UTN FRBA - Matematica Discreta

Grafos, Dígrafos y Árboles

Alejandra Isola
Joaquín Azcarate

1. Grafos

Conjunto de puntos o *nodos* unidos por arcos o aristas.
Un grafo se describe con una terna (V, A, φ), siendo:

- V: Conjunto de vértices
- A: Conjunto de aristas
- φ: $A \to \mathcal{V} \subseteq \{x \in \mathcal{P}(V) : |x| = 2\}$

1.1. Vértices

Vértices Adyacentes v_i es adyacente a $v_j \iff \exists a_k \in A / \varphi(a_k) = \{v_i, v_j\}$

Vértices Aislados v_k es aislado $\iff \nexists a_k \in A / v_k \in \varphi(a_k)$

Istom v es istmo $\iff G$ es conexo $\Rightarrow G' = (V - \{v\}, A, \varphi)$ no es conexo

1.2. Aristas

Aristas Paralelas a_i es paralela a $a_j \iff \varphi(a_i) = \varphi(a_J)$

Aristas Adyacentes a_i es adyacente a $a_j \iff \exists v_k \in V / v_k \in \varphi(a_i) \wedge v_k \in \varphi(a_j)$

Bucle *o lazo* a_k es un bucle $\iff \varphi(a_k) = \{v, v\}$

Aristas incidentes a un vértice a_i y a_j son incidentes en el vértice $v \iff$
$\iff v \in \varphi(a_i) \wedge v \in \varphi(a_j)$

Grado o *valencia* de un vértice $g : V \to \mathbb{Z}/g(v_i)$ = cantidad de aristas incidentes
Nota: Los bucles se cuentan doblemente

$$\sum_i g(v_i) = 2|A|$$

Puente a es puente $\iff$ G es conexo $\Rightarrow G' = (V, A - \{a\}, \varphi/_{A-\{a\}})$ no es conexo

Conjunto desconectante Un conjunto de puentes

Conjunto de Corte Mínimo conjunto desconectante

1.3. Grafos Particulares

Grafo Simple No tiene aristas paralelas ni bucles

Grafo K-Regular G es K-Regular $\iff K \in \mathbb{N}_0 \wedge \forall v \in V : g(v) = k$

Grafo Completo (K_n) $\forall v, w \in V : v \neq w \Rightarrow \exists a \in A : \varphi(a) = \{v, w\}$

Grafo Bipartito $V = V_1 \bigcup V_2$; $V_1 \neq \phi \wedge V_2 \neq \phi \wedge V_1 \bigcup V_2 \neq \phi \wedge \forall a_i \in A :$
$\varphi(a_i) = \{v_j, v_k\}/$
$v_j \in V_1 \wedge v_k \in V2$

Subgrafos $G' = (V', A', \varphi/_{A'})$ / $V' \subseteq V, A' \subseteq A$

Componente Conexa Son las clases de equivalencia de la relación $R : v_i R v_k \iff$ $\exists$ un camino de v_i a $v_j \vee v_i = v_j$

Grafo Conexo Un grafo con una única componente conexa

Conectividad El menor número de istmos

Grafos Planos Grafo que se puede dibujar sin que se crucen aristas

1.4. Caminos y Ciclos

Camino Sucesión de aristas adyacentes distintas

Ciclo *o circuito* Camino cuyo vértice inicial conicide con el final

Longitud Cantidad de aristas que componen un camino

Camino Simple Camino con todos los vértices distintos

Camino/Ciclo hamiltoniano Camino/Ciclo que pasa por *todos* los vértices *una sola vez*

Camino Euleriano Camino que pasa por *todas* las aristas *una sola vez*
CNyS:

- Ser Conexo
- $\forall v_i : g(v_i) = 2k; k \in \ltimes$ o a lo sumo dos vértices de grado impar

Ciclo euleriano Ciclo que pasa por *todas* las aristas *una sola vez*
CNyS:

- Ser Conexo
- $\forall v_i : g(v_i) = 2k$

1.5. Representación Matricial

Matriz de incidencia $Ma_{ij}^{|V|x|A|} = \begin{cases} 1 & v_i \text{ es incidente a } a_j \\ 0 & v_i \text{ no es incidente a } a_j \end{cases}$

Matriz de adyacencia $Ma_{ij}^{|V|x|V|} = \begin{cases} 1 & v_i \text{ es adyacente a } v_j \\ 0 & v_i \text{ no es adyacente a } v_j \end{cases}$

1.6. Isomorfismo

Dado $G_1 = (V_1, A_1, \varphi_1)$ y $G_2 = (V_2, A_2, \varphi_2)$
G_1 es isomorfo a G_1 $\iff$ $\exists f : V_1 \to V_2 \wedge h : A_1 \to A_2$ ambas funciones biyectivas y $\forall a \in A_1 : \ \varphi_2(\ h(a)\ ) = f(\ \varphi(a)\ )$

1.7. Teorema de Kuratowski

Un grafo es plano $\iff$ no contiene ningún subgrafo isomorfo al $K_{3,3}$ o al K_5

2. Dígrafos

Conjunto de puntos o *nodos* unidos por arcos o aristas *direccionadas*
Un grafo se describe con una terna (V, A, δ), siendo:

- V: Conjunto de vértices
- A: Conjunto de aristas
- δ: $A \to VxV$

2.1. Grado

Grado Positivo (g^+) Cantidad de aristas que "entran" al vértice

Grado Negativo (g^-) Cantidad de aristas que "salen" del vértice

Grado Total (g) $g^+ + g^-$

Grado Neto (g_N) $g^+ - g^-$

Pozo $g^-(v) = 0$

Fuente $g^+(v) = 0$

2.2. Grafo asociado

Dado el Dígrafo (V, A, δ), se define el Grafo asociado (V, A, ϕ), tal que:

$$\forall a_i \in A,\ \phi(a_i) = \{Primero(\delta(a_i)), Segundo(\delta(a_i))\}$$

2.3. Dígrafos

Dígrafos Conexo Aquel cuyo grafo asociado sea conexo

Dígrafos Fuertemente Conexo $\exists$ camino entre todo par de vértices

2.4. Caminos y Ciclos

Se debe respetar el sentido de las aristas

Ciclo de Euler CNyS: $\forall v \in V \ : g^{+}(v) = g^{-}(v)$

2.5. Representación Matricial

Matriz de incidencia $Ma_{ij}^{|V|x|A|} = \begin{cases} 1 & \exists v_x \in V / \delta(a_j) = (v_i, v_x) \\ -1 & \exists v_x \in V / \delta(a_j) = (v_x, v_i) \\ 0 & \text{si } v_i \text{ no es extremo de } a_j \end{cases}$

Matriz de adyacencia $Ma_{ij}^{|V|x|V|} = \begin{cases} 1 & \exists a \in A \ : \delta(a) = (v_i, v_j) \\ 0 & \nexists a \in A \ : \delta(a) = (v_i, v_j) \end{cases}$

3. Árboles

Grafo conexo y sin ciclos
Un grafo donde existe un único camino simple entre todo par de vértices

- Todas las aristas son puente
- $|V| = |A| + 1$

Hoja $g(v) = 1$

Antecesor v es antecesor de $w \iff \exists!$ camino simple de v a w

Sucesor v es sucesor de $w \iff w$ es antecesor de v

Padre v es padre de $w \iff \exists a_k \ / \varphi(a_k) = \{v, w\}$

Hijo v es hijo de $w \iff w$ es padre de v

Hermanos v es hermano de $w \iff v \wedge w$ tienen el mismo padre

Nivel Cuantos padres tiene hasta llegar a la raiz

Altura Máximo nivel