismo. Cuando las nuevas copias del virus, llamadas viriones, salen de las células a la sangre, buscan a otras células para atacar. Mientras, las células de las que salieron mueren. Este ciclo se repite una y otra vez.

Para defenderse de esta producción de virus, el sistema inmune produce diariamente muchas células CD4. Paulatinamente el número de estas células disminuye, por lo que la persona sufre de inmunodeficiencia, lo cual significa que no puede defenderse de otros virus, bacterias, hongos y parásitos que causan enfermedades, lo que la deja susceptible de sufrir enfermedades que una persona sana sería capaz de atacar y eliminar.

La modelización matemática de la dinámica de esta infección ha permitido entender mejor la relación entre la producción de los virus y de células CD4, de manera que se pueda optimizar el tratamiento mediante medicación y mejorar la vida de los enfermos.

MODELIZACIÓN MATEMÁTICA DE UNA INFECCIÓN VIRAL

Las ideas básicas que impulsaron el análisis de la cinética de la infección por el VIH, y que condujeron al desarrollo

del campo llamado dinámica viral, son simples. Primero, se observó que con frecuencia el nivel de virus en pacientes con enfermedad viral crónica alcanza un valor constante o punto de ajuste en el que se mantiene durante años. Para conservar este nivel constante, el cuerpo debe producir y eliminar virus a la misma velocidad. Si este no fuera el caso y, por ejemplo, se produjeran más virus de los que se eliminan, entonces la cantidad de virus aumentaría lentamente. Matemáticamente, si P es la **tasa total de producción de virus** y c es la **velocidad de eliminación por virión**, entonces para mantener el equilibrio P debe ser igual a cV , siendo V la **carga viral** en dicho punto de equilibrio. Si $P > cV$, entonces la carga viral aumenta, mientras que si $P < cV$, entonces la carga viral disminuye. El objetivo a largo plazo es el de mantener este equilibrio de forma que P sea todo lo pequeño posible de modo que sea necesario eliminar el menor número de virus posible, y no se termine deprimiendo el sistema inmune.

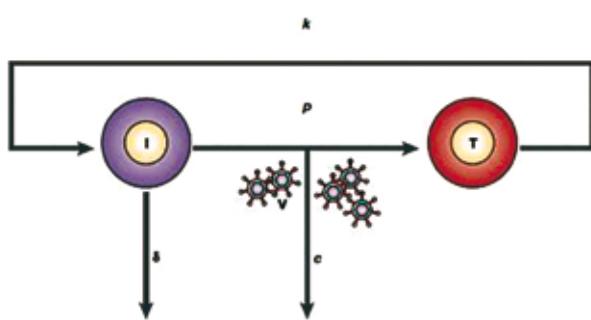


Figura 3: Modelo básico de la infección viral. Las células susceptibles a la infección, es decir, las células diana (I), son infectadas por los virus (V) con una tasa p convirtiéndose en células infectadas (I). Aunque no se muestra, se supone que las células diana se están produciendo con una tasa constante λ y mueren con una tasa d . Las células infectadas (I), a su vez producen viriones nuevos con una tasa de p viriones por unidad de tiempo, y mueren con una tasa δ . Los viriones libres son en una parte eliminados por el sistema inmune con una tasa c , y en otra parte sirven para infectar nuevas dianas (T). Este modelo y variantes se han utilizado para estudiar la dinámica del virus de la inmunodeficiencia humana, virus de la hepatitis C, hepatitis B y muchos otros tipos de infecciones.

Imagen obtenida del artículo Nat Rev Immunol. 2002 Jan;2(1):28-36. Modelling viral and immune system dynamics. Autor: Perelson AS.

En la figura 3 se muestra un modelo utilizado para estudiar la infección por el VIH, VHC (hepatitis C) y VHB (hepatitis B). El modelo considera un conjunto de células susceptibles a la infección, llamadas **células diana**

(T), que, a través de las interacciones con los virus, V , se infectan en una fracción k de las veces que dichas interacciones tengan lugar. Las células infectadas pueden producir nuevos virus, y lo harán con una tasa media (número de virus producidos por cada célula infectada y por unidad de tiempo) constante p , y morirán con una tasa δ . El promedio de vida de una célula infectada es de $1/\delta$, de modo que si una célula infectada produce un total de N viriones durante su vida, la tasa media de la producción de virus por célula será $p = N\delta$. En el momento en el que se producen nuevos virus, V , o bien pueden infectar nuevas células diana T o bien se eliminan del cuerpo con una tasa c . Por otra parte, independientemente de la existencia de infección viral o no, el cuerpo produce de manera natural células T a un ritmo constante de λ células por unidad de tiempo, y una fracción d de estas células mueren por unidad de tiempo.

A continuación expresaremos todos estos procesos a través de ecuaciones matemáticas. Si llamamos T al número de células diana, vemos que dicho número crecerá debido a la producción constante de λ unidades por unidad de tiempo por parte de nuestro cuerpo, pero disminuirá debido a su mortalidad natural con tasa d y también debido a su transformación en células infectadas en una fracción k de las veces que tiene lugar un encuentro con un virus. Es decir, T variará por unidad de tiempo en una cantidad

$$\underbrace{\lambda}_{\text{producción}} - \underbrace{dT}_{\text{muerte}} - \underbrace{kVT}_{\text{infección}}$$

La variación del T por unidad de tiempo es la derivada de T , por lo que llegamos a la ecuación

$$\frac{dT}{dt} = \lambda - dT - kVT$$

Como el número de células infectadas aumenta cuando una célula diana se contagia, la variación de I por unidad de tiempo crecerá en una cantidad kVT y disminuirá debido a la mortalidad natural en δI . Por tanto:

$$\frac{dI}{dt} = kVT - \delta I$$

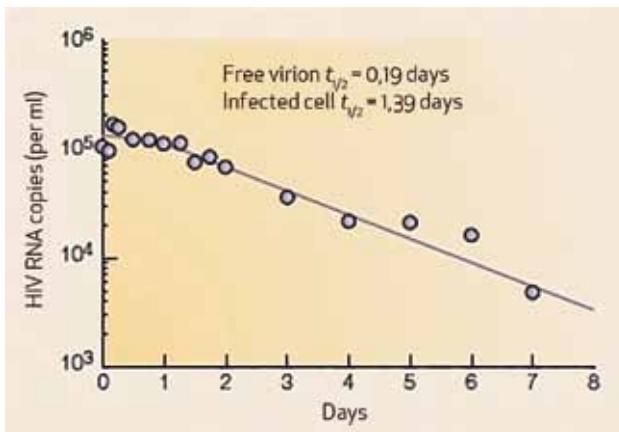


Figura 4: Evolución de la concentración de virus en el tiempo (en escala semilogarítmica) junto con la solución del sistema de ecuaciones del modelo y el valor de los parámetros, en términos de la vida media, con los que se consigue un mejor ajuste. Imagen tomada de Perelson, A. S. et al. Decay characteristics of HIV-1-infected compartments during combination therapy. *Nature* 387, 188–191 (1997).

Finalmente, el número de viriones V crecerá, debido a su producción por las células infectadas, a un ritmo proporcional al número de estas células, es decir, pI , y disminuirá debido a la respuesta inmune a un ritmo cV . Por tanto:

$$\frac{dV}{dt} = pI - cV$$

Las tres últimas ecuaciones constituyen lo que se llama "un sistema de ecuaciones diferenciales", cuya solución nos dará $T(t)$, $I(t)$ y $V(t)$, es decir, la **evolución** de los números de células sanas, infectadas y de viriones en cada instante de tiempo, conocidos los valores en $t = 0$ de dichos números. Resolver dichas ecuaciones no es tarea sencilla y no entraremos en ello. Sin embargo, cabe resaltar que las soluciones dependerán de los parámetros de las ecuaciones, dos de los cuales (c y δ) son propios de cada enfermo en particular y no se pueden medir mediante análisis de muestras de sangre.

En el año 1996 David Ho (figura 5) y su equipo midieron regularmente la cantidad de virus en sangre de varios pacientes y después encontraron los valores de c y δ que hacían que la curva $V(t)$ solución se pareciese más a los valores medidas. A partir de estas estimaciones, se

pueden calcular los valores para la vida media, que es el tiempo que tardan en morir la mitad de los viriones en el plasma ($t_{1/2} = \ln 2/c$) y la vida media de las células infectadas ($t_{1/2} = \ln 2/\delta$). En la figura 4 se muestra el procedimiento y la calidad de este tipo de ajustes. Aunque estos datos aportan ya de por sí una información interesante, lo verdaderamente revolucionario de su trabajo consistió en usarlos para diseñar estrategias de ataque de la infección, tal y como veremos a continuación.

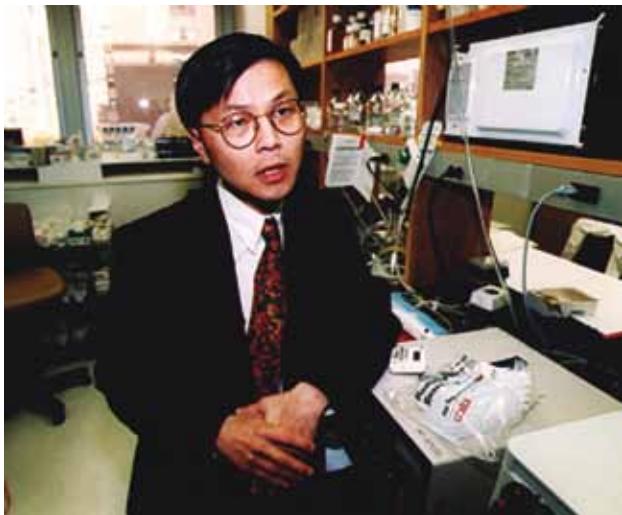


Figura 5: David Ho (1952-), ideó el método para tratar el SIDA con "cócteles" de medicamentos, también conocido como terapia antirretroviral altamente activa. Por su contribución decisiva en la lucha contra la enfermedad fue elegido como hombre del año en 1996 por la revista Time. Su formación inicial en física fue determinante para su aproximación matemática al problema. Una entrevista se puede ver en <http://www.elmundo.es/elmundosalud/especiales/2006/06/25/sida/entrevista.html>.

DISEÑANDO UNA TERAPIA

A la hora de atacar la infección, el equipo de David Ho disponía de dos estrategias principales: si inicialmente tratamos con una persona que no está infectada y que luego introduce una pequeña cantidad de virus, la solución de las ecuaciones anteriores imitará la cinética primaria del virus de inmunodeficiencia humana (VIH). Para analizar los efectos de administrar un fármaco antirretroviral, las ecuaciones anteriores se modifican incorporando el efecto de inhibidores de la transcriptasa inversa (*reverse transcriptase* en inglés, o RT) que bloquean la capacidad del virus del sida de infectar con éxito una célula e inhibidores de la proteasa (*inverse protease* en inglés, o PI) que inducen la producción de partículas virales no infecciosas V_{NI} . Así, en la presencia de estos fármacos, las ecuaciones del modelo se convierten en:

$$\frac{dT}{dt} = \lambda - dT - (1-\varepsilon_{RT})kV_I T$$

$$\frac{dI}{dt} = (1-\varepsilon_{RT})kV_I T - \delta I$$

$$\frac{dV_I}{dt} = (1-\varepsilon_{PI}) pI - cV_I$$

$$\frac{dV_{NI}}{dt} = \varepsilon_{PI} pI - cV_{NI}$$

donde ε_{RT} y ε_{PI} son las eficacias de la RT y la PI ($\varepsilon_{RT} = 1$ o $\varepsilon_{PI} = 1$ correspondería a una droga de eficacia perfecta). Hemos llamado V_I y V_{NI} al número de virus infecciosos y no infecciosos respectivamente. Por tanto, $V = V_I + V_{NI}$ es el número total de virus. De nuevo, haciendo un seguimiento de la evolución del número de virus del paciente frente al tiempo en el que se le suministra uno u otro fármaco, podremos estimar la eficiencia del mismo, es decir, los parámetros ε_{RT} y ε_{PI} . De esta forma, se pueden establecer estrategias óptimas de tratamiento basadas en uno u otro tipo de fármaco. O

en una combinación adecuada de ambos, en forma de “cóctel de fármacos”, que minimice el número de virus infecciosos a lo largo del tiempo, así como los efectos secundarios que la ingesta de demasiada cantidad de un cierto fármaco pudiera acarrear. Disponemos de esta forma de un laboratorio matemático para tratar de la mejor forma posible, e individualizadamente, a cada paciente.

ESCLEROSIS MÚLTIPLE Y ENFERMEDADES NEURODEGENERATIVAS

La esclerosis múltiple es, tras la epilepsia, la enfermedad neurológica más frecuente entre los adultos jóvenes (desde la casi completa erradicación de la poliomielitis) y la causa más frecuente de parálisis en los países occidentales. Afecta aproximadamente a 1 de cada 1.000 personas, en particular a las mujeres. Las neuronas, y en especial sus axones, se ven dañadas por diversos mecanismos que describiremos más abajo. Como resultado pierden parcial o totalmente su capacidad de transmisión, causando los síntomas típicos de adormecimiento, cosquilleo, espasmos, parálisis, fatiga y alteraciones en la vista.

La esclerosis múltiple pertenece a la familia de enfermedades neurodegenerativas, que agrupa a otros desórdenes cognitivos tales como enfermedad de Alzheimer, de Parkinson, de Creutzfeldt-Jakob y esclerosis lateral amiotrófica. Estos trastornos cognitivos se deben a un aumento en los procesos de degradación y muerte celular, reduciendo el número de neuronas o haciéndolas ineficientes, y generando cambios en la conducta.

Mediante la modelización de los procesos de transmisión de información de las neuronas, podemos analizar cómo varían estos mecanismos en los enfermos de esclerosis múltiple con el fin de comprender las causas de estos trastornos.

Santiago Ramón y Cajal (1852-1934) fue un médico y científico español. Se le considera el fundador de la neurobiología moderna. Su magistral uso y modificaciones de la técnica de tinción inventada por Camillo Golgi, médico y científico italiano, le permitieron ser el primero en reportar con precisión la anatomía fina del sistema nervioso. Cajal demostró que el sistema nervioso se compone de células individuales (neuronas) conectadas entre sí por pequeñas zonas de contacto (sinapsis). Una de las hipótesis más interesantes de Cajal era que las neuronas estaban funcionalmente polarizadas, es decir, los impulsos eléctricos se propagan desde las dendritas al cuerpo celular al axón. Veía las neuronas como unidades de procesamiento de información que hacen las conexiones y se organizan en redes dinámicas para lograr sus diversas funciones.



S. Ramón y Cajal

Figura 6. Santiago Ramón y Cajal. La fotografía, de un autor anónimo, fue publicada por la Universidad de Clark en 1899. La restauración de la misma es obra de Garrondo. Fuente: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Cajal-Restored.jpg?uselang=es>.

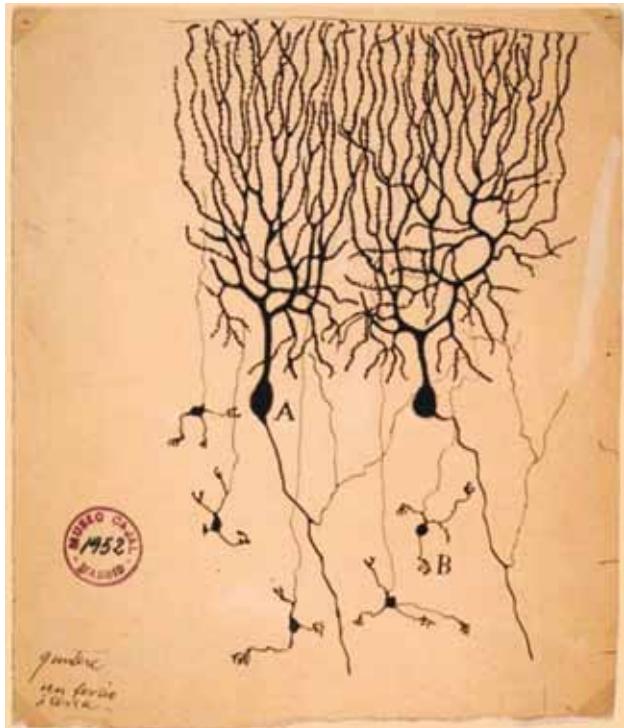


Figura 7. Dibujo de Santiago Ramón y Cajal de las neuronas del cerebelo de una paloma (a) Célula de Purkinje, un ejemplo de neurona bipolar (b) célula granular que es multipolar. Fuente: <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Purkinje-Cell.jpg?uselang=es>

La doctrina de la neurona constituye la base para la comprensión de la organización del sistema nervioso, lo que para muchos sitúa a Ramón y Cajal entre los científicos más relevantes de la historia. Además, Cajal también describió el crecimiento axonal, un proceso clave para el desarrollo del sistema nervioso, y propone que dicho proceso se basa en estímulos químicos (quimiotaxis). Un vídeo interesante sobre su vida y obra se puede encontrar en <http://www.youtube.com/watch?v=70Ie2AmxeFw>.

LA NEURONA

Nuestro cerebro está compuesto de aproximadamente cien mil millones de células nerviosas llamadas neuronas que tienen la asombrosa capacidad de recopilar y transmitir señales electroquímicas. La fisiología y función de la neurona fueron descritas por primera vez por Santiago Ramón y Cajal en 1891, lo que le valió el premio Nobel en 1906.

Las neuronas tienen las mismas características y composición que otras células, pero es su carácter electroquímico el que les permite transmitir señales a través de largas distancias (hasta varios metros) y transferir información entre ellas. Las neuronas tienen tres partes básicas:

1. **Cuerpo celular o soma.** Esta parte principal tiene todos los componentes necesarios de la célula, como el núcleo (que contiene ADN), el retículo endoplásmico y los ribosomas (para la construcción de proteínas) y las mitocondrias (para producir energía). Si el cuerpo celular muere, la neurona muere.
2. **Axón.** Esta larga extensión de la célula, en forma de cable, lleva el mensaje electroquímico (impulso nervioso o potencial de acción) a lo largo de ella. Dependiendo del tipo de neurona, los axones pueden ser cubiertos con una fina capa de una sustancia llamada mielina, al modo de los cables eléctricos aislados por una vaina de plástico. La mielina está hecha de grasas y proteínas y ayuda a acelerar la transmisión de un impulso nervioso a lo largo del axón, tal y como discutiremos más tarde. Las neuronas mielinizadas se encuentran típicamente en los nervios periféricos (neuronas sensoriales y motoras), mientras que las no mielinizadas se encuentran en el cerebro y la médula espinal.
3. Las **dendritas** o terminaciones nerviosas. Estas extensiones ramificadas permiten llevar a cabo conexiones con otras células y comunicarse con otras células o percibir el entorno. Las dendritas pueden estar en uno o ambos extremos de la célula.
4. La transmisión de señales entre dos neuronas se produce mediante un proceso llamado **sinapsis**, tal como se representa en la figura 2. En este proceso, la propia neurona segregá un tipo de compuestos químicos (neurotransmisores) que se depositan en el espacio sináptico

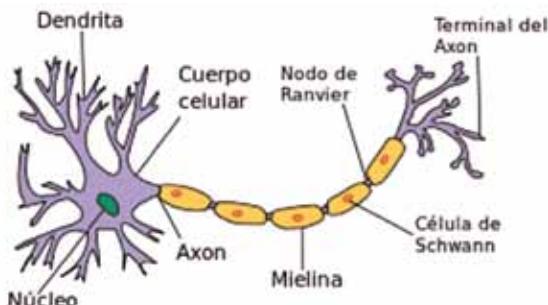


Figura 8. Partes de la neurona. Fuente: <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Neurona.svg?uselang=es>.

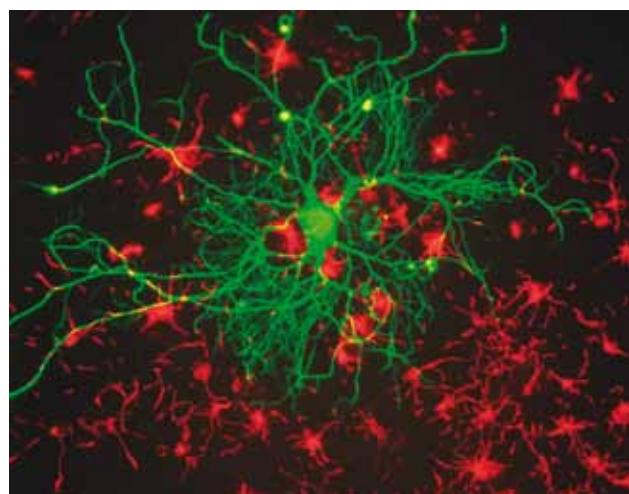


Figura 9. Imagen microscópica de la neurona. Imagen original: Neuron.jpg, tomada de US Federal (dominio público), rediseñada por el usuario Dhp1080. Fuente: <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Neurona.svg?uselang=es>.

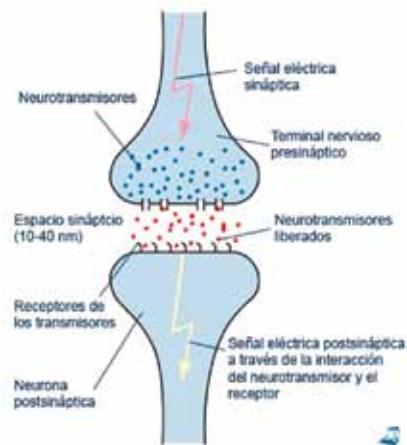


Figura 10. Esquema de una sinapsis entre dos neuronas.

(espacio intermedio entre esta neurona transmisora y la neurona postsináptica o receptora). Estas sustancias segregadas o neurotransmisores son los encargados de excitar o inhibir la acción de la otra célula llamada célula post sináptica.

¿CÓMO SE TRANSMITE EL IMPULSO NERVIOSO? EL MODELO DE HODGKIN Y HUXLEY

Siguiendo las ideas de Cajal, **Hodgkin** y **Huxley** (figura 12 a y b) llevaron a cabo experimentos en 1952 con el axón gigante del calamar y encontraron tres tipos diferentes de corrientes de iones, a saber: sodio (Na^+), potasio (K^+), y una corriente de fuga que se compone principalmente de iones de cloro (Cl^-). El flujo de los iones a través de la membrana celular lo controlan canales iónicos específicos en forma de poros, uno para el sodio y otro para el potasio.

El modelo de Hodgkin y Huxley puede ser comprendido con la ayuda de la figura 12a. La membrana celular semi-

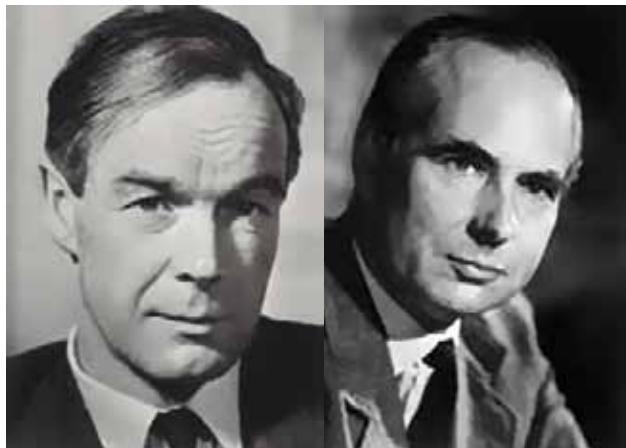


Figura 11: En el año 1952, Alan L. Hodgkin (1914-1008) y Andrew F. Huxley (1917-2012) determinaron las leyes del movimiento de los iones en las células nerviosas durante un pulso de potencial. Formularon un modelo matemático para explicar el comportamiento de las células nerviosas de un calamar gigante. Recibieron por ello el premio Nobel en Fisiología y Medicina en 1963. Imágenes obtenidas de http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/medicine/laureates/1963/.

permeable separa el interior de la célula del líquido extracelular y actúa como un condensador. Si una corriente eléctrica de entrada $I(t)$ se inyecta en la célula, se puede añadir carga adicional en el condensador, o fugar a través de los canales de la membrana celular. Debido al transporte activo de iones a través de la membrana celular, la concentración dentro de la célula es diferente de la que hay en el líquido extracelular. El potencial eléctrico generado por la diferencia en la concentración de iones a ambos lados de la membrana se puede entender como una batería capaz de producir fuerzas electromotrices.

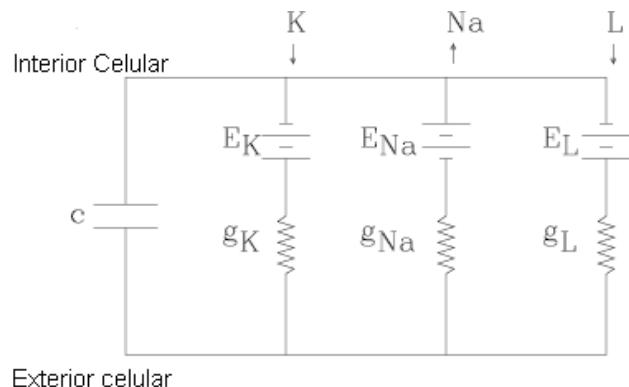


Figura 12a. Esquemas de circuitos eléctricos del modelo de Hodgkin y Huxley. El circuito atraviesa la membrana. Autor: Marco Fontelos.

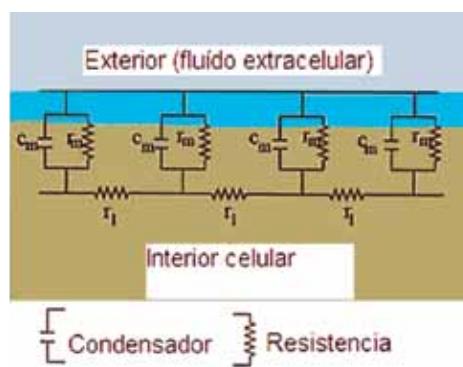


Figura 12b. Esquemas de circuitos eléctricos del modelo de Hodgkin y Huxley. Los circuitos son acoplados a lo largo del axón mediante conexiones de resistencia. Autor: Marco Fontelos.

Vamos ahora a traducir las consideraciones expuestas en ecuaciones matemáticas. La conservación de la carga eléctrica en un trozo de membrana implica que la corriente aplicada $I(t)$ se puede dividir en una corriente capacitiva I_c que carga el condensador C y otras componentes I_k que pasan a través de los canales iónicos. Así

$$I(t) = I_c(t) + \sum_k I_k(t)$$

donde la suma se extiende sobre todos los canales iónicos. En el modelo de Hodgkin y Huxley sólo hay tres tipos de canales: un canal de sodio con índice Na, un canal de potasio con índice K y un canal de fuga con una resistencia R (figura 12a). De la definición de una capacidad $C = Q/V$ donde Q es la carga y V el voltaje a través del condensador, se encuentra la corriente de carga $I_c = C dV/dt$. Por tanto,

$$C \frac{dV}{dt} = I_c(t) + \sum_k I_k(t)$$

En términos biológicos, V es el voltaje a través de la membrana y el último término a la derecha es la suma de las corrientes iónicas que pasan a través de la membrana celular. Como se mencionó anteriormente, el modelo de Hodgkin y Huxley describe tres tipos de canales. Todos los canales se pueden caracterizar por su resistencia o, equivalentemente, por su conductancia. El canal de fuga se describe por una conductancia $g_L = 1/R$ (siendo R la resistencia). De modo análogo, se introducen las conductancias de los otros canales iónicos.

Si los canales están cerrados, la concentración de iones sodio en el exterior es mayor que en el interior de la célula, mientras que la de potasio es menor fuera que dentro de la célula. Si todos los canales están abiertos, se transmiten corrientes con una conductancia máxima, pero normalmente algunos de los canales están bloqueados. La fracción de canales bloqueados decrece cuando el potencial crece por encima de un cierto umbral pero, en el caso de los canales de sodio termina creciendo cuando el potencial es suficientemente grande. Si se induce inicialmente un aumento de potencial a través de la membrana, entonces una fracción de los canales de sodio se abre y más iones de sodio entran en la célula aumentando la diferencia de potencial a través de la membrana, lo que estimula la

apertura de nuevos canales. Este proceso para cuando el potencial ha crecido a unos 100 milivoltios. En ese momento, los canales de sodio empiezan a cerrarse, y los de potasio se abren para dejar pasar los iones de potasio de dentro de la célula hacia afuera. Esto disminuye el potencial a través de la membrana y lo termina restaurando a su valor en ausencia de estímulo. El resultado es un pulso de unos 100 mV de amplitud con una duración de 1 ms.

Este fenómeno, que se produce en una porción de la membrana, se transmite a zonas adyacentes debido al movimiento de iones por difusión. Este movimiento induce diferencias de potencial en zonas vecinas de la membrana de manera que, si está combinada con una fracción significativa de poros abiertos (lo que ocurre solo en la dirección en la que la membrana no ha sido excitada anteriormente), produce el pulso en la zona adyacente y, por tanto, la propagación del mismo en la dirección del eje del axón. El proceso se puede ver como una familia de circuitos como los descritos anteriormente, acoplados a lo largo de la membrana mediante conexiones con resistencia r_p , tal como muestra la figura 12b.

VELOCIDAD DE PROPAGACIÓN DEL IMPULSO NERVIOSO Y EFECTOS DE LA DESMIELINIZACIÓN

Muchas enfermedades neurológicas, como la esclerosis múltiple, tienen su origen en la degradación de la capa de **mielina** que recubre los axones. Las capas de mielina son, en algunos de estos casos patológicos, atacadas por el sistema inmune. Una vez que la capa de mielina empieza a degradarse, el axón pierde espesor y la velocidad de propagación del impulso nervioso disminuye. Más grave que eso es el hecho de que la mielina deja de distribuirse uniformemente a lo largo del axón, alternando regiones con alta velocidad y regiones con baja velocidad. Esto da lugar a efectos de reflexión y refracción del impulso nervioso. Es análogo a lo que ocurre cuando iluminamos la superficie del agua con una linterna: debido a la diferencia de velocidades de propagación de la luz en el aire y

en el agua, parte de la luz que llega al agua se refleja en la superficie y parte se transmite cambiando de dirección. El efecto en una neurona es una degradación de la señal e, incluso, reflexión de parte de la misma. Las consecuencias de estos defectos en la transmisión repercuten en pérdidas de eficiencia en la activación de los músculos y, en los casos más graves, en parálisis.

Para estudiar este fenómeno, comencemos haciendo una estimación de la velocidad a la que se propaga el impulso nervioso. Para ello, recordemos que la velocidad es espacio recorrido por unidad de tiempo. Es decir, la velocidad v viene dada por

$$v = \frac{\lambda}{T}$$

donde λ es longitud recorrida y T es el tiempo empleado en recorrerla. La longitud que recorre la señal será tanto menor cuanto mayor sea la resistencia del citoplasma; es decir, λ será inversamente proporcional a la resistencia r_l . Por otra parte, como el potencial de acción de un segmento del axón es el que proporciona la corriente de despolarización para los segmentos adyacentes, el tiempo T será proporcional al tiempo que tarda la membrana en descargarse. En un condensador, dicho tiempo es proporcional a su capacidad C_m . Por tanto, la velocidad será proporcional a

$$v_c = \frac{1}{r_l C_m}$$

Aunque este cálculo no nos permite estimar exactamente la velocidad a la que se propaga el impulso nervioso, sí nos da información sobre cómo aumentar o disminuir dicha velocidad.

En primer lugar, si suponemos que el axón es un cilindro conductor, tendremos que la resistencia es inversamente proporcional a la sección transversal, es decir, r_l será inversamente proporcional al cuadrado del radio del axón. Por otra parte, la capacidad C_m de la membrana será proporcional a su área, que a su vez es proporcional al radio del axón. El resultado neto es una velocidad de propagación proporcional a

$$\frac{1}{a^2 a} = a$$

siendo a el radio del axón. En consecuencia, conseguiremos una rápida velocidad de propagación aumentando el radio del axón. Eso es lo que hace, por ejemplo, el calamar gigante: ¡su axón tiene un diámetro de hasta 1 mm! De esta forma, puede alcanzar velocidades de propagación de unos 100 m/s. El problema es que axones con diámetros grandes suponen un volumen también grande (proporcional al cuadrado del radio del axón), así como un elevado gasto energético para mantenerlos funcionales, y eso impide que haya un gran número de neuronas en un volumen dado. Los axones humanos tienen un radio mucho menor, lo que nos permite tener un gran número de neuronas (e inteligencia, por tanto). Nuestros impulsos nerviosos deberían ser también mucho más lentos, pero usamos un truco que los acelera hasta 100 veces y nos permite también una velocidad de unos 100 m/s, basado en una idea muy sencilla a partir de la fórmula para la capacidad de un condensador plano:

$$C_m = \frac{\epsilon A}{d}$$

siendo ϵ la constante dieléctrica de la membrana celular, A el área de las placas del condensador (las caras interna y externa de la membrana) y d la distancia entre placas (espesor de la membrana). Si aumentamos d ensanchando la membrana o recubriendola de alguna sustancia de propiedades físicas parecidas, conseguiremos disminuir la capacidad y, con ello, aumentar la velocidad. Esto se consigue mediante una sustancia rica en lípidos producida por las células de Schwann y llamada mielina. Las capas de mielina rodean uniformemente el axón y consiguen aumentar la capacidad hasta 100 veces. Y la velocidad, por tanto, en la misma cantidad. Por tanto, la disminución de mielina reduce la velocidad de propagación del impulso nervioso, lo que puede derivar incluso en parálisis.

Otra causa de pérdida de eficiencia en la transmisión de las señales es la obstrucción de los axones al movimiento de sustancias químicas. Es el caso de la esclerosis lateral amiotrófica (ELA) en la que se produce acumulación anormal de neurofilamentos hiperfosforilados en el soma neuronal y en los axones.

Otro desorden neurológico es la enfermedad de Parkinson. En este caso, falla la transmisión sináptica entre

neuronas por falta de un neurotransmisor: la dopamina.

Finalmente, hay otra familia de enfermedades, como la enfermedad de las vacas locas o el Alzheimer, en las que, según se teoriza, se produce directamente la muerte neuronal por la acción de proteínas "defectuosas" llamadas priones. En este caso, sería la geometría de dichas proteínas la culpable de la enfermedad.

MATERIALES AUXILIARES

LIBRO

Bender, E. A. (1978): *An introduction to mathematical modeling*. Mineola, New York: Dover Publications, col. Dover Books on Computer Science.

Es un libro sobre modelización matemática con numerosos ejemplos de nivel asequible para un estudiante de secundaria y que además incluye algunos ejemplos relacionados con biología matemática como la estimación de las dimensiones de los seres vivos o del número de vasos capilares, mediante máximos y mínimos.

PÁGINAS WEB

<http://neurociencias.udea.edu.co/neurokids/>. Esta web ofrece una extensa colección de recursos en español sobre neurología.

<http://faculty.washington.edu/chudler/experi.html>. En este enlace se explican experimentos relacionados con la neurona que se pueden hacer en un aula (en inglés).

PELÍCULAS

Philadelphia (Jonathan Demme, 1993). Un abogado, tras ser despedido por su empresa por ser portador del virus del sida, lucha por cambiar la imagen que se tiene sobre esta enfermedad.

Amor y otras drogas (Edward Zwick, 2010). Esta comedia amorosa trata el tema de la enfermedad de Parkison.

SERIE

House (David Shore, 2004). Serie de televisión sobre médicos, protagonizada por Hugh Laurie y centrada en el equipo de diagnóstico.

MATERIAL AUDIOVISUAL

<http://www.cancerquest.org/es/cancer-biology-animations.html>. Esta página incluye una colección de vídeos en español sobre cáncer.

<http://www.rtve.es/television/20100114/serie-sobre-ramon-cajal/312241.shtml>. Vídeos de la serie Ramón y Cajal, sobre la vida y obra del científico español.

PODCAST DE RADIO

"Keeping the beat". *Mathematical Moments*, AMS. Podcast de radio para el programa *Momentos matemáticos* de la Sociedad Americana de Matemáticas acerca del uso de las matemáticas para entender el funcionamiento del corazón. Disponible en <http://www.ams.org/samplings/mathmoments/mm91-heartbeat-podcast>.

EL GENOMA HUMANO

Enrique Macías Virgós y Antonio Gómez Tato

2.5

Objetivos, contenido y criterios de evaluación de acuerdo con los Reales Decretos de Enseñanzas Mínimas, (1467/2007 de 2 noviembre para Bachillerato y 1631/2007 de 29 de diciembre para Educación Secundaria Obligatoria).

Este capítulo está dedicado a la bioinformática, disciplina científica que utiliza técnicas de computación, inteligencia artificial, minería de datos y matemáticas para analizar las secuencias del genoma humano, estudiar su estructura, determinar sus genes, ver cuáles de ellos son funcionales e identificar esa función. También relaciona los genes humanos con los encontrados en el estudio del genoma de otras especies.

Las nociones matemáticas que se emplean en bioinformática son múltiples y variadas. Muestran la ubicuidad y potencialidad del conocimiento matemático, su poder para hacer el mundo inteligible y su capacidad transformadora. En este capítulo se presentan algunas de las herramientas básicas, de interés tanto para estudiantes que se orienten a los grados de Ciencias de la Salud como para aquellos otros que estén interesados en las ramas técnicas y de la Ingeniería, aunque ha de considerarse que casi todos estos contenidos son de nivel superior al de bachillerato.

La cantidad de datos biológicos listos para analizar en el estudio del genoma humano parece inagotable. Este procesamiento se puede considerar como el mayor reto científico del siglo XXI y el impacto de este proyecto en la opinión pública y en diversos sectores científicos, técnicos, económicos y políticos es comparable con el de la física a comienzos del siglo XX.

El objetivo central de la bioinformática es establecer la secuencia de una molécula de ADN, es decir, determinar el orden en el que en ella aparecen los distintos pares de bases, lo que se denomina secuenciar la molécula. Pero para ello hay que romper varias de sus copias en millones de trozos más pequeños, y luego ensamblarlos como si fuese un gi-

gantesco puzzle. El problema de ensamblar todas estas pequeñas piezas se resuelve con ayuda de la teoría de grafos. Se dividen las piezas en trozos más pequeños, con lo que se genera un inmenso grafo. Los grafos escogidos son grafos dirigidos, que representan solapamientos entre sucesiones de símbolos. Sobre el grafo se buscan ciclos eulerianos (caminos que empiezan y terminan en un mismo vértice y recorren una sola vez todas las aristas) como guía para el ensamblaje.

Para el alineamiento de secuencias se sigue la programación dinámica, que consiste en subdividir un problema en pequeños problemas, encontrar la solución de los mismos y luego recomponer. El alineamiento de dos secuencias puede ser local o global, lo cual da lugar al empleo de distintas técnicas y algoritmos.

También en este capítulo se describe el plegamiento (proceso por el que una proteína adquiere una estructura tridimensional), de la que depende su función biológica. La secuencia de aminoácidos de una proteína determina su estructura tridimensional.

Además se describen otras técnicas de apoyo para la bioinformática como la búsqueda en las bases de datos genómicas. Para almacenar de manera eficiente la información, cada vez que un laboratorio obtiene una secuencia nueva, se buscan secuencias similares que puedan estar anotadas y de las que se posea información biológica relevante sobre su función; de ahí se puede deducir la función de la nueva secuencia si la base está bien conformada. Por otro lado, se ejemplifican el uso de la estadística en los estudios de asociación y el empleo de métodos de geometría algebraica en el campo de la filogenética.

INTRODUCCIÓN

La secuenciación del genoma humano es uno de los grandes logros de la humanidad, pero queda mucho camino hasta desentrañar cómo se interrelacionan los datos obtenidos. Para extraer información útil de cantidades tan grandes de datos se utiliza la minería de datos, con métodos de la inteligencia artificial, aprendizaje automático, estadística, computación y sistemas de bases de datos. Este tema, junto con el problema de la topología del plegamiento de proteínas, el uso práctico de los conocimientos adquiridos y algunas de las repercusiones en otras ciencias afines, es desarrollado en este capítulo.

El aumento de la capacidad de secuenciación y la mejora de la instrumentación científica, junto con la universalización de Internet y el desarrollo de grandes bases de datos públicas, han puesto a disposición de los científicos de todo el mundo una ingente cantidad de datos biológicos listos para ser analizados.

Como es habitual, el análisis de estos datos necesita más tiempo y recursos humanos que los necesarios para generarlos, y en esa tarea están involucrados investigadores de muy diferentes perfiles, que van desde matemáticos a biólogos pasando por ingenieros, químicos e informáticos, entre otros. La tarea no ha hecho más que empezar y se puede describir como el mayor reto científico del siglo XXI.

EL PROYECTO DE SECUENCIACIÓN DEL GENOMA HUMANO

El 15 de febrero de 2001 la revista científica *Nature* (figura 1) publicó los primeros análisis de las secuencias del genoma humano generadas por el International Human Genome Sequencing Consortium [<http://www.genome.gov/11006939>], un consorcio que incluía a cientos de científicos de 20 centros de secuenciación en Alemania, China, Estados Unidos, Francia, Gran Bretaña y Japón. Al

día siguiente, la revista *Science* (figura 2) publicó el borrador del genoma humano obtenido por la compañía privada Celera Genomics [<https://www.celera.com/>].

Sin embargo, hubo que esperar hasta abril de 2003 para obtener un genoma descifrado con suficiente calidad, coincidiendo con el 50 aniversario de la publicación del



Figura 1. Portada de la revista Nature anunciando "el genoma humano".

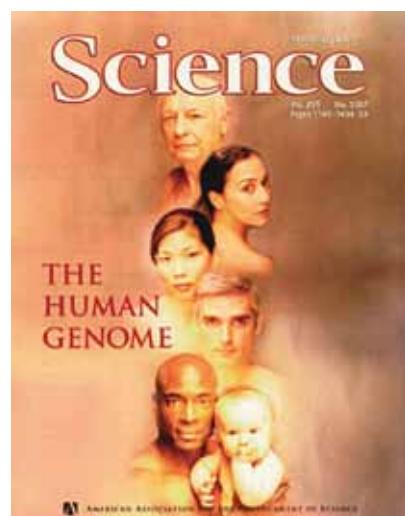


Figura 2. Portada de la revista *Science* anunciando "el genoma humano". Autora: Ann Elliott Cutting.

artículo donde James Watson y Francis Crick –premiados con el Nobel en 1962– describían la estructura de doble hélice del ADN.

El proyecto de secuenciación del genoma humano comenzó en 1991 con un presupuesto de 3.000 millones de dólares y la esperanza de obtener una primera versión en el año 2005. Se consiguió con dos años de adelanto y un coste de 2.700 millones de dólares. Su culminación marcó un hito importante en la revolución científica que desde hace décadas se viene produciendo en la biología, solo comparable con la de la física a comienzos del siglo XX.

LA BIOINFORMÁTICA: UNA DISCIPLINA CIENTÍFICA SURGIDA DE LA NECESIDAD

El genoma humano no fue el primero en ser descifrado. En 1977 se obtuvo el del bacteriófago *Phi-X174*, que tiene un genoma de cadena única con 5.386 bases que codifican once proteínas.

El primer genoma de un eucariota fue el de la levadura (*Saccharomyces cerevisiae*), que se obtuvo en 1996. Se trata ya de ADN de doble cadena organizado en 16 cromosomas con aproximadamente 12 millones de pares de bases y unos 6.000 genes. En 1998 se secuenció el de un gusano (*Caenorhabditis elegans*) y en el año 2000 el de la mosca del vinagre (*Drosophila melanogaster*). Desde entonces se están desarrollando multitud de proyectos de secuenciación de genomas.

Cualquier proyecto de secuenciación conlleva un arduo trabajo; establecer la secuencia del genoma es solo el primer paso. Hay que estudiar su estructura, determinar sus genes, ver cuáles son funcionales e identificar esa función, relacionarlos con los genes encontrados en otras especies, etcétera. Todo ello forma parte de la tarea de una nueva disciplina científica, conocida como bioinformática, que utiliza técnicas de computación, inteligencia artificial, minería de datos y matemáticas.

DE LAS “LECTURAS” A LA SECUENCIA DEL GENOMA

Secuenciar una molécula de ADN es determinar el orden en el que aparecen en ella los distintos pares de bases (bp). Este proceso se realiza de forma automática con unos instrumentos científicos llamados secuenciadores que solo pueden leer moléculas pequeñas de ADN. Para secuenciar un genoma hay que romper varias copias del mismo en millones de trozos más pequeños, para secuenciarlos y luego ensamblarlos como si fuese un gigantesco puzzle.

Los secuenciadores actuales son mucho más rápidos que los utilizados en el proyecto del genoma humano; pero la longitud de sus lecturas es más pequeña y esto obliga a trabajar con muchas más piezas a la hora de ensamblar. Por ejemplo, para el genoma humano la empresa Celera (figura 3) ensambló 27.271.853 piezas (que a partir de ahora llamaremos lecturas), con una longitud media de 545 bp por lectura, provenientes del ADN de cinco individuos, lo que hace un total de 15Gb para un genoma de 3Gb; es decir, una cobertura del 5x. En 2010 el proyecto del genoma del oso panda gigante



©2010, Illumina Inc. All rights reserved.

Figura 3. Un secuenciador de la marca Illumina. Algunos secuenciadores automáticos permiten secuenciar un genoma humano con una cobertura del 30x en un día. Imagen por cortesía de Illumina, Inc.

ensambló 3.400 millones de lecturas con una longitud media de 50 bp, lo que da unos 176Gb para un genoma de 3.4Gb; es decir, una cobertura del 76x.

UNA APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE GRAFOS

¿Cómo se puede ensamblar un puzzle con tantas piezas y tan pequeñas? La respuesta es un ejemplo de cómo un resultado de matemática pura puede ser utilizado muchos años después para resolver un problema tecnológico.

En 1736, el matemático Leonhard Euler resolvió el problema de los siete puentes de Königsberg, una cuestión bien distinta de la que nos ocupa. En esta ciudad prusiana (ahora llamada Kaliningrado, en Rusia), había siete puentes y un antiguo problema consistía en saber si era posible atravesarlos todos sin pasar dos veces por el mismo puente. Euler esquematizó el plano de la ciudad mediante un grafo en el que las aristas eran los puentes y los vértices eran las partes de la ciudad (figura 4). Un camino que empieza y termina en un mismo vértice y recorre una sola vez todas las aristas se llama ahora un *ciclo euleriano*. El mismo Euler demostró que para que existan ciclos eulerianos es necesario (y suficiente) que todos los vértices tengan grado par (el grado de un vértice es el número de aristas que inciden en él). Un grafo con esa propiedad se denomina euleriano. Como el grafo de Königsberg no es euleriano,

es imposible atravesar todos los puentes sin repetir alguno.

Aunque no lo explicaremos con detalle, las ideas de Euler se aplican hoy en día para resolver el problema del ensamblaje. Lo primero que se hace puede resultar extraño, pues se dividen las piezas (ya de por sí pequeñas) en trozos más pequeños. Con esto se genera un inmenso grafo de De Bruijn –un grafo orientado que representa solapamientos entre sucesiones de símbolos (figura 5)– sobre el que se buscan *ciclos eulerianos* como guía para el ensamblaje.

Grafo de De Bruijn N=2, K=3

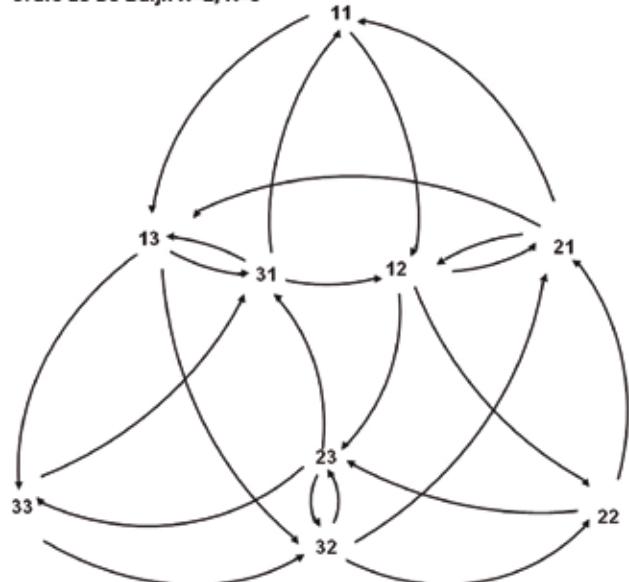


Figura 5. Los grafos de De Bruijn se usan para ensamblar de novo un genoma.

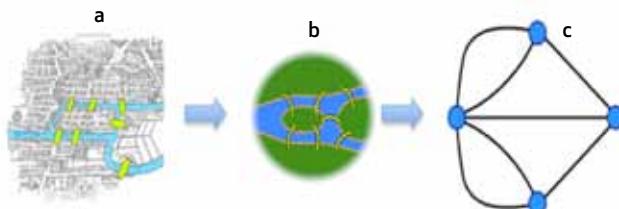


Figura 4. El problema de los puentes de Königsberg puede esquematizarse en un grafo. Figura 4 a. Autor: Bogdan Giușcă. Fuente: <http://en.wikipedia.org/wiki/File:Konigsberg.bridges.png>. Figura 4 b. Fuente: http://en.wikipedia.org/wiki/File:7_bridges.svg. Figura 4 c. Fuente: <http://en.wikipedia.org/wiki/File:Kongsburg.graph.svg>.

LA PROGRAMACIÓN DINÁMICA PARA EL ALINEAMIENTO DE SECUENCIAS

El ADN y el ARN son los principales ácidos nucleicos que se encuentran en una célula. El primero contiene la información hereditaria y el segundo permite el

transporte de la información del ADN para que la célula pueda sintetizar las proteínas, entre otras funciones. Este mecanismo de transferencia de información se suele denominar *el dogma central de la biología molecular*: el ADN se transcribe en ARN mensajero, que a su vez se traduce en una proteína. Por ello, para estudiar un organismo nos interesa conocer, además de su *genoma*, su *transcriptoma* (colección de todas las secuencias de ARN que se producen) o su *proteoma* (colección de todas sus proteínas).

Es habitual (y muy conveniente) esperar a tener suficiente información del transcriptoma y del proteoma de un organismo antes de comenzar con la secuenciación de su genoma. Las distintas secuencias de un organismo que se obtienen en estos estudios se comparan con las ya conocidas en otras especies cercanas para así poder deducir su función o su estructura (en el caso de proteínas).

Según la teoría de la evolución, las secuencias de un mismo gen en especies no muy distantes evolutivamente (por ejemplo, hombre y gorila) deberían ser similares. La tarea más frecuente en bioinformática es la comparación de secuencias para buscar similitudes entre ellas. La manera más habitual de comparar dos secuencias es alinearlas, de manera que tengamos el mayor número de coincidencias posible.

Algo muy parecido se hace en lingüística. Pensemos en las palabras puerto (español) y porto (portugués), ambas derivadas del término *portus* en latín. Para alinearlas necesitamos introducir un hueco en el término portugués, que indica una transformación del fonema o en el diptongo ue en español. P-orto y puerto.

PROGRAMACIÓN DINÁMICA

Dadas dos secuencias, por ejemplo:

ATAAACAATCAAAGAGCATGTTGCCCTGGCCTTT
GCTAGGTACTG,
GATTAGACCCTCCAAGTGAAGGAGGGCAGGGGA
GGGGGACAGCGAGCCA

¿Cómo podemos encontrar el mejor alineamiento? A primera vista la respuesta es muy fácil: establecemos un sistema de puntuación que nos permita calificar cada posible alineamiento y nos quedamos con la opción que obtenga la mejor nota. El problema es que ¡hay demasiados alineamientos posibles! Dadas dos secuencias de longitud 100 existen aproximadamente unos 2×10^{78} alineamientos distintos.

Por tanto, hay que recurrir a algún método que nos dé el mejor alineamiento (o al menos uno de los mejores) en un tiempo razonable. El método más utilizado en biología molecular es el *algoritmo de Needleman-Wunsch*, cuya idea fundamental es buscar alineamientos óptimos de subsecuencias más pequeñas y luego reconstruir el alineamiento óptimo global a partir de ellas. La idea original (subdividir el problema en pequeños problemas, encontrar la solución de los mismos y luego

Richard E. Bellman (1920–1984) fue un matemático que estudió en las universidades de Brooklyn y de Wisconsin. Trabajó en el Laboratorio Nacional de Los Álamos en el campo de la física teórica y en 1946 se doctoró en Princeton. En 1979 el IEEE (Institute of Electrical and Electronics Engineers) le otorgó su Medalla de Honor por su contribución a la teoría de los sistemas de control y de los procesos de decisión, en especial por la programación dinámica y la llamada ecuación de Bellman.

El alineamiento de dos secuencias puede ser local o global. El ejemplo siguiente pretende aclarar ambos conceptos.

Si queremos alinear las palabras BAJO-RRELIEVE y ALTIBAJO nos damos cuenta de que solo hay un trozo de ambas que tiene sentido alinear (*bajo*), por lo que tenemos un alineamiento local. En cambio, si queremos alinear oportunidad con la palabra francesa equivalente *opportunité*, para ver cómo ha sido su evolución desde la palabra latina *opportunitas*, lo mejor es hacer un alineamiento global de las dos palabras.

La idea principal en ambos casos es asociar a cada alineamiento posible una puntuación y quedarse con el alineamiento que tiene la mejor puntuación. El problema es que el número de alineamientos crece muy rápidamente a medida que aumentan las longitudes de las secuencias. Hay diversos procedimientos para hacerlo, los más populares son el algoritmo de Needleman-Wunsch para alineamiento global y el de Smith-Waterman para alineamiento local. También puede usarse BLAST para hacer alineamiento de secuencias.

recomponer) es del matemático Richard Bellman, quien la introdujo en el año 1953; esta técnica es conocida como *programación dinámica*.

EL ALGORITMO DE NEEDLEMAN-WUNSCH

Estudiaremos este algoritmo sobre un ejemplo. Alinearemos las palabras RADIX y RAIZ.

Paso 1. El sistema de puntuación. Lo primero que se necesita es establecer un sistema de puntuación que nos permita calificar cada posible alineamiento.

Por ejemplo:

Coincidencia de letra = 2 puntos; No coincidencia = -1 punto; un hueco = -2 puntos

Así, al siguiente alineamiento

RADIX

RAIZ-

le corresponderían $2+2-1-1-2 = 0$ puntos.

Paso 2. El algoritmo. Creamos una tabla con las dos palabras que queremos alinear. Para empezar, en la primera casilla, empezando por la esquina superior izquierda, ponemos un cero (tabla a).

-	R	A	D	I	X	
-	0	-2	-4	-6	-8	-10
R	-2	2	0	-2	-4	-6
A	-4	0	4	2	0	-2
I	-6	-2	2	3	4	2
Z	-8	-4	0	1	2	3

Tabla a: Primeros movimientos en el algoritmo de Needleman-Wunsch.

Ahora vamos a ir rellenando el resto de las casillas, avanzando paso a paso. Cada movimiento que hagamos significará que vamos completando letra a letra cada palabra. Por ejemplo, si desde la casilla 0 de la esquina nos movemos en horizontal a la derecha, quiere decir que vamos a comparar las palabras (de una letra) "R" y "-". Este alineamiento tiene una puntuación de -2, que anotamos. Cualquier movimiento en horizontal significará que añadimos una letra en la primera palabra y un hueco en la segunda. Así al desplazarnos otra vez a la

derecha estaremos comparando las palabras "RA" y "--", alineamiento que tiene una puntuación de -4.

Del mismo modo, un movimiento en vertical querrá decir que insertamos un hueco en la primera palabra y una letra en la segunda. Por ejemplo, si desde la casilla de la esquina que tenía un 0 bajamos en vertical tres casillas, significará que estamos comparando las palabras "---" y "RAI". Este alineamiento tiene una puntuación de -6.

Finalmente, si avanzamos en diagonal (hacia la derecha y hacia abajo) significa que añadimos una letra en cada palabra. Por ejemplo, si desde la casilla del 0 descendemos en diagonal significará que estamos comparando las palabras "R" y "R", alineamiento que tiene una puntuación de 2.

A partir de ahí, iremos llenando la tabla. Pero debemos tener en cuenta que se puede llegar a cada casilla de varias maneras, por lo que en cada caso anotaremos el movimiento de llegada (de izquierda a derecha, de arriba a abajo o en diagonal) que nos dé la mayor puntuación.

Por ejemplo, veamos cómo hemos obtenido el 2 que está señalado en rojo en la Tabla A. Llegar a esa casilla desde arriba significa que en la primera palabra teníamos "R" y hemos añadido un hueco, mientras que en la segunda palabra teníamos "—" y hemos añadido una letra. Por tanto estamos comparando las palabras "R-" y "-R", lo que nos daría -4 puntos. Otra manera de llegar es desde la izquierda: en la primera palabra teníamos "-" y hemos añadido una letra; en la segunda palabra teníamos "R" y hemos añadido un hueco (movimiento horizontal). Así que estamos comparando las palabras "-R" y "R-", lo que nos vuelve a dar -4 puntos. Finalmente si llegamos "en diagonal" significa que avanzamos una posición en ambas palabras. Estamos comparando "R" con "R", es decir, al 0 que teníamos le hemos añadido una coincidencia, por lo que sumamos 2 puntos a la puntuación de la casilla de la que venimos y tenemos una puntuación total de 2 puntos. De los tres movimientos el de mayor puntuación es el diagonal (2 puntos), por lo que anotamos en la tabla los puntos (2) y también tomamos nota de la dirección (diagonal) en la que hemos venido (tabla b).

Con un poco de práctica puede avanzarse más rápido. Por ejemplo, pasar de la casilla con el 2 en rojo a la casilla de su derecha supone añadir una "A" en la primera palabra

y un "-" en la segunda, lo que significa que tenemos que restar 2 puntos a los que teníamos, obteniendo un 0. Si a esta casilla del 0 hubiésemos llegado en vertical desde la que tiene un -4, estaríamos añadiendo un "--" y una "A", lo que resta dos puntos más y quedarían -6. Llegando en diagonal, al -2 habría que restarle 2 puntos, ya que hemos añadido la no coincidencia "A" y "R", y tendríamos -4. Por tanto la mejor puntuación para esa casilla es 0, y el movimiento de llegada es horizontal.

Así continuamos con el proceso hasta llenar toda la tabla.

Paso 3. Nos fijamos en la última puntuación obtenida, que es el 3 marcado en azul de la casilla de abajo a la derecha. En esa casilla tenemos anotado que hemos llegado en diagonal, por lo que desandamos el camino. Repitiendo el proceso siguiendo las indicaciones obtenemos una secuencia de flechas (tabla b). Esta secuencia nos indica el alineamiento óptimo: en la primera palabra hemos ido añadiendo letras, mientras que en la segunda palabra hemos insertado un hueco después de la A (movimiento horizontal). Así encontramos que el mejor alineamiento es:

RADIX
RA-IZ

con una puntuación de 3.

	R	A	D	I	X
0	-2	-4	-6	-8	-10
R	-2	Diag	Izq	Izq	Izq
A	-4	Arr	Diag	Izq	Izq
I	-6	Diag	Arr	Diag	Diag
Z	-8	Arr	Arr	Diag	Diag

Tabla b. Tercer paso para el alineamiento de las palabras RADIX y RAIZ según el algoritmo de Needleman-Wunsch.

BASES DE DATOS

Los científicos del genoma buscan analogías entre diferentes especies, partiendo de la base de que todas tienen una base evolutiva común y, por otra parte, buscan diferencias dentro de una especie que expliquen la biodiversidad. La información sobre el genoma humano y de otras especies de animales y plantas se almacena en bases de datos. Gracias a esta información los investigadores pueden consultar lo que otros científicos han descubierto.

Una de las grandes tareas de la bioinformática es la de organizar los datos para permitir a los investigadores el acceso a la información y que estos aporten sus propios datos para uso de la comunidad científica internacional.

La mayoría de las secuencias que se obtienen en los laboratorios se depositan en bases de datos accesibles vía Internet. Hay tres grandes bases de datos de acceso libre, que almacenan inmensas cantidades de secuencias, tanto de nucleótidos como de proteínas:

- GenBank, en el NCBI (*National Center for Biotechnology Information*, Estados Unidos) [<http://www.ncbi.nlm.nih.gov/genbank/>];

Crecimiento del GenBank desde su creación

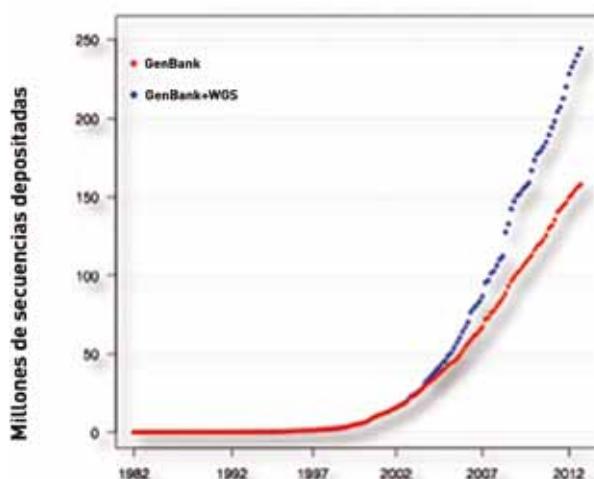


Figura 6. Como podemos apreciar en la gráfica, el crecimiento de GenBank desde su creación es exponencial y se calcula que desde entonces duplica su tamaño aproximadamente cada 18 meses. Fuente: NCBI.

- La base de datos japonesa DDBJ (*DNA Data Bank of Japan*) [<http://www.ddbj.nig.ac.jp/>];
- La base de datos del EMBL (*European Molecular Biology Laboratory*) [<http://www.embl.de/>], en el EBI (*European Bioinformatics Institute*) en Hinxton, Inglaterra.

Las tres intercambian información diariamente y son coordinadas a través de INSDC (International Nucleotide Sequence Database Collaboration). En octubre de 2012 afirmaban tener 145.430.961.262 pares de bases contenidas en 157.889.737 de secuencias en las divisiones habituales, además de unos 86'5 millones de secuencias provenientes de los grandes proyectos de secuenciación de genomas completos (WGS).

La minería de datos intenta extraer información de grandes volúmenes de conjuntos de datos mediante el análisis de patrones y de aglomeraciones de datos (*cluster*), la detección de anomalías y el descubrimiento de interrelaciones ocultas. Utiliza técnicas que van desde la inteligencia artificial (reglas de asociación) hasta la topología algebraica (homología persistente), pasando por los modelos estadísticos.

LA TEORÍA DE PROBABILIDAD AL RESCATE. BLAST, LA HERRAMIENTA DE BÚSQUEDA EN LAS BASES DE DATOS GENÓMICAS

Cada vez que un laboratorio obtiene una secuencia nueva se buscan en las bases de datos secuencias similares con la esperanza de que estén anotadas (tengan información

biológica relevante sobre su función) y de ahí deducir la función de la nueva secuencia.

Esta es una práctica común incluso en la vida diaria. ¡Quién no ha deducido el significado de una palabra desconocida en un idioma ajeno por su similitud con una

BLAST

La herramienta "Basic Local Alignment Search Tool (BLAST)" encuentra regiones de alineamiento local entre secuencias. El programa compara secuencias de nucleótidos o proteínas con las contenidas en las bases de datos y comprueba si las coincidencias halladas son estadísticamente significativas. <http://blast.ncbi.nlm.nih.gov/Blast.cgi>.

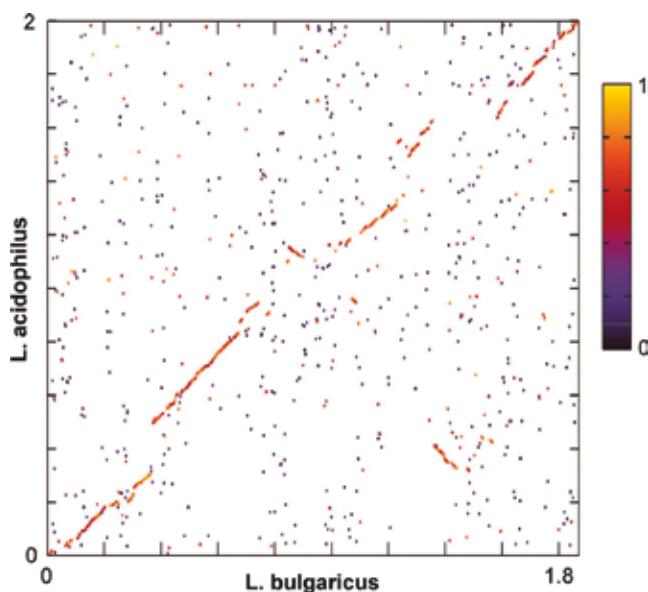


Figura 7. Sintenia (asociación de dos o más genes en un mismo cromosoma) entre los genomas de *Lactobacillus bulgaricus* y *L. acidophilus*. Los ejes representan la posición de los genomas en las respectivas especies. Los colores representan la similitud de proteínas en puntuación BLAST. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0966842X07002053>.

en el propio! Aunque a veces hay que tener cuidado, la palabra francesa *curvature* no significa "curvatura", sino "agujeta" (el término francés apropiado es *courbure*).

Para buscar una secuencia en una base de datos tendríamos que alinearla con todas y cada una de las depositadas en la base, lo que resulta computacionalmente inviable. Por ello es necesario desarrollar algoritmos heurísticos que, aún a costa de no obtener todas las secuencias similares posibles, sean capaces de dar algunas de las más interesantes. De entre este tipo de algoritmos el más utilizado es el BLAST (*Basic Local Alignment Search Tool*).

BLAST se puede considerar como el Google de la investigación en biología, aunque en realidad su desarrollo es anterior. La respuesta es rápida y eficiente pero además viene acompañada de un valor estadístico que nos permite deducir la significación de la coincidencia, es decir hasta qué punto se aleja del puro azar. Los fundamentos matemáticos del algoritmo se basan en los trabajos de dos matemáticos de Stanford, S. Karlin y S. F. Altschul.



Samuel Karlin. © 2007, Lee Altenberg.

Samuel Karlin (1924–2007) fue un matemático americano de origen polaco. Estudió en Chicago y se doctoró en Princeton. Tras unos años en el Instituto de Tecnología de California (Caltech), se convirtió en catedrático de Matemáticas y Estadística en la Universidad de Stanford. Karlin trabajó en Bioinformática y Genética de poblaciones y a principios de los años noventa desarrolló, junto a Stephen Altschul, las bases del programa BLAST. En 1989 recibió la Medalla Nacional de la Ciencia.

EL PROBLEMA DEL PLEGAMIENTO DE PROTEÍNAS. COMPARAR SECUENCIAS DE PROTEÍNAS PARA DETERMINAR SU ESTRUCTURA

No basta con conocer la lista de aminoácidos que componen las proteínas, sino que es esencial determinar su forma tridimensional para entender su función. El bioquímico C. Anfinsen demostró que algunas proteínas desnaturalizadas se podían plegar espontáneamente hasta alcanzar su estructura tridimensional activa (lo que le valió la concesión del premio Nobel de Química en 1972). Esto sirvió para conjeturar que la secuencia de aminoácidos de una proteína determina su estructura tridimensional. Aunque esta conjeta no se estima cierta para cerca del 70% de las proteínas de la naturaleza, dio lugar a uno de los grandes problemas sin resolver de la ciencia actual, el problema del plegamiento de las proteínas.

En las bases de datos de biología molecular no solo hay secuencias de nucleótidos o de proteínas. Aparte de las citadas anteriormente existen numerosas bases de datos que contienen información biológica relevante y que están altamente interconectadas. Una lista seleccionada y catalogada de 1.512 de ellas se puede encontrar en "The NAR online Molecular Biology Database Collection", [<http://www.oxfordjournals.org/nar/database/a/>]. Muchas están integradas en grandes portales bioinformáticos que ofrecen además acceso a numerosas herramientas para el análisis de los datos. Como ejemplo, citaremos el NCBI, EMBL-EBI y EXPASY. Hasta ahora, alrededor del 90% de las estructuras tridimensionales de las proteínas disponibles en los bancos de datos han sido determinadas por cristalografía de rayos X.



Estructura determinada por Marinoni, E. N., et al. en 2012 usando difracción de rayos X. Fuente: European Bioinformatics Institute public databases.

Topología del plegamiento de proteínas

Una proteína es una cadena de aminoácidos. El plegamiento es el proceso por el que una proteína adquiere una estructura tridimensional bien definida, de la que depende su función biológica. Si una proteína no se pliega correctamente será incapaz de cumplir esa función.

El cálculo de la estructura tridimensional de una proteína a partir de su secuencia de aminoácidos es uno de los principales problemas (aún sin resolver) para los investigadores. El uso de métodos de inteligencia artificial para explotar la información existente en las bases de datos de estructuras previamente conocidas está permitiendo obtener buenos resultados en este campo.

Conceptualmente el problema es sencillo: dadas las posiciones de todos los átomos de una proteína (típicamente unas decenas de miles) se podría calcular la energía potencial de la estructura y encontrar la configuración que la minimiza (que se supone es la que alcanza la proteína cuando se pliega). Pero lo que la proteína puede encontrar en pocos minutos, a un computador potente le puede llevar varios años.

Sin embargo, partiendo de la idea de que secuencias similares deberían determinar estructuras similares y

utilizando técnicas de inteligencia artificial, la bioinformática está obteniendo buenos resultados en los últimos años mediante la explotación de la información que se ha ido acumulando en las bases de datos de proteínas, en las que se encuentra la estructura tridimensional de muchas de ellas.

HACIA UNA MEDICINA PERSONALIZADA

Los resultados del Proyecto Genoma Humano son muy importantes para identificar nuevas enfermedades genéticas y desarrollar sistemas de diagnóstico genético y nuevos tratamientos, como la terapia génica, que modifican directamente el genoma de un individuo.

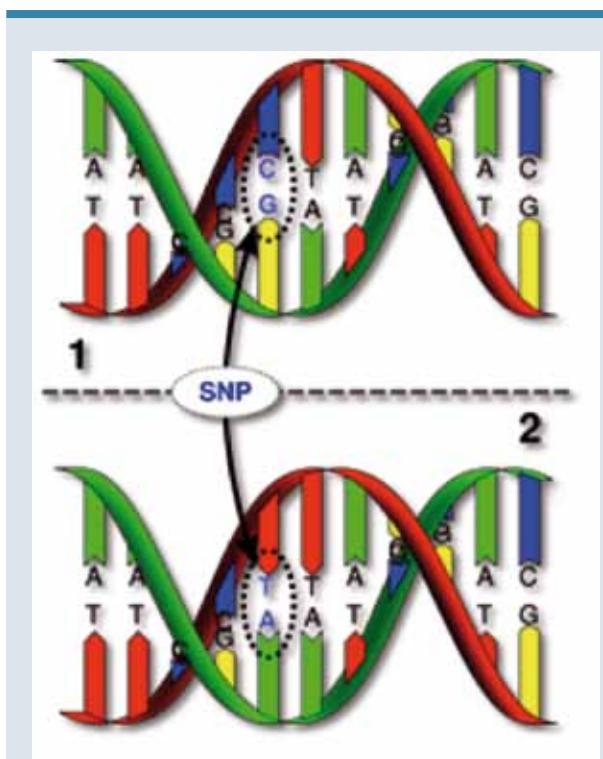
Como todo gran proyecto científico, la secuenciación del genoma humano y la información acumulada, junto con las técnicas desarrolladas en el transcurso del mismo, propician la aparición de numerosas aplicaciones. De entre todas las posibles destacaremos dos, la primera por su importancia y la segunda por el mero interés personal de uno de los autores (A. Gómez Tato).

EL USO DE LA ESTADÍSTICA EN LOS ESTUDIOS DE ASOCIACIÓN

Nuestro genotipo (la información genética que tenemos codificada en el genoma) junto con las condiciones ambientales en las que vivimos determinan nuestro fenotipo, definido como el conjunto de rasgos morfológicos y fisiológicos de nuestro organismo. Entre los humanos no hay dos genomas iguales, es más, incluso los genomas de dos células diferentes de nuestro propio cuerpo casi con toda seguridad no son idénticos. Una diferencia en una posición específica del genoma entre individuos se llama un polimorfismo y las distintas variantes de un polimorfismo se denominan alelos.

Esta variabilidad existente se está utilizando en infinidad de laboratorios dispersos por todo el mundo para estudiar los genes implicados en las diferentes enfer-

medades o por qué la respuesta a un tratamiento difiere de persona a persona. De esta manera se trata de llegar a la medicina personalizada en la que el fármaco suministrado ya no dependería de la enfermedad sino también del genotipo del enfermo. Hay asociaciones que son fáciles de determinar porque dependen de un único gen, como la fibrosis quística, pero la mayoría son multigénicas y se necesitan herramientas estadísticas muy sofisticadas para estudiarlas.



Autor: David Hall. Fuente: <http://en.wikipedia.org/wiki/File:Dna-SNP.svg>.

Los polimorfismos más frecuentes son los de un único nucleótido (por ejemplo, el cambio de una A a una G) que se llaman SNP (single nucleotide polymorphisms; se pronuncia "snips"). En humanos hay en media un SNP cada 1.000 bases en el genoma.

LA POLICÍA CIENTÍFICA UTILIZA EL TEOREMA DE BAYES

Pero el genotipo no solo es útil en medicina o en el estudio del origen del ser humano y su evolución. Por ejemplo, la policía científica y los servicios forenses la usan para responder a diferentes cuestiones criminalísticas. En algunos casos las técnicas matemáticas utilizadas consisten en la simple aplicación del llamado *teorema de Bayes*.

Veamos un ejemplo simplificado de la estimación del origen poblacional de un rastro biológico.

Supongamos que en la escena de un crimen la policía científica ha encontrado un rastro biológico con el genotipo GG TT GT correspondiente a los SNP rs1426654(A:G), rs2814778(C:T) y rs881929(G:T) de los cromosomas 15, 1 y 16 respectivamente. Supongamos además que los sospechosos se dividen en partes iguales entre personas de origen europeo (EUR), africano (AFR) y del Este de Asia (ASI). ¿Podríamos decir cuál es el origen más probable del autor del crimen a partir de su genotipo?

Respuesta: Lo que tenemos que calcular es la probabilidad de que el origen sea europeo (EUR), africano (AFR) o asiático (ASI), condicionada al genotipo encontrado. Aplicando el teorema de Bayes sabemos que:

$$P(\text{EUR}/\text{genotipo} = \text{GGTTGT}) = \frac{P(\text{genotipo} = \text{GGTTGT}/\text{EUR}) * P(\text{EUR})}{P(\text{genotipo} = \text{GGTTGT})}$$

$$P(\text{AFR}/\text{genotipo} = \text{GGTTGT}) = \frac{P(\text{genotipo} = \text{GGTTGT}/\text{AFR}) * P(\text{AFR})}{P(\text{genotipo} = \text{GGTTGT})}$$

$$P(\text{ASI}/\text{genotipo} = \text{GGTTGT}) = \frac{P(\text{genotipo} = \text{GGTTGT}/\text{ASI}) * P(\text{ASI})}{P(\text{genotipo} = \text{GGTTGT})}$$

Como las tres poblaciones tienen el mismo tamaño y solo nos interesa conocer la más probable, el problema se reduce a calcular el primer término de cada uno de los tres numeradores.

Como los SNP están en cromosomas diferentes, podemos suponer que los valores que encontramos son independientes unos de otros, por lo que esas probabilidades se pueden escribir como producto de las probabilidades condicionadas para cada SNP. Es decir:

$$\begin{aligned} P(\text{genotipo} = \text{GGTTGT}/\text{EUR}) &= \\ P(\text{rs1426654} = \text{GG/EUR}) * P(\text{rs2814778} = \text{TT/EUR}) \\ * P(\text{rs881929} = \text{GT/EUR}) \end{aligned}$$

por lo que solo necesitamos conocer para cada caso las probabilidades de los distintos casos de cada SNP. De las bases de datos existentes deducimos que las frecuencias de aparición son las que se observan en la tabla inferior.

Por lo que (suponiendo equilibrio de Hardy-Weinberg en todas las poblaciones)

$$P(\text{rs1426654} = \text{GG/EUR}) = 0.01 * 0.01;$$

$$P(\text{rs1426654} = \text{GG/AFR}) = 0.99 * 0.99;$$

$$P(\text{rs1426654} = \text{GG/ASI}) = 0.98 * 0.98;$$

$$P(\text{rs2814778} = \text{TT/EUR}) = 0.99 * 0.99;$$

$$P(\text{rs2814778} = \text{TT/AFR}) = 0.1 * 0.1;$$

$$P(\text{rs2814778} = \text{TT/ASI}) = 0.9 * 0.9;$$

SNP	EUR	AFR	ASI
s1426654 (alelos A / G)	99% / 1%	1% / 99%	2% / 98%
rs2814778 (alelos C / T)	1% / 99%	90% / 10%	10% / 90%
Rs881929 (alelos G / T)	60% / 40%	97% / 3%	1% / 99%

$$\begin{aligned} P(rs881929 = GT/EUR) &= 2*0.6*0.4; \\ P(rs881929 = GT/AFR) &= 2*0.97*0.03; \\ P(rs881929 = GT /ASI) &= 2*0.01*0.99. \end{aligned}$$

De donde obtenemos:

$$\begin{aligned} P(\text{genotipo} = \text{GGTTGT/EUR}) &= 0.0000470448 \\ P(\text{genotipo} = \text{GGTTGT/AFR}) &= 0.0005704182 \\ P(\text{genotipo} = \text{GGTTGT/ASI}) &= 0.0154029 \end{aligned}$$

Dividiendo por pares vemos que el origen asiático es unas 27 veces más verosímil que el origen africano y 327 veces más verosímil que el europeo, por lo que podemos deducir que el rastro biológico es de origen asiático.

REPERCUSIONES EN OTRAS DISCIPLINAS CIENTÍFICAS AFINES

La ingente cantidad de información molecular que, sobre una gran cantidad de especies, se está generando en la estela de los proyectos de secuenciación genómica está siendo utilizada de manera fructífera en numerosas disciplinas científicas afines. De entre ellas hablaremos de la filogenética y la biología de sistemas, ya que en ambos casos la aportación que está haciendo la matemática pura es muy significativa.

LA TEORÍA DE LA EVOLUCIÓN. LA GEOMETRÍA ALGEBRAICA TIENE ALGO QUE DECIR AL RESPECTO

En biología, la teoría de la evolución de Darwin juega un papel central. La evolución se contempla como un proceso de ramificación desde una especie original, donde las diferentes especies evolucionan hasta llegar a romperse en dos grupos diferenciados que dan lugar a la aparición de nuevas especies. La historia de todo este proceso evolutivo se suele visualizar mediante un árbol de filogenia como el de la figura 10.

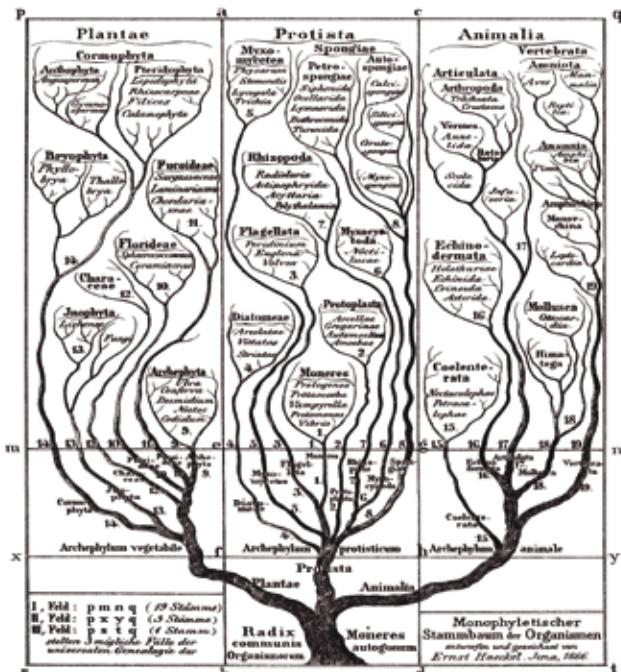


Figura 10. Árbol de la vida realizado en 1866 por Ernst Haeckel (1834-1916), en el que podemos leer el orden en el que hipotéticamente se produce la aparición de las diferentes especies. Fuente: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/bc/Haeckel_arbol.bn.png.

Así, por ejemplo, en el hipotético árbol de la vida los homínidos son una de las ramas más pequeñas (por ser muy reciente su aparición) y el gorila es, según la hipótesis más aceptada, la especie de homínido (existente) más cercana al hombre, en el sentido de que ambas provienen de una especie ancestral que en un momento determinado se dividió, dando lugar a las especies actuales.

Hasta la aparición de la genómica, la reconstrucción del árbol de la vida se hacía principalmente a partir de los caracteres morfológicos o fenotípicos. Hoy en día, el acceso a las secuencias de los diferentes genes en diferentes especies permite la aplicación de técnicas matemáticas muy potentes.

La comparación de secuencias genómicas nos está permitiendo estimar con más precisión diferentes partes del árbol de la vida e incluso determinar la longitud

de las ramas; es decir, estimar el tiempo transcurrido desde la aparición de dos especies a partir de la especie ancestral común. Para ello se están utilizando modelos de probabilidad muy sofisticados, así como técnicas de optimización estadística como por ejemplo el algoritmo iterativo EM (*expectation-maximization*). La disciplina que realiza estas estimaciones se denomina filogenética molecular.

En los últimos años está irrumpiendo con fuerza en dicha estimación el uso de métodos de geometría algebraica en el campo de la filogenética, como puede verse en el excelente artículo de divulgación titulado "Reconstrucción filogenética usando geometría algebraica" de Marta Casanellas y Jesús Fernández Sánchez (2010).

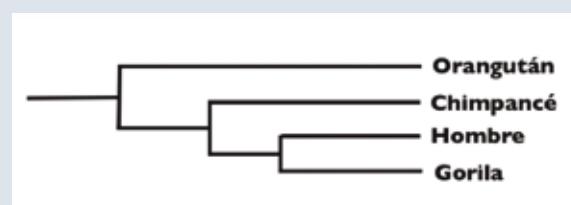


Figura 11. Árbol filogenético de distintos mamíferos. Modificado. En Casanellas y Fernández Sánchez (2010).

La evolución de las especies es propiciada principalmente por la existencia de errores (mutaciones) en el proceso de replicación del genoma que toda célula tiene que llevar a cabo para reproducirse. Aunque solo se transmiten a los descendientes aquellas mutaciones que se producen en las células sexuales, este proceso de cambio genético junto con otros mecanismos evolutivos va acumulando de generación en generación diferencias en los genomas de una especie y entre las diferentes especies.

"El sabio debe ordenar; se hace la ciencia con hechos, como una casa con piedras; pero una acumulación de hechos no es ciencia, lo mismo que un montón de piedras no es una casa".

Henri Poincaré, *Ciencia e hipótesis*, capítulo IX.

EL RESURGIMIENTO DE LA BIOLOGÍA DE SISTEMAS. LOS SISTEMAS DINÁMICOS

La bioinformática, junto con la genómica, la proteómica, etcétera, tienen como misión identificar y catalogar los distintos componentes moleculares de la célula así como sus funciones. Todas ellas están teniendo un gran éxito en su indispensable tarea científica. Pero el catálogo de los diferentes componentes de una célula o de un organismo, por muy exhaustivo que sea, no es suficiente para entender cómo funciona. Basta observar el caso de una mariposa que, sin cambiar de genoma, empieza su vida siendo un gusano y la acaba como lo que es, una mariposa. Hay que cambiar, por tanto, el punto de vista de la biología molecular y saber que aunque los distintos componentes celulares son importantes, la vida de un organismo surge de la relación entre sus diferentes



Fuente: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Norbert_wiener.jpg
Autor: Konrad Jacobs.

Norbert Wiener (1894-1964) fue un matemático estadounidense, considerado el fundador de la Cibernetica. Estudió matemáticas, zoología y filosofía y se doctoró en Harvard con una tesis sobre lógica matemática. En Cambridge (Inglaterra), estudió con Bertrand Russell y G. H.

Hardy. En Göttingen (Alemania), con David Hilbert y Edmund Landau. Fue catedrático de Matemáticas en el Instituto de Tecnología de Massachusetts (MIT). En 1948 publicó *Cibernetica o El control y comunicación en animales y máquinas*.

partes y solo puede ser entendida a partir del conocimiento de la dinámica de esas relaciones.

La idea de entender la vida a nivel de la dinámica de sistemas está presente en la biología desde mediados del siglo XX, debido fundamentalmente a los trabajos del matemático Norbert Wiener y del biólogo Ludwig von Bertalanffy (1901-1972), conocido por su planteamiento de la teoría general de sistemas.

Siguiendo estas ideas, la biología de sistemas trata de entender el funcionamiento de una célula y de un organismo como un sistema bien organizado de procesos dinámicos. Desde principios del siglo XXI está viviendo una edad de oro, debido a que dispone, por primera vez, de suficiente información y datos para poder avanzar en su tarea.

BASES DE DATOS DE MODELOS BIOLÓGICOS

Actualmente se están desarrollando numerosos modelos matemáticos que permiten comprender y predecir el comportamiento de los diferentes procesos celulares o intercelulares, mediante herramientas matemáticas que pueden ir desde las redes de Boole y cadenas de Markov a sistemas de ecuaciones diferenciales, como las utilizadas en dos modelos recientes relacionados con el metabolismo del colesterol.

Es cada vez más habitual depositar en bases de datos estos modelos matemáticos, codificados en un lenguaje común llamado SBML. Por ejemplo los modelos antes citados se encuentran en la base de datos Biomodels [<http://www.ebi.ac.uk/biomodels-main/>] sita en el portal del EBI (Instituto Europeo de Bioinformática) con los códigos MODEL0568648427 y BIOMD000000434 respectivamente. Se pueden bajar y analizar con diverso software libre específico para biología de sistemas, como por ejemplo CellDesigner [<http://www.celldesigner.org>].

CONCLUSIÓN

Quizás la frase que mejor resume las ideas que se exponen en este capítulo es el título del famoso ensayo de Joel E. Cohen: "Las matemáticas son el nuevo microscopio de la

biología, solo que mejor; la biología es la nueva física de las matemáticas, solo que mejor".

EJERCICIOS

1. Construye una pequeña base de datos. Para una colección de entidades (por ejemplo: especies, ciudades, países, etcétera), selecciona una serie de características (por ejemplo: número de habitantes, renta per cápita, edad media, porcentaje de mayores de 90 años, etcétera) y observa los distintos valores de las mismas. Organiza todo ello en una pequeña base de datos. Pon énfasis en la importancia de la codificación precisa de los distintos valores almacenados en dicha base de datos.
2. Con los datos del ejercicio 1, establece una medida de la similitud entre las distintas entidades. Así, si se ha hecho una base de datos de ciudades y las características observadas son numéricas, se podría utilizar la distancia euclídea como medida de similitud. El resultado final será una matriz simétrica de similitudes entre todos los pares de entidades de la base de datos.
3. Con la matriz de similitudes anterior y utilizando un método de agrupamiento jerárquico (por ejemplo, UPGMA o *Neighbor joining*) agrupa las entidades anteriores en clases en función de su similitud. Los algoritmos se pueden aplicar a mano con pocas entidades y para un número grande (10 o más) se puede utilizar OCTAVE (<http://octave.sourceforge.net/>), FreeMat (<http://freemat.sourceforge.net/>) o un paquete estadístico de código abierto como R (<http://www.r-project.org/>) o PSPP (<http://www.gnu.org/software/pspp/>).
4. Utiliza el algoritmo de las k-medias para agrupar las entidades anteriores en clases en función de su similitud. Se puede utilizar OCTAVE, FREEMAT, o un paquete estadístico de código abierto como R o PSP.

MATERIALES AUXILIARES

LIBROS

Casanellas, M. y Fernández, J. (2010): "Reconstrucción filogenética usando geometría algebraica". Arbor: Ciencia,

pensamiento y cultura, vol. 186, nº 746, pp. 1023-1033.

Las distribuciones teóricas de los nucleótidos satisfacen ciertas relaciones algebraicas. Este artículo explica cómo usar esos invariantes para implementar algoritmos de reconstrucción filogenética con técnicas y resultados teóricos procedentes del álgebra conmutativa y la geometría algebraica.

Cohen, J. E. (2004): "Mathematics is biology's next microscope, only better; biology is mathematics' next physics, only better". *PLoS Biol*, vol. 2, nº 12, ser. 439.

Un interesante ensayo sobre el papel que puede y debe jugar la biología en el desarrollo de las matemáticas y viceversa.

Compeau, P. E. C., Pevzner, P. A. y Tesler, G. (2011): "How to apply de Bruijn graphs to genome assembly". *Nature Biotechnology*, vol. 29, nº 11, pp. 987-991.

Una explicación accesible y elemental de cómo la teoría de grafos se está utilizando para ensamblar genomas.

Corcos L. y Kervizic G. (2008): "Dynamical modeling of the cholesterol regulatory pathway with Boolean networks". *BMC Systems Biology*, vol. 2, nº 99.

Un ejemplo de la utilización de un modelo matemático para entender la dinámica de la síntesis del colesterol a nivel celular.

Crichton, M. (1990): *Parque Jurásico*.

Esta novela sobre el campo de la ingeniería genética aplicada al comercio y la explotación de animales, narra cómo se intenta recrear la época de los dinosaurios a través de un parque temático en Costa Rica.

Huxley, A. (1932): *Un mundo feliz*.

La novela anticipa el desarrollo en tecnología reproductiva, cultivos humanos e hipnopedia que, combinadas, cambian radicalmente la sociedad.

Mc Auley, M. T., Wilkinson D. J., Jones J. J. L. y Kirkwood, T. B. L. (2012): "A whole-body mathematical model of cholesterol metabolism and its age-associated dysregulation". *BMC Systems Biology*, vol. 6, nº 1.

Un ejemplo de la utilización de un modelo matemático para entender la dinámica de la regulación del colesterol en el cuerpo humano.

Wiener, N. (1985): *Cibernética o El Control y comunicación en animales y máquinas*. Barcelona: Tusquets, col. Metatemas, nº 8.

Uno de los primeros libros sobre cibernética. En la primera parte se explica el nacimiento y desarrollo de la cibernética en su primera década.

PÁGINA WEB

http://www.ornl.gov/sci/techresources/Human_Genome/home.shtml. La página web del proyecto de genoma humano contiene numerosos recursos educativos sobre el tema en los aspectos científicos, éticos y legales.

PELÍCULAS

The amazing Spider-Man (Marc Webb, 2012). Peter Parker, el estudiante que se esconde bajo la máscara de Spider-Man, sufrió un accidente —fue mordido por una araña radioactiva— que modificó su genoma, dotándole de sus súper poderes arácnidos.

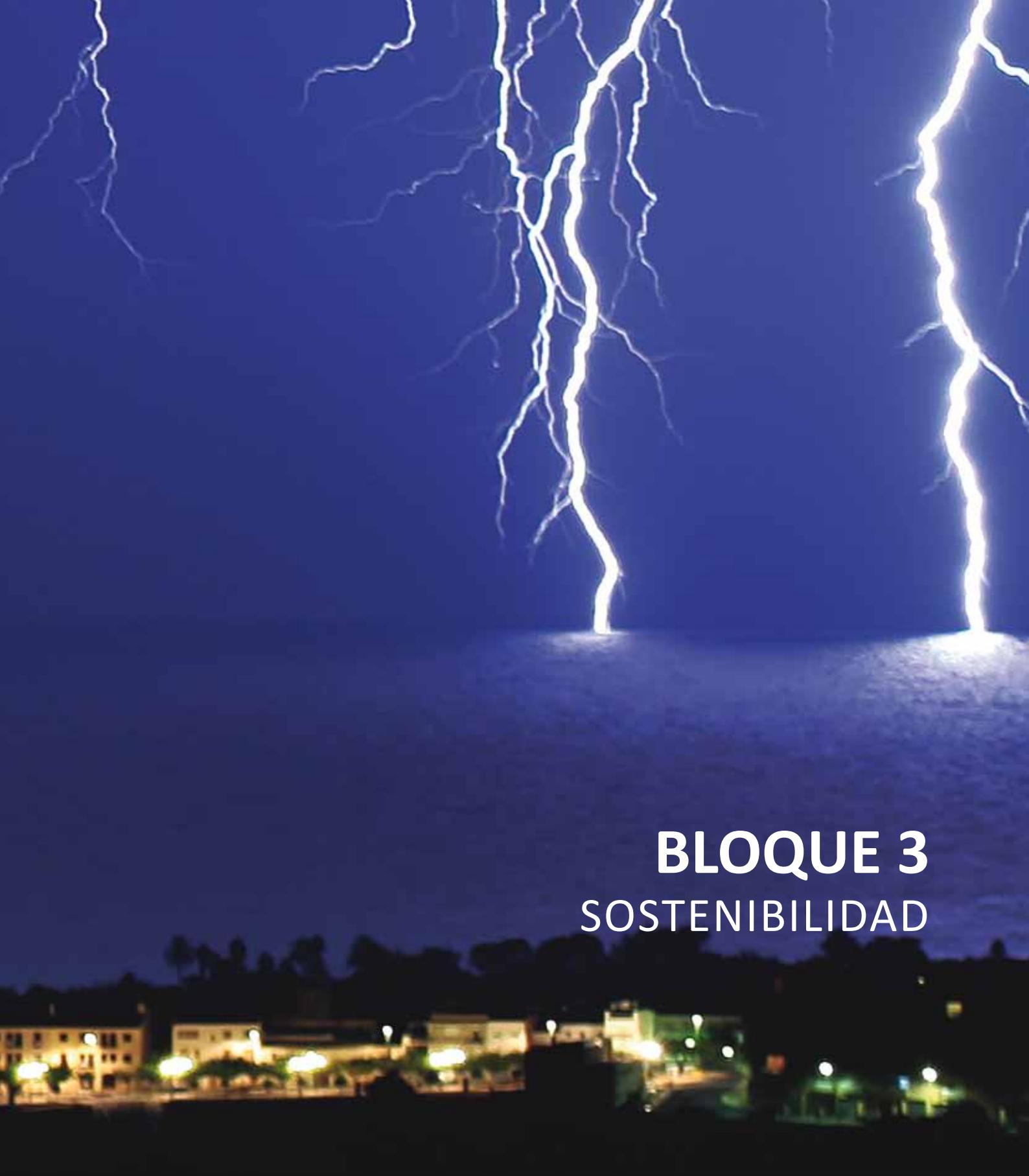
Parque Jurásico (Steven Spielberg, 1993). Basada en la novela de Michael Crichton. La reserva biológica en la que tiene lugar la acción cuenta con dinosaurios, creados a través de la ingeniería genética.

Gattaca (Andrew Niccol, 1997). Escrita y dirigida por Andrew Niccol. Película ambientada en una sociedad futura, en la que la mayor parte de los niños son concebidos in vitro y con técnicas de selección genética.

La humanidad en peligro (Them!) (Gordon Douglas, 1954). Película de ciencia ficción en la que el ejército americano realiza unas pruebas atómicas en un desierto del suroeste de los Estados Unidos, lo que causa una mutación de las hormigas que crecen hasta alcanzar gigantescas dimensiones.

La mosca (David Cronenberg, 1986). Un científico se utiliza a sí mismo como cobaya en la realización de un complejo experimento de teletransportación. La prueba es un éxito, pero empieza a sufrir unos extraños cambios en su cuerpo. Al mismo tiempo, descubre que dentro de la cápsula donde realizó el experimento se introdujo una mosca, que produjo la modificación genética que empieza a sufrir en su cuerpo.





BLOQUE 3

SOSTENIBILIDAD

Super energía

Autor: Andrés Mondéjar Picazo. FOTCIENCIA9

El rayo, temido por muchos y apasionante para otros. Con la energía que libera un solo rayo bastaría para iluminar una ciudad de tamaño medio durante todo un año. Pueden llegar a alcanzar más de 100 millones de voltios, una intensidad de 20.000 amperios y llegar a temperaturas tres veces la de la superficie del Sol. La velocidad de un rayo puede llegar a los 140.000 km por segundo y para saber la distancia a la que se encuentra la tormenta se calcula contando los segundos que transcurren desde que se produce el relámpago hasta que se escucha el trueno. La diferencia de tiempo entre ambos se debe a que, mientras que la luz viaja a una velocidad de 300.000 kilómetros por segundo, el sonido lo hace a tan solo 331 metros por segundo. Para calcular la distancia en kilómetros a la que se halla la tormenta de nosotros, únicamente hay que aplicar la siguiente fórmula: Distancia = N° de segundos/3 Sería un gran paso para la ciencia el poder almacenar toda esa energía: teniendo en cuenta que cada segundo caen en la Tierra una media de cien rayos, sería una fuente de energía excelente.

METEOROLOGÍA Y CLIMA

Ana María Mancho

3.1

Objetivos, contenido y criterios de evaluación de acuerdo con los Reales Decretos de Enseñanzas Mínimas, (1467/2007 de 2 noviembre para Bachillerato y 1631/2007 de 29 de diciembre para Educación Secundaria Obligatoria).

Este capítulo está dedicado al uso de herramientas y modelos matemáticos para estudiar y prever el clima. La autora hace una revisión histórica, recogiendo hábitos populares y datos para mostrar la contribución de la matemática al progreso del conocimiento sobre la meteorología. Las matemáticas facilitan un lenguaje para describir la evolución de la atmósfera, y proporcionan métodos numéricos para su previsión. Newton escribió en lenguaje matemático las leyes del movimiento de los objetos, y Euler describió las ecuaciones del movimiento de los fluidos como el agua o el aire. Se trata de información disponible para el estudiante de secundaria, quien puede conformar sus conocimientos sobre esta importante temática.

La atmósfera se comporta como un fluido y por ello las ecuaciones que la caracterizan son las ecuaciones de la hidrodinámica. Mediante estas ecuaciones se puede describir la evolución de los vientos y de la presión. Aquí se encuentra la base de la meteorología, aunque en ella también intervienen otras magnitudes físicas que describen el estado de la atmósfera como son la humedad, la condensación y evaporación del agua, el calor y la temperatura.

A lo largo de los siglos XIX y XX distintos matemáticos y meteorólogos descubrieron las leyes con las que describir la atmósfera y su evolución. El comportamiento del tiempo atmosférico es altamente impredecible, ya que las ecuaciones que describen su evolución son muy sensibles a las condiciones iniciales. Por esta razón las predicciones del tiempo solo tienen sentido en períodos no demasiados largos, desde horas a días.

La predicción del tiempo mediante métodos numéricos ha marcado la transición entre la tradición y la modernidad en meteorología, métodos que han venido apoyados por el desarrollo de las técnicas de computación y poten-

tes ordenadores, además del incremento en la precisión y ubicuidad de los instrumentos de medida de algunas variables atmosféricas, como la presión, la velocidad del viento y la humedad. La autora describe también distintas experiencias que han fundamentado la moderna meteorología.

En la actualidad el pronóstico del tiempo emplea modelos matemáticos que incorporan la rotación de la Tierra y la interacción con su geografía y el océano. Incluyen las observaciones que se logran con métodos cada vez más sofisticados y precisos, como los radares y los satélites. Para incorporar los datos en los modelos se usan numerosas herramientas matemáticas: la estadística, la teoría de los procesos estocásticos, la teoría del procesado y filtrado de señales, el control óptimo sobre problemas gobernados por ecuaciones en derivadas parciales, la optimización y la teoría de problemas inversos. Asimismo se describe la tendencia actual en la predicción del tiempo: el pronóstico por conjuntos. Esta técnica utiliza muchos pronósticos para efectuar una media y obtener una estimación del nivel de incertidumbre de los resultados. El conjunto de diagnósticos se consigue ejecutando un único modelo con leves modificaciones de las condiciones iniciales, o bien utilizando distintos modelos que existen con idénticas condiciones de partida.

Describir la evolución del clima en la Tierra es más complicado que la mera predicción meteorológica, pues en el clima influyen multitud de factores y fenómenos que no intervienen en la perspectiva meteorológica, que es mucho más local en el espacio y el tiempo. En este capítulo se describen muchos eventos y aspectos que en el pasado han contribuido a las variaciones a gran escala del clima en la Tierra, pero que no se contemplan en la predicción del tiempo y que son difíciles de prever.

EL TIEMPO Y SU PRONÓSTICO EN LA HISTORIA

La predicción del tiempo ha jugado un papel importante en la vida humana tanto en el pasado como en el presente. En el gran escenario de la historia el destino de las naciones a menudo ha dependido de las vicisitudes del tiempo. Así, en 1588 la Armada Invencible española, con la que el rey Felipe II atacó a Inglaterra, sufrió una violenta tormenta de cinco días frente a las costas de Escocia que hizo naufragar sus barcos. Los navíos que huyeron hacia el oeste intentando escapar sufrieron otra fuerte tormenta cerca de Irlanda. Solo la mitad de la flota española regresó. Algo parecido le ocurrió, en dos intentos fallidos en 1274 y 1281, al Gran Kan del imperio Mongol Kublai Khan, cuando se lanzó a la conquista de Japón con un gran ejército. Los fuertes vientos del mar destrozaron sus barcos y los estrellaron en la orilla.

Durante siglos el hombre ha intentado predecir el tiempo, observando los signos de la naturaleza en el cielo y en la Tierra, buscando indicios que hicieran esas predicciones posibles. El discípulo de Aristóteles, Teofrasto, recoge en su ensayo sobre *El libro de los signos*:

"Los signos que indican lluvia son así: inconfundiblemente es lo que ocurre al amanecer, cuando el cielo tiene una apariencia rojiza antes de salir el sol; ya que esto indica que lloverá antes de tres días, si no el mismo día".

En el capítulo XVI del Evangelio de San Mateo se lee:

"Al atardecer decís: 'Va a hacer buen tiempo porque el cielo tiene un rojo de fuego' y a la mañana: 'Hoy habrá tormenta porque el cielo tiene un rojo sombrío'".

En la cultura popular los signos sobre el tiempo y su interpretación han dejado su impronta en el refranero:

"Arco en el cielo, lluvia en el suelo", "Cielo a corderos, agua a calderos", "Aurora rubia, o viento o lluvia", "Golondrina en bajo vuelo, anuncia lluvia en el cielo".

Estos ejemplos muestran la importancia de las predicciones meteorológicas para el ser humano, aunque los éxitos en los pronósticos a veces se han conseguido por

casualidad, y otras por el método. En las mejoras de la predicción basadas en el método las matemáticas han sido muy importantes porque han facilitado un lenguaje para describir la evolución de la atmósfera, y han proporcionado las técnicas numéricas que implementan hoy en día grandes superordenadores.

LA ATMÓSFERA Y SUS LEYES

Para poder descifrar los cambios en la atmósfera, lo primero es entender su funcionamiento. [Isaac Newton](#) (1642-1727) asentó las bases para el desarrollo de la física escribiendo en lenguaje matemático las leyes que gobernaban el movimiento de los objetos. Más tarde el gran matemático [Leonhard Euler](#) (1707-1783) extendió estos resultados escribiendo las ecuaciones del movimiento de los fluidos como el agua o el aire.

Las leyes que describen la dinámica atmosférica también se expresan mediante ecuaciones en derivadas parciales. La atmósfera se comporta como un fluido, así que, de entre las ecuaciones que la caracterizan, las más destacables son las ecuaciones de la hidrodinámica. Estas ecuaciones, que describen la evolución de los vientos y la presión de la atmósfera, encierran una tremenda variedad de soluciones, que se obtienen para distintas condiciones de contorno o al variar los parámetros que intervienen en ellas. Las soluciones son fascinantes y en el mundo real se observan en una cascada o en un arroyo y en los remolinos que allí se forman.

Pero en la dinámica de la atmósfera, además de los vientos y la presión, intervienen otras variables como la humedad, relacionada con la condensación y la evaporación del agua, el calor y la temperatura, etcétera. Las ecuaciones para estas variables se acoplan con las de la hidrodinámica para describir al completo el estado de la atmósfera. La temperatura es una variable importante, pues atendiendo a su comportamiento en la atmósfera, se diferencian en ella varias capas: la troposfera, la estratosfera, la mesosfera, la ionosfera y la exosfera.

LEYES, DETERMINISMO E IMPREDECIBILIDAD

El siguiente paso es, conociendo las ecuaciones de la dinámica atmosférica, ¿se puede predecir el tiempo que hará en el futuro? Más en general, podríamos preguntarnos si, una vez descrito el funcionamiento de un sistema en el momento actual, se puede determinar cómo será en el futuro. Esto ha sido objeto de debate entre los científicos desde el siglo XVIII.

El matemático francés [Pierre Simon de Laplace](#) (1749-1827) pensaba que las leyes de la naturaleza y, por tanto, también las leyes que rigen la evolución del tiempo, eran deterministas y, en consecuencia, completamente predecibles. En 1776, en su ensayo filosófico *Sobre las probabilidades*, escribe:

"El estado actual de un sistema es consecuencia de lo que ha sido en el instante precedente, y si imagináramos una inteligencia capaz de concebir en un momento dado todas las relaciones entre los entes del universo, podrían establecer las posiciones, movimientos y efectos generales de estos entes en cualquier momento del pasado o del futuro".

El matemático [Jules Henri Poincaré](#) (1845-1912) (figura 1) opinaba de manera distinta, pues argumentaba que pe-

queñas incertidumbres en la definición del estado de un sistema podrían amplificarse en el tiempo e impedir las predicciones en el futuro. En 1908, en su obra *Ciencia y método* escribiría:

"Si sabemos exactamente las leyes de la naturaleza y la situación del universo en el momento inicial, podríamos predecir exactamente el estado del universo en el instante siguiente. Pero incluso si fuera el caso de que las leyes naturales ya no encerraran secretos para nosotros, podríamos conocer el estado inicial del universo solo aproximadamente. Podría suceder que pequeñas diferencias en las condiciones iniciales produjeran diferencias muy grandes en los fenómenos finales. Un pequeño error en la determinación de las primeras produciría un error enorme en las últimas. La predicción es imposible y tenemos el fenómeno fortuito".

En lo relativo a la predicción del tiempo, las ecuaciones de la dinámica atmosférica son difíciles de resolver dada la diversidad y complejidad de las soluciones que contienen. Entre 1961 y 1963 [Richard Feynman](#) (1918-1988), en sus *Lecciones de física*, refiriéndose a las ecuaciones de la hidrodinámica, declaraba:

"La próxima gran era del despertar del intelecto humano bien puede producir un método para entender el contenido cualitativo de estas ecuaciones. Hoy no podemos. Hoy no podemos ver que las ecuaciones que describen el fluir del agua contienen cosas tales como [...] la estructura turbulenta que uno observa [...]".

Con objeto de entender las soluciones de las ecuaciones que rigen la atmósfera, en esa misma época, [Edward Lorenz](#) (1917-2008), un profesor de meteorología del Massachusetts Institute of Technology dedujo un sencillo modelo de convección atmosférica, que ejecutaba en su ordenador. Comparó dos simulaciones de su modelo: la primera simulación se ejecutó en un único periodo de pronóstico, mientras que la segunda, aunque era para idéntico periodo de pronóstico, se ejecutó en dos partes. La primera parte correspondía a un intervalo de tiempo breve, y sus resultados sirvieron como condición inicial para la simulación en el periodo de tiempo restante. Los resultados de ambas simulaciones, aunque se esperaba que fueran idénticas, resultaron ser muy distintas. Dado que las ecuaciones usadas eran idénticas, Lorenz al principio pensó que el fallo era del



Figura 1. Jules Henri Poincaré. Foto en el frontispicio de la edición 1913 de *Dernières pensées (Sobre la ciencia y su método: el espacio, últimos pensamientos)*.
Fuente: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:JH_Poincare.jpg

ordenador, pero finalmente descubrió que la razón se debía a la imprecisión de las condiciones iniciales empleadas en la segunda parte de la segunda simulación.

Los resultados de la primera parte se habían almacenado en la memoria del ordenador como dígitos con seis cifras decimales. Para ahorrar tiempo, en la simulación del segundo tramo Lorenz usó como condiciones iniciales datos que preservaban solo las tres primeras cifras decimales, es decir, en vez de escribir números como 1,347321 escribió 1,347. Lorenz observó que al principio de la simulación del segundo tramo, los resultados en cada paso temporal estaban inicialmente muy cercanos, pero que conforme el tiempo evolucionaba ambas soluciones se separaban. En consecuencia, concluyó que las predicciones del tiempo solo tenían sentido para intervalos de tiempo relativamente breves, entre horas y días.

El comportamiento del tiempo para períodos largos como meses o años es altamente impredecible, ya que las ecuaciones que describen su evolución son muy sensibles a las condiciones iniciales, y solo si las condiciones de la atmósfera se conocieran con precisión infinita la predicción tendría sentido. Este fenómeno se ha popularizado con el nombre de “efecto mariposa”, pues uno podría pensar que incluso la perturbación producida por el leve aleteo de una mariposa podría cambiar las condiciones del tiempo en un punto dado. Así, de esta

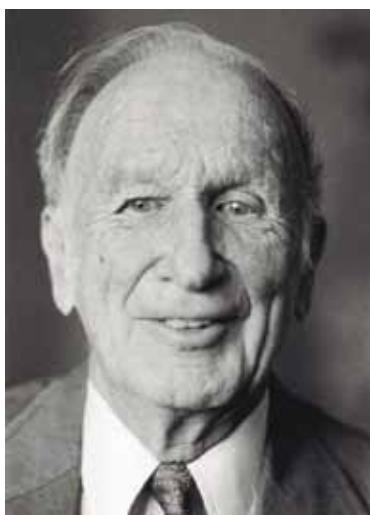


Figura 2. Edward Lorenz.
Fuente: http://photos.aip.org/history/Thumbnails/lorenz.edward_a1.jpg.
Fuente: http://en.wikipedia.org/wiki/File:Edward_lorenz.jpg.

EJERCICIO:

Experimento numérico: haz una predicción de un sistema caótico.

Material: Calculadora u ordenador.

Procedimiento: Imagina que U es una variable atmosférica cuya evolución en el tiempo $n+1$ viene dada por su estado en el tiempo n (U_n) según la siguiente expresión:

$$U_{n+1} = 3.6 U_n (1-U_n)$$

Considera un valor para $U = 0.722$ en el tiempo $n = 1$, que debes introducir en la parte derecha de la igualdad. Tras evaluar la expresión obtienes la solución de U en $n = 2$. Si el resultado para $n = 2$ lo reintroduces en la parte derecha de la igualdad, obtienes la magnitud U en el tiempo $n=3$. Iterando o repitiendo esta forma de proceder conseguirás los sucesivos valores de U en los distintos tiempos.

1. Toma para $n = 1$ el valor de $U_1 = 0.722$. Itera la ecuación hasta obtener U_{20} . Anota el resultado final.
2. Ahora toma para $n = 1$ el valor de $U_1 = 0.723$. Itera la ecuación hasta obtener U_{20} . Anota el resultado final.
3. Finalmente toma para $n = 1$ el valor de $U_1 = 0.721$. Itera la ecuación hasta obtener U_{20} . Anota el resultado final.

Dibuja los resultados representando la iteración n en el eje horizontal y el valor de U en el vertical. ¿Notas la sensibilidad a la condición inicial en la evolución? Repite los resultados para $n = 60$ iteraciones.

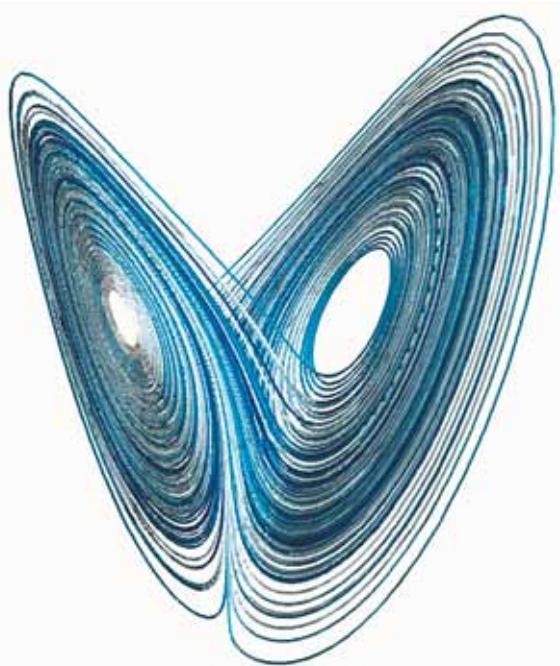


Figura 3. Una solución del atractor de Lorenz. (Wikipedia). Autor: Agarzago. Fuente: http://en.wikipedia.org/wiki/Lorenz_system.

manera las ideas expuestas por Poincaré encontraron su refrendo en los trabajos de Lorenz. Lorenz publicó sus resultados en 1963, en un artículo titulado "Deterministic Non-periodic Flow" en la revista *Journal of the Atmospheric Sciences*. Aunque este artículo permaneció en un segundo plano durante una década, más tarde desencadenó una intensa investigación en los llamados sistemas caóticos.

EL PRONÓSTICO DEL TIEMPO MEDIANTE MÉTODOS NUMÉRICOS Y SUS ORÍGENES

El primer paso hacia el pronóstico del tiempo con técnicas numéricas fue dado por **Lewis Fry Richardson** (1881-1953). Richardson creía que era posible resolver

las complejas ecuaciones matemáticas que describían la dinámica de la atmósfera mediante cálculos que involucraban pequeños pasos temporales. Describió sus ideas en el libro *Predicción del tiempo por procedimientos numéricos* publicado en 1922. En su libro, Richardson imagina la "fábrica de pronósticos":

"Después de mucho pensar, ¿no podríamos jugar con la fantasía? Imagina una gran sala, como un teatro, salvo que sus galerías rodean todo el escenario. Las paredes de esta cámara están pintadas formando un mapa del globo terráqueo. El techo representa las regiones polares, Inglaterra está en el gallinero, los trópicos en la galería más alta, Australia en la más baja y la Antártica en la platea. Una mirada de calculistas trabajan sobre el tiempo de la parte del mapa sobre el que se sientan, y cada uno atiende solo a una ecuación o parte de ella.

El trabajo en cada región es coordinado por un oficial de alto rango. Numerosos pequeños carteles luminosos muestran los valores instantáneos para que los calculistas cercanos puedan leerlos. Desde la platea se alza un gran pilar hasta media altura de teatro que se remata con un púlpito. En él se sienta el hombre a cargo de todo el teatro; está rodeado de varios asistentes y mensajeros. Una de sus tareas es la de mantener una velocidad uniforme en el progreso del cálculo de las distintas partes del globo. En este sentido es como un director de

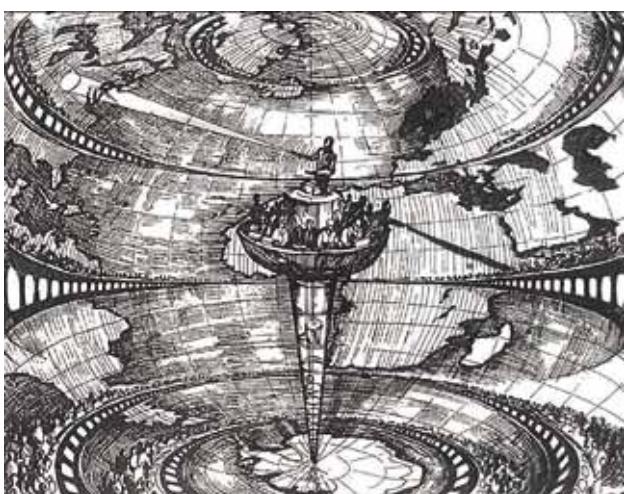


Figura 4. Representación de la fábrica de pronósticos de Richardson. Imagen por cortesía de L. Bengtsson.

orquesta en el que los instrumentos son reglas de cálculo y calculadoras mecánicas. En lugar de llevar una batuta maneja un haz de luz rosada que proyecta en las regiones que han adelantado al resto en el cálculo, y un haz de luz azul sobre aquellas que se quedan atrás."

Esta descripción resulta muy evocadora y guarda una estrecha relación en muchos aspectos con la moderna **predicción numérica** del tiempo en superordenadores. Efectivamente, en estos ordenadores las complejas ecuaciones de la atmósfera se resuelven en pequeños pasos temporales. En cada paso las variables atmosféricas se conocen en un conjunto discreto de puntos sobre una malla espacial. La tarea de transformar las ecuaciones originales en los pasos que debe ejecutar el ordenador ha dado lugar a toda una rama de las matemáticas, el cálculo numérico.

En la época de Richardson, sin embargo, no existían los ordenadores y los tediosos cálculos se elaboraban por personas llamadas calculistas. Para poner en práctica sus ideas, Richardson quiso hacer un pronóstico sobre varias magnitudes que representaban el estado atmosférico de la Tierra. Usó como dato inicial mapas del tiempo del 20 de mayo de 1910 producidos por el meteorólogo **Vilhelm Bjerknes** (1862-1951). Aunque el pronóstico de Richardson falló, pues predecía un aumento de presión enorme, sus ideas fraguaron y con el paso del tiempo han resultado ser asombrosamente próximas a los métodos modernos de predicción del tiempo.

La predicción numérica del tiempo comenzó a hacerse realidad a mediados de los años cuarenta del siglo XX, con la construcción de ENIAC (Electronic Numerical Integrator And Computer), el primer ordenador electrónico. Era un enorme aparato con más de 17.000 tubos de vacío, que pesaba 27 toneladas, ocupaba 167 m² y consumía 150 kw para funcionar. Fue concebido por los ingenieros **John Mauchly** (1907-1980) y **J. Presper Eckert Jr.** (1919-1995) de la Universidad de Pensilvania. **John von Neumann** (1903-1957) y sus colaboradores en el ámbito de la meteorología teórica en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton percibieron el potencial de estas máquinas para la predicción del tiempo e hicieron el primer pronóstico sobre un día en abril de 1950. Para ello se basaron en los modelos matemáticos simplificados desarrollados por el grupo dirigido por

Jule Charney (1917-1981). El cálculo duró 24 horas y sus resultados demostraron la factibilidad de la predicción numérica del tiempo.

EL PRONÓSTICO DEL TIEMPO EN LA ACTUALIDAD

En la actualidad los ordenadores son mucho más rápidos y los centros de predicción del tiempo que existen en todo el mundo ejecutan miles de modelos, algunos útiles para predicciones locales y otros para predicciones globales. Los modelos meteorológicos son cada vez más sofisticados, incorporan la rotación de la Tierra y la interacción con la Tierra y su geografía y el océano. Además, se incluyen las observaciones que se logran cada vez con métodos más sofisticados y precisos como los radares y los satélites.

El radar es un instrumento electrónico que mide con radiación electromagnética. Los radares para las medidas atmosféricas emiten impulsos muy cortos de haces de ondas de radio. Objetos como las gotas de lluvia, los cristales de nieve, el granizo, los insectos o las partículas de polvo reflejan parcialmente las ondas hacia la antena. Las señales reflejadas se procesan electrónicamente y se convierten en imágenes que muestran la localización, el tipo de nubes y la intensidad de la precipitación.

Los satélites proporcionan la mayor parte de las mediciones atmosféricas. Los satélites destinados a este tipo de mediciones incorporan cámaras sensibles a la radiación visible y al infrarrojo de modo que detectan las nubes tanto de día como de noche. Las nubes frías, que son las ubicadas a mayor altura, se muestran con colores brillantes y blancos, mientras que las más cálidas (situadas a menor altura) aparecen en colores oscuros y grises.

Los datos y las observaciones se incorporan a los modelos de predicción mediante el procedimiento de **asimilación de datos**. El objetivo de la asimilación de datos es producir en las tres dimensiones del espacio y en el



Figura 5. Imagen de satélite obtenida por MODIS del Huracán Katrina tomada el 28 de Agosto de 2005. Fuente: http://www.nasa.gov/mission_pages/hurricanes/archives/2005/h2005_katrina.html.

tiempo una representación consistente con el estado físico real de la atmósfera. Para ello las variables observadas se incorporan a un modelo de un sistema real programado en un ordenador, de forma que el modelo cuenta para sus predicciones con la información aportada por las observaciones y medidas.

Para la asimilación de datos se usan numerosas herramientas matemáticas: la estadística, la teoría de los procesos estocásticos, la teoría del procesado y filtrado de señales, el control óptimo sobre problemas gobernados por ecuaciones en derivadas parciales, la optimización y la teoría de problemas inversos.

LIDIAR CON LA INCERTIDUMBRE

A pesar de los avances realizados por la meteorología moderna, uno de los retos en el pronóstico del tiempo hoy sigue siendo abordar las incertidumbres de las predicciones. Existen dos fuentes que las originan. Por un lado, los errores introducidos por el conocimiento imperfecto de las condiciones iniciales y que se amplifican debido a la naturaleza caótica del problema. Por otro lado, los errores introducidos por las aproximaciones usadas en la formulación de los modelos que hacen que distintos modelos proporcionen distintas predicciones.

Por esta razón una tendencia actual en la predicción del tiempo es el uso del **pronóstico por conjuntos**. Esta técnica utiliza muchos pronósticos para efectuar una media y además obtiene una estimación del nivel de incertidumbre de los resultados. El conjunto de diagnósticos se consigue ejecutando un único modelo con leves modificaciones de las condiciones iniciales o bien comparando las predicciones que facilitan los muchos modelos que existen.

Existen muchos centros y agencias alrededor del mundo que realizan pronósticos del tiempo: en Estados Unidos, los Centros de Predicción Ambiental (NCEP); en Europa, el Centro Europeo para Pronósticos de Medio-Alcance (ECMWF); en distintos países como España, Reino Unido, Francia, Japón, Canadá, etcétera, las agencias meteorológicas nacionales. Cada organismo cuenta para este fin con sus propios modelos que utilizan distintas aproximaciones, todas ellas plausibles, pero que en general proporcionan diferentes resultados.

EL CLIMA Y SU EVOLUCIÓN

El clima se corresponde con la descripción del estado dinámico de sistema tierra-atmósfera pero en un sentido más amplio que el que proporciona la meteorología. Se extiende sobre largos períodos de tiempo (años, décadas, siglos, milenarios) y sobre grandes áreas (continentes, el globo terráqueo). Son muchos los factores

que configuran el clima: las interacciones entre la Tierra y el Sol, los cambios en la órbita de la Tierra, la distribución de océanos y continentes, los componentes químicos de la atmósfera, las erupciones volcánicas, la interacción entre los seres vivos –especialmente especies fotosintéticas y su distribución en mares y tierra– y el medio, así como los efectos de las acciones antropogénicas.

La atmósfera de la Tierra no ha sido siempre igual a la actual. Los científicos conjeturan que la atmósfera primitiva habría estado compuesta de hidrógeno, helio y otros gases simples que se habrían perdido. Las incontables colisiones con meteoritos que posiblemente acontecieron durante los primeros estadios de existencia de la Tierra habrían generado un calor tremendo en su superficie. En este proceso se habrían emitido muchos gases desde su superficie fundida. Posteriormente la Tierra se habría enfriado y solidificado. A través de los volcanes la roca fundida habría, ocasionalmente, irrumpido de nuevo en la superficie de la Tierra, continuando la emisión de gases. La acumulación de estos gases sobre la superficie habría formado una atmósfera secundaria primitiva.

¿Cómo era esta atmósfera? Si aceptamos que hace millones de años las emisiones de los volcanes podrían haber sido similares a las actuales, entonces la actividad volcánica de tiempos antiguos pudo generar dióxido de carbono, monóxido de carbono, vapor de agua, nitrógeno y dióxido de azufre. El examen de las rocas más antiguas, las que fueron expuestas a la atmósfera primitiva, indica una deficiencia de oxígeno en esta atmósfera. En efecto, si hubiera existido oxígeno en la atmósfera primitiva, se habría combinado con el hierro de estos depósitos de rocas antiguas, pero esta evidencia no se ha encontrado. El oxígeno que apareció en la atmósfera lo hizo por la actividad biológica, a través de la fotosíntesis de organismos unicelulares llamados cianobacterias, o también algas verde-azuladas, que vivieron en los océanos hace 3.000 millones de años. Conforme el oxígeno se acumulaba en la atmósfera, se pudieron formar ciertas cantidades de ozono que sirvieron como capa protectora de la radiación ultravioleta solar. Además, el agua del océano habría actuado como escudo protector adicional de la radiación cósmica y en con-

secuencia bajo la superficie oceánica se habrían dado las circunstancias que habrían permitido el desarrollo de la vida en la Tierra. Cuando la capa de ozono se hizo lo suficientemente extensa, las plantas y los animales pudieron encontrar las condiciones para poblar los continentes.

VARIACIONES EN EL CLIMA

Los científicos han analizado los cambios climáticos del pasado examinando restos biológicos (plantas y animales fósiles) y geológicos (sedimentos oceánicos) y han encontrado evidencias de que en el pasado el clima de la Tierra experimentó cambios bruscos. Estos cambios bruscos en las condiciones del hábitat justificarían las extinciones masivas de especies de seres vivos que ha habido en la historia de la Tierra. Por ejemplo, la extinción masiva del Cretácico-Terciario ocurrida hace 65 millones de años en la que desapareció el 50% de la biodiversidad. Mucho peor fue la extinción masiva del Pérmico-Triásico, también llamada la Gran Mortandad, ocurrida hace 250 millones de años; en ella desaparecieron el 70% de las especies de vertebrados y el 95% de las especies marinas.

Una de las causas que los científicos señalan para estas extinciones son los impactos de meteoritos. ¿Cómo afecta al clima un gran impacto? La energía del impacto de un asteroide de unos 10 km de diámetro que alcance la Tierra con una velocidad típica de 70.000 km/h-100.000 km/h puede producir un aumento de temperatura local de decenas de miles de grados, que serían suficientes para evaporar instantáneamente decenas de miles de km³ de suelo y roca, produciendo un gran cráter de impacto. El polvo resultante, al pasar a la atmósfera, reduciría la radiación solar sobre la Tierra, enfriándola significativamente. La colisión probablemente produciría enormes olas a través del océano y desencadenaría terremotos y actividad volcánica a cientos y miles de kilómetros de distancia.

Los climatólogos, siguiendo la teoría de Milankovitch, también adscriben los cambios en el patrón climático

de la Tierra a las variaciones cíclicas de la órbita de la Tierra en torno al Sol. Estas se producirían por un lado por cambios en la excentricidad, es decir, en la desviación de la órbita de la Tierra del círculo perfecto. Por otro lado, también habrían influido las variaciones en la posición del plano ecuatorial de la Tierra con respecto al plano de su órbita (inclinación axial). Finalmente, también serían importantes las variaciones en la precesión, es decir, en la orientación del eje de rotación de la Tierra.

El clima de la Tierra en el pasado también puede haberse visto afectado por la deriva de los continentes. La teoría de la deriva continental fue propuesta en 1912 por el geólogo alemán Alfred Wegener, quien propuso que originariamente todos los continentes estaban unidos formando un macro-continente llamado Pangea, rodeado de un solo océano, Panthalassa. Estas ideas se incluyeron posteriormente en la teoría de la tectónica de placas, según la cual la parte más externa de la Tierra está formada por placas móviles. Los continentes están en estas placas y se mueven con ellas. En los límites de estas placas se encuentran las zonas de subducción, donde se localiza el 95% de la energía sísmica del planeta y la mayor parte de los volcanes activos de la Tierra. Durante las erupciones volcánicas se expelen toneladas de polvo y cenizas en la atmósfera. Algunas veces estas alcanzan niveles por encima de la troposfera y se extienden por toda la Tierra. Las partículas

volcánicas por un lado intensifican la formación de nubes y por otro, de modo parecido a como actúa el polvo producido tras un gran impacto, reflejan la luz solar y eventualmente enfrián la superficie de la Tierra. Así la erupción del monte Pinatubo en Filipinas el 15 de junio de 1995 redujo la temperatura media del planeta en medio grado centígrado durante el subsiguiente año.

El clima también puede variar si se altera el estado de equilibrio de la atmósfera que depende de su composición química. Los volcanes y la actividad humana –por ejemplo a través de procesos industriales– emiten gases que pueden afectar al estado actual de nuestra atmósfera. Entre otros, estos gases son el CO₂, el metano, el óxido de nitrógeno y los clorofluorocarburos (CFC) (este último de origen antropogénico). La presencia de estos gases en la atmósfera contribuye al efecto invernadero, por el que aumentaría la temperatura media del planeta. Además, se ha probado que la existencia de las moléculas de CFC en la estratosfera ha jugado un papel importante en la formación del agujero en la capa de ozono. Este agujero consiste en la disminución de ozono en la baja estratosfera cada primavera austral y viene observándose desde los años setenta del siglo pasado. Debido a su impacto en el medio ambiente, la manufactura de componentes que contienen CFC ha sido prohibida por el protocolo de Montreal. Un papel antagónico al descrito lo desempeñan seres vivos como

EJERCICIO

Experimento: haz Dióxido de Carbono (CO₂)

El CO₂ lo fabrica tu cuerpo al respirar, y se elimina en la respiración o al exhalar el aire de los pulmones. El CO₂ también puede fabricarse de otras formas como detallamos a continuación:

Material: Tiza, ½ vaso de vinagre, una botella de 1 litro con su tapón, una vela, un vaso pequeño.

Procedimiento: Introduce la tiza triturada en la botella. Añade lentamente el vinagre sobre la tiza y al terminar tapa la botella. Observa las burbujas que se forman en

la botella. Son de dióxido de carbono. Enciende la vela e introduce la vela en un pequeño vaso. Destapa la botella y “vierte” el gas sobre la vela. Observa que la vela se apaga.

Explicación: Cuando mezclas un ácido como el vinagre (ácido acético) con un carbonato como el carbonato de calcio (la tiza), reaccionan produciendo el gas dióxido de carbono. Este gas es más pesado que el aire, y por eso puede verterse sobre la vela. Al hacerlo se desplaza el oxígeno y la vela se apaga porque sin oxígeno no hay combustión.

el fitoplancton presente en grandes extensiones oceánicas. Su actividad fotosintética actúa como sumidero del CO₂ atmosférico y contribuye de modo muy importante a la emisión de O₂ a la atmósfera.

EPÍLOGO

El pronóstico del tiempo con técnicas numéricas involucra el uso de modelos matemáticos de la atmósfera. Para una mayor precisión en las predicciones se requiere la toma de continuas medidas en la atmósfera con radares y satélites que se incorporan a los modelos, la manipulación de grandes conjuntos de datos y el uso de sofisticadas herramientas procedentes de diversas áreas de las matemáticas. Con estos esfuerzos la predicción del tiempo ha avanzado significativamente en el último siglo y ha conducido a un grado de precisión que cada año salva incontables vidas y propiedades. La predicción del tiempo con métodos numéricos puede considerarse sin lugar a dudas uno de los logros más significativos del siglo XX, y sobre el que de forma regular cada vez hay más y más demanda.

Describir la evolución del clima en la Tierra es más complicado que la mera predicción meteorológica, ya de por sí difícil. El clima y su evolución está lleno de incertidumbres y, como se ha descrito, en él influyen multitud de factores y fenómenos que no intervienen en la perspectiva meteorológica porque esta es mucho más local en espacio y tiempo. Entre los factores que afectan al clima existe un complejo entramado de interacciones, que a veces no se conocen o se han estudiado poco, por lo que su impacto a largo plazo es difícil de determinar.

BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA

Andrews, D. G. (2000): *An introduction to atmospheric physics*. Cambridge: Cambridge University Press.

Este libro, de un nivel relativamente avanzado, cubre un amplio espectro de temas de la física atmosférica.

Ilustra cómo la física ayuda a entender importantes aspectos del comportamiento atmosférico. Asume que el lector parte de un conocimiento de física y matemáticas como el que se adquiere en los primeros cursos de la universidad.

Bohren, C. F. (1987): *Clouds in a glass of beer*. Mineola, New York: Dover Publications.

Este libro describe experimentos sencillos de física atmosférica. Abarca un espectro amplio que incluye desde conceptos formales hasta aspectos más divulgativos e informales. Los profesores encontrarán ideas sencillas para hacer demostraciones prácticas en clase.

Colman, B. R. y Potter, T. D. (2003): *Handbook of weather, climate and water*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, col. Wiley Interscience.

Este es un libro para profesionales en el que cada capítulo presenta una panorámica o visión general del estado del arte de un tema relacionado con la meteorología y el clima. Entre estos temas se incluyen la turbulencia, la teoría del caos, la predictibilidad atmosférica, la predicción numérica del tiempo, los métodos de observación atmosférica modernos, los instrumentos y su calibración, etcétera.

Feynman, R. (2005): *The Feynman lectures on physics*, vol. 2. (ed. rev. y def.). Reading, Massachusetts: Addison-Wesley.

En este libro de texto clásico, Feynman describe de manera entusiasta, clara, profunda y divertida los conceptos básicos de la física. En el segundo volumen dedica dos capítulos a los fluidos. En ellos presenta con gran intuición y de modo muy ilustrativo las ecuaciones que describen el movimiento de los fluidos. Pone de manifiesto las dificultades que entraña la resolución de estas ecuaciones y la gran variedad de soluciones que presentan.

Houghton, J. T. (2002): *The physics of atmospheres*. Cambridge: Cambridge University Press.

Libro introductorio que presenta de manera concisa los procesos físicos que gobiernan la estructura y dinámica

de la atmósfera. Tiene un capítulo dedicado al caos y la predictibilidad atmosférica.

Lynch, P. (2006): *The emergence of numerical weather prediction: Richardson's dream*. Cambridge: Cambridge University Press.

Este libro proporciona una excelente revisión sobre cómo surgió la predicción numérica del tiempo. Desde las ideas pioneras de Lewis Fry Richardson se requirieron muchos avances para que su sueño se hiciera realidad: obtener una mayor comprensión de la dinámica atmosférica, diseñar algoritmos numéricos para integrar las ecuaciones de la atmósfera que fueran computacionalmente estables, recoger observaciones regulares y precisas del estado de la atmósfera y finalmente disponer de potentes y eficientes ordenadores. Se incide en todos los retos que hubo que afrontar hasta que las modernas predicciones numéricas del tiempo fueron posibles.

Sorbian, Z. (1996): *Hands-on meteorology: stories, theories, and simple experiments*. Boston: American Meteorological Society.

Este libro explica de manera divulgativa y amena los conceptos básicos de la meteorología. Proporciona muchas notas históricas y experimentos sencillos diseñados para entender la ciencia.

Strogatz, S. H. (1994): *Nonlinear dynamics and chaos*. Cambridge: Perseus Books Publishing.

Libro introductorio sobre los conceptos matemáticos básicos de la dinámica no lineal y el caos. Estas nociones subyacen a las ideas de Poincaré sobre impredecibilidad y determinismo. Dedica un capítulo a explicar el modelo de Lorenz y sus implicaciones.

Libro que contiene reflexiones y dibujos sobre meteorología y ciencia en general, que Goethe diseñó a partir de 1820. Se ocupa del estudio de las nubes y del estado de los cielos, con el objetivo de abordar lo incierto desde lo más cierto (lucha de gigantes cósmicos, antagonismo entre el bien y el mal, etcétera). El libro está magníficamente ilustrado por Fernando Vicente.

Southall, I. (1987): *Siete chicos de Australia*. Barcelona: Noguer (ed. orig.: Hills End, 1962).

Siete niños y su maestra exploran una cueva cuando se quedan atrapados por una intensa tormenta. Rodeados de montañas junto a un río desbordado, no pueden pedir ayuda y se enfrentan a una lucha por la supervivencia. A la vez, lidian con sus pérdidas y con el misterio que rodea al antiguo arte aborigen encontrado en la cueva.

PÁGINAS WEB

<http://www.ecmwf.int/>. European Centre for Medium-Range Weather Forecasts.

<http://www.noaa.gov/>.

http://celebrating200years.noaa.gov/foundations/numerical_wx_pred/welcome.html#early. NOAA-National Oceanic and Atmospheric Administration.

<http://ncar.ucar.edu/>. National Center for Atmospheric Research.

<http://www.nasa.gov/>. National Aeronautics and Space Administration.

PELÍCULAS

Atrapado en el tiempo (Harold Ramis, 1993). Phil, el hombre del tiempo de una cadena de televisión, es enviado un año más a Punxstawnwey, a cubrir la información del festival del Día de la Marmota. En el viaje de regreso, Phil y su equipo se ven sorprendidos por una tormenta que les obliga a regresar a la pequeña ciudad. A la mañana siguiente, al despertarse, Phil comprueba

MATERIALES AUXILIARES

LIBROS

Goethe, J. W. (2011): *El juego de las nubes*. Madrid: Nómada.

atónito que comienza otra vez el Día de la Marmota. La película permite una reflexión sobre la predicción meteorológica basada en premisas científicas o en tradiciones (como la marmota y su sombra).

Waterworld (Kevin Reynolds, 1995). Los casquetes polares se han derretido y han inundado el mundo, que ahora está totalmente cubierto de agua. Los supervivientes han optado por reagruparse en pequeños atolones que han construido ellos mismos o bien convertirse en nómadas y vagar por los océanos en pequeñas embarcaciones. Uno de ellos es Marinero (Kevin Costner), un humano que posee branquias para poder respirar debajo del agua. Su vida cambia cuando rescata a Helen y a su hija adoptiva Enola de los malvados Smokers, liderados por el Diácono (Dennis Hopper). Ahora, los tres decidirán ir en busca de la Tierra Seca, el único lugar en todo el planeta que todavía no ha sido inundado, siguiendo el mapa que Enola tiene tatuado en la espalda. La película es una reflexión sobre un futuro posible si el hombre no cambia su actitud ante el planeta.

Twister (Jan de Bont, 1996). Película que narra los trabajos de los investigadores de los tornados, auténticos cazadores de estos fenómenos devastadores.

Armageddon (Michael Bay, 1998). Película de ciencia ficción y cine de catástrofes producida por Jerry

Bruckheimer y protagonizada por Bruce Willis, Billy Bob Thornton, Ben Affleck, Liv Tyler, Owen Wilson, Will Patton, Michael Clarke Duncan, Peter Stormare y Steve Buscemi. En ella, un grupo de perforadores de plataformas petrolíferas son enviados por la NASA al espacio para taladrar la superficie de un enorme asteroide que amenaza la Tierra y destruirlo con una bomba.

El día de mañana (Roland Emmerich, 2004). Película estadounidense estrenada en 2004 y protagonizada por Jake Gyllenhaal y Dennis Quaid. Es una hipótesis de las conclusiones expuestas en la tesis del cambio climático, que en la ficción revelan las investigaciones del climatólogo Jack Hall (Dennis Quaid): el calentamiento global podría provocar un cambio abrupto y catastrófico en el clima del planeta Tierra.

2012 (Roland Emmerich, 2009). Película estadounidense protagonizada por John Cusack. Está centrada en las consecuencias catastrofistas del fin del calendario maya.

DOCUMENTAL

Cloudspotting. Este documental de la BBC no es un tratado de nubes sino un recorrido ameno y visual por los diferentes tipos de nubes que se forman en la atmósfera. Disponible en <http://www.bbc.co.uk/programmes/book99th>.

MATEMÁTICAS Y ECONOMÍA

Carlos Vázquez Cendón

3.2

Objetivos, contenido y criterios de evaluación de acuerdo con los Reales Decretos de Enseñanzas Mínimas, (1467/2007 de 2 noviembre para Bachillerato y 1631/2007 de 29 de diciembre para Educación Secundaria Obligatoria).

Disponer de conocimientos económicos básicos como parte de la cultura y formación común de los ciudadanos es, hoy día, un requerimiento social indiscutible. Las nociones fundamentales, los principios que regulan las prácticas comerciales y los usos empresariales, son herramientas formativas clave en la actualidad. En este capítulo se introducen algunas aplicaciones de las matemáticas necesarias para comprender la gestión económica de distintos sectores productivos e introducir nuevos conceptos que surgen de las relaciones entre el desarrollo económico y el medio ambiente, como el desarrollo económico sostenible.

Se introduce la noción de economía ambiental, que analiza cuestiones medioambientales con el fin de orientar la actividad económica y controlar sus consecuencias negativas. El medio ambiente condiciona las actividades económicas, proporciona recursos naturales (materias primas, energía) para la producción y gestiona los residuos del ciclo productivo. El capítulo exemplifica la estrecha relación que la matemática establece entre economía y medio ambiente, abordando problemas cuantitativos con el rigor que ofrecen sus herramientas. Así, muestra la simulación numérica presente en las distintas etapas de producción en un gran número de actividades industriales y empresariales.

Entre los problemas que se presentan hay dos de especial relevancia relacionados entre sí: el desempleo

y la disminución del crecimiento económico. Mostrar aplicaciones de los modelos matemáticos a los distintos sectores productivos contribuye a la planificación racional y al ahorro de costes, los cuales disminuyen mediante la precisión de los datos, la reducción de los tiempos y la optimización de los procesos.

Se dan ejemplos de modelos matemáticos de valoración y se presentan conceptos como el valor temporal del dinero, la actualización o descuento, el cálculo de cuotas de un préstamo, los derivados financieros, el contrato a plazo, su utilidad y valoración, el contrato de opciones, su utilidad y valoración y los contratos forward y de futuros, junto con otras nociones.

La teoría de valoración de opciones financieras requiere un modelo de evolución del subyacente, del cual se muestran distintas técnicas y se exemplifican sus usos. Entre ellas destaca el método de Monte Carlo, del cual el autor presenta y discute las ventajas y desventajas.

Las matemáticas se muestran en este capítulo como una amplia oferta de métodos, técnicas y procedimientos, como modos de abstraer e interpretar datos y relaciones de fenómenos complejos, como son los económicos y los medioambientales. El ciudadano español del siglo XXI necesita fundamentos conceptuales y técnicos sólidos para entender la complejidad de la vida económica actual. La lectura de este capítulo contribuye al logro de este objetivo.

LA ACCIÓN DEL HOMBRE SOBRE EL PLANETA Y LA ECONOMÍA

Desde el inicio de las civilizaciones, la acción del ser humano ha modificado el relieve del planeta Tierra. Se considera uno de los agentes externos, junto con la acción del agua, del viento o de la vegetación, y en los últimos tiempos, debido sobre todo a los avances técnicos desarrollados, se ha vuelto cada vez más relevante. También ha contribuido a ello la edificación de grandes ciudades y la expansión del hábitat humano hacia zonas previamente no ocupadas, con la consiguiente construcción de edificios, vías de comunicación (carreteras, puentes, aeropuertos, vías férreas, etcétera) o infraestructuras para la explotación de recursos naturales (embalses, puertos, minas, terrazas, etcétera).

Este proceso de urbanización e industrialización ha conllevado cierto deterioro del medio ambiente, lo que ha propiciado el estudio científico de las relaciones entre el desarrollo económico y el medio ambiente, así como la aparición de conceptos como el de desarrollo económico sostenible. Indudablemente, el medio ambiente del planeta condiciona las actividades económicas a través de distintas funciones: fundamentalmente proporciona recursos naturales (materias primas, energía, etcétera) para la producción y asimila los residuos resultantes del ciclo productivo.

En la evolución del pensamiento económico, en el siglo XVII los fisiócratas entendían que la principal fuente de riqueza era la Tierra, de ahí que dieran especial importancia a la agricultura, la pesca y la minería, entendiendo que la economía debería orientarse a obtener el mayor rendimiento de los recursos naturales del planeta. No obstante, en su concepción organicista suponían que la Tierra generaba continuamente estos recursos inagotables. Posteriormente, la mayoría de las corrientes económicas separaron el estudio del desarrollo económico y del medio ambiente, siendo considerados los recursos naturales como un factor externo. Recientemente, la disciplina conocida como economía ambiental trata de incorporar las herramientas clásicas de la economía al análisis de los problemas medioambientales, con el obje-



Figura 1. La acción humana es un factor relevante en la transformación del planeta Tierra. Autor: Carlos Vázquez Cendón.

tivo final de orientar la actividad económica para minimizar sus consecuencias negativas sobre el planeta Tierra. Para decidir si se quiere o no invertir en la construcción de cierto tipo de infraestructuras, los criterios de rentabilidad económico-financiera resultan muy relevantes, en algunos casos incluso demasiado predominantes frente a las posibles consecuencias medioambientales. Dentro de la valoración de este tipo de proyectos de inversión un aspecto importante consiste en tener en cuenta que sus rendimientos se darán en el futuro y que hasta alcanzar

ese instante futuro pueden intervenir factores desconocidos en el momento de abordar la inversión.

En un sentido general, se trata de problemas de inversión bajo incertidumbre, como los que surgen en el ámbito de la matemática financiera, una disciplina que ejemplifica la estrecha relación que existe entre las matemáticas y la economía, especialmente cuando la segunda aborda problemas cuantitativos con el rigor que ofrecen las herramientas de la primera.

En el momento actual la economía mundial se enfrenta a dos grandes problemas relacionados entre sí: el desempleo y la disminución del crecimiento económico, sobre todo en las economías más desarrolladas. El paro juvenil, cuya tasa mundial ha pasado del 13% en 2007 al 17% en 2011 y que en España ha alcanzado cifras del 40%, resulta especialmente preocupante. El desempleo genera caídas de salarios y, con ello, se contrae la demanda interna. A su vez, la caída de la demanda reduce el empleo. La crisis de la deuda soberana en algunos países de la zona euro y la fragilidad del sistema financiero también están muy relacionadas con los problemas anteriores. En una coyuntura tan compleja, las medidas de política económica deben estimular la creación de empleo y la reactivación de la demanda, mientras las reformas financieras mitigan los problemas de la deuda pública. Algunas instancias apuntan la necesidad de medidas coordinadas de estímulos fiscales a nivel internacional, combinadas con medidas estructurales para aumentar la competitividad y las exportaciones.

Aunque las soluciones a las crisis se deben buscar a través de las decisiones económicas y financieras adecuadas, las herramientas que proporcionan las matemáticas y sus aplicaciones también contribuyen al aumento de la competitividad. Además de ayudar en el modelado y simulación de los procesos económicos y financieros relacionados con la crisis, la transferencia de las aplicaciones de las matemáticas a los distintos sectores productivos contribuye al ahorro de los costes y reduce los tiempos necesarios para poner un determinado producto o procedimiento en el mercado. Por ejemplo, la simulación numérica está cada vez más presente en las distintas etapas de producción en un número creciente de actividades industriales y empresariales. En todo el mundo están surgiendo iniciativas que propician la colaboración entre la

industria y las matemáticas. Quizás los más conocidos en el ámbito científico sean los Study Groups with Industry, que reúnen grupos de investigación y empresas para discutir problemas matemáticos que surgen en la industria, con el objeto de mejorar la competitividad o innovar en los procesos productivos. Recientemente, bajo los auspicios de la Fundación Europea de la Ciencia y la Sociedad Europea de Matemáticas, se ha organizado una actividad europea, conocida como Forward Look Mathematics in Industry, para analizar y acelerar esta colaboración. En esta acción también se han recopilado casos de éxito de colaboración entre empresas y grupos de investigación europeos, que avalan el potencial de las herramientas matemáticas en el desarrollo económico e industrial. Se puede consultar la información en la web: <http://www.ceremade.dauphine.fr/FLMI/FLMI-frames-index.html>.

Por otro lado, también se observó la creciente demanda de profesionales con conocimientos matemáticos para aplicarlos en el ámbito industrial y empresarial, trabajando en equipos multidisciplinares. Se trata de un tipo de formación que se imparte en másteres o grados en distintos países, muchas veces bajo el nombre de Matemática Industrial o Ingeniería Matemática. En el contexto de desempleo juvenil que antes mencionamos, es relevante comentar que el grado de empleabilidad de este tipo de titulados es elevado.

En esta unidad didáctica planteamos algunas nociones básicas de valoración financiera y de las herramientas matemáticas que esta requiere. Dichas nociones resultan fundamentales para el modelado de problemas de inversión bajo incertidumbre, como los que antes mencionamos al abordar proyectos con efectos sobre el medio ambiente.

EL VALOR TEMPORAL DE DINERO

Si a cualquier persona le preguntamos si prefiere recibir 6.000 € hoy mismo o dentro de 6 meses, la inmensa mayoría se inclinará por la primera opción. Al margen de la incertidumbre asociada a que efectivamente reciba el dinero dentro de 6 meses, la capacidad de disponer de él hoy conlleva un valor añadido. En concreto, el sistema

financiero permite que esos 6.000 € de hoy se puedan convertir en 6 meses en algo más. Por ejemplo, si se pueden invertir en un depósito a plazo al 3% de interés anual en un banco, al cabo de 6 meses recibimos 6.090 €. Esto exemplifica sencillamente el valor temporal del dinero: la misma cantidad de dinero no vale lo mismo si la recibimos en distintos momentos (hoy o dentro de 6 meses).

El valor temporal del dinero está muy relacionado con el concepto financiero de **capitalización**, que nos permite conocer el valor futuro de una inversión sin riesgo, que hacemos hoy y tiene asociados unos pagos deterministas (que llamamos flujos) en el futuro. La modalidad más sencilla es la capitalización simple: si invertimos un capital inicial C a un tipo de interés anual r (expresado en tanto por uno) durante nd días, siendo na el número de días considerado para un año financiero, entonces el valor al cabo de nd días viene dado por la fórmula $(1+r \frac{nd}{na})$. Por ejemplo, si depositamos 1.000 € al 3% entre el 1-1-2013 y el 31-3-2013, considerando un año comercial de 360 días, al vencimiento retiraríamos

$$1.000(1+0,3 \times \frac{88}{360}) = 1.007,3\text{€}.$$

A diferencia de la capitalización simple, la capitalización compuesta permite recibir los intereses en períodos inferiores a la duración de la inversión y acumularlos al capital. Por ejemplo, si los intereses se acumulan q veces al año en períodos iguales, el valor final al cabo de 1 año es $C(1+r \frac{r}{q})^q$. Conceptualmente, resulta interesante definir la capitalización continua, que supone que la inversión está acumulando los intereses continuamente en el tiempo de modo que el valor final se puede obtener pasando al límite en la capitalización compuesta:

$$\lim_{q \rightarrow \infty} C(1+\frac{r}{q})^q = Ce^r$$

Si estamos valorando la inversión al tipo continuo r en el tiempo t y esta finaliza en el tiempo T , ambos medidos en años, entonces el valor final de la misma es $Ce^{r(T-t)}$.

En los casos anteriores hemos utilizado el tipo de **interés nominal**, es decir, el tipo anual sin tener en cuenta la frecuencia con la que se abonan los intereses. Como el valor final depende de la forma de capitalización, para comparar inversiones resulta útil tener una tasa o tipo de referencia. En la práctica, para ello se utiliza la tasa anual

equivalente o **TAE** que, para una capitalización determinada, es el tipo de interés (Tasa) correspondiente a una capitalización simple durante un año (Anual), que proporciona el mismo valor capitalizado (Equivalente). Por ejemplo, la TAE de un depósito que proporciona un tipo nominal del 3% anual pagando intereses cada mes, es

$$\text{TAE} = \left[(1 + \frac{0,03}{12})^{12} - 1 \right] = 0,0304 \rightarrow 3,04\%$$

EJERCICIO

Calcula la TAE para inversiones con un tipo nominal determinado que se abona cada mes, cada semana, cada día, cada hora, cada minuto... hasta llegar a la TAE para el tipo continuo. Incluso, para darle más realismo, se pueden utilizar folletos de depósitos sencillos o de préstamos comercializados por entidades financieras.

Al margen del futuro profesional de cada estudiante, estamos "condenados" a tomar decisiones financieras.

Por una parte, la TAE nos permite comparar el rendimiento de inversiones a plazo con distintas modalidades de abono de intereses. Por otra parte, sirve para evaluar las condiciones que nos ofrecen las distintas modalidades de préstamo. En el primer caso, dejando al margen otras consideraciones sobre nuestras preferencias en el cobro de intereses, nos inclinaremos por aquellas inversiones que ofrecen la TAE más elevada. En el segundo caso, trataremos de suscribir préstamos que conlleven una TAE menor. La **actualización** o descuento nos permite conocer el valor actual de un producto que paga flujos conocidos en el futuro. Es un proceso inverso a la capitalización y sus modalidades son análogas. Así, la actualización simple de una cantidad C que recibiremos dentro de nd días, viene dada por $C(1+r \frac{nd}{na})^{-1}$. En el descuento continuo, el valor descontado a tiempo de algo que vale en tiempo T es $Ce^{-r(T-t)}$.

Los conceptos de descuento y capitalización permiten la valoración de activos sin riesgo. En particular, el descuento permite valorar productos que proporcionan flujos futuros conocidos de dinero, simplemente descontando el valor de los mismos. El ejemplo más sencillo es el bono que paga cupones con un interés fijo. Podemos descontar el valor de los cupones con los tipos correspondientes a sus vencimientos y del nominal al vencimiento del bono para obtener el valor actual del mismo. Por ejemplo, la deuda del Estado español, que se subasta a distintos plazos de tiempo (3 meses, 6 meses, 1 año, etc.) se emite al descuento, de modo que al suscribirla se paga el valor descontado de los flujos futuros y con posterioridad se reciben los flujos asociados. Lo mismo ocurre con los pagarés de algunas entidades financieras.

CÁLCULO DE CUOTAS DE UN PRÉSTAMO

A lo largo de nuestra vida, para abordar proyectos de inversión personales o profesionales, surge la necesidad de solicitar préstamos. En el plano personal, pueden suscribirse para financiar nuestra formación (estudiar un grado universitario, un máster, un doctorado o un curso de idiomas en el extranjero), la adquisición de bienes (coche, vivienda, etcétera) o algún gasto imprevisto considerable. En el plano profesional, podríamos considerar las distintas circunstancias que requieren la financiación de una empresa para su arranque o funcionamiento. Incluso, la necesidad de pedir préstamos aparece en estructuras más complejas, como las comunidades autónomas o los estados.

Una situación típica es aquella en la que se solicita al prestamista una cantidad de dinero, a cambio de pagar un tipo anual de interés durante un número de años. Para devolver el importe del préstamo, se abona un número de cuotas al año por un importe constante, de modo que al final del año se ha devuelto el capital y se han abonado las cantidades correspondientes a los intereses. Utilizando las fórmulas de capitalización y descuento, se puede demostrar que la cuota a pagar tiene la expresión:

$$C = \frac{Pr}{q(1-(1+r/q)^{-nq})}$$

El préstamo más popular es el crédito hipotecario, con el que la mayoría de los españoles ha adquirido su vivienda en los últimos años. Por ejemplo, si hemos obtenido un préstamo de 200.000 € a 20 años al 5%, con una cuota mensual constante, la fórmula anterior nos indica que el importe de esta será 1.319,91 €. Podemos reducir la cuota sensiblemente a 1.073,64 € mensuales, contratando el préstamo a 30 años. También es importante saber que en el primer caso la suma de los intereses pagados durante la vida del préstamo es 116.778,40 € mientras que en el segundo asciende a 186.510,40 €.

No obstante, la mayoría de los créditos hipotecarios en España se han contratado a un tipo de interés variable, revisable anualmente a partir del tipo EURIBOR, que a su vez se fija cada mes. Para adaptar la fórmula anterior a lo que se conoce como modelo francés de préstamo hipotecario, en cada actualización anual se toma P como el capital pendiente de amortizar y n como el número de años hasta el vencimiento del préstamo. Consideramos como ejemplo un préstamo de 200.000 € a 20 años, al tipo fijo del 5% el primer año y al tipo variable del EURIBOR+1% a partir del segundo año. Al final del primer año el capital pendiente es $P_1 = P - C_1 q = 184.161,08$ €, siendo $C_1 = 1.319,91$ € la cuota mensual constante antes calcu-



Figura 2: Los créditos han sido la forma más habitual de adquirir una vivienda.
Imagen: Laura Orensan.

lada para el primer año. Teniendo en cuenta lo que figura en el contrato hipotecario, supongamos que el EURIBOR aplicable para el segundo año es el de octubre de 2011, que fue del 2,11%. Ello da lugar a un tipo $r_2 = 3,11\%$ para el segundo año, con lo que la cuota mensual del segundo año es $C_2 = 1.070,74 \text{ €}$. Al final del segundo año, al capital pendiente $P_2 = P_1 - C_2q = 171.312,20 \text{ €}$ se le aplicará el EURIBOR publicado en octubre de 2012, que fue del 0,65%, lo que da lugar a un tipo hipotecario $r_3 = 1,65\%$ para el tercer año y la cuota mensual de $C_3 = 917,25 \text{ €}$. El proceso se repite sucesivamente hasta la amortización del capital y los intereses en el momento de vencimiento del préstamo.

EJERCICIO

Completa una tabla de cuotas para los años del préstamo a tipo variable, suponiendo varias posibilidades de evolución del EURIBOR en el futuro. Se pueden calcular también los intereses totales que se acaban pagando durante la duración del préstamo.

Sin duda, nuestros alumnos de ESO o bachillerato, en algún momento tendrán que endeudarse para adquirir un coche, una vivienda o financiar su formación. La falta de soltura en el manejo de los conceptos financieros asociados al endeudamiento explica, en parte, la situación financiera tan deteriorada a la que han llegado algunas economías domésticas.

En la práctica, el tipo de interés que ofrece el banco depende del perfil de riesgo del solicitante del préstamo. A mayor riesgo del solicitante, mayor será el diferencial que se aplica al EURIBOR en el caso variable o mayor será el tipo fijo que le oferte el banco. En cualquier caso, en el análisis de perfil de riesgo ha resultado difícil (o no se ha querido) predecir correctamente las posibles situaciones de incumplimiento derivadas de la crisis económica, como la que se está dando en los últimos años. Por otro lado, también es conocido el caso de las famosas hipotecas *subprime*, concedidas a clientes de alto riesgo y que después fueron comercializadas en forma de sofistica-

dos productos financieros (como los CDO o CDS) de alta rentabilidad y elevadísimo riesgo.

Los estados y las comunidades autónomas también tienen necesidad de pedir dinero prestado para financiarse y una forma natural de hacerlo es a través de la emisión de deuda. Obviamente, el perfil de riesgo del emisor de la deuda condiciona el tipo de interés al que el mercado considera que puede endeudarse. En este sentido, la crisis económico-financiera que atraviesan algunos países europeos ha puesto de moda el diferencial que existe entre los tipos de interés que paga el bono alemán a 10 años y el de otros países europeos, lo que se conoce como la prima de riesgo. Por ejemplo, si la prima de riesgo de España está en 400, quiere decir que el bono español paga 400 puntos básicos (esto es un 4%) más que el bono alemán. Claramente, al igual que en los ejemplos anteriores, a mayor prima de riesgo mayor coste de financiación.

LOS DERIVADOS FINANCIEROS

En los mercados financieros se negocian una gran variedad de productos, que se han ido volviendo cada vez más sofisticados. Sin ánimo de ser exhaustivos, una primera clasificación básica permite considerar varios mercados:

- Mercados de bienes (*commodity markets*): se negocian materias primas o productos materiales (petróleo, maíz, oro, plata, electricidad, etcétera).
- Mercados de monedas de curso legal (*foreign exchange markets*): se negocian los tipos de cambio entre las distintas monedas (libra-euro, dólar-yen, etcétera).
- Mercados de bonos (*bond markets*): se negocian bonos del estado, deuda emitida por comunidades autónomas, bonos de empresas privadas, etcétera.
- Mercados de acciones (*stock exchange*): son los más populares y en ellos se negocian acciones de distintas empresas.
- Mercados de futuros y opciones (*futures and options markets*): se negocian productos financieros derivados, y gozan de una popularidad creciente.

Son especialmente conocidas las opciones sobre acciones.

En este apartado nos centraremos en los derivados financieros, que son aquellos productos cuyo precio depende de otro producto financiero (*subyacente*). El derivado financiero es un caso particular del concepto de derivado, que es un producto cuyo precio depende del precio de otro u otros productos (que pueden ser financieros o no).

Los productos derivados se pueden clasificar en tres tipos: contrato *forward*, de futuros y opciones.

Contrato a plazo o *forward*. Es un contrato para comprar o vender un producto por determinado precio en cierto instante futuro. La *posición larga* es la parte contratante que acepta realizar la compra y la *posición corta* es la que acepta realizar la venta. Lo contrario es un contrato al contado (*spot*), en el que la transacción tiene lugar en el instante actual. En el contrato *forward* estamos obligados a realizar la transacción y el precio de la misma se fija de modo que ninguna de las partes paga una prima inicial. Un ejemplo de este tipo de derivado surge cuando un comerciante se compromete a comprar a un agricultor 10.000 kilos de la cosecha de patatas a 0,2 €/kg 6 meses después de la firma del contrato. Claramente, con este contrato los contrayentes del mismo se protegen ante la incertidumbre del precio que alcanzará el kilo de patatas dentro de 6 meses (en el que intervienen factores como el clima, la producción de los competidores, la aparición de plagas, etcétera).

Contrato de futuros. Su estructura es la misma que la del contrato a plazo, pero tiene lugar en un mercado regulado, que especifica las condiciones del contrato. Un ejemplo lo constituye un inversor que le pide a su bróker que acuda al mercado organizado de futuros americano, Chicago Board of Trade (CBOT), para que compre 1 futuro sobre 1.000 m³ de trigo para el próximo mes de julio. El precio resultante será consecuencia del ajuste entre los precios de oferta y la demanda que aparezcan cotizados en el CBOT.

Contrato de opciones. Es un contrato que da a su poseedor el derecho a comprar o vender una cantidad de un producto a un precio determinado durante un espacio de tiempo. En el caso de dar el derecho a comprar se llama opción de compra (opción *call*),

mientras que si el derecho es a vender se llama opción de venta (opción *put*). Es importante matizar que, en el caso de opciones, el poseedor tiene el derecho pero no la obligación de realizar la transacción futura, y esto es una diferencia importante con los casos anteriores. El producto objeto del derecho de transacción se conoce como **subyacente** y puede ser de carácter financiero, en el caso de las opciones financieras, o no. El precio pactado se conoce como precio de ejercicio o *strike*. El derecho puede adquirirse para ejercerlo en una fecha determinada, como ocurre en las llamadas opciones europeas, o antes de una fecha, como es el caso de las opciones americanas. Al proporcionar un derecho al poseedor, cuando este lo adquiere ha de pagar una prima, que es justamente el valor de la opción. Las

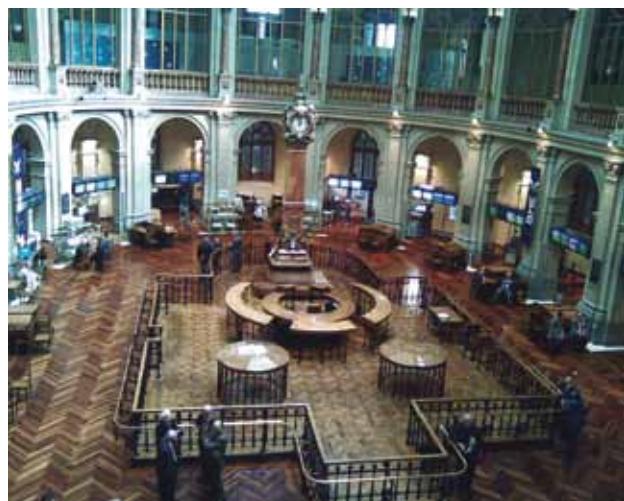
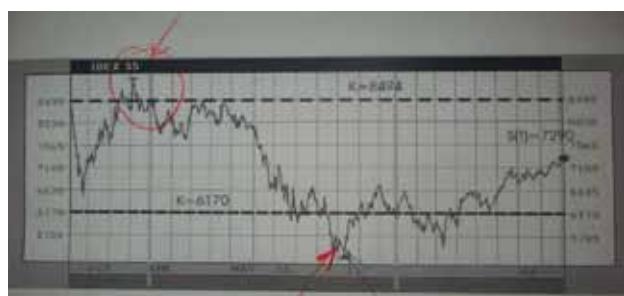


Figura 3. Arriba, evolución del Índice IBEX35 entre el 2 de julio de 2012 y el 2 de enero de 2013. Debajo, interior de la Bolsa de Madrid. Autor: Alavisan. Fuente: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Interior_Bolsa_de_Madrid.jpg?uselang=es

opciones son los productos derivados más populares. Un ejemplo de opción no financiera es un contrato por el que un equipo de fútbol adquiere el derecho a comprar un jugador antes de una determinada fecha a otro equipo. Un ejemplo de opción financiera aparece cuando en el mercado de futuros español (MEFF) adquirimos hoy una opción de compra de 100 acciones de Telefónica por 9 €, que podemos ejercer hasta el 15 de marzo de 2013. En ambos casos, la prima es consecuencia del equilibrio entre la oferta y la demanda.

UTILIDAD DE LOS CONTRATOS DE OPCIONES

Para entender la utilidad de las opciones, en primer lugar pensemos en qué podemos hacer si tenemos una opción de compra sobre una acción de Telefónica con un *strike* de 10 € para ejercerla el 15 de marzo de 2013. Si la opción nos da el derecho a comprar solo en esa fecha, podemos esperar a que llegue y tomar decisiones en función de la cotización del subyacente. Por ejemplo, si el 15 de marzo Telefónica cotiza a 13 €, podemos ejercer el derecho de compra a 10 € y venderla en el mercado al momento, con una ganancia de 3 €. Si la acción cotizase a 7 €, entonces el derecho a comprar a 10 € no es de utilidad y la opción de compra no vale nada.

Claramente, el valor de la opción de compra en el momento del vencimiento se puede determinar en función del valor del subyacente. En concreto, si denota el momento de vencimiento, la cotización del subyacente en el instante y el precio *strike* del contrato, el valor de la opción a vencimiento es

$$V(T, S_T) = \max(S_T - K, 0)$$

Si la opción fuese de venta, un razonamiento análogo al anterior conduce a la expresión

$$V(T, S_T) = \max(K - S_T, 0)$$

Lo que resulta más complicado es determinar el valor de la opción en un instante previo al vencimiento. La necesidad de determinar este precio surge de la posibi-

lidad de comprar o vender opciones en mercados organizados, al igual que las acciones. En el ejemplo anterior, también podríamos haber vendido la opción en el mercado de futuros español (MEFF) antes del 15 de marzo de 2013. Precisamente, el problema de valoración de opciones consiste en determinar cuál es el precio justo (*fair price*) que debemos pagar por una opción en cualquier instante previo a su vencimiento, sin perder de vista que en la práctica el precio resulta del equilibrio entre la oferta y la demanda en el correspondiente de mercado de opciones.

Las opciones presentan dos utilidades fundamentales: la **cobertura** y la **especulación**. Su uso como cobertura permite reducir el riesgo asociado a la posesión de una cartera de acciones. Para ello, se mantienen posiciones contrarias en acciones y opciones; por ejemplo, comprando acciones de una empresa por 10 € y opciones de venta por 9 € de esas acciones, lo cual tendrá el coste adicional de abonar la prima de las opciones, pero la garantía de poder vender las acciones a 9 €, si su precio bajase mucho. Para protegerse frente a movimientos que no consistan solo en subidas o bajadas de precios, existen combinaciones de opciones que se conocen como estrategias (cono, cuna, mariposa, etcétera). El uso de las opciones financieras con fines especulativos está relacionado con su gran efecto de apalancamiento, que permite obtener grandes beneficios con inversiones menores que las que habría que realizar en acciones. Por ejemplo, ante la perspectiva de una subida de las acciones de una empresa en los próximos 2 meses podemos: a) comprar 100 acciones a 20 € cada una o b) comprar opciones de compra por 1,5 € cada una. Si la acción sube a 23,5 €, en el caso a) el rendimiento relativo por acción viene dado por $(23,5-20)/20 = 0,175$; es decir, un 17,5%. Por el contrario, en el caso b) optaríamos por ejercer la opción de compra y vender las acciones compradas, de modo que el rendimiento relativo ascendería a $(23,5-20-1,5)/1,5 = 1,3333$; es decir, un 133,33 %. Si la acción baja a 16,5 €, en el caso a) se pierden 350 € mientras que en el caso b) se pierden 150 € del coste de las opciones, que no se ejercerían. Si optamos por las opciones, nuestra pérdida máxima está acotada por el importe de la prima, muy inferior a la pérdida en el caso de optar por acciones.

Las opciones más sencillas son las **opciones vainilla**, aquellas cuyo valor a vencimiento depende exclusivamente del valor del subyacente en ese momento. Las opciones pueden ser de carácter europeo, cuando solo se pueden ejercer en la fecha de vencimiento, como ocurre con las acciones sobre el índice **IBEX35** en el mercado de futuros español (MEFF). Las opciones americanas son aquellas que se pueden ejercer en cualquier instante antes del vencimiento o en la fecha de vencimiento, como todas las opciones sobre acciones de determinadas empresas que se negocian en el MEFF. Si el valor a vencimiento no depende solo del valor del subyacente en ese momento, entonces se llaman opciones exóticas. Un ejemplo de opciones exóticas son las que dependen de la cotización media del activo en cierto periodo de tiempo, que se conocen como **opciones asiáticas**, de las que existen una gran variedad dependiendo de la media

considerada (aritmética o geométrica, continua o discreta), del pago recibido a vencimiento (de *strike fijo* o *variable*) y de la posibilidad de ejercicio anticipado (de carácter europeo o americano). La ventaja de las opciones asiáticas es que sus precios fluctúan menos que sus correspondientes opciones vainilla frente a variaciones puntuales del precio del subyacente. Existen opciones exóticas sobre máximos o mínimos de un subyacente (**opciones lookback**) y opciones sobre cestas (que dependen de varios subyacentes).

Recientemente, las entidades financieras también han comercializado lo que se conocen como **productos estructurados**, que combinan la rentabilidad fija de una parte de la imposición con una rentabilidad variable definida en términos de cotizaciones de acciones o índices bursátiles, cuyos pagos son similares a algunas opciones sofisticadas.

En el libro de I de la Política de Aristóteles se menciona un curioso contrato de opciones: el filósofo Thales predijo que la próxima cosecha de aceitunas sería excelente y contrató a sus dueños a bajo precio la opción de utilizar una cantidad importante de molinos de aceitunas. Llegado el momento, la demanda de molinos fue tal que Thales obtuvo una buena cantidad de dinero, revendiendo el uso de los molinos al precio que quiso. Con ello, Thales quiso acallar las burlas sobre la inutilidad de la filosofía para enriquecerse. Las opciones también tuvieron un gran protagonismo durante la locura desencadenada en los mercados de tulipanes en Holanda en el siglo XVII, hasta su colapso en 1637. En Estados Unidos se les relacionó con la crisis de los años veinte del siglo pasado. No obstante, el primer mercado organizado de opciones, Chicago Board of Options Exchange (CBOE), apareció en Chicago en 1973.

VALORACIÓN DE CONTRATOS FORWARD Y DE FUTUROS

En el momento de la contratación de los contratos *forward* y de futuros no hay un pago inicial entre las partes, sino que se establece un precio para la transacción futura del subyacente de modo que ambas partes estén de acuerdo. El precio pactado, K , en el instante inicial ($t=0$) para la compra o venta asociada al contrato de futuros coincide con el valor futuro del subyacente en el momento de vencimiento ($t=T$). En ausencia de riesgo, dicho valor es $S_T = S_0 e^{rT}$, siendo r el tipo de interés libre de riesgo. En consecuencia, el valor del contrato de futuros en $t = 0$ es cero (no hay que pagar prima). No obstante, para $t > 0$ el precio pactado no tiene por qué coincidir con el valor futuro del activo en ese instante $t > 0$, pues el tipo de interés a vencimiento o el valor del subyacente cambia. Entonces, en un instante $t > 0$, el valor del contrato de futuros $F_T(t)$ es el valor descontado a tiempo t de la diferencia entre el valor a vencimiento del subyacente y el precio pactado, esto es: $F_T(t) = (S_t - K)e^{-r(T-t)}$ ó equivalentemente:

$$F_T(t) = S_t - K e^{-r(T-t)}$$

VALORACIÓN DE CONTRATOS DE OPCIONES

Al igual que en el contrato de futuros, los modelos de valoración de opciones tienen por objetivo obtener el precio teórico de estas bajo ciertas hipótesis sobre el mercado. En la práctica, el precio resulta de cruzar las órdenes de compra y venta de contratos en el mercado organizado en el que se negocian. Al igual que los modelos matemáticos de otros fenómenos, para aplicarlos a la realidad es necesario determinar (calibrar) algunos de los parámetros que intervienen en la determinación del precio. En este caso concreto, para calibrar los parámetros se usan algunos datos del mercado. Antes de pasar a la valoración analizaremos algunos de los factores que intervienen en el valor de la opción: tiempo a vencimiento, precio del subyacente, precio de ejercicio, tipo de interés y volatilidad.

El **tiempo a vencimiento** es lo que falta para alcanzar la fecha de vencimiento, que es una fecha fija. Como las opciones tienen un valor asociado a la protección contra la incertidumbre, cuanto mayor sea el tiempo a vencimiento mayor será su valor.

El **precio del subyacente** evoluciona con el tiempo. Precisamente, un aspecto muy importante para la valoración es la elección del modelo de evolución de precios del subyacente, que ha de incluir una componente estocástica (es decir, aleatoria) para reproducir la incertidumbre. Si tenemos una opción de compra con **strike** de 20 €, cuanto más suba el precio del subyacente más interesante será nuestra opción y mayor será su precio. Si el precio del subyacente baja, entonces el valor de la opción de compra disminuye. Con las opciones de venta, ocurre justamente al revés: los precios de la opción bajan cuando el precio de la acción sube, apreciándose la opción cuando la acción se deprecia.

Aunque el precio de ejercicio o **strike** es fijo para cada opción, podemos comparar precios de opciones que solo se diferencian en el **strike**. En las opciones de compra, cuanto mayor sea su precio de ejercicio menos atractivas serán y su precio será menor. En las opciones de venta ocurre al revés: a mayor **strike** mayor precio al que tenemos derecho a vender el subyacente y, por lo tanto, mayor será el valor de la opción.

El **tipo de interés** se entiende como tipo de interés libre de riesgo (por ejemplo, el asociado a un bono de un país solvente). Su influencia en el valor de la opción es muy pequeña y su crecimiento provoca la apreciación en las opciones de compra y deprecia las opciones de venta.

La **volatilidad** es un factor relevante, relacionado con la variabilidad del rendimiento del subyacente. Por ello está relacionado con la incertidumbre, en el caso constante su incremento conduce al incremento del valor de opciones de compra y de venta. Aunque el modelado de la evolución de la volatilidad es un tema de gran actividad investigadora, la simplicidad aconseja suponerla constante en esta unidad didáctica.

Los **modelos matemáticos** de valoración deben recoger los comportamientos cualitativos del precio de las opciones respecto a los factores antes indicados. Por otro lado, la teoría de valoración de opciones financieras requiere un modelo de evolución del subyacente. Para ello, el punto de partida es la hipótesis de eficiencia del mercado, que nos lleva a asumir que el valor actual del activo es consecuencia de su valor en el pasado inmediato y que las cotizaciones del activo responden de manera instantánea a cualquier información nueva sobre el mismo. En consecuencia, se suele proponer un tipo de **modelo estocástico** llamado *markoviano*.

El método de los **árboles binomiales** es uno de los más sencillos para valorar opciones. Como en cualquier método de valoración, los datos son: (S_0) el precio actual y la volatilidad (σ) del subyacente (que supondremos constante por simplificar el método), el precio de ejercicio (K), el tiempo de vencimiento (T) y el tipo de interés libre de riesgo (r). A partir del precio actual del activo subyacente, en los árboles se representan las posibles evoluciones de los precios del activo durante el intervalo de tiempo de la opción. El intervalo de tiempo se **discretiza** en intervalos de igual longitud dt y en cada paso de tiempo se generan dos posibles precios del activo a partir del valor en el tiempo anterior. En concreto, para cada salto de tiempo dt , se supone que el precio del activo puede subir, con probabilidad $p = (e^{rdt} - e^{-\sigma\sqrt{dt}})/(e^{\sigma\sqrt{dt}} - e^{-\sigma\sqrt{dt}})$, multiplicándose por un factor $u = e^{\sigma\sqrt{dt}}$, o bajar con probabilidad $1-p$, multiplicándose por $v = e^{-\sigma\sqrt{dt}}$. Así, se obtienen los $n+1$ posibles valores del subyacente en el instante de vencimiento $T = ndt$ y las posibles 2^n

trayectorias de evolución de precios. A partir de estos valores, utilizando el concepto de valor esperado y el descuento al tipo de interés libre de riesgo se retrocede en el árbol, obteniendo los valores de la opción en los instantes de tiempo previos $(n-1)dt$, $(n-2)dt\dots$, hasta alcanzar el valor actual de la opción o prima. En la práctica, para obtener aproximaciones razonables del precio de la opción se suelen utilizar en torno a 30 pasos de tiempo, lo que supone 31 posibles precios finales del activo y en torno a 1 billón de posibles trayectorias. El método de árboles binomiales permite valorar opciones de carácter europeo y americano. También pueden adaptarse a situaciones en las que el subyacente paga dividendos en determinados instantes de tiempo o al caso de tipos de interés dependientes del tiempo.

EJERCICIO

En la figura 4 se ilustra un árbol binomial sencillo para una opción vainilla europea de compra, que corresponde a los datos $S_0 = 10$, $\sigma = 25\%$, $K = 10.5$, $T = 0.5$ (6 meses) y $r = 3\%$, junto al paso de tiempo $dt = 0.25$.

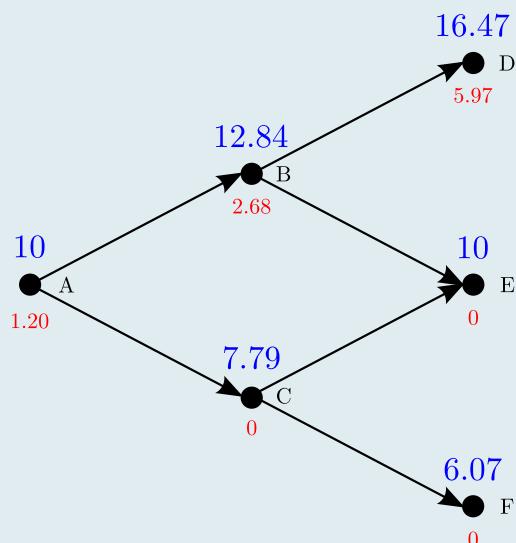


Figura 4. Ejemplo de árbol binomial para valoración de opción de compra europea. Autor: Carlos Vázquez Cendón.

Para construirlo, partiendo del precio actual del subyacente, S_0 , se rellenan los precios futuros del mismo avanzando hacia adelante en el árbol con los valores de $u = 1,2840$ y $v = 0,7790$. Una vez alcanzado el final, a partir de los valores en el vencimiento del subyacente, se obtiene el valor de la opción en ese instante:

$$D \rightarrow \max(16.47 - 10.5, 0) = 5.97$$

$$E \rightarrow \max(10 - 10.5, 0) = 0$$

$$F \rightarrow \max(6.07 - 10.5, 0) = 0$$

Utilizando la probabilidad de subida de precio, $p = 0,4527$ y el interés libre de riesgo, se rellenan hacia atrás en el tiempo los precios de la opción en los distintos nodos del árbol, en concreto:

$$B \rightarrow e^{-0.03 \times 0.25} (0,4527 \times 5,97 + 0,5473 \times 0,00) = 2,68$$

$$C \rightarrow e^{-0.03 \times 0.25} (0,4527 \times 0,00 + 0,5473 \times 0,00) = 0,00$$

$$A \rightarrow e^{-0.03 \times 0.25} (0,4527 \times 2,68 + 0,5473 \times 0,00) = 1,20$$

La precisión de la valoración de los árboles binomiales mejora a medida que disminuimos el paso de tiempo dt , cuando este tiende a cero estaríamos trabajando con un modelo markoviano en tiempo continuo.

EJERCICIO

Repetir los cálculos del árbol binomial, dividiendo sucesivamente por 2 el paso de tiempo ($dt = 0.125$, $0.0625\dots$). Se aconseja el uso de alguna herramienta de software para realizar los cálculos: Excel, Geogebra, Phyton, Matlab, etcétera.

Uno de los modelos más populares de precios de activos en tiempo continuo es el de un proceso estocástico llamado lognormal, de modo que el precio del activo verifica la **ecuación diferencial estocástica**.

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dX_t,$$

donde μ y σ denotan la tendencia y volatilidad del activo, respectivamente, mientras que dX_t denota el incremento

del proceso de Wiener X_t , que es un tipo particular de proceso estocástico en un **espacio de probabilidad filtrado**. Conocidos S_0 , μ y σ , para simular precios gobernados por el modelo lognormal, podemos utilizar el método de Monte Carlo. Podemos realizar previamente un cambio de medida de probabilidad, de modo que la ecuación estocástica en la probabilidad de riesgo neutro se escribe en la forma

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dX_t$$

El **lema de Ito** es una herramienta fundamental del cálculo diferencial estocástico, análogo a la regla de la cadena en el cálculo diferencial determinista. En particular, el lema de Ito permite resolver esta última ecuación diferencial estocástica, obteniendo la siguiente expresión del proceso lognormal de precios en el instante t :

$$S_t = S_0 \exp[(r - \sigma^2/2)t + \sigma\sqrt{t}\varepsilon],$$

donde ε denota una variable aleatoria normal de media nula y varianza unidad. En la figura 5 se muestra la simulación de la evolución de precios de un activo con este modelo.

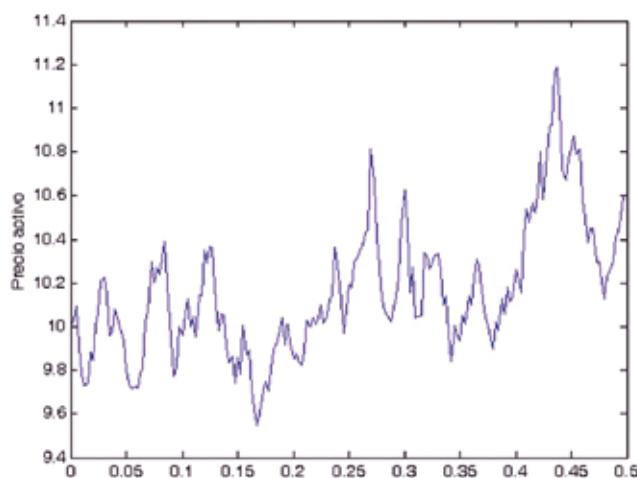


Figura 5. Trayectoria lognormal de precios para $S_0 = 10$, $T = 0.5$, $r = 3\%$ y $\sigma = 25\%$.
Autor: Carlos Vázquez Cendón.

En 1900, el matemático Louis Bachelier en su tesis doctoral propuso el proceso browniano como modelo de precios, de modo que su variación entre dos fechas se distribuye de modo normal. Su tesis fue redescubierta en 1965 por el premio Nobel de Economía Paul Samuelson, cuando estudiaba la valoración del contrato de opciones. En 1973 los trabajos de Fischer Black y Myron Scholes, junto con los del matemático Robert Merton, entre otras aportaciones, supusieron que el logaritmo de los precios es browniano como se maneja actualmente (procesos lognormales o browniano geométrico). Tras la muerte de Black, en 1997, Merton y Scholes recibieron el premio Nobel de Economía (que no se otorga a personas fallecidas) por sus estudios sobre la valoración de derivados financieros. Black se doctoró en matemática aplicada por la Universidad de Harvard, Scholes se doctoró en economía financiera en la Universidad de Chicago y Merton se licenció en ingeniería matemática en la Universidad de Columbia y se doctoró en economía en MIT bajo la dirección del prestigioso Paul Samuelson.

EJERCICIO

Elabora o utiliza un pequeño programa que construya las trayectorias de precios. Interpreta los resultados obtenidos con los distintos datos para aclarar conceptos como la volatilidad, la trayectoria de un proceso, la simulación de una variable aleatoria, etcétera.

El primer paso en el **método de Monte Carlo** para valorar una opción consiste en realizar un número elevado de simulaciones de los precios a vencimiento, sorteando valores de la variable aleatoria ε en la fórmula anterior, y para cada precio simulado se calcula la función de pago. A continuación, se obtiene la media de la función de pago como estimación del valor esperado a vencimiento y descuenta ese valor esperado a la fecha de valoración mediante el tipo de interés libre de riesgo. Matemáticamente, si denotamos por V_0 el valor de una opción europea de compra en el instante $t = 0$, este viene dado por la expresión:

$$V_0 = e^{-rT} E_Q [\max (S_T - K, 0)]$$

donde E_Q denota la esperanza en la medida de probabilidad de riesgo neutro. Dicha esperanza es la que se estima mediante la media. Claramente, la fórmula indica que el valor actual de la opción es el valor esperado descontado de los beneficios a vencimiento, algo muy intuitivo desde el punto de vista financiero.

Si la función de pago de la opción solo depende del valor del subyacente en el vencimiento, simplemente se utiliza directamente la expresión de S_T , pero si la función de pago depende de la trayectoria seguida por los precios (esto es, depende de precios antes de vencimiento) entonces es necesario dividir el intervalo hasta vencimiento en subintervalos y simular precios en instantes previos al vencimiento.

EJERCICIO

Elabora una hoja Excel o emplea alguna herramienta software para calcular el precio de una opción mediante simulaciones de Monte Carlo.

Las ventajas de la simulación Monte Carlo son fundamentalmente dos: resulta muy intuitiva desde el punto de vista financiero y se adapta a una amplia gama de procesos estocásticos de precios. Cuando se desconoce la solución exacta de la ecuación estocástica, se requieren métodos numéricos para aproximarla, como

los de tipo Euler-Maruyama o de Milstein. Las desventajas principales de Monte Carlo son: el elevado coste computacional para alcanzar una buena precisión y la dificultad de adaptarlo a productos con posibilidad de ejercicio anticipado, como es el caso de las opciones americanas. Para acelerar el método y alcanzar la misma precisión con menos muestras existen técnicas de reducción de la varianza, como las variables antitéticas, control de varianza o el muestreo por importancia. Para las opciones americanas, lo más clásico es la técnica de Longstaff-Schwartz.

Además de los métodos binomiales y de Monte Carlo descritos, desde mediados de los años setenta del siglo pasado la valoración de opciones ha estado popularmente unida a la fórmula de Black-Scholes, que sería más justo llamarla fórmula de Black-Merton-Scholes, pues los tres intervinieron en la obtención de la misma. Dicha fórmula se basa en una serie de hipótesis del modelo de Black-Scholes, que enumeramos a continuación:

- El precio del activo subyacente sigue un camino aleatorio lognormal.
- El tipo de interés libre de riesgo y la volatilidad son funciones deterministas del tiempo, de hecho en la versión más popular de la fórmula se suponen constantes.
- Ausencia de arbitraje: todas las carteras libres de riesgo producen con la misma rentabilidad, que se conoce como tipo de interés libre de riesgo.
- No se consideran los costes de transacción (mercado sin fricciones) ni fiscales.
- Se puede comprar y vender una cantidad no necesariamente entera de activos financieros en tiempo continuo (mercado continuo).
- En la versión más clásica se supone que el activo no paga dividendos.
- Mercado con posiciones en corto y largo: se pueden vender opciones sobre activos que no se poseen, garantizando su reintegro a vencimiento o en el momento de ejercicio.

Aunque las hipótesis anteriores son todas muy discutibles en la práctica, la metodología desarrollada por F. Black, R. Merton y M. Scholes ha sido adaptada por investigadores posteriores a unas hipótesis más

realistas. Por ejemplo, han aparecido los denominados modelos de salto-difusión, incorporando procesos de Poisson o de otro tipo, que permiten evoluciones de precios con discontinuidades (saltos), algo que no es posible con las trayectorias continuas del modelo lognormal. También han surgido modelos estocásticos para la evolución de los tipos de interés (no tan necesarios en el caso de opciones) o para la volatilidad. Los modelos de volatilidad estocástica, como los recientes modelos de tipo SABR, plantean un sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas para el precio y la volatilidad del activo, que tienen una cierta correlación entre sí. También han surgido modelos que incorporan los costes de transacción o el pago de dividendos asociados al subyacente.

Utilizando el lema de Ito y la **técnica de cobertura dinámica**, el modelo de Black-Scholes se formula en términos de una ecuación en derivadas parciales (EDP). En concreto, se supone que el valor de la opción también es un proceso estocástico V_t , dependiente del precio del subyacente y del tiempo a través de una función V , es decir, $V_t = V(t, S_t)$. La función V verifica la EDP de Black-Scholes:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + r \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

junto con la condición adicional $V(S, T) = F(S)$, siendo $F(S)$ el valor del pago a vencimiento del producto derivado. Por ejemplo, para una opción de compra europea $F(S) = \max(S - K, 0)$ y para una opción de venta $F(S) = \max(K - S, 0)$. La EDP de Black-Scholes puede transformarse en la clásica ecuación del calor, planteada inicialmente por Fourier para modelar el comportamiento de la temperatura en una barra de longitud infinita. Como la solución de la ecuación del calor es conocida desde hace tiempo, para opciones de compra europeas se obtiene la siguiente solución de la EDP.

$$V(t, S) = SN(d_1) - \exp(-r(T-t)) K N(d_2)$$

conocida como fórmula de Black-Scholes, siendo

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}, \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma \sqrt{T-t}}$$

con

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy$$

Al igual que en los otros métodos de valoración, un hecho destacable es que el valor de la opción es independiente de la tendencia del activo, representada por μ . La explicación financiera proviene del hecho de que las opciones son instrumentos de protección frente a la incertidumbre de los precios del subyacente, que aparece reflejada en la volatilidad. Al introducir la hipótesis de ausencia de arbitraje, al inversor le da igual la tendencia.

Si aplicamos la fórmula de Black-Scholes a la opción de compra del ejemplo del árbol binomial obtenemos el precio $V_0 = V(0,10) = 0,56$, muy diferente del precio 1,20 obtenido con el árbol. El uso de un árbol con paso de tiempo grande se planteó sólo para facilitar la comprensión de su construcción, quedando de manifiesto la necesidad de un paso de tiempo menor para obtener aproximaciones razonables del precio de la opción.

EJERCICIO

La fórmula de Black-Scholes se puede implementar en el software más familiar para los alumnos de bachillerato o simplemente utilizar la calculadora para un caso concreto. No hay que perder de vista que los tres métodos descritos se utilizan para calcular lo mismo: el precio de la opción. Es ilustrativo comparar el precio obtenido con los distintos métodos para los mismos datos financieros, comprobando lo que ocurre cuando en el árbol binomial disminuimos el paso de tiempo y en el de Monte Carlo aumentamos el número de simulaciones. Puede resultar interesante dividir una clase en grupos, con carteras iniciales de acciones y opciones, haciendo evolucionar sus precios de acuerdo con los parámetros del modelo. Para algunos tal vez resulte más motivador sustituir el subyacente de las acciones por futbolistas: ¿Qué volatilidad debemos ponerle a Lionel Messi o a Cristiano Ronaldo? ¿Cuál sería el precio de una opción de compra sobre Iker Casillas o de venta sobre Andrés Iniesta?

La anterior fórmula de Black-Scholes es válida para las opciones de compra europeas, existiendo otra análoga

para las de venta. En el caso de opciones americanas no existe una fórmula exacta y es necesario utilizar métodos numéricos para aproximar su precio. Los métodos numéricos para resolver la EDP más utilizados son los de diferencias o **elementos finitos**, combinados con técnicas específicas para tratar restricciones de desigualdades asociadas a la posibilidad de ejercicio anticipado.

En la figura 6 se representan ejemplos de las funciones que proporcionan las fórmulas de Black-Scholes para opciones de compra y venta con *strike* igual a 15.

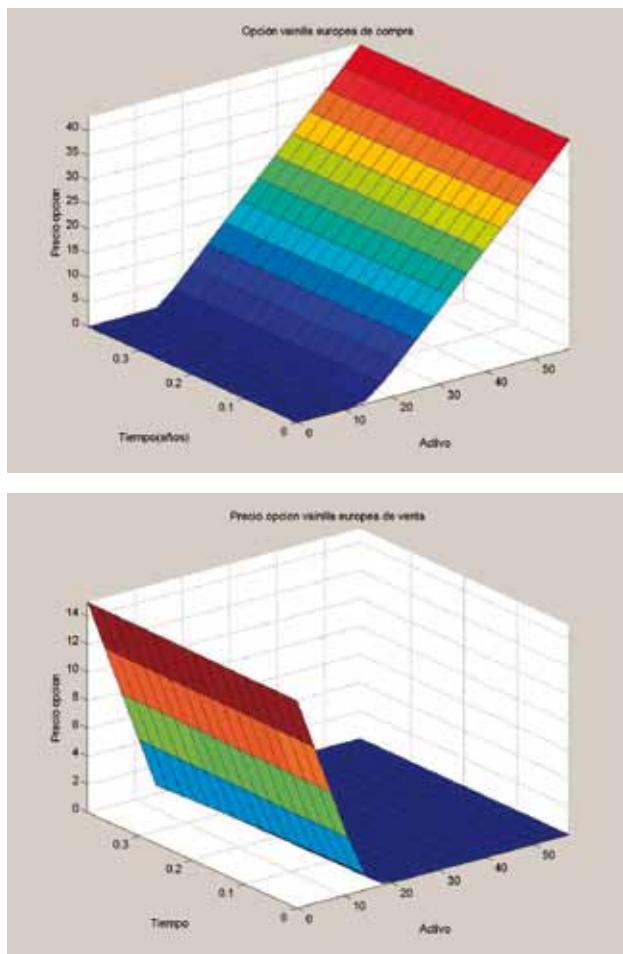


Figura 6. Representación del precio de opciones europeas de compra y venta.
Autor: Carlos Vázquez Cendón.

VALORACIÓN DE INVERSIONES CON EFECTOS MEDIOAMBIENTALES

Como se indicaba al principio de esta unidad didáctica, la acción del hombre sobre el medio es uno de los factores externos más relevantes de modificación medioambiental del planeta Tierra. La irreversibilidad de algunas acciones sobre el medio debe ser tenida en cuenta a la hora de iniciar proyectos de inversión. El modelado matemático permite estudiar la oportunidad de iniciar proyectos, que tienen incertidumbre tanto en su beneficio económico como en sus efectos instantáneos e irreversibles sobre ciertas regiones del planeta. En ellos, el beneficio medioambiental desaparece en el momento de iniciar el proyecto. Por ejemplo, podemos considerar un paraje natural –como una playa o un bosque– susceptible de un uso alternativo, construyendo un puerto, un dique, una planta industrial o una urbanización, cuyo efecto en el medio ambiente es irreversible. Cuando los beneficios medioambientales y los derivados del proyecto son inciertos, se pueden modelar estos mediante los procesos estocásticos adecuados, surgiendo el problema de determinar cuándo es el instante óptimo para iniciar el proceso de inversión para obtener la máxima utilidad conjunta.

Este tipo de problemas son objeto de investigación en el ámbito de la matemática aplicada y se pueden estudiar mediante técnicas análogas a las empleadas en la valoración de opciones financieras, surgiendo modelos basados en EDP de tipo Hamilton-Jacobi-Bellman. Como punto de partida, podemos considerar que los beneficios unitarios de cierto factor medioambiental (provenientes del atractivo turístico, en el caso de una playa) están dados por el proceso estocástico M_t y los del proyecto industrial alternativo (supongamos, la creación de una planta regasificadora) por el proceso P_t , de modo que la evolución de ambos procesos está gobernada por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} dM_t &= \mu_1 M_t dt + \sigma_1 M_t (dX_t^1 + \rho dX_t^2), M_0 = m \in \mathbb{R} \\ dP_t &= \mu_2 P_t dt + \sigma_2 P_t (\rho dX_t^1 + dX_t^2), P_0 = p \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

donde X_t^1 y X_t^2 denotan dos procesos de Wiener con coeficiente de correlación, ρ , μ_1 y μ_2 denotan las tendencias de

los beneficios medioambientales y del proyecto industrial, respectivamente, siendo σ_1 y σ_2 sus volatilidades correspondientes. Como los efectos son irreversibles, al inicio del proyecto industrial los beneficios medioambientales desaparecen y una posible función de utilidad conjunta es

$$U(m, p; T) = E \left[\int_0^T e^{-rs} M_s ds + \int_T^\infty e^{-rs} P_s ds \right]$$

donde E denota el valor esperado y r el tipo de interés. En estas condiciones, el problema asociado a la EDP de Hamilton-Jacobi-Bellman modela la utilidad conjunta v que se obtiene si iniciamos el proyecto en el instante óptimo, por ejemplo,

$$v(m, p) = \max_T U(m, p; T)$$

que depende de los beneficios iniciales del medio ambiente y del proyecto industrial. La deducción y escritura del problema de Hamilton-Jacobi-Bellman asociado va más allá del alcance de estas notas. Su resolución requiere el uso de técnicas numéricas específicas (métodos de diferencias finitas, elementos finitos, etcétera), que permiten calcular la función.

HERRAMIENTAS INFORMÁTICAS PARA EL CÁLCULO FINANCIERO

En el caso de algunos métodos, como el de Monte Carlo, ya se ha señalado el inconveniente de la lentitud de sus cálculos para valorar opciones. En otros métodos más rápidos la necesidad de repetir una gran cantidad de cálculos para valorar las grandes carteras de productos financieros demanda el uso de herramientas de cálculo muy rápidas y eficientes. Los métodos numéricos de valoración se programan para crear aplicaciones de software que se ejecutan en los ordenadores.

En cuanto a los entornos de programación, es frecuente el diseño de maquetas de aplicaciones financieras en Excel, que después se programan en Matlab o C++ para reducir el coste computacional y acelerar los cálculos

en situaciones reales. También existen aplicaciones comerciales, con las limitaciones de no cubrir algunos de los nuevos productos financieros que se van diseñando o los modelos matemáticos más avanzados. En cuanto al hardware, se utilizan ordenadores potentes o granjas (*clusters*) de ordenadores. Al igual que en otras aplicaciones científicas, muy recientemente se detecta un interés creciente del sector financiero por el uso de procesadores gráficos o GPU (*graphic processors units*), similares a los que se usan en la aceleración de gráficos en los juegos de las videoconsolas. Aunque su programación eficiente requiere el conocimiento de entornos específicos (CUDA), algunos métodos numéricos muy usados en finanzas, como el de Monte Carlo, resultan paradigmáticos para ilustrar la sorprendente reducción de tiempos de cálculo que proporciona la tecnología de GPU.



Figura 7. Análisis de datos financieros. Autor: Carlos Vázquez Cendón.

BIBLIOGRAFÍA DE INTERÉS

Acción A., Arregui I., Vázquez C. (2010): "Numerical solution of a free boundary problem associated to investments with instantaneous irreversible environmental effects". *Applied Mathematics and Computation*, vol. 215, nº 9, pp. 3461-3472.

Artículo científico reciente en el ámbito de las técnicas numéricas para resolver un modelo de valoración de inversiones con efectos medioambientales. Ilustra un ejemplo de la formulación matemática de modelos realistas, así como la existencia de técnicas de análisis y de métodos numéricos para resolverlos, dando respuestas cuantitativas y cualitativas razonables.

Bachelier, L. (1900): "Théorie de la spéculation". *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.*, vol. 17, pp. 21-86. Paris: Société Mathématique de France.

Tesis de L. Bachelier, redescubierta por P. Samuelson, cuando este retomó el estudio de los problemas de valoración de productos financieros. En ella se plantean los contratos de opciones para cubrir el riesgo de las acciones. A diferencia de los modelos de Black-Scholes posteriores, planteaba procesos brownianos sin deriva para la evolución de precios de acciones.

Black, F. y Scholes, M. (1973): "The pricing of options and corporate liabilities". *Journal of Political Economy*, nº 81, pp. 637-659.

Artículo científico de referencia en el que se plantean distintas formas de deducir la fórmula de Black-Scholes, que proporciona el valor de las opciones europeas. Entre sus referencias aparece el artículo de Merton del mismo año.

Hull, J. (2000): *Options, futures and other derivatives* (4^a ed.). Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall.

Libro de referencia para iniciarse en todos los conceptos relacionados con la valoración de opciones y otros derivados. El éxito del libro viene avalado por sus sucesivas ediciones, su uso en los cursos de grado y posgrado sobre estos temas y sus traducciones a numerosos idiomas.

Hull, J. (2011): *Introducción a los mercados de futuros y opciones*. México: Pearson.

Traducción al castellano de una de las sucesivas ediciones del libro en lengua inglesa.

Malkiel, B. G. (2008): Un paseo aleatorio por Wall Street. Madrid: Alianza Editorial.

Texto divulgativo en el cual, tras analizar la evolución histórica de los mercados financieros, con sus burbujas y crisis, el autor ofrece su visión sobre el análisis técnico y fundamental. Sostiene que es muy difícil superar los rendimientos del mercado con estrategias particulares. También expone la moderna teoría de carteras.

Merton R. C. (1973): "The theory of rational option pricing". *Bell Journal of Economics and Management Science*, vol. 4, pp. 141-183.

Artículo científico de referencia en el que primero se indican ciertas restricciones que han de verificar el valor de las opciones y se deduce de forma alternativa la ecuación y fórmula de Black-Scholes, incluyendo extensiones al caso de pago de dividendos entre otras. Entre sus referencias aparece el artículo de Black y Scholes del mismo año.

Vázquez, C. (2010): "An introduction to Black-Scholes modeling and numerical methods in derivatives pricing". MAT Serie A, vol. 17.

Breve trabajo monográfico sobre el planteamiento, deducción y resolución numérica de los modelos de Black-Scholes más elementales para la valoración de opciones sobre acciones y de derivados de tipo de interés a corto. Es un resumen de un curso impartido por el autor en la Facultad de Ciencias Empresariales de la Universidad Austral de Rosario (Argentina). El documento es de libre acceso en la web de la revista o se puede solicitar al autor.

MATERIALES AUXILIARES

LIBRO

Paulos, J. A. (2004): *Un matemático invierte en bolsa*. Barcelona: Tusquets, col. Metatemas, nº 83.

Libro escrito por el excelente divulgador matemático J. A. Paulos, también autor del célebre libro *El hombre anumérico*. Aprovecha aquí la descripción de la aventura personal de sus inversiones en Bolsa para dar a conocer los

tecnicismos que aparecen en los mercados. Nos presenta también la visión de un matemático sobre los conceptos relacionados con los mercados, explorando las falacias y engaños que existen detrás del funcionamiento de las bolsas mundiales.

PÁGINAS WEB

<http://mathforum.org/fe/>. Página web con contenidos sobre matemática financiera diseñados para el aula.

http://www.mathgoodies.com/lessons/toc_vol10.html. Página web con contenidos matemáticos para el aula. Esta unidad se centra en matemáticas para el consumo: porcentajes, proporciones, descuentos y precios de rebajas, interés simple, comisiones, impuestos e incrementos y descuentos porcentuales. Ofrece problemas de la vida real.

<http://www.meff.es/>. Página web del MEFF, mercado secundario oficial regulado por las leyes españolas e integrado en Bolsas y Mercados Españoles (BME), el operador de los Mercados de Valores españoles. MEFF está bajo la supervisión de la Comisión Nacional del Mercado de Valores. MEFF ofrece servicios para la negociación y actúa como cámara de contrapartida central de futuros y opciones sobre el IBEX-35, sobre acciones y sobre el Bono Nocialón Español.

<http://www.ceremade.dauphine.fr/FLMI/FLMI-frames-index.html>. Foward Look on Mathematics and Industry permite a la comunidad científica europea, en conjunto con los políticos, desarrollar perspectivas a medio y largo plazo y análisis de la investigación con el objetivo de definir las agendas de investigación a nivel nacional y europeo.

PELÍCULAS

Wall Street (Oliver Stone, 1987). La película describe el duro mundo de los brokers. Bud Fox (Charlie Sheen) intenta abrirse camino en Wall Street y comienza a tra-

jar para Gordon Gekko (Michael Douglas). Descubre que Gekko es un hombre sin escrúpulos al que únicamente le importa el dinero y que es capaz de hacer todo lo posible para conseguir su objetivo. Fox decide actuar de forma honesta sacando a la luz el engaño.

Margin call (J. C. Chandor, 2011). Película de suspense protagonizada por Kevin Spacey, Paul Bettany, Jeremy Irons, Zachary Quinto, Penn Badgley, Simon Baker, Mary McDonnell, Demi Moore y Stanley Tucci, y dirigida y escrita por J. C. Chandor que trata de las crisis bancarias. En ella, un banco calcula erróneamente la calificación de riesgo sobre un producto financiero con el que opera. Los activos que conforman este producto se están degradando tanto que amenazan con quebrar el banco entero. Sin embargo, se decide vender los activos tóxicos a cualquier precio con tal de salvar la compañía. Esta trama desencadena el conflicto con el protagonista, ya que supondría en un futuro inmediato una importante crisis económica.

DOCUMENTALES Y MATERIAL AUDIOVISUAL

The flaw (David Sington, 2011). Documental que analiza las causas de la actual crisis económica. Disponible en <http://www.youtube.com/watch?v=7xion8TV1VY>.

The midas formula (1999). Documental de la BBC que describe cómo se llegó a la fórmula de Black-Scholes (también "Black-Scholes-Merton"), que rige actualmente los mercados. Disponible en <http://www.youtube.com/watch?v=4auzn4bK1bM>.

Inside job (Charles Ferguson, 2010). Documental sobre la crisis financiera de 2008. Presenta investigaciones y entrevistas con financieros, políticos, periodistas y académicos. Desde el punto de vista narrativo, su estructura cuenta con varias partes: la introducción se centra en la crisis financiera en Islandia de 2008 y 2009, continúa con la exposición de las causas de crisis mundial, para terminar con un diagnóstico de la situación actual y concluir que lo que se ha hecho durante la administración de Barack Obama es insignificante.

CATÁSTROFES INDUCIDAS POR EL HOMBRE

*Carlos Parés, M^a Luz Muñoz Ruiz
y José Manuel González Vida*

3.3

Objetivos, contenido y criterios de evaluación de acuerdo con los Reales Decretos de Enseñanzas Mínimas, (1467/2007 de 2 noviembre para Bachillerato y 1631/2007 de 29 de diciembre para Educación Secundaria Obligatoria).

El objetivo de este capítulo consiste mostrar las herramientas que aportan las matemáticas para comprender el funcionamiento de los sistemas naturales sobre los que actúa el hombre, con la finalidad de predecir y controlar su evolución y, finalmente, para optimizar sus actuaciones, maximizando los beneficios y minimizando los daños.

Los autores se centran en las catástrofes provocadas en la naturaleza por el hombre, tales como incendios, explotación descontrolada de recursos naturales (como en el caso de la pesca, madera o minerales), la contaminación medioambiental, y los accidentes nucleares. También considera aquellos desastres que tienen su origen posterior en el hombre, como son la desertificación, algunas inundaciones y movimientos sísmicos, y el cambio climático global.

Caracteriza el efecto antropogénico, es decir, el efecto de la acción humana en la naturaleza, en dos niveles: uno local, referido a fenómenos concretos en áreas determinadas, y otro global, referido a cambios producidos en los procesos interactivos de origen físico, químico y biológico que regulan el sistema del planeta Tierra.

Los autores señalan las disciplinas que se ocupan de estos fenómenos y las herramientas con las que se aborda su estudio: análisis numérico, el análisis matemático, la estadística y la investigación operativa. Pone especial énfasis en el diseño y desarrollo de modelos matemáticos, los cuales expresan la evolución de un sistema real como un problema matemático, con sus datos y sus incógnitas.

El primer ejemplo que se expone es la modelización de la ruptura de una presa, exemplificando los pasos para matematizar cualquier situación real mediante la elección de las variables que caracterizan el estado del sistema físico en estudio, y la expresión matemática de las leyes físicas que rigen la evolución de las variables seleccionadas que, en este caso, consisten en un sistema de ecuaciones en derivadas parciales, distinguiendo en las fórmulas qué cantidades son datos y cuáles son incógnitas. También plantea y ejemplifica el proceso de discretización de una riada, para obtener una buena aproximación de su transcurso a partir de los datos disponibles.

Considera además la modelización de la prevención y extinción de incendios forestales, el control de vertidos tóxicos en tierra (vertido de Aznalcóllar) o en el mar (hundimiento del *Prestige*), y los procesos de desertización.

Todos los ejemplos escogidos son de interés por su difusión social reciente y debido a su impacto medioambiental. La modelización que en cada caso se muestra puede entenderse sin el dominio técnico total de las herramientas matemáticas subyacentes. Por otra parte, ponen claramente de manifiesto la potencialidad de la conceptualización matemática para plantear cuestiones y resolver problemas mediante la competencia de modelización. El capítulo concluye con una serie de notas históricas y curiosidades culturales que enriquecen y amenan su lectura.

INTRODUCCIÓN

Paradójicamente, el ser humano es el único ser vivo plenamente consciente de que su futuro como especie depende de la salud del planeta y al mismo tiempo de que es el que más la amenaza. Como le ocurre al aprendiz de brujo *interpretado* por Mickey Mouse en el famoso episodio de la película *Fantasía* (Walt Disney, 1940) que ilustra la pieza musical compuesta por Paul Dukas en 1899 (basada a su vez en un poema de Goethe de 1797), al ser humano le resulta imposible resistirse a la tentación de usar la varita mágica para valerse del medio natural en su propio beneficio. Desgraciadamente, a diferencia de lo que ocurre en el citado episodio, el brujo no vuelve a tiempo para detener a las fregonas y evitar la **catástrofe**. La experiencia nos demuestra una y otra vez que procesos originados por el hombre pueden terminar muy mal. Incendios, explotación descontrolada de recursos naturales –como la pesca, madera o minerales–, contaminación medioambiental, accidentes nucleares, etcétera, son sucesos que nos vienen a la mente cuando pensamos en catástrofes provocadas por el hombre. Pero también hay otros desastres que, a veces bajo la apariencia de catástrofes naturales, tienen su origen ulterior en la mano del hombre, como son la desertificación, algunas inundaciones y movimientos sísmicos y, cómo no, el **cambio climático** global.

Debemos pues tener en cuenta el efecto **antropogénico**. Es decir, el efecto de la humanidad, en dos niveles: a) local, referido y reducido a fenómenos concretos en áreas concretas y b) global, referido a los cambios producidos en los procesos interactivos de origen físico, químico y biológico que regulan el sistema conformado por el planeta Tierra.

En el caso del ser humano, la varita mágica no es otra cosa que la razón, que permite comprender los procesos naturales a través de la ciencia y actuar sobre ellos a través de la tecnología. Como no es esperable que nuestra especie renuncie a actuar sobre el medio que le rodea, puesto que se trata de una de las características que la definen, y como no hay brujos que vengan a detener los procesos justo a tiempo para evitar o mitigar estas catástrofes, solo queda una salida: el aprendiz tiene que adquirir por sí mismo las competencias suficientes

para evitar el desastre. Es decir, la ciencia y la tecnología tienen que encontrar soluciones a los problemas que su propio progreso plantea: este es el gran reto de nuestra especie.

¿Cómo pueden ayudar las matemáticas a superar este reto? En primer lugar, al igual que los aprendices de mago de la popular saga *Harry Potter* (J. K. Rowling) tenían que aprender latín para usar adecuadamente la varita, los científicos y tecnólogos han de aprender matemáticas, que es el lenguaje universal de la naturaleza como ya comprendió Galileo Galilei (también tienen que aprender inglés, pero esa es otra historia). Pero además la matemática, como ciencia específica, aporta herramientas eficaces para evitar o mitigar las catástrofes antropogénicas. En concreto, aporta herramientas que sirven para **comprender** el funcionamiento de los sistemas naturales sobre los que se actúa, para **predecir** y **controlar** su evolución y, finalmente, para **optimizar** las actuaciones, maximizando los beneficios y minimizando los daños.

Son diversas las ramas de las matemáticas que se ocupan del desarrollo de estas herramientas: el **análisis numérico**, el **análisis matemático**, la estadística, la investigación operativa, etcétera. Y el número de matemáticos que centran su investigación en dicho desarrollo es creciente, tanto a nivel nacional como internacional.

El objetivo de este capítulo es presentar algunos ejemplos concretos de desarrollo de herramientas matemáticas destinadas a comprender, predecir, controlar u optimizar procesos antropogénicos. En particular, pondremos un especial énfasis en el desarrollo de **modelos matemáticos** que, como veremos, permiten expresar la evolución de un sistema real como un problema matemático con sus datos y sus incógnitas. La solución de este problema, si el **modelo** es correcto, proporciona una buena aproximación de la evolución real del sistema que se estudia. En concreto, veremos cómo se puede usar un **modelo matemático** para diseñar un plan de emergencias ante la eventual rotura de una presa próxima a una ciudad.

Aunque la utilidad y la eficacia de todas estas herramientas matemáticas son crecientes, también tienen, como todas, sus limitaciones. La principal limitación es común a cualquier mecanismo que pretenda poner freno a los desmanes y a los riesgos inasumibles: de nada sirven dichos

mecanismos si los que tienen la capacidad de aplicarlos no lo hacen por intereses comerciales, geopolíticos o estratégicos. No obstante, hay otras limitaciones específicas de las herramientas matemáticas, como son:

- La capacidad limitada de los ordenadores: la aplicación de una gran parte de las herramientas que se van a mencionar en este capítulo requiere un gran volumen de cálculos que se hacen con ordenadores. Aunque la capacidad de memoria y la rapidez de cálculo de los ordenadores crece rápidamente, no es posible abordar problemas de gran escala espacial o temporal con un nivel de detalle fino.
- Aunque las matemáticas tienen la reputación de ser las ciencias exactas por excelencia, cuando se aplican a problemas reales es imposible evitar errores e inexactitudes, como veremos en el caso de la simulación de la rotura de una presa. Por tanto, las predicciones obtenidas con un modelo matemático siempre tienen un grado mayor o menor de incertidumbre y no pueden ser tomadas como verdades absolutas: las simulaciones dan información sobre la probable evolución del sistema a partir de los datos de que se dispone, lo que es una información valiosa para la toma de decisiones. Pero es inevitable que el suceso real sea en ocasiones de mayor o menor intensidad que lo predicho, y no tiene sentido culpar a los científicos de estos errores que son inherentes a la naturaleza de las cosas. Esta limitación es especialmente intensa cuando se intenta predecir la evolución de sistemas naturales que pueden presentar, bajo ciertas circunstancias, comportamientos caóticos: pequeñas variaciones en los datos de partida pueden llevar a evoluciones muy diferentes en el tiempo.

PRIMER EJEMPLO: ROTURA DE UNA PRESA

Vamos a estudiar un ejemplo concreto de catástrofe: la rotura de una presa próxima a una ciudad. La figura 1 muestra una simulación de un episodio de estas carac-



Figura 1. Simulación de la rotura de una presa próxima a una ciudad. Fuente: Grupo EDANYA, Universidad de Málaga.

terísticas, realizada por el grupo EDANYA (Ecuaciones Diferenciales, Análisis Numérico y Aplicaciones) de la Universidad de Málaga, al que pertenecemos los autores del presente capítulo. En este epígrafe vamos a explicar, de forma muy simplificada, las etapas que se han seguido para obtener esta simulación.

El primer paso para matematizar cualquier situación real es la elección de los números que representan el estado del sistema físico que se desea simular. En el caso de la rotura de una presa, estos números son el espesor de la lámina de agua y el caudal (volumen de agua por unidad de tiempo). Estos números varían de un punto a otro del terreno, e incluso en un mismo punto cambian con el tiempo, por eso se les denomina variables. Por ejemplo, en un punto del terreno al que todavía no ha llegado la riada, el valor de ambas variables es cero, sin embargo, cuando recibe agua, sus valores cambian de forma brusca.

A continuación, se expresan matemáticamente las leyes físicas que rigen la evolución de las variables

seleccionadas que, en nuestro caso, son las leyes de conservación de la masa y de la cantidad de movimiento (o segunda ley de Newton). La expresión matemática de estas leyes da lugar a un conjunto de fórmulas, en las que aparecen derivadas de un tipo particular que se denominan *derivadas parciales*. Este conjunto de fórmulas es el denominado *modelo matemático*.

El siguiente paso consiste en **distinguir en las fórmulas qué cantidades son datos y cuáles son incógnitas**. En nuestro caso los datos son la aceleración de la gravedad, la densidad del agua, la topografía del terreno por el que discurre la riada (son datos reales correspondientes a una presa próxima a una ciudad española) y la situación hipotética antes de que se produjera el colapso de la presa (figura 2). Las incógnitas son los valores del caudal y del espesor de la lámina de la riada en todo punto y en todo el intervalo temporal en el que se desea realizar la simulación. Como es sabido, un conjunto de fórmulas en las que se mezclan varios datos y varias incógnitas se denomina en matemáticas *sistema de ecuaciones*. En este, como en muchos otros casos de modelos matemáticos, se trata de un *sistema de ecuaciones en derivadas parciales*. En concreto, el sistema de ecuaciones en el que está basada la simulación de la figura es el denominado de aguas someras o de Saint Venant: se trata de una simplificación de las ecuaciones generales de los fluidos (**ecuaciones de Navier-Stokes**, explicadas en el capítulo 2.2. de esta unidad didáctica) válida bajo la hipótesis de que las escalas horizontales

del flujo que se simulan son mucho mayores que las verticales (lo que ocurre en el caso de las riadas).

A lo largo de la educación primaria y secundaria se estudian determinadas ecuaciones o sistemas de ecuaciones para los que es posible encontrar la solución exacta con un número finito de cálculos: ecuaciones de primer y segundo grado, ecuaciones polinómicas de mayor grado con raíces enteras o sistemas lineales de ecuaciones. Pero cuando se aplican las matemáticas a la resolución de problemas reales, muy frecuentemente surgen ecuaciones imposibles de resolver de forma exacta con un número finito de operaciones. Y este es el caso del sistema que nos ocupa. ¿Qué hacer entonces?

Un primer paso importante es el **análisis matemático del modelo**: se trata de ver si el sistema de ecuaciones tiene solución y si, dado un conjunto completo de datos, esta es única. Si la respuesta a alguna de estas preguntas es negativa, el modelo matemático no sería útil: de poca utilidad resulta un modelo que prediga que el flujo de agua cuando se rompe una presa no existe o que, conocidos perfectamente todos los datos del problema, prediga diez evoluciones diferentes. El análisis teórico puede plantear serias dificultades técnicas, pero ofrece la garantía de que el modelo está, en cierto sentido, **bien planteado**.

Cuando se sabe que un sistema de ecuaciones tiene solución pero no se sabe cómo calcularla de forma exacta, se intenta al menos obtener una buena aproximación de la misma. Para ello, se considera un modelo más sencillo que aproxime adecuadamente al anterior y que sea más fácil de resolver. A este proceso se le denomina **discretización**.

En el caso de la simulación de la figura, el primer paso para discretizar el problema consiste en fragmentar todo el terreno en el que transcurre la riada en trozos pequeños de forma cuadrangular, que se denominan *células* o *volúmenes finitos*. En el modelo aproximado, que se denomina *modelo discreto*, las nuevas incógnitas son el caudal medio y el espesor medio de la lámina en cada una de las células y en una serie de instantes de tiempo sucesivos. Conocidas estas aproximaciones en un tiempo dado, el proceso de cálculo en el instante siguiente se lleva a cabo promediando el sistema de ecuaciones. Cuanto menor sea el tamaño de las células y, por tanto,

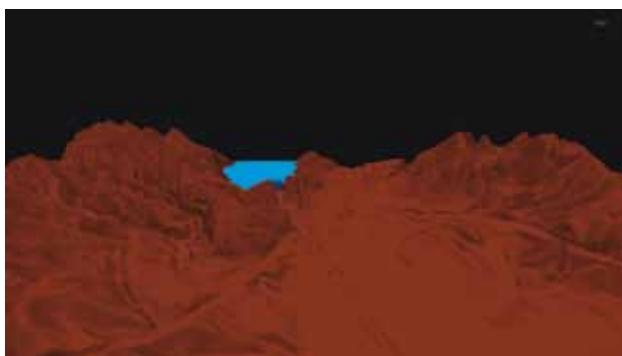


Figura 2. Detalle del modelo discreto del terreno en el entorno de la presa.
Fuente: Grupo EDANYA, Universidad de Málaga.

mayor su número, mejor es la aproximación que se obtiene de caudales y espesores. Obtenemos así lo que se denomina un *modelo numérico*, que es, fundamentalmente, un sistema de ecuaciones algebraicas (esto es, un sistema en que las incógnitas son números y en lugar de derivadas aparecen únicamente operaciones sencillas como sumas y productos). La disciplina matemática que se encarga de estudiar este tipo de proceso se denomina análisis numérico.

Resolver el modelo numérico obtenido suele implicar miles de millones de operaciones, por lo que es necesario elegir un algoritmo adecuado para su implementación en un ordenador; es decir, hay que confeccionar un programa que le dé a un ordenador (o a un conjunto de ordenadores que trabajan de forma coordinada) las instrucciones necesarias para que haga todas las cuentas.

Una vez hechas todas las operaciones, para obtener una figura como la número 2, correspondiente a un instante concreto, se pintan en celeste las células en las que el espesor de la lámina de agua no es cero en dicho instante. Utilizando las representaciones gráficas de la simulación en cada instante considerado se puede obtener una animación que representa el movimiento del agua (ver <http://youtube/QCnI72zeyGs>).

Las medidas experimentales son necesarias en el proceso anterior para proporcionar los datos que precise el programa y también para validar el modelo. Cada paso del proceso que lleva desde la realidad hasta la simulación conlleva errores de diferente naturaleza: de modelado, en los datos, de aproximación, de redondeo, etcétera. Es fundamental verificar si, a pesar de todo, las predicciones del modelo tienen que ver con el comportamiento real del sistema que se pretende simular. Esto es lo que se denomina **validación**. Para llevarla a cabo, una técnica habitual es aplicar el modelo a un evento de naturaleza similar al que se desea simular y comparar la predicción del modelo con lo que sucedió realmente. El modelo aquí presentado fue validado mediante su aplicación, adaptando los datos de partida, a la riada tóxica que se produjo en Aznalcóllar en el año 1998. Una vez validado el modelo, se obtiene una herramienta eficaz y general para la evaluación de riesgos en casos de rotura de presas o de depósitos de agua.

OTROS EJEMPLOS DE MODELOS DE CATÁSTROFES

Los incendios que asolan España cada verano, los vertidos tóxicos en tierra firme como el de Aznalcóllar, o en el océano como el del *Prestige*, la contaminación en ecosistemas como las rías gallegas, la desertificación creciente de la península o el efecto del deshielo de los casquetes polares en nuestras costas (y en el resto del planeta), la distribución óptima de ayuda entre la población tras una catástrofe, son algunos ejemplos de problemas en los que se usan las matemáticas para estudiar una o varias facetas de los mismos. Presentamos a continuación algunos ejemplos.

PREVENCIÓN Y EXTINCIÓN DE INCENDIOS FORESTALES

Según el informe anual (Forest Fires in Europe 2008) de la EFFIS (European Forest Fire Information System) los incendios suponen una amenaza actual y futura de



Figura 3. Incendio forestal. Fuente: Grupo de Investigación en Simulación Numérica y Cálculo Científico, Universidad de Salamanca.

los bosques españoles. España es, después de Portugal, el segundo país europeo con una mayor superficie afectada por incendios forestales. Según fuentes del Ministerio de Medio Ambiente y Medio Rural y Marino, en el periodo comprendido entre 1999 y 2008 se produjeron en España un total de 6.773 incendios (superficie quemada superior a 1 ha) afectando en conjunto a una superficie de 123.441,56 ha, lo que supone el 0,477% de la superficie nacional. Además de los grandes daños que producen los incendios en vidas humanas, propiedad privada y recursos naturales, la conservación de los bosques supone un factor fundamental en lo relativo al cumplimiento del Protocolo de Kioto respecto a las absorciones de CO₂.

El equipo dirigido por el profesor Luis Ferragut de la Universidad de Salamanca trabaja, en colaboración con la empresa Tecnosylva, en el desarrollo de modelos matemáticos que permitan hacer simulaciones con mayor rapidez que la propagación del fuego, de modo que se pueda aportar información en tiempo real a los equipos de extinción de incendios desplegados en las zonas afectadas, y estos puedan dirigir su actuación (por ejemplo, realizando cortafuegos o evacuando personas y animales) a las áreas hacia las que se dirige el frente. Los modelos que desarrolla el equipo se basan también en sistemas de ecuaciones en derivadas parciales, siguiendo un procedimiento similar al mencionado en el primer ejemplo.

Otro efecto de los incendios muy nocivo pero menos estudiado es la alteración de las propiedades del suelo

que produce el paso del fuego. La modificación de las condiciones edáficas es un aspecto fundamental para la posibilidad de regeneración del ecosistema dañado. El grupo de la Universidad de Vigo dirigido por el profesor José Durany trabaja, en colaboración con el Centro de Investigaciones de Lourizán (Pontevedra), en el desarrollo de un modelo matemático que permite analizar el daño producido en el suelo como consecuencia del paso de un frente de calor.

Otros modelos, como el desarrollado por el grupo de la Universidad de Santiago de Compostela liderado por la profesora M^a Inmaculada Paz Andrade en colaboración con investigadores de la Universidad de Vigo y del CSIC, así como el desarrollado por el equipo de la Universidad de Barcelona dirigido por la profesora M^a del Carmen Llasat, permiten predecir, respectivamente, la localización temporal y espacial más probable de los incendios, información de capital importancia para los planes de previsión y extinción.

RIADA TÓXICA DE AZNALCÓLLAR

Las aguas residuales procedentes de la mina de la empresa Boliden-Apisra de Aznalcóllar (Sevilla) se acumulaban en dos depósitos próximos al río Guadiamar, que fluye hacia el parque natural de Doñana. El volumen de agua contenida, de unos 8 hm³, contenía una elevada carga de metales pesados disueltos. El 25 de abril de 1998 una parte del muro lateral de contención del mayor depósito cedió, dando lugar a una primera riada en el Guadiamar. Transcurridas aproximadamente 5 horas y 10 minutos, también cedió el muro que separaba ambos depósitos, dando lugar a una segunda riada. El vertido tóxico afectó a una zona de unos 30 km de longitud causando severos daños ambientales.

Como se ha comentado anteriormente, el grupo EDANYA de la Universidad de Málaga simuló este vertido a posteriori para validar su modelo de rotura de presas, integrado en la plataforma de simuladores de flujos geofísicos HySea. En la figura 5 se muestra una imagen de la simulación.

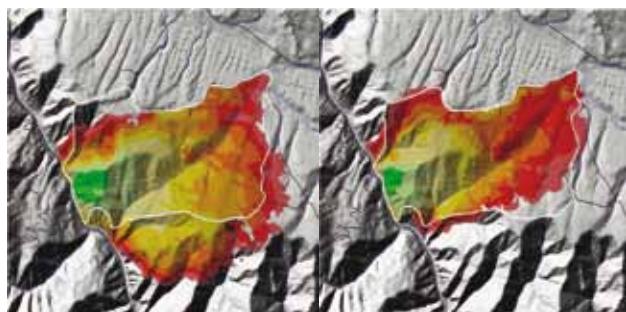


Figura 4. Comparación de modelos de incendios forestales con alta y baja resolución de viento. Fuente: B. Butler, J. Forthofer y M. Finney. Estados Unidos.



Figura 5. Simulación numérica de la riada de lodos tóxicos de Aznalcóllar.
Fuente: Grupo EDANYA, Universidad de Málaga.

EVOLUCIÓN DEL VERTIDO DEL PRESTIGE

El hundimiento del petrolero *Prestige* frente a las costas de Galicia en 2002 provocó la necesidad de establecer diferentes sistemas operativos en las regiones afectadas. En la figura 6 se muestra la ruta del *Prestige* desde el día de inicio de la crisis hasta el de su hundimiento, así como la extensión de los vertidos obtenida por satélite.



Figura 6. Ruta del *Prestige* desde el inicio de la crisis hasta su hundimiento. Trajetorías de los vertidos. Fuente: AZTI-Tecnalia. País Vasco.

La línea A es la trayectoria de los vertidos que entraron en el golfo de Vizcaya antes del hundimiento y la línea B es la trayectoria del fuel desde el pecio, situado a unos 4.000 m de profundidad, en los meses siguientes. También se señalan las primeras observaciones de manchas al norte de Galicia y los primeros impactos en la costa cantábrica.

Asimismo, se ha representado la trayectoria de una boya de deriva que se situó sobre manchas de fuel en el golfo y que mostraba el desplazamiento de la contaminación. Aunque inicialmente esta se dirigió hacia la costa francesa, a finales de enero y principios de febrero de 2003 los vientos del noroeste la llevaron hacia la costa del sudeste del golfo (costa francesa y del País Vasco), según habían predicho algunos modelos numéricos usados durante la crisis, como el desarrollado por el centro tecnológico vasco AZTI-Tecnalia. Las predicciones de los modelos colaboraron en buena medida a luchar contra la contaminación en el mar, minimizando el impacto sobre la costa, como puede apreciarse en la figura 7, en la que se representan las toneladas recogidas en tierra en la costa española y en la costa francesa, así como el fuel retirado por el dispositivo de barcos pesqueros del País Vasco.

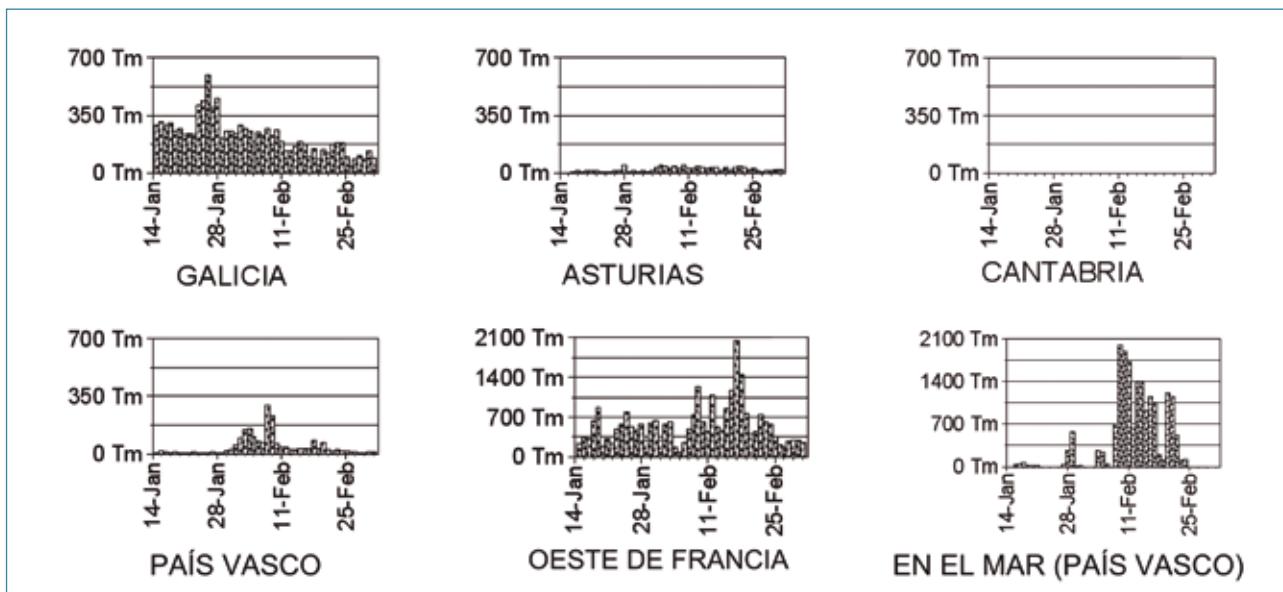


Figura 7. Toneladas recogidas en distintas zonas costeras así como las recogidas en el mar. Fuente: AZTI-Tecnalia. País Vasco.

CONTAMINACIÓN EN LAS RÍAS GALLEGAS

El grupo de la Universidad de Vigo dirigido por el profesor Lino Álvarez ha planteado y resuelto diferentes problemas evolutivos de **optimización** para la gestión óptima de sistemas de depuración de aguas residuales vertidas al mar (un primer caso donde se controla el nivel de depuración del vertido contaminante, y un segundo caso donde se controla el punto de vertido del emisario submarino). También ha abordado el estudio de un problema correspondiente a la purificación óptima de aguas contaminadas en áreas protegidas mediante la inyección de agua limpia. En todos estos problemas se utilizan otras técnicas matemáticas como la teoría de **control** y la optimización combinadas con el modelado matemático y la simulación numérica. En la figura 8 se representa la concentración óptima de coliformes en la ría de Vigo correspondiente al emplazamiento óptimo de los emisarios, a fin de que el impacto en determinadas zonas protegidas (como las playas) sea mínimo.

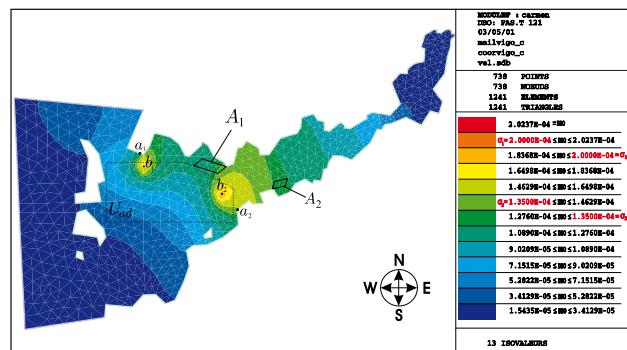


Figura 8. Concentración óptima de coliformes en la ría de Vigo correspondiente al emplazamiento óptimo de los emisarios. Fuente: Grupo de Simulación y Control. Universidad de Vigo.

DESERTIFICACIÓN

La desertificación es un proceso de degradación gradual de la tierra por el efecto de las actividades humanas y de las variaciones climáticas, tales como sequías prolongadas e inundaciones, que conduce a la pérdida de productividad del suelo y a la reducción de la cubierta vegetal.

España es el país de la Unión Europea con mayor índice de desertificación. Desde el punto de vista matemático, este proceso puede entenderse como la propagación de un frente que separa la zona desierta de la zona con vegetación. Los modelos matemáticos permiten incorporar los distintos efectos que afectan a la evolución de dicho frente, incluidos los antropogénicos. Este es uno de los temas que se aborda en el proyecto europeo FIRST (Fronts and Interfaces in Science and Technology), liderado por el profesor Jesús Ildefonso Díaz de la Universidad Complutense de Madrid, que cuenta entre sus miembros con el especialista en el tema Ehud Meron, de la Universidad Ben Gurion del Negev (Israel).

LOGÍSTICA HUMANITARIA

Un equipo de investigadores del área de Investigación Operativa de la Universidad Complutense de Madrid, dirigido por Begoña Vitoriano, trabaja en el desarrollo de técnicas matemáticas de utilidad para la toma de decisiones en la distribución de ayuda humanitaria, sobre el terreno tras un desastre, natural o provocado por el hombre. En el caso de la logística humanitaria, es necesario atender a múltiples factores para optimizar la respuesta, por lo que se trata de un modelo de decisión multicriterio, que ha sido validado en algunas intervenciones reales.

PROYECTO: SIMULACIÓN DE INCENDIOS FORESTALES

Proponemos, para finalizar, un proyecto de iniciación al modelado matemático, destinado a alumnos de secundaria con conocimientos de programación. Los conocimientos matemáticos necesarios son básicos.

El objetivo del proyecto es el desarrollo e implementación de un modelo básico de tipo **autómata celular** para la simulación de incendios. Vamos a representar

un bosque, de forma muy esquemática, como un cuadrado de lado L . Dividimos el cuadrado en $L \times L$ parcelas cuadradas de lado 1. Cada parcela tiene tres posibles estados que representaremos con 0, 1 y 2. El estado es 2 cuando la parcela tiene árboles que están ardiendo, 1 cuando tiene árboles que no están ardiendo y 0 cuando no hay árboles. En el instante inicial de la simulación se ponen todas las parcelas que están en los bordes del cuadrado en estado 0 (estas parcelas representan el borde del bosque). Las que están en el interior, se ponen en estado 1 (con probabilidad p) o 0 con probabilidad $1-p$. Para simular el foco del incendio, se elige al azar una parcela con árboles y se pasa su estado de 1 a 2. Tras este proceso inicial de definición del bosque y de inicio del incendio, se hacen M iteraciones en tiempo del modelo, teniendo en cuenta las siguientes reglas:

- Una parcela que estaba en la iteración anterior en estado 2 pasa a estar en estado 0 (el fuego ha consumido los árboles).
- Una parcela que estaba en la iteración anterior en estado 1 pasa a estar en estado 2 si una parcela con la que comparte un lado estaba en estado 2 (el fuego se propaga entre árboles vecinos).
- Una parcela del interior del bosque que estaba en estado 0 pasa a estar en estado 1 con una probabilidad q . Esta probabilidad indica la capacidad de regeneración del bosque ($q = 0$ implicaría que no hay regeneración durante el incendio).

Se propone desarrollar un programa que calcule la evolución de los estados de las parcelas y que, en cada iteración, dibuje el bosque con un código de colores: por ejemplo, se pueden dibujar en negro las parcelas que están en estado 0, en verde las que están en estado 1 y en rojo si su estado es 2. Una vez confeccionado y depurado el programa, se puede probar con distintos valores de las probabilidades p y q para estudiar cómo afectan sus variaciones a la simulación. En la figura 9 se presenta la simulación de un incendio obtenida con este modelo con los valores $L = 50$, $p = 0'75$ y $q = 0'01$.

Este modelo puede hacerse más complejo modificando las reglas: se pueden considerar también como vecinas a efectos de propagación de incendios las parcelas con un vértice común y/o incluir los efectos del viento haciendo que la propagación sea más probable en la

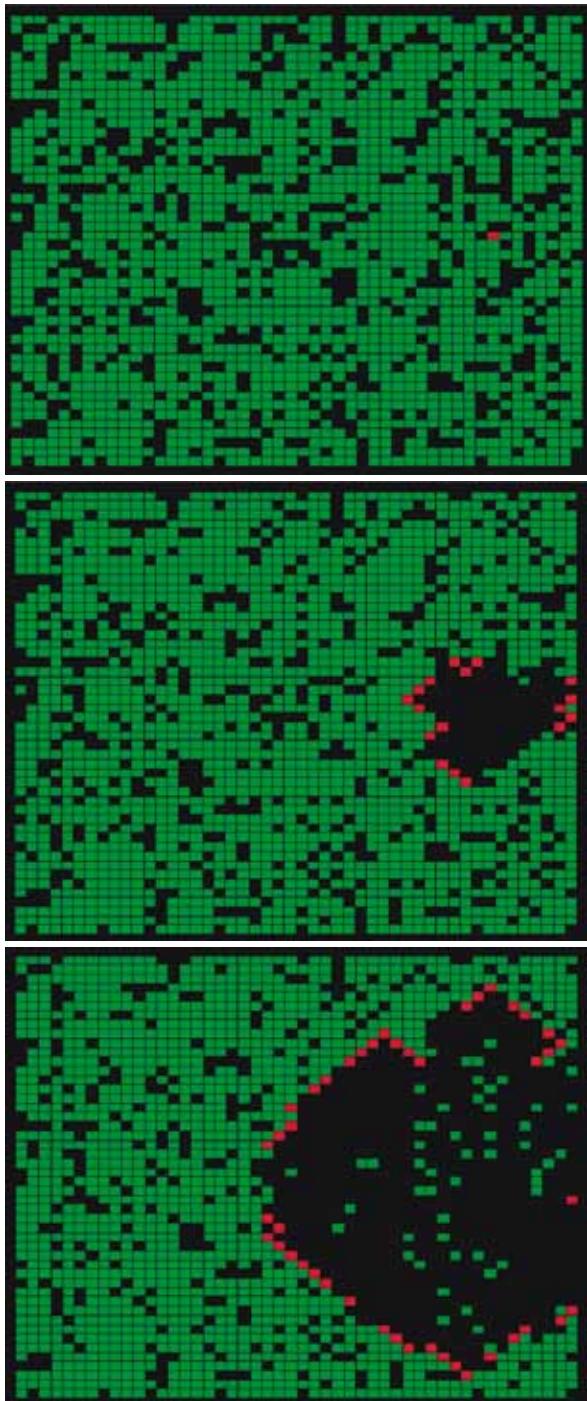


Figura 9. Varios instantes de la simulación con $p = 0.75$ y $q = 0.01$.

dirección del mismo: ver *An Introduction to Computer Simulation Methods. Applications to Physical Systems*.

Agradecimientos: los autores del capítulo agradecen la colaboración de L. Álvarez (Universidad de Vigo), J.I. Díaz (Universidad Complutense), L. Ferragut (Universidad de Salamanca), M. González (AZTI-Tecnalia).

CURIOSIDADES

Según se cita en el libro *El planeta Tierra*, fue el científico Joseph Fourier el primero en llamar la atención en 1824 sobre el posible papel de los factores antropogénicos en el planeta:

"El establecimiento y el progreso de las sociedades humanas, la acción de las fuerzas naturales, pueden cambiar notablemente y dentro de grandes regiones, el estado de la superficie del suelo, la distribución de las aguas y los grandes movimientos del aire. Dichos efectos son capaces de hacer variar el grado de calor medio a lo largo de varios siglos...."

Si buscamos la palabra *catástrofe* en el diccionario de la RAE, encontraremos como primera acepción "suceso infausto que altera gravemente el orden regular de las cosas". Curiosamente, la quinta acepción del término nos deriva a su relación con la física y la matemática: "cambio brusco de estado de un sistema dinámico, provocado por una mínima alteración de uno de sus parámetros".

"El aleteo de las alas de una mariposa hoy en Japón, puede provocar mañana un huracán en Nueva York". Hacia 1960, el matemático y meteorólogo Edward Lorenz, tratando de encontrar un modelo matemático sencillo para comprender el comportamiento de la atmósfera, llegó a un sistema de [ecuaciones diferenciales](#) con la siguiente particularidad: pequeñas diferencias en los datos de partida llevaban a grandes diferencias en los resultados, en tiempos suficientemente grandes. Lorenz llegó a la conclusión de que esta peculiaridad de sus ecuaciones reflejaba un comportamiento que se da en el sistema meteorológico real que estas simulaban. En consecuencia, por sofisticado que sea un modelo

Según la **Oficina Española de Cambio Climático**, se conoce como cambio climático "a la variación global del clima de la Tierra. Es debido a causas naturales y también a la acción del hombre y se produce a muy diversas escalas de tiempo y sobre todos los parámetros climáticos: temperatura, precipitaciones, nubosidad, etcétera. El término "efecto de invernadero" se refiere a la retención del calor del Sol en la atmósfera de la Tierra por parte de una capa de gases. Sin ellos la vida tal como la conocemos no sería posible, ya que el planeta sería demasiado frío. Entre estos gases se encuentran el dióxido de carbono, el óxido nitroso y el metano, que son liberados por la industria, la agricultura y la combustión de combustibles fósiles. El mundo industrializado ha conseguido que la concentración de estos gases haya aumentado un 30% desde el siglo pasado, cuando, sin la actuación humana, la naturaleza se encargaba de equilibrar las emisiones". Añade esta fuente que "en la actualidad existe un consenso científico, casi generalizado, en torno a la idea de que nuestro modo de producción y consumo energético está generando una alteración climática global, que provocará, a su vez, serios impactos tanto sobre la tierra como sobre los sistemas socioeconómicos".

Y finalmente destaca la importancia del modelado matemático: "la **modelización** es uno de los instrumentos a nuestro alcance que proporciona la integración, en el mayor grado posible, de los conocimientos sobre el sistema climático y que tiene como objetivo la obtención de simulaciones de los comportamientos del clima cuando el sistema, en su conjunto o en alguna de sus partes, se ve sometido a variaciones de los forzamientos que lo condicionan. El uso de modelos climáticos, unido al estudio de procesos físicos, permite establecer una teoría del clima

y del cambio climático. Ambos son la herramienta esencial para predecir cómo puede ser el clima del futuro según las distintas hipótesis de emisión de gases de **efecto invernadero**, y para justificar y explicar la variabilidad, de períodos mayores del decenio, observada en el pasado y en el presente".

En muchos libros es posible encontrar problemas de matemáticas basados en situaciones reales que se pueden resolver en su totalidad o parcialmente con los conocimientos de secundaria en esta materia. Por ejemplo, en el libro *Conexiones matemáticas: Motivación del alumnado y competencia matemática*, podemos encontrar propuestas una serie de tareas relacionadas con problemas surgidos en el desastre del *Prestige*. Estas tareas abarcan desde cuestiones sobre interpretación de datos hasta tareas de previsión.

En la web <http://naukas.com> podemos encontrar un abundante material ameno y de interés sobre todo tipo de ciencias. En el artículo "Analalfabetismo numérico, versión Groenlandia", por ejemplo, se nos propone una sencilla tarea matemática relacionada con una noticia sobre el deshielo aparecida en los medios. La noticia en cuestión era la distribución por parte de la NASA de unas imágenes basadas en datos de satélite según las cuales el 97% del hielo superficial de Groenlandia se había derretido. Algunos medios olvidaron el adjetivo superficial a la hora de difundir la noticia. El autor del artículo propone, en un tono desenfadado, calcular de qué volumen de hielo se estaría hablando en ese caso, y cuánto habría subido entonces el nivel del mar, para convencer al lector, con los resultados obtenidos tras unos simples cálculos, de lo absurdo de la noticia aparecida en algunos medios de comunicación.

Dos grandes matemáticos



Fuente: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Joseph_Fourier.jpg?uselang=es.

Jean Baptiste Joseph Fourier

(1768-1830) fue un matemático y físico francés. Tuvo un papel activo en la Revolución Francesa y fue encarcelado durante el Terror. En 1795 fue nombrado profesor en la École Normale Supérieure y posteriormente

fue el sucesor de Joseph-Louis Lagrange en la École Polytechnique. Fourier participó en la expedición a Egipto de Napoleón en 1798 y fue nombrado gobernador del Bajo Egipto. Sus principales contribuciones a las matemáticas son el desarrollo de las series que llevan su nombre y su aplicación a la resolución de la ecuación del calor y la ecuación de ondas. Fue también el descubridor del efecto invernadero.



Fuente: <http://www.aprender-mat.info/historyDetail.htm?id=Saint-Venant>.

Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant

(1797-1886), fue un físico y matemático francés que contribuyó al desarrollo de la mecánica de medios continuos y dedujo las ecuaciones de aguas someras en una dimensión espacial. En 1843 publicó la deducción correcta de las ecuaciones de Navier-Stokes para fluidos viscosos.

matemático para la predicción meteorológica, en la medida que sea fiel al sistema que simula, debe incorporar este tipo de comportamientos: cualquier pequeña perturbación, o error en las condiciones iniciales puede tener una gran influencia sobre el resultado final. Esto hace que sea muy difícil realizar predicciones climatológicas precisas a largo plazo. Desde entonces se denomina **efecto mariposa** a la amplificación de pequeñas perturbaciones que aparecen en el comportamiento de los **sistemas caóticos**. La **teoría del caos** estudia el comportamiento de este tipo de sistemas, que aparecen en muchos fenómenos naturales.

BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA

LIBROS

González Vida, J. M. y Parés, C. (2009): "Números y realidad: utilizando las matemáticas para modelar nuestro entorno". *Revista Uciencia*, nº 1, pp. 29-31. Málaga: Universidad de Málaga.

Artículo divulgativo en el que los autores ilustran la utilidad de las matemáticas en la resolución de problemas prácticos, con ejemplos como el proceso de simulación de la riada tóxica de Aználcollar, descrito con un lenguaje asequible para un público general. La revista UCiencia está disponible en <http://www.uma.es/uciencia/cms/menu/revista/>.

Gould, H., Tobochnik, J., y Christian, W. (2007): *An introduction to computer simulation methods: applications to physical systems*. San Francisco: Addison-Wesley.

Este libro ofrece una introducción a la física computacional, ligando de forma clara y asequible distintos aspectos de la física y de la programación. Algunos de los modelos que se presentan se basan en herramientas matemáticas sencillas que pueden ser comprendidas por alumnos de secundaria. En particular, el modelo de autómatas celulares para la simulación de incendios propuesto como proyecto es una adaptación de un modelo presentado en el libro, en el que se proponen además distintas extensiones.

Lions, J. L. (1990): *El planeta Tierra: el papel de las matemáticas y de los superordenadores*. Madrid: Espasa-Calpe, ser. Instituto de España, nº 8.

J. L. Lions (1928-2001), es considerado por muchos el fundador de la matemática aplicada francesa moderna. Fundó además una extensa escuela con representación en muchos países, incluyendo España, caracterizada por una investigación matemática de fuerte vocación aplicada y enraizada en el rigor del análisis matemático y numérico. Entre otros cargos, fue presidente de la Unión Matemática Internacional y, a iniciativa suya, el año 2000 fue proclamado Año Internacional de las Matemáticas. Fue presidente del CNES (el Centro Nacional de Estudios Espaciales francés) y del Consejo Científico de la Agencia Meteorológica francesa. En esta obra ofrece una exposición didáctica y detallada del papel de las matemáticas y la computación en el estudio del planeta Tierra, haciendo especial hincapié en el papel de la trilogía universal (modelización, análisis y control) en el estudio del clima.

Ortega, T. (2005): *Conexiones matemáticas: motivación del alumnado y competencia matemática*. Barcelona: Graó.

Este libro propone diversos problemas reales que se pueden resolver total o parcialmente con los conocimientos matemáticos de un alumno de secundaria, algunos de ellos relacionados con catástrofes como la del Prestige.

MATERIALES AUXILIARES

PÁGINAS WEB

<http://naukas.com>. Portal de ciencia, escepticismo y humor que incluye apartados sobre matemáticas y sobre medio ambiente y da acceso a multitud de recursos.

<http://incendioforestal.org>. Portal colaborativo sobre incendios forestales.

<http://www.youtube.com/grupoedanya>. Página que recoge simulaciones de inundaciones, roturas de presa y otros fenómenos.

<http://www.magrama.gob.es/es/cambio-climatico/>. Página oficial de la Oficina Española de Cambio Climático.

PELÍCULAS

El coloso en llamas (John Guillermin, 1974). Película protagonizada por Steve McQueen y Paul Newman. En San Francisco, para inaugurar la construcción del rascacielos más alto del mundo, se organiza una fiesta con numerosos invitados en la sala de baile, situada en la planta más alta. De repente, un fallo en la instalación eléctrica provoca un incendio. Los asistentes tienen pocas probabilidades de sobrevivir: al estar a una altura tan elevada, a los bomberos les resulta casi imposible controlar el infierno. La solución viene del trabajo conjunto del arquitecto (Paul Newman) y del jefe de bomberos (Steve McQueen).

Erin Brockovich (Steven Soderbergh, 2000). Película estadounidense protagonizada por Julia Roberts, basada en una historia real. Erin Brockovich es una madre divorciada sin trabajo que, como contrapartida tras la pérdida de un juicio, se instala en el despacho de su abogado. Decide investigar un caso que le llama la atención, descubriendo la relación directa entre las enfermedades del cliente —y también la de la familia de este—, con la contaminación del agua producida por las perforaciones de una compañía de gas y electricidad.

Cuando el viento sopla (Jimmy T. Murakami, 1986). Película de animación originalmente estrenada en Gran Bretaña en octubre de 1986, basada en la novela gráfica homónima de Raymond Briggs. Describe un ataque nuclear al Reino Unido orquestado por la Unión Soviética desde la perspectiva de un matrimonio jubilado, Jim y Hilda Bloggs. Según va progresando la película, comien-

zan a sufrir los efectos de la radiación y su situación llega a ser desesperada.

Naves misteriosas (Silent running) (Douglas Trumbull, 1972). La película transcurre en el siglo XXI, en tres naves espaciales que preservan la vida vegetal que ha desaparecido de la faz de la Tierra. El botánico Freeman Lowell (Bruce Dern) se responsabiliza del cuidado y mantenimiento de una de ellas, el Valley Forge, hasta que recibe una inesperada orden de destruir todas las especies y regresar a La Tierra. Ante esta situación, Lowell secuestra el Valley Forge y huye con la nave para defender los últimos recursos naturales.

DOCUMENTALES

Six degrees could change the world (Ron Bowman, 2008). Documental de National Geographic sobre el cambio climático. Disponible en http://natgeotv.com/ca/six_degrees/about.

The war game (Peter Watkins, 1965). Escrito, dirigido y producido por Peter Watkins para la BBC. Documental sobre los efectos de una posible guerra nuclear entre Rusia, Estados Unidos y sus aliados. En particular, el documental muestra los efectos que tendría un ataque nuclear en Inglaterra. Fue censurada hasta 1985.

MATEMÁTICAS Y REDES

Juan José Rué y Ana Zumalacárregui

3.4

Objetivos, contenido y criterios de evaluación de acuerdo con los Reales Decretos de Enseñanzas Mínimas, (1467/2007 de 2 noviembre para Bachillerato y 1631/2007 de 29 de diciembre para Educación Secundaria Obligatoria).

El capítulo presenta las nociones básicas de la moderna teoría de grafos, algunas de sus peculiaridades y una diversidad de aplicaciones, basadas principalmente en la expansión de redes informáticas y otras, producidas por el desarrollo de las nuevas tecnologías de la información y de la comunicación.

A diferencia de capítulos anteriores, este capítulo no se centra en fenómenos naturales o sociales que puedan ser entendidos, explicados y modificados a partir de modelos matemáticos. En este caso son las nociones matemáticas las que han contribuido al desarrollo singular de determinadas disciplinas que, a su vez, plantean la necesidad de nuevos conceptos y desarrollo teóricos.

La teoría de grafos es un ejemplo potente y brillante de la interacción entre técnica y matemáticas: supone una de las herramientas más importantes de lo que podría considerarse la ingeniería matemática. Según los autores la ciencia busca comprender la relación entre los distintos fenómenos de la naturaleza, y además la mayoría de los fenómenos observables pueden describirse en términos de objetos y de sus interacciones y por tanto, las redes son un pilar fundamental de la ciencia, ya que describen dichas situaciones.

El recorrido por la teoría de grafos que se hace en el capítulo es muy completo, desde sus orígenes en el problema de los puentes de Königsberg hasta la discusión de los modernos grafos aleatorios y de sus aplicaciones. Se presentan, ejemplifican y amplían conceptos básicos como los de vértices y aristas, el orden de un vértice, los caminos, los ciclos hamiltonianos, la planaridad, la completitud y otros. También se trabaja con propiedades como la expresada en la fórmula de Euler y en el teorema de Kuratowski. Se muestran aplicaciones como las relativas a los mapas, a la coloración de mapas y de grafos, a la telefonía móvil, y para concluir, los grafos aleatorios y los modelos de pequeño mundo.

El capítulo propone una gran cantidad de ejemplos y ejercicios que pueden utilizarse para el trabajo en el aula de matemáticas de bachillerato, los cuales, con herramientas matemáticas sencillas, permiten abordar problemas de cierta complejidad e interés.

Este capítulo tiene mayor vinculación curricular con los objetivos, contenidos y criterios de evaluación de las asignaturas de Matemáticas I y II, tanto en la modalidad de Ciencias y Tecnología como en la modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales, que la vinculación que mantiene con las asignaturas restantes.

INTRODUCCIÓN

El objetivo de la ciencia es comprender la interacción existente entre los distintos fenómenos de la naturaleza, desde las partículas fundamentales hasta las galaxias. De hecho, la mayoría de los fenómenos observables pueden describirse en términos de objetos y de sus interacciones. Muchas veces, conocer la existencia (o la inexistencia) de dicha interacción da suficiente información como para poder extraer conclusiones del fenómeno. Esta información nos la dan las redes que describen dichas situaciones.

Si miramos nuestro planeta, es un mundo entrelazado por redes: las que forman las personas en la sociedad, las neuronas, la *world wide web*, los transportes urbanos en una sociedad, las rutas de los aviones, etcétera. En definitiva, una serie de elementos e interacciones entre ellos.

Las matemáticas pueden ayudar a entender mejor las redes que aparecen en el mundo real, a través del estudio analítico de las propiedades de las redes y su naturaleza. En este capítulo se hablará del nacimiento de esta disciplina, denominada **teoría de grafos**, y de algunas de sus ideas fundamentales. Se mostrará también su desarrollo y sus aplicaciones actuales mediante el lenguaje de los grafos aleatorios y de las redes *pequeño mundo*, un modelo de red que permite explicar con mucha precisión las relaciones sociales en una comunidad, así como las redes neuronales.

El estudio de estos modelos matemáticos no solo nos ayuda a entender la realidad en la que vivimos, sino que además brinda herramientas que permiten una optimización de los recursos del planeta. Como veremos a continuación, estas ideas nos permitirán crear rutas de transporte más eficientes o mejorar el diseño de microprocesadores, entre muchas otras aplicaciones.

La capacidad de cálculo de los ordenadores ha permitido que la ciencia avance en las últimas décadas a pasos agigantados. Uno de los múltiples ejemplos de este nuevo paradigma es la potencia y velocidad del procesamiento de datos en el ámbito de las más diversas disciplinas. Aun así, la ciencia moderna estudia objetos y sistemas con un gran número de variables, y una enor-

me cantidad de interacciones entre ellas, lo que hace impracticable manejar los datos que intervienen. Por eso, para poder entender lo que realmente nos importa del fenómeno es esencial simplificar la realidad. Así es como surgen los modelos, y ahí es donde un matemático puede explotar su destreza: en la abstracción. Pero, como ocurre en la vida, simplificar no siempre es fácil.

En esta unidad nos vamos a centrar en un tipo de modelos muy concretos: una serie de objetos que interactúan entre sí de forma individual. Así, conociendo de antemano todas las interacciones (que representaremos gráficamente en lo que llamaremos *grafo*) podremos deducir muchas propiedades sobre el sistema dependiendo del problema que nos interese estudiar.

Por ejemplo, podemos considerar la red de metro de una ciudad (las estaciones son los objetos y las interacciones se reducen a si pasa o no pasa un tren entre dos estaciones), una molécula (los átomos y las uniones entre ellos) o redes sociales como Facebook (usuarios y amistades entre ellos). En cualquier caso, el interés de la modelización con grafos es dar respuesta a cuestiones procedentes del mundo real a partir de estos modelos matemáticos que vamos a introducir.

CONCEPTOS ELEMENTALES SOBRE LOS GRAFOS

Las redes de interconexión que hemos mostrado en la sección anterior tienen muchas cosas en común, así que desde un punto de vista matemático nos interesaría definir un modelo preciso que condense lo realmente importante de estas estructuras: los objetos considerados y cómo se conectan entre ellos.

Para empezar distinguiremos entre dos casos: cuando dos objetos interactúan y cuando no hay interacción entre ellos. Aunque, como veremos más adelante, dependiendo del problema que queramos resolver, no siempre será suficiente con esta información.

Antes de nada, vamos a definir con precisión qué entendemos por grafo. Un *grafo* es un conjunto de elemen-

La red de metro

Vértices = estaciones de metro.

Aristas = dos estaciones están unidas si entre ellas pasa un tren.

La representación del grafo sería simplemente el plano de metro.



Plano del Metro de Madrid. Autor: Montrealais. Fuente: <http://es.wikipedia.org/wiki/Archivo:Madrid-metro-map.png>.

tos (que llamaremos vértices) y las interacciones entre ellos (que denominaremos aristas).

Un grafo puede dibujarse en una hoja de papel, representando los vértices por puntos y las aristas por líneas que unan los vértices correspondientes. En la figura 1 los dos grafos considerados son los mismos (pues tienen los mismos vértices y las mismas incidencias entre ellos), aunque se representen de modo distinto.

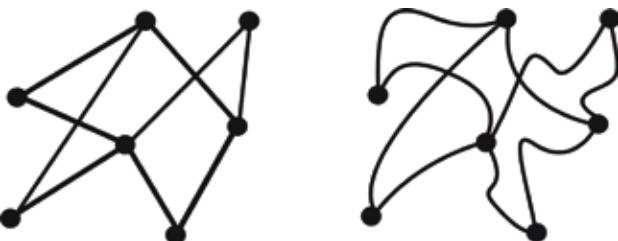


Figura 1. Un grafo, distintas representaciones. Autores: Juanjo Rué y Ana Zuma-
lacárcarri.

Un parámetro importante a tener en cuenta en este análisis es la **distancia** en un grafo. Fijados dos vértices, podemos definir la distancia entre ellos como la longitud del camino más corto (el número de aristas) que une dichos vértices, y diremos que el **diámetro** del grafo es el máximo de entre las distancias de los vértices. En el grafo de un mapa de metro querremos que la distancia entre dos puntos no sea muy larga (podamos llegar de uno a otro lo más rápido posible), al menos para la mayoría de las estaciones: en media la distancia entre estaciones tiene que ser lo más corta posible.

EL ORIGEN: DE PASEO POR KÖNINGSBERG

En contra de lo que ocurre en muchas disciplinas científicas, en las que su origen se pierde en los albores de la civilización, la noción de grafo tiene una fecha bien definida, ya que surgió a raíz de un problema concreto: el llamado problema de los puentes de Königsberg.

La ciudad de Königsberg (actual Kaliningrado, en Rusia) fue construida alrededor del río Pregolya, que cruza la ciudad y la divide en tres regiones distintas y una isla interior. Las cuatro secciones de la ciudad están unidas mediante siete puentes (Puente del herrero, Puente conector, Puente verde, Puente del mercado, Puente de madera, Puente alto y Puente de la miel). Un mapa de la ciudad se muestra en la figura 3.



Figura 2. Plano de la ciudad de Königsberg de 1652. Autor: Merian-Erben. Fuente: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Image-Koenigsberg_Map_by_Merian-Erben_1652.jpg.

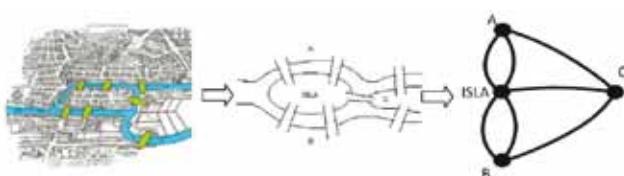


Figura 3. Representación gráfica de los puentes de Königsberg. Autor (izquierdo): Bogdan. Autor (centro): Moriel. Autor (derecha): Juanjo Rué y Ana Zumalacárregui.

Construimos entonces el siguiente grafo: tomamos un vértice por cada una de las islas de la ciudad (un total de cuatro) y situamos una arista entre dos vértices si hay un puente entre las correspondientes islas (hasta siete aristas correspondientes a los siete puentes).

El paseo por Königsberg ahora se traduce en un camino por el grafo anterior, al que tenemos que pedir:

El histórico problema consistía en responder la siguiente pregunta: ¿es posible pasear por la ciudad cruzando una única vez cada puente y terminando en la misma sección de la que se partió?

De manera experimental, basta con comprobar todos los posibles paseos para darse cuenta de que uno no puede terminar donde empezó si ha pasado una única vez por cada puente. Sin embargo, fue el matemático Leonhard Euler quien, empleando por primera vez la idea de grafo, dio una explicación de por qué no existe un paseo por Königsberg con estas características.

Para tratar este problema la única información que nos interesa es qué áreas de la ciudad están conectadas y a través de qué puentes. No nos importa la forma que tenga cada una de las regiones en que el río Pregolya divide la ciudad, ni su tamaño, ni las características de los puentes.

1. Que sea un paseo cerrado: empieza y termina en el mismo vértice.
2. Que pase por todas las aristas.
3. Que sólo pase por cada arista una única vez.

Los caminos que cumplen estas propiedades se conocen como **caminos eulerianos**, en honor a Leonhard Euler.

En este caso hemos permitido que entre dos vértices pueda haber más de una arista, porque para nosotros no sólo es importante saber que dos islas están conectadas sino de cuántas maneras están conectadas. A este tipo de objeto se le conoce como **multigrafo**. ¿Qué características ha de tener un multigrafo para que exista un camino euleriano?

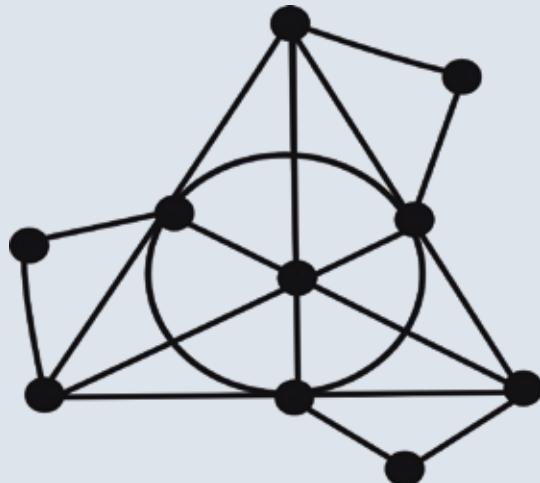
Euler ya se dio cuenta de un hecho muy sencillo: es esencial que el número de aristas que llega a un vértice (el **gra-**



Retrato de Euler. Autor: Jakob Emanuel Handmann. Fuente: commons.wikimedia.org/wiki/File:Leonhard_Euler_2.jpg

Leonhard Euler (1707-1783). Se trata de uno de los más grandes matemáticos de todos los tiempos, y de hecho fue el más prolífico. Nacido en Basilea (Suiza), vivió la mayor parte de su vida en Rusia y Alemania, donde realizó importantes descubrimientos en áreas

tan diversas como el cálculo, la teoría de números o la teoría de grafos. Introdujo gran parte de la terminología y notación moderna; a él debemos la noción actual de función matemática y la notación $f(x)$.



EJERCICIO

Encuentra un ciclo Euleriano en el grafo indicado. El teorema de Euler nos dice que tal ciclo existe. Autores: Juanjo Rué y Ana Zumalacárregui.

do de ese vértice) sea par o impar. De hecho, si uno de los vértices del **grafo** tiene grado impar, entonces no puede existir un camino de este tipo. Imaginemos, como ejemplo, que en algún momento de nuestro paseo llegamos a un vértice de grado 3, entonces ya habremos gastado una arista y tendremos que utilizar otra arista distinta para salir del vértice: la única manera de que gastemos la tercera arista es que terminemos el paseo en ese punto, pero entonces no es un camino cerrado, es decir, no se cumple la condición 1.

Euler demostró que esta condición, además de ser necesaria, también era suficiente: todo grafo con vértices de orden par tiene un **ciclo euleriano**.

CAMINOS HAMILTONIANOS Y OPTIMIZACIÓN

Hasta ahora hemos buscado un camino que pasase por todas las aristas sin repetir, pero no nos importó pasar dos veces por un vértice. Sin embargo, como veremos a continuación, en muchas situaciones nos interesarán saber si existe o no un camino que pase por todos los vérti-

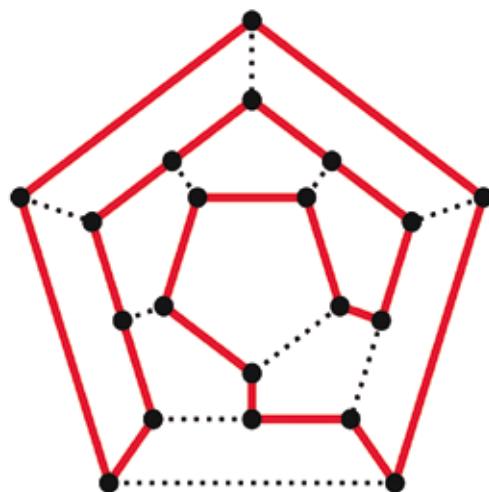


Figura 4. Un ciclo hamiltoniano en un dodecaedro . Autor: Christoph Sommer. Fuente: http://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:Hamiltonian_path.svg&page=1

ces, pero no pase dos veces por ninguno. Si además el camino termina en el mismo vértice que comenzó entonces se conocen como **ciclos hamiltonianos** (figura 4).

Pensemos por ejemplo en la agenda de una empresa de distribución de paquetes a toda la provincia. Al transportista le interesaría optimizar su tiempo visitando cada una de las ciudades en la ruta una única vez. Teniendo en cuenta la red de carreteras de la región (es decir, el grafo cuyos vértices son las villas de la provincia y las aristas las distintas carreteras), queremos recorrer el grafo pasando una vez (y solo una vez) por cada ciudad y volviendo al punto de origen. Es decir, buscar un ciclo hamiltoniano en el grafo de carreteras. Más adelante veremos que este modelo puede hacerse aún más complejo incluyendo *pesos* a las aristas para añadir información relativa a la distancia de separación entre dos ciudades.

En los años cincuenta del siglo pasado los matemáticos Gabriel A. Dirac y Øystein Ore probaron que cualquier grafo con suficientes aristas contenía un ciclo hamiltoniano. En particular, si la suma de los grados de cualesquiera dos vértices que no son adyacentes es mayor que el número total de vértices entonces este contiene un ciclo hamiltoniano. Es difícil, sin embargo, dar una descripción más general de qué grafos poseen ciclos de este tipo.

De hecho, aunque sepamos que un grafo ha de contener un ciclo hamiltoniano, en las aplicaciones prácticas lo que verdaderamente nos interesa es cómo construir uno, lo que es computacionalmente complejo.

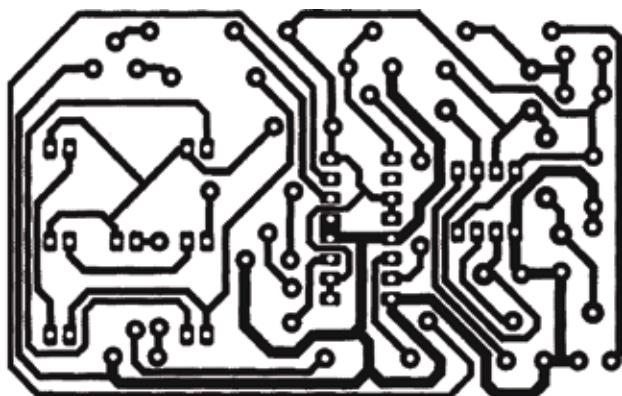


Figura 5. Circuito impreso sin cortes (arriba) y un nudo de carreteras en Chicago, Estados Unidos (abajo). Obsérvese la necesidad de construir puentes en la segunda estructura.

Autor (arriba): Abraham Del Pozo. Fuente: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Circuito_Impreso.jpg. Autor(abajo): Sheilaellen. Fuente: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Road_junction_chicago.jpg?uselang=es.

PLANARIDAD

Veamos ahora cuestiones relacionadas con grafos que aparecen en la vida real. Nos van a interesar los grafos cuyas aristas no se cortan: los **grafos planos**.

Consideremos un conjunto de ciudades (que harán el papel de nuestros vértices) y la red de carreteras que las unen. Cada corte de un par de aristas –cruce de carreteras– hace necesario construir una infraestructura adicional, como un puente o una glorieta. Así, para diseñar

una red de este tipo sería útil hallar una representación gráfica con el mínimo número de cortes entre infraestructuras.

Otro ejemplo, de gran importancia por su aplicación industrial, es el del diseño de circuitos impresos: dos conexiones en un sistema eléctrico no pueden cortarse, ya que de ser así se produciría un cortocircuito y el circuito no podría funcionar. Por otro lado, el uso de capas adicionales en la producción de circuitos impresos provoca el aumento del precio de este. Cuantos menos cortes

sean necesarios en la implementación de este sistema, más barata será la producción en cadena de estos dispositivos.

Con esta problemática en mente, volvamos al mundo abstracto de los grafos. Hasta el momento no nos hemos preocupado de cómo representamos los grafos sobre el papel, puesto que nos hemos interesado únicamente por su estructura. Hemos establecido que los grafos los dibujamos mediante puntos (los asociados a los vértices) y curvas que los unen (las correspondientes aristas), pero no hemos impuesto en ningún momento que las aristas puedan o no cortarse. Ahora vamos a poner un poco más de énfasis en este aspecto. Como vamos a mostrar, se trata de una condición intrínseca del grafo, no solo de cómo dibujemos.

Esta condición (la representación sin cortes) olvidada hasta este momento, es muy importante en las aplicaciones prácticas, como ya hemos visto.

Demos una definición más precisa de la planaridad:

Se dice que un grafo es *plano* si admite una representación gráfica sin cortes de aristas. Un grafo plano, ya dibujado, se denominará *mapa* (¿qué es un mapa geográfico sino un grafo dibujado?).

Existen muchos grafos que son planos (es decir, que admiten un dibujo sin cortes), pero la mayoría de ellos no lo son. Se puede observar que un grafo no es plano si no existe manera de representarlo en el plano sin cortes.

Sin embargo, no es tan sencillo distinguir que efectivamente, el grafo no se puede representar sin cortes, o que no sepamos dibujarlo sin cortes, lo que no significa que no sea plano, ¡sino que únicamente no sabemos hacerlo! Por tanto, ¿cómo decidimos si un grafo dado es plano? El argumento debe ser de tipo *intrínseco* (debe depender del propio grafo y no de nuestra pericia artística).

Consideremos un caso concreto: por un lado tenemos el grafo con 5 vértices y con todas las aristas posibles, y por otro el grafo con 6 vértices donde hacemos dos clases de 3 y 3 vértices y los unimos con todas las aristas posibles (sin unir los vértices de cada clase). Estos grafos se denominan **grafo completo** con 5 aristas (que se denota por K_5) y grafo $K_{3,3}$, respectivamente. Una representación gráfica de éstos se da en la figura 8. Estos personajes van a ser muy importantes en este contexto.

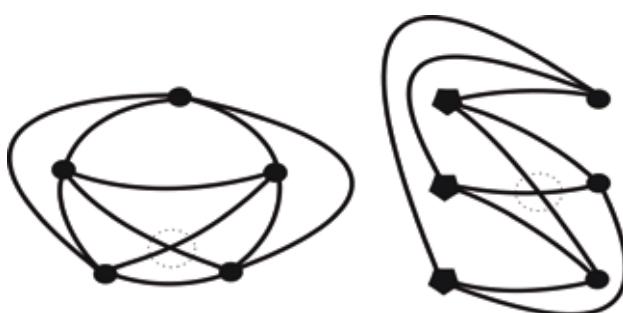


Figura 6. Representación del grafo completo (izquierda) y del grafo bipartito (derecha) con un corte. No existe ninguna representación de estos dos grafos sin la existencia de cortes. Autores: Juanjo Rué y Ana Zumalacárregui.

En estos casos no existe una representación de estos grafos *sin cortes*. El lector puede convencerse de este hecho intentando representar estos grafos sin cruces, y comprobará aun intentándolo con mucho esfuerzo que tal tarea es imposible. De hecho, estos dos grafos son las piezas clave para entender qué sucede en el contexto más general posible: tal y como demostró el matemático Kazimierz Kuratowski (1896-1980) en sus trabajos pioneros de interacción entre la topología de superficies y la teoría de grafos, la existencia de estas dos estructuras en el interior de un grafo determina su planaridad o por el contrario su no planaridad.

Para entender el teorema que queremos enunciar, necesitamos primero definir algunos conceptos.

- Un **subgrafo** de un grafo dado es un grafo que se obtiene a partir del inicial tomando un subconjunto de vértices y el correspondiente conjunto de aristas que hay entre ellos (aquí cabe decir que si dos vértices son del subgrafo y definen una arista en el grafo inicial, el subgrafo correspondiente dicha arista puede estar o no. Lo que no puede suceder es que en el subgrafo se cree una arista cuando el grafo inicial no había).
- Una **subdivisión** de un grafo consiste en subdividir las aristas de este. Es decir, en dibujar vértices a lo largo de las aristas.

Con estas definiciones ya podemos enunciar el teorema fundamental para la caracterización de planaridad:

Teorema de Kuratowski: un grafo es plano si y solo si no contiene una subdivisión ni de K_5 ni de $K_{3,3}$.

¿Qué queremos decir con este teorema? Pues que si en el interior del grafo considerado existe un subgrafo obtenido a partir de K_5 o de $K_{3,3}$ subdividiendo sus aristas, entonces el grafo no puede ser plano. Y en sentido contrario, si no existen tales subdivisiones, entonces el grafo es plano. En la figura 7 se muestra una un grafo no plano, y una subdivisión de K_5 en su interior.



Figura 7. Un grafo no plano. Se indica la subdivisión de con aristas negras. Autores: Juanjo Rué y Ana Zumalacárregui.

Por esta razón uno de los métodos algorítmicos utilizados para evaluar la planaridad de grandes grafos es la búsqueda de subdivisiones de estas estructuras. En la actualidad se conocen muchos resultados en esta dirección que han dado lugar a un gran abanico de programas informáticos para el diseño de circuitos electrónicos, entre muchas otras aplicaciones.

COLORACIÓN Y MAPAS

Ya que hemos presentado los grafos planos y de los mapas, vamos a estudiar un poco más su estructura. A dife-

rencia de los grafos en general, que únicamente tienen vértices y aristas, los mapas están equipados con una nueva clase de objetos: al dibujar un grafo plano estamos subdividiendo el plano en distintas regiones. Cada una de estas regiones va a ser una *cara* del mapa.

Existe una relación muy sencilla entre el número de vértices, de aristas y de caras de un mapa: la denominada **fórmula de Euler**, que dice lo siguiente: si v , a y c son el número de vértices, aristas y caras del mapa considerado entonces $c+v = a+2$. En esta cuenta entendemos que la cara no acotada del mapa (lo que vendría a ser el océano en un mapa geográfico) es también una cara.

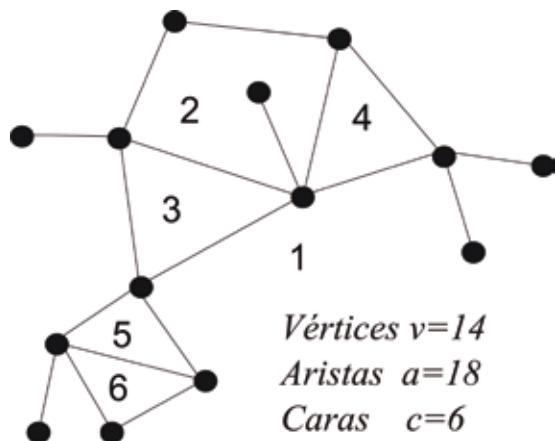


Figura 8. Ejemplo de la fórmula de Euler $c+v = a+2$. Autores: Juanjo Rué y Ana Zumalacárregui.

Supongamos que deseamos colorear las caras de un mapa plano, de tal modo que para colorear dos caras adyacentes no utilicemos el mismo color –ya que no distinguiríamos las regiones-. El lector puede intentar colorear por su cuenta el mapa que se encuentra en la figura 9. Aun así, y para facilitarle el trabajo, ofrecemos una **coloración** únicamente con 4 colores.

¿Qué paleta de colores necesitaremos si queremos colorear de este modo *todos* los mapas? La respuesta es sorprendente: ¡con cuatro colores *siempre* puedo realizar esta coloración! Este profundo resultado es lo que se conoce como **teorema de los cuatro colores**:

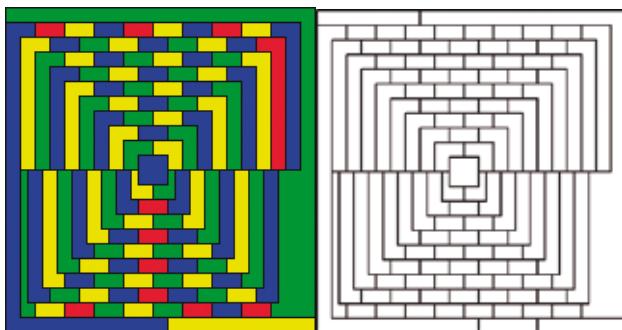


Figura 9. Un mapa sin colorear y el mismo mapa coloreado. Autor: Stan Wagon. Fuente: <http://ztfnews.wordpress.com/2010/04/02/el-1-de-abril-dia-de-los-inocentes/>

Teorema de los cuatro colores: Las caras de un grafo plano pueden colorearse con cuatro colores, de tal forma que dos regiones incidentes llevan color distinto.

Esta afirmación tan inocente ha llevado de cabeza a muchos de los grandes matemáticos de los últimos 150 años. Inicialmente este problema fue formulado en el año 1852 en relación al problema de colorear el mapa de Inglaterra, y en 1879 se demostró que cualquier mapa se puede colorear con cinco colores. Grandes matemáticos como Augustus de Morgan y Arthur Cayley intentaron atacar el problema sin éxito. De hecho, no fue hasta los años setenta del siglo pasado cuando Kenneth Appel y Wolfgang Haken hallaron la solución. La gran novedad en dicha prueba fue su necesidad del uso de computadores con el propósito de comprobar que un conjunto de patrones (¡muy grande!) podía colorearse con cuatro colores. En este sentido, la demostración del teorema de los cuatro colores ha sido la primera demostración de la historia asistida por computador. En este punto es importante decir que el uso del ordenador ha sido con el fin de realizar un chequeo exhaustivo de un número finito de patrones. Dicho de otro modo, la potencia de cálculo de la computadora se usa única y exclusivamente en el testeo de la coloración en un conjunto finito de mapas. Es decir, la gran aportación de Appel y Haken fue la reducción de un problema con infinitos mapas a uno donde únicamente se debía mirar la coloración en un número finito! Años más tarde, en 1996, Neil Robertson, Daniel Sanders, Paul Seymour y Robin Thomas redujeron el número de patrones a evaluar. A pesar de ello, el uso del ordenador fue también fundamental y a día de hoy no se conocen demostraciones manuales de este resultado.

Más allá de este problema de gran interés teórico y cartográfico, la coloración de mapas tiene gran importancia en diversas áreas de optimización. El problema de colorear mapas es equivalente al de colorear vértices de un grafo, con la condición de que dos vértices que comparten una arista no puedan ser coloreados con el mismo color. En esta dirección, conocer el número de colores mínimos necesarios (denominado **número cromático** del grafo) para realizar tal menester puede ser utilizado con gran astucia en las aplicaciones, como en el empaquetamiento de objetos. Imaginemos que tenemos un recinto donde debemos colocar bidones de ciertas sustancias químicas que no pueden entrar en contacto. ¿Qué obstrucciones sobre el número de productos distintos podremos almacenar? Además de esta, existen aplicaciones muy interesantes en lo que se conoce como *pattern matching*.

La noción de coloración de grafos puede aplicarse en otra dirección: en lugar de considerar coloraciones de vértices, podríamos estar interesados en colorear *aristas*, de tal modo que todas las aristas incidentes en un mismo vértice sean de distinto color, ver figura 10.

Uno de los usos más inmediatos del estudio del número de colores mínimos necesarios para realizar tal coloración es la optimización de jornadas en torneos. Imagine-

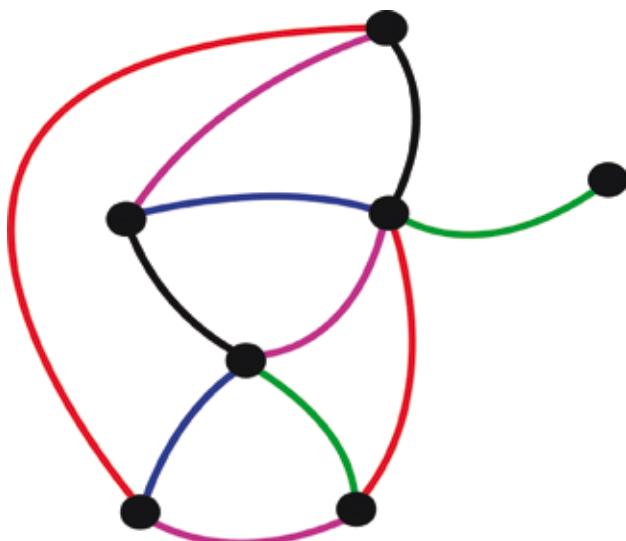


Figura 10. Una coloración por aristas de un grafo. Obsérvese que los colores de las aristas incidentes con un vértice dado son todos distintos. Autores: Juanjo Rué y Ana Zumalacárregui.

mos que los vértices de nuestro grafo son concursantes de un determinado evento, donde deben competir con los concursantes a los que se unen mediante una arista. ¿Cuáles es el número de jornadas mínimas que se necesitan para completar el torneo, teniendo en cuenta que en cada jornada pueden competir diversos concursantes, sin que un concursante participe dos o más veces el mismo día? En este caso, el número de colores mínimos nos da la respuesta, ya que cada color nos indica una jornada distinta. Aplicaciones similares de las coloraciones en aristas aparecen en distintos contextos tales como la asignación de frecuencias en redes de telefonía móvil.

MÁS ALLÁ DE LOS VÉRTICES Y LAS ARISTAS

Hasta el momento hemos estado estudiando los grafos únicamente en términos de sus vértices y sus aristas. Pero, tal y como ya hemos mostrado en la solución de Euler de los puentes de Königsberg, la noción de tener puntos y líneas que los unen puede complicarse en distintas direcciones. En su problema, Euler consideró aristas *múltiples* entre los vértices con el propósito de modelar varios puentes que unían las mismas islas.

Pasamos a hablar de *multigrafos*. Al igual que en los grafos, tenemos un conjunto de aristas que une los vértices pero, en este caso, puede existir más de una arista uniendo la misma pareja de vértices. Como hemos mostrado, esta generalización resulta útil cuando estamos estudiando recorridos en los que existen varias trayectorias entre dos puntos.

También puede ser útil usar un modelo un poco más completo, añadiendo información sobre las aristas. Supongamos que queremos modelar el flujo de agua (en unidades de volumen por hora) entre distintas terminales de un sistema hidráulico. El agua fluye en un determinado sentido y, por tanto, las aristas deben considerarse *dirigidas* según el sentido del flujo. En este caso, estamos ante un *grafo o multigrafo dirigido*; esto es, un grafo (o multigrafo) en el que distinguimos un sentido para cada una de

las aristas. Dirigir las aristas puede ser también útil en cuanto a la creación de diagramas de jerarquías entre los vértices del grafo.

Finalmente, los grafos pueden incluir otro tipo de información. Por ejemplo, a la hora de modelar una red de carreteras con grafos .podría ser interesante codificar la distancia existente entre ciudades, dando un peso a las aristas del grafo. En general, un grafo con pesos se construye a partir de un grafo ordinario asignando valores numéricos a sus aristas. Con este nuevo modelo, la optimización no sólo se basará en la búsqueda de caminos cortos entre vértices, sino también en la búsqueda de caminos cuyo peso total (es decir, la suma de los pesos de las aristas) sea lo menor posible. En el contexto de los mapas de carreteras esto se traduce en la búsqueda de trayectos de distancia mínima.

Todas estas ideas pueden combinarse de múltiples maneras (e incluso hacerse más complejo) para representar un amplio abanico de modelos de la realidad. Será trabajo del informático, ingeniero, economista o matemático definir con precisión dicho modelo con el fin de que se pueda aplicar sobre él todo lo que sabemos de estas estructuras discretas.

MODELANDO EL AZAR: GRAFOS ALEATORIOS

Ahora vamos a trabajar con un tipo de grafos muy peculiares: los grafos aleatorios, que sirven, entre otras cosas, para modelar la web.

Consideremos en un instante de tiempo determinado la red de ordenadores global www (siglas en inglés de World Wide Web). Dicha red se compone de todos los ordenadores del mundo que se hallan conectados en un preciso momento. La www tiene estructura de grafo (eso sí, ¡¡enorme!!), donde los vértices son todos los ordenadores y tenemos una arista si un par de ordenadores se hallan conectados (figura 11).

Ahora bien, existe una dinámica que no habíamos considerado: los usuarios se conectan y se desconectan sin

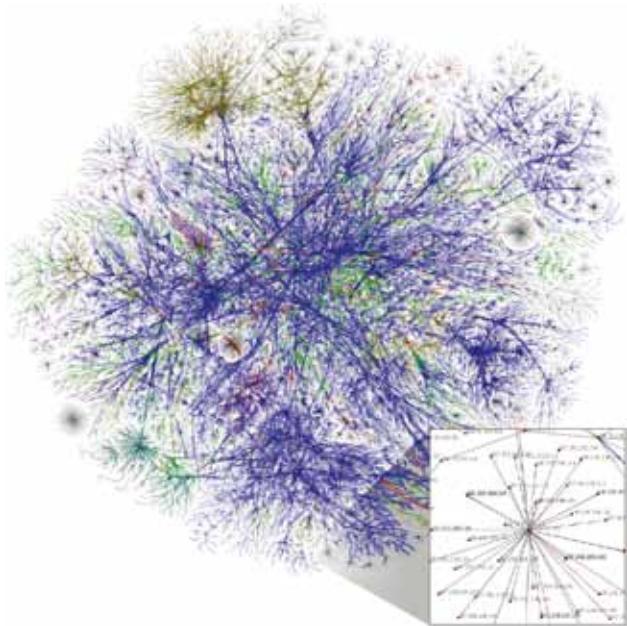


Figura 11. Mapa de Internet que muestra las conexiones de los mayores proveedores de servicios de Internet (conocidos como ISP's por sus siglas en inglés), realizado con datos de 1999. Autor: The Opte Project. Fuente: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Internet_map_1024_-_transparent.png. Autor: The Opte Project. Fuente: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Internet_map_1024_-_transparent.png.

seguir ningún patrón predecible. Es decir, las conexiones en nuestro grafo van apareciendo (y desapareciendo) a medida que avanza el tiempo.

En cierto modo, en la modelización de grandes estructuras discretas mediante el lenguaje de los grafos aparece una cierta incertidumbre en la estructura. O lo que es lo mismo, que no podemos afirmar categóricamente (como pasaba antes) propiedades del grafo en cuestión. Pero al menos nos interesaría encontrar alguna propiedad en común que cumplan la mayoría de grafos.

La noción de grafo aleatorio fue introducida por el matemático húngaro Paul Erdős (padre de la combinatoria moderna) y se define de manera rigurosa como sigue.

Fijado un conjunto de vértices se construye un grafo aleatorio simple del siguiente modo: dibujamos cada posible arista del grafo (equivalente a una pareja de vértices) con una cierta probabilidad p . Es decir, una cierta arista va a estar en el grafo con probabilidad p y no va a

estar con probabilidad $1-p$. El grafo resultante (del que no conocemos su estructura) se denomina grafo aleatorio.

Si no sabemos nada de la estructura del grafo, ¿qué podemos decir de él? Si consideramos a todos los posibles grafos que podemos obtener de esta manera y los observamos en conjunto, entonces habrá ciertas propiedades que aparezcan en la mayoría de los grafos y otras que sólo queden como excepciones a una regla general.

Por ejemplo, tomando aristas con $p = 1$, entonces lo que obtiene es un grafo completo (dibujamos todos los vértices), y sus propiedades son bien conocidas: todo vértice es adyacente a los otros. En el extremo opuesto, es decir, si fijamos la probabilidad $p = 0$, obtendremos un grafo sin aristas y, nuevamente la estructura es muy clara. Sin embargo, lo in-



Figura 12. Grafos aleatorios con distinta probabilidad de conexión entre vértices. De izquierda a derecha $p = 0,3$, $p = 0,5$ y $p = 0,8$. Autores: Juanjo Rué y Ana Zumalacárregui.

teresante sucede cuando vamos variando la probabilidad entre estos dos extremos y analizamos los resultados.

Para empezar, por un lado el grado de los vértices es, en general, reducida y, sin embargo, la distancia media del grafo es pequeña. Estas propiedades son buenas ya que con pocas aristas se logra conectar a muchos vértices en pocos pasos, pero como veremos a continuación esta construcción no es suficientemente buena para modelar redes de gran tamaño que aparecen en la vida real (redes sociales o incluso redes neuronales).

VOLVIENDO A LA REALIDAD: MÁS ALLÁ DE LOS GRAFOS ALEATORIOS

El modelo de grafo aleatorio que hemos introducido en la sección anterior es uno de los objetos de trabajo

fundamentales en el área de la matemática discreta. Desafortunadamente, para modelar ciertos fenómenos necesitamos pulir este modelo, ya que en una amplia variedad de sistemas de la vida real aparece un fenómeno que no se refleja en el modelo aleatorio: cuando se escogen dos vértices que están unidos a un tercero, con gran probabilidad estarán unidos entre sí. Si una persona piensa en su red de amigos, si dos de los amigos conocen a un tercero es muy probable que también se conozcan entre sí, porque en muchas ocasiones la amistad es transitiva.

Sin embargo, esta propiedad no se cumple para la mayoría de los grafos aleatorios. Si construimos un grafo regular, pensemos en vértices situados en un círculo y aristas entre vértices que son vecinos (geográficamente hablando). Está claro que la propiedad de transitividad se cumple; sin embargo, es fácil encontrar vértices que están a una distancia muy grande.

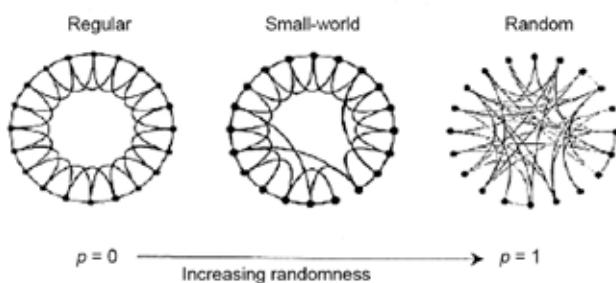


Figura 13. A medio camino entre los grafos aleatorios y los totalmente ordenados se hallan los grafos pequeño mundo. Extraído del artículo original de Watts y Strogatz. Autores: Duncan J. Wattsy Steven H. Strogatz. Fuente: Collective dynamics of 'small-world' networks". Nature, 393 (6684): 440-442. doi:10.1038/30918.

Pensemos ahora en el cerebro humano. Una red neuronal puede entenderse como una estructura en la que se minimice el procesado de datos (posiblemente en paralelo) y se maximice la eficiencia. Estas dos propiedades se pueden traducir, en el contexto de los grafos, en que se minimice la distancia media entre vértices pero haya transitividad entre neuronas; todo ello exigiendo que el número de aristas sea lo más pequeño posible.

A medio camino entre lo ordenado y lo aleatorio se halla lo que se denominan *grafos pequeño-mundo*, en los que la distancia media es pequeña (como en los grafos aleatorios) y sin embargo encontramos transitividad entre vértices (propia de los grafos regulares). Este concepto fue introducido en el año 1998 por los investigadores Duncan Watts y Steven Strogatz en su artículo en la revista *Nature* titulado *Collective dynamics of <small-world> networks*.

En las últimas décadas se ha observado que la estructura de muchas redes reales (redes sociales, tráfico aéreo, redes neuronales) se pueden clasificar de manera efectiva en función de los parámetros introducidos por Watts y Strogatz en su estudio: el **coeficiente de agrupamiento** (*clustering coefficient*, entre 0 y 1) y la distancia media entre vértices (mayor o igual a 1).

Ellos propusieron un modelo de redes *pequeño mundo* cuyas características más sobresalientes son:

- Un trayecto mínimo promedio entre vértices pequeños. Es decir, que dos vértices de la red se comunican por un camino de vértices intermedios relativamente pequeño (salvo tal vez un número pequeño de excepciones).
- Un coeficiente de agrupamiento medio elevado. Si dos vértices están conectados a un tercero, entonces

Red	Tipo	Agrupamiento	Distancia Media
Actores de cine	Social	0.2	3.48
Internet	Tecno-social	0.035	3.31
Paquetes de software	Tecnológica	0.7	2.42
Redes metabólicas	Biológica	0.09	2.56
Interacción proteica	Biológica	0.072	6.8

Tabla 1. Datos sobre distintas redes del mundo real en el modelo de Watts y Strogatz.

existe una gran probabilidad de estén conectados entre sí.

La primera propiedad dota a las redes de alta eficiencia en la transmisión de información, mientras que la segunda indica la elevada transitividad de la red.

Lo que podría sorprender a más de uno es que este modelo de *pequeño mundo* no solamente da una primera aproximación al problema de las redes neuronales, sino que modela con bastante fidelidad la estructura social de distintas comunidades (reales o virtuales). Y no solo eso, sino que permite entender y explicar cómo se relacionan las personas. Más concretamente, las redes *pequeño mundo* permiten ratificar la máxima de que *el mundo es un pañuelo*.

La noción de *pequeño mundo* fue acuñada en los años sesenta del siglo pasado por el psicólogo Stanley Milgram (1933-1984), que mediante un experimento conjeturó el hoy ya célebre 6 grados de separación entre dos personas cualesquiera. El experimento consistía en escoger de manera aleatoria a dos personas de Omaha (Nebraska) y Boston (Massachusetts) y entregarle a la primera una carta que tenía que hacer llegar, enviándosela a algún conocido suyo, al segundo individuo. Es cierto que muchas cartas no llegaron, pero dentro de las que llegaron la mayoría lo hicieron en menos de 6 pasos.

De hecho, gracias a las grandes bases de datos que se tienen ahora mismo, existen formas más sencillas de realizar el experimento de Milgram. Si consideramos, por ejemplo, la red de actores que aparecen en la base de datos de Imdb (Internet movie data base) y unimos dos actores siempre que hayan participado juntos en una película, entonces es muy fácil calcular la distancia entre dos actores cualesquiera. De hecho uno puede hacerlo desde la página web: <http://oracleofbacon.org/>.

EJERCICIO

¿A que no eres capaz de encontrar a dos actores con distancia 5?

Probando unas cuantas veces observarás que es difícil encontrar parejas a distancia 4.

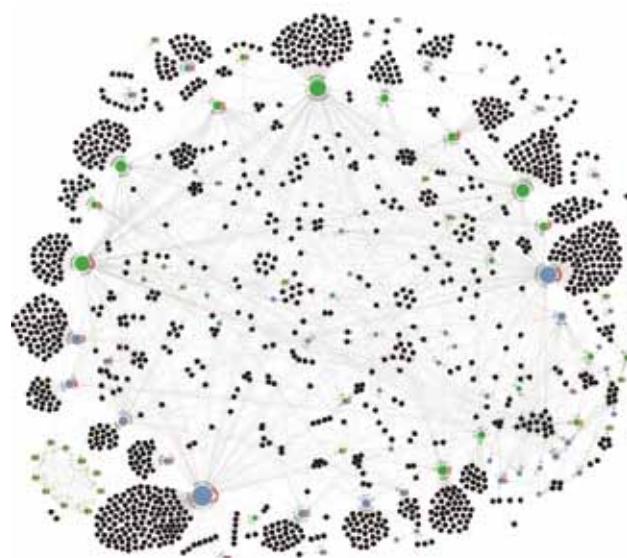


Figura 14. Red de regulación genética de la bacteria *Mycobacterium tuberculosis*. Autores: Joaquín Sanz et al. Fuente: "The Transcriptional Regulatory Network of *Mycobacterium tuberculosis*" PLoS ONE 6(7): e22178. doi:10.1371/journal.pone.0022178.

Se han encontrado ejemplos de redes de *pequeño mundo* en numerosas redes de la naturaleza, desde la que define las proteínas que interaccionan en el metabolismo de las bacterias hasta las redes neuronales, así como en redes sociales.

BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA

Bollobás, B. (2001): *Random graphs* (2^a ed.). Cambridge: Cambridge University Press, col. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, nº 73.

Libro de referencia para entender la problemática en el contexto de los grafos aleatorios. El investigador Bella Bollobás ha sido una de las más grandes figuras matemáticas en este campo de estudio.

Diestel, R. (2010): *Graph theory* (4^a ed.). New York: Springer-Verlag, col. Heidelberg Graduate Texts in Mathematics, nº 173.

Libro de referencia para iniciarse en la teoría de grafos. El texto está dividido en distintos capítulos donde se estudian diversos dominios de la teoría de grafos, incluyendo la planaridad, la coloración de grafos, la teoría extremal de grafos y la teoría de menores. Los capítulos están estructurados de menos a más: cada uno de ellos comienza con los resultados básicos y termina con problemas y conjeturas abiertas.

Strogatz, S. H. y Watts, D J. (1998): "Collective dynamics of 'small-world' networks". *Nature*, vol. 393, nº 6684, pp. 440-442.

Artículo original donde se introduce por primera vez la noción de red de pequeño mundo. Es interesante para ver la motivación intrínseca en las hipótesis de este artículo.

en haber obtenido los tres premios más importantes en la literatura de ciencia ficción: el Premio Nébula, el Premio Hugo y el Premio Philip K. Dick. *Neuromante* es la novela principal de la corriente denominada cyberpunk, y de ella beben la mayor parte de trabajos que posteriormente se han acogido a esta etiqueta.

PÁGINAS WEB

http://sociedadinformacion.fundacion.telefonica.com/DYC/SII/seccion=1188&idioma=es_ES&id=2009100116310050&activo=4.do?elem=5121.

<http://www.madrimasd.org/blogs/universo/2008/08/08/98350>.

http://www.ibercivis.es/index.php?module=public§ion=channels&action=view&id_channel=3&id_subchannel=131.

<http://moviegalaxies.com>. En la página web moviegalaxies.com se pueden buscar los grafos que dan las relaciones sociales de los personajes de una película. Además, en cada grafo se puede ver cuál es la distancia media o el coeficiente de agrupamiento, entre otras cosas.

PELÍCULAS

El efecto mariposa (Eric Bress, 2004). Película escrita y dirigida por Eric Bress en colaboración con J. Mackye Gruber. Estrenada en 2004, la película está protagonizada por Ashton Kutcher, en el papel principal, y Amy Smart. Evan Treborn (Ashton Kutcher) sufre pérdidas cortas en su noción del tiempo desde que era pequeño. Cuando recupera sus recuerdos decide viajar a su pasado en su mente de adulto para arreglar sus errores y mejorar el presente de todos. Pero el efecto mariposa tiene consecuencias en su presente, generalmente desafortunadas. La película trata así de mostrar el efecto mariposa: cualquier pequeña variación puede acabar generando un efecto considerablemente grande si se trata de un fenómeno caótico.

MATERIALES AUXILIARES

LIBROS

Gleick, J. (1987): *Caos. La creación de una ciencia*.

Libro muy popular de James Gleick en el que, por primera vez, se describieron los principios y el desarrollo de la teoría del caos al público general. Fue finalista del National Book Award en 1987 y del Premio Pulitzer en 1988. Describe el trabajo de los científicos que contribuyeron al desarrollo de la teoría.

Gibson, W. (1984): *Neuromante*. Barcelona: Minotauro.

Neuromante (originalmente en inglés, *Neuromancer*) es una novela de ciencia ficción escrita por William Gibson y publicada en 1984. Fue su primera novela y una de las pocas

6 grados de separación (Fred Schepisi, 1993). En este film se refleja el fenómeno de los 6 grados de separación que conjeturó Stanley Milgram. Una situación parecida se da en Babel, película de 2006, dirigida por el cineasta mexicano Alejandro González Iñárritu.

SERIE

Perdidos (Lost) (2004-2010). Serie americana muy reciente en la que un avión sufre un accidente en una isla desierta. Las conexiones sociales entre los personajes son muy interesantes (muchos de ellos habían coincidido en algún momento antes del accidente), y puede servir

de ejemplo para mostrar la noción de los grados de separación.

MATERIAL AUDIOVISUAL

"Universo matemático: La búsqueda de un sueño, orden en el caos". *La aventura del saber*, TVE-2. Este capítulo de la serie didáctica de TVE trata de la dicotomía entre caos y orden que se discute en el capítulo, cuando se habla del factor de reagrupamiento. Disponible en <http://www.rtve.es/alacarta/videos/universo-matematico/universo-matematico-busqueda-sueno-orden-caos/889029/.w>

LAS MATEMÁTICAS QUE HACEN SEGURA LA RED

Vanesa Daza

3.5

Objetivos, contenido y criterios de evaluación de acuerdo con los Reales Decretos de Enseñanzas Mínimas, (1467/2007 de 2 noviembre para Bachillerato y 1631/2007 de 29 de diciembre para Educación Secundaria Obligatoria).

Los fundamentos matemáticos de este capítulo son elementales y están al alcance de los alumnos de educación secundaria obligatoria. La base matemática se encuentra en la teoría de números y consta de las nociones de divisor, factor, número primo y número compuesto, factorización de un número y del teorema fundamental de la aritmética. Sin embargo, al igual que ocurre con otras ramas matemáticas, la teoría de números encierra cuestiones de gran complejidad bajo la apariencia de enunciados muy sencillos, de las cuales este capítulo ofrece varios ejemplos.

El teorema fundamental de la aritmética es una de esas cuestiones de apariencia relativamente simple pero de consecuencias de muy largo alcance. En esencia, el teorema afirma que todo número natural se puede escribir como producto de factores primos y que, además, dicha expresión es única.

De este modo el teorema viene a establecer lo que puede considerarse como un nuevo sistema de numeración en el conjunto de los naturales, basado en el sistema decimal convencional pero distinto. Se trata de un sistema de numeración donde cada número natural se escribe de manera única como un producto, llamado su factorización. Tomado el conjunto de los números primos P, cualquier otro número se puede escribir como producto de los elementos de P. Este sistema muestra la estructura multiplicativa de cada número, cuya base es el conjunto de los números primos.

Como el conjunto de los números primos es infinito y sus elementos no se ajustan a un patrón o regla numérica determinada, conocer la factorización de números con factores primos muy grandes es un modo de codificar tales números y de poder utilizarlos con la seguridad de que, difícilmente, podrán ser identificados. Recíprocamente, conocer los divisores de un número muy grande es otro modo de saber cuál es el número.

La moderna criptografía hace uso de estas propiedades de la teoría de números y muestra como las nociones aritméticas de apariencia más sencilla tienen un enorme potencial práctico.

Para mostrar este uso práctico, la autora revisa la importancia que han alcanzado los sistemas de comunicación que se sustentan en Internet y la necesidad de medidas de seguridad para garantizar la privacidad y protección de los datos que se mueven a diario en cantidades de muchos dígitos, de lo cual proporciona una amplia información.

También hace una revisión de las técnicas de cifrado empleadas a lo largo de la historia, que muestran los fundamentos de algunas prácticas que aún se manejan, hasta llegar a la ciencia actual de la criptografía.

Finalmente, muestra una serie de ejemplos y tareas escolares que contribuyen a la comprensión de las cuestiones planteadas en este capítulo y ayudan a su tratamiento didáctico.

INTRODUCCIÓN

“Desplazarse a través de una red o de un sistema informático,” es la quinta acepción de la palabra *navegar* en el Diccionario de la Real Academia de la Lengua Española. Y pese a su posición es, sin lugar a dudas, la más utilizada a día de hoy. En junio de 2012 el número de usuarios de Internet a nivel mundial era de 2.405.518.376 según, cifra que crecerá considerablemente en los próximos años si miramos el espectacular crecimiento que ha tenido el uso de Internet en algunas regiones en la última década (figura 1).

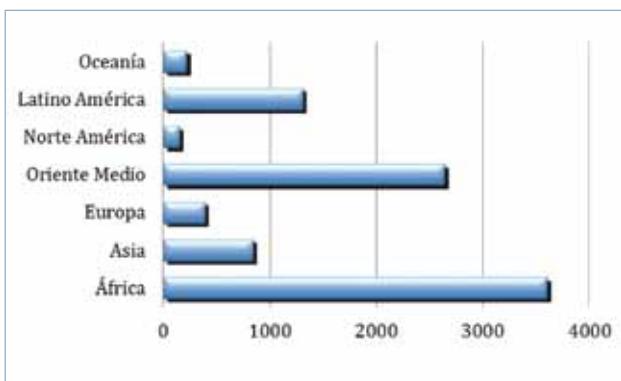


Figura 1. Crecimiento por regiones del uso de Internet en el periodo 2000-2012.
Fuente: <http://www.internetworldstats.com/stats.htm>.

Durante las últimas décadas, Internet ha crecido a un ritmo vertiginoso, convirtiéndose en lo que hoy todos conocemos, y provocando una revolución cultural, sociológica, económica y política sin parangón.

En medio de todos estos avances, las matemáticas han ocupado y ocupan un lugar destacado. Internet se ha convertido en un entorno real en el que aplicar algunas de las teorías abstractas ya conocidas a la vez que se desarrollan otras nuevas con el objetivo de modelar y dar solución a algunos problemas que permitan y faciliten el uso de Internet.

Muchas de las actividades que realizamos en nuestro día a día se han visto modificadas en gran parte debido

a Internet. Hace tan solo 15 años parecía imposible evitar aquel momento de colapso de líneas de teléfono en las primeras horas del año cuando todo el mundo llamaba a sus seres queridos para felicitar el año nuevo; y sin embargo tras un breve periodo de protagonismo de los SMS, a día de hoy parece ser el Whatsapp (aplicación de mensajería de móvil que utiliza Internet como base de sus comunicaciones) el medio elegido por multitud de usuarios. Para felicitar el año 2013 se han registrado 18 billones de mensajes a través de esta aplicación, según anunció la propia compañía. Pero el uso de Internet alcanza muchas otras actividades diarias: en las figuras 2 y 3 se pueden ver las actividades más populares en Internet y la distribución media en las que cada usuario invierte sus horas en Internet, respectivamente.

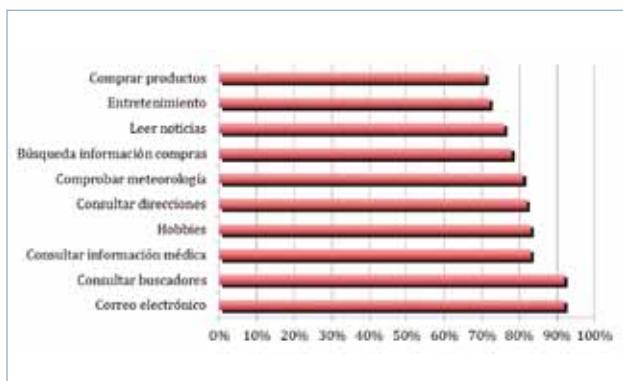


Figura 2. Actividades más populares en Internet. Fuente: <http://www.go-gulf.com/blog/online-time/>.



Figura 3. Distribución media por usuario del tiempo empleado en tareas relacionadas con Internet. Fuente: <http://www.go-gulf.com/blog/online-time/>.

HISTORIA DE LA RED MÁS GRANDE DEL MUNDO

La explosión tecnológica causada por Internet ha venido de la mano del nuevo siglo, tan solo 30 años después de su creación. Su origen se remonta al año 1969, cuando el Departamento de Defensa Americano, a través de su Agencia de Proyectos de Investigación Avanzados (ARPA, por sus siglas en inglés) propuso la creación de una red de ordenadores entre diferentes universidades y empresas privadas, con el objetivo de reforzar su sistema centralizado de comunicaciones, que consideraban vulnerable. De esta manera se conseguía, fragmentando convenientemente, que esta llegara a su destino aunque surgiera un problema en alguna parte de la red. Son los primeros pasos de ARPAnet, el embrión de lo que hoy conocemos como Internet.

Poco a poco esta red fue evolucionando. En 1974 se mejoraron los **protocolos** de intercambio de datos entre redes de ordenadores con el protocolo TCP/IP ("Transmission Control Protocol/Internet Protocol"), y se introdujo un sistema de correo electrónico. El uso del correo creció considerablemente, convirtiéndose en la actividad que mayor volumen de comunicaciones generaba.

ARPAnet siguió creciendo y abriéndose al mundo: cualquier persona con fines académicos o de investigación podía tener acceso a la red. Lo que en un principio fue un *juguete* de unos cuantos científicos, comenzó a expandirse en los años ochenta del siglo pasado mientras los centros de investigación, los organismos públicos, las asociaciones y más empresas privadas, entusiasmadas, se unían al proyecto. En la siguiente década se desarrolló un lenguaje de hipertexto con *etiquetas* (el conocido *html*) que permitió un acceso a la información sin precedentes. Su principal logro era que podía ser interpretado con un programa llamado *navegador*, lo que dio comienzo a una nueva forma de navegar a través del mar de datos de Internet. A partir de entonces, se abrieron numerosas oportunidades de negocio y nuevas maneras de comunicación.

En todos estos desarrollos las matemáticas tienen un papel fundamental. Nuestro propósito con este texto

es mostrar, en particular, el papel que las matemáticas han tenido (tienen y tendrán) en la *seguridad* y la *privacidad* de las acciones cotidianas que se realizan por Internet. En efecto, por citar un ejemplo, sería difícil realizar la cantidad de transacciones bancarias diarias en línea si no se pudieran prevenir los ataques de terceras personas que pretenden acceder de manera indebida a la información que circula por la red. Pero en este nuevo escenario en línea no basta con proteger las comunicaciones, sino que también es necesario modelar algunas situaciones habituales, como la firma de un documento. En Internet esto corresponde a la **firma digital**, y tiene la misma validez que una firma manuscrita.

En la raíz de las soluciones a estas y muchas otras situaciones encontramos la **criptografía**. Etimológicamente el término proviene del griego (*krypto* –secreto– y *grapho* –escritura–) y en la actualidad se considera como la rama de las matemáticas que estudia las técnicas que se utilizan para proporcionar seguridad y privacidad a los datos generados y gestionados por la sociedad de la información.

Pese a que actualmente las modernas tecnologías han otorgado a la criptografía un papel de cierto protagonismo, sus orígenes se pierden en el tiempo. La criptografía nace de la necesidad de los humanos de mantener su información privada protegida de terceros, y hay evidencia de su uso ya en el año 3500 a. C, cuando los mesopotámicos cifraban las fórmulas de los nuevos barnices que descubrieron, y 1.500 años más tarde también los egipcios utilizaron un tipo especial de jeroglífico secreto. De hecho, la mayoría de culturas que evolucionaron a algún tipo de lenguaje escrito desarrollaron algún tipo de escritura secreta, lo que se consideran las primeras técnicas criptográficas.



Figura 4: Representación de una escitala, figura cilíndrica en el que se enrollaba un papiro y se escribía el mensaje. Solo aquellos que tuviesen un cilindro del mismo diámetro podían recuperar el mensaje en claro. Fuente: <http://www.flickr.com/photos/8637161@N00/18489970/>.

En la antigua Grecia, los soldados de Esparta usaban la escíitala, una de las primeras máquinas criptográficas, y el cifrado por desplazamiento, conocido también como cifrado del César, pues el emperador Julio César lo utilizaba para comunicarse con Cicerón y otros mandatarios romanos.

Veamos a continuación cómo César cifraba y descifraba sus mensajes.

EL CIFRADO DEL CÉSAR

Supongamos que dos personas, llamémosles Alicia y Benito (protagonistas usuales de las historias criptográficas), se quieren intercambiar un mensaje. En concreto, Alicia quiere enviar el mensaje (*texto en claro*) ‘HOLA’ a Benito, usando el cifrado del César para que no puedan interceptar el mensaje. Para ello, en primer lugar pactan entre ambos un valor entre 0 y 26, que será la clave secreta k . Benito recibirá un mensaje (*mensaje cifrado*), y utilizando la clave secreta que solo él y Alicia conocen, podrá recuperar el texto en claro.

Para cifrar el mensaje, se reemplaza cada letra por la letra que ocupa k posiciones más adelante en el alfabeto. Al llegar al final del alfabeto, se continúa por el inicio del alfabeto. Obviamente, para descifrar el mensaje se reemplaza la letra cifrada por aquella que ocupa k posiciones menos en el alfabeto.

Así, por ejemplo, si $k = 1$, entonces A se sustituye por una B, la B por una C, la C por una D, y así sucesivamente hasta llegar a la Z que se sustituirá por una A. Utilizando esta clave, Benito recibiría ‘IPMB’ (texto cifrado). En el caso de que $k = 2$, la A se sustituye por C, la B por D, hasta llegar a la Y y la Z que se sustituyen por A y B, respectivamente. De esta suerte, con esta clave Alicia enviará el mensaje ‘JQNC’ a Benito.

En sus comunicaciones militares, César utilizaba la clave k igual a 3.

Este cifrado se puede escribir de manera elegante utilizando aritmética modular. Si consideramos el alfabeto castellano con 27 letras Alfabeto = {A, B, C, D, ..., X, Y, Z}, y asociamos a cada letra un valor numérico entre 0 y

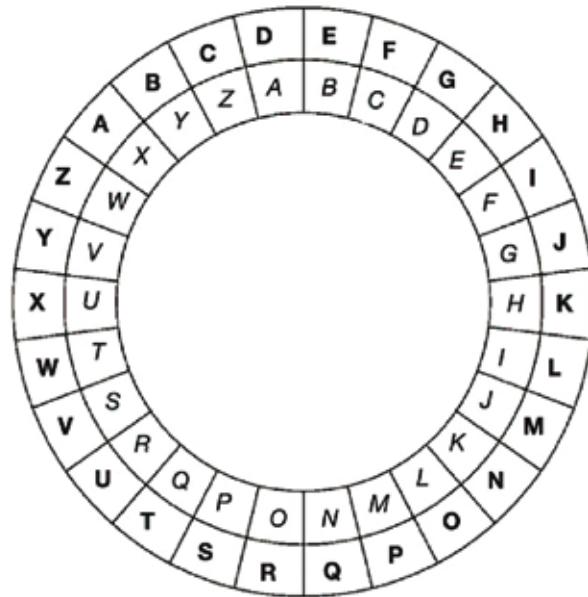


Figura 5. Rueda del César, que muestra simultáneamente el alfabeto inglés y su equivalente cifrado utilizando un desplazamiento de $k=3$. Fuente: <http://www.flickr.com/photos/riceforlunch/4462968903/>.

26 (0 a la A, 1 a la B, y así sucesivamente), para cifrar un mensaje sólo hace falta considerar la función $C_k(i) = i+k \bmod 27$, que nos dará cada letra cifrada. Para descifrar se utiliza la función $D_k(i) = i-k \bmod 27$.

En una época en la que poca era la gente que sabía leer y escribir, este cifrado se consideraba suficientemente seguro como para depositar en él los secretos de Estado. Sin embargo, se trata de un cifrado considerablemente inseguro, como mostró el paso del tiempo y la evolución cultural de la sociedad. Por ejemplo, está sujeto a ataques de *búsqueda exhaustiva* (también llamados de *fuerza bruta*), en los que el atacante, a partir del texto cifrado, intenta recuperar el texto en claro considerando todas las opciones de clave. Para ello, el atacante prueba a descifrar con cada una de las diferentes claves, y puesto que con este cifrado hay relativamente pocas claves, un total de 27 claves (o 26 si tenemos en cuenta que la clave $k = 0$ es mejor evitarla ya que en tal caso texto en claro y texto cifrado coinciden), esta operación no resulta especialmente costosa. Así, solo hace falta observar

los posibles textos en claro y descartar aquellos que carezcan de sentido, eligiendo el que sea comprensible.

EJERCICIOS

1. Utilizando el alfabeto castellano, cifra el mensaje “ESTE ES UN MENSAJE EN CLARO”, con las claves $k = 4$ y $k = 13$.
2. Descifra el mensaje “ÑTIJITIJPRXUHPSE” realizando un ataque por fuerza bruta.
3. Comprueba que $D_k(E_k(m))=m$.

En los siglos siguientes, hasta la aparición de los ordenadores en el siglo XX, la criptografía fue casi más un arte que una ciencia. Fue utilizada principalmente en contextos bélicos (el devenir de la Segunda Guerra Mundial parece que estuvo considerablemente ligado a la criptografía) y los cífrados empleados fueron evolucionando con técnicas más complejas y elaboradas, que tenían como principal objetivo subsanar las debilidades que se habían encontrado en los anteriores. Entre ellos podemos citar el cifrado de Vigenère y el cifrado de Alberti. Se profundizan en las apasionantes historias que han acompañado a la criptografía desde hace más de 5.000 años en Kahn (1968). En *The black chamber* se puede encontrar no solo una explicación de algunos cífrados históricos, sino también más material complementario, como implementaciones de estos algoritmos que permiten al lector cifrar y descifrar de manera interactiva.

LA CIENCIA DE LA CRIPTOGRAFÍA

En el siglo XX acontecieron tres momentos históricos que fueron claves en la revolución que cambió la manera de entender la criptografía, incorporándola en la categoría de ciencia. Fueron la publicación del cifrado OTP de Vernam, la demostración de Shannon sobre la seguridad del cifrado de Vernam y el nacimiento de la criptografía de clave pública.

En el año 1926 Gilbert Vernam publicó un cifrado que permitía intercambiar mensajes de manera segura, muy sencilla y eficiente, siempre y cuando ambos interlocutores tuvieran una clave con la misma longitud del mensaje. Para ello, en primer lugar el emisor del mensaje (Alicia) necesita transformar el mensaje en una ristra de ceros y unos (bits). Para ello asocia cada letra a un número (para simplificarlo supondremos que se hace de la misma manera que en el cifrado del César, aunque para la traducción numérica habitual se utiliza el código ASCII, que distingue mayúsculas y minúsculas así como signos de puntuación). Posteriormente se considera la representación binaria de dicho número.

De esta manera, supongamos por ejemplo que Alicia quiere enviar el mensaje ‘HOLA’ a Benito. En primer lugar observa que las cifras correspondientes a las letras del mensaje son 7, 15, 11 y 0, cuyas representaciones binarias son 00111, 01111, 01011, 00000 (fijamos la longitud binaria de cada cifra a 5 para que toda representación tenga la misma longitud, con el fin de reconocer y separar las diferentes cifras que resultan entre sí). El mensaje que Alicia quiere enviar a Benito es 00111011110101100000.

Si L es la longitud del número de bits del mensaje, Alicia y Benito necesitan compartir una clave secreta cuya expresión binaria tenga, como mínimo, longitud L . En el ejemplo propuesto necesitarán una clave de 20 bits. Supongamos para nuestro ejemplo que la clave secreta es $k = 00111011100100100011$. Para cifrar el mensaje se calcula, bit a bit, el XOR (esto es, una suma módulo 2) del bit del mensaje cifrado con el correspondiente bit de la clave secreta. Así el mensaje cifrado de ‘HOLA’ sería ‘ABCD’ puesto que $00111011110101100000 \text{ XOR } 00111011100100100011 = 00000000010001000011$, que representan los dígitos 0, 1, 2 y 3, y por tanto, las letras A, B, C y D. Por lo tanto, Alicia envía a Benito el mensaje cifrado 00000000010001000011, y Benito, poseedor de la clave 00111011100100100011, puede recuperar el mensaje en claro a partir del XOR –que es la operación inversa del XOR– del mensaje cifrado y la clave. En efecto:

$$00111011110101100000 = 00111011100100100011 \text{ XOR } 00000000010001000011.$$

Este cifrado es conocido también como OTP (del inglés, One Time Pad). Su nombre explica uno de sus grandes

EJERCICIOS

1. Utilizando la clave:

$k = 00000111100000111100000\ 11111$, cifra el mensaje CRIPTO.

2. ¿Cuál ha sido la clave utilizada si Alicia ha enviado el mensaje “ABCDE” y Benito lo ha descifrado como “ADIOS”?

inconvenientes: la clave secreta únicamente puede ser utilizada una vez.

El segundo inconveniente es el requerimiento de que la clave secreta sea tan larga como el mensaje. Pero como Vernam ya intuía, este último requerimiento no era gratuito, sino que era condición necesaria y suficiente para que la comunicación fuera segura, lo que probó formalmente Claude Shannon dos décadas más tarde, en 1949. Es el segundo momento criptográfico del siglo XX que queríamos remarcar. En Shannon (1949), el autor demostraba la seguridad incondicional del cifrado de Vernam, es decir, que no es posible deducir ninguna información del texto en claro a partir del texto cifrado y, además, para garantizar dicha seguridad incondicional en cualquier cifrado en el que emisor y receptor comparten una clave secreta (lo que llamamos cifrados simétricos) para comunicarse, debe cumplir el requisito de que la longitud de la clave sea del mismo tamaño que la del mensaje.

Lejos del pesimismo que podría haber despertado el resultado de Shannon, la búsqueda de cifrados simétricos siguió muy activa. Las propuestas principales están dentro de los llamados modelos de cifrado de flujo o de los modelos de cifrado de bloque. Cada uno tiene sus pros y sus contras, que los hacen seguros en algunos escenarios y vulnerables en otros.

La principal desventaja que presentan es que la clave ha de ser la misma para Alicia y para Benito, y no es, a priori, sencillo compartir una clave, y menos, si se asume que la única comunicación posible es a través de medios inseguros como pueda ser Internet. Además, si Alicia quiere enviar mensajes a cada uno de sus 1.234 contactos de Facebook, deberá compartir una clave secreta diferente

con cada uno de estos contactos, y utilizarla en el momento de cifrar el mensaje, en lo que se advina como una gestión tediosa.

Ante estas contrariedades, se persiguió un cambio de paradigma que condujo al giro más espectacular que ha dado la criptografía hasta la fecha. En el año 1976 Whifford Diffie y Martin Hellman (1976) mostraron que era posible un intercambio de mensajes de manera segura sin necesidad de compartir, en ningún momento, una clave secreta. Así surgió la [criptografía de clave pública](#). En ella, tanto Alicia como Benito tienen un par de claves, una que todo el mundo podrá conocer (pública) y otra que solo cada uno de ellos individualmente debe conocer (privada). De esta manera, si Alicia quiere enviar un mensaje cifrado a Benito, utilizará la [clave pública](#) de Benito para cifrarlo. Una vez recibido, Benito utilizará su correspondiente clave privada para descifrar el mensaje.

La esencia del método consistía en encontrar una función que fuese fácil de calcular utilizando la clave pública (cifrar) y solo pudiese ser invertida de manera eficiente con conocimiento de la clave privada (descifrar): las funciones unidireccionales. Aunque Diffie y Hellman las utilizaron en su propuesta de paradigma de clave pública, no formularon una implementación precisa.

No fue hasta dos años más tarde (1978) cuando Ronald Rivest, Adi Shamir y Leonard Adleman propusieron una manera concreta de llevar a la práctica este nuevo paradigma: el cifrado RSA (en honor a sus inventores). Se define la clave pública como (N, e) , donde N es el producto de dos números primos p y q , y e es un entero que no tiene ningún factor en común con el número $S = (p-1) \cdot (q-1)$. La clave privada correspondiente será un número d tal que el resto de dividir $e \cdot d$ por S sea 1. Aunque no entraremos en detalles y asumiremos que es un valor que nos viene dado, el algoritmo de Euclides facilita a Benito dicho cálculo de d , pero únicamente en aquellos casos en los que se conoce la factorización de N . Así, el punto esencial en dicha implementación es que, si no se conoce la factorización de N (lo cual ocurre siempre y cuando p y q sean suficientemente grandes), no es posible el cálculo de d en un tiempo razonable. Así, para cifrar un mensaje m , Alicia calcula $m \cdot e$, y el texto cifrado c será el resto de la división entera de m^e entre N . Para descifrar, Benito utiliza su clave d y calcula,

recuperando en mensaje al considerar el resto de la división de cd por N . Veamos un ejemplo:

Supongamos que la clave pública de Benito es $(N, e) = (55, 3)$. Su correspondiente clave privada será $d = 17$. Si Alicia quiere cifrar un mensaje $m = 5$, calcula $5^3 = 125$, y a continuación el resto de la división entera por 55, obteniendo $c = 15$. Cuando Benito lo recibe, utilizando su clave privada calcula $15^{17} = 56815128661595284938812255859375$. Como se puede observar este no es el mensaje enviado por Alicia, pero si se calcula el resto de la división de este número por 55, lo que se obtiene es el mensaje $m = 5$, puesto que $56815128661595284938812255859375 = 1033002339301732453432950106534 * 55 + 5$. Aunque pueda parecer fruto de la casualidad numérica, detrás se esconden abstractos teoremas matemáticos de teoría de números, algunos de ellos de algunos de los matemáticos más famosos de todos los tiempos como Euler o Fermat, y que garantizan que se pueden cifrar y descifrar mensajes basándose en la cifra del RSA.

EJERCICIO

Dados los números primos $p = 11$ y $q = 17$, la clave pública $(N = p \cdot q, 3)$ y la clave privada $d = 107$:

1. Cifra el mensaje $m = 6$.
2. Descifra el mensaje $c = 16$.

Después de más de dos décadas de reinado casi absoluto en el panorama simétrico del DES (Data Encryption Standard), en la actualidad, y desde el año 2000, se impone el cifrado de bloque AES (Advanced Encryption Standard). Pese a que el cifrado RSA es sin lugar a dudas el más conocido y utilizado, existen otros muchos que se basan en otras dificultades del cálculo que reproducen la idea de función unidireccional propuesta por Diffie y Hellman. Entre ellos destaca el cifrado de ElGamal (1984), que basa la unidireccionalidad en la imposibilidad de calcular eficazmente el logaritmo discreto en determinados grupos finitos.

En realidad estos sistemas criptográficos de clave pública se utilizan, por ejemplo, en el intercambio de correos

electrónicos, al conectarnos de manera segura a una web, o al utilizar una red virtual privada, simplemente para transmitir de forma segura las claves secretas entre dos usuarios. De esta manera, cuando los usuarios comparten la clave privada, pueden utilizar cifrados de clave privada, que resultan menos laboriosos, y por tanto, computacionalmente más eficientes que los de clave pública. Es lo que se conoce como **criptografía híbrida**.

Muchas emociones fluyen a través de Internet. La gente se enamora, se crean grandes imperios de negocio, el mundo se moviliza a través de las redes sociales, y eso que la vida en Internet no ha hecho más que comenzar. Es un excitante nuevo mundo, con sus propias reglas, que habrá que explorar. Y un punto está claro, en la mochila no podremos olvidar llevar las mejores herramientas criptográficas, y con ellas, las matemáticas.

OTROS TEMAS DE LA CRIPTOGRAFÍA

Pruebas de conocimiento nulo

Siguiendo con la codificación RSA, puede ser necesario verificar que una determinada clave pública es una clave RSA correcta. Para ello hay que comprobar que N es el producto de dos números primos, pero sin tener que desvelar la factorización del mismo -ya que si se pudiera calcular, se podría obtener de manera eficiente la clave privada y la codificación no sería segura-. Este tipo de problemas se pueden solucionar con pruebas de conocimiento cero. En ellas, generalmente, los diferentes intercambios de información suelen tener una fuerte componente de teoría de números.

En general, en criptografía, se denomina prueba de conocimiento cero (o nulo) (ver Schneier, 1996 y Stinson, 1997) a aquellos procesos interactivos que permiten probar a terceros que un determinado enunciado es cierto sin revelar nada más que el propio enunciado en sí, y garantizando el convencimiento a terceros de que efectivamente el enunciado es cierto.

Veamos una sencilla historia (Quisquater et al. 1989) que permite captar la esencia del concepto de prueba de conocimiento cero. En esta historia, Pepita (la probadora)

ha descubierto la palabra mágica que abre la puerta secreta de Alí Babá. La cueva tiene forma circular como se muestra en la figura 6, con una entrada en un lado y la puerta mágica bloqueando el lado opuesto. Víctor (el verificador) le dice que le pagará si le dice la palabra mágica que abre la puerta secreta, pero antes pone como condición tener la certeza de que Pepita realmente sabe la palabra. Por otro lado, Pepita asegura que le dirá la palabra mágica, pero solo cuando haya recibido el dinero de Víctor.

Para dar solución a este problema, Pepita y Víctor idean la siguiente solución. Para comenzar acuerdan nombrar los dos posibles caminos como camino A y camino B (ver figura 6). A continuación, Pepita elige aleatoriamente uno de los dos caminos y entra en la cueva sin que Víctor vea el camino que elige. Mientras, Víctor espera fuera de la cueva. A continuación, Víctor entra en la cueva, elige aleatoriamente el camino (A o B) por donde quiere que salga Pepita, y se lo comunica a ella (figura 7).

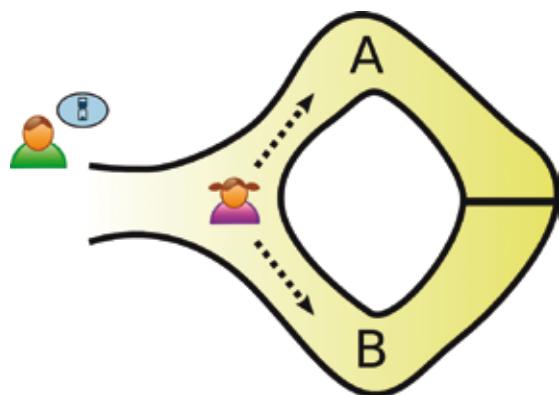


Figura 6. Forma de la cueva de Alí Babá, donde se muestran dos posibles caminos para acceder a ella, el marcado con la letra A y el marcado con la letra B. Fuente: http://en.wikipedia.org/wiki/File:Zkip_alibaba1.png.

Puesto que ella conoce la palabra mágica, será sencillo: esté en el camino que esté, podrá salir por el camino que Víctor pide, abriendo la puerta de la cueva si es necesario (figura 8).

Supongamos, en cambio, que Pepita no conocía la palabra. En tal caso, ella solo puede volver por el mismo camino por el que entra a la cueva, y para que Víctor estuviese

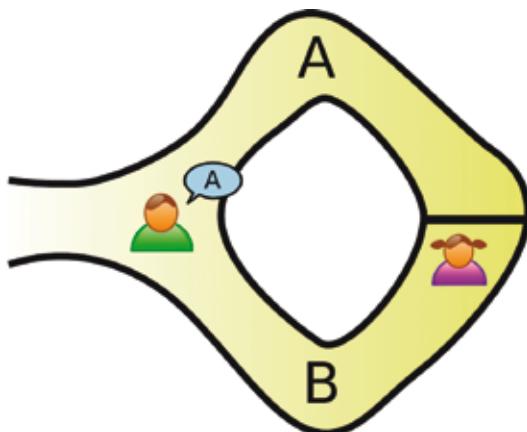


Figura 7. Pepita está dentro de la cueva y Víctor elige el camino por donde quiere que ella salga. Fuente: http://en.wikipedia.org/wiki/File:Zkip_alibaba2.png.

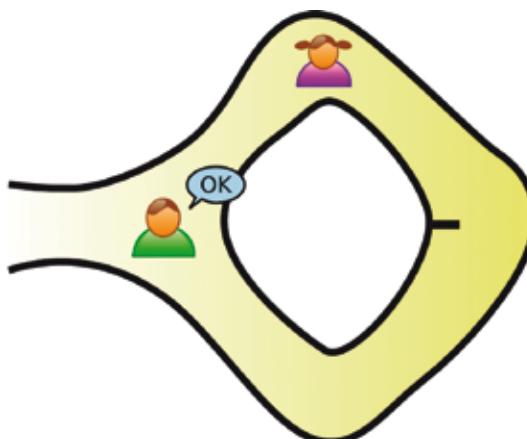


Figura 8. Pepita sale por el camino que ha solicitado Víctor, mostrándole que en caso de que haya sido necesario, ella ha podido utilizar la palabra mágica. Fuente: http://en.wikipedia.org/wiki/File:Zkip_alibaba3.png.

satisfecho con dicho experimento, debería ser el camino que Víctor ha solicitado al azar. Puesto que Víctor elige el camino A o B al azar, la probabilidad de que Pepita pueda volver por el camino que solicita Víctor es 0,5. Pero si se repite este experimento muchas veces –pongamos 20 veces consecutivas–, la probabilidad de que Pepita acierte en todas las ocasiones es de 1 entre 1 millón, por lo que casi se puede despreciar. De este modo, si después de repetir el experimento en unas cuantas ocasiones, Pepita siempre lo realiza de manera satisfactoria, es muy

probable que sea porque conoce la palabra mágica, y Víctor confía en que es así.

Pese a que esta historia abarca un ejemplo que puede parecer sin relación dentro del contexto de la seguridad, exemplifica perfectamente el proceso que se sigue en las pruebas de conocimiento cero, como en el ejemplo citado anteriormente.

Sí, ¿dígome? - ¿Cara o cruz?

Este apartado, basado en un relato de Manuel Blum (1983), permite reproducir el lanzamiento de una moneda de manera segura, es decir, sin posibilidad de trampas por ninguna de las dos partes, sin necesidad de que haya una moneda física ni que ni siquiera ambas personas se encuentren físicamente en el mismo lugar.

Supongamos que Alicia y Benito se acaban de divorciar, viven en diferentes ciudades, y quieren decidir quién se va a quedar el coche. Para ello, deciden lanzar una moneda mientras hablan por teléfono, pero evitando que el que lanza la moneda haga trampas y se declare ganador independientemente del resultado, aprovechando que el otro no lo ve.

Una manera de resolver este problema es implementando los siguientes pasos. Para comenzar, Alicia y Benito deben acordar una función unidireccional f completamente segura. Tal y como hemos visto, estas funciones permiten calcular la imagen de un valor de manera sen-

cilla, pero es muy difícil (por no decir casi imposible) calcular la imagen inversa de un determinado valor, ni una determinada propiedad de dicho valor (por ejemplo, si el valor es par o impar). Para más detalles de funciones unidireccionales se puede consultar Schneier (1996) y Stinson, (1997).

A continuación Alicia selecciona un valor entero x (desconocido para Benito), calcula $f(x)$ y envía $f(x)$ a Benito. Benito, que no puede determinar si x es par o impar a partir de $f(x)$, le dice a Alicia si cree que el valor x es par o es impar. Alicia le contestará si acertó o no, a la vez que le envía a Benito el valor x para confirmar el valor que ella seleccionó al inicio del intercambio de mensajes.

Este método es especialmente interesante para cualquier diseñador de protocolos, ya que podrá ser aplicado siempre que se necesite elegir un bit aleatoriamente entre dos partes conectadas a través de una red.

Esquemas para compartir secretos

Hay situaciones en las que un secreto no puede ser guardado por una única persona, ya que esto podría ser arriesgado. Un ejemplo de esto es el problema de guardar claves secretas, como las utilizadas en votaciones electrónicas que se organizan a través de Internet. Se trata de claves que se deben mantener en secreto para evitar que sean utilizadas por terceros y manipuladas, ya que conocerlas podría poner en grave peligro la



Fuente: http://www.flickr.com/photos/ai_imagination/3816485241/.



Fuente: <http://www.flickr.com/photos/lwvc/6306132745/>.

seguridad del sistema, filtrando información o incluso manipulando el resultado de la votación.

Una aproximación es dividir la clave en diferentes fragmentos de manera que, para conocer la clave, sea necesario poner todos las partes en común. En el caso de las votaciones electrónicas, podríamos pensar que cada partido político custodiase un fragmento de la clave secreta. Una parte fundamental en este proceso es cómo llevar a cabo la generación de los fragmentos, puesto que sería deseable que cada una de las partes no pudiese obtener ningún tipo de información de la clave, pese a conocer su fragmento (o incluso alguno más del resto de participantes). Esta propiedad descarta fragmentaciones triviales que podrían llevarse a cabo como la siguiente. Pongamos un ejemplo sencillo. Imaginemos que la clave secreta es 1234 y que hay dos partidos políticos. Si le damos a uno de los partidos el fragmento 12, y al otro el fragmento 34, pese a que ninguno de ellos conoce exactamente la clave, sí que han reducido substancialmente las posibles claves, puesto que el primer partido conoce que la clave comienza por 12, por lo que solo debe probar a lo sumo 100 diferentes claves para dar con la clave secreta. De manera análoga se reduce la seguridad con el otro fragmento de clave.

La solución a este problema fue propuesta independientemente por Shamir y Blackley en el año 1979. Son los llamados esquemas para compartir secretos. En ellas se proponen soluciones que permiten compartir un secreto s entre n participantes, de manera que si t de estos participantes se reúnen (no necesariamente todos, sino tan solo t de ellos), pueden recuperar el secreto, mientras que si menos de t intentan recuperarlo, no solo no lo conseguirán, sino que además no conseguirán obtener ninguna información del secreto en sí. Las propuestas de Shamir y Blackley están basadas en diferentes conceptos matemáticos. Por un lado, la de Shamir se basa en la interpolación polinómica, mientras que la de Blackley utiliza como fragmentos ciertos hiperplanos y como secreto la intersección de dichos hiperplanos.

PARA PROFUNDIZAR

Describimos a continuación la solución de Shamir por su simplicidad y elegancia, hecho que además ha influencia-

do en que los esquemas para compartir secretos sean utilizados en numerosas soluciones de lo que se conoce como criptografía distribuida (Desmedt y Frankel, 1989). La persona que posee el secreto s que desea compartir entre un conjunto de n participantes P_1, \dots, P_n se conoce como distribuidor. Supongamos que el distribuidor pretende fragmentar el secreto de manera que solo cuando un conjunto (cualquier) de al menos t participantes reúne sus fragmentos, puedan recuperar el secreto. Para ello elige un número primo p grande y a continuación y aleatoriamente escoge un polinomio $P(x)$ de grado $t-1$ y con la condición de que su término independiente sea el secreto s , esto es, $P(x) = a_{t-1}x^{t-1} + a_{t-2}x^{t-2} + \dots + a_1x + s$. El fragmento que el distribuidor dará al participante P_i será $P(i)$. Así, cuando un conjunto de t (o más) participantes intente colectivamente recuperar el secreto a partir de sus fragmentos, podrá utilizar la interpolación de Lagrange o simplemente resolver el sistema lineal con t ecuaciones y t incógnitas, cuya matriz asociada es una matriz de Vandermonde de dimensiones $t \times t$ y que permite garantizar la existencia de una solución única. Por el contrario, si menos de t participantes intentan recuperar el secreto a partir de sus fragmentos, no solo verán que no es posible, sino que verán que todos los valores son igualmente probables. Cabe añadir que toda la aritmética de este problema se debe hacer en una estructura algebraica concreta, en particular en un cuerpo de p elementos, donde p es un número primo. Brevemente podemos imaginar que se

EJERCICIOS

1. Comparte el secreto $45 \in \mathbb{Z}/(111)$ entre tres participantes de manera que únicamente si 2 de ellos ponen en común sus fragmentos puedan recuperar el secreto.
2. Supongamos que 4 participantes tienen fragmentos 23, 15, 34 y 87 respectivamente de un cierto secreto s de $\mathbb{Z}/(97)$. Saben que si dos de ellos intentan recuperar el secreto, lo conseguirán. ¿Qué recuperarán? Y si el número mínimo de participantes que se necesitan para recuperar el secreto es 3, ¿qué secreto recuperarán?

hacen las operaciones de manera usual, pero, por ejemplo, una vez calculado $P(i)$, si este valor no está en el conjunto $\{0, 1, \dots, p-1\}$ nos quedaremos con el resto de la división entera de $P(i)$ y p , de manera similar a como se ha realizado con el RSA.

Curvas elípticas para tarjetas inteligentes

Una importante contribución basada en el cifrado de El Gamal, establece la unidireccionalidad de la codificación del mensaje en la imposibilidad de calcular eficazmente el logaritmo discreto en determinados grupos finitos, se debe a Menezes y Vanstone (1990). Ellos implementan la cifra de ElGamal utilizando aritmética de curvas elípticas en lugar de aritmética modular. Pese a que este hecho complica la realización de algunas de las operaciones, presenta la gran ventaja de que permite reducir la longitud de las claves considerablemente. Según Schmeh (2003), para un cifrado basado en el logaritmo discreto, una longitud de la clave de 1024 bits es equivalente a una de 200 bits utilizando curvas elípticas, por lo que se reduce el tiempo de cálculo en aproximadamente una decena parte. Estos ahorros computacionales hacen que las curvas elípticas sean especialmente interesantes para ser utilizadas en tarjetas inteligentes, dispositivos que, por otro lado, han aumentado notablemente en número en la actual sociedad de la información.

No solo se utilizan para cifrar y descifrar mensajes, sino que muchos otros algoritmos criptográficos basan su aritmética en curvas elípticas, facilitando así su uso en dispositivos de reducida memoria.

El lector interesado en saber más sobre la criptografía de curvas elípticas puede consultar Hankerson y Menezes (2003) y Stinson (1997).

La imposibilidad de detectar programas maliciosos: (malware)

Uno de los problemas que más preocupa a los usuarios de Internet es la posibilidad de que las actividades que desarrollen en la red introduzcan en sus ordenadores programas maliciosos, lo que se conoce con el anglicismo *malware*. Ya entrado el siglo XXI, virus como el Bagle, gusanos como el *I Love You*, o las redes de ordenadores zombis (conocidas con el anglicismo *Botnet*) representa-

ron sustanciales pérdidas económicas, además de incrementar el pánico entre la población sobre la seguridad en la red. Las matemáticas están presentes también en estos parajes, tanto de atacantes como de defensores.

Sin entrar en detalles sobre este tipo de programas, que requerirían unos conocimientos mucho más avanzados de herramientas informáticas y de seguridad, mostraremos una bella demostración por contradicción que prueba la imposibilidad de detectar todos los posibles programas maliciosos (Goodrich y Tamassia, 2011) y que recuerda sobremanera a la demostración de Euclides que permite demostrar la infinitud de números primos. En realidad es un esbozo de la demostración formal, pero permite intuir la esencia de la demostración eliminando los detalles más técnicos.

En efecto, supongamos que existe un programa, que podemos llamar SuperDetector, que puede detectar todo tipo de *malware*. Desgraciadamente, alguien podría, sabiendo la existencia del programa SuperDetector, diseñar el siguiente programa, Ultravírus, que actúa cuando es evaluado por un detector de *malware*. Si el programa lo detecta como malicioso, para la ejecución del programa, y si lo identifica como no malicioso, entonces hace alguna operación maliciosa. Así, si el programa SuperDetector dice que el nuevo programa UltraVirus es *malware*, en realidad no lo será (puesto que no hará ninguna acción maliciosa), mientras que si SuperDetector dice que no lo es, a continuación hará una, llegando así claramente a una contradicción.

OTRAS MATEMÁTICAS EN LA RED

Uno de los casos más conocidos de la aplicación de resultados teóricos de matemáticas en el desarrollo de Internet es el uso de herramientas básicas de álgebra lineal, teoría de grafos y probabilidad en el diseño del algoritmo PageRank del buscador Google. PageRank permite dar un criterio de ordenación al realizar una búsqueda entre la ingente cantidad de información que se encuentra disponible en Internet. Se pretende que al menos uno de los diez primeros enlaces que se muestran en la búsqueda contenga información útil. Para ello se modela cada

possible sitio de la red como un vértice de un grafo de manera que exista una arista dirigida entre dos de los vértices si desde una de las páginas (vértice saliente) hay un enlace a la otra página (vértice entrante).



Fuente: <http://www.flickr.com/photos/9009139@N08/2363535692/>

El grafo resultante es un grafo de dimensiones gigantescas, pero permite ordenar la información. Para ello se considera la una matriz asociada de ceros y unos, donde el elemento de la fila i -ésima i la columna j -ésima es 1 si el grafo tiene una arista que une el vértice i con el vértice j , y 0 en caso contrario. Se calculan ciertos valores y vectores propios de la matriz (de manera considerablemente eficiente si tenemos en cuenta las dimensiones de la matriz). La teoría que hace posible dicha modelización se remonta a principios del siglo XX, y se debe a dos ilustres matemáticos, Roche y Frobenius, cuyos trabajos sobre los valores y vectores propios en matrices con entradas no negativas permiten garantizar la existencia de una solución para el algoritmo PageRank, y por tanto, cuando realizamos una búsqueda en Google, encontramos una solución satisfactoria entre los primeros enlaces mostrados. En Fernández (2004) se puede encontrar una completa descripción más detallada de la modelización, así como de las matemáticas implicadas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Blakley, G. R. (1979): "Safeguarding cryptographic keys". *Proceedings of the National Computer Conference, 1979. American Federation of Information Processing Societies Proceedings*, vol. 48, pp. 313-317.

Artículo científico donde se propone por primera vez el concepto de esquema de compartición de secretos.

Blum, M. (1983): "Coin flipping by telephone. A protocol for solving impossible problems". *ACM SIGACT News*, vol. 15, nº 1, pp. 23-27.

Artículo científico que propone por primera vez una forma de utilizar la criptografía para simular de manera justa el lanzamiento de una moneda cuando ambos participantes no se encuentran físicamente en el mismo lugar.

Desmedt, I. y Frankel, Y. (1989): "Threshold cryptosystems". *Crypto*, pp. 307-315. Artículo científico en el cual se propone la criptografía distribuida.

Diffie, W. y Hellman, M. E. (1976): "New directions in cryptography". *IEEE Transactions on Information Theory*, nº 22, pp. 644-654.

Artículo científico que presenta por primera vez el paradigma de criptografía pública.

ElGamal, T. (1984): "A public-key cryptosystem and a signature scheme based on discrete logarithms". *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 31, nº 4, pp. 469-472.

Artículo científico que presenta uno de los criptosistemas de clave pública más utilizados, el de ElGamal.

Fernández, P. (2004): "El secreto de Google y el álgebra lineal". *Boletín de la Sociedad Española de Matemática Aplicada*, nº 30, pp. 115-141.

Artículo de divulgación que proporciona una explicación del funcionamiento de PageRank de Google y del álgebra lineal que se utiliza en el algoritmo.

Goodrich, M. y Tamassia, R. (2011): *Introduction to computer security*. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley.

Libro en el que se introducen los principales conceptos de seguridad informática, así como los mecanismos de defensa existentes.

Hankerson D., Menezes, A. y Vanstone S. (2003): *Guide to elliptic curve cryptography*. Heidelberg: Springer.

Libro en el que se cubren los principales conceptos de criptografía de curvas elípticas.

Kahn, D. (1967): *The codebreakers: the comprehensive history of secret communication from ancient times to the Internet*. New York: Scribner.

Libro en el que se hace un recorrido por la criptografía desde un punto de vista histórico.

Menezes, A. y Vanstone, S. (1990): "The implementation of elliptic curve cryptosystems". *AUSCRYPT*, vol. 90, pp. 2-13.

Artículo en el que se propone un criptosistema de criptografía de curvas elípticas.

Quisquater, J., Guillou, L. y Berson, T. (1989): "How to explain zero knowledge to your children". *Advances in Cryptology-CRYPTO*, vol. 89, LNCS n° 435, pp. 628-631.

Artículo científico en el que se propone en formato cuento el funcionamiento de los protocolos de conocimiento cero.

Rivest, R., Shamir, A. y Adleman, A. (1978): "A method for obtaining digital signatures and public-key cryptosystems". *Communications of the ACM*, vol. 21, n° 2, pp. 120-126.

Artículo científico en el que se propone por primera vez el criptosistema RSA de clave pública.

Schmeh, K. (2003): *Cryptography and public key infrastructure on the Internet*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons.

Libro en el que se recogen las principales herramientas criptográficas utilizadas en la actualidad.

Schneier, B. (1996): *Applied cryptography: protocols, algorithms, and source code in C*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons.

Libro en el que se recogen las principales herramientas criptográficas utilizadas en la actualidad, a la vez que algunas implementaciones.

Shamir, A. (1979): "How to share a secret". *Communications of the ACM*, vol. 22, n° 11, pp. 612-613.

Artículo científico donde se propone por primera vez el concepto de esquema de compartición de secretos.

Shannon, C. (1949): "Communication theory of secrecy systems". *Bell System Technical Journal*, vol. 28, n° 4, pp. 656-715.

Artículo científico en el que se estudia la criptografía desde un punto de vista de la teoría de la información.

Sigh, S. (2000): *Los códigos secretos*. Madrid: Debate.

Libro de divulgación muy didáctico sobre los diferentes cifrados utilizados durante la historia, con un énfasis especial en las matemáticas subyacentes.

Stinson, D. (1997): *Cryptography: theory and practice*. Boca Raton, Florida: CRC Press.

Libro en el que se recogen las principales herramientas criptográficas utilizadas en la actualidad.

Vernam, G. S. (1926): "Cipher printing telegraph systems for secret wire and radio telegraphic communications". *Journal of the IEEE*, vol. 55, pp. 109-115.

Artículo científico en el que se propone el cifrado más seguro, el *one-time pad*.

MATERIALES AUXILIARES

LIBROS

Gibson, W.: *Conde Cero* (1986), *Mona Lisa acelerada* (1988), *Luz Virtual* (1993).

Novelas del famoso autor de ciencia ficción William Gibson, creador del término ciberespacio.

Mitnick, K. (2003): *The art of deception*. New Jersey: John Wiley & Sons.

Libro del hacker Kevin Mitnick, sobre la ingeniería social y cómo esta se puede combinar con el pirateo.

Raimond, E. S. (2001): *La catedral y el bazar*.

Ensayo a favor del software de código abierto escrito por el hacker Eric S. Raymond en 1997 y publicado por O'Reilly Press en 2001.

Stephenson, N. (2002): *Criptonomicón*. Barcelona: Ediciones B.

Novela de ciencia ficción. La trama se desarrolla en dos líneas temporales narradas en paralelo. En una se presenta la labor de un grupo de criptógrafos y especialistas en detección táctica, aliados durante la Segunda Guerra Mundial. La otra transcurre en la época actual, en la que descendientes de los protagonistas de la primera trama emplean tecnología punta criptográfica, de telecomunicaciones e informática, para construir un paraíso de datos.

Stephenson, N. (2003): *En el principio fue la línea de comandos*. Madrid: Traficantes de Sueños.

Ensayo del escritor estadounidense Neal Stephenson, publicado originalmente en Internet en 1999 y más tarde ese mismo año en forma de libro. El ensayo explora la posibilidad de que el software libre pueda, en un futuro, reemplazar totalmente al software propietario, al eliminar los beneficios económicos para las empresas productoras de este último. También analiza las prácticas empresariales y la filosofía de Microsoft, Apple y diversas comunidades de software libre.

PÁGINAS WEB

http://www.simonsingh.net/The_Black_Chamber/. The Black Chamber. Portal de divulgación donde se encuentran implementados algunos protocolos criptográficos históricos.

http://miriadax.net/web/descodificando_algebra. Descodificando Álgebra. Curso masivo *on line* en abierto y gratuito de la Universidad Pompeu Fabra impartido por

Vanessa Daza y Nikolaos Makriyannis, que plantea cuatro retos relacionados con la criptografía y las comunicaciones. Propone también vídeos que muestran las herramientas matemáticas necesarias para resolverlos.

PELÍCULAS

Enigma (Michael Apted, 2001). Película ambientada en la Segunda Guerra Mundial, que capta el papel de los matemáticos que trabajaban para romper los códigos nazis. Un convoy de barcos mercantes aliado que está cruzando el Atlántico con 10.000 pasajeros e importantes suministros está en peligro de ataque. Las autoridades recurren a Tom Jericho, un brillante matemático y experto descifrador de códigos de los servicios de inteligencia británicos, para conseguir romper el nuevo código con el que se comunican los nazis. Jericho tiene una cierta similitud con el famoso matemático Alan Turing, que rompió el código alemán Enigma.

Windtalkers (John Woo, 2002). Película ambientada en la Segunda Guerra Mundial, protagonizada por Nicolas Cage y Christian Slater. Está basada en hechos reales; en efecto, el Cuerpo de Infantería de Marina de los Estados Unidos utilizó a operadores de radio navajos para que transmitieran las órdenes en su idioma y no fueran capaces de ser descifradas por los japoneses.

Contacto (Robert Zemeckis, 1997). Película basada en la novela homónima de Carl Sagan. La protagonista recibe un mensaje extraterrestre cuyo inicio es la sucesión de los primeros números primos. El mensaje contiene instrucciones para la construcción de un artefacto que llevará a la protagonista en un viaje por el universo para hacer un primer contacto con la vida del espacio exterior.

DOCUMENTAL

Code makers & code breakers. Documental para National Geographic. Serie que traza un recorrido histórico por la criptografía. Disponible en http://www.youtube.com/watch?v=sEUn_9QO3ro&list=PL079E7E60932D5B5E&index=1.

ENERGÍA

Rafael Montenegro

3.6

Objetivos, contenido y criterios de evaluación de acuerdo con los Reales Decretos de Enseñanzas Mínimas, (1467/2007 de 2 noviembre para Bachillerato y 1631/2007 de 29 de diciembre para Educación Secundaria Obligatoria).

Este capítulo aborda la gestión y aprovechamiento de las energías renovables, concretamente, las energías eólica y solar, desde una perspectiva matemática. Las energías limpias surgen como alternativa a los combustibles fósiles, como reto científico y tecnológico que afronta el siglo XXI.

Las matemáticas contribuyen al estudio y solución de estas cuestiones ya que los fenómenos físicos relacionados con estas fuentes de energía se pueden describir mediante ecuaciones diferenciales, cuyas soluciones se aproximan mediante modelos numéricos. Por otro lado, el análisis de las tecnologías asociadas hace uso de métodos de optimización y técnicas de discretización espacio-temporal.

Para utilizar las energías renovables de manera eficaz y eficiente es necesario el uso de modelos matemáticos. Los modelos que se muestran consisten en la representación simplificada de una realidad física mediante objetos matemáticos, sobre los que se pueden aplicar técnicas y herramientas matemáticas para su estudio y para obtener resultados que aproximen el comportamiento de la realidad.

El foco de interés de este capítulo está en la explicación con cierto detalle del método de los elementos finitos. En primer lugar se elige representar el espacio físico real (el dominio de estudio) mediante un objeto que pueda ser asimilado por un modelo numérico. Este objeto se conoce como malla y conforma una representación discreta (a trozos) de un dominio real, que generalmente es continuo.

Las técnicas que permiten construir mallas se conocen como técnicas de generación de mallas, o de discretización, de la región de estudio. Los fenómenos que se producen sobre superficies suelen utilizar mallas compuestas por triángulos; los fenómenos tridimensionales que las emplean están simulados con tetraedros. Las mallas

compuestas por triángulos o tetraedros aproximan la superficie o el volumen de la región de estudio y, simultáneamente, la magnitud física que se pretende simular (viento, radiación solar).

Si bien el método tiene un nivel de complejidad técnica apreciable, es posible su seguimiento y comprensión por parte de alumnos de bachillerato con las explicaciones, representaciones y apoyos gráficos adecuados.

Para aproximar la velocidad del viento o la radiación solar en cualquier punto y estimar el valor de cierta magnitud en el interior del elemento, se define un soporte de interpolación a trozos, a partir de un pequeño número de datos en cada elemento finito.

El método de elementos finitos planteará al final un sistema de ecuaciones, con un número de incógnitas proporcional al número de vértices existente en la malla; interesa que la malla esté adaptada para disminuir el orden del sistema.

Mediante el método de los elementos finitos se muestra la simulación de campos de viento, se ilustra la importancia del relieve y se determina la mejor localización de los parques eólicos. También se emplea para trabajar en actuaciones de diagnóstico o de pronóstico o para simular la dispersión de contaminantes, entre otros. Igualmente, el método se utiliza para el diseño de placas solares y el estudio de la radiación recibida en un lugar determinado. Sus valores se estiman a través del modelo de radiación solar, con aplicaciones similares a las del modelo de simulación de campos de viento: la generación de mapas de radiación, la localización de emplazamientos óptimos de parque solares, y la predicción de la potencia generada en cada caso.

Los ejemplos que proporciona el autor sobre el uso del modelo en Gran Canaria muestran varias aplicaciones del método y ayudan en la interpretación de sus resultados.

INTRODUCCIÓN

La obtención de energías limpias (eólica, solar, hidráulica, geotérmica, mareomotriz, etcétera) es uno de los grandes desafíos que afronta el siglo XXI como alternativa a los combustibles fósiles, tanto por la limitación de las reservas de dichos combustibles como por los problemas medioambientales que ocasionan. Las matemáticas están muy presentes en la implementación de estas alternativas que permitirán utilizar las energías renovables de manera eficiente. Las [ecuaciones diferenciales](#) que gobernan estos fenómenos físicos tienen soluciones que es necesario aproximar usando [modelos numéricos](#); por otro lado, para facilitar el análisis de estas tecnologías, mejorar su aprovechamiento y hacer una gestión energética y medioambiental adecuada se usan [técnicas adaptativas](#) de discretización espacio-temporal, o métodos de optimización.

El aprovechamiento de energías renovables, concretamente de la eólica y la solar, supone un importante reto tanto científico como tecnológico. Para ello son imprescindibles numerosas herramientas que analizan toda una serie de cuestiones relacionadas con estos procesos, entre las que se encuentran los modelos matemáticos. Los modelos, en general, consisten en la representación simplificada de una realidad física mediante *objetos* matemáticos, sobre los que se pueden aplicar técnicas y herramientas matemáticas para estudiar y obtener resultados que aproximan el comportamiento de la realidad. Este capítulo¹ se centra en la resolución de modelos físico-matemáticos mediante métodos numéricos, en concreto el [método de elementos finitos](#) (MEF), para simular campos de viento y [radiación solar](#) sobre orografías irregulares. Estos métodos se combinan con modelos meteorológicos para predecir la energía producida en parques eólicos y solares. En concreto, la sección 2 está dedicada a introducir conceptos básicos del MEF, mientras que en las secciones 3 y 5 se comenta la contribución del MEF en la gestión de energías limpias (eólica y solar).

En la sección 4 se explica la simulación de la dispersión de los contaminantes emitidos por chimeneas de centrales térmicas convencionales, fenómeno que está regulado por las normas sobre la calidad del aire y vinculado, junto con la promoción de las energías limpias, a las políticas sostenibilidad. En general, en este capítulo nos planteamos como objetivo transmitir las ideas básicas que entran en juego en la simulación numérica de estos procesos medioambientales, evitando detallar las complejas ecuaciones diferenciales que se resuelven y las técnicas numéricas utilizadas para aproximar su solución.

EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

Los métodos numéricos permiten resolver problemas complejos mediante la implementación de algoritmos matemáticos en programas de ordenador. Para poder aplicar el método de elementos finitos (MEF), lo primero que hacemos es representar el espacio físico real (el dominio de estudio) mediante un objeto que pueda ser asimilado por el modelo numérico. Este objeto se conoce como [malla](#) y conforma una representación discreta (a trozos) de un domino real que generalmente es continuo. Las técnicas que permiten construir mallas se conocen como [técnicas de generación de mallas](#), o de *discretización*, de la región de estudio.

Para analizar fenómenos que se producen sobre superficies se suelen utilizar mallas compuestas por triángulos, mientras que para fenómenos tridimensionales están formadas por tetraedros. El tetraedro es el poliedro más simple en 3-D y está formado por cuatro caras triangulares, con un total de cuatro vértices y seis aristas (figura 1). Si se desea estudiar el viento en una zona concreta de la atmósfera, ¿qué tipo de malla debe usarse, una malla compuesta de triángulos o de tetraedros?

En la aplicación del MEF se suelen usar mallas compuestas por triángulos o tetraedros, que aproximan la superficie o el volumen de la región de estudio y simultáneamente la magnitud física que se pretende simular (viento, radiación solar, etcétera). Con esto se consigue “contar” de manera sencilla al ordenador la forma

¹ El autor de este capítulo agradece a los siguientes investigadores su participación en este trabajo: G.Montero, J.M.Escobar, E.Rodríguez, J.M.González-Yuste, J.M.Cascón, A.Pérez-Foguet, A.Oliver, F.Díaz y L.Ferragut.

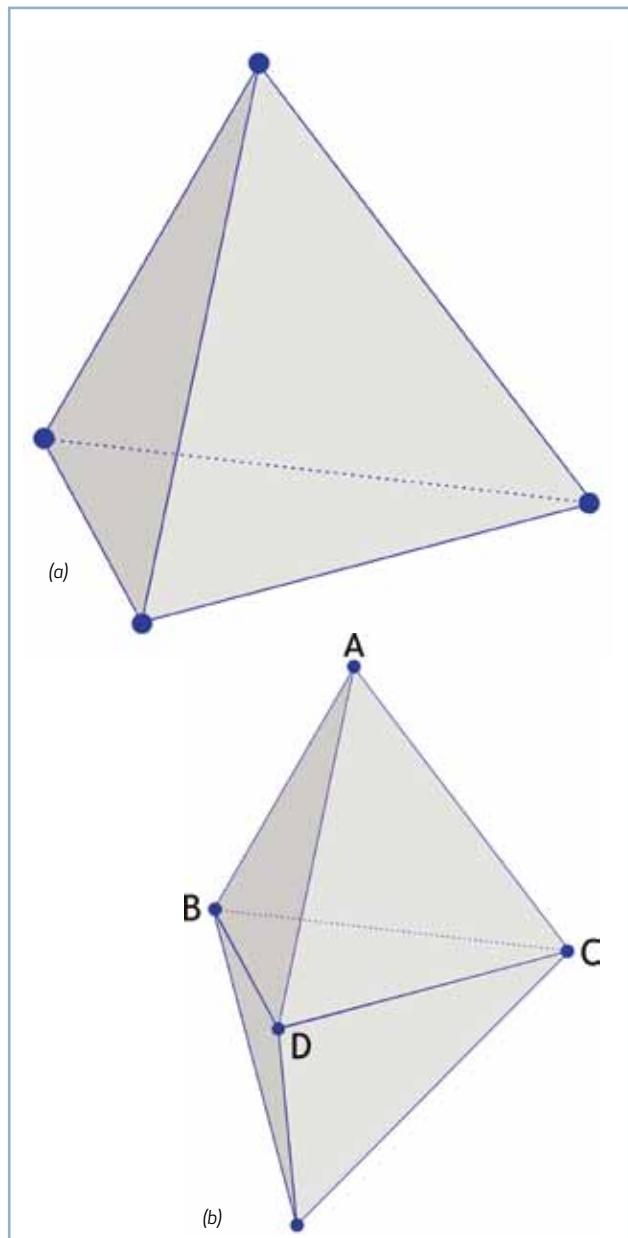


Figura 1. Ejemplo de un tetraedro. Está compuesto por cuatro caras triangulares y tiene cuatro vértices y seis aristas (a). Ejemplo sencillo de una malla 3-D formada por dos tetraedros. Está constituida por cinco vértices y la cara BCD está compartida por ambos tetraedros. Las mallas reales utilizadas en la aplicación del MEF pueden llegar a tener varios millones de tetraedros, dependiendo de la complejidad geométrica del dominio (b). Autores: R. Montenegro, G. Montero, J. M. Escobar, E. Rodríguez, J. M. González-Yuste, F. Díaz, L. Ferragut, J. M. Cascón, A. Pérez-Foguet, A. Oliver.

(geometría) compleja de esta región tridimensional, y se define un soporte de *interpolación a trozos* para aproximar la velocidad del viento o la radiación solar en cualquier punto. Esta interpolación a trozos permite estimar el valor de cierta magnitud en el interior del elemento a partir de un pequeño número de datos en cada elemento finito, por ejemplo el valor de la magnitud física en los vértices de los triángulos o tetraedros.

A veces es necesario aumentar la resolución para aproximar los detalles de la geometría en ciertas zonas de la región de estudio, por lo que se usan mallas con elementos más pequeños en esas zonas, lo que se llaman mallas adaptativas. Para ilustrar el concepto de malla de elementos finitos *adaptativa*, en la figura 2 se representan dos vistas de una malla de tetraedros de volumen, aunque solo se visualizan las caras externas (triángulos) de los tetraedros. La malla está adaptada para aproximar las líneas de costa de los continentes y los contornos de las letras que se han “escrito” en la “atmósfera”. El mar se considera localmente como una superficie plana y puede representarse con triángulos grandes. Sin embargo, para aproximar los detalles de contornos (la costa y las letras) se necesitan muchos triángulos más pequeños.

Para aproximar la magnitud física el método de elementos finitos planteará al final un *sistema de ecuaciones*, con un número de incógnitas proporcional al número de vértices existente en la malla, por lo que nos interesa que la malla esté adaptada para disminuir, en la medida de lo posible, el orden del sistema. Nótese que si la malla de la figura 2 fuera uniforme (no estuviese adaptada), todos los triángulos serían aproximadamente del mismo tamaño y suficientemente pequeños para captar los detalles. Esto provocaría la existencia de una cantidad innecesaria de triángulos pequeños en el mar. Resultarían sistemas de ecuaciones con muchas más incógnitas, cuya resolución consumiría muchos recursos computacionales. De ahí que sea muy importante el uso de mallas de elementos finitos adaptativas. Hay que tener en cuenta que en el caso de simular problemas en dominios tridimensionales de geometría irregular, los sistemas pueden ser de millones de ecuaciones con millones de incógnitas. Aunque en la actualidad existen técnicas numéricas eficientes y ordenadores de gran

capacidad, el **coste computacional** de la resolución de estos sistemas puede ser significativo.



Figura 2. Malla de tetraedros de un dominio tridimensional en la que se ha adaptado el grado de discretización para aproximar adecuadamente los contornos de los continentes y de las letras. En (a) se representa una vista frontal de la malla y en (b) se puede observar la misma malla en perspectiva. Imagen: Universidad de Las Palmas de Gran Canaria.

La generación automática de mallas de elementos finitos de geometrías complejas es una línea de investigación abierta. Las técnicas más comunes para la generación de mallas de triángulos y tetraedros se basan en la llamada triangulación de *Delaunay* y el *método de avance frontal*. Recientemente se ha introducido el denominado *método del mecano* para generar mallas de tetraedros. La idea es generar automáticamente la malla de tetraedros en una aproximación (mecano) de la región de estudio construida mediante piezas simples, y finalmente deformar la malla para aproximar el dominio. En la figura 3(a) se representa el mecano que se ha utilizado para la generación de la malla representada en la figura 2, y en la figura 3(b) se muestra un ejemplo de una malla de tetraedros generada en el mecano. Es muy fácil cambiar las frases escritas en la "atmósfera".

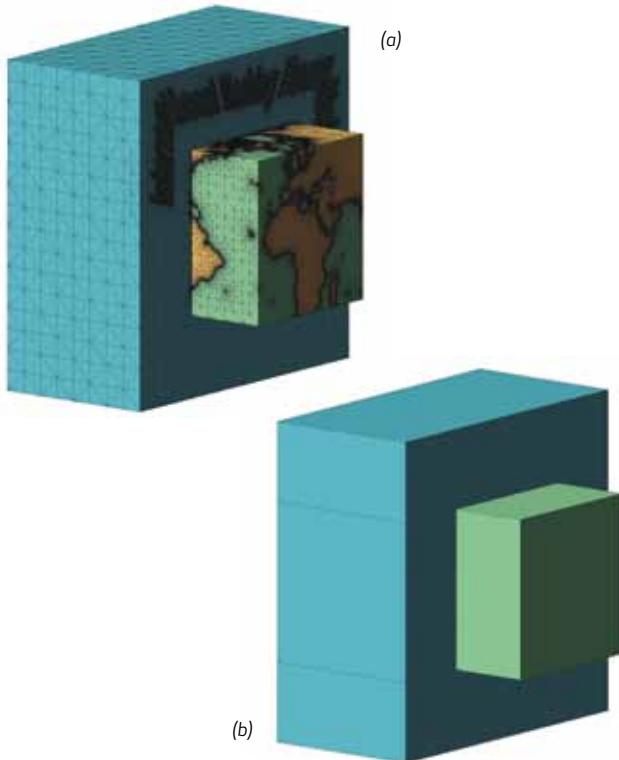


Figura 3. Mecano compuesto por seis cuboides (a) y un ejemplo de una malla de tetraedros generada automáticamente en el mecano (b). Autores: R. Montenegro, G. Montero, J. M. Escobar, E. Rodríguez, J. M. González-Yuste, F. Díaz, L. Ferragut, J. M. Cascón, A. Pérez-Foguet, A. Oliver.

SIMULACIÓN DE CAMPOS DE VIENTO

La energía eólica que podemos obtener en un determinado punto dependerá directamente de la energía cinética del viento y, por tanto, de su velocidad. Por esta razón, necesitamos un procedimiento que nos indique el valor de la velocidad del viento (módulo y dirección) en un punto situado a una cierta altura por encima del terreno.

La siguiente fórmula relaciona la velocidad del viento con la potencia máxima teórica que puede extraerse de él en un aerogenerador de eje horizontal con un radio r de rotor:

$$P = \frac{1}{2} d v^3 \pi r^2,$$

donde P es la potencia en vatios (W), d es la densidad del aire en kg/m^3 , v es la velocidad del viento en m/s y r está expresado en metros. Observa que la potencia es proporcional al cubo de la velocidad, lo que explica la importancia de disponer de modelos matemáticos capaces de aproximar la velocidad del viento de forma precisa.

Para determinar la localización óptima de los parques eólicos, las empresas productoras necesitan conocer qué zonas tienen valores de velocidad de viento adecuados a las características de los aerogeneradores, es decir, ni muy bajos, porque no sería suficiente para mover las aspas, ni muy altos, porque obligaría a detener el giro de las mismas para impedir que sufran daños estructurales. Normalmente se dispone de pocas medidas tomadas en puntos dispersos, donde hay **anemómetros**, a partir de las cuales hay que buscar un método matemático fiable para estimar el viento sobre cualquier punto del terreno. Los modelos matemáticos de viento, y en particular, los modelos de tipo masa consistente descritos más abajo, son muy adecuados para resolver este problema práctico. Con ellos se elaboran mapas de velocidades de viento que son fundamentales

para el estudio, planificación y explotación de los recursos eólicos.

Para ilustrar la importancia del relieve en este proceso, se propone reflexionar sobre los ejemplos representados en la figura 4. Supongamos en primer lugar el caso de la figura 4(a). Se trata de un terreno plano en el que existen dos puntos situados a una misma altura sobre el terreno y a una distancia de 1 km entre sí. Consideremos también que en estos dos puntos hemos medido, utilizando dos anemómetros sincronizados, un mismo valor de velocidad de 5 m/s. Nos podríamos preguntar qué valor de velocidad sería razonable en un punto intermedio. Obviamente, si no se dispone de más datos, parece razonable estimar un valor de 5 m/s en este punto intermedio.

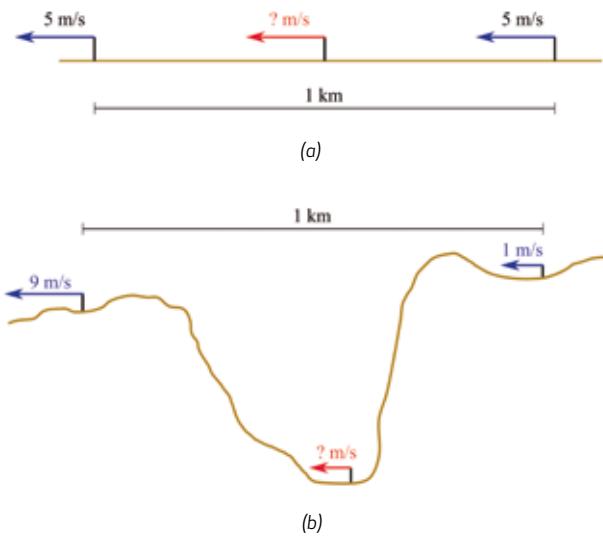


Figura 4. Motivación de la simulación de campos de viento. Ejemplos para pensar sobre la estimación de un valor razonable de velocidad de viento en el caso de terreno plano (a), y cuando tenemos una orografía irregular (b). En azul se representan las velocidades dato en los puntos indicados, y en rojo la velocidad que es desconocida. Autores: R. Montenegro, G. Montero, J. M. Escobar, E. Rodríguez, J. M. González-Yuste, F. Díaz, L. Ferragut, J. M. Cascón, A. Pérez-Foguet, A. Oliver.

Si ahora consideramos el caso de la figura 4(b), tenemos una topografía irregular y dos valores diferentes de la velocidad del viento de 1 m/s y 9 m/s en dos puntos situados a 1 km entre sí. En este caso, debido a la irregularidad

del terreno, ya no es tan evidente estimar un valor razonable de la velocidad del viento en el punto intermedio.

El fenómeno físico del movimiento del aire está gobernado por las ecuaciones de Navier-Stokes, cuya resolución exacta no es posible en regiones de geometría complicada, y cuya resolución aproximada mediante el método de elementos finitos es factible, pero compleja. Una forma de simplificar el problema consiste en intentar encontrar un campo de viento que verifique dos condiciones físicas mínimas. La primera es que el aire no atraviese el terreno y la segunda es considerar al aire como un **fluido incompresible**. Básicamente, esta última condición significa que la cantidad de aire que entra en una región cerrada es la misma que la que sale. El modelo matemático de *masa consistente* trata de encontrar un campo de viento que verifique las dos condiciones anteriores, y que simultáneamente se aproxime lo más posible al obtenido mediante interpolación de medidas experimentales o valores predichos por un modelo meteorológico en la región de estudio. Este modelo de ajuste se puede resolver mediante el método de elementos finitos.

Por tanto, en primer lugar será necesario definir la región de estudio y realizar una malla de elementos finitos. La información orográfica de la región viene dada mediante un mapa digital de elevación del terreno. Sobre una cuadrícula uniforme, este mapa nos proporciona la cota en metros de cada uno de sus vértices. Un valor usual de la resolución de la cuadrícula es de $20 \times 20 \text{ m}^2$.

Para entender mejor el procedimiento de simulación de campos de viento, vamos a ver un ejemplo concreto en la Isla de Gran Canaria. En la figura 5 se observa la información del mapa digital del terreno en una región rectangular de estudio, donde la escala de colores representa la altura de los puntos, correspondiendo el color azul para el nivel del mar y el rojo para la zona más alta de la isla donde la cota máxima es de unos 1.900 m. En la figura 6 se muestra la región tridimensional de aire donde se pretende simular el campo de viento.

La malla de tetraedros se construye automáticamente con la información de la región de estudio y con la precisión introducida por el usuario para aproximar el relieve (figura 7). La malla queda definida una vez que se fijan las coordenadas de todos los vértices de los tetraedros y los cuatro vértices que posee cada tetraedro.

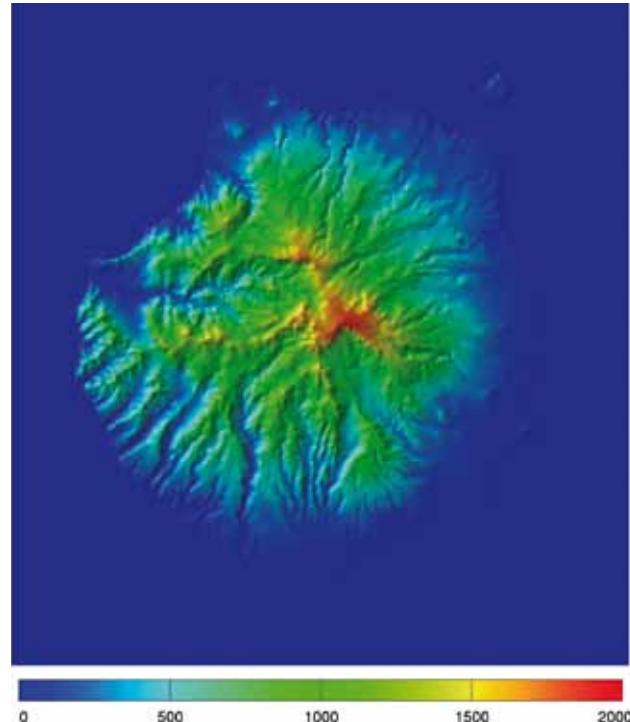


Figura 5. Cotas en metros de la región de estudio de la Isla de Gran Canaria, obtenidas a partir de un mapa digital del terreno con una resolución de la cuadrícula de $20 \times 20 \text{ m}^2$. Autores: R. Montenegro, G. Montero, J. M. Escobar, E. Rodríguez, J. M. González-Yuste, F. Díaz, L. Ferragut, J. M. Cascón, A. Pérez-Foguet, A. Oliver.

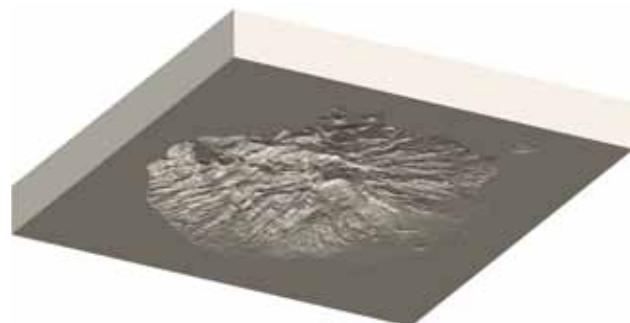


Figura 6. Región tridimensional alrededor de la Isla de Gran Canaria. Únicamente se muestran tres de las seis caras de la región volumétrica. La cara inferior corresponde a la superficie del terreno definida por un mapa digital de elevación, y las otras dos corresponden a paredes verticales planas. Autores: R. Montenegro, G. Montero, J. M. Escobar, E. Rodríguez, J. M. González-Yuste, F. Díaz, L. Ferragut, J. M. Cascón, A. Pérez-Foguet, A. Oliver.

Sobre la malla de la figura 7 se aplica el MEF para aproximar la solución de las ecuaciones diferenciales del modelo de masa consistente y obtener el campo de viento

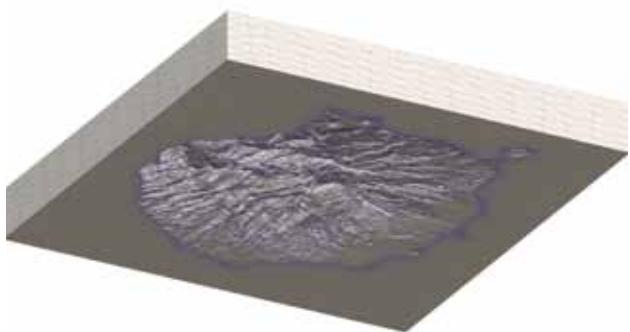


Figura 7. Malla de tetraedros de la región de estudio planteada en la figura 6. Esta malla está adaptada a la orografía y a la línea de costa de la Isla de Gran Canaria. Autores: R. Montenegro, G. Montero, J. M. Escobar, E. Rodríguez, J. M. González-Yuste, F. Díaz, L. Ferragut, J. M. Cascón, A. Pérez-Foguet, A. Oliver.

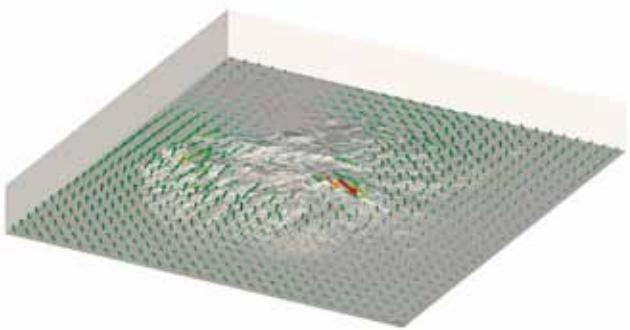


Figura 8. Ejemplo del campo de velocidades de viento sobre una capa situada a 100 m sobre el terreno. Autores: R. Montenegro, G. Montero, J. M. Escobar, E. Rodríguez, J. M. González-Yuste, F. Díaz, L. Ferragut, J. M. Cascón, A. Pérez-Foguet, A. Oliver.

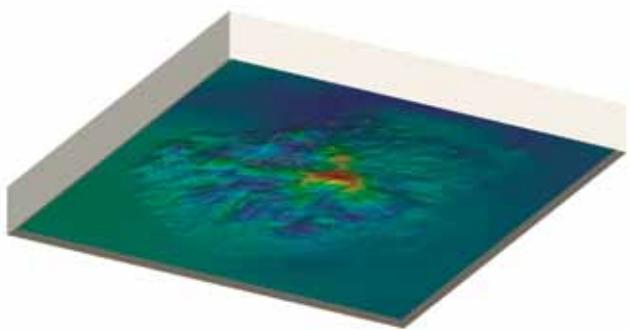


Figura 9. Módulo del campo de velocidades representado en la figura 8. En la escala de colores, el azul corresponde al valor mínimo del módulo de velocidad y el rojo al valor máximo. Autores: R. Montenegro, G. Montero, J. M. Escobar, E. Rodríguez, J. M. González-Yuste, F. Díaz, L. Ferragut, J. M. Cascón, A. Pérez-Foguet, A. Oliver.

resultante en cualquier tetraedro de la malla. En la figura 8 se muestra como ejemplo el campo de viento simulado por el modelo a una altura de 100 m sobre el terreno. En la figura 9 se representa el correspondiente módulo de la velocidad. Puede observarse cómo en las zonas más altas de la isla resultan los mayores valores.

El modelo de masa consistente puede ser útil como modelo de *diagnóstico* o de *pronóstico*, en función de que el campo interpolado se consiga a partir de medidas experimentales obtenidas por anemómetros emplazados en la región de estudio, o solo se utilicen valores predichos por un modelo meteorológico.

Generalmente, los modelos meteorológicos (entre los que se encuentran MM5, WRF, HIRLAM, HARMONIE, etcétera) utilizan el método numérico de *diferencias finitas* para predecir magnitudes físicas como la temperatura, humedad, precipitaciones, radiación, viento, etcétera. Normalmente pueden llegar a obtener resultados con una resolución horizontal máxima de 1 km. Esto hace que puedan tener una visión poco aproximada de las irregularidades de la superficie del terreno. Sin embargo, la combinación de los modelos meteorológicos con el modelo de masa consistente de elementos finitos adaptativos puede mejorar las predicciones del viento, especialmente en terrenos de orografía irregular donde este modelo numérico puede llegar a resoluciones espaciales del orden de metros.

La simulación de campos de viento se aplica, entre otras cosas, para realizar mapas de potencial eólico de una región, con el propósito de detectar los mejores emplazamientos de los parques. Obtener predicciones a 24 horas de la potencia que podrán generar los parques eólicos existentes también tiene mucho interés; en particular, es crucial para la gestión óptima de la red eléctrica.

DISPERSIÓN DE CONTAMINANTES

Dedicamos este breve apartado a la simulación de la dispersión de contaminantes emitidos por las chimeneas de centrales térmicas convencionales. Este fenómeno físico está gobernado por un conjunto de ecuaciones

diferenciales evolutivas y acopladas de tipo convección-difusión-reacción, donde las incógnitas son las concentraciones (g/m^3) de los diferentes compuestos químicos contaminantes (SO_2 , NO_2 , SO_4 , NO_3 , ...) en cualquier punto de la región de estudio. En este fenómeno físico el campo de viento interviene en las ecuaciones y juega un papel fundamental, ya que el efecto del transporte de los contaminantes suele predominar frente al efecto de la difusión. Por ello, la combinación del modelo de simulación de campos de viento junto con el modelo de dispersión de contaminantes puede ser muy útil tanto desde el punto de vista de diagnóstico como de pronóstico.

De esta forma, el modelo puede predecir episodios futuros de contaminación en función de las condiciones meteorológicas determinadas por un modelo meteorológico. Así las centrales eléctricas podrán planificar su actividad estimando de antemano el impacto que causarán sus emisiones, observar con detalle su efecto en puntos concretos del territorio, y predecir el alcance de episodios meteorológicos adversos como tormentas o fuertes vientos.

Para incluir el efecto de la elevación de los gases emitidos por las chimeneas, el modelo numérico modifica la componente vertical del viento en la zona de influencia de la **pluma contaminante** que parte de la boca de la chimenea. En la figura 10 puede observarse un ejemplo con un detalle del campo de velocidades de viento modificado sobre un terreno de orografía irregular. Además, en la parte inferior derecha de la figura puede verse que la geometría de la chimenea está captada por malla adap-

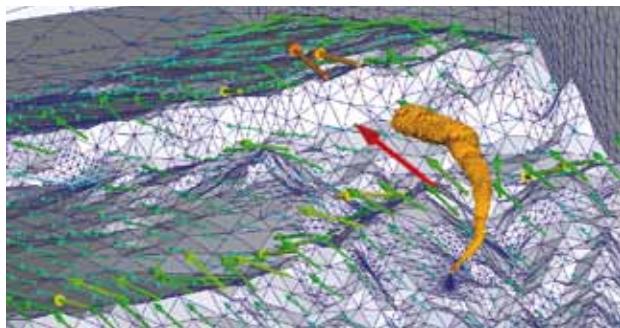


Figura 10. Detalle de una simulación de dispersión de contaminantes emitidos por una chimenea ubicada en la parte inferior derecha de la figura. Autores: R. Montenegro, G. Montero, J. M. Escobar, E. Rodríguez, J. M. González-Yuste, F. Díaz, L. Ferragut, J. M. Cascón, A. Pérez-Foguet, A. Oliver.

tativa de tetraedros. También se muestra la trayectoria alabeada de la pluma contaminante.

Para resolver las ecuaciones diferenciales evolutivas (cuya solución depende del tiempo) es necesario conocer la concentración de todos los contaminantes en el instante inicial y las condiciones de contorno, entre las que se encuentran los datos de emisión, es decir, las concentraciones de los gases a la salida de la chimenea (normalmente del orden de unos gramos por metro cúbico). Desde el punto de vista medioambiental, el mayor interés de la aplicación del modelo numérico es poder determinar los valores de **inmisión** de los contaminantes, es decir, sus concentraciones sobre la superficie del terreno. Estos valores son mucho menores que los existentes en los focos de emisión. Los órdenes de magnitud de los valores de inmisión suelen estar expresados en miligramos o microgramos por metro cúbico. Tanto las emisiones como los valores de inmisión están regulados por normativas.

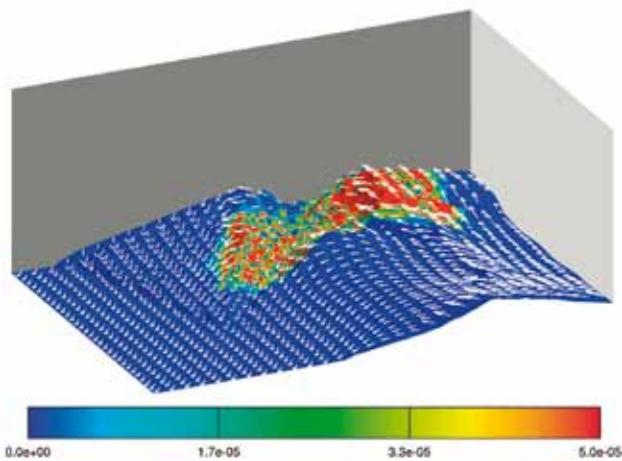


Figura 11. Ejemplo de inmisión de SO_4 sobre la superficie del terreno. La escala de colores corresponde a los valores de la concentración en g/m^3 obtenidos en un instante de la simulación numérica. La chimenea se encuentra ubicada a la derecha de la figura. Autores: R. Montenegro, G. Montero, J. M. Escobar, E. Rodríguez, J. M. González-Yuste, F. Díaz, L. Ferragut, J. M. Cascón, A. Pérez-Foguet, A. Oliver.

RADIACIÓN SOLAR

En el diseño de placas solares y, en general, de sistemas de energía solar, es muy importante estudiar la radiación recibida en un lugar determinado. En este apartado

veremos cómo se estiman estos valores a través de un modelo de **radiación solar**, que tiene aplicaciones similares a las expuestas para el modelo de simulación de campos de viento: la generación de mapas de radiación, la localización de emplazamientos óptimos de parque solares y la predicción de la potencia generada.

La radiación solar sobre la superficie de la Tierra se mide normalmente en términos de potencia o energía. En concreto, en un punto de la superficie del terreno, se denomina **irradiancia** a la potencia (W/m^2) recibida por unidad de superficie, y se llama **irradiación** a la energía (J/m^2) captada por unidad de superficie a lo largo de un intervalo de tiempo. Nos podemos preguntar cuál es la potencia máxima que se puede obtener a partir de la radiación solar en condiciones óptimas. Se puede tener una idea de esta cantidad a partir de la **constante solar** que se define como la energía captada, por unidad de tiempo y área, por una superficie situada a la distancia media entre el Sol y la Tierra, y orthogonal a la línea recta que une sus centros. Este valor es del orden de 1.350 W/m^2 , de tal manera que sobre la superficie de la Tierra se pueden llegar a captar en días despejados del orden de 1.000 W/m^2 .

Para evaluar la radiación recibida en un punto de la superficie de la Tierra –donde nos gustaría colocar las placas solares–, es necesario conocer la posición relativa del Sol, que queda definida por el azimut solar α y la altura solar β , según se representa en la figura 12. Estos ángulos varían en función del instante considerado a lo largo todo el año.

La radiación total captada por una superficie inclinada –la placa– que se encuentra en un punto de la superficie de la Tierra (definido por su latitud-longitud), puede evaluarse a partir de modelos físico-matemáticos como la suma de la **radiación directa** (incidencia directa desde el Sol, si no hay obstáculos totalmente opacos entre el punto y el Sol), la **difusa** (dispersada por los componentes de la atmósfera) y la **reflejada** (por el suelo en función de su albedo). La irradiancia global recibida sobre una superficie horizontal puede medirse con un aparato denominado **piranómetro**, y la directa con un **pirhelímetro**. En el caso de días despejados (cielo limpio) y en puntos que “ven” el Sol, tanto la radiación difusa como la reflejada suelen ser despreciables frente a la directa. Por tanto, para la evaluación de la radiación directa es muy importante conocer las zonas de la superficie del terreno que se encuentran en sombra. Este aspecto es crucial en el caso de terrenos con orografía irregular.

Conocida la posición relativa del Sol, y teniendo una aproximación de la superficie del terreno mediante una triangulación (por ejemplo, la figura 7), es relativamente sencillo determinar para cielo limpio qué triángulos están en sombra y cuáles están directamente iluminados por el Sol. La idea sería: dado un triángulo, ver si existe algún otro triángulo de la malla superficial que se interponga entre él y el Sol. Teniendo en cuenta esta información, se puede evaluar la radiación directa, difusa y reflejada recibida con cielo limpio por cada uno de los triángulos de la malla utilizando el modelo presentado en la bibliografía recomendada (ver Montero G., Escobar J. M., Rodríguez E. y Montenegro R.). Si se conocen las condiciones de nubosidad y calima (utilizando modelos meteorológicos o medidas experimentales en puntos de la región), se puede evaluar un coeficiente de atenuación de la radiación con cielo limpio y aproximar finalmente la radiación real con cielo cubierto.

El modelo de radiación se ha aplicado en la isla de Gran Canaria, que posee una orografía bastante irregular. En

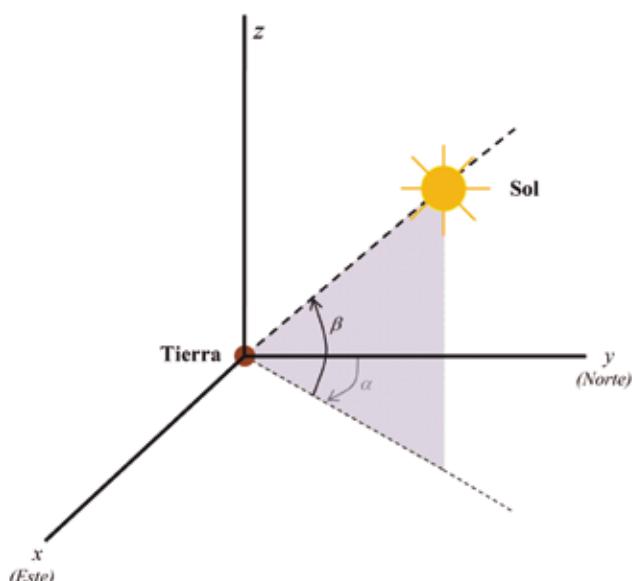


Figura 12. Posición relativa del Sol con respecto de un punto de la superficie de la Tierra. Se representan el azimut solar α y la altura solar β . Autores: R. Montenegro, G. Montero, J. M. Escobar, E. Rodríguez, J. M. González-Yuste, F. Díaz, L. Ferragut, J. M. Cascón, A. Pérez-Foguet, A. Oliver.

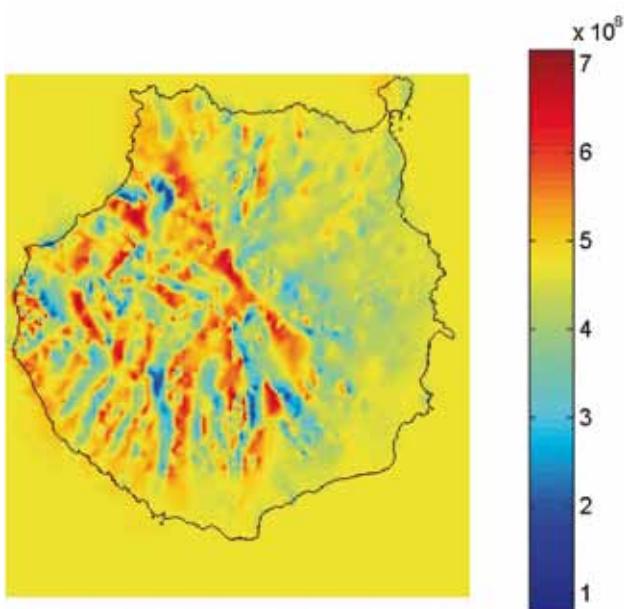


Figura 13a. Mapa típico de irradiación total (J/m^2) con cielo limpio en la Isla de Gran Canaria durante el mes de diciembre. Autores: R. Montenegro, G. Montero, J. M. Escobar, E. Rodríguez, J. M. González-Yuste, F. Díaz, L. Ferragut, J. M. Cascón, A. Pérez-Foguet, A. Oliver.

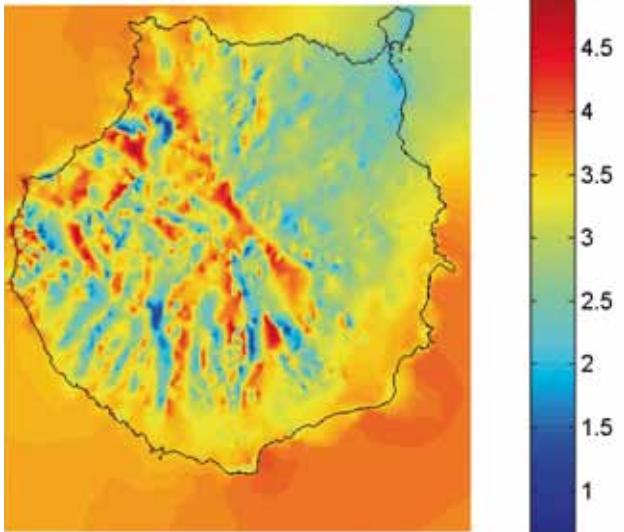


Figura 13b. Mapa típico de irradiación total (J/m^2) y con cielo real en la Isla de Gran Canaria durante el mes de diciembre. Autores: R. Montenegro, G. Montero, J. M. Escobar, E. Rodríguez, J. M. González-Yuste, F. Díaz, L. Ferragut, J. M. Cascón, A. Pérez-Foguet, A. Oliver.

la figura 13(a) se representa un mapa típico de irradiación (J/m^2) total con cielo limpio durante todo el mes de diciembre. Para obtener este mapa, el modelo ha calculado la irradiancia (W/m^2) cada diez minutos y se ha integrado a lo largo de todo el mes.

En la figura 13(b) se muestra la correspondiente irradiación con cielo real. Obsérvese que la escala de colores es diferente para cada figura, de manera que para un mismo punto de la isla la radiación real es menor o igual que la existente con cielo limpio. Los cambios bruscos de azul a rojo son debidos a barrancos muy pronunciados

EJERCICIOS

1 Interpolación de cotas orográficas en un triángulo.

Un triángulo situado en el plano horizontal x, y tiene sus vértices en los puntos $A (0,0)$, $B (1,0)$ y $C (0,1)$. Si las cotas de los tres vértices son $z=h_A$, $z=h_B$ y $z=h_C$, respectivamente, razona y da una estimación de la cota $z = h_p$ de un punto $P (x,y)$ del triángulo, en los cuatro casos siguientes:

- $P (0.35,0.27)$, $h_A = 0$, $h_B = 0$ y $h_C = 0$.
- $P (1/3,0)$, $h_A = 0$, $h_B = 1$ y $h_C = 0$.
- $P (1/3,1/3)$, $h_A = 0$, $h_B = 1$ y $h_C = 1$.
- $P (1/3,2/3)$, $h_A = 1$, $h_B = 2$ y $h_C = 4$.

2 Curva de potencia de un aerogenerador ideal.

Teniendo en cuenta el Destacado en el que se presenta una fórmula que relaciona la velocidad del viento con la potencia máxima teórica que puede extraerse en un aerogenerador de eje horizontal con un radio r de rotor:

$$P = \frac{1}{2} d v^3 \pi r^2$$

donde P es la potencia en vatios (W), d es la densidad del aire en kg/m^3 , v es la velocidad del viento en m/s y r está expresado en metros, representa esta curva tomando los valores de la velocidad en el eje de abscisas y de la potencia en el eje de ordenadas, y considerando fijos los valores de $d = 1.24 kg/m^3$ y $r = 10 m$. Evalua al menos la potencia para cinco valores de la velocidad ($v = 0, 1, 2, 3, 4 m/s$) y aproxima la curva uniendo mediante tramos rectos la potencia en esos cinco puntos.

que existen en la isla. En el fondo de estos barrancos se tiene un valor de irradiación más pequeño que en las crestas. Por esta razón es muy importante que la malla aproxime suficientemente bien las irregularidades del terreno.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Cascón, J. M., Escobar, J. M., Montenegro, R. y Rodríguez, E. (2011): "A new approach to solid modeling with trivariate T-splines based on mesh optimization". *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 200, pp. 3210-3222.

El artículo presenta un procedimiento para la modelización geométrica de sólidos de geometría compleja, mediante aproximaciones suaves de tipo spline, que serían útiles para la simulación numérica de procesos físicos mediante análisis isogeométrico. Este nuevo procedimiento de simulación posee ventajas interesantes frente al método de los elementos finitos (MEF), especialmente cuando la solución del problema tiene una gran regularidad (varias derivadas sucesivas continuas).

Donea, J. y Huerta, A. (2003): *Finite element methods for flow problem*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons.

Este libro analiza la aplicación del MEF a problemas de mecánica de fluidos (convección-difusión y Navier-Stokes) estacionarios y evolutivos. Se centra especialmente en técnicas de estabilización de la solución numérica con el propósito de obtener buenas aproximaciones.

Frey, P. y George, P. L. (2008): *Mesh generation: application to finite elements*. Chichester: Wiley-ISTE.

Este libro estudia diferentes algoritmos de generación de mallas, así como algunas estructuras de datos para su implementación eficiente en códigos de elementos finitos. Recopila un amplio análisis de los problemas que conlleva la construcción de mallas adaptativas de superficies y volúmenes con geometría compleja.

Cascón, J. M., Escobar, J. M., Montenegro, Montero, G.R., y Rodríguez, E. (2009): "An automatic strategy for adaptive tetrahedral mesh generation". *Applied Numerical Mathematics*, vol. 59, pp. 2203-2217.

En este artículo se introduce el método del mecano para la generación automática de mallas adaptativas de tetraedros. Se analizan los principales algoritmos que intervienen en el proceso (transformaciones superficiales, refinamiento local y optimización de mallas) y se presentan ejemplos de algunas mallas generadas con el método.

Oñate, E. (2009): *Structural analysis with the finite element method: linear statics. Basis and solids*, vol. 1. New York: Springer-Verlag, col. Lecture notes on numerical methods in engineering and sciences.

Este libro presenta los fundamentos básicos del MEF y dedica una especial atención a problemas de elasticidad y análisis de estructuras. También trata la estimación del error cometido por la solución numérica y técnicas de refinamiento de malla para mejorar la aproximación numérica. Finalmente, introduce la generación de mallas, la visualización de resultados y la programación del MEF.

Escobar, J. M., González Yuste, J. M., Montenegro, R., Montero, G. y Rodríguez, E., (2005): "Genetic algorithms for an improved parameter estimation with local refinement of tetrahedral meshes in a wind model". *Advances in Engineering Software*, vol. 36, pp. 3-10.

En este artículo se puede ver una aplicación del modelo de masa consistente para la simulación de campos de viento mediante el método de los elementos finitos. Se usan mallas adaptativas de tetraedros definidas sobre una orografía irregular y se aplican algoritmos de optimización, en concreto algoritmos genéticos, para la estimación de los principales parámetros que intervienen en el modelo.

Asensio, M., Escobar, J. M., Ferragut, L., Montenegro, R., Montero, G., Rodríguez, E., (2010): "Comparison between 2.5-D and 3-D realistic models for wind field adjustment". *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, vol. 98, pp. 548-558.

Se comparan los resultados obtenidos mediante dos modelos diferentes de simulación de campos de viento. El primero utiliza solamente una malla de triángulos de la superficie del terreno y el segundo considera una malla tridimensional de tetraedros. La comparación se realiza entre los valores del viento obtenido con los dos modelos y datos experimentales de viento medidos en un parque eólico. En concreto, el parque se encuentra ubicado en la provincia de Lugo y está gestionado por la empresa Desarrollos Eólicos S. A.

Escobar, J. M., Montenegro, R., Montero, G., Oliver, A., Pérez-Foguet, A. y Rodríguez, E. (2013): "Adaptive finite element simulation of stack pollutant emissions over complex terrains". *Energy*, vol. 49, pp. 47-60.

El artículo introduce una nueva metodología para la simulación numérica de la dispersión de contaminantes producida por la emisión de chimeneas de centrales térmicas convencionales. El procedimiento combina un modelo de viento de masa consistente y un modelo evolutivo de concentración de los contaminantes en el que intervienen los fenómenos de transporte, difusión y reacciones químicas de las diferentes sustancias (SO_2 , NO_2 , SO_4 , NO_4 , etcétera).

Escobar, J. M., Montenegro, R., Montero, G. y Rodríguez, E. (2009): "Solar radiation and shadow modelling with adaptive triangular meshes". *Solar Energy*, vol. 83, pp. 998-1012.

En este artículo se presenta un modelo de radiación solar, basado en el análisis de las sombras producidas sobre la superficie del terreno. Con el propósito de poder abordar el problema con un coste computacional razonable, se aproxima la orografía con una malla de triángulos adaptada a las irregularidades del terreno. Se presentan resultados de mapas de radiación obtenidos en la isla de Gran Canaria.

Díaz, F., Escobar, J. M., Montenegro, R., Montero, G. y Rodríguez, E. (2012): "An adaptive solar radiation numerical model". *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 236, pp. 4611-4622.

En la misma línea que el trabajo anterior, se presenta un avance en el modelo de radiación solar que tiene en

cuenta el concepto de año típico meteorológico. Utilizando un análisis estadístico de la radiación recibida durante varios años, se puede obtener un rango de variación para las estimaciones de la radiación solar. Se presentan resultados de mapas de radiación obtenidos en la isla de Gran Canaria y se comparan con valores obtenidos en diferentes estaciones de medida.

Rodríguez, F. S. (2008): *Tecnología Industrial I*. Madrid: McGraw-Hill.

Este libro de texto, orientado a alumnos de 1º de Bachillerato, dedica cuatro de sus unidades a la energía y su transformación, a energías renovables y no renovables, y a la energía en nuestro entorno.

MATERIALES AUXILIARES

LIBRO

McEwan, I. (2010): *Solar*. Barcelona: Anagrama. http://www.anagrama-ed.es/titulo/PN_771.

Esta novela del escritor británico Ian McEwan es una sátira sobre un hastiado físico teórico, ganador del Premio Nobel, cuya vida personal y ambición cínica lo llevan por la búsqueda de una solución para el cambio climático basada en energía solar. La novela muestra las dos caras de la energía solar, que también es un negocio no muy limpio para algunos.

PÁGINAS WEB

A continuación se relaciona una serie de páginas web que pueden ser visitadas libremente en Internet. En la página (a) se puede acceder a los detalles de los modelos numéricos planteados en este capítulo; se incluyen artículos, ponencias a congresos, conferencias, tesis doctorales, software, etcétera. En concreto se puede acceder al contenido de las referencias [4-10]. En las páginas (b) y (c) se pueden ver dos conferencias sobre los modelos de predicción meteorológica, y sobre la predicción eólica y solar. Las páginas (d) y (e) contienen dos vídeos (en inglés) que pueden servir para reflexionar sobre las energías renovables y la sostenibilidad. En la página (f) se reco-

ge una película documental (en inglés con subtítulos en español) que trata de dar una visión muy particular de la estructura de nuestra sociedad, apoyando a las energías renovables y las nuevas tecnologías para avanzar hacia un mundo más sostenible, en contraposición a intereses económicos y de otra índole. Las páginas (g) y (h) tienen mapas de viento de España y Europa, respectivamente. Por último, en (i) puede verse un breve documental acerca de aspectos técnicos relacionados con la generación de energía eólica.

- a) <http://www.dca.iusiani.ulpgc.es/proyecto2012-2014>. Página web del proyecto de investigación Avances en Simulación de Campos de Viento y Radiación Solar, referencia CGL2011-29396-C03-01, financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad y FEDER, durante el trienio 2012-2014.
- b) <https://www.youtube.com/watch?v=5FffjmzpZfl>. AEMET como Suministrador de Datos Básicos de Predicciones Meteorológicas. J. A. García-Moya, Agencia Estatal de Meteorología (AEMET), 2011.
- c) <https://www.youtube.com/watch?v=Gfa7pnIQ6mw>. Predicción Eólica y Solar. P. Martín, Red Eléctrica de España (REE), 2011.
- d) <http://youtu.be/oRQB2YXUxvY?hd=1>. "How Many Light Bulbs?" Cambridge Ideas. Cambridge University, 2009.
- e) http://youtu.be/Gz_L6KuqvFI?hd=1. "The future of energy?" Cambridge University, 2012.
- f) <http://www.youtube.com/watch?v=cJyKrK9ocoo>. Zeigtgeist addendum (Peter Joseph, 2008). Película documental producida por Peter Joseph.
- g) <http://atlaseolico.idae.es/>. Mapas eólicos de España. Instituto para la Diversificación y Ahorro de la Energía.

h) <http://www.windatlas.dk/Europe/About.html>. Atlas de Viento de Europa. Risø National Laboratory for Sustainable Energy. Technical University of Denmark (DTU).

i) <http://www.youtube.com/watch?v=UV3yLeu4OAY> (parte 1). <http://www.youtube.com/watch?v=BYQCW-2ygfz0> (parte 2). Documental en dos partes sobre generación de energía eólica. Subido a YouTube por Sebastián Andrés Martínez Vera.

PELÍCULAS

Pozos de ambición (There will be blood) (Paul Thomas Anderson, 2007). Una historia sobre la avaricia y la ambición por la riqueza y el poder. Daniel Plainview, tras encontrar un rico yacimiento de petróleo en 1902, se convierte en un acaudalado magnate. Cuando, años después, intenta apoderarse de un nuevo yacimiento, tiene que enfrentarse al predicador Eli Sunday (Paul Dano). La película es una adaptación de la novela Petróleo del famoso escritor estadounidense Upton Sinclair.

Avatar (James Cameron, 2009). Película de ciencia ficción estadounidense de 2009, escrita, producida y dirigida por James Cameron y protagonizada por Sam Worthington, Zoe Saldaña, Sigourney Weaver, Stephen Lang y Michelle Rodríguez. Ambientada en el año 2154, los acontecimientos que narra se desarrollan en Pandora, una luna del planeta Polifemo habitada por una raza humanoide llamada na'vi, con la que los humanos se encuentran en conflicto debido a que uno de sus clanes está asentado alrededor de un gigantesco árbol que cubre una inmensa veta de un mineral muy cotizado y que supondría la solución a los problemas energéticos de la Tierra. El programa Avatar permite transportar la mente de los científicos a unos cuerpos artificiales de na'vi para que la comunicación con los nativos resulte así más sencilla. El protagonista Jake Sully descubre la realidad de Pandora y comprende que se trata de la pugna entre la sostenibilidad basada en la identificación con la naturaleza y la explotación despiadada de los recursos.

SERIE

The price of bio fuels. Serie de la BBC sobre los combustibles obtenidos de cultivos que muestra que su uso puede ser, paradójicamente, más nocivo que el de los combustibles fósiles. De esta potencial solución a las necesidades de combustibles de nuestra sociedad, la serie permite abrir un debate sobre las controversias que generan. Disponible en <http://www.bbc.co.uk/programmes/p00775hl>.

DOCUMENTAL

Alternative energy. Serie de Discovery Channel sobre el desarrollo de diferentes energías alternativas a las tradicionales. Disponible en <http://video.nationalgeographic.com/video/environment/energy-environment/alternative-energy/>.





A star trail photograph showing numerous long, thin, blue and white streaks of light against a dark background, representing the paths of stars moving across the sky. The bottom of the image features a dark silhouette of a building or landscape, with a bright green laser beam originating from the building's roof and extending diagonally across the frame. The sky is a deep orange and yellow near the horizon, transitioning to black at the top.

BLOQUE 4

LOS ALREDEDORES DE LA TIERRA Y MÁS ALLÁ

Un láser hacia las estrellas

Autor: Roberto Porto Mata. FOTCIENCIA9

Desde el observatorio astronómico de Izaña situado en el Parque Nacional del Teide en Tenerife (declarado Patrimonio de la humanidad por la Unesco), la Estación Óptica Terrestre emite un rayo láser al espacio que se pierde entre los rastros dejados por cientos de estrellas a medida que la tierra va girando sobre sí misma. El polvo del desierto del Sahara arrastrado hasta Canarias por los vientos da un color anaranjado al cielo de Tenerife. En la esquina inferior izquierda se aprecia el destello de un satélite artificial Iridium, conocido como Iridium Flare. En tierra podemos ver otros telescopios del observatorio de Izaña, mientras que las líneas azuladas y los destellos en tierra son producidos por los coches de los astrónomos al acabar su turno y volver a casa. Para obtener esta foto se unieron 246 fotografías de 30 segundos de exposición cada una.

SISTEMA SOLAR

Tomás L. Gómez

4.1

Objetivos, contenido y criterios de evaluación de acuerdo con los Reales Decretos de Enseñanzas Mínimas, (1467/2007 de 2 noviembre para Bachillerato y 1631/2007 de 29 de diciembre para Educación Secundaria Obligatoria).

Este capítulo presenta el marco de conocimientos matemáticos que sirven a entender los movimientos que se producen en el Sistema Solar. La intención del autor es didáctica: muestra que las matemáticas contribuyen a entender la situación del planeta Tierra, explica los movimientos de los planetas en el Sistema Solar, e interpreta las trayectorias de los satélites artificiales y de las naves espaciales.

El capítulo tiene dos partes claramente diferenciadas. La primera está dedicada a mostrar los dos grandes modelos que la humanidad ha utilizado a lo largo de la historia para entender los movimientos planetarios: el modelo geocéntrico, cuya versión más avanzada proporcionó Ptolomeo, y el modelo heliocéntrico, cuyo culmen se logra con la ley de la Gravitación Universal de Newton y el problema de los dos cuerpos. Las segunda parte se dedica a los movimientos de los satélites artificiales, con los cuales se hacen predicciones exactas del tiempo, proporcionan asistencia para la conducción a través del sistema GPS y realizan comunicaciones vía satélite a cualquier parte de la Tierra, entre otras aplicaciones.

El capítulo se inicia con la introducción de las curvas cónicas, cuyo origen histórico procede de intersecar un cono recto con un plano. Continúa con una revisión del uso de las cónicas por los griegos en la época clásica, su implicación en problemas como el de la duplicación del cubo, y un breve estudio de la elipse. A continuación, se describen los fundamentos del sistema geocéntrico de Ptolomeo, se muestran las trayectorias circulares de los planetas, se explica el modelo de los epiciclos, y se presentan los argumentos que, en su momento, sirvieron para rechazar el movimiento de la Tierra.

Se pasa a continuación a la descripción del Modelo Heliocéntrico, la discusión de sus ventajas y los fenómenos que venía a explicar debido a deficiencias del modelo anterior. Se ilustran las aportaciones de Copérnico, Galileo y Kepler. El uso de las elipses para describir la trayectoria de cada planeta simplifica y mejora el modelo heliocéntrico.

A continuación se presentan las contribuciones de Newton, con la ley de la gravitación universal, de Bradley, con el movimiento de las estrellas y el paralaje, el problema de los dos cuerpos, con la discusión de las órbitas de planetas y cometas en el sistema solar.

La lectura de esta parte puede seguirse por alumnos de bachillerato de la modalidad de Ciencias y de Tecnología ya que es clara y detallada, y ofrece la oportunidad del trabajo conjunto en las asignaturas de Física y de Matemáticas. Tiene especial interés comparar la explicación de los movimientos de los planetas desde los dos modelos que se presentan, mostrando sus diferencias en la precisión alcanzada y en la explicación que proporcionan.

La segunda parte, como ya se ha comentado, se dedica a diversas cuestiones sobre satélites artificiales, como son el problema de su velocidad, puntos de lanzamiento, observación de satélites, órbita geoestacionaria, cambios en la órbita, trayectorias, y otras cuestiones de interés para los sistemas de comunicaciones. Un último apartado, más orientado a la divulgación, viene dedicado a los viajes interplanetarios y algunas cuestiones técnicas de interés asociadas. En este caso destaca la vinculación curricular de estas nociones con los contenidos de la materia común Ciencia en el Mundo Contemporáneo.

INTRODUCCIÓN

Para entender el lugar que ocupa el planeta Tierra en el universo las matemáticas han jugado un papel esencial. Desde Kepler sabemos que la Tierra es un planeta más del Sistema Solar y que, al igual que los otros, gira en una órbita elíptica alrededor del Sol. Pero llegar a esta visión ha sido una fascinante aventura en la ciencia, que comenzó hace mucho tiempo. Empezó con la simple observación del cielo nocturno: en él vemos las estrellas, que giran como si estuvieran fijas en la esfera celeste, y los planetas, junto con la Luna y el Sol, que van moviéndose sobre el fondo estelar. Poco a poco se fueron ideando modelos matemáticos para predecir sus movimientos. Este estudio nos llevó al modelo heliocéntrico; las matemáticas nos ayudaron a conocer el lugar que ocupamos en el universo. Finalmente, entender las leyes matemáticas que gobiernan el movimiento de los planetas nos ha permitido hacer los satélites artificiales, con todos los avances que eso supone: satélites meteorológicos que permiten hacer predicciones más precisas, sistema GPS que nos ayuda a conducir, comunicaciones vía satélite a cualquier parte de la Tierra, etcétera.

En este capítulo empezaremos viendo cómo las matemáticas nos han ido ayudando a comprender la situación del planeta Tierra, después veremos cómo la ley de gravedad de Newton explica los movimientos de los planetas en el Sistema Solar y los satélites artificiales, y finalmente veremos cómo este conocimiento nos permite diseñar las trayectorias para enviar naves espaciales.

HISTORIA

Las curvas cónicas son las que se obtienen al interseccar un cono recto con un plano. Si el plano es perpendicular al eje del cono, obtenemos una circunferencia. Según vamos inclinando el plano, obtenemos una elipse que se va alargando, hasta que el plano sea paralelo a una generatriz y obtenemos una parábola. Si seguimos inclinando el plano, obtenemos una hipérbola.

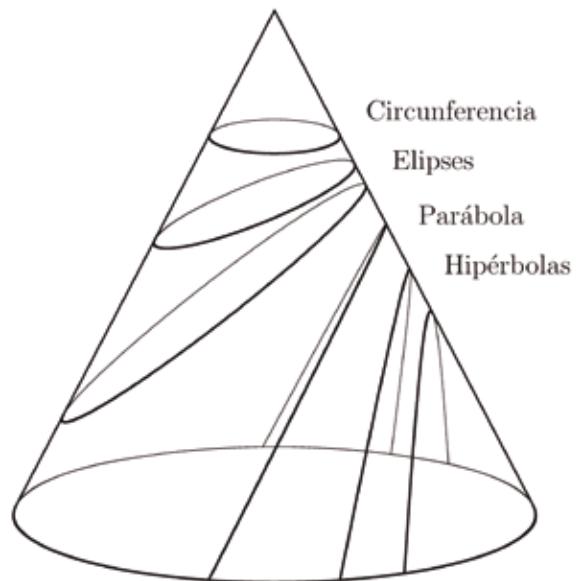


Figura 1. Secciones cónicas obtenidas al cortar un cono con un plano. Imagen: Tomás L. Gómez.

Parece que el primero en usar las curvas cónicas fue Menecmo, en el siglo IV a. C., para resolver el problema de la duplicación del cubo. Hay varias historias sobre cómo los griegos se interesaron en este problema. Según Plutarco, en el siglo IV a. C. los ciudadanos de Delos consultaron al oráculo de Delfos para resolver sus problemas políticos, y el oráculo respondió que debían duplicar el tamaño del altar de forma cúbica, es decir, construir un cubo cuyo volumen sea el doble de un cubo dado. Sorprendidos por esta respuesta, consultaron a Platón, que interpretó esta respuesta en el sentido de que debían dedicarse al estudio de la geometría y las matemáticas.

Platón propuso este problema a Eudoxo, a Arquitas y a Menecmo, y este último encontró una solución, usando la intersección de dos curvas cónicas. Parece ser que a Platón no le satisfizo su solución, porque, según él, no usaba solo construcciones geométricas elementales, sino que se valía de razonamientos mecánicos.

Duplicar el tamaño de un cubo usando solo regla y compás quedó como uno de los problemas abiertos más

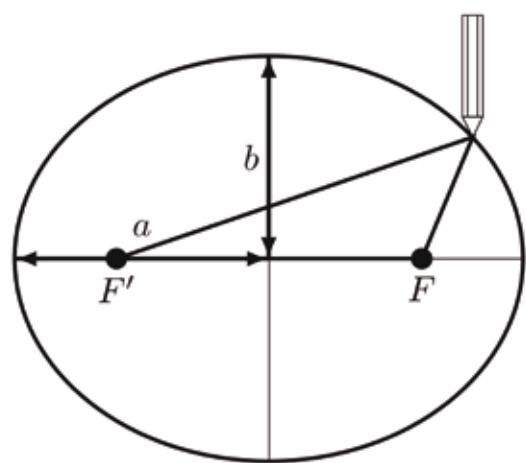


Figura 2. Construcción de una elipse con cuerda y lápiz. Imagen: Tomás L. Gómez.

famosos de la antigüedad (junto con la cuadratura del círculo y la trisección de un ángulo) hasta que Pierre Wantzel demostró en 1837 que era imposible, pues la raíz cúbica de 2 no es un número constructible, es decir, no se puede obtener desde un número entero usando solo sumas, restas, multiplicaciones, divisiones, y raíces cuadradas.¹

Independientemente de sus posibles aplicaciones prácticas, los griegos se interesaron por el estudio de estas curvas, que culminó con el libro *Secciones Cónicas* de Apolonio de Perga.²

Por ejemplo, conocía esta otra manera de definir la elipse: se fijan dos puntos F y F' del plano llamados focos, y la elipse es el lugar de puntos P del plano tales que la suma de las distancias a los focos es una cantidad constante que denotamos $2a$ donde a es llamado el eje mayor de la elipse, es decir: $FP + PF' = 2a$.

Nótese que, si los focos F y F' están en el mismo sitio, entonces obtenemos una circunferencia de radio a . Si sepáramos los focos obtenemos una curva cada vez más achatada. Podemos dibujar una elipse con unas

chinchesetas pinchadas en los focos, una cuerda y un lápiz, como se muestra en la figura, donde está indicado el semieje mayor a y el semieje menor b . La excentricidad se define como $e = \sqrt{1 - (b/a)^2}$. Por lo tanto, una circunferencia tiene $e = 0$, una elipse tiene $0 < e < 1$. La parábola se obtiene como límite cuando el foco F' tiende al infinito, por lo que tiene $e = 1$.

Los griegos también destacaron en el estudio de la astronomía. En la antigüedad se pensaba que la Tierra era el centro del universo, y que los astros giraban a su alrededor. Cualquier observador del cielo se dará cuenta, con el transcurso de los días, de que las estrellas se mueven todas juntas, como si estuvieran fijas en una esfera, pero que hay otros astros (el Sol, la Luna, y los planetas) que se mueven con respecto a las estrellas. De hecho, el nombre “planeta” viene del griego πλανήτης, que significa errante o viajero.

Para los griegos, los astros pertenecían a un mundo perfecto, por lo que pensaban que su movimiento se tenía que regir por la curva más perfecta posible, que para ellos era la circunferencia.

Tanto el Sol como la Luna parecen describir trayectorias aproximadamente circulares con respecto a las estrellas, por lo que estos astros no presentaban problema, pero el movimiento de los otros planetas es más

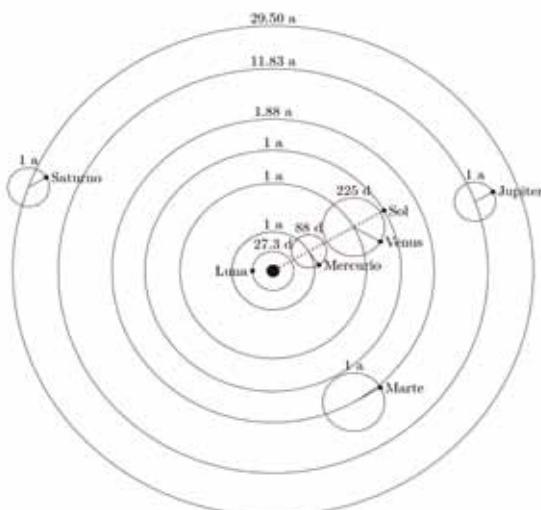


Figura 3. Modelo geocéntrico. Imagen: Tomás L. Gómez.

¹ <http://www.math.rutgers.edu/~cherlin/History/Papers1999/schmarge.html>.

² <http://www.mat.ucm.es/catedramdeguzman/drupal/migueldeguzman/legado/historia/apolonio/lasconi>.

complicado, y los griegos idearon un sistema en el que los planetas se mueven en una circunferencia (llamada epíclo) que a su vez se mueve en otra circunferencia (llamada deferente), cada una con un periodo diferente.

Obsérvese que este sistema tiene varias peculiaridades. Los centros de los epículos de Mercurio y Venus están alineados con el Sol. Además, la línea que une cada planeta con el centro su epíclo es siempre paralela a la dirección del Sol. Por otra parte, en todos los planetas uno de los dos periodos (o bien la deferente, o bien el epíclo) dura exactamente un año.

Todas estas casualidades se pueden explicar si trasladamos el centro de coordenadas al Sol. Quizá fue esto lo que llevó a Aristarco de Samos (310-230 a. C.) a proponer un sistema heliocéntrico, en el que cada planeta (incluyendo a la Tierra) giraba alrededor del Sol, y la Luna lo hacía alrededor de la Tierra.

Desde un punto de vista experimental, ambos sistemas predicen el mismo movimiento de los planetas, por lo que no sabemos por cuál decantarnos. El sistema de Aristarco no fue aceptado por los griegos por varias razones.

Por una parte, les parecía difícil creer que la Tierra se moviera, pues pensaban que los objetos que no estaban

en contacto con el suelo (como, por ejemplo, las nubes o los pájaros al volar) se deberían quedar atrás. Hoy sabemos que esto no es así, pero entonces ellos todavía no conocían bien las leyes de la dinámica.

Por otra parte, si la Tierra se moviera, veríamos las estrellas desde un punto de vista diferente en diferentes momentos del año, por lo que estas deberían presentar un movimiento oscilatorio llamado **paralaje**. Como no percibían este movimiento, o bien la Tierra estaba quieta, o bien las estrellas estaban a una distancia muchísimo mayor que el radio de la órbita terrestre, por lo que el paralaje, aunque existiera, sería inapreciable.

Los modelos descritos darían predicciones exactas si las órbitas fueran circulares, pero en realidad son elípticas. Esto hace, por ejemplo, que el movimiento aparente del Sol sobre la esfera celeste no sea constante. Para explicar esta anomalía, también hacían que este girara en un epíclo, como lo hacían los otros planetas, aunque en este caso el periodo del epíclo era igual al periodo de la deferente.

Si sumamos el movimiento del Sol en el epíclo con el de la deferente, obtenemos un punto que gira a velocidad constante en una circunferencia cuyo centro no coincide con la Tierra. Es decir, podemos modelar el movimiento del Sol o bien con un epíclo sobre su deferente, o bien por medio de una órbita excéntrica, es decir, postulando que el Sol describe una órbita circular pero que su centro está levemente desplazado del centro de la Tierra. Los griegos conocían que ambos modelos eran equivalentes. En ambos casos la Tierra está fija, por lo que no había ninguna razón para preferir un modelo sobre otro.

Ptolomeo (90-168 d. C.) escribió el *Almagesto*, un tratado de astronomía en el que, además de describir los resultados de sus investigaciones, recopiló todo lo conocido en la antigüedad. Fue traducido por los árabes (de donde procede el nombre con el que es conocido en la actualidad), y fue el tratado de referencia en astronomía hasta el final de la Edad Media.

Ptolomeo se dio cuenta de que el movimiento de los planetas se podía describir de una manera más precisa si suponía que el movimiento del centro del epíclo a lo largo de la deferente no era constante, sino que en unos puntos era más rápido y en otros más lento, de manera

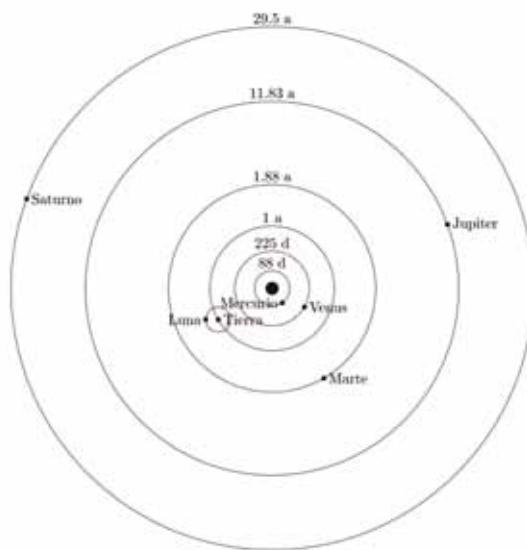


Figura 4. Modelo heliocéntrico. Imagen: Tomás L. Gómez.

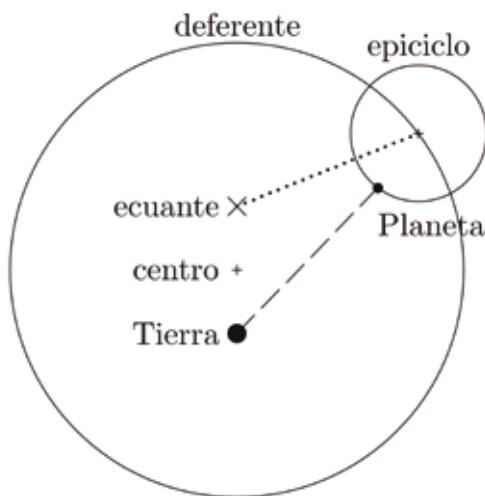


Figura 5. Ecuante excéntrica en el modelo de Ptolomeo. Imagen: Tomás L. Gómez.

que su movimiento fuera aparentemente constante visto desde un punto que llamó el ecuante.

En el caso de Mercurio, su modelo es aún más complicado, pues el ecuante se mueve a su vez en una circunferencia.

A los astrónomos árabes y persas de los siglos XIII y XIV no les satisfacía el ecuante, pues les parecía en contradicción con la idea aristotélica de que los movimientos debían ser uniformes, así que idearon otros sistemas en los que conseguían describir el movimiento de los planetas usando solo movimientos uniformes, pero añadiendo epiciclos a los epiciclos. Fueron varios los astrónomos que propusieron diferentes modelos para conseguir este objetivo: el persa Al-Tusi (1201-1274), su discípulo el kurdo Al Urdi (fallecido en 1266), y el árabe Ibn Al-Shatir (1304-1375).

Más tarde, en occidente, Regiomontanus (1436-1476) también introdujo un modelo alternativo para el movimiento de Mercurio y Venus. Parece que Copérnico conocía estos modelos, y al tratar de simplificarlos consideró poner al Sol en el centro del universo. Desde un punto de vista estético, el modelo de Copérnico presentaba muchas ventajas. Por ejemplo, su modelo necesitaba menos circunferencias, por lo que era más simple.

Ya no se daban las extrañas coincidencias que comentábamos antes (que la línea que une cada planeta con su epiciclo es siempre paralela a la dirección del Sol, etcétera).

En el modelo de Ptolomeo, experimentalmente solo podemos fijar el cociente entre el radio de la deferente y el del epiciclo, pero no sabemos los tamaños relativos entre las deferentes de los distintos planetas. Pero en el sistema de Copérnico, los tamaños relativos de las órbitas de todos los planetas está fijado, y además se cumple la ley de que el periodo es mayor cuanto más grande es la órbita. Más precisamente, se tiene que T^2 es proporcional a a^3 , donde T es el periodo y a es el radio de la órbita.

Ahora bien, para tener estas ventajas había que suponer que el Sol era el centro del universo, y que la Tierra se movía como un planeta más, algo que era difícil de imaginar. Los historiadores no tienen claro si Copérnico pensaba que este modelo representaba la realidad, o si solo era un artificio para simplificar el modelo geocéntrico, habida cuenta de que las posiciones calculadas eran las mismas.

Galileo fue el primero que afirmó que el heliocentrismo no era solo un modelo matemático, sino que realmente la Tierra giraba alrededor del Sol. Usando por primera vez el telescopio para observar el firmamento, fue eliminando las dificultades que sus contemporáneos tenían para admitir el modelo heliocéntrico.

Por ejemplo: en el modelo de Copérnico la Luna gira alrededor de la Tierra, pero esta a su vez se mueve. Algunos pensaban que esto era imposible, pues la Luna se quedaría atrás. Pero Galileo descubrió que Júpiter tenía cuatro satélites que giraban a su alrededor mientras Júpiter se movía, y que estos no se quedaban atrás. Por otra parte, descubrió que Venus tenía fases igual que la Luna, con lo que demostraba que Venus giraba alrededor del Sol.

Gracias a estas observaciones, el modelo de Ptolomeo quedó finalmente descartado, pero Tycho Brahe, a finales del siglo XVI, ideó un tercer modelo. En su modelo, el Sol y la Luna giran alrededor de la Tierra, y todos los demás planetas giran alrededor del Sol. Cabe destacar que este sistema ya había sido propuesto en el siglo XV por Nilakantha Somayaji, un astrónomo indio de la escuela de Kerala.

Desde un punto de vista moderno, podemos decir que, cinemáticamente, los sistemas de Copérnico y de Brahe son equivalentes, pues la única diferencia es dónde ponemos el centro de coordenadas. Estos fueron los dos sistemas que entraron en conflicto en el proceso a Galileo por la Inquisición.

La escuela de Kerala fue fundada por el matemático y astrónomo indio Madhava de Sangamagrama (1340-1425) y fue extremadamente floreciente entre los siglos XIV y XVI. En un claro intento por resolver problemas astronómicos, la escuela creó un buen número de conceptos matemáticos. Los resultados más destacados de su investigación –que hacen referencia a las series de funciones trigonométricas– fueron traducidos al sánscrito.

El trabajo de la escuela, completado dos siglos antes de la invención del cálculo en Europa, aportó lo que hoy es considerado como el primer ejemplo de series infinitas (además de las geométricas). Sin embargo, no formularon ninguna teoría sistemática sobre diferenciación e integración ni existe evidencia de que sus resultados traspasaran las fronteras de Kerala.

Kepler, a principios del siglo XVII, simplificó aún más el sistema de Copérnico, al usar elipses en vez de circunferencias para describir el movimiento de los planetas alrededor del Sol, con lo que ya no necesitaba epiciclos. Las leyes de Kepler son:

1. La órbita de un planeta es una elipse, con el Sol en uno de los focos.
2. La línea que une el Sol con el planeta barre la misma área en tiempos iguales.

3. El cuadrado del periodo orbital de un planeta es directamente proporcional al cubo del semieje mayor de la elipse.

Finalmente fue Newton quien dio los argumentos definitivos para descartar el sistema de Brahe. En su libro *Principios naturales de la filosofía natural*, publicado en 1687, expone la ley de la gravitación universal, con la que explica las leyes de Kepler, suponiendo que el Sol tiene una masa mucho mayor que los planetas, por lo que son estos los que giran a su alrededor. La Luna, por su parte, gira alrededor de la Tierra, porque su distancia a nosotros es mucho menor que su distancia al Sol (y lo mismo ocurre con los satélites de Júpiter). Además, usando las leyes de la dinámica de Newton, ya no podemos decir que el sistema de Brahe sea equivalente al heliocéntrico, pues aunque ambos sistemas sean equivalentes cinemáticamente, ya no lo son dinámicamente, pues solo uno de ellos puede ser un sistema de referencia inercial.

Como ya hemos dicho, si la Tierra se mueve, entonces la misma estrella se observa desde diferentes puntos a lo largo del año, por lo que esta debería tener un movimiento aparente con un ángulo llamado paralaje.

El astrónomo James Bradley, hacia 1728, midió con precisión la posición de la estrella γ Draconis. Debido a la posición de esta estrella, el paralaje debía producir un movimiento aparente tal que alcanzara la posición más al sur en diciembre, y la más al norte en junio. Pudo comprobar que la estrella se movía, pero, para su sorpresa, su posición más al sur se producía en marzo, y la más al norte en septiembre. La oscilación era de unos 40 segundos de arco.

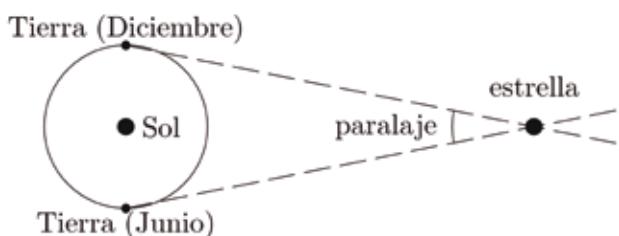


Figura 6. Paralaje producido por el movimiento de la Tierra. Imagen: Tomás L. Gómez.

James Bradley (1693-1762). Astrónomo inglés que ejerció como astrónomo real desde 1742, es reconocido por dos descubrimientos fundamentales en astronomía: la **aberración de la luz** y la rotación del eje de la Tierra. Estos descubrimientos fueron considerados “los más brillantes y útiles del siglo” por Jean Baptiste Joseph Delambre, historiador de la astronomía, astrónomo matemático y director del Observatorio de París, en su *Historia de la Astronomía* (1821), porque “a estos dos descubrimientos de Bradley le debemos la exactitud de la astronomía moderna... Este doble servicio garantiza a su descubridor el lugar más destacado (después de Hiparco y Kepler) sobre los más grandes astrónomos de todas las épocas y todos los países”.

Se denomina **aberración de la luz** o **aberración de Bradley** a la diferencia entre la posición observada de una estrella y su posición real, debido a la combinación de la velocidad del observador y la velocidad de la luz.

Bradley descubrió que el movimiento que había detectado se debía a la aberración de la luz, que también es causada por el movimiento de la Tierra. Supongamos que estamos bajo una lluvia que cae verticalmente. Si empezamos a andar hacia adelante, nos dará la impresión de que la lluvia cae de forma inclinada hacia nosotros. De la misma forma, aunque la luz de γ Draconis viene siempre de la misma dirección, al moverse la Tierra nos parece que la dirección de la que viene cambia con el tiempo.

Aunque Bradley no encontró el paralaje, su descubrimiento de la aberración de la luz fue igualmente concluyente para demostrar que la Tierra se movía. Además,

como ya era sabida la distancia de la Tierra al Sol, y por lo tanto su velocidad (30 km/s), pudo usar esta medida para estimar que la velocidad de la luz era de unos 300.000 km/s.

No fue capaz de medir el paralaje de γ Draconis porque esta estrella está bastante lejos (su paralaje es de solo 0,02 segundos de arco). Eligió esta estrella por ser brillante y estar en la dirección perpendicular al plano de la órbita de la Tierra, por lo que el paralaje produciría un movimiento circular (él solo medía el desplazamiento en dirección norte-sur).

Finalmente, Friedrich Bessel consiguió medir el paralaje de la estrella 61 Cygni en 1838. Midió un ángulo de 0,3 segundos de arco, resultando en una distancia de 10 años luz. Esta estrella es muy débil, apenas visible a simple vista, pero la eligió porque Giuseppe Piazzi había descubierto que se movía con respecto a las otras, por lo que supuso que debería de ser una de las estrellas más cercanas. En vez de medir su posición absoluta, como hizo Bradley, midió su posición relativa a otras estrellas, que supuso, correctamente, que estaban mucho más lejos.

PROBLEMA DE DOS CUERPOS

Según la ley de gravitación universal de Newton, dos cuerpos puntuales de masas M y m , a distancia r , sufren una fuerza atractiva dada por la fórmula

$$F = G \frac{Mm}{r^2}$$

donde $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N}(\text{m}/\text{kg})^2$ es la constante universal de gravedad.

Ambos cuerpos se mueven alrededor de su centro de masas, pero si uno es mucho más masivo, este coincide prácticamente con su centro, por lo que podemos suponer que permanece en reposo. En cualquier caso, se demuestra que podemos poner el centro de coordenadas en uno de los cuerpos, si sustituimos la masa del cuerpo central por la suma $M+m$ y la masa del cuerpo que se mueve por la masa reducida $Mm/(M+m)$. Si los cuerpos

son esféricos, se demuestra que la fuerza viene dada por la misma fórmula, pero si tienen otra forma habría que modificarla.

Debido a que la dirección de la fuerza es radial, se conserva el momento angular. Esto tiene dos consecuencias:

- El movimiento se produce en el plano definido por los dos cuerpos y la velocidad relativa entre ellos.
- La línea que une el Sol con el planeta barre la misma área en tiempos iguales (segunda ley de Kepler).

Y, debido a que la fuerza de atracción gravitatoria disminuye con el cuadrado de la distancia, Newton demostró las siguientes consecuencias:

Las órbitas son cónicas, con el cuerpo masivo en uno de los focos (primera ley de Kepler)

El periodo T y el semieje mayor a están relacionados con la fórmula (tercera ley de Kepler):

$$T^2 = \frac{(2\pi)^2}{GM} a^3$$

En el caso de la elipse, tendremos una órbita periódica. En el caso de la parábola o hipérbola, tenemos un cuerpo que cae desde el infinito, se acerca al astro central, y finalmente vuelve al infinito. La diferencia entre el caso parabólico e hiperbólico es que, en el primero, la velocidad final (cuando el tiempo tiende a infinito) es cero, pero en el hiperbólico no es cero.

El punto de la órbita más próximo al astro central se llama el periastro (perigeo, si el astro central es la Tierra, o perihelio, si el astro central es el Sol). En el caso de órbitas elípticas, el punto más alejado se llama apoastro (apogeo, en el caso de la Tierra, y afelio, en el caso del Sol).

En el Sistema Solar, los planetas y asteroides tienen órbitas elípticas con excentricidades pequeñas, mientras los cometas tienen excentricidades altas, y sus órbitas pueden incluso ser parabólicas o hiperbólicas.

Supongamos que en un instante dado, la posición y velocidad de un astro vienen dadas por los vectores \vec{r} y \vec{v} . La energía total es la suma de la potencial ($E_p = -GMm/r$) y la cinética ($E_c = mv^2/2$). Por lo tanto, el momento angular y la energía total por unidad de masa vienen dados por

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{v} \quad y \quad E = \frac{-GM}{r} + \frac{v^2}{2}$$

donde hemos denotado por v y r las longitudes de los vectores correspondientes. Suponemos que los vectores posición y velocidad no tienen la misma dirección, pues en tal caso la órbita estaría en la línea recta definida por los dos astros, y tendríamos una caída libre rectilínea. La relación entre el módulo L del momento angular L y la energía total E , con los parámetros e y p de la órbita vienen dados por:

$$p = \frac{L^2}{GM} \quad y \quad e = \sqrt{1 + \frac{2}{G^2M^2} L^2 E}$$

Obsérvese que el signo de la energía determina el tipo de órbita: Si $E > 0$, tenemos $e > 1$ (órbita hiperbólica), si $E = 0$ es $e = 1$ (órbita parabólica) y si $E < 0$ es $e < 1$ órbita elíptica. Es decir: si la energía total es negativa, la órbita será periódica, y si la energía es cero o positiva, el cuerpo terminará alejándose indefinidamente del astro central.

En el Sistema Solar, la masa del Sol es mucho mayor que la de los planetas, así que, en primera aproximación, podemos ignorar la fuerza de gravedad entre los planetas, y obtenemos que cada uno sigue una elipse alrededor del Sol. Pero para obtener posiciones más precisas, es necesario tener en cuenta la atracción gravitatoria entre los planetas. Esto hace que las órbitas de los planetas vayan variando lentamente en el transcurso de los siglos. El astrónomo y geofísico serbio Milutin Milankovitch (1879-1958) propuso que las variaciones de la órbita de la Tierra por estas perturbaciones son responsables de cambios en el clima, como por ejemplo las glaciaciones.

SATÉLITES ARTIFICIALES

El 4 de octubre de 1957 la Unión Soviética sorprendió al mundo poniendo en órbita el primer satélite artificial. Para conseguir poner un objeto en órbita, no solo hay que elevarlo por encima de la atmósfera, sino que además hay de darle una velocidad para que la fuerza

centrífuga compense a la gravitación, y así evitar que caiga de nuevo a la Tierra. La fuerza centrífuga que sufre un objeto de masa m girando en una trayectoria circular de radio r y con periodo T es $(2\pi/T)^2 rm$. Igualando con la fuerza de gravedad, y teniendo en cuenta que la velocidad en una órbita circular es $v = 2\pi r/T$, tenemos

$$\frac{GMm}{r^2} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 rm$$

$$T^2 = \left(\frac{2\pi}{GM}\right)^2 r^3 \quad ; \quad v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Por ejemplo, la Estación Espacial Internacional, gira alrededor de la Tierra a unos 400 km de altura. El radio ecuatorial de la Tierra es de 6.378 km, por lo que el radio de la órbita de estación espacial es de unos 6.778 km. Como la masa de la Tierra es $M = 5,972 \cdot 10^{24}$ kg obtenemos un periodo $T = 5.556$ segundos, y en consecuencia una velocidad de $v = 2\pi r/T = 7.665$ m/s = 27.590 km/h.

Como vemos, la mayor dificultad para poner un satélite en órbita no es subirlo unos cientos de kilómetros, sino darle la velocidad de miles de kilómetros por hora. Una cosa a tener en cuenta es que, debido a la rotación terrestre, los objetos sobre su superficie ya cuentan con cierta velocidad circular. Esta velocidad es cero en los polos, y llega hasta 1.600 km/h en el ecuador. Esta es la razón por la que las bases de lanzamiento de cohetes se suelen poner lo más próximas posible al ecuador. En el caso de Estados Unidos es Cabo Cañaveral (latitud 28°), en Florida, pero la Unión Soviética tuvo que conformarse con Baikonur (latitud 45°). Europa envía sus cohetes desde la base de Kourou, en la Guayana Francesa, con una latitud de solo 5°.

Observar satélites a simple vista es muy sencillo, al principio o al final de la noche, o cuando ya es de noche pero a la altura a la que van los satélites todavía alcanzan los rayos del Sol. Aparecen como puntos luminosos moviéndose con respecto a las estrellas, y se pueden confundir con aviones. En la página web <http://www.heavens-above.com/> se pueden encontrar predicciones para saber qué satélites son observables desde un lugar determinado.

En la siguiente fotografía se ve la Estación Espacial Internacional. Se mueve de izquierda a derecha, y va desapareciendo según va entrando en la sombra de la Tierra. La fotografía se hizo el 27 de diciembre de 2012, desde el campus de la Universidad Autónoma de Madrid, con una cámara Nikon D7000, ISO 800, longitud focal 18 mm, f/3.5, con una exposición de 30 segundos.



Figura 7. Estación Espacial Internacional. Autor: Tomás L. Gómez.

Se llama **órbita geoestacionaria** a una órbita circular, en el plano del ecuador terrestre, con un periodo T igual al periodo de rotación de la Tierra. Esto ocurre a una distancia sobre el ecuador de 35.786 km. La ventaja de este tipo de órbita es que, como la Tierra y el satélite tienen la misma velocidad angular, desde un punto de la Tierra da la impresión de que el satélite está inmóvil. Esto es especialmente conveniente para satélites de telecomunicaciones, o para satélites que emiten cadenas de televisión, porque la antena parabólica estará fija, dirigida siempre hacia el satélite, sin necesidad de moverse. El primero que explicó con detalle las ventajas de esta órbita para las telecomunicaciones fue el escritor de ciencia ficción Arthur C. Clarke, en un artículo en la revista para radioaficionados *Wireless World*.

Con una cámara normal podemos fotografiar estos satélites. La fotografía adjunta se ha hecho con una cámara Nikon D7000, objetivo ajustado a distancia focal de 75 mm., f/5.6, ISO 6400, y exposición de 30 segundos, sobre un trípode fijo (figura 8). Las estrellas aparecen como rayas, por su movimiento aparente a causa de la rotación terrestre, pero los satélites aparecen como puntos fijos. Como referencia, se ha dibujado una



Figura 8. Satélites geoestacionarios de comunicaciones. La circunferencia muestra el tamaño aparente de la Luna. Imagen: Tomás L. Gómez.

circunferencia con el tamaño que tendría la Luna. Los cuatro satélites que aparecen en la fotografía son satélites de comunicaciones.

Supongamos que ya tenemos un satélite en una órbita circular baja, y que queremos llevarlo a la órbita geoestacionaria. Esto se suele hacer siguiendo la trayectoria de transferencia de Hohmann, que toma su nombre del científico alemán Walter Hohmann, que ideó esta trayectoria en 1925. Llama la atención que más de 30 años antes del lanzamiento del primer satélite, cuando los viajes espaciales todavía pertenecían a la ciencia ficción, algunos científicos ya investigaban sobre estos temas.

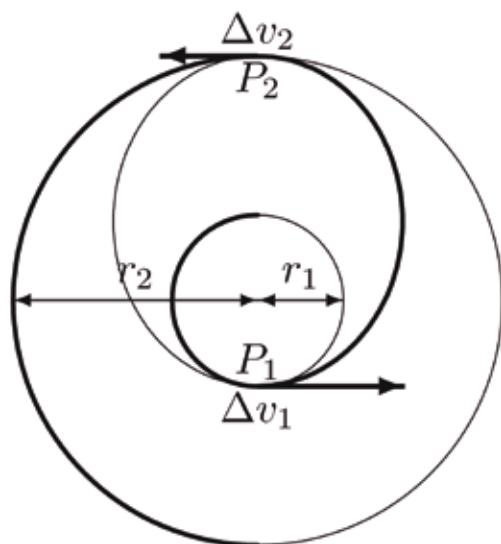


Figura 9. Trayectoria de Hohmann. Imagen: Tomás L. Gómez..

En general, para pasar de una órbita circular de radio r_1 a otra de radio mayor r_2 usamos una elipse cuyo periastro esté a distancia r_1 y apoastro a r_2 . En el punto P_1 se le da un impulso al satélite, encendiendo los motores para conseguir un incremento de velocidad Δv_1 . A partir de este momento el satélite se mueve por la órbita elíptica, y al llegar al punto P_2 , se le vuelve a dar otro impulso, incrementando su velocidad en Δv_2 , para que su órbita se convierta en la órbita circular de radio r_2 .

La [trayectoria de Hohmann](#) también se puede usar para pasar de una órbita mayor a otra menor, es decir, cuando $r_2 < r_1$. En ese caso, ambos incrementos de velocidad son negativos: primero disminuimos la velocidad para pasar a una órbita elíptica, y al llegar al periastro volvemos a disminuir la velocidad para quedarnos en la nueva órbita circular.

Como los satélites geoestacionarios están sobre el ecuador, cuando los vemos desde latitudes cercanas al polo aparecen muy próximos al horizonte. Esto puede ser un problema, pues pueden quedar ocultos por montañas, árboles, etcétera. Como gran parte de la antigua Unión Soviética estaba a gran latitud, los ingenieros soviéticos idearon la llamada órbita de Molniya, una órbita muy elíptica, inclinada $63,4^\circ$ sobre el ecuador, con una altura mínima de 500 km y máxima de 39.867 km. Cuando se encuentra en el perigeo se mueve más despacio, así que se encuentra casi todo el tiempo en la vertical de las latitudes altas. El periodo es de medio día, por lo que vuelve a estar en la misma posición dos veces al día. Se suelen usar a la vez tres satélites en este tipo de órbita para garantizar que, en cualquier momento, al menos uno de ellos esté bien situado para las comunicaciones.

VIAJES INTERPLANETARIOS

Supongamos que queremos enviar una nave a Marte. Hoy en día, los cohetes que llevan las naves espaciales son capaces de dar un impulso grande durante intervalos de tiempo pequeños, por lo que las trayectorias se diseñan de tal forma que durante casi todo el viaje el motor vaya apagado, y sólo se enciende en momentos puntuales para acelerar o frenar la nave.

Primero pondremos la nave en órbita terrestre, como hemos visto en el apartado anterior. Por ejemplo, podemos elegir una órbita circular a 400 km sobre la Tierra, que como ya hemos visto, supone una velocidad de unos 27.000 km/h. Para escapar de la gravitación terrestre, no nos sirve una órbita elíptica, sino que necesitamos, al menos, una órbita parabólica, es decir, con excentricidad $e = 1$. Según la fórmula que relaciona la excentricidad con la energía total, tendremos $e = 1$ cuando la energía total E sea cero. Según la fórmula de la energía total, si estamos a una distancia r del centro de la Tierra, tendremos $E = 0$ cuando la velocidad v sea

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

Es la llamada velocidad de escape. Si estamos a 400 km sobre la Tierra, la distancia al centro es $r = 6.778$ km, por lo que la velocidad de escape será 10.839 m/s. Es decir, unos 11 km por segundo, o, lo que es lo mismo, unos 39.000 km por hora.

Así que encenderemos los motores hasta que la nave alcance esta velocidad. Una vez alcanzada, se apagan los motores, y, visto desde la Tierra, la nave se alejará, moviéndose cada vez más lentamente, hasta que esté tan lejos que la gravitación terrestre sea despreciable, momento en el que parecerá desde la Tierra que tiene velocidad cero.

Visto desde fuera, veremos que la Tierra y la nave se van separando, cada vez más lentamente, hasta seguir trayectorias paralelas. Es decir, a partir de este momento podemos suponer que la nave gira alrededor del Sol en una órbita circular con radio R_e , el radio de la órbita terrestre, y queríamos llegar hasta Marte, que tiene una

órbita circular con radio R_m (en realidad las órbitas son elípticas, pero para simplificar supondremos que son circulares).

Este es un problema análogo al que nos encontrábamos cuando queríamos subir de una órbita terrestre baja a la órbita geoestacionaria, y podemos hacer lo mismo que entonces: usar la trayectoria de Hohmann. Así que primero aceleraremos para pasar a una órbita elíptica, con perihelio R_e y afelio R_m . Al llegar al afelio, volveremos a acelerar, para que nuestro movimiento sea paralelo al de Marte.

En este momento, desde Marte se verá que la nave está en reposo, y que empieza a caer, debido a la gravedad marciana, en una órbita parabólica. La última aceleración hay que hacerla cuidadosamente, para que en el movimiento parabólico la distancia al periastro marciano sea la adecuada y la nave no se estrelle contra la superficie.

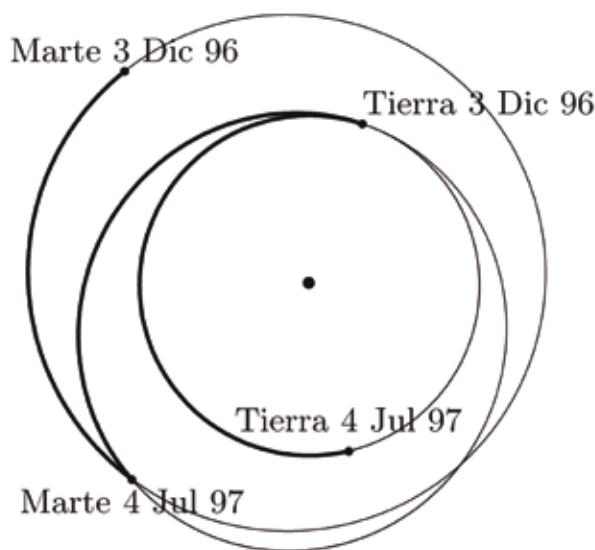


Figura 10. Trayectoria que siguió el Mars Pathfinder. Imagen: Tomás L. Gómez.

Cuando llegue al periastro marciano, disminuiremos la velocidad para que quede en una órbita elíptica. Esta última deceleración a veces se hace con **aerofrenado**, es decir, se elige la órbita parabólica de forma que la nave

llegue a rozar las capas superiores de la atmósfera marciana, para que la fricción produzca el frenado, con lo cual ahorraremos combustible. Desde la órbita elíptica, volveremos a frenar, para que la nave caiga finalmente sobre la superficie marciana.

Este es el esquema general, pero en cada misión se modifica según las necesidades. En la figura se representa la trayectoria que siguió el Mars Path Finder, que no fue exactamente de Hohmann.

La técnica de aerofrenado se usó por primera vez con el satélite japonés Hiten en la atmósfera terrestre. Despues se ha utilizado en Venus 1993 (nave Magallanes) y en Marte (Mars Global Surveyor en 1997, Mars Odyssey en 2001 y Mars Reconnaissance Orbiter en 2006). Habitualmente la técnica de aerofrenado se hace en varias órbitas, de modo que cada vez que pasa por el periastro, se frena un poco y va disminuyendo la distancia al apoastro. Como anécdota, el aerofrenado ya había aparecido en la novela de ciencia ficción *Space Cadet* de Robert A. Heinlein en 1948. También apareció en 1982, en la película 2010: *Odisea 2*, basada en la novela de Arthur C. Clarke.

TÉCNICAS AVANZADAS

La trayectoria de la sonda Voyager 2 es especialmente interesante. Se lanzó el 20 de agosto de 1977, pasó por Júpiter en 1979, Saturno en 1981, Urano en 1986 y Neptuno en 1989. Cada vez que pasaba por uno de los planetas, aprovechaba su gravedad para acelerar y así continuar su viaje.

El estudio y diseño de trayectorias espaciales es una área muy activa de investigación actual, donde se aplican técnicas de sistemas dinámicos.

Especialmente espectacular fue el caso de la sonda japonesa Hiten, lanzada en 1990, que iba a ser enviada a la Luna siguiendo una órbita muy elíptica. Desgraciadamente, Hiten no recibió la aceleración necesaria. Edward Belbruno, del Jet Propulsion Laboratory, ideó una trayectoria alternativa y sorprendió a la agencia espacial japonesa enviándoles su propuesta. Gracias

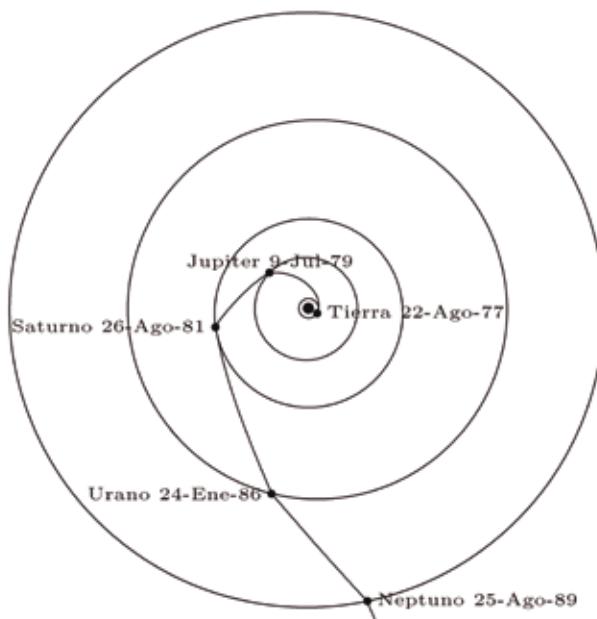


Figura 11. Trayectoria del Voyager 2. Imagen: Tomás L. Gómez.

a las ideas de Belbruno, la misión de Hiten se pudo extender.

Un caso similar es el del satélite AsiaSat 3, un satélite de comunicaciones y televisión de una compañía de Hong Kong, lanzado en 1997. Debido a un fallo en el cohete, no se llegó a la órbita geoestacionaria. Aunque el satélite funcionaba perfectamente, no tenía suficiente combustible para llegar a su órbita de manera tradicional, así que se dio por perdido hasta que, con la ayuda de Belbruno, se usó una trayectoria que usaba la gravedad de la Luna para llegar a una órbita útil con un consumo mucho menor de combustible.

La idea de las trayectorias de bajo consumo es acercarse a órbitas inestables, donde un pequeño impulso puede hacer que la trayectoria final sea muy diferente. Recientemente se ha usado en la misión GRAIL, lanzada el 10 de septiembre de 2011. Se enviaron dos pequeñas sondas que se acercaron al punto de Lagrange L1, de equilibrio gravitatorio entre la Tierra y el Sol, y desde ahí modificaron sus trayectorias para llegar a la órbita

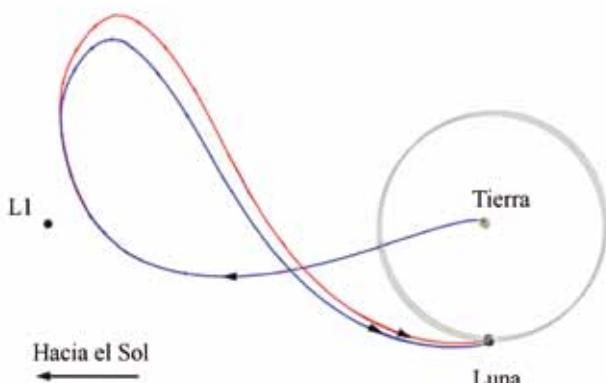


Figura 12. Trayectorias de las sondas GRAIL. Imagen: Tomás L. Gómez.

lunar el 28 de diciembre de 2011³. Es decir, se aprovechó la gravedad del Sol para hacer el viaje de la Tierra a la Luna. El viaje duró más de tres meses, tiempo extremadamente largo si se compara con los 3 o 4 días que empleaban las naves Apollo; sin embargo, el ahorro es considerable, pues cada kilogramo menos en la nave espacial supone una reducción de toneladas en el cohete necesario para lanzarlo. La misión GRAIL consistía en dos naves que midieron el campo gravitatorio lunar para descubrir su composición interna. Cuando terminó la misión científica, fueron estrellados en una montaña lunar, el 17 de diciembre de 2012.

En España, cabe destacar el grupo de Carles Simó, en Barcelona, que ha colaborado con la NASA y la ESA en el análisis de misiones espaciales.

OBSERVACIÓN DE LOS SATÉLITES DE JÚPITER

Para este ejercicio es necesario un telescopio astronómico. Un refractor de 6 cm de apertura, o un reflector de 10 cm de apertura, es más que suficiente para observar con comodidad los cuatro satélites principales

EJERCICIOS

Observación de satélites artificiales.

En la página web <http://www.heavens-above.com> se pueden obtener las predicciones del paso de satélites artificiales. Tras elegir la ciudad desde la que realizaremos la observación (o bien, introducir las coordenadas geográficas), podemos obtener las predicciones.

Para observar los satélite no es necesario ningún instrumental, sino que se puede hacer a simple vista. Los satélites más brillantes pueden verse perfectamente desde una ciudad, a pesar de la contaminación lumínosa. Su aspecto es similar a un avión por la noche, siendo la mayor diferencia que los aviones tienen luces con destellos, mientras los satélites parecen estrellas que se mueven.

En la página web hay instrucciones para saber en qué dirección hay que mirar y a qué hora. También hay un mapa celeste para saber la trayectoria aparente del satélite sobre las estrellas.

Se puede elegir algún satélite especialmente interesante. Por ejemplo, la estación espacial internacional ISS, el telescopio Hubble HST, el satélite militar estadounidense X-37B (sucesor del Shuttle), o el controvertido satélite norcoreano puesto en órbita el 12 de diciembre de 2012. También se puede obtener una lista de todos los satélites visibles en una noche.

En esta página también hay información para observar objetos astronómicos de interés, como asteroides y cometas.

de Júpiter, también llamados Galileanos en honor a su descubridor.

Sus nombres son: Io, Europa, Ganímedes y Calixto, y los períodos de sus órbitas alrededor de Júpiter son, respectivamente: 1,8 días, 3,5 días, 7,2 días y 17,7 días. Hay muchos sitios en Internet, y programas de ordenador, que permiten conocer su posición relativa en un momento dado. Por ejemplo:

³ <http://www.spaceflight101.com/grail-mission-updates.html>

<http://www.skyandtelescope.com/observing/objects/planets/3307071.html>

O bien empezar en <http://www.skyandtelescope.com/> y seguir los enlaces Observing > Celestial Objects > Planets > Jupiter's Moons Javascript Utility

Los satélites de Júpiter forman una especie de Sistema Solar en miniatura visto de perfil.

Como ejercicio avanzado, se puede seguir su movimiento día tras día, dibujando su posición relativa. Usando estos dibujos, podemos medir el periodo de la órbita de cada satélite, viendo cuánto tiempo tarda cada satélite en volver a la misma posición. Dichas órbitas son elipses con una excentricidad muy pequeña, por lo que podemos suponer que son circunferencias. Podemos estimar su radio (en unidades del tamaño de Júpiter, por ejemplo), viendo cuál es el alejamiento máximo del satélite con respecto a Júpiter. Podemos comprobar la ley de Kepler, dividiendo el cubo del radio por el cuadrado del periodo, y comprobando si obtenemos el mismo número para cada satélite.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Belbruno, E. (2007): *Fly me to the moon: an insider's guide to the new science of space travel*. Princeton: Princeton University Press.

Para conocer más sobre las técnicas modernas de diseño de trayectorias espaciales.

Dumoulin, C. y Parisot, J. P. (1987): *Astronomie pratique et informatique*. Paris: Masson.

Libro de referencia para hacer cálculos astronómicos.

MATERIALES AUXILIARES

PÁGINAS WEB

<http://www.heavens-above.com/>. Página web con toda la información necesaria para observar satélites artificiales.

<http://neo.jpl.nasa.gov/orbits/>. Simulador 3D de órbitas de asteroides y cometas.

PELÍCULAS

2010: *Odisea 2* (Peter Hyams, 1984). Adaptación de la novela homónima de Arthur C. Clarke, que forma parte de una saga creada por el escritor compuesta por 2001: *Una odisea espacial* (1968), 2010: *Odisea 2* (1982), 2061: *Odisea 3* (1987) y 2001: *Odisea final* (1996). La película sigue de forma fiel lo narrado en la novela e intenta dar explicación y continuación a lo acontecido en la película 2001: *Una odisea del espacio* (Stanley Kubrick, 1968), pero adoptando un estilo más clásico y convencional. En esta película se ilustra de manera muy clara el concepto del aerofrenado.

EL PLANETA TIERRA EN EL UNIVERSO

Manuel de León

4.2

Objetivos, contenido y criterios de evaluación de acuerdo con los Reales Decretos de Enseñanzas Mínimas, (1467/2007 de 2 noviembre para Bachillerato y 1631/2007 de 29 de diciembre para Educación Secundaria Obligatoria).

En este capítulo se hace un recorrido por la historia de la matemática y se destaca su relevancia como parte del pensamiento científico de la humanidad. El hilo conductor es la preocupación permanente de los seres humanos por entender y conocer el espacio en el que habitan. Esta reflexión se centra en dos focos: el entorno local, inicialmente reducido, y el entorno global de nuestro planeta, que desbordaba la capacidad de comprensión de nuestros antecesores. De ahí que, desde el comienzo de los tiempos, encontremos evidencias de la introducción de medidas, de la presencia de códigos de representación y de sistemas de organización para la gestión y sostenibilidad de la Tierra.

El autor postula que la descripción del mundo es básicamente una cuestión científica y que las matemáticas son el lenguaje mediante el cual entendemos el universo. Históricamente esta visión se pone de manifiesto en el estudio de las dimensiones de la Tierra, en la explicación plausible del movimiento de los astros mediante elaboración de teorías y construcción de modelos, en el enunciado de leyes que rigen lo observado con las cuales predecir las posiciones de los planetas y los movimientos de los astros.

El autor hace una selección de personajes científicos, documentos y etapas históricas, que van desde los primeros conteos numéricos hasta la teoría de la relatividad, los cuales presenta de manera diacrónica con cierto detalle. Su foco de atención está en los sistemas de medida y en la interpretación de la posición de la Tierra en el universo.

El texto comienza con una revisión histórica de los sistemas de numeración en las primeras civilizaciones, y sigue con el estudio del cálculo de áreas, donde destaca la importancia del teorema de Pitágoras. Los *Elementos* de Euclides constituyen objeto de especial atención, cuya estructura se describe con cierto detalle, deteniéndose en la discusión del quinto postulado de las paralelas y las consecuencias de su cuestionamiento para el nacimiento de las geometrías no euclídeas.

La relatividad y algunas de las teorías y nociones matemáticas que la sustentan reciben también una explicación detallada, que conduce a la introducción de las ecuaciones de campo de la relatividad. Finalmente, concluye con la descripción del Big-Bang y la moderna interpretación del origen del universo y de su desarrollo. En las conclusiones se plantean una serie de cuestiones abiertas sobre el conocimiento actual del universo y se emplean las bases matemáticas que permiten plantear estas cuestiones y que, en su momento, permitirán responderlas.

El capítulo es asequible para los estudiantes de secundaria obligatoria y de bachillerato, y está escrito con intención divulgadora y una clara orientación formativa y didáctica. El texto destaca el lazo permanente entre ciencia y matemáticas, singularmente entre las matemáticas y las ciencias físicas y naturales. Esta relación se pone de manifiesto en la vinculación detectada entre el contenido del capítulo y los componentes curriculares de las asignaturas de bachillerato, que se muestran en la tabla resumen.

INTRODUCCIÓN

Conocer cómo es el espacio en el que vivimos ha sido una de las mayores preocupaciones de la humanidad. Ese conocimiento nos dará pistas para entender cuál es nuestro sitio en él, y si nuestra existencia tiene una razón de ser. Además, saber cómo es el entorno local y global en el que nuestro planeta se mueve, nos dará pistas sobre su influencia (si existe) sobre nosotros y que ayuden a tomar medidas para la sostenibilidad de la Tierra. Y finalmente, quizás en algún futuro nos podría tocar emigrar y tomar el camino de las estrellas, así que nuestro conocimiento del universo se revela imprescindible.

Si para los primeros humanos su entorno era muy reducido –el territorio de caza–, la observación de los cielos tuvo que causarles una impresión enorme. Debemos colocarnos en esas primeras etapas de la humanidad, con unos cielos plagados de estrellas, ajenos a la contaminación lumínica que hoy en día imposibilita apreciar adecuadamente esa majestuosidad.

La descripción del mundo no es solo una cuestión filosófica, sino científica, y en ese aspecto los antiguos griegos fueron los maestros. Ellos fueron capaces de medir el radio de la Tierra, que ya aventuraron era redonda, y a la vez, de poner los cimientos de una explicación plausible del cielo observado, que culminó con la [teoría geocéntrica](#) de Tolomeo.

Con los siglos, la visión de la Tierra se fue afinando y los mapas fueron dando una buena descripción de la misma, pero también fueron enunciadas las leyes que rigen el movimiento de los astros. Tierra y Cielo emergieron como un concepto interrelacionado, y la pequeñez de nuestro planeta abrumó las mentes de los pensadores; nuestro Sol no es más que una de los millones de estrellas, y, en principio, no muy diferente a muchas otras.

La [teoría de la relatividad](#) de Albert Einstein nos dio una visión nueva, que acompañada de las cada vez mejores observaciones astronómicas, nos condujo a una interpretación del universo tal como hoy lo concebimos, fruto del [Big Bang](#) y de la consecuente expansión.

En todas estas etapas, las matemáticas han sido las fieles compañeras de los descubrimientos científicos

que han dado lugar a nuestro entendimiento actual del universo. Los siglos han sido testigos del rechazo a las ideas revolucionarias por la doctrina predominante en cada momento, y así Galileo fue obligado a callar por la Iglesia romana, Kepler sufrió en mitad de las guerras de religión que devastaron Europa en su tiempo, y Einstein fue rebatido por el pensamiento único de los nazis (la superior ciencia aria contra la degenerada ciencia judía). La lección a aprender es que la ciencia es la única verdad que debemos admitir, y fuera de ella no hay más que supercherías y supersticiones.

PRIMEROS PASOS: EL NÚMERO Y LAS ÁREAS

LOS NÚMEROS

Contar es probablemente una de las primeras actividades intelectuales que desarrolló el hombre. Era necesario distinguir el número de miembros de la propia tribu, contar las piezas de caza, o, posteriormente, las ovejas, cabras o vacas, de sus rebaños. Se dice incluso que contar y registrar los resultados condujo al descubrimiento de la escritura.

Sobre el origen de los números, se cree que hace unos 10.000 años se comenzaron a representar las cantidades por objetos de barro (por ejemplo, una pieza de fruta, una esfera), que luego se introducían en una vasija de arcilla. Así se podía llevar una contabilidad. Pero era más sencillo dibujar en el exterior de una vasija de arcilla fresca cinco esferas, por ejemplo, y no había necesidad de introducirlas en la vasija. Así podían haber surgido estas representaciones para los números.

En las antiguas civilizaciones se desarrollaron muchos sistemas de numeración, sofisticados todos ellos y de los que conservamos todavía algunas reminiscencias. Los babilonios crearon un sistema de numeración posicional alrededor del 1800-1900 a. C., con base sesenta. Posicional quiere decir que el valor de un dígito particular depende tanto de su valor como de su posición en el número que se quiere representar. Por ejemplo, nuestros

ordenadores están basados en un sistema binario (base 2), con dos cifras, 0 y 1, de manera que si queremos indicar las cantidades 2, 3, 4 o 5, escribirímos respectivamente 10, 11, 100 y 101; en efecto, por ejemplo, 101 significa que la cantidad considerada es $1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 = 5$. El sistema decimal (con base 10) que actualmente usamos en el mundo considera 10 cifras: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

El sistema babilónico todavía tiene hoy en día consecuencias, y así tenemos horas de 60 minutos y minutos de 60 segundos cuando queremos contar el tiempo, además de las medidas de los ángulos.

Los egipcios idearon otro sistema complejo de numeración basado en el número 10 y en los jeroglíficos. Había símbolos para los números 1, 10, 100, 1.000, y así sucesivamente. Repitiéndolos y combinándolos adecuadamente, se podían representar todos los números naturales. Las dificultades surgían en el tratamiento de las fracciones, aunque idearon soluciones muy ingeniosas.

Los griegos no tenían un sistema posicional y los números se representaban por la primera letra de su nombre, aunque también desarrollaron otro basado en las letras del alfabeto. Los astrónomos griegos usaron también un símbolo especial para el 0. En cualquier caso, los cálculos eran tremadamente difíciles. ¡Y qué decir de la numeración romana! Hacer cálculos con este sistema podía representar un auténtico dolor de cabeza. En el otro lado del Atlántico, mayas e incas desarrollaron a su vez sistemas de numeración, los mayas basados en símbolos y los incas en nudos en cuerdas.

Los mayas hicieron un buen uso de puntos y rayas, y con su sistema (que también incluía el cero pero al que no le sacaron mucho partido) eran capaces de hacer cálculos de gran envergadura. Su motivación era sobre todo la astronómica y el cómputo del paso del tiempo.

Nuestro sistema actual de numeración, el decimal, viene de la India y entra en Europa de la mano de los árabes, por España e Italia. Y es en España, en el siglo X, en donde se encuentran por primera vez los números del 1 al 9 (los que ahora llamamos números arábigos), en el códice *Codex Conciliorum Albeldensis seu Vigilanus*, elaborado por el monje Vigila en el año 976 en el monasterio de San Martín de Albelda de Iregua. Vigila reprodujo esos números indios en el orden de mayor a menor, tal como hacían los andalusíes al escribirlos de izquierda a derecha. En el Códice no aparece el cero;

es posteriormente cuando se va haciendo uso de esta cifra, tanto por su valor como número como por su uso posicional, de manera que 205 no se confunda de ninguna manera con 25. Leonardo de Pisa es, sin duda, una figura decisiva en la introducción del cero en Italia y después en Europa (además de por haber ideado la sucesión de Fibonacci).

LAS ÁREAS

Los repartos de tierras en la antigua Babilonia requerían un desarrollo de la medida de áreas, y podemos decir que los babilonios son expertos geométricos (en las tablillas se encuentran cientos de registros que señalan operaciones algebraicas y geométricas, lo que para esa época suponían una sofisticación extraordinaria). Esta necesidad surgió también en el valle del Nilo, especialmente tras las inundaciones que dejaban los lodos fértilles para las cosechas. Se dice que Pitágoras aprendió su famoso teorema en un viaje a Egipto.

El teorema de Pitágoras es uno de los grandes resultados matemáticos de la Antigüedad. Es, además, uno de esos resultados que todo ser humano de este planeta aprende en algún momento de su infancia, habiendo pasado al lenguaje cotidiano.

Las creencias matemáticas de los pitagóricos eran muy semejantes a las del mundo de las ideas de Platón, de modo que un círculo perfecto ante cualquier dibujo de una circunferencia no sería más que una mera aproximación. Para ellos, el universo estaba basado en las propiedades de los números; el 1 era la fuente de todas las cosas, el 2 y el 3 simbolizaban los principios femenino y masculino, el 4 era la armonía y también los cuatro elementos (tierra, aire, fuego y agua). Por eso, el número 10 que se obtiene sumando los cuatro primeros números naturales, representaba la perfección.

TEOREMA DE PITÁGORAS

En un triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

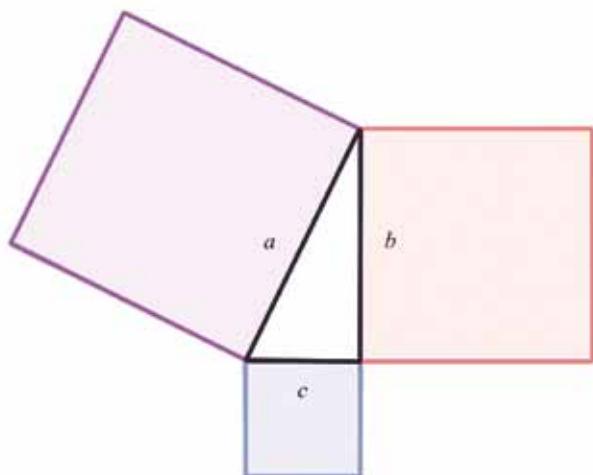


Figura 1. Teorema de Pitágoras. Imagen: Manuel de León.

Dicho de otro modo, el cuadrado construido sobre la hipotenusa iguala en área a la suma de los cuadrados construidos sobre los catetos (figura 1):

Por ejemplo, unas medidas posibles serían 3, 4 y 5 unidades, para los dos catetos y la hipotenusa, respectivamente. Ternas como esta, (3, 4, 5) son llamadas pitagóricas. El resultado era conocido por los matemáticos babilonios e indios, pero los pitagóricos dieron una demostración formal (que se encuentra en *Los Elementos de Euclides*,

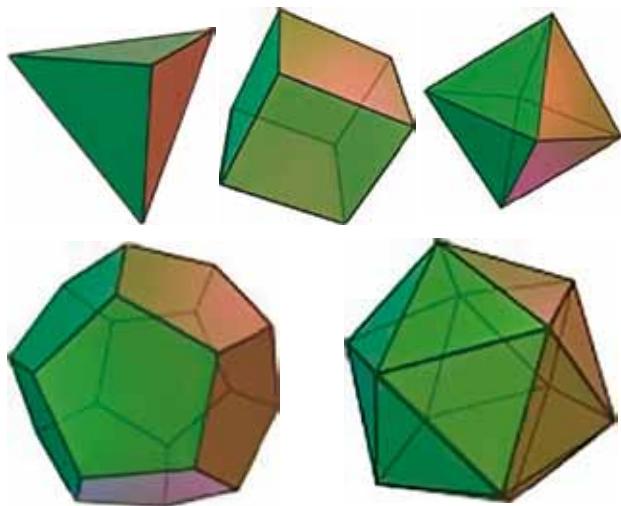


Figura 2. Poliedros formados por caras idénticas. Imagen: Manuel de León.

libro del cual hablaremos con extensión en el siguiente epígrafe).

Otro importante resultado de Pitágoras y los pitagóricos es el descubrimiento de los llamados sólidos regulares o platónicos, que son **poliedros** formados por caras idénticas. Solo son posibles cinco poliedros regulares: tetraedro (cuatro triángulos equiláteros), cubo o hexaedro (seis cuadrados), octaedro (ocho triángulos equiláteros), dodecaedro (doce pentágonos regulares) e icosaedro (veinte triángulos equiláteros), lo que es un resultado que podríamos calificar de mágico (figura 2).

DEL QUINTO POSTULADO A LAS GEOMETRÍAS NO EUCLIDIANAS

El gran geómetra de la antigüedad es Euclides de Alejandría (325 a. C.-265 a. C.), universalmente conocido por su obra *Los Elementos*, del que se dice que es el segundo libro más editado tras la Biblia.

Los Elementos es un compendio de todo lo conocido en geometría en la época y, probablemente, las propias aportaciones del autor. Euclides escribió otras obras pero solo cinco –incluyendo *Los Elementos*– han llegado a nosotros.

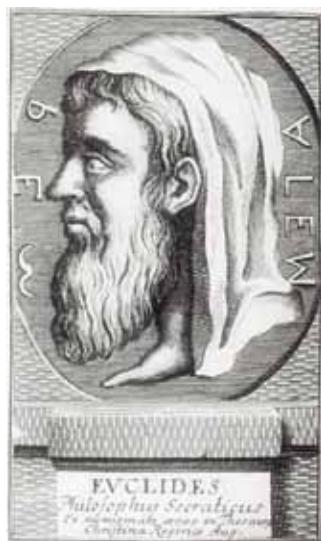


Figura 3. Euclides.
Fuente: <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/PictDisplay/Euclid.html>.

Los Elementos es un tratado sobre la geometría de dos y tres dimensiones, con un total de 465 proposiciones (93 problemas y 372 teoremas), divididas en trece libros separadas por contenidos:

Libros I a VI: Geometría plana.

Libros VII a IX: Teoría de números.

Libro X: Números irracionales.

Libros XI a XIII: Geometría del espacio.

La mayor parte de los libros comienza con una lista de definiciones, que no tienen el sentido que hoy les daríamos los matemáticos, sino en el que podríamos llamar el “imaginario colectivo griego” que la época les concedía. Por ejemplo, un punto es lo que no tiene partes, o una línea es una longitud sin anchura, y otras de similares características.

Euclides construye su argumentación basándose en un conjunto de axiomas (principios o propiedades que se admiten como ciertas por ser evidentes y a partir de los cuales se deduce todo lo demás) que Euclides llamó postulados.

El gran mérito de Euclides no es solo que escriba una obra de referencia, sino que introduce un método riguroso de demostración. Por ejemplo, enuncia que “si un triángulo tiene los tres lados iguales, entonces también tiene los tres ángulos iguales”. Ese enunciado, que parece obvio a primera vista, exige una demostración, y pasa entonces a ser un teorema, que es consecuencia de los supuestos previos. Otro teorema es el de Pitágoras. O, por ejemplo, la demostración incluida en *Los Elementos* de que solo existen cinco sólidos regulares, los llamados platónicos. Euclides no solo prueba que no puede darse ningún otro caso, sino que además esos cinco sí pueden construirse. Euclides estaba poniendo los fundamentos más sólidos para el rigor matemático, que es lo que ha llevado la disciplina a sus cimas más altas y lo que hace a esta ciencia diferente a todas las demás.

Toda su teoría parte de cinco enunciados que no demuestra –ya que los supone verdaderos e indemostrables– sobre los que prueba el resto de propiedades. Son los famosos cinco postulados de Euclides:

I. Dados dos puntos se pueden trazar una recta que los une.

II. Cualquier segmento puede ser prolongado de forma continua en una recta ilimitada en la misma dirección.

III. Se puede trazar una circunferencia de centro en cualquier punto y radio cualquiera.

IV. Todos los ángulos rectos son iguales.

V. Si una recta, al cortar a otras dos, forma los ángulos internos de un mismo lado menores que dos rectos, esas dos rectas prolongadas indefinidamente se cortan del lado en el que están los ángulos menores que dos rectos.

El quinto postulado se puede enunciar de una manera alternativa:

Por un punto exterior a una recta se puede trazar una única paralela.

Esta manera equivalente de enunciar el quinto postulado se debe a Proclo, quien fue director de la Academia de Platón, y gracias al cual conocemos algunos detalles de la vida de Euclides. Esta formulación alternativa del quinto postulado se atribuyó erróneamente a John Playfair (1748–1819), geómetra, geólogo y físico escocés, y se conoció durante muchos años como axioma de Playfair.

El quinto postulado, a diferencia de los otros cuatro, no parecía tan intuitivo para ser un axioma, por lo que durante siglos numerosos matemáticos intentaron probar que el quinto postulado era consecuencia de los otros cuatro o era independiente. Esta larga historia supone uno de los *tour de force* más impresionantes del desarrollo de las matemáticas (y por ende, de la humanidad). A lo largo de años y años, asistimos a docenas de intentos en uno y otro sentido. Hubo muchas pruebas falsas de que el quinto postulado se deducía de los otros cuatro e incluso matemáticos como Saccheri estuvieron a punto de acertar con la respuesta. Ante la imposibilidad de encontrar respuestas, D'Alembert llamó a este problema en 1767 [el escándalo de la geometría elemental](#).

Hacían falta mentes geniales para darle un impulso al problema y es entonces cuando uno de los matemáticos más relevantes de la historia aparece en el escenario, Johann Carl Friedrich Gauss (Brunswick, 1777–Gotinga, 1855). Gauss comenzó a trabajar en él con 15 años en 1782, y en 1817 llegó al convencimiento de que el quinto axioma era independiente de los otros cuatro. Comenzó a idear

una geometría en la cual se podía trazar más de una paralela por un punto externo. Sin embargo, Gauss nunca publicó su trabajo, y lo mantuvo en secreto, se dice que para evitar controversias con Immanuel Kant.

Gauss obtuvo otros resultados fundamentales para la matemática y, en particular, para la geometría: desarrolló nociones fundamentales de curvatura para estudiar las superficies, como la curvatura llamada ahora de Gauss. Lo que dice el teorema *egregium* de Gauss (*egregium* por notable) es que la curvatura gaussiana de una superficie puede determinarse por completo midiendo ángulos y distancias sobre la propia superficie, sin hacer referencia a la forma particular en la que la superficie está embebida en el espacio euclíadiano. Diríamos en lenguaje moderno que es un invariante intrínseco.

Puesto que la curvatura puede medirse sin salirse de la superficie, los "seres planos" que vivieran sobre la cáscara de la esfera serían capaces de determinar la curvatura de la misma.

Por supuesto que estos conceptos pueden extenderse de una manera natural a espacios de más dimensiones, y eso es lo que permite la aplicación a la teoría de la relatividad y, en definitiva, a conocer cuál es la forma de nuestro universo.

Volviendo al quinto postulado, aunque Gauss no hizo públicos sus resultados, sí discutió sobre este tema con su amigo, el matemático Farkas Bolyai, quien había sido autor de varias pruebas falsas. Su hijo, Janus Bolyai, comenzó a seguir los pasos de su padre en geometría, a pesar de la advertencia de este de las dificultades del problema del quinto postulado.

En 1823 Bolyai escribió a su padre:

"He descubierto cosas tan maravillosas que estoy asombrado... de la nada he creado un nuevo mundo".

En 1825 Janus visitó a su padre y le explicó sus descubrimientos, pero no fue hasta 1831, en una nueva visita, cuando Farkas comenzó a darse cuenta del extraordinario valor del trabajo de su hijo, y lo urgió para que lo escribiera y así poderlo publicar como un apéndice de su próximo libro. Lo que había en ese apéndice era una auténtica obra maestra. En primer lugar, daba su definición de paralela y demostraba que si el quinto postulado se cumplía en una región del espacio, se cumplía

también en todo el espacio. Es decir, que se podía construir una geometría consistente en la que se cumpliera el quinto postulado y otra en la que no.

Al leer este apéndice, Gauss comentó:

"Este joven geométrico Bolyai es un genio de primer orden".

A Farkas, sin embargo, le comentó que los resultados de su hijo coincidían casi exactamente con los resultados que él mismo había logrado, y que había comentado en una carta al matemático alemán Frank Adolf Taurinus, el 8 de noviembre de 1824. En 1848 Bolyai conoció que otro matemático, el ruso Lobachevsky, había publicado una obra que contenía resultados similares a los suyos. János estudió el trabajo de Lobachevsky línea a línea, e incluso llegó a pensar que Lobachevsky no existía y todo había sido una maquinación de Gauss. Sin embargo, fue capaz de apreciar la genialidad de ese trabajo.

Lobachevsky publicó sus *Geometrical investigations on the theory of parallels* en 1840 (61 páginas), pero su obra había pasado muy inadvertida. Un resumen en francés en el *Journal de Crelle* (la revista de matemáticas más antigua, fundada por Leopold Crelle) le dio difusión, pero los matemáticos no aceptaron sus ideas revolucionarias.

Lo que había hecho Lobachevsky fue reemplazar el quinto postulado de Euclides por este otro: Existen dos rectas paralelas a una dada por un punto externo a la recta.

El primero en colocar la geometría de Bolyai-Lobachevsky al mismo nivel que la euclíadiana, fue el matemático italiano Eugenio Beltrami (1835-1900). En 1868 dio un modelo en dimensión 2 en un espacio euclíadiano de dimensión 3, la pseudoesfera. En este modelo, los cuatro primeros postulados se cumplían pero no el quinto.

LA PSEUDOESFERA

Una pseudoesfera es una superficie de revolución que se obtiene girando una curva llamada tractriz (una tractriz es lo que se llama una curva de persecución, como

un perro persiguiendo un automóvil que se desplaza por una carretera en línea recta, de manera que el perro ha comenzado la persecución desde un punto alejado de la carretera) alrededor de su asymptota. El nombre de pseudoesfera proviene de ciertas analogías existentes con la esfera de dimensión 2:

- La esfera tiene curvatura constante positiva, mientras que la pseudoesfera tiene curvatura constante negativa.
- La pseudoesfera no es una superficie acotada, pero su área es finita, así como el volumen de la región que encierra.

Dado que la pseudoesfera tiene curvatura constante negativa, es **localmente isométrica** al plano hiperbólico o disco de Poincaré, que es otro modelo “físico” para la geometría de Bolyai y Lobachevsky. En el caso del disco de Poincaré, las geodésicas son diámetros o arcos de círculo que cortan perpendicularmente a la frontera del disco.

En la figura 4 se puede ver cómo en el disco de Poincaré Σ no se verifica el quinto postulado. L_1 es una “recta” lo mismo que L_2 y L_3 , y se ve entonces que por el punto P externo a L_1 se pueden trazar muchas paralelas (como L_2 y L_3):

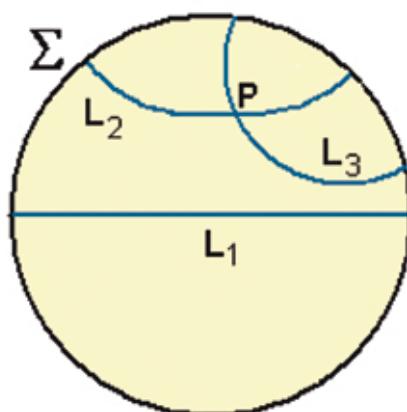


Figura 4. Geodésicas en el disco de Poincaré. Imagen: Manuel de León.

Otro matemático que juega un papel estelar en la historia del quinto postulado (y que de hecho cierra el panorama) es Bernard Riemann, cuya tesis doctoral dirigió Gauss, y

que impartió su lección inaugural el 10 de junio de 1854 en la que reformuló el concepto de geometría. Desde Riemann, la geometría es un espacio más una estructura (la métrica) que permite medir.

En la memoria que recoge su lección inaugural, publicada en 1868, dos años después de su muerte, Riemann consideró una geometría en la que las paralelas no son posibles, la geometría esférica. Estas geometrías no eran diferentes de la euclíadiana en el sentido de que no había contradicciones. Digamos que así como en la geometría del plano euclíadiano la línea recta que los une es la trayectoria más corta entre ellos, en una superficie esférica esta propiedad la poseen los círculos máximos. En lenguaje geométrico, los círculos máximos son las “geodésicas” de la geometría de la esfera.

El modelo lo completó Félix Klein en 1871, quien dio además modelos de otras geometrías no euclidianas, como la de Riemann. Klein demostró que las geometrías métricas, euclidianas o no euclidianas, constituyen casos particulares de la geometría proyectiva; además, en 1872, con ocasión de su conferencia en la toma de posesión de la cátedra en la Universidad de Erlangen, presentó el llamado “Programa de Erlangen”, en el que probó que el concepto de grupo es esencial, de manera que una geometría está caracterizada por su grupo de transformaciones.

En resumen, Klein demostró que solo hay tres tipos de geometrías:

- Hiperbólica (Bolyai–Lobachevsky).
- Esférica (Riemann).
- Euclíadiana (Euclides).

LA TEORÍA DE LA RELATIVIDAD

Cuando Einstein desarrolla su teoría de la relatividad general, las matemáticas ya habían creado numerosos instrumentos que quedaban a su disposición: el cálculo tensorial y las conexiones.

Los tensores son elementos geométricos que se pueden definir como grupos de números asociados a cada sistema de coordenadas, de manera que al cambiar las

coordenadas, esas cantidades cambian de acuerdo a una determinada regla. Este concepto se puede extender a espacios más generales de dimensiones arbitrarias.

El cálculo tensorial fue desarrollado por los matemáticos italianos a finales del siglo XIX. En primer lugar, Gregorio Ricci-Curbastro (1853-1925), que lo denominó cálculo diferencial absoluto (1892). Posteriormente, el mismo Ricci y Tullio Levi-Civita (1873-1941), que había sido uno de sus estudiantes de doctorado, publicaron en 1900 un libro que se ha convertido ya en un clásico: *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications*.

Este cálculo se conoció en el siglo XX como análisis tensorial, y fue muy estudiado y aplicado por su uso en la teoría de la relatividad general. El análisis tensorial fue algo que Einstein tuvo que aprender con la ayuda de su amigo, el matemático Marcel Grossmann. Lévi-Civita mantuvo una correspondencia con Einstein para corregir algunos errores de este último, correspondencia de la que damos aquí un extracto y que muestra la alta valoración que Einstein tenía por los matemáticos:

"Admiro la elegancia de su método de cálculo; debe ser estupendo cabalgar esos campos sobre el caballo de las auténticas matemáticas mientras nosotros tenemos que hacer nuestro laborioso trabajo a pie".

Einstein no solo reconoció el trabajo de Lévi-Civita, también reconoció la deuda con la geometría de Riemann, sobre el que dijo:

"... Solo el genio de Riemann, solitario e incomprendido, había llegado a mediados del pasado siglo a una nueva concepción del espacio, en la cual había sido desprovisto de su rigidez y en la que era posible reconocer su capacidad de tomar parte en los acontecimientos físicos".

Otro nombre clave en la historia la teoría de la relatividad general es el de Elwin Bruno Christoffel (1829-1900). Los llamados símbolos de Christoffel no son tensores, aunque también son grupos de números que se asocian a cada sistema de coordenadas, pero cambian de una manera diferente a los tensores. Los símbolos de Christoffel son las componentes de lo que se llama una *conexión* en la variedad. Explicaremos brevemente lo que esto significa.

La noción de *conexión*, como su nombre indica, está asociada al hecho de cómo se pueden transportar datos a lo largo de una curva de manera que se extienda la noción del paralelismo euclíadiano. Por ejemplo, en el plano, se puede entender muy fácilmente cómo hacer un *transporte paralelo* a lo largo de una curva: si comenzamos con un vector en un punto de una curva, simplemente trazamos un vector paralelo al dado en el punto a donde queremos trasladarlo. Imaginemos ahora que queremos hacer lo mismo a lo largo de una esfera: el vector transportado paralelamente en el espacio euclíadiano de tres dimensiones ya no será tangente a la esfera. ¿Cómo hacemos entonces?

Imaginemos que queremos hacer esto a lo largo de un paralelo de la esfera. En ese caso, se considera el cono construido sobre ese paralelo, de manera que es tangente a la superficie de la esfera, y por tanto, el vector de partida es tangente a ambas superficies, la esférica y la cónica. Pero un cono lo podemos "abrir" por una de sus generatrices y desplegar en un plano (técticamente, es lo que denominamos una *superficie desarrollable*, que se puede "desarrollar o desplegar" sobre el plano); haríamos ahora el transporte euclíadiano en el plano de nuestro vector, y lo llevaríamos de nuevo a la superficie de la esfera deshaciendo la operación de despliegue. Lo que habremos conseguido es un vector que ahora sí es paralelo a la superficie esférica y que sería el transportado paralelo del dado (y que no coincidirá en general con el de partida). Eso es lo mismo que hacemos en cualquier superficie, pues la familia de los planos tangentes a lo largo de los puntos de la curva "envuelve" una superficie (como el cono en el caso de la esfera).

Obviamente, esto no es muy útil a efectos prácticos, así que podemos definir el transporte paralelo de una manera algebraica, y ahí es donde los símbolos de Christoffel juegan su papel.

Digamos también que el concepto de transporte paralelo puede hacerse en espacios abstractos (diríamos dotados de una conexión), pero es particularmente interesante en el caso de espacios provistos de una métrica de Riemann, es decir, de una manera de medir distancias en cada plano tangente. Sabemos que existe una única manera de hacer transporte paralelo de manera que las distancias se conserven, y esa manera de "conectar" es

lo que se llama la conexión de Lévi-Civita. Esto se puede extender a casos más generales en los que la métrica admite vectores que pueden tener longitud negativa (una métrica semi-riemanniana o seudo-riemanniana), que son las que se usan en Relatividad.

EL AÑO MILAGROSO

El año 1905 es el denominado año milagroso (*Annus Mirabilis*) de Albert Einstein, pues durante el mismo redactó varios trabajos fundamentales sobre la física que cambiaron el rumbo de esta disciplina. En el primero de ellos explicaba el movimiento browniano, en el segundo el efecto fotoeléctrico y en los dos restantes desarrollaba la relatividad especial y la equivalencia masa-energía. La teoría de la relatividad general surgió más adelante. A pesar de la importancia de la teoría de la relatividad, Einstein obtuvo el premio Nobel de Física de 1921 por la explicación del efecto fotoeléctrico.

En 1912, Einstein comenzó a colaborar con Marcel Grossmann (matemático especializado precisamente en geometría diferencial) en la relatividad general, y en 1913 publicaron el *Esbozo de una teoría generalizada de la relatividad y de una teoría de la gravitación*, un trabajo conjunto en el que se representaba el campo gravitatorio por medio del **tensor métrico**, que simultáneamente representaba la estructura del espacio-tiempo. La estructura del espacio-tiempo aparecía aquí sujeta a ecuaciones dinámicas que la hacen depender del campo gravitatorio mismo y de sus fuentes. Este artículo comenzaba con una parte física firmada por Einstein, y seguía con una parte matemática, firmada por Grossmann. Las ecuaciones de campo deducidas en este artículo no eran las correctas, y poco a poco Einstein fue dando más valor a los argumentos matemáticos, entendiendo que era indispensable su uso.

Es en 1915 cuando Einstein presenta las ecuaciones correctas en la Academia Prusiana, escritas en forma tensorial. Este tensor métrico integra la materia que da lugar a la curvatura. Como Einstein declaró a un periodista en Estados Unidos en 1912:

"Antes se creía que si desapareciera del universo toda la materia, el espacio y el tiempo permanecerían. De acuerdo con la teoría de la relatividad, el espacio y el tiempo desparecerían juntamente con la materia".

Parecía que deberían generalizar la teoría de Newton, en concreto obtener ecuaciones de campo que extendieran la llamada ecuación de Poisson. Eso quería decir que en el lado de la izquierda deberían poner derivadas segundas de la métrica. Como miembro adecuado, Grossmann sugería el tensor de Ricci, que es una contracción del tensor de curvatura de Riemann, que está construido a partir del tensor métrico, y de sus derivadas primeras y segundas.

Así, en las ecuaciones de campo de Einstein, la gravedad se da en términos de un tensor métrico, que describe las propiedades geométricas del espacio-tiempo tetradimensional y a partir de la cual se puede calcular la curvatura de Ricci. En la parte derecha de la ecuación, se incluye el llamado tensor de tensión-energía, que da cuenta de la densidad y la presión de la materia. Estos tensores son tensores simétricos 4×4 , de modo que tienen 10 componentes independientes. Dada la libertad de elección de las cuatro coordenadas del espacio-tiempo, las ecuaciones independientes se reducen a seis. La fuerza de acoplamiento entre la materia y la gravedad es determinada por la constante gravitatoria universal.

La ecuación del campo de Einstein describe pues cómo el espacio-tiempo se curva por la materia (figura 5):

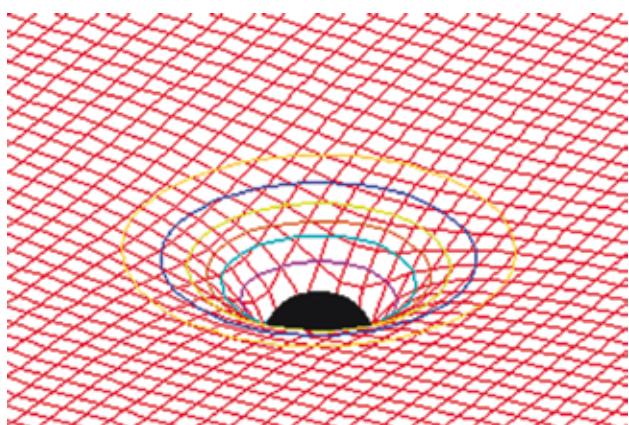


Figura 5. Imagen: Manuel de León.

Estas son las ecuaciones de campo para el vacío, y son el enunciado matemático que indica que donde no haya presencia alguna de masa-energía no habrá curvatura alguna en el espacio-tiempo.

$$R_{\mu\nu} = 0c$$

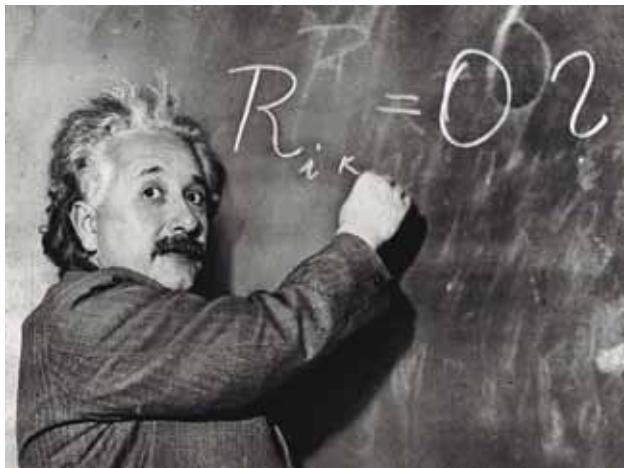


Figura 6. Albert Einstein. Fuente: <http://malta.freeculture.org/files/2011/03/einstein.jpg>.

Matemáticamente, la teoría de la relatividad especial pasa a convertirse en un caso especial de la teoría de la relatividad general para la situación en la cual no hay presencia de masa-energía o la presencia de la misma es tan poca que la curvatura producida en el espacio-tiempo es insignificante.

La ruta que toma un cuerpo en movimiento es precisamente la ruta geodésica. De este modo, la Luna recorre una ruta geodésica en torno a la Tierra, y los planetas y los cometas que nos visitan de fuera recorren rutas geodésicas en torno al Sol.

Las ecuaciones de campo de la Relatividad General pueden ser modificadas con la introducción de un término constante, una **constante cosmológica** Λ , con la cual dichas ecuaciones escritas en notación de componentes resultan ser:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} R + g_{\mu\nu} \Lambda = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Si queremos ahora obtener la ecuación correspondiente para el vacío, llegamos a:

$$R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu}$$

Esto nos dice que si la constante cosmológica no es igual a cero entonces, incluso en ausencia de materia, el espacio-tiempo tendría aun así una curvatura intrínseca, que podría equilibrar la curvatura ocasionada por la masa-energía. De ahí que Einstein introdujera este concepto para poder tener soluciones estáticas. La constante cosmológica, que Einstein consideró su mayor error científico, es otra manera de pensar en la energía oscura, así que al final, ¡Einstein también tenía razón en este tema!

EL BIG-BANG Y LA MODERNA VISIÓN DEL UNIVERSO

Hoy en día, parece bien establecido que el universo se formó en una singularidad del espacio-tiempo, tal y como muestran las ecuaciones de Einstein. Esta singularidad inicial es lo que se conoce como el Big Bang o teoría de la gran explosión. Los datos actuales sugieren que ese inicio fue hace unos 13.750 millones de años, y esa sería la edad de nuestro mundo.

De acuerdo con esta teoría, el universo fue, en su momento inicial, muy caliente y denso y se expandió rápidamente, con el consecuente enfriamiento. Lo que medimos hoy es una expansión continuada, reflejada en el desplazamiento hacia el rojo de los espectros de luz que nos llega de las galaxias.

Tras el estallido inicial se fueron formando las partículas subatómicas (electrones, protones, neutrones), los primeros núcleos atómicos, los primeros elementos. Posteriormente, todo esto se combinó para formar las estrellas y las galaxias, y es en las estrellas donde se formaron los elementos más pesados.

La teoría del Big Bang está fundada sobre la teoría de la relatividad general de Albert Einstein, suponiendo unas

ciertas condiciones de homogeneidad e isotropía en el universo. Las ecuaciones de Einstein implicaban soluciones dinámicas, así que el universo tenía que estar expandiéndose o contrayéndose. La aplicación de la relatividad a la cosmología fue desarrollada por el físico-matemático ruso Alexander Friedman, que encontró soluciones convenientes a las ecuaciones de Einstein: sus modelos de universo de curvatura constante positiva, negativa o nula. Ahora son los llamados modelos de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker.

Entre 1927 y 1930, el sacerdote belga Georges Lemaître obtuvo independientemente las ecuaciones y propuso que el universo se inició con la explosión de un átomo primigenio, lo que más tarde se denominó Big Bang. Por su parte, en 1929, Edwin Hubble realizó observaciones que sirvieron de fundamento para comprobar la teoría de Lemaître, y descubrió –observando el desplazamiento al rojo de los espectros– que las galaxias se alejan unas de otras a velocidades directamente proporcionales a su distancia (la ley de Hubble).

Un modelo alternativo era el de Fred Hoyle, según el cual se genera nueva materia mientras las galaxias se alejan entre sí. En este modelo (el del universo estacionario), el universo es básicamente el mismo en un momento dado en el tiempo. Sin embargo, este modelo fue abandonado, y prevaleció la teoría del Big Bang. Irónicamente, este nombre se le debe precisamente al propio Hoyle, que además de cosmólogo fue un notable autor de novelas de ciencia-ficción.

Hubo también teorías que contemplan un universo oscilante (debidas a Richard Tolman) pero Stephen Hawking y otros demostraron que esta idea no era factible, y que la singularidad es un componente esencial de la gravedad de Einstein. Así que finalmente la teoría de una singularidad inicial y una edad finita para el universo es la que todos los cosmólogos han aceptado como buena.

Un avance significativo en los aspectos observacionales ha sido el descubrimiento de la radiación de fondo de **microondas** (en inglés, Cosmic Microwave Background o CMB), llamada también radiación de fondo cósmica, predicha por la teoría. Según Einstein, mientras el universo se enfriaba debido a la expansión, su temperatura habría caído por debajo de 3.000 °K. Por encima de esta temperatura, los electrones y protones

están separados, haciendo el universo opaco a la luz. Por debajo de los 3.000 °K se forman los átomos, permitiendo el paso de la luz a través del gas del universo. Esto es lo que se conoce como disociación de fotones. La radiación en este momento habría tenido el espectro del cuerpo negro y habría viajado libremente durante el resto de vida del universo, sufriendo un corrimiento hacia el rojo como consecuencia de la expansión de Hubble. Esto hace variar el espectro del cuerpo negro de 3.345 °K a un espectro del cuerpo negro con una temperatura mucho menor. La radiación, vista desde cualquier punto del universo, parecerá provenir de todas las direcciones en el espacio.

En 1965 Arno Penzias y Robert Wilson descubrieron la radiación cósmica de fondo, lo que proporcionó una confirmación sustancial de las predicciones generales respecto al CMB –la radiación resultó ser isotropa y constante, con un espectro del cuerpo negro de cerca de 3 K– e inclinó la balanza hacia la hipótesis del Big Bang. Penzias y Wilson recibieron el premio Nobel este gran hallazgo.

La NASA lanzó en 1989 el COBE (Cosmic Background Explorer), que confirmó los datos acerca de la radiación de fondo de microondas. En 2003, los resultados de la sonda Wilkinson de Anisotropías del fondo de Microondas (en inglés Wilkinson Microwave Anisotropy Probe o WMAP) confirmó una vez más los datos.

La imagen de la radiación de fondo de microondas que incluimos a continuación podría considerarse como una auténtica fotografía del universo:

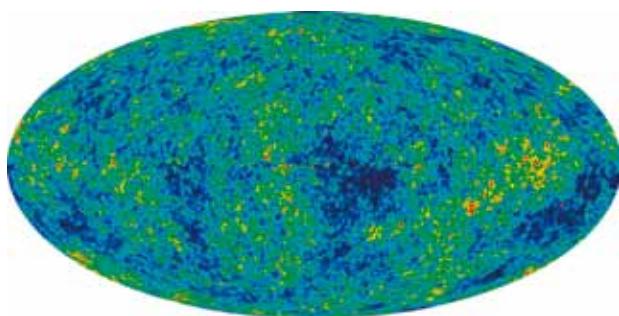


figura 8. Radiación de fondo de microondas. Fuente: http://lambda.gsfc.nasa.gov/product/cobe/dmr_image.cfm

CONCLUSIÓN

Como conclusión de todas las matemáticas que hemos visto hasta ahora, ¿podíamos ya decidir cuál es la forma del universo? La geometría nos dice que hay tres posibles geometrías. En efecto, si suponemos que el universo es isótropo, la curvatura sería constante. Por lo tanto:

- Si la geometría es elíptica o esférica, entonces la curvatura sería positiva. De manera que el universo continuará expandiéndose hasta un momento en el que comenzará a contraerse (el llamado Big Crunch) hasta llegar de nuevo a una singularidad.
- Si el universo es plano, es decir, euclíadiano, con curvatura cero, la expansión irá disminuyendo poco a poco, pero no cesará, y la expansión actual se irá acelerando.
- Si el universo es hiperbólico, la expansión actual proseguirá pero aumentando la velocidad conforme vaya pasando el tiempo.

El primer modelo corresponde a lo que los matemáticos llaman un espacio compacto, mientras que los otros dos serían no compactos (abiertos, en la terminología que gusta a los cosmólogos).

¿De qué depende la curvatura? Ya hemos dicho que es la masa la que curva el espacio, en particular, la densidad de materia. Hay un valor crítico para la densidad para el cual la curvatura es cero, pero si es menor que el valor crítico, la curvatura será negativa, y si es mayor, positiva.

Los datos que se han recogido en los últimos años indican una contradicción; por una parte el universo sería plano, pero la expansión se está acelerando. Eso ha llevado a la hipótesis de la existencia de materia de naturaleza desconocida, que los físicos teóricos y los cosmólogos han dado en llamar oscura.

Otro elemento que ha entrado en juego es la llamada energía oscura, de la que puede depender que el universo se siga expandiendo hasta que se produzca el llamado Big Rip (el Gran Desgarro).

El debate está servido, y la geometría (y las matemáticas en general) tendrán mucho que decir (como siempre) en el mismo. Nos esperan, sin duda, tiempos apasionantes.

EJERCICIOS

TRANSPORTE PARALELO

En una pelota de baloncesto dibuja un paralelo con un rotulador. Construye con una cartulina un cono sobre ese paralelo, de manera que es tangente a la superficie de la pelota. Coloca un lápiz en uno de los puntos del paralelo, de tal modo que sea tangente a ambas superficies, la esférica y la cónica. Sin mover el lápiz (por ejemplo, fijándolo con cinta de celofán) abre el cono por una generatriz y despliega sobre el plano de una mesa. Sobre este plano haz el transporte euclídeo del lápiz y de nuevo reconstruye el cono; el lápiz sería ahora el transportado paralelo del dado.

Comprueba que, si hicieramos esta operación con el ecuador de la pelota, el lápiz volvería a su posición inicial.

Triángulos geodésicos

Sobre una pelota de baloncesto dibuja un triángulo geodésico (es decir, sus lados son círculos máximos). Mide sus ángulos y súmalos. ¿Dará 180° o no? ¿Por qué?

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Casas, A. (2009): *El LHC y la frontera de la física*. Madrid: CSIC/La Catarata, col. ¿Qué sabemos de?, nº 1.

Casas, A. (2010): *El lado oscuro del universo*. Madrid: CSIC/La Catarata, col. ¿Qué sabemos de?, nº 13.

En estos dos libros del físico teórico Alberto Casas se da una amena descripción del modelo estándar, del paradigma de la física, y de la búsqueda de la última —hasta el momento— pieza que falta para encasar el puzzle. En el primero de los libros se hace hincapié en la relevancia de LHC para la investigación fronteriza en el tema, y en el

segundo, se analiza el gran enigma de la materia y la energía oscuras.

De León, M., J. C. Marrero, Martín de Diego, D. (2009): *Las matemáticas del sistema solar*. Madrid: CSIC/La Catarata, col. ¿Qué sabemos de?, nº 3.

En este libro los autores dan una visión histórica de las matemáticas que están detrás de las descripciones del sistema solar, desde la remota antigüedad hasta nuestros días.

De León, M. (2012): *La geometría del universo*. Madrid: CSIC/La Catarata, col. ¿Qué sabemos de?, nº 38.

El autor toma como hilo conductor el postulado de la paralela de Euclides para mostrar cómo aparecen las geometrías no euclídeas y cómo éstas son la clave para una descripción de nuestro universo.

Hawking, S. (2012): *El universo en una cáscara de nuez*. Barcelona: Crítica.

Hawking analiza el origen y la estructura del universo, a la luz de los recientes descubrimientos científicos. La obra contiene ilustraciones espectaculares que la hacen muy amena.

Randall, L. (2011): *Universos ocultos*. Barcelona: Acantilado.

Lisa Randall traza un panorama de la física teórica moderna y de la estructura de nuestro universo.

Rey Pastor, J. y Babini, J. (2000): *Historia de la matemática*, vol. 1 y 2. Barcelona: Gedisa.

Esta obra es un clásico en español sobre la historia de las matemáticas desde los tiempos antiguos (Babilonia, India, Egipto, Grecia) hasta nuestros días.

Sánchez Ron, J. M. (2004): "Einstein, la relatividad y las matemáticas". *La Gaceta de la RSME*, vol. 7, nº 1, pp. 153-184.

Excelente artículo en el que el autor describe las matemáticas que están detrás de la teoría de la relatividad.

Contiene interesantes referencias históricas de la ciencia de la época.

MATERIALES AUXILIARES

SERIES

Star Trek (Gene Roddenberry, 1966). Esta mítica serie se transmitió desde el ocho de septiembre de 1966 hasta el 2 de septiembre de 1969. Ambientada en el siglo XXIII, la serie original sigue las aventuras de la nave estelar *USS Enterprise* (NCC-1701) y su tripulación, liderada por el capitán James T. Kirk, su primer oficial el Sr. Spock, y el oficial médico en jefe Leonard McCoy, entre otros personajes. La serie ha tenido varias secuelas, dando incluso lugar al rodaje de varias películas, convirtiéndose en una serie de culto en todo el mundo.

Doctor Who. Serie de televisión británica de ciencia ficción producida por la BBC, que tuvo una secuela en forma de película producida por Universal Studios bajo licencia de la compañía británica en 1996. El programa muestra las aventuras de un misterioso extraterrestre y viajero en el tiempo, conocido como *El Doctor*, que explora el tiempo y el espacio en su nave *TARDIS* con sus compañeros, arreglando problemas y corrigiendo errores. Disponible en <http://www.bbc.co.uk/programmes/b006q2x0>.

DOCUMENTAL

Cosmos: un viaje personal (Carl Sagan, 1980). Serie documental de divulgación científica escrita por Carl Sagan, Ann Druyan y Steven Soter cuyos objetivos fundamentales fueron difundir la historia de la astronomía, de la ciencia y del origen de la vida. A la vez, proporciona una reflexión sobre el lugar que ocupan nuestra especie y nuestro planeta en el universo e informa sobre las modernas visiones de la cosmología y las últimas noticias de la exploración espacial, en particular las misiones *Voyager*. El programa de televisión constó de trece episodios, cada uno de aproximadamente una hora de duración, protagonizados por Carl Sagan. Posteriormente se publicó un libro con el mismo título que recogía lo expuesto en la serie.

III. JUSTIFICACIÓN DE LA ESTRUCTURA DE LA OBRA

Capítulo 1.1 El posicionamiento sobre la Tierra

Christiane Rousseau

Objetivos	Contenidos	Criterios de evaluación
Asignatura: Ciencias para el Mundo Contemporáneo		
O ₁ , O ₂ , O ₃ , O ₄ , O ₅ , O ₆ , O ₇ , O ₈	C ₁ y C ₆	E ₁ , E ₂ , E ₄ y E ₁₀
Asignatura: Biología y Geología (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
O ₂ , O ₃ y O ₉	C ₂ y C ₃	E ₁ y E ₃
Asignaturas: Matemáticas I y II (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
Objetivos comunes: O ₁ , O ₂ , O ₃ , O ₄ , O ₅ , O ₆ , O ₇ , O ₈		
Asignatura: Matemáticas I (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
	C ₁ y C ₂	E ₁ , E ₂ y E ₃
Asignatura: Matemáticas II (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
	C ₂	E ₂ y E ₃
Asignatura: Geografía (Modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales)		
O ₁ y O ₂	C ₁	E ₁
Asignaturas: Matemáticas I y II (Modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales)		
Objetivos comunes: O ₁ , O ₂ , O ₃ , O ₄ , O ₅ , O ₆ , O ₇ , O ₈		
Asignatura: Matemáticas I (Modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales)		
	C ₁	E ₁ , E ₂ y E ₅

Balance de frecuencias. Capítulo 1.1

Asignaturas	Objetivos	Contenidos	Criterios de evaluación
7	29	9	15

Capítulo 1.2: Tierra, el planeta "sólido"

Rafael Orive Illera

Objetivos	Contenidos	Criterios de evaluación
Asignatura: Ciencias para el Mundo Contemporáneo		
O _{1'} , O _{2'} , O _{3'} , O _{4'} , O _{5'} , O _{6'} , O ₇ y O ₈	C ₁ y C ₄	E _{1'} , E _{2'} , E _{3'} , E ₅ y E ₆
Asignatura: Biología y Geología (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
O _{1'} , O _{2'} , O _{3'} , O ₇ , O ₈ y O ₉	C _{1'} , C ₂ y C ₃	E _{1'} , E _{2'} , E _{3'} , E ₄ y E ₅
Asignatura: Ciencias de la Tierra y Medioambientales (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
O _{1'} , O _{2'} , O _{3'} , O _{4'} , O ₅ y O ₆	C ₃	E ₅
Asignatura: Física (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
O ₂ , O ₄ y O ₇	C ₃	E ₁ y E ₃
Asignatura: Física y Química (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
O _{1'} , O _{2'} , O ₄ y O ₇	C ₃ y C ₄	E _{1'} , E _{2'} , E ₃ y E ₄
Asignaturas: Matemáticas I y II (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
Objetivos comunes: O _{1'} , O _{2'} , O _{3'} , O _{4'} , O _{5'} , O _{6'} , O ₇ y O ₈	C _{1'} , C ₃ y C ₄	E _{1'} , E _{4'} , E _{5'} , E ₆ y E ₇
Asignatura: Matemáticas I (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
O ₂	C ₅	E _{3'} , E _{4'} , E ₅ y E ₇
Asignatura: Matemáticas II (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
O ₁	C ₃	E ₁ , E ₂ , E ₃ y E ₄
Asignatura: Tecnología Industrial I (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
O ₂	C ₅	E ₁ , E ₂ , E ₃ y E ₄
Asignatura: Geografía (Modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales)		
O ₂ y O ₃	C ₃	E ₁ y E ₃
Asignaturas: Matemáticas I y II (Modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales)		
Objetivos comunes: O _{1'} , O _{2'} , O _{3'} , O _{4'} , O _{5'} , O _{6'} , O ₇ y O ₈	C ₁ y C ₃	E _{1'} , E _{2'} , E _{6'} , E ₇ y E ₈
Asignatura: Matemáticas I (Modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales)		
O ₁	C ₃	E _{1'} , E _{2'} , E _{6'} , E ₇ y E ₈
Asignatura: Matemáticas II (Modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales)		
O ₂ y C ₃	C ₂ y C ₃	E _{3'} , E _{4'} , E _{5'} , E _{6'} , E ₇ y E ₈

Balance de frecuencias. Capítulo 1.2

Asignaturas	Objetivos	Contenidos	Criterios de evaluación
11	46	19	29

Capítulo 1.3 La Tierra: un planeta con mares y atmósfera

Antonio Córdoba y Diego Córdoba

Objetivos	Contenidos	Criterios de evaluación
Asignatura: Ciencias para el Mundo Contemporáneo		
O _{1'} , O _{2'} , O _{3'} , O _{4'} , O _{5'} , O _{6'} , O _{7'} , O _{8'}	C ₁	E _{1'} , E _{2'} , E _{4'} , E _{5'}
Asignatura: Ciencias de la Tierra y Medioambientales		
O _{1'} , O _{3'} , O _{4'} , O _{5'}	C _{2'}	E _{3'}
Asignaturas: Matemáticas I y II (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
Objetivos comunes: O _{1'} , O _{2'} , O _{3'} , O _{4'} , O _{5'} , O _{6'} , O _{7'} , O _{8'}	C _{1'} , C _{2'} , C _{3'}	E _{1'} , E _{2'} , E _{3'} , E _{4'}
Asignatura: Matemáticas I (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
C _{1'} , C _{2'} , C _{3'}		
Asignatura: Matemáticas II (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
C _{1'} , C _{2'} , C _{3'}		

Balance de frecuencias. Capítulo 1.3

Asignaturas	Objetivos	Contenidos	Criterios de evaluación
4	20	8	16

1. Este capítulo es especialmente adecuado para el segundo contenido de esta asignatura titulado "Los sistemas fluidos externos y su dinámica", que incluye dos apartados, uno dedicado a la atmósfera y el segundo a la hidrosfera.

Capítulo 2.1 Modelos matemáticos de las epidemias

Juan José Nieto Roig

Objetivos	Contenidos	Criterios de evaluación
Asignatura: Ciencias para el Mundo Contemporáneo		
O ₁ , O ₂ , O ₃ , O ₄ , O ₅ , O ₆ , O ₇ , O ₈	C ₁ y C ₃	E ₁ , E ₃ , E ₄ y E ₇
Asignatura: Biología (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
O ₁ , O ₄ y O ₈	C ₄ y C ₅	E ₂ , E ₈ y E ₉
Asignatura: Química (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
O ₆ y O ₇	C ₈	
Asignaturas: Matemáticas I y II (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
Objetivos comunes: O ₁ , O ₂ , O ₃ , O ₄ , O ₅ , O ₆ , O ₇ , O ₈		
Asignatura: Matemáticas I (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
	C _i	E _i
Asignaturas: Matemáticas I y II (Modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales)		
Objetivos comunes: O ₁ , O ₂ , O ₃ , O ₄ , O ₅ , O ₆ , O ₇ , O ₈		
Asignatura: Matemáticas I (Modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales)		
	C ₃ y C ₄	E ₂ , E ₆ y E ₈
Asignatura: Matemáticas II (Modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales)		
	C ₃	E ₂ , E ₃ , E ₄ y E ₈

Balance de frecuencias. Capítulo 2.1

Asignaturas	Objetivos	Contenidos	Criterios de evaluación
7	29	9	15

Capítulo 2.2 Las matemáticas de la evolución y la biodiversidad

Marta Casanellas

Objetivos	Contenidos	Criterios de evaluación
Asignatura: Ciencias para el Mundo Contemporáneo		
O ₁ , O ₂ , O ₃ , O ₄ , O ₅ , O ₆ , O ₇ , O ₈	C ₁ y C ₂	E ₁ , E ₄ y E ₈
Asignatura: Biología (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
O ₂ , O ₃ y O ₄	C ₃	E ₁ , E ₂ , E ₇ y E ₈
Asignatura: Biología y Geología (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
O ₅ , O ₆ y O ₈	C ₄	E ₁ y E ₈
Asignatura: Ciencias de la Tierra y Medioambientales (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
O ₅ y O ₇	C ₁	E ₆ y E ₇
Asignaturas: Matemáticas I y II (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
Objetivos comunes: O ₁ , O ₂ , O ₃ , O ₄ , O ₅ , O ₆ , O ₇ , O ₈	C ₁ y C ₄	E ₄ y E ₆
Asignatura: Matemáticas I (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
O ₆	C ₁	E ₁
Asignatura: Matemáticas II (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
O ₆	C ₃ y C ₄	E ₁ , E ₃ y E ₄
Asignatura: Geografía (Modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales)		
O ₆	C ₃ y C ₄	E ₁
Asignaturas: Matemáticas I y II (Modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales)		
Objetivos comunes: O ₁ , O ₂ , O ₃ , O ₄ , O ₅ , O ₆ , O ₇ , O ₈	C ₁ y C ₃	E ₁ , E ₂ y E ₈
Asignatura: Matemáticas I (Modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales)		
O ₆	C ₃	E ₂ , E ₅ y E ₈
Asignatura: Matemáticas II (Modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales)		
O ₆	C ₃ y C ₄	E ₁ , E ₂ y E ₈

Balance de frecuencias. Capítulo 2.2

Asignaturas	Objetivos	Contenidos	Criterios de evaluación
9	33	13	23

Capítulo 2.3 Las matemáticas nos ayudan a crecer

David Martín de Diego

Objetivos	Contenidos	Criterios de evaluación
Asignatura: Ciencias para el Mundo Contemporáneo		
O ₃ , O ₅ y O ₇	C ₁ y C ₃	E ₁ y E ₃
Asignatura: Biología (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
O ₇	C ₃	E ₇
Asignatura: Biología y Geología (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
O ₄	C ₅ y C ₆	E ₈ y E ₉
Asignaturas: Matemáticas I y II (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
Objetivos comunes: O ₁ , O ₂ , O ₃ , O ₄ , O ₅ , O ₆ , O ₇ , O ₈		
Asignatura: Matemáticas I (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
	C ₁	E ₁ , E ₂ y E ₇
Asignaturas: Matemáticas I y II (Modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales)		
Objetivos comunes: O ₁		
Asignaturas: Matemáticas I (Modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales)		
	C ₂	E ₁ y E ₅
Asignatura: Matemáticas Educación Secundaria Obligatoria Primer Curso		
	Bloque Números: C ₁	
Asignatura: Matemáticas Educación Secundaria Obligatoria Segundo Curso		
	Bloque Números: C ₅ y C ₆ , Bloque Geometría: C ₃	
Asignatura: Matemáticas Educación Secundaria Obligatoria Tercer Curso		
	Bloque Álgebra: C ₁ , C ₂ y C ₃ , Bloque Geometría: C ₂	
Asignatura: Matemáticas Educación Secundaria Obligatoria Cuarto Curso, Op. B		
	Bloque Números: C ₁	

Balance de frecuencias. Capítulo 2.3

Asignaturas	Objetivos	Contenidos	Criterios de evaluación
11	14	14	10

Dada la singularidad de los contenidos de este capítulo se ha considerado también el currículo de la educación secundaria obligatoria.

Capítulo 2.4 Matemáticas para el estudio y tratamiento de las enfermedades

Marco Antonio Fontelos López

Objetivos	Contenidos	Criterios de evaluación
Asignatura: Ciencias para el Mundo Contemporáneo		
O _{1'} , O _{2'} , O _{3'} , O _{4'} , O _{5'} , O _{6'} , O _{7'} , O _{8'}	C ₁ y C ₃	E _{1'} , E _{2'} , E _{3'} , E ₄ y E ₇
Asignatura: Biología (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
O _{1'} , O _{2'} , O _{3'} , O _{4'} , O _{5'} , O _{6'} , O _{7'} , O _{8'}	C _{1'} , C _{2'} , C ₄ y C ₅	E _{2'} , E _{5'} , E _{6'} , E ₈ y E ₉
Asignatura: Ciencias de la Tierra y Medioambientales (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
O ₅	C ₄	E ₇
Asignaturas: Matemáticas I y II (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
Objetivos comunes: O _{1'} , O _{2'} , O _{3'} , O _{4'} , O _{5'} , O _{6'} , O _{7'} , O _{8'}	C ₁ y C ₃	E _{1'} , E ₄ y E ₅
Asignatura: Matemáticas II (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
Objetivos comunes: O _{1'} , O _{2'} , O _{3'} , O _{4'} , O _{5'} , O _{6'} , O _{7'} , O _{8'}	C ₁ y C ₃	E _{1'} , E ₃ y E ₄
Asignaturas: Matemáticas I y II (Modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales)		
Objetivos comunes: O _{1'} , O _{2'} , O _{3'} , O _{4'} , O _{5'} , O _{6'} , O _{7'} , O _{8'}	C ₁ y C ₂	E _{1'} , E ₂ y E ₅
Asignatura: Matemáticas I (Modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales)		
Objetivos comunes: O _{1'} , O _{2'} , O _{3'} , O _{4'} , O _{5'} , O _{6'} , O _{7'} , O _{8'}	C ₁ y C ₂	E _{1'} , E ₂ y E ₅
Asignatura: Matemáticas II (Modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales)		
Objetivos comunes: O _{1'} , O _{2'} , O _{3'} , O _{4'} , O _{5'} , O _{6'} , O _{7'} , O _{8'}	C ₁ y C ₂	E _{1'} , E ₂ , E ₃ , y E ₄

Balance de frecuencias. Capítulo 2.4

Asignaturas	Objetivos	Contenidos	Criterios de evaluación
8	33	15	24

Capítulo 2.5 El genoma humano

Enrique Macías Virgós y Antonio Gómez Tato

Objetivos	Contenidos	Criterios de evaluación
Asignatura: Ciencias para el Mundo Contemporáneo		
O ₁ , O ₂ , O ₃ , O ₄ , O ₅ , O ₆ , O ₇ y O ₈	C ₁ y C ₂	E ₁ , E ₂ , E ₄ , E ₈ y E ₉
Asignatura: Biología (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
O ₁ , O ₂ , O ₃ , O ₄ , O ₅ , O ₆ , y O ₇	C ₁ y C ₃	E ₁ , E ₂ y E ₇
Asignaturas: Matemáticas I y II (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
Objetivos comunes: O ₁ , O ₂ , O ₃ , O ₄ , O ₅ , O ₆ , O ₇ y O ₈	C ₁ , C ₂ y C ₄	E ₁ , E ₂ , E ₃ , E ₆ y E ₇
Asignatura: Matemáticas II (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
	C ₁ y C ₂	E ₁ , E ₂ y E ₃
Asignaturas: Matemáticas I y II (Modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales)		
Objetivos comunes: O ₁ , O ₂ , O ₄ , O ₅ , O ₆ , O ₇ y O ₈	C ₃	E ₂ , E ₆ , E ₇ y E ₈
Asignatura: Matemáticas I (Modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales)		
	C ₁ y C ₃	E ₁ , E ₂ , E ₃ , E ₅ , E ₆ , E ₇ y E ₈
Asignatura: Matemáticas II (Modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales)		

Balance de frecuencias. Capítulo 2.5

Asignaturas	Objetivos	Contenidos	Criterios de evaluación
6	30	12	27

Capítulo 3.1 Meteorología y clima

Ana María Mancho

Objetivos	Contenidos	Criterios de evaluación
Asignatura: Ciencias para el Mundo Contemporáneo		
O _{1'} , O _{2'} , O _{3'} , O _{4'} , O _{5'} , O _{6'} , O _{7'} , O _{8'}	C _{1'} , C _{2'} , C _{4'} , C _{6'}	E _{1'} , E _{2'} , E _{3'} , E _{4'} , E _{5'} , E _{6'}
Asignatura: Biología y Geología (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
O _{1'} , O _{7'}	C _{3'}	E _{5'}
Asignatura: Ciencias de la Tierra y Medioambientales (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
O _{1'} , O _{2'} , O _{3'} , O _{4'} , O _{5'} , O _{6'} , O _{7'}	C _{1'} , C _{2'} , C _{6'}	E _{1'} , E _{2'} , E _{3'} , E _{4'} , E _{5'}
Asignaturas: Matemáticas I y II (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
Objetivos comunes: O _{1'} , O _{2'} , O _{3'} , O _{4'} , O _{5'} , O _{6'}		
Asignatura: Matemáticas I (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
	C _{1'} , C _{2'} , C _{3'} , C _{4'}	E _{1'} , E _{3'} , E _{5'} , E _{6'} , E _{7'}
Asignatura: Matemáticas II (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
	C _{1'} , C _{2'} , C _{3'}	E _{1'} , E _{2'} , E _{3'} , E _{5'} , E _{7'}
Asignatura: Geografía (Modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales)		
O _{6'}	C _{3'}	E _{5'}
Asignaturas: Matemáticas I y II (Modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales)		
Objetivos comunes: O _{2'} , O _{4'} , O _{5'} , O _{6'} , O _{7'} , O _{8'}		
Asignatura: Matemáticas I (Modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales)		
	C _{1'} , C _{2'} , C _{3'}	E _{1'} , E _{2'} , E _{5'}
Asignatura: Matemáticas II (Modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales)		
	C _{2'} , C _{3'}	E _{4'} , E _{6'}

Balance de frecuencias. Capítulo 3.1

Asignaturas	Objetivos	Contenidos	Criterios de evaluación
8	22	21	28

Capítulo 3.2 Matemáticas y economía

Carlos Vázquez Cendón

Objetivos	Contenidos	Criterios de evaluación
Asignatura: Ciencias para el Mundo Contemporáneo		
O _{1'} , O _{2'} , O _{3'} , O _{4'} , O _{5'} , O _{6'} , O _{7'} , O _{8'}	C ₁ , C ₄ y C ₅	E _{1'} , E _{2'} , E _{4'} , E ₅ y E ₆
Asignatura: Ciencias de la Tierra y Medioambientales (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
O _{1'} , O _{3'} , O _{5'} y O _{7'}	C ₁ , C ₃ y C ₄	E _{1'} , E ₂ y E ₆
Asignaturas: Matemáticas I y II (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
Objetivos comunes: O ₁ y O ₂		
Asignatura: Matemáticas I (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
	C ₃ y C ₄	E ₁
Asignatura: Tecnología Industrial I (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
O _{2'} , O _{3'} , O ₄ y O ₅	C ₁ , C ₃ , C ₄ y C ₅	E _{3'} , E ₄ y E ₅
Asignatura: Economía (Modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales)		
O _{1'} , O _{2'} , O _{3'} , O _{4'} , O _{5'} , O _{6'} , O _{7'} , O ₈ y O ₉	C ₁ , C ₂ , C ₃ , C ₄ , C ₅ , C ₆ , C ₇ y C ₈	E _{1'} , E ₂ , E _{3'} , E _{4'} , E _{5'} , E ₆ , E ₇ , E ₈ y E ₉
Asignatura: Geografía (Modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales)		
O _{4'} , O ₅ y O ₆	C ₁ , C ₃ , C ₄ y C ₅	E _{3'} , E ₄ y E ₅
Asignaturas: Matemáticas I y II (Modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales)		
Objetivos comunes: O ₁ , O ₂ , O ₃ , O ₄ , O ₅ , O ₆ , O ₇ y O ₈		
Asignatura: Matemáticas I (Modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales)		
	C ₁ , C ₂ y C ₃	E _{3'} , E _{4'} , E _{5'} , E ₆ y E ₈
Asignatura: Matemáticas II (Modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales)		
	C ₁ y C ₃	E _{5'} , E ₆ , E ₇ y E ₈

Balance de frecuencias. Capítulo 3.2

Asignaturas	Objetivos	Contenidos	Criterios de evaluación
9	40	29	33

Capítulo 3.3 Catástrofes inducidas por el hombre

Carlos Parés, Mª Luz Muñoz Ruiz y José Manuel González Vida

Objetivos	Contenidos	Criterios de evaluación
Asignatura: Ciencias para el Mundo Contemporáneo		
O _{1'} , O _{2'} , O _{3'} , O _{4'} , O _{5'} , O _{6'} , O _{7'} , O _{8'}	C ₁ y C ₄	E _{1'} , E _{2'} , E _{4'} , E ₅ y E ₆
Asignatura: Ciencias de la Tierra y Medioambientales (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
O _{1'} , O _{3'} , O _{4'} , O _{5'} , O ₆ y O ₇	C _{1'} , C _{2'} , C _{4'} , C ₅ y C ₆	E _{1'} , E _{2'} , E _{6'} , E _{7'} , E ₈ y E ₉
Asignaturas: Matemáticas I y II (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
Objetivos comunes: O _{1'} , O _{2'} , O _{3'} , O _{4'} , O _{5'} , O _{6'} , O _{7'} , O _{8'}	C ₁ y C ₂	E _{1'} , E ₃ , E ₅ y E ₇
Asignatura: Matemáticas I (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
O ₂ y O ₈	C ₁ y C ₈	E ₁ y E ₈
Asignatura: Matemáticas II (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
O _{1'} , O ₅ y O ₆	C _{1'} , C ₂ y C ₃	E _{1'} , E ₃ , E ₄ y E ₇
Asignatura: Economía (Modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales)		
O ₂ y O ₈	C ₁ y C ₈	E ₁ y E ₈
Asignatura: Geografía (Modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales)		
O _{1'} , O ₅ y O ₆	C ₄	E ₃ y E ₅
Asignaturas: Matemáticas I y II (Modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales)		
Objetivos comunes: O _{1'} , O _{2'} , O _{3'} , O _{4'} , O _{5'} , O _{6'} , O _{7'} , O _{8'}	C ₁ y C ₂	E _{1'} y E ₅
Asignatura: Matemáticas I (Modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales)		
O ₂ y O ₈	C ₁ y C ₂	E ₁ y E ₅
Asignatura: Matemáticas II (Modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales)		
O _{1'} , O ₅ y O ₆	C ₁ y C ₂	E _{1'} , E ₂ y E ₄

Balance de frecuencias. Capítulo 3.3

Asignaturas	Objetivos	Contenidos	Criterios de evaluación
8	36	19	28

Capítulo 3.4 Matemáticas y redes

Juan José Rué y Ana Zumalacárregui

Objetivos	Contenidos	Criterios de evaluación
Asignatura: Ciencias para el Mundo Contemporáneo		
O ₁ , O ₂ , O ₃ , O ₄ , O ₅ , O ₆ , O ₇ , O ₈	C ₁ , C ₆	E ₁ , E ₄ y E ₁₀
Asignatura: Física		
O ₄ y O ₅	C ₁	
Asignaturas: Matemáticas I y II (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
Objetivos comunes: O ₁ , O ₂ , O ₃ , O ₄ , O ₅ , O ₆ , O ₇ , O ₈		
Asignatura: Matemáticas I (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
	C ₁ : Aritmética y Álgebra	
Asignatura: Matemáticas II (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
	C ₁ : Álgebra Lineal	E ₁ , E ₃ y E ₇
Asignatura: Tecnología Industrial II (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
O ₃	C ₄ y C ₅	E ₅ , E ₆ y E ₇
Asignatura: Economía (Modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales)		
O ₇	C ₂	
Asignatura: Geografía (Modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales)		
O ₁ y O ₂	C ₁ , C ₄ y C ₅	
Asignaturas: Matemática I y II (Modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales)		
Objetivos comunes: O ₁ , O ₂ , O ₃ , O ₄ , O ₅ , O ₆ , O ₇ , O ₈		
Asignatura: Matemáticas II (Modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales)		
	C ₁ : Álgebra	E ₁ , E ₂ y E ₅

Balance de frecuencias. Capítulo 3.4

Asignaturas	Objetivos	Contenidos	Criterios de evaluación
8	29	11	12

Capítulo 3.5 Las matemáticas que hacen segura la red

Vanesa Daza

Objetivos	Contenidos	Criterios de evaluación
Asignatura: Ciencias para el Mundo Contemporáneo		
O _{1'} , O _{2'} , O _{3'} , O _{4'} , O _{5'} , O _{6'} , O _{7'} , O _{8'}	C ₆	E ₂ y E ₁₀
Asignaturas: Matemáticas I y II (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
Objetivos comunes: O _{1'} , O _{2'} , O _{3'} , O _{4'} , O _{5'} , O _{6'} , O _{7'} , O _{8'}		
Asignatura: Matemáticas I (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
	C ₁	E ₁
Asignatura: Matemáticas II (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
	C ₁	E ₃
Asignaturas: Matemáticas I y II (Modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales)		
Objetivos comunes: O _{1'} , O _{2'} , O _{5'} , O _{6'} , O _{7'} , O _{8'}		
Asignatura: Matemáticas I (Modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales)		
	C ₁	E ₁ y E ₂

Balance de frecuencias. Capítulo 3.5			
Asignaturas	Objetivos	Contenidos	Criterios de evaluación
5	24	4	6

Capítulo 3.6 Energía

Rafael Montenegro

Objetivos	Contenidos	Criterios de evaluación
Asignatura: Ciencias para el Mundo Contemporáneo		
O _{1'} , O _{2'} , O _{3'} , O _{4'} , O _{5'} , O _{6'} , O _{7'} , O ₈	C _{1'} , C ₄ y C ₆	E _{1'} , E _{2'} , E _{4'} , E ₅ y E ₆
Asignatura: Ciencias de la Tierra y Medioambientales (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
O _{1'} , O _{2'} , O ₃	C _{1'} , C ₂ y C ₆	E _{1'} , E ₂ y E ₃
Asignatura: Física (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
O ₁ y O ₂ ,	C ₁	E ₁
Asignaturas: Matemáticas I y II (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
Objetivos comunes: O _{1'} , O _{2'} , O _{3'} , O _{4'} , O _{5'} , O _{6'} , O _{7'} , O ₈		
Asignatura: Matemáticas I (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
O ₂ y O ₃	C ₁ y C ₂	E ₂ y E ₃
Asignatura: Matemáticas II (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
O _{1'} , O _{2'} , O ₅ y O ₆	C ₁ y C ₂	E _{1'} , E _{2'} , E ₃ y E ₇
Asignatura: Tecnología Industrial I (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
O ₂ y O ₃	C ₁	E ₁
Asignatura: Geografía (Modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales)		
Objetivos comunes: O _{1'} , O _{3'} , O _{4'} , O ₅ y O ₆	C _{1'} , C ₃ y C ₄	E ₄ y E ₅
Asignaturas: Matemáticas I y II (Modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales)		
O _{1'} , O _{2'} , O ₅ y O ₆	C _{1'} , C ₃ y C ₄	E ₄ y E ₅
Asignatura: Matemáticas I (Modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales)		
O ₁ , O ₂ , O ₅ y O ₆	C ₁ y C ₂	E ₂ y E ₅

Balance de frecuencias. Capítulo 3.6

Asignaturas	Objetivos	Contenidos	Criterios de evaluación
9	28	17	20

Capítulo 4.1 Sistema Solar

Tomás L. Gómez

Objetivos	Contenidos	Criterios de evaluación
Asignatura: Ciencias para el Mundo Contemporáneo		
O _{1'} , O _{2'} , O _{3'} , O _{4'} , O _{5'} , O _{6'} , O _{7'} , O ₈	C ₁	E _{1'} , E _{2'} , E ₉ y E ₁₀
Asignatura: Física (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
O _{1'} , O _{2'} , O _{3'} , O ₄ y O ₅	C _{1'} , C ₂ y C ₆	E ₁ y E ₂
Asignatura: Física y Química (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
O _{1'} , O _{2'} , O _{3'} , O _{4'} , O _{5'} , O _{6'} , O _{7'} , O ₈	C _{1'} , C ₂ y C ₃	E _{1'} , E ₂ y E ₃
Asignaturas: Matemáticas I y II (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
Objetivos comunes: O _{1'} , O _{2'} , O _{3'} , O _{4'} , O _{5'} , O _{6'} , O _{7'} , O ₈		
Asignatura: Matemáticas I (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
	C _{1'} , C ₂ y C ₃	E _{2'} , E ₃ y E ₄
Asignatura: Matemáticas II (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
	C ₂	E ₂ y E ₇

Balance de frecuencias. Capítulo 4.1

Asignaturas	Objetivos	Contenidos	Criterios de evaluación
5	29	11	14

Capítulo 4.2 El Planeta Tierra en el Universo

Manuel de León

Objetivos	Contenidos	Criterios de evaluación
Asignatura: Ciencias para el Mundo Contemporáneo		
O ₁ , O ₂ , O ₃ , O ₆ , O ₈	C ₁ , C ₂ , C ₆	E ₁ , E ₄
Asignatura: Física (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
O ₁ , O ₂ , O ₈ , O ₉	C ₁ , C ₂ , C ₆	E ₁ , E ₇ , E ₈ , E ₉
Asignaturas: Matemáticas I y II (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
Objetivos comunes: O ₁ , O ₂ , O ₄ , O ₆ , O ₇		
Asignatura: Matemáticas I (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
	C ₁ , C ₂	E ₁ , E ₂ , E ₃
Asignaturas: Matemáticas II (Modalidad de Ciencias y Tecnología)		
	C ₁ , C ₂	E ₁ , E ₂ , E ₃
Asignaturas: Matemáticas I y II (Modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales)		
Objetivos comunes: O ₅ , O ₇		

Balance de frecuencias. Capítulo 4.2

Asignaturas	Objetivos	Contenidos	Criterios de evaluación
6	16	10	12

IV. GLOSARIO

Aberración de la luz: Diferencia entre la posición observada de una estrella y la posición real, debido a la combinación de la velocidad del observador y la velocidad de la luz. (Cap. 4.1)

ADN: Molécula que contiene codificadas las instrucciones genéticas utilizadas en el desarrollo y funcionamiento de un organismo vivo. (Cap. 2.5)

Aerofrenado: Técnica por la que se frena una nave espacial usando la fricción con la atmósfera. (Cap. 4.1)

Análisis matemático: Parte de las matemáticas que estudia las funciones, incluyendo las derivadas, integrales y su relación. Esta área de las matemáticas proporciona herramientas útiles para estudiar si una ecuación diferencial constituye un problema bien planteado. (Cap. 3.3)

Análisis numérico: Parte de las matemáticas que estudia el diseño de métodos numéricos adecuados para hallar soluciones aproximadas de problemas matemáticos. Esta área de las matemáticas proporciona herramientas útiles para *discretizar* las ecuaciones diferenciales de un modelo matemático. (Cap. 3.3)

Anemómetro: Aparato utilizado para medir la velocidad del viento en un punto. Proporciona el valor de su módulo y dirección en un instante, o el valor medio en un periodo de tiempo. (Cap. 3.6)

Angiogénesis: Proceso consistente en la formación de vasos sanguíneos nuevos a partir de los vasos preexistentes. (Cap. 2.4)

Ángulo áureo: Ángulo α de una circunferencia de tal modo que el cociente de la longitud de arco del ángulo $360^\circ - \alpha$ y la longitud de arco del ángulo α es precisamente el número de oro. Su valor es aproximadamente $137,5^\circ$. (Cap. 2.3)

Antropogénico: Referido a efectos o procesos que son consecuencia de actividades humanas, en contraposición con aquellos que lo son de causas naturales sin influencia del hombre. Por ejemplo, en lo que se refiere

al clima de la Tierra, son efectos antropogénicos los debidos a procesos como la deforestación o la emisión de gases de efecto invernadero. (Cap. 3.3)

Árbol de la vida: Árbol filogenético de todas las especies presentes en el planeta Tierra hoy en día. (Cap. 2.2)

Árbol filogenético: Grafo que se usa para representar la evolución; las hojas del árbol representan especies actuales y los vértices internos representan ancestros de estas especies. (Cap. 2.2)

Asimilación de datos: Procedimiento mediante el cual las observaciones atmosféricas se incorporan en un modelo real programado en un ordenador, de forma que el modelo cuente para sus predicciones con la información aportada por las observaciones y medidas. (Cap. 3.1)

Autómata celular: Modelo matemático discreto en el que el estado del sistema viene dado por uno o más valores numéricos en un conjunto finito de compartimentos o células, cuya evolución viene dada por un conjunto finito de reglas que se aplican secuencialmente a todos los compartimentos. (Cap. 3.3)

Axón: Prolongación de las neuronas especializadas en conducir el impulso nervioso desde el cuerpo celular o soma hacia otra neurona. (Cap. 2.4)

Base de Datos: Conjunto estructurado de datos. (Cap. 2.5)

Big-Bang: Singularidad inicial de las ecuaciones de campo que dio lugar al universo actual. (Cap. 4.2)

Cálculo estocástico: Parte de las matemáticas que desarrolla para los procesos estocásticos herramientas análogas al cálculo determinista más tradicional. En particular, estudia el cálculo diferencial estocástico, el cálculo integral estocástico, etcétera. Por ejemplo, el *lema Ito*: es el análogo en cálculo estocástico a la regla de la cadena en el cálculo determinista. También es preciso dar sentido a la integral respecto de un proceso o integral estocástica. (Cap. 3.2)

Cambio climático: Variación global del clima de la Tierra debida tanto a causas naturales como a la acción del hombre, y que se produce a muy diversas escalas de tiempo y sobre todos los parámetros climáticos: temperatura, precipitaciones, nubosidad, etcétera (Cap. 3.3)

Camino euleriano (en un grafo): Secuencia de vértices conectados consecutivamente por aristas con la propiedad de que pasa por cada arista una única vez. (Cap. 3.4)

Camino Hamiltoniano (en un grafo): Secuencia de vértices conectados consecutivamente por aristas con la propiedad de que pasa por cada vértice una única vez. (Cap. 3.4)

Cáncer: Enfermedad neoplásica con transformación de las células, que proliferan de manera anormal e incontrolada. Tumor maligno. (Cap. 2.1 y 2.4)

Catástrofe: Si buscamos la palabra catástrofe en el diccionario de la RAE, encontraremos como primera acepción: "Suceso infiusto que altera gravemente el orden regular de las cosas". Curiosamente, la quinta acepción del término nos deriva a su relación con la física y la matemática: "Cambio brusco de estado de un sistema dinámico, provocado por una mínima alteración de uno de sus parámetros". (Cap. 3.3)

Cereza de un árbol filogenético: Dos hojas que están unidas al árbol por un nodo común. (Cap. 2.2)

Ciclo euleriano: Camino euleriano donde el vértice inicial y el vértice final coinciden. (Cap. 3.4)

Ciclo hamiltoniano: Camino hamiltoniano donde el vértice inicial y el vértice final coinciden. (Cap. 3.4)

Cóctel de medicamentos: Combinación de medicamentos para el tratamiento del SIDA, desarrollado en los 90, para optimizar el proceso de eliminación de virus. (Cap. 2.4)

Coeficiente de agrupamiento (de un grafo): Parámetro que mide cuán cerca un grafo está de ser completamente

ordenado (parámetro igual a 0) o de ser completamente aleatorio (parámetro igual a 1). También denominado *cluster coefficient*. (Cap. 3.4)

Cólera: Enfermedad epidémica aguda de origen bacteriano, caracterizada por vómitos repetidos y diarrea severa. (Cap. 2.1)

Coloración (de un grafo): Asignación de colores a los vértices de un grafo. (Cap. 3.4)

Constante cosmológica: Constante que introdujo Einstein como una modificación de su ecuación original del campo gravitatorio para conseguir una solución de universo estático. Aunque Einstein rechazó después su existencia, su interés ha crecido en los últimos años. (Cap. 4.2)

Constante solar: Energía captada, por unidad de tiempo y área, por una superficie situada a la distancia media entre el Sol y la Tierra, y ortogonal a la línea recta que une sus centros. Este valor es del orden de 1.350 W/m². (Cap. 3.6)

Control: Conjunto de acciones que se deben realizar sobre las variables que intervienen en un modelo para que la evolución del sistema que representa sea la que resulta deseable. (Cap. 3.3)

Convección de Rayleigh-Bérnard: Movimiento de partículas o materia producido por cambios de temperatura donde las partículas calientes ascienden y las frías descienden. (Cap. 1.2)

Coste computacional: Número de operaciones involucradas en un algoritmo o procedimiento implementado en el ordenador. El tiempo de cómputo requerido para la obtención del resultado es proporcional al coste computacional, o complejidad algorítmica, del procedimiento. (Cap. 3.6)

Criptografía: Rama de las matemáticas que se encarga del estudio de los algoritmos, protocolos y sistemas que se utilizan para proteger la información, garantizando la seguridad de las comunicaciones. (Cap. 3.5)

Criptografía de clave pública (también llamada criptografía asimétrica): Método de cifrado que utiliza un par de claves para el envío de mensajes, una clave pública que se utiliza para cifrar y una clave privada que solo el receptor del mensaje posee y que le permite descifrar el mensaje cifrado. (Cap. 3.5)

Criptografía híbrida: Protocolo criptográfico que utiliza criptografía de clave pública para compartir una clave de un cifrado de criptografía simétrica. (Cap. 3.5)

Curva loxodrómica: Curva que une dos puntos cualesquiera de la superficie terrestre cortando a todos los meridianos con el mismo ángulo. (Cap. 1.1)

Curva ortodrómica: Camino más corto entre dos puntos de la superficie terrestre; es el arco del círculo máximo que los une (coincide con las geodésicas de la esfera). (Cap. 1.1)

Curvas cónicas (o secciones cónicas): Es la curva producida por la intersección entre un cono circular recto y un plano. Según la inclinación del plano se clasifican en: circunferencia, elipse, parábola e hipérbola. (Cap. 4.1)

Curvatura: Intuitivamente, la curvatura mide cuánto se desvía un objeto de su plano geométrico dentro de un espacio euclídeo. (Cap. 4.2)

Curvatura constante: Cuando la curvatura es la misma en todos los puntos de la superficie. (Cap. 4.2)

Demografía: Estudio estadístico de una colectividad humana, referido a un determinado momento o a su evolución. (Cap. 2.1)

Determinismo: Cosmovisión del mundo físico propuesta por matemáticos como Laplace según la cual las leyes de la naturaleza se pueden expresar mediante ecuaciones que hacen a la naturaleza completamente predecible. (Cap. 3.1)

Diámetro (de un grafo): Máximo de las distancias entre todos los pares de vértices de un grafo (ver distancia en un grafo). (Cap. 3.4)

Dinámica de poblaciones: Evolución temporal de las distintas poblaciones que conforman un colectivo determinado. (Cap. 2.1)

Discretización: Procedimiento que permite encontrar soluciones aproximadas de las soluciones de una ecuación diferencial mediante la aplicación de un método numérico. Este procedimiento permite pasar de una ecuación diferencial a una ecuación algebraica, resoluble en el ordenador. (Cap. 3.3)

Discretizar: Aproximar o sustituir lo continuo por lo análogo discreto. En el contexto de la frase "El intervalo de tiempo se discretiza..." se entiende que se toma un conjunto finito de instantes de tiempo dentro del intervalo temporal. Por simplicidad, se toman tiempos discretos igualmente espaciados, es decir, entre dos tiempos consecutivos existe la misma distancia (paso de tiempo). (Cap. 3.2)

Distancia (entre dos vértices de un grafo): Número mínimo de vértices consecutivos (unidos por una sucesión de aristas) entre dos vértices fijados. (Cap. 3.4)

Distancia evolutiva: Estimación de la cantidad de cambios producidos entre dos secuencias de ADN. (Cap. 2.2)

Distancia Jukes-Cantor: Distancia evolutiva del modelo evolutivo más sencillo (Jukes-Cantor), que se calcula como $-3/4 \ln(1-4p/3)$, donde p denota la fracción de nucleótidos distintos entre las dos secuencias. (Cap. 2.2)

Ecuación: Expresión matemática en la que hay una o más incógnitas y un conjunto de datos. Resolver la ecuación consiste en, dado un conjunto de datos, encontrar los valores de las incógnitas que hacen cierta la ecuación. (Cap. 3.3)

Ecuación de Elasticidad: Ecuaciones que modelan el comportamiento de deformaciones pequeñas en los sólidos. (Cap. 1.2)

Ecuación de ondas: Ecuación del modelo más sencillo de la propagación de ondas como la cuerda vibrante. (Cap. 1.2)

Ecuación diferencial (ED): Ecuación matemática cuya incógnita es una función, y cuya expresión relaciona la incógnita con algunas de sus derivadas. (Cap. 3.3)

Ecuación diferencial estocástica: Ecuación que verifica la diferencial estocástica de un proceso. Su solución es un proceso estocástico. Al igual que en el estudio de las ecuaciones diferenciales clásicas, se analizan resultados que garantizan la existencia y unicidad de solución, cómo se pueden resolver exactamente o aproximar numéricamente el proceso solución. (Cap. 3.2)

Ecuación diferencial ordinaria (EDO): Ecuación diferencial en la que la función incógnita depende de una sola variable independiente (por ejemplo, la variable tiempo). (Cap. 3.3)

Ecuación diferencial: Relación entre una función y sus derivadas y cuya incógnita es la propia función que obedece dicha relación. (Cap. 2.4)

Ecuación en derivadas parciales (EDP): Ecuación diferencial en la que la función incógnita depende de más de una variable independiente (por ejemplo, la variable tiempo y las tres variables espaciales). (Cap. 3.3)

Ecuación KdV: Ecuación que modela la propagación de ondas de longitud larga en un medio dispersivo. (Cap. 1.2)

Ecuaciones de Navier-Stokes: Sistema de ecuaciones en derivadas parciales que describen el movimiento de un fluido y que son utilizadas en la simulación de numerosos fenómenos relacionados con el planeta Tierra: meteorología, climatología, oceanografía, ingeniería hidráulica, etcétera. (Cap. 3.3)

Ecuaciones de Saint Venant o de aguas someras: Sistema de ecuaciones en derivadas parciales que describen el comportamiento de ciertos flujos geofísicos cuyas dimensiones verticales son pequeñas comparadas con las horizontales, como ocurre a menudo en ríos, lagos, canales, zonas costeras, etcétera. Se deducen a partir de las ecuaciones de Navier-Stokes. (Cap. 3.3)

Ecuaciones diferenciales: Ecuaciones donde las incógnitas son funciones de una o varias variables y en las que aparecen algunas de sus derivadas sucesivas. (Cap. 3.6)

Edáfico: Relativo a la edafología, rama de la ciencia que trata la naturaleza y condiciones del suelo, en su relación con las plantas. (Cap. 3.3)

Efecto invernadero: Retención del calor del Sol en la atmósfera de la Tierra por parte de una capa de gases, entre ellos, el dióxido de carbono. (Cap. 3.3)

Efecto mariposa: Manera popular de referirse a la sensibilidad a las condiciones iniciales que presentan los sistemas dinámicos caóticos. En ellos, pequeñas diferencias en las condiciones iniciales conducen a resultados totalmente dispares, por lo que no es posible la predicción a largo plazo. (Cap. 3.1 y 3.3)

Enfermedad neurodegenerativa: Enfermedad que produce una reducción del número de neuronas y su funcionalidad, generando así cambios en la conducta. (Cap. 2.4)

Epidemia: Enfermedad que se propaga durante algún tiempo por un país, afectando simultáneamente a un gran número de personas. (Cap. 2.1)

Epidemiología: Tratado de las epidemias. (Cap. 2.1)

Esferoide: Figura tridimensional tras la revolución de una elipse alrededor de unos de sus ejes. Es la forma del planeta Tierra. (Cap. 1.2)

Espacio de probabilidad filtrado: Es la estructura probabilística adecuada para trabajar con procesos estocásticos. El espacio de probabilidad incorpora una filtración, en la que para cada parámetro del proceso (tiempo) se considera una colección de sigma álgebras cada vez más grande. (Cap. 3.2)

EURIBOR: Es el tipo de interés promedio al que se prestan el dinero en euros ciertas entidades financieras europeas. Dado que su valor se publica diariamente, suele

servir de referencia para préstamos o rendimientos de depósitos. Por ejemplo, se puede ofrecer un préstamo hipotecario al tipo EURIBOR+0,8% o comercializar un depósito a 10 años con una rentabilidad anual del EURIBOR+1%, actualizado anualmente. (Cap. 3.2)

Evolución: Conjunto de transformaciones o cambios a través del tiempo que ha originado la diversidad de formas de vida que existen sobre la Tierra. (Cap. 2.5)

Fenotipo: Conjunto de rasgos observables de un organismo. (Cap. 2.5)

Filogenética: Área de la biología que estudia los procesos evolutivos de especies y poblaciones. (Cap. 2.2)

Filogenia: Secuencia antecesor-descendiente del mundo orgánico. (Cap. 2.5)

Filotaxia: Disposición de las diferentes partes de una planta como hojas sobre el tallo, pétalos de las flores, semillas... (Cap. 2.3)

Firma digital: Protocolo criptográfico que permite al receptor de un mensaje firmado digitalmente determinar la identidad del emisor del mensaje, a la vez que se garantiza que el mensaje no ha sido alterado desde que fue firmado. (Cap. 3.5)

Fluido ideal: Fluido incompresible e inviscido, o de viscosidad nula. (Cap. 1.3)

Fluido incompresible: Se considera que un fluido es incompresible si al encontrarse en movimiento resulta que la cantidad de fluido que entra en cualquier región cerrada es la misma que la que sale. El modelo de masa consistente considera al aire como un fluido incompresible dentro del rango usual de velocidades del viento. (Cap. 3.6)

Fórmula de Bayes: Expresión de la probabilidad condicionada de un suceso a partir del conocimiento de los efectos en una partición del espacio de probabilidad. (Cap. 1.2)

Fórmula de D'Alambert: Expresión que nos facilita la solución de la ecuación de ondas. (Cap. 1.2)

Fórmula de Euler: Expresión que relaciona el número de vértices, el número de aristas y el número de caras en un mapa. (Cap. 3.4)

Gedésicas: Las curvas de una superficie que minimizan la distancia entre dos puntos. (Cap. 4.2)

Gen: Unidad biológica básica de la herencia. Está formada por ADN. (Cap. 2.5)

Genoma: Información hereditaria de un organismo, que en organismos eucariotas se codifica en el ADN del núcleo de las células. (Cap. 2.2 y 2.5)

Genotipo: Conjunto de genes de un organismo. (Cap. 2.5)

Grado (de un vértice): Número de vértices que son incidentes con el vértice considerado. (Cap. 3.4)

Grafo completo: Grafo que contiene todas las aristas posibles entre sus vértices. (Cap. 3.4)

Grafo dirigido: Grafo en el que cada una de las aristas tiene una orientación. (Cap. 3.4)

Grafo plano: Grafo que puede dibujarse en el plano (o equivalentemente en la esfera) de tal modo que dos aristas únicamente se pueden intersecar en vértices. (Cap. 3.4)

Grafo: Conjunto de elementos (denominados vértices) y las interacciones entre ellos (denominadas aristas). (Cap. 2.5 y 3.4)

IBEX35: Índice bursátil de la bolsa española formado por las 35 empresas de mayor liquidez. La ponderación de cada empresa en el índice depende de su capitalización bursátil. En otros países existen índices análogos, que puede ser construidos de diferente forma: DAX (Frankfurt), Dow Jones (New York), Eurostoxx50 (zona euro), etcétera. (Cap. 3.2)

Impulso nervioso: Onda de naturaleza eléctrica que recorre toda la neurona y que se origina como consecuencia de un cambio transitorio de la permeabilidad en la membrana plasmática tras un estímulo. (Cap. 2.4)

Incompresibilidad: Un fluido incompresible es aquel que no se puede comprimir o reducir a un volumen menor. Más concretamente, en la evolución de las partículas de un fluido incompresible se mantiene siempre el volumen del espacio ocupado por ellas. En una primera aproximación, esta propiedad sirve para distinguir los líquidos (incompresibles), de los gases (compresibles). Pero en muchas circunstancias el flujo de un gas, como por ejemplo el aire cuando se estudia el vuelo de los aviones, se comporta como un fluido incompresible. (Cap. 1.3)

Índice Reproductivo Básico: Número de contactos esperado por parte de un infectado. (Cap. 2.1)

Inmisión: Concentración de los contaminantes recibidos en un punto, debido a la presencia de un foco emisor. En los análisis de la calidad del aire, es muy importante obtener los valores de la inmisión sobre la superficie del terreno para poder evaluar el impacto ambiental de los contaminantes. (Cap. 3.6)

Irradiación: Energía solar (J/m^2) captada por unidad de superficie a lo largo de un intervalo de tiempo. (Cap. 3.6)

Irradiancia: Potencia solar (W/m^2) recibida por unidad de superficie. (Cap. 3.6)

Isometría: Aplicación entre superficies que conserva las distancias. (Cap. 4.2)

Líneas de corriente: Se denomina línea de corriente a aquella que es tangente, en cada punto, al vector velocidad del fluido en un instante determinado. (Cap. 1.3)

Logística: Conjunto de medios y métodos necesarios para llevar a cabo tareas tales como la organización de una empresa o la prestación de un servicio, especialmente de distribución. (Cap. 3.3)

Longitud de onda: La longitud de onda de una ola es la distancia entre dos crestas consecutivas. Si la velocidad de propagación de la ola es constante, entonces la longitud de onda es inversamente proporcional a la frecuencia. (Cap. 1.3)

Lugar geométrico: Conjunto de puntos que satisfacen una determinada propiedad geométrica. (Cap. 1.1)

Malaria: Enfermedad febril producida por un protozoo, y transmitida al hombre por la picadura de mosquitos. (Cap. 2.1)

Malla: Aproximación discreta (a trozos) de un domino real. La generación de una malla de la región de estudio constituye el punto de partida para la aplicación del método de elementos finitos. Se suelen utilizar mallas de triángulos o cuadriláteros para superficies, y tetraedros o hexaedros para dominios tridimensionales. (Cap. 3.6)

Malware: Anglicismo con el que se conoce al conjunto de programas maliciosos o malintencionados que tienen como objetivo infiltrarse o dañar un ordenador o sistema de información sin el consentimiento de su propietario. (Cap. 3.5)

Máximo de parsimonia: Método de reconstrucción filogenética basado en caracteres; escoge el árbol donde se requiere el mínimo número de cambios entre secuencias. (Cap. 2.2)

Metástasis: Propagación de un foco canceroso a un órgano distinto de aquel en que se inició. (Cap. 2.4)

Método de elementos finitos: Método numérico que permite aproximar numéricamente la solución de problemas de ecuaciones en derivadas parciales. Estos problemas modelan procesos y dispositivos surgidos del ámbito de la ingeniería y las ciencias aplicadas y en muchas ocasiones es imposible obtener la expresión analítica de la solución, por lo que han de usarse estas técnicas de aproximación para dar respuesta. Los métodos se incorporan al software profesional de simulación numérica en distintos áreas de aplicación (mecánica de fluidos y sólidos, acústica, ciencias medioambientales,

finanzas, electromagnetismo, etcétera). En particular, el método de elementos finitos se basa en el planteamiento de formulaciones variacionales de los problemas. Los métodos de diferencias finitas tienen el mismo objetivo de aproximar soluciones de ecuaciones en derivadas parciales, utilizando técnicas de aproximación de las derivadas por cocientes (derivación numérica). (Cap. 3.2 y 3.6)

Método numérico: Herramientas matemáticas que permiten encontrar soluciones aproximadas de ecuaciones para las que es difícil, o incluso imposible, hallar sus soluciones exactas con un número finito de cálculos. (Cap. 3.3)

Mielina: Capa aislante que se forma alrededor de los nervios, entre ellos, los que se encuentran en el cerebro y la médula espinal. El propósito de la vaina de mielina es permitir la transmisión rápida y eficiente de impulsos a lo largo de las neuronas (Cap. 2.4)

Minería de datos: Descubrimiento automático de patrones en grandes conjuntos de datos. (Cap. 2.5)

Modelización: Proceso de elaboración de un modelo adecuado para representar un fenómeno real. Muy a menudo, se trata de una actividad pluridisciplinaria. (Cap. 3.3)

Modelo: Representación abstracta de un cierto aspecto de la realidad, con una estructura formada por los elementos que caracterizan dicho aspecto y por las relaciones entre estos. (Cap. 3.3)

Modelo de Hodgkin y Huxley: Sistema de ecuaciones diferenciales que describe la propagación de un impulso nervioso a lo largo del axón de la neurona. (Cap. 2.4)

Modelo matemático: Modelo abstracto que usa el lenguaje matemático para representar los aspectos esenciales de un sistema real y que se usa para intentar comprender, predecir y/o controlar su comportamiento. El estado del sistema está caracterizado por un conjunto de números que pueden variar en el espacio y en el tiempo. El lenguaje matemático permite expresar las leyes que rigen la evolución del sistema como una ecuación o sistemas de ecuaciones. (Cap. 3.3)

Modelo numérico: Procedimiento o método matemático orientado a la resolución de un problema con el uso de un ordenador. Los modelos numéricos obtienen normalmente una aproximación de la solución exacta del problema. (Cap. 3.6)

Movimiento browniano o proceso de Wiene: Es un proceso estocástico particular que en el instante inicial toma el valor cero, tiene incrementos independientes y la diferencia entre las variables aleatorias correspondientes a dos tiempos distintos sigue una distribución normal de media nula y varianza igual a la diferencia entre el tiempo mayor y el menor.

Multigrafo: Generalización del modelo de grafo, en el que un par de vértices puede estar unido por más de una arista. Asimismo, un vértice puede estar unido con él mismo mediante lazos. (Cap. 3.4)

Neighbor-joining: Método de reconstrucción filogenética basado en distancias; escoge como cerezas del árbol aquellas especies que minimizan la distancia entre ellas pero que maximizan la distancia a las otras especies. (Cap. 2.2)

Neurona: Unidad estructural y funcional del sistema nervioso. Recibe los estímulos provenientes del medio ambiente, los convierte en impulsos nerviosos y los transmite a otra neurona, a una célula muscular o glandular donde producirán una respuesta. (Cap. 2.4)

Nucleótidos: Las moléculas de las que está constituido el ADN. (Cap. 2.5)

Número cromático: Número mínimo de colores necesarios para colorear los vértices de un grafo, de tal modo que los extremos de una arista siempre tienen color distinto. (Cap. 3.4)

Número de oro ϕ : Número irracional cuyo valor numérico es $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, que es aproximadamente 1.61803398. (Cap. 2.3)

Optimización: Búsqueda del elemento de un conjunto que sea el mejor con respecto a algún criterio. (Cap. 3.3)

Órbita geoestacionaria: Órbita circular alrededor de la Tierra cuyo periodo coincide con el periodo de rotación de la Tierra, por lo que, para un observador sobre la superficie de la Tierra, un objeto en esta órbita aparece siempre en la misma posición. Se usa, por ejemplo, para la televisión vía satélite, porque permite que la antena de recepción esté fija, mirando siempre en la misma dirección. (Cap. 4.1)

Paralaje: Desplazamiento en la posición aparente de un objeto al cambiar la posición del observador. En astronomía se refiere al desplazamiento anual de la posición de una estrella producido al cambiar el punto de vista del observador ocasionado por el movimiento de la Tierra. La medida de este desplazamiento permite conocer la distancia a la estrella. (Cap. 4.1)

Piranómetro: Aparato que mide la irradiancia global recibida sobre una superficie horizontal. (Cap. 3.6)

Pirhelímetro: Aparato que mide la irradiancia directa recibida sobre una superficie horizontal. (Cap. 3.6)

Pluma contaminante: Región más afectada por los contaminantes emitidos desde un foco. La trayectoria de la pluma contaminante, debida a las emisiones de la chimenea de una central térmica, depende principalmente de la velocidad de salida de los gases y del campo de viento. (Cap. 3.6)

Poliedro: Cuerpo geométrico cuyas caras son planas y encierran un volumen finito. La palabra poliedro viene del griego *polyedron*, que significa "muchas caras". (Cap. 4.2)

Predicción numérica del tiempo: Predicción del tiempo que se obtiene resolviendo en el espacio y el tiempo las complejas ecuaciones de la dinámica atmosférica, mediante cálculos en un ordenador que involucran pequeños pasos temporales y una discretización del espacio. (Cap. 3.1)

Predicción por conjuntos: Método de predicción numérica del tiempo en el que para producir un pronóstico en el futuro,

se utilizan múltiples predicciones. Estas se obtienen a partir de condiciones iniciales ligeramente distintas, que evolucionan según un modelo, o bien a partir de una condición inicial que evoluciona según distintos modelos. Sobre el conjunto de pronósticos se efectúa una media y se obtiene una medida de la incertidumbre de los resultados. (Cap. 3.1)

Presión: Carácter fundamental en el modelo de los fluidos que representa la fuerza, por unidad de superficie, que ejercen las partículas fluidas. (Cap. 1.3)

Primordio: Estado rudimentario o primigenio en que se encuentra un órgano en formación de una planta. (Cap. 2.3)

Problema bien planteado: Se dice que un problema matemático está bien planteado si, dado un conjunto completo de datos, la solución existe, es única y depende con continuidad de los datos, es decir, si pequeñas variaciones en los datos producen pequeñas variaciones en las soluciones (al menos a corto plazo). (Cap. 3.3)

Proceso estocástico: Sucesión de variables aleatorias dependientes de un parámetro. Si este parámetro se mueve en un intervalo se habla de proceso estocástico continuo, mientras que si toma un conjunto finito de valores se llama proceso estocástico discreto. Normalmente, el parámetro se identifica con la variable temporal. Para cada valor del parámetro (tiempo) tenemos una variable aleatoria. Si fijamos un suceso del espacio muestral, el valor de las variables aleatorias sobre el suceso definen una trayectoria del proceso. Se usan los procesos estocásticos para modelar el precio de activos y derivados financieros. (Cap. 3.2)

Protocolo: Conjunto de procedimientos destinados a controlar la secuencia de mensajes que se establecen durante una comunicación. (Cap. 3.5)

Proyección conforme: Aquella que conserva los ángulos. (Cap. 1.1)

Proyección equivalente: Aquella que conserva el área. (Cap. 1.1)

Quimiotaxis: Fenómeno en el cual las bacterias y células de otros organismos dirigen sus movimientos de acuerdo a la concentración de ciertas sustancias químicas en su entorno. (Cap. 2.4)

Radiación de fondo de microondas: Radiación que es un eco de la explosión inicial que dio lugar al universo. (Cap. 4.2)

Radiación solar: Término genérico utilizado para la energía solar captada por una superficie. Se evalúa como la suma de la *radiación directa*: (incidencia directa desde el Sol, si no hay obstáculos totalmente opacos entre la superficie y el Sol), la *difusa*: (dispersada por los componentes de la atmósfera) y la *reflejada*: (por el suelo en función de su albedo). (Cap. 3.6)

Rectángulo áureo: Rectángulo en el que el cociente entre la longitud del lado mayor y el lado menor es precisamente el número de oro. (Cap. 2.3)

Regla de Laplace: Definición de la probabilidad de un suceso a partir de conocer los casos posibles y los casos favorables. (Cap. 1.2)

Reloj atómico: Tipo de reloj cuyo funcionamiento se basa en la frecuencia de resonancia de los átomos. (Cap. 1.1)

Secuenciación del ADN: Proceso para determinar el orden de aparición de los diferentes nucleótidos de una molécula de ADN. (Cap. 2.5)

Seis grados de separación: Principio que afirma que en un amplio abanico de redes existe una gran interconexión entre los vértices de las mismas. (Cap. 3.4)

Serie de Fourier: Suma de una combinación infinita de senos y cosenos que nos permite obtener cualquier función periódica. (Cap. 1.2)

Serie temporal: Secuencia de datos tomados en diferentes tiempos y ordenados cronológicamente que nos ayuda para reconstruir un fenómeno. (Cap. 1.2)

Sextante: Instrumento que permite medir ángulos entre dos objetos tales como dos puntos de una costa o un astro (por ejemplo, el Sol) y el horizonte. Esta medida permite conocer la latitud del punto en el que se encuentra el observador. (Cap. 1.1)

SIDA (Síndrome de inmunodeficiencia adquirida): Síndrome debido a la inmunosupresión producida por el virus VIH al eliminar este células del sistema inmunitario humano facilitando así el desarrollo de enfermedades infecciosas. (Cap. 2.4)

Sistema caótico: Aquel en que cualquier pequeña perturbación, o error, en las condiciones iniciales puede tener una gran influencia sobre el resultado final. (Cap. 3.3)

Sistema de Posicionamiento Global (GPS): Sistema global de navegación por satélite que permite determinar en todo el mundo la posición de un objeto, una persona o un vehículo con una precisión hasta de centímetros. (Cap. 1.1)

Sistema numérico posicional: Está dado por un conjunto de símbolos y reglas de generación que permiten construir todos los números de dicho sistema. En un sistema posicional cada símbolo representa un valor diferente según la posición que ocupan. Por ejemplo, nuestro sistema decimal es posicional, dos números como 101 y 110 representan números diferentes aunque están formados por los mismos símbolos. (Cap. 2.3)

Subdivisión (de un grafo): Grafo que se obtiene tras subdividir las aristas de éste. (Cap. 3.4)

Subgrafo: Grafo definido a partir de un grafo inicial mediante un subconjunto de vértices, y las aristas inducidas correspondientes. (Cap. 3.4)

Sucesión numérica: Es un conjunto ordenado de números. Más formalmente una sucesión viene dada por una aplicación entre el conjunto de los números naturales (1, 2, 3, 4...) y el de los números reales. (Cap. 2.3)

Superficie desarrollable: Aquella que se puede desarrollar o desplegar sobre un plano. (Cap. 4.2)

Técnicas adaptativas: Estrategias numéricas que adaptan los pasos (resolución) de las variables independientes (normalmente tiempo y espacio) para conseguir una buena aproximación de la solución con un mínimo coste computacional. (Cap. 3.6)

Tensor métrico: Concepto geométrico que se usa para medir distancias, ángulos y áreas en superficies y en espacios de dimensión superior. (Cap. 4.2)

Teorema de Kuratowski: Teorema que caracteriza las condiciones necesarias y suficientes para que un grafo dado sea plano. (Cap. 3.4)

Teorema de los cuatro colores: Resultado que afirma que se pueden colorear los vértices de un grafo plano con cuatro colores, de tal modo que los extremos de una arista siempre tienen color distinto. (Cap. 3.4)

Teoría de la relatividad: Teoría desarrollada por Albert Einstein basada en cómo la materia curva el espacio en su entorno. (Cap. 4.2)

Teoría del caos: Área de estudio en matemáticas que cuenta con numerosas aplicaciones en física, ingeniería, biología y económicas. Analiza el comportamiento de sistemas dinámicos que son muy sensibles a las condiciones iniciales. (Cap. 3.1 y 3.3)

Teoría geocéntrica: Teoría que sitúa la Tierra (Geo) en el centro del universo, y los astros, incluido el Sol, en órbitas que giran alrededor de la Tierra. El geocentrismo estuvo vigente hasta el siglo XVI, cuando fue reemplazado por la teoría heliocéntrica (el Sol en el centro). (Cap. 4.2)

Término general de una sucesión: En matemáticas para designar o nombrar los términos de una sucesión se utiliza una letra con subíndices. De este modo, una sucesión la escribiremos como $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ indicando así el primer término, el segundo, el tercero y así sucesivamente. Con la letra α_n designamos el término n , o n -ésimo de dicha sucesión al que llamaremos el término general de la expresión. (Cap. 2.3)

Transporte paralelo: Mecanismo para transportar vectores de un punto a otro a lo largo de una superficie conservando las medidas. (Cap. 4.2)

Trayectoria: Trayectoria o línea de flujo seguida por una partícula del fluido. En general, a lo largo de su trayectoria, la velocidad de la partícula varía, tanto en magnitud como en dirección. (Cap. 1.3)

Trayectoria de Hohmann: Trayectoria usada para desplazarse entre dos órbitas circulares. Se trata de una órbita elíptica, con el periastro en la órbita más pequeña y el apoastro en la más grande. (Cap. 4.1)

Tumor: Alteración anormal de los tejidos que produce un aumento de volumen. (Cap. 2.4)

Turbulencia: En el movimiento turbulento de un fluido el campo de velocidades presenta puntos singulares, donde no puede ser descrito por medio de funciones lisas o diferenciables, o bien se hace infinito, y en los que las trayectorias de las partículas resultan ser poco predecibles y bastante caóticas. No obstante, encontrar leyes de escala, quizás de naturaleza estadística, que sirvan para describir esos flujos turbulentos es uno de los grandes desafíos de la ciencia contemporánea. (Cap. 1.3)

Validación: Procedimiento que consiste en contrastar los datos obtenidos a partir de un modelo matemático con datos experimentales tomados del fenómeno modelizado, con el fin de comprobar si el modelo puede ser aceptado como una buena representación del problema real. (Cap. 3.3)

Virus VIH: Virus causante del síndrome de inmunodeficiencia adquirida (SIDA). (Cap. 2.4)

Viscosidad: Valor que mide la resistencia de un fluido a las deformaciones tangenciales. Existen diversos modelos de viscosidad. El caso más sencillo de caracterizar es el de los fluidos llamados newtonianos, que se corresponden con una relación lineal entre el gradiente de velocidades y las tensiones tangenciales. Pero hay

muchos fluidos, como son la saliva o la sangre, que exigen otros modelos más complejos. (Cap. 1.3)

Vorticidad: Un vórtice es un flujo en rotación. Se trata de un concepto matemático relacionado con la canti-

dad de circulación o rotación y que puede ser definido, en magnitud, como la circulación por unidad de área en un punto del fluido. Como vector es el rotacional del campo de velocidades. (Cap. 1.3)

V. ÍNDICE DE AUTORES



Marta Casanellas

Profesora del Departamento de Matemática Aplicada I de la Universitat Politècnica de Catalunya. aunque inicialmente su formación fue en Geometría Algebraica, actualmente está

especializada en las aplicaciones de esta disciplina a la filogenética y colabora con grupos de biólogos internacionales.



Antonio Córdoba

Es catedrático de Análisis Matemático en la UAM, miembro del ICMAT y doctor por la Universidad de Chicago (1974). Ha publicado artículos de investigación en Análisis Armónico, Ecuaciones Diferenciales, Teoría de Números y Mecánica de Fluidos. Es autor de varias monografías y ensayos en torno a las Matemáticas. IP de proyectos financiados por la National Science Foundation (Estados Unidos), Comité Conjunto Hispano-norteamericano, CICYT y Ministerio de Educación y Ciencia, fue galardonado con el Premio Nacional de Matemáticas Julio Rey Pastor (2011).



Diego Córdoba

Obtuvo su licenciatura en Matemáticas en la Universidad Autónoma de Madrid. Su título de doctor lo consiguió en la Universidad de Princeton, bajo la dirección del profesor Charles Fefferman, medallista Fields en 1978. Su trabajo de investigación se centra en el Análisis Matemático, las Ecuaciones en Derivadas Parciales y sus aplicaciones a la Mecánica de Fluidos, en particular al estudio de la ecuación de Navier-Stokes. Ha obtenido diversos reconocimientos por su trabajo de investigación, como el Premio SEMA (Sociedad Española de Matemática

Aplicada) al joven investigador en 2005 y el Premio Miguel Catalán para investigadores menores de 40 años, concedido por la Comunidad de Madrid en 2011. En 2008 consiguió un Starting Independent Research Grant del European Research Council, para estudiar las dinámicas de contorno y las singularidades en fluidos incomprimibles.



Vanesa Daza

Es profesora de la Universidad Pompeu Fabra. Licenciada en Matemáticas por la Universidad de Barcelona y doctora en Matemáticas por la Universidad Politécnica de Catalunya, su investigación ha estado relacionada con la criptografía, en especial criptografía distribuida. Autora de más de 30 artículos en revistas y congresos, es inventora de dos patentes internacionales en explotación. Su experiencia docente se centra en las áreas de matemáticas, criptografía y seguridad. Ha participado en numerosos proyectos de investigación, así como de innovación docente. Ha recibido dos premios a la Calidad de la Docencia que otorga el Consejo Social de la Universidad Pompeu Fabra. Colabora en la Escuela Superior Politécnica de la Universidad Pompeu Fabra en calidad de jefa de estudios.



Manuel de León

Nació en Requejo, Zamora, en 1953. Es profesor de Investigación del Consejo Superior de Investigaciones (CSIC) y ha trabajado principalmente en el campo de la Geometría Diferencial y sus aplicaciones a la Mecánica y a la Física Matemática. Además es director del Instituto de Ciencias Matemáticas un centro de investigación mixto del CSIC y tres universidades madrileñas: la Universidad Autónoma de Madrid (UAM), la Universidad Carlos III de Madrid (UC3M), y la Universidad Complutense de Madrid

(UCM). Mantiene el puesto desde la creación del centro en 2007 y es el investigador principal del proyecto presentado al Programa Severo Ochoa que, desde 2011, distingue al ICMAT como uno de los mejores centros de toda España. Los objetivos del ICMAT enmarcan acertadamente a De León, cuya carrera se ha dedicado en gran parte a promover la matemática española en todo el mundo. En este sentido, ha sido el primer –y hasta el momento, único–, español miembro del Consejo Directivo de la Unión Matemática Internacional (IMU). También fue refundador y vicepresidente de la Real Sociedad Matemática Española (RSME), director de *La Gaceta de la RSME* (de 1998-2004), coordinador del Comité Español del Año Mundial de las Matemáticas 2000) y presidente del Comité Español de Matemáticas (de 2004 a 2007).



Marco Antonio Fontelos

Investigador Científico del CSIC y profesor de Matemática Aplicada. Licenciado en Física y doctor en Matemáticas, ambos por la Universidad Complutense. Ha ocupado puestos de

profesor visitante en las universidades de Minnesota, Bristol y Paris VI. Sus temas de investigación abarcan la Mecánica de Fluidos, Física de Plasmas y la Biología Matemática. En esta última área ha desarrollado y estudiado modelos para el crecimiento de tumores, para el desarrollo de angiogénesis y para la propagación de señales en medios excitables.



Antonio Gómez Tato

Es profesor titular de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Santiago de Compostela. Especializado en análisis de datos genómicos en los campos de medicina forense y acuicultura. Actualmente participa, entre otros, en

el proyecto conjunto IIM-CSIC/USC de secuenciación, ensamblado y análisis del genoma del rodaballo.



José Manuel González Vida

Es licenciado en Matemáticas por la Universidad de Málaga en 1996 y doctor por la Universidad de Málaga en 2003. Experto en el campo del Análisis Numérico de Ecuaciones en

Derivadas Parciales y, más concretamente, en la resolución numérica de las ecuaciones de aguas someras aplicadas a la simulación de flujos geofísicos. Con 19 entradas en el ISI Web of Knowledge, ha participado en más de 10 proyectos de ámbito nacional e internacional. En la actualidad dirige un contrato con el Centro de Investigación de Investigación de Tsunamis (NCTR) del Laboratorio de Medio Ambiente Marino del Pacífico (PMEL) de la Agencia Nacional para el Océano y la Atmósfera (NOAA) de Estados Unidos.



Tomás L. Gómez

Doctor en matemáticas por la Universidad de Princeton, trabajó como postdoc en el Tata Institute of Fundamental Research (Bombay, India). Actualmente es Investigador Científico en el Instituto de Ciencias Matemáticas e investiga en geometría algebraica, tanto desde el punto de vista de la matemática pura como en la interacción con la Física.



Enrique Macías Virgós

Profesor en la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Santiago de Compostela, es especialista en Topología. En los últimos años ha organizado seminarios relacionados con las

aplicaciones en imagen médica y análisis de datos e impartido cursos de Bioestadística.



Ana María Mancho

Trabaja en el área de Matemática Aplicada en el Instituto de Ciencias Matemáticas del CSIC. Dirige un grupo de investigación en el que conceptos de la teoría de sistemas dinámicos y de las

ecuaciones en derivadas parciales se aplican a la descripción de flujos geofísicos. Con este fin colabora con grupos líderes del área de las ciencias oceánicas y atmosféricas en universidades e instituciones de todo el mundo. Ha presidido los dos congresos internacionales celebrados hasta la fecha en Castro Urdiales en 2008 y en Madrid 2012 con título "Nonlinear Processes in Oceanic and Atmospheric flows". Además es miembro del panel editorial de la revista *Nonlinear Processes in Geophysics* publicada por la European Geosciences Union y la American Geophysical Union. La doctora Mancho es coautora de más de 40 trabajos de investigación, ha dirigido cinco tesis doctorales y a varios investigadores postdoctorales. Ha sido la investigadora principal de seis proyectos españoles y cinco internacionales. Ha servido como experta evaluadora de proyectos de investigación para varias agencias nacionales e internacionales.



David Martín de Diego

Doctor en Ciencias Matemáticas e investigador científico del CSIC en el Instituto de Ciencias Matemáticas. Investigador activo en el área de Mecánica Geométrica, una temática que

desarrolla y hace uso de nuevas técnicas en Geometría Diferencial con aplicaciones en Física Teórica e Ingeniería. Es autor de unos cien artículos de investigación en revistas internacionales y ha organizado y participado

en distintos congresos internacionales en esta disciplina. Entre otras actividades, destacó su labor como director de *La Gaceta* de la Real Sociedad Matemática Española. Además, ha escrito dos libros de divulgación de las matemáticas: *Matemáticas del Sistema Solar* y *Princesas, abejas y matemáticas*.



Rafael Montenegro

Nació en Las Palmas de Gran Canaria, en 1958. Obtuvo el título de Ingeniero Industrial en el ICAI de la Universidad Pontificia de Comillas en 1981, y el título de doctor Ingeniero Industrial en la ETSII de la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria (ULPGC) en 1989, bajo la dirección de Luis Ferragut. Es catedrático de Matemática Aplicada de la ULPGC desde 1997. Fue director del Departamento de Matemáticas de la ULPGC desde 1990 a 1996, secretario del Instituto Universitario de Sistemas Inteligentes y Aplicaciones Numéricas en Ingeniería (SIANI) de la ULPGC desde 2007, y director de la División de Discretización y Aplicaciones del SIANI. Es coautor de más de 200 publicaciones científicas. Es miembro de diversos comités científicos y organizadores de congresos, y miembro de comités editoriales de revistas y libros internacionales. Es investigador principal de proyectos financiados por organismos nacionales e internacionales, ha recibido varios premios por su labor investigadora y tiene reconocidos cuatro sexenios de investigación. Su principal línea de investigación es la generación de mallas de elementos finitos adaptativos y su aplicación a problemas medioambientales.



Mª Luz Muñoz Ruiz

Obtuvo la licenciatura en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Málaga en 1996. Realizó su tesis doctoral bajo la dirección de los profesores

Carlos Parés Madroñal, de la Universidad de Málaga, y Pierre Orenga, de la Universidad de Córcega, obteniendo el grado de doctora en Matemáticas en 2002. Le fueron concedidos el premio extraordinario de licenciatura y el premio extraordinario de doctorado de la Universidad de Málaga, en la que actualmente trabaja como profesora titular. Es miembro del grupo Ecuaciones Diferenciales, Análisis Numérico y Aplicaciones de dicha universidad. Se dedica al estudio de las ecuaciones en derivadas parciales que modelan las aguas someras y de los sistemas hiperbólicos no conservativos en general, habiendo publicado trabajos sobre ese tema en revistas internacionales y acudido a diversos congresos de carácter nacional e internacional.



Juan José Nieto Roig

Catedrático de Universidad del área de Análisis Matemático en la Universidad de Santiago de Compostela y coordinador del grupo de investigación sobre Ecuaciones Diferenciales. Sus principales intereses en temas de investigación y divulgación son el estudio de los sistemas dinámicos, la modelización matemática y sus aplicaciones a cuestiones biomédicas. Ha sido editor de la revista *Nonlinear Analysis: Real World Applications* y en la actualidad es editor de la revista *Journal of Mathematical Analysis and Applications*.



Rafael Orive

Es doctor en Ciencias Matemáticas e Ingeniería y profesor titular de la Universidad Autónoma de Madrid. Su trabajo se centra en el análisis de ecuaciones en derivadas parciales y sus aplicaciones en fenómenos físicos.



Carlos Parés

Licenciado en Matemáticas por la Universidad de Málaga en 1985 y doctor por las Universidades de Málaga (1989) y Paris VI (1991). Director del grupo Ecuaciones Diferenciales, Análisis Numérico y Aplicaciones de la Universidad de Málaga. Especialista en Análisis Numérico de Ecuaciones en Derivadas Parciales y, en particular, en la resolución numérica de sistemas hiperbólicos no conservativos y su aplicación a la simulación de flujos geofísicos. Autor de más de 40 artículos en revistas internacionales, entre las que se encuentran algunas de las de referencia en Análisis Numérico y Matemática Aplicada y Computacional. Sus artículos han sido objeto de más de 640 citas, atendiendo a la base de datos ISI Web of Knowledge. Director de seis tesis doctorales, investigador Principal de seis proyectos del Plan Nacional de I+D+I de dos proyectos de excelencia de la Junta de Andalucía y coordinador de dos acciones integradas, una con Francia y otra con Italia. Ha sido miembro del comité ejecutivo de la Sociedad Española de Matemática Aplicada entre 2006 y 2012. En la actualidad es miembro de la junta directiva de la red Matemática-Industria math-in y del Managing Board de la European Community on Computational Methods in Applied Sciences. Fue director del Comité de Matemática Aplicada y Computacional de dicha comunidad europea entre 2010 y 2012. Es coordinador de Matemáticas de la Agencia Nacional de Evaluación y Prospectivas desde octubre de 2011.



Christiane Rousseau

Estudió en la Universidad de Montreal (Canadá) donde obtuvo su doctorado en 1977. Después de realizar una estancia postdoctoral en la Universidad de McGill (Canadá), regresó

a la Universidad de Montreal, donde obtuvo el puesto de profesora. Durante toda su carrera ha combinado paralelamente las actividades de investigación y las de divulgación. Efectivamente, Rousseau ha mantenido un firme compromiso con la difusión de las matemáticas, como muestran las numerosas conferencias que ha impartido en escuelas, los campamentos de matemáticas que ha organizado y los artículos de divulgación que ha publicado en revistas matemáticas. Además ha sido presidenta de la Sociedad Matemática de Canadá de 2002 a 2004 y desde 2011 es vicepresidenta de la Unión Matemática Internacional. Como directora del Centre de Recherches Mathématiques ideó y puso en marcha la iniciativa internacional "Matemáticas del Planeta Tierra 2013", que cuenta con el patrocinio de la UNESCO.



Juan José Rué

Estudió matemáticas (2005) e ingeniería superior en telecomunicaciones (2007) en la Universitat Politècnica de Catalunya, donde también realizó su doctorado en el campo de la

combinatoria enumerativa y analítica. Antes de llegar al ICMAT fue investigador en el Laboratorio de Informática (LIX) de l'École Polytechnique de París. Actualmente es investigador JAE-DOC en el Instituto de Ciencias Matemáticas, además de ser profesor honorario de la UAM. Sus principales áreas de interés son la combinatoria enumerativa y la teoría aditiva de números, especialmente su interacción y sus vínculos con la probabilidad y la algorítmica. Ha realizado una amplia actividad divulgadora, en charlas y talleres, y como autor de artículos de divulgación en prensa y revistas especializadas, y del libro *El arte de contar: combinatoria y enumeración*, publicado por RBA.



Carlos Vázquez Cendón

Desde el año 2000 es catedrático de Matemática Aplicada en la Universidad de A Coruña. Es licenciado en Matemáticas y en Económicas por la Universidad de Santiago, doctor en Matemáticas por la Universidad de Santiago y Doctorat Troisième Cicle por la Universidad Claude Bernard de Lyon. Su investigación se enmarca en el modelado, análisis matemático y simulación numérica en ordenador de problemas que surgen en distintas ramas de las ciencias aplicadas y la ingeniería. Ha trabajado fundamentalmente en modelos que provienen de la mecánica, del medio ambiente o de las finanzas cuantitativas. Es editor asociado de las revistas científicas *SIAM Journal of Scientific Computing*, *Journal of Computational Finance*, *Abstract and Applied Analysis*, *Sema Journal* y *Open Numerical Methods Journal*. Ha dirigido nueve tesis doctorales. Ha sido presidente de la Sociedad Española de Matemática Aplicada entre 2006 y 2010. Es el coordinador del grupo de investigación M2NICA de la Universidade da Coruña.



Ana Zumalacárregui

Matemática licenciada por la Universidad Autónoma de Madrid. Estudiante predoctoral en el Departamento de Matemáticas de la UAM y miembro del Instituto de Ciencias Matemáticas (ICMAT). Su investigación se centra en la Teoría de Números Aditiva y Combinatoria. Más concretamente, trabaja en el estudio de propiedades aritméticas en sucesiones aleatorias de enteros, así como en la distribución y concentración de soluciones en ecuaciones en congruencias.



GOBIERNO
DE ESPAÑA

MINISTERIO
DE ECONOMÍA
Y COMPETITIVIDAD

FECYT 
www.fecyt.es

FUNDACIÓN ESPAÑOLA
PARA LA CIENCIA
Y LA TECNOLOGÍA

sm

MATEMÁTICAS
DEL
PLANETA
TIERRA



GOBIERNO
DE ESPAÑA

MINISTERIO
DE ECONOMÍA
Y COMPETITIVIDAD

FECYT



FUNDACIÓN ESPAÑOLA
PARA LA CIENCIA
Y LA TECNOLOGÍA

Sm

CUADERNO
DE ACTIVIDADES

Este cuaderno de actividades es un material concebido como Anexo a la Unidad Didáctica “Matemáticas del Planeta Tierra”, editada y coordinada por la Fundación Española para la Ciencia y la Tecnología (FECYT) y dentro de un convenio de colaboración entre dicha Fundación y SM.

En su realización ha participado el siguiente equipo:

Autoría

Fernando Alcaide, Miguel Nieto

Edición

José González López de Guereñu, Juan Alberto Torresano

Corrección

Alejandro Feijóo

Fotografía

Fidel Puerta / ARCHIVO SM; Kmitu / Dreamstime; Gary Whitton / GETTY IMAGES; INGIMAGE; THINKSTOCK; 123RF; SHUTTERSTOCK; AGE FOTOSTOCK; NASA.

Ilustración

Juan Antonio Rocafort / ARCHIVO SM, Bartolomé Seguí, GlezBros, Antonio Muñoz, Ariel Alejandro Gómez, Juan Pablo Mora, Lluís Martí.

Edición gráfica

Fidel Puerta

Diseño de cubierta e interiores

Estudio SM

Coordinación editorial de Matemáticas

Josefina Arévalo

Dirección de Arte del proyecto

Mario Dequel

Dirección editorial

Aída Moya

Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra solo puede ser realizada con la autorización de sus titulares, salvo excepción prevista por la ley. Diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos, www.cedro.org) si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra.



MATEMÁTICAS DEL PLANETA TIERRA

Cuaderno de actividades

Ciencias de la Tierra

- Un garbeo por la Tierra 2
- La Tierra... ¿una esfera perfecta? 4
- Entre la Tierra y el cielo 6

La vida en la Tierra

- ¡Temblad patógenos! Llegan las mates! 8
- El árbol genealógico de nuestra especie 10
- Números en lingotes 12
- Hospital matemático 14

Sostenibilidad

- El tiempo atmosférico... ¡un caos! 16
- Números y dinero 18
- La especie más catastrófica: el hombre 20
- Caminos matemáticos 22
- Protección matemática: la más fiable 24
- Energías renovables 26

Los alrededores de la Tierra y más allá

- Medir a mucha distancia 28
- Las estrellas desde la Tierra 30

Este cuaderno junto con las soluciones de las actividades está accesible, previo registro gratuito, a todos los docentes en www.smconectados.com, como un recurso asociado a primero de bachillerato (material de apoyo y refuerzo).

Un garbeo por la Tierra

Como nuestro planeta es aproximadamente una esfera, al intentar representar su superficie en un mapa se nos plantea un problema importante, ya que si tratamos de ajustar una hoja de papel a dicha superficie, veremos que comienzan a formarse pliegues.

No es posible envolver una esfera en un papel sin que aparezcan arrugas. ¿Cómo se podría representar el mapa de la Tierra sin que quedase arrugado?

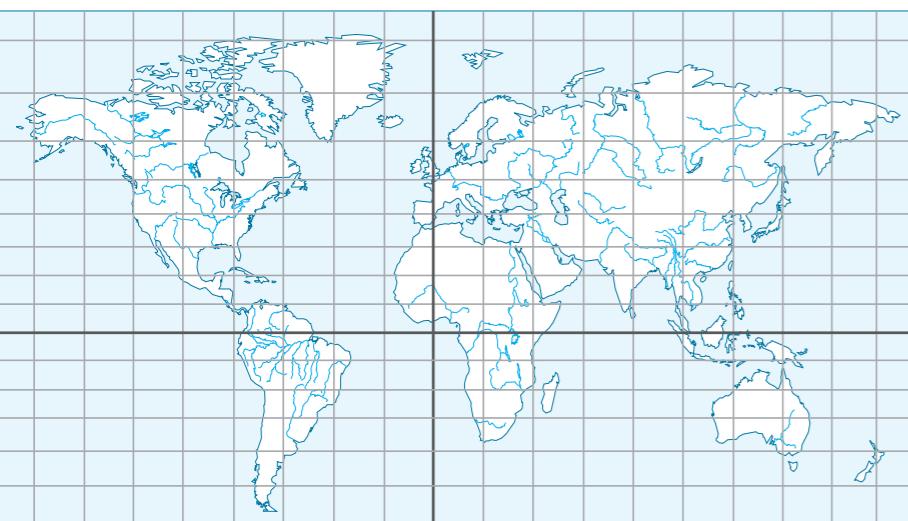
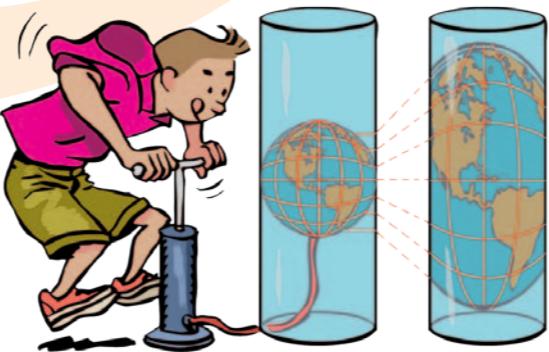


La Tierra cilíndrica

Al contrario que la esfera, la superficie de otros cuerpos geométricos como el cilindro o el cono, sí se puede desarrollar en el plano cortándola a lo largo de una recta y desplegándola.

Fue en el s. XVI cuando a Mercator se le ocurrió “envolver al planeta en un cilindro”, proyectar la superficie sobre las paredes y después “desplegar” el cilindro en un plano.

Imagínate que introduces la Tierra en un cilindro y la vas hinchando para que se amolde a sus paredes. Las zonas cercanas al Ecuador no se deformarán mucho pero a medida que subimos en latitud hacia los polos la deformación será cada vez mayor.



En esta proyección se conservan los ángulos, pero no se mantiene la relación entre las áreas, que aparecen exageradas conforme nos acercamos a los polos.

Compara de forma aproximada, las superficies de Groenlandia y Sudamérica en el mapa. Busca en internet las superficie reales de ambos territorios y compáralas, ¿qué observas?

Pero entonces... ¿cómo se calcula la distancia exacta entre dos lugares de la Tierra?



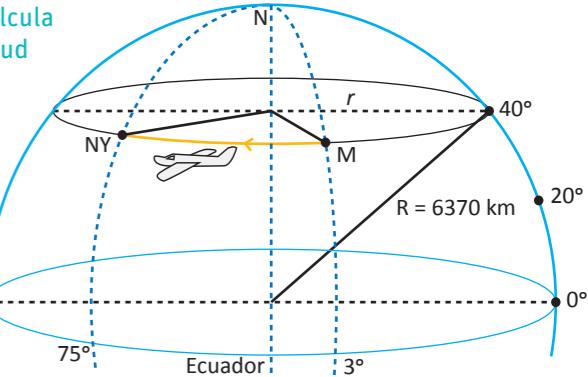
El viaje redondo: ¡Vaya vacaciones!

1ª etapa: ¡A Nueva York!... por el paralelo 40°

Nuestro avión vuela entre Madrid y Nueva York, que tienen aproximadamente la misma latitud (40°N), siguiendo el paralelo.

- a) Observa la figura y calcula el radio r para la latitud 40°N . (Datos: Radio medio de la Tierra: 6 370 km).

- b) Busca en el dibujo la longitud en grados aproximada de Madrid y de Nueva York y calcula la diferencia en longitud que hay entre ambas ciudades.
- c) Calcula la distancia que le corresponde al arco de paralelo M-NY (Madrid-Nueva York)

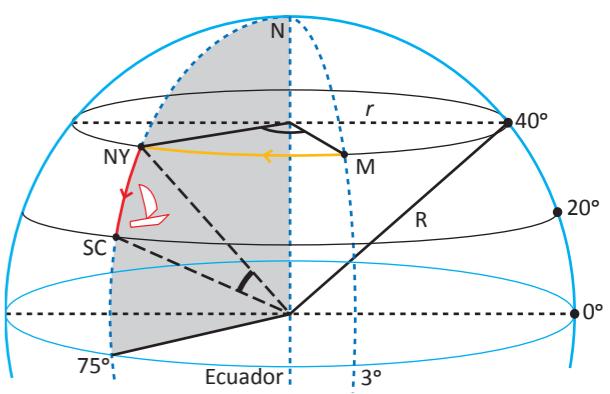


2ª etapa: ¡Hacia Cuba! Por el meridiano es fácil.

Si ahora navegamos en velero de Nueva York a Santiago de Cuba, ¿cuántas millas náuticas recorremos?

(Pista 1 milla náutica = 1,852 km)

- a) Como están prácticamente en el mismo meridiano, solo has de buscar en el dibujo la latitud de ambas ciudades.
- b) Réstalas y calcula la distancia en km que le corresponde al arco de meridiano NY-SC; después pasa el resultado a millas y ya está.



3ª etapa: ¡Volvemos a casa! ¿Pitágoras esférico?

Para hallar la distancia más corta entre dos puntos de la superficie terrestre que no estén en el mismo meridiano, hay que hacer un cálculo más laborioso (aquí no vale el teorema de Pitágoras). Aproximando la longitud del ecuador por 40 000 km, y siendo

θ_1 la latitud y ϕ_1 la longitud del punto 1 (SC)

θ_2 la latitud y ϕ_2 la longitud del punto 2 (M)

tendremos que aplicar esta terrible fórmula de trigonometría esférica:

$$d = \frac{40000}{360} \arccos [\cos(90-\theta_1)\cos(90-\theta_2) + \sin(90-\theta_1)\sin(90-\theta_2)\cos(\phi_1 - \phi_2)]$$

- a) Si el vuelo de vuelta lo hacemos siguiendo el camino más corto, ¿qué distancia recorreremos hasta Madrid?
- b) Compara todos los datos obtenidos en tu viaje con los que encuentres en Internet. ¿Hay mucha diferencia con los valores que has obtenido en esta actividad?

La Tierra... ¿una esfera perfecta?

Aproximadamente, nuestro planeta es una esfera... pero no es una esfera perfecta.

Para empezar, el radio de la Tierra no es uniforme ya que el planeta está ligeramente achatado por los polos y, así, el diámetro en esas zonas es hasta 43 km menor que en el Ecuador.

Una consecuencia de este hecho es que las cimas de las montañas más cercanas al Ecuador son los puntos más alejados del centro de la Tierra.

Algunas características de la Tierra

Masa	$5,9736 \times 10^{24} \text{ kg}$
Volumen	$1,083 \times 10^{12} \text{ km}^3$
Densidad	$5\,516 \text{ kg/m}^3$
Superficie	$510,072 \times 10^6 \text{ km}^2$
Ecuatorial:	$a = 6\,378,1 \text{ km}$
Polar:	$b = 6\,356,8 \text{ km}$
Radio (distancia al centro)	Para una latitud λ : $R(\lambda) = ab \sqrt{\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \lambda}{b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \lambda}}$

¿Cuál es la montaña más alta?

El volcán Chimborazo, en Ecuador, se eleva 6 310 m sobre el nivel del mar. La altura del Everest es de 8 848 m.

¿Cuál crees que tiene su cima a mayor distancia del centro de la Tierra: el Chimborazo o el Everest?

Para contestar utiliza los datos del cuadro inicial y estima las latitudes de ambas montañas a partir del mapa.



Además, la Tierra no tiene una superficie lisa. Las montañas distribuidas a lo largo del planeta hacen que sea ligeramente rugosa... ¿o no?



¿Podemos jugar al billar con la Tierra?

Las bolas de billar deben ser esferas casi perfectas. Se acepta una desviación máxima de un 0,22%, es decir, que cualquier pequeño bultito o agujero no puede medir más de un 0,22% del radio de la bola.

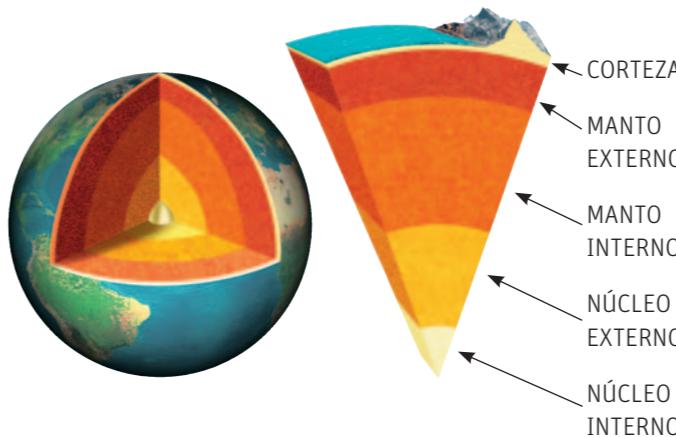
- Calcula la desviación que provocan el Everest y el Chimborazo en relación con el radio medio de la Tierra y compáralas con la de la bola de billar. ¿Qué observas?
- Calcula ahora el porcentaje de desviación que provoca el achatamiento polar en relación con el radio medio terrestre. ¿Es admisible según las reglas del billar?

Viaje al centro de la Tierra

Vale, la Tierra no es una esfera perfecta, pero al menos... ¿será sólida?

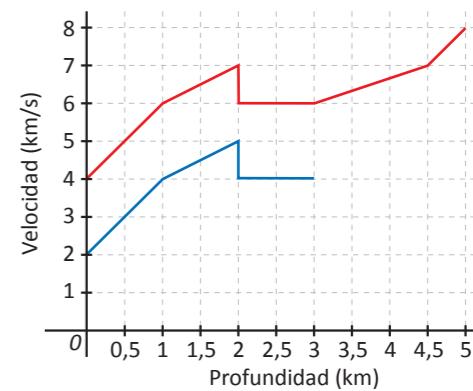
Antes se creía que la Tierra estaba formada por capas sólidas, con túneles por los que se podía ir descendiendo, como describió Julio Verne en su novela "Viaje al centro de la Tierra". En ella, varios aventureros exploraban el interior de la Tierra, donde encontraban incluso lagos y selvas poblados de animales prehistóricos.

En realidad, el interior de la Tierra está formado por varias capas de distinta densidad, algunas sólidas y otras fluidas.



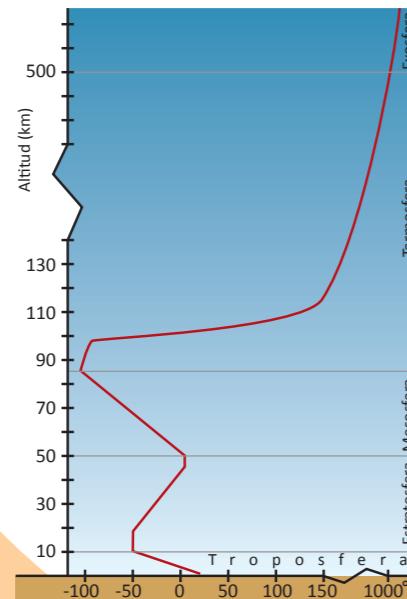
- En un terremoto, las ondas P (primarias) son más rápidas. Se desplazan a través de materia sólida, pero también a través de fluidos, aunque de forma algo más lenta.
- Las ondas S (secundarias) son más lentas, y solo se desplazan a través de sólidos.
- Ambas ondas se transmiten de forma más rápida si aumenta la rigidez del medio por el que se propagan.

En el gráfico aparece la variación de la velocidad de propagación de las ondas P y S en el planeta Billar, cuyo radio es de 6 370 km.



- ¿A qué tipo de onda corresponde cada línea?
- ¿Cuántas capas puedes distinguir? ¿Cuántas discontinuidades (variaciones bruscas en la velocidad)?
- ¿Cómo varía la rigidez de los materiales en cada capa?
- Para cada tipo de onda, estima cuánto tiempo tarda en atravesar Billar y llegar a las antípodas. Para ello utiliza el valor de la velocidad en el punto medio de cada tramo recto.

Entre la Tierra y el cielo



La atmósfera que rodea la Tierra hace posible que nuestro planeta sea habitable. Filtra la radiación solar y retiene la infrarroja, haciendo que la temperatura sea agradable. Además contiene los gases imprescindibles para la vida.

La atmósfera no es una capa homogénea. Sus propiedades cambian con la altura. Así, su densidad va disminuyendo y la temperatura varía de distinta forma en cada capa.

En la atmósfera se distinguen cinco capas de densidad decreciente desde la primera, la troposfera, hasta la más exterior o exósfera (figura izquierda). La altura de cada capa varía según las zonas; por ejemplo, la troposfera tiene 17 km de espesor en el ecuador y solo 7 en los polos.

¿Hace frío ahí arriba?

En la troposfera, la temperatura disminuye unos $0,64^{\circ}\text{C}$ por cada 100 m de ascenso.

- Un globo asciende desde el nivel del mar hasta 2 km. Si la temperatura al comienzo era de 20°C ., calcula la temperatura en el exterior del globo cada 500 metros de ascenso.
- A la vista del gráfico del comienzo de página, describe cómo varía la temperatura en cada capa de la atmósfera.

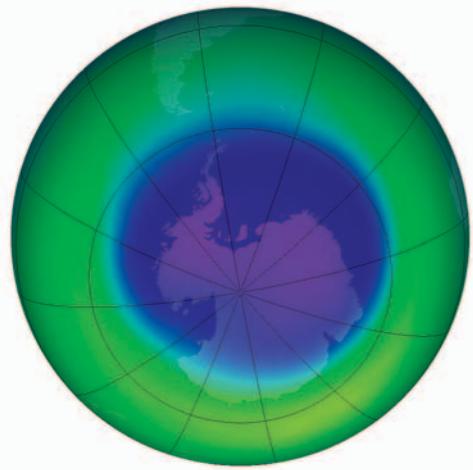


El descosido atmosférico

Aunque en la estratosfera no hay organismos vivos, contiene una zona esencial para la vida: la ozonosfera o capa de ozono, que filtra la radiación ultravioleta del sol. Debido a la acción de varios gases contaminantes como los clorofluorocarbonos, esta capa se adelgaza de forma acusada sobre todo en los inviernos australes, originando el llamado "agujero de ozono".

- Estima la superficie que ocupa el agujero de ozono. Supón que ocupa toda la superficie entre el paralelo 60°S y el polo sur (usa trigonometría y busca la fórmula del área de un casquete esférico).
- ¿Cuántas veces cabría España en el agujero?
- ¿Cómo piensas que puede afectar a los seres vivos de la zona?

Vale, la atmósfera es importante pero no notamos su presencia porque no pesa, ¿o sí?



Ligero como el aire

La densidad de la atmósfera no se mantiene constante con la altura, de tal forma que es mayor cuanto más cerca de la superficie nos encontramos.

Utiliza la información de la primera figura de la página anterior y supón que la Tierra es una esfera de radio 6 370 km y que la masa de la atmósfera es de $5,1 \cdot 10^{18} \text{ kg}$.

- Calcula el volumen de las cuatro primeras capas de la atmósfera.
- Se estima que el 85% de la masa de la atmósfera se encuentra en la capa inferior, la troposfera. ¿Cuál es la densidad media de esta capa?
- La estratosfera contiene un 9% de la masa total de la atmósfera. ¿Cuál es su densidad media?

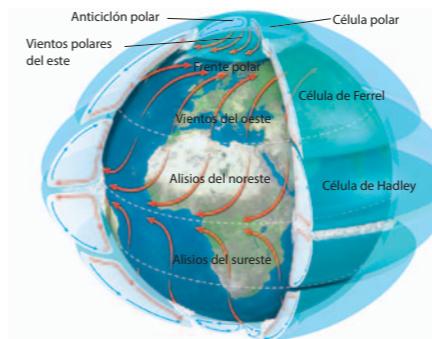


Globo meteorológico de la NASA lanzado en la Antártida para analizar la atmósfera en altura.

Volando voy, volando vengo

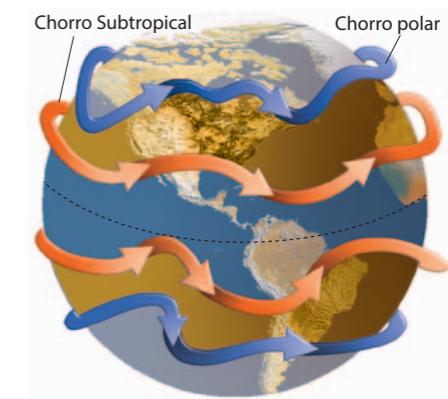
El meteorólogo inglés Hadley observó a comienzos del siglo XVIII que las corrientes de aire parecían desplazarse de las zonas ecuatoriales, donde el aire es más cálido, a las zonas polares, donde se enfriaban y regresaban hacia el Ecuador. Este ciclo se llamó "celda de Hadley".

Más tarde se descubrió que había varias celdas más, y que la rotación terrestre también influía sobre los vientos. Así se llegó a una descripción global de las corrientes atmosféricas.



En las zonas fronterizas entre masas de aire frío y masas de aire cálido, se forman en altura unas fuertes corrientes, las **corrientes de chorro (jet streams)**. Estas corrientes de aire alcanzan grandes velocidades, y se usan para ganar velocidad y ahorrar combustible en los vuelos.

Así, se tarda hasta una hora menos al volver volando de Nueva York a Madrid que al ir, aunque haya que recorrer más distancia para aprovechar el chorro.



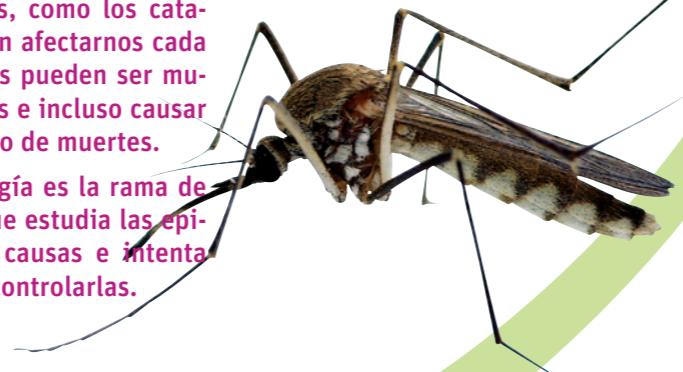
Un piloto quiere hacer un viaje de ida y vuelta entre dos ciudades situadas a 5 850 km de distancia, y en ambos recorridos va a seguir la misma corriente de chorro. A la ida va a favor de corriente, y tarda 5h 45 min. En cambio, a la vuelta tiene el viento en contra, y emplea dos horas más. En ambos recorridos influye la velocidad de la corriente y la velocidad media que consiguen los motores del avión. Supuesto que el valor de ambas velocidades no cambia en los dos viajes, ¿podrías calcularlas?

¡Tremblad patógenos! ¡Llegan las mates!

Cuando una enfermedad afecta a un gran número de personas en una población, recibe el nombre de epidemia.

Hay epidemias de enfermedades no muy graves, como los catarros que suelen afectarnos cada año, pero otras pueden ser mucho más graves e incluso causar un gran número de muertes.

La epidemiología es la rama de la medicina que estudia las epidemias y sus causas e intenta prevenirlas y controlarlas.



Un visitante inesperado

La tía de Carlos ha venido a visitarle. Tiene un catarro poco importante, pero molesto... y muy contagioso. Poco tiempo después, la enfermedad se ha extendido por la ciudad.

Un epidemiólogo que ha estudiado la enfermedad ha llegado a la conclusión de que un infectado contagia a otras dos personas cada 10 minutos. En la tabla inferior derecha se recoge el número total de enfermos durante la primera hora.

- Completa la tabla y escribe la función que relaciona el tiempo transcurrido y el número de enfermos.
- ¿Qué tipo de función es?
- ¿En cuánto tiempo se superará el millón de enfermos?
- ¿Crees que este modelo es razonable para estudiar la evolución de la epidemia?

Realmente, ni los datos de la tabla ni el modelo son realistas, ya que no tienen en cuenta si los enfermos sanan y dejan de transmitir la enfermedad, el tamaño de la población...

Al estudiar la evolución de una enfermedad, se ha obtenido que el número de personas que la han padecido se puede representar por la función $n(t) = \frac{500}{1 + 499e^{-0.15t}}$ (t es el tiempo transcurrido en días.)

- Haz una tabla con el número de enfermos cada 10 días, hasta 60 y compara los resultados con los de a). Calcula con esos datos el número de nuevos afectados en cada uno de esos intervalos.
- Representa los datos en una gráfica. ¿Qué observas? Parece que, según este modelo, el número de enfermos no sobrepasará una determinada cantidad. ¿Cuál es?



Tiempo (min)	N.º enfermos
0	1
10	3
20	9
30	27
40	...
50	...
60	...

¿Podrán las mates detectar e identificar enfermedades y factores de riesgo?

Los números buscan la enfermedad

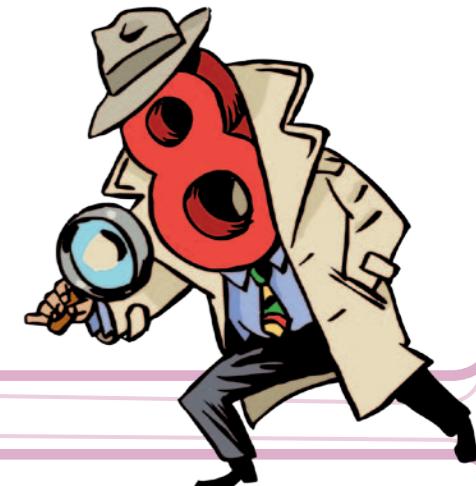
Hay varios test que permiten detectar la presencia de los virus o bacterias que causan enfermedades a partir de un análisis de sangre. La fiabilidad de esas pruebas se puede estimar usando herramientas matemáticas, relacionadas con la probabilidad y la estadística.

Se sabe que una enfermedad afecta al 1% de la población. Para poder tratarla adecuadamente es fundamental detectarla lo antes posible. Con este fin, se diseña un test, de forma que un resultado positivo en ese test indica que el paciente está enfermo.

El test para esa enfermedad se considera muy fiable, ya que el 99,9% de los pacientes enfermos dan positivo en el test, y el 99,9% de los pacientes sanos dan negativo.

- Si la población tiene 100.000 personas, ¿cuántas estarán enfermas?
- ¿Cuántos de esos enfermos darán positivo en el test?
- Completa la tabla de la derecha.
- Con estos datos, si una persona da positivo en el test, ¿qué probabilidad hay de que esté realmente enferma?

	Sanos	Enfermos	Total
Test +			
Test -			
Total			100.000



Las matemáticas encuentran al culpable

Hasta mediados del siglo xx, ni siquiera estaba claro si el tabaco era un factor importante en el desarrollo de enfermedades. Los estudios estadísticos han demostrado que las personas fumadoras tienen un riesgo mucho mayor de sufrir un cáncer de pulmón que las no fumadoras, tanto más cuanto mayor es la cantidad de tabaco consumida.

La Organización Mundial de la Salud (OMS) considera el tabaquismo una epidemia, y ha identificado una serie de medidas eficaces para reducir el consumo de tabaco, conocidas como "MPOWER".

En un estudio estadístico sobre 180 personas se obtienen los resultados que aparecen en la tabla.

	Sanos	Enfermos	Total
Fumador	10	60	70
No fumador	90	20	110
Total	100	80	180

- ¿Qué probabilidad tiene un fumador de desarrollar una enfermedad? ¿Y un no fumador?
- Si una persona está enferma, ¿qué probabilidad hay de que sea fumadora?

mPOWER

Monitor: vigilar el consumo de tabaco y las políticas de prevención

Protect: proteger a la población del humo de tabaco

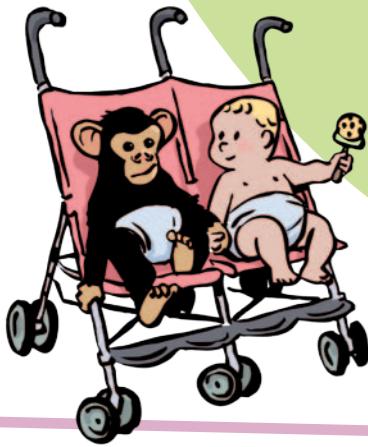
Offer: ofrecer ayuda para dejar el tabaco

Warn: advertir de los peligros del tabaco

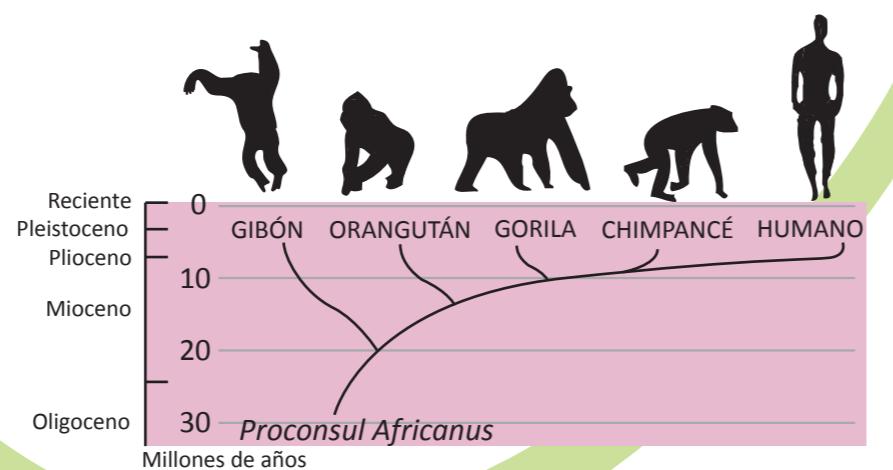
Enforce: hacer cumplir las prohibiciones sobre publicidad, promoción y patrocinio del tabaco

Tomado del "Informe OMS sobre la epidemia mundial de tabaquismo 2013"

El árbol genealógico de nuestra especie



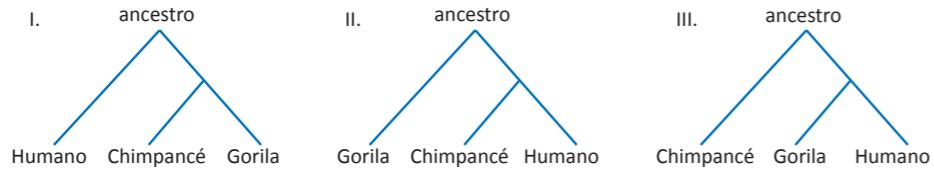
Seguro que has oído la expresión “el hombre desciende del mono”. ¿Es así en verdad? ¿Es precisa esta afirmación? ¿Piensas que el comentario “qué monos son estos niños” tiene que ver con nuestra herencia biológica?



La teoría de la evolución de Darwin afirma que las especies terrestres tienen ancestros comunes. Para representar esa evolución, utilizó el **árbol filogenético**, en el que se representan las especies de la Tierra en las hojas, y los ancestros comunes en los nodos. En la imagen superior puedes ver el árbol filogenético de la superfamilia de los homínidos.

Árboles mate-genealógicos

En matemáticas estos “árboles” se llaman grafos (conjuntos de vértices unidos por aristas) conexos y sin ciclos. Si de cada vértice salen dos ramas se llama binario (cada especie ancestral dio lugar a dos especies nuevas).



- En el gráfico anterior se muestran los tres árboles filogenéticos posibles que relacionan tres especies (humano, gorila y chimpancé). Como ves, todos tienen cuatro ramas.
 - Dibuja tres árboles distintos para cuatro especies y otros tres para cinco. ¿Cuántas ramas tiene cada uno?
 - Calcula el número de ramas que tendrá un árbol de m especies.
- Al añadir una especie al árbol de tres, se puede bifurcar alguna de las ramas existentes o añadir un antepasado común anterior al primero. De ese modo, ¿cuántos árboles distintos de cuatro y de cinco especies se pueden formar?
- Deduce por inducción que el número de árboles binarios con raíz de m especies es:

$$(2m - 3) \cdot (2m - 5) \cdot (2m - 7) \cdot \dots \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1$$

¿Te atreves a poner números a la diferencia genética entre especies?

Explorando los genes

Conforme aumenta el número de especies, el de posibles árboles que se pueden formar se dispara. Por eso hay que tener criterios que permitan elegir el más adecuado. Incluso para tres especies, ¿cómo determinamos el árbol filogenético más adecuado de entre los tres posibles?

A la derecha aparece parte de la secuencia genética de un lémur, un macaco y un tarsero. La distancia evolutiva mide la separación entre secuencias. Por ejemplo, dirímos que la distancia entre lémur y macaco es 8, puesto que sus secuencias difieren en 8 caracteres.

- Identifica las iniciales que aparecen en la secuencia genética con los distintos nucleótidos del ADN.
- Calcula la distancia entre lémur y tarsero y entre macaco y tarsero.
- De los tres árboles que se pueden formar, ¿cuál crees que representa mejor la relación entre lémur, macaco y tarsero?

AACTTCATGC TCACCGAGGC CTGTAATTGC ATGAGATCAT	AAGGTCAATT TCAACGAGGC ATGTAACTGC ATGACATGAT	AACGTCATTC TCACCGATGC CTGTAATTGC ATGACATCAT

¿Parientes cercanos?

Las diferencias entre los ADN de las especies actuales no reflejan todos los cambios ocurridos durante la evolución. Por ejemplo, la secuencia TTGA de un ancestro pudo mutar a TAGA y luego a TCGA, y así un cambio quedaría oculto para nosotros, que solo conocemos el resultado final. Para considerar estos cambios ocultos se usan modelos matemáticos de evolución más complejos. En ellos se define la **distancia filogenética** entre dos secuencias de ADN como la cantidad que estima el máximo más verosímil de la cantidad de cambios acumulados entre las dos durante la evolución. En el modelo más sencillo –Jukes-Cantor– el número de cambios esperados (incluyendo los ocultos) entre dos secuencias, **distancia Jukes-Cantor**, es igual a $d = -\frac{3}{4} \ln\left(1 - \frac{4p}{3}\right)$, donde p representa la fracción de nucleótidos distintos entre ambas.

- Comprueba que la distancia de Jukes-Cantor entre lémur y macaco es 0,23 y determina las existentes entre lémur y tarsero y entre macaco y tarsero.
- Las secuencias de la tabla corresponden, respectivamente, a la mosca del vinagre, al gusano de seda, al piojo del cabello humano y a unos insectos parásitos de otros insectos. Calcula sus distancias de Jukes-Cantor.



Drosophila melanogaster CGTCATTCTACCGATGCC GTACTTGCTGACATCATAA	Bombyxmori GGTCATTCTAACGAGGCAT GTAAC TGATGACATGATAA	Pediculushumanus CTTCATGCTCACCGAGGCCT GTAATTGCATGAGATCATAA	Mengenillamoldrzyki CGTCATGCTACCGAGGCCT GTAATTGCATGACATCATAA
--	---	--	--

Números en lingotes

Además del conocido Bugs Bunny, hay otros conejos que son famosísimos, al menos entre los matemáticos. El problema de los conejos es un ejemplo clásico de cómo las matemáticas se pueden aplicar para calcular el crecimiento de una población cuando este no tiene limitaciones:

Imagínate que un granjero pone una pareja de conejos, macho y hembra, en un recinto vallado. Sabiendo que estos paren una vez cada mes, que los nacidos también son macho y hembra y que, a su vez, éstos empiezan a parir al segundo mes de su nacimiento, calcular el número de parejas que habrá al cabo de n meses.

La solución la da la siguiente secuencia de números: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...
¿Sabrías continuarla? No ha sido difícil, ¿verdad? Cada número se obtiene sumando los dos anteriores: 2=1+1, 3=1+2, 5=2+3... Esta inocente sucesión, conocida como **sucesión de Fibonacci**, esconde en su interior una sorpresa: **el número de oro**.



Busca la razón áurea

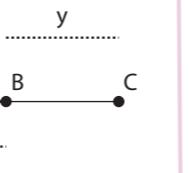
Un segmento está dividido según la proporción áurea cuando la razón entre la longitud total y la de la parte mayor es igual a la razón entre las partes mayor y menor. Si llamamos x a la parte mayor e y a la parte menor, esta relación se puede expresar de la siguiente forma:

$$\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y} \rightarrow \frac{x+y}{x} = \frac{x}{y} \rightarrow 1 + \frac{y}{x} = \frac{x}{y}.$$

Llamando $\phi = \frac{x}{y}$, se obtiene la ecuación $1 + \frac{1}{\phi} = \phi$, cuya solución positiva es el llamado **número de oro, ϕ (phi)**.

- Calcula el número ϕ resolviendo la ecuación anterior.
- Construye una tabla en la que dividas cada término de la sucesión de Fibonacci entre el anterior. Calcula así los 15 primeros términos de esta nueva sucesión.
- La sucesión anterior formada por los cocientes, $\frac{f_{n+1}}{f_n}$, tiene límite. Comprueba que ese límite es el número de oro, es decir, $\phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n}$

(Pista: recuerda que $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ y utiliza que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n-1}}{f_n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{f_{n-1}}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n}}$)



Vale, vale, pero...
¿esto es algo más que un divertimento matemático?

Las plantas..., ¿saben matemáticas?

Mientras el tallo de una planta crece, las hojas van brotando formando un ángulo determinado (α en la figura derecha) de forma que la de la parte superior no tape completamente a las que quedan por debajo. Si, por ejemplo, las hojas salen cada media vuelta (180°), la hoja superior no quita luz a las que quedan justo debajo, ni impide que les llegue el agua. Este crecimiento se da aproximadamente en algunos árboles, como el olmo o el tilo.

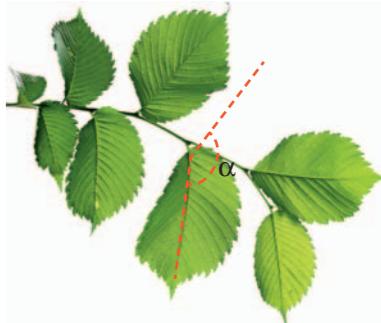
El **ángulo de divergencia**, α , es el ángulo de separación entre dos hojas consecutivas. En el olmo ya se ha dicho que es 180°, igual a media vuelta completa, esto es $\frac{1}{2}$ de 360°. La fracción $\frac{1}{2}$ es el cociente de dos números de la sucesión de Fibonacci, $\frac{f_1}{f_3}$. Este fenómeno ocurre con frecuencia.

a) Completa la tabla siguiendo el ejemplo del olmo.

b) Si $\phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n}$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+2}}{f_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f_{n+2}}{f_{n+1}} \cdot \frac{f_{n+1}}{f_n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+2}}{f_{n+1}} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n}$

¿Cuánto vale $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n}{f_{n+2}}$? ¿Cuál es el ángulo de divergencia correspondiente?

c) El ángulo que has encontrado se llama **ángulo áureo**. A partir de esta definición, calcula su valor.



Cociente entre términos de la serie de Fibonacci	α	Tipo de planta
$\frac{f_1}{f_3} = \frac{1}{2}$	180°	Olmo, tilo
$\frac{f_2}{f_4} = ?$?	Haya, avellano, zarzamora
$\frac{f_3}{f_5} = \frac{2}{5}$?	Roble, manzano, acebo, albaricoque
$\frac{f_4}{f_7} = \frac{3}{8}$	135°	Chopo, álamo

Sorpresa de Fibonacci

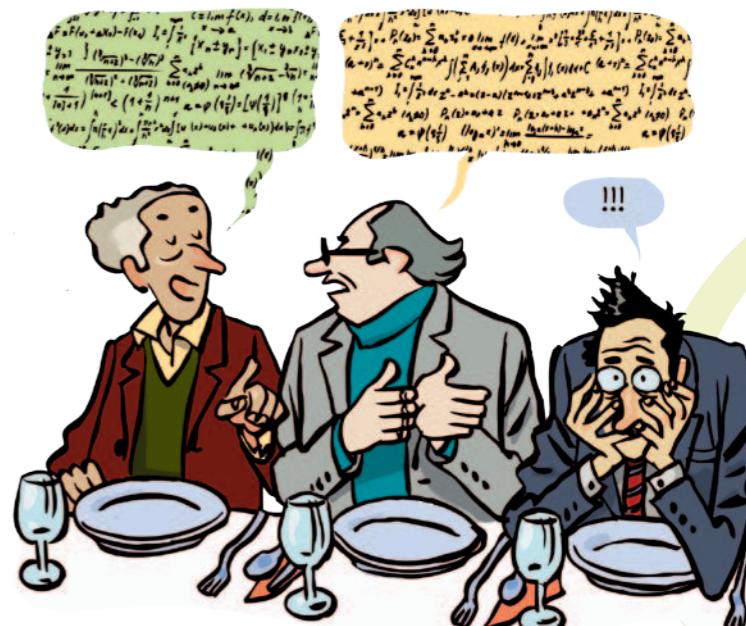
¿Crees que los números de Fibonacci aparecen solo en matemáticas y en la naturaleza? Pues va a ser que no. Fíjate:

En una comida algunos de los comensales son matemáticos. Como siempre que dos matemáticos se sientan juntos se ponen a hablar de teoremas y otras rarezas, se decide que dos matemáticos no pueden sentarse juntos.

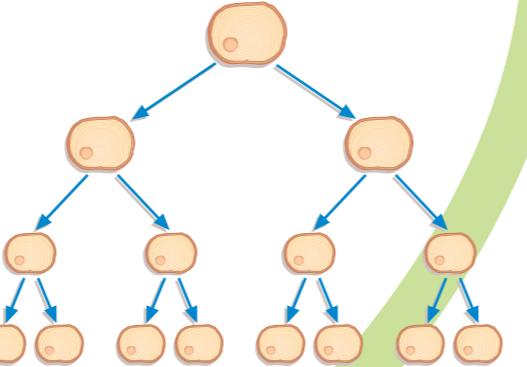
Si solo hay una silla, hay dos posibilidades: que se siente un matemático (M) o un no-matemático (N).

Con dos sillas, hay tres opciones: MN, NM, NN (se prohíbe MM).

Calcula el número de opciones hasta un máximo de ocho sillas. ¿Qué observas?



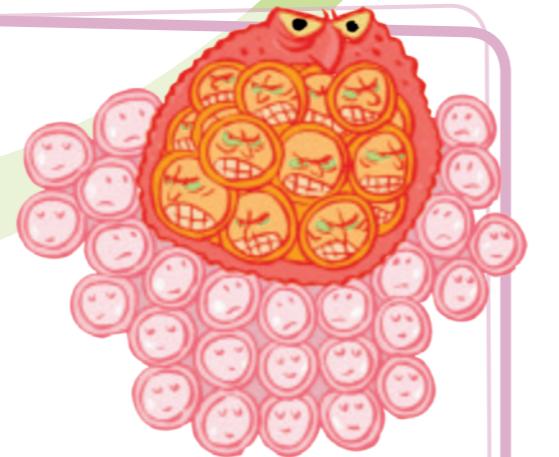
Durante el crecimiento de un tumor cancerígeno tiene lugar una proliferación de células malignas. El proceso normal de división celular, llamado mitosis, requiere normalmente de señales externas para llevarse a cabo. Sin embargo, en el proceso canceroso, las mitosis se producen sin necesidad de este tipo de señales y las divisiones tienen lugar de forma descontrolada.



¿Cómo crece un tumor?

Supongamos que tenemos una célula cancerosa, que se divide en dos cada día.

- Da la expresión que da el número de células cancerosas al cabo de n días
- ¿Cuántas células cancerosas habrá al cabo de 6 días? ¿Y de 10 días?
- ¿En cuántos días se alcanzará el millón de células malignas?
- Calcúlalo después de 31 días suponiendo células esféricas de radio 10^{-2} cm.
- Si el tumor tuviera forma esférica, ¿cuál sería su radio?



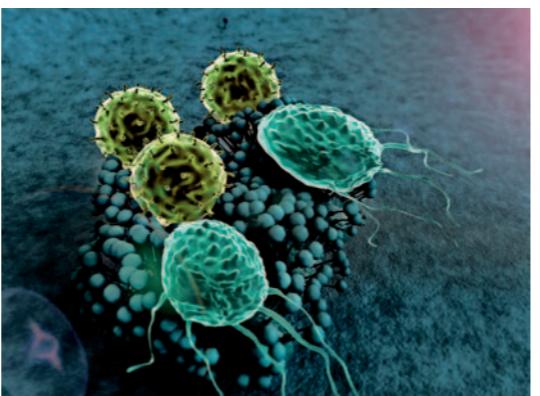
En general, se puede encontrar una fórmula para estimar el crecimiento del tumor. Si este fuera exponencial, el radio tras t días vendría dado por $R(t) = r_c \cdot e^{kt}$, siendo $r_c = 10^{-2}$ mm el radio de una célula cancerosa y k una constante.

- A partir de la fórmula anterior, ¿en cuánto tiempo duplicará el tumor su radio?

Pero el crecimiento del tumor en realidad es lineal y no exponencial, sino lineal, ya que está limitado por varios factores:

- Las células no se dividen exactamente, todas a la vez, al final de cada día.
- Las células del centro del tumor no tienen nutrientes ni oxígeno, y son necróticas, no se dividen más. Solo las células cercanas al borde pueden proliferar.

La **angiogénesis** es el proceso en el que el tumor atrae hacia sí vasos sanguíneos que lo rodean y nutren. En ese momento las células cancerígenas entran en la corriente sanguínea y llegan a otros órganos. Para combatir la enfermedad es fundamental conocer ese proceso y frenarlo.



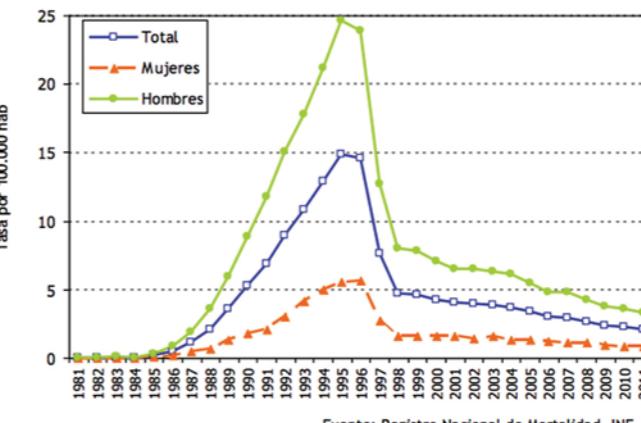
Y además de las fórmulas, ¿qué otras herramientas matemáticas ayudan a los doctores?

El ataque de los virus: el SIDA

En los años 80 del pasado siglo XX, comenzó a extenderse rápidamente una enfermedad que atacaba al sistema inmunitario y causaba un alto número de víctimas: el síndrome de inmunodeficiencia adquirida o SIDA (en muchos informes se le nombra por sus iniciales en inglés: AIDS, acrónimo de Acquired ImmunoDeficiency Syndrome).

El SIDA está producido por la acción de un virus, el VIH (Virus de la Inmunodeficiencia Humana, HIV en inglés). Cuando infecta a un ser humano, el VIH ataca a los linfocitos de un tipo concreto, los CD4. Al penetrar en una de estas células, su ARN transforma el ADN de la célula infectada, para replicarse (hacer copias de sí mismo). Cuando estas copias o viriones salen de la célula provocan su muerte, y buscan nuevas células sanas para seguir reproduciéndose.

En la gráfica inferior se da la tasa de mortalidad por VIH/SIDA total y por sexos, 1981-2011.



(Tomado de Área de vigilancia La L de VIH y conductas de riesgo.

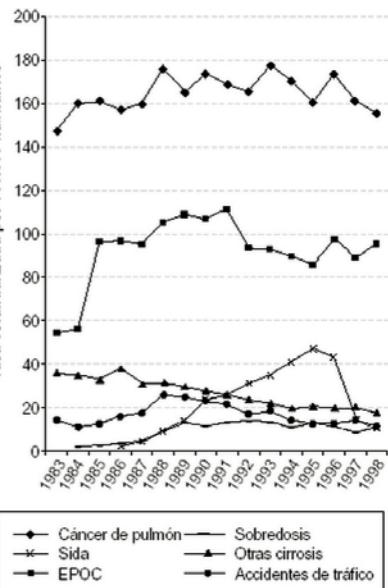
Centro Nacional de epidemiología – Plan Nacional sobre el SIDA. Madrid 2013)

A la derecha se muestra la evolución de la mortalidad atribuible al tabaquismo y al alcohol para distintas causas seleccionadas y de la mortalidad por sida, sobredosis y accidentes de tráfico en varones en Barcelona en el período 1983-1998

(Fuente: M. Jané, C. Borrell, M. Nebot, M. I. Pasarín. Gac. Sanit vol.17 n.2 Barcelona. 2003)

A partir de los gráficos anteriores, responde a las siguientes cuestiones.

- ¿A qué sexo afecta más la enfermedad en ese periodo de tiempo?
- En 1995 había en España unos 40 millones de habitantes, de los que el 51% eran mujeres. Según el gráfico, ¿cuántos hombres y cuántas mujeres habrían muerto a causa del SIDA en ese año?
- Los tratamientos antirretrovirales evitan que el virus pueda seguir replicándose. ¿En qué año se empiezan a usar tratamientos más eficaces?
- En el gráfico de la derecha aparecen datos relativos a Barcelona. ¿Qué semejanzas y diferencias en la evolución de la mortalidad por SIDA puedes observar si los comparas con los datos del conjunto de España?
- Compara las causas de mortalidad que aparecen en el gráfico de la derecha y comenta su evolución entre 1983 y 1998.



El tiempo atmosférico... ¡un caos!

Las matemáticas nos dan modelos para predecir, de forma fiable, el tiempo que va a hacer en las horas o días siguientes. Para hacer tales predicciones es imprescindible observar el comportamiento de la atmósfera. Este depende de magnitudes tales como la presión, el viento, la humedad o la temperatura.

Las ecuaciones de la dinámica atmosférica son muy sensibles a los valores iniciales de las magnitudes que intervienen en ellas; por ello, la evolución del llamado "tiempo atmosférico" es muy impredecible tanto más cuanto más nos alejamos de los valores iniciales. Hoy en día la atmósfera se considera un ejemplo de sistema caótico que se estudia usando la Teoría del Caos.



El futuro impredecible

Los modelos de predicción atmosféricos se basan en utilizar la situación real de la atmósfera en un instante dado –conocida gracias a las miles de observaciones de estaciones meteorológicas, aviones, barcos, globos, ...– para calcular la situación en un tiempo posterior.

Supongamos que U es una variable atmosférica que evoluciona con el tiempo de forma que, en cada momento n , su valor viene dado por el que tenía en el instante inmediatamente anterior mediante la fórmula:

$$U_n = 4U_{n-1}(1-U_{n-1})$$

De esta forma, si en el instante inicial se toma el valor $U_1=0,100$ se podrán calcular los valores sucesivos de la magnitud:

$$U_2 = 4U_1(1-U_1)=4\cdot 0,100(1 - 0,100)=0,36$$

$$U_4 = 4U_3(1-U_3)=4\cdot 0,9216(1 - 0,9216)=0,2890...$$



$$U_3 = 4U_2(1-U_2)=4\cdot 0,36(1 - 0,36)=0,9216$$

$$U_5 = 4U_4(1-U_4)=4\cdot 0,2890(1 - 0,2890)=0,8219...$$

- a) Usa la calculadora o, mejor, una hoja de cálculo para obtener los quince primeros valores de U en las condiciones dadas.
- b) Calcula los quince primeros valores de U en las mismas condiciones pero realizando pequeños cambios: por ejemplo, toma como valores iniciales primero $U_1=0,101$, y después $U_1=0,102$
- c) Representa los valores obtenidos en un par de ejes coordinados. En el eje horizontal deben ir los valores naturales $n=1, n=2, \dots, n=10$ y en el vertical, los valores de U_n obtenidos.
- d) Interpreta los resultados. Para ello observa:
 - i) Si los datos en los tres supuestos iniciales son parecidos o muy diferentes en cada instante
 - ii) A partir de cuándo los tres valores, en un mismo instante, varían de forma radical.

¿Y cómo varían las magnitudes que se usan para predecir el tiempo?

Cuánto más alto menos presión

Los gases que forman el aire atmosférico ejercen una presión sobre todos los objetos situados en el planeta. Esta presión "atmosférica" se representa, de forma intuitiva, como el peso por unidad de superficie de la columna de aire que soporta encima de sí cualquier objeto situado en la superficie terrestre.

La presión atmosférica varía con la altura: la columna de aire que soporta un montañero que ha escalado una cima de 4 000 m es menor que la de una persona que está nadando en el mar.



¿Conoces las distintas unidades que se utilizan para medir la presión atmosférica? Mira cuáles son y cómo se relacionan y completa después la tabla que contiene las presiones señaladas en la figura.

$$\begin{aligned} 1 \text{ atmósfera (atm)} &= 760 \text{ milímetros de Hg (mm Hg)} = \\ &= 1,01325 \text{ bar} = 101\,325 \text{ Pascales (Pa)} = 1\,035 \text{ gr/cm}^2 \end{aligned}$$

	atm	mm Hg	bar	Pa	gr/cm ²
Nadador			1,024		
Refugio	0,96				
Montañero				87\,422	

Las matemáticas proporcionan modelos que intentan reproducir la realidad. Para representar la relación entre la presión atmosférica de cualquier punto y su altura sobre el nivel del mar se emplea la llamada ley barométrica. ¿Sabes que hay móviles capaces de calcular la presión utilizando esta ley o una variante de la misma?

$$P_2 = P_1 \cdot e^{-M \cdot g \cdot \frac{(h_2-h_1)}{R \cdot T}}$$

P_1 : Presión a la altura h_1
 P_2 : Presión a la altura h_2
 M : masa molecular media del aire ($0,028 \text{ kg mol}^{-1}$)
 g : Aceleración de la gravedad ($9,8 \text{ m s}^{-2}$)
 R : Constante de los gases ideales ($8,3 \text{ J mol}^{-1}\text{K}^{-1}$)
 T : Temperatura media entre ambas alturas(en Kelvin, K)



Lamentablemente la app del móvil no funciona y tendrás que contestar estas preguntas con ayuda de la calculadora (supón que al nivel del mar la temperatura es de 20°C y la presión de 1 atm y que la temperatura disminuye $0,64^\circ\text{C}$ cada 100 metros de altura).

- a) Calcula la presión para una altura de 1 000 m.
- b) Halla a qué altura la presión se hace la mitad que al nivel del mar
- c) Calcula el cociente entre las presiones de dos puntos cuya diferencia de altura es de 3 350 metros. ¿Cuál es el porcentaje de la presión de un punto a 5 000 metros de altura con respecto a un punto a 1 650 metros de altura?

Números y dinero

Nuestra relación con el mundo financiero empieza desde pequeños, cuando tomamos decisiones sobre qué “chuches” comprar o qué pedir a cambio de algo. Sin embargo es al adquirir responsabilidades de adulto cuando esa relación se formaliza y ya no nos va a abandonar en toda nuestra vida. Normalmente se articula a través de un banco en el abrimos cuentas, pedimos préstamos y depositamos nuestros ahorros. Es casi, casi, un matrimonio que no siempre está bien avenido (sobre todo cuando leemos la letra pequeña). E incluso si decimos divorciarnos de nuestro banco, tardaremos poco en casarnos con otro.



Nuestra hucha bancaria

Una entidad financiera nos ofrece un interés nominal compuesto del 5% anual si depositamos en ella nuestros ahorros. Pero esta información no es suficiente... Es necesario que conozcamos, además, el tipo de **capitalización**; es decir, el número de veces en el año en los que los intereses generados por nuestro capital pasan a formar parte de ese capital y, por tanto, a generar nuevos intereses.

La fórmula que determina el capital final C_F en el que se convierte un capital inicial C colocado a un r por uno de interés nominal compuesto durante T años y con q períodos de capitalización al año es:

$$C_F = C \cdot \left(1 + \frac{r}{q}\right)^{qT}$$

Se colocan 3 000 euros durante cuatro años a un 3,5% de interés compuesto anual. Calcula en qué se convertirán si la capitalización es:

- a) Anual
- b) Semestral
- c) Trimestral
- d) Mensual
- e) Diaria (360 períodos)
- f) Horaria (8 640 períodos)

¿Qué pasaría si se considerara que la capitalización es continua; es decir, si se consideran infinitos períodos en el año? Para contestar utiliza el cálculo de límites del tipo [1^o].



¿Y qué pasa cuando en vez de llevar nosotros el dinero, son ellos quiénes nos lo dan?

Un préstamo... ¿para toda la vida?

Durante la burbuja inmobiliaria y financiera anterior a la crisis que comenzó en 2008, los bancos ofrecían a sus clientes créditos hipotecarios con plazos de devolución de hasta ¡40 e incluso 50 años! En broma, mucha gente comentaba que eran préstamos pensados para dejarlos como herencia a los hijos.

A la hora de pedir dinero prestado, ya sea para comprar una casa, un coche, un viaje, ..., hay que tener sentido común y no endeudarse por encima de lo razonable, dadas las circunstancias particulares de cada persona o familia.

Cuando se solicita un préstamo a una entidad bancaria se pactan los siguientes valores:

P : capital prestado

r : interés nominal anual en tanto por uno

n : número de años de duración del préstamo

q : número de períodos en cada año (capitalización)

En estas condiciones la cuota fija C que hay que pagar en cada periodo es:

$$C = \frac{P \cdot r}{q \cdot \left[1 - \left(1 + \frac{r}{q}\right)^{-nq}\right]}$$

BANCO PERSONAL DE INVERSIONES INMOBILIARIAS		
IBAN: ES99 7049 8570 0000 0001	RECIBO DE PRÉSTAMO	PRÉSTAMO N° 5.123.456/001
SUCURSAL: 0570	CÓDIGO CUENTA CLIENTE: 7049 8570 00 7000000001	FECNA: 7/ABR/2014
C/ IBIZA, 2310	TITULAR: BENITO FAGOA PLAZADO	PÁGINA: 001
28000 MADRID		
PERÍODO LIQUIDADO: 7/03/2014 A 7/04/2014 RECIBO N° 72		
CAPITAL CONCEDIDO	PENDIENTE ANTERIOR	NUEVO PENDIENTE
90.151,82	71.675,98	71.343,99
TIPO DE INTERÉS	COMISIÓN S/PDTE.	TASA ANUAL EFECTIVA
3,37 (2)	NO TIENE	3,539 (1)
PROXIMO VENCIMIENTO	7.05.2014	
TITULAR DEL FIRMÓ: BENITO FAGOA PLAZADO		
FINCA REGISTRAL NUM.: 110005124 EN MADRID		
C/ HUCHA VACÍA 31 4º1		
(1) NO CONSIDERADOS GASTOS COMPLEMENTARIOS O SUPLIDOS		
(2) REVISIÓN SEMESTRAL SEGÚN CONTRATO		
CAPITAL	331,99	
INTERESES	201,29	
TOTAL RECIBO	533,28	
TOTAL CARGADO	533,28	



NUEVA PROMOCIÓN DE VIVIENDAS

2 habitaciones	160000 euros
3 habitaciones	195000 euros
4 habitaciones	245000 euros

Una familia, con unos ingresos mensuales de 3 200 euros, quiere solicitar un préstamo para comprar una vivienda.

La familia está interesada en adquirir una vivienda de la promoción descrita en el anuncio de la izquierda.

La entidad bancaria ofrece las siguientes condiciones:

- Interés compuesto del 4,75% anual con capitalización mensual.
 - Plazo de devolución del préstamo de 15 años.
- Los miembros de la familia echan cuentas y deciden que pueden dedicar, como máximo, el 30% de sus ingresos para pagar el crédito. Además, cuentan con unos ahorros de 75 000 euros que pueden dedicar a la compra de la vivienda.
- a) Halla la cantidad máxima que la familia puede dedicar para pagar la mensualidad del préstamo que va a solicitar.
 - b) Calcula el precio máximo que podrá tener la vivienda que compren.
 - c) Estudia qué tipo de vivienda se puede comprar.
 - d) ¿Te atreves a calcular cuál será la cantidad final que habrán pagado al banco al final del préstamo?



La especie más catastrófica: el hombre

La especie humana es la única consciente de que para sobrevivir, es necesario conservar las condiciones naturales, climáticas y medioambientales del planeta. Sin embargo, también es la que, de largo, más interviene en el empeoramiento de dichas condiciones: incendios, accidentes nucleares, sobreexplotación de recursos naturales o el calentamiento global.

Las matemáticas dan modelos eficaces para predecir la evolución de estos sucesos y, por tanto, actuar para controlar y evitar, o al menos mitigar, estas catástrofes.



Y ahora... ¡a apagar un incendio!

A la hora de apagar un incendio, una de las decisiones que hay que tomar es la de asignar los efectivos humanos para extinguir el fuego. Imagínate que se cuenta con cinco equipos de bomberos ubicados en diferentes localidades próximas al incendio y que deben ser asignados a los cinco focos principales de fuego. La tabla siguiente muestra los tiempos estimados (en minutos) para que los diferentes equipos de bomberos lleguen a cada foco.

Focos

Equipos	F1	F2	F3	F4	F5
E1	12	14	16	15	12
E2	10	13	12	13	11
E3	14	16	14	11	13
E4	12	11	12	11	9
E5	14	12	19	12	14

b) Haz "a ojo" la asignación que creas que hará que el tiempo total sea el más corto posible.

c) Para intentar conseguir una mejor asignación realiza los siguientes pasos:

- 1.º Construye una primera tabla a partir de la inicial en la que en cada fila se identifica el menor número y se resta de todos los números de esa fila.
- 2.º A partir de la anterior, construye otra tabla en la que se identifica el menor número de cada columna y se resta a todos los elementos de dicha columna.
- 3.º Elige una fila o columna con un único cero y asigna el equipo al foco correspondiente a la celda que ocupa. Elimina la fila y columna de dicho cero y elige un segundo cero en las mismas condiciones. Al final tendrás la asignación buscada. Comprueba si esta asignación mejora a las obtenidas en a) y en b).

¿Te imaginas qué puede pasar en una zona muy castigada por los incendios?

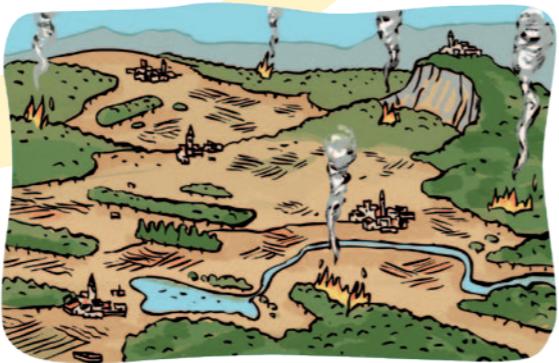
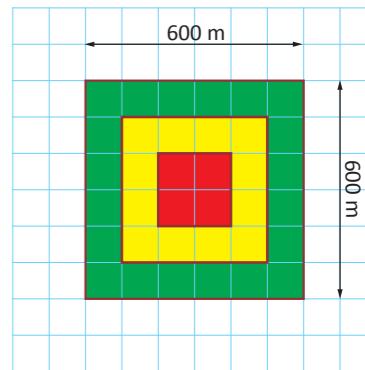


El desierto avanza

La desertización es una de las consecuencias indeseables que tienen los incendios continuados. Para representar la evolución de este proceso en una cierta zona, se ha dividido la superficie en riesgo utilizando una cuadrícula cuyas celdas tienen 100 metros de lado.

Para estimar si una de las celdas se desertizará o no se fijan los siguientes criterios:

- Se simplifica el problema, suponiendo que el que una celda quede desertizada no depende del grado de desertización de las zonas vecinas.
 - Las celdas cercanas al foco inicial de desertización (zona roja) tienen probabilidad 0,75 de quedar próximamente desertizadas.
 - Las que rodean a la zona central (zona amarilla) tiene probabilidad 0,40 de convertirse en desierto
 - Las celdas en verde tienen probabilidad 0,05 de desertizarse.
- a) En una de las celdas hay un árbol centenario pero no se recuerda en cuál de las tres zonas está situado. ¿Cuál es la probabilidad de que la celda en la que vive este árbol quede desertizada?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que en la zona amarilla queden exactamente tres celdas desertizadas?
- c) ¿Cuál es la probabilidad de que el 10% de la zona verde quede desertizada?



El hombre y la temperatura del planeta

Un ejemplo muy claro de cómo la acción humana puede influir sobre la Tierra en su conjunto es el cambio climático global.

La tabla muestra el promedio mundial de las temperaturas de superficie (en °C) alcanzadas en el período 1900 – 2010

1900: 13,75	1910: 13,45	1920: 13,65	1930: 13,75	1940: 14,05	1950: 13,85
1960: 13,90	1970: 13,90	1980: 14,10	1990: 14,20	2000: 14,40	2010: 14,45

(Tomado de Climate Change 2007: the AR4 Synthesis Report)

- a) Dibuja un diagrama de dispersión con los datos de la tabla e interprétilo.
- b) Calcula el valor de los siguientes parámetros estadísticos relativos a las variables X: año e Y: temperatura en °C: Medias y desviaciones típicas de X e Y, \bar{x} , \bar{y} , s_x y s_y , respectivamente. Covarianza de X e Y, s_{xy} .
- c) Calcula el coeficiente de correlación lineal, r , para las variables X e Y. Interprétilo.
- d) Calcula la recta de regresión de Y sobre X y dibújala sobre el diagrama de dispersión
- e) Utiliza la recta de regresión anterior para realizar estimaciones de la temperatura media de superficie para los años 1945, 1975, 1995, 2005, 2015, 2025 y 2050 e interpreta los resultados.

Caminos matemáticos

Algunas situaciones cotidianas que, en principio, son complejas se resuelven con modelos matemáticos que las simplifican al considerar solo los aspectos relevantes.

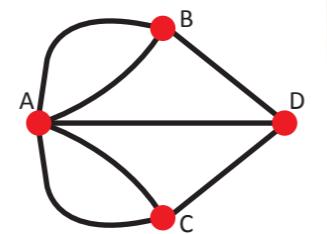
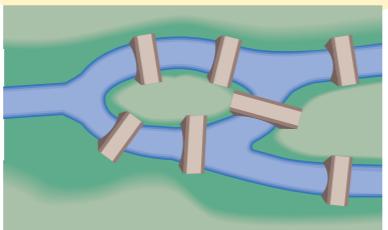
Por ejemplo, objetos simples como los grafos, que solo contienen vértices y aristas, pueden usarse para resolver situaciones como el trazado de un camino por las salas de un museo o una gran superficie o la confección de un horario o un calendario que cumpla ciertas exigencias.



¿Te has fijado en que hay tiendas y edificios laberínticos en los que es difícil poder salir una vez que has entrado?

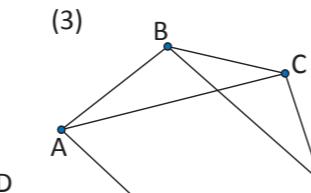
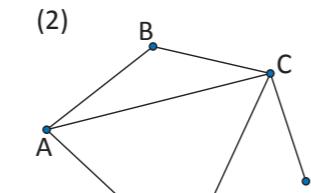
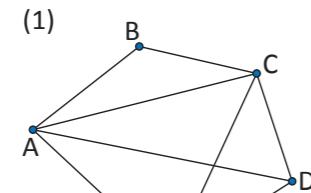
Paseos eulerianos

¿Te gusta pasear? Pues ánimo, vamos a dar un paseo con mucha historia. En Königsberg (ahora llamada Kaliningrado, en Rusia) había siete puentes, y los habitantes del lugar tenían la costumbre de intentar dar un paseo cruzando todos los puentes, pero pasando por cada uno una sola vez.



En un grafo cualquiera, un **camino euleriano** es un camino que pasa por los vértices y aristas de dicho grafo y que verifica dos condiciones: comienza y acaba en el mismo vértice y pasa una única vez por todas las aristas.

Observa los grafos siguientes:

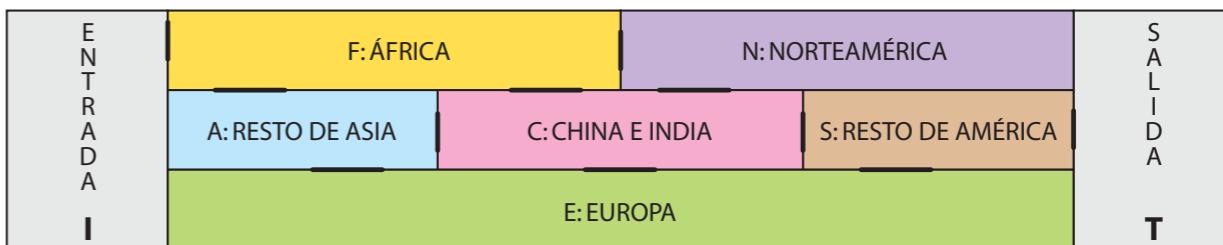


- Indica en cada caso, sus vértices y sus aristas y señala el número de aristas que llega a cada vértice; es decir, su grado.
- Intenta, para cada uno, encontrar un camino euleriano y, en los casos en que no puedas, busca un camino que pase por todas las aristas una sola vez pero que no empiece y acabe en el mismo vértice. ¿En qué casos es fácil encontrar caminos de este tipo?
- Intenta encontrar un recorrido que cumpla esas condiciones en los puentes de Königsberg.

Y ahora,
¡márcate
un paseo
euleriano por
un museo!

Las matemáticas también tienen historia!

En la sala de exposiciones municipal se ha organizado una de lo más atrayente: "Historia de las Matemáticas". El plano del recinto de la exposición, que aparece dibujado a la derecha, consta de las siguientes salas referidas a diferentes zonas geográficas del planeta:



- Representa el recinto con un grafo en el que los vértices sean las ocho salas y las aristas las puertas que las unen. Por ejemplo, como hay una puerta entre C y N, estos dos vértices estarán unidos por una arista en el grafo.
- Indica los grados de los vértices del grafo.
- Investiga si se puede determinar un paseo por la exposición de forma que comience en la entrada, acabe en la salida y pase solo una vez por todas y cada una de las puertas.
- Análiza las características del camino que has encontrado en c) e intenta hallar otro que cumpla los mismos requisitos.
- Todos los caminos de similares características a los anteriores visitarán todas las salas por lo menos una vez?

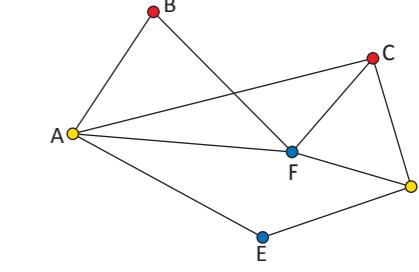
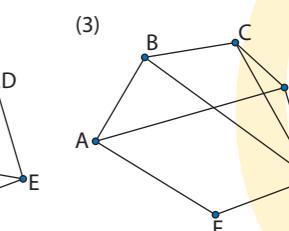
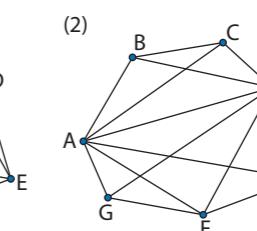
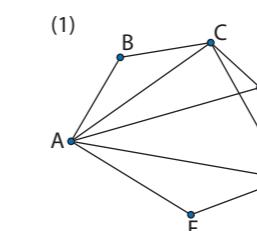
Grafos con colores!

El **número cromático (NC)** de un grafo es el menor número de colores necesarios para colorear sus vértices de forma que dos vértices unidos por una arista siempre tengan colores diferentes. Para acotarlo se usan dos criterios:

- El NC es siempre menor o igual que el máximo orden de sus vértices más uno.
- El NC es siempre mayor o igual que el número de vértices de cualquier subgrafo completo (un subgrafo es completo cuando todos sus vértices están unidos por aristas).

El NC del grafo de la derecha es menor o igual que 5 ya que el grado máximo de sus vértices es 4 y, por otro lado, es mayor o igual que 3 ya que, por ejemplo, el subgrafo de vértices C, D y F es completo. En el ejemplo se ofrece una coloración con tres colores y, por tanto, el número cromático es 3.

Para los tres grafos siguientes, acota su número cromático e intenta colorearlos con el menor número posible de colores.



Protección matemática: la más fiable

Cada vez utilizamos más la red para realizar operaciones que precisan un alto grado de seguridad: envío de correos electrónicos, compras online, operaciones sobre nuestra cuenta bancaria o envío de una firma electrónica. La criptografía es la ciencia, en gran medida basada en las matemáticas, que nos enseña a utilizar métodos numéricos para cifrar los mensajes; es decir, para hacerlos ininteligibles a no ser que conozcamos la clave que los descifra.

Un cifrado simétrico: ¡sencillo pero no muy seguro!

Benito quiere mandar un mensaje secreto a Alicia y para ello utiliza una clave conocida por los dos: está utilizando un método de cifrado simétrico.

Un ejemplo simplificado de este tipo de cifrado es el siguiente. Para utilizarlo se emplea una tabla de transformación de letras en números binarios como la que aparece a la derecha y una clave, como por ejemplo $k = 00110$. Así, para cifrar el mensaje $m = "R"$ compuesto de una sola letra, se dan los siguientes pasos:

- 1) Se considera la representación binaria de la letra: $R \rightarrow 10010$
- 2) Se suman (módulo 2 (XOR) y bit a bit) el mensaje y la clave:

$$m \text{ XOR } k = 10010 \text{ XOR } 00110 = 10100$$

(Ten en cuenta que en esta operación $0+0 = 1+1 = 0$ y $1+0 = 0+1 = 1$)

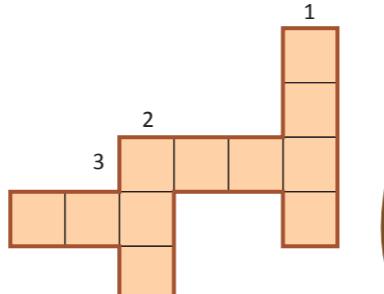
- 3) Se transforma el número binario en la letra que le corresponde 10100: T. El mensaje cifrado será $c = "T"$

Para descifrar el mensaje se vuelve a realizar la operación XOR: $c \text{ XOR } k = 10100 \text{ XOR } 00110 = 10010: R$

Para mensajes de más de una letra se realiza la misma operación sobre cada una de ellas.

- a) Se considera la clave $k = 00110$
 - Cifra el mensaje “ALICIA TE QUIERO”
 - Descifra el mensaje “WIU MH SHUED”
- b) Rellena el crucigrama que aparece a la derecha (utiliza la clave $k = 11001$)
 - 1: “NL\$K” 2: “ZVK” 3: “ZV??” 4: “MTV”

A 00000	J 01001	R 10010	? 11011
B 00001	K 01010	S 10011	ı 11100
C 00010	L 01011	T 10100	\$ 11101
D 00011	M 01100	U 10101	! 11110
E 00100	N 01101	V 10110	i 11111
F 00101	Ñ 01110	W 10111	
G 00110	O 01111	X 11000	
H 00111	P 10000	Y 11001	
I 01000	Q 10001	Z 11010	



Y si necesitamos más seguridad... ¿qué podemos hacer?

Seguridad garantizada: el cifrado asimétrico

Ahora, Benito quiere mandar un mensaje a Alicia pero de forma que sólo Alicia conozca la clave para descifrarlo (sin que ni siquiera él la tenga que conocer)

En realidad, se cuenta con una **clave pública** (conocida por todo el mundo) y una **clave privada** conocida únicamente por Alicia.

La clave pública se compone de dos números N y e :

- N es el producto de dos números primos p y q pero sólo Alicia conoce esta descomposición
- e es un número que no contiene factores primos comunes con $(p-1) \cdot (q-1)$

La clave privada es un número d tal que $d \cdot e = k \cdot (p-1) \cdot (q-1) + 1$ para algún número natural k . d se puede obtener por tanteo hasta encontrar un k correcto.

Si, por ejemplo, se considera la clave pública $N=143$ $e=7$ para obtener la clave privada d lo primero que hay que conocer es que $143=11 \cdot 13$ (esta descomposición es difícil de conocer si p y q son primos muy grandes)

Como Alicia conoce esta descomposición puede calcular d :

Una vez conocidas las claves pública y privada se procede según el esquema:

Ejemplo:

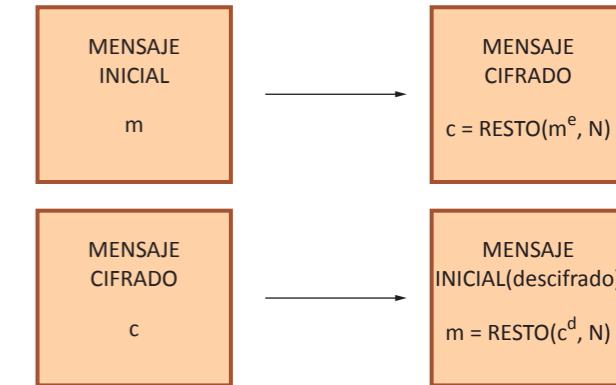
Clave pública: $N = 91$, $e = 5$

Clave privada: (se sabe que $91 = 13 \cdot 7$)
 $5d = (13-1)(7-1)k + 1 \rightarrow (k = 2) d = 29$

Mensaje inicial $m = 4 \rightarrow$ mensaje cifrado $c = \text{RESTO}(4^5, 91) = 23$

Mensaje cifrado $c = 23 \rightarrow$ mensaje descifrado
 $m = \text{resto}(23^{29}, 91) = 4$

(para hacer los cálculos utiliza un programa de cálculo simbólico: por ejemplo la función mod en www.wolfram.com)

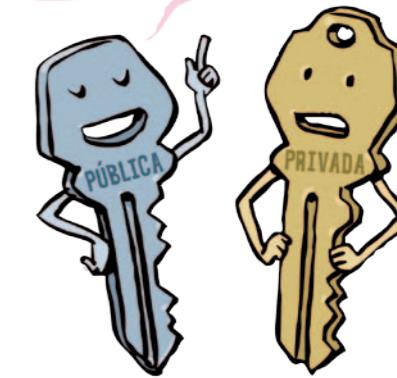


Benito quiere coger unos documentos importantes que hay guardados en la caja fuerte de su casa. Pero la contraseña para abrirla solo la conoce Alicia que se encuentra de viaje.

En una ocasión, Benito y Alicia pactaron utilizar la clave pública $N = 143$, $e = 7$

- a) Benito sabe que $143 = 11 \cdot 13$. Con esta información puede calcular su clave privada; ¿cuál es?
- b) Alicia no recuerda bien la contraseña que abre la caja pero cree que es $m=12$. ¿Qué mensaje cifrado enviará a Benito?
- c) Finalmente, Alicia avisa que se había confundido y que la contraseña se obtiene al descifrar el mensaje $c = 109$; ¿cuál es la contraseña que abre la caja?

Soy como una oposición: pública, pero difícil de conseguir.



Energías renovables

La especie humana consume una gran cantidad de energía. Nuestra civilización, fuertemente tecnificada y consumista, necesita para poder subsistir un aporte energético mucho mayor que en cualquier otra época.

Esta necesidad insaciable de energía llevó en la segunda mitad del siglo XX al estudio y desarrollo de nuevas fuentes de energía que no dependen de la existencia de reservas fósiles como el carbón o el petróleo: las energías renovables.



Sopla fuerte que la luz se apaga: energía eólica

La instalación de un parque eólico precisa realizar un estudio previo sobre ciertas circunstancias que conlleve a una óptima localización de los generadores. Uno de los factores que más importancia tiene en este estudio es la cantidad de viento que afecta a la zona de interés. Como es imposible conocer la velocidad del viento en todos y cada uno de los puntos del futuro parque, esta se mide únicamente en los vértices de una malla (una triangularización del terreno) de forma que la velocidad en cada punto se estima gracias a las velocidades que hay en los vértices próximos.

Para realizar esta estimación se pueden adoptar diferentes criterios como:

- La medida de la magnitud de un punto del terreno es la misma que la del vértice de la malla más cercano a él (criterio del vecino más próximo).
- Cada medida es la media aritmética de los tres vértices más cercanos al punto.
- Interpolación afín: si los tres vértices más próximos de punto $P(\alpha, \beta)$ son $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ y $C(c_1, c_2)$ y en ellos se miden las velocidades de v_A , v_B y v_C respectivamente:

i) Se calculan los valores λ_1 , λ_2 , y λ_3 tales que

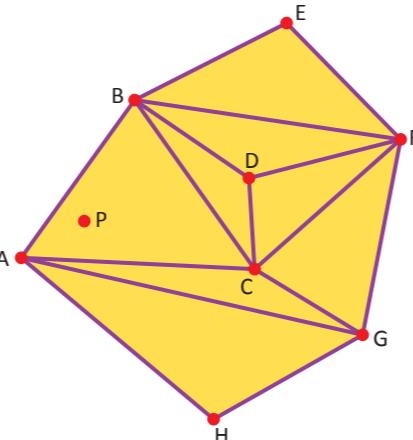
$$\begin{cases} (p_1, p_2) = \lambda_1(a_1, a_2) + \lambda_2(b_1, b_2) + \lambda_3(c_1, c_2) \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \end{cases}$$

ii) La estimación de la velocidad en P será $v_P = \lambda_1 v_A + \lambda_2 v_B + \lambda_3 v_C$

Se quiere estimar la velocidad del viento en el punto $P(3, 3)$ y para ello se cuenta con una malla triangular. El punto P es interior al triángulo de la malla de vértices $A(2, 1)$, $B(3, 5)$ y $C(5, 1)$. En estos puntos, la velocidad del viento es:

$$v_A = 2 \text{ m/s} \quad v_B = 3 \text{ m/s} \quad v_C = 1 \text{ m/s}$$

- Estima la velocidad del viento en P mediante el criterio del vecino más próximo
- Estima la velocidad del viento en P mediante el criterio de la media aritmética en A , B y C
- Estima la velocidad del viento en P mediante interpolación afín.

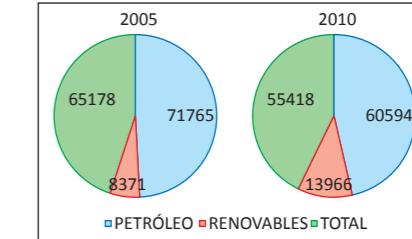
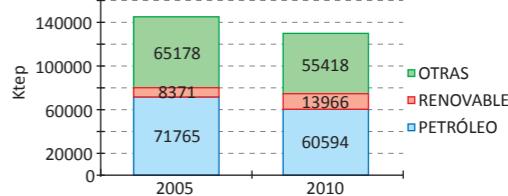
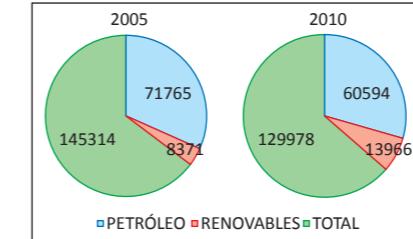
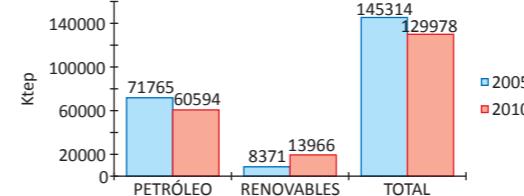
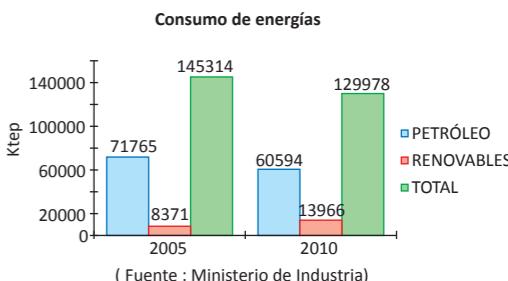


Estupendo, el viento proporciona energía limpia, pero... ¿el futuro es renovable?

El consumo de renovables: ¿a dónde vamos?

Las sociedades modernas están cada vez más concienciadas con la necesidad del empleo de este tipo de energías tanto por la limitación de las reservas naturales de carbón y petróleo como, sobre todo, por los problemas medioambientales que estos recursos ocasionan como fuentes de energía. De hecho, sobre todo en Europa, el porcentaje de uso de las energías limpias se incrementa año a año. El gráfico de barras de la derecha muestra el consumo en España, en los años 2005 y 2010, del total de energías consumidas y, en particular, de lo que corresponde al consumo de energía derivada del petróleo y al consumo de energías renovables. Los datos se expresan en miles de toneladas de equivalente petróleo (ktep)

- Calcula los porcentajes de consumo sobre el total que corresponde a las energías derivadas del petróleo y las energías renovables para cada uno de los dos años.
- Calcula los coeficientes a y b de la recta $y = ax + b$ en la que x es el año y y es el porcentaje de consumo de energías renovables para ese año. Para ello, utiliza los datos proporcionados para los dos años 2005 y 2010.
- Calcula la ecuación de otra recta como la del apartado anterior pero correspondiente al porcentaje del consumo de energías derivadas del petróleo.
- Interpreta las dos rectas obtenidas.
- Utiliza las rectas anteriores para realizar estimaciones correspondientes a los años 2015 y 2020. ¿Para qué año son más fiables las estimaciones halladas?
- Los cuatro gráficos estadísticos siguientes pretenden proporcionar la misma información que el gráfico del enunciado. Indica cuáles de ellos son correctos y cuáles no, justificando las respuestas



Medir a mucha distancia

Entre otros muchos datos, los astrónomos necesitan conocer, con cierta precisión, la distancia que separa a la Tierra (o mejor, al centro de su órbita) de las estrellas. Pero... ¿cómo podemos medir esas enormes distancias a objetos a los que no podemos ni acercarnos?

Como siempre, las matemáticas vienen en nuestra ayuda, esta vez de manos de la trigonometría. Así, el primer sistema que se utilizó para obtener estas distancias fue el método de la paralaje. Se define paralaje como el desplazamiento aparente que sufre una estrella, más bien cercana, sobre el fondo formado por las estrellas más lejanas al ser observada en dos posiciones extremas de la órbita que describe la tierra en su movimiento alrededor del sol, por ejemplo en los solsticios de invierno y de verano.



¿Qué regla utilizar para las estrellas?

Antes de ver cómo medir, tenemos que darnos cuenta de que las unidades de longitud usuales –centímetros, metros o kilómetros– no son apropiadas para medir distancias entre estrellas.

En astronomía se utilizan dos unidades para medir esas enormes distancias:

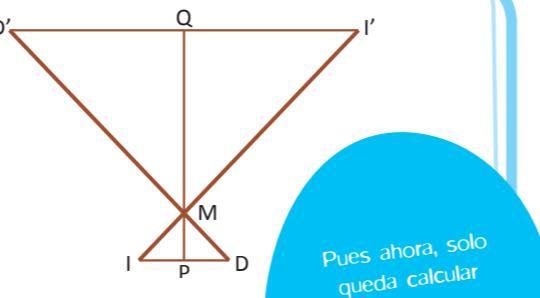
- La “unidad astronómica (UA)”: distancia media que separa a la Tierra del Sol ($1,496 \cdot 10^8$ km).
 - El “año luz”: distancia que recorre la luz en el vacío en un año.
- a) ¿A qué Calcula la medida en kilómetros y en unidades astronómicas de un año luz (velocidad de la luz $\approx 3 \cdot 10^5$ km/s).
- b) Mediante notación científica, expresa en kilómetros la distancia de 4,3 años luz.
- c) Calcula a cuántas unidades astronómicas y a cuántos años luz corresponden $4,73 \cdot 10^{15}$ km.

El truco de la moneda

Para comprender mejor el método de la paralaje no hay más que sujetar una moneda M frente a los ojos (izquierdo I y derecho D) y observar cómo se desplaza su posición relativa (de D' a I') sobre el fondo de objetos lejanos al mantener, de forma alternativa, un ojo abierto y el otro cerrado.

Se sujetó una moneda a 50 cm del punto medio entre los dos ojos (PM=50 cm) que, se supone, están separados 8 cm.

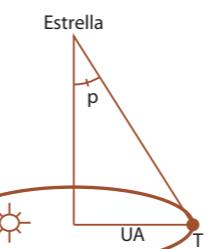
- a) Aplicando el Teorema de Tales, calcula la separación de las posiciones aparentes de la moneda D' e I' en una pared que esté alejada 3 metros del observador.
- b) Calcula la medida del ángulo $\widehat{D'MI'} = \widehat{IMD} = \alpha$



Pues ahora, solo queda calcular distancias y ángulos.

Y entonces... ¿qué es la paralaje?

Tras el truco anterior, podemos definir la paralaje de una estrella como el ángulo bajo el que se vería, desde esa estrella, el radio medio de la órbita terrestre alrededor del Sol.



- a) Siendo p la paralaje de una estrella, demuestra que la distancia, en unidades astronómicas, que la separa del centro de la órbita terrestre viene dada por la expresión: $d = \cotg p$
- b) Con la ayuda de la relación anterior, completa la tabla derecha.

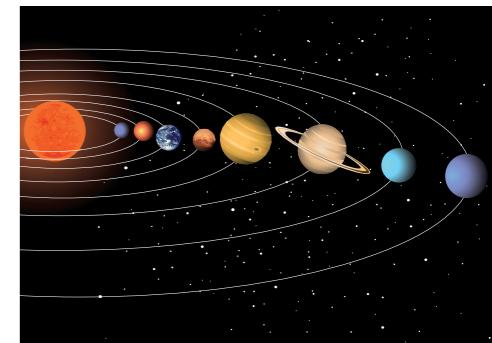
Estrella	Paralaje	Distancia	
		UA	Años luz
Alfa Centauri	0,747"		
Sirio			8,6
Épsilon Eridani		664 030	
Épsilon Indi	0,275"		
Luyten			12,4

El astrónomo “aficionado”



El profesor de geometría, y aficionado a la Astronomía, Johannes Kepler (1571-1630) enunció en 1609 las tres leyes que llevan su nombre y que rigen el movimiento de los planetas alrededor del Sol.

- 1.a Los planetas describen órbitas elípticas con el Sol en uno de sus focos.
- 2.a Los planetas varían su velocidad a lo largo de su trayectoria, siendo máxima cuando se encuentran en el perihelio (punto más próximo al Sol) y mínima cuando encuentran en el afelio (punto más alejado del Sol)
- 3.a Los cuadrados de los períodos de revolución son proporcionales a los cubos de las distancias medias al Sol. Esto es, hay una relación muy sencilla entre el tiempo que tarda un planeta en dar una vuelta completa a su trayectoria (período de revolución) y su distancia media al Sol.
- a) Si P es el periodo en años de un planeta y D la distancia media que lo separa del Sol en unidades astronómicas, escribe una expresión algebraica que relacione ambas magnitudes. Para ello ten en cuenta los datos correspondientes al planeta Tierra.
- b) Completa la tabla de la derecha



Planeta	Período (años)	Distancia media al Sol (UA)
Mercurio	0,24	
Venus		0,72
La Tierra	1	1
Marte	1,9	
Júpiter		5,2
Saturno	29,5	
Uranio		19
Neptuno	165	

Las estrellas desde la Tierra

Si observamos el cielo despejado por la noche y en un lugar alejado de una gran ciudad, vemos infinidad de estrellas con brillos muy diferentes. Algunas, como Sirio, Arturo o Vega tienen una gran luminosidad y se pueden apreciar sin ninguna dificultad a simple vista y otras como Centauro o Pegaso se aprecian con bastante más esfuerzo. Además, las estrellas no siempre son solitarias como nuestro Sol, en muchas ocasiones forman parejas e incluso tríos, dando lugar a sistemas dobles y triples.

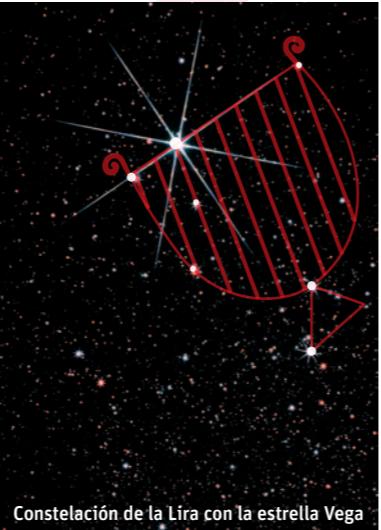


Las estrellas brillan: la magnitud aparente

Con el fin de clasificar el brillo aparente desde la Tierra de las diferentes estrellas, se considera una escala de magnitud de forma que las estrellas que pueden ser apreciadas a simple vista se sitúan en diferentes grupos: las más brillantes tienen una magnitud 1 y las menos tienen magnitud 6.

Los criterios que se usan para establecer esta clasificación son:

1.º La diferencia de magnitudes M_1 y M_2 de dos estrellas E_1 y E_2 viene dada por la expresión: $M_1 - M_2 = -k \cdot \log\left(\frac{B_1}{B_2}\right)$ donde B_1 y B_2 son los brillos aparentes de las citadas estrellas.



2.º La magnitud de la estrella Vega es 0 y su brillo aparente 1.

a) Calcula el valor k de la expresión $M_1 - M_2 = -k \cdot \log\left(\frac{B_1}{B_2}\right)$ sabiendo que si la estrella E_1 tiene 100 veces el brillo de otra E_2 se verifica que la magnitud de E_2 es 5 unidades superior a la magnitud de E_1 .

b) Calcula la relación entre los brillos aparentes de dos estrellas de magnitudes respectivas 2 y 4

c) La magnitud de una estrella puede ser un número negativo. Calcula la magnitud de una estrella sabiendo que su brillo es 100 veces mayor que el de otra estrella de magnitud 2.

d) Comprueba que para calcular la magnitud aparente de una estrella se puede utilizar la expresión:

$M = -2,5 \log B$ siendo B el brillo de la estrella expresado en n^o de veces el brillo de Vega

e) Completa la tabla de la derecha.

Astro	B	M
Sol		-26,7
Luna llena	120225	
Marte		-2,9
Sirius	3,8	
Vega	1	0
Polar		2
Neptuno	0,00083	

Pues ahora, entrevistemos a una pareja estelar

Amigas para casi siempre: estrellas binarias

Una estrella binaria es un sistema estelar formado por dos estrellas próximas que giran en torno al centro de masas común pero que desde la Tierra se ven como un único punto.

Para calcular la magnitud de una estrella binaria, sería erróneo sumar las magnitudes correspondientes a cada una de ellas.

Lo que se debe hacer, en este caso, es sumar los brillos correspondientes a cada una de ellas y calcular la magnitud correspondiente a este brillo.

- a) Si las magnitudes aparentes de dos estrellas que forman una estrella binaria son m_1 y m_2 , ¿qué puedes decir del número m que representa la magnitud del conjunto del sistema estelar?
- b) Comprueba que las magnitudes aparentes parciales m_1 , m_2 de las estrellas que forman un sistema y la magnitud total del sistema m se relacionan mediante la expresión:

$$10^{-\frac{m_1}{2,5}} + 10^{-\frac{m_2}{2,5}} = 10^{-\frac{m}{2,5}}$$

- c) La estrella doble Albireo, de la constelación del Cisne, está formada por dos estrellas Albireo A y Albireo B con magnitudes 3,1 y 5,1. Halla la magnitud del sistema doble.



La magnitud absoluta de una estrella

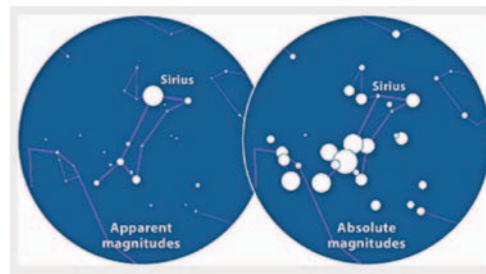
El brillo real de una estrella depende de su magnitud aparente y de la distancia que la separa de La Tierra. Así la estrella α Centauri, a pesar de ser la más cercana a la Tierra es menos luminosa en nuestro cielo que estrellas mucho más lejanas.

- La magnitud absoluta de una estrella es la magnitud aparente que tendría esa estrella si estuviera colocada a una distancia de 10 parsecs (1 parsec equivale a 3,26 años luz)

La magnitud aparente m y la magnitud absoluta M de una estrella están relacionadas mediante la expresión:

$$M - m = 5 - 5 \log d$$

donde d es la distancia de la estrella en parsecs. La magnitud absoluta es una medida real de la luminosidad de una estrella.



La constelación Canis Major. A la izquierda con la magnitud aparente con la que vemos sus estrellas, y a la derecha con la magnitud absoluta.

(Tomada de "The Stellar Magnitude System", Alan Mac Robert, 2006, www.skyandtelescope.com)

- a) Calcula la magnitud absoluta del Sol teniendo en cuenta que su magnitud relativa es -26,7 y que su distancia a la Tierra es 8,3 minutos luz.
- b) Sirio tiene una magnitud aparente de -1,45 y está a 8,6 años luz. Compara los brillos reales de Siro y El Sol.

