

# Modellierung der Dynamik eines Koppelgetriebes am Beispiel der 3D-Servo-Presse

**Modelling of the dynamics of a linkage mechanism using the 3D Servo Press**

Master-Thesis von Martin Rakowitsch

Mai 2018



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT



**Martin Rakowitsch**  
Studiengang: Maschinenbau – Mechanical and Process Engineering (MPE)

**Master-Thesis**  
Modellierung der Dynamik eines Koppelgetriebes am Beispiel der 3D-Servo-Presse  
Modelling of the dynamics of a linkage mechanism using the 3D Servo Press

Eingereicht am: 09. Mai 2018

Betreuung:  
M.Sc. Florian Hoppe

Prof. Dr.-Ing. Dipl.-Wirtsch.-Ing. Peter Groche  
Fachgebiet für Produktionstechnik und Umformmaschinen  
Fachbereich Maschinenbau  
Technische Universität Darmstadt  
Otto-Berndt-Straße 2  
64289 Darmstadt



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

Fachgebiet für Produktionstechnik  
und Umformmaschinen



## Master-Thesis

für

Prof. Dr.-Ing. Dipl.-Wirtsch.-Ing.  
Peter Groche

Herrn Martin Rakowitsch, B.Sc.

— **Thema:** Modellierung der Dynamik eines Koppelgetriebes am Beispiel der 3D-Servo-Presse  
Modelling of the dynamics of a linkage mechanism using the 3D Servo Press

Die Regelung und Optimierung von Servopressen benötigt reduzierte Modelle, welche die statischen und dynamischen Eigenschaften der Presse beschreiben. Dies stellt bei der 3D-Servo-Presse aufgrund ihrer komplexen Kinematik eine besondere Herausforderung, aber gleichzeitig einen hohen Nutzen für die dynamische Regelung der Maschine dar.

— Im Rahmen der Masterarbeit soll das bisher genutzte statische Modell der Maschine durch ein dynamisches Modell unter Berücksichtigung der Steifigkeiten, Massen und Trägheitsmomente ersetzt werden. Die relevanten Modellparameter sollen hierbei aus den CAD-Daten der Maschine ermittelt werden und in ein reduziertes Modell einfließen. Hierbei sind Modellannahmen und Vereinfachungen zu treffen. Daher ist bei der Modellbildung der Einfluss von Unsicherheit wie Parameterunsicherheit zu untersuchen, indem das reduzierte Modell einem zu implementierenden Simulationsmodell der Presse gegenübergestellt wird.

Im Einzelnen sind folgende Tätigkeiten durchzuführen:

- Recherche zum Thema Modellbildung
- Aufbau eines reduzierten, dynamischen Pressenmodells
- Aufbau eines Simulationsmodells
- Untersuchung des Einflusses von Unsicherheit
- Zusammenstellen der Ergebnisse in einer schriftlichen Ausarbeitung

Beginn: 01.11.2017  
Abgabe: 30.04.2018  
Betreuer: Florian Hoppe, M.Sc.

Prof. Dr.-Ing. Dipl.-Wirtsch.-Ing. P. Groche



---

### **Erklärung zur Master-Thesis**

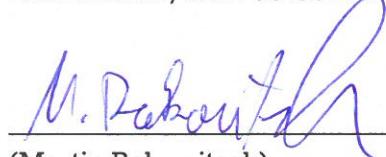
---

Hiermit versichere ich, Martin Rakowitsch, die vorliegende Master-Thesis ohne Hilfe Dritter nur mit den angegebenen Quellen und Hilfsmitteln angefertigt zu haben. Alle Stellen, die aus Quellen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht worden. Diese Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen.

Mir ist bekannt, dass im Falle eines Plagiats (Paragraph 38 Abs. 2 APB) ein Täuschungsversuch vorliegt, der dazu führt, dass die Arbeit mit 5,0 bewertet und damit ein Prüfungsversuch verbraucht wird. Abschlussarbeiten dürfen nur einmal wiederholt werden.

Bei der abgegebenen Thesis stimmen die schriftliche und die zur Archivierung eingereichte Fassung überein.

Darmstadt, den 09.05.2018



---

(Martin Rakowitsch)



---

## Kurzfassung

---

In dieser Arbeit wird ein mechanisches Modell für das Koppelgetriebe des Prototypen der 3D-Servo-Presse erstellt. Dieses Getriebe setzt die rotatorische Antriebsbewegung von Servomotoren in die Stößelbewegung der Presse um. Das Modell wird als Mehrkörpermodell ausgeführt, sodass dynamische Vorgänge untersucht werden können. Es ist vorgesehen, dieses Modell zur Zustandsüberwachung der 3D-Servo-Presse zu verwenden. Dabei liegt ein Schwerpunkt auf der Überwachung der Pressensteifigkeit, die für die Qualität von Pressenerzeugnissen elementar ist. Dementsprechend werden die Koppelglieder entsprechend ihrer Belastungsart als elastische Körper modelliert. Die zwischen den Koppelgliedern verbauten Lager werden durch linearelastische Federelemente abstrahiert, sodass die Nachgiebigkeit des gesamten Getriebes mit einem Modell berechnet werden kann. Steifigkeitskennwerte folgen aus Finite-Elemente-Berechnung der Getriebeglieder.

Der Vergleich zwischen Modell und gemessener Getriebennachgiebigkeit zeigt, dass das Modell steifer ist als das reale Getriebe. Daher wird eine Parameteridentifikation durchgeführt, um die Modellsteifigkeiten auf die Messungen anzupassen. In den gemessenen Kennlinien wird Hysterese und mechanisches Spiel beobachtet, welches nicht durch das Modell wiedergegeben werden kann. Daher werden die Messdaten um diese Effekte bereinigt. Es zeigt sich, dass die aus der Identifikation entspringenden Parameter einer Unsicherheit unterliegen. Die Auswirkungen dieser Parameterunsicherheit auf das Modell wird untersucht. Aus den unsicheren Parametern werden zwei Parametersätze ausgewählt, die zu einem steifen bzw. nachgiebigen Modellen führen. Mit ihnen werden zwei Grenzmodelle definiert, mit denen sich die Zustandsüberwachung der Pressensteifigkeit durchführen lässt.

---

## Abstract

---

Within this thesis the linkage mechanism of the 3D Servo press prototype is modelled. The linkage transforms the rotational motion of the actuating servo-motors to the desired motion of the ram. The model is carried out as a multibody system so that dynamic processes can be investigated. It is foreseen that the model is used for model-based condition monitoring of the 3D Servo Press. The focus of condition monitoring is on the press stiffness as this parameter is crucial for the quality of products made by presses. Therefore links are modelled as elastic bodies which can undergo elastic deformations caused by their loads. All bearings, that provide the movement of the links, are modelled as linear elastic springs. The finite element analysis is utilized to obtain the links' stiffness. Finally, the total compliance of the gear can be computed by using the model.

A comparison between the model and the press stiffness reveals that the model is stiffer than the press' linkage. To minimize the mismatch between model and linkage, a parameter identification is performed. The measured characteristics of the linkage indicates hysteresis and presence of bearing clearance. Both phenomena are not modelled and therefore cannot be predicted by the model. The data are processed so that the behavior of hysteresis and bearing clearance are removed. Then the parameter identification is performed. As the set of parameters computed by an optimization algorithm underlay uncertainty the impact on the models stiffness is investigated. Two sets of parameters, which lead to a stiff and a flexible model respectively, are chosen. These models define two bounds that can be used for monitoring of the press' stiffness.



---

## Inhaltsverzeichnis

---

<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>III</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>VI</b>
<b>Nomenklatur</b>	<b>VIII</b>
<b>1. Einführung</b>	<b>1</b>
1.1. Zielsetzung und Abgrenzung zu vorangegangenen Arbeiten . . . . .	1
1.2. Vorgehensweise . . . . .	2
<b>2. Stand der Technik</b>	<b>3</b>
2.1. Zustandsüberwachung . . . . .	3
2.2. Modellbildung . . . . .	5
2.2.1. Modellbildung technischer Systeme . . . . .	5
2.2.2. Modellbildung eines Koppelgetriebes . . . . .	6
2.2.3. Allgemeine Modellbildung schwingungsfähiger Systeme . . . . .	9
2.3. Berechnungsmethoden . . . . .	11
2.3.1. Die Mehrkörpersimulation . . . . .	11
2.3.2. Die Finite-Elemente-Methode . . . . .	13
<b>3. Modellierung des Koppelgetriebes</b>	<b>16</b>
3.1. Analyse der 3D-Servo-Presse . . . . .	16
3.1.1. Aufbau des Koppelgetriebe . . . . .	17
3.1.2. Kinematik des Koppelgetriebes . . . . .	20
3.2. Systemdefinition . . . . .	22
3.2.1. Modellanforderungen und -anwendungen . . . . .	22
3.2.2. Modelldefinitionen . . . . .	23
3.3. Steifigkeiten im Getriebelastpfad . . . . .	27
3.3.1. Ermittlung der Gliedersteifigkeit . . . . .	27
3.3.2. Lagersteifigkeit . . . . .	29
3.4. Auswahl relevanter elastischer Freiheitsgrade . . . . .	32
3.5. Modelle der Getriebeglieder . . . . .	34
3.5.1. Stabmodell . . . . .	35
3.5.2. Balkenmodell . . . . .	37
3.5.3. Lagermodell . . . . .	39
3.6. Synthese zum Gesamtmodell . . . . .	40
3.7. Mathematische Verarbeitung der Bewegungsdifferentialgleichung . . . . .	41
3.7.1. Kinematische Randbedingungen . . . . .	42
3.7.2. Lösung der Bewegungsdifferentialgleichung . . . . .	42
3.7.3. Linearisierung des Modells . . . . .	43
3.7.4. Berechnung statischer Getriebeverformungen . . . . .	43
3.7.5. Inverse Dynamik . . . . .	44

---

<b>4. Modellanalyse und -anpassung</b>	<b>46</b>
4.1. Elastostatische Analyse . . . . .	46
4.1.1. Auswirkungen der Lagermodellierung und Modelllinearisierung . . . . .	46
4.1.2. Getriebenachgiebigkeit . . . . .	48
4.1.3. Parameteroptimierung auf Basis der Getriebenachgiebigkeit . . . . .	53
4.1.4. Messung der Gelenkverschiebungen . . . . .	55
4.1.5. Parameteridentifikation auf Basis der Gelenkverschiebung . . . . .	60
4.2. Unsicherheit in den Steifigkeitsparametern . . . . .	64
4.2.1. Bestimmung von Parameterunsicherheit . . . . .	64
4.2.2. Auswirkung von Parameterunsicherheit auf das Modell . . . . .	67
4.3. Inverse Dynamik . . . . .	68
<b>5. Diskussion und Ausblick</b>	<b>71</b>
<b>Literatur</b>	<b>XI</b>
<b>A. Anhang</b>	<b>XV</b>
A.1. Technische Zeichnung des Getriebes . . . . .	XV
A.2. Daten der Parameteridentifikation . . . . .	XVII

---

## Abbildungsverzeichnis

---

2.1. Ablauf verschiedener Überwachungsmethoden mit deren Auswirkungen auf den Prozess aus [Ise06] . . . . .	3
2.2. Analytische Symptomerzeugung, a) Basierend auf Signalmodelle aus [Ise10], b) Basierend auf Prozessmodellen aus [Ise10] . . . . .	4
2.3. Systeme mit verteilten und konzentrierten Parametern mit möglichen Vereinfachungen aus [Ise08] . . . . .	6
2.4. Mischformen und deren Eigenschaften der theoretischen und experimentellen Modellbildung aus [Ise08] . . . . .	6
2.5. Modellbildung einer Kurbelschwinge unter Berücksichtigung von Biegeschwingungen der Koppelglieder, a) Kurbelschwinge aus [Goe75] für die ein Modell erstellt wurde, b) Als diskretes Schwingungssystem ausgeführtes Berechnungsmodell aus [Goe75] . . . . .	8
2.6. Modellbildung einer mechanischen Presse, a) Getriebeschema aus [Spe88], b) Berechnungsmodell aus [Spe88] . . . . .	9
2.7. Prozess der Modellbildung eines schwingungsfähigen Systems aus [VDI14] . . . . .	10
2.8. Mehrkörpersystem mit möglichen Elementen aus [Woe16] . . . . .	11
2.9. Analytische und synthetische Mehrkörpermethoden, a) Prinzipskizze des Systems mit Minimalkoordinaten für die analytische Methode aus [Woe16], b) Notwendiger Freischnitt aller Körper für die synthetische Methode unter Beachtung der Schnittkräfte aus [Woe16]	12
2.10. Vergleich zwischen offenem und geschlossenem Mehrkörpersystem in Anlehnung an [Woe16], a) offen, hier mit Kettenstruktur, b) geschlossen . . . . .	13
2.11. Ablauf der FEM in Anlehnung an [Kno17] . . . . .	14
 3.1. Oberer Pressenaufbau der 3D-Servo-Presse mit geöffneten Getriebekästen . . . . .	16
3.2. Verstelleinheit im Detail mit Bezeichnungen . . . . .	17
3.3. Koppelgetriebe mit Bezeichnung der Getriebeelemente . . . . .	18
3.4. Prinzipskizze des Getriebes mit Gelenkbezeichnungen und Laufgraden . . . . .	18
3.5. Exemplarische Konstruktion der Gelenke, a) Gelenk D, b) Gelenk B0 . . . . .	19
3.6. Skizze eines Stabzweischlags zur Berechnung der Koordinaten des Punktes P . . . . .	20
3.7. Kinematik an der 3D-Servo-Presse, a) Betriebsfeld für die obere und untere Spindelpositionen $x_{S_0}$ und $x_{S_u}$ , b) einstellbare obere und untere Totpunkte für die y-Koordinate des Gelenks D . . . . .	21
3.8. Maschinenüberwachung mit einem elastostatischen Modell zur Überwachung der Getriebesteifigkeit . . . . .	22
3.9. Vorwärtsgleichung und inverses Problem der Dynamik im Vergleich . . . . .	22
3.10. Maschinenüberwachung mit der inversen Dynamik . . . . .	23
3.11. Fourierspektren der Abtriebsbewegung $y_D(t)$ bei verschiedenen Anregungen und Getriebestellungen . . . . .	26
3.12. FEM an der Verstelllasche 1, a) Mit Tetraederelementen vernetzte Verstelllasche, b) Verstelllasche mit Randbedingung und Belastung $F$ an den Lagersitzen . . . . .	28
3.13. Verschiebungen in x-Richtung der Verstelllasche unter Last . . . . .	28
3.14. Koordinatensystem und Gelenknummerierung am Schlepphebel für die Steifigkeitsberechnung . . . . .	28
3.15. Lagerkennlinien aus [Bed06] für die im Getriebe verbauten Lager . . . . .	30
3.16. Lagerkennlinien (linke Spalte) mit verschiedenen Approximationen und der dazugehörigen Steifigkeit (rechte Spalte) . . . . .	32
3.17. Abgetastetes Betriebsfeld zur Berechnung der Schnittkräfte . . . . .	34

3.18. Bauelemente im Koppelgetriebe mit ihren bezogenen Steifigkeiten unter Berücksichtigung paralleler Vielfachheit . . . . .	34
3.19. Modell eines Stabes bestehend aus Punktmassen und Federn . . . . .	35
3.20. Drehung eines Körpers mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = \dot{\varphi}$ um den Punkt P, der nicht sein Schwerpunkt ist . . . . .	36
3.21. Modell eines Balkens bestehend aus Massen und Federn . . . . .	37
3.22. Geometrische Abstraktion des Schlepphebels zur Bestimmung der Modellmassenträgheitsmomente . . . . .	38
3.23. Lager als Federelement zwischen zwei Körpern . . . . .	39
3.24. Mechanisches Schema des Gesamtsystems . . . . .	40
4.1. Verschiebung des Punktes $y_D$ an der Druckstange unter Last sowie die daraus errechnete Steifigkeit für verschiedene Getriebestellungen . . . . .	48
4.2. Berechnung der Nachgiebigkeit . . . . .	49
4.3. Nachgiebigkeit der Presse für das Betriebsfenster der Spindelpositionen bei einem Exzenterwinkel von $\varphi_{exz} = 90^\circ$ , a) Lineares Modell, b) Nachgiebigkeit aus [Gro17] . . . . .	50
4.4. Am Modell ermittelte Getriebenachgiebigkeit über den Exzenterwinkel für verschiedene Spindelstellungen nach Tabelle 4.2 . . . . .	51
4.5. An der 3D-Servo-Presse gemessene Getriebenachgiebigkeit auf Datenbasis aus [Amr16] .	52
4.6. Mit Modell berechnete (ohne Marker, linke Ordinatenachse) und gemessene (mit Marker, rechte Ordinatenachse) Getriebenachgiebigkeit über einen Exzenterumlauf für verschiedene Spindelpositionen nach Tabelle 4.2 . . . . .	52
4.7. Getriebenachgiebigkeit über Exzenterwinkel nach Anpassung der Steifigkeit der Verstelllasche 3 und des Verstellhebels . . . . .	53
4.8. Relative Intervalle für die Parameteridentifikation und Parameterauswahl des Optimierungsalgorithmus . . . . .	54
4.9. Modellnachgiebigkeit vor und nach den Optimierungen und gemessene Getriebenachgiebigkeit über Exzenterumläufe aller in Tabellen 4.2 aufgelisteten Spindelstellungen . . . .	55
4.10. Modell eines Stabes bestehend aus Punktmassen und Feder . . . . .	56
4.11. Spiel als Ursache der beobachteten Sprünge in aufgenommenen Kennlinien, a) Modell, b) Resultierende Kennlinie . . . . .	57
4.12. Gelenkverschiebungen bei Be- und Entlastung des Getriebes . . . . .	59
4.13. Aufbereitung der Messdaten durch Einführen eines neuen Koordinatensystems, dessen Ursprung bei 800 N und auf der Ausgleichsgeraden verankert ist . . . . .	60
4.14. Optimale relative Parameter $f_k = k_{\text{optimal},k}/k_{0,k}$ für die durchgeföhrten Optimierungen. Blau: Alle Steifigkeiten werden optimiert. Rot: Die Optimierung beschränkt sich auf eine Auswahl an Parametern . . . . .	62
4.15. Unter Vorspannung gemessene Gelenkverschiebung sowie Verschiebungen aus dem Getriebemodell vor und nach der Parameteridentifikation . . . . .	63
4.16. Verschiebungen der Gelenke D, R, F und B0 in ausgewählten Richtungen unter Belastung im bereits vorgespannten Getriebe für vier Messreihen . . . . .	65
4.17. Aufbereitete Messdaten für die Messreihen 1 und 2 durch Aufteilung in Be- und Entlastungskurven (Zusätze b und e in der Legende) sowie Entfernen der Offsets nach einer linearen Regression . . . . .	65
4.18. Optimale Parameter mit 95 % Konfidenzintervallen ermittelt durch eine Parameteridentifikation für die Belastungskurve der ersten Messreihe. Die Parameter sind bezogen auf die Ausgangssteifigkeit $k_0$ . . . . .	66
4.19. Auf $k_0$ bezogene optimale Steifigkeitsparameter für alle Messreihen, getrennt nach Be- und Entlastung . . . . .	66

---

4.20. Aufbereitete und gemessene Kennlinien mit den Kennlinien des steifen und nachgiebigen Modells als Schranken . . . . .	67
4.21. Nachgiebigkeit des Getriebes über den Exzenterwinkel für die auf den Identifikationen beruhenden Modellen (schwarz) sowie das nachgiebigste und steifste Modell (rot) als Schranken . . . . .	68
4.22. Blockschaltbild zur Berechnung von $F(t)$ , $u(t)$ und den Kräften $F_{\text{inv}}(t)$ . . . . .	69
4.23. Zeitlicher Verlauf des Exzenterwinkels und der Spindelpositionen als Eingang für das inverse dynamische Starrkörpermodell . . . . .	69
4.24. Vergleich zwischen den am elastischen Modell wirkenden und den durch das inverse Modell berechneten Kräfte/Momente, a) Antriebsmoment an der Exzenterwelle, b) Kräfte Spindelpositionen . . . . .	70

---

## Tabellenverzeichnis

---

3.1. Typ und Anzahl im Getriebe verbauter Rillenkugellager an den jeweiligen Gelenken . . . . .	19
3.2. Belastungsarten der Getriebeglieder . . . . .	24
3.3. Stellungen des Getriebes für die harmonische Analyse der Abtriebsbewegung $y_D(t)$ . . . . .	25
3.4. Steifigkeit der Koppeln für jeweils ein Element . . . . .	29
3.5. Lager mit Parametern aus der Ausgleichsrechnung und konstanten Steifigkeiten . . . . .	31
4.1. Stellungen des Getriebes für die Untersuchung der Modellierungsarten . . . . .	47
4.2. Stellungen des Getriebes für die Berechnung der Getriebeflexibilität für verschiedene Exzenterwinkel . . . . .	51
4.3. Stellungen des Getriebes für die Vermessung von Gelenkverschiebungen unter Last . . . . .	56
4.4. Gemessene Gelenkverschiebungen . . . . .	56
4.5. Durchgeführte Optimierungen mit zu identifizierenden Parametern, Startvektor für die Optimierung und Fehlerquadratsumme . . . . .	61
4.6. Getriebesteifigkeit basierend auf der Verschiebung $Dy$ ermittelt aus der linearen Regression von Be- und Entlastungskennlinien . . . . .	64
A.1. Gemessene Gelenkverschiebungen beim Aufbringen der Kraft $F_p$ auf das Stoßellager für verschiedene Messreihen. Getriebestellung: $\varphi_{exz} = 0^\circ$ , $x_{S0} = 273$ mm, $x_{Su} = -33$ mm . . .	XVII
A.2. Identifizierte Parameter auf Basis der gemessenen Gelenkverschiebung für verschiedene Optimierungen . . . . .	XX

---

## **Abkürzungsverzeichnis**

---

**CAE** Computer Aided Engineering

**DAE** Differential-Algebraic-Equation (Differential-algebraisches Gleichungssystem)

**DGL** Differentialgleichung

**FEM** Finite-Elemente-Methode

**MKS** Mehrkörpersimulation bzw. Mehrkörpersystem

**PtU** Institut für Produktionstechnik und Umformmaschinen

**SSE** Sum of Squared Errors (Fehlerquadratsumme)

**TCP** Tool Center Point

## Nomenklatur

### Lateinische Buchstaben

$A$	Fläche	$\text{m}^2$
$a$	Beschleunigung	$\text{m s}^{-2}$
$c$	Konstante	-
$D$	Dämpfungsmaatrix	$\text{N s m}^{-1}$ bzw. $\text{N m s rad}^{-1}$
$E$	Elastizitätsmodul	$\text{N m}^{-2}$
$F_R$	Radiale Lagerkraft	$\text{N}$
$F$	Kraft	$\text{N}$
$f$	Nichtlineare Funktion	-
$f_E$	Erregerkräfte und -momente	$\text{N}$ bzw. $\text{N m}$
$f$	Faktor	-
$F_P$	Prozesskraft	$\text{N}$
$G$	Gyroskopische Matrix	$\text{N s m}^{-1}$ bzw. $\text{N m s rad}^{-1}$
$g$	Vektor der Schließbedingungen	-
$g$	Gravitationskonstante	$\text{m s}^{-2}$
$h$	Nachgiebigkeit	$\text{m N}^{-1}$
$J$	JACOBI-Matrix	-
$K$	Symmetrische Steifigkeitsmatrix	$\text{N m}^{-1}$ bzw. $\text{N m rad}^{-1}$
$k$	Steifigkeit	$\text{N m}^{-1}$
$k_{m1}$	Konstante Lagersteifigkeit nach Methode 1	$\text{N m}^{-1}$
$k_{m2}$	Konstante Lagersteifigkeit nach Methode 2	$\text{N m}^{-1}$
$l$	Länge	$\text{m}$
$M$	Massenmatrix	$\text{kg}$ bzw. $\text{kg m}^2$
$M$	Drehmoment	$\text{N m}$
$m$	Masse	$\text{kg}$
$N$	Antimetrische Steifigkeitsmatrix	$\text{N m}^{-1}$ bzw. $\text{N m rad}^{-1}$
$q$	Freiheitsgradvektor	$\text{m}$ bzw. $\text{rad}$
$Q_{nk}$	Vektor der nichtkonservativen Kräfte und Momente	$\text{N}$ bzw. $\text{N m}$
$r$	Ortsvektor	$\text{m}$
$\delta r$	Radiale Lagereinfederung	$\text{m}$
$s$	Mechanisches Spiel	$\text{m}$
$T$	Kinetische Energie	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$
$t$	Zeit	$\text{s}$
$u$	Vektor der Laufgrade	$\text{m}$ bzw. $\text{rad}$
$U$	Potentielle Energie	$\text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$
$v$	Geschwindigkeitsvektor	$\text{kg}$
$x$	Kartesische Koordinate des globalen Koordinaten- systems	$\text{m}$
$x_{So}$	Obere Spindelposition	$\text{m}$
$x_{Su}$	Untere Spindelposition	$\text{m}$
$y$	Kartesische Koordinate des globalen Koordinaten- systems	$\text{m}$

## Griechische Buchstaben

$\lambda$	Reaktionskräfte der Bindungen	N bzw. N m
$\eta$	Koordinate im lokalen Koordinatensystem	m
$\omega$	Winkelgeschwindigkeit	rad s <sup>-1</sup>
$\psi$	Winkellage gegenüber des lokalen Koordinatensystems	rad
$\varphi_{\text{Exz}}$	Winkellage des Exzentrers	rad
$\rho$	Dichte	kg m <sup>-3</sup>
$\Theta$	Massenträgheitsmoment	kg m <sup>2</sup>
$\xi$	Koordinate im lokalen Koordinatensystem	m



---

## 1 Einführung

---

Der stetige Fortschritt in Wissenschaft und Technik macht sich auch in der Umformtechnik bemerkbar. Besonders der Wunsch nach steigender Wirtschaftlichkeit führt zu größer werdenden Anforderungen, die die Entwicklung und Optimierung von Umformmaschinen vorantreiben. Wesentliche Stellschrauben für einen wirtschaftlichen Betrieb von Pressen finden sich in der Produktivität, der gesteigerten Maschinenverfügbarkeit und dem energieeffizienten Einsatz bei gleichzeitiger Reduktion der Wartungskosten. Allerdings stellt die Blechverarbeitende Industrie weitere Anforderungen wie gesteigerte Produktqualität und hohe Flexibilität, um das Spektrum der herstellbaren Produkte bei gleichzeitig kurzer Rüstzeit zu erweitern.

Servopressen, die durch einen Servomotor als Antriebseinheit gekennzeichnet sind, haben sich in der Vergangenheit als erfolgreiches Maschinenkonzept etabliert, da sie den genannten Anforderungen gerecht werden. Ein Grund dafür liegt im frei programmierbaren Bewegungsverlauf, der sich auf verschiedene Merkmale anpassen lässt. Beispielsweise kann der Geschwindigkeitsverlauf auf den Umformprozess optimiert werden, sodass Produktqualität gesteigert und Werkzeugstandzeiten verlängert werden können [Kuh07]. Eine mechanische Totpunktverstellung entfällt, da die Presse im Pendelhubbetrieb gefahren werden kann. Dass damit eine Senkung des Energiebedarfs einhergeht, hat der praktische Betrieb von Servopressen gezeigt [Kuh09].

Um Servopressen noch flexibler gestalten zu können, wird am Institut für Produktionstechnik und Umformmaschinen (PtU) die 3D-Servo-Presse entwickelt. Bei diesem neuartigen Pressenkonzept werden drei Antriebssysteme verwendet, die neben der rein translatorischen Stößelbewegung eine Verkipfung um Achsen orthogonal zur Translationsrichtung zulassen. Die zusätzlichen Kippfreiheitsgrade ermöglichen es, neuartige Umformprozesse zu entwickeln. Diese Prozesse können bspw. Produktgeometrien erstellen, die mit bisher üblichen Pressen nicht hergestellt werden können. Des Weiteren ist es denkbar, durch definierte Werkzeugbewegungen bestimmte Materialeigenschaften in den umgeformten Produkten zu erzeugen. Die 3D-Servo-Presse kommt damit dem Wunsch nach, übliche Servopressen weiterhin zu flexibilisieren, um damit den Einsatz von Pressen wirtschaftlicher gestalten zu können.

Im Zuge der vierten industriellen Revolution – Industrie 4.0 – werden Produkte und Produktionsmittel zunehmend digitalisiert. Dafür werden Sensorik und Kommunikationsschnittstellen in Produkte und Produktionsmittel integriert [Bun18], die anschließend für verschiedenste Anwendungsfälle genutzt werden können. Der *Leitfaden Industrie 4.0* sieht die Zustandsüberwachung (engl. condition monitoring) als konkrete Anwendung vor [VDM15], bei der verschiedene Messgrößen einer Maschine erfasst werden, um daraus Informationen über ihren Zustand zu gewinnen. So ist möglich, den Verschleißzustand zu ermitteln und sich anbahnende Defekte frühzeitig zu erkennen, sodass Ersatzteile rechtzeitig beschafft und Reparaturen bedarfsgerecht durchgeführt werden können. Dadurch reduzieren sich Stillstandzeiten der Produktionsmittel, weshalb Kosten eingespart werden können.

Die vorliegende Arbeit soll mit Hilfe eines Maschinenmodells einen Beitrag leisten, um die Zustandsüberwachung auf Pressen zu übertragen. Dies geschieht am Beispiel des Prototypen der 3D-Servo-Presse, die als Forschungsobjekt am PtU an der Technischen Universität Darmstadt vorhanden ist.

---

### 1.1 Zielsetzung und Abgrenzung zu vorangegangenen Arbeiten

---

Der Prototyp der 3D-Servo-Presse fußt auf eine neuartiges Pressenkonzept, bei dem der Stößel durch drei Antriebseinheiten eine bewusste Verkipfung durchführen kann. Die Antriebseinheiten basieren auf Servomotoren, die die Antriebsmomente zur Verfügung stellen. Diese Drehmomente werden mit Hilfe von

---

Koppelgetrieben (ungleichförmig übersetzende Getriebe) in die auf den Stößel wirkende Presskraft übersetzt. Eigenschaften, wie bspw. die statische Steifigkeit und Eigenfrequenzen der Getriebe, sind abhängig von der Konfiguration des Getriebes. Dementsprechend benötigt es Modelle, die die Presseneigenschaften unter Berücksichtigung der Getriebestellung beschreiben.

In Vorarbeiten wurden bereits unterschiedliche Modelle aufgestellt, deren Fokus auf der Getriebemodellierung liegt. BEDARFF hat im Rahmen einer Studienarbeit die Kinematik des Getriebes analysiert und Programme bereitgestellt, um den Einfluss von geometrischen Parametern auf die Kinematik zu analysieren. Im Anschluss daran erstellte er ein dynamisches Modell der Presse, das alle drei Getriebe mit dem Stößel berücksichtigt. Alle Getriebeglieder wurden als Starrkörper modelliert. Elastische Elemente tauchen in den Lagern auf. Dieses Modell wurde anschließend in MATLAB SIMULINK implementiert, um Regelungsstrategien für die 3D-Servo-Presse zu entwickeln.

AMRHEIN hat in seiner Masterthesis [Amr16] die modellbasierte Zustandsüberwachung der 3D-Servo-Presse untersucht. Für den Überwachungsansatz wird die gemessene Stößeleinfederung, die bei bestimmter Stößelkraft auftritt, der Einfederung aus einem Modell gegenübergestellt. Für die Aufstellung des Modells wird ein Grey-Box Ansatz gewählt: Aus einem einfachen mechanischen Ersatzmodell werden analytische Gesetzmäßigkeiten abgeleitet. Diese mathematischen Funktionen werden in Ansatzfunktionen überführt, um mit Hilfe von Messdaten und der Ausgleichsrechnung ein Kennfeld zu erzeugen. In der Arbeit wird gezeigt, dass das Modell Kennwerte liefert, die der Pressennachgiebigkeit vergleichbar sind.

GROCHE et al. haben in [Gro17] das Modell von AMRHEIN angepasst, um die tatsächliche Steifigkeit der 3D-Servo-Presse über einen geschlossenen Regelkreis zu erhöhen. Dafür greifen sie auf das Nachgiebigkeitsmodell zurück und implementieren dieses in eine Beobachterstruktur.

Innerhalb dieser Arbeit soll ein mechanisches Ersatzmodell des Getriebes der 3D-Servo-Presse aufgestellt werden. Dabei werden beide Ansätze von BEDARFF und AMRHEIN in einem Modell zusammengeführt: Es werden die Massenträgheiten aller Getriebeglieder berücksichtigt, ebenso wie die Nachgiebigkeit dieser. Damit können dynamische Vorgänge wie das Verfahren der Getriebestellung und Schwingungsphänomene untersucht werden. Zusätzlich soll das aufzustellende Modell das elastostatische Verhalten der Getriebe abbilden. Damit steht ein Modell zur Verfügung, das mit vielfältigen Analysemöglichkeiten mehrere Ansätze der Zustandsüberwachung ermöglicht.

Im konkreten wird das mechanische Getriebemodell in MATLAB implementiert und anschließend gemessenen Eigenschaften der Presse gegenübergestellt. Es sollen Parameter identifiziert und gegebenenfalls angepasst werden. Eine Sensitivitätsanalyse, die den Einfluss von Parameterunsicherheit wider spiegelt, soll ebenfalls durchgeführt werden. Vom Aufbau des in der Aufgabenstellung aufgeführten Simulationsmodells wird zu Gunsten der Parameteridentifikation abgesehen.

---

## 1.2 Vorgehensweise

---

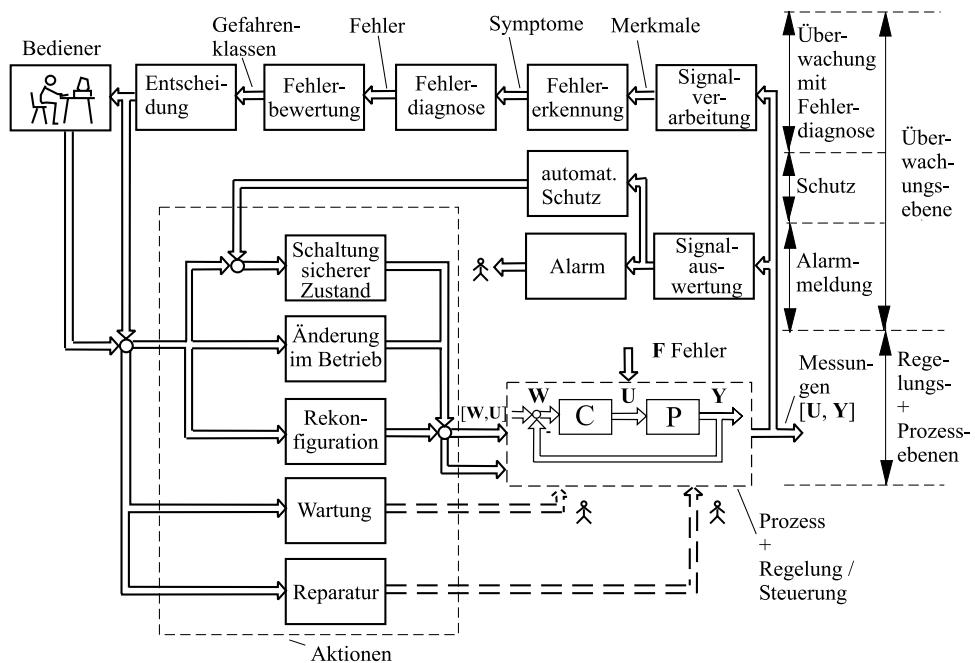
Zunächst werden in Kapitel 2 die Grundlagen zur Maschinenüberwachung und Modellbildung wiedergegeben. In Kapitel 3 wird die 3D-Servo-Presse vorgestellt und deren Konstruktion analysiert. Aufbauend auf der Analyse werden Annahmen getroffen, damit anschließend das mechanische Ersatzmodell aufgestellt werden kann. Modellparameter werden ermittelt, indem die relevanten Bauelemente der Presse einer FE-Analyse unterzogen werden. Im Anschluss folgt eine Plausibilitätskontrolle. Dafür wird die aus dem Modell ermittelte Getriebennachgiebigkeit den Ergebnissen aus [Gro17] gegenübergestellt wird. Ein Vergleich mit an der 3D-Servo-Presse erhobenen Messdaten liefert die Basis für eine Parameteridentifikation. Abschließend wird der Einfluss von etwaiger Parameterunsicherheit untersucht, sodass das Modell zur Zustandsüberwachung genutzt werden kann.

## 2 Stand der Technik

Im Folgenden wird ein Überblick über das Konzept der Zustandsüberwachung gegeben. Anschließend wird auf die Modellbildung eingegangen, wobei allgemeine Möglichkeiten der Modellerstellung sowie konkrete Modelle von Koppelgetrieben und schwingungsfähigen Systemen erläutert werden. Abschließend werden übliche Berechnungsmethoden für die Modellbildung vorgestellt.

### 2.1 Zustandsüberwachung

ISERMANN gibt in [Ise06] und [Ise10] einen Überblick über verschiedene Zustandsüberwachungsmethoden von technischen Prozessen, der hier wiedergegeben wird. Bei der Zustandsüberwachung wird gemäß Abb. 2.1 zwischen den drei verschiedenen Überwachungsmethoden *Grenzwertüberwachung*, *Automatischer Schutz* und *Überwachung mit Fehlerdiagnose* unterschieden, die sich in ihrer Komplexität und Nutzen unterscheiden.



**Abbildung 2.1.: Ablauf verschiedener Überwachungsmethoden mit deren Auswirkungen auf den Prozess aus [Ise06]**

In der *Grenzwertüberwachung*, die die unterste Überwachungsebene darstellt, werden messbare Größen auf ein Überschreiten von vorgegebenen Toleranzintervallen geprüft. Verlässt ein Messsignal ein solches Intervall, wird eine Alarmmeldung an einen Bediener ausgegeben.

In der nächsten Ebene – der *Schutzebene* – führt eine Alarmmeldung zum Schalten einer Schalteinrichtung, die den Prozess in einen sicheren Zustand überführt.

Die höchste Ebene stellt die *Überwachung mit Fehlerdiagnose* dar. Bei dieser Methode werden aus Messgrößen verschiedene Merkmale gewonnen, die zu Symptomen überführt werden. Die anschließende Fehlerdiagnose hat die Aufgabe, aus den Symptomen die Art, Größe und den Ort des Fehlers abzuleiten.

Die ersten beiden Methoden eignen sich nur für stationäre Prozesse, weil das Toleranzband lediglich

für stationäre Messsignale sinnvoll aufgestellt werden kann. Vorteile dieser Methoden liegen in der einfachen Umsetzbarkeit und Zuverlässigkeit. Nachteilig ist, dass mit den Alarrrn meldungen in der Regel keine direkte Ursache angegeben werden kann. Es bedarf damit einer genaueren Prozessanalyse, um den Fehler zu finden. Ein weiterer Nachteil liegt in der Vorgabe der Grenzwerte: Liegen die Grenzen zu eng, können Fehlalarme ausgelöst werden. Zu weit gefasste Grenzwerte führen dazu, dass Fehler zu spät oder gar nicht erkannt werden. Damit ergibt sich die Notwendigkeit, für komplexe und schwer zu durchschauende Prozesse Überwachungsmethoden mit integrierter Fehlerdiagnose zu verwenden.

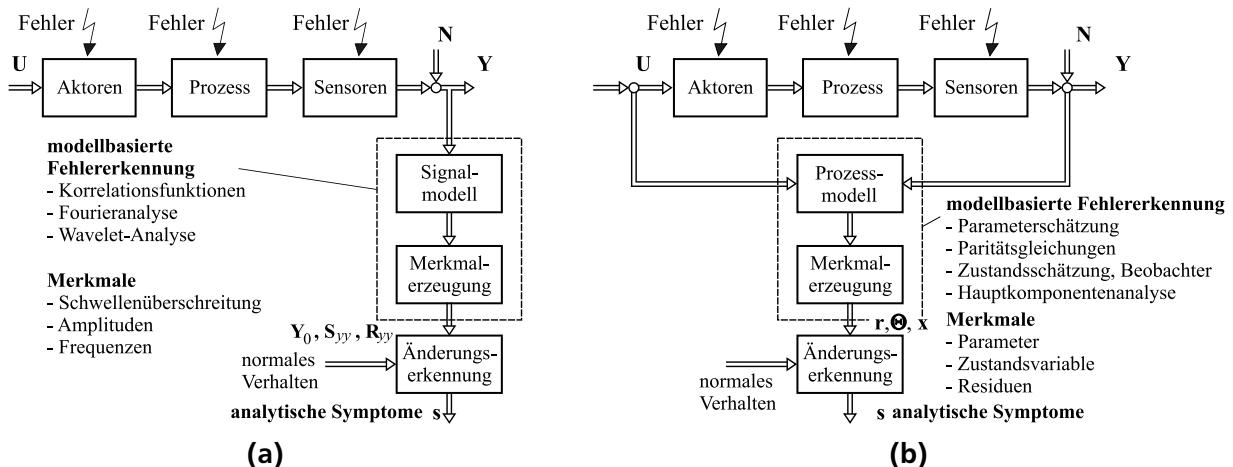
Die Fehlerdiagnose basiert gemäß Abb. 2.1 auf die Erkennung von Symptomen. Ein Symptom ist nach [Ise06] die Abweichung eines Merkmals gemäß

$$\text{Symptom} = \text{Beobachtetes Merkmal} - \text{Normales Merkmal}.$$

Merkmale können gemessene Signale sein, geschätzte Modellparameter oder geschätzte Zustandsgrößen. Residuen, die man beispielsweise aus der Differenz von gemessenen Prozessausgängen und Modellausgängen erhält, stellen bereits Symptome dar. Generell wird zwischen *analytischen* Symptomen und *heuristischen* Symptomen unterschieden.

Es liegen analytische Symptome vor, wenn die dazugehörigen Merkmale auf einem Modell basieren. In der Fehlerdiagnose kommen zwei verschiedene Modelle zum Einsatz: das *Signal-* und das *Prozessmodell*, Abb. 2.2.

Im Signalmodell werden gemessene Signale verschiedenen Analysen unterzogen, beispielsweise einer



**Abbildung 2.2.: Analytische Symptomerzeugung, a) Basierend auf Signalmodelle aus [Ise10], b) Basierend auf Prozessmodellen aus [Ise10]**

Korrelations-, Fourier oder Waveletanalyse. Daraus lassen sich Kennwerte berechnen, die beispielsweise Amplituden und Frequenzen sein können.

Werden Prozessmodelle verwendet, wird das Prozessmodell mit dem selben Eingang beaufschlagt wie der eigentliche Prozess. Die Merkmale, welche Modellparameter, Zustandsvariablen oder Residuen sein können, werden mit einer geeigneten Methode berechnet. So gibt ISELMANN beispielsweise Parameterschätzmethoden, Paritätsgleichungen, neuronale Netzwerke und Beobachter an.

Um aus den berechneten analytischen Symptomen die Fehlerursache zu bestimmen, wird eine Fehler-Symptom-Liste aufgestellt. In ihr sind die Fehler sowie die daraus resultierenden Auswirkungen auf Messsignale aufgelistet. Solche Listen können systematisch mit der Ereignis-Ablauf-Analyse (ETA), failure mode and effect analysis (FMEA) und der Fehlerbaumanalyse (FTA) erstellt werden. Mit diesen Informationen lässt sich schlussendlich eine automatisierte Fehlerdiagnose durchführen.

## 2.2 Modellbildung

In diesem Abschnitt werden zunächst unterschiedliche Ansätze zur Modellierung technischer Systeme beschrieben. Anschließend wird auf die Modellbildung von Koppelgetrieben eingegangen.

### 2.2.1 Modellbildung technischer Systeme

Bei der Modellbildung wird das Verhalten eines Systems oder Prozesses durch mathematische Formulierungen beschrieben. Dabei unterscheidet man zwischen der theoretischen und experimentellen Modellbildung [Ise08].

Wird ein theoretisches Modell aufgestellt, werden zunächst Annahmen über das System getroffen, so dass die theoretische Modellbildung möglich bzw. vereinfacht wird. Daran anschließend wird der Prozess in Prozesselemente unterteilt, sodass deren mathematische Beschreibung mit den folgenden Grundgleichungen beschrieben werden kann [Ise08]:

1. Bilanzgleichungen für Massen, Energie und Impuls
2. Konstitutive Gleichungen (Physikalisch-chemische Zustandsgleichungen)
3. Phänomenologische Gleichungen (für irreversible Vorgänge)
4. Entropiebilanzgleichungen
5. Schaltungsgleichungen (Verschaltung von Prozesselementen)

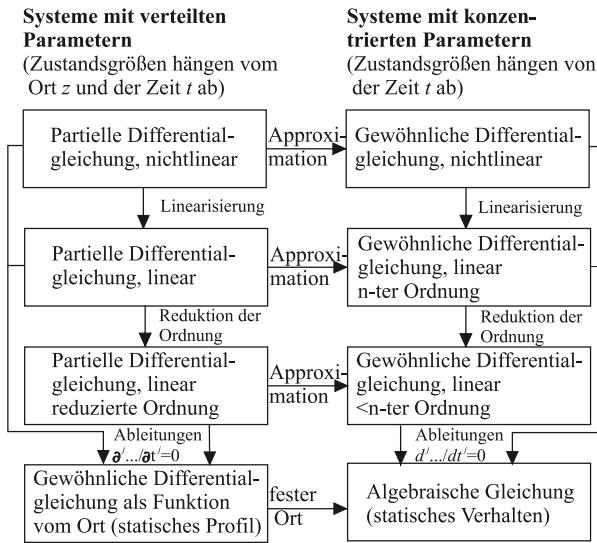
Teilprozesse ergeben sich durch das Verschalten von Prozesselementen, die wiederum zum Gesamtprozess zusammengefügt werden [Ise08]. Besitzt ein System verteilte Parameter, führt dies in der Regel auf partielle Differentialgleichungen. Im Gegensatz dazu stehen Systeme mit konzentrierten Parametern, bei denen die Parameter ortsunabhängig sind. Sie werden durch gewöhnliche Differentialgleichungen beschrieben [Ise08].

Besitzt das System eine zu komplizierte mathematische Struktur, lassen sich Vereinfachungen vornehmen. Beispielsweise können Differentialgleichungen linearisiert und Modellordnungen reduziert werden. Um partielle Differentialgleichungen, die oft schwierig zu lösen sind, zu umgehen, können die verteilten Parameter durch Modelle mit konzentrierten Parametern angenähert werden, Abb. 2.3.

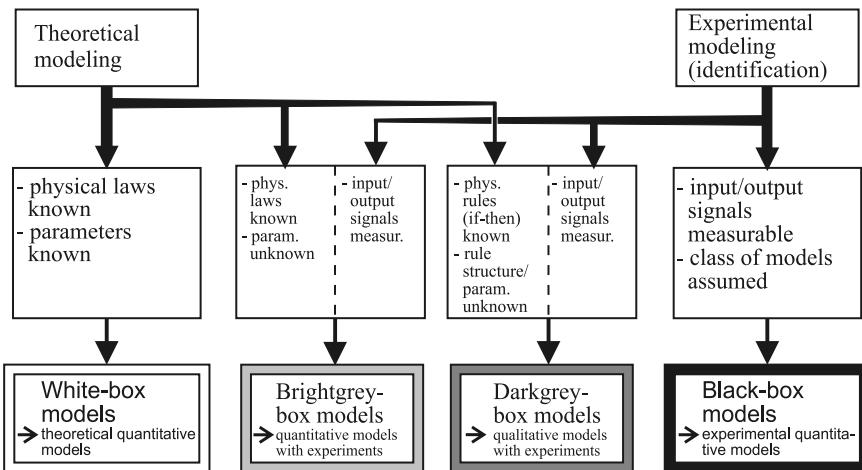
Bei der experimentellen Modellbildung werden Versuche durchgeführt, um das mathematische Modell eines Systems zu erhalten. Das zu untersuchende System wird mit einem Eingangssignal beaufschlagt und die Systemantwort gemessen. Allerdings sind auch hierbei Vorkenntnisse über das System erforderlich, damit geeignete Identifikationsmethoden, die den mathematischen Zusammenhang zwischen Systemeingang und -ausgang herstellen, ausgewählt werden können [Ise08]. Zusätzlich helfen die Kenntnisse, die einer theoretischen Vorüberlegung entspringen können, geeignete Ein- und Ausgänge festzulegen.

Im Gegensatz zum theoretischen Modell enthält das experimentelle Modell nur Zahlenwerte als Parameter. Damit gehen Informationen über den funktionalen Zusammenhang der Parameter, die das theoretische Modell beinhaltet verloren [Ise08]. Jedoch hat das experimentelle Modell auch Vorteile: Oft ist es einfacher, ein experimentelles Modell zu erstellen, und es beschreibt das real vorliegende System genauer, da die Daten zur Erstellung des Modells an diesem System erhoben werden.

Die theoretische und experimentelle Vorgehensweise lassen sich als zwei Extreme in der Modellbildung auffassen. Man bezeichnet sie auch als White- bzw. Black-Box-Modell, da ihre physikalische Struktur



**Abbildung 2.3.: Systeme mit verteilten und konzentrierten Parametern mit möglichen Vereinfachungen aus [Ise08]**



**Abbildung 2.4.: Mischformen und deren Eigenschaften der theoretischen und experimentellen Modellbildung aus [Ise08]**

und Parameter vollständig bekannt bzw. unbekannt sind, Abb. 2.4. Zwischen ihnen gibt es viele Abstufungen, die beide Methoden vereinen. So spricht man beispielsweise vom Brightgrey-Box-Modell, wenn die physikalischen Grundgesetze bekannt sind und die Parameter auf experimentellen Wege bestimmt werden (Parameteridentifikation). Dominiert die experimentelle Modellbildung gegenüber der theoretischen, findet der Begriff Darkgrey-Box-Modell Verwendung.

## 2.2.2 Modellbildung eines Koppelgetriebes

Unter Koppelgetrieben versteht man im Ingenieurwesen ungleichförmig übersetzende Getriebe, die oft auch als Mechanismus bezeichnet werden [Dre89]. DRESIG und VUŁFSZON definieren einen Mechanismus als „ein System von Körpern, das geschaffen wurde, um Bewegungen und Kräfte von einem oder mehreren Körpern in Bewegung und Kräfte anderer Körper zu übertragen.“ [Dre89] Solche Mechanismen finden vor allem dann Anwendung, wenn Maschinen große Kräfte aufbringen und/oder schnelle Bewegungen ausführen sollen. Beispiele finden sich in mechanischen Pressen und Maschinen der Textilindustrie wie Web- und Nähmaschinen. Tritt die Bewegung der Glieder – auch Koppel genannt – eines

Mechanismus nur in einer Ebene auf, wird vom ebenen Mechanismus gesprochen. Über die Modellbildung von Koppelgetrieben geben [Dre89] und die VDI-Richtlinie 2149 einen Überblick.

Nach [VDI11] unterscheidet man bei der Modellbildung von Koppelgetrieben zwischen den Berechnungsmodellen:

- Starrkörpermechanismus,
- Elastischer Mechanismus
- Schwingungsfähiger Mechanismus

Die Wahl des Berechnungsmodells richtet sich abhängig vom betrachteten Problem und damit vom Zweck der Berechnung.

Beim *Starrkörpermechanismus* werden alle Koppelglieder als Starrkörper modelliert, die über spiel- und reibungsfreie Gelenke miteinander verbunden sind. Mit diesem Modell wird zweckmäßigerweise zuerst die Kinematik analysiert, also die Bewegungsabläufe des Getriebes. Dafür sind nur die geometrischen Abmessungen der Koppeln vonnöten. Mit ihnen werden die Geschwindigkeits- und Beschleunigungsverläufe der Glieder bei gegebener Betriebsgeschwindigkeit des Mechanismus. Sind die Massen, Massenträgheitsmomente und Schwerpunkte der Koppeln bekannt, wird die kinetostatische Analyse durchgeführt. Das bedeutet, dass mit Hilfe der Beschleunigungsverläufe die auf Glieder, Gelenke und Gestell wirkende Massenkräfte berechnet werden, die auch als kinetostatische Kräfte bekannt sind [VDI08].

Der Starrkörpermechanismus findet vor allem in der Konstruktion Verwendung. Mit ihm können die Belastungen von Lagern, Koppeln und Gestell berechnet und die Komponenten auf die sich einstellende Lasten angepasst werden. Ein weiterer Anwendungsfall stellt der dynamische Ausgleich eines Mechanismus dar, bei dem störende dynamische Lasten auf Teile des Mechanismus verringert werden. So können beispielsweise durch gezieltes Anbringen von Ausgleichsmassen an Getriebeglieder die dynamische Last auf das Gestell reduziert werden (dynamischer Massenausgleich). Weitere Möglichkeiten sind die Reduktion von Wirkungen auf den Antrieb (Leistungsausgleich) und auf die Gelenke (Gelenkkraftausgleich) [VDI08].

Beachtet werden muss, dass das Modell des Starrkörpermechanismus starre Glieder und spielfreie Gelenke voraussetzt. In [VDI08] ist beschrieben, dass diese Annahmen meist zutreffen, wenn die tiefste Eigenfrequenz des Getriebes größer als das Zehnfache der Antriebsdrehfrequenz ist. Dynamische Kräfte aufgrund von Schwingungen sind dann unwesentlich gegenüber den kinetostatischen Kräften und können vernachlässigt werden.

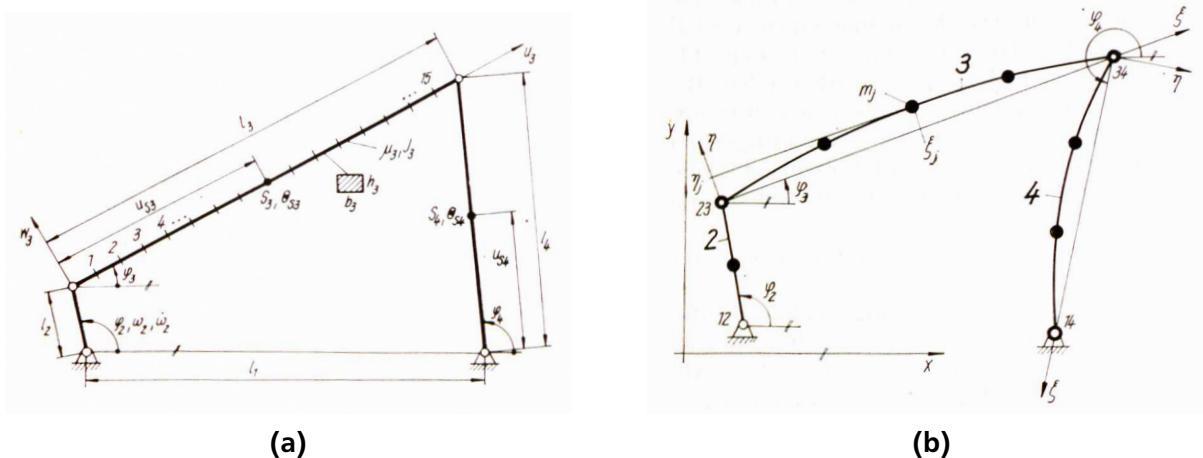
Die nächste Modellierungstiefe wird mit dem Modell des *elastischen Mechanismus* erreicht. Diese Berechnungsmethode ist dadurch gekennzeichnet, dass die Mechanismenglieder elastisch sind und kleine Deformationen aufweisen können. Jedoch können mit dem Modell keine Schwingungsphänomene untersucht werden. Für die Berechnung der Verformungen werden die Massenkräfte aus der kinetostatischen Analyse sowie die technologischen Kräfte verwendet. Dabei wird angenommen, dass sich die Mechanismusverformung nicht auf Betrag und Richtung der Kräfte auswirkt [VDI11]. Der Verformungszustand des Getriebes wird mit elastostatischen Methoden berechnet. Wird die Antriebskoordinate festgehalten, liegt ein statischer Zustand vor, der einem Tragwerk gleicht. Auf den Mechanismus werden die kinetostatischen und technologischen Kräfte aufgeprägt und der Verformungszustand berechnet. Damit ist es möglich, die Abweichungen der Abtriebs- von der Sollbahn zu berechnen. Insbesondere können diese Abweichung als Funktion der Antriebsdrehzahl berechnet werden, da die kinetostatischen Kräfte von der Antriebsgeschwindigkeit abhängig sind [VDI11].

Bei der Modellierung müssen die nachgiebigsten Elemente des Mechanismus als elastische Glieder modelliert werden. Die Erfahrung zeigt, dass auf Zug und Druck belastete Glieder zumeist steifer sind als biege- und torsionsbelastete Elemente [VDI11]. Auch die Nachgiebigkeit von Wälz- und Gleitlagern

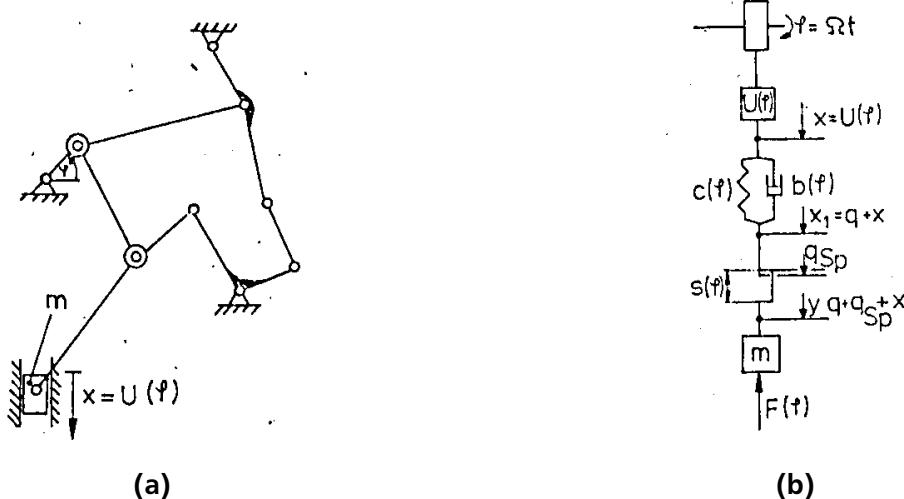
ist nicht zu vernachlässigen. Die VDI 2149 empfiehlt ferner, eine experimentelle Untersuchung des Getriebes, bei der Steifigkeitskennwerte der Glieder untersucht werden und die Gesamtnachgiebigkeit des Mechanismus am Abtrieb erfasst wird.

Modelle des Typs *schwingungsfähiger Mechanismus* finden Verwendung zur Untersuchung von Schwingungsphänomenen an Koppelgetrieben. Das Ziel ist dabei meist, den realen Mechanismus durch das Modell so anzunähern, dass Messdaten mit Hilfe des Modells interpretiert werden können. Insbesondere soll es ermöglichen, problematische Schwingungsursachen zu identifizieren und den Einfluss von diversen Parametern auf die Schwingung zu analysieren [VDI11]. Eine allgemeingültige Modellierung kann nicht mehr angegeben werden. Abhängig vom Zweck des Modells kann auf verschiedene Techniken wie die Mehrkörpersimulation (MKS) und Finite-Elemente-Methode (FEM) zurückgegriffen werden. Mit Hilfe leistungsfähiger Computersysteme können die Finite-Elemente-Methode mit der Mehrkörpersimulation gekoppelt werden. Eine Empfehlung zur Vorgehensweise beim Erstellen eines schwingungsfähigen Modells, ist in der VDI-Richtlinie 3843 beschrieben. Die VDI 2149-2 empfiehlt jedoch, das Schwingungsphänomen zunächst mit einem Minimalmodell zu untersuchen. Im Folgenden werden exemplarisch zwei Minimalmodelle aus [Goe75] und [Spe88] vorgestellt, um eine Vorstellung über mögliche schwingungsfähige Modelle von Mechanismen zu erhalten.

GÖCKE und HORN untersuchen in [Goe75] Methoden, um die Biegeschwingung von Koppelgliedern in der Analyse eines Mechanismus zu berücksichtigen. Als Beispielgetriebe verwenden sie die Kurbelschwinge, die in Abb. 2.5a abgebildet ist. In einer Voruntersuchung wird das mittlere Glied als beidseitig



In [Spe88] stellt SPENSBERGER ein Modell einer mechanischen Presse auf, um die Schwingungen im Presseantrieb zu berechnen. Der Fokus liegt dabei auf der Berücksichtigung von Spiel. Das Getriebeschema ist in Abb. 2.6a zu sehen, während das vom Autor aufgestellte Berechnungsmodell in Abb. 2.6b abgebildet ist. Wegen der hohen Stößelmasse im Abtrieb wird die Massenträgheit des Getriebes vernachlässigt. Das Getriebe wird durch die kinematische Lagefunktion  $U(\varphi)$  des Abtriebs und den von der Getriebestellung abhängigen Modellparametern modelliert. Dabei ist  $c(\varphi)$  die reduzierte Getriebesteifigkeit,  $b(\varphi)$  die reduzierte Dämpfungskonstante und  $s(\varphi)$  das Gesamtspiel. Dieses einfache Modell reicht aus, um die Ursache der beobachteten Schwingungerscheinung der Presse im Verlauf der Lagefunktion, derstellungsabhängigen Steifigkeit und des Spiels zu identifizieren.



**Abbildung 2.6.:** Modellbildung einer mechanischen Presse, a) Getriebeschema aus [Spe88], b) Berechnungsmodell aus [Spe88]

Die in diesem Abschnitt erläuterten Methoden zur Modellbildung von Koppelgetrieben zeigen, dass es viele Möglichkeiten gibt, Mechanismenmodelle aufzustellen. Die verschiedenen Methoden unterscheiden sich aufgrund verschiedener Annahmen hinsichtlich der Modellierungstiefe und Aussagefähigkeit. Deswegen kann keine allgemeine Methode angegeben werden. Das Modell eines Getriebes ist vielmehr anwendungsspezifisch und problemorientiert zu wählen.

### 2.2.3 Allgemeine Modellbildung schwingungsfähiger Systeme

Da das in dieser Arbeit aufzustellende Pressenmodell sowohl die Nachgiebigkeit der Getriebeglieder als auch deren Massenträgheit berücksichtigen soll, ergibt sich aufgrund der modellierten kinetischen (Massenträgheit) und potentiellen Energie (verformte Getriebeglieder) ein schwingungsfähiges Modell der Presse. Im Abschnitt 2.2.2 wurde bereits angerissen, dass sich solche schwingungsfähigen Mechanismen mit einer Vielzahl von Modellen beschreiben lassen. Um bei der Modellbildung systematisch vorgehen zu können, wird in diesem Abschnitt die empfohlene Vorgehensweise der VDI-Richtlinie 3843 *Modellbildung schwingungsfähiger Systeme* [VDI14] wiedergegeben.

Der Prozess der Modellerstellung ist in Abb. 2.7 dargestellt. Er teilt sich auf die Bereiche *Systemdefinition*, *Modellbildung* sowie *Modellkontrolle und -anpassung* auf. Da das Modell nur eine Untermenge aller Eigenschaften eines Systems abbilden kann, muss in der Aufgabenstellung definiert werden, welche Eigenschaften und Phänomene von Interesse sind, die mit Hilfe des Modells untersucht werden sollen. Mit der Modellbildung geht immer einher, dass ein System mit der Systemgrenze gegenüber sei-

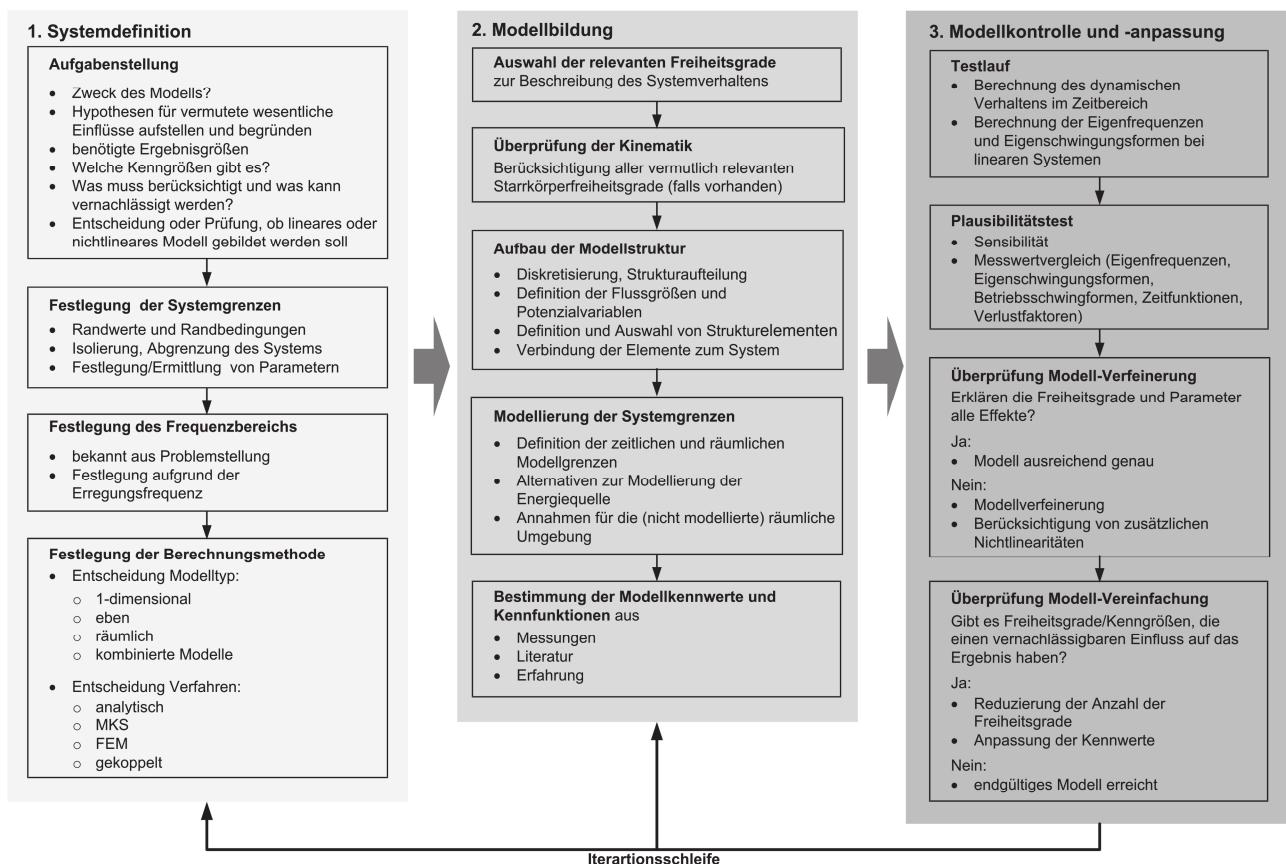


Abbildung 2.7.: Prozess der Modellbildung eines schwingungsfähigen Systems aus [VDI14]

ner Umgebung abgegrenzt wird. Sie ist so zu wählen, dass die Wechselwirkungen zwischen System und Umgebung hinreichend genau erfasst werden. Für die Auswahl der Systemfreiheitsgrade ist es wichtig, den relevanten Frequenzbereich von Systemschwingungen zu kennen. So müssen bei hohen Frequenzen mehr Freiheitsgrade berücksichtigt werden als bei kleinen. Der Frequenzbereich kann bekannt sein aus gemessenen Eigenfrequenzen, aus der Aufgabenstellung oder ergibt sich aus Anregungsspektrien des Systems [VDI14]. Ausgehend von der Gestalt des Systems und der vorher erstellten Systemdefinition wird die Berechnungsmethode ausgewählt. Die Berechnungsmethode unterteilt sich in die Modelldimension und das Verfahren. Analytische Verfahren können dabei oft nur für einfache eindimensionale Modelle verwendet werden. Bei komplizierten Modellen bleiben oft nur numerische Verfahren wie die MKS und FEM.

Die Modellstruktur ergibt sich aus der Aufteilung des Systems in Teilsysteme, die sich durch Strukturelemente, wie beispielsweise Massenpunkte, starre/elastische Körper oder elastische Elemente beschreiben lassen. Der Ingenieur entscheidet dabei, welche Eigenschaften des Teilsystems vernachlässigt bzw. berücksichtigt werden. Übergangsbedingungen zwischen den Teilsystemen setzen die Modelle der Teilsysteme zum Gesamtsystem zusammen. Die benötigten Modellparameter können berechnet, mit Experimenten ermittelt oder durch einen entsprechenden Erfahrungsschatz abgeschätzt werden.

Ist das erste Modell erstellt, empfiehlt sich der Vergleich mit Messgrößen. Mit diesem Vergleich kann entschieden werden, ob das Modell hinreichend genau ist. Ist dies der Fall, kann das Modell weiter vereinfacht werden. Bei linearen Modellen bietet sich beispielsweise eine Modalreduktion an. Wenn das Modell noch keine befriedigenden Ergebnisse liefert, kann es verfeinert werden, indem beispielsweise Modellparameter angepasst oder zuvor vernachlässigte Eigenschaften oder physikalischen Effekte ins Modell einbezogen werden. Es ergibt sich ein iterativer Prozess der Modellkontrolle und -anpassung, der beendet wird, wenn das Modell die geforderte Modellgüte besitzt.

## 2.3 Berechnungsmethoden

Von den in Abschnitt 2.2.3 genannten Berechnungsmethoden zum Erstellen mechanischer Modelle sind die Finite-Elemente-Methode (FEM) und Mehrkörpersysteme (MKS) die am häufigsten verwendeten Methoden [Woe16]. Ein Grund liegt in der stetigen Leistungsverbesserung der im Ingenieurwesen verwendeten Computersysteme, die eine schnelle Berechnung des zu untersuchenden Problems zulassen. Außerdem finden sich viele CAE-Softwarepakete (computer aided engineering), in denen Module zur FEM und MKS integriert sind. Damit stehen dem Konstrukteur Werkzeuge zur Verfügung, die erstellte Konstruktion hinsichtlich gegebener Anforderungen zu untersuchen und die Konstruktion entsprechend der Simulationsergebnisse anzupassen. Im Folgenden wird die MKS und die FEM vorgestellt.

### 2.3.1 Die Mehrkörpersimulation

WOERNLE versteht unter einem Mehrkörpersystem ein mechanisches System, das aus durch Gelenke verbundene Körper besteht und unter Einwirkung von Kräften und Momenten Bewegungen im Raum ausführt [Woe16]. Typische Anwendungen der MKS sind die Berechnung von Bauteilbelastungen und die Bewegungssimulation, um sicherzustellen, dass die Funktion des Systems gewährleistet ist.

Die klassische MKS verwendet starre, massebehaftete Körper, deren Bewegung durch Bindungen beschränkt sind und in denen masselose Verbindungselemente auftreten [Woe16] [Ril17]. Im Gegensatz zur klassischen MKS können heutzutage in Softwaresystemen elastische Körper eingebunden werden, sodass flexible Mehrkörpersysteme entstehen [Ril17]. Abbildung 2.8 zeigt ein allgemeines Mehrkörpersystem mit seinen Elementen. Die masselosen Verbindungselemente umfassen Federn, Dämpfer und

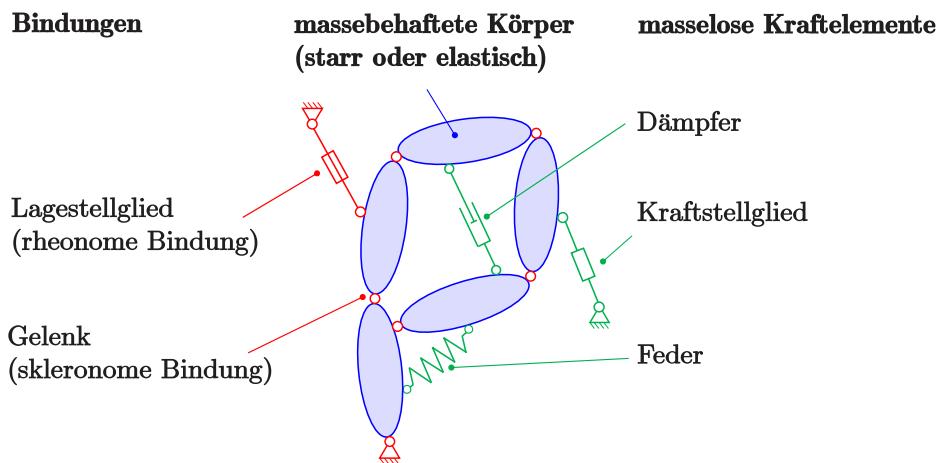


Abbildung 2.8.: Mehrkörpersystem mit möglichen Elementen aus [Woe16]

Kraftstellglieder. Sie prägen Kräfte in Abhängigkeit der Verformungsgrößen und -geschwindigkeit (Feder und Dämpfer) auf oder können durch Aktoren vorgegeben werden (Kraftstellglied). In den Bindungen treten Reaktionskräfte auf, deren Betrag und Richtung durch die Bindung und der Bewegung des Systems vorgegeben ist.

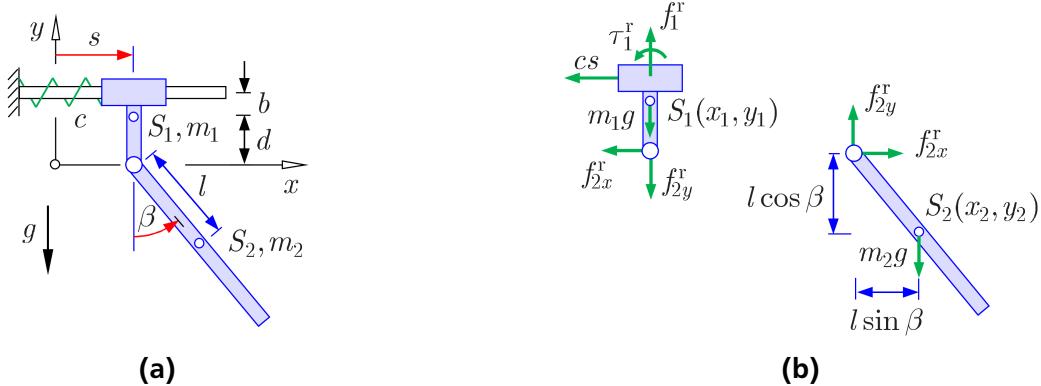
In der MKS liegt der Fokus auf den Bindungen, die bestimmte Freiheitsgrade der Körper unterdrücken. Sie werden nach verschiedenen Eigenschaften klassifiziert. Diese sind u.a.:

- holonom oder nichtholonom
- skleronom oder rheonom

Holone Bindungen liegen vor, wenn die Bindung die geometrische Lage der Körper bzw. deren Gelenke beschränkt. Sind statt der Lage nur die Geschwindigkeiten beschränkt, werden sie nichtholonom

Bindungen genannt [Woe16][Mar13]. Zeitunabhängige Bindungen sind skleronom, während zeitlich veränderliche Bindungen, wie das Lagerglied in Abb. 2.8, rheonom sind. In einem Koppelgetriebe ist in der Regel nur die Lage der Körper eingeschränkt, sodass nur holonome Bindungen auftreten. Ortsfeste Lagerstellen sind skleronom, während eine vorgegebene Antriebsbewegung einer rheonomen Bindung entspricht.

Die mathematische Beschreibung der Mehrkörpersimulation basiert auf der Kinetik. Sie stellt mit Hilfe des Kräfte- und Momentensatzes den Zusammenhang zwischen der Bewegung eines Körpers und der auf den Körper wirkenden Kräfte und Momente her [Mar13] und liefert damit die Bewegungsgleichungen eines Systems. Es existieren verschiedene Verfahren, um an die Bewegungsgleichungen zu gelangen. Bei der analytischen Methoden werden die Bewegungsgleichungen unmittelbar für die verallgemeinerte



**Abbildung 2.9.: Analytische und synthetische Mehrkörpermethoden, a) Prinzipskizze des Systems mit Minimalkoordinaten für die analytische Methode aus [Woe16], b) Notwendiger Freischnitt aller Körper für die synthetische Methode unter Beachtung der Schnittkräfte aus [Woe16]**

ten Koordinaten aufgestellt. Verallgemeinerte, generalisierte Koordinaten oder auch Minimalkoordinaten sind diejenigen Koordinaten eines Systems, die voneinander unabhängig sind. Dementsprechend besitzt ein mechanisches System mit  $n$  Freiheitsgraden  $n$  generalisierte Koordinaten. Die LAGRANGE-Gleichung zweiter Art stellt eine solche analytische Methode dar. Bei ihr werden zunächst die Minimalkoordinaten festgelegt. Abb. 2.9a zeigt ein Beispiel eines Mehrkörpersystems. Die Minimalkoordinaten, die nie eindeutig sind, können hier mit  $s$  und  $\beta$  angegeben werden. Anschließend wird die kinetische und potentielle Energie  $T$  und  $U$  des Systems basierend auf den verallgemeinerten Koordinaten  $q_i$  aufgestellt. Mit den LAGRANGE-Gleichungen zweiter Art [Mar13],

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_{nk,i} \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.1)$$

ergeben sich unmittelbar die Bewegungsgleichungen der Form

$$M(\boldsymbol{q})\ddot{\boldsymbol{q}} + \boldsymbol{f}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}, \boldsymbol{f}_E, t) = 0 \quad (2.2)$$

die als Freiheitsgrade die Minimalkoordinaten besitzen [Pie14].  $M$  ist die von der Lage abhängige Massenmatrix,  $\boldsymbol{f}$  ist ein nichtlinearer Vektor, der die gyrokopischen, dissipativen, konservativen und von außen aufgebrachten Erregerkräfte enthält [Pie14]. Die rechte Seite von Gleichung 2.1 setzt sich aus den nichtkonservativen Kräften zusammen. Das sind insbesondere die Erregerkräfte  $\boldsymbol{f}_E$  und dissipative Kräfte der Dämpfer.  $Q_{nk}$  berechnet sich nach

$$Q_{nk} = \sum_j (J_{T,j}^T \boldsymbol{f}_{e,j}) + \sum_k (J_{R,k}^T \boldsymbol{m}_{e,k}). \quad (2.3)$$

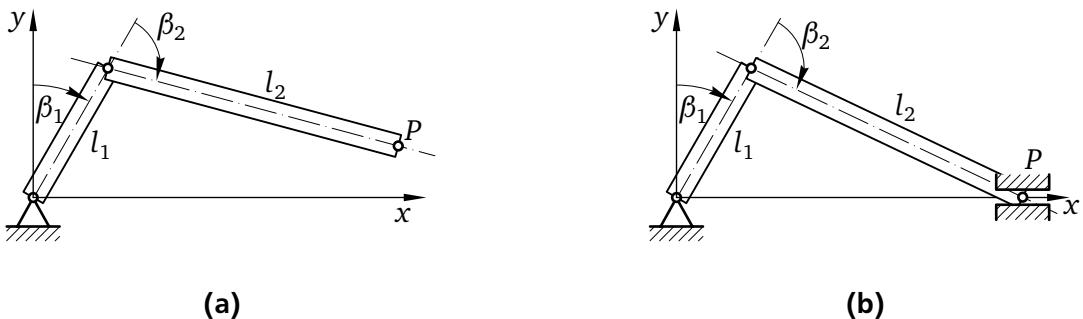
Der erste Term spiegelt die nichtkonservativen Kräfte wider, der zweite die Momente. Die Jacobi-Matrix der Kräfte ergibt sich mit der Translationsgeschwindigkeit  $\boldsymbol{v}$  des Kraftangriffspunktes aus

$$\mathbf{J}_T = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \dot{\mathbf{q}}}, \quad (2.4)$$

während für die Jacobi-Matrix der Momente  $\mathbf{J}_R$  die Winkelgeschwindigkeit verwendet wird.

Für die synthetische Vorgehensweise, auch NEWTON-EULER-Methode genannt, werden die Einzelemente des Systems freigeschnitten [Pie14], Abb. 2.9b. Dafür werden die unbekannten Schnittkräfte eingeführt. Für jeden Körper werden mit Hilfe des Kräfte- und Momentensatzes die Bewegungsgleichungen hergeleitet. Diese enthalten allerdings die eingeführten Schnittkräfte, welche anschließend durch mathematische Umformoperationen aus den Gleichungen eliminiert werden. Auf diese Weise werden bei der synthetischen Methode die Bindungen in die Bewegungsdifferentialgleichungen eingearbeitet. Das Ergebnis entspricht dem der analytischen Methode in Gleichung 2.2.

Die Topologie eines Mehrkörpersystems hat einen Einfluss auf die Struktur der Bewegungsgleichung. Abb. 2.10 zeigt ein offenes sowie ein geschlossenes Mehrkörpersystem. Das offene System besitzt im Allgemeinen eine Ketten- oder Baumstruktur, sodass die Anzahl der Gelenke und Körper gleich sind [Woe16]. Die relativen Gelenkkoordinaten, hier  $\beta_1$  und  $\beta_2$ , sind immer Minimalkoordinaten. Wird die Bewegungsgleichung für ein solches System aufgestellt, ist immer eine gewöhnliche Differentialgleichung das Resultat [Pie14]. Anders verhält es sich bei geschlossenen Mehrkörpersystemen. Sie weisen kinematische Schleifen auf, die die Verwendung von Schleifenschließbedingungen notwendig machen. Das Beispiel der Schubkurbel in Abb. 2.10b, bei der der Punkt  $P$  auf der  $x$ -Achse festgehalten wird,



**Abbildung 2.10.: Vergleich zwischen offenem und geschlossenem Mehrkörpersystem in Anlehnung an [Woe16], a) offen, hier mit Kettenstruktur, b) geschlossen**

besitzt nur noch einen Freiheitsgrad. Die Bewegungsgleichung ergibt sich aus der gewöhnlichen Differentialgleichung des offenen Mehrkörpersystems, das nun um die Schleifenschließbedingung

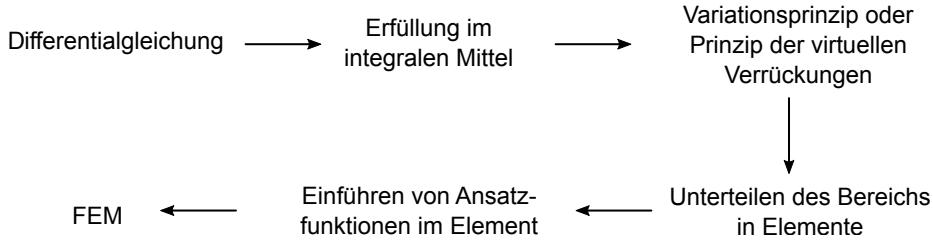
$$l_1 \cos(\beta_1) + l_2 \cos(\beta_2) = 0 \quad (2.5)$$

erweitert wird. Es entsteht ein differential-algebraisches Gleichungssystem (auch DAE für Differential-Algebraic-Equation), da nun eine Differentialgleichung mit einer algebraischen Nebenbedingung gelöst werden muss. Das Gleichungssystem der DAE besitzt keine reguläre Massenmatrix mehr, sodass für die Lösung der Bewegungsgleichung entsprechende numerische Solver verwendet werden müssen [Pie14].

### 2.3.2 Die Finite-Elemente-Methode

Die FEM ist ein in vielen Bereichen des Ingenieurwesens etabliertes Werkzeug und wird dadurch routinemäßig verwendet [Kle15]. Weil mit ihr beliebige Feldprobleme gelöst werden können [Kno17], ergibt

sich ein großes Anwendungsspektrum. Ausgehend von dem zu behandelnden Problem, wird die FEM auf die entsprechende Feldgleichung übertragen. Beispiele für Anwendungen finden sich in der Simulation von Strömungen, Fahrzeugcrashes, Schwingungen, Umformprozessen, Wärmeleitung und Rissbildung in mechanischen Strukturen.



**Abbildung 2.11.: Ablauf der FEM in Anlehnung an [Kno17]**

Das mathematische Vorgehen der FEM ist in Abb. 2.11 dargestellt. Die FEM beginnt mit der zu lösenden DGL, für die mit der FEM eine Approximation gesucht wird. Dafür wird gefordert, dass die DGL im Mittel erfüllt ist [Kno17]. Mögliche Methoden finden sich mit dem Prinzip der virtuellen Verrückung oder dem Variationsprinzip. Die GALERKIN Methode ist ein solches Variationsprinzip, das kurz erläutert werden soll. Das Vorgehen nach GALERKIN sieht vor, die Lösung der Differentialgleichung

$$f(u) = 0 \quad (2.6)$$

durch den Näherungsansatz

$$\bar{u} = \sum_j^n a_{j-1} \cdot g_j \quad (2.7)$$

zu approximieren [Kle15]. Dabei sind  $g_j$  Ansatzfunktionen, die den Lösungssraum aufspannen. Gesucht sind damit die Faktoren  $a_{j-1}$  der Basisfunktionen. Wird die approximierte Lösung in die DGL eingesetzt ergibt sich das Residuum

$$R(\bar{u}) = f(\bar{u}) - f(u) = f(\bar{u}), \quad (2.8)$$

das es zu minimieren gilt. Dies ist der Fall, wenn das Residuum über das gesamte Definitionsbereich  $\Omega$  orthogonal zu den Ansatzfunktionen ist [Eri09]:

$$\int_{\Omega} f \left( \sum_j^n a_{j-1} g_j \right) \cdot g_i \, dB = 0 \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (2.9)$$

Ausdruck 2.9 enthält nun genügend Gleichungen, mit denen die unbekannten Faktoren der Ansatzfunktionen bestimmt werden können. Sie stellen zusammen mit den Ansatzfunktionen die Näherungslösung im Gebiet  $\Omega$  dar. Im Sinne einer guten Approximation wird das Gebiet im Allgemeinen in Teilgebiete, den sogenannten Elementen unterteilt. Auf diese Weise können komplizierte Strukturen aus einfachen Teilgebieten zusammengesetzt werden.

Aus der Sicht des Ingenieurs liegt das Hauptaugenmerk auf der Vernetzung der zu untersuchenden Problemstellungen, sowie der problemorientierten Auswahl von Elementtypen. Bei mechanischen Problemen wie der Elastostatik oder -dynamik legt der Elementtyp die Art der DGL fest, der auf dem jeweiligen Gebiet definiert ist. Daraus resultiert bspw., dass ein Scheibenlement nur Verformungen in der Ebene aufweisen kann. Wird ein flächiges Bauelement auf Biegung belastet, sind entsprechend Platten- oder Schalenelemente zu wählen. Volumenelemente, wie Tetraeder- und Quaderelemente, finden bei

---

dickwandigen Strukturen Anwendung [Kle15]. Ihnen liegt das Elastizitätsgesetz zu Grunde, sodass Spannungen und Verzerrungen in allen drei Raumrichtungen erfasst werden können. Mit der Verwendung von Volumenelementen wird demnach nicht bereits vor der Berechnung entschieden, welche Verformungen das zu untersuchende Bauteil durchführen kann. Ein Nachteil ist jedoch, dass für genaue Rechenergebnisse mehr Elemente verwendet werden müssen. Da bei der Analyse von den Getriebeteilen innerhalb dieser Arbeit eine erhöhte Rechenzeit nicht ins Gewicht fällt, werden Volumenelemente verwendet.

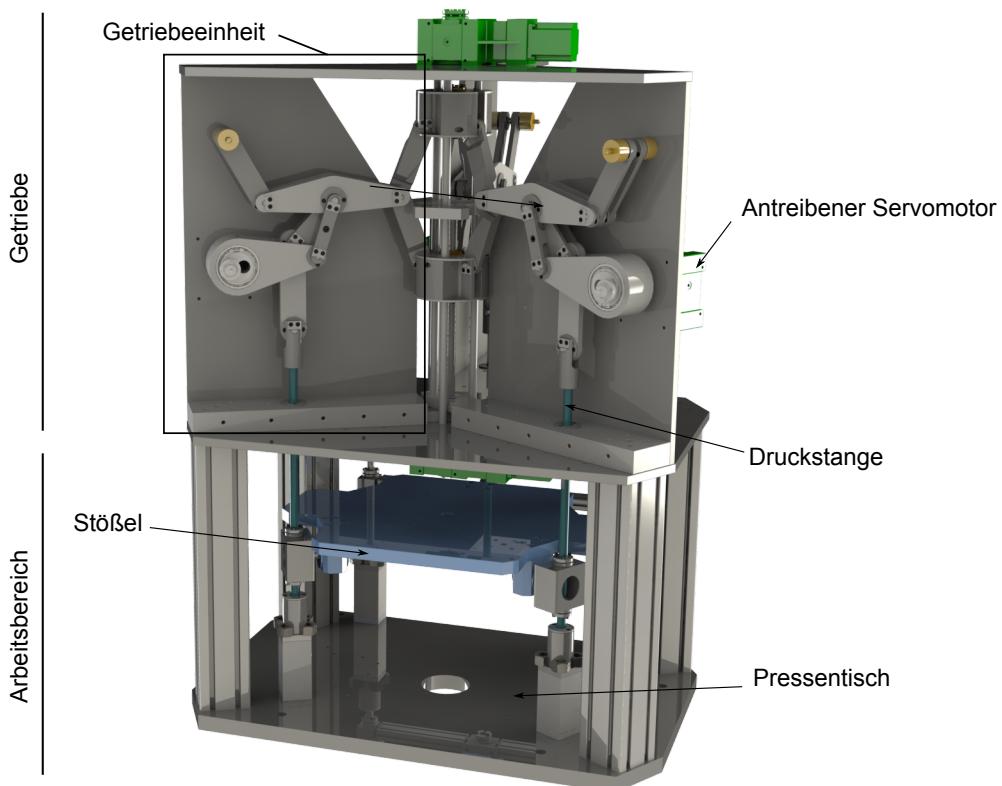
### 3 Modellierung des Koppelgetriebes

Im Folgenden wird die 3D-Servo-Presse, wie sie am PtU der TU Darmstadt entwickelt und konstruiert wurde, vorgestellt. Dabei liegt der Fokus auf einem der drei Koppelgetriebe, mit denen die neuartige Stößelbewegung realisiert wird. Es schließt sich eine Steifigkeitsanalyse der Getriebeglieder an, um im Anschluss daran das Getriebemodell zu erstellen. Orientierung bei der Modellerstellung liefert die im Grundlagenteil zusammengefasste VDI 3843.

#### 3.1 Analyse der 3D-Servo-Presse

Die 3D-Servo-Presse ist in Abb. 3.1 dargestellt. Die Presse gliedert sich grob in drei Teile: Im oberen Bereich befindet sich das Pressengetriebe, darunter ist der Arbeitsbereich mit Stößel (blau) und Pressentisch. Nicht mehr dargestellt ist der dritte Bereich, auf dem der obere Pressenaufbau aufbaut. Dieser beherbergt die Leistungselektronik und die Steuerung der Servomotoren.

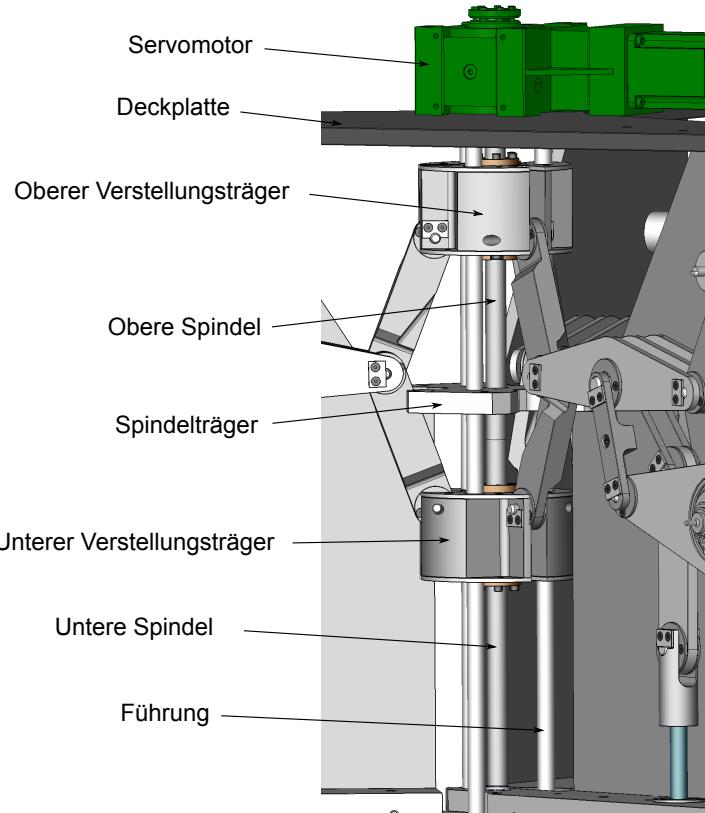
Das Getriebe der 3D-Servo-Presse besteht aus drei Getriebeeinheiten, die um je  $120^\circ$  zueinander ver-



**Abbildung 3.1.:** Oberer Pressenaufbau der 3D-Servo-Presse mit geöffneten Getriebekästen

setzt sind. Jedes dieser Getriebe setzt die Rotationsbewegung eines antreibenden Servomotors in eine vertikale Translation der zum Getriebe gehörenden Druckstange um. Der Stößel ist über Gelenke mit den drei Druckstangen verbunden. Werden alle Druckstangen gleichermaßen verfahren, führt der Stößel eine reine vertikale Translationsbewegung durch. Bei unterschiedlichen Verfahrmustern wird eine Schrägstellung des Stößels um eine horizontale Achse erreicht. Bei entsprechender Ansteuerung der Servomotoren können dadurch gezielte Trajektorien des Stößels und damit auch des Tool Center Points (TCP) erreicht

werden. Ein konkretes Beispiel zur Ausnutzung dieser Freiheitsgrade findet sich beim inkrementellen Umformen, das bspw. in [Hes17] verwendet wird.



**Abbildung 3.2.: Verstelleinheit im Detail mit Bezeichnungen**

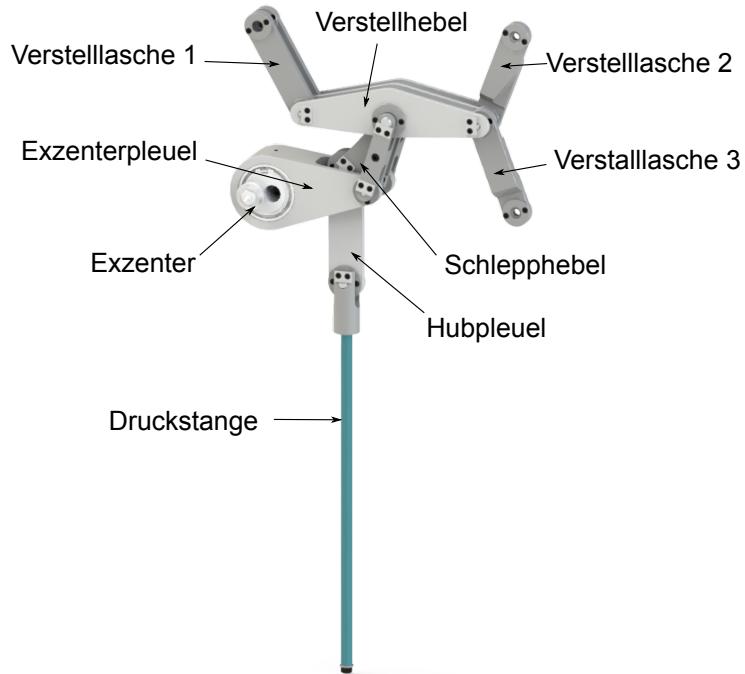
Alle drei Koppelgetriebe sind mit einer Verstelleinheit verbunden, die sich im Zentrum des Getriebebereichs befindet. Diese Verstelleinheit besteht im Wesentlichen aus drei Führungsstangen sowie zwei Spindeln, die übereinander angeordnet sind, Abb. 3.2. Mit Hilfe der Spindeln wird die Lage von zwei Punkten für jedes Getriebe variiert, sodass der obere und untere Totpunkt der Druckstangenbewegung eingestellt werden kann. Da alle drei Getriebe mit denselben Verstellungsträgern verbunden sind, werden die Totpunkte für alle Getriebeeinheiten gleichermaßen verstellt.

### 3.1.1 Aufbau des Koppelgetriebe

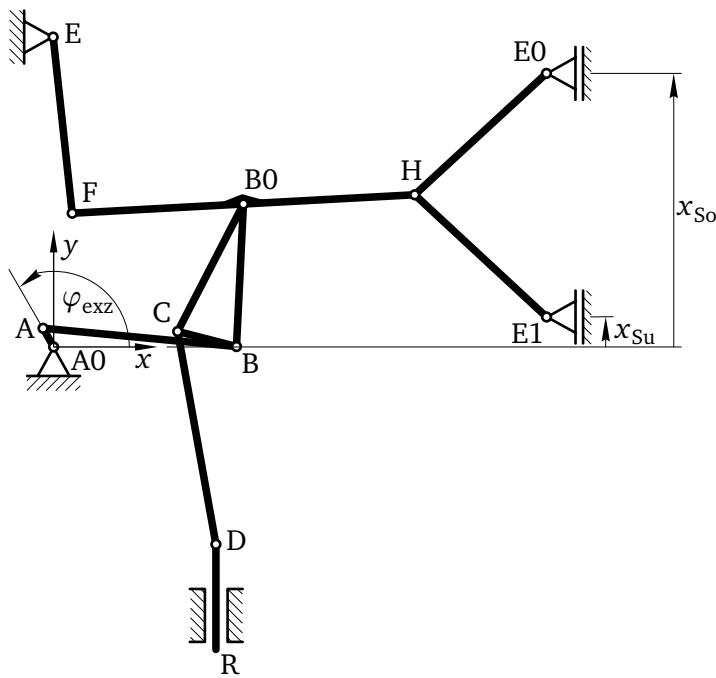
Eines der drei Koppelgetriebe ist in Abb. 3.3 dargestellt. Die Abbildung beinhaltet alle Teile, die im Rahmen dieser Arbeit dem Koppelgetriebe zugeordnet sind. Das bedeutet insbesondere, dass die Verstelleinheit mit ihren Spindeln nicht zum Getriebe gehört. Aus der Abbildung geht die Benennung der verschiedenen Getriebeglieder hervor. Ebenso ist der konstruktionsbedingte dreidimensionale Aufbau des Mechanismus erkenntlich, bei dem einige Bauteile wie bspw. der Verstellhebel mehrmals parallel verbaut ist.

Für die systematische Beschreibung des Getriebes werden die Gelenke des Systems mit Buchstaben versehen. Abb. 3.4 zeigt eine zweidimensionale Prinzipskizze des Getriebes mit den Gelenkbezeichnungen. Die Gelenkpunkte A0 und E sind Fixpunkte. Die Lage der Punkte E0 und E1 wird durch die vertikalen Spindeln in der 3D-Servo-Presse bestimmt. Die Koordinaten aller weiteren Getriebepunkte berechnen sich in Abhängigkeit der genannten Gelenkpositionen.

Die gelenkige Verbindung der Getriebeglieder wird mit Hilfe von Rillenkugellagern erreicht. Die prinzipielle Konstruktion der Verbindung am Beispiel des Gelenks zwischen Druckstange und Hubpleuel ist

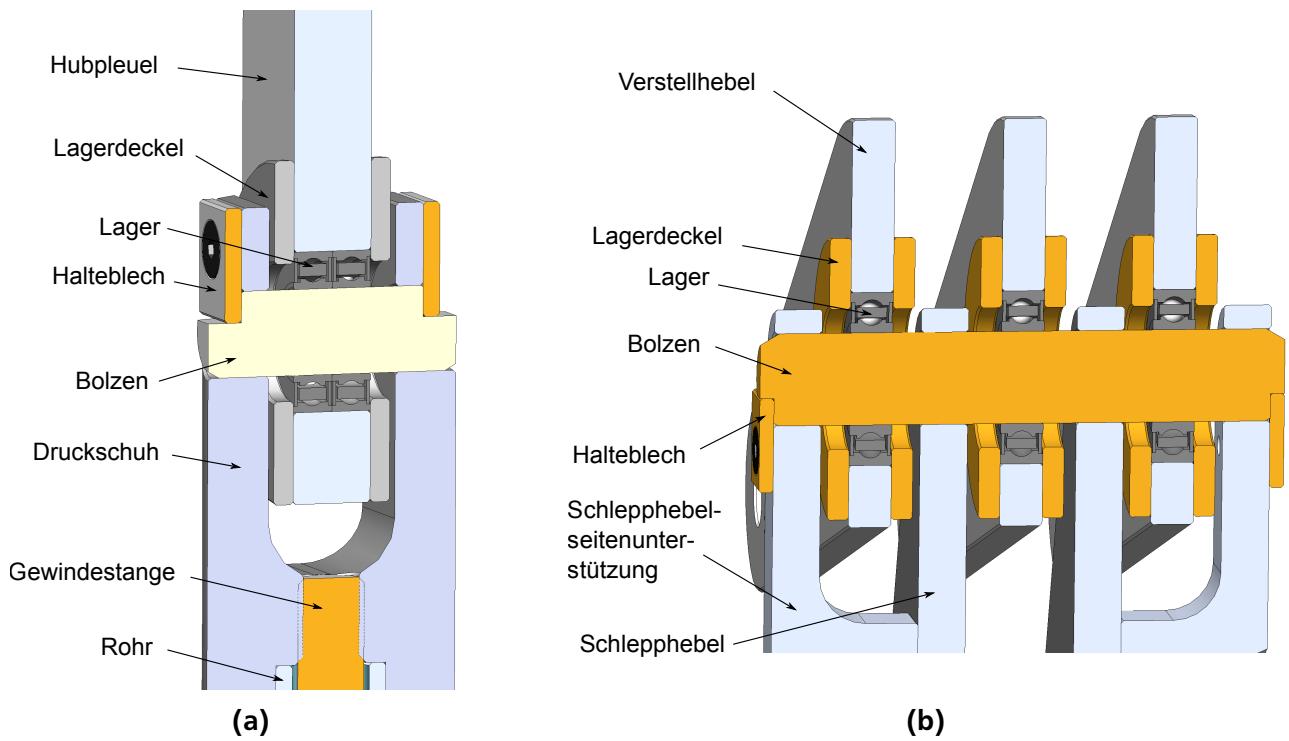


**Abbildung 3.3.:** Koppelgetriebe mit Bezeichnung der Getriebeelemente



**Abbildung 3.4.:** Prinzipskizze des Getriebes mit Gelenkbezeichnungen und Laufgraden

in Abb. 3.5a zu sehen. Der Hubpleuel nimmt durch die Bohrung zwei Rillenkugellager auf, die durch jeweils einen Deckel gegen das Herausfallen aus dem Pleuel gesichert werden. In die Lagerinnenbohrung wird ein Bolzen eingeführt, der sich am Druckschuh abstützt. Das Verdrehen und das axiale Verschieben des Bolzens wird durch den beidseitigen D-Cut verhindert, an dem ein Halteblech eingreift. Dieses Konstruktionsprinzip wurde für alle Getriebegelenke gewählt. Sie unterscheiden sich im Detail wie z. B. in der Lageranzahl, wenn mehrere Getriebeglieder parallel verbaut sind, siehe Abb. 3.5b. Tabelle 3.1 listet für alle Gelenke die Anzahl parallel eingesetzter Lager auf. Dabei wird zudem aufgelistet, welche Getriebeglieder mit den Lagern verbunden werden, da im Gelenk H zwei Verstelllaschen mit unterschiedlichen



**Abbildung 3.5.: Exemplarische Konstruktion der Gelenke, a) Gelenk D, b) Gelenk B0**

Funktionen mit den Verstellhebeln verbunden sind. Dementsprechend werden die Bezeichnungen H1 und H2 eingeführt, die beide für das Gelenk H stehen.

Mit Ausnahme der Druckstange sind die Getriebeglieder aus der Aluminiumlegierung EN-AW 5754 gefertigt. Eine Aufschlüsselung über die Anzahl paralleler Elemente, sowie Schwerpunkte, Massen und Massenträgheitsmomente ist der Getriebezeichnung im Anhang A.1 zu entnehmen. Die Druckstange besteht aus einer M12 Gewindestange aus Stahl, die in ein Aluminiumrohr eingelassen ist. Im Druckschuh, der mit dem Hubpleuel verbunden ist, ist die Gewindestange verschraubt. Auf der anderen Seite verspannt eine Mutter das umgebende Aluminiumrohr mit der Gewindestange.

**Tabelle 3.1.: Typ und Anzahl im Getriebe verbauter Rillenkugellager an den jeweiligen Gelenken**

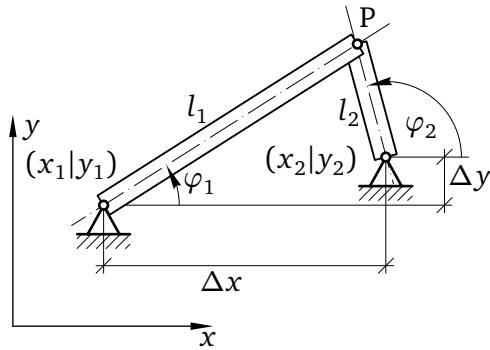
Gelenk	Teil 1	Teil 2	Lagertyp	Anzahl paralleler Lager
A0	Exzenter	Getriebekasten	INA 61906-2Z	2
A	Exzenter	Exzenterpleuel	INA 61914	2
B	Exzenterpleuel	Schlepphebel	INA 61901-2Z	4
B0	Schlepphebel	Verstellhebel	INA 61904-2Z	3
C	Schlepphebel	Hubpleuel	INA 61902-2Z	2
D	Hubpleuel	Druckstange	INA 61902-2Z	2
E	Getriebekasten	Verstelllasche 1	INA 61901-2Z	4
F	Verstelllasche 1	Verstellhebel	INA 61901-2Z	4
H2	Verstellhebel	Verstelllasche 2	INA 61901-2Z	2
H1	Verstellhebel	Verstelllasche 3	INA 61901-2Z	2
E0	Verstelllasche 2	Verstellungsträger oben	INA 61901-2Z	2
E1	Verstelllasche 3	Verstellungsträger unten	INA 61901-2Z	3

### 3.1.2 Kinematik des Koppelgetriebes

Um ein geeignetes Modell für das Koppelgetriebe der 3D-Servo-Presse aufstellen zu können, ist es elementar, die Funktionsweise zu verstehen. Das Koppelgetriebe hat die Aufgabe, die Rotationsbewegung des antreibenden Motors in die vertikale Translation der Druckstange umzusetzen. Die Stellgrößen der Spindel ermöglichen die Totpunktverstellung. Die Analyse der Bewegung, die allein auf der Geometrie beruht, wird Kinematik genannt und soll in diesem Abschnitt für die 3D-Servo-Presse zusammengefasst werden.

Das Koppelgetriebe hat, wie in Abb. 3.4 zu sehen ist, die drei Laufgrade  $\varphi_{ecc}$ ,  $x_{S_0}$  und  $x_{S_u}$ . Der Winkel  $\varphi_{exz}$  beschreibt die Winkellage der Exzenterwelle,  $x_{S_0}$  und  $x_{S_u}$  sind die y-Koordinaten der oberen und unteren Verstelleinheit und damit auch die Koordinaten der Getriebepunkte E0 und E1. Das Koordinatensystem ist im Punkt A0 verankert. Der Abtrieb ist durch die y-Koordinate der Druckstange, also durch den Punkt D vorgegeben.

BEDARFF hat in [Bed06] die Kinematik des Getriebes analysiert. Grundlage ist dabei der Stabzweischlag, der in Abb. 3.6 dargestellt ist. Beim ebenen Zweischlag, auch Dyade genannt [Dre89], werden



**Abbildung 3.6.:** Skizze eines Stabzweischlags zur Berechnung der Koordinaten des Punktes P

die Koordinaten des Gelenkpunktes zwischen den beiden Stäben gesucht. Als Eingang dienen die Koordinaten der vorgegebenen Gelenke. Am Beispiel wird ersichtlich, dass durch Schließen des Stabzweischlags ein Dreieck entsteht, an dem die Beziehungen

$$l_1 \cos \varphi_1 - l_2 \cos \varphi_2 = \Delta x \quad (3.1)$$

$$l_1 \sin \varphi_1 - l_2 \sin \varphi_2 = \Delta y \quad (3.2)$$

mit  $\Delta x = x_2 - x_1$  und  $\Delta y = y_2 - y_1$  gelten. Längliche Umformoperationen, die in [Dre89] dargelegt werden, führen auf die Lösungen

$$(\sin \varphi_1)_{1,2} = \frac{b_{21} \mp a_{21} \sqrt{a_{21}^2 + b_{21}^2 - 1}}{a_{21}^2 + b_{21}^2}, \quad (3.3)$$

$$(\sin \varphi_2)_{1,2} = \frac{b_{12} \mp a_{12} \sqrt{a_{12}^2 + b_{12}^2 - 1}}{a_{12}^2 + b_{12}^2}. \quad (3.4)$$

Die Konstanten  $a_{ij}$  und  $b_{ij}$  lauten dabei:

$$a_{12} = \frac{-2\Delta x l_2}{\Delta x^2 + \Delta y^2 + l_2^2 - l_1^2} \quad b_{12} = \frac{-2\Delta y l_2}{\Delta x^2 + \Delta y^2 + l_2^2 - l_1^2} \quad (3.5)$$

$$a_{21} = \frac{2\Delta x l_1}{\Delta x^2 + \Delta y^2 + l_1^2 - l_2^2} \quad b_{21} = \frac{2\Delta y l_1}{\Delta x^2 + \Delta y^2 + l_1^2 - l_2^2} \quad (3.6)$$

Anhand der Lösungen für  $\sin \varphi_1$  und  $\sin \varphi_2$  ist ersichtlich, dass die Lösungsmenge von den Eingangskoordinaten und den Stablängen abhängt. So kann es zwei, eine oder keine Lösung für den Stabzweischlag geben. Bei einer Lösung liegt eine gestreckte Lage vor. Können zwei Lösungen berechnet werden, so sind dies die beiden Montagevarianten des Zweischlags. Die gesuchten Koordinaten des Punktes P folgen nun den Gleichungen

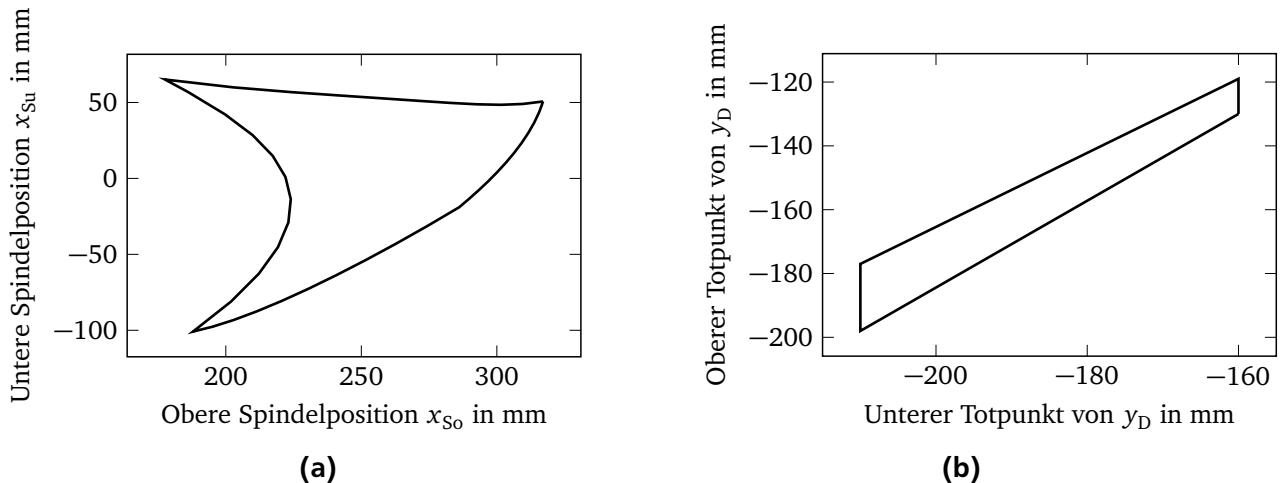
$$x_P = x_1 + l_1 \cos \varphi_1, \quad (3.7)$$

$$y_P = y_1 + l_1 \sin \varphi_1. \quad (3.8)$$

Mit der Dyade können alle Getriebepunkte berechnet werden. Dabei ist es zweckmäßig, die Berechnung am Punkt H zu beginnen. Die beiden Laufgrade  $x_{S0}$  und  $x_{Su}$  legen die  $y$ -Koordinate der Punkte E0 und E1 fest. Damit errechnet sich unmittelbar der Getriebepunkt H. Mit dem bekannten Punkt H werden die Verstelllasche 1 und der Verstellhebel als Zweischlag aufgefasst und der Punkt F berechnet. Die Konstellation des oberen Getriebesystems, bestehend aus dem Verstellhebel und den Verstelllaschen, wird demnach ausschließlich durch die obere und untere Spindelposition bestimmt. Es hat die Aufgabe, die Koordinaten des Getriebepunktes B0 in der Ebene zu variieren, wodurch die Totpunktverstellung erreicht wird.

Für das untere Getriebesystem kann die gleiche Systematik angewendet werden. Über den Exzenterwinkel wird Punkt A berechnet, der mit Punkt B0 die Eingangsgrößen bildet, um die Koordinaten von B zu ermitteln. Mit B0 und B ist die Lage des Schlepphebels und damit auch des Punktes C bekannt. Die  $x$ -Koordinate des Gelenks D ist fix. Mit der Lage von Punkt C wird schlussendlich die Abtriebsgröße  $y_D$  berechnet.

Wie an der Lösung des Stabzweischlags zu sehen ist, können die Spindelpositionen  $x_{S0}$  und  $x_{Su}$  nicht frei gewählt werden. Um Kombinationen von Spindelpositionen, die keine Lösung aufweisen, auszuschließen, wurde am PtU das Betriebsfenster in Abb. 3.7a für die Presse festgelegt. Es sind nur Kombinationen aus  $x_{S0}$  und  $x_{Su}$  möglich, die innerhalb des Kurvenzugs liegen. Über die Kinematik wird das Betriebsfeld von Abb. 3.7a in den Kurvenzug in Abb. 3.7b transformiert, der die möglichen oberen und unteren Totpunkte für den Abtrieb  $y_D$  angibt.



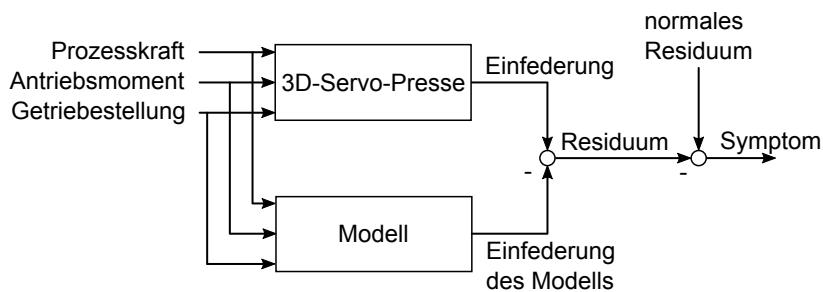
**Abbildung 3.7.: Kinematik an der 3D-Servo-Presse, a) Betriebsfeld für die obere und untere Spindelpositionen  $x_{S0}$  und  $x_{Su}$ , b) einstellbare obere und untere Totpunkte für die  $y$ -Koordinate des Gelenks D**

## 3.2 Systemdefinition

In diesem Abschnitt werden die Modellanforderungen konkretisiert sowie die Modelldefinition nach VDI 3843 durchgeführt. Die Anforderungen an das Modell mit dem Verwendungszweck werden zunächst gesondert dargelegt. Im Anschluss wird die Modelldefinition konkret ausgeführt.

### 3.2.1 Modellanforderungen und -anwendungen

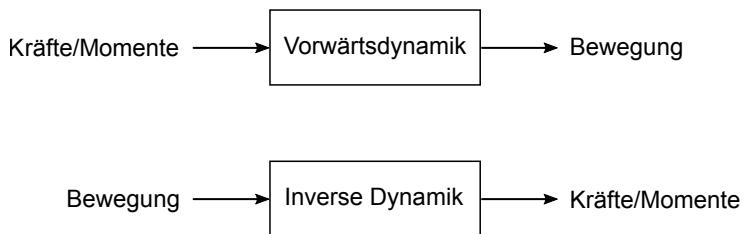
Das Getriebemodell soll der modellbasierten Zustandsüberwachung des Koppelgetriebes dienen. In [Amr16] hat AMRHEIN mittels einer FMEA die Struktursteifigkeit des Koppelgetriebes als einflussreichste Fehlerquelle für Fertigungsungenauigkeiten der Presse detektiert. Dementsprechend soll in dieser Arbeit ein Getriebemodell entwickelt werden, das zur Zustandsüberwachung der Getriebesteifigkeit dient. Als Symptom, mit dem ein Fehler in der Struktursteifigkeit diagnostiziert werden kann, bietet sich ein Residuum der Einfederung bei gegebener Prozesslast an, wie es in [Amr16] mit einem Greyboxmodell umgesetzt wurde. Abbildung 3.8 verdeutlicht dies. Mit der auf die Druckstange wirkende Prozesskraft,



**Abbildung 3.8.:** Maschinenüberwachung mit einem elastostatischen Modell zur Überwachung der Getriebesteifigkeit

der momentanen Getriebestellung und dem Antriebsmoment wird eine Deformation des Getriebes erzielt. Mit dem Abgleich der Deformationen, die in der 3D-Servo-Presse gemessen und mit Hilfe des Getriebemodells berechnet werden, wird ein Residuum bestimmt. Diese Differenz kann zur Bildung eines Symptoms verwendet werden, in dem das Residuum mit Normalwerten verglichen wird. Ist die Abweichung des beobachteten Residiums zum normalen Residuum zu groß, kann ein Fehler in der Struktursteifigkeit diagnostiziert werden.

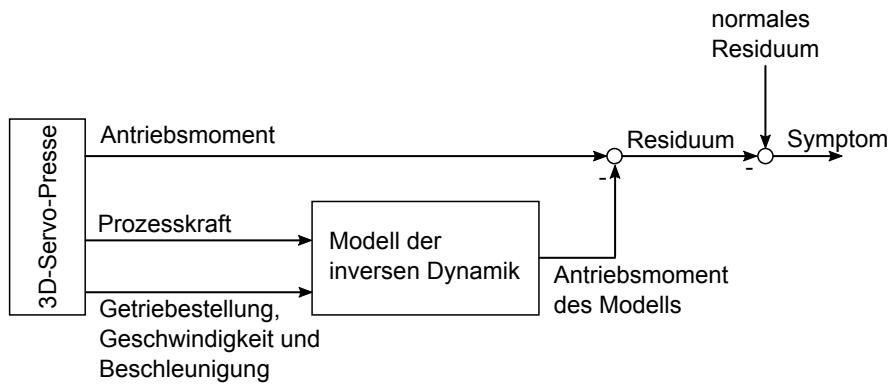
Ein weiterer Ansatz zur Zustandsüberwachung kann mit Hilfe der inversen Dynamik erzielt werden. Beim inversen Problem der Dynamik werden für eine vorgegebene Bewegung eines mechanischen Systems Kräfte und Momente berechnet, die notwendig sind, damit das System diese Bewegung ausführt [Woe16], Abb. 3.9. Aktuell in der 3D-Servo-Presse eingesetzte Dehnungsmessstreifen machen es mög-



**Abbildung 3.9.:** Vorwärtodynamik und inverses Problem der Dynamik im Vergleich

lich, dauerhaft die Prozesskraft zu bestimmen. Die Getriebestellung bzw. die Spindelpositionen und der

Exzenterwinkel sind aufgrund der Regelung dieser Größen bekannt, ebenso wie das Antriebsmoment. Diese können wie in Abb. 3.10 zu sehen ist, als Eingang für das inverse Modell verwendet werden. Auf diese Weise wird das Antriebsmoment berechnet, das augenblicklich anliegen muss, um die Bewegung zu erzielen. Ein Vergleich zwischen gemessenem Antriebsmoment und Modell kann genutzt werden, um den Maschinenzustand zu beurteilen. Denkbar wäre es, dass sich verschlechternde Lagerzustände – bspw. verursacht durch Mangelschmierung, Verschleiß oder Schäden durch Überlast – durch erhöhte Reibleistung äußern, die mit Hilfe der inversen Dynamik erkannt werden können.



**Abbildung 3.10.: Maschinenüberwachung mit der inversen Dynamik**

Aus den zwei genannten Ansätzen zur Zustandsüberwachung lässt sich ableiten, dass das Modell in der Lage sein muss, die Elastizität und die Trägheit beim Bewegungsablauf des Getriebes abzubilden.

Aus der Forderung, dass im Modell massebehaftete Elemente sowie Elemente mit elastischem Verhalten auftreten, ergibt sich unmittelbar ein Modell eines schwingungsfähigen Systems. Dieses lässt Schwingungsanalysen zu, die bspw. Erkenntnisse über Eigenformen und Eigenfrequenzen geben können. Des Weiteren können diese Informationen genutzt werden, um die Modellvalidierung durchzuführen. Schwingungsprobleme im Getriebe, wie bspw. selbsterregte Schwingungen, könnten ebenfalls untersucht werden. Da jedoch solche Probleme im Betrieb der 3D-Servo-Presse nicht festgestellt wurden, wird in dieser Arbeit darauf verzichtet.

Ein weiterer Anwendungsfall ergibt sich mit der Regelung der Presse. Neue Regelgesetze können zunächst am Modell erprobt und optimiert werden, bevor sie auf die reale Maschine übertragen werden. Zudem kann das Modell für modellbasierte Regelungen verwendet werden. Ein Beispiel stellt der LUNBERGER-Beobachter dar, mit dessen Hilfe nicht messbare Zustände auf Basis eines Modells geschätzt werden können [Lun13].

### 3.2.2 Modelldefinitionen

Zu Beginn der Modelldefinition werden Annahmen für die Modellbildung getroffen, sodass darauf aufbauend die Modellstruktur samt Rahmenbedingungen präzisiert werden kann.

#### Hypothesen für die Aufstellung des Modells

Für die Herleitung des Modells müssen einige Annahmen getroffen werden, die im Folgenden dargelegt werden. Ziel ist es ein Modell zu erhalten, das bei einfacherem Aufbau und möglichst wenigen Freiheitsgraden wesentliche Effekte abbildet. Der Grundsatz „so einfach wie möglich, so kompliziert wie nötig“ soll gewahrt werden. Dadurch wird eine induktive Vorgehensweise gewählt, bei der das Modell bei Bedarf detaillierter gestaltet wird, wenn sich zeigt, dass wichtige Effekte nicht abgebildet werden [VDI14].

Es wird zunächst angenommen, dass sich beim lastfreien Verfahren des Getriebes die Dynamik des Mechanismus wesentlich durch die Starrkörperdynamik abbilden lässt. Die VDI 2149 [VDI11] legt das

Verhältnis  $a_{max}/g$  der maximalen Beschleunigung der Getriebeglieder zur Gravitationsbeschleunigung als Indikator fest, ob die Nachgiebigkeit des Getriebes einen Einfluss auf die Dynamik hat. Das Verhältnis vergleicht damit die kinetostatischen Kräfte zur Gewichtskraft der Getriebeglieder. In [Dre12] wird für Pressen ein Wertebereich von 0,3 bis 1,2 angegeben. Die kinetostatischen Kräfte liegen damit in der Größenordnung der Gewichtskräfte. Elastische Koppelverformungen aufgrund der Bewegung des Getriebes fallen demnach klein aus. Als Vergleich sei genannt, dass das Verhältnis für Nähmaschinen bei  $a_{max}/g = 50...800$  liegt [Dre12].

Für gewöhnlich ist bei nachgiebigen Mechanismen die Biegenachgiebigkeit der Koppeln zu modellieren, da die Steifigkeit gegenüber Biegung häufig am kleinsten ist. So ist in [Spe88] angegeben, dass die Biegesteifigkeit erfahrungsgemäß um eine Zehnerpotenz kleiner ist als die Zug/Druck-Steifigkeit der Koppeln. Dementsprechend ist es für ein Mechanismusmodell oft ausreichend, nur die Biegesteifigkeit zu modellieren. In dieser Arbeit wird jedoch ein anderer Ansatz gewählt, da für die Nachgiebigkeit der Koppeln, wie oben beschrieben, kein nennenswerter Einfluss auf die Dynamik erwartet wird. Das Modell soll die elastostatische Pressennachgiebigkeit abbilden. Dazu ist es notwendig, die Steifigkeit im Getriebe entsprechend der Bauteilbelastung zu modellieren. So wird bspw. im statischen Fall der Hubpleuel aufgrund der gelenkigen Lagerung an Gelenken C und D rein auf Druck belastet. Dementsprechend wird die Längssteifigkeit im Modell hinterlegt. Tabelle 3.2 gibt an, welche Belastungsarten an den Getriebegliedern auftreten. Mit ihr können entsprechende Koppelmodelle aufgestellt werden. Alle Verformungen werden als klein angenommen, sodass lineare Elastizitätstheorien Verwendung finden.

**Tabelle 3.2.: Belastungsarten der Getriebeglieder**

Koppel	Belastung
Exzenterwelle	Schub, Biegung
Exzenterpleuel	Zug/Druck
Schlepphebel	Scheibenbelastung
Verstellhebel	Biegung, Schub, Zug/Druck
Verstelllasche 1	Zug/Druck
Verstelllasche 2	Zug/Druck
Verstelllasche 3	Zug/Druck
Hubpleuel	Zug/Druck
Druckstange	Biegung, Zug/Druck

Das Koppelgetriebe besitzt wie, in Abb. 3.3 zu sehen ist, mehrere parallel geschaltete Koppeln. Zur Modellvereinfachung wird das Getriebe auf ein ebenes Modell reduziert. Das bedeutet, dass keinerlei Verformungen und Auslenkungen senkrecht zur Papierebene auftreten können. Verformungen außerhalb dieser Ebene treten auf, wenn Imperfektionen wie bspw. Fertigungsungenauigkeiten dazu führen, dass parallele Koppelemente ungleiche Belastungen erfahren. In der Presse sind sie nie auszuschließen. Jedoch ist die Annahme des ebenen Modells gerechtfertigt, da keine gezielten Belastungen in die vernachlässigte Dimension auftreten.

Des Weiteren wird sämtliches Spiel vernachlässigt, das üblicherweise in den Lagern auftritt. Alle Formen von Energiedissipation werden ebenfalls nicht berücksichtigt. Dies schließt insbesondere Lagerreibung, Lagerdämpfung und Struktur- sowie Luftdämpfung ein.

Die komplizierte Kinematik des Koppelgetriebe erfordert ein nichtlineares Modell. Abhängig von der Getriebestellung, die durch die Laufgrade  $\varphi_{ecc}$ ,  $x_{S0}$  und  $x_{Su}$  bestimmt wird, ändert sich die Massenverteilung des Getriebes und damit auch die Träigkeitseigenschaften. Dieser Umstand ist in der Grundgleichung der Mehrkörpersysteme, Gleichung 2.2, an der Massenmatrix  $M(\mathbf{q})$  ersichtlich, die explizit von den verallgemeinerten Koordinaten  $\mathbf{q}$  abhängt. Neben der Massenmatrix ändert sich mit der Getriebestellung die

von den Koppeln übertragenen Kräfte. Dies hat Auswirkungen auf die linearelastische Verformung der Glieder und damit auch auf die Steifigkeit der Presse. Für Anwendungen, die eine lineare Beschreibung des Getriebes zulassen, kann die nichtlineare Bewegungsgleichung um einen Arbeitspunkt linearisiert werden. Dazu zählt die Berechnung von Eigenfrequenzen- und formen sowie die elastostatische Getriebeverformung aufgrund einer Prozesskraft. Das Vorgehen zur Linearisierung wird in Abschnitt 3.7.3 dargelegt.

---

### Grenzen des Systems

---

Die Systemgrenze wird unmittelbar um das im Abschnitt 3.1.1 vorgestellte Koppelgetriebe der 3D-Servo-Presse gezogen. Dabei werden insbesondere die Getriebepunkte E und A0 als Fixpunkte betrachtet. Gleichermaßen gilt für die  $x$ -Koordinaten des Schubgelenks und der Getriebepunkte E0 und E1, siehe Abb. 3.4. Damit wird der Getriebekasten sowie die Verstelleinheit der Totpunkte als ideal starr betrachtet, die eine fixe Position im globalen Koordinatensystem aufweisen. Dadurch wird die Dynamik des Gestells bzw. des restlichen Pressenaufbaus vernachlässigt. Des Weiteren wird davon ausgegangen, dass die elastische Verformung der Exzenterwelle vernachlässigbar ist. Die Koordinaten des Punktes A berechnen sich über kinematische Beziehungen am Exzenter.

---

### Frequenzbereich

---

Für dynamische Analysen muss der interessierende Frequenzbereich bekannt sein, damit das Modell den Bereich abbilden kann. Je größer der relevante Frequenzbereich ist, desto mehr Freiheitsgrade muss das Modell besitzen [VDI14]. Das liegt daran, dass mit einer größer werdenden Eigenfrequenz eines mechanischen Systems mehr Schwingungsknoten in der Struktur auftauchen. Damit die Eigenform erfasst wird, ist eine stets höhere Anzahl von Freiheitsgraden vonnöten. Der interessierende Frequenzbereich ergibt sich bei der 3D-Servo-Presse aus der Anregung.

Bei der 3D-Servo-Presse erfolgt die Anregung durch die Antriebe. Eine Antriebsbewegung der Kurzelwelle mit konstanter Drehzahl wird jedoch durch das ungleichförmige Koppelgetriebe in eine Abtriebsbewegung umgesetzt, die andere Frequenzen als die der Antriebsfrequenz beinhaltet. Um die Anregungsfrequenzen abzuschätzen, wird der Abtrieb einer harmonischen Analyse unterzogen. Dazu wird der zeitliche Verlauf der  $y$ -Koordinate des Punktes D –  $y_D(t)$  – für verschiedene Zeitverläufe der Laufgrade berechnet. Mit der diskreten Fourier-Transformation ergeben sich anschließend die Amplituden  $\hat{y}_D$ , die zu den im Signal vorhandenen Frequenzen zugeordnet werden. Mit dieser Methode lassen sich näherungsweise die Koeffizienten der analytischen Fourierreihenentwicklung bestimmen. Die Untersuchungen werden für vier Punkte im Betriebsfeld der Presse durchgeführt. Sie sind in Tabelle 3.3 aufgeführt.

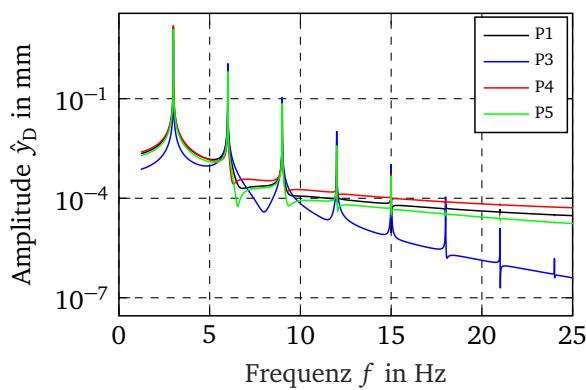
**Tabelle 3.3.: Stellungen des Getriebes für die harmonische Analyse der Abtriebsbewegung  $y_D(t)$**

Bezeichnung	$x_{S_0}$ in mm	$x_{S_u}$ in mm
P1	317	50
P3	177	65
P4	187	-100
P5	250	-10

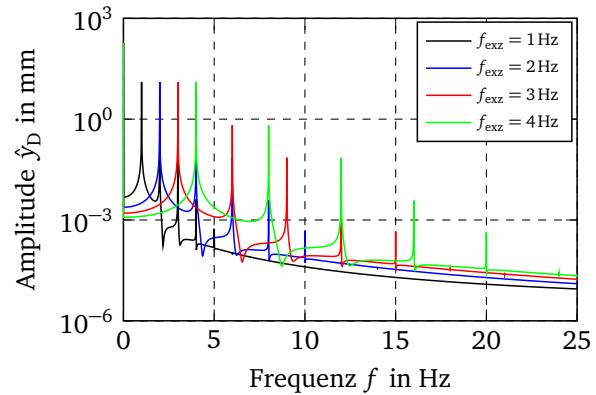
In Abb. 3.11a sind die Spektren von  $y_D(t)$  für Umläufe des Exzenterwinkels  $\varphi_{exz}(t) = 3 \text{ Hz} \cdot 2\pi t$  zu sehen. Die Spindelpositionen werden konstant auf den jeweiligen Positionen gehalten. Für alle vier Getriebestellungen liegt der größte Anteil bei 3 Hz, was genau der Drehfrequenz entspricht. Diese ist mit 3 Hz

als oberes Maximum der 3D-Servo-Presse gewählt. Es fällt auf, dass die Spektren in allen vier Betriebspunkten höhere Harmonische der Drehfrequenz aufweisen. Sie sind dadurch gekennzeichnet, dass sie ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz sind. [Dre14] Die Amplituden der Harmonischen fallen jedoch schnell ab, weshalb ab über 21 Hz keine wesentliche Anregung auftritt. Wie genau sich die Amplituden der Frequenzen zusammensetzen, hängt von den Spindelpositionen ab.

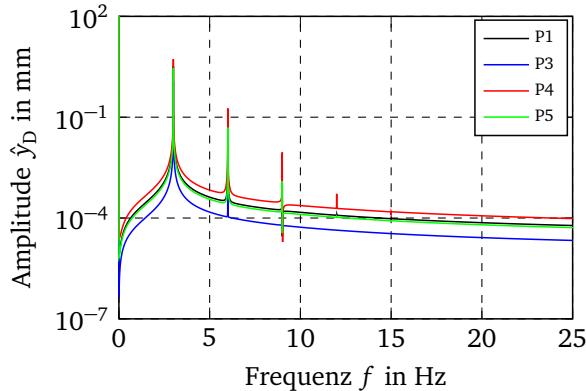
Wird die Drehfrequenz der Exzenterwelle bei sonst gleichen Spindelpositionen variiert, ergeben sich die Spektren, die in Abb. 3.11b dargestellt sind. Die vier Spektren haben den gleichen Verlauf, sind jedoch zueinander gestreckt, da sich die Grundfrequenz ändert. Die Amplitude ist für alle Grundfrequenzen gleich. Ähnlich verhält es sich mit den höheren Harmonischen: Alle  $n$ -ten Harmonischen haben dieselbe Amplitude. Daraus lässt sich ableiten, dass unabhängig von der Anregungsfrequenz in etwa bei der hier gezeigten Getriebestellung P5 ab der vierten Harmonischen (hier bei 4 Hz (schwarz), 8 Hz (blau), 12 Hz (schwarz) bzw. 16 Hz (grün)) keine nennenswerte Anregung auftritt.



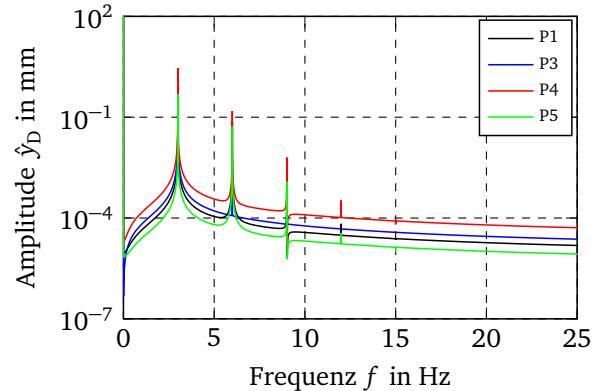
(a) Variation der Spindelpositionen bei umlaufender Exzenterwelle



(b) Unterschiedliche Drehfrequenzen der Exzenterwelle im Punkt P5



(c) Anregung über  $x_{So}$  bei  $\varphi_{exz} = 0^\circ$



(d) Anregung über  $x_{Su}$  bei  $\varphi_{exz} = 0^\circ$

**Abbildung 3.11.:** Fourierspektren der Abtriebsbewegung  $y_D(t)$  bei verschiedenen Anregungen und Getriebestellungen

Um den Einfluss der Spindelpositionen auf die Anregung zu untersuchen, werden in Abb. 3.11c und 3.11d die Spektren beim sinusförmigen Verfahren der Spindeln untersucht. Die zu verfahrende Koordinate wird gemäß

$$x_{Si} = x_{Si0} + 5 \text{ mm} \cdot \cos(3 \text{ Hz} \cdot 2\pi t) \quad (3.9)$$

mit einer Oszillation um die in Tabelle 3.3 Ruheposition  $x_{S,i0}$  belegt. Die jeweils andere Spindelposition wird gemäß Tabelle 3.3 konstant gehalten, ebenso wie der Exzenterwinkel bei  $\varphi_{exz} = 0^\circ$ . Ob die

große Frequenz von 3 Hz bei 5 mm mit der 3D-Servo-Presse erreicht wird, ist fraglich. Jedoch wird auf diese Weise eine konservative Abschätzung erhalten. Alle Spektren besitzen einen ähnlichen Verlauf. Wie schon in Abb. 3.11a ist die Amplitude abhängig von der gewählten Getriebestellung. Anders als bei der Anregung über die Exzenterwelle können für alle gezeigten Spektren in Abb. 3.11c und 3.11d die Anregungen bereits nach der vierten Harmonischen der Grundfrequenz vernachlässigt werden, da ihre Amplituden unbedeutend klein sind gegenüber der Grundfrequenz.

Die harmonische Analyse der Abtriebsbewegung des Koppelgetriebes zeigt, dass beim Betrieb der Presse neben der Drehfrequenz der Antriebe auch höhere Harmonische angeregt werden. Die Amplituden fallen jedoch mit steigender Ordnung ab, sodass nur etwa die fünf kleinsten Harmonischen der Grundfrequenz betrachtet werden müssen. Daraus leitet sich ab, dass das Modell der 3D-Servo-Presse Frequenzen bis ca. 20 Hz abdecken muss, wenn mit diesem Schwingungsphänomene am Getriebe untersucht werden.

### Berechnungsmethode

Die komplizierte Kinematik macht es notwendig, ein Mehrkörpersystem des Getriebes aufzustellen, sodass das Verhalten der Gelenke im Modell abgebildet werden kann. Für die Zustandsüberwachung ist es zweckmäßig, ein Modell zu verwenden, das schnelle Berechnungen zulässt. So sind gekoppelte Finite-Elemente- und Mehrkörpermodelle mit mehreren Stunden Berechnungszeit für die Zustandsüberwachung nicht zweckmäßig, da kein permanenter Abgleich zwischen Modell und Messdaten durchgeführt werden kann. Ein Problem an der Presse könnte so unter Umständen zu spät festgestellt werden. Auf Grund dessen wird ein Mehrkörpermodell erstellt, das aus einfachen Elementen wie Massen und Federn besteht. Die Zahl der Freiheitsgrade bleibt möglichst klein, sodass geringe Berechnungszeiten erreicht werden können. Das MKS wird mit der LAGRANGE Gleichung 2. Art hergeleitet, wodurch die automatisierte Herleitung der DGL in MATLAB ermöglicht wird.

## 3.3 Steifigkeiten im Getriebelastpfad

Um das elastische Verhalten des Koppelgetriebes in einem Modell widerspiegeln zu können, müssen die im Lastpfad vorhandenen Steifigkeiten der Bauelemente bekannt sein. Im Folgenden werden daher die Koppeln einer FE-Berechnung unterzogen und die Lagersteifigkeiten analysiert. Dies dient dazu, besonders steife Bauelemente zu identifizieren, die nicht als elastisches Element modelliert werden müssen. Zudem gehen die ermittelten Steifigkeiten als Parameter in das Getriebemodell ein.

### 3.3.1 Ermittlung der Gliedersteifigkeit

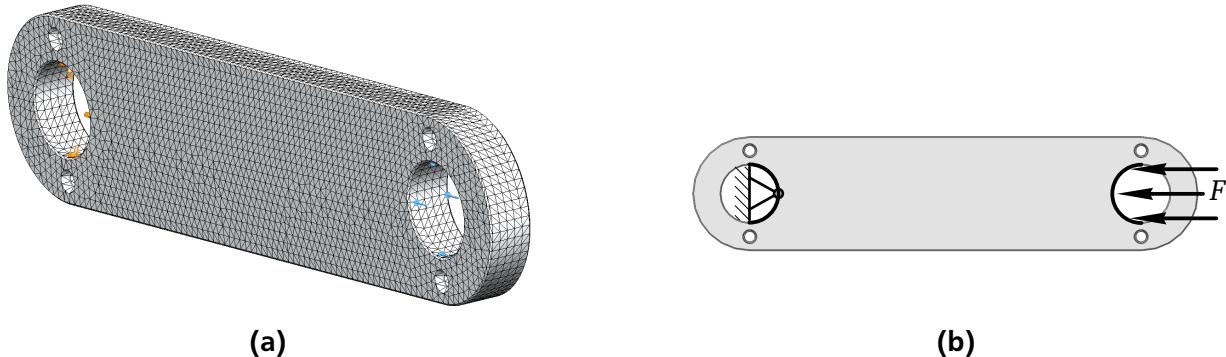
Die Steifigkeit der Getriebekoppeln können experimentell, numerisch und für einfache Geometrien auch analytisch berechnet werden. Die experimentelle Untersuchung liefert die genauesten Ergebnisse, jedoch ist der Aufwand dafür sehr groß und steht in keinem Verhältnis zum Nutzen. Daher werden die Steifigkeiten über FE-Berechnungen mit Hilfe der CAE-Software SOLIDWORKS gewonnen, die im Folgenden dargelegt werden.

Der Kerngedanke der Steifigkeitsberechnung für Zug-Druck belastete Koppeln ist folgender: An einem Gelenk der Koppel werden Randbedingungen implementiert, die die Fixierung des Bauteils darstellen. Am anderen Gelenk wird eine Druckkraft  $F$  aufgebracht. Mittels FE-Berechnungen wird die Verschiebung  $x$  des belasteten Gelenks berechnet, welche die axiale Stauchung darstellt. Über die Beziehung

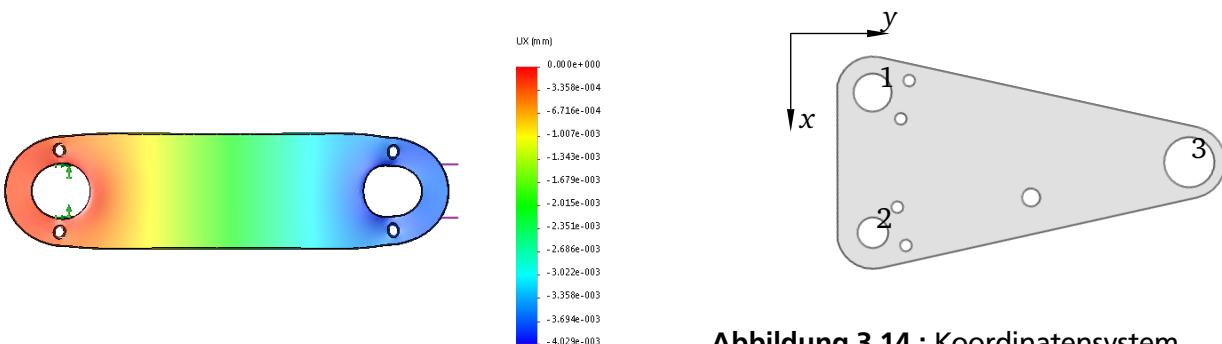
$$k = \frac{F}{x} \quad (3.10)$$

wird unmittelbar die axiale Dehnsteifigkeit der Zug-Druck-Koppeln berechnet.

Die FE-Berechnung basiert auf der linearen Elastizitätstheorie. Um alle potentiell auftretenden Verformungen wie bspw. Schub- und Biegeverformungen abilden zu können, werden die Getriebeglieder mit Volumenelementen vernetzt. Dafür werden Tetraederelemente mit jeweils 4 Knoten verwendet, siehe Abb. 3.12a. Um sicherzustellen, dass die Lösung der FE-Berechnungen unabhängig von der Vernetzung sind, werden mindestens zwei Netze mit unterschiedlichen Elementgrößen verwendet. Die Plausibilität wird – wenn möglich – zusätzlich mit analytischen Steifigkeitsberechnungen sichergestellt.



**Abbildung 3.12.:** FEM an der Verstelllasche 1, a) Mit Tetraederelementen vernetzte Verstelllasche, b) Verstelllasche mit Randbedingung und Belastung  $F$  an den Lagersitzen



**Abbildung 3.13.:** Verschiebungen in  $x$ -Richtung der Verstelllasche unter Last

**Abbildung 3.14.:** Koordinatensystem und Gelenknummierung am Schlepphebel für die Steifigkeitsberechnung

Als Randbedingung wird die Verschiebung der Knoten am unbelasteten Lagersitz unterbunden, Abb. 3.12b. Die Druckkraft wird für alle Berechnungen willkürlich<sup>1</sup> mit  $F = 1000\text{ N}$  angenommen und gleichmäßig auf die Fläche des belasteten Lagersitzes verteilt. Aus dem Ergebnis der Berechnung, Abb. 3.13, wird ersichtlich, dass der belastete Lagersitz keine runde Geometrie besitzt, aus dem die Verschiebung des Sitzes unmittelbar abgelesen werden kann. Als Vereinfachung wird deshalb der Mittelwert der Verschiebungen in  $x$ -Richtung aller am Lagersitz liegenden Knoten berechnet. Das Verhältnis der Druckkraft und dieses Mittelwertes ergibt schließlich die Steifigkeit der Koppel. Die Ergebnisse aller Koppeln sind in Tabelle 3.4 zusammengefasst. Die Netzunabhängigkeit der Steifigkeit kann aus der relativen Abweichung zwischen den Steifigkeiten für die verschiedenen Netze ermittelt werden. Der Vergleich mit der analytischen Lösung, die nur in einfachen geometrischen Fällen berechnet werden kann, weist auf die Plausibilität der Ergebnisse hin. Die Steifigkeit der Druckstange wird analytisch aus der Parallelschaltung des Aluminiumrohrs und der Gewindestange berechnet. Die Zug-Drucksteifigkeit des Verstellhebels bezieht sich auf die Lagersitze der Gelenke F und H.

<sup>1</sup> Bei der linearen Elastizitätstheorie ist die Verformung proportional zur aufgebrachten Last. Weil die Steifigkeit aus dem Verhältnis zwischen Kraft und Verformung gebildet wird, ist die Steifigkeit unabhängig vom Betrag der Last.

Für den Verstellhebel wird auch die Biegesteifigkeit ermittelt. Diese wird mit der Dreipunktebiegung berechnet, bei der eine Querkraft am Lagersitz des Punktes B0 angreift und die Gelenke F und H gelenkig gelagert sind. Die Verschiebung durch die Querkraft wird auf derselben Weise berechnet wie bei den Zug-Druck-Koppeln. Die Steifigkeit wird über das Verhältnis von Kraft zur Verschiebung des Gelenks B0 berechnet. Sie ist ebenfalls in Tabelle 3.4 aufgeführt.

Der Schlepphebel stellt im Sinne der technischen Mechanik eine Scheibe dar, die eine flächige Geometrie aufweist und mit Kräften belastet wird, die in dieser Ebene wirken [Bec02]. Damit kann a priori keine Verformung in bestimmte Richtungen ausgeschlossen werden und es müssen alle Steifigkeit für die Verschiebungen der drei Lagersitze berechnet werden. Dazu werden gemäß Abb.3.14 die Sitze durchnummeriert und ein Koordinatensystem eingeführt. Nun wird für jeden Lagersitz eine Kraft in jede Koordinatenrichtung aufgebracht, die Verschiebung in die jeweilige Richtung bestimmt und damit die Steifigkeit berechnet. Die Verschiebungen der beiden übrigen Lagersitze wird durch Randbedingungen unterbunden. So berechnet sich die Steifigkeit in Richtung  $x$  des Lagersitzes 1 durch

$$k_{x1} = \frac{\text{Kraft in } x \text{ des Lagersitzes 1}}{\text{Verschiebung des Lagersitzes 1 in } x}. \quad (3.11)$$

Die auf diese Weise ermittelte Schlepphebelsteifigkeit ist in Tabelle 3.4 aufgelistet.

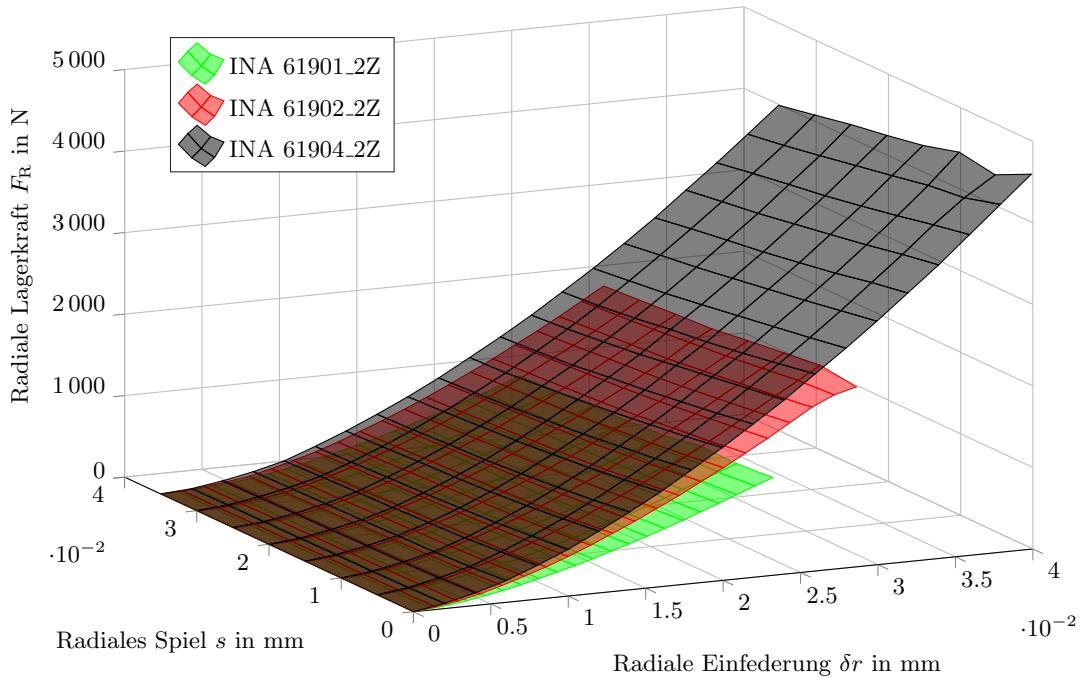
**Tabelle 3.4.: Steifigkeit der Koppeln für jeweils ein Element**

Koppel	Grobes Netz		Feines Netz		rel. Abwei- chung in %	analytische Steifigkeit in N mm <sup>-1</sup>
	Elemente	Steifigkeit in N mm <sup>-1</sup>	Elemente	Steifigkeit in N mm <sup>-1</sup>		
Hubpleuel	9278	2,99E+05	30562	2,98E+05	0,287	2,94E+05
Verstelllasche 1	9546	2,54E+05	55708	2,54E+05	0	2,45E+05
Verstelllasche 2 & 3	9927	5,84E+04	54414	5,82E+04	0	—
Exzenterpleuel	10926	9,98E+05	54518	1,01E-03	0,471	—
Druckstange	—	—	—	—	—	4,46E+04
Verstellhebel Zug/Druck	10129	8,27E+04	58700	8,24E+04	0,395	—
Verstellhebel Biegung	10129	2,75E+04	58700	2,75E+04	0	—
Schlepphebel x1	—	—	10459	3,38E+05	—	—
Schlepphebel y1	—	—	10459	1,82E+05	—	—
Schlepphebel x2	—	—	10459	3,63E+05	—	—
Schlepphebel y2	—	—	10459	1,88E+05	—	—
Schlepphebel x3	—	—	10459	1,92E+04	—	—
Schlepphebel y3	—	—	10459	2,28E+05	—	—

### 3.3.2 Lagersteifigkeit

Die Nachgiebigkeit von Lagern ergibt sich durch die elastische Verformung von Innenring, Außenring und Wälzkörper. Die Steifigkeit eines Lagers hat in der Regel einen progressiven Verlauf, da mit stei-

gender Verformung der Körper die Kontaktfläche zwischen diesen größer wird. Im Allgemeinen ist die Steifigkeit der Lager eine Funktion der Lagerkraft und der Position der Wälzkörper. Im Fall von Nadel- und Zylinderrollenlagern, bei denen eine Linienberührungen zwischen Lagerringen und Wälzkörper auftritt, kann die Steifigkeit mit Näherungsformeln berechnet werden [Sch]. Im Fall von Rillenkugellagern ist die Beschaffung von Kenndaten schwierig. So gibt es keinen Lagerhersteller, der eine Näherungsformel bereitstellt. Zudem gibt die VDI 3843 an, dass Wälzläger nicht mit linearen Federn modelliert werden können. Vielmehr empfiehlt sie, das dynamische Verhalten mit speziellen Lagerberechnungsprogrammen zu modellieren. Eine solche Software stellt das Programm *LAGER* dar, das in [Bre94] um eine Berechnungsvorschrift für Rillenkugellagern, basierend auf der HERTZschen Flächenpressung, erweitert wird. Im Rahmen dieser Arbeit wird auf den Einsatz von Lagerberechnungssoftware verzichtet. Stattdessen werden die in Abb. 3.15 dargestellten Kennlinien verwendet. Diese entstammen der Studienarbeit [Bed06]. Dort wird angegeben, dass es sich um Kennlinien des Lagerherstellers INA handelt.



**Abbildung 3.15.:** Lagerkennlinien aus [Bed06] für die im Getriebe verbauten Lager

Die radiale Einfederung  $\delta r$  ist eine Funktion des radialen Lagerspiels  $s$  des unbelasteten Lagers sowie der radiaalen Lagerkraft  $F_R$ . Da in dieser Arbeit das Lagerspiel vernachlässigt wird, vereinfachen sich die Kennlinien zu den in Abbildung 3.16 schwarz dargestellten Funktionen. Die Lagerkraft ist nur noch eine Funktion der radiaalen Einfederung, sprich der Verschiebung von Lageraußen- und innenring. Für die Einarbeitung der Lagerkennlinien in die LAGRANGE Gleichung 2. Art müssen die Kennlinien in analytischer Form vorliegen, damit die im verformten Lager gespeicherte potentielle Energie unmittelbar von den Zustandsgrößen, also der Einfederung beschrieben werden kann. Um den analytischen Zusammenhang zwischen der Einfederung und der Lagerkraft zu finden, wurden die Kennlinien (in 3.16 schwarz dargestellt) einer Ausgleichsrechnung unterzogen. Damit eine geeignete Ansatzfunktion gefunden werden kann, wird die Näherungsformel der Lagersteifigkeit für Zylinderrollenlager analysiert [Sch]:

$$\delta r = \frac{1}{c} F_R^{0.84} + \frac{s}{2} \quad (3.12)$$

Mit Vernachlässigung des Spiels ( $s = 0$ ) ergibt sich die Funktion

$$F_R = (c \cdot \delta r)^{\frac{1}{0.84}} \approx (c \cdot \delta r)^{1.19}, \quad (3.13)$$

wobei  $c$  eine vom Lager abhängige Konstante darstellt. Der Exponent sowie die Konstante in Gleichung 3.13 werden durch die Parameter  $c_1, c_2$  ersetzt, um die Ansatzfunktion

$$F_R = c_1 \cdot \delta r^{c_2}, \quad (3.14)$$

zu erhalten.

Die Ausgleichsrechnung wird für alle drei Lagertypen mit der Matlabfunktion `lsqcurvefit` durchgeführt. Sie führt eine iterative und dadurch nichtlineare Ausgleichsrechnung durch, bei der mit der Methode der kleinsten Fehlerquadrate optimale Parameter der Ansatzfunktion gefunden werden [Mat17]. Die Ergebnisse für die Parameter sind in Tabelle 3.5 hinterlegt und mit blauen Linien in der linken Spalte der Abb. 3.16 graphisch aufbereitet. Auffällig ist, dass alle Kennlinien durch die analytische Funktion gut wiedergegeben werden können und dass der Exponent für alle Lager 1.5 beträgt.

**Tabelle 3.5.:** Lager mit Parametern aus der Ausgleichsrechnung und konstanten Steifigkeiten

Lager	$c_1$ in $\text{N mm}^{-1.5}$	$c_2$ (ohne Einheit)	$k_{m1}$ in $\text{N mm}^{-1}$	$k_{m2}$ in $\text{N mm}^{-1}$
INA 61901-2Z	344148	1.5	49053	39233
INA 61902-2Z	488434	1.5	78113	62487
INA 61904-2Z	575666	1.5	110065	88089

Die ermittelten nichtlinearen Kennlinien haben die Eigenschaft, dass die Steifigkeit, welche durch Ableiten der Kennlinie berechnet wird, für  $\delta r = 0$  null ist. Dies ist problematisch, wenn das spätere Modell um einen Arbeitspunkt, der durch nicht eingefederte Lager gekennzeichnet ist, linearisiert wird. In diesem Fall betrüge die Lagersteifigkeit null, womit die Lager nicht im Modell berücksichtigt wären. Um dies zu umgehen, muss eine konstante Steifigkeit für linearisierte Modelle vorgegeben werden. Zur Ermittlung der konstanten Lagersteifigkeiten werden zwei Methoden eingesetzt.

Bei der ersten Methode wird das arithmetische Mittel

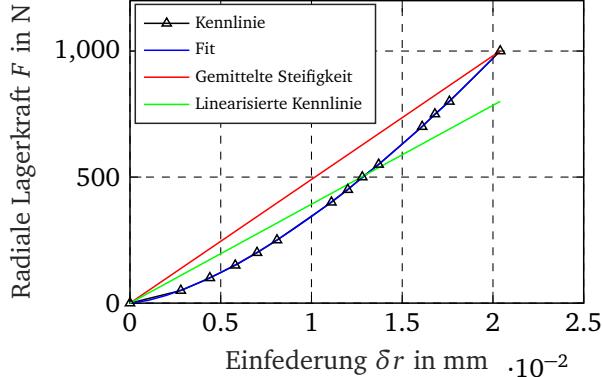
$$k_{m1} = \frac{1}{\bar{r}} \int_0^{\bar{r}} k(\delta r) d\delta r \quad (3.15)$$

der nichtlinearen Steifigkeit  $k(\delta r)$  berechnet. Für die Berechnung des Mittelwertes wird über das vollständige, durch die ursprüngliche Kennlinie definierte Intervall integriert. Mit der gemittelten Steifigkeit (rote Linie), ergeben sich die roten Kennlinien (linke Spalte von Abb. 3.16). Für alle Werte von  $\delta r$  liefern diese zu große Radialkräfte.

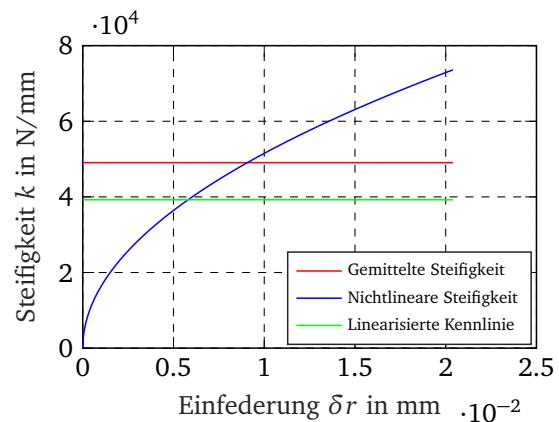
Mit der zweiten Methode wird ein Mittel für die Kennlinie gefunden. Der Ansatz ist, dass die im Lager gespeicherte potentielle Energie für die nichtlineare und lineare Kennlinie bei vollständiger Einfederung gleich sind. Mathematisch ausgedrückt bedeutet dies:

$$\int_0^{\bar{r}} F_R d\delta r = \int_0^{\bar{r}} k_{m2} \cdot \delta r d\delta r \quad (3.16)$$

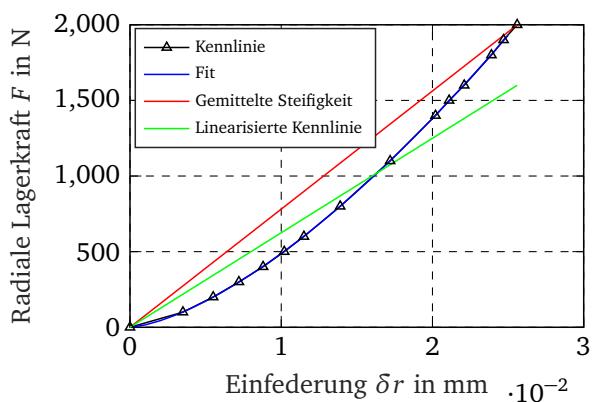
Die mit dieser Methode ermittelten konstanten Lagersteifigkeiten sind grün dargestellt. Für die Kennlinie gibt es für kleine Einfederungen einen Bereich, in dem die Lagerkraft überschätzt wird. Nach dem Schnittpunkt zwischen der grünen und blauen Kurve wird die Lagerkraft unterschätzt. Da die nichtlinearen Kennlinien mit der zweiten Methode besser approximiert werden, wird dieses Vorgehen eingesetzt, wenn das Getriebemodell linearisiert wird.



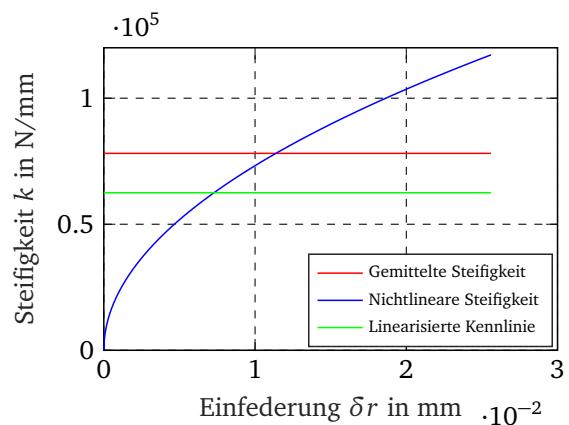
(a) Kennlinien für INA 61901-2Z



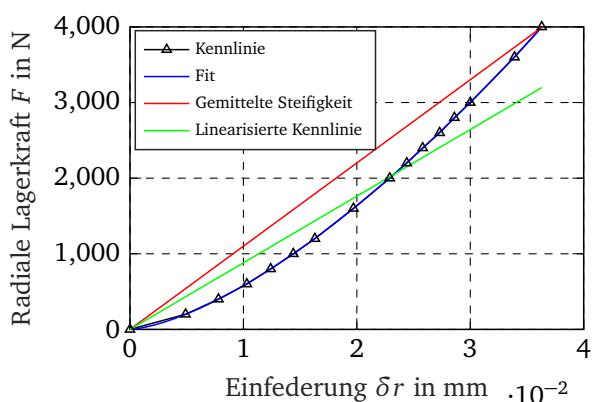
(b) Lagersteifigkeiten für INA 61901-2Z



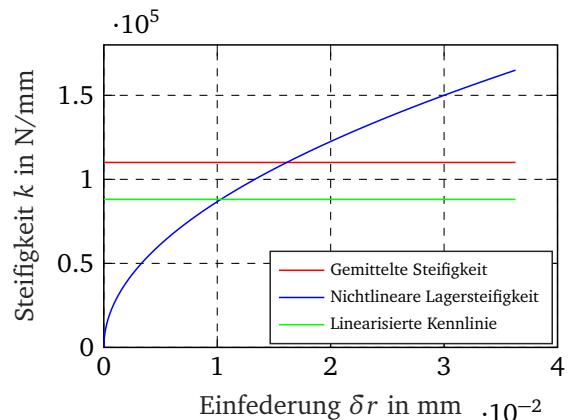
(c) Kennlinien für INA 61902-2Z



(d) Lagersteifigkeiten für INA 61902-2Z



(e) Kennlinien für INA 61904-2Z



(f) Lagersteifigkeiten für INA 61904-2Z

**Abbildung 3.16.:** Lagerkennlinien (linke Spalte) mit verschiedenen Approximationen und der dazugehörigen Steifigkeit (rechte Spalte)

### 3.4 Auswahl relevanter elastischer Freiheitsgrade

Entscheidend für die Komplexität des Modells ist die Anzahl der Freiheitsgrade. Durch sie wird die Rechnungsdauer maßgeblich bestimmt, da bei einer größeren Anzahl an Freiheitsgraden mehr Gleichungen

gen zu lösen sind. Ziel dieses Abschnittes ist es daher, die Zahl der Freiheitsgrade auf das notwendige Maß zu reduzieren.

Bei dem zu modellierenden Mehrkörpersystem wird zunächst zwischen Starrkörperfreiheitsgrad und elastischem Freiheitsgrad unterschieden. Die Starrkörperfreiheitsgrade sind die möglichen Bewegungen eines starren Körpers im Raum bzw. in der Ebene. Elastische Freiheitsgrade definieren mögliche Verformungen eines elastischen Körpers. Im Sinne des Mehrkörpersystems müssen die Starrkörperfreiheitsgrade der Koppeln modelliert werden, damit die Bewegung des Getriebes abgebildet wird. Elastische Freiheitsgrade hingegen müssen nur modelliert werden, wenn die elastische Verformung eines Körpers einen wesentlichen Beitrag zur Gesamtverformung beiträgt. Dies bedeutet, dass sehr steife Getriebeglieder als Starrkörper modelliert werden können. Mit diesem Ansatz wird zum einen die Anzahl der Freiheitsgrade reduziert, zum anderen trägt er zur Vermeidung von steifen Bewegungsdifferentialgleichungen bei. Steife Differentialgleichungen (kurz DGL) sind durch Eigenfrequenzen mit unterschiedlichen Größenordnungen geprägt, die bei mechanischen Modellen durch die Berücksichtigung sich stark unterscheidender Steifigkeiten erzielt werden [Dre14]. Dies hat zur Konsequenz, dass die numerische Integration der DGL viel Zeit beansprucht, weil schrittweitengesteuerte Integratoren kleine Schrittweiten wählen, um die höchsten Eigenfrequenz zu erfassen.

Damit nur die elastischen Freiheitsgrade für relevante Verformungen ausgewählt werden, wird ein Vergleich dieser durchgeführt. Ein direkter Vergleich der Steifigkeiten ist jedoch nicht sinnvoll, da die Verformung (Stauchung, Längung, Durchbiegung etc.) auch von der Last abhängt. So kann ein steifes Bauteil eine große Verformung aufweisen, wenn die Last entsprechend groß ist. Um diese mögliche Verfälschung zu eliminieren, werden zunächst mittels statischem Gleichgewicht alle Schnittkräfte  $F_{S,i}$  im Getriebe bei der an der Druckstange angreifenden Prozesslast  $F_P$  berechnet. Das Verhältnis

$$g_i = \frac{F_{S,i}}{F_P} \quad (3.17)$$

wird anschließend verwendet, um die Steifigkeit auf dieses Verhältnis zu beziehen. Dabei wird die  $n$ -fache Parallelschaltung der Steifigkeiten berücksichtigt:

$$k_{b,i} = \frac{n \cdot k_i}{g_i} \quad (3.18)$$

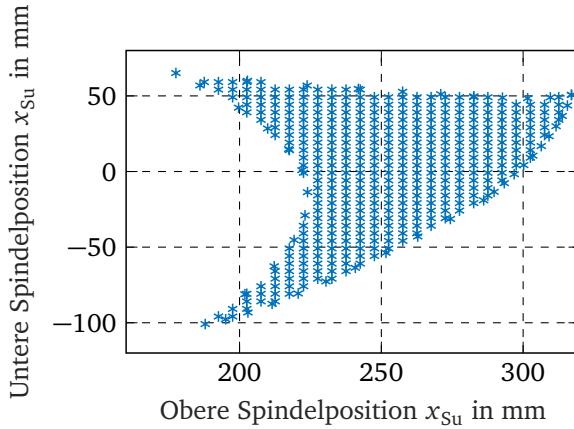
Die  $i$ -te bezogene Steifigkeit  $k_{b,i}$  hat immer noch die Einheit  $N\text{ m}^{-1}$  und berechnet über

$$x_i = \frac{F_P}{k_{b,i}} \quad (3.19)$$

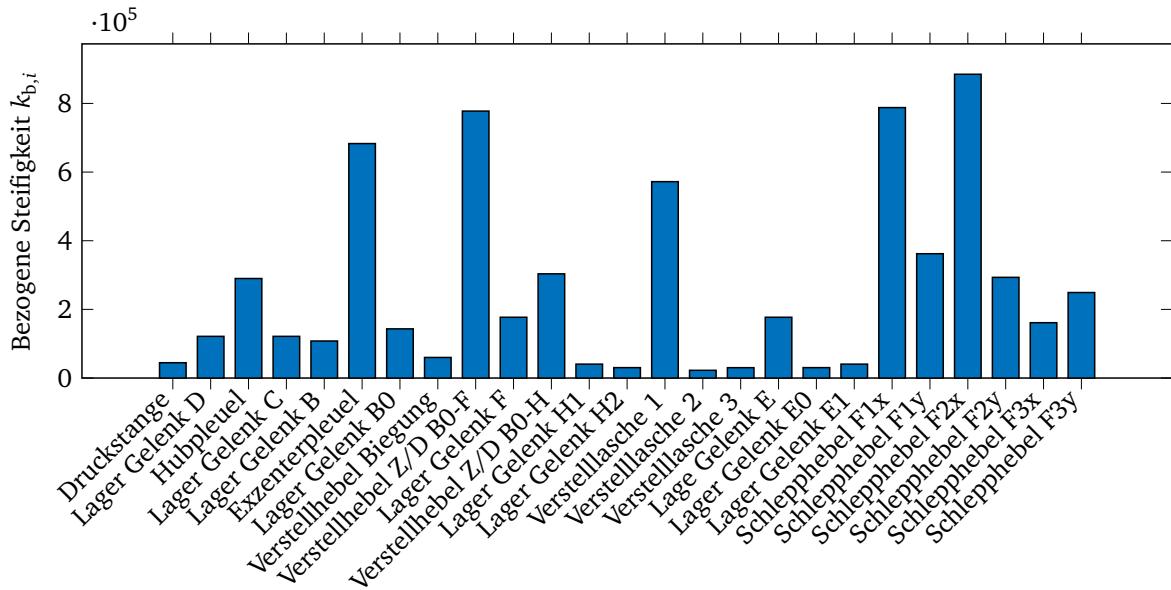
die Verformung  $x$ , die aus der Prozesskraft resultiert. Somit beziehen sich alle Steifigkeiten auf die Prozesskraft und sind miteinander vergleichbar. Für die Lager wird die konstante Lagersteifigkeit  $k_{m2}$  der zweiten Mittelungsmethode verwendet. Für die Koppeln wird die Steifigkeit der FE-Berechnung mit dem feinen Netz verwendet.

Die Verhältnisse und damit auch die bezogenen Steifigkeiten sind abhängig von der Getriebestellung. Um eine möglichst umfassende Abschätzung zur Relevanz der Koppelsteifigkeit zu erhalten, werden die Schnittkräfte für eine Vielzahl von Getriebestellungen berechnet. Das Betriebsfeld der Spindelpositionen wird dazu um jeweils 5 mm, der Exzenterwinkel mit 5° abgetastet, siehe Abb. 3.17. Jede dieser Getriebestellungen ergibt einen Satz von Schnittkräften. Zur Analyse wird das Maximum jeder Schnittkraft berechnet und zur Berechnung der bezogenen Koppelsteifigkeit herangezogen. Das Ergebnis ist in Abb. 3.18 zu sehen.

Die stiefsten Koppeln sind der Exzenterpleuel, die Verstelllasche 1, der Schlepphebel sowie der Verstellhebel im Abschnitt zwischen den Gelenken B0 und F gegenüber Zug-Druck-Bbeanspruchung. Die Steifigkeit des Schlepphebels ist stark abhängig von der jeweiligen Belastung. Dennoch übersteigt sie



**Abbildung 3.17.:** Abgetastetes Betriebsfeld zur Berechnung der Schnittkräfte



**Abbildung 3.18.:** Bauelemente im Koppelgetriebe mit ihren bezogenen Steifigkeiten unter Berücksichtigung paralleler Vielfachheit

die Steifigkeit der meisten anderen Elemente, weshalb der Schlepphebel im Folgenden als Starrkörper vereinfacht wird. Auch der Exzenterpleuel wird fortan als Starrkörper behandelt. Der Verstellhebel, der zwischen den Punkten B0 und F steif ist, wird dennoch als elastischer Körper definiert, da er aufgrund seiner geringen Biegesteifigkeit ohnehin als elastischer Körper modelliert werden muss. Die Verstelllasche 1 ähnelt aufgrund ihrer Geometrie den zwei weiteren Verstelllaschen, sodass sie ebenfalls nachgiebig modelliert wird. Alle anderen Bauteile, insbesondere die Lager, müssen aufgrund ihrer ähnlichen geringen relativen Steifigkeit als elastische Elemente im Modell hinterlegt werden.

### 3.5 Modelle der Getriebeglieder

In diesem Abschnitt werden die Modelle für die Koppelglieder entwickelt. Da der Schlepphebel, welcher im Sinne der Mechanik eine Scheibe darstellt, vernachlässigt wird, werden ein Stabmodell für die auf Zug/Druck belasteten Koppeln und ein Balkenmodell für den Verstellhebel entwickelt. Die Modelle von Stab und Balken werden aus Massen und Federn zusammengesetzt. Die Lager werden als einfache Federelemente mit wahlweise linearer oder nichtlinearer Federcharakteristik modelliert.

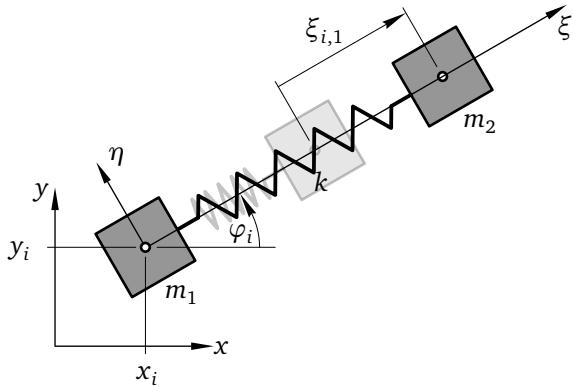
### 3.5.1 Stabmodell

Ein Stab ist dadurch gekennzeichnet, dass er unter Zug- bzw. Druckkräften gelängt bzw. gestaucht wird. Die technische Mechanik liefert, abhängig von der Anwendung, die DGL für die elastostatische Betrachtung oder die partielle DGL für das Kontinuumsmodell des Stabes. Ausgehend von diesen Gleichungen, soll ein Stabmodell entstehen, dass durch diskrete Massen- und Federelemente zu einem Mehrkörpersystem führt. Ziel ist es, die Trägheitseigenschaften sowie die elastostatische Dehnsteifigkeit der Stäbe abzubilden.

Einen direkten Ansatz zur Diskretisierung des Stabes unter Beibehaltung von Trägheit und Steifigkeit stellt die FE-Methode dar. Sie basiert auf der partiellen DGL des kontinuierlichen Stabs und liefert für ein Element der Masse  $m$ , dem Querschnitt  $A$ , dem E-Modul  $E$  und der Länge  $l$  die Massen- und Steifigkeitsmatrix [Kle15]

$$\mathbf{M} = \frac{1}{6} \rho A l \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}m & \frac{1}{6}m \\ \frac{1}{6}m & \frac{1}{2}m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

Die Einträge der Steifigkeitsmatrix können direkt als die Stabsteifigkeit  $k$  identifiziert werden. Die Diagonaleinträge der Massenmatrix sind  $m/2$ , was der einfachen Aufteilung der Stabmasse in zwei Einzelmassen entspricht, Abb. 3.19. Die Gegendiagonalelemente der Massenmatrix können keiner physikalischen Bedeutung in dem Modell aus diskreten Massen und Federn zugeordnet werden. Jedoch sind sie notwendig, um das Massenträgheitsmoment des Stabes korrekt abbilden zu können [Fel04]. Die Vernachlässigung der Gegendiagonale führt zu einem *lumped mass model*, bei dem die Korrektur des Massenträgheitsmomentes notwendig wird.



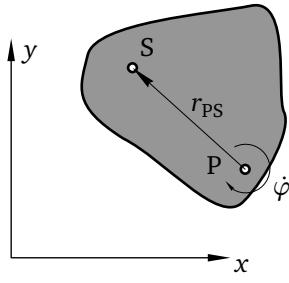
**Abbildung 3.19.:** Modell eines Stabes bestehend aus Punktmassen und Federn

Für die gestellten Forderungen, die Trägheit und Steifigkeit eines Stabes zu modellieren, ist es ausreichend, den Stab durch ein einzelnes finites Element und damit durch zwei Massen und eine Feder anzunähern. Mehr Massen und Federn müssten nur eingesetzt werden, wenn die Eigenformen und -frequenzen der Getriebeglieder modelliert werden sollen.

Für die mathematische Beschreibung des Stabmodells werden die Bezeichnungen gemäß Abb. 3.19 eingeführt. Das lokale, körperfeste  $\xi\eta$ -Koordinatensystem wird im Schwerpunkt einer Masse verankert. Die Koordinaten  $x_i$  und  $y_i$  beschreiben die Lage des  $i$ -ten Stabes in der Ebene gegenüber dem ortsfesten Koordinatensystem. Die Ausrichtung ergibt sich über den Winkel  $\varphi_i$ , der zwischen der  $x$ -Achse des globalen und der  $\xi$ -Achse des körperfesten Koordinatensystems gemessen wird. Der Freiheitsgrad  $\xi_i$  gibt die Stablängung gegenüber der ungelängten Ausgangslage an.

Die Korrektur des Massenträgheitsmomentes geschieht in Anlehnung an [Goe75]. Der Kerngedanke ist, dass die kinetische Energie für Modell und realem Objekt bei gleicher Bewegung gleich groß sind. Im Allgemeinen lautet die kinetische Energie  $T$  eines bewegten Starrkörpers

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_P^T \mathbf{v}_P + m \mathbf{v}_P^T (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{PS}) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \boldsymbol{\Theta}^{(P)} \boldsymbol{\omega}. \quad (3.21)$$



**Abbildung 3.20.:** Drehung eines Körpers mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega = \dot{\varphi}$  um den Punkt P, der nicht sein Schwerpunkt ist

Der Vektor  $v_p$  ist die Geschwindigkeit eines körperfesten Punktes P,  $\omega$  der Winkelgeschwindigkeitsvektor,  $r_{ps}$  der körperfeste Ortsvektor vom Punkt P auf den Schwerpunkt S und  $\Theta^{(P)}$  der Trägheitstensor bezogen auf den Punkt P [Woe16]. Für den ebenen Fall und einer reinen Rotation um den Punkt P, Abb. 3.20 vereinfacht sich die kinetische Energie zu

$$T = \frac{1}{2} \Theta_p \dot{\varphi}^2. \quad (3.22)$$

$\Theta_p$  ist das Massenträgheitsmoment bezüglich des Punktes P und der z-Achse des Körpers. Für das Stabmodell setzt sich die kinetische Energie nur aus der Translationsgeschwindigkeit  $v_{Si}$  der Punktmassen zusammen, die durch die Rotation des Stabs um P entsteht. Dieser Anteil wird um das korrigierende Trägheitsmoment  $\Theta_{\text{korr}}$  ergänzt, weshalb sich die kinetische Energie zu

$$T_{\text{Stabmodell}} = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_{Si}^2 + \frac{1}{2} \Theta_{\text{korr}} \dot{\varphi}^2 \quad (3.23)$$

ergänzt. Mit der bei Rotation herrschenden Geschwindigkeit

$$v_{Si} = \xi_{Si} \dot{\varphi} \quad (3.24)$$

und dem Gleichsetzen von Gleichungen 3.22 und 3.23 berechnet sich das korrigierende Massenträgheitsmoment zu

$$\Theta_{\text{korr}} = \Theta_p - \sum_i m_i \xi_{Si}^2. \quad (3.25)$$

Zusammenfassend wird für jede Zug/Druck belastete Koppel die Masse auf zwei Punktmassen aufgeteilt. Sie werden über eine lineare Steifigkeit verbunden, deren Ermittlung in Kapitel 3.3.1 aufgeführt ist. Das Massenträgheitsmoment und die Abmessungen der Glieder gehen in die Berechnung des korrigierenden Massenträgheitsmoment ein, womit die korrekte Starrkörperdynamik der Koppel wiederhergestellt ist. Abschließend berechnet sich das für die LAGRANGE Gleichung 2. Art notwendige kinetische Energie aus Gleichung 3.23. Die Absolutgeschwindigkeit der Massenschwerpunkte ergibt sich gemäß

$$v_{Si} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} + \dot{\varphi} \cdot \begin{bmatrix} \eta_{Si} \\ -\xi_{Si} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\xi}_{Si} \\ \dot{\eta}_{Si} \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

aus den am Stabmodell eingeführten Starrkörperkoordinaten und den Lagekoordinaten im lokalen Koordinatensystem. Die potentielle Energie setzt sich nach

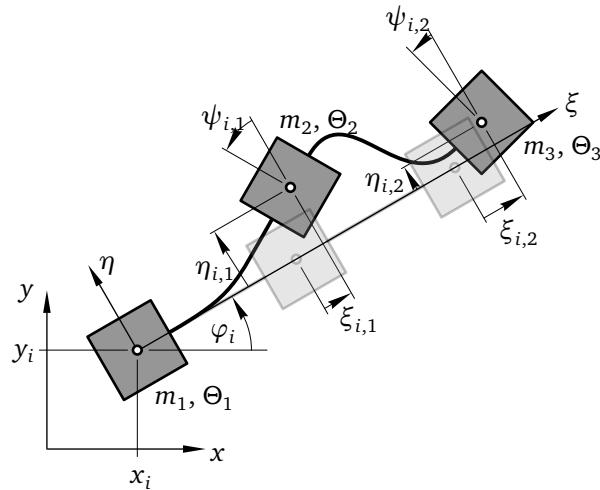
$$U_{\text{Stab}} = \frac{1}{2} k \xi^2 + m_1 g y_1 + m_2 g (y_1 + \xi_{S2} \sin \varphi) \quad (3.27)$$

aus der potentiellen Energie der Feder und den Lageenergie der Massen zusammen.

### 3.5.2 Balkenmodell

Das Balkenmodell orientiert sich wie das Stabmodell an den Gleichungen der FE-Methode und dient als Grundlage für die Modellierung des auf Biegung belasteten Verstellhebels. Da der Verstellhebel insgesamt drei Gelenke aufweist, kann das Modell als zwei aneinandergereihte ebene Balkenelemente aufgefasst werden.

Das Modell des Balkens ist in Abb. 3.21 zu sehen. Gemäß der Knoten eines finiten Balkenelements können sich die Punktmassen, in Balkenlängs- ( $\xi$ ) und in Querrichtung ( $\eta$ ) verschieben. Zudem hat jede Masse noch einen Rotationsfreiheitsgrad  $\psi$ , mit dem der Balken gebogen werden kann. Auch für



**Abbildung 3.21.:** Modell eines Balkens bestehend aus Massen und Federn

den Balken wird ein *lumped mass model* aufgestellt, bei dem alle Elemente abseits der Hauptdiagonale der Massenmatrix vernachlässigt werden. Die Modellierung der Steifigkeit orientiert sich an der Steifigkeitsmatrix

$$K_{\text{Element}} = \begin{bmatrix} a & & -a & & \\ b & bl & -b & bl & \\ bl & bl^2 & -bl & bl^2 & \\ -a & & a & & \\ -b & -bl & b & -bl & \\ bl & bl^2 & -bl & bl^2 & \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

eines finiten Balkenelements. Die Abkürzungen

$$a = \frac{EA}{l} \quad b = \frac{EI}{l^3} \quad (3.29)$$

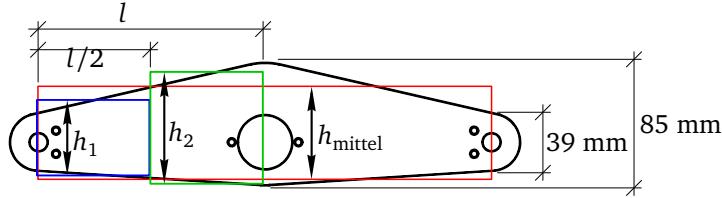
setzen sich aus dem E-Modul, der Balkenquerschnittsfläche, dem Flächenträgheitsmoment und der Elementlänge zusammen.

Da der Balken aus zwei finiten Elementen besteht, werden zwei  $6 \times 6$  Elementmatrizen nach der in der FEM üblichen Methode zur  $9 \times 9$  Steifigkeitsmatrix zusammengefügt. Die Zeilen und Spalten, die der Verschiebung zur ersten Masse zugeordnet sind, werden aus der Matrix gestrichen, da die erste Masse fest mit dem lokalen Koordinatensystem verbunden ist. Es resultiert die Steifigkeitsmatrix  $K_{\text{Balken}}$ . Die Konstanten  $a$  und  $b$  in ihr werden iterativ angepasst, sodass sich für den Verstellhebel die in Kapitel 3.3.1 ermittelten Steifigkeiten ergeben.

Die Gesamtmasse des Verstellhebels wird gemäß

$$m_1 = \frac{m}{4}, \quad m_2 = \frac{m}{2} \quad \text{und} \quad m_3 = \frac{m}{2} \quad (3.30)$$

auf die Modellmassen verteilt. Damit wird berücksichtigt, dass sich dem mittleren Gelenk links und rechts zwei Balkenabschnitte anschließen, die zu einer größeren Masse führen. Für die Berechnung der



**Abbildung 3.22.:** Geometrische Abstraktion des Schlepphebels zur Bestimmung der Modellmassenträgheitsmomente

Massenträgheitsmomente wird die Geometrie des Verstellhebels durch einen einfachen quaderförmigen Körper angenähert (rote Kontur in Abb. 3.22). Die Höhe  $h_{\text{mittel}}$  dieses Balkens wird aus der Mittelung der Höhen in der Mitte und am Rand des Verstellhebels berechnet und ergibt

$$h_{\text{mittel}} = \frac{85 \text{ mm} + 39 \text{ mm}}{2} = 62 \text{ mm}. \quad (3.31)$$

Mit einer erneuten Mittelung werden die Höhen des blauen und grünen Rechtecks zu

$$h_1 = \frac{h_{\text{mittel}} + 39 \text{ mm}}{2} = 50,5 \text{ mm} \quad (3.32)$$

$$h_2 = \frac{h_{\text{mittel}} + 85 \text{ mm}}{2} = 75,5 \text{ mm} \quad (3.33)$$

bestimmt. Sie dienen als Grundlage zur Berechnung des Massenträgheitsmomentes der farbigen Rechtecke, die den jeweiligen Modellmassen zugeordnet werden. Die Massenträgheitsmomente der Quader berechnen sich nach [Mar13] gemäß

$$\Theta_1 = \Theta_3 = \frac{1}{12} m_1 \left( h_1^2 + \left( \frac{l}{2} \right)^2 \right) \quad (3.34)$$

$$\Theta_2 = \frac{1}{12} m_2 (h_2^2 + l^2). \quad (3.35)$$

Eine anschließende Korrektur der Massenträgheitsmomente, wie im Falle der Stabmodelle, wird nicht durchgeführt. Es zeigt sich, dass der Versuch aufgrund der Drehfreiheitsgrade der Punktmassen und dem negativen Korrekturmassenmoment zu einer nicht positiv definiten Massenmatrix führt. Diese ist physikalisch nicht sinnvoll, da es mit ihr Geschwindigkeitszustände gäbe, mit denen der Balken eine negative kinetische Energie hätte. Die für die LAGRANGE Gleichung 2. Art verwendete kinetische Energie des Balkens berechnet sich nach

$$T_{\text{Balken}} = T_{\text{Stabmodell}} = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_{Si}^2 + \frac{1}{2} \Theta_i \dot{\varphi}_{\text{abs}}^2. \quad (3.36)$$

Für Absolutgeschwindigkeit der Massen wird Gleichung 3.26 herangezogen. Die absolute Winkelgeschwindigkeit der Massen 2 und 3 resultiert aus der Summe von  $\dot{\varphi}$  und  $\dot{\psi}$ . Für die Berechnung der potentiellen Energie wird die Summe aus der Lageenergie der Massen sowie dem Potential

$$U = \mathbf{q}_{\text{elastisch}}^T \mathbf{K}_{\text{Balken}} \mathbf{q}_{\text{elastisch}} \quad (3.37)$$

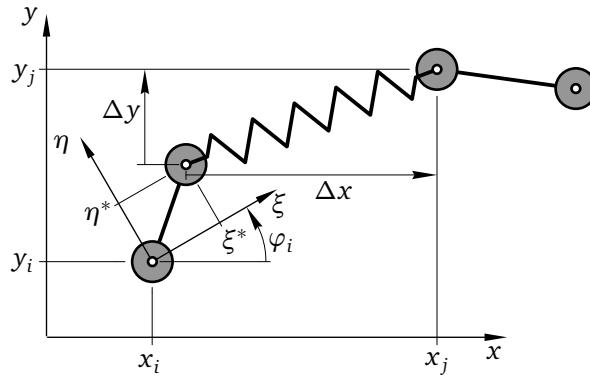
gebildet. Der Vektor  $\mathbf{q}_{\text{elastisch}}$  umfasst alle elastischen Freiheitsgrade des Balkens.

### 3.5.3 Lagermodell

Die Lager sind als Federelemente zwischen den Gelenken der Koppeln modelliert. Da die von den Laggern aufgebrachte radiale Lagerkraft eine Funktion der Einfederung ist, muss die Einfederung mit den Lagekoordinaten der Körper beschrieben werden. Abb. 3.23 zeigt die Körper  $i$  und  $j$ , die über eine Feder miteinander verbunden sind. Die radiale Auslenkung liefert der Satz des Pythagoras

$$\delta r = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}. \quad (3.38)$$

Je nach Verankerung der körperfesten  $\xi\eta$ -Koordinatensysteme sind die Koordinaten der verbundenen



**Abbildung 3.23.: Lager als Federelement zwischen zwei Körpern**

Gelenk nicht unmittelbar bekannt und müssen über die Transformation

$$\begin{bmatrix} x_i^* \\ y_i^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \varphi_i & -\sin \varphi_i \\ \sin \varphi_i & \cos \varphi_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi^* \\ \eta^* \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

ermittelt werden.  $\xi^*$  und  $\eta^*$  hängen im Allgemeinen von der Körpergeometrie und den elastischen Freiheitsgraden ab. Anschließend ergeben sich die relative Gelenkverschiebung zu

$$\begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_j \\ y_j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_i^* \\ y_i^* \end{bmatrix}. \quad (3.40)$$

Mit dieser Gleichung und der Definition der radialen Einfederung ergibt sich die auf den Körper  $i$  wirkende Lagerkraft aus

$$F_{R,i} = \underbrace{F_R(\delta)}_{\text{Betrag}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\delta r} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}}_{\text{Richtung}}, \quad (3.41)$$

wobei für den Betrag die nichtlineare oder lineare Lagerkennlinie hinterlegt sein kann. Auf den Körper  $j$  wirkt gemäß dem Prinzip von Actio und Reactio die Kraft

$$F_{R,j} = -F_{R,i}. \quad (3.42)$$

Das für die LAGRANGE Gleichung 2. Art benötigte Potential der Feder ergibt sich aus der Integration der Radialkraft über die Einfederung und lautet

$$T_{\text{Lager}} = n \cdot \frac{c_1}{c_2 + 1} \delta r^{c_2 + 1} \quad (3.43)$$

für die in Abschnitt 3.3.2 ermittelte nichtlineare Kennlinie und

$$T_{\text{Lager}} = n \cdot \frac{1}{2} k \delta r^2 \quad (3.44)$$

für konstante Lagersteifigkeiten unter Berücksichtigung der Anzahl  $n$  parallel verbauter Lager.

### 3.6 Synthese zum Gesamtmodell

Das Zusammenfügen von Stab- und Balkenmodellen mittels Federelementen, die die Lager repräsentieren, ergibt unter Berücksichtigung von Randbedingungen das Gesamtmodell des Getriebes. Eine graphische Repräsentation des Modells zeigt Abb. 3.24. Alle grau eingefärbten Elemente sind mit Massen

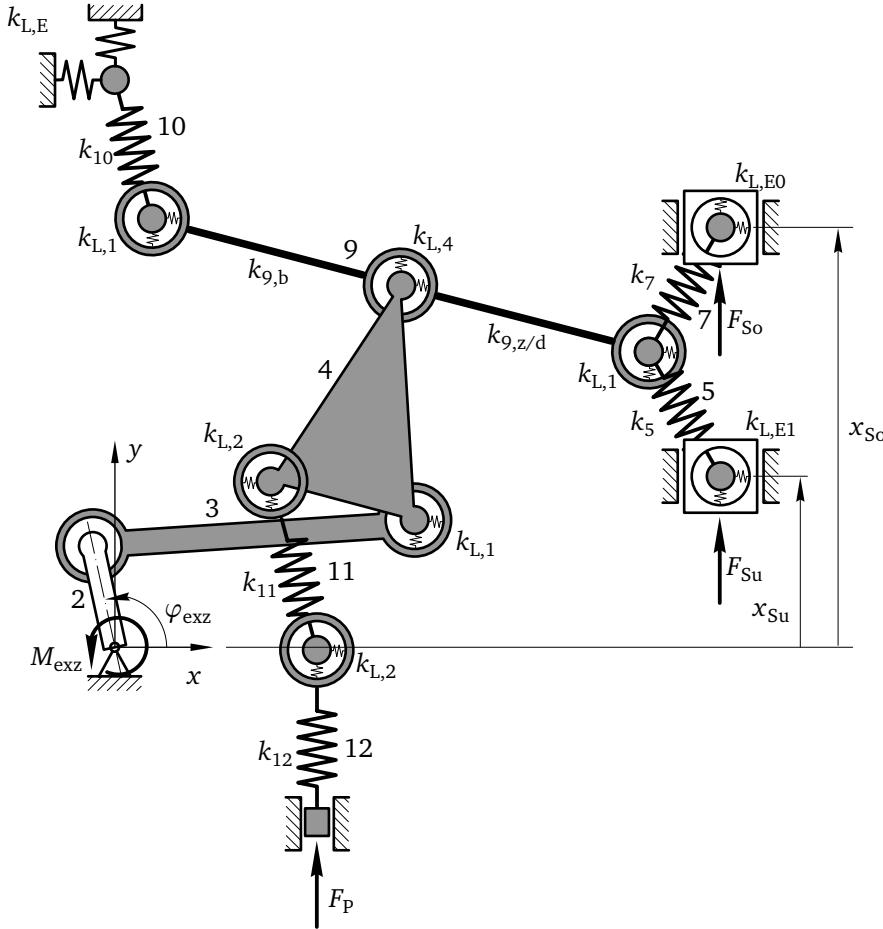


Abbildung 3.24.: Mechanisches Schema des Gesamtsystems

versehen. Die Lager sind als kleine Federelemente zwischen den Koppeln erkennbar. Die Kräfte bzw. Momente, die über die Aktorik auf das Getriebe übertragen werden, sind als  $M_{exz}$ ,  $F_{So}$  und  $F_{Su}$  eingetragen. Die Prozesskraft, die über den Stößel auf die Druckstange geleitet wird, ist mit  $F_P$  bezeichnet. Des Weiteren sind die Körper durchnummertiert, sodass im Folgenden der Index  $i$  für den jeweiligen Körper steht. Die Steifigkeiten  $k_i$  werden im Kapitel 4 einer Parameteridentifikation unterzogen.

Zur mathematischen Berechnung werden die Laufgrade im Vektor  $\mathbf{u}$  zusammengefasst:

$$\mathbf{u} = [\varphi_{exz}, x_{So}, x_{Su}]^T \quad (3.45)$$

Der Freiheitsgradvektor

$$\mathbf{q} = [\mathbf{u}^T, x_i, y_i, \varphi_i, \xi_{i,j}, \dots]^T \quad (3.46)$$

enthält alle Starrkörperfreiheitsgrade  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $\varphi_i$ , die elastischen Freiheitsgrade  $\xi_{i,j}$ ,  $\eta_{i,j}$ ,  $\psi_{i,j}$  und ebenso die Laufgrade.

Beim Aufstellen des Freiheitsgradvektors werden im Allgemeinen die Freiheitsgrade definiert. Dementsprechend werden die Randbedingungen in diesem Schritt in das Modell eingefügt, sodass die verwendeten Freiheitsgrade Minimalkoordinaten darstellen. Das linke Gelenk des Exzenterpleuels (Gelenkpunkt

A,  $i = 3$ ) folgt der Rotationsbewegung der Exzenterwelle (Körper 2). Dementsprechend werden die Starrkörperfreiheitsgrade  $x_3$  und  $y_3$  des dritten Körpers aus dem Vektor  $\mathbf{q}$  entfernt. Für die Berechnung der Lage wird fortan die kinematische Beziehung

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = l_2 \begin{pmatrix} \cos \varphi_{\text{exz}} \\ \sin \varphi_{\text{exz}} \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

verwendet. Auf gleiche Weise wird die Randbedingung des Druckstangenschubgelenks integriert. Die Koordinate  $x_{12}$  stellt keinen Freiheitsgrad dar und ist deshalb kein Element in  $\mathbf{q}$ . Die Randbedingung im Gelenkpunkt E wird erreicht, indem die Feder des Lagers mit der festen Umgebung verbunden ist. Ebenso verhält es sich in den Gelenken E1 und E2, wobei die  $y$ -Koordinate durch den jeweiligen Laufgrad ersetzt wird

Die Bewegungsgleichung des Systems wird mit der LAGRANGE Gleichung 2. Art aufgestellt. Dafür werden gemäß Gleichung 2.1 die potentielle und die kinetische Energie als Funktion der Freiheitsgrade benötigt. Sie ergeben sich als Summe der Energien der einzelnen Elemente:

$$T = \sum_{\text{Stäbe}} T_{\text{Stab}} + \sum_{\text{Balken}} T_{\text{Balken}} + \sum_{\text{Starrkörper}} T_{\text{Starrkörper}} \quad (3.48)$$

$$U = \sum_{\text{Stäbe}} U_{\text{Stab}} + \sum_{\text{Balken}} U_{\text{Balken}} + \sum_{\text{Lager}} U_{\text{Lager}} \quad (3.49)$$

Die von außen aufgebrachten nichtkonservativen Kräfte berechnen sich zu

$$\mathbf{Q}_{\text{nk}}(t) = M_{\text{exz}}(t) \frac{\partial \dot{\varphi}_{\text{exz}}}{\partial \mathbf{q}} + F_{\text{So}}(t) \frac{\partial \dot{x}_{\text{So}}}{\partial \mathbf{q}} + F_{\text{Su}}(t) \frac{\partial \dot{x}_{\text{Su}}}{\partial \mathbf{q}} + F_{\text{P}}(t) \frac{\partial \dot{y}_{14}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q}_{\text{nk},\text{Last}} \cdot \underbrace{[M_{\text{exz}}, F_{\text{So}}, F_{\text{Su}}, F_{\text{P}}]}_{f_E^T(t)}^\top \quad (3.50)$$

und werden mit dem rechten Teil der Gleichungskette vereinfacht.  $\mathbf{Q}_{\text{nk},\text{Last}}$  ist eine Matrix mit vier Spalten, die die Kräfte auf die entsprechenden Gleichungen des Differentialgleichungssystems verteilt.

Das Aufstellen der Bewegungsdifferentialgleichung wird mit Hilfe von Matlab unter der Verwendung des Computeralgebrasystems *Symbolic Math Toolbox* durchgeführt. Dafür ist es notwendig, die Zeitableitung der LAGRANGE Gleichung mittels totalem Differential durch die partiellen Ableitungen der generalisierten Koordinaten zu ersetzen [Pie14]. Die DGL berechnet sich dann aus der Gleichung

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^\top}_{M(\mathbf{q})} \ddot{\mathbf{q}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^\top}_{k(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})} \dot{\mathbf{q}} - \underbrace{\left( \frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} \right)^\top}_{+ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^\top} + \underbrace{\left( \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} \right)^\top}_{p(\mathbf{q})} = \mathbf{Q}_{\text{nk}}(t), \quad (3.51)$$

bei der die Massenmatrix  $M(\mathbf{q})$ , der Beitrag aus der kinetischen Energie  $k(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  und der Anteil der potentiellen Energie  $p(\mathbf{q}, t)$  identifiziert werden können [Pie14]. Mit  $\mathbf{f} = \mathbf{k} + \mathbf{p}$  und Einbezug von Gleichung 3.50 lautet die Systemgleichung schlussendlich

$$\mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{Q}_{\text{nk},\text{Last}} \cdot f_E. \quad (3.52)$$

### 3.7 Mathematische Verarbeitung der Bewegungsdifferentialgleichung

Die hergeleitete Bewegungsdifferentialgleichung des Getriebemodells soll für verschiedene Zwecke verwendet werden. Das Hauptziel ist die Nutzung als Modell für elastostatische Getriebeverformungen und die inverse Dynamik. Dafür muss die DGL weiter aufbereitet werden, welches im Folgenden dargelegt wird.

### 3.7.1 Kinematische Randbedingungen

Die DGL des Modells, Gleichung 3.52, gilt für das System, bei dem die Aktoren über Kräfte und Momente modelliert sind. Dadurch stellen die Laufgrade Freiheitsgrade dar, deren Lage sich aus den am Getriebe wirkenden Kräften ergibt. Eine solche Modellierung ist sinnvoll, wenn die wirkenden Kräfte bekannt sind oder Regelgesetze am Modell erprobt werden. Sollen jedoch Kräfte in Lager oder Getriebeglieder bei vorgegebenen Bewegungsabläufen des Getriebes bestimmt werden, ist es zweckmäßig, kinematische Randbedingungen einzusetzen. Das bedeutet, dass die Lage der Randbedingung als Konstante (skleronome Bindung) oder als Funktion der Zeit (rheonome) vorgegeben wird, vergleiche Abschnitt 2.3.1 und Abb. 2.8.

Zum Einfügen der kinematischen Randbedingung wird der entsprechende Laufgrad  $u$  aus dem Freiheitsgradvektor  $\mathbf{q}$  gestrichen, welcher anschließend zu  $\mathbf{q}_{\text{red}}$  umbenannt wird. In der Massenmatrix  $\mathbf{M}$  und der nichtlinearen Funktion  $f$  wird der Laufgrad und dessen Zeitableitung durch den vorgegebenen Zeitverlauf

$$u = u(t) \quad \text{mit} \quad \dot{u} = \frac{du(t)}{dt} \quad (3.53)$$

substituiert. Anschließend wird die Zeile und Spalte in  $\mathbf{M}$  gestrichen, die durch die Matrix-Vektor-Multiplikation mit dem Laufgrad verknüpft ist. Bei den Vektoren  $f$  (oder auch  $\mathbf{k}$  und  $\mathbf{p}$ ) und  $\mathbf{Q}_{\text{nk}}$  wird die entsprechende Zeile entfernt. Es verbleibt ein reduziertes System gemäß

$$\mathbf{M}_{\text{red}}(\mathbf{q}_{\text{red}}, t) \ddot{\mathbf{q}}_{\text{red}} + f_{\text{red}}(\mathbf{q}_{\text{red}}, \dot{\mathbf{q}}_{\text{red}}, t) = \mathbf{Q}_{\text{nk}, \text{red}}(t), \quad (3.54)$$

bei dem im Fall von rheonomen Randbedingungen die Massenmatrix und der Vektor der nichtlinearen Funktion explizit von der Zeit abhängen. Bei skleronomen Bindungen geht die explizite Zeitabhängigkeit verloren.

### 3.7.2 Lösung der Bewegungsdifferentialgleichung

Die Lösung der DGL des Koppelgetriebe geschieht auf numerischem Wege mit Hilfe der in *Matlab* integrierten Funktion *ode45*. Sie basiert auf dem Runge-Kutta-Algorithmus vierter Ordnung [Mat17] und eignet sich für nicht-steife Differentialgleichungen [Pie14].

Die zu lösende Bewegungsgleichung wird auf die Form

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{f} = 0 \quad (3.55)$$

gebracht. Dabei ist unerheblich, ob kinematische Randbedingungen implementiert sind oder nicht. Anschließend wird die Differentialgleichung zweiter Ordnung durch die Transformationsvorschrift

$$\mathbf{x} = [\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}]^T \quad (3.56)$$

auf das Differentialgleichungssystem erster Ordnung

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}^*} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{E} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}^*} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} - \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f} \end{bmatrix}}_{\mathbf{f}^*} \quad (3.57)$$

mit der Einheitsmatrix  $\mathbf{E}$  und der Nullmatrix  $\mathbf{0}$  überführt [Pie14]. Diese DGL wird von der *Matlab*-Funktion *ode45* mit dem Anfangswert  $\mathbf{x}_0$  für positiv definite Massenmatrizen  $\mathbf{M}^*$  gelöst. Sie ist genau dann positiv definit, wenn die Massenmatrix  $\mathbf{M}$  positiv definit ist.

Aus der Lösung  $\mathbf{x}(t)$  kann die Bewegung des Getriebes analysiert werden. Mit Hilfe der im Modell hinterlegten Steifigkeiten und den elastischen Verformungen können die Kräfte in den Koppeln berechnet werden. Die Gelenkkräfte ergeben sich aus der Relativverschiebung zwischen den Koppeln an einem Gelenk.

### 3.7.3 Linearisierung des Modells

Die nichtlineare DGL kann für kleine Bewegungen um eine Ruhelage linearisiert werden. Dies ist zum Beispiel notwendig, um Eigenfrequenzen und -formen des Getriebes zu berechnen, oder kann verwendet werden, um bei der Berechnung kleiner Verformungen Rechenzeit zu sparen.

Die Linearisierung ist in [Pie14] angegeben. Mit dem Ansatz

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{q}_0 + \Delta\mathbf{q}(t) \quad (3.58)$$

wird davon ausgegangen, dass die Verschiebung nur kleine Bewegungen um die Referenzlage  $\mathbf{q}_0$  durchführt. Eine Taylorreihenentwicklung der DGL, Gleichung 3.52 um die Referenzlage führt beim Abbruch ab dem linearen Term auf die lineare DGL

$$\underbrace{\mathbf{M}(\mathbf{q}_0)}_{\mathbf{M}_0} \cdot \Delta\ddot{\mathbf{q}} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \Big|_0}_{\mathbf{P}_0} \cdot \Delta\dot{\mathbf{q}} + \underbrace{\left( \frac{\partial \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{q}} \Big|_0 + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \Big|_0 \right)}_{\mathbf{Q}_0} \cdot \Delta\mathbf{q} = \mathbf{Q}_{nk,red}. \quad (3.59)$$

Im Allgemeinen ist die durch die Linearisierung erhaltene Massenmatrix symmetrisch. Die Matrizen  $\mathbf{P}_0$  und  $\mathbf{Q}_0$  lassen sich gemäß [Pie14]

$$\mathbf{K} = \frac{1}{2} (\mathbf{Q}_0 + \mathbf{Q}_0^T) \quad \mathbf{N} = \frac{1}{2} (\mathbf{Q}_0 - \mathbf{Q}_0^T) \quad (3.60)$$

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\mathbf{P}_0 + \mathbf{P}_0^T) \quad \mathbf{G} = \frac{1}{2} (\mathbf{P}_0 - \mathbf{P}_0^T) \quad (3.61)$$

in die symmetrischen Anteile  $\mathbf{D}$  (Dämpfungsmatrix) und  $\mathbf{K}$  (Steifigkeitsmatrix) und antimetrischen Matrizen  $\mathbf{G}$  (Gyroskopische Matrix) und  $\mathbf{N}$  (Antimetrische Steifigkeitsmatrix) aufteilen [Gas12] [Gas06]. Sie finden bei der Untersuchung der Systemdynamik Verwendung.

Im Laufe dieser Arbeit werden für die Referenzlage  $\mathbf{q}_0$  unbelastete Getriebezustände betrachtet. Das bedeutet, dass sich alle Freiheitsgrade  $\mathbf{q}_0 = f(\mathbf{u}_0)$  unmittelbar aus der kinematischen Funktion berechnen, wodurch in der Referenzlage keine Verformungen auftreten.

### 3.7.4 Berechnung statischer Getriebeverformungen

Für die Berechnung statischer Getriebeverformungen müssen in dem Modell skleronome Randbedingungen für alle Laufgrade eingefügt werden. Die Laufgrade werden damit für alle Zeiten festgehalten,  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0$  und  $\dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{0}$ . Aufgrund des statischen Problemcharakters werden alle Zeitableitungen in Gleichung 3.54 zu Null gesetzt. Es verbleibt die nichtlineare Gleichung

$$f(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{0}) = \mathbf{Q}_{nk}, \quad (3.62)$$

in deren rechte Seite nur die Prozesskraft  $F_p$  eingeht. Gesucht ist der Verschiebungsvektor  $\mathbf{q}$ , der die Gleichung erfüllt.

Die Gleichung wird in *Matlab* unter Verwendung der Funktion `fsolve` gelöst. Sie verwendet das *Trust-Region Dogleg* Verfahren, das ausgehend von einem Startvektor  $\mathbf{q}_0$  iterativ eine Lösung berechnet wird. Als Startvektor wird der Lagevektor des unbelasteten Systems verwendet.

Beim linearisierten System ist keine iterative Berechnung des Verschiebungszustandes notwendig. Aus Gleichung 3.59 kann unmittelbar unter Vernachlässigung dynamischer Terme der Lagevektor

$$\Delta\mathbf{q} = \mathbf{Q}_0^{-1} \mathbf{Q}_{nk} \quad (3.63)$$

berechnet werden. Dazu muss die Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{Q}_0$  lediglich regulär sein, was der Fall ist, wenn die skleronomen Bindungen an den Laufgraden eingearbeitet werden. Zu beachten ist, dass die Lösung die Abweichung von der Referenzlage wiedergibt.

### 3.7.5 Inverse Dynamik

Bei der inversen Dynamik werden bei vorgegebener Bewegung eines Mehrkörpersystems die dazu notwendigen Stellkräfte bestimmt. Sie lassen sich einfach anhand der DGL berechnen, indem der zeitabhängige Lagevektor  $\mathbf{q}(t)$  und seine Zeitableitungen vorgegeben und in

$$\mathbf{Q}_{nk}(t) = \mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad (3.64)$$

eingesetzt werden [Fea08]. Das Ergebnis ist der Vektor  $\mathbf{Q}_{nk}(t)$ , der das System die Bewegung ausführen lässt.

Die Anwendung von Gleichung 3.64 auf das in dieser Arbeit hergeleitete Mehrkörpersystem ist problematisch, weil der Kraftvektor  $\mathbf{Q}_{nk}(t)$  in der Regel voll besetzt ist, während das Modell nur drei Aktoren besitzt. Mit den drei Aktoren können die notwendigen Kräfte  $\mathbf{Q}_{nk}(t)$  nicht aufgebracht werden. Eine andere Sichtweise auf das Problem ist folgende: Mit der Vorgabe des Lagevektors  $\mathbf{q}(t)$  werden auch die elastischen Verformungen vorgegeben. Um diese Vorgabe erfüllen zu können, bräuchte es für jeden elastischen Freiheitsgrad eine Aktorik, die das Modell der Presse nicht besitzt. Dementsprechend muss das Modell derart abstrahiert werden, dass keine elastischen Freiheitsgrade mehr auftreten. Das ist der Fall, wenn alle Elastizitäten, auch die der Lager, aus dem Modell entfernt werden. Übrig bleibt ein reiner Starrkörpermechanismus, der als Minimalkoordinaten nur noch die Laufgrade  $\mathbf{u}$  besitzt.

Damit kein zweites Modell des Getriebes aufgestellt werden muss, wird das elastische Modell angepasst. Zum Einsatz kommen Zwangsbedingungen, die in der Mehrkörperdynamik üblicherweise als Schleifenschließbedingung genutzt werden, um Freiheitsgrade zu unterdrücken und kinematische Schleifen zu modellieren, siehe Abschnitt 2.3.1 und Abb. 2.10. Die Elastizität der Koppeln wird unmittelbar durch zu Null setzen der elastischen Getriebeglieder erreicht,

$$\begin{bmatrix} \xi_{i,j} \\ \eta_{i,j} \\ \psi_{i,j} \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (3.65)$$

Die Lager werden in starre Bindungen überführt, indem die radiale Einfederung unterbunden wird,

$$\delta r_i = 0, \quad (3.66)$$

was zu algebraischen Bedingungen zwischen den Starrkörperfreiheitsgraden führt, vgl. Gleichungen 3.38, 3.40 und 3.39. Die eingeführten Bedingungen werden mit dem Vektor  $\mathbf{g}$  in der Form

$$\mathbf{g} = \mathbf{0} \quad (3.67)$$

zusammengefasst und anschließend die JACOBI-Matrix

$$G_{ij} = \frac{\partial g_i}{\partial p_j} \quad (3.68)$$

der Bedingungen berechnet, wobei nach allen Koordinaten außer den Laufgraden  $\mathbf{u}$  abgeleitet wird.  $\mathbf{p}$  umfasst damit alle Freiheitsgrade, die mit dem Einführen der Schließbedingungen zu redundanten Koordinaten werden. Dementsprechend hängt die Massenmatrix, der Lagevektor und die nichtlineare Funktion  $\mathbf{f}$  nur noch von den Minimalkoordinaten ab. Anschließend wird die LAGRANGE Gleichung 1. Art aufgestellt, die im Gegensatz zur Gleichung 2. Art auch redundante Freiheitsgrade enthält [Pie14]. Zusätzlich werden in der Form

$$\mathbf{Q}_{nk, \text{gesucht}} = \mathbf{M}(\mathbf{u})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{f}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) - \mathbf{Q}_{nk, \text{bekannt}} - \mathbf{G}^T \boldsymbol{\lambda} \quad (3.69)$$

[Fea08] die aufgeprägten nichtkonservativen Kräfte in gesuchte und bekannte Kräfte aufgeteilt [Fea08]. Der letzte Term stellt die verallgemeinerten Reaktionskräfte der Lager dar, die aufgrund der Schleifenschließbedingungen hinzukommen. Die Reaktionskräfte sind unbekannt und können eliminiert werden, da sich die redundanten Koordinaten aus den Minimalkoordinaten des Starrkörpersystems berechnen lassen [Pie14],

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(\mathbf{u}). \quad (3.70)$$

Dazu wird die JACOBI-Matrix

$$J_{ij} = \frac{\partial p_i(\mathbf{u})}{\partial u_j} \quad (3.71)$$

berechnet, die die Eigenschaft  $\mathbf{J}^\top \mathbf{G}^\top = \mathbf{0}$  hat [Pie14]. Die symbolische Berechnung der JACOBI-Matrix mit Hilfe der *Symbolic Math Toolbox* ist für das Getriebemodell zu rechenintensiv. Zur Verkürzung der Rechendauer wird die Matrix numerisch bestimmt. Durch Linksmultiplikation der Gleichung 3.69 mit der JACOBI-Matrix wird die Gleichung zu

$$\underbrace{\mathbf{J}^\top \mathbf{Q}_{nk, \text{ gesucht}}}_{=F_{\text{Aktor}}} = \mathbf{J}^\top (\mathbf{M}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{f}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - \mathbf{Q}_{nk, \text{ bekannt}}(t)), \quad (3.72)$$

wobei sich die Anzahl der Gleichungen auf die Anzahl der Laufgrade reduziert. Gleichzeitig stellt die linke Seite die gesuchten Aktorkräfte am jeweiligen Laufgrad dar. Mit der Definition 3.45 folgen unmittelbar die Stellkräfte [Fea08]

$$\mathbf{F}_{\text{Aktor}} = [M_{exz}, F_{So}, F_{Su}]^\top, \quad (3.73)$$

die für die Starrkörperimplementierung des Getriebemodells die vorgegebene Bewegungstrajektorie durchführen lassen.

---

## 4 Modellanalyse und -anpassung

---

In diesem Abschnitt wird das in Kapitel 3 hergeleitete Getriebemodell verwendet, um die Getriebennachgiebigkeit zu untersuchen. Diese dient der Parameteridentifikation, indem die Modellparameter angepasst werden, um eine größtmögliche Übereinstimmung mit den an der 3D-Servo-Presse ermittelten Messwerten zu erzielen. Des Weiteren wird die Verwendbarkeit der inversen Dynamik des Modells untersucht.

---

### 4.1 Elastostatische Analyse

---

Zur Analyse der Getriebestatik wird nach Abb. 3.24 eine Prozesslast  $F_p$  auf die Druckstange aufgebracht und anschließend die elastostatischen Verformungen des Getriebes berechnet. Die Berechnung erfolgt nach der im Abschnitt 3.7.4 dargelegten Vorgehensweise. Im ersten Schritt werden die Modellierungsmethoden gegenübergestellt. Anschließend wird die Getriebennachgiebigkeit mit der von AMRHEIN aufgenommenen Messung verglichen. Zur genaueren Identifikation von Steifigkeitsparametern und Minimierung der Modellabweichung wird in Abschnitt 4.1.4 die Nachgiebigkeit der Presse an verschiedenen Punkten im Getriebe vermessen.

---

#### 4.1.1 Auswirkungen der Lagermodellierung und Modelllinearisierung

---

Aus Abschnitt 3.7.4 lässt sich ableiten, dass für die Berechnung von Getriebeverformungen drei unterschiedliche Modelle verwendet werden können:

1. Nichtlineare Kinematik und nichtlineare Lagerkennlinien
2. Nichtlineare Kinematik und konstante Lagersteifigkeit
3. Linearisierte Kinematik und konstante Lagersteifigkeit

Vom ersten zum zweiten Modell wird lediglich die Lagermodellierung von der nichtlinearen Kennlinie durch eine konstante Lagersteifigkeit ersetzt. Die Kinematik des Getriebes wird nicht verändert, da die nichtlineare Kraftfunktion  $f(q)$  erhalten bleibt, vgl. Gleichung 3.62. Insbesondere bei großen Getriebeverformungen können sich die Getriebeglieder der Last entsprechend zueinander verschieben. Dadurch werden die zwischen den Gliedern wirkenden Kräfte (Betrag und Richtung) eine Funktion der Verschiebung.

Beim Übergang auf die dritte Modellierungsmethode wird durch die Linearisierung der Gleichung 3.62 die Kinematik linearisiert. Die Richtungen der Kraftvektoren im Getriebe sind unabhängig von der Last. Die Beträge der Kraftvektoren sind proportional zur aufgebrachten Prozesslast. Dadurch können sich die Verschiebungsrichtungen der Getriebekoppeln nicht ändern und auch die Beträge der Verschiebungen sind proportional zur aufgebrachten Kraft.

Die drei Modellansätze werden für die Getriebestellungen nach Tabelle 4.1 gegenübergestellt. Im nachfolgenden Abschnitt wird gezeigt, dass es sich dabei um Getriebestellungen handelt, die unterschiedliche Nachgiebigkeiten besitzen und somit bei gleicher Prozesskraft unterschiedlich große Getriebeverformungen zulassen.

Für den Vergleich der Modellierungsansätze wird die vertikale Verschiebung des oberen Knotens der Druckstange betrachtet. Sie entspricht damit der  $y$ -Koordinate des Punktes D auf der Seite der Druckstange. Die Verschiebung wird gemäß

$$\Delta y_D = y_D - y_{D,0} \quad (4.1)$$

**Tabelle 4.1.: Stellungen des Getriebes für die Untersuchung der Modellierungsarten**

Bezeichnung	$\varphi_{\text{exz}}$ in °	$x_{S_0}$ in mm	$x_{S_u}$ in mm
Stellung 1	0	273	40
Stellung 2	0	250	20
Stellung 3	220	273	-33

gegenüber der Koordinate  $y_{D,0}$  gemessen, die der Punkt im lastfreien Fall hat. Gravitation wird hierbei vernachlässigt. Die Verschiebung wird für verschiedene Belastungsniveaus berechnet, sodass die in Abb. 4.1 dargestellten Verläufe entstehen. Aus ihnen wird über den Vorwärtsdifferenzenquotienten zur Annäherung der Formel

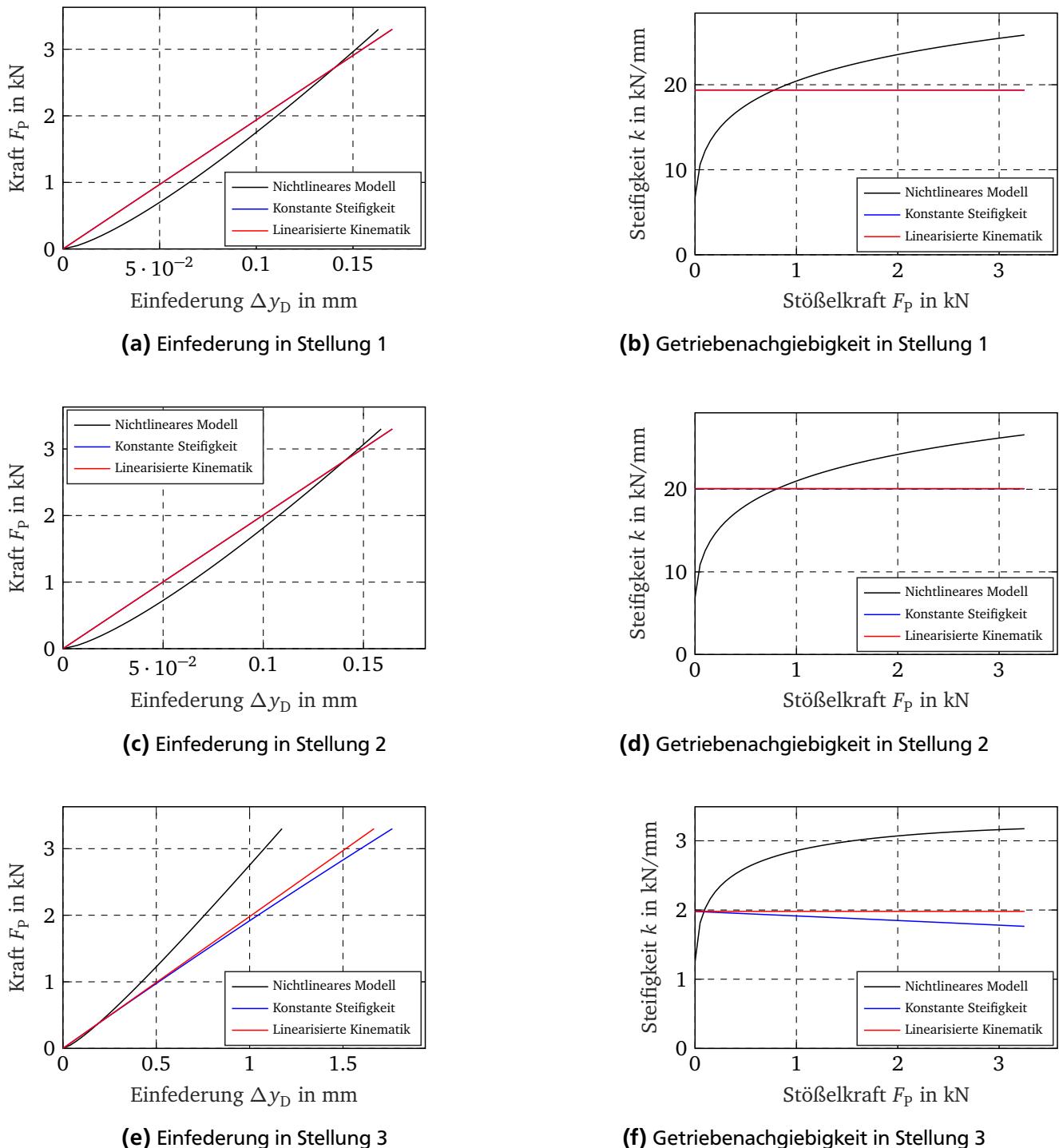
$$k = \frac{dF_p}{d(\Delta y_D)} \quad (4.2)$$

die Steifigkeit eines Getriebes als Funktion der Prozesskraft berechnet. Sie ist zu jeder Getriebestellung in der rechten Spalte von Abb. 4.1 aufgetragen.

Für alle dargestellten Getriebestellungen ist ein Unterschied in der Getriebesteifigkeit zwischen den Modellen mit nichtlinearer Lagersteifigkeit und konstanter Lagersteifigkeit feststellbar. Die nichtlineare Lagercharakteristik spiegelt sich im Allgemeinen in der Getriebesteifigkeit wider. Werden konstante Lagersteifigkeiten im Modell implementiert, ist die Steifigkeitskennlinie linear (rot) oder näherungsweise linear (blau). Für die steifen Getriebestellungen 1 und 2, zu erkennen an der etwa 10 mal kleineren Einfederung gegenüber Stellung 3, kann aufgrund der Kurvenverläufe in Abb. 4.1a und 4.1c von einer guten Approximation der nichtlinearen Lagerkennlinien durch konstante Federsteifigkeiten gesprochen werden. In der dritten Getriebestellung fällt der Unterschied deutlicher aus: Das vollständig nichtlineare Modell ist gegenüber den anderen Modellen bereits ab einer kleinen Prozesskraft deutlich steifer. Bei gleicher Belastung ist die Einfederung mit konstanten Lagersteifigkeiten größer. Es zeigt sich, dass die Art der Lagermodellierung einen deutlichen Einfluss auf die Getriebesteifigkeit hat. Für steife Getriebestellungen kann das Verwenden von einfachen Lagersteifigkeiten statt nichtlinearer Lagerkennlinien als gute Approximation dienen. In anderen Stellungen trifft dies nicht zu.

Der direkte Vergleich zwischen den roten und blauen Linien verdeutlicht den Einfluss der Modelllinearisierung. Im Fall der Getriebestellungen 1 und 2 ist ein Unterschied zwischen den beiden Kurven nicht feststellbar. Das Modell mit der linearisierten Kinematik besitzt im Kraftintervall der Presse eine (näherungsweise) lineare Kennlinie. In der nachgiebigen Stellung 3 wird für große Verschiebungen der Unterschied sichtbar. Die Getriebesteifigkeit im kinematisch korrekten Modell fällt unter die Steifigkeit des linearen Modells. Das liegt daran, dass die Verformungen von Lager und Koppeln eine Getriebever-schiebung zulassen, die weitere Verformungen begünstigt. Die Annahme der Linearisierung, dass sich die Richtung der Getriebeschmittkräfte nicht ändern, stimmt dann nicht mehr. Jedoch ist festzustellen, dass der durch die Linearisierung eingeführte Fehler klein ist.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass bei elastostatischen Berechnungen mit der Linearisierung der Lagerkennlinie ein größerer Fehler einhergeht als mit der Linearisierung der Kinematik. In steifen Getriebestellungen kann unter Verlust des progressiven Verlaufs eine konstante Lagersteifigkeit als Approximation verwendet werden, die im Anschluss daran die Linearisierung der Getriebekinematik ermöglicht. Da mit dem Schritt der Linearisierung in rechenintensiven Programmen zur Elastostatik die Berechnungszeit verkürzt werden kann, ist es in solchen Fällen sinnvoll, auf diese Technik zurückzugreifen.



**Abbildung 4.1.:** Verschiebung des Punktes  $y_D$  an der Druckstange unter Last sowie die daraus errechnete Steifigkeit für verschiedene Getriebestellungen

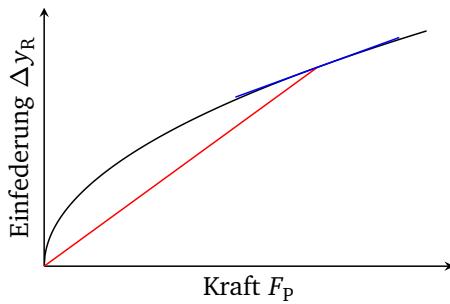
#### 4.1.2 Getriebennachgiebigkeit

Die Getriebennachgiebigkeit wird in diesem Abschnitt systematisch untersucht und Modellen aus Vorarbeiten sowie Messwerten gegenübergestellt, um die Modellgüte beurteilen zu können. Zur Ermittlung

der Getriebbenachgiebigkeit wird wie in Abschnitt 4.1.1 zunächst die Verschiebung des Getriebepunktes R in y-Richtung bei einer wirkenden Prozesskraft bestimmt. Mit dem Verhältnis

$$h_{\text{Getriebe}} = \frac{\Delta y_R(F_p)}{F_p} \quad (4.3)$$

wird die Nachgiebigkeit  $h$  ermittelt. Abb. 4.2 verdeutlicht, dass auf diese Weise die Nachgiebigkeit mit der Steigung der roten Geraden ermittelt wird. Die tatsächliche Nachgiebigkeit ist eine Funktion der Kraft und entspricht der Ableitung der schwarzen Linie. Ist die Einfederung nicht proportional zu Kraft, liegt immer eine Abweichung zwischen der lokalen (Steigung der blauen Tangente) und der in diesem Abschnitt definierten Nachgiebigkeit vor. Der Vorteil ist jedoch, dass die Nachgiebigkeiten bei selben Kraftniveaus vergleichbar sind und unmittelbar die Verschiebung berechnet werden kann.



**Abbildung 4.2.:** Berechnung der Nachgiebigkeit

---

### Einfluss der Spindelpositionen

---

In [Gro17] wird die Pressennachgiebigkeit über das Betriebsfenster der Spindelpositionen angegeben, Abb. 4.3. Zur Berechnung dieser Nachgiebigkeit dient ein elastostatisches Getriebemodell. An dieser Stelle soll ein Vergleich zwischen der Nachgiebigkeit des in [Gro17] veröffentlichten Modells und des in dieser Arbeit entwickelten Getriebemodells gezogen werden. Gleichzeitig wird dabei der Einfluss der Spindelpositionen auf die Nachgiebigkeit des Getriebes untersucht.

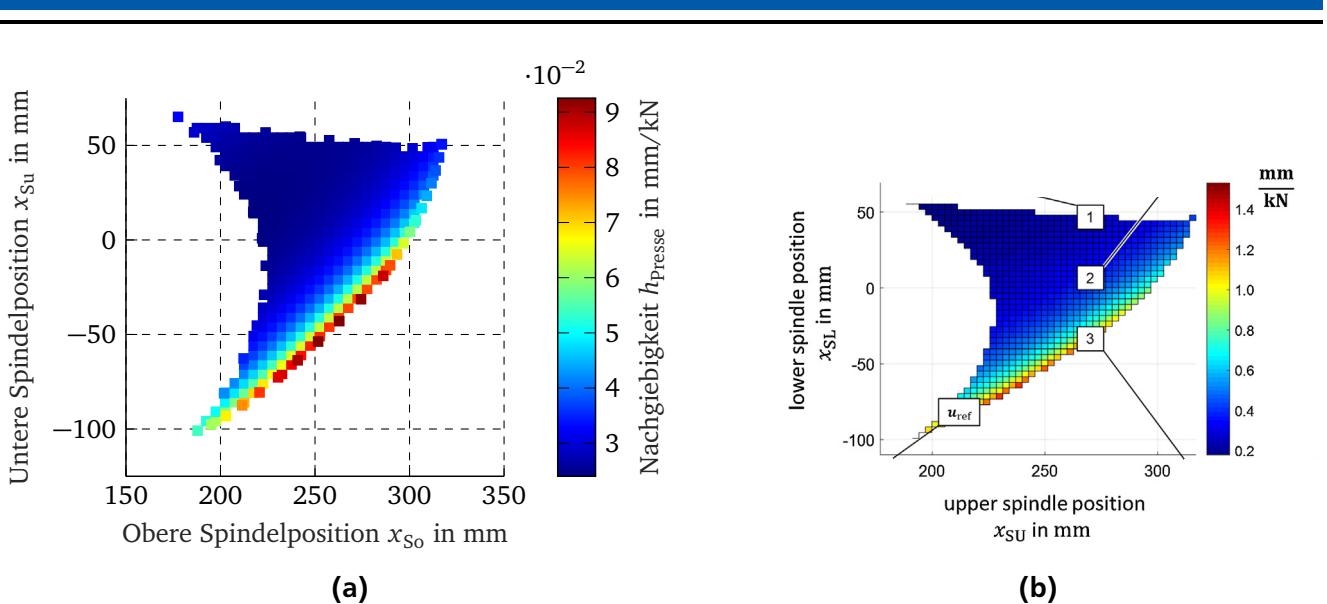
Die Getriebbenachgiebigkeit wird auf Basis des vollständig linearen Modells berechnet, wobei die Spindelpositionen mit einer Auflösung von 5 mm innerhalb des Betriebsfensters variiert werden. Der Exzenterwinkel wird entsprechend [Gro17] auf  $\varphi_{\text{exz}} = 90^\circ$  konstant gehalten. Da in der Veröffentlichung die Nachgiebigkeit der gesamten Presse angegeben ist, muss die Getriebbenachgiebigkeit gemäß

$$h_{\text{Presse}} = \frac{1}{3} h_{\text{Getriebe}} \quad (4.4)$$

zur Pressennachgiebigkeit umgerechnet werden. Die Gleichung kommt durch die Annahme zustande, dass drei Getriebe mit gleicher Nachgiebigkeit parallel geschaltet sind, wodurch sich ihre reziproken Nachgiebigkeiten addieren.

Die Pressennachgiebigkeit für das in dieser Arbeit entwickelte Modell ist in Abb. 4.3a dargestellt. Es ist zu sehen, dass es Bereiche gibt, in denen die Nachgiebigkeit stark ansteigt und etwa den dreifachen Wert gegenüber des blauen Bereichs aufweist. Der nachgiebige Bereich liegt dort vor, wo die obere Spindelposition an der oberen Grenze des Betriebsfensters liegt und die untere Position an der unteren Grenze. Dies führt zu einer gestreckten Lage der Verstelllaschen 2 und 3, sodass in ihnen hohe Axialkräfte vorliegen und somit große Stauchungen in ihnen zu erwarten sind.

Die Pressennachgiebigkeit aus [Gro17] hat dieselbe qualitative Abhängigkeit von den Spindelpositionen. Ein systematischer Fehler in der Struktur des in dieser Arbeit entwickelten Modells ist daher



**Abbildung 4.3.: Nachgiebigkeit der Presse für das Betriebsfenster der Spindelpositionen bei einem Exzenterwinkel von  $\varphi_{exz} = 90^\circ$ , a) Lineares Modell, b) Nachgiebigkeit aus [Gro17]**

unwahrscheinlich. Eine deutliche Abweichung findet sich jedoch in der quantitativen Auswertung. So ist die maximale Pressennachgiebigkeit aus [Gro17] etwa um den Faktor  $1,4/0,09 \approx 15,6$  größer als die in dieser Arbeit ermittelte Nachgiebigkeit. Die untere Grenze ist etwa  $0,2/0,03 \approx 6,7$  mal größer. Eine Erklärung für die deutlichen quantitativen Unterschiede in der Pressensteifigkeit findet sich in der Parameteridentifikation, die für das Modell aus [Gro17] vollzogen wurde. Modellparameter wurden angepasst, um die gemessene Pressensteifigkeit abbilden zu können. Der Vergleich zeigt, dass das Getriebemodell dieser Arbeit ebenfalls einer Parameteranpassung unterzogen werden muss.

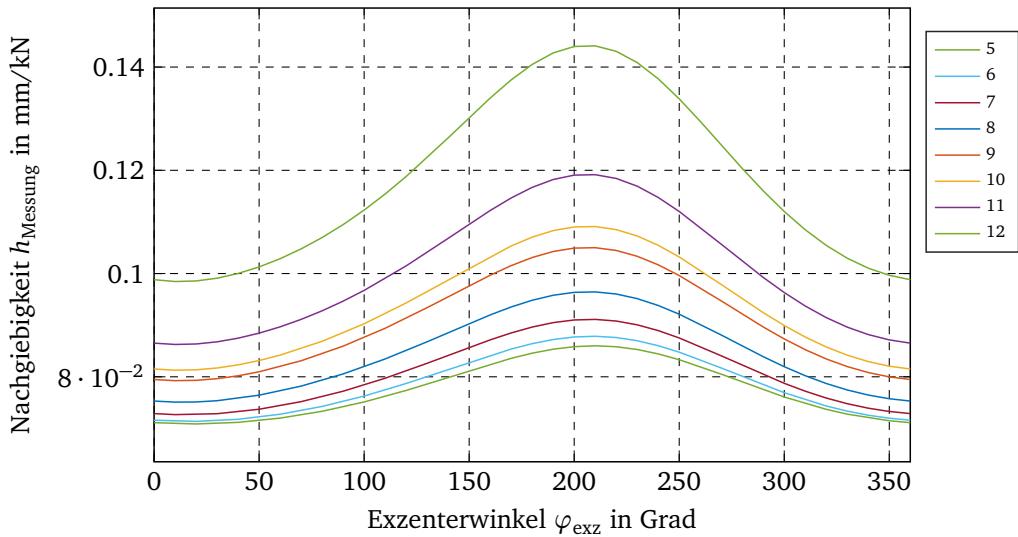
### Einfluss des Exzenterwinkels

Für die Untersuchung der Modellnachgiebigkeit unter Einfluss des Exzenterwinkels werden die Spindelpositionen konstant gehalten und die Nachgiebigkeit für einen Exzenterumlauf berechnet. Die Spindelpositionen werden für die in Tabelle 4.2 angegebenen Stellungen eingestellt. Sie werden ausgewählt, da für die Arbeiten [Amr16] und [Gro17] ein Getriebe für diese Positionen vermessen wurde. Dazu wurde mit einem Pneumatikzylinder eine Kraft von etwa 800 N auf die Lagerstelle zwischen Druckstange und Stößel aufgebracht und die Verschiebung des Gelenks D in y-Richtung gemessen [Amr16]. Das Verhältnis von Einfederung zur im Versuch gemessenen Kraft liefert die Getriebenachgiebigkeit. Sie ist für ausgewählte Spindelpositionen in Abb. 4.5 dargestellt. Abb. 4.4 zeigt zum Vergleich die mit dem linearisierten Getriebemodell ermittelte Nachgiebigkeit für dieselben Stellungen. Die auf die Druckstange wirkende Kraft beträgt dabei 800 N. Anhand der Modellergebnisse ist zu sehen, dass die Nachgiebigkeit von der Stellung 5 bis zur Stellung 12 größer wird. Diese Beobachtung deckt sich mit den Messungen. Das Modell sagt für alle Spindelpositionen bei einem Exzenterwinkel von etwa  $200^\circ$  das Maximum der Getriebenachgiebigkeit voraus. Dieser Sachverhalt kann von den in Abb. 4.5 gezeigten Stellungen nur für Stellung 11 und 12 beobachtet werden. Das Maximum der Nachgiebigkeit für einen Exzenterumlauf ist von den Spindelpositionen abhängig, was das Modell nicht wiedergibt.

In Abb. 4.6 sind die Nachgiebigkeitsverläufe aus Modell und Messung für vier verschiedene Stellungen übereinandergelegt. Die Messdaten beziehen sich auf die rechte Ordinatenachse, weshalb in dieser Darstellung ein genauerer qualitativer Vergleich der Nachgiebigkeit gezogen werden kann. Der Verlauf in den Stellungen 4 und 12 wird durch das Modell gut wiedergegeben. Jedoch ist im Modell das Verhältnis zwischen maximaler und minimaler Nachgiebigkeit bei diesen Stellungen größer als in den gemessenen Daten. Dies äußert sich darin, dass in der grafischen Darstellung die Maxima der Modelldaten oberhalb

**Tabelle 4.2.:** Stellungen des Getriebes für die Berechnung der Getriebennachgiebigkeit für verschiedene Exzenterwinkel

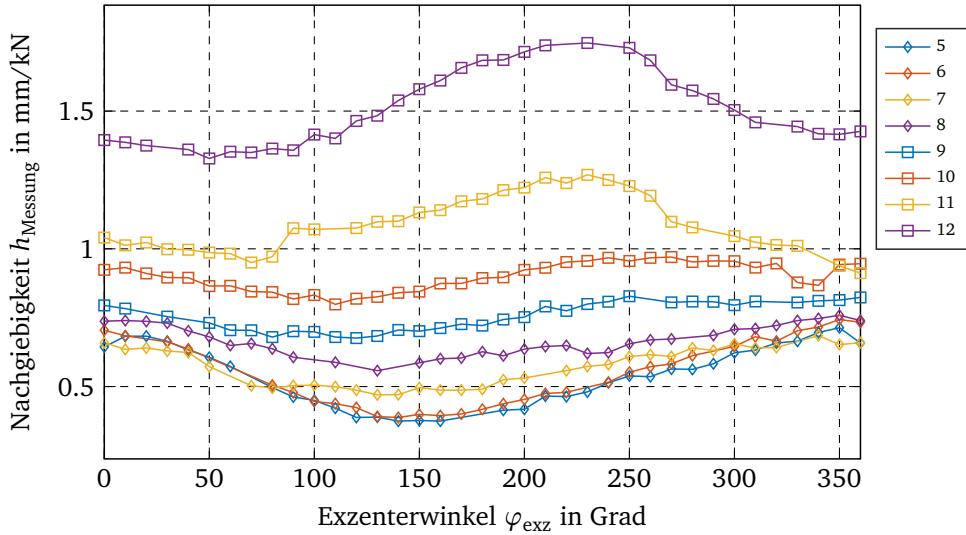
Bezeichnung	$x_{S_0}$ in mm	$x_{S_u}$ in mm
Stellung 1	273	40
Stellung 2	273	6.7
Stellung 3	273	0
Stellung 4	273	-33
Stellung 5	260	40
Stellung 6	260	30
Stellung 7	260	20
Stellung 8	260	10
Stellung 9	260	0
Stellung 10	260	-3.5
Stellung 11	260	-10
Stellung 12	260	-20



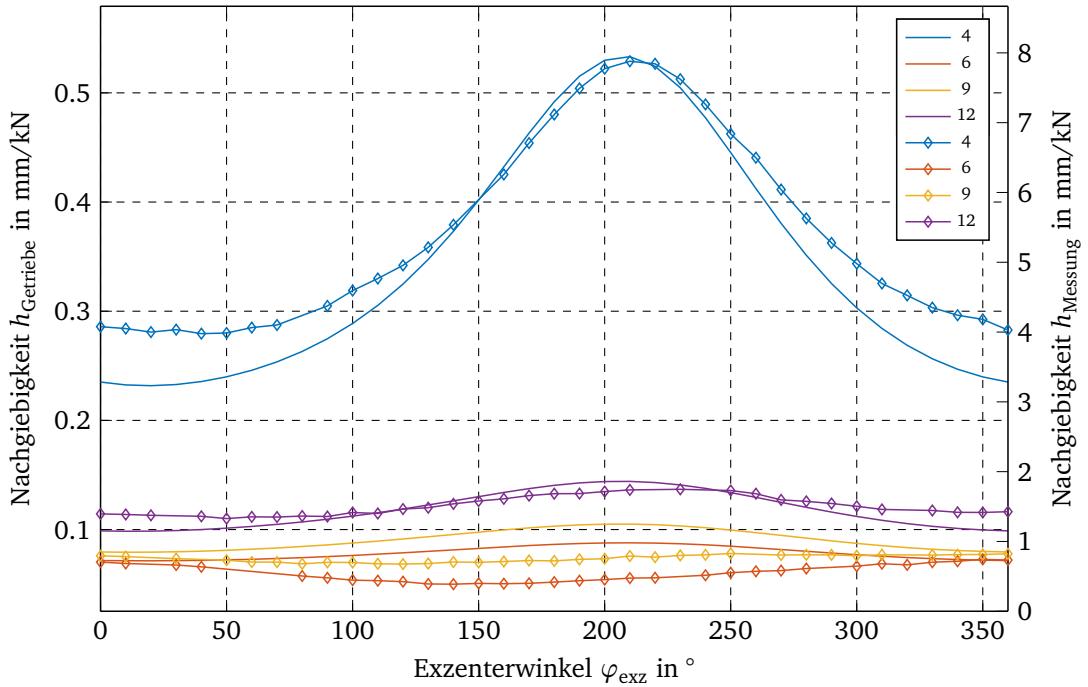
**Abbildung 4.4.:** Am Modell ermittelte Getriebennachgiebigkeit über den Exzenterwinkel für verschiedene Spindelstellungen nach Tabelle 4.2

der Messdaten liegen und in den Randbereichen (unterhalb  $100^\circ$  und oberhalb  $300^\circ$ ) die Modelllinie unter der Messlinie liegt. In den Stellungen 6 und 9 weicht der qualitative Verlauf wie oben beschrieben von den Messdaten ab. Dadurch führt eine Modellanpassung mittels Skalierung, die für die Stellungen 4 und 12 möglich wäre, keine verwendbare Getriebennachgiebigkeit.

Dass sich die Maxima der Getriebennachgiebigkeit mit einer Veränderung der Spindelpositionen verschiebt, stellt bereits AMRHEIN in [Amr16] fest. Er vermutet als Grund die in seinem Modell nicht modellierte Orientierung des oberen Getriebesystems. Diese These kann mit dem in dieser Arbeit entwickelten Modell bisher nicht belegt werden, da das gesamte Getriebe modelliert ist und die Nachgiebigkeit gemäß Abb. 4.4 nicht das gemessene Verhalten zeigt. Jedoch ist es denkbar, dass die im Modell hinterlegten Steifigkeiten zu groß gewählt sind, um den Einfluss der Nachgiebigkeit des oberen Getriebeteils wiederzugeben. Um dies zu überprüfen, wurden mit der Methode *trial and error* die Steifigkeiten der im oberen

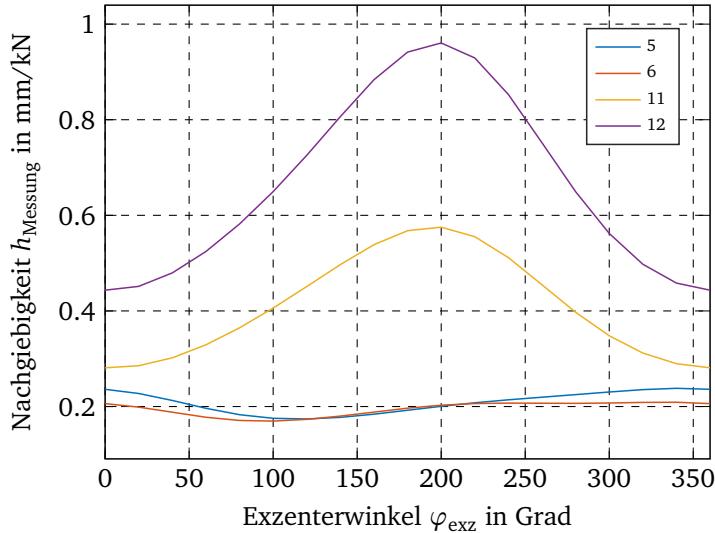


**Abbildung 4.5.:** An der 3D-Servo-Presse gemessene Getriebennachgiebigkeit auf Datenbasis aus [Amr16]



**Abbildung 4.6.:** Mit Modell berechnete (ohne Marker, linke Ordinatenachse) und gemessene (mit Marker, rechte Ordinatenachse) Getriebennachgiebigkeit über einen Exzenterumlauf für verschiedene Spindelpositionen nach Tabelle 4.2

Getriebe verbauten Koppeln variiert, um eine Verschiebung der Maxima zu erreichen. In Abb. 4.7 sind Ergebnisse dargestellt, für die die Steifigkeit der Verstelllasche 3 um den Faktor 0,01 und die Biegesteifigkeit des Verstellhebels um den Faktor 0,05 verkleinert wurden. Es ist erkenntlich, dass für die Stellungen 5 und 6 das Maximum nicht mehr bei  $200^\circ$  liegt, während das Maximum für die Stellungen 11 und 12 nicht verschoben wurde. Zudem finden sich für die Positionen 5 und 6 bei etwa  $100^\circ$  Minima wieder, die bei den Messdaten für die gleichen Spindelstellungen bei etwa  $150^\circ$  liegen. Die qualitativen Verläufe der Getriebennachgiebigkeit von Modell und Messung können angeglichen werden, wenn die Modellparameter angepasst werden. Damit zeigt sich, dass die in dieser Arbeit entwickelte Modellstruktur in der Lage ist, das in Messungen beobachtete Verhalten wiederzugeben. Dafür ist jedoch eine Parameteranpas-



**Abbildung 4.7.:** Getriebennachgiebigkeit über Exzenterwinkel nach Anpassung der Steifigkeit der Verstelllasche 3 und des Verstellhebels

sung notwendig, wodurch aus dem White-Box-Modell ein Grey-box-Modell wird. Sie wird im Folgenden systematisch durchgeführt.

#### 4.1.3 Parameteroptimierung auf Basis der Getriebennachgiebigkeit

Für eine Parameteridentifikation auf Basis der Getriebennachgiebigkeit werden Steifigkeiten vorgegeben, die vom Algorithmus der Identifikation angepasst werden können. Diese sind in Abb. 3.24 eingetragen. Für die Lager werden konstante Lagersteifigkeiten  $k_{L,i}$  verwendet. Sie unterscheiden sich nur nach Lagertyp. Gleiche Lagertypen an unterschiedlichen Gelenkpositionen erhalten dieselbe Steifigkeit. Für die Lager an den Punkten E, E1 und E0 werden eigene Steifigkeiten eingeführt. So können die Steifigkeiten an den Stellen von den reinen Lagersteifigkeiten abweichen, um etwaige Gehäusennachgiebigkeiten zu berücksichtigen. Auch die Biege- und Zug/Druck-Steifigkeit des Verstellhebels werden als variable Parameter vorgegeben.

Die Parameteridentifikation arbeitet mit der MATLAB-Funktion `lsqnonlin`, welche eine nichtlineare Optimierung nach dem *trust-region-reflective*-Algorithmus durchführt [Mat17]. Das Gütekriterium des Algorithmus ist die Summe der Fehlerquadrate, die durch die Wahl der Parameter minimiert wird. Angewendet auf die Parameteridentifikation wird ein Minimum der Fehlerquadratsumme (SSE, sum of squared errors)

$$\text{SSE} = \sum_{\text{Getriebestellung}} [h_{\text{Messung}}(\mathbf{k}) - h_{\text{Modell}}(\mathbf{k})]^2 \quad (4.5)$$

gesucht. Dabei wird über alle Getriebestellungen summiert, für die Messdaten vorliegen, siehe Tabelle 4.2. Die Auflösung des Exzenterwinkels beträgt gemäß den Messdaten  $10^\circ$ . Alle zu identifizierenden Steifigkeiten sind im Vektor

$$\mathbf{k} = [k_{L,E}, k_{L,E0}, k_{L,E1}, k_{L,1}, k_{L,2}, k_{L,4}, k_{11}, k_{10}, k_7, k_5, k_{12}, k_{9,z/d}, k_{9,b}]^T \quad (4.6)$$

zusammengefasst. Da der Optimierungsalgorithmus iterativ arbeitet, muss ein Startvektor vorgegeben werden. Dieser beinhaltet die in Kapitel 3 hergeleiteten Koppel- und Lagersteifigkeiten, welche in  $\mathbf{k}_0$  aggregiert werden. Um Rechenzeit bei der Optimierung einzusparen, wird das vollständig linearisierte Modell zu Grunde gelegt, wodurch die Modellnachgiebigkeit von der aufgebrachten Kraft unabhängig

wird. Unrealistische Parameter werden verhindert, indem Intervalle vorgegeben werden, in denen sich die Parameter bewegen dürfen. Diese werden mit

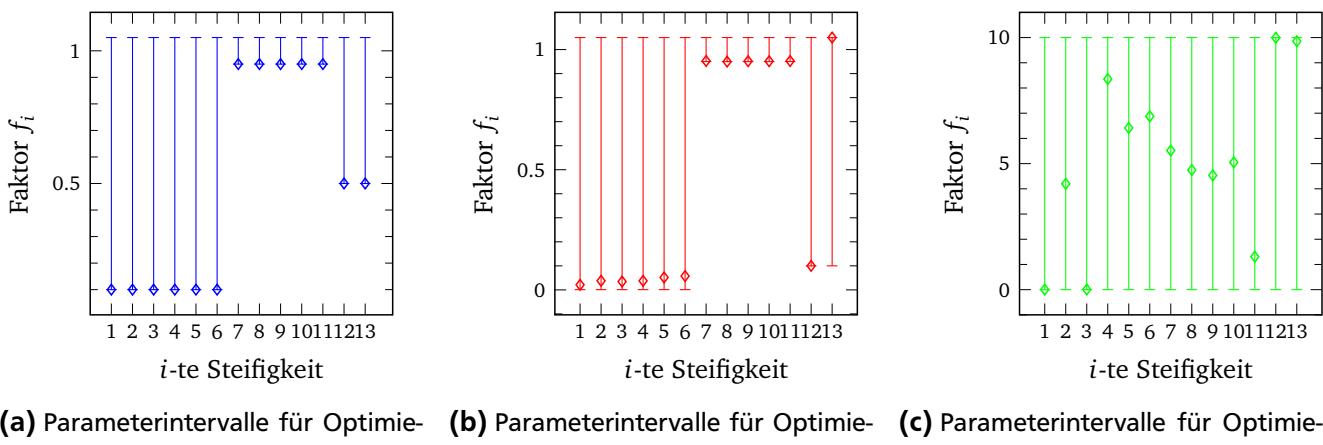
$$[k_{i,\min}, k_{i,\max}] = [f_{i,\min} \cdot k_{i,0}, f_{i,\max} \cdot k_{i,0}] \quad (4.7)$$

relativ zur Anfangssteifigkeit angegeben.

Es werden drei unterschiedliche Optimierungen gezeigt. Sie unterscheiden sich in den für die Optimierung vorgegebenen Intervallen, Abb. 4.8. Allen Intervallen der ersten beiden Optimierungen ist gemein, dass die obere Grenze bei 1,05 liegt und somit Werte zulässt, die 5 % größer sind als die Anfangssteifigkeit. Nach unten sind die Intervalle weiter gefasst, da bei der Modellierung des Getriebes in der Regel nicht alle nachgiebigen Bauelemente berücksichtigt werden.

Die größte Unsicherheit wird in den Lagerstellen erwartet, insbesondere an den Stellen, an denen Lager der Umgebung verbunden sind. Deswegen wird in der ersten Optimierung die untere Grenze auf das 0,1-fache der Ausgangssteifigkeit gesetzt, Abb. 4.8a. Da die Steifigkeiten der auf Zug/Druck belasteten Koppeln per FEM berechnet wurden, sind Abweichungen als gering einzuschätzen. Die Steifigkeiten können nach oben und unten um 5 % abweichen. Anders verhält es sich bei der Steifigkeit des Verstellhebels. Durch das in Abschnitt 3.5.2 beschriebene Umrechnen der per FEM ermittelten Steifigkeiten in eine Steifigkeitsmatrix, kann ein größerer Fehler entstehen, da die Schubnachgiebigkeit in der EULER-BERNOULLI-Modellierung der Balkenelemente nicht berücksichtigt wird. Daher werden die unteren Grenzen der Balkensteifigkeit auf 0,5 gesetzt.

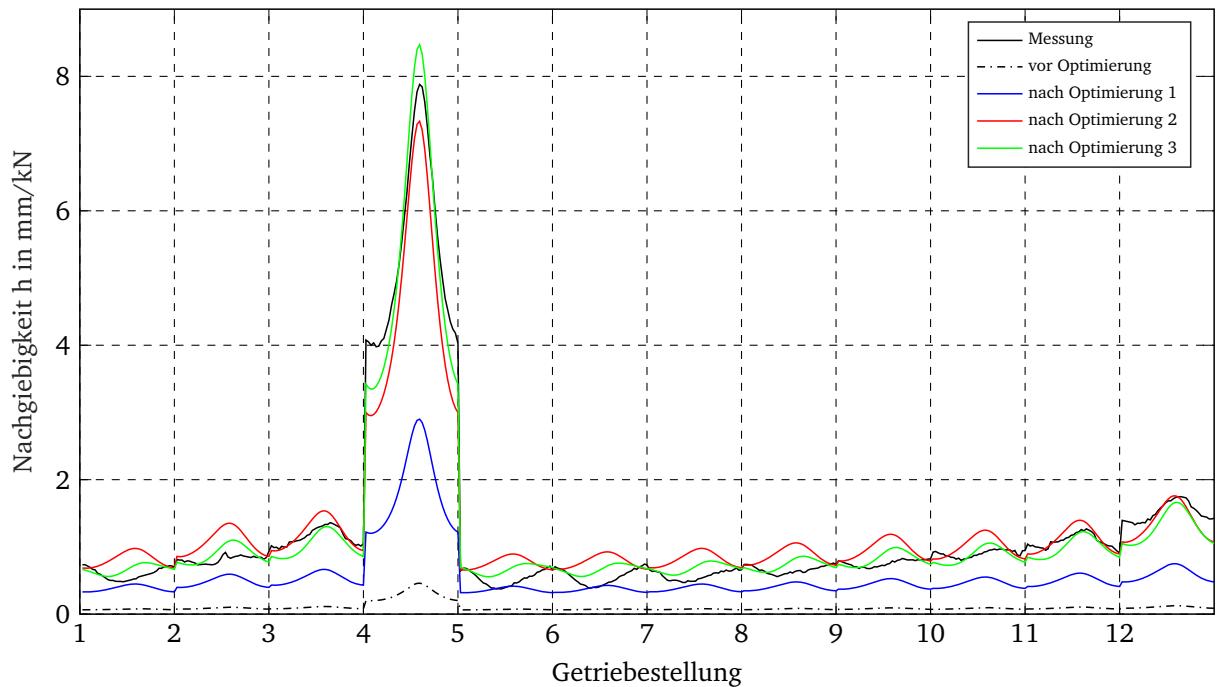
Das Ergebnis der ersten Optimierung ist in Abb. 4.9 zu sehen. Aufgetragen ist die gemessene Getriebennachgiebigkeit sowie die Modellnachgiebigkeit vor und nach der Optimierung. Für die Abszisse sind alle in Tabelle 4.2 aufgelisteten Spindelpositionen aneinander gereiht. Zwischen ihnen durchläuft der Exzenter einen vollen Umlauf. Nach der ersten Optimierung (blau) wird die Modellnachgiebigkeit deutlich erhöht, jedoch ist sie im Vergleich zu den Messdaten immer noch zu gering. Die Wahl der Parameter (Rechtecke in Abb. 4.8a) zeigt, dass durch die Optimierung alle zu identifizierenden Steifigkeiten auf die untere Intervallgrenze gesetzt werden. Eine weitere Erhöhung der Modellnachgiebigkeit und damit Angleichung an die Messdaten kann nur erreicht werden, wenn die untere Intervallgrenze weiter herabgesetzt wird, was in der zweiten Optimierung umgesetzt ist. In Optimierung 2 liegt die untere



**(a) Parameterintervalle für Optimierung 1    (b) Parameterintervalle für Optimierung 2    (c) Parameterintervalle für Optimierung 3**

**Abbildung 4.8.: Relative Intervalle für die Parameteridentifikation und Parameterauswahl des Optimierungsalgorithmus**

Intervallgrenze für die Lager bei 0,1 %, während sie bei 10 % für die Balkensteifigkeit liegt. Mit diesen Intervallen wird die Modellnachgiebigkeit erneut erhöht, Abb. 4.9. Für die Stellung 3 und 4 ist eine Angleichung zwischen Modell und Messdaten zu erkennen. Allerdings ist die Modellnachgiebigkeit für die Stellungen 5 bis 12 größer als die gemessene, was auch darauf zurückzuführen ist, dass der in Abschnitt 4.1.2 erläuterte qualitative Verlauf nicht wiedergegeben wird. So ist in den Stellungen 5 bis 10



**Abbildung 4.9.:** Modellnachgiebigkeit vor und nach den Optimierungen und gemessene Getriebennachgiebigkeit über Exzenterumläufe aller in Tabellen 4.2 aufgelisteten Spindelstellungen

ein antiphasischer Verlauf zu erkennen: Während die Messung in einer Getriebestellung ein Minimum aufweist, besitzt das Modell in derselben Stellung ein Maximum. Dem Optimierer gelingt der qualitative Angleich nicht. Die Wahl der Parameter, Abb. 4.8b, zeigt, dass Koppelsteifigkeiten an der Intervallgrenze liegen und damit die Parameterwahl eingrenzen, was die qualitativen Unterschiede zwischen Messung und Modell erklären könnte.

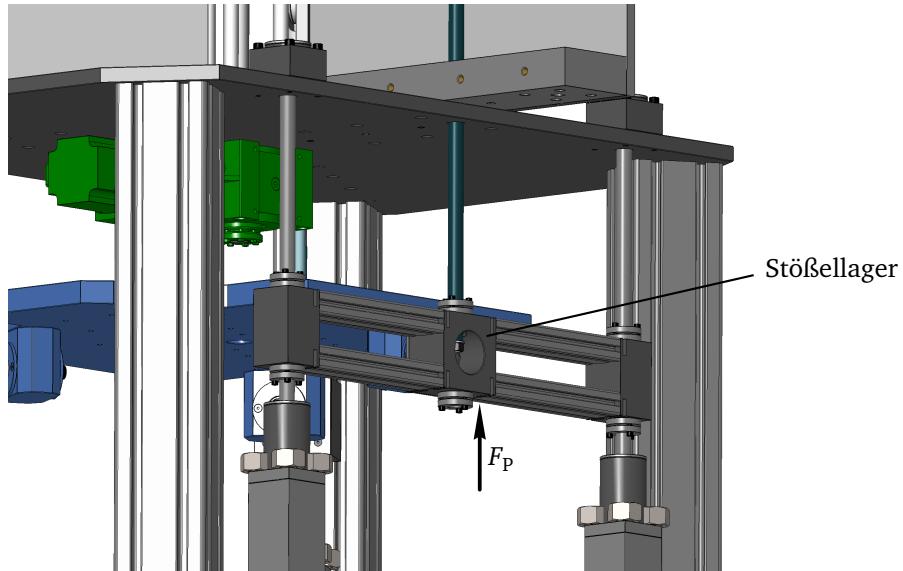
Mit der dritten Optimierung werden die Intervallgrenzen sehr weit gefasst, um dem Algorithmus große Freiheiten bei der Parameterwahl zu ermöglichen. Alle unteren Intervallgrenzen liegen bei 0,1 %. Die Modellnachgiebigkeit (grün) ist quantitativ nah an der gemessenen. Zudem ist für die Stellungen 6 bis 9 eine Phasenverschiebung zwischen der zweiten (rot) und dritten Optimierung zu erkennen. Jedoch ist dieser nicht ausreichend groß, um die Messdaten befriedigend anzunähern. Die Parameterwahl der dritten Optimierung, Abb. 4.8c, weicht deutlich von den vorherigen Optimierungen ab. Zusätzlich befinden sich einige Parameter wieder an ihrer Intervallgrenze und nehmen, wie an den Koppelsteifigkeiten zu sehen ist, unrealistisch große Werte ein.

Mit der in diesem Abschnitt vorgestellten Methode gelingt keine befriedigende Parameteridentifikation. Das Ergebnis der Identifikation ist stark abhängig von den für die Optimierung vorgegebenen Parameterintervallen. Es gelingt nicht, die Messwerte qualitativ korrekt abzubilden. Zudem werden unrealistische Parameter ermittelt, sodass eine andere Identifikationsmethode verwendet werden muss.

#### 4.1.4 Messung der Gelenkverschiebungen

Im Abschnitt 4.1.3 scheiterte die Parameteridentifikation. Eine mögliche Ursache kann darin liegen, dass mit der Getriebennachgiebigkeit nur eine Größe vorliegt, die mit der Parameteridentifikation gefüllt wird. Die Verschiebungen innerhalb des Getriebes bleiben dabei unberücksichtigt, was eine eindeutige Parameterauswahl erschwert. Gleichzeitig können ausgewählte Parameter im Modell zu Getriebeverformungen führen, die real gar nicht auftreten. Deshalb ist es sinnvoll, das belastete Getriebe an mehreren Stellen zu vermessen, was in diesem Abschnitt durchgeführt wird.

Es wird die Verformung des dritten Getriebekastens in Folge einer Kraft an der Druckstange vermessen. Das Getriebe befindet sich in der in Tabelle 4.3 aufgelisteten Getriebestellung. Die Kraft wird mit einem Pneumatikzylinder aufgebracht und prägt die Kraft  $F_p$  am in Abb. 4.10 dargestellten Stößellager auf.



**Abbildung 4.10.:** Modell eines Stabes bestehend aus Punktmassen und Feder

**Tabelle 4.3.:** Stellungen des Getriebes für die Vermessung von Gelenkverschiebungen unter Last

$\varphi_{exz}$ in °	$x_{So}$ in mm	$x_{Su}$ in mm
0	273	-33

Zur Messung der Gelenkverschiebungen werden Messuhren mit einer Auflösung von  $1\text{ }\mu\text{m}$  eingesetzt um die in Tabelle 4.4 angegeben Verschiebungen zu messen. Der in der Presse integrierte Lineargeber misst die Verschiebung des Punktes D in  $y$ -Richtung. Aufgrund des kleinen Bauraums innerhalb des Getriebekastens können nicht alle Gelenkverschiebungen gleichzeitig gemessen werden. Die Messungen werden daher auf vier Messreihen aufgeteilt. Weil zwischen den durch ein Lager verbundenen Getriebegliedern Relativverschiebungen auftreten können, ist in Tabelle 4.4 aufgelistet, an welchem Getriebeglied gemessen wird. Ist eine Koppel mehrmals parallel verbaut, wird nur an einer Koppel gemessen.

**Tabelle 4.4.:** Gemessene Gelenkverschiebungen

Bezeichnung	Getriebepunkt	Bauteil	Richtung	Messreihe
Dy	D	Druckstange	y	1
Ry	R	Stoßellager	y	1
Ex	E	Verstelllasche 1	x	2
Ey	E	Verstelllasche 2	y	4
Ax	A	Exzenterpleuel	x	3
Fx	F	Verstellhebel	x	1
B0y	B0	Verstellhebel	y	1
Hy	H	Verstelllasche 3	y	1

Alle Messinstrumente werden bei  $F_p = 0$  genullt. Anschließend wird der Druck im Pneumatikzylinder händisch gesteigert, sodass die per Kraftmessdose gemessene Kraft  $F_p$  um ca. jeweils 100 N ansteigt. Die Messuhren werden bei jedem Kraftniveau abgelesen. Nach dem Erreichen der Maximalkraft von ca. 1450 N wird die Kraft in etwa 100 N Schritten gesenkt und Kraft sowie Verschiebungen dokumentiert.

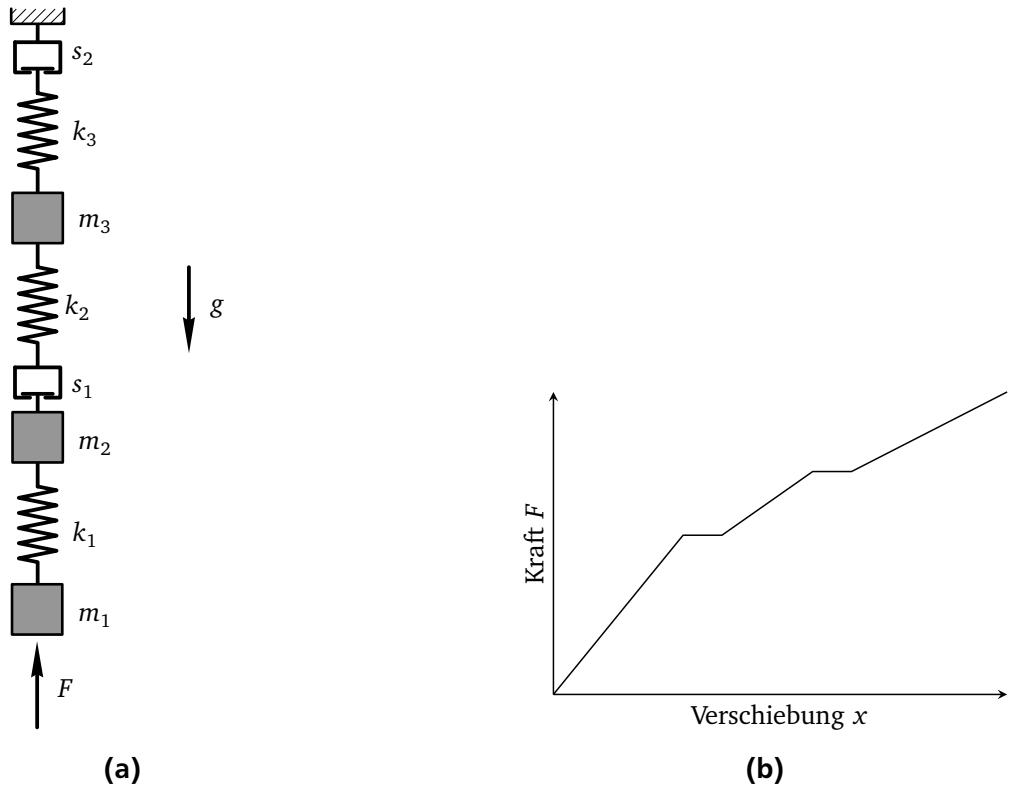
Die Messergebnisse sind in Tabelle A.1 notiert. Die graphische Aufbereitung ist in Abb. 4.12 zu sehen.

Der Kraft-Verschiebung-Verlauf für den Punkt H in y-Richtung – Abb. 4.12h – kann physikalisch nicht gedeutet werden und wird daher nicht weiter verwendet.

Aufgrund der geringen Verschiebung des Exzenterpleuels am Punkt A von etwa  $5\mu\text{m}$ , Abb. 4.12e, ist die Annahme der nicht nachgiebigen Exzenterwelle sowie Lagerung im Punkt A0 gerechtfertigt. Die Be- und Entlastungskurven wurden für diese Punkt aus demselben Grund nicht aufgezeichnet.

Die größten Gelenkverschiebungen werden in den Punkten D und R gemessen. Dies ist sinnvoll, da zwischen ihnen und dem Getriebekasten die meisten Koppeln liegen, die durch ihre Elastizität zur Verschiebung dieser Punkte beitragen. Ferner besitzen beide Punkte einen sehr ähnlichen qualitativen Verlauf, da beide an der Druckstange liegen.

Zu erkennen ist in allen Verläufen, dass zwischen der Be- und Entlastung eine Hysterese auftritt, sodass bei der Entlastung eine größere Verschiebung zu messen ist als bei der Belastung. Ein Grund für die beobachtete Hysterese könnte Reibung sein, die beim Entlasten überwunden werden muss. Des Weiteren sind in Verläufen von  $Dy$ ,  $Ry$ ,  $Fx$  und  $B0y$  Sprünge zu sehen, bei denen die Verschiebung bei kleiner Krafterhöhung sprunghaft ansteigt. Sie treten etwa zwischen 400 und 500 N sowie 800 und 900 N auf. In den Verschiebungen des Punktes E ist nur der erste Sprung erkennbar. Ein Grund für diese Sprünge könnte mechanisches Spiel sein, das beim Überschreiten der Gewichtskraft überwunden wird.

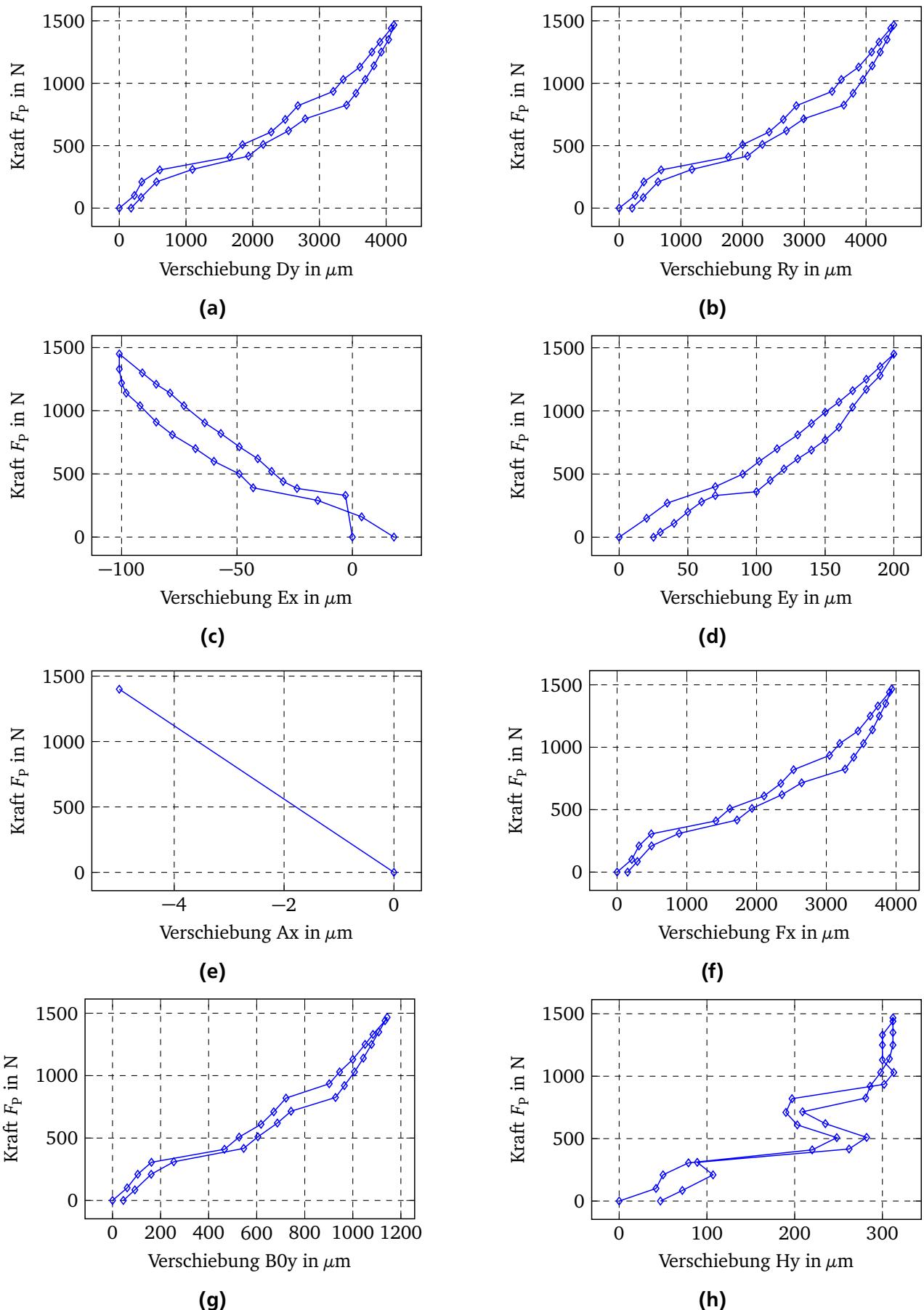


**Abbildung 4.11.:** Spiel als Ursache der beobachteten Sprünge in aufgenommenen Kennlinien, a) Modell, b) Resultierende Kennlinie

Abbildung 4.11a verdeutlicht dies mit einem Modell. Mit dem Aufbringen der Kraft  $F$  wird zunächst nur für die Masse  $m_1$  eine Verschiebung  $x$  erzielt, Abb. 4.11b. Der Kraft-Weg-Verlauf ist eine Gerade mit

der Steigung  $k_1$ . Erst wenn die Kraft die Gewichtskraft von  $m_1$  und  $m_2$  übersteigt, kann das Spiel  $s_1$  überwunden werden. Anschließend ergibt sich erneut ein linearer Kraft-Weg-Verlauf. Dieses Mal berechnet sich die Steifigkeit aus der Reihenschaltung von  $k_1$  und  $k_2$ . Dasselbe Prinzip setzt sich für das Spiel  $s_2$  fort. Durch die Reihenschaltung der Steifigkeiten in diesem Modell wird der Kraft-Weg-Verlauf nach jedem Spielsprung flacher. Dieses Verhalten wird in den Messungen nicht beobachtet.

Allen aufgenommenen Verläufen ist gemein, dass sie unter Vernachlässigung der Hysterese für Kräfte ab 1000 N eine näherungsweise lineare Charakteristik besitzen. Im Sinne der Zustandsüberwachung der Presse ist es sinnvoll, die Steifigkeit des Getriebes in diesem linearen Bereich zu erfassen, sodass mechanisches Spiel keinen nennenswerten Einfluss auf die Getriebesteifigkeit hat. Eine andere Möglichkeit bestünde darin, mechanisches Spiel im Modell zu implementieren, um eine bessere Übereinstimmung zwischen Messdaten und Modell zu erzielen.

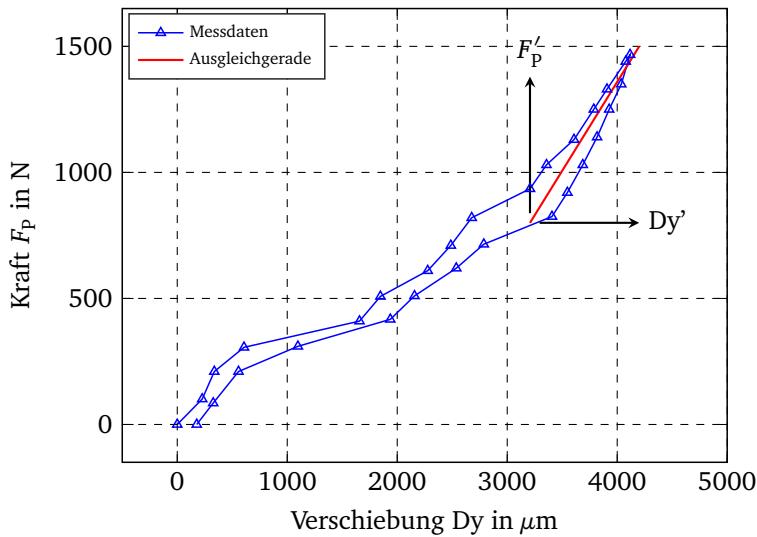


**Abbildung 4.12.: Gelenkverschiebungen bei Be- und Entlastung des Getriebes**

#### 4.1.5 Parameteridentifikation auf Basis der Gelenkverschiebung

In diesem Abschnitt wird die Parameteridentifikation mit der in Kapitel 4.1.4 gezeigten Gelenkverschiebungen durchgeführt. Die Identifikation ähnelt der in Abschnitt 4.1.3 dargelegten Parameteridentifikation. Die Basis stellt der in der MATLAB-Funktion `lsqnonlin` implementierte *trust-region-reflective*-Algorithmus dar, der iterativ eine Fehlerquadratsumme minimiert. Anders als in Abschnitt 4.1.3 wird die Identifikation nur für eine Getriebestellung durchgeführt, da die Messdaten lediglich für eine Stellung erhoben wurden.

Das Modell kann weder die beobachtete Hysterese noch die im Kraft-Weg-Verlauf erkennbaren Sprünge abbilden. Deswegen werden die Messdaten aufbereitet und um diese Effekte bereinigt. Abbildung 4.13 zeigt das Vorgehen am Beispiel der Verschiebung des Punktes D in y-Richtung. Zur Bereinigung des



**Abbildung 4.13.: Aufbereitung der Messdaten durch Einführen eines neuen Koordinatensystems, dessen Ursprung bei 800 N und auf der Ausgleichsgeraden verankert ist**

Spiels werden alle Messdaten, die bei Kräften unterhalb von 800 N aufgenommen wurden, nicht weiter betrachtet. Damit wird das Modell auf Messdaten angepasst, bei der sich die Presse in einem vorgespannten Zustand befindet. Dazu wird das  $F'_P, Dy'$ -Koordinatensystem eingeführt, dessen Ursprung bei 800 N verankert ist. Das Getriebemodell besitzt, sofern von konstanten Lagersteifigkeiten ausgegangen wird, eine lineare Kraft-Verschiebungs-Charaktersistik, vgl. Abschnitt 4.1.1. Dadurch kann das Modell im besten Fall nur eine Gerade wiedergeben, die durch den Ursprung des neuen Koordinatensystems führt. Die Verankerung des Koordinatensystems beeinflusst damit die resultierende Steifigkeit des Modells nach der Parameteridentifikation. Liegt der Ursprung weiter rechts in Richtung größerer Verschiebungen, resultiert eine Gerade mit einer größeren Steigung und damit auch größeren Steifigkeit. Um die Wahl nicht willkürlich zu treffen, wird eine Ausgleichsgerade für die Messdaten über 800 N berechnet (rote Linie in Abb. 4.13 ) und der Ursprung des  $F'_P, Dy'$ -Koordinatensystems darauf verankert. Die Parameteridentifikation liefert nun bestenfalls die rote Ausgleichsgerade als Kraft-Weg-Verlauf, welche als Mittelung der beobachteten Hysterese angesehen werden kann. Für die Optimierung wird jedoch nicht die Ausgleichsgerade vorgegeben, sondern die im ersten und ggf. zweiten Quadranten liegenden Daten des  $F'_P, Dy'$ -Koordinatensystems. Die Fehlerquadratsumme berechnet sich demnach über

$$SSE = \sum_{j=\text{Kraft}} \sum_{i=\text{Gelenk}} \left[ \Delta x'_{ij, \text{Modell}}(k) - \Delta x'_{ij, \text{Messung}}(k) \right]^2, \quad (4.8)$$

wobei die Messdaten der Gelenke Dy, Ry, Ex, Ey, Fx und B0y berücksichtigt werden und über alle Kraftniveaus addiert wird.

**Tabelle 4.5.: Durchgeführte Optimierungen mit zu identifizierenden Parametern, Startvektor für die Optimierung und Fehlerquadratsumme**

Nummer der Optimierung	freie Parameter	$a_{\text{Start}}$	SSE in $\mu\text{m}^2$
1	alle	1	3,6228
2	alle	0,95	3,6235
3	alle	1,05	3,6225
4	$k_{\text{L,E}}, k_{\text{L},1}, k_7, k_5, k_{12}$	1	86,2331
5	$k_{\text{L,E}}, k_{\text{L},1}, k_7, k_5, k_{12}$	0,95	86,2458
6	$k_{\text{L,E}}, k_{\text{L},1}, k_7, k_5, k_{12}$	1,05	86,2388
7	$k_{\text{L,E}}, k_{\text{L},1}, k_7, k_5, k_{12}$	0,5	86,2516

Um die Robustheit der Parameteridentifikation zu überprüfen, werden mehrere Optimierungen durchgeführt. Sie sind in Tabelle 4.5 aufgelistet. Mit den ersten drei Identifikationen werden alle Parameter – siehe Gleichung 4.6 – variabel gesetzt und können durch den Optimierer bestimmt werden. In den Optimierungen 4 bis 7 sind die freien Parameter auf eine Auswahl beschränkt. Für jeden der beiden Parametersätze wird der für die Optimierung notwendige Startvektor variiert. Er berechnet sich zu

$$\mathbf{k}_{\text{Start}} = a_{\text{Start}} \cdot \mathbf{k}_0. \quad (4.9)$$

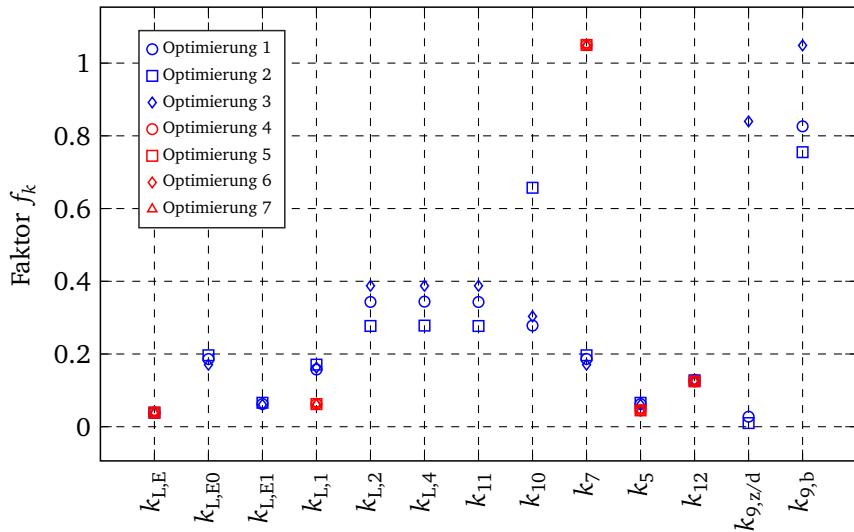
Die Fehlerquadratsumme zu jeder Parameteridentifikation ist in Tabelle 4.5 angegeben. Tabelle A.2 im Anhang listet den für jede Identifikation als optimal betrachteten Parameter auf. Sie sind ähnlich zur Definition des Startvektors relativ zur Ursprungssteifigkeit  $\mathbf{k}_0$  angegeben,

$$\mathbf{k}_{\text{optimal}} = f_i \circ \mathbf{k}_0. \quad (4.10)$$

Der Index  $i$  in  $f_i$  kennzeichnet die Nummer der Optimierung, aus der der Parametersatz entspringt. Der Operator ist das HADAMARD-Produkt, bei dem die Vektoren elementweise multipliziert werden.

Anhand der verbleibenden Fehlerquadratsummen ist ersichtlich, dass die Optimierung bessere Ergebnisse liefert, wenn alle Steifigkeitsparameter variabel gestaltet sind. Jedoch ist mit Abb. 4.14 abzuleiten, dass das Ergebnis der Optimierung anfällig gegenüber des Startvektors  $\mathbf{k}_{\text{Start}}$  ist, wenn alle Parameter bestimmt werden. Eine Skalierung des Startvektors mit jeweils 5 % Abweichung führt zu unterschiedlichen Parametersätzen. Zwar weisen einige Parameter wie  $k_{\text{L,E}}, k_{\text{L},1}$  nur kleine Abweichungen auf, allerdings sind für  $k_{10}, k_{9,z/d}$  und  $k_{9,b}$  große Unterschiede zu beobachten. Es kann daher nicht davon ausgegangen werden, dass trotz der ähnlichen Fehlerquadratsummen ein globales Minimum gefunden wird. Wird die Anzahl der Parameter auf die Auswahl beschränkt, ist ein Anstieg in der Fehlerquadratsumme festzustellen, Tabelle 4.5. Das Ergebnis der Optimierung ist damit formal schlechter. Jedoch ist festzustellen, dass die Parameter nicht mehr streuen und für alle Startvektoren, selbst für  $0,5 \cdot \mathbf{k}_0$  in Optimierung 7, denselben Parametersatz liefert. Eine mögliche Ursache für die Eindeutigkeit der Optimierung könnte das Verhältnis zwischen der Anzahl der gemessenen Gelenkverschiebung und der Anzahl der zu optimierenden Parameter sein. Je mehr Gelenkverschiebungen gemessen werden, desto eher können die Modellparameter eindeutig identifiziert werden.

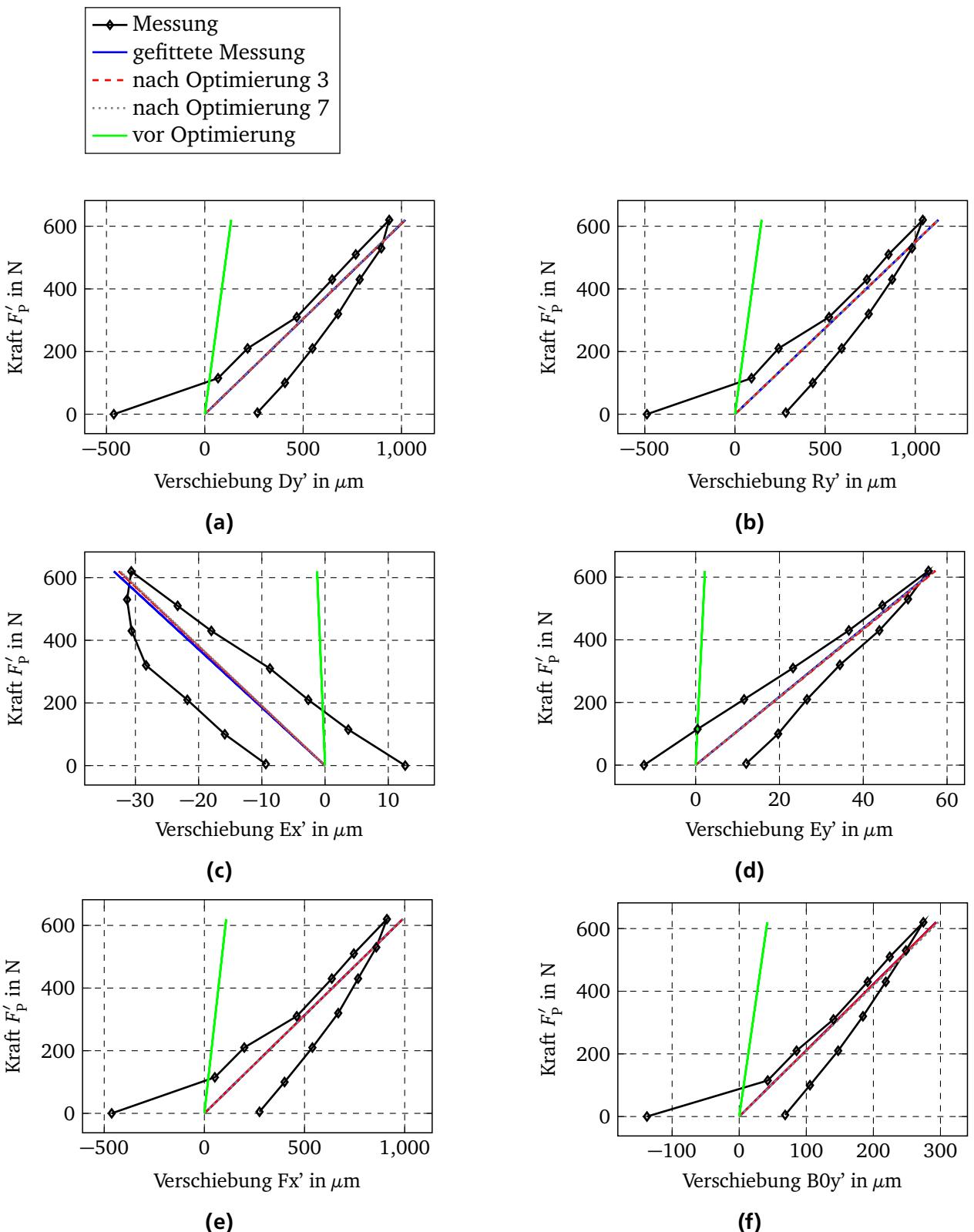
In Abb. 4.15 sind die gemessenen sowie die aus dem angepassten Modell berechneten Gelenkverschiebungen zu sehen. In allen Fällen wird die eine Kennlinie erreicht, die Ausgleichsgerade der Messdaten approximiert. Damit ist gezeigt, dass bereits mit der kleinen Auswahl anzupassender Parameter die errechnete Gelenkverschiebungen quantitativ an die gemessenen Daten angeglichen werden können. Die



**Abbildung 4.14.:** Optimale relative Parameter  $f_k = k_{\text{optimal},k}/k_{0,k}$  für die durchgeführten Optimierungen.  
Blau: Alle Steifigkeiten werden optimiert. Rot: Die Optimierung beschränkt sich auf eine Auswahl an Parametern

schlechtere, auf der Fehlerquadratsumme begründete Qualität der Optimierung 7 kann im Verlauf der Verschiebung Ex' belegt werden. Jedoch ist die Abweichung zur optimalen Ausgleichsgerade marginal und damit vernachlässigbar. Durch die mit dem Modell nicht abgebildete Hysterese ergibt sich ein Fehler, der deutlich größer ist.

Als Fazit kann festgehalten werden, dass mit weniger Parametern eine Parameteridentifikation erzielt wird, deren Parametersatz eindeutig ist. Auf Grundlage der vorliegenden Datenbasis ist das Modell mit weniger angepassten Parametern hinreichend genau. Es ist unklar, ob nicht gemessene Gelenkverschiebungen korrekt wiedergegeben werden. Dafür sind weitere Messungen von Gelenkverschiebungen notwendig. Gegebenenfalls ließe sich mit einem erweiterten Datensatz die Identifikation aller Steifigkeitsparameter eindeutig durchführen. Des Weiteren bleibt zu klären, inwiefern die Kraft-Verschiebung-Verläufe in anderen Getriebestellungen abgebildet werden. Dafür sind ebenfalls weitere Messungen an der Presse notwendig. Zukünftige Messungen sollten am vorgespannten Getriebe vorgenommen werden, sodass die Kennlinien kein Spiel besitzen. Dies erleichtert die Parameteranpassung des in dieser Arbeit vorgestellten Modells, das kein Spiel abbilden kann, erheblich.



**Abbildung 4.15.:** Unter Vorspannung gemessene Gelenkverschiebung sowie Verschiebungen aus dem Getriebemodell vor und nach der Parameteridentifikation

## 4.2 Unsicherheit in den Steifigkeitsparametern

In diesem Abschnitt wird die Parameterunsicherheit untersucht. Dafür wird zunächst ein Maß für die Unsicherheit gefunden. Anschließend werden die Auswirkungen auf die Getriebenechtheit gezeigt.

### 4.2.1 Bestimmung von Parameterunsicherheit

Die in Abschnitt 4.1.5 bestimmten Parameter unterliegen einer Unsicherheit. Bei der Unsicherheit muss zunächst zwischen zwei Formen differenziert werden. Bei der ersten Ausprägung kommt die Unsicherheit dadurch zu Stande, dass der Optimierungsalgorithmus, der die Modellparameter auf die Messdaten füttet, die Parameter nicht genau bestimmen kann. Das ist darauf zurückzuführen, dass das die Messdaten bloß einen Stichprobenumfang darstellen und die durch das Modell definierte Schätzfunktion niemals die Gesamtheit aller Messdaten widerspiegeln kann [Kuc]. Daraus lässt sich ableiten, dass die Unsicherheit der identifizierten Parameter kleiner ist, je mehr Messdaten für die Identifikation vorliegen und je besser die Messdaten mit der linearen Kraft-Verschiebung-Charakteristik des Modells übereinstimmen. Die zweite Form der Unsicherheit entsteht durch das Verhalten der Presse und der bei jeder Messung einfließenden Messunsicherheit. So ist es denkbar, dass bei mehrmaligem Messen der Gelenkverschiebungen unterschiedliche Kennlinien gemessen werden, was zu unterschiedlichen Kennwerten führt.

Um beide Formen der Unsicherheit zu untersuchen, wurden weitere Messdaten bei der in Tabelle 4.3 aufgeführten Getriebestellung aufgenommen. Mit der Erkenntnis aus Abschnitt 4.1.4 sollten die Kennlinien kein Spiel aufweisen. Dazu wurde ein weiterer Pneumatikzylinder eingesetzt, der eine Vorspannkraft auf das Stoßellager aufbrachte. Das genaue Kraftniveau wurde nicht gemessen. Mit dem anderen Pneumatikzylinder wurde die zusätzliche Prozesskraft  $F_p$  aufgebracht, die neben den jeweiligen Gelenkverschiebungen dokumentiert wurde. Mit insgesamt vier Be- und Entlastungszyklen ist das Ergebnis in Abb. 4.16 dargestellt.

Zur Bestimmung der Unsicherheit wird jeder Zyklus in Be- und Entlastungsverlauf aufgeteilt und wie in Abschnitt 4.1.5 einer linearen Regression unterzogen, sodass die Kennlinien um den Offset bereinigt werden können. Gleichzeitig kann über die Steigung der Ausgleichsgeraden die Steifigkeit berechnet werden. Die so aufbereiteten Daten für die Verschiebung des Gelenks in Dy sind exemplarisch in Abb. 4.17 gezeigt. Tabelle zeigt die auf die vertikale Verschiebung des Punktes D basierende Getriebesteifigkeit.

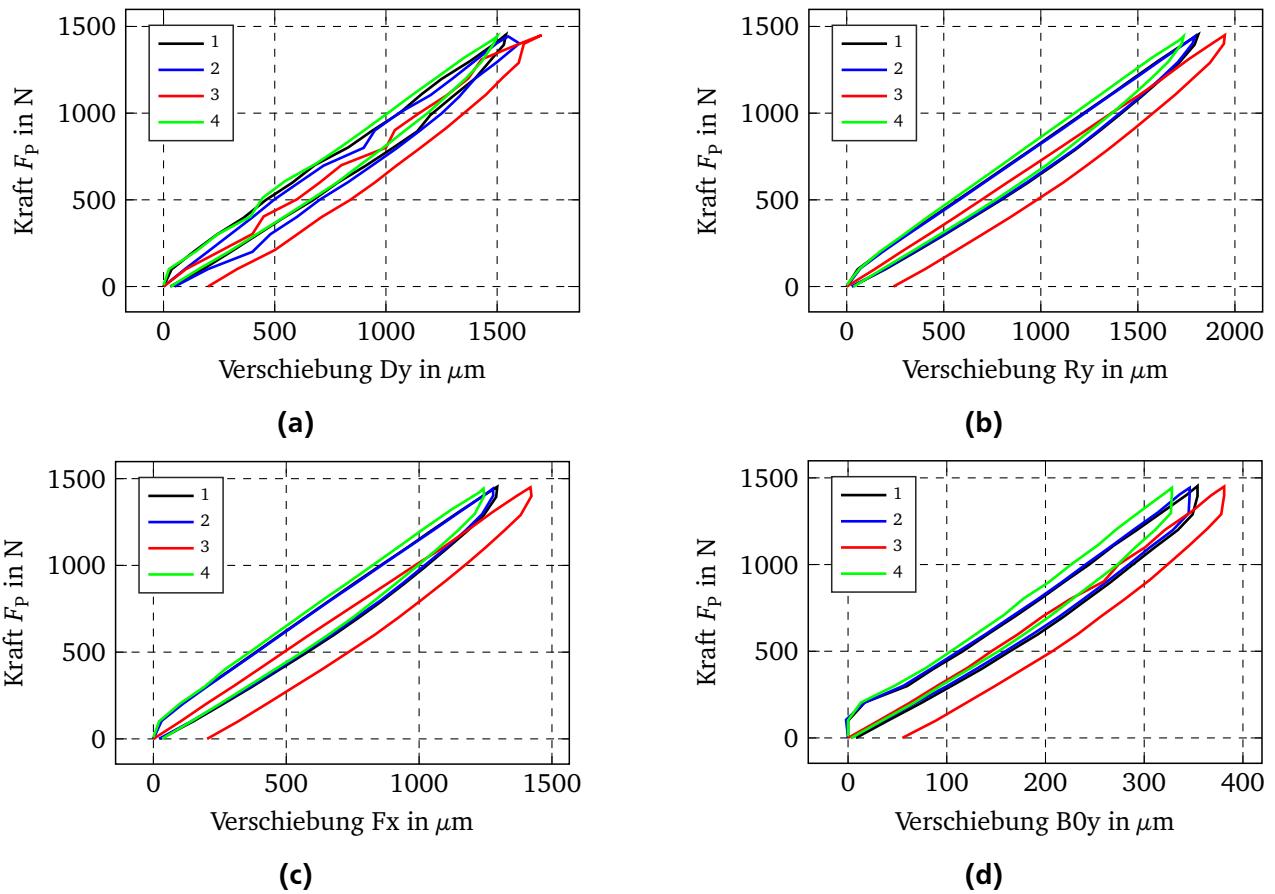
**Tabelle 4.6.: Getriebesteifigkeit basierend auf der Verschiebung Dy ermittelt aus der linearen Regression von Be- und Entlastungskennlinien**

Messreihe	1 be.	1 ent.	2 be.	2 ent.	3 be.	3 ent.	4 be.	4 ent.
Steifigkeit in kN/mm	0,781	0,787	0,782	0,791	0,746	0,816	0,806	0,834

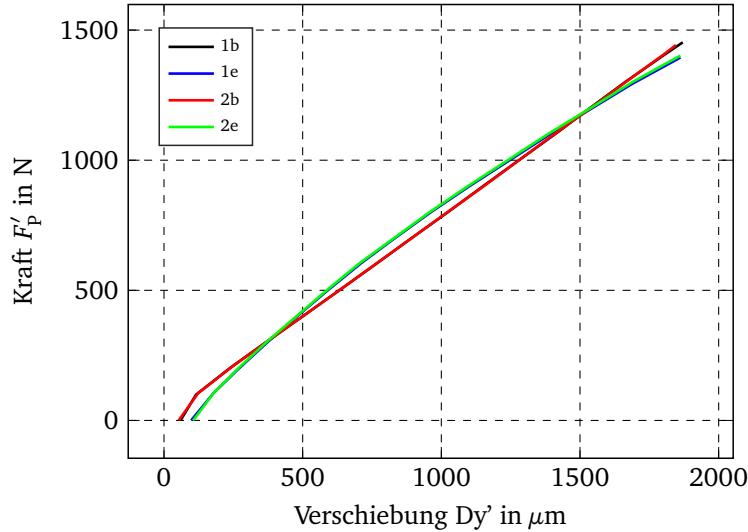
### Konfidenzintervalle der Parameter

MATLAB bietet mit der *Statistics and Machine Learning Toolbox* die Funktion `nlpaci`, die die 95 % Vertrauensintervalle der Koeffizienten abschätzt. Der wahre Parameterwert liegt demnach mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % in diesem Intervall [Kuc]. Die MATLAB-Funktion greift für die Berechnung dieser Konfidenzintervalle auf die identifizierten Parameter, die Residuen zwischen Modell und Daten sowie die Jacobimatrix der Fehlerquadratsumme zurück [Mat17].

Abbildung 4.18 zeigt für die Messdaten der Belastung in der ersten Messreihe die geschätzten Parameter sowie die berechneten Konfidenzintervalle. Es fällt auf, dass die Konfidenzintervalle weit gefasst sind und die identifizierten Parameter somit als unsicher gelten. Der Parameter  $k_{12}$  hat ein sehr enges Konfidenzintervall. Das lässt sich damit begründen, dass dieser Parameter unmittelbar aus der Prozesskraft



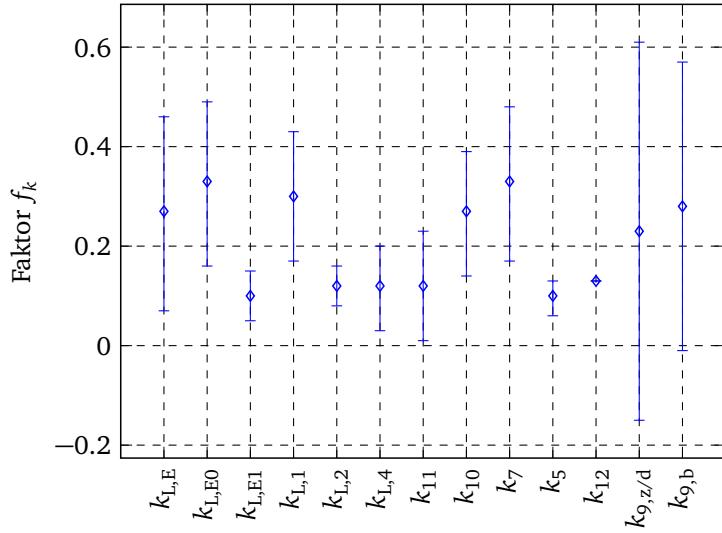
**Abbildung 4.16.:** Verschiebungen der Gelenke D, R, F und B0 in ausgewählten Richtungen unter Belastung im vorgespannten Getriebe für vier Messreihen



**Abbildung 4.17.:** Aufbereitete Messdaten für die Messreihen 1 und 2 durch Aufteilung in Be- und Entlastungskurven (Zusätze b und e in der Legende) sowie Entfernen der Offsets nach einer linearen Regression

sowie der Differenz zwischen  $R_y$  und  $D_y$  berechnet werden kann. Die untere Grenze des Parameters  $k_{9,z/d}$  liegt im negativen Bereich. Weil eine negative Steifigkeit unphysikalisch ist, werden die Konfidenzintervalle nicht für weitere Analysen verwendet. Es bleibt jedoch für eine robuste Parameteridentifikation zu

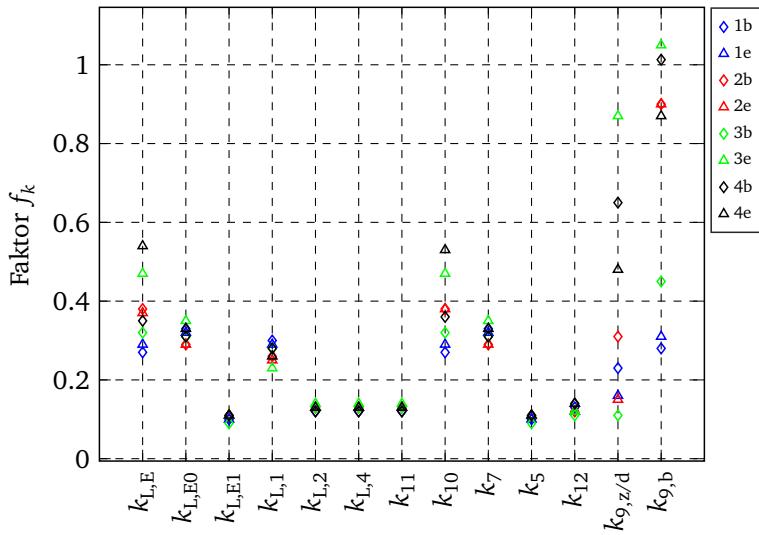
klären, weshalb die Konfidenzintervalle so groß ausfallen. Eventuell kann – wie bereits in Kapitel 4.1.5 beschrieben – die Robustheit mit Messungen an weiteren Gelenken erhöht werden.



**Abbildung 4.18.:** Optimale Parameter mit 95 % Konfidenzintervallen ermittelt durch eine Parameteridentifikation für die Belastungskurve der ersten Messreihe. Die Parameter sind bezogen auf die Ausgangssteifigkeit  $k_0$ .

#### Gemessene Steifigkeitsunsicherheit

Da die Berechnung physikalisch sinnvoller Konfidenzintervalle scheitert, wird auf die Unsicherheit der Getriebesteifigkeit zurückgegriffen, um ein Maß für die Parameterunsicherheit angeben zu können. Dazu werden die acht Kennlinien, die sich durch Aufteilen der vier gemessenen Kraft-Verschiebung-Kennlinien in Be- und Entlastungskurve ergeben, einer Parameteridentifikation unterzogen. Die durch den Opti-



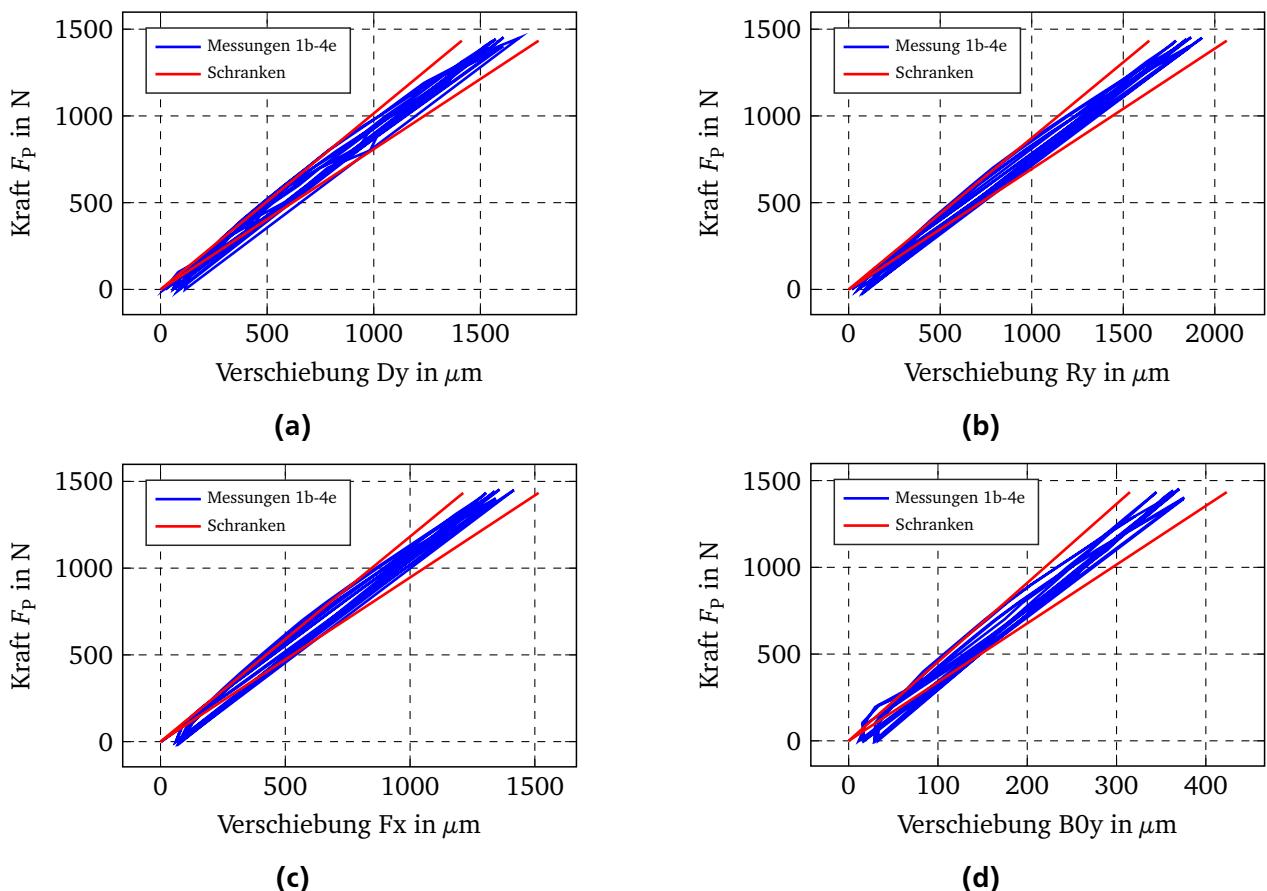
**Abbildung 4.19.:** Auf  $k_0$  bezogene optimale Steifigkeitsparameter für alle Messreihen, getrennt nach Be- und Entlastung

mierungsalgorithmus identifizierten Optimalparameter sind in Abb. 4.19 aufgetragen. Zu sehen ist, dass sie unterschiedlich stark streuen. Jedoch stellt jeder Parametersatz für sich ein Optimum im Sinne der minimalen Fehlerquadratsumme dar und eignet sich zur Modellierung der gemessenen Kennlinien.

#### 4.2.2 Auswirkung von Parameterunsicherheit auf das Modell

Zur Untersuchung der Parameterunsicherheit werden die oberen und unteren Steifigkeitswerte aus Abb. 4.19 verwendet. Dafür werden zunächst alle Parameter auf den maximalen bzw. minimalen Wert gesetzt. Somit ergeben sich zwei Parametersätze, die zu einem nachgiebigen bzw. steifen Modell führen. Dadurch, dass für alle Parameter das jeweilige Maximum bzw. Minimum ausgewählt wird, sind die Modelle konservativ: Das nachgiebige Modell ist nachgiebiger als alle von der Optimierung ermittelten Parametersätze, was umgekehrt auch für das steife Modell gilt. Damit ergeben sich zwei Schranken, zwischen denen die reale Getriebesteifigkeit liegt.

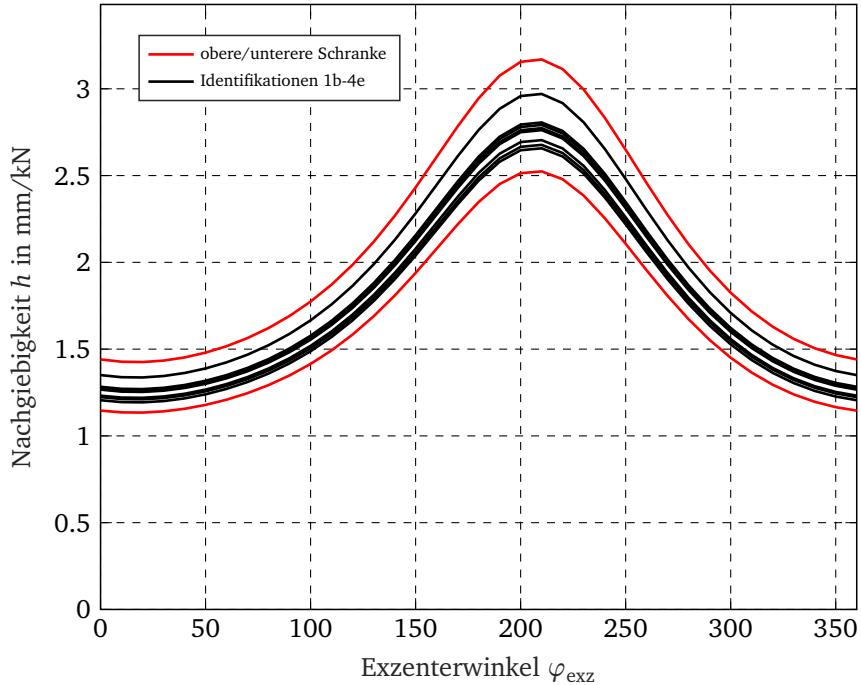
Zunächst werden die Modelle den Messdaten gegenübergestellt. Dazu sind in 4.20 die Kennlinien der Gelenkverschiebungen aufgetragen. Durch die Art, wie die beiden Grenzmodelle ermittelt wurden, ist immer gewährleistet, dass die aus den Messungen ermittelte Steifigkeit – gekennzeichnet durch die Steigung der jeweiligen Ausgleichsgerade – innerhalb der Schranken liegt. Allerdings wird deutlich, dass die Kraft-Verschiebung-Kennlinien die durch die Modelle vorgegebenen Schranken verlassen, da die Modelle keinen Offset abbilden können. Für die Maschinenüberwachung lässt sich daraus die Empfehlung ableiten, nicht unmittelbar die Kraft-Verschiebung-Charakteristiken zu verwenden. Es ist sinnvoll, aus den Kennlinien über eine Regressionsrechnung die Steifigkeit des Getriebes zu bestimmen. Dadurch haben Ausreißer in den Messungen einen geringeren und der Offset keine Auswirkung auf die ermittelte Getriebesteifigkeit.



**Abbildung 4.20.: Aufbereitete und gemessene Kennlinien mit den Kennlinien des steifen und nachgiebigen Modells als Schranken**

Mit den zwei Grenzmodellen lassen sich auch Schranken für andere Getriebestellungen angeben. Abbildung 4.21 zeigt die Getriebenachgiebigkeit der Modelle über den Exzenterwinkel. Schwarz eingefärbt sind die Verläufe, die sich mit den Modellen aus den direkten Parameteridentifikationen ergeben. Die

Nachgiebigkeit der Grenzmodelle ist rot dargestellt. Zu sehen ist, dass sich die identifizierten Modelle



**Abbildung 4.21.:** Nachgiebigkeit des Getriebes über den Exzenterwinkel für die auf den Identifikationen beruhenden Modellen (schwarz) sowie das nachgiebigste und steifste Modell (rot) als Schranken

in ihrer Nachgiebigkeit unterscheiden und die absoluten Differenzen zwischen ihnen im Bereich großer Nachgiebigkeit am größten sind. Jedoch haben alle Modelle einen qualitativ ähnlichen Verlauf. Alle identifizierten Modelle liegen innerhalb der Grenzmodelle, was erneut auf die Systematik der Parameteridentifikation zurückzuführen ist.

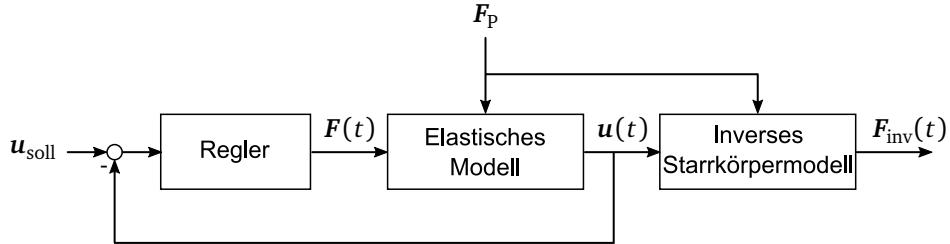
Die hergeleiteten Grenzmodelle können für die Überwachung der Getriebennachgiebigkeit verwendet werden, indem überprüft wird, ob die tatsächliche Nachgiebigkeit innerhalb der Grenzen liegt. Für die in diesem Abschnitt untersuchte Getriebestellung trifft dies zu. Gegebenenfalls müssen die Grenzen erweitert werden, falls die Streuung der tatsächlichen Getriebennachgiebigkeit größer ist als die durch die Messreihe erfasste Streuung. Es bleibt zu klären, ob die an der Presse ermittelte Nachgiebigkeit auch in anderen Getriebestellungen innerhalb der Grenzen liegt. Ein direkter Vergleich mit den in Abschnitt 4.1.2 dargelegten Daten scheidet aus, da die Presse beim Vermessen der Steifigkeit nicht vorgespannt war.

### 4.3 Inverse Dynamik

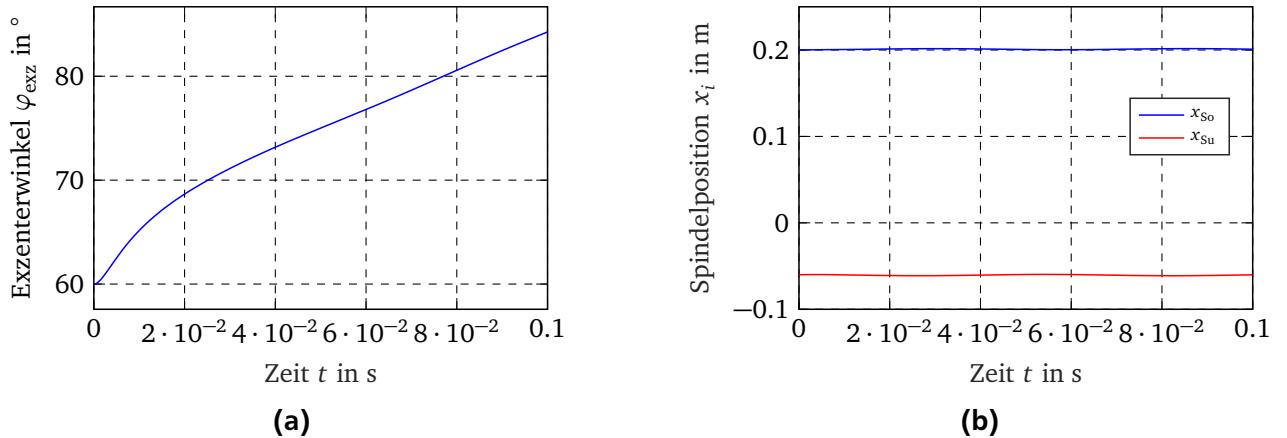
Für die Zustandsüberwachung der 3D-Servo-Presse kann neben dem elastostatischen Getriebemodell auch die inverse Dynamik verwendet werden, um Abweichungen vom Regelbetrieb der Presse feststellen zu können, vgl. Abschnitt 3.2.1. Für das Modell der inversen Dynamik muss nach Kapitel 3.7.5 von einem Starrkörpermodell ausgegangen werden, um die Aktorkräfte ausgehend vom Bewegungszustand des Getriebes zu berechnen. Durch diese Vereinfachung vom elastischen zum starren Modell ist eine Diskrepanz zwischen berechneten und tatsächlichen Aktorkräften zu erwarten. In diesem Abschnitt soll die Diskrepanz zwischen den zwei Modellen untersucht werden. Eine Anwendung auf an der 3D-Servo-Presse erhobenen Messdaten erfolgt nicht.

Für die inverse Dynamik werden aus Bewegungsgrößen der Presse diejenigen Kräfte berechnet, die notwendig sind, um die Bewegung durchführen zu lassen. Dementsprechend wird ein Satz aus Zeitverläufen für die Laufgrade  $u(t)$  benötigt, um die Kräfte  $F_{\text{inv}}$  zu berechnen. Um die Güte der berechneten

Kräfte beurteilen zu können, werden diese mit den Kräften  $F(t)$  verglichen, die die Bewegung  $u(t)$  hervorrufen. Für die Berechnung der Daten  $u(t)$  und  $F(t)$  wird das elastische Getriebemodell zu Grunde gelegt, an dem eine Regelung der Laufgrade implementiert ist, siehe Abb. 4.22. Sie wählt die Aktorkräfte so, dass die Laufgrade in einem physikalisch sinnvollen Bereich bleiben. Als Sollbewegung wird eine konstante Drehgeschwindigkeit des Exzentrers vorgegeben sowie zeitlich unveränderliche Spindelpositionen. Als Prozesskraft, die aus regelungstechnischer Sicht als Störkraft auftritt, wird ein Kraftsprung von 800 N zum Zeitpunkt  $t = 0$  gewählt.



**Abbildung 4.22.:** Blockschaltbild zur Berechnung von  $F(t)$ ,  $u(t)$  und den Kräften  $F_{\text{inv}}(t)$

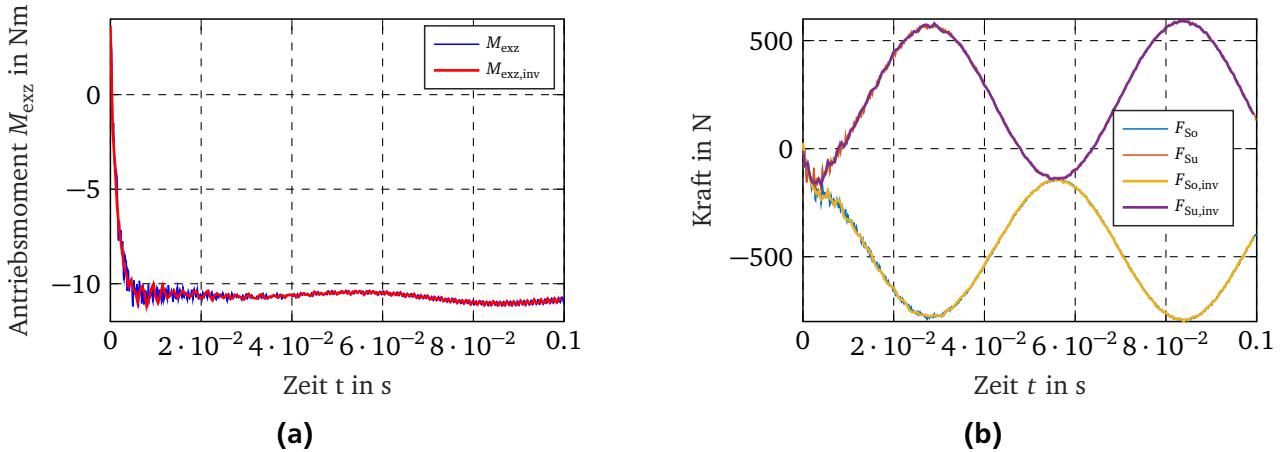


**Abbildung 4.23.:** Zeitlicher Verlauf des Exzenterwinkels und der Spindelpositionen als Eingang für das inverse dynamische Starrkörpermodell

Die Zeitverläufe der Laufgrade, die mit dem elastischen Modell ermittelt werden, sind in Abb. 4.23 dargestellt. Die Spindelpositionen sind näherungsweise konstant, während sich der Exzenter nach einer kurzen Zeit der Abweichung näherungsweise mit konstanter Geschwindigkeit dreht. Abbildung 4.24 zeigt die Kräfte  $F(t)$ . Zu sehen ist, dass die Momente und Kräfte einer Oszillation unterliegen, die auf das Zusammenspiel von Regelung und schwingungsfähigem Modell zurückzuführen sind. Das Drehmoment des Exzentermotors wirkt der Bewegungsrichtung des Exzentrers entgegen und bremst damit die durch die Prozesskraft verursachte Bewegung ab.

Entscheidend ist der Vergleich zwischen den Kräften  $F(t)$  und  $F_{\text{inv}}(t)$  in Abb. 4.24. Der mittlere Verlauf von Antriebsmoment und -kräften kann mit dem Modell der inversen Dynamik berechnet werden. Die exakte Berechnung der Oszillationen ist nicht möglich. Dies ist nicht verwunderlich, da dem inversen Modell das starre Getriebe zu Grunde liegt.

Aus den gezeigten Ergebnissen lässt sich ableiten, dass die in Abschnitt 3.7.5 dargelegte Berechnung der inversen Dynamik korrekt ist. Außerdem eignet sich das für die inverse Dynamik verwendete Starrkörpermodell dazu, Antriebskräfte -und momente des elastischen Modells wiederzugeben. Das heißt, dass die Dynamik des elastischen Modells im Wesentlichen durch ein Starrkörpermodell abgebildet wird.



**Abbildung 4.24.:** Vergleich zwischen den am elastischen Modell wirkenden und den durch das inverse Modell berechneten Kräfte/Momente, a) Antriebsmoment an der Exzenterwelle, b) Kräfte Spindelpositionen

Die Anwendung der inversen Dynamik auf Messdaten der 3D-Servo-Presse steht noch aus. Es ist zu erwarten, dass die Diskrepanz zwischen gemessenen und berechneten Kräften und Momenten deutlich größer ausfällt als der oben gezeigte Vergleich zwischen zwei Modellen. Dies ist vor allem auf Reibung in Lagern und Führungen zurückzuführen, die bisher nicht im Modell implementiert ist. Auch mechanisches Spiel kann durch Stoßvorgänge zwischen den Getriebegliedern einen Einfluss auf die Ergebnisse haben.

---

## 5 Diskussion und Ausblick

---

In dieser Arbeit wurde für das ungleichförmig übersetzende Koppelgetriebe des Prototypen der 3D-Servo-Presse ein dynamisches Modell aufgestellt, welches sowohl die Getriebeelastizität als auch die Trägheit abbildet. Dieses soll als Referenzmodell zur modellbasierten Zustandsüberwachung der 3D-Servo-Presse dienen. Im Hinblick auf die Qualitätsanforderungen von Presserzeugnissen stellt die Struktursteifigkeit der Presse eine signifikante Kenngröße dar. Um einen sich verschlechternden Pressenzustand entgegenzuwirken, kann die Steifigkeit der Überwachung unterzogen werden. Dementsprechend lag der Fokus dieser Arbeit darauf, die Steifigkeit der Presse bestmöglich zu modellieren. Ein weiteres Konzept sieht die Überwachung auf Basis der Getriebebewegung vor. Hierbei wird überprüft, wie groß die Stellkräfte sind, um das Getriebe in gewisse Stellungen zu verfahren. Dafür ist die Modellierung der Getriebedynamik notwendig.

Für die Modellbildung wurde die Konstruktion der 3D-Servo-Presse analysiert, wobei der Fokus auf dem Getriebe lag. Dieses leistet durch die Verschaltung vieler Koppeln einen Beitrag zur Gesamtpresensteifigkeit. Für die Bestimmung von geeigneten Koppelmodellen und Steifigkeitskennwerten wurden die im Getriebe verbauten Koppeln einer Finite-Elemente-Analyse unterzogen. Die Steifigkeiten wurden umgerechnet, sodass sie sich auf die am Stößel wirkende Prozesskraft beziehen und sie untereinander vergleichbar sind. Dabei zeigten sich deutliche Unterschiede der Steifigkeiten im Getriebe. Der Exzenterpleuel sowie der Schlepphebel konnten aufgrund ihrer im Vergleich zu anderen Koppeln großen Steifigkeit als Starrkörper modelliert werden. Für die restlichen Getriebeglieder wurden elastische Modelle entwickelt, um die Nachgiebigkeiten dieser abzubilden.

Das Getriebemodell wurde als möglichst einfaches Mehrkörpermodell aufgestellt, weshalb alle Getriebeteile als Verschaltung von Federn und Massen abstrahiert wurden. Entsprechend der Belastungsarten der jeweiligen Glieder ergaben sich Stab- und Balkenmodelle. Zur Wahrung des Massenträgheitsmomentes konnte dieses für die Stabmodelle korrigiert werden, sodass das im Modell hinterlegte dem tatsächlichen Massenträgheitsmoment der Koppeln gleicht. Weiterhin wurden die Lager als linearelastische Federn modelliert. Spiel und Reibung blieben dabei unberücksichtigt. Ein direkter Vergleich der Getriebekennlinien mit unterschiedlichen Lagermodellen zeigte, dass die Diskrepanz zwischen den Modellen von der Getriebestellung abhängig ist. Für wenig nachgiebige Getriebestellungen können lineare Lagerkennlinien als gute Näherung der nichtlinearen Lagersteifigkeit betrachtet werden. In Getriebestellungen, in denen das Getriebe eine geringe Steifigkeit aufweist, ist der mit der Linearisierung einhergehende Fehler größer.

Zur Plausibilitätsprüfung des Modells wurde es bereits vorhandenen Modellen gegenübergestellt. Die Steifigkeitsparameter basieren dabei auf den Werten, die zuvor mit der FE-Methode ermittelt wurden. Beim Vergleich zeigt sich, dass die Getriebenehigiebigkeit als Funktion der Spindelpositionen qualitativ mit bereits vorhandenen Daten übereinstimmt. Der Nachgiebigkeitsverlauf, der sich aus Variation des Exzenterwinkels ergibt, kann mit dem Modell nur in einigen Spindelstellungen abgebildet werden. In Spindelstellungen, in denen die Verläufe qualitativ nicht übereinstimmen, sind Nachgiebigkeitskennlinien zum Teil konträr. Das Modell sagt ein Maximum voraus, während Messdaten ein Minimum aufweisen. Eine handische Variation der Modellparameter zeigt jedoch, dass das Modell prinzipiell in der Lage ist, die gemessenen Verläufe qualitativ wiederzugeben. Quantitativ ist das in dieser Arbeit entwickelte Modell steifer als die Presse. Es erfordert dementsprechend eine Parameteridentifikation, die das Modell auf die Messdaten anpasst.

Die Parameteridentifikation wurde zunächst auf Basis der Getriebenehigiebigkeit durchgeführt. Dabei zeigte sich, dass die identifizierten Parameter stark von den für den Optimierungsalgorithmus gestellten

Randbedingungen abhängen. Es kann daher nicht davon ausgegangen werden, dass die auf diese Weise ermittelten Parameter dafür geeignet sind, das Modell dem realen Pressenverhalten anzugeleichen. Der Vergleich zwischen Modellkennwerten und Messdaten bestätigte dies.

Für eine robustere Parameteridentifikation wurden an mehreren Gelenkpunkten des Getriebes die Verschiebung aufgenommen, die sich mit dem Aufprägen einer Kraft auf den Stoßel ergeben. Dabei ist festzustellen, dass die Kraft-Verschiebung-Verläufe bei zwei unterschiedlichen Kraftniveaus Sprünge aufweisen. Sie sind vermutlich auf mechanisches Spiel innerhalb der Getriebekonstruktion zurückzuführen. Zusätzlich zu den Sprüngen wird eine Hysterese beobachtet, wenn die Stoßelkraft gesenkt wird. Eine Erklärung für dieses Verhalten ist Haftreibung, die für die Verschiebung der Gelenke überwunden werden muss. Beide Effekte können nicht durch das Modell wiedergegeben werden, was auf die Modellstruktur zurückzuführen ist. Die Parameteranpassung erfolgt deshalb auf die gemessenen Kennlinien des vorgespannten Getriebes. Eine lineare Regression liefert aus den näherungsweise linearen Kennlinien Steifigkeitskennwerte, auf die das Modell angepasst wurde. Die aus der Parameteroptimierung entsprungenen Steifigkeiten weisen unterschiedlich starke Streuungen auf. So gibt es einen Parameter der präzise bestimmt werden kann, während es für die restlichen nicht möglich ist. Es fällt auf, dass sich der eindeutig bestimmte Parameter unmittelbar aus zwei beobachteten Gelenkverschiebungen berechnen lässt. Es ist daher abzuleiten, dass mehr Gelenkverschiebungen beobachtet werden müssen, um mehr Parameter eindeutig identifizieren zu können.

Aus der Streuung der Parameter wurden zwei Grenzmodelle festgelegt, die alle minimalen bzw. maximalen Steifigkeitsparameter enthalten. Mit ihnen könnte die Zustandsüberwachung der Pressesteifigkeit durchgeführt werden. Die Erprobung steht allerdings noch aus, da alle erhobenen Messdaten zur Parameteridentifikation genutzt wurden. Eine Übertragung auf weitere Getriebestellungen steht ebenso aus und sollte durchgeführt werden. Es ist zu klären, ob die Parameter, die in einer bestimmten Getriebestellung erhoben wurden, die Getriebesteifigkeit in anderen Stellungen abbilden können. Gegebenenfalls lässt sich mit Daten in weiteren Stellungen die Parameteridentifikation robuster durchführen.

Die durchgeführte und oben beschriebene Parameteridentifikation basiert darauf, die Getriebesteifigkeit im vorgespannten Zustand zu ermitteln. Dies begründet sich dadurch, dass das Modell das Lagerspiel im Getriebe nicht wiedergeben kann. Ein anderer Ansatz wäre es, das Modell um mechanisches Spiel zu erweitern. Jedoch ist fragwürdig, ob dieser Ansatz zu einer besseren Übereinstimmung zwischen Modell und realer Presse führt. So zeigt bereits das elastostatische Modell mit wenigen Steifigkeitsparametern, dass diese schwierig mit Zahlenwerten zu belegen sind, um Modell und Presse zur Übereinstimmung zu bringen. Damit begründet sich, einen anderen Weg für die Zustandsüberwachung der 3D-Servo-Presse einzuschlagen. Es sollten solche Kennwerte an der Presse erhoben werden, die mit einem einfachen Modell zuverlässig berechnet werden können. Die oben beschriebene Vorgehensweise entspricht diesem Ansatz.

Das dynamische Modell, das zur modellbasierten Zustandsüberwachung der Getriebedynamik herangezogen werden kann, wurde in dieser Arbeit nur theoretisch untersucht. Das Modell kann dazu dienen, Stellkräfte zu berechnen, die aufgebracht werden müssen, um gewisse Getriebebewegungen durchführen zu lassen. Ein Vergleich zwischen Mess- und Modelldaten könnte zur Untersuchung verwendet werden, inwiefern sich diese Methode von Zustandsüberwachung eignet.

In dieser Arbeit wurde gezeigt, dass für diese Art der Zustandsüberwachung Elastizitäten im Modell unberücksichtigt bleiben müssen. Jedoch ist die Diskrepanz zwischen Starrkörper- und elastischem Modell gering. Durch diese Vereinfachung sind keine nennenswerten Einschränkungen zu erkennen. Die Gegenüberstellung mit an der 3D-Servo-Presse erhobenen Daten steht aus. Jedoch ist eine deutliche Abweichung zwischen Modell und Messdaten zu erwarten, da das Modell im derzeitigen Zustand keine Energiedissipation abbildet. Es müsste daher um Reibungseinflüsse ergänzt werden.

Für zukünftige Forschungsvorhaben empfiehlt es sich, die Parameteridentifikation des in dieser Arbeit entwickelten Getriebemodells zu verbessern, damit die Getriebesteifigkeit für das gesamte Betriebsfen-

ter zuverlässig berechnet werden kann. So liegt anschließend ein Modell zur Zustandsüberwachung der Getriebesteifigkeit vor. Somit ließen sich anbahnende Maschinenausfälle frühzeitig erkennen und die Maschinenverfügbarkeit erhöhen. Zudem kann die dann für alle Getriebestellungen bekannte Steifigkeit in Regelungen genutzt werden, um Lageabweichungen des Stößels von Solllagen zu korrigieren. Die Verbesserung der Produktqualität wäre eine direkte Folge dieser Maßnahme.



---

## Literatur

---

- [Amr16] Mario Amrhein. "Modellbasierte Zustandsüberwachung der kinematischen Kette von Pressen zur automatischen Fehlererkennung am Beispiel der 3D-Servo-Presse". Masterarbeit. Technische Universität Darmstadt, 2016.
- [Bec02] Wilfried Becker und Dietmar Gross. *Mechanik elastischer Körper und Strukturen*. Berlin: Springer, 2002.
- [Bed06] Thomas Bedarff. "Mathematisch simulative Abbildung des Lenkersystems einer Servo-Presse in Matlab/Simulink". Studienarbeit. Technische Universität Darmstadt, 2006.
- [Bre94] Michael Breuer. *Theoretische und experimentelle Bestimmung der Wälzlagereigenschaften*. Dissertation. Bd. 241. Fortschritt-Berichte VDI Reihe 1, Konstruktionstechnik, Maschinenelemente. Düsseldorf: VDI-Verlag, 1994.
- [Bun18] Bundesministerium für Wirtschaft und Energie, Hrsg. *Was ist Industrie 4.0?* 2018. URL: <https://www.plattform-i40.de/I40/Navigation/DE/Industrie40/WasIndustrie40/was-ist-industrie-40.html> (besucht am 02.05.2018).
- [Dre14] Hans Dresig und Alexander Fidlin. *Schwingungen mechanischer Antriebssysteme. Modellbildung, Berechnung, Analyse, Synthese*. 3. Auflage. Berlin: Springer, 2014.
- [Dre12] Hans Dresig und Franz Holzweißig. *Maschinendynamik*. 11. Auflage. Berlin: Springer, 2012.
- [Dre89] Hans Dresig und Iosif Isaakevic Vul'fson. *Dynamik der Mechanismen*. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1989.
- [Eri09] Kenneth Eriksson u. a. *Computational differential equations*. 23. Feb. 2009. URL: <http://www.csc.kth.se/~jan/transfer/cde.pdf> (besucht am 02.05.2018).
- [Fea08] Roy Featherstone. *Rigid Body Dynamics Algorithms*. Boston: Springer, 2008.
- [Fel04] Carlos A. Felippa. *Introduction to Finite Element Methods*. Lecture Notes. Department of Aerospace Engineering Sciences, University of Colorado, 2004. URL: <https://www.colorado.edu/engineering/CAS/courses.d/IFEM.d/> (besucht am 25.04.2018).
- [Gas12] Robert Gasch, Klaus Knothe und Robert Liebich. *Strukturdynamik. Diskrete Systeme und Kontinua*. 2., neu bearb. Aufl. Berlin: Springer-Vieweg, 2012.
- [Gas06] Robert Gasch, Rainer Nordmann und Herbert Pfützner. *Rotordynamik*. 2., vollst. neu bearb. und erw. Aufl. Berlin: Springer-Verlag, 2006.
- [Goe75] H. Goecke und H. Horn. "Ein Beitrag zur Berücksichtigung der Biegeelastizitäten von Koppelgliedern bei der dynamischen Analyse ebener Koppelgetriebe". In: *Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt* 17 (2 1975), S. 187–199.
- [Gro17] Peter Groche, Florian Hoppe und Julian Sinz. "Stiffness of multipoint servo presses: Mechanics vs. control". In: *CIRP Annals* 66 (1 2017), S. 373–376.
- [Hes17] Daniel Hesse, Florian Hoppe und Peter Groche. "Controlling Product Stiffness by an Incremental Sheet Metal Forming Process". In: *Procedia Manufacturing* 10 (2017), S. 276–285.

- 
- [Ise06] Rolf Isermann, Hrsg. *Fahrdynamik-Regelung. Modellbildung, Fahrerassistenzsysteme, Mechatronik ; mit 28 Tabellen*. 1. Aufl. ATZ/MTZ-Fachbuch. Wiesbaden: Vieweg, 2006.
- [Ise08] Rolf Isermann. *Mechatronische Systeme. Grundlagen*. 2., vollst. neu bearb. Aufl. Berlin: Springer, 2008.
- [Ise10] Rolf Isermann. "Modellbasierte Überwachung und Fehlerdiagnose von kontinuierlichen technischen Prozessen". In: *at - Automatisierungstechnik* 58 (6 2010), S. 291–305.
- [Kle15] Bernd Klein. *FEM. Grundlagen und Anwendungen der Finite-Element-Methode im Maschinen- und Fahrzeugbau*. 10., verb. Aufl. Wiesbaden: Springer Vieweg, 2015.
- [Kno17] Klaus Knothe und Heribert Wessels. *Finite Elemente. Eine Einführung für Ingenieure*. 5. Aufl. 2017. Springer Vieweg, 2017.
- [Küc] Ursula Kück. *Schätzverfahren bei der linearen Einfachregression*. Institut für Wirtschaftsinformatik, -mathematik und -statistik, Universität Rostock. URL: [https://www.wiwi.uni-rostock.de/fileadmin/Institute/VWL/LS\\_Statistik/vorl\\_gs/Regression\\_IV.pdf](https://www.wiwi.uni-rostock.de/fileadmin/Institute/VWL/LS_Statistik/vorl_gs/Regression_IV.pdf) (besucht am 04.05.2018).
- [Kuh07] Kuhn Dietmar. "- BLECHUMFORMUNG. Servopressen sorgen für eine flexiblere Produktion und breitere Anwendungspalette". In: *MM MaschinenMarkt* (07 2007), S. 24.
- [Kuh09] Dietmar Kuhn. "Servo-Direkt-angetriebene Umformpressen sind hochflexibel". In: *MM MaschinenMarkt* (44 2009), S. 30.
- [Lun13] Jan Lunze. *Regelungstechnik 2. Mehrgrößensysteme, digitale Regelung*. 7., überarb. Aufl. Berlin: Springer, 2013.
- [Mar13] Richard Markert. *Strukturdynamik*. Aachen: Shaker, 2013.
- [Mat17] Mathworks, Hrsg. *Matlab 2017a Documentation*. 2017.
- [Pie14] Wolf Dieter Pietruszka. *MATLAB und Simulink in der Ingenieurpraxis. Modellbildung, Berechnung und Simulation*. 4., überarb., aktualisierte und erw. Aufl. Wiesbaden: Springer Vieweg, 2014.
- [Ril17] Georg Rill und Thomas Schaeffer. *Grundlagen und Methodik der Mehrkörpersimulation. Vertieft in Matlab-Beispielen, Übungen und Anwendungen*. 3. überarbeitete und erweiterte Auflage. Wiesbaden: Springer Vieweg, 2017.
- [Sch] Schaeffler Technologies AG & Co. KG, Hrsg. *Technische Grundlagen Wälzlager Steifigkeit*. URL: [http://medias.schaeffler.com/medias/de!hp.tg.cat/tg\\_hr\\*ST4\\_20921815435](http://medias.schaeffler.com/medias/de!hp.tg.cat/tg_hr*ST4_20921815435) (besucht am 01.05.2018).
- [Spe88] C. Spensberger. "Schwingungen in elastischen Pressenantrieben mit Spiel". In: *Wissenschaftliche Zeitschrift der Technischen Universitaet Dresden* 37 (6 1988), S. 147–150.
- [VDI08] VDI 2149 Blatt 1. *Getriebedynamik. Starrkörper-Mechanismen*. Richtlinie. Düsseldorf: Verein Deutscher Ingenieure, 2008.
- [VDI11] VDI 2149 Blatt 2. *Getriebedynamik. Schwingungsfähige Mechanismen*. Richtlinie. Düsseldorf: Verein Deutscher Ingenieure, 2011.

- 
- [VDI14] VDI 3843 Blatt 1. *Modellbildung schwingungsfähiger Systeme*. Richtlinie. Düsseldorf: Verein Deutscher Ingenieure, 2014.
- [VDM15] VDMA, Hrsg. *Leitfaden Industrie 4.0. Orientierungshilfe zur Einführung in den Mittelstand*. Frankfurt am Main, 2015.
- [Woe16] Christoph Woernle. *Mehrkörpersysteme. Eine Einführung in die Kinematik und Dynamik von Systemen starrer Körper*. 2., erweiterte Auflage. Berlin: Springer Vieweg, 2016.



---

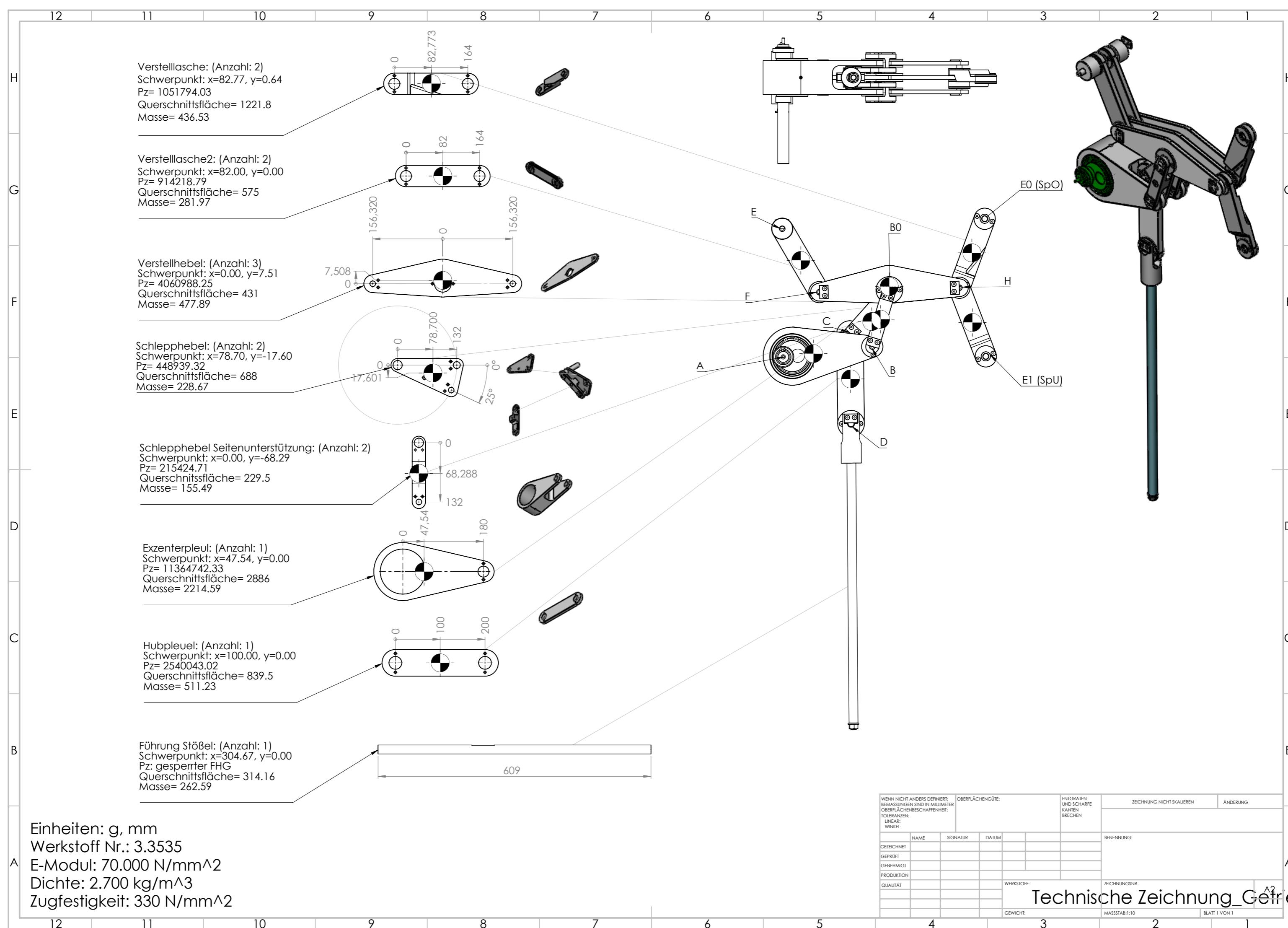
## **A Anhang**

---

### **A.1 Technische Zeichnung des Getriebes**

---

Interne technische Getriebezeichnung mit Schwerpunkten, Massen und Massenträgheitsmomente der Koppelglieder.



## A.2 Daten der Parameteridentifikation

**Tabelle A.1.:** Gemessene Gelenkverschiebungen beim Aufbringen der Kraft  $F_p$  auf das Stößellager für verschiedene Messreihen. Getriebestellung:  $\varphi_{exz} = 0^\circ$ ,  $x_{so} = 273$  mm,  $x_{su} = -33$  mm

Messreihe	$F_p$ N	Dy $\mu\text{m}$	Ry $\mu\text{m}$	Ex $\mu\text{m}$	Ey $\mu\text{m}$	Ax $\mu\text{m}$	Fx $\mu\text{m}$	B0y $\mu\text{m}$	Hy $\mu\text{m}$
1	0	0	0				0	0	0
	101	227	260				211	61	42
	210	337	400				314	105	50
	306	607	680				490	162	79
	410	1657	1770				1417	466	220
	508	1847	2000				1617	527	248
	610	2277	2430				2108	618	203
	710	2487	2660				2348	671	190
	820	2677	2870				2531	722	197
	935	3207	3450				3046	902	302
	1030	3357	3600				3193	945	313
	1130	3607	3880				3455	1000	300
	1250	3787	4090				3630	1051	300
	1330	3907	4210				3740	1084	300
	1440	4077	4400				3905	1134	312
	1467	4117	4450				3938	1143	312
	1350	4037	4340				3852	1108	312
	1250	3927	4230				3761	1078	312
	1140	3817	4100				3662	1044	308
	1030	3687	3950				3533	1007	298
	920	3547	3790				3394	965	286
	825	3407	3640				3269	928	281
	715	2787	2990				2646	743	209
	620	2537	2710				2364	686	235
	510	2157	2320				1934	605	282
	417	1937	2080				1720	546	262
	310	1097	1180				890	255	89
	210	557	630				494	161	107
	85	327	390				291	93	72
	0	177	210				151	45	47
2	0			0					
	330				-3				
	385				-24				

Messreihe	$F_P$	Dy	Ry	Ex	Ey	Ax	Fx	B0y	Hy
	N	$\mu\text{m}$							
	440			-30					
	520			-35					
	620			-41					
	715			-49					
	820			-57					
	905			-64					
	1040			-73					
	1140			-79					
	1210			-85					
	1300			-91					
	1450			-101					
	1330			-101					
	1220			-100					
	1140			-98					
	1040			-92					
	910			-85					
	810			-78					
	700			-68					
	600			-60					
	500			-49					
	390			-43					
	290			-15					
	160			4					
	0			18					
3	0				0				
	1400				-5				
4	0			0					
	150			20					
	270			35					
	400			70					
	500			90					
	600			102					
	700			115					
	810			130					
	900			140					

Messreihe	$F_p$	Dy	Ry	Ex	Ey	Ax	Fx	B0y	Hy
	N	$\mu\text{m}$							
	990				150				
	1070				160				
	1160				170				
	1250				180				
	1350				190				
	1450				200				
	1280				190				
	1170				180				
	1030				170				
	870				160				
	770				150				
	690				140				
	620				130				
	540				120				
	450				110				
	360				100				
	330				70				
	280				60				
	200				50				
	110				40				
	40				30				
	0				25				

**Tabelle A.2.: Identifizierte Parameter auf Basis der gemessenen Gelenkverschiebung für verschiedene Optimierungen**

	Parameter	$k_0$ in $\text{N m}^{-1}$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$	$f_7$
1	$k_{\text{L,E}}$	3,93E+07	0,0386	0,0386	0,0386	0,0389	0,0389	0,0389	0,0389
2	$k_{\text{L,E0}}$	3,93E+07	0,1862	0,1965	0,1705				
3	$k_{\text{L,E1}}$	3,93E+07	0,0624	0,0659	0,0605				
4	$k_{\text{L,1}}$	3,93E+07	0,1573	0,1707	0,1626	0,0622	0,0622	0,0622	0,0622
5	$k_{\text{L,2}}$	6,25E+07	0,3432	0,2771	0,3875				
6	$k_{\text{L,4}}$	8,78E+07	0,3440	0,2781	0,3874				
7	$k_{11}$	2,98E+08	0,3430	0,2770	0,3877				
8	$k_{10}$	2,54E+08	0,2782	0,6572	0,3034				
9	$k_7$	5,82E+07	0,1863	0,1965	0,1705	1,0499	1,0496	1,0497	1,0494
10	$k_5$	5,82E+07	0,0624	0,0659	0,0605	0,0450	0,0450	0,0450	0,0450
11	$k_{12}$	4,46E+07	0,1277	0,1277	0,1277	0,1248	0,1248	0,1248	0,1248
12	$k_{9,\text{z/d}}$	1,65E+08	0,0276	0,0100	0,8397				
13	$k_{9,\text{b}}$	4,59E+06	0,8261	0,7550	1,0486				