Algunas distribuciones discretas de probabilidad

Luis Andrés Campos.
Antonino Zainea
Universidad Central.
2021-II

26 de octubre de 2021

Vamos a estudiar algunas distribuciones de probabilidad que figuran de manera más prominente en la teoría y las aplicaciones estadísticas. También hablaremos de sus parámetros; es decir, las cantidades que son constantes para distribuciones particulares pero que pueden tomar diferentes valores para diferentes miembros de las familias de distribuciones de la misma clase.

Distribuciones que estudiaremos

a. Uniforme discreta.
b. Binomial.
c. Hipergeométrica
d. Poisson

Vamos a estudiar algunas distribuciones de probabilidad que figuran de manera más prominente en la teoría y las aplicaciones estadísticas. También hablaremos de sus parámetros; es decir, las cantidades que son constantes para distribuciones particulares pero que pueden tomar diferentes valores para diferentes miembros de las familias de distribuciones de la misma clase.

Distribuciones que estudiaremos

a. Uniforme discreta.
b. Binomial.
c. Hipergeométrica
d. Poisson

Vamos a estudiar algunas distribuciones de probabilidad que figuran de manera más prominente en la teoría y las aplicaciones estadísticas. También hablaremos de sus parámetros; es decir, las cantidades que son constantes para distribuciones particulares pero que pueden tomar diferentes valores para diferentes miembros de las familias de distribuciones de la misma clase.

Distribuciones que estudiaremos

a. Uniforme discreta.
b. Binomial.
c. Hipergeométrica
d. Poisson

Vamos a estudiar algunas distribuciones de probabilidad que figuran de manera más prominente en la teoría y las aplicaciones estadísticas. También hablaremos de sus parámetros; es decir, las cantidades que son constantes para distribuciones particulares pero que pueden tomar diferentes valores para diferentes miembros de las familias de distribuciones de la misma clase.

Distribuciones que estudiaremos

a. Uniforme discreta.
b. Binomial.
c. Hipergeométrica
d. Poisson

Vamos a estudiar algunas distribuciones de probabilidad que figuran de manera más prominente en la teoría y las aplicaciones estadísticas. También hablaremos de sus parámetros; es decir, las cantidades que son constantes para distribuciones particulares pero que pueden tomar diferentes valores para diferentes miembros de las familias de distribuciones de la misma clase.

Distribuciones que estudiaremos

a. Uniforme discreta.
b. Binomial.
c. Hipergeométrica
d. Poisson

Vamos a estudiar algunas distribuciones de probabilidad que figuran de manera más prominente en la teoría y las aplicaciones estadísticas. También hablaremos de sus parámetros; es decir, las cantidades que son constantes para distribuciones particulares pero que pueden tomar diferentes valores para diferentes miembros de las familias de distribuciones de la misma clase.

Distribuciones que estudiaremos

a. Uniforme discreta.
b. Binomial.
c. Hipergeométrica
d. Poisson

UNIFORME DISCRETA

Si una variable aleatoria discreta puede asumir k valores diferentes con igual probabilidad, decimos que tiene una **distribución uniforme discreta**; simbólicamente.

Definición 1

Una variable aleatoria X tiene una distribución uniforme discreta y se conoce como una variable aleatoria uniforme discreta si y sólo si su distribución de probabilidad está dada por

$$f(x) = \frac{1}{k} \quad \text{para } x = x_1, x_2, \ldots, x_k$$

UNIFORME DISCRETA

Si una variable aleatoria discreta puede asumir k valores diferentes con igual probabilidad, decimos que tiene una **distribución uniforme discreta**; simbólicamente.

Definición 1

Una variable aleatoria X tiene una distribución uniforme discreta y se conoce como una variable aleatoria uniforme discreta si y sólo si su distribución de probabilidad está dada por

$$f(x) = \frac{1}{k} \quad \text{para } x = x_1, x_2, \ldots, x_k$$

Media y varianza

$$\mu = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot \frac{1}{k} \qquad \sigma^2 = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2 \cdot \frac{1}{k}$$

Nota:

En el caso especial donde $x_i = i$, la distribución uniforme discreta se vuelve

$$f(x) = \frac{1}{k} \quad \text{para } x = 1, 2, \cdots, k$$

Como ejemplo esta forma se puede aplicar al número de puntos que obtenemos al lanzar un dado balanceado.

Media y varianza

$$\mu = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot \frac{1}{k} \qquad \sigma^2 = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2 \cdot \frac{1}{k}$$

Nota:

En el caso especial donde $x_i = i$, la distribución uniforme discreta se vuelve

$$f(x) = \frac{1}{k} \quad \text{para } x = 1, 2, \cdots, k$$

Como ejemplo esta forma se puede aplicar al número de puntos que obtenemos al lanzar un dado balanceado.

Media y varianza

$$\mu = \sum_{i=1}^{k} x_i \cdot \frac{1}{k} \qquad \sigma^2 = \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^2 \cdot \frac{1}{k}$$

Nota:

En el caso especial donde $x_i = i$, la distribución uniforme discreta se vuelve

$$f(x) = \frac{1}{k} \quad \text{para } x = 1, 2, \cdots, k$$

Como ejemplo esta forma se puede aplicar al número de puntos que obtenemos al lanzar un dado balanceado.

BERNOULLI

Si un experimento tiene dos posibles resultados “éxito” y ”fracaso” y sus probabilidades son p y $1-p$, entonces el número de éxitos, 0 o 1, tiene una distribución de Bernoulli. Formalmente:

Definición 2

Una variable aleatoria X tiene una distribución de Bernoulli y se conoce como una variable aleatoria Bernoulli si y sólo si su distribución de probabilidad está dada por:

$$P(X=x)=p^x(1-p)^{1-x} \quad \text{para } x=0,1$$

BERNOULLI

Si un experimento tiene dos posibles resultados "éxito" y "fracaso" y sus probabilidades son p y $1-p$, entonces el número de éxitos, 0 o 1, tiene una distribución de Bernoulli. Formalmente:

Definición 2

Una variable aleatoria X tiene una distribución de Bernoulli y se conoce como una variable aleatoria Bernoulli si y sólo si su distribución de probabilidad está dada por:

$$P(X=x)=p^x(1-p)^{1-x} \quad \text{para } x=0,1$$

BERNOULLI

Si un experimento tiene dos posibles resultados "éxito" y "fracaso" y sus probabilidades son p y $1 - p$, entonces el número de éxitos, 0 o 1, tiene una distribución de Bernoulli. Formalmente:

Definición 2

Una variable aleatoria X tiene una distribución de Bernoulli y se conoce como una variable aleatoria Bernoulli si y sólo si su distribución de probabilidad está dada por:

$$P(X = x) = p^x(1 - p)^{1-x} \quad \text{para } x = 0, 1$$

BINOMIAL

Supongamos que realizamos n ensayos Bernoullis independientes, con las siguientes características:

1. El experimento consta de n ensayos repetidos.
2. Cada ensayo produce un resultado que se clasifica como éxito o fracaso.
3. La probabilidad de éxito permanece constante de un ensayo a otro.
4. Los ensayos repetidos son independientes.

El número X de éxitos en n experimentos Bernoulli se denomina variable aleatoria Binomial. La distribución de esa variable aleatoria discreta se llama distribución Binomial.

BINOMIAL

Supongamos que realizamos n ensayos Bernoullis independientes, con las siguientes características:

1. El experimento consta de n ensayos repetidos.
2. Cada ensayo produce un resultado que se clasifica como éxito o fracaso.
3. La probabilidad de éxito permanece constante de un ensayo a otro.
4. Los ensayos repetidos son independientes.

El número X de éxitos en n experimentos Bernoulli se denomina variable aleatoria Binomial. La distribución de esa variable aleatoria discreta se llama distribución Binomial.

BINOMIAL

Definición 3

Una variable aleatoría tiene una **distribución binomial** y se conoce como una variable aleatoria binomial si y sólo si su distribución de probabilidad está dada por:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad \text{para } x = 0, 1, \cdots, n$$

Comentarios

1. La distribución Binomial, queda caracterizada por el número de ensayos n y la probabilidad de éxito p
2. La notación que usaremos será: $X \simeq B(n, p)$

BINOMIAL

Definición 3

Una variable aleatoría tiene una **distribución binomial** y se conoce como una variable aleatoria binomial si y sólo si su distribución de probabilidad está dada por:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad \text{para } x = 0, 1, \cdots, n$$

Comentarios

1. La distribución Binomial, queda caracterizada por el número de ensayos n y la probabilidad de éxito p
2. La notación que usaremos será: $X \simeq B(n, p)$

Ejemplos

Media y varianza

$$\mu = np \quad \sigma^2 = np(1-p)$$

a. La probabilidad de que cierta clase de componente sobreviva a una prueba de choque es 3/4.Calcule la probabilidad de que sobrevivan exactamente 2 de los siguientes 4 componentes se prueban.

b. La probabilidad de que un paciente se recupere de una rara enfermedad sanguínea es de 0.4. Si se sabe que 15 personas contrajeron la enfermedad. ¿Cuál es la probabilidad de que:

1. Sobrevivan al menos 10
2. Sobrevivan de 3 a 8
3. Sobrevivan exactamente 5.

Ejemplos

Media y varianza

$$\mu = np \quad \sigma^2 = np(1-p)$$

a. La probabilidad de que cierta clase de componente sobreviva a una prueba de choque es 3/4.Calcule la probabilidad de que sobrevivan exactamente 2 de los siguientes 4 componentes se prueban.

b. La probabilidad de que un paciente se recupere de una rara enfermedad sanguínea es de 0.4. Si se sabe que 15 personas contrajeron la enfermedad. ¿Cuál es la probabilidad de que:
   1. Sobrevivan al menos 10
   2. Sobrevivan de 3 a 8
   3. Sobrevivan exactamente 5.

Ejemplos

Media y varianza

$$\mu = np \quad \sigma^2 = np(1-p)$$

a. La probabilidad de que cierta clase de componente sobreviva a una prueba de choque es $3/4$.Calcule la probabilidad de que sobrevivan exactamente 2 de los siguientes 4 componentes se prueban.

b. La probabilidad de que un paciente se recupere de una rara enfermedad sanguínea es de 0.4. Si se sabe que 15 personas contrajeron la enfermedad. ¿Cuál es la probabilidad de que:
   1. Sobrevivan al menos 10
   2. Sobrevivan de 3 a 8
   3. Sobrevivan exactamente 5.

BINOMIAL

c. Una cadena grande de tiendas al detalle le compra cierto tipo de dispositivo electrónico a un fabricante, el cual le indica que la tasa de dispositivos defectuosos es de 3 %

1. El inspector de la cadena elige 20 artículos al azar de un cargamento. ¿Cuál es la probabilidad de que haya al menos un artículo defectuoso entre estos 20?
2. Suponga que el detallista recibe 10 cargamentos en un mes y que el inspector prueba aleatoriamente 20 dispositivos por cargamento. ¿Cuál es l probabilidad de que haya exactamente tres cargamentos que contengan al menos un dispositivo defectuoso de entre los 20 seleccionados y probados.

HIPERGEOMÉTRICA

Consideremos que una urna tiene N bolas en total de las cuales R son rojas y $(N-R)$ blancas, supongamos además que se extrae una muestra de tamaño n sin reemplazo, entonces la probabilidad $P(A_k)$ de que exactamente k de las bolas extraídas son rojas es igual a:

$$P(k) := P(A_k) = \frac{\binom{R}{k}\binom{N-R}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Dado que solo nos interesa el número k de bolas rojas entre las n bolas extraídas, tenemos:

HIPERGEOMÉTRICA

Consideremos que una urna tiene N bolas en total de las cuales R son rojas y $(N-R)$ blancas, supongamos además que se extrae una muestra de tamaño n sin reemplazo, entonces la probabilidad $P(A_k)$ de que exactamente k de las bolas extraídas son rojas es igual a:

$$P(k) := P(A_k) = \frac{\binom{R}{k}\binom{N-R}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Dado que solo nos interesa el número k de bolas rojas entre las n bolas extraídas, tenemos:

HIPERGEOMÉTRICA

Definición 5

Una variable aleatoria X tiene una **distribución hipergeométrica** y se conoce como variable aleatoria hipergeométrica si y sólo si su distribución de probabilidad está dada por

$$P(X = x) = \frac{\binom{R}{x}\binom{N-R}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

para $x = 0, 1, 2, \ldots, n$, $x \leq R$ y $n - x \leq N - R$

HIPERGEOMÉTRICA

Definición 5

Una variable aleatoria X tiene una **distribución hipergeométrica** y se conoce como variable aleatoria hipergeométrica si y sólo si su distribución de probabilidad está dada por

$$P(X = x) = \frac{\binom{R}{x}\binom{N-R}{n-x}}{\binom{N}{n}}$$

para $x = 0, 1, 2, \ldots, n$, $x \leq R$ y $n - x \leq N - R$

HIPERGEOMÉTRICA

Comentarios

1. La distribución Hipergeométrica tiene como parámetros: n, R y N
2. La notación que usaremos será: $X \simeq Hg(n, R, N)$

Media y varianza

$$\mu = \frac{nR}{N} \qquad \sigma^2 = n \times \frac{R}{N} \times \frac{N-R}{N} \times \frac{N-n}{N-1}$$

HIPERGEOMÉTRICA

Comentarios

1. La distribución Hipergeométrica tiene como parámetros: n, R y N
2. La notación que usaremos será: $X \simeq Hg(n, R, N)$

Media y varianza

$$\mu = \frac{nR}{N} \qquad \sigma^2 = n \times \frac{R}{N} \times \frac{N-R}{N} \times \frac{N-n}{N-1}$$

HIPERGEOMÉTRICA

Comentarios

1. La distribución Hipergeométrica tiene como parámetros: n, R y N
2. La notación que usaremos será: $X \simeq Hg(n, R, N)$

Media y varianza

$$\mu = \frac{nR}{N} \qquad \sigma^2 = n \times \frac{R}{N} \times \frac{N-R}{N} \times \frac{N-n}{N-1}$$

Ejemplos

1. Lotes con 40 componentes cada uno que contenga 3 o más defectuosos se consideran inaceptables. El procedimiento para obtener muestras del lote consiste en seleccionar 5 componentes al azar y rechazar el lote si se encuentra un componente defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de, que en la muestra, se encuentren exactamente un componente defectuoso, si en todo el lote hay 3 defectuosos?
2. Calcule la media y la varianza en el ejemplo anterior, y después utilice el teorema de Chebyshev para interpretar el intervalo $\mu \pm 2\sigma$

Ejemplos

1. Lotes con 40 componentes cada uno que contenga 3 o más defectuosos se consideran inaceptables. El procedimiento para obtener muestras del lote consiste en seleccionar 5 componentes al azar y rechazar el lote si se encuentra un componente defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de, que en la muestra, se encuentren exactamente un componente defectuoso, si en todo el lote hay 3 defectuosos?
2. Calcule la media y la varianza en el ejemplo anterior, y después utilice el teorema de Chebyshev para interpretar el intervalo $\mu \pm 2\sigma$

Ejemplos

c. La división de vigilancia de una institución universitaria ha adquirido 50 equipos de comunicación con el fin de optimizar el servicio en sus predios. Se seleccionan aleatoriamente 8 equipos y se someten a prueba para encontrar posibles defectos. Si 3 de los 50 equipos están defectuosos, ¿cuál es la probabilidad de que la muestra contenga a lo más dos equipos defectuosos?

Ejemplos

c. La división de vigilancia de una institución universitaria ha adquirido 50 equipos de comunicación con el fin de optimizar el servicio en sus predios. Se seleccionan aleatoriamente 8 equipos y se someten a prueba para encontrar posibles defectos. Si 3 de los 50 equipos están defectuosos, ¿cuál es la probabilidad de que la muestra contenga a lo más dos equipos defectuosos?

POISSON

Llamada así en honor a Siméon Denis Poisson, probabilista francés del siglo XIX, es una distribución discreta de probabilidad muy útil en la que la variable aleatoria representa el número de eventos independientes que ocurren a una velocidad constante en el tiempo o espacio.Algunos ejemplos de este tipo de variables son: # de personas que llegan a una tienda en un tiempo determinado, # de defectos en piezas similares, # de solicitudes para un seguro, entre otras. De hecho, la distribución Poisson es el principal modelo de probabilidad empleado para analizar líneas de espera.

POISSON

- La variable aleatoria cuenta el número de veces que ocurre un evento en un intervalo de tiempo/espacio dado.
- Las probabilidades se mantiene igual para intervalos de tiempo iguales.
- Las ocurrencias son independientes.

POISSON

- La variable aleatoria cuenta el número de veces que ocurre un evento en un intervalo de tiempo/espacio dado.
- Las probabilidades se mantiene igual para intervalos de tiempo iguales.
- Las ocurrencias son independientes.

POISSON

Definición 5

Una variable aleatoria X tiene una **distribución Poisson** y se conoce como variable aleatoria Poisson si y sólo si su distribución de probabilidad está dada por

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

para $x = 0, 1, 2, \ldots$
Donde λ es el número promedio de ocurrencias del evento aleatorio por unidad de tiempo o espacio.

POISSON

Definición 5

Una variable aleatoria X tiene una **distribución Poisson** y se conoce como variable aleatoria Poisson si y sólo si su distribución de probabilidad está dada por

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

para $x = 0, 1, 2, \ldots$
Donde λ es el número promedio de ocurrencias del evento aleatorio por unidad de tiempo o espacio.

POISSON

Comentarios

1. La distribución Poisson tiene como único parámetro a λ
2. La notación que usaremos será: $X \simeq P(\lambda)$

Media y varianza

$$\mu = \lambda \quad \sigma^2 = \lambda$$

POISSON

Comentarios

1. La distribución Poisson tiene como único parámetro a λ
2. La notación que usaremos será: $X \simeq P(\lambda)$

Media y varianza

$$\mu = \lambda \quad \sigma^2 = \lambda$$

POISSON

Comentarios

1. La distribución Poisson tiene como único parámetro a λ
2. La notación que usaremos será: $X \simeq P(\lambda)$

Media y varianza

$$\mu = \lambda \quad \sigma^2 = \lambda$$

Ejemplos

El número x de personas ingresadas a una unidad de cuidados intensivos en un hospital particular, en un día, tiene una distribución de probabilidad de Poisson con media igual a cinco personas por día.

- ¿Cuál es la probabilidad de que el número de personas ingresadas a una unidad de cuidados intensivos en un hospital particular, en un día particular, sea dos? ¿Menor o igual a dos?
- ¿Es probable que x exceda de 10? Explique

Ejemplos

Los padres preocupados porque sus hijos son "propensos a accidentes" pueden estar tranquilos, de acuerdo a un estudio realizado por el Departamento de Pediatría de la Universidad de California, San Francisco. Los niños que se lesionan dos o más veces tienden a sufrir estas lesiones durante un tiempo relativamente limitado, por lo general un año o menos. Si el número promedio de lesiones por año para niños en edad escolar es de dos, ¿cuáles son las probabilidades de estos eventos?

- Un niño sufrirá dos lesiones durante el año.
- Un niño sufrirá dos o más lesiones durante el medio año.
- Un niño sufrirá a lo sumo una lesión durante 2 años.

Ejercicios

- Revisar la distribución geométrica y la distribución binomial negativa
- **Distribución Binomial** Realizar los ejercicios del libro guía: 3.35, 3.37, 3.39, 3.41 y 3.43.
- **Distribución hipergeométrica** Realizar los ejercicios: 3.103, 3.105, 3.107, 3.109 y 3.111
- **Distribución Poisson** Realizar los ejercicios: 3.121, 3.123, 3.125, 3.127 y 3.129

Código en R

Binomial Si la variable aleatoria X sigue una distribución binomial de n ensayos y probabilidad de éxito p.
$X \sim B(n, p)$
$P(X = x)$=dbinom(x,n,p) Si $X(5, 0{,}2)$ entonces
$P(X = 3) = dbinom(3, 5, 0{,}2)$
Hipergeométrica Si la variable aleatoria X sigue una distribución hipergeométrica de N elementos totales, R elementos de interés y n selecciones.
$X \sim Hg(n, R, N)$
$P(X = x)$=dhyper(x,R,N-R,n)
Si $X \sim Hg(5, 3, 40)$ entonces
$P(X = 1)$=dhyper(1,3,37,5)

Código en R

Poisson Si la variable aleatoria X sigue una distribución Poisson de λ ocurrencias en un intervalos dado.
$X \sim P(\lambda)$
$P(X = x)$=dpois(x,λ)
Si $X \sim Poisson(4)$ entonces
$P(X = 8)$=dpois(8,4)
Gráficamente

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}e^{-\frac{x}{10}} & si \qquad x \geq 0 \\ \\ 0 & \qquad \text{en otro caso} \end{cases}$$