Variables aleatorias

Julio Antonino Zainea.
Universidad Central
2022-II

10 de noviembre de 2022

Una variable aleatoria es una función de valor real definida sobre un espacio muestral. Por tanto, una variable aleatoria se puede usar para identificar eventos numéricos que son de interés en un experimento. Por ejemplo, el evento de interés en un sondeo de opinión con respecto a las preferencias de votantes no suele ser la persona particular muestreada o el orden en el que se obtuvieron las preferencias, sino Y = el número de votantes que están a favor de cierto candidato o tema.

Definición 1

Se dice que una variable aleatoria Y es discreta si puede tomar sólo un número finito o contablemente infinito de valores distintos.

Una variable aleatoria es una función de valor real definida sobre un espacio muestral. Por tanto, una variable aleatoria se puede usar para identificar eventos numéricos que son de interés en un experimento. Por ejemplo, el evento de interés en un sondeo de opinión con respecto a las preferencias de votantes no suele ser la persona particular muestreada o el orden en el que se obtuvieron las preferencias, sino Y = el número de votantes que están a favor de cierto candidato o tema.

Definición 1

Se dice que una variable aleatoria Y es discreta si puede tomar sólo un número finito o contablemente infinito de valores distintos.

Una variable aleatoria es una función de valor real definida sobre un espacio muestral. Por tanto, una variable aleatoria se puede usar para identificar eventos numéricos que son de interés en un experimento. Por ejemplo, el evento de interés en un sondeo de opinión con respecto a las preferencias de votantes no suele ser la persona particular muestreada o el orden en el que se obtuvieron las preferencias, sino Y = el número de votantes que están a favor de cierto candidato o tema.

Definición 1

Se dice que una variable aleatoria Y es discreta si puede tomar sólo un número finito o contablemente infinito de valores distintos.

Función de probabilidad para una variable aleatoria discreta

La probabilidad de que Y tome el valor y, P(Y = y), se define como la suma de las probabilidades de todos los puntos muestrales en S a los que se asigna el valor y. A veces denotaremos $P(Y = y)$ por $p(y)$.

Definición 2

La distribución de probabilidad para una variable discreta Y puede ser representada por una fórmula, una tabla o una gráfica que produzca p(y) = P(Y = y) para toda y.

Función de probabilidad para una variable aleatoria discreta

La probabilidad de que Y tome el valor y, P(Y = y), se define como la suma de las probabilidades de todos los puntos muestrales en S a los que se asigna el valor y. A veces denotaremos $P(Y = y)$ por $p(y)$.

Definición 2

La distribución de probabilidad para una variable discreta Y puede ser representada por una fórmula, una tabla o una gráfica que produzca p(y) = P(Y = y) para toda y.

Ejemplo I

Escoge al azar un hogar de Barcelona. Sea la variable aleatoria Y el número de habitantes del hogar. Si prescindimos de los pocos hogares con más de siete personas, la distribución de probabilidad de Y es la siguiente:

Habitantes	1	2	3	4	5	6	7
Probabilidad	0.25	0.32	0.17	0.15	0.07	0.03	0.01

a. Comprueba que esta distribución de probabilidad es correcta.

b. Calcula $P(Y \geq 5)$

c. Calcula $P(Y \geq 5)$

d. Calcula $P(2 < Y \geq 4)$

e. Calcula $P(Y \neq 1)$

Valor esperado de una variable discreta

Definición 3

Sea Y una variable aleatoria discreta con la función de probabilidad p(y). Entonces el valor esperado de Y, $E[Y]$, se define como

$$E[Y] = \sum_{y} yp(y)$$

Definición 4

Sea Y una variable aleatoria discreta con función de probabilidad $p(y)$ y sea $g(Y)$ una función de valor real de Y. Entonces, el valor esperado de $g(Y)$ está dado por

$$E[g(Y)] = \sum_{y} g(y)p(y)$$

Valor esperado de una variable discreta

Definición 3

Sea Y una variable aleatoria discreta con la función de probabilidad p(y). Entonces el valor esperado de Y, $E[Y]$, se define como

$$E[Y] = \sum_{y} yp(y)$$

Definición 4

Sea Y una variable aleatoria discreta con función de probabilidad $p(y)$ y sea $g(Y)$ una función de valor real de Y. Entonces, el valor esperado de $g(Y)$ está dado por

$$E[g(Y)] = \sum_{y} g(y)p(y)$$

Valor esperado de una variable discreta

Definición 3

Sea Y una variable aleatoria discreta con la función de probabilidad p(y). Entonces el valor esperado de Y, $E[Y]$, se define como

$$E[Y] = \sum_y yp(y)$$

Definición 4

Sea Y una variable aleatoria discreta con función de probabilidad $p(y)$ y sea $g(Y)$ una función de valor real de Y. Entonces, el valor esperado de $g(Y)$ está dado por

$$E[g(Y)] = \sum_y g(y)p(y)$$

Varianza de una variable aleatoria

Definición 5

Si Y es una variable aleatoria con media $E(Y) = \mu$, la varianza de una variable aleatoria Y se define como el valor esperado de $(Y - \mu)$. Esto es,

$$V[Y] = E[(Y - \mu)^2]$$

que es equivalente a

$$E[Y^2] - E^2[Y]$$

y la desviación estándar es la raíz positiva de $V[Y]$

Ejemplo II

Encuentre el valor esperado y la varianza de la variable aleatoria descrita en el ejemplo I

Variables aleatorias continuas

Un momento de reflexión sobre variables aleatorias que se encuentran en el mundo real debe convencernos de que no todas las variables aleatorias de interés son discretas. Una variable aleatoria que puede tomar cualquier valor en un intervalo se denomina continua.

- Tiempos de vuelo.
- Presión medida en libras.
- Temperatura ambiente de una ciudad en un momento dado.

Definición 2

Se dice que una variable aleatoria es continua si toma valores en un subconjunto de números reales no enumérales.

Función de densidad

Sea Y una variable aleatoria continua, una función f es llamada función de densidad de probabilidad de X si se satisfacen las siguientes condiciones.

1. $f(y) \geq 0$ para toda y , $-\infty < y < \infty$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(y) = 1.$
3. $P(a \leq Y \leq b) = \int_{a}^{b} f(y)dy.$

Función de densidad

Sea Y una variable aleatoria continua, una función f es llamada función de densidad de probabilidad de X si se satisfacen las siguientes condiciones.

1. $f(y) \geq 0$ para toda y , $-\infty < y < \infty$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(y) = 1$.
3. $P(a \leq Y \leq b) = \int_{a}^{b} f(y)dy$.

Función de distribución acumulada

Sea Y una variable discreta o continua. Definimos la función F de distribución acumulada de la variable Y como

$$F(y) = P(Y \leq y)$$

En el caso discreto esta función se evalúa en un punto concreto y_0 sumando las probabilidades de los posibles valores de Y menores o iguales a y_0. En el caso continuo, la función de distribución acumulada evalúa el área delimitada por la gráfica de la función de densidad a la izquierda del valor particular.

Ejemplo III

Encuentre la función de distribución acumulada para el ejemplo I

BINOMIAL

Supongamos que realizamos n ensayos Bernoullis independientes, con las siguientes características:

1. El experimento consta de n ensayos repetidos.
2. Cada ensayo produce un resultado que se clasifica como éxito o fracaso.
3. La probabilidad de éxito permanece constante de un ensayo a otro.
4. Los ensayos repetidos son independientes.

El número X de éxitos en n experimentos Bernoulli se denomina variable aleatoria Binomial. La distribución de esa variable aleatoria discreta se llama distribución Binomial.

BINOMIAL

Supongamos que realizamos n ensayos Bernoullis independientes, con las siguientes características:

1. El experimento consta de n ensayos repetidos.
2. Cada ensayo produce un resultado que se clasifica como éxito o fracaso.
3. La probabilidad de éxito permanece constante de un ensayo a otro.
4. Los ensayos repetidos son independientes.

El número X de éxitos en n experimentos Bernoulli se denomina variable aleatoria Binomial. La distribución de esa variable aleatoria discreta se llama distribución Binomial.

BINOMIAL

Definición 3

Una variable aleatoría tiene una **distribución binomial** y se conoce como una variable aleatoria binomial si y sólo si su distribución de probabilidad está dada por:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad \text{para } x = 0, 1, \cdots, n$$

Comentarios

1. La distribución Binomial, queda caracterizada por el número de ensayos n y la probabilidad de éxito p
2. La notación que usaremos será: $X \simeq B(n, p)$

BINOMIAL

Definición 3

Una variable aleatoría tiene una **distribución binomial** y se conoce como una variable aleatoria binomial si y sólo si su distribución de probabilidad está dada por:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad \text{para } x = 0, 1, \cdots, n$$

Comentarios

1. La distribución Binomial, queda caracterizada por el número de ensayos n y la probabilidad de éxito p
2. La notación que usaremos será: $X \simeq B(n, p)$

Ejemplos

Media y varianza

$$\mu = np \quad \sigma^2 = np(1-p)$$

a. La probabilidad de que cierta clase de componente sobreviva a una prueba de choque es 3/4.Calcule la probabilidad de que sobrevivan exactamente 2 de los siguientes 4 componentes se prueban.

b. La probabilidad de que un paciente se recupere de una rara enfermedad sanguínea es de 0.4. Si se sabe que 15 personas contrajeron la enfermedad. ¿Cuál es la probabilidad de que:

1. Sobrevivan al menos 10
2. Sobrevivan de 3 a 8
3. Sobrevivan exactamente 5.

Ejemplos

Media y varianza

$$\mu = np \quad \sigma^2 = np(1-p)$$

a. La probabilidad de que cierta clase de componente sobreviva a una prueba de choque es 3/4.Calcule la probabilidad de que sobrevivan exactamente 2 de los siguientes 4 componentes se prueban.

b. La probabilidad de que un paciente se recupere de una rara enfermedad sanguínea es de 0.4. Si se sabe que 15 personas contrajeron la enfermedad. ¿Cuál es la probabilidad de que:

1. Sobrevivan al menos 10
2. Sobrevivan de 3 a 8
3. Sobrevivan exactamente 5.

Ejemplos

Media y varianza

$$\mu = np \quad \sigma^2 = np(1-p)$$

a. La probabilidad de que cierta clase de componente sobreviva a una prueba de choque es $3/4$.Calcule la probabilidad de que sobrevivan exactamente 2 de los siguientes 4 componentes se prueban.

b. La probabilidad de que un paciente se recupere de una rara enfermedad sanguínea es de 0.4. Si se sabe que 15 personas contrajeron la enfermedad. ¿Cuál es la probabilidad de que:
   1. Sobrevivan al menos 10
   2. Sobrevivan de 3 a 8
   3. Sobrevivan exactamente 5.

BINOMIAL

- c. Una cadena grande de tiendas al detalle le compra cierto tipo de dispositivo electrónico a un fabricante, el cual le indica que la tasa de dispositivos defectuosos es de 3 %
  1. El inspector de la cadena elige 20 artículos al azar de un cargamento. ¿Cuál es la probabilidad de que haya al menos un artículo defectuoso entre estos 20?
  2. Suponga que el detallista recibe 10 cargamentos en un mes y que el inspector prueba aleatoriamente 20 dispositivos por cargamento. ¿Cuál es l probabilidad de que haya exactamente tres cargamentos que contengan al menos un dispositivo defectuoso de entre los 20 seleccionados y probados.