Grafos, Dígrafos y Árboles

Alejandra Isola
Joaquín Azcarate

1. Grafos

Conjunto de puntos o *nodos* unidos por arcos o aristas. Un grafo se describe con una terna (V, A, φ) siendo:

- V: Conjunto de vértices
- A: Conjunto de aristas
- φ: $A \to \mathcal{V} \subseteq \{x \in \mathcal{P}(V) : |x| \in \{1,2\}\}$

1.1. Vértices

Vértices adyacentes v_i es adyacente a $v_j \iff$
$\iff \exists a_k \in A \ : \ \varphi(a_k) = \{v_i, v_j\}$

Vértices aislados v_k es aislado $\iff$
$\iff \nexists a_k \in A \ : \ v_k \in \varphi(a_k)$

Istom v es istmo $\iff G$ es conexo $\Rightarrow$
$\Rightarrow G' = (V - \{v\}, A, \varphi/_{V-\{v\}})$ no es conexo

1.2. Aristas

Aristas paralelas a_i es paralela a $a_j \iff$
$\iff \varphi(a_i) = \varphi(a_j)$

Aristas adyacentes a_i es adyacente a $a_j \iff$
$\iff \exists v_k \in V \ : \ v_k \in \varphi(a_i) \wedge v_k \in \varphi(a_j)$

Bucle *o lazo* a_k es un bucle $\iff |\varphi(a_k)| = 1$

Aristas incidentes a un vértice a_i y a_j son incidentes en el vértice $v \iff$
$\iff v \in \varphi(a_i) \wedge v \in \varphi(a_j)$

Grado o *valencia* de un vértice $g : V \to \mathbb{Z}$
$g(v_i) =$ cantidad de aristas incidentes
Nota: Los bucles se cuentan doblemente

$$\sum_i g(v_i) = 2|A|$$

Puente a es puente $\iff G$ es conexo $\Rightarrow$
$\Rightarrow G' = (V, A - \{a\}, \varphi/_{A-\{a\}})$ no es conexo

Conjunto desconectante Un conjunto de puentes

Conjunto de corte Mínimo conjunto desconectante

1.3. Grafos Particulares

Grafo simple No tiene aristas paralelas ni bucles

Grafo $\mathcal{K}$-regular G es $\mathcal{K}$-regular $\iff \mathcal{K} \in \mathbb{N}_0 \wedge$
$\forall v \in V : g(v) = \mathcal{K}$

Grafo completo (K_n)
$\forall v, w \in V, v \neq w, \exists a \in A \ : \ \varphi(a) = \{v, w\}$

Grafo bipartito $V = V_1 \bigcup V_2, \ V_1 \neq \phi$
$V_2 \neq \phi, \ V1 \bigcap V2 = \phi, \ \forall a_i \in A \ :$
$\varphi(a_i) = \{v_j, v_k\}, \ v_j \in V_1 \wedge v_k \in V2$

Subgrafos $G' = (V', A', \varphi') \ :$
$V' \subseteq V, \ A' \subseteq A, \ \varphi' : A' \to \mathcal{V}'$

Componente conexa Son las clases de equivalencia de la relación $R : v_i R v_k \iff$
$\iff \exists$ un camino de v_i a $v_j \vee v_i = v_j$

Grafo Conexo Un grafo con una única componente conexa

Conectividad El menor número de istmos

Grafos planos Grafo que se puede dibujar sin que se crucen aristas

1.4. Caminos y Ciclos

Camino Sucesión de aristas adyacentes distintas

Ciclo *o circuito* Camino cuyo vértice inicial conicide con el final

Longitud Cantidad de aristas que componen un camino

Camino simple Camino con todas sus aristas distintas

Camino elemental Camino con todos sus vértices distintos

Camino euleriano Camino que pasa por *todas* las aristas *una sola vez*
CNyS:

- Ser conexo
- $\forall v_i : g(v_i) = 2k; k \in \mathbb{N}$ o a lo sumo dos vértices de grado impar

Ciclo euleriano Ciclo que pasa por *todas* las aristas *una sola vez*
CNyS:

- Ser Conexo
- $\forall v_i : g(v_i) = 2k$

Camino/Ciclo hamiltoniano Camino/Ciclo que pasa por *todos* los vértices *una sola vez*

1.5. Representación Matricial

Matriz de incidencia $Mi^{|V|x|A|}$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & v_i \text{ es incidente a } a_j \\ 0 & v_i \text{ no es incidente a } a_j \end{cases}$$

Matriz de adyacencia $Ma^{|V|x|V|}$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & v_i \text{ es adyacente a } v_j \\ 0 & v_i \text{ no es adyacente a } v_j \end{cases}$$

1.6. Isomorfismo

Dado $G_1 = (V_1, A_1, \varphi_1)$ y $G_2 = (V_2, A_2, \varphi_2)$
G_1 es isomorfo a $G_2 \iff$
$\iff \exists f : V_1 \to V_2 \wedge h : A_1 \to A_2$, ambas funciones biyectivas y $\forall a \in A_1 \ : \ \varphi_2\big(h(a)\big) = f\big(\varphi_1(a)\big)$

1.7. Teorema de Kuratowski

Un grafo es plano $\iff$ no contiene ningún subgrafo isomorfo al $K_{3,3}$ o al K_5

2. Dígrafos

Conjunto de puntos o *nodos* unidos por arcos o aristas *direccionadas*
Un grafo se describe con una terna (V, A, δ), siendo:

- V: Conjunto de vértices
- A: Conjunto de aristas
- δ: $A \to VxV$

2.1. Aristas

Aristas paralelas a_i es paralela a $a_j \iff$
$\iff \delta(a_i) = \delta(a_j)$

Aristas antiparalelas a_i es antiparalela a a_j
$\iff \delta(a_i) = (v_1, v_2) \Rightarrow \delta(a_j) = (v_2, v_1)$

Bucle *o lazo* a_k es un bucle $\iff \delta(a_k) = (v, v)$

Grado positivo (g^+) Cantidad de aristas que "*entran*" al vértice

Grado negativo (g^-) Cantidad de aristas que "*salen*" del vértice

Grado total (g) $g^+ + g^-$

Grado neto (g_N) $g^+ - g^-$

Pozo $g^-(v) = 0$

Fuente $g^+(v) = 0$

2.2. Grafo Asociado

Dado el dígrafo (V, A, δ), se define el grafo asociado (V, A, φ) :

$$\forall a_i \in A, \ \varphi(a_i) = \{Primero(\delta(a_i)), Segundo(\delta(a_i))\}$$

2.3. Dígrafos Particulares

Dígrafos conexo Aquel cuyo grafo asociado sea conexo

Dígrafos fuertemente conexo $\forall$ par de vértices, $\exists$ un camino entre ellos

2.4. Caminos y Ciclos

Se debe respetar el sentido de las aristas

Ciclo euleriano CNyS: $\forall v \in V \ : g^{+}(v) = g^{-}(v)$

2.5. Representación Matricial

Matriz de incidencia $Mi^{|V|x|A|}$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \exists v_x \in V \ : \ \delta(a_j) = (v_i, v_x) \\ -1 & \exists v_x \in V \ : \ \delta(a_j) = (v_x, v_i) \\ 0 & \text{si } v_i \text{ no es extremo de } a_j \end{cases}$$

Matriz de adyacencia $Ma^{|V|x|V|}$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \exists a \in A \ : \ \delta(a) = (v_i, v_j) \\ 0 & \nexists a \in A \ : \ \delta(a) = (v_i, v_j) \end{cases}$$

3. Árboles

Grafo conexo y sin ciclos
Un grafo donde existe un único camino simple entre todo par de vértices

- Todas las aristas son puente
- $|V| = |A| + 1$

Hoja $g(v) = 1$

3.1. Árbol Dirigido

Antecesor v es antecesor de $w \iff$ $\iff \exists!$ camino simple de v a w

Sucesor v es sucesor de $w \iff$ $\iff w$ es antecesor de v

Padre v es padre de $w \iff \exists a_k \ : \ \delta(a_k) = (v, w)$

Hijo v es hijo de $w \iff w$ es padre de v

Hermanos v es hermano de $w \iff v$ y w tienen el mismo padre

Nivel Cantidad de padres tiene hasta llegar a la raiz

Altura Máximo nivel

3.2. Árboles Particulares

$\mathcal{N}$-ario $\forall v \in V \ : \ g^{-}(v) \leq \mathcal{N}$

$\mathcal{N}$-ario regular $\forall v \in V \ : \ g(v) = 0 \vee g(v) = \mathcal{N}$

$\mathcal{N}$-ario regular pleno *o completo* $\mathcal{N}$=ario regular donde todas las hojas se hallan en el mismo nivel

3.3. Recorrido de Árboles

Orden previo *o pre-orden* Notación polaca

1. Nomrar la raiz
2. Recorre el sub-árbol izquierdo
3. Recorre el sub-árbol derecho

Orden simetrico *o in-orden* Notación usual o infija

1. Recorre el sub-árbol izquierdo
2. Nomrar la raiz
3. Recorre el sub-árbol derecho

Orden posterior *o post-orden* Notación polaca inversa

1. Recorre el sub-árbol izquierdo
2. Recorre el sub-árbol derecho
3. Nomrar la raiz