RED TELEMÁTICA EDUCATIVA EUROPEA

Matemáticas en Secundaria

La Didáctica de las Matemáticas: una visión general.

D. Juan Antonio García Cruz

Introducción

Didáctica de cualquier materia significa, en palabras de Freudenthal (1991, p 45), la organización de los procesos de enseñanza y aprendizaje relevantes para tal materia. Los didactas son organizadores: desarrolladores de educación, autores de libros de texto, profesores de toda clase, incluso los estudiantes que organizan su aprendizaje individual o grupal.
Para Brousseau (Kieran, 1998, p.596), la didáctica es la ciencia que se interesa por la producción y comunicación del conocimiento. Saber que es lo que se está produciendo en una situación de enseñanza es el objetivo de la didáctica.
Debido a la complejidad de los procesos presentes en toda situación de enseñanza y aprendizaje, Schoenfled (1987) postula una hipótesis básica consistente en que a pesar de la complejidad, las estructuras mentales de los alumnos pueden ser comprendidas y que tal comprensión ayudará a conocer mejor los modos en que el pensamiento y el aprendizaje tienen lugar. El centro de interés es, por lo tanto, explicar qué es lo que produce el pensamiento productivo e identificar las capacidades que permiten resolver problemas significativos.
Para Steiner (1985) la complejidad de los problemas planteados en la didáctica de las matemáticas produce dos reacciones extremas. En la primera están los que afirman que la didáctica de la matemática no puede llegar a ser un campo con fundamentación científica y, por lo tanto, la enseñanza de la matemática es esencialmente un arte. En la segunda postura encontramos aquellos que piensan que es posible la existencia de la didáctica como ciencia y reducen la complejidad de los problemas seleccionando sólo un aspecto parcial al que atribuyen un peso especial dentro del conjunto, dando lugar a diferentes definiciones y visiones de la misma. Steiner considera que la didáctica de la matemática debe tender hacia lo que Piaget denominó transdisciplinariedad lo que situaría a las investigaciones e innovaciones en didáctica dentro de las interacciones entre las múltiples disciplinas, (Psicología, Pedagogía, Sociología entre otras sin olvidar a la propia Matemática como disciplina científica) que permiten avanzar en el conocimiento de los problemas planteados.
La didáctica como actividad general ha tenido un amplio desarrollo en las cuatro últimas décadas de este siglo. Sin embargo, no ha acabado la lucha entre el idealista, que se inclina por potenciar la comprensión mediante una visión amplia de la matemática, y el práctico, que clama por el restablecimiento de las técnicas

básicas en interés de la eficiencia y economía en el aprendizaje. Ambas posturas se pueden observar tanto en los grupos de investigadores, innovadores y profesores de matemáticas de los diferentes niveles educativos. Para una visión histórica del desarrollo de la didáctica, remitimos al lector interesado a una reciente publicación (Kilpatrick, Rico y Sierra, 1992), donde el primer autor muestra una amplia panorámica desde una perspectiva internacional, y los otros dos autores se centran más en el desarrollo de la misma en España durante el siglo XX.

1 La tendencia curricular conocida como matemática moderna

A finales de los años cincuenta y comienzo de la década de los sesenta, se produce un cambio curricular importante en la enseñanza de las matemáticas escolares, conocida como *la nueva matemática o matemática moderna*.

Las bases filosóficas de este movimiento se establecieron durante el seminario de Royamount, celebrado en 1959. En el transcurso del mismo, el famoso matemático francés Jean Diudonné lanzó el grito de "abajo Euclides" y propuso ofrecer a los estudiantes una enseñanza basada en el carácter deductivo de la matemática y que partiera de unos axiomas básicos en contraposición a la enseñanza falsamente axiomática de la geometría imperante en aquellos momentos. En ese mismo seminario la intervención de otro matemático francés, G. Choquet va en el mismo sentido: *... disponemos de un excelente ejemplo, el conjunto de los números enteros, donde estudiar los principales conceptos del álgebra, como son la relación de orden, la estructura de grupo, la de anillo ...".* Estas dos intervenciones se pueden considerar como paradigmáticas del movimiento que se inicia, pues la primera dibuja el enfoque que ha de caracterizar la enseñanza de la matemática y la otra cual es el contenido más apropiado. La idea en principio parecía bastante lógica y coherente. Por un lado se pretendía transmitir a los alumnos el carácter lógico-deductivo de la matemática y al mismo tiempo unificar los contenidos por medio de la teoría de conjuntos, las estructuras algebraicas y los conceptos de relación y función de la matemática superior. A finales de los sesenta y principios de los setenta parece claro que la nueva matemática ha sido un fracaso. Surgen entonces algunas voces en contra del enfoque adoptado, como es el caso de R. Thom (Modern Mathematics: does it exist? (1973): " *Ellos, los bourbakistas, abandonaron un campo ideal para el aprendizaje de la investigación: La geometría euclídea, mina inagotable de ejercicios y la sustituyeron por las generalidades de los conjuntos y la lógica, materiales tan pobres, vacíos y frustrantes para la enseñanza como los que más. El énfasis puesto por los estructuralistas en la axiomática no es sólo una aberración pedagógica sino también matemática."*

El fracaso de la matemática moderna, pues ni se aprenden los conceptos ni estructuras superiores y además los alumnos siguen sin dominar las rutinas básicas del cálculo, produce nuevos movimientos renovadores. Entre estos movimientos aquí nos referiremos a los conocidos como *retorno a lo básico*, la *resolución de problemas* y la *matemática como actividad humana*.

La *retorno a lo básico (Back to Basic)*, supuso para las matemáticas escolares retomar la práctica en los algorítmos y procedimientos básicos de cálculo. Después

de un tiempo, se hizo evidente que tal retorno a lo básico no era la solución razonable a la enseñanza de las matemáticas. Los alumnos, en el mejor de los casos, aprendían de memoria los procedimientos sin comprenderlos. A finales de los setenta empezó a cuestionarse el eslogan "*retorno a lo básico*". ¿Qué es lo básico? Ya que no parecía posible enseñar matemáticas modernas, ¿habría que enseñar matemáticas básicas?. Esta última pregunta nos lleva a otra de forma natural, ¿qué son matemáticas básicas? ¿la geometría elemental?, ¿la aritmética?. Había demasiadas opiniones sobre qué es "lo básico". Esta pregunta impregnó el III Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME), celebrado en Berkeley en el verano de 1980. ¿Podría ser la resolución de problemas el foco de atención y respuesta a esa pregunta? Casi como una bienvenida a todos los profesores que asisten al ICME el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) edita su famosa *Agenda in Action* para toda la década de los ochenta. Así la resolución de problemas, *the problem solving approach*, se pretende que sea algo más que otro eslogan y se convierta en toda una tarea a desarrollar, a interpretar y a llevar a cabo.
En el congreso de Berkeley hay un invitado de honor especial, H. Freudenthal, que interviene en una ponencia bajo el título "Major Problems of Mathematics Education" (Grandes problemas de la educación matemática). Así comenzó H.Freudenthal su intervención: " *Perdonadme, no fui yo quién eligió este tema, aunque cuando se me propuso, experimente un gran reto. Un reto, de verdad, pero para ser sinceros no como para emular a D. Hilbert, quién anunció sus famosos 23 problemas de matemáticas en el congreso internacional de matemáticas celebrado en París en 1900, que tanto influyeron el desarrollo y curso de las investigaciones matemáticas a lo largo de este siglo...* Para a continuación rechazar el camino seguido por Hilbert y considerar como su centro de interés los problemas que surgen en la educación matemática como una actividad social y no sólo como campo de investigación educativa. Creo que es importante y clarificadora esta toma de postura de Freudenthal, pues a continuación entra de lleno en el problema que considera, no más importante, pero sí más urgente: *Lo que es un problema es cómo formularlo correctamente y sin errores . ..Why can Johnny not do arithmetic?* , parodiando el título de un famoso libro de M.Kline que aquí fue traducido como El Fracaso de la Matemática Moderna, para preguntarse si suena sexista tal cuestión y si no sonará más sexista aún si la formula como *Why can Mary not do arithmetic?*, pues esta última formulación sugeriría que las niñas son mucho peores que los niños en aritmética. Por último Freudenthal reformula la pregunta de forma más concreta *Why can Jennifer not do arithmetic?* Jennnifer no es un ser abstracto, es una alumna que a los ocho años tenía graves fallos en aritmética y que habían desaparecido a la edad de once años, después de una atención particularizada. En contra del planteamiento general que encierra la pregunta *Why can Johnny not do arithmetic?* Freudenthal opta por un enfoque particular, así, la pregunta *Why can Jennifer not do arithmetic?* tiende a plantear un problema particular, individual, que permita abordar el problema personal que Jennifer tiene con la aritmética y sobre todo a profundizar en qué aspectos del

aprendizaje de Jennifer la han conducido al fracaso. Tanto Polya (que no pudo asistir, pero que envió una nota de excusa en la que planteaba qué puede hacer el profesor para mejorar la mente de sus alumnos) como Freudenthal sitúan el centro de atención sobre el aprendizaje. El primero solicitando de los profesores un compromiso con el aprendizaje de sus alumnos hacia la adquisición y mejora de las capacidades intelectuales; el segundo en concretar, particularizar los problemas derivados de la enseñanza y en investigar los aprendizajes individuales para dar posibles soluciones a los aparentes fracasos, y obtener ejemplos paradigmáticos de diagnosis y prescripción de los mismos. Freudenthal hace una llamada a la conciencia de todos los profesores e investigadores para que estos ejemplos se registren y se transmitan, de tal forma que unos puedan aprender de los otros y se gestione de forma efectiva el conocimiento en educación matemática.

2 Estilos de enseñanza

La matemática como actividad posee una característica fundamental: La matematización. Matematizar es organizar y estructurar la información que aparece en un problema, identificar los aspectos matemáticos relevantes, descubrir regularidades, relaciones y estructuras.

Treffer en su tesis (1978) distingue dos formas de matematización, la matematización *horizontal* y la matematización *vertical*.

La *matematización horizontal*, no lleva del mundo real al mundo de los símbolos y posibilita tratar matemáticamente un conjunto de problemas.

En esta actividad son característicos los siguientes procesos:

IDENTIFICAR las matemáticas en contextos generales
ESQUEMATIZAR
FORMULAR y VISUALIZAR un problema de varias maneras
DESCUBRIR relaciones y regularidades
RECONOCER aspectos isomorfos en diferentes problemas
TRANSFERIR un problema real a uno matemático
TRANSFERIR un problema real a un modelo matemático conocido.

La *MATEMATIZACION VERTICAL*, consiste en el tratamiento específicamente matemático de las situaciones, y en tal actividad son característicos los siguientes procesos:

REPRESENTAR una relación mediante una fórmula
UTILIZAR diferentes modelos
REFINAR y AJUSTAR modelos
COMBINAR e INTEGRAR modelos
PROBAR regularidades
FORMULAR un concepto matemático nuevo
GENERALIZAR

Estos dos componentes de la matematización pueden ayudarnos a caracterizar los diferentes estilos o enfoques en la enseñanza de la matemática.

Estructuralismo

Para el estructuralismo, la matemática es una ciencia lógico deductiva y ese carácter es el que debe informar la enseñanza de la misma.

El estilo *estructuralista* hunde sus raíces históricas en la enseñanza de la geometría euclídea y en la concepción de la matemática como logro cognitivo caracterizado por ser un sistema deductivo cerrado y fuertemente organizado. Es por lo que, a los ojos de los estructuralistas, a los alumnos se les debe enseñar la matemática como un sistema bien estructurado, siendo además la estructura del sistema la guía del proceso de aprendizaje. Ese fue, y sigue siendo, el principio fundamental de la reforma conocida con el nombre de Matemática Moderna y cuyas consecuencias llegan hasta nuestros días. El estilo estructuralista carece del componente horizontal pero cultiva, de forma abundante, la componente vertical.

Mecanicismo

El estilo *mecanicista* se caracteriza por la consideración de la matemática como un conjunto de reglas. A los alumnos se les enseña las reglas y las deben aplicar a problemas que son similares a los ejemplos previos. Raramente se parte de problemas reales o cercanos al alumno, más aún, se presta poca atención a las aplicaciones como génesis de los conceptos y procedimientos, y mucha a la memorización y automatización de algoritmos de uso restringido. El estilo mecanicista se caracteriza por una carencia casi absoluta de los dos tipos de matematización.

El ataque más demoledor a esta planteamiento de enseñanza proviene de H. Freudenthal (1991): *" De acuerdo con la filosofía mecanicista el hombre es como una computadora, de tal forma que su actuación puede ser programada por medio de la práctica. En el nivel más bajo, es la práctica en las operaciones aritméticas y algebraicas (incluso geométricas) y la solución de problemas que se distinguen por pautas fácilmente reconocibles y procesables. Es en este, el más bajo nivel dentro de la jerarquía de los más potentes ordenadores, donde se sitúa al hombre".*

Freudenthal termina su alegato con la siguiente pregunta dirigida a sus propagadores: *¿Por qué enseñar a los alumnos a ejecutar tareas, al nivel en el que los ordenadores son mucho más rápidos, económicos y seguros?*

Empirismo

Toma como punto de partida la realidad cercana al alumno, lo concreto. La enseñanza es básicamente utilitaria, los alumnos adquieren experiencias y contenidos útiles, pero carece de profundización y sistematización en el aprendizaje. El empirismo está enraizado profundamente en la educación utilitaria inglesa.

Realista

El estilo *realista* parte así mismo de la realidad, requiere de matematización horizontal, pero al contrario que en le empiricista se profundiza y se sistematiza en los aprendizajes, poniendo la atención en el desarrollo de modelos, esquemas, símbolos, etc. El principio didáctico es la reconstrucción o invención de la matemática por el alumno, así, las construcciones de los alumnos son fundamentales. Es una enseñanza orientada básicamente a los procesos. Este estilo surgió en los Países Bajos partiendo de las ideas de Freudenthal y ha sido desarrollado por los actuales miembros del Freudenthal Institut de la Universidad de Utrecht (www.fi.uu.nl).

Los estilos *empiricista* y *realista* desarrollan bastante la componente horizontal pero sólo el último presta atención a la componente vertical, que es casi inexistente en el primero.

3 La resolución de problemas

La heurística o *ars inveniendi* tenía por objeto el estudio de las reglas y de los métodos de descubrimiento y de la invención. La heurística moderna, inaugurada por Polya con la publicación de su obra *How to solve it* (Polya, 1945), trata de comprender el método que conduce a la solución de problemas, en particular las operaciones típicamente útiles en este proceso.

3.1 ¿Qué es un problema?

Polya no definió lo que entendía por problema cuando escribió su libro en 1945. Sin embargo, en su libro *Mathematical Discovery* (Polya, 1961), se vio obligado a proporcionar una definición. Pero no para empezar su disertación, sino en el capítulo 5, y después de una amplia exposición práctica sobre algunos procesos que intervienen en la resolución de problemas: *Tener un problema significa buscar de forma consciente una acción apropiada para lograr un objetivo claramente concebido pero no alcanzable de forma inmediata.*

Otra definición, parecida a la de Polya es la de Krulik y Rudnik: *Un problema es una situación, cuantitativa o de otra clase, a la que se enfrenta un individuo o un grupo, que requiere solución, y para la cuál no se vislumbra un medio o camino aparente y obvio que conduzca a la misma* (Krulik y Rudnik, 1980).

De ambas definiciones se infiere que un problema debe satisfacer los tres requisitos siguientes:

1) Aceptación. El individuo o grupo, debe aceptar el problema, debe existir un compromiso formal, que puede ser debido a motivaciones tanto externas como internas.

2) Bloqueo. Los intentos iniciales no dan fruto, las técnicas habituales de abordar el problema no funcionan.

3) Exploración. El compromiso personal o del grupo fuerzan la exploración de nuevos métodos para atacar el problema.

También ha existido cierta polémica sobre la diferencia que hay entre un ejercicio o un auténtico problema.

Lo que para algunos es un problema, por falta de conocimientos específicos sobre el dominio de métodos o algoritmos de solución, para los que sí los tienen es un ejercicio. Esta cuestión aunque ha sido planteada en varias ocasiones, no parece un buen camino para profundizar sobre la resolución de problemas.

R. Borasi (1986), en uno de los primeros intentos en clarificar la noción de problema originada por su interés en mejorar la enseñanza de la resolución de problemas, utiliza los siguientes elementos estructurales para una tipología de problemas:

- El contexto del problema, la situación en la cuál se enmarca el problema mismo.
- La formulación del problema, definición explícita de la tarea a realizar.
- El conjunto de soluciones que pueden considerarse como aceptables para el problema.
- El método de aproximación que podría usarse para alcanzar la solución.

Tales elementos estructurales pueden dar origen a la siguiente clasificación:

Tipo	Contexto	Formulación	Soluciones	Método
ejercicio	inexistente	Única y explícita	Única y exacta	Combinación de algoritmos conocidos
Problema con texto	Explícito en el texto	Única y explícita	Única y exacta	Combinación de algoritmos conocidos
Puzzle	Explícito en el texto	Única y explícita	Única y exacta	Elaboración de un nuevo algoritmo Acto de ingenio.
Prueba de una conjetura	En el texto y sólo de forma parcial	Única y explícita	Por lo general única, pero no necesariamente	Exploración del contexto, reformulación, elaboración de nuevos algoritmos.
Problemas de la vida real	Sólo de forma parcial en el texto	Parcialmente dada. Algunas alternativas posibles.	Muchas posibles, de forma aproximada.	Exploración del contexto, reformulación, creación de un modelo
Situación problemática	Sólo parcial en el texto	Implícita, se sugieren varias, problemática	Varias. Puede darse una explícita	Exploración del contexto, reformulación, plantear el problema.
Situación	Sólo parcial en el texto	Inexistente, ni siquiera implícita	Creación del problema	Formulación del problema.

Ejemplos

Problema con texto) María ha merendado una hamburguesa y una coca-cola y para pagar su consumición entrega al camarero una moneda de 500 pts. La hamburguesa cuesta 250 pts y la coca-cola 125. ¿Cuánto le devolverá?

Ejercicio) Calcular 4´ 2+6´ 3.
Puzzle) A partir de seis cerillas construir cuatro triángulos equiláteros.
Prueba de una conjetura) Demostrar que si a, b y c son enteros impares, entonces las raíces de la ecuación ax^2+bx+c no son racionales.
Problemas de la vida real) Queremos enmoquetar una habitación cuya forma es irregular. Deseamos estimar la cantidad de metros cuadrados de moqueta que debemos adquirir.
Situación problemática) Un teorema fundamental establece que la descomposición de un número natural en producto de números primos es única. ¿Qué ocurre si cambiamos en dicho enunciado la palabra producto por la palabra suma?
Situación) Considere las siguientes parejas de números primos gemelos (3,5) (5,7) (11,13), (17,19) (29,31) (41,43) (71,73).
A partir de tal estudio, Borasi considera que, para ser un buen resolutor de problemas, un alumno debería intentar resolver no sólo muchos problemas, sino una gran variedad de los mismos. Además tan importante como resolver problemas es acostumbrarse a plantear problemas a partir de situaciones que requieren una formulación precisa de los mismos.

3.2 El proceso de resolución de un problema

Para George Polya (1945), la resolución de un problema consiste, a grandes rasgos, en cuatro fases bien definidas:

Comprender el problema.

¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son los datos?

Concebir un plan.

¿Se ha encontrado con un problema semejante?
¿Conoce un problema relacionado con este?
¿Podría enunciar el problema de otra forma?
¿Ha empleado todos los datos?

Ejecutar el plan.

¿Son correctos los pasos dados?

Examinar la solución obtenida.

¿Puede verificar el resultado?
¿Puede verificar el razonamiento?

Las fases anteriores caracterizan claramente al resolutor ideal, competente. Cada fase se acompaña de una serie de preguntas, al puro estilo socrático, cuya intención clara es actuar como guía para la acción. Los trabajos de Polya, se pueden considerar por lo tanto, como un intento de describir la manera de actuar de un resolutor ideal.
Una pregunta, ¿Por qué es tan difícil entonces, para la mayoría de los humanos, la resolución de problemas en matemáticas?
Los trabajos de Schoenfeld (1985), son por otro lado, la búsqueda inagotable de explicaciones para la conducta de los resolutores reales de problemas. Propone un marco con cuatro componentes que sirva para el análisis de la complejidad del comportamiento en la resolución de problemas.

Recursos congnitivos: conjunto de hechos y procedimientos a disposición del resolutor.
Heurísticas: reglas para progresar en situaciones dificultosas.
Control: Aquello que permite un uso eficiente de los recursos disponibles.
Sistema de creencias: Nuestra perspectiva con respecto a la naturaleza de la matemática y como trabajar en ella.
Cada uno de tales componentes explica las carencias, y por lo tanto, el poco éxito en la resolución de problemas de los resolutores reales. Así, cuando a pesar de conocer las heurísticas no se sabe cuál utilizar o cómo utilizarla se señala la ausencia de un buen *control* o *gestor* de los recursos disponibles. Pero las heurísticas y un buen control no son suficientes, pues puede que el resolutor no conozca un hecho, algoritmo o procedimiento específico del dominio matemático del problema en cuestión. En este caso se señala la carencia de *recursos cognitivos* como explicación al intento fallido en la resolución.
Por otro lado, puede que todo lo anterior esté presente en la mente del resolutor, pero sus creencias de lo que es resolver problemas en matemáticas o de la propia concepción sobre la matemática haga que no progrese en la resolución. La explicación, para este fallo, la contempla Schoenfeld en el cuarto elemento del marco teórico, las *creencias*.
Por último están las *heurísticas*. La mayor parte de las veces se carece de ellas. Se dispone de conocimientos específicos del tema o dominio matemático del problema, incluso de un buen control pero falla el conocimiento de reglas para superar las dificultades en la tarea de resolución.
Las *heurísticas* son las operaciones mentales típicamente útiles en la resolución de problemas, son como reglas o modos de comportamiento que favorecen el éxito en el proceso de resolución, sugerencias generales que ayudan al individuo o grupo a comprender mejor el problema y a hacer progresos hacia su solución.
Existe una amplia, posiblemente incompleta, lista de heurísticas. Entre las más importantes cabría citar:

Buscar un problema relacionado.
Resolver un problema similar más sencillo.
Dividir el problema en partes.
Considerar un caso particular.
Hacer una tabla.
Buscar regularidades.
Empezar el problema desde atrás.
Variar las condiciones del problema.

Sin embargo, como bien ha señalado Puig (1996), en la lista anterior aparecen demasiadas cosas juntas, que son, por otro lado, diferentes si las sometemos a un detenido análisis.
Buscar un problema relacionado es una *sugerencia heurística* pues se señala una dirección de trabajo, y sobre todo se recurre a la memoria del resolutor, y no a un procedimiento concreto para buscar tal problema.

Considerar un caso sí se refiere a un procedimiento en concreto que permite, a partir del problema dado, formular un problema relacionado con él. Puig (1996) denomina a este tipo de procedimientos, independientes del contenido y que permiten transformar el problema dado en otro, con el nombre de *herramientas heurísticas*. (Tal observación parte de una nota marginal de Polya (Polya, 1962, vol 2. p.84))

Por último, *hacer una tabla* se podría considerar como una *destreza* al no poseer el carácter de transformar el problema ni al recurso de la memoria como en el caso de las *sugerencias heurísticas*.

La característica más importante del proceso de resolución de un problema es que, por lo general, no es un proceso paso-a-paso sino más bien un proceso titubeante. En el proceso de resolución, Schoenfeld ha señalado que tan importante como las heurísticas es el control de tal proceso, a través de *decisiones ejecutivas*. Tales decisiones son acerca de *qué hacer* en un problema. La característica más importante que define a las decisiones ejecutivas y a las acciones de control, es que tienen consecuencias globales para la evolución del proceso de resolución de un problema.

Las decisiones ejecutivas determinan la eficiencia de los conocimientos y recursos de todo tipo puestos en servicio para la resolución del problema.

Son decisiones ejecutivas:

- Hacer un plan.
- Seleccionar objetivos centrales y subobjetivos.
- Buscar los recursos conceptuales y heurísticos que parecen adecuados para el problema.
- Evaluar el proceso de resolución a medida que evoluciona.
- Revisar o abandonar planes cuando su evaluación indica que hay que hacerlo.

Las anteriores son decisiones ejecutivas tal y como se usa ese término en Inteligencia Artificial, son equivalentes a las decisiones de gestión en el campo de los negocios, o decisiones de táctica y estrategia en el campo militar. El término metacognición se ha usado en la literatura psicológica en la discusión de fenómenos relacionados con el que aquí tratamos.

Son por tanto, decisiones acerca de qué caminos tomar, pero también acerca de qué caminos no tomar.

Cuanto más precisas sean las respuestas a las preguntas:

¿ Qué estoy haciendo?
¿ Por qué lo hago?
¿ Para qué lo hago?
¿ Cómo lo usaré después?

mejor será el control global que se tenga sobre el problema y sobre las decisiones que conducen a su solución.

La ausencia de decisiones ejecutivas y de control suele tener efectos desastrosos en el proceso de resolución de un problema. La mayor parte de las veces en que se

fracasa en la resolución de un problema es debido a que, la persona que afronta el problema, no dispone de un *plan de solución*.
Pero hay otras actitudes que imposibilitan la toma de buenas decisiones durante la fase de resolución. Entre ellas cabe destacar:
- Inflexibilidad para considerar alternativas.
Cuando una y otra vez fallan los procedimientos empleados no hay más salida que cambiar de perspectiva para salir del bloqueo.
- Rigidez en la ejecución de procedimientos.
Más de una vez intentaremos encajar un procedimiento conocido en una situación en la que no es aplicable. Nuestra obstinación es debida al simple hecho de que nos parece apropiado a primera vista, o porque la situación, aunque distinta, se parece a aquella en que el procedimiento fue eficaz.
- Incapacidad de anticipar las consecuencias de una acción.
Al respecto cabe hacerse siempre la siguiente pregunta antes de ejecutar una acción pensada: Cuando haya ejecutado lo que pienso ¿ qué consecuencias tendrá para la resolución del problema ?
- El efecto "túnel".
Se produce cuando la ejecución de una tarea es tan absorbente que no hay energías disponibles para la evaluación de lo que se esta realizando. Suele darse más fácilmente cuanto más embebido se está en la ejecución de una acción.
Miguel de Guzmán partiendo de las ideas de Polya, Mason et al. (Mason, Burton y Stacey, 1988) y de los trabajos de Schoenfeld ha elaborado un modelo para la ocupación con problemas, donde se incluyen tanto las decisiones ejecutivas y de control como las heurísticas. La finalidad de tal modelo es que la persona examine y remodele sus propios métodos de pensamiento de forma sistemática a fin de eliminar obstáculos y de llegar a establecer hábitos mentales eficaces, en otras palabras, lo que Polya denominó como pensamiento productivo.
Un modelo para la ocupación con problema (Miguel de Guzmán, 1991, p.80)

Familiarízate con el problema

Trata de entender a fondo la situación
Con paz, con tranquilidad a tu ritmo
Juega con la situación, enmárcala, trata de determinar el aire del problema, piérdele el miedo

Búsqueda de estrategias

Empieza por lo fácil
Experimenta
Hazte un esquema, una figura, un diagrama
Escoge un lenguaje adecuado, una notación apropiada
Busca un problema semejante
Inducción
Supongamos el problema resuelto
Supongamos que no

Lleva adelante tu estrategia

Selecciona y lleva adelante las mejores ideas que se te han ocurrido en la fase anterior
Actúa con flexibilidad. No te arrugues fácilmente. No te emperres en una idea. Si las cosas se complican demasiado hay otra vía.
¿Salió? ¿Seguro? Mira a fondo tu solución.

Revisa el proceso y saca consecuencias de él

Examina a fondo el camino que has seguido. ¿Cómo has llegado a la solución? O bien, ¿por qué no llegaste?
Trata de entender no sólo que la cosa funciona, sino por qué funciona.
Mira si encuentras un camino más simple
Mira hasta dónde llega el método
Reflexiona sobre tu propio proceso de pensamiento y saca consecuencias para el futuro

3.3 La resolución de problemas como propuesta didáctica

El National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) propuso para la década de los pasados ochenta la resolución de problemas como eslogan educativo de la matemática escolar: *En la enseñanza de las matemáticas escolares se debe poner el enfoque en la resolución de problemas.*
¿Qué significa poner el enfoque en la resolución de problemas?
Cabe al menos tres interpretaciones:

Enseñar para resolver problemas

Proponer a los alumnos más problemas.
Emplear aplicaciones de los problemas a la vida diaria y a las ciencias.
No proponer sólo ejercicios sino también problemas genuinos que promuevan la búsqueda, la investigación por los alumnos.
Ejemplos de esta última interpretación se pueden hallar en Callejo (1994), Mason et al. (1988) y Guzmán (1991), Bagazgoitia et al. (1997).

Enseñar sobre la resolución de problemas

Enseñanza de la heurística. El objetivo es que los alumnos lleguen a aprender y a utilizar estrategias para la resolución de problemas.
Dentro de esta tendencia hay ejemplos en los mismos trabajos citados anteriormente. Sin embargo, parece ser que las *destrezas* heurísticas son las más apropiadas para tal fin.

Enseñar vía la resolución de problemas

Enseñar la matemática a través de problemas.
En un seminario celebrado en La Laguna en 1982 e impartido por el profesor Gaulin (M. Fernández 1982), al ser preguntados por objetivos de la resolución de problemas, los profesores asistentes enumeran los siguientes:
Desarrollo de la capacidad de razonamiento
Aplicación de la teoría previamente expuesta.
Resolución de cuestiones que la vida diaria plantea.

La primera propuesta, aunque durante mucho tiempo fue un argumento aceptado generalmente sobre las virtudes de la educación matemática, con el paso del tiempo se ha convertido en un mito. Las dos últimas caen dentro de la primera

interpretación anterior. En el mismo artículo, el autor M. Fernández que actuó como informador del seminario, concluye con la siguiente redacción: *Al final, pareciéndome que el profesor buscaba algo más, me aventuré a indicar lo que creo suele olvidarse: la propuesta de problemas con el fin de elaborar una teoría, esto es, para explorar y aprender nuevos conceptos. En efecto, comentó, pese a ser eminentemente formativa, no es frecuente que se tenga en cuenta por el profesorado*.
Esta es claramente la interpretación tercera de las enumeradas más arriba. Sin embargo, el comentario del Profesor Gaulin deja las cosas de nuevo en su sitio. ¿Por qué no se tiene en cuenta por el profesorado?

¿Existe algún patrón que caracterice la práctica educativa?

A falta de estudios serios en nuestro país, me he visto obligado a consultar la literatura científica internacional que existe al respecto.
En las lecciones grabadas en vídeo durante el TIMSS, para el 78% de los temas tratados en 8º (USA), los procedimientos y las ideas sólo fueron mostradas no explicadas ni desarrolladas. El 96% del tiempo empleado por los estudiantes trabajando en las aulas se dedicó a practicar procedimientos que se les había mostrado como hacerlo (Stigler y Hiebert, 1997).
Lo más característico es el énfasis en enseñar procedimientos, en especial procedimientos de cálculo. Se presta poca atención a ayudar a los alumnos a desarrollar ideas conceptuales, o incluso a conectar los procedimientos que están aprendiendo con los conceptos que muestran por qué aquellos funcionan.
El curriculum de matemáticas en USA suministra pocas oportunidades a los alumnos de resolver problemas retadores y de participar en el razonamiento, la comunicación, la conjetura, la justificación y la demostración (Hiebert, 1999).
Podemos concluir con Dossey (Dossey et al. 1988) que la instrucción matemática en las aulas de secundaria puede caracterizarse con ligeras variaciones, como la actividad que consiste en la explicación del contenido por el profesor, trabajo individual de los alumnos sobre las tareas propuestas y corrección de las mismas, dirigidas al gran grupo, en la pizarra. La mayoría de las veces, y debido a la dificultad del contenido o al tiempo disponible, la explicación se dirige hacia un nivel medio de la clase, cuando no al más alto, y hacia el aprendizaje directo de determinados algoritmos o definiciones. Los informes preliminares del TIMSS sugieren incluso un enfoque mucho más formalista para nuestro país (Beaton et al. 1996, página 155). El resultado de tal práctica es, por lo general, una prevalencia de aprendizajes rutinarios, carentes de significado, y la construcción de esquemas conceptuales débiles por los alumnos, que se manifiestan en una pobre actuación, sobre contenidos supuestamente aprendidos, después de un cierto tiempo.
Los maestros y los profesores enseñan de la misma forma en que fueron enseñados en la escuela.
Lo expuesto, creo que explica en parte por qué no se enseña matemáticas a través de la resolución de problemas.

3.4 La propuesta didáctica

Nuestras creencias sobre qué es matemática influye en la forma en que la enseñamos.
Además, nuestras creencias pueden ser un obstáculo. Un obstáculo insalvable.
Los profesores que ven su tarea como la transmisión de un conocimiento acabado y abstracto tienden a adoptar un estilo expositivo. Su enseñanza está plagada de definiciones, en abstracto, y de procedimientos algorítmicos. Solo al final, en contados casos, aparece un problema contextualizado como aplicación de lo que supuestamente se ha aprendido en clase. La resolución de problemas se queda para el Taller de Matemáticas, en clase hacemos cosas más serias, las auténticas matemáticas.
Esta forma de entender la enseñanza tiene nombre, se conoce como *mecanicismo*. De acuerdo con la filosofía mecanicista el hombre es un instrumento parecido al ordenador, cuya actuación al más bajo nivel puede ser programada por medio de la práctica repetitiva, sobre todo en aritmética y en álgebra, incluso en geometría, para resolver problemas distinguibles por medio de patrones reconocibles que son procesados por la continua repetición. Es en este nivel más bajo, dentro de la jerarquía de los más hábiles ordenadores, donde se sitúa al hombre. (Freudenthal, 1991, p.134). En Psicología esta tendencia se conoce como *Conductismo*.
Si por el contrario, consideramos que el conocimiento matemático no es algo totalmente acabado sino en plena creación, que más que conceptos que se aprenden existen estructuras conceptuales que se amplían y enriquecen a lo largo de toda la vida, entonces ya no bastará con la exposición. Habrá que hacer partícipe a los alumnos del propio aprendizaje. Y sólo hay una forma de hacer partícipe a los alumnos: dar significado a todo lo que se enseña.
Para desarrollar los hábitos de pensar sólo hay un camino, pensar uno mismo.
Permitir que los alumnos participen en la construcción del conocimiento es tan importante a más que exponerlo. Hay que convencer a los estudiantes que la matemática es interesante y no sólo un juego para los más aventajados. Por lo tanto, los problemas y la teoría deben mostrarse a los estudiantes como relevante y llena de significado.
Tales creencias son, posiblemente, la causa de que una propuesta que se formuló hace más de 50 años y que ha merecido la atención de ilustres personas, todavía sea hoy tema de debate y clarificación.
Si aceptamos cualquiera de las tres formas de enfoque en resolución de problemas, la primera pregunta que nos viene a la cabeza es qué estamos enseñando. Una pregunta relacionada: ¿qué aprenden los alumnos?.
Propongo que formulemos la pregunta de otra forma: ¿Cómo enseñamos? ¿Cómo aprenden los alumnos?
Todas las propuestas que se han hecho, establecen qué enseñar. Ninguna cómo enseñar.
Si queremos que nuestros alumnos aprendan a resolver problemas, entendiendo el término bajo las tres acepciones anteriores, hemos de diseñar y desarrollar nuestra enseñanza según tales términos.

Yo estoy convencido que es posible articular un currículo cuya metodología sea la resolución de problemas y que con tal currículo se pueden cubrir aspectos profundos de los conceptos matemáticas. Pero a costa de eliminar muchos procedimientos de tipo algorítmico, cuya presencia en los libros de texto y en los currículos constituyen hoy un puro anacronismo.

Terminaré completando la cita de Polya con la que comencé esta conferencia.

Por ello, un profesor de matemáticas tiene una gran oportunidad. Si dedica su tiempo a ejercitar a los alumnos en operaciones rutinarias, matará en ellos el interés, impedirá su desarrollo intelectual y acabará desaprovechando su oportunidad. Pero si, por el contrario, pone a prueba la curiosidad de sus alumnos planteándoles problemas adecuados a sus conocimientos, y les ayuda a resolverlos por medio de preguntas estimulantes, podrá despertarles el gusto por el pensamiento independiente y proporcionarles ciertos recursos para ello.

(George Polya, prefacio a la primera edición en inglés de *How to solve it.* Princeton University Press. 1945)

4 Disciplinas que han influido en la Didáctica de las matemáticas. Una premisa básica que subyace a todo trabajo en didáctica de las matemáticas, y en concreto desde la perspectiva de la ciencia cognitiva, es que las estructuras mentales y los procesos cognitivos son extremadamente ricos y complejos, pero pueden ser entendidas y que tal comprensión producirá importantes avances en nuestro conocimiento sobre las diversas formas en que tienen lugar el aprendizaje.

Durante la mayor parte de este siglo, la investigación en didáctica de las matemáticas ha estado influida por una corriente conocida como *asociacionismo*, cuya recomendación pedagógica más simple era la práctica educativa de ejercicios bien secuenciados. No se prestó ningún interés en explorar las estructuras cognitivas del individuo. En el caso más extremo, Skinner llegó a afirmar que quedaba fuera de lugar en su teoría, por poco útil, cualquier atención a las estructuras mentales.

4.1 Una metodología de investigación: el paradigma agrícola

Las metodologías de investigación imperantes desde la década de los cincuenta hasta bien entrada la de los setenta se puede resumir en el *paradigma agrícola*. Se confió en los métodos estadísticos a gran escala y en el análisis de datos (Schoenfeld, 1987, p. 7). Tales análisis provenían de la asunción de que los patrones obtenidos a partir de datos de un gran número de personas aportaban una información más fiable que los obtenidos a partir de individuos particulares. El problema fundamental era el control de variables. La cantidad de pesticida, agua y la acidez del suelo entre otras, eran más fácilmente controlables en un experimento agrícola que en un experimento educativo. Otra distinción importante era la de grupo experimental y grupo de control. El primero recibía todas las atenciones necesarias contempladas como variables que mejorarían el rendimiento de los alumnos, mientras que el segundo seguirían una enseñanza normal. De esta forma, cualquier mejora en los alumnos del primer grupo, el experimental, se atribuiría a las recomendaciones pedagógicas, metodología o materiales empleados. Un problema fundamental aquí, es que no se controlaban las diferencias individuales

de los alumnos, o no se utilizaban en el análisis de los datos obtenidos. Así, si se quería establecer alguna relación entre habilidades visuales espaciales y el sexo de los alumnos, se sometía una amplia muestra de alumnos a un test y, mediante el análisis estadístico, se establecía determinada correlación. Un ejemplo de esto último es el hallazgo de que los alumnos varones poseen mejores habilidades visuales que las alumnas. Otro ejemplo, es que la habilidad verbal es un aspecto importante de la resolución de problemas. Además, el propio test caracterizaba tales habilidades, de forma que poseerlas implicaba obtener determinada puntuación en los tests correspondientes.
Durante los sesenta y los setenta muchas de tales investigaciones proporcionaron un gran número de estudios ambiguos o contradictorios, de tal forma que no se disponía de hallazgos importantes que arrojaran luz sobre la educación. Lo cual muestra la dificultad de aplicar tal paradigma a la educación. Por desgracia para los investigadores los alumnos han demostrado ser mucho más complejos que los campos de cultivo. Algunos investigadores, entre ellos Kilpatrick, propusieron aparcar por un tiempo, las investigaciones estadísticas hasta que se dispusiera de un mejor conocimiento de los procesos mentales que se querían medir.

Proceso versus producto. Ciencia cognitiva.

Desde la Psicología Educativa ha habido dos contribuciones claras a la didáctica de las matemáticas. Una conforma lo que se ha dado en llamar *la corriente conductista o neoconductista* y la otra la *corriente cognitiva*. Brevemente exponemos ambas contribuciones.

4.2 Aportación del conductismo y neoconductismo a la didáctica de las matemáticas

El asociacionismo de Thorndike

A comienzos de siglo E.L. Thorndike inició una serie de investigaciones en educación que caracterizarían con el paso del tiempo, a lo que se ha denominado como corriente conductista en educación matemática. Thorndike se interesó en el desarrollo de un aprendizaje activo y selectivo de respuestas satisfactorias. Ideó un tipo de entrenamiento en el que los vínculos establecidos entre los estímulos y las respuestas quedarían reforzados mediante ejercicios en los que se recompensaba el éxito obtenido.
El propio Thorndike denominó *conexionismo* (*asociacionismo*) a este tipo de psicología. El aprendizaje es el producto de un funcionamiento cognitivo que supone ciertas conexiones o asociaciones de estímulo y respuesta en la mente de los individuos. Por tanto, los programas para enseñar matemáticas podrían elaborarse sobre la base de estímulos y respuestas sucesivos, de tal forma que los resultados de este proceso se podrían objetivar en cambios observables de la conducta de los alumnos.
En 1922 publicó su libro *The Psychology of Arithmetic*. En él presentaba el principio central de su teoría del aprendizaje: todo el conocimiento incluso el más complejo esta formado por relaciones sencillas, vínculos entre estímulos y respuestas. Así, la conducta humana, tanto de pensamiento como de obra, se podría

analizar en términos de dos sencillos elementos. Si se reducía la conducta a sus componentes más elementales, se descubría que consistía en estímulos (sucesos exteriores a la persona) y repuestas (reacción a los sucesos externos). Si se premiaba una respuesta dada a un estímulo propuesto, se establecía un vínculo fuerte entre estímulo y respuesta. Cuánto más se recompensaba la respuesta más fuerte se hacía el vínculo y por lo tanto, se sugería que uno de los medios más importantes del aprendizaje humano era la práctica seguida de recompensas (*ley del efecto*).

Thorndike sugirió cómo aplicar sus ideas a la enseñanza de la aritmética afirmando que lo que se necesitaba era descubrir y formular el conjunto determinado de vínculos que conformaban la disciplina a enseñar (lo hizo para la aritmética). Una vez formulados todos los vínculos, la práctica sujeta a recompensas, sería el medio para poner en funcionamiento la *ley del efecto* y propiciar una mejora en los resultados de los alumnos.

La teoría de Thorndike significó un gran paso hacia la aplicación de la psicología a la enseñanza de las matemáticas, siendo su mayor contribución el centrar la atención sobre el contenido del aprendizaje y en un contexto determinado como es la aritmética.

El aprendizaje acumulativo de Gagné

Una teoría psicológica que quisiera dominar la enseñanza debería explicar por qué el aprendizaje sencillo facilitaba el más complejo. La lista de vínculos se establecía desde las tareas más fáciles a las más difíciles, sin embargo, no existía una teoría que explicase la dificultad psicológica de las diferentes tareas y por lo tanto, que explicase por qué si se aprendían primero los problemas más fáciles, se facilitaba el aprendizaje de los más difíciles.

El problema central aquí es la transferencia desde un aprendizaje a otro. Thorndike sugirió que tal transferencia podría ocurrir siempre que ambas tareas contuviesen elementos comunes (*teoría de los elementos idénticos*). Sin embargo la mayor parte de las investigaciones, en la transferencia, se realizaron en experimentos de laboratorio donde se analizaban, en detalle, una o más tareas. Otra empresa, mucho más compleja, era aplicar la teoría al curriculum escolar.

Robert Gagné, con su *teoría del aprendizaje acumulativo* dio este paso. En su teoría, las tareas más sencillas funcionan como elementos de las más complejas. Así al estar las tareas más complejas formadas por elementos identificables se posibilita la transferencia de lo sencillo a lo complejo. Gagné propuso analizar las habilidades disgregándolas en subhabilidades ordenadas, llamadas jerarquías del aprendizaje. De esta manera, para una determinada habilidad matemática, por ejemplo la suma de números enteros, el trabajo del psicólogo consiste en un análisis de las tareas que permite identificar los objetivos o habilidades elementales que constituyen otro más complejo, creando de este modo una jerarquía. Tal jerarquía del aprendizaje permite plantear objetivos perfectamente secuenciados desde una lógica disciplinar.

Sin embargo, una de estas jerarquías no es más que una hipótesis de partida, sobre la manera en que se relacionan entre sí ciertas habilidades matemáticas, y nos lleva a una pregunta importante ¿cómo podemos estar seguros de que tal jerarquía de habilidades es una jerarquía de transferencia que resultará útil para la enseñanza y el aprendizaje?. Además, las secuencias de aprendizaje bajo tales jerarquías se manifiestan rígidas y no tienen en cuenta las diferencias individuales entre los alumnos.

La práctica educativa se centra, por lo tanto, en la ejecución y repetición de determinados ejercicios secuenciados, en pequeños pasos, que deben ser realizados individualmente y que más tarde se combinan con otros formando grandes unidades de competencia para el desarrollo de cierta habilidad matemática. No se presta importancia al significado durante la ejecución sino que se espera que sea al final de la secuencia, cuando el aprendiz adquiera la estructura que conforma la habilidad matemática. Se presta importancia principal al producto, respuesta de los alumnos, y no al proceso, cómo y por qué se ha dado la respuesta. En definitiva, existe poco o nulo interés en explorar las estructuras y los procesos cognitivos. La enseñanza programada, las fichas y las secuencias largas de objetivos y subobjetivos caracterizan la corriente más radical dentro del conductismo.

Entre las críticas más recientes al *diseño de instrucción* (instructional design), pues con este término se conoce a la tecnología educativa derivada de los trabajos de Gagné, la más clara es la expuesta por A. Arcavi (1995) que pasamos a exponer.

El diseño de instrucción centra su interés en una descomposición lógica de los contenidos y, por tanto, el diseño puede hacerse a priori por expertos y sin contacto alguno con alumnos. Además, pone el énfasis en los aspectos más conductistas de lo que significa ser competente en matemáticas definiendo "objetivos de conducta". Se presupone que tal diseño debería estar en manos exclusivamente de expertos, quienes son los indicados para establecer los contenidos, los problemas y las secuencias. No parece que de cabida a concepciones alternativas de la actividad matemática y parece implicar que el diseño curricular "riguroso", al tener en cuenta la textura lógica de los contenidos garantiza una trayectoria satisfactoria del aprendizaje.

Un aspecto importante de tales investigaciones es que no se interesaban en qué ocurría durante la realización de determinados problemas, las secuencias de aprendizaje o las cuestiones presentadas en los tests. Si algo miden, tales metodologías, es el producto o resultado del proceso de tales tratamientos. Nunca los procesos de pensamiento involucrados en tales productos. La distinción entre proceso y producto caracteriza, de forma radical, la diferencia entre una metodología conductista o neoconductista y una metodología de tipo cognitivo. (Para ejemplos sobre jerarquía de habilidades matemáticas y ampliación sobre el contenido de este apartado remitimos a la obra: *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*. L.B. Resnick y W.W.Ford. Paidos. Ministerio de Educación y Ciencia. 1990.)

4.3 La ciencia cognitiva

La cognición no comienza con los conceptos, sino todo lo contrario, los conceptos son el resultado del proceso cognitivo (Freudenthal 1991, p.18). Las matemáticas, más que ningún otro dominio científico, permiten dar definiciones explícitas desde

muy pronto. Por ejemplo, los números pares e impares pueden definirse a partir de los números naturales. Pero la dificultad radica en cómo definir los números naturales. Tales números se generan a partir del proceso de contar, en vez de a partir de una definición. De esta manera pasan a formar parte del sentido común.
El problema central de la ciencia cognitiva es la construcción de los conceptos por los individuos. Qué procesos mentales se activan y cómo tales procesos dan forma al concepto, son preguntas claves en tal metodología de investigación. Lo que le interesa principalmente al investigador cognitivo, es construir un *modelo del proceso de comprensión* de los alumnos. En tal modelo se debe especificar qué conocimiento particular es accesible a los alumnos, las estrategias de las que se sirven y la naturaleza de la interacción entre el conocimiento y las estrategias desarrolladas.
Un término importante, en ciencia cognitiva, es el de esquema cognitivo o el de esquema conceptual, siendo el primero más general y amplio que el segundo. Para tales términos no existen definiciones precisas, tal y como se entienden en matemáticas. Para hacernos una idea de tal término pensemos en un ejemplo de la matemática elemental. La inclusión, en los curriculum de secundaria, del concepto de función real de variable real es uno de los logros más importantes de la corriente conocida como matemática moderna. Tal concepto se introdujo a partir de las relaciones entre conjuntos, hasta concluir en el par ordenado como definición formal del concepto de función. Así por ejemplo, la función $f(x)=x^2$, se define como {(x,y)Î RxR/ y = x^2}. Sin embargo, pocos profesores experimentados, utilizarían tal definición como introducción a las funciones reales. A pesar de ser un ejemplo sencillo en sí es un ejemplo abstracto. Parecería más oportuno comenzar con la construcción de una tabla de valores y a continuación realizar una gráfica de la función. Tal secuencia, presente en muchos libros de la época e incluso hoy día, señala tres aspectos del concepto de función: la fórmula, la tabla de valores y la gráfica. Es decir, tenemos tres aspectos de tres dominios diferentes: el algebraico, el aritmético y el geométrico. Con ambos pretendemos que, la relación abstracta entre las variables x e y que caracteriza el concepto de función real, quede clara. Sin embargo, investigaciones recientes como la llevada a cabo en el Shell Centre de la Universidad de Nottigham (Reino Unido) han puesto en evidencia las dificultades del concepto de función. Entre los hallazgos más importantes encontramos las dificultades que presentan los alumnos para coordinar la información relativa a las dos variables y los dos ejes, presentando los alumnos dificultades a la hora de calcular incrementos de ordenada correspondientes a incrementos de abscisa dada o viceversa (Shell Centre, 1990).

La teoría desarrollada por Jean Piaget

Piaget denominó *epistemología genética* a su teoría sobre la construcción del conocimiento por los individuos (Piaget, 1987; García, 1997). Su centro de interés es la descripción del desarrollo de los *esquemas cognitivos* de los individuos a lo largo del tiempo y de acuerdo con ciertas reglas generales.
El principio central de la teoría de Piaget sobre la construcción del conocimiento es la *equilibración* (Piaget, 1990; García, 1997). Tal equilibración se lleva a cabo

mediante dos procesos, íntimamente relacionados y dependientes, que son la *asimilación* y la *acomodación.*

Cuando un individuo se enfrenta a una situación, en particular a un problema matemático, intenta asimilar dicha situación a esquemas cognitivos existentes. Es decir, intentar resolver tal problema mediante los conocimientos que ya posee y que se sitúan en esquemas conceptuales existentes. Como resultado de la asimilación, el esquema cognitivo existente se reconstruye o expande para acomodar la situación.

La *asimilación* y la *acomodación* se muestran en la teoría piagetiana como las herramientas cognitivas útiles y fundamentales en el restablecimiento del equilibrio cognitivo en el individuo. El binomio asimilación-acomodación produce en los individuos una reestructuración y reconstrucción de los esquemas cognitivos existentes. Si los individuos construyen su propio conocimiento, la equilibración expresa el proceso mediante el cual se produce tal construcción, señalándose así el carácter dinámico en la construcción del conocimiento por los individuos, como hipótesis de partida para una teoría del análisis de los procesos cognitivos (García, 1997, p 41).

La *abstracción reflexiva* o reflectora es un término definido por Piaget y central en su teoría de la construcción del conocimiento. Piaget llama así a la abstracción que parte de las acciones u operaciones y no meramente de los objetos (Beth y Piaget, 1980, p. 212). La abstracción reflexiva conlleva dos momentos indisolubles (Piaget, 1990, p. 40): un *proceso de reflexión*, 'reflejamiento' o proyección que hace pasar lo que es abstraído de un plano inferior a otro superior (por ejemplo de la acción física a la representación mental) y un *producto de la reflexión*, una 'reflexión' en el sentido mental, que permite una reorganización o reconstrucción cognitiva, sobre el nuevo plano de la que ha sido extraído del plano precedente. En el plano inferior las acciones y operaciones se realizan sobre objetos concretos, físicos o imaginados, mientras que en el plano superior las acciones y operaciones interiorizadas actúan sobre objetos abstractos y las coordina para formar nuevas acciones que dan lugar a nuevos objetos. Siendo así que el sujeto reconstruye lo así abstraído en un plano superior nuevo, cuyo funcionamiento es distinto, y que tal reconstrucción conduce a un esquema cognitivo más general (Beth y Piaget, 1980, p. 229).

Piaget señaló su carácter constructivo, por lo tanto no de descubrimiento, pues la abstracción reflexiva consiste en traducir una sucesión de actos materiales en un sistema de operaciones interiorizadas cuyas leyes o estructura se comprenden en un *acto simultáneo*. La abstracción reflexiva se refiere, por tanto, a las acciones y operaciones del sujeto y a los esquemas que le conduce a construir (Piaget y García, 1982 p. 247) y es, por lo tanto, puramente interna al sujeto. Destaquemos aquí que lo que constituye la génesis del conocimiento y que aporta su cualidad constructiva son las acciones y no la mera observación. Pues por medio de las acciones se desencadena el proceso de abstracción reflexiva en el individuo y su conclusión será la construcción mental de un nuevo ente abstracto, objeto o concepto más general.

La importancia del papel jugado por la abstracción reflexiva en la construcción de los conceptos matemáticos ha dado lugar, recientemente, a dos marcos teóricos, extensiones de la teoría desarrollada por Jean Piaget: La *generalización operativa* (Dörfler, 1991) y el marco teórico *acción-proceso-objeto* (Dubinsky, 1991 y 1997). Tales marcos teóricos, que no expondremos aquí, pueden ser consultados por los interesados en las citas bibliográficas señaladas.

Procesamiento de la información.

Frente a la teoría de Piaget sobre la forma en que las personas comprenden los conceptos y, a partir de ciertos estudios realizados en el campo de la computación sobre habilidades lingüísticas de los humanos, surge en la década de los setenta la teoría denominada procesamiento de la información.

La conducta humana se concibe como resultado del proceso por el cual la mente actúa (procesa) sobre los datos que proceden del entorno interno o externo (información). Toda la información es procesada por una serie de memorias, que procesan y almacenan de forma distinta y que además están sujetas a determinadas limitaciones en su función. La combinación de tales memorias constituyen el sistema de procesamiento de la información.

La información entra en el sistema a través de un registro de entrada sensorial, llamado a veces *memoria icónica* o buffer sensorial. Esta primera memoria, es capaz de recibir información visual, auditiva o táctil directamente del entorno y puede recibir mucha información al mismo tiempo, pero solo puede almacenarla durante una fracción muy pequeña del mismo después del cual se pierde.

La memoria que se encarga de recoger la información situada en el primer componente, la memoria icónica, es la *memoria de trabajo* o *a corto plazo*. La memoria de trabajo es aquella en la que se almacena temporalmente la información codificada para su uso inmediato y es donde se produce el procesamiento activo de la información, es decir, donde se realiza el proceso de pensar.

Por último, se encuentra la *memoria a largo plazo* o *semántica*. En este componente del sistema es donde se almacena todo el conocimiento, lo que sabe, el individuo de forma permanente.

Cómo se almacena y cómo se utiliza la memoria semántica por el individuo es una cuestión clave en este modelo de construcción del conocimiento por los individuos. Por ejemplo, cómo utiliza el individuo la memoria semántica para desarrollar y poner en práctica determinadas habilidades como lo es comprender, deducir, generalizar, entre otras. La forma más simple que se ha dado es en una lista larga, estructurada y organizada. Los objetos, piezas de información de tal lista, están conectados mediante vínculos o asociaciones significativas, denominadas *redes*.

Existen varios modelos, dentro de esta teoría, sobre la memoria semántica y las redes para explicar las habilidades propias del conocimiento en los individuos y todos describen el conocimiento humano como estructurado y organizado. Los modelos más recientes se parecen mucho a las concepciones asociacionistas, siendo así que, se ha considerado recientemente al procesamiento de la información, aunque dentro de la ciencia cognitiva, como un heredero del asociacionismo.

5 Grupos de Investigación

Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).

Se constituye en 1996 por iniciativa de profesores del ámbito universitario próximo a los departamentos de didáctica de las matemáticas, aunque entre sus miembros hay profesores de secundaria y primaria interesados por la investigación.
Su objetivo principal es constituir un espacio abierto de reflexión y debate sobre la investigación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
Otro objetivo importante es consolidar la comunidad de investigación en educación matemática en España. Para tal fin, se han creado diferentes grupos de trabajo que agrupan a investigadores interesados en un campo de investigación concreto.
Grupos de trabajo constituidos, coordinadores y dirección electrónica:

- didáctica del análisis

  Carmen Azcárate: c.azcarate@cc.uab.es
- aprendizaje de la geometría

  Angel Gutiérrez: ANGEL.GUTIERREZ@UV.ES
- didáctica de la estadística y probabilidad

  Antonio Estepa: aestepa@piturda.ujaen.es
- pensamiento numérico y algebraico

  Bernardo Gómez: gomezb@post.uv.es
- conocimiento y desarrollo profesional del profesor

  Salvador Llinares: llinares@cica.es
- educación infantil

  Carmen Corral: ccorral@pinon.ccu.uniovi.es
- historia de la educación matemática

  José Mª Núñez Espallargas

La sociedad se reúne al menos una vez al año en sesión conjunta y eventualmente, se llevan a cabo reuniones de los diferentes grupos de trabajo.
La sociedad publica un boletín informativo que distribuye entre sus asociados.
Para más información consultar la dirección en internet: www.uva.es/seiem/

El grupo internacional Psychology of Mathematic Education (PME).

Fundado en 1976 por H.Freudenthal y E. Fischbein (Israel) durante el Tercer Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME) celebrado en Karlsruhe (Alemania).
PME tiene como metas principales:

- Promover los contactos internacionales e intercambiar información científica en el campo de la psicología de la educación matemática.
- Promover y estimular la investigación interdisciplinar en el área señalada anteriormente con la cooperación de psicólogos, matemáticos y educadores matemáticos.
- Avanzar y profundizar en la comprensión de los aspectos psicológicos del aprendizaje y de la enseñanza de las matemáticas así como en las implicaciones que se derivan.

El grupo está abierto a cualquier investigador en activo que asuma las metas anteriores, o interesado profesionalmente en los resultados de tales investigaciones.

El grupo se reúne anualmente, cada año en un país diferente. La última reunión ha tenido lugar en Sud Africa (1998) y la próxima tendrá lugar en Israel (1999). En total, desde su fundación, ha celebrado 22 encuentros internacionales.
Durante los cinco días que dura la reunión tienen lugar sesiones plenarias, comunicaciones de investigaciones en curso, y reuniones de grupos de trabajo.
Los siguientes grupos de trabajo (proyectos) han sido aprobados, en la última reunión, por el Comité Internacional para PME23 (Haifa. Israel, 1999):
Algebra: epistemología, cognición y nuevas tecnologías.
Coordinador Jean-Philippe Drouhard (drouhard@unice.fr).
Investigación en el aula.
Coordinador Simon Goodchild (staffs@lib.marion.ac.uk).
Aspectos culturales en el aprendizaje de las matemáticas.
Coordinador: Norman Presmeg (npresmeg@garnet.acns.fsu.edu).
Psicología de la formación del profesor de matemáticas.
Coordinador: Andrea Peter-Koop (apeter@math.uni-muenster.de)
Aprendizaje y enseñanza de la estocástica.
Coordinador: John Truran (jtruran@arts.adelaide.edu.au).
Más información en la dirección de internet: http://members.tripod.com/~IGPME

6 Calidad de los informes de investigación

Una de las mayores preocupaciones de la comunidad de investigadores en educación matemática ha sido la calidad de las investigaciones. Tal preocupación ha llevado a plantear unos estándares para juzgar la calidad de los informes de investigación. Presentamos a continuación los estándares elaborados por el Panel Editor de una de las revistas más importantes en el campo de la educación matemática (Journal for Research in Mathematics Education):

1. Concordancia entre las cuestiones a investigar, procedimientos para la recogida de datos, y las técnicas de análisis de los últimos. También, ¿responde el informe a la cuestión planteada?.
2. Competencia investigadora. El informe de la investigación debería demostrar un uso efectivo y apropiado de las técnicas de análisis y recogida de datos.
3. La investigación debería situarse adecuadamente en la literatura de investigación existente sobre las cuestiones planteadas.
4. Reconocimiento explícito de las asunciones personales. Deberían quedar claras las propias asunciones subjetivas del investigador sobre las cuestiones a investigar.
5. Validez general. ¿Mereció la pena la investigación?. En algún tipo de investigaciones podría ser importante examinar, en qué grado la investigación informa sobre la práctica.
6. ¿Se han cuidado los aspectos éticos durante la investigación?
7. Cualidad general tanto técnica como teórica, y equilibrio entre la cualidad técnica por un lado, y la validez general y los aspectos éticos por el otro.
8. Independencia del informe de investigación respecto de la plausibilidad superficial o de la elocuencia del investigador.

9. Abierto al escrutinio de todos los miembros de la comunidad científica. El informe debería suministrar al lector evidencia de cómo se han recogido los datos, así como qué datos se utilizaron para realizar las interpretaciones.
10. Adherencia a los principios empleados por las disciplinas de las que se han tomado los métodos de investigación.

7 Normas de la American Psychological Association (APA) para la redacción de un artículo científico en educación matemática.

Dirección en internet: www.apa.org

Un protocolo seguido por la mayoría de las revistas especializadas en investigación, en educación matemática, es el diseñado por la Asociación Americana de Psicología y que pasamos a exponer de forma abreviada.

Se consideran tres tipos diferentes de artículos:

- Investigación original.
- Revisión crítica de material publicado anteriormente.
- Construcción de teorías fundamentadas en la literatura existente.

Para cada modalidad existe una forma particular de presentación.

Formato para la presentación de una investigación original:

Consta de cinco apartados bien diferenciados:

- *Planteamiento del problema a estudiar y objetivos de la investigación.*

  El objetivo de este apartado es proporcionar una visión amplia del contexto teórico en el que se inserta el problema, concluyendo en el enunciado de una o varias hipótesis.

- *Métodos empleados.*

  Este apartado incluye varias subdivisiones:

  Población o muestra. Donde se describen los sujetos que han participado en el experimento.

  Materiales utilizados.

  Procedimiento empleado. Es importante describir el diseño utilizado y cada uno de los pasos dados en la ejecución del experimento.

- *Resultados obtenidos.*

  En este apartado es importante, también en los anteriores, la claridad y resumen de los resultados obtenidos. Estos deberán presentarse de forma clara y concisa.

- *Discusión.*

  Se valoran e interpretan los resultados del experimento a la luz de las teorías manejadas en el primer apartado. Se presentará también un resumen del estado actual del problema a la luz de los datos aportados por el experimento.

- *Referencias bibliográficas.*

  Se citaran de forma que sean claramente identificables todas las referencias bibliográficas señaladas en el artículo. La finalidad es ayudar a otros investigadores a hacerse una idea más exacta de las principales fuentes y trabajos experimentales utilizados en la realización del experimento.

  Las citas deben hacerse según el siguiente formato:

  Libros:

Resnick, L.B. y Ford, W.W. (1990). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*. Paidos. Ministerio de Educación y Ciencia.

Capítulos en libros:

Dörfler, W. (1991). 'Forms and means of generalization in mathematics', en A. Bishop *et all* (eds), *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching*, Kluwer Academic Publishers, 63-85.

Artículos en revistas especializadas:

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática*, Vol 8-No3, pp24-41.

Los otros dos tipos de artículos, revisión crítica y construcción teórica, tienen un formato similar al siguiente:

- Definición de un problema, estado actual de la investigación.
- Análisis crítico de los documentos ya publicados.
- Propuesta de dirección futura de la investigación sobre el problema, y en el caso de construcción teórica presentación de una nueva síntesis y avance del modelo teórico tratado.

Tan importante como el contenido es el estilo en que se escribe. El manual de APA considera cuatro aspectos que definen el estilo:

- *Presentación metódica de las ideas.*

Se refiere a la continuidad en el uso de palabras, conceptos y desarrollo temático desde el principio hasta el final del artículo.

- *Fluidez en la expresión.*

Presentación concatenada y con ilación de ideas dentro de un discurso en el que no debe haber omisiones, irrelevancias, ni contradicciones. Coherencia de los tiempos verbales y selección cuidadosa de sinónimos. No se acepta el empleo de recursos utilizados en la literatura creativa, como por ejemplo, crear ambigüedad, insertar algo inesperado, cambiar bruscamente de tópico, tiempo verbal o de persona.

- *Economía en la expresión.*

Empleo justo de la cantidad de vocabulario para decir sólo lo que es necesario.

- *Precisión y claridad.*

Expresar sólo lo que se quiere significar.

Referencias

Beagazgoitia, A., Castañeda, F., Fernández, S., Peral, J.C. (1997). *La resolución de problemas en las matemáticas del bachillerato*. (Libro del profesor y Libro del alumno). Servicio Editorial. Universidad del País Vasco.

Beaton, A.E., Mullis, I.V.S., Martin, M.O., González, E.J., Kelly, D.L., Smith, T.A (1996). *Mathematics Achievement in the Middle School Years: IEA's Third International Mathematics and Science Study (TIMSS).* TIMSS International Study Center. Boston. USA.

Beth, E.W. y Piaget, J. (1980). *Epistemología Matemática y Psicología: relaciones entre la lógica formal y el pensamiento real.* Editorial Crítica. Grijalbo. Barcelona.

Borasi, R. (1986). On the nature of problems. *Educational Studies of Mathematics*, *17*,pp. 125-141.
Dörfler, W. (1991). 'Forms and means of generalization in mathematics', en A. Bishop *et all* (eds), *Mathematical Knowledge: Its Growth Through Teaching*, Kluwer Academic Publishers, pp. 63-85.
Dubinsky, E. (1991). 'Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking' en D. Tall (editor) *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer Academic Publishers, pp. 95-123.
Dubinsky, E. (1996). 'Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria'. *Educación Matemática*, Vol 8-No3, pp. 24-41.
Callejo, M.(1994). *Un club matemático para la diversidad*. Narcea.
Currículo Bachillerato (1994a). Materias Específicas de la Modalidad. Ciencias de la Naturaleza y de la Salud. Consejería de Educación, Cultura y Deportes. Gobierno de Canarias.
Currículo Bachillerato (1994b). Materias Específicas de la Modalidad de Humanidades y Ciencias Sociales. Consejería de Educación, Cultura y Deportes. Gobierno de Canarias.
Currículo Educación Secundaria Obligatoria. (1996). Consejería de Educación, Cultura y Deportes. Gobierno de Canarias.
De Guzmán, M. (1991). *Para pensar mejor*. Labor.
Dossey, J.; Mullis, I. ; Lindquist, M. y Chambers, D. (1988). *The mathematics report card: are we measuring up? Trends and achievement based on the 1986 National Assessment*. Princeton, NJ: Educational Testing Service.
Fernández Reyes, M. (1982). Resolución de problemas en la EGB. Informe del Seminario dirigido por el profesor C. Gaulin de la Universidad Laval de Canada. *Números, 4*, pp. 73-77.
Freudenthal, H.(1991). *Revisiting Mathematics Education*. Kluwer Academic Publishers.
Gaulin, C. (1986). Tendencias actuales en la enseñanza de las matemáticas a nivel internacional (1). *Números*, *14*, pp. 11-18.
García, R. (1997). *La Epistemología Genética y la Ciencia Contemporánea. Homenaje a Jean Piaget en su centenario*. Editorial Gedisa. Barcelona.
Gutiérrez, A (Editor) (1991). *Área de Conocimiento. Didáctica de la Matemática*. Colección cultura y aprendizaje. Editorial Síntesis.
Hiebert, J. (1999). Relationships between research and the NCTM Standars. *Journal for Research in Mathematics Education*, *30*, pp. 3-19.
Kieran, C. (1998). Complexity and Insight. *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 29, 5, pp 595-601.
Kilpatrick, J. Rico, L y Sierra, M (Editores). (1994). *Educación Matemática e Investigación*. Colección Educación Matemática en Secundaria. Editorial Síntesis.
Krulik. S y J. Rudnik (1980). *Problem Solving, a handbook for teachers*. Allyn & Bacon Inc.

Mason, J. Burton, L y Stacey, K. (1988). *Pensar matemáticamente*. M.E.C. - Labor. [Versión en español de la obra *Thinking Mathematically*, publicada por Addison-Wesley originariamente en 1982 y revisada en 1985]
Piaget, J y García, R. (1982). *Psicogénesis e Historia de la Ciencia*. Siglo XXI Editores. México.
Piaget, J. (1990). *La equilibración de las estructuras cognitivas. Problema central del desarrollo.* (Traducción de Eduardo Bustos). Siglo XXI de España Editores S.A. Madrid.
Resnick, L.B. y Ford, W.W. (1990). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*. Paidos. Ministerio de Educación y Ciencia.
Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas, Mexico. [Versión en español de la obra *How to solve it* publicada por Princeton University Prees en1945]
Polya, G. (1966). *Matemáticas y Razonamiento Plausible*. Tecnos, Madrid. [Versión en español de *Mathematics and Plausible Reasoning* publicada por Princeton University Press en 1954].
Polya, G. (1962). *Mathematical Discovery* (2 vol). John Wiley & Sons, New York.
Puig, L (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Colección Mathema. Editorial Comares. Granada.
Treffers, A. (1987). *Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Education: The Wiskobas Project*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Academic Press, New York.
Schoenfeld, A. (1987). *Cognitive Science and Mathematics Education*. Lawrence Erlbaum Associated.
Shell Centre (1990). *El Lenguaje de funciones y gráficas*. (Traducción de Félix Alayo). Ministerio de Educación y Ciencia. Servicio Editorial Universidad del Pais Vasco.
Steiner, H.G. (1987). Theory of Mathematics Education: an introduction. *For the learning of mathematics*, 5 (2), pp. 11-17.
Stigler, J.W. y Hiebert, J. (1997). Understanding and improving classroom mathematics instruction: An overview of the TIMSS video study. *Phi Delta Kappan*, 79(1), pp. 14-21.