

Probabilidad Total y Teorema de Bayes

Julio Antonino Zainea.
Universidad Central
2022-II

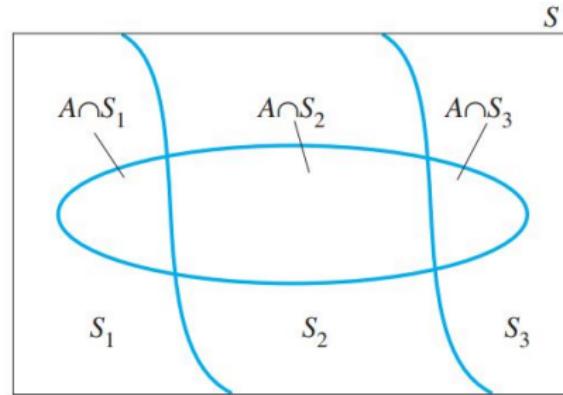
27 de octubre de 2022

Ley de Probabilidad Total

Definición

Dado un conjunto de eventos $S_1, S_2, S_3, \dots, S_k$ que son mutuamente excluyentes y exhaustivos y un evento A, la probabilidad del evento A se puede expresar como

$$P(A) = P(S_1)P(A|S_1) + P(S_2)P(A|S_2) + \dots + P(S_k)P(A|S_k)$$



Ejemplo

Una población se puede dividir en dos subgrupos que se presentan con probabilidades de 60 % y 40 %, respectivamente. Un evento A ocurre 30 % del tiempo en el primer subgrupo y 50 % del tiempo en el segundo subgrupo. ¿Cuál es la probabilidad incondicional del evento A, cualquiera que sea el subgrupo de donde venga?

Ejercicio

Error de un trabajador. Una máquina operada por un trabajador produce un artículo defectuoso con probabilidad 0.01 si el trabajador sigue exactamente las instrucciones de operación de la máquina y con probabilidad 0.03 si no las sigue. Si él sigue las instrucciones 90 % del tiempo, ¿qué proporción de todos los artículos producidos por la máquina será defectuosa?

Regla de Bayes

Definición

Con $S_1, S_2, S_3, \dots, S_k$ representemos k subpoblaciones mutuamente excluyentes y exhaustivas con probabilidades previas $P(S_1), P(S_2), \dots, P(S_k)$. Si ocurre un evento A, la probabilidad posterior de S_i dada A es la probabilidad condicional

$$P(S_i|A) = \frac{P(S_i)P(A|S_i)}{\sum_{j=1}^k P(A)P(A|S_j)}$$

para $i = 1, 2, \dots, k$.

Ejemplo

Error de un trabajador. Una máquina operada por un trabajador produce un artículo defectuoso con probabilidad 0.01 si el trabajador sigue exactamente las instrucciones de operación de la máquina y con probabilidad 0.03 si no las sigue. Si él sigue las instrucciones 90 % del tiempo, si el artículo es defectuoso, ¿Cuál es la probabilidad de que el operario haya seguido las instrucciones de operación?

Ejercicios

- El equipo de béisbol de los Gatos Salvajes de Ludlow, un equipo de las ligas menores de la organización de los Indians de Cleveland, juega 70 % de sus partidos por la noche y 30 % de día. El equipo gana 50 % de los juegos nocturnos y 90 % de los diurnos. De acuerdo con el periódico de hoy, ganaron el día de ayer. ¿Cuál es la probabilidad de que el partido se haya jugado de noche?
- La doctora Stallter ha enseñado estadística básica por varios años. Ella sabe que 80 % de los estudiantes terminará los problemas asignados. También que entre quienes hacen sus tareas, 90 % pasará el curso. Entre los que no hacen su tarea, 60 % pasará el curso. Mike Fishbaugh cursó estadística el semestre pasado con la doctora Stallter y pasó. ¿Cuál es la probabilidad de que haya terminado sus tareas?

- El departamento de crédito de Lion's Department Store en Anaheim, California, informó que 30 % de las ventas se paga con efectivo o con cheque; 30 % con tarjeta de crédito, y 40 % con tarjeta de débito. Veinte por ciento de las compras con efectivo o cheque, 90 % de las compras con tarjeta de crédito y 60 % de las compras con tarjeta de débito son por más de \$50. La señora Tina Stevens acaba de comprar un vestido nuevo que le costó \$120. ¿Cuál es la probabilidad de que haya pagado en efectivo o con cheque?
- Una cuarta parte de los residentes de Burning Ridge Estates dejan las puertas de sus cocheras abiertas cuando salen de su hogar. El jefe de la policía de la localidad calcula que a 5 % de las cocheras les robarán algo, pero sólo al 1 % de las cocheras con puertas cerradas les robarán algo. Si roban una cochera, ¿cuál es la probabilidad de que se hayan dejado las puertas abiertas?