

### 3 MODELISATION D'UN SYSTEME DYNAMIQUE: LE PENDULE DOUBLE

#### 3.1 DEFINITION DES VARIABLES ET CINEMATIQUE

La dynamique représente l'étude de systèmes en mouvement régis par des lois physiques et des équations différentielles précises. Typiquement, on se réfère au pendule simple constitué d'une masse pendant à un fil et démontrant un mouvement de va-et-vient sous l'effet de la gravité. Après y avoir ajouté un deuxième bras et donc, une deuxième masse, on découvre le pendule double<sup>3</sup>.

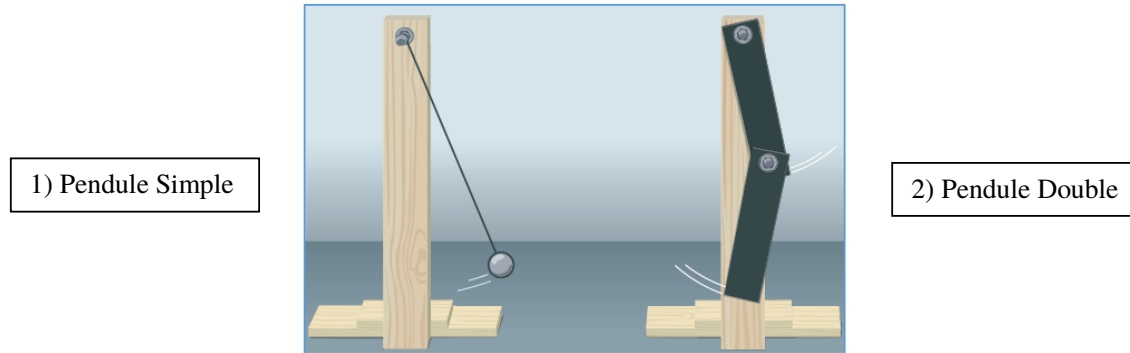


Figure 1 Pendule simple et pendule double

Contrairement au pendule simple, les deux pièces du pendule double sont rigides et ainsi, on les représente par  $m_1$  et  $m_2$ . Il faut tout de même préciser que dans le deuxième scénario, les pendules sont amovibles et leurs mouvements sont interdépendants (du moins du point de vue de l'observateur). Par habitude, afin de définir toutes les variables physiques en présence, on représente ce système de la manière suivante :

$P_1$ : premier pendule (haut)  
 $P_2$ : deuxième pendule (bas)  
 $m_1$ : masse du premier pendule  
 $m_2$ : masse du deuxième pendule  
 $R_1$ : longueur du premier pendule  
 $R_2$ : longueur du deuxième pendule  
 $\theta_1$ : angle du premier pendule  
 $\theta_2$ : angle du deuxième pendule  
(par rapport à la verticale)

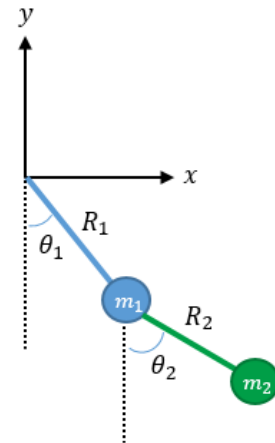


Figure 2 Pendule double simplifié

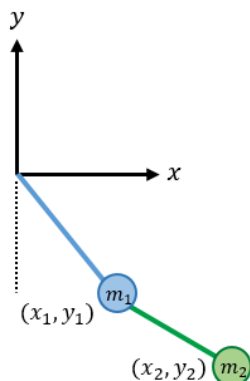


Figure 3 Position des pendules

À l'aide de ces variables, on est en mesure d'étudier la cinématique de ce système qui se divise en trois grandeurs : la position, la vitesse et l'accélération des pendules. Étant donné un système dynamique, soit en mouvement, ces grandeurs évoluent en fonction du temps. Par conséquent, ces dernières sont modélisées à l'aide d'équations mathématiques. On définit une équation de position à partir de simples rapports d'angles que l'on dérive ensuite pour obtenir une modélisation de la vitesse et de l'accélération.

**Position  $P_1$ :**  $x_1 = R_1 \sin \theta_1$  et  $y_1 = -R_1 \cos \theta_1$

<sup>3</sup> Illustration. "Weekend Project: Double Pendulum", Make Magazine, <http://makezine.com/2010/06/16/>

**Position  $P_2$ :**  $x_2 = R_2 \sin \theta_2 + R_1 \sin \theta_1$  et  $y_2 = -R_2 \cos \theta_2 - R_1 \cos \theta_1$

Sachant que la vitesse équivaut la première dérivée de la position et que l'accélération en équivaut la seconde, il suffit de dériver les équations ci-dessus. Cependant, par habitude, lorsqu'une dérivée est définie en fonction du temps, on adopte une notation différente, à savoir les *fluxions* de Newton s'écrivant  $\dot{f}$ . De cette manière,  $\frac{dx}{dt} = \dot{x}$ ,  $\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$ , ... et ainsi de suite.

**Vitesse  $P_1$ :**  $\dot{x}_1 = \dot{\theta}_1 R_1 \cos \theta_1$  et  $\dot{y}_1 = \dot{\theta}_1 R_1 \sin \theta_1$

**Vitesse  $P_2$ :**  $\dot{x}_2 = \dot{\theta}_2 R_2 \cos \theta_2 + \dot{\theta}_1 R_1 \cos \theta_1$  et  $\dot{y}_2 = \dot{\theta}_2 R_2 \sin \theta_2 + \dot{\theta}_1 R_1 \sin \theta_1$

**Accélération  $P_1$ :**  $\ddot{x}_1 = -\dot{\theta}_1^2 R_1 \sin \theta_1 + \ddot{\theta}_1 R_1 \cos \theta_1$   
 $\ddot{y}_1 = \dot{\theta}_1^2 R_1 \cos \theta_1 + \ddot{\theta}_1 R_1 \sin \theta_1$

**Accélération  $P_2$ :**  $\ddot{x}_2 = -\dot{\theta}_2^2 R_2 \sin \theta_2 + \ddot{\theta}_2 R_2 \cos \theta_2 - \dot{\theta}_1^2 R_1 \sin \theta_1 + \ddot{\theta}_1 R_1 \cos \theta_1$   
 $\ddot{y}_2 = \dot{\theta}_2^2 R_2 \cos \theta_2 + \ddot{\theta}_2 R_2 \sin \theta_2 + \dot{\theta}_1^2 R_1 \cos \theta_1 + \ddot{\theta}_1 R_1 \sin \theta_1$  <sup>4</sup>

### 3.2 PREMIERE METHODE : FORCES EN PRESENCE ET RESOLUTION NUMERIQUE

Maintenant qu'on dispose des grandeurs nécessaires à la modélisation du pendule double, on étudie les forces régissant son mouvement. En physique classique, le mouvement de tout objet dépend du rapport entre sa masse et son accélération. Il s'agit du principe fondamental de la dynamique qui s'écrit  $F = ma$  (deuxième loi de Newton). Dans le cas du pendule double, chaque pendule possède une masse et une accélération différente et par conséquent, les forces agissant sur le système varient d'une partie à l'autre. Selon l'usage, on isole chaque élément du système afin d'illustrer les forces qui s'y exercent.

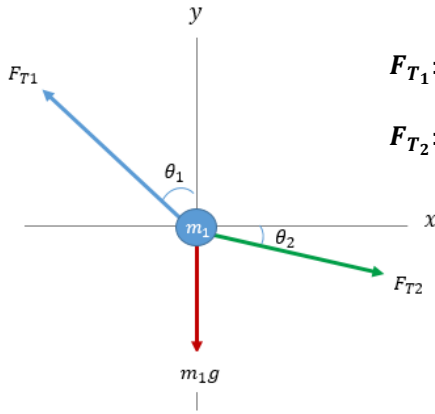


Figure 5 Isolement du premier pendule

$F_{T1}$ : force de tension exercée sur  $P_1$

$F_{T2}$ : force de tension exercée sur  $P_2$

$g$ : force gravitationnelle

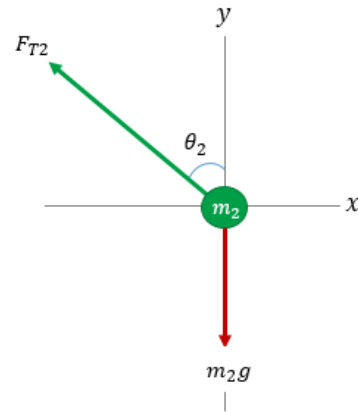


Figure 4 Isolement du second pendule

Sur ce diagramme, chaque flèche consiste en un vecteur et représente la force exercée sur le pendule dans la direction indiquée. La force gravitationnelle, dénotée  $g$ , représente l'accélération de la pesanteur sur Terre et ainsi, elle admet  $F = mg$ . Par extension de la deuxième loi de Newton, on pose  $ma = \sum F$  et de cette façon :

**Forces en x  $P_1$ :**  $m_1 \ddot{x}_1 = -F_{T1} \sin \theta_1 + F_{T2} \sin \theta_2$

**Forces en y  $P_1$ :**  $m_1 \ddot{y}_1 = F_{T1} \cos \theta_1 - F_{T2} \cos \theta_2 - m_1 g$

**Forces en x  $P_2$ :**  $m_2 \ddot{x}_2 = -F_{T2} \sin \theta_2$

<sup>4</sup> Équations. « MyPhysicsLab – Double Pendulum », [http://www.mypysicslab.com/dbl\\_pendulum.html](http://www.mypysicslab.com/dbl_pendulum.html)

$$\textbf{Forces en y P}_2: m_2 \ddot{y}_2 = F_{T2} \cos \theta_2 - m_2 g$$

On constate qu'on peut remplacer une partie du membre droite de **Forces en x P<sub>1</sub>** par l'équation de **Forces en x P<sub>2</sub>** ; il suffit d'inverser le signe de cette dernière.

$$\textbf{Forces en x P}_1: m_1 \ddot{x}_1 = -F_{T1} \sin \theta_1 - m_2 \ddot{x}_2$$

De manière similaire, on remplace **Forces en y P<sub>2</sub>** dans le membre droite de **Forces en y P<sub>1</sub>** pour obtenir l'équation suivante :

$$\textbf{Forces en y P}_1: m_1 \ddot{y}_1 = F_{T1} \cos \theta_1 - m_2 \ddot{y}_2 - m_2 g - m_1 g$$

En réorganisant les équations de **P<sub>1</sub>** de sorte à isoler le rapport trigonométrique on obtient,

$$\textbf{x P}_1: F_{T1} \sin \theta_1 = -m_2 \ddot{x}_2 - m_1 \ddot{x}_1$$

$$\textbf{y P}_1: F_{T1} \cos \theta_1 = m_2 \ddot{y}_2 + m_1 \ddot{y}_1 + m_2 g + m_1 g$$

À ce stade de la résolution des forces exercées sur **P<sub>1</sub>**, on dispose de deux équations définies à partir de variables identiques, à l'exception du rapport trigonométrique du membre gauche. Puisque qu'on cherche à définir ce système de la manière la plus concise qu'il soit, l'idéal serait de combiner ces deux équations. Par conséquent, on multiplie chaque terme par l'identité trigonométrique manquante :

$$\textbf{x P}_1: (F_{T1} \sin \theta_1) \cos \theta_1 = (-m_1 \ddot{x}_1 - m_2 \ddot{x}_2) \cos \theta_1$$

$$\textbf{y P}_1: (F_{T1} \cos \theta_1) \sin \theta_1 = (m_2 \ddot{y}_2 + m_1 \ddot{y}_1 + m_2 g + m_1 g) \sin \theta_1$$

Puisque **x P<sub>1</sub>** :  $(F_{T1} \sin \theta_1) \cos \theta_1 = \textbf{y P}_1$  :  $(F_{T1} \cos \theta_1) \sin \theta_1$ ,

$$(-m_1 \ddot{x}_1 - m_2 \ddot{x}_2) \cos \theta_1 = (m_2 \ddot{y}_2 + m_1 \ddot{y}_1 + m_2 g + m_1 g) \sin \theta_1 \quad (1)$$

Cependant, étant donné que l'équation ci-dessus se rapporte seulement à **P<sub>1</sub>**, il reste à procéder de même pour le deuxième pendule. On n'a qu'à faire un retour en arrière et réorganiser les équations **Forces en x P<sub>2</sub>** et **Forces en y P<sub>2</sub>**. La procédure est la même : on isole les rapports trigonométriques respectifs qu'on complète ensuite de l'identité manquante de manière à obtenir une égalité.

$$\textbf{x P}_2: F_{T2} \sin \theta_2 = -m_2 \ddot{x}_2$$

$$\textbf{y P}_2: F_{T2} \cos \theta_2 = m_2 \ddot{y}_2 + m_2 g$$

$$\textbf{x P}_2: (F_{T2} \sin \theta_2) \cos \theta_2 = (-m_2 \ddot{x}_2) \cos \theta_2$$

$$\textbf{y P}_2: (F_{T2} \cos \theta_2) \sin \theta_2 = (m_2 \ddot{y}_2 + m_2 g) \sin \theta_2$$

Puisque **x P<sub>2</sub>** :  $(F_{T2} \sin \theta_2) \cos \theta_2 = \textbf{y P}_2$  :  $(F_{T2} \cos \theta_2) \sin \theta_2$ ,

$$(-m_2 \ddot{x}_2) \cos \theta_2 = (m_2 \ddot{y}_2 + m_2 g) \sin \theta_2 \quad (2)^5$$

On dispose à présent de deux équations modélisant les forces exercées sur chacun des pendules. Sachant que le principe fondamental de la dynamique stipule que le mouvement d'un objet est proportionnel à la force qu'on y exerce, on est en mesure de modéliser le comportement du pendule double en fonction du temps.

À partir des équations (1) et (2), on remplacerait les variables *x* et *y* par les équations de vitesse et d'accélération correspondantes (requiert un logiciel de calcul numérique tel *Mathematica*). Cette

<sup>5</sup> Équations. « MyPhysicsLab – Double Pendulum », [http://www.myphysicslab.com/dbl\\_pendulum.html](http://www.myphysicslab.com/dbl_pendulum.html)

approche fait appel à la méthode de Runge-Kutta, une analyse numérique approximative des solutions d'équations différentielles. Cependant, cette méthode, en plus d'être fastidieuse, engendre des habiletés se trouvant au-delà de la portée de cette exploration. De ce fait, on lui préfère une approche plus simple : le lagrangien.

### 3.3 DEUXIEME METHODE : LE LAGRANGIEN

Bien que la méthode introduite dans la section précédente représente au mieux les forces engendrant le mouvement du pendule double, on opte pour une approche s'intéressant plutôt à la différence d'énergie résultant de ce mouvement. En mécanique, le lagrangien, du mathématicien italien Joseph Louis Lagrange, consiste en la différence entre l'énergie cinétique et l'énergie potentielle d'un système :

$$L = T - V$$

**L**: le lagrangien      **T**: l'énergie cinétique ( $E_c$ )      **V**: l'énergie potentielle ( $E_p$ )

Ici, l'énergie cinétique se rapporte à l'énergie engendrée par le mouvement des pendules (à partir de leur vitesse), tandis que l'énergie potentielle se rapporte à la position du pendule dans l'espace (définie par le rapport entre la *hauteur* et la force gravitationnelle). En raison de sa simplicité, le lagrangien présente de manière concise une solution à ce système dynamique.

**L'énergie cinétique** du pendule double est définie à partir de la vitesse de chaque pendule ; étant donné que les pendules sont interdépendants, leur vitesse est différente. Mathématiquement, ceci s'exprime de la manière suivante :

$$E_c: T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

On remarque qu'on sépare l'équation générale en deux termes (**P<sub>1</sub>** et **P<sub>2</sub>**). Cependant, cette équation comprend la variable  $v$  qu'on n'a pas encore défini. Jusqu'à maintenant, la vitesse d'un pendule (dérivée de la position) est exprimée dans la direction de l'ordonnée et celle de l'abscisse. Par conséquent, on est forcé d'adapter l'équation à ce paramètre.

$$E_c: T = \frac{1}{2}m_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}m_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$$

À présent, étant donné que les variables  $x$  et  $y$  ont été définies en début de section, on est en mesure de les intégrer dans l'équation de l'énergie cinétique (les variables sont élevées au carré) :

$$\text{Vitesse } P_1: \dot{x}_1 = \dot{\theta}_1 R_1 \cos \theta_1 \text{ et } \dot{y}_1 = \dot{\theta}_1 R_1 \sin \theta_1$$

$$\text{Vitesse } P_2: \dot{x}_2 = \dot{\theta}_2 R_2 \cos \theta_2 + \dot{\theta}_1 R_1 \cos \theta_1 \text{ et } \dot{y}_2 = \dot{\theta}_2 R_2 \sin \theta_2 + \dot{\theta}_1 R_1 \sin \theta_1$$

$$E_c: T = \frac{1}{2}m_1(\dot{\theta}_1^2 R_1^2 \cos^2 \theta_1 + \dot{\theta}_1^2 R_1^2 \sin^2 \theta_1) + \frac{1}{2}m_2[(\dot{\theta}_1^2 R_1^2 \cos^2 \theta_1 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 R_1 R_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \dot{\theta}_2^2 R_2^2 \cos^2 \theta_2) + (\dot{\theta}_1^2 R_1^2 \sin^2 \theta_1 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 R_1 R_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 + \dot{\theta}_2^2 R_2^2 \sin^2 \theta_2)]$$

On constate qu'à l'intérieur de chaque parenthèses/crochets les termes peuvent être simplifiés à l'aide d'une mise en évidence (voir termes de couleur). De cette manière, on obtient :

$$E_c: T = \frac{1}{2}m_1[\dot{\theta}_1^2 R_1^2 (\cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1)] + \frac{1}{2}m_2[(\dot{\theta}_1^2 R_1^2 (\cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1) + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 R_1 R_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) + \dot{\theta}_2^2 R_2^2 (\cos^2 \theta_2 + \sin^2 \theta_2)]$$

Or,  $\cos^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_1 = 1$  et  $(\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) = \cos(\theta_1 - \theta_2)$ . Donc,

$$E_c: T = \frac{1}{2}m_1 \dot{\theta}_1^2 R_1^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{\theta}_1^2 R_1^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 R_1 R_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{\theta}_2^2 R_2^2)$$

Maintenant qu'on dispose d'une équation concise se rapportant au mouvement de chacun des pendules, il reste à analyser la position des pendules dans l'espace en fonction du temps.

**L'énergie potentielle** du pendule double est définie à partir de la position des pendules, grandeurs vectorielles déterminées en début de section. Il va de soi que la position varie d'un pendule à l'autre. Mathématiquement, l'équation d'énergie potentielle regroupe trois variables, soit la masse et la *hauteur* du pendule ainsi que la force gravitationnelle. La *hauteur* ( $h$ ) désigne la position par rapport à la verticale et ainsi, elle tient seulement compte des ordonnées de la position des pendules.

$$E_p: V = mgh = m_1gy_1 + m_2gy_2$$

De cette manière, il suffit d'insérer les équations de position correspondantes aux variables  $y_1$  et  $y_2$ .

$$\textbf{Position } P_1: y_1 = -R_1 \cos \theta_1$$

$$\textbf{Position } P_2: y_2 = -R_2 \cos \theta_2 - R_1 \cos \theta_1$$

$$E_p: V = m_1g(-R_1 \cos \theta_1) + m_2g(-R_2 \cos \theta_2 - R_1 \cos \theta_1)$$

$$E_p: V = -(m_1 + m_2)gR_1 \cos \theta_1 - m_2gR_2 \cos \theta_2$$

Puisque l'énergie cinétique et l'énergie potentielle sont à présent définies en fonction des variables correspondantes à  $P_1$  et  $P_2$ , on est en mesure d'évaluer le lagrangien du système.

$$L = T - V$$

$$L = \frac{1}{2}m_1\dot{\theta}_1^2R_1^2 + \frac{1}{2}m_2(\dot{\theta}_1^2R_1^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2R_1R_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{\theta}_2^2R_2^2) - [-(m_1 + m_2)gR_1 \cos \theta_1 - m_2gR_2 \cos \theta_2]$$

De nouveau, plusieurs termes peuvent être mis en évidence de sorte à rendre l'équation plus concise.

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\theta}_1^2R_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\theta}_2^2R_2^2 + m_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2R_1R_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2)gR_1 \cos \theta_1 + m_2gR_2 \cos \theta_2$$

Étant donné que cette équation dépend de plusieurs variables, la dernière étape de cette résolution (*manuelle*) consiste à réécrire cette dernière en fonction d'une variable seulement. Pour ce faire, on doit introduire une nouvelle notion du calcul différentiel, à savoir les dérivées partielles. Les dérivées partielles obéissent au même ensemble de règles que les dérivées standard, si ce n'est qu'elles dépendent d'un paramètre défini au préalable ; il s'agit simplement de la variable à partir de laquelle on décide de définir l'équation principale. En d'autres mots, la dérivée partielle d'une fonction est la dérivée par rapport à l'une de ses variables.

### 3.3.1 Les équations d'Euler-Lagrange

Dans cette situation, l'objectif premier est de modéliser le mouvement de  $P_1$  et  $P_2$ , différent notamment par leur angle (par rapport à la verticale). Afin de représenter les variations de ces deux angles en fonction du temps, on a recours à l'équation d'Euler-Lagrange qui s'écrit  $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial \dot{x}} \right)$ . En dynamique, ces dernières consistent à évaluer la variation d'une certaine variable au fil du temps. Dans le cas présent, la fonction n'est d'autre que le lagrangien du système  $L$ , alors que la variable à partir de laquelle on veut dériver est l'angle de  $P_1$  et  $P_2$ , soit  $\theta_1$  et  $\theta_2$  respectivement. Ainsi, on dispose de deux équations d'Euler-Lagrange qu'on transforme en :

$$P_1: \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \theta_1} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = 0$$

$$P_2: \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \theta_2} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = 0^6$$

<sup>6</sup> Équations. "The Lagrangian Method", Physics Harvard, <http://www.people.fas.harvard.edu/~djmorin/chap6.pdf>

Il suffit de définir chacun des termes de ces équations. En calculant la dérivée partielle d'une fonction, chaque terme ne comptant pas la variable indiquée ( $\theta_1$  ou  $\theta_2$ ) est considéré comme une constante et par conséquent, vaut 0 (*ci-dessous* : seulement les termes surlignés sont dérivés).

Soit la fonction  $L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\theta}_1^2 R_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\theta}_2^2 R_2^2 + m_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 R_1 R_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2)gR_1 \cos \theta_1 + m_2gR_2 \cos \theta_2$ ,

$$P_1: \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = (2)\frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\theta}_1 R_1^2 + m_2\dot{\theta}_2 R_1 R_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$P_1: \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = (m_1 + m_2)\ddot{\theta}_1 R_1^2 + m_2\ddot{\theta}_2 R_1 R_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

Afin d'obtenir le deuxième terme de l'équation d'Euler-Lagrange, on dérive l'équation ci-dessus,

$$P_1: \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = (m_1 + m_2)\ddot{\theta}_1 R_1^2 + m_2\ddot{\theta}_2 R_1 R_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2\dot{\theta}_2 R_1 R_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)$$

Finalement, on dérive le lagrangien en fonction de l'angle  $\theta_1$ ,

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\theta}_1^2 R_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\theta}_2^2 R_2^2 + m_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 R_1 R_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2)gR_1 \cos \theta_1 + m_2gR_2 \cos \theta_2$$

$$P_1: \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -m_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 R_1 R_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - (m_1 + m_2)gR_1 \sin \theta_1$$

On est en mesure de remplacer chaque terme dans l'équation de base pour obtenir l'équation d'Euler-Lagrange du premier pendule.

$$P_1: \frac{\partial L}{\partial \theta_1} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = -m_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 R_1 R_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - (m_1 + m_2)gR_1 \sin \theta_1 - (m_1 + m_2)\ddot{\theta}_1 R_1^2 + m_2\ddot{\theta}_2 R_1 R_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2\dot{\theta}_2 R_1 R_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) = 0$$

$$P_1: \frac{\partial L}{\partial \theta_1} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = -m_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 R_1 R_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_1gR_1 \sin \theta_1 - m_2gR_1 \sin \theta_1 - m_1\ddot{\theta}_1 R_1^2 - m_2\ddot{\theta}_1 R_1^2 + m_2\ddot{\theta}_2 R_1 R_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2\dot{\theta}_2 R_1 R_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + m_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 R_1 R_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2\dot{\theta}_2^2 R_1 R_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) = 0$$

En réorganisant les termes et en divisant le tout par  $R_1$  on obtient,

$$P_1: \frac{\partial L}{\partial \theta_1} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = (m_1 + m_2)\ddot{\theta}_1 R_1 + m_2\ddot{\theta}_2 R_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2\dot{\theta}_2^2 R_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2)g \sin \theta_1 = 0 \quad (3)$$

Maintenant, la même procédure est répétée pour le second pendule, soit le calcul des dérivées partielles en fonction de  $\theta_2$ .

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{\theta}_1^2 R_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{\theta}_2^2 R_2^2 + m_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 R_1 R_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2)gR_1 \cos \theta_1 + m_2gR_2 \cos \theta_2$$

$$P_2: \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = (2)\frac{1}{2}m_2\dot{\theta}_2 R_2^2 + m_2R_1 R_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

$$P_2: \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = m_2\ddot{\theta}_2 R_2^2 + m_2R_1 R_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

De nouveau, afin d'obtenir le deuxième terme de l'équation d'Euler-Lagrange, on dérive l'équation ci-dessus,

$$P_2: \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = m_2 \ddot{\theta}_2 R_2^2 + m_2 R_1 R_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 R_1 R_2 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)$$

Cette fois-ci, on dérive le lagrangien en fonction de l'angle  $\theta_2$ ,

$$L = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{\theta}_1^2 R_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\theta}_2^2 R_2^2 + m_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 R_1 R_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2) g R_1 \cos \theta_1 + m_2 g R_2 \cos \theta_2$$

$$P_2: \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = m_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 R_1 R_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - g m_2 R_2 \sin \theta_2$$

À ce stade, on peut remplacer chaque terme dans l'équation de base pour obtenir l'équation d'Euler-Lagrange du second pendule.

$$P_2: \frac{\partial L}{\partial \theta_2} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = m_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 R_1 R_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - g m_2 R_2 \sin \theta_2 - m_2 \ddot{\theta}_2 R_2^2 - m_2 R_1 R_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 R_1 R_2 \dot{\theta}_1 \sin(\theta_1 - \theta_2) (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) = 0$$

$$P_2: \frac{\partial L}{\partial \theta_2} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = -m_2 \ddot{\theta}_2 R_2^2 - m_2 R_1 R_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 R_1 R_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) - m_2 R_1 R_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) = 0$$

En réorganisant les termes et en divisant le tout par  $R_2$  cette fois-ci, on obtient :

$$P_2: \frac{\partial L}{\partial \theta_2} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = m_2 \ddot{\theta}_2 R_2 + m_2 R_1 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 R_1 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + g m_2 \sin \theta_2 = 0 \quad (4)^7$$

Les équations différentielles d'Euler-Lagrange (3) et (4) ne peuvent pas, cependant, être résolues manuellement ; elles nécessitent l'usage d'un logiciel de calculs numériques tel *Mathematica*.

### 3.4 MODELISATION GRAPHIQUE DU SYSTEME

Après avoir rentré ces équations dans le logiciel (le lagrangien et (3) (4) ), on ne peut toujours pas distinguer le comportement chaotique à partir de la résolution « théorique » de ces équations ; les variables en elles-mêmes ne démontrent rien de concret. Dans un contexte réel, une fois que la théorie fut définie, on la met en pratique en conduisant une expérience démontrant les propriétés recherchées. Pour cette exploration, on se contente d'évaluer les équations obtenues en assignant des valeurs initiales. En réalité, seulement une solution numérique du système permet de le modéliser graphiquement.

Par conséquent, il suffit d'assigner une valeur initiale aux variables suivantes :

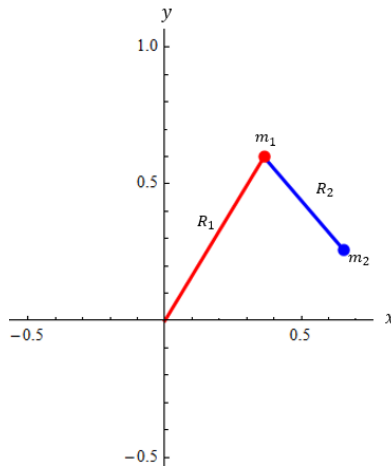


Figure 7 Modélisation graphique du pendule double

- $\theta_1$ : angle du premier pendule
- $\theta_2$ : angle du deuxième pendule
- $\omega_1$ : vitesse angulaire de  $P_1$
- $\omega_2$ : vitesse angulaire de  $P_2$
- $m_1$ : masse du premier pendule
- $m_2$ : masse du deuxième pendule
- $R_1$ : longueur du premier pendule
- $R_2$ : longueur du deuxième pendule
- $g$ : force gravitationnelle

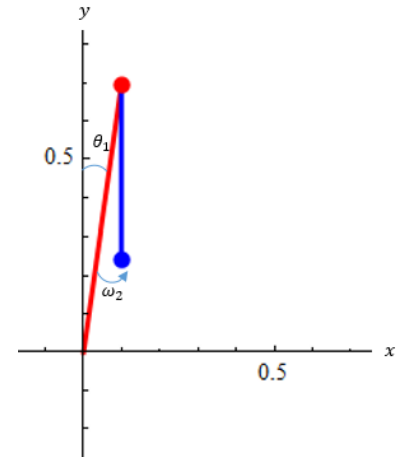


Figure 6 Modélisation graphique du pendule double

<sup>7</sup> Équations. "Double Pendulum", Eric Weinstein's World of Physics, <http://scienceworld.wolfram.com/>

**Remarque :** Dans ce contexte, les vitesses angulaires  $\omega_1$  et  $\omega_2$  correspondent à la force avec laquelle on envoie chaque pendule au départ, soit l'impulsion donnée aux pendules. S'écrivant  $\omega = \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ , il va de soi qu'elles évoluent également en fonction du temps. Par ailleurs, puisqu'on choisit d'avoir un premier pendule plus long que le second, il est évident que la masse du premier est supérieure à celle du second. De plus, la force gravitationnelle étant (plus ou moins) constante sur Terre, sa valeur ne change pas ; elle est fixée à  $9.81 \text{ ms}^{-1}$ .

Les figures ci-dessus montrent deux instants d'une simulation informatique du pendule double. En plus de représenter les différentes variables en présence, ces graphiques montrent la direction dans laquelle le pendule double est initialement propulsé (vers la droite).

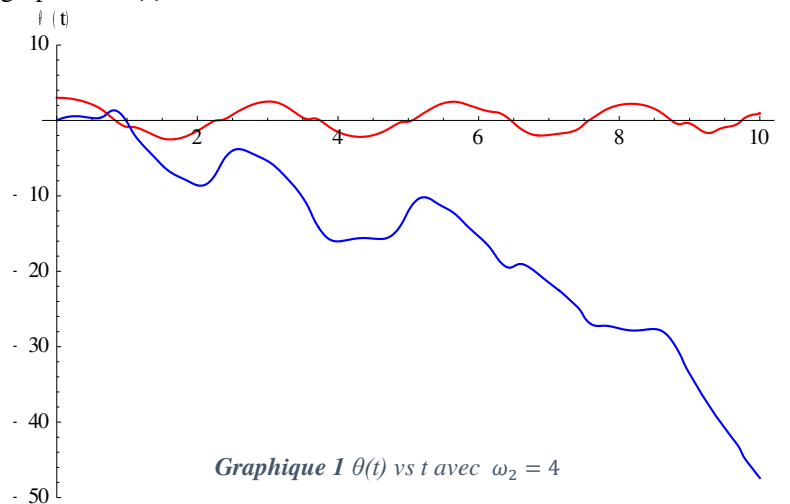
### 3.4.1 Premier scénario

La **Figure 7** et la **Figure 8** ci-dessus sont des aperçus du premier scénario utilisé pour démontrer le comportement chaotique de ce système dynamique. Pour ce faire, on assigne des valeurs initiales précises à chaque variable. Les voici :

	$\theta_1$	$\theta_2$	$\omega_1$	$\omega_2$	$m_1$	$m_2$	$R_1$	$R_2$
Valeurs	3	0	0	4.000	1.5	1	0.7	0.45
Unités	rad	rad	rads <sup>-1</sup>	rads <sup>-1</sup>	-	-	-	-

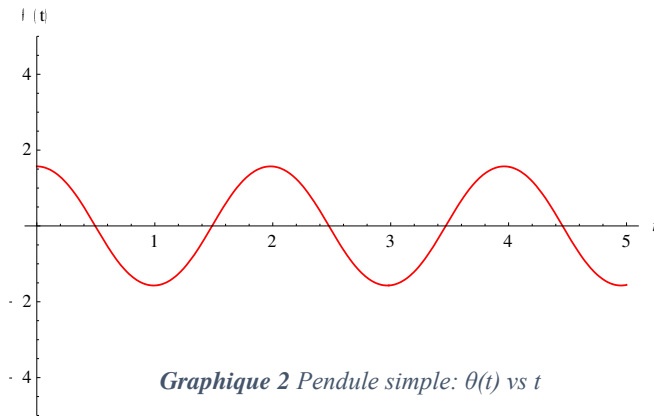
**Remarque :** Les valeurs des quatre variables de droite (sur fond bleu) importe peu. Toutefois, le comportement chaotique s'avère plus marqué lorsque que le second pendule est plus court que le premier. Bien qu'on omette les unités de ces variables, dans un contexte réel, les masses sont typiquement données en grammes ( $g$ ) et les longueurs des pendules en centimètres ( $cm$ ).

Ces variables sont insérées dans les équations différentielles d'Euler-Lagrange obtenues *supra* et simulées à l'aide du programme *Mathematica*. Suivant l'objectif de l'étude, on est en mesure de les représenter graphiquement. Ainsi, afin de mettre en évidence l'interdépendance des pendules, on peut dresser un graphe de  $\theta(t)$  vs  $t$ .



À l'aide de ce graphe, on cherche à démontrer que les deux pendules se comportent de manière très distincte. Alors que  **$P_1$  (en rouge)** adopte un comportement plus ou moins régulier (mouvement harmonique simple),  **$P_2$  (en bleu)** fait preuve d'un comportement irrégulier, voire aléatoire. Toutefois, à ce stade, on peut encore supposer que le mouvement du deuxième pendule, bien qu'étrange, est déterminable étant donné qu'on possède les équations différentielles régulant son mouvement. *Qu'a-t-il de si différent de son semblable, le pendule simple ?* Tous deux sont modélisés par des équations mathématiques ce qui impliquerait que leur comportement s'avère entièrement prévisible (d'après la science déterministe).





Graphique 2 Pendule simple:  $\theta(t)$  vs  $t$

Ce n'est pourtant pas le cas. Si on enlevait le second pendule du pendule double, on obtiendrait la modélisation à gauche. Il s'agit du comportement régulier, dit harmonique, du pendule simple. Étant donné qu'il n'est pas influencé par le second pendule,  $P_1$  adopte une tendance sinusoïdale. Par conséquent, on en tire que, même si  $P_1$  et  $P_2$  du pendule double sont interdépendants, le comportement de l'un influence le comportement de l'autre. Contrairement au pendule double, le pendule simple s'avère entièrement prévisible ; c'est-

à-dire que, connaissant le frottement s'opposant à son mouvement (l'air par exemple), on serait capable de calculer le moment exact où il s'arrêterait. Cependant, en raison de notre degré de précision limité, une prédiction exacte s'avère improbable.

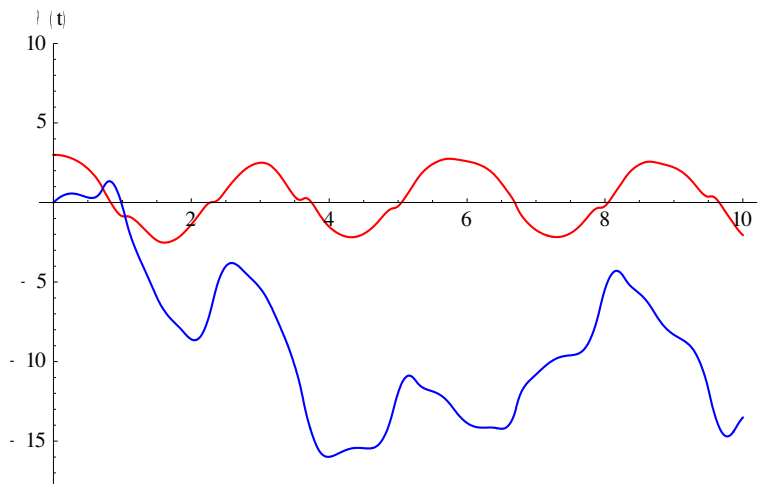
Toutefois, le problème principal se trouve au niveau des variables. Bien que, muni des équations correspondantes, on croît assumer le contrôle complet des variables, on sous-estime l'importance de l'état initial d'un système dynamique. C'est ici que la théorie du chaos intervient. À vrai dire, cette dernière remet en question l'aspect déterministe et donc, la prévisibilité des systèmes dynamiques. Pour démontrer cette affirmation, on évalue la dépendance aux conditions initiales du pendule double.

### 3.4.2 Deuxième scénario

Entreprendre une telle vérification nécessite des valeurs initiales légèrement différentes. Toutefois, la modification de toutes les variables (8), autant minime que chaque changement soit, engendrerait naturellement un résultat différent puisque les deux états initiaux diffèreraient en tous points. Par conséquent, la variation entre les deux phases initiales se doit d'être subtile, quasi insignifiante. On choisit donc de modifier un seul paramètre, soit la vitesse angulaire du second pendule  $\omega_2$ . Une telle modification est plausible, étant donné qu'en réalité, elle est due à la différence de force exercée par l'utilisateur lançant le pendule. De ce fait, les nouvelles variables sont les suivantes :

	$\theta_1$	$\theta_2$	$\omega_1$	$\omega_2$	$m_1$	$m_2$	$R_1$	$R_2$
Valeurs	3	0	0	4.0001	1.5	1	0.7	0.45
Unités	rad	rad	$\text{rads}^{-1}$	$\text{rads}^{-1}$	-	-	-	-

Comme à l'étape précédente, ces variables sont insérées dans les équations d'Euler-Lagrange qu'on peut ensuite représenter graphiquement. De nouveau, le graphe dresse  $\theta(t)$  vs  $t$

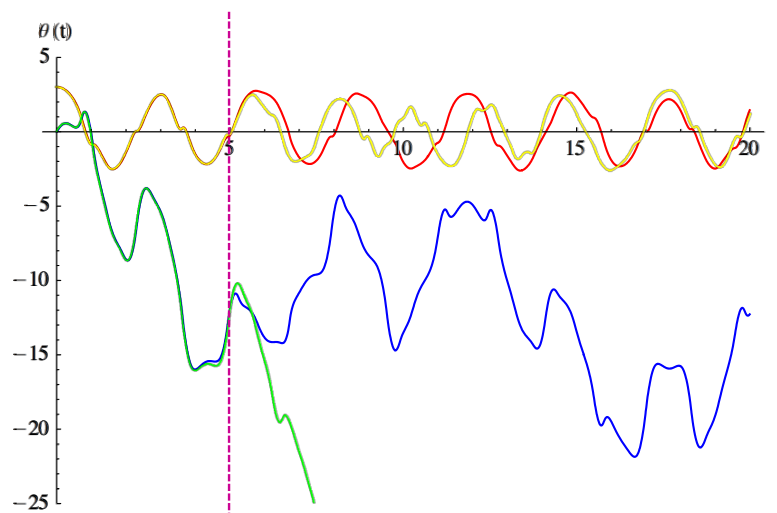


Graphique 3  $\theta(t)$  vs  $t$  avec  $\omega_2 = 4.0001$

Cette modélisation montre la variation de l'angle de chacun des pendules en fonction du temps  $P_1$  (en rouge) et  $P_2$  (en bleu). Bien que ce graphe ne prouve pas que le pendule double fasse preuve d'un comportement chaotique, il s'agit tout de même d'une façon appropriée de le visualiser. Dans l'introduction de cette exploration, on a mentionné entre autres que le chaos se définit par *une grande sensibilité aux conditions initiales*. La représentation ci-dessus semble concorder avec cette affirmation étant donné que la modification apportée à la variable  $\omega_2$  est de l'ordre de  $10^{-4}$ , soit l'ordre de grandeur de l'épaisseur d'une couche de peinture ou encore le diamètre moyen d'un cheveu humain<sup>8</sup>. Ces exemples empruntés à la vie courante montrent à quel point cette variation est infime. Et pourtant, des variations de cet ordre engendrent des représentations graphiques totalement différentes, donc des mouvements du pendule double dépourvus de similarités. Chaque jour, des variations de ce genre (à la base) influencent le temps, rendant les prévisions au-delà de quelques jours vraiment imprécises.

### 3.4.3 Comparaison des scénarios

De retour au pendule double, on cherche à démontrer que le système se comporte de manière différente d'un scénario à l'autre. Afin de mettre en évidence le changement au niveau des modélisations, on est en mesure de superposer le **Graphique 1** et le **Graphique 2**. Seulement, pour ce faire, les axes de chaque représentation graphique doivent être définis de la même manière. Par conséquent, une partie du second pendule de **Graphique 1** (vert) est coupée.



Graphique 4 Superposition des graphes  $\vartheta(t)$  vs  $t$

En analysant la superposition des graphiques ci-dessus, on constate que, jusqu'aux alentours des 5 secondes, le pendule double se comporte de manière identique dans les deux situations. Suivant ce constat, on comprend que la théorie du chaos se rapporte au comportement d'un système dynamique au long terme. En réalité, cette dernière stipule que le moindre changement dans les conditions initiales d'un système retire l'aspect prévisible de son comportement futur. Un changement crée au stade initial en engendre d'autres jusqu'à ce que les deux situations soient complètement dissemblables (*À petite cause, grands effets*). Par ailleurs, on constate que le mouvement du *pendule 1* varie peu d'une situation à l'autre, alors que le *pendule 2* se comporte de manière totalement différente, dépourvu de régularité. Toutefois, puisque la théorie du chaos s'intéresse au comportement du système à long terme, les graphiques ci-dessus ne sont pas appropriés ; ils ne montrent qu'un aperçu de la situation. De ce fait, il suffit de modifier le domaine de chaque fonction.

<sup>8</sup> Données. « *Ordre de grandeur (longueur)* », Wikipédia, [http://fr.wikipedia.org/wiki/Ordre\\_de\\_grandeur](http://fr.wikipedia.org/wiki/Ordre_de_grandeur)

### 3.4.4 Le pendule double à long terme

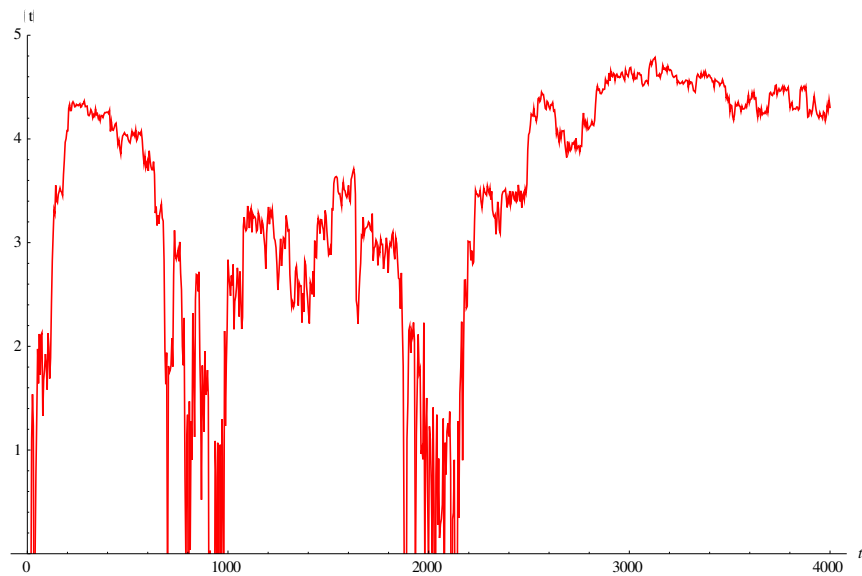
Afin de démontrer le comportement chaotique du pendule sur une longue période de temps, il faut tout d'abord définir la variable à partir de laquelle cette étude se base. Le comportement de chacun des pendules de ce système est déterminé entre autres par la vitesse angulaire initiale, en particulier dans ce cas par  $\omega_2$  (étant donné que la valeur de  $\omega_1$  est nulle). Ainsi, on pose :

**Scénario 1:**  $\omega_2 = 4.000$

**Scénario 2:**  $\omega_2 = 4.0001$

À ce stade, on cherche à modéliser les changements subis par l'angle de  $P_1$  et l'angle de  $P_2$  au fil du temps et en fonction de chacun des scénarios. Ces derniers sont identiques, si ce n'est que la vitesse angulaire du deuxième pendule fut modifiée de  $10^{-4} \text{ rads}^{-1}$ . Pour ce faire, on sépare la modélisation en deux sections, soit la variation de l'angle du premier pendule et la variation de l'angle du second pendule (les modélisations se réalisent à partir de *Mathematica*).

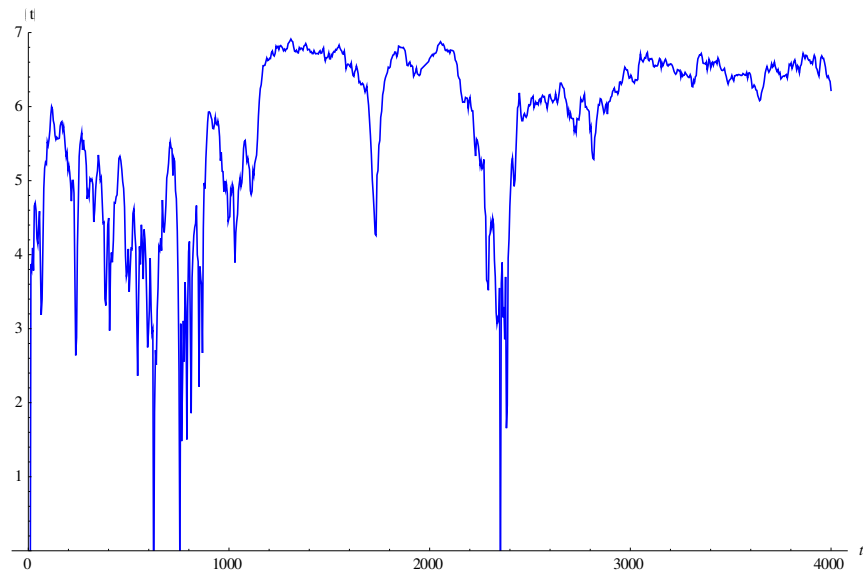
En premier lieu, on dresse  $\Delta\theta_1$  en fonction du temps ; c'est-à-dire qu'on évalue la différence entre  $\theta_1$  du premier scénario et  $\theta_1$  du deuxième scénario à un temps donné. Les vitesses angulaires ci-dessus sont remplacées dans les équations d'Euler-Lagrange afin de générer les données requises. Étant donné que la transformation logarithmique des variables met davantage en évidence l'aspect étudié, on obtient le graphique suivant :



Graphique 5 Différence de  $\theta_1$  d'un scénario à l'autre :  $\vartheta_1(t)$  vs  $t$

Tout d'abord, la tendance (générale) croissante de ce graphique montre que la différence d'angle augmente au fil du temps, soit le mouvement des pendules devient de plus en plus dissemblable. En fait, les abscisses à l'origine du graphe ci-dessus (lorsque  $\Delta\theta_1 = 0$ ) représentent les quelques fois où le comportement du pendule 1 lors du premier scénario fut identique au comportement du pendule 1 lors du deuxième scénario. Ce graphique démontre que pour une variation infime d'une des variables, le pendule 1 se comportera de manière complètement différente à long terme, même si à plusieurs reprises son comportement semble être identique (abscisses à l'origine).

Maintenant, il suffit d'appliquer la même démarche pour l'angle du second pendule. De nouveau, on dresse  $\Delta\theta_2$  en fonction du temps ; c'est-à-dire qu'on évalue la différence entre  $\theta_2$  du premier scénario et  $\theta_2$  du deuxième scénario à un temps donné. Les données sont générées encore une fois par les équations d'Euler-Lagrange, dans lesquelles on remplaça les valeurs de vitesse angulaire du deuxième pendule ( $\omega_2 = 4.000$  et  $\omega_2 = 4.0001$ ). La modélisation est similaire à la précédente :



**Graphique 6** Différence de  $\theta_2$  d'un scénario à l'autre :  $\theta_2(t)$  vs  $t$

De même, la tendance générale reflète la différence croissante entre le mouvement du deuxième pendule de chacun des scénarios. On constate que le graphique ci-dessus compte beaucoup moins d'abscisses à l'origine, démontrant les rares fois où les deuxièmes pendules se comportèrent de manière identique. Alors que le premier pendule fait preuve d'un minimum de régularité, on relève que le comportement du second est entièrement aléatoire et imprévisible. Ceci démontre le comportement dissemblable de l'objet à la moindre variation de l'état initial, dans ce cas  $10^{-4} \text{ rads}^{-1}$ . Par conséquent, ces quelques points confirment l'imprévisibilité propre au pendule double (et aux systèmes chaotiques) et la sensibilité apparente aux conditions initiales.

#### 4 CONCLUSION

Sur l'ensemble, l'objectif de cette exploration, soit l'étude d'un système chaotique, fut atteint. On s'intéressa plus précisément à la manière dont une modélisation d'un tel système laisserait transparaître un comportement chaotique. Bien que le mouvement d'un pendule double en réalité se montre aléatoire, on ne peut pourtant pas affirmer qu'il est avant tout chaotique. Pour ce faire, une modélisation mathématique ou des connaissances approfondies des équations le régulant sont requises. Ainsi, cette exploration servit à démontrer que le pendule double est bel et bien un système chaotique.

La première méthode abordée consistait à représenter les forces agissant sur chacun des pendules pour ensuite résoudre le système entier à l'aide d'une analyse numérique des équations différentielles traitées. Bien qu'en théorie cette résolution semble plus logique, les notions mathématiques qu'elles requièrent se situent au-delà des intentions de cette exploration. Par conséquent, on opta pour le lagrangien, une résolution alternative s'effectuant à partir de la différence d'énergie du système. À l'aide de cette méthode, on put regrouper l'ensemble des calculs différentiels régulant le pendule double en quelques équations. Cette étape permit ensuite de résoudre le système numériquement et de le représenter graphiquement. Pour ce faire, il fallut assigner des valeurs initiales aux différentes variables. Bien que la première partie de cette exploration s'avère très théorique, la seconde se fonde principalement sur la modélisation graphique et les preuves démontrant la présence du chaos.

L'analyse des représentations graphiques du pendule double révéla l'ampleur de cette théorie qui fascine tant de mathématiciens. Les graphes à l'appui durant cette exploration montrèrent les comportements dissemblables des pendules alors qu'on eut à peine modifié les conditions initiales. À vrai dire, alors que dans chaque scénario le *pendule 1* faisait preuve d'une tendance similaire au mouvement harmonique

simple, le *pendule 2* se comportait irrégulièrement, la prédiction rendue impossible. Ces conclusions furent tirées du graphe superposant deux situations et celui montrant la différence des angles d'une situation à l'autre. À partir de ces informations, on comprend à quel point les conditions initiales importent en présence d'un système dynamique chaotique. Du fait que le comportement futur du système dépende tant sur les valeurs initiales, on en déduit que toute prévisions s'avèrent irréalisables. À partir de ce constat, on est en mesure d'émettre des raisons expliquant la difficulté que l'on a de nos jours, à prédire le temps et autres phénomènes météorologiques. Dans cette situation, l'essor scientifique qu'on put observer dernièrement est tout simplement insuffisant étant donné qu'il ne nous permet pas de définir mathématiquement les lois du chaos.

Comme dans *Jurassic Park* de Crichton, l'origine du comportement inattendu du système remonte au stade initial et aux conditions qui ne furent pas respectées. Compte tenu du degré de précision limité dont on est pourvu, je pense qu'on peut dire, sans risquer de se tromper, que le chaos est inévitable. Peu importe le nombre de précautions prises pour respecter les conditions initiales d'un système, le désordre est inévitable. Il fut intéressant de montrer qu'il suffit d'une variation de l'ordre du diamètre d'un cheveu, grandeur infime, pour engendrer un comportement chaotique. Une affirmation de ce genre impliquerait que la théorie du chaos s'applique jusqu'aux confins de l'univers ; ses applications s'étendraient de la simple vibration de l'atome jusqu'au déplacement de la galaxie.

## 5 BIBLIOGRAPHIE

---

- GLEICK, James. *Chaos Making A New Science*, Viking, 1987, pp.352
- LORENZ, Edward. *The Essence Of Chaos*, University of Washington Press, 1993, pp.227
- STROGATZ, Steven H. *Nonlinear Dynamics And Chaos*, Perseus Books, 1994, pp.498
- GUÉRIN, J. *Fonction Logistique et Chaos*. [En Ligne] Adresse URL : [http://www.crt.umontreal.ca/~nikolaj/teaching/mth1101/partiel/ex\\_fonction\\_logistique](http://www.crt.umontreal.ca/~nikolaj/teaching/mth1101/partiel/ex_fonction_logistique)
- ETCHECOPAR, Philippe. *Étude des populations Exemple de chaos déterministe*. [En Ligne] Adresse URL : <http://www.aestq.org/sautquantique/>
- *The Chaos Hypertextbook*. [En Ligne] Adresse URL : <http://hypertextbook.com/chaos/>
- *Le Pendule Double*. [En Ligne] Adresse URL : <http://gilbert.gastebois.pagesperso-orange.fr/java/double/>
- *MyPhysicsLab-Double Pendulum*. [En Ligne] Adresse URL : [http://www.mypysicslab.com/dbl\\_pendulum.html](http://www.mypysicslab.com/dbl_pendulum.html)
- *The Double Pendulum and Chaos* (vidéo). [En Ligne] Adresse URL : <https://www.youtube.com/watch?v=u2c2VgIg6Bg>
- *Eric Weisstein's World of Physics: Double pendulum*. [En Ligne] Adresse URL : <http://scienceworld.wolfram.com/physics/DoublePendulum.html>
- *IB Math Ressources*. [En Ligne] Adresse URL : <http://ibmathsresources.com/tag/chaos-theory/>
- *The Chaotic Motion of a Double Pendulum*. [En Ligne] Adresse URL : <http://instructor.physics.lsa.umich.edu/adv-labs/Chaotic%20Double%20Pendulum/>

## 6 TECHNOLOGIE

---

- *Mathematica* : logiciel de calcul formel  
Le logiciel *Mathematica* permet la manipulation algébrique d'équations mathématiques rendues trop complexes pour être résolue à la main. De plus, ce programme est souvent utilisé pour simuler informatiquement des systèmes physiques et autres problèmes mathématiques. La totalité des graphes et diagrammes représentés dans cette exploration ainsi que la résolution numérique de certaines équations sont issus de ce logiciel.
- *Microsoft Word* : logiciel de traitement de texte  
Le logiciel de traitement de texte de la suite bureautique *Office* de Microsoft renferme de nombreux outils facilitant la rédaction d'un rapport mathématique. Ainsi, cette exploration mathématique fut entièrement rédigée à partir de ce programme.
- *Wolfram Alpha* : outil de calcul en ligne (Adresse URL : <http://www.wolframalpha.com/> )  
Basé sur les concepts du logiciel de calculs *Mathematica*, *Wolfram Alpha* est un site dit 'intelligent' proposant des fonctions similaires à l'aide d'une interface simplifiée. Plusieurs calculs ont été vérifiés à l'aide de ce programme.